



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Sociais Aplicadas  
Departamento de Economia

Pós-graduação em Economia (PIMES)

**Ensaio sobre heteroscedasticidade em  
modelos de efeitos fixos**

Carlos Frederico Azeredo Uchôa

Tese de Doutorado

Recife

21 de dezembro de 2012

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Sociais Aplicadas  
Departamento de Economia

Carlos Frederico Azeredo Uchôa

**Ensaio sobre heteroscedasticidade em modelos de efeitos  
fixos**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em  
Economia (PIMES) do Departamento de Economia da Uni-  
versidade Federal de Pernambuco como requisito parcial  
para obtenção do grau de Doutor em Economia.*

Orientador: *Tatiane Almeida de Menezes*  
Co-orientador: *Francisco Cribari-Neto*

Recife

21 de dezembro de 2012

Catálogo na Fonte Bibliotecária  
Ângela de Fátima Correia Simões, CRB4-773

U17e Uchôa, Carlos Frederico Azeredo  
Ensaio sobre heteroscedasticidade em modelos de efeitos fixos /  
Carlos Frederico Azeredo Uchôa. – Recife : O Autor, 2012.  
115 folhas : il. 30 cm.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dra. Tatiane Almeida de Menezes e Co-orientador Prof. Dr. Francisco Cribari-Neto.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCSA. Economia, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Dados em painel. 2. Efeitos fixos. 3. Heteroscedasticidade. 4. Testes de hipótese. 5. Intervalos de confiança. I. Menezes, Tatiane Almeida de(Orientador). II. Cribari-Neto, Francisco (Co-orientador). III. Título.

330.1 CDD (22.ed.)

UFPE (CSA 2012 – 149)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA  
PIMES / PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO E ECONOMIA

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DO DOUTORADO EM ECONOMIA DE

CARLOS FREDERICO AZEREDO UCHÔA

A comissão examinadora composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera o candidato Carlos Frederico Azeredo Uchôa **APROVADO**.

Recife, 21/12/2012.

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Tatiane Almeida de Menezes  
Orientadora

---

Prof. Dr. Raul da Mota Silveira Neto  
Examinador Interno

---

Prof. Dr. Francisco Cribari Neto  
Examinador Interno

---

Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos  
Examinador Externo/UFPE-Dept<sup>o</sup> de Estatística

---

Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro  
Examinador Externo/UFPE-Dept<sup>o</sup> de Estatística

*para Sofia*

# Resumo

Esta tese é composta de quatro ensaios que estendem e avaliam o desempenho de uma classe de estimadores consistentes da matriz de covariâncias nos modelos de efeitos fixos. No primeiro ensaio as simulações evidenciam que o estimador proposto por Arellano (1987) pode não ser a melhor opção quando o teste é conduzido com resíduos irrestritos. Os resultados mostram que há uma considerável vantagem em utilizar o estimador CHC4 quando o tamanho amostral é pequeno ou se existem pontos de alavanca nos dados. Por outro lado, quando a avaliação é conduzida com resíduos restritos, os resultados favorecem o estimador CHCR0. Estimadores de bootstrap também são avaliados e produzem, em alguns casos, resultados melhores que os estimadores consistentes. O segundo ensaio avalia o desempenho dos estimadores consistentes da matriz de covariâncias, na construção de intervalos de confiança. Os resultados mostram que o estimador CHC4 tem desempenho superior aos demais estimadores consistentes, principalmente se os dados contêm pontos de alavanca. O terceiro ensaio avalia numericamente a qualidade da aproximação usual para a distribuição exata dos testes quase- $t$ . Os resultados mostram que, se a estatística de teste é construída com resíduos irrestritos, o estimador mais amplamente utilizado conduz a testes quase- $t$  com aproximações bastante ruins sendo o CHC4 a estratégia de inferência preferencial. Por outro lado, se a estatística de teste é construída com resíduos restritos, o estimador de Arellano torna-se a opção mais adequada. O quarto e último ensaio mostra que a inferência sobre os parâmetros do modelo de Diferenças em Diferenças (DD) pode ser imprecisa quando os problemas de heteroscedasticidade e/ou autocorrelação serial nos erros são ignorados. O desempenho dos testes baseados no estimador de Arellano e de outros estimadores consistentes nos modelos de DD é avaliado na presença de ambos. Os resultados mostram que, num modelo que contém apenas a dummy de intervenção, o desempenho dos testes baseados nos nesses estimadores é similar. No entanto, é possível melhorar a qualidade da inferência se o modelo de regressão possui variáveis de controle adicionais com pontos alavancados.

**Palavras-chave:** Dados em Painel, Efeitos Fixos, Heteroscedasticidade, Testes de hipótese, Intervalos de Confiança, Integração numérica, Diferenças em Diferenças.

# Abstract

This thesis is composed of four essays that extend and evaluate the performance of a class of consistent covariance matrix estimators in panel data models with fixed effects. On the first essay the simulations show that the estimator proposed by Arellano (1987) may not be the best option when the test is conducted with unrestricted residuals. Results show that there is a considerable advantage in the use of the CHC4 estimator when the sample size is small or if there are leverage points in the data. On the other hand, when the evaluation is conducted with restricted residuals, the results favor the CHCRO estimator. Estimators obtained by bootstrap are also evaluated and, produce, in some cases, better results than the consistent estimators. The second essay evaluates the performance of these estimators, in the construction of confidence intervals. The results show that the CHC4 estimator has better performance than the other consistent estimators, especially if the data contain leverage points. The third essay evaluates numerically the quality of the usual approximation to the test. The results show that, if the statistic is constructed with unrestricted residuals, the most common used estimator leads to a test with very bad approximation being CHC4 the preferred inference strategy. If the test is conducted with restricted residuals, the Arellano estimator becomes the most adequate option. The last essay shows that the inference in the differences in differences model can be imprecise when the heteroskedasticity and/or serial correlation on the errors are ignored. The performance of the tests based on the Arellano estimator and on other consistent estimators on the differences in differences model is evaluated in the presence of both. The results show that, if the model contains only the dummy, the performance of the tests based on these estimators is similar. However, it is possible to improve the quality of inference if the model has additional control variables with leveraged points.

**Keywords:** Panel Data, Fixed Effects, Heteroscedasticity, Hypothesis Tests, Confidence Intervals, Numerical integration, Differences in Differences.

# Lista de Tabelas

1.5.1	Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados. . . . .	24
1.5.2	Viés relativo total dos estimadores na presença de pontos de alavanca. . . . .	25
1.5.3	REQM total ( $\times \sqrt{5000}$ ) dos estimadores na presença de pontos de alavanca. . . . .	26
1.5.4	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ na presença de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ . . . . .	28
1.5.5	Viés relativo total dos estimadores na ausência de pontos de alavanca. . . . .	30
1.5.6	REQM total ( $\times \sqrt{5000}$ ) na ausência de pontos de alavanca. . . . .	31
1.5.7	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ na ausência de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ . . . . .	32
1.5.8	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ com resíduos restritos, $\alpha = 5\%$ . . . . .	34
1.6.1	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ em painéis desbalanceados na presença de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ . . . . .	37
1.6.2	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ em painéis desbalanceados na ausência de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ . . . . .	38
2.6.1	Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados. . . . .	52
2.6.2	Intervalos de confiança para $\beta_1$ na ausência de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude. . . . .	54
2.6.3	Intervalos de confiança para $\beta_1$ na ausência de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude. . . . .	55
2.6.4	Intervalos de confiança para $\beta_1$ na presença de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude. . . . .	56
2.6.5	Intervalos de confiança para $\beta_1$ na presença de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude. . . . .	57
2.7.1	Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados. . . . .	58
2.7.2	Regiões de confiança para $\beta_2$ e $\beta_3$ na ausência de pontos de alavanca nos dados. . . . .	60
2.7.3	Regiões de confiança para $\beta_2$ e $\beta_3$ na presença de pontos de alavanca nos dados. . . . .	61

3.5.1	Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados. . . . .	76
3.5.2	$\Pr(\tau^2 \leq \zeta \mid \mathcal{H}_0)$ para $n = 20$ e $T = 5$ ; $\zeta$ igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição $\chi_1^2$ . . . . .	77
3.5.3	$\Pr(\tau^2 \leq \zeta \mid \mathcal{H}_0)$ para $n = 60$ e $T = 5$ ; igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição $\chi_1^2$ . . . . .	79
3.5.4	$\Pr(\tau^2 \leq \zeta \mid \mathcal{H}_0)$ para $n = 20$ e $T = 5$ ; $\zeta$ igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição $\chi_1^2$ . . . . .	84
3.5.5	$\Pr(\tau^2 \leq \zeta \mid \mathcal{H}_0)$ para $n = 60$ e $T = 5$ ; igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição $\chi_1^2$ . . . . .	85
4.3.1	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ na presença de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ e $n = 10$ . . . . .	105
4.3.2	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ na presença de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ e $n = 50$ . . . . .	106
4.3.3	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ na ausência de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ e $n = 10$ . . . . .	107
4.3.4	Taxas de rejeição dos testes quase- $t$ na ausência de pontos de alavanca; $\alpha = 5\%$ e $n = 50$ . . . . .	108
4.4.1	Impacto estimado da aprovação de lei “ <i>shall-issue</i> ” no crime de assalto, dados estaduais de 1991 a 1999. . . . .	111

## Lista de Figuras

3.5.1	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 20$ , $T = 5$ , $\lambda = 98,91$ e $x_{it} \sim \mathcal{U}(0,1)$ . . . . .	87
3.5.2	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 20$ , $T = 5$ , $\lambda = 98,51$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	88
3.5.3	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 20$ , $T = 5$ , $\lambda = 1$ e $x_{it} \sim \mathcal{U}(0,1)$ . . . . .	89
3.5.4	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 20$ , $\tau = 5$ , $\lambda = 1$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	90
3.5.5	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 20$ , $T = 5$ , $\lambda = 1,00$ e $x_{it} \sim \mathcal{U}(0,1)$ . . . . .	91
3.5.6	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 60$ , $T = 5$ , $\lambda = 1,00$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	92
3.5.7	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 20$ , $T = 5$ , $\lambda = 98,91$ e $x_{it} \sim \mathcal{U}(0,1)$ . . . . .	93
3.5.8	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos irrestritos; $n = 60$ , $T = 5$ , $\lambda = 98,91$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	94
3.5.9	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos restritos; $n = 20$ , $T = 5$ , $\lambda = 1,00$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	95
3.5.10	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos restritos; $n = 20$ , $T = 5$ , $\lambda = 98,51$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	96
3.5.11	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos restritos; $n = 60$ , $T = 5$ , $\lambda = 1,00$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	97
3.5.12	Distribuições exatas e assintótica de $\tau^2$ sob $\mathcal{H}_0$ com resíduos restritos; $n = 60$ , $T = 5$ , $\lambda = 98,51$ e $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ . . . . .	98

# Sumário

<b>1 Inferência sob heterocedasticidade de forma desconhecida em modelos de efeitos fixos . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1 Introdução . . . . .	12
1.2 Modelo e estimadores . . . . .	13
1.3 Estimador bootstrap do erro-padrão . . . . .	19
1.4 Testes bootstrap . . . . .	21
1.5 Resultados numéricos . . . . .	22
1.6 Resultados numéricos em painéis desbalanceados . . . . .	35
1.7 Considerações finais . . . . .	36
<b>2 Estimadores intervalares consistentes em modelos de Efeitos Fixos heteroscedásticos . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1 Introdução . . . . .	39
2.2 Revisão da literatura . . . . .	40
2.3 Modelo e estimadores pontuais . . . . .	42
2.4 Estimadores intervalares consistentes sob heteroscedasticidade . . . . .	46
2.5 Intervalos por bootstrap . . . . .	48
2.6 Avaliação numérica . . . . .	50
2.7 Regiões de confiança . . . . .	55
2.8 Considerações finais . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Avaliação de testes em modelos de efeitos fixos heteroscedásticos . . . . .</b>	<b>63</b>
3.1	Introdução . . . . .	63
3.2	Modelo e estimadores . . . . .	64
3.3	Testes exatos em Modelos de Efeitos Fixos . . . . .	69
3.4	O algoritmo de Imhof . . . . .	72
3.5	Resultados numéricos . . . . .	74
3.6	Considerações finais . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Inferência em modelos de diferenças em diferenças sob autocorrelação e heteroscedasticidade . . . . .</b>	<b>99</b>
4.1	Introdução . . . . .	99
4.2	Modelos e estimadores consistentes da matriz de covariâncias . . . . .	100
4.3	Resultados numéricos . . . . .	104
4.4	Exemplo empírico: armas e crimes . . . . .	108
4.5	Considerações finais . . . . .	110
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>112</b>

# Inferência sob heterocedasticidade de forma desconhecida em modelos de efeitos fixos

## 1.1 Introdução

A Econometria de Dados em Painel (DP) constitui um campo aberto à pesquisa, sendo uma das áreas com maior desenvolvimento teórico da atualidade. Outrossim, o uso de DP tem se disseminado cada vez mais por outras ciências, onde são frequentemente denominados de dados longitudinais. A disponibilidade cada vez maior de bases de dados desse tipo deu origem a uma série de abordagens metodológicas que visam extrair o máximo de informação disponível. Na econometria o interesse das pesquisas reside, sobretudo, na especificação de testes de hipóteses.

Em aplicações práticas, uma questão com a qual os pesquisadores têm que lidar frequentemente é a existência do Efeito Fixo (EF), que decorre da heterogeneidade individual (estruturas econômicas diferentes entre países, regiões, empresas ou comportamentos, etc). Quando esses efeitos individuais estão correlacionados com as variáveis explicativas do modelo, o estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) torna-se inconsistente. Isto porque, pode haver fatores que determinam a variável dependente, mas não estão sendo considerados, por não serem diretamente observáveis ou mensuráveis. O estimador de efeitos fixos (EEF), que permanece consistente e viável, é a alternativa comumente empregada.

Não é incomum que o modelo de regressão de EF apresente algum padrão de heteroscedasticidade, ou seja, variância não constante dos erros. Nos modelos de DP a heteroscedasticidade pode ocorrer dentro dos grupos, entre os grupos ou nas duas situações simultaneamente. Ademais, nos modelos de EF, a heteroscedasticidade decorre naturalmente das diferenças individuais (WOOLDRIDGE, 2002).

Sob heteroscedasticidade o EEF dos parâmetros da regressão permanece não enviesado, consistente e assintoticamente normal, mesmo se este problema não é levado em consideração. O estimador da matriz de covariâncias das estimativas dos parâmetros da regressão, no entanto, passa a ser enviesado e inconsistente. Como o estimador não converge em probabilidade para o parâmetro verdadeiro, à medida que o número de observações aumenta, não é possível realizar testes de hipótese válidos. Em especial se os dados possuem pontos de alavanca esse problema torna-se ainda mais grave. Isso porque a existência desses pontos faz com que as variâncias dos valores ajustados dos pontos alavancados sejam maiores do que as variâncias dos valores ajustados correspondentes aos demais pontos (LONG; ERVIN, 1998).

Quando suspeita-se de que os dados podem ser heteroscedásticos, a prática usual é empregar o EEF para obter as estimativas pontuais dos parâmetros da regressão juntamente com um estimador consistente da matriz de covariâncias. A generalização do estimador HC0 (*heteroskedasticity consistent estimator*) de White (1980), estendida para modelos de EF por Arellano (1987), é a opção mais utilizada neste contexto. Este estimador é bastante popular, pois sua consistência é mantida mesmo diante de pressupostos fracos. Ademais, este estimador é válido não só na presença de heteroscedasticidade, mas também de autocorrelação serial dos resíduos, possibilitando ao pesquisador realizar testes de hipótese válidos, sem a necessidade especificar um modelo exato para o comportamento dos resíduos (BALTAGI, 2005).

Para modelos de regressão com dados em corte transversal, a literatura oferece um leque de alternativas derivadas do HC0, que podem melhorar a qualidade da inferência resultante. A ideia fundamental por trás desses métodos é reduzir a distância entre o erro tipo I esperado e aquele obtido nos testes de hipótese. A grande disponibilidade desses estimadores para modelos de regressão com dados em corte transversal e a ausência de resultados sobre sua utilização em modelos de efeitos fixos (EF) são a motivação deste capítulo.

O objetivo será o de estender e avaliar o desempenho dos estimadores HC0, HC2, HC3, HC4 para os modelos de EF sob heteroscedasticidade de forma desconhecida. A construção de estatísticas de teste através dos métodos de bootstrap também será discutida. Para tanto, na Seção seguinte será discutida uma extensão dos estimadores HC2, HC3 e HC4 nos modelos de EF. Nas Seções 3 e 4, serão apresentadas duas formas de obtenção dos erros-padrão e de valores críticos por bootstrap. A Seção 5 apresenta os resultados obtidos em pequenas amostras, através das simulações de Monte Carlo (MC), para o viés, a raiz quadrada, o erro quadrático médio e do desempenho dos testes  $t$  e quase- $t$  (assim denominados quando o teste é construído empregando-se os erros-padrão obtidos com os estimadores consistentes) associados, construídos com os estimadores considerados. Por fim, a última Seção faz algumas considerações finais.

## 1.2 Modelo e estimadores

O modelo de interesse é o linear de EF da forma

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}\beta + u_{it}, \quad (1.2.1)$$

em que  $y_{it}$  é a variável dependente,  $x_{it}$  um vetor de variáveis explicativas de ordem  $1 \times p$ ,  $\beta$  um vetor de ordem  $p \times 1$  de parâmetros a serem estimados e  $u_{it}$  o termo de erro que é independente e identicamente distribuído (i.i.d.) variando tanto em  $i$  quanto em  $t$ , denominado de erro idiossincrático ou distúrbio idiossincrático Wooldridge (2002). Cada  $i = 1, \dots, n$  é um indivíduo e  $t = 1, \dots, T$  a observação de uma característica desse indivíduo no tempo. Assim, cada indivíduo é um *cluster* formado por um conjunto de  $T$  observações no tempo. Por conseguinte, o número de observações disponíveis é de  $n \times T = nT$ .

O termo  $\alpha_i$  capta o efeito não observável causado pela heterogeneidade individual. Desta forma, modelo supõe a existência de características que variam entre os indivíduos, mas que são constantes ao longo do tempo. Os parâmetros de resposta ( $\beta$ ), no entanto, são únicos para todos os indivíduos e em todos os períodos de tempo.

Em notação vetorial, (1.2.1) pode ser representado como

$$y_i = \alpha_i + X_i\beta + u_i, \quad (1.2.2)$$

em que  $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{iT})'$ ,  $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{iT})'$  e  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{iT})'$  são vetores de dimensão  $T \times 1$ .

Se  $\alpha_i$  está correlacionado com qualquer das variáveis explicativas do modelo, então o estimador de MQO aplicado a (1.2.1) resultará em estimativas de  $\beta$ , não só enviesadas, mas também inconsistentes. A maneira usual de contornar este problema é empregar o EEF, que tem sido amplamente usado nas análises feitas com DP para tratar a questão da heterogeneidade não observada (HSIAO, 2003).

O problema na estimação de (1.2.1) é a presença do efeito individual ( $\alpha_i$ ) que cresce à medida que  $n \rightarrow \infty$ . Para contornar esta dificuldade, o EEF realiza uma transformação em (1.2.2) que retire o termo indesejado  $\alpha_i$ , sobre o qual não há maior interesse. Isso pode ser feito subtraindo de cada *cluster* de indivíduos sua média temporal, de maneira a obter o modelo transformado

$$\tilde{y}_i = \tilde{X}_i\tilde{\beta} + \tilde{u}_i, \quad (1.2.3)$$

sendo  $\tilde{y}_{it} = y_{it} - T^{-1} \sum_{t=1}^T y_{it}$  e  $\tilde{X}_{it} = X_{it} - T^{-1} \sum_{t=1}^T X_{it}$ . Dessa forma,  $\alpha_i$  é eliminado do modelo pois  $\tilde{\alpha}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T \alpha_i = \alpha_i$ .

É também conveniente escrever o modelo (1.2.3) em um nível maior de agregação. Empilhando novamente as observações, tal que  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)'$ ,  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)'$  e  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)'$ , a expressão para o estimador de  $\hat{\beta}$  torna-se

$$\hat{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \tilde{X}'\tilde{y}.$$

Ambas as representações são equivalentes, diferenciadas apenas pelo nível de agregação. O emprego de cada uma dessas representações depende do contexto em análise e visa facilitar a manipulação algébrica.

As seguintes suposições são usualmente feitas sobre o modelo de regressão de EF:

**S1**  $(X_i, u_i)$  são i.i.d. em  $i$ ;

**S2**  $\mathbb{E}(u_{it} | X_i) = 0$ ;

**S3**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{X}_i \right) = \tilde{Q}$ , em que  $\tilde{Q}$  é uma matriz positiva definida;

$$\mathbf{S3}' \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\tilde{X}_i' \tilde{u}_i \tilde{u}_i' \tilde{X}_i) = W;$$

$$\mathbf{S4} \mathbb{E}(u_i u_i' | X_i) = \sigma^2 I_T, \text{ em que } I_T \text{ é a matriz identidade de ordem } T \times T;$$

$$\mathbf{S4}' \mathbb{E}(u_i u_i' | X_i) = \Omega_i;$$

Sob as suposições **S1** e **S2** o EEF é não enviesado e consistente, ou seja,  $\text{plim}(\hat{\beta}) \rightarrow \beta$ . **S1** impõe a independência entre os indivíduos, descartando correlação espacial, mas permite a existência de autocorrelação temporal e de heterogeneidade individual. **S2** garante a exogeneidade estrita de  $X_i$  e **S3** afirma que não há multicolinearidade perfeita entre as variáveis explicativas. A suposição **S4** assegura a homocedasticidade dos erros. Por outro lado, se **S4'** é válida então os erros não possuem variância constante. Se **S3** e **S4** são válidas, então o EEF é o melhor estimador linear não-viesado de  $\beta$  (MELNV) (HAYASHI, 2000).

A estimativa de  $\beta$  é obtida aplicando-se o estimador de MQO à equação (1.2.3). Isto significa minimizar a soma dos quadrados dos erros

$$\tilde{u}_i' \tilde{u}_i = (\tilde{y}_i - \tilde{X}_i \tilde{\beta})' (\tilde{y}_i - \tilde{X}_i \tilde{\beta}),$$

cujas solução é dada por

$$\hat{\beta} = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{y}_i.$$

Para testar alguma hipótese sobre  $\hat{\beta}$  é necessário obter uma estimativa de sua variância assintótica. A distribuição assintótica de  $\hat{\beta}$  é dada por

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \tilde{Q}^{-1} W \tilde{Q}^{-1}),$$

em que  $\tilde{Q}$  é definida em **S3** e  $W$  em **S3'**, tal que,  $\hat{\beta}$  será uma estimativa consistente de  $\beta$  se  $W$  existir.

Se a hipótese mais restritiva **S4** é verificada, então o estimador da matriz de covariâncias de  $\hat{\beta}$  é dado por

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1}, \quad (1.2.4)$$

em que  $\hat{\sigma}^2 = [n(T-1) - p]^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i' \hat{u}_i$  é a variância residual.

No entanto, se **S4** é substituída por **S4'**, (1.2.4) não é mais um estimador válido, resultando em erros-padrão inconsistentes e, por conseguinte, numa falsa avaliação sobre a significância das estimativas obtidas. Neste caso, é necessário empregar um estimador consistente da matriz de covariâncias (denominado HCCME, do acrônimo em inglês *Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator*).

Como solução, pode-se pensar, a princípio, em usar o estimador consistente proposto por White (1980), denominado de HC0. No entanto, esta opção não é viável, pois embora este estimador seja consistente em regressões com dados em corte transversal, torna-se inconsistente em regressões de EF, à medida que  $n$  aumenta ( $n \rightarrow \infty$ ) e  $T$  é mantido fixo (e maior que 2) (ARELLANO, 2003).

Um estimador consistente da variância de  $\hat{\beta}$ , válido na presença de heterocedasticidade de forma desconhecida, foi proposto por Arellano (1987) como uma generalização do HC0 para modelos de DP. Tal estimador é dado por

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \hat{\Omega}_i^{(0)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}, \quad (1.2.5)$$

em que

$$\hat{\Omega}_i^{(0)} = \tilde{u}_i \tilde{u}'_i = \begin{bmatrix} \hat{u}_{i1}^2 & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{i1} & \hat{u}_{i2}^2 & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{iT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \hat{u}_{iT-1}^2 & \hat{u}_{iT-1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i1} & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{iT-1} & \hat{u}_{iT}^2 \end{bmatrix},$$

$\hat{\Omega}^{(0)} = \text{diag} \left\{ \hat{\Omega}_1^{(0)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(0)} \right\}$  e  $\hat{u}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{iT})'$  é o vetor de resíduos de EF obtido de

$$\hat{u} = \tilde{y} - \tilde{X}\hat{\beta} = (I - \tilde{H})\tilde{y}.$$

A matriz  $\tilde{H} = \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'$ , cujos elementos da diagonal principal tomam valores no intervalo padrão  $(0, 1)$ , é conhecida por “matriz chapéu” e  $I$  é uma matriz identidade de ordem  $nT \times nT$ . Denotando-se esses elementos por  $\tilde{h}_{it}$ , pode ser mostrado que sua média é dada por  $p/(nT)$ . Uma regra prática é considerar que valores de  $\tilde{h}_{it}$  superiores a duas ou três vezes a média (isto é,  $2p/(nT)$  e  $3p/(nT)$ ), são influentes e, portanto, merecedores de análise mais detalhada.

O estimador definido em (1.2.5) é conhecido na literatura como estimador *Cluster-Robusto* da Matriz de Covariâncias (CRMC). Não há qualquer restrição sobre a forma da heteroscedasticidade, no entanto, assume-se a independência dos erros entre os indivíduos. Deve-se notar porém que as propriedades assintóticas deste e dos demais estimadores apresentados a seguir são válidas para  $n \rightarrow \infty$  com  $T$  mantido fixo. Para garantir a consistência nos casos em que  $T \rightarrow \infty$  com  $n$  fixo ou mesmo com  $n, T \rightarrow \infty$  outras considerações devem ser feitas (a propósito, ver Hansen (2007)).

Como observou Kezdi (2005), (1.2.5) converge para a variância verdadeira quando o número de *clusters* tende para infinito ( $n \rightarrow \infty$ ), e não o número de observações ( $nT$ ). Segundo o autor, um número de 50 *clusters* (com tamanhos constantes) é, em geral, suficiente para garantir a qualidade da inferência. No entanto, com um pequeno número de *clusters*, a inferência baseada nesse estimador pode ser bastante imprecisa. Se  $n$  é pequeno, o estimador tende a

produzir estimativas de erros padrão que são substancialmente enviesadas para baixo, ou seja, há um problema de sobre-rejeição da hipótese nula.

As limitações do estimador HC0 em pequenas amostras são bem conhecidas nos dados em corte transversal. Vários autores demonstraram que o estimador HC0 tende a ser demasiadamente otimista em amostras de tamanho pequeno a moderado, tendendo a subestimar a variância dos erros  $e$ , por conseguinte, apresentando alto viés. Como resultado, os testes quase- $t$  associados tendem a ser liberais isto é, os tamanhos efetivos desses testes tendem a ser maiores que o nível nominal especificado.

A esse respeito, Long e Ervin (2000), por meio de simulações de MC, concluíram que o estimador HC0 não é recomendável em amostras de tamanho inferior a 250. Por outro lado, MacKinnon e White (1985) evidenciaram que, em pequenas amostras, esse estimador pode apresentar viés bastante elevado. Cribari-Neto e Zarkos (1999) mostraram que na presença de observações de alta alavancagem esse viés torna-se mais severo.

Com o objetivo de corrigir essas distorções e melhorar o desempenho dos testes associados, variantes do estimador HC0 foram propostas por diversos autores. É possível então, estender estas modificações ao CRMC, como maneira de corrigir o problema de sobre-rejeição do teste baseado neste estimador, análogo ao do HC0. Stock e Watson (2008), por exemplo, propuseram uma versão do estimador HC0 com correção de viés, que é consistente nos modelos de EF. Sob certas circunstâncias, seu estimador mostrou melhores resultados que o CRMC tradicional.

Uma correção para a tendência do HC0 de subestimar a variância em amostras finitas é dada pelo estimador HC2, proposto por Horn et al. (1975). Seu intento é amenizar a subestimação dos erros dividindo os quadrados resíduos pelo fator  $1 - \tilde{h}$ . Nos modelos de EF, este estimador pode ser empregado substituindo-se  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$  por

$$\hat{\Omega}_i^{(2)} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\hat{u}_{i1}^2}{1 - \tilde{h}_{i1}} \right) & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{i1} & \left( \frac{\hat{u}_{i2}^2}{1 - \tilde{h}_{i2}} \right) & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{iT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \left( \frac{\hat{u}_{iT-1}^2}{1 - \tilde{h}_{iT-1}} \right) & \hat{u}_{iT-1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i1} & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{iT-1} & \left( \frac{\hat{u}_{iT}^2}{1 - \tilde{h}_{iT}} \right) \end{bmatrix},$$

sendo  $\hat{\Omega}^{(2)} = \text{diag} \left\{ \hat{\Omega}_1^{(2)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(2)} \right\}$  e  $\tilde{h}_{it}$  é o  $it$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $\tilde{H}$ .

O estimador HC3, proposto por Davidson e MacKinnon (1993), fornece uma aproximação para o estimador *jackknife*. A ideia é incorporar um ajuste baseado nas medidas de alavancagem da estimativa da matriz de covariâncias. Este estimador pode ser empregado no contexto em análise substituindo-se  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$  por

$$\hat{\Omega}_i^{(3)} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\hat{u}_{i1}^2}{(1-\tilde{h}_{i1})^2} \right) & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{i1} & \left( \frac{\hat{u}_{i2}^2}{(1-\tilde{h}_{i2})^2} \right) & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{iT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \left( \frac{\hat{u}_{iT-1}^2}{(1-\tilde{h}_{iT-1})^2} \right) & \hat{u}_{iT-1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i1} & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{iT-1} & \left( \frac{\hat{u}_{iT}^2}{(1-\tilde{h}_{iT})^2} \right) \end{bmatrix},$$

sendo  $\hat{\Omega}^{(3)} = \text{diag} \left\{ \hat{\Omega}_1^{(3)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(3)} \right\}$ .

O quarto estimador a ser avaliado, denominado de HC4, foi originalmente proposto por Cribari-Neto (2004) e tem o intuito de acentuar a intensidade do ajuste feito no estimador HC3 elevando o termo  $(1 - \tilde{h}_{it})$  à potência  $\delta_{it}$ . Como argumentam Cribari-Neto e Zarkos (1999), se a matriz de regressores possui pontos de alta alavancagem, a existência destes pontos tem maior influência sobre o desempenho dos testes associados do que o grau de heterocedasticidade em si. Então, o HC4 procura inflacionar os resíduos cujas observações correspondentes apresentarem maior grau de alavancagem, de maneira a compensar o problema de subestimação dos resíduos.

O estimador HC4 pode ser estendido para o contexto em análise substituindo-se  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$  por

$$\hat{\Omega}_i^{(4)} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\hat{u}_{i1}^2}{(1-\tilde{h}_{i1})^{\delta_{i1}}} \right) & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{i1} & \left( \frac{\hat{u}_{i2}^2}{(1-\tilde{h}_{i2})^{\delta_{i2}}} \right) & \cdots & \cdots & \hat{u}_{i2}\hat{u}'_{iT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \left( \frac{\hat{u}_{iT-1}^2}{(1-\tilde{h}_{iT-1})^{\delta_{iT-1}}} \right) & \hat{u}_{iT-1}\hat{u}'_{iT} \\ \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i1} & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{i2} & \cdots & \hat{u}_{iT}\hat{u}'_{iT-1} & \left( \frac{\hat{u}_{iT}^2}{(1-\tilde{h}_{iT})^{\delta_{iT}}} \right) \end{bmatrix},$$

em que  $\delta_i = \left( \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{i1}}{\tilde{h}_{i1}} \right\}, \dots, \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{iT}}{\tilde{h}_{iT}} \right\} \right)$ ,  $\hat{\Omega}^{(4)} = \text{diag} \left\{ \hat{\Omega}_1^{(4)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(4)} \right\}$  e  $\tilde{h}_{it}$  é a média de  $\tilde{h}_{iT}$ .

Para fins de notação, e para manter alguma conformidade com a nomenclatura empregada habitualmente, ao longo do texto o CRMC será denominado de CHC0 (da sigla em inglês *Clustered Heteroscedasticity-Consistent*). As designações dos demais estimadores, seguem a

mesma direção, a saber: CHC2, CHC3 e CHC4. Esses estimadores podem ser descritos dentro de esquema comum

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta})^{(s)} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i' \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{x}_i \right) (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1},$$

no qual o sobrescrito entre parênteses  $s = 0, 2, 3$  ou  $4$  indica qual dos estimadores está sendo considerado. Assim, quando  $s = 0$  está sendo empregado o termo  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$  e, portanto, o estimador CHC0. Os demais estimadores são obtidos da mesma maneira, ou seja, CHC2 quando  $s = 2$  e  $\hat{\Omega}_i^{(2)}$ , CHC3 quando  $s = 3$  e  $\hat{\Omega}_i^{(3)}$  e CHC4 quando  $s = 4$  e  $\hat{\Omega}_i^{(4)}$ .

### 1.3 Estimador bootstrap do erro-padrão

Outra maneira de lidar com problema da heteroscedasticidade consiste em empregar o conjunto de técnicas conhecidas por bootstrap. Desenvolvido por Efron (1979), o bootstrap consiste em gerar, a partir da amostra original, uma série de pseudo-amostras e em cada pseudo amostra calcular a estatística de interesse. Em seguida, emprega-se a distribuição das pseudo amostras para inferir sobre a distribuição da amostra original.

Essa alternativa, computacionalmente mais intensiva, fornece medidas estatísticas de precisão baseadas em simulações numéricas que, em geral, fornecem uma aproximação para a estatística de interesse que é assintoticamente equivalente aos estimadores consistentes. Uma vantagem deste método é tornar desnecessário fazer suposições sobre a distribuições de interesse.

O processo de reamostragem pode ser conduzido de várias maneiras. Cada uma delas mostra-se mais adequada a determinadas situações. Neste ensaio, dois métodos de bootstrap serão avaliados comparativamente aos estimadores CHC's. O primeiro é conhecido por bootstrap selvagem (*wild bootstrap*) e o segundo como bootstrap por pares (*pairs bootstrap*). Ambos possuem boas propriedades, mas Cameron et al. (2008) mostraram que embora o bootstrap por pares apresente bom comportamento, o bootstrap selvagem tem desempenho superior.

Se a dimensão temporal é mantida constante e as propriedades assintóticas são avaliadas quando  $n \rightarrow \infty$  e  $T$  é fixo então, uma estimativa consistente dos erros padrão de  $\hat{\beta}$  pode ser obtida por bootstrap, desde que a reamostragem seja feita apenas em  $i$ . Dito de outra forma o número de indivíduos aumenta, mas o número observações no tempo sobre cada indivíduo é mantida constante.

No bootstrap por pares as pseudo-amostras são obtidas reamostrando os pares de observações  $(\tilde{y}_i, \tilde{X}_i)$ . O procedimento pode ser sumarizado nos seguintes passos:

- (a) obter uma amostra aleatória  $\{(\tilde{y}_1^*, \tilde{X}_1^*), \dots, (\tilde{y}_n^*, \tilde{X}_n^*)\}$  de  $(\tilde{y}_i, \tilde{X}_i)$  com reposição;

- (b) obter a estimativa de bootstrap:  $\hat{\beta}^* = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^{*'} \tilde{X}_i^* \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^{*'} \tilde{y}_i^*$ ;
- (c) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes; e
- (d) calcular a variância dos  $B$  vetores de estimativas obtidas nos passos (a) a (c).

A estimativa da variância de  $\hat{\beta}$  usada na construção da estatística de teste corresponde à variância das  $B$  estimativas  $\hat{\beta}^*$ .

Uma outra abordagem utiliza a reamostragem do vetor de resíduos em lugar dos pares de observações. Uma característica desejável deste procedimento é que a reamostragem pode ser feita por meio de resíduos restritos, ou seja, impondo-se a hipótese nula do teste. Como argumenta MacKinnon (2006), ao construir estatísticas de teste por meio de bootstrap, a hipótese nula deve ser imposta, dentre outras razões porque se isto não ocorre o Processo Gerador de Dados (PGD) do esquema de bootstrap não satisfaz  $\mathcal{H}_0$ . Davidson e MacKinnon (1999) argumentam ainda que se deve impor  $\mathcal{H}_0$  pois assim as estatísticas de teste serão centradas em torno de  $\tilde{\beta}$  e não de  $\hat{\beta}$ .

A simples reamostragem aleatória de  $\hat{u}_i$ , no entanto, não é adequada se os erros não são i.i.d.. Uma alternativa válida em modelos de regressão com erros heteroscedásticos, denominada de bootstrap selvagem, foi proposta por Wu (1986). Neste caso o PGD do bootstrap é definido como

$$\tilde{y}_i^* = \tilde{X}_i \hat{\beta} + f(\hat{u}_i) w_i^*,$$

em que  $w_i^*$  é uma variável com média 0 e variância 1 e  $f(\hat{u}_i)$  uma transformação dos resíduos. A transformação mais óbvia de  $\hat{u}_i$  é tomar  $f(\hat{u}_i) = \hat{u}_i$ , que será a utilizada neste ensaio. Outras transformações são possíveis, por exemplo,  $f(\hat{u}_i) = \frac{\hat{u}_i}{\sqrt{1-\hat{h}_i}}$ , mas não se mostram adequadas quando empregam-se resíduos restritos.

Uma característica importante na escolha de  $w_i^*$  é que a estrutura de correlação dentro de cada *cluster* deve ser preservada. Uma escolha adequada é usar a distribuição de *Rademacher*. Neste caso,  $w_i^* = 1$  é escolhido com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e  $w_i^* = -1$  com probabilidade  $\frac{1}{2}$ . Aqui, o processo de construção das pseudo-amostras consiste em selecionar  $\hat{u}_i^{*R} = \hat{u}_i^R$  com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e  $\hat{u}_i^{*R} = -\hat{u}_i^R$  também com probabilidade  $\frac{1}{2}$  (ver a propósito Davidson e Flachaire (2001)). Esta escolha garante as propriedades desejáveis do critério de reamostragem.

O algoritmo de bootstrap selvagem pode ser resumido nos passos abaixo:

- (a) reamostrar aleatoriamente  $\hat{u}_i^R$  com reposição e apenas em  $i$ , em que  $\hat{u}_i^R = (\hat{u}_{i1}^R, \dots, \hat{u}_{iT}^R)'$  é o vetor de resíduos restritos obtidos da regressão de  $\tilde{y}_i$  em  $\tilde{X}_i$  impondo-se  $\mathcal{H}_0$ ;
- (b) formar a amostra de bootstrap:  $\tilde{y}_i^* = \tilde{X}_i \hat{\beta}^R + \hat{u}_i^{*R}$ , em que  $\hat{\beta}^R$  é o vetor de estimativas restritas e  $\hat{u}_i^{*R}$  o vetor de resíduos restritos;

(c) obter a estimativa de bootstrap:  $\hat{\beta}^* = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{y}_i^*$ ;

(c) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes; e

(d) calcular a variância dos  $B$  vetores das estimativas obtidas usando os passos (a) a (c).

A variância das  $B$  estimativas de bootstrap corresponde à estimativa da variância de  $\hat{\beta}$ .

## 1.4 Testes bootstrap

Os métodos de bootstrap podem ser usados também para estimar a distribuição nula da estatística do teste quase- $t$  (bootstrap- $t$ ). Uma característica desejável desse método é que a quantidade avaliada no processo de bootstrap é assintoticamente pivotal, ou seja, possui distribuição limite livre de parâmetros desconhecidos (FLACHAIRE, 2002).

O procedimento consiste em calcular a estatística do teste em cada réplica do esquema de bootstrap e então, utilizar a distribuição das pseudo amostras para estimar a distribuição nula da estatística de teste. Ambos os esquemas de bootstrap, selvagem e por pares, podem ser usados no bootstrap- $t$ . No caso do bootstrap por pares, o passo (a) permanece inalterado. O passo (b) é modificado para:

(b) obter a estimativa de bootstrap,  $\hat{\beta}^* = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_{i^*} \tilde{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_{i^*} \tilde{y}_i^*$  e calcular a estatística quase- $t$ ,

$$\tau^* = \frac{\hat{\beta}_j^* - \hat{\beta}_j}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_j^*)}};$$

(c) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes;

(d) calcular o quantil de interesse da distribuição empírica das  $B + 1$  realizações de  $\tau^*$  (a realização inicial mais as  $B$  realizações de bootstrap), obtidas nos passos (a) até (c);

A hipótese nula é testada utilizando como valor crítico o quantil de interesse da distribuição de  $\tau^*$ .

No esquema de bootstrap selvagem passo (c) é modificado para:

(c) obter a estimativa bootstrap,  $\hat{\beta}^* = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{y}_i^*$  e calcular a estatística quase- $t$ ,  $\tau^* =$

$$\frac{\hat{\beta}_j^* - \hat{\beta}_j}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_j^*)}};$$

- (d) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes; e
- (e) calcular o quantil de interesse da distribuição empírica das realizações de  $\tau^*$  (a realização inicial e as  $B$  realizações de bootstrap), obtidas usando os passos (a) até (d);

Novamente, a hipótese nula é testada utilizando-se como valor crítico o quantil de interesse da distribuição de  $\tau^*$ .

Como não são utilizados os valores críticos assintóticos da distribuição normal padrão, mas sim valores críticos estimados no esquema de bootstrap, a regra de decisão pode ser mais convenientemente expressa em termos do valor  $p$  do teste. O valor  $p$  aproximado via esquema de bootstrap, para um teste bicaudal, é dado por

$$p = \frac{1 + \#\{|\tau_b^*| > |\tau|\}}{B + 1},$$

em que  $\tau_1^*, \dots, \tau_B^*$  são as  $B$  réplicas de bootstrap de  $\tau^*$ . A hipótese nula é então rejeitada sempre que o valor  $p$  for inferior à probabilidade de erro do tipo I selecionada.

## 1.5 Resultados numéricos

Os resultados apresentados nesta Seção foram obtidos com o modelo

$$y_{it} = \beta_1 x_{1,it} + \beta_2 x_{2,it} + u_{it}, \quad (1.5.1)$$

em que

1.  $x_{it} = \alpha_i + z_{it}$ ; e
2.  $u_{it} = \alpha_i + \sigma_{it}\varepsilon_{it}$ .

O termo  $\alpha_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  introduz o efeito fixo no modelo, de maneira que o estimador de MQO é inconsistente se aplicado a (1.5.1). Os valores de  $\varepsilon_{it}$  foram obtidos de uma distribuição  $\mathcal{N}(0, 1)$  enquanto os valores de  $z_{it}$  foram gerados de duas maneiras distintas. No primeiro caso, os valores de  $z_{it}$  foram gerados da distribuição  $\mathcal{LN}(0, 1)$ . Como resultado, os dados contêm pontos de alta alavancagem (conjunto de dados com pontos de alavanca). No segundo, os valores foram gerados da distribuição  $\mathcal{U}(0, 1)$ , de forma que não há pontos de alavanca nos dados (conjunto de dados sem pontos de alavanca).

Pontos de alavanca em DP podem ocorrer em bloco ou aleatoriamente. As simulações, quando conduzidas na presença de pontos de alavanca, consideraram sua ocorrência aleatoriamente. Outras simulações foram feitas com pontos de alavanca em bloco, o que não altera as conclusões aqui apresentadas. Uma discussão mais abrangente sobre pontos de alavanca nos modelos de EF é feita em Bramati e Croux (2007).

O termo  $\sigma_{it}$  determina o comportamento heteroscedástico no modelo, tendo sido especificado como

$$\sigma_{it} = \sqrt{\exp[\gamma(\tilde{x}_{1,it} + \tilde{x}_{2,it}^2)]}.$$

O critério  $\lambda = (\max \sigma_{it}^2) / (\min \sigma_{it}^2)$  é empregado para medir o grau de heteroscedasticidade. Então, quando  $\sigma_{it} = 1$  os erros são homoscedásticos e para valores de  $\sigma_{it} > 1$  os erros são heteroscedásticos, sendo tanto mais forte a heteroscedasticidade, quanto maior for o valor de  $\lambda$ .

Os tamanhos considerados de  $n$  foram 25, 50, 100 e 200 enquanto a dimensão temporal foi mantida fixa em  $T = 5$ . Inicialmente foi gerada uma amostra de tamanho  $n = 25$ , tal que  $nT = 125$ . Os demais tamanhos amostrais,  $n = 50, 100$  e  $200$ , foram obtidos replicando-se os valores do conjunto de dados inicial ( $nT = 125$ ) e foram mantidos constantes ao longo das simulações. Deste modo, para  $n = 50$  replicou-se as variáveis duas vezes, para  $n = 100$  quatro vezes e para  $n = 200$  oito vezes. Este procedimento tem por objetivo garantir que o grau de heteroscedasticidade não se altere à medida que o número de observações aumenta. Os parâmetros do modelo de regressão foram definidos como  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 0$ .

Os resultados apresentados seguir foram obtidos com 50.000 réplicas de MC e 999 réplicas de bootstrap. As simulações foram realizadas em um computador pessoal, na linguagem de programação Ox, rodando sob o sistema operacional Linux. A linguagem Ox é muito flexível e foi desenvolvida a partir da linguagem de programação C, com a qual é bastante similar tendo, como um de seus grandes atrativos, a eficiência do programa gerado (a respeito ver Cribari-Neto (1997) e Doornik (2001)). Para assegurar a qualidade do experimento, o método *multiply-with-carry* proposto por Marsaglia (1995) foi empregado na geração das sequências de números pseudo-aleatórias. Este gerador, que possui período aproximadamente igual a  $2^{60}$ , passa em testes de aleatoriedade bastante restritos, tais como a bateria de testes *Diehard*, sem acusar qualquer padrão determinístico.

A Tabela 1.5.1 mostra o grau máximo de alavancagem em cada um dos dois desenhos de regressão. Os limites máximos de  $2p/(nT)$  e  $3p/(nT)$ , usados na detecção destes pontos também são apresentados. Na matriz  $x_{it}$ , das 125 observações geradas, 6 possuem valor de  $\tilde{h}_{it}$  que ultrapassa o limite de tolerância de  $3p/(nT)$ . O mais severo destes (0,253) é mais de cinco vezes superior ao limite de 0,048. Por outro lado, percebe-se que quando  $x_{it} \sim \mathcal{U}(0, 1)$  não há pontos influentes.

As Tabelas 1.5.2, 1.5.3 e 1.5.4 a seguir apresentam os vieses relativos totais, as raízes quadradas dos erros quadráticos médios e as taxas de rejeição dos testes associados para os estimadores CHC's e de bootstrap no conjunto de dados com pontos de alta alavancagem. O viés relativo total é definido como a soma dos vieses relativos individuais que são, por sua vez, o valor absoluto da diferença entre média das estimativas e o valor verdadeiro do parâmetro, dividido pelo verdadeiro valor do parâmetro. A análise do viés tem por objetivo comparar a qualidade dos estimadores entre si, dado que quanto maior o enviesamento, mais o estimador produzirá estimativas que não correspondem ao verdadeiro valor do parâmetro.

Os resultados apresentados na Tabela 1.5.2 mostram, logo de início, que o EEF é não enviesado sob homocedasticidade, mas fortemente enviesado caso contrário. De fato, com uma

**Tabela 1.5.1** Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados.

$n$	$T$	$\tilde{h}_{max}$		limites	
		$\mathcal{LN}(0, 1)$	$\mathcal{U}(0, 1)$	$2p/nT$	$3p/nT$
25	5	0,253	0,047	0,032	0,048
50	5	0,126	0,023	0,016	0,024
100	5	0,063	0,011	0,008	0,012
200	5	0,032	0,005	0,004	0,006

amostra pequena ( $n = 25$ ) à medida que o valor de  $\lambda$  cresce, o viés deste estimador torna-se cada vez mais severo. Por exemplo, com dados homocedásticos ( $\lambda = 1$ ), o viés é muito pequeno (0,2%), mas aumenta gradativamente até atingir 87% sob forte heteroscedasticidade ( $\lambda = 98,37$ ). Quando o pressuposto de homocedasticidade se faz ausente, mesmo que o grau de heteroscedasticidade seja baixo ( $\lambda = 4,62$ ), os estimadores consistentes tornam-se uma opção menos enviesada. O estimador CHC3, apresenta os menores vieses quando  $\lambda > 1$ . Por exemplo, com  $n = 25$  e  $\lambda = 98,37$  os vieses dos HCCME's são de 38,6% no CHC0; 21,6% no CHC2; 7,6% no CHC3 e 46,2% no CHC4.

O estimador de bootstrap selvagem, identificado com a sigla BSC, é mais enviesado que o bootstrap por pares (identificado com a sigla BPC) com o menor tamanho amostral e quando há pouca ou nenhuma heterocedasticidade ( $\lambda = 1$  e 4,62). Quando a heterocedasticidade aumenta  $\lambda = 21,31$  e  $\lambda = 98,37$  esta relação se inverte. Por exemplo, com  $\lambda = 1$  os vieses desses dois estimadores são de 6,4% (BPC) e 16,1% (BSC). Com  $\lambda = 21,31$ , esses valores passam a ser, respectivamente, 17,9% e 16,4%.

Nota-se ainda, que dentre os CHC's, o CHC0, CHC2 e CHC4 têm vieses maiores que o BPC, que só é superado pelo CHC3. Os vieses dos estimadores CHC0, CHC2 e CHC3 mostram pouca redução a partir de  $n = 50$ . O CHC4 apresenta os maiores vieses. O viés do EEF, por sua vez, permanece em torno de 90% quando  $\lambda = 98,37$ , qualquer que seja o tamanho amostral. Por outro lado, os CHC's mostram uma redução do viés à medida que o número de *clusters* aumenta, reflexo de sua consistência.

A Tabela 1.5.3 contém as Raízes Quadradas do Erro Quadrático Médio total (REQM). Essas medidas avaliam tanto o viés quanto a variabilidade dos estimadores, uma vez que são definidas como a soma de seu viés ao quadrado com sua variância. Baseado nesta relação é possível afirmar que se um estimador é não enviesado, então o erro quadrático médio se iguala à sua variância. Como consequência, minimizar a variância deste estimador equivale a minimizar o erro quadrático médio. Nota-se, a princípio, que o EEF é o que apresenta o menor REQM quando não há heteroscedasticidade. Com  $\lambda = 1$ , seu REQM é de 0,081 contra 0,443 do CHC0. Os outros estimadores consistentes tem REQM's de 0,265 (CHC2); 0,304 (CHC3) e 0,436 (CHC4).

**Tabela 1.5.2** Viés relativo total dos estimadores na presença de pontos de alavanca.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	BPC	BSC
25	5	0,00	1,00	0,002	0,255	0,128	0,023	0,357	0,064	0,161
		0,04	4,62	0,494	0,312	0,171	0,035	0,380	0,124	0,157
		0,08	21,31	0,806	0,368	0,213	0,061	0,404	0,179	0,164
		0,12	98,37	0,870	0,386	0,216	0,076	0,462	0,257	0,151
50	5	0,00	1,00	0,001	0,126	0,059	0,014	0,147	0,016	0,081
		0,04	4,62	0,488	0,154	0,078	0,021	0,162	0,052	0,075
		0,08	21,31	0,787	0,175	0,091	0,024	0,184	0,118	0,083
		0,12	98,37	0,896	0,190	0,099	0,035	0,202	0,142	0,067
100	5	0,00	1,00	0,000	0,060	0,026	0,010	0,070	0,009	0,036
		0,04	4,62	0,484	0,077	0,038	0,008	0,075	0,042	0,044
		0,08	21,31	0,779	0,087	0,043	0,014	0,087	0,078	0,055
		0,12	98,37	0,907	0,102	0,055	0,018	0,088	0,074	0,027
200	5	0,00	1,00	0,001	0,031	0,014	0,004	0,032	0,010	0,022
		0,04	4,62	0,483	0,037	0,018	0,007	0,038	0,028	0,026
		0,08	21,31	0,776	0,048	0,026	0,007	0,037	0,037	0,024
		0,12	98,37	0,915	0,048	0,024	0,008	0,046	0,040	0,014

O estimador CHC4 apresenta o pior desempenho em termos de REQM. Contudo, à medida que o número de *clusters* aumenta essa diferença se reduz consideravelmente. Os estimadores de bootstrap têm valores bastante similares ao do CHC0, sendo que o bootstrap por pares tem as menores REQM's quando  $n = 25$  e  $\lambda = 1$  e 4,62. Por outro lado, o estimador BSC supera o BPC quando o grau de heterocedasticidade é alto ( $\lambda = 21,31$  e 98,37). Com  $n = 200$ , as REQM's dos estimadores são praticamente indênticas.

A Tabela 1.5.4 contém as estimativas das taxas de rejeição, expressas em percentagens, dos testes  $t$  (erros-padrão obtidos de forma usual) e quase- $t$  (erros-padrão obtidos com os estimadores consistentes) que empregam os diferentes estimadores da variância de  $\beta_2$ , ao nível nominal de  $\alpha = 5\%$ . A hipótese testada é a exclusão de  $\beta_2$ , de forma que o teste pode ser formulado

**Tabela 1.5.3** REQM total ( $\times \sqrt{5000}$ ) dos estimadores na presença de alavanca.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	BPC	BSC
25	5	0,00	1,00	0,081	0,243	0,265	0,304	0,436	0,251	0,253
		0,04	4,62	0,258	0,410	0,444	0,502	0,697	0,404	0,431
		0,08	21,31	0,947	0,963	1,036	1,151	1,518	0,958	1,099
		0,12	98,37	3,509	3,089	3,329	3,667	4,648	2,943	3,457
50	5	0,00	1,00	0,028	0,093	0,097	0,104	0,122	0,091	0,094
		0,04	4,62	0,119	0,156	0,163	0,173	0,201	0,153	0,160
		0,08	21,31	0,456	0,372	0,388	0,409	0,464	0,360	0,387
		0,12	98,37	1,701	1,186	1,232	1,292	1,444	1,163	1,261
100	5	0,00	1,00	0,010	0,034	0,035	0,036	0,039	0,034	0,035
		0,04	4,62	0,057	0,057	0,058	0,060	0,064	0,057	0,059
		0,08	21,31	0,222	0,136	0,139	0,143	0,152	0,134	0,139
		0,12	98,37	0,831	0,431	0,440	0,450	0,474	0,431	0,450
200	5	0,00	1,00	0,004	0,012	0,012	0,013	0,013	0,012	0,013
		0,04	4,62	0,027	0,021	0,021	0,021	0,022	0,021	0,021
		0,08	21,31	0,109	0,049	0,049	0,050	0,051	0,049	0,050
		0,12	98,37	0,409	0,156	0,157	0,159	0,163	0,159	0,162

como  $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$  contra  $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$ . A estatística de teste avaliada é dada por

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)}},$$

em que  $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)$  denota a variância estimada de  $\hat{\beta}_2$ , empregando-se um dos CHC's definidos na Seção 1.2. Sob a hipótese nula,  $\tau$  tem distribuição assintótica  $\mathcal{N}(0, 1)$  e, portanto, o teste pode ser feito comparando o valor absoluto de  $\tau$  com o valor crítico obtido desta distribuição (HANSEN, 2007).

Além dos testes quase- $t$  construídos a partir dos diferentes estimadores consistentes (realizados utilizando valores críticos assintóticos), são considerados também os dois testes de

bootstrap. Neste caso, os valores críticos empregados são aqueles obtidos no processo de reamostragem descrito na Seção 1.4.

Os resultados apresentados na Tabela 1.5.4 mostram que o teste que utiliza o EEF é extremamente liberal quando há ausência de homocedasticidade. Com  $n = 25$  e  $\lambda = 1$ , a taxa de rejeição da hipótese nula é de 4,98%, mas salta para 47,43% quando  $\lambda = 98,37$ . Esta distorção se mantém mesmo com o aumento do tamanho amostral. Dentre os CHC's, o teste que utiliza o estimador CHC0 é o mais liberal, sendo tanto mais liberal quanto maior é o grau de heteroscedasticidade. Com  $n = 25$  e  $\lambda = 98,37$ , por exemplo, o teste quase- $t$  baseado neste estimador rejeita incorretamente a hipótese nula 12% das vezes, ou seja, mais que o dobro de vezes especificada pelo tamanho nominal de 5%. Os testes quase- $t$  que utilizam os outros CHC's também se revelam liberais, mas esta distorção é reduzida por seus respectivos fatores de correção.

O estimador CHC4 que possui baixo desempenho quando julgado de acordo com viés e REQM, apresenta o melhor desempenho dentre os CHC's, conduzindo a testes associados cujas taxas de rejeição estão mais próximas ao nível nominal especificado. Por exemplo, para  $n = 25$  e  $\lambda = 21,34$ , o percentual de rejeições da hipótese nula do teste que emprega este estimador é de 7,46%, enquanto que no CHC0 de 11,59%, no CHC2 de 10,37% e no CHC3 de 8,49%.

Com  $n = 200$ , as taxas de rejeição produzidas pelo CHC4 já estão bastante próximas do nível nominal especificado; 5,28% para  $\lambda = 1$ ; 5,42% para  $\lambda = 4,62$ ; 5,31% para  $\lambda = 21,31$  e 5,27 para  $\lambda = 98,37$ . Pode-se perceber que a distorção no tamanho dos teste associados causada pelos pontos de alavanca diminui mas, o estimador CHC4 ainda apresenta taxas mais próximas a 5%. Por exemplo, as taxas de rejeição produzidas pelo CHC0 também se aproximam de 5% mas, são de 5,54% para  $\lambda = 1$ ; 5,78% para  $\lambda = 4,62$ ; 5,80% para  $\lambda = 21,31$  e 5,77 para  $\lambda = 98,37$ .

O teste de bootstrap selvagem (indicado por BSC- $t$ ) apresenta, no geral, os percentuais de rejeição da hipótese nula mais próximos de 5%, dentre todas as alternativas analisadas. Com  $n = 25$ , as taxas de rejeição produzidas por esse teste são de 5,14 para  $\lambda = 1$ , 5,22% para  $\lambda = 4,62$ ; 4,95% para  $\lambda = 21,31$  e 5,27 para  $\lambda = 98,37$ . Para todos os tamanhos amostrais e em todos os graus de heteroscedasticidade os índices permanecem próximos ao nível nominal especificado. O teste de bootstrap por pares (indicado por BPC- $t$ ) também tem um bom desempenho mas, tende a rejeitar a hipótese nula numa frequência inferior à estabelecida no nível nominal (sub-rejeição), quando a heteroscedasticidade aumenta. Por exemplo, as taxas produzidas pelo BPC- $t$ , com  $n = 25$ , são de 5,28 para  $\lambda = 1$ , 5,49% para  $\lambda = 4,62$ ; 4,47% para  $\lambda = 21,31$  e 3,28 para  $\lambda = 98,37$ .

No que diz respeito aos estimadores bootstrap do erro padrão, o BPC tem desempenho que equivale ao do CHC0. Considerando-se o custo computacional em aplicar este teste, pode-se concluir que não há muita vantagem na sua utilização, ao menos no contexto analisado. Já o BSC, tem desempenho satisfatório em pequenas amostras ( $n = 25$ ) apenas sob homocedasticidade ( $\lambda = 1$ ) ou leve heteroscedasticidade. Nesses dois casos as taxas de rejeição são 4,63% e 4,25%. Para valores maiores de  $\lambda$ , o BSC tende a sofrer do problema de sub-rejeição.

**Tabela 1.5.4** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  na presença de pontos de alavanca;  $\alpha = 5\%$ .

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	BPC	BSC	BPC- $t$	BSC- $t$	
25	5	0,00	1,00	4,98	8,74	8,05	7,44	6,61	7,16	4,63	5,28	5,14	
			0,04	13,61	10,20	9,31	8,49	7,27	9,72	4,25	5,49	5,22	
			0,08	21,31	29,90	11,59	10,37	9,29	7,46	10,22	3,27	4,47	4,95
			0,12	98,37	47,43	12,00	10,43	9,14	6,92	11,97	2,62	3,28	5,27
50	5	0,00	1,00	5,05	6,77	6,46	6,18	5,76	6,06	4,92	5,00	4,95	
			0,04	13,69	7,66	7,25	6,86	6,24	7,00	4,44	4,53	4,70	
			0,08	21,31	29,64	8,11	7,61	7,09	6,29	8,86	4,89	4,84	5,53
			0,12	98,37	46,04	8,65	8,04	7,39	6,26	8,62	3,76	3,03	5,16
100	5	0,00	1,00	5,16	6,09	5,93	5,76	5,56	5,51	4,82	4,78	4,79	
			0,04	14,03	6,44	6,23	6,02	5,75	6,14	4,90	4,82	4,94	
			0,08	21,31	29,10	6,65	6,42	6,17	5,71	6,70	4,78	4,40	4,90
			0,12	98,37	45,43	6,90	6,62	6,35	5,85	6,96	4,51	3,78	4,84
200	5	0,00	1,00	5,06	5,54	5,46	5,40	5,28	5,03	4,73	4,62	4,65	
			0,04	13,84	5,78	5,68	5,59	5,42	5,53	4,76	4,60	4,72	
			0,08	21,31	29,38	5,80	5,67	5,54	5,31	5,71	4,65	4,37	4,79
			0,12	98,37	44,74	5,77	5,64	5,51	5,27	6,28	5,08	4,47	5,14

Em resumo, os testes baseados no estimador de Arellano (CHC0) podem apresentar problemas de sobre rejeição em pequenas amostras. Este problema tende a se agravar quando existem pontos de alavanca nos dados, o que não é incomum em aplicações práticas. Nesse contexto, o teste por bootstrap- $t$  selvagem mostra-se a melhor opção. No entanto, o CHC4 tem desempenho quase tão bom quanto este, mostrando-se uma opção viável, já que prescinde do custo computacional requerido pelo bootstrap- $t$ .

A fim de examinar o quanto da liberalidade dos testes construídos com as diferentes estratégias de inferência consideradas ocorre em função da presença de pontos de alavanca, o experimento foi reconduzido. Desta vez, os valores de  $z_{it}$  foram gerados de uma distribuição  $\mathcal{U}(0, 1)$  e, portanto, o conjunto de dados não contém pontos de alavanca. Como pode-se perceber na Tabela 1.5.1, o maior valor observado de  $\tilde{h}_{it}$  (0,047) não ultrapassa o limite de  $3p/(nT)$  (0,048). A fim de obter graus de heterocedasticidade semelhantes aos do experimento anterior, os valores de  $\gamma$  foram alterados.

Os resultados correspondentes ao novo experimento são apresentados nas Tabelas 1.5.5, 1.5.6 e 1.5.7, que contêm respectivamente, o Viés Relativo Total, a REQM e as Taxas de Rejeição de cada um dos CHC's e dos esquemas de bootstrap.

A Tabela 1.5.5 mostra que os vieses relativos totais se reduziram significativamente nos estimadores consistentes. Quando não há heteroscedasticidade ( $\lambda = 1$  e  $n = 25$ , por exemplo), o viés relativo total do estimador CHC0, que havia sido de 25,5% quando a simulação foi feita com alavancagem, agora se reduziu para 11,8%. Já sob heteroscedasticidade severa ( $\lambda = 98,90$ ) esta diferença cai de 38,6% para 13,5%. Outrossim, o estimador CHC3 apresenta os vieses mais baixos dentre os estimadores consistentes. Sob heteroscedasticidade e com  $n = 25$ , esses vieses, são de 2,3% para  $\lambda = 4,63$ ; 2,3% para  $\lambda = 21,39$  e 3,1% para  $\lambda = 98,90$ . Nota-se também, que o estimador CHC4 apresenta agora vieses menores que os observados para o CHC0 e CHC3.

Na Tabela 1.5.7 são apresentados os tamanhos estimados para os diferentes testes (expressos em percentual) construídos com os estimadores aqui avaliados. Pode-se perceber logo de início que as distorções no tamanho dos testes são bem menores do que as mostradas na Tabela 1.5.4. O BSC- $t$  permanece com o melhor desempenho em todos cenários analisados. O teste que utiliza o estimador CHC0 no denominador da estatística de teste revela-se agora bem mais confiável.

Por exemplo, com  $n = 25$  as taxas de rejeição são de 6,57%; 6,60%; 6,67% e 6,68%; para valores de  $\lambda$  entre 1 a 98,90. Também é importante notar que o teste baseado no estimador CHC3 passa a ter comportamento melhor que o do teste baseado no estimador CHC4. O estimador CHC4 por sua vez permanece produzindo testes associados confiáveis; com  $n = 25$ , por exemplo, as taxas de rejeição são de 7,10%; 7,19%; 7,21% e 7,39% para valores de  $\lambda$  entre 1 a 98,90.

Os resultados apresentados até aqui foram obtidos com a utilização de resíduos irrestritos nos CHC's. No entanto, um recente debate tem se desenrolado na literatura acerca do uso de resíduos restritos ao invés de irrestritos, nos HCCME's. O uso de resíduos restritos denota

**Tabela 1.5.5** Viés relativo total dos estimadores na ausência de pontos de alavanca.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	BSC	BPC
25	5	0,00	1,00	0,002	0,118	0,073	0,026	0,035	0,071	0,059
		1,49	4,63	0,148	0,119	0,072	0,023	0,031	0,090	0,066
		2,98	21,39	0,356	0,123	0,074	0,023	0,029	0,093	0,060
		4,47	98,90	0,548	0,135	0,084	0,031	0,034	0,107	0,063
50	5	0,00	1,00	0,000	0,058	0,035	0,012	0,016	0,037	0,028
		1,49	4,63	0,147	0,062	0,038	0,014	0,018	0,047	0,035
		2,98	21,39	0,351	0,061	0,036	0,010	0,013	0,053	0,032
		4,47	98,90	0,541	0,068	0,041	0,015	0,016	0,060	0,035
100	5	0,00	1,00	0,001	0,030	0,018	0,006	0,009	0,023	0,017
		1,49	4,63	0,146	0,029	0,017	0,004	0,006	0,025	0,019
		2,98	21,39	0,351	0,031	0,018	0,005	0,007	0,024	0,015
		4,47	98,90	0,539	0,032	0,019	0,006	0,006	0,033	0,020
200	5	0,00	1,00	0,000	0,014	0,009	0,003	0,004	0,009	0,006
		1,49	4,63	0,146	0,015	0,009	0,002	0,004	0,013	0,008
		2,98	21,39	0,349	0,015	0,008	0,002	0,003	0,014	0,008
		4,47	98,90	0,538	0,019	0,012	0,005	0,006	0,018	0,011

que o modelo regressão é estimado impondo-se a restrição que está sendo testada, ou seja, impondo-se  $\mathcal{H}_0$ . Se a hipótese nula é verdadeira, pode-se argumentar que o uso de resíduos restritos tende a melhorar a confiabilidade dos testes.

Os resultados obtidos por Davidson e MacKinnon (1985) sugerem que os testes construídos com resíduos restritos são mais confiáveis, mas tendem a sub-rejeitar ligeiramente a hipótese nula, enquanto os testes baseados em resíduos irrestritos sofrem do problema de sobre-rejeição discutido anteriormente. Assim, os autores recomendam o uso de resíduos restritos, quando se emprega algum dos HCCME's na construção de testes quase- $t$ .

Por outro lado, Godfrey e Orme (2004) defendem a utilização de resíduos restritos quando os HCCME's são utilizados na construção dos testes quase- $t$ , destinados a inferir sobre alguma restrição nos parâmetros da regressão. Os autores defendem ainda, o uso resíduos restritos quando o objetivo for produzir evidências de que os testes quase- $t$  construídos com os HC-

**Tabela 1.5.6** REQM total ( $\times \sqrt{5000}$ ) na ausência de pontos de alavanca.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	BSC	BPC
25	5	0,00	1,00	2,468	5,264	5,332	5,434	5,416	5,285	5,364
		1,49	4,63	3,626	6,884	6,978	7,119	7,101	6,972	7,078
		2,98	21,39	7,861	11,074	11,243	11,488	11,477	11,122	11,372
		4,47	98,90	18,593	20,151	20,475	20,941	20,964	20,126	20,436
50	5	0,00	1,00	0,864	1,877	1,889	1,908	1,905	1,928	1,941
		1,49	4,63	1,423	2,465	2,481	2,505	2,502	2,508	2,532
		2,98	21,39	3,487	3,958	3,988	4,032	4,029	4,014	4,047
		4,47	98,90	8,675	7,242	7,301	7,383	7,386	7,376	7,467
100	5	0,00	1,00	0,306	0,672	0,674	0,677	0,676	0,691	0,695
		1,49	4,63	0,587	0,880	0,883	0,887	0,887	0,905	0,902
		2,98	21,39	1,626	1,410	1,416	1,423	1,423	1,462	1,460
		4,47	98,90	4,172	2,572	2,583	2,598	2,598	2,617	2,625
200	5	0,00	1,00	0,107	0,238	0,238	0,239	0,239	0,255	0,256
		1,49	4,63	0,255	0,312	0,313	0,313	0,313	0,332	0,332
		2,98	21,39	0,778	0,501	0,502	0,503	0,503	0,541	0,541
		4,47	98,90	2,049	0,914	0,916	0,918	0,919	0,968	0,967

CME's, têm um bom desempenho em amostras finitas.

As diferenças entre as duas abordagens são assintoticamente desprezíveis. Contudo, Davidson e MacKinnon (1985) encontraram diferenças importantes no uso de resíduos irrestritos ao invés dos restritos em amostras finitas. Suas conclusões mostram que os testes que utilizam os resíduos irrestritos baseados no HC3 têm desempenho superior ao HC2, que supera o HC0. Em contraste, as variantes desses estimadores obtidas com resíduos restritos, denotados por HCR's, têm todas bons desempenhos quando não há pontos de alavanca nos dados, apresentando pequenas diferenças entre si. Os autores observam ainda que HCR0 é muitas vezes mais confiável do que os demais HCR's.

No bootstrap- $t$ , os resultados da simulação em Davidson e Flachaire (2001) mostram que não há muita diferença em usar resíduos restritos ou irrestritos, mas é um erro misturar as duas

**Tabela 1.5.7** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  na ausência de alavanca;  $\alpha = 5\%$ .

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	BSC	BPC	BSC- $t$	BPC- $t$
25	5	0,00	1,00	4,88	7,10	6,80	6,50	6,57	6,90	4,77	4,86	4,96
				6,31	7,19	6,85	6,54	6,60	7,51	5,22	5,16	5,37
				8,13	7,21	6,92	6,60	6,67	7,06	4,61	4,34	4,58
				10,01	7,39	7,02	6,68	6,68	7,28	4,82	4,51	4,97
50	5	0,00	1,00	4,96	6,11	5,97	5,80	5,82	6,26	5,27	5,19	5,14
				6,70	6,34	6,19	6,02	6,04	5,73	4,78	4,69	4,75
				8,37	6,19	6,00	5,85	5,86	6,24	4,82	4,75	4,91
				10,14	6,29	6,13	5,98	5,98	6,26	4,99	4,86	4,98
100	5	0,00	1,00	4,82	5,41	5,34	5,28	5,28	5,76	5,25	5,09	5,12
				6,59	5,64	5,57	5,49	5,49	5,67	4,99	4,86	4,94
				8,14	5,48	5,43	5,35	5,36	5,50	4,84	4,80	4,74
				10,05	5,60	5,53	5,45	5,45	5,65	4,96	4,90	4,80
200	5	0,00	1,00	4,91	5,24	5,20	5,14	5,15	5,57	5,31	5,21	5,19
				6,29	5,10	5,07	5,05	5,05	5,20	4,96	4,75	4,88
				8,34	5,38	5,34	5,28	5,29	5,74	5,39	5,27	5,29
				10,18	5,26	5,22	5,18	5,18	5,30	4,92	4,83	4,76

formas na construção das pseudo amostras. No entanto, Godfrey e Orme (2004) mostram que não é possível ter um bom controle da probabilidade de erro através da utilização do bootstrap selvagem se o HCCME é calculado com resíduos irrestritos. Outro detalhe a ser notado é que o uso de resíduos restritos faz com que a estimativa do erro-padrão tenha que ser recalculada, caso variável do modelo a ser testada se altere.

O vetor de resíduos restritos é obtido impondo-se a hipótese nula ( $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ ) em (1.5.1). Dessa maneira, o modelo restrito é dado por

$$y_{it} = \beta_1 x_{it,1} + u_{it}. \quad (1.5.2)$$

Os CHCR's têm a formulação descrita na Seção 1.4. A alteração pertinente é empregar o vetor de resíduos restritos  $\hat{u}_i^R = (\hat{u}_{i1}^R, \dots, \hat{u}_{iT}^R)'$  obtido aplicando-se o EEF ao modelo de regressão (1.5.2). Seguindo a denominação empregada anteriormente, o estimador CHC0 que emprega o vetor de resíduos restritos será denominado de CHCR0; a denominação dos demais estimadores com resíduos restritos segue a mesma linha.

Os resultados apresentados na Tabela 1.5.8 dizem respeito às taxas de rejeição (expressas em percentual) dos testes quase- $t$  baseados nos estimadores CHCR0, CHCR2, CHCR3 e CHCR4. Com o uso de resíduos irrestritos o estimador com o melhor desempenho dentre os CHC's foi o CHC4. Todavia, o mesmo não acontece com o uso resíduos restritos. Agora, os tamanhos dos testes baseados no estimador CHCR4 situam-se abaixo dos níveis nominais considerados, tanto sob homocedasticidade quanto sob heteroscedasticidade. A explicação para este aparente paradoxo está no fato de que os HC's foram desenvolvidos com o intuito de corrigir o problema de sobre-rejeição da hipótese nula pelo teste HC0 observada com o uso de resíduos irrestritos.

Pode-se perceber que o problema se inverte quando da utilização de resíduos restritos. Por exemplo, com  $n = 25$ ,  $\lambda = 21,31$  e pontos de alavanca, o teste baseado no estimador CHCR0 rejeita a hipótese nula 3,29% das vezes; abaixo, portanto, do nível nominal de 5%. Os demais testes rejeitam a hipótese nula 2,42%; 1,80% e 1,03%, respectivamente quando são empregados os estimadores CHCR2, CHCR3 e CHCR4. Isto ocorre porque esses estimadores têm em comum a ideia de inflacionar os resíduos, causando assim um agravamento do problema de sub-rejeição que se observa no teste CHCR0.

Quando existem pontos de alavanca nos dados os testes baseados nos estimadores CHCR3 e CHCR4 apresentam desempenhos menos discrepantes, notadamente quando  $n \geq 100$ . O teste baseado no estimador CHCR0 agora tem desempenho ligeiramente superior aos demais em todos tamanhos amostrais. Por exemplo, com  $n = 25$ ,  $\lambda = 98,90$ ; as taxas de rejeição produzidas pelos estimadores CHCR0, CHCR2, CHCR3 e CHCR4 são, respectivamente, de 4,94; 4,90; 4,85 e 4,85. Em resumo, pode-se dizer que a solução apresentada pelas variantes do CHC0 para o problema de sobre-rejeição tornam-se um agravante do problema sub-rejeição quando são empregados resíduos restritos.

**Tabela 1.5.8** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  com resíduos restritos,  $\alpha = 5\%$ .

$n$	$T$	com pontos avançados				sem pontos avançados							
		$\gamma$	$\lambda$	CHCR0	CHCR2	CHCR3	CHCR4	$\gamma$	$\lambda$	CHCR0	CHCR2	CHCR3	CHCR4
25	5	0,00	1,00	4,44	3,78	3,25	2,54	0,00	1,00	4,70	4,45	4,16	4,22
		0,04	4,62	4,11	3,33	2,65	1,84	1,49	4,62	4,54	4,30	4,04	4,06
		0,08	21,31	3,29	2,42	1,80	1,03	2,98	21,39	4,57	4,31	4,00	4,04
		0,12	98,37	2,23	1,57	1,04	0,49	4,47	98,90	4,64	4,28	3,96	3,97
50	5	0,00	1,00	4,72	4,42	4,15	3,74	0,00	1,00	4,92	4,81	4,65	4,69
		0,04	4,62	4,67	4,30	3,90	3,26	1,49	4,62	5,16	5,01	4,86	4,89
		0,08	21,31	4,23	3,81	3,31	2,63	2,98	21,39	4,86	4,70	4,57	4,58
		0,12	98,37	3,71	3,12	2,69	1,90	4,47	98,90	4,97	4,78	4,62	4,63
100	5	0,00	1,00	5,08	4,95	4,77	4,53	0,00	1,00	4,81	4,74	4,69	4,70
		0,04	4,62	4,88	4,68	4,50	4,19	1,49	4,62	5,00	4,93	4,85	4,86
		0,08	21,31	4,70	4,47	4,24	3,84	2,98	21,39	4,85	4,79	4,72	4,72
		0,12	98,37	4,57	4,32	4,02	3,58	4,47	98,90	4,99	4,91	4,83	4,83
200	5	0,00	1,00	5,03	4,94	4,88	4,78	0,00	1,00	4,97	4,94	4,89	4,91
		0,04	4,62	5,09	4,99	4,88	4,72	1,49	4,62	4,84	4,82	4,80	4,80
		0,08	21,31	4,84	4,72	4,60	4,38	2,98	21,39	5,02	4,99	4,95	4,96
		0,12	98,37	4,65	4,51	4,41	4,18	4,47	98,90	4,94	4,90	4,85	4,85

## 1.6 Resultados numéricos em painéis desbalanceados

Quando o painel é desbalanceado a dimensão temporal difere de indivíduo para indivíduo e as modificações necessárias são relativamente simples. Enquanto num painel balanceado o tamanho da amostra é  $nT = n \times T$ , num painel desbalanceado é  $\sum T_i$ . Como consequência em vez de calcular as médias dos grupos, com base em uma amostra de tamanho  $nT$ , é necessário considerar o tamanho específico  $T_i$  de cada grupo (WOOLDRIDGE, 2002).

Outro fato a ser notado é que se modelo considerado contiver efeitos fixos temporais e individuais os primeiros podem ser retirados tomando-se as médias temporais. Os efeitos temporais, no entanto, deverão ser tratados por meio da inclusão de *dummies* para cada período de tempo. A seguir são apresentados, a título de exemplo, as taxas de rejeição dos testes construídos com os estimadores consistentes.

Os resultados apresentados nesta Seção foram obtidos com o modelo (1.5.1). Os valores da variável  $z_{it}$  foram gerados da distribuição  $t_3$  enquanto que a covariável foi gerada na forma de

$$x_{it} = \alpha_i + z_{it} + 0,5z_{it-1}.$$

As demais variáveis do modelo foram geradas da maneira explicitada anteriormente.

Os tamanhos considerados de  $n$  foram 25, 50, 100 e 200 enquanto a dimensão temporal é diferente para cada indivíduo. Os tamanhos considerados de  $T$  foram:  $T_1 = 2, T_2 = 5, T_3 = 8, T_4 = 8, T_5 = 7, T_6 = 4, T_7 = 2, T_8 = 4, T_9 = 5, T_{10} = 9, T_{11} = 4, T_{12} = 7, T_{13} = 5, T_{14} = 5, T_{15} = 7, T_{16} = 2, T_{17} = 3, T_{18} = 5, T_{19} = 3, T_{20} = 4, T_{21} = 4, T_{22} = 5, T_{23} = 10, T_{24} = 5$  e  $T_{25} = 2$ , totalizando  $nT = 125$ . Os demais tamanhos amostrais,  $n = 50, 100$  e  $200$ , foram obtidos replicando-se os valores do conjunto de dados inicial ( $nT = 125$ ) e foram mantidos constantes ao longo das simulações. Deste modo, para  $n = 50$  replicou-se as variáveis duas vezes, para  $n = 100$  quatro vezes e para  $n = 200$  oito vezes. Os parâmetros do modelo de regressão foram definidos como  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 0$ .

As Tabelas 1.6.1 e 1.6.2 contêm as estimativas das taxas de rejeição, expressas em porcentagens, dos testes  $t$  (erros-padrão obtidos de forma usual) e quase- $t$  (erros-padrão obtidos com os estimadores consistentes) que empregam os diferentes estimadores da variância de  $\beta_2$ , ao nível nominal de  $\alpha = 5\%$ . A hipótese testada é a exclusão de  $\beta_2$ , de forma que o teste pode ser formulado como  $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$  contra  $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$ . A estatística de teste avaliada é dada por

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)}},$$

em que  $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)$  denota a variância estimada de  $\hat{\beta}_2$ , empregando-se um dos CHC's já apresentados.

Os resultados, no geral, permanecem análogos aos obtidos com painéis balanceados. O teste CHC4 apresenta o melhor desempenho quando os dados contem pontos de alavanca e

a hipótese nula do teste não é imposta ao modelo (resíduos irrestritos). Se a hipótese nula é imposta (resíduos restritos) o teste CHC0 torna-se a melhor opção apresentando a menor distorção de tamanho.

## 1.7 Considerações finais

O problema da heterocedasticidade é bastante comum em modelos de DP com EF. Nesta situação, uma prática comum é estimar os parâmetros do modelo através do EEF, juntamente com algum estimador consistente da matriz de covariâncias. O estimador mais amplamente empregado nesses casos é o proposto por Arellano (aqui chamado de CHC0), que pode ser visto como uma extensão para modelos de EF, do estimador HC0 de White.

As propriedades do estimador de Arellano já são bem conhecidas, no entanto, o desempenho das outras variantes do HC0 não haviam sido analisadas nos modelos de EF até agora. Este ensaio buscou preencher esta lacuna estendendo e analisando outros HCCME's para os modelos de EF, a saber: HC2, HC3 e HC4.

As simulações de MC com o uso de resíduos irrestritos evidenciam que, de maneira similar ao que ocorre em dados de corte transversal, o CHC0 não é a melhor opção em amostras pequenas ou quando há pontos de alavanca. Isto porque os testes quase- $t$  construídos com este estimador tornam-se liberais e essa liberalidade tende a aumentar à medida em que o grau de heteroscedasticidade cresce. Uma consequência direta deste fato é encontrar significância para variáveis que, de fato, não são significantes.

No que se refere a inferência via bootstrap, é inegável a qualidade obtida com o uso do BSC- $t$ . Na presença ou não de pontos de alavanca os resultados apresentados sugerem que o BSC- $t$  possui comportamento superior a todos os demais estimadores considerados. Apesar disso, o CHC4 apresenta bons índices de rejeição, tendo a vantagem de ser substancialmente mais simples do ponto de vista prático e computacional. Quando os dados não possuem alavancagem os desempenhos dos testes baseados nos estimadores CHC3 e CHC4 tornam-se muito semelhantes, com leve vantagem para o CHC3. Contudo, o teste CHC4 preserva seu desempenho, tenha os dados pontos de alavanca ou não, fato que leva à conclusão de que este estimador é uma opção mais confiável, quando o pesquisador não dispõe de muitas observações.

As análises foram também conduzidas empregando-se o vetor de resíduos restritos na construção dos CHC's. Neste caso, o problema de sobre-rejeição passou a ser de sub-rejeição da hipótese nula. Na presença de pontos de alavanca, o estimador CHCR0 tem desempenho amplamente superior aos demais CHC's. Quando não há pontos de alavanca, essa diferença se reduz consideravelmente, mas o CHCR0 permanece com melhor desempenho. Os fatores de correção empregados pelos CHCR2, CHCR3 e CHCR4 têm efeito adverso, agravando o problema de sub-rejeição. Portanto, se forem empregados resíduos restritos, o estimador CHCR0 se constitui na melhor opção dentre os CHCR's.

**Tabela 1.6.1** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  em painéis desbalanceados na presença de pontos de alavanca;  $\alpha = 5\%$ .

$n$	$\gamma$	$\lambda$	Resíduos irrestritos								Resíduos restritos							
			EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	
25	0,00	1,00	5,23	9,59	8,92	8,21	7,23					4,74	4,66	3,96	3,24	2,42		
	0,04	4,56	13,23	11,26	10,29	9,17	7,62					12,48	3,49	2,61	2,06	1,34		
	0,08	20,83	29,38	12,61	11,03	9,71	7,54					28,28	2,51	1,72	1,28	0,68		
	0,12	95,08	47,17	13,24	11,28	9,64	6,87					46,29	1,50	0,86	0,61	0,29		
50	0,00	1,00	4,83	7,10	6,77	6,45	5,94					4,62	4,74	4,32	4,00	3,57		
	0,04	4,56	12,78	7,75	7,32	6,81	6,14					12,41	4,25	3,78	3,38	2,87		
	0,08	20,83	28,94	9,17	8,49	7,81	6,75					28,55	3,80	3,23	2,76	2,10		
	0,12	95,08	45,84	10,06	9,27	8,32	6,85					45,38	2,96	2,41	1,96	1,22		
100	0,00	1,00	5,09	6,23	6,05	5,84	5,53					5,00	4,97	4,79	4,59	4,26		
	0,04	4,56	13,54	6,39	6,23	5,95	5,61					13,28	4,61	4,41	4,17	3,87		
	0,08	20,83	28,57	7,57	7,34	6,96	6,32					28,25	4,69	4,42	4,17	3,67		
	0,12	95,08	44,75	7,32	6,85	6,46	5,79					44,53	4,00	3,63	3,34	2,83		
200	0,00	1,00	4,51	5,12	5,09	5,02	4,87					4,48	4,49	4,43	4,31	4,18		
	0,04	4,56	13,57	5,88	5,76	5,60	5,41					13,50	4,94	4,84	4,72	4,38		
	0,08	20,83	28,59	5,70	5,53	5,42	5,11					28,44	4,44	4,35	4,25	4,02		
	0,12	95,08	44,94	6,26	6,08	5,92	5,58					44,85	4,64	4,51	4,29	4,06		

**Tabela 1.6.2** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  em painéis desbalanceados na ausência de pontos de alavanca;  $\alpha = 5\%$ .

$n$	$\gamma$	$\lambda$	Resíduos irrestritos				Resíduos restritos						
			EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	
25	0,00	1,00	5,25	8,05	7,71	7,39	7,39	7,39	4,86	5,01	4,69	4,39	4,36
	0,44	4,57	5,04	7,47	6,99	6,69	6,59	6,59	4,58	4,68	4,30	3,86	3,84
	0,88	20,85	5,65	8,08	7,65	7,24	7,17	7,17	5,16	4,75	4,45	4,08	4,04
	1,32	95,20	5,67	8,32	7,93	7,56	7,46	7,46	5,27	4,78	4,38	4,02	3,94
50	0,00	1,00	5,10	6,61	6,50	6,28	6,26	6,26	4,88	5,08	4,98	4,81	4,80
	0,44	4,57	5,20	6,21	6,02	5,87	5,84	5,84	4,99	4,78	4,61	4,43	4,41
	0,88	20,85	5,26	6,14	5,96	5,78	5,77	5,77	5,05	4,68	4,46	4,27	4,22
	1,32	95,20	5,65	6,66	6,47	6,27	6,24	6,24	5,42	5,18	4,95	4,80	4,78
100	0,00	1,00	5,06	5,79	5,70	5,58	5,55	5,55	4,99	4,87	4,81	4,73	4,73
	0,44	4,57	5,19	5,49	5,37	5,31	5,31	5,31	5,10	4,88	4,75	4,72	4,70
	0,88	20,85	5,30	5,66	5,57	5,52	5,50	5,50	5,19	5,01	4,85	4,75	4,74
	1,32	95,20	5,29	5,56	5,45	5,37	5,33	5,33	5,19	4,84	4,73	4,63	4,59
200	0,00	1,00	5,41	5,48	5,45	5,43	5,43	5,43	5,33	5,13	5,11	5,04	5,04
	0,44	4,57	5,43	5,52	5,45	5,41	5,41	5,41	5,40	5,04	5,01	5,00	5,00
	0,88	20,85	6,06	5,81	5,77	5,72	5,72	5,72	6,01	5,40	5,33	5,30	5,29
	1,32	95,20	5,82	6,03	5,94	5,88	5,85	5,85	5,72	5,70	5,68	5,62	5,61

# Estimadores intervalares consistentes em modelos de Efeitos Fixos heteroscedásticos

## 2.1 Introdução

Modelos de regressão que usam dados em painel (DP), também conhecidos por dados longitudinais, são caracterizados por empregar observações multidimensionais; por exemplo, uma característica individual que é acompanhada ao longo do tempo. O principal atrativo destes modelos é a possibilidade de considerar a heterogeneidade individual. Além disso, o uso de DP permite que as regressões sejam realizadas sobre uma amostra maior, aumentando os graus de liberdade, reduzindo a colinearidade e, por conseguinte, melhorando as estimativas. Por essas e outras razões, o uso de modelos de DP tem crescido em várias áreas do conhecimento científico.

É comum observar nos modelos de DP a existência de heterogeneidade individual, ou seja, diferenças nas características individuais que causam um efeito não observável, conhecido por efeito fixo (EF). A maneira usual de estimar consistentemente os parâmetros do modelo, diante da existência do EF, é através do estimador de EF (EEF). Esta metodologia, tem sido amplamente empregada nas análises econométricas como maneira de tratar a questão da heterogeneidade não observada, uma vez que o estimador de mínimos quadrados ordinários (MQO) torna-se inconsistente neste contexto (HSIAO, 2003).

Uma suposição comumente violada em aplicações práticas é a de que todos os erros do modelo têm a mesma variância (homoscedasticidade). Quando não há homoscedasticidade dos erros (há heteroscedasticidade), o estimador de EF permanece não enviesado, consistente e com distribuição assintoticamente normal. O problema surge no estimador da matriz de covariâncias, que se torna inconsistente e tendencioso. Neste caso, inferir corretamente sobre a validade das estimativas obtidas para os parâmetros do modelo não é mais possível. Este tipo de violação é bastante comum nos modelos de EF onde a heteroscedasticidade pode decorrer, por exemplo, das diferenças individuais.

Sob heteroscedasticidade, testes de hipóteses assintoticamente válidos sobre os parâmetros do modelo, requerem um estimador consistente para a matriz de covariâncias, a partir do qual são obtidos os erros-padrão. Um estimador consistente da matriz de covariâncias em modelos de EF foi proposto por Arellano (1987), que generalizou o estimador HC0 (*heteroskedasticity consistent estimator*), proposto por White (1980). O estimador de Arellano é bastante popular, sendo o mais utilizado em aplicações práticas. Isto porque sua consistência é mantida mesmo

sob pressupostos fracos, além de ser válido tanto na presença de heteroscedasticidade quanto de autocorrelação serial nos erros. Sua utilização permite que o pesquisador forme intervalos de confiança válidos, sem a necessidade especificar um modelo exato para o comportamento dos resíduos (BALTAGI, 2005).

Vários autores já demonstraram que os tamanhos dos testes baseados no estimador HC0 tendem a ser maiores do que a probabilidade do erro tipo I especificada o que também acontece com o estimador de Arellano. Essa distorção é agravada quando os dados contêm pontos de alavanca, ou seja, pontos que estão afastados dos pontos no subespaço gerado pelas colunas da matriz de regressores. A existência desses pontos faz com que as variâncias dos valores ajustados dos pontos próximos a ele sejam maiores do que as variâncias dos valores ajustados correspondentes aos demais pontos.

Para modelos de regressão com dados em corte transversal, a literatura oferece uma variedade de soluções para este problema. A ideia fundamental por trás dessas alternativas é estabilizar a variância, com a finalidade de reduzir a distância entre o erro tipo I esperado e o obtido nos testes de hipótese (KEZDI, 2005).

Por outro lado, uma simples estimativa pontual do parâmetro de interesse pode não ser, muitas vezes, suficiente para fornecer evidências que, de fato, auxiliem nas deduções. Nestes casos, intervalos de confiança podem fornecer uma avaliação da imprecisão inerente à estimação pontual. Dito isto, o objetivo deste ensaio será o de avaliar os desempenhos dos Estimadores Intervalares Consistentes sob Heteroscedasticidade (EICH) de forma desconhecida nos modelos de EF. Para fins de comparação, serão considerados ainda alguns estimadores baseados no método de bootstrap, em que reamostragem de dados é usada na construção dos intervalos. Esta avaliação é similar à realizada por Cribari-Neto e Lima (2009) em modelos com dados em corte transversal.

Na Seção seguinte é feita uma breve revisão da literatura sobre estimadores consistentes da matriz de covariâncias. A terceira Seção considera o uso desses estimadores nos modelos de DP com EF. A quarta Seção discute a construção de intervalos de confiança com os estimadores apresentados na Seção 2.3. Intervalos de confiança obtidos através da técnica de bootstrap são discutidos na Seção 2.5. As seções 2.6 e 2.7 apresentam os resultados numéricos sobre os desempenhos dos estimadores na construção de intervalos e regiões de confiança, respectivamente. Por fim, na Seção 2.8, são feitas algumas considerações finais.

## 2.2 Revisão da literatura

White (1980) desenvolveu um estimador da matriz de covariâncias que pode ser empregado mesmo quando a forma funcional da heteroscedasticidade é desconhecida. Suas ideias foram estendidas para muitas outras formas de inferência, que resultaram em inúmeros novos métodos de análise. Seu estimador para dados em corte transversal, comumente denominado HC0, vale-se do fato de que é possível estimar a matriz de covariâncias de forma consistente, independentemente do tamanho amostral.

Apesar de suas boas propriedades, alguns autores demonstraram que o estimador HC0 tende a ser demasiadamente otimista, isto é, tende a subestimar as variâncias das estimativas dos parâmetros em amostras de tamanho pequeno a moderado. Como resultado os testes quase-*t* (assim denominados quando o teste é construído empregando-se os erros-padrão obtidos com os estimadores consistentes) associados tendem a ser liberais, ou seja, os tamanhos efetivos desses testes tendem a ser maiores do que a probabilidade do erro tipo I especificada (ver Cribari-Neto e Zarkos (1999) e MacKinnon e White (1985)). Long e Ervin (2000), por exemplo, concluíram, através de simulações de Monte Carlo, que o estimador HC0 não é recomendável em amostras de tamanho inferior a 250. Para contornar essas limitações e melhorar o desempenho dos testes associados várias modificações do HC0 foram propostas tendo por objetivo corrigir as distorções mencionadas acima.

O estimador HC2, introduzido por Horn et al. (1975), incorpora um ajuste baseado nas medidas de alavancagem à estimativa da matriz de covariâncias. Como observam Chesher e Austin (1991), é possível existir um viés severo no estimador HC0 quando existem pontos de alta alavancagem nos dados. O estimador HC2 visa corrigir a distorção causada por esses pontos. Isto é explicado pelo fato de que os resíduos possuem, em média, magnitude reduzida em valores absolutos e o estimador interpreta pequenos resíduos como uma indicação de variância pequena. O estimador HC2 procura lidar com este fato atribuindo pesos aos resíduos, que são obtidos da matriz de alavancagens.

Ao longo dos anos, surgiram outras variantes do estimador HC0 visando atenuar os efeitos adversos sobre a qualidade das inferências resultantes, causado pela existência de pontos de alavanca. Dentre essas versões, o estimador HC3, proposto por Davidson e MacKinnon (1993) e que pode ser visto também como uma aproximação da técnica de *jackknife*, procura corrigir de maneira mais acentuada os efeitos da alavancagem, reduzindo a tendência dos resíduos de flutuar menos que os verdadeiros erros. Num estudo numérico detalhado Long e Ervin (1998) concluíram que no tocante ao desempenho dos testes associados em pequenas amostras o estimador HC3 tem desempenho superior aos estimadores HC0 e HC2.

Um quarto estimador a ser avaliado, denominado de HC4 e originalmente proposto por Cribari-Neto (2004), tem o intuito de acentuar a intensidade do ajuste feito no estimador HC3, inflacionando os resíduos, cujas observações correspondentes possuem um maior grau de alavancagem. Isto porque, como demonstraram Cribari-Neto e Zarkos (1999), em pequenas amostras, a presença de pontos de alta alavancagem na matriz de regressores é mais decisiva para o comportamento dos estimadores da matriz de covariâncias, do que o grau de heteroscedasticidade em si.

Todos os estimadores apresentados até aqui têm suas propriedades bem estabelecidas para modelos que empregam dados em corte transversal. No entanto, apenas o estimador HC0 tem sido considerado como alternativa nos modelos de EF, havendo uma clara ausência de resultados sobre a utilização dos demais HC's nesse contexto. Como solução, poder-se-ia se pensar, a princípio, em aplicar os estimadores HC2, HC3 e HC4 diretamente aos modelos de EF. Contudo, esta solução é inviável pois, embora o estimador HC0 seja consistente em regressões com dados em corte transversal, torna-se inconsistente em modelos de EF, à medida

que o número de indivíduos aumenta (maior que 2) e a dimensão temporal é mantida fixa (ARELLANO, 2003).

As propriedades do CRMC foram estudadas por alguns autores. Kezdi (2005), por exemplo, analisa o problema da estimativa dos erros-padrão quando há heterocedasticidade e autocorrelação serial nos erros. O autor argumenta que os pesquisadores muitas vezes ignoram esses problemas, provavelmente porque vários dos pacotes estatísticos mais usados não disponibilizam erros-padrão robustos em modelos de EF. Não surpreendentemente, isso pode levar a graves distorções sobre a qualidade da inferência. Segundo o autor, uma das possíveis razões pelas quais os estimadores robustos não são usados com frequência, é o desconhecimento de suas propriedades em amostras finitas. Seus resultados evidenciam que é a dimensão individual que afeta o comportamento do estimador CRMC em amostras finitas, e não o tamanho total da amostra.

Hansen (2007) analisa as propriedades assintóticas do estimador CRMC sob diversos comportamentos assintóticos. O autor argumenta que, em conjuntos de DP, a dimensão temporal nem sempre pode ser negligenciada. Neste sentido, a análise usual é estendida para casos em que tanto o número de indivíduos, quanto de observações no tempo aumentam, ou ainda, quando a dimensão temporal aumenta e o número de indivíduos se mantém constante. O autor fornece também condições sob as quais os testes de hipóteses construídos com o CRMC fornecem inferências válidas nessas circunstâncias.

Stock e Watson (2008) por sua vez, propuseram uma versão do estimador HC0 com correção de viés que é consistente nos modelos de EF. Sob certas circunstâncias, seu estimador mostrou melhores resultados que o CRMC tradicional. Os autores mostram ainda que sua versão pode ser estendida para lidar com resíduos autocorrelacionados no tempo.

Pelo acima exposto, pode-se notar que poucos são os trabalhos dedicados à estimação da matriz de covariâncias nos modelos de EF sob heteroscedasticidade de forma desconhecida. Soma-se a isso o fato de que tipicamente regressões envolvendo DP apresentam comportamento heteroscedástico e, não obstante, também é comum a presença de pontos de alavanca nos dados. Portanto, é natural pensar em estender os estimadores HC's para os modelos de regressão de EF.

### 2.3 Modelo e estimadores pontuais

O modelo de regressão de interesse é o de EF, que pode ser expresso por

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}\beta + u_{it}, \quad (2.3.1)$$

com  $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, T$ . Na sua forma empilhada, (2.3.1) torna-se

$$y_i = \alpha_i + X_i\beta + u_i,$$

em que cada  $i$  é um *cluster*, contendo  $T$  observações no tempo sobre o indivíduo  $i$ . A variável dependente  $y_i$  é um vetor de tamanho  $n \times 1$ ,  $X_i$  uma matriz  $n \times p$  de variáveis explicativas (com  $p < n$ ) e  $\beta$  um vetor  $p \times 1$  de parâmetros desconhecidos. O termo  $\alpha_i$  capta o efeito não observável causado pela heterogeneidade e  $u_i$  é o erro aleatório, que é identicamente e independentemente distribuído (i.i.d.), variando tanto em  $i$  quanto em  $t$ , chamado erro idiossincrático ou distúrbio idiossincrático (WOOLDRIDGE, 2002).

Quando  $\alpha_i$  está correlacionado com alguma das variáveis explicativas do modelo, o estimador MQO resultará em estimativas de  $\beta$  que serão, não só enviesadas, mas também inconsistentes. Por exemplo, se existem fatores que determinam a variável dependente, mas não estão sendo considerados, por não serem diretamente observáveis ou mensuráveis.

O problema na estimação de (2.3.1) é a presença do efeito individual, que cresce à medida que  $n \rightarrow \infty$ . Para solucionar este problema o EEF parte da ideia de eliminar o efeito fixo, subtraindo de cada variável sua média temporal. Considere para tanto, a forma

$$\tilde{y}_i = \tilde{X}_i \tilde{\beta} + \tilde{u}_i, \quad (2.3.2)$$

sendo  $\tilde{y}_{it} = y_{it} - T^{-1} \sum_{t=1}^T y_{it}$ , com  $\tilde{X}_i$  e  $\tilde{u}_i$  obtidos de maneira análoga. O termo problemático  $\alpha_i$  é eliminado de (2.3.1) dado que,  $\bar{\alpha}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T \alpha_i = \alpha_i$ .

O EEF de  $\beta$  é obtido aplicando-se o estimador de MQO à equação (2.3.2), o que significa minimizar da soma dos quadrados dos erros

$$\tilde{u}'_i \tilde{u}_i = (\tilde{y}_i - \tilde{X}_i \tilde{\beta})' (\tilde{y}_i - \tilde{X}_i \tilde{\beta}),$$

cuja solução é dada por

$$\hat{\beta} = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{y}_i.$$

As seguintes suposições são usualmente feitas sobre o modelo de regressão de EF:

**S1**  $(X_i, u_i)$  são i.i.d. em  $i$ ;

**S2**  $\mathbb{E}(u_{it} | X_i) = 0$ ;

**S3**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{X}_i \right) = \tilde{Q}$ , em que  $\tilde{Q}$  é uma matriz positiva definida;

**S3'**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\tilde{X}'_i \tilde{u}_i \tilde{u}'_i \tilde{X}_i) = W$ ;

**S4**  $\mathbb{E}(u_i u'_i | X_i) = \sigma^2 I_T$ , em que  $I_T$  é a matriz identidade de ordem  $T \times T$ ;

**S4'**  $\mathbb{E}(u_i u'_i | X_i) = \Omega_i$ ;

Sob as suposições **S1** e **S2** o EEF é não enviesado e consistente, ou seja,  $\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta$ . **S1** impõe a independência entre os indivíduos, descartando correlação espacial, mas permite a existência de autocorrelação temporal e de heterogeneidade individual. **S2** garante a estrita exogeneidade de  $X_i$  e **S3** afirma que não há perfeita multicolinearidade entre as variáveis explicativas. A suposição **S4** assegura a homoscedasticidade dos erros. Por outro lado, se **S4'** é válida então os erros não possuem variância constante. Se **S3** e **S4** são válidas, então o EEF é o melhor estimador linear não-viesado de  $\beta$  (MELNV) (HAYASHI, 2000).

Para fins computacionais, é conveniente escrever as matrizes em um nível de agregação maior. Neste caso, o estimador de EEF de  $\beta$  pode ser reformulado como

$$\hat{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \tilde{X}'\tilde{y}.$$

Ambas as representações são equivalentes, diferenciadas apenas pelo nível de agregação. Aqui, as observações foram novamente empilhadas de modo que  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)'$ ,  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)'$  e  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)'$ . O emprego de cada uma dessas representações depende do contexto em análise e visa facilitar a manipulação algébrica.

Para realizar inferências acerca das estimativas obtidas é necessário obter a variância assintótica de  $\hat{\beta}$ . Sob a validade das suposições **S1** a **S4**, o EEF tem distribuição assintoticamente normal, tal que

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \tilde{Q}^{-1}W\tilde{Q}^{-1}), \quad (2.3.3)$$

em que  $\tilde{Q}$  é definida em **S3** e  $W$  em **S3'**, tal que,  $\hat{\beta}$  será uma estimativa consistente de  $\tilde{\beta}$  se  $W$  existir.

Se a hipótese mais restritiva **S4** é verificada, então o estimador de EF tem média  $\tilde{\beta}$  (ou seja, é não enviesado) e estrutura de variância  $\text{Var}(\hat{\beta}) = \tilde{\Psi}$ . Neste caso, um estimador consistente da variância de  $\hat{\beta}$  é dado por

$$\hat{\Psi} = \hat{\sigma}^2 \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{X}_i \right)^{-1}, \quad (2.3.4)$$

sendo  $\hat{\sigma}^2 = [n(T-1) - k]^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i' \hat{u}_i$  a variância residual.

O interesse aqui recai em analisar o estimador da variância de  $\hat{\beta}$  nos casos em que a hipótese **S4** é substituída por **S4'**. Neste caso, (2.3.4) produz erros-padrão inconsistentes e, por conseguinte, uma falsa avaliação sobre a validade das estimativas obtidas. Como solução, poder-se-ia pensar, a princípio, em usar o estimador HCO proposto por White (1980). No entanto, isto não é possível pois, embora este estimador seja consistente em regressões com dados em corte transversal, torna-se inconsistente em regressões de EF, à medida que  $n$  aumenta ( $n \rightarrow \infty$ ) e  $t$  é mantido fixo (e maior que 2) (ARELLANO, 2003).

Arellano (1987) propôs uma generalização do estimador HC0 que é consistente em modelos de regressão de EF sob heterocedasticidade de forma desconhecida. Esse estimador é dado por

$$\hat{\Psi}^{(0)} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \hat{\Omega}_i^{(0)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}, \quad (2.3.5)$$

em que  $\hat{\Omega}_i^{(0)} = \hat{u}_i \hat{u}'_i$ ,  $\hat{\Omega}^{(0)} = \text{diag} \left\{ \hat{\Omega}_1^{(0)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(0)} \right\}$  e  $\hat{u}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{iT})'$  é o vetor de resíduos de EF obtido de

$$\hat{u} = \tilde{y} - \tilde{X}\hat{\beta} = (I_{nT} - \tilde{H})\tilde{y}. \quad (2.3.6)$$

A matriz  $\tilde{H} = \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'$  em (2.3.6) é conhecida como “matriz chapéu” e  $I_{nT}$  é uma matriz identidade de ordem  $nT \times nT$ . Os elementos da diagonal principal de  $\tilde{H}$  assumem valores no intervalo padrão  $(0, 1)$  e, denotando-se esses elementos por  $\tilde{h}_{it}$ , pode ser mostrado que estes possuem valor médio  $p/nT$ . Uma regra prática é considerar valores de  $\tilde{h}_{it}$  superiores a duas ou três vezes a média (isto é,  $2p/nT$  e  $3p/nT$ ) como influentes e, portanto, merecedores de análise mais detalhada.

O estimador definido em (2.3.5) não impõe qualquer restrição sobre a forma da heterocedasticidade no entanto, assume-se a independência dos erros entre os indivíduos. Deve-se notar porém que este estimador é consistente para  $n \rightarrow \infty$ , com  $T$  mantido fixo. Para garantir a consistência nos casos em que  $T \rightarrow \infty$  com  $n$  fixo ou mesmo com  $n \rightarrow \infty$ , outras considerações devem ser feitas (a propósito, ver Hansen (2007) e Stock e Watson (2008)).

Para fins de notação e para manter alguma conformidade com a nomenclatura empregada nos modelos de dados em corte transversal, ao longo do texto o estimador de Arellano, definido em (2.3.5), será denominado de CHC0 (*Clustered Heteroscedasticity-Consistent*). Os demais estimadores seguirão na mesma direção de modo que o estimador HC2 aplicado aos modelos de regressão de EF será denominado de CHC2 (*Clustered HC2*), e assim por diante.

É sabido que o estimador HC0, apesar de consistente, tende a subestimar a variância em amostras finitas. Uma correção para esta tendência é dada pelo estimador HC2, que tem o intuito de amenizar a subestimação dos erros pelos resíduos. Sua formulação nos modelos de EF pode ser feita substituindo-se  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$  por

$$\hat{\Omega}_i^{(2)} = (\hat{u}_i \hat{u}'_i) \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-1},$$

em que o termo  $\text{diag}$  é uma matriz diagonal contendo o vetor  $\{1 - \tilde{h}_i\}^{-1}$ ,  $\tilde{h}_i = (\tilde{h}_{i1}, \dots, \tilde{h}_{iT})'$ ,  $\tilde{h}_{it}$  é o  $it$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $\tilde{H}$  e  $\hat{\Omega}^{(2)} = \text{diag} \left\{ \hat{\Omega}_1^{(2)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(2)} \right\}$ .

O estimador HC3 fornece uma aproximação para o estimador *jackknife* e parte da ideia de

incorporar um ajuste baseado nas medidas de alavancagem da estimativa da matriz de covariâncias. Este estimador no contexto em análise toma a forma de

$$\hat{\Omega}_i^{(3)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-2},$$

sendo  $\hat{\Omega}^{(3)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(3)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(3)} \}$ .

O quarto estimador considerado, denominado de HC4 tem o intuito de acentuar a intensidade do ajuste feito no estimador HC3. Isto é feito elevando-se o termo de ajuste  $(1 - \tilde{h}_{it})$  à potência  $\delta_{it}$ . Então,

$$\hat{\Omega}_i^{(4)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-\delta_i},$$

$\delta_i = \left( \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{i1}}{\tilde{h}_{i1}} \right\}, \dots, \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{iT}}{\tilde{h}_{iT}} \right\} \right)'$ ,  $\tilde{h}_{it}$  é a média de  $\tilde{h}_{iT}$  e  $\hat{\Omega}^{(4)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(4)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(4)} \}$ .

Os quatro estimadores apresentados até aqui podem ser descritos dentro de um esquema comum. Para tanto, considere a expressão

$$\hat{\Psi}^{(s)} = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1},$$

em que o sobrescrito entre parênteses  $s = 0, 2, 3, 4$  indica qual dos estimadores está sendo considerado. Assim, quando  $s = 0$  está sendo empregado estimador CHC0 e, portanto, o termo  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$ . Os demais estimadores são obtidos da mesma maneira, ou seja, para o CHC2  $s = 2$  e  $\hat{\Omega}_i^{(2)}$ , o CHC3  $s = 3$  e  $\hat{\Omega}_i^{(3)}$  e o CHC4  $s = 4$  e  $\hat{\Omega}_i^{(4)}$ .

## 2.4 Estimadores intervalares consistentes sob heteroscedasticidade

Muitas vezes o pesquisador está interessado em saber a precisão de uma determinada estimativa. No entanto, uma estimativa pontual não permite obter esse tipo de informação. Quando o interesse é obter uma medida da precisão das estimativas, faz-se necessário fomar um intervalo de confiança para o parâmetro de interesse. Neste ensaio, o objetivo consiste em avaliar o desempenho dos estimadores CHC's na obtenção de intervalos de confiança para os parâmetros do modelo de regressão (2.3.1). Para tanto, serão avaliadas a amplitude e a cobertura dos intervalos de confiança para  $\beta$  construídos com as diferentes estratégias de inferência baseadas nos CHC's.

Sob homoscedasticidade e se os erros são normalmente distribuídos, (2.3.4) é um estimador válido. Sua diagonal principal contém as variâncias estimadas, com as quais são calculados os desvios padrão usados nos testes de hipóteses. Essas quantidades também são empregadas no cálculo de intervalos de confiança para cada um dos  $\beta_j$ ,  $j = 0, \dots, k$ .

Considere a quantidade

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 c_{jj}}}$$

que tem distribuição limite  $t_{nT-n-k}$ , em que  $c_{jj}$  é o  $j$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $C = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{X}_i \right)^{-1}$ . Sob homoscedasticidade o estimador do intervalo de confiança  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\beta_j$  é dado por

$$\hat{\beta}_j \pm t_{1-\alpha/2, nT-n-k} \sqrt{\hat{\sigma}^2 c_{jj}}.$$

É comum que a hipótese de homoscedasticidade dos erros não se verifique. Sob a validade de **S4'**, intervalos de confiança exatos para  $\beta_j$  podem ser construídos com um dos estimadores CHC's. Para tanto, emprega-se a quantidade

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(s)}}}, \tag{2.4.1}$$

na qual  $\hat{\omega}_{jj}^{(s)}$  é a estimativa da variância de  $\hat{\beta}_j$ , obtida a partir de um dos CHC's, ou seja, o  $j$ -ésimo elemento da diagonal principal de  $\hat{\Psi}^{(s)} = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1}$ ; em que:

- $\hat{\Omega}_i^{(0)} = (\hat{u}_i \hat{u}'_i)$  para o estimador CHC0;
- $\hat{\Omega}_i^{(2)} = (\hat{u}_i \hat{u}'_i) \cdot \text{diag} \{1 - h_i\}^{-1}$  para o estimador CHC2;
- $\hat{\Omega}_i^{(3)} = (\hat{u}_i \hat{u}'_i) \cdot \text{diag} \{1 - h_i\}^{-2}$  para o estimador CHC3; e
- $\hat{\Omega}_i^{(4)} = (\hat{u}_i \hat{u}'_i) \cdot \text{diag} \{1 - h_i\}^{-\delta_i}$  para o estimador CHC4.

Dada a consistência dos CHC's e a normalidade de  $\hat{\beta}_j$ , a expressão (2.4.1) converge para uma distribuição normal padrão, quando  $n \rightarrow \infty$  e  $T$  fixo (HANSEN, 2007). Sob estas condições um estimador consistente do intervalo de confiança  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\beta_j$  pode ser escrito na forma de

$$\hat{\beta}_j \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(s)}}, \tag{2.4.2}$$

em que  $z_{1-\alpha/2}$  é o quantil  $1 - \alpha/2$  da distribuição normal padrão e  $0 < \alpha < 1/2$ . A quantidade  $1 - \alpha$  representa o nível de confiança desejado, e ajuda a responder a pergunta: Até onde pode-se confiar na estimativa obtida de  $\hat{\beta}_j$ ?

## 2.5 Intervalos por bootstrap

A construção de intervalos de confiança consistentes sob heteroscedasticidade pode ser feita também através dos métodos de bootstrap. Este método tem a vantagem de ser livre de complexidades analíticas mas, por outro lado, são muito mais intensivos computacionalmente. Proposto por (EFRON, 1979), o bootstrap fornece uma alternativa viável para a construção de intervalos de confiança para  $\beta_j$ . Na sua forma original, no entanto, o método é inconsistente se os erros apresentam algum padrão de heteroscedasticidade.

Neste ensaio são consideradas duas maneiras distintas de se obter intervalos de confiança, válidos sob heteroscedasticidade de forma desconhecida; o bootstrap por pares e o bootstrap selvagem (ver (FLACHAIRE, 2002)). Ambos os métodos possuem boas propriedades, mas (CAMERON et al., 2008) argumentam que o bootstrap selvagem tem, na prática, melhor desempenho.

A construção dos intervalos pode ser feita de duas maneiras. A primeira, conhecida por percentil bootstrap, usa os percentis de interesse da distribuição gerada na reamostragem, como os limites do intervalo de confiança desejado. Este método funciona bem nos casos em que a distribuição gerada é simétrica e centrada na estatística observada. Na segunda forma, conhecida por bootstrap- $t$ , o intervalo de confiança definido em (2.4.2) é construído empregando-se os quantis obtidos no processo de reamostragem ao invés de  $z_{1-\alpha/2}$  (DAVIDSON; FLACHAIRE, 2001).

Se a dimensão temporal for finita e as propriedades assintóticas forem consideradas para  $n \rightarrow \infty$  e  $T$  fixo, então um intervalo de confiança para  $\beta_j$  pode ser obtido por bootstrap, desde a estrutura interna dos *clusters* seja preservada, ou seja, desde que a reamostragem seja conduzida apenas na dimensão individual ( $i$ ).

O bootstrap por pares consiste em construir pseudo-amostras reamostrando pares de observações  $(\tilde{y}_i, \tilde{X}_i)$ . O procedimento para obtenção do intervalo de confiança através do percentil bootstrap por pares, pode ser sumarizado nos seguintes passos:

(1) formar uma amostra aleatória  $\{(\tilde{y}_1^*, \tilde{X}_1^*), \dots, (\tilde{y}_n^*, \tilde{X}_n^*)\}$  de  $(\tilde{y}_i, \tilde{X}_i)$  com reposição;

(2) obter  $\hat{\beta}^* = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^{*'} \tilde{X}_i^* \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^{*'} \tilde{y}_i^*$ ;

(3) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes; e

(4) os limites superior e inferior do intervalo de confiança  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\beta_j$  ( $0 < \alpha < 1/2$ ) são, respectivamente, os quantis  $\alpha/2$  e  $1 - \alpha/2$  das  $B$  réplicas de  $\hat{\beta}_j^*$ .

O procedimento de bootstrap selvagem, proposto por (LIU, 1988), consiste em construir o intervalo reamostrando o vetor de resíduos  $\hat{u}_i$ . A simples reamostragem de  $\hat{u}_i$ , no entanto, não

é adequado quando os erros não são i.i.d.. Uma alternativa válida em modelos de regressão heteroscedásticos é utilizar o processo gerador de dados na forma

$$\tilde{y}_i^* = \tilde{X}_i \hat{\beta} + f(\hat{u}_i) w_i^*,$$

em que  $w_i^*$  é uma variável com média 0 e variância 1 e  $f(\hat{u}_i)$  é uma transformação do vetor de resíduos  $\hat{u}_i$ . De acordo com (MACKINNON, 2006), uma escolha adequada  $f(\hat{u}_i)$  é

$$f(\hat{u}_i) = \frac{\hat{u}_i}{\sqrt{1 - \hat{h}_i}}.$$

A escolha de  $w_i^*$  por sua vez, deve ser feita de maneira que a estrutura de correlação, dentro de cada *cluster*, seja preservada durante o processo de reamostragem. Uma possibilidade é usar a distribuição de Rademacher. Neste caso,  $w_i^* = 1$  é escolhido com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e  $w_i^* = -1$  com probabilidade  $\frac{1}{2}$ . O processo de construção das pseudo-amostras então é feito de maneira que  $\hat{u}_i^* = \hat{u}_i$  tem probabilidade  $\frac{1}{2}$  e  $\hat{u}_i^* = -\hat{u}_i$  também (ver a propósito (DAVIDSON; FLACHAIRE, 2001)). Esta escolha garante as propriedades desejáveis durante a reamostragem sendo, portanto, utilizada no bootstrap selvagem.

O algoritmo do percentil bootstrap selvagem pode ser resumido como se segue:

- (1) reamostrar aleatoriamente  $\hat{u}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{iT})'$  com reposição e apenas em  $i$ , sendo  $\hat{u}_i$  o vetor de resíduos obtidos da regressão de  $\tilde{y}_i$  em  $\tilde{X}_i$ ;
- (2) formar a amostra de bootstrap:  $\tilde{y}_i^* = \tilde{X}_i \hat{\beta} + \hat{u}_i^*$ , em que  $\hat{\beta}$  é o vetor de estimativas e  $\hat{u}_i^*$  o vetor de resíduos transformado;
- (3) obter  $\hat{\beta}^* = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{y}_i^*$ ;
- (4) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes; e
- (5) os limites superior e inferior do intervalo de confiança  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\beta_j$  ( $0 < \alpha < 1/2$ ) são, respectivamente, os quantis  $\alpha/2$  e  $1 - \alpha/2$  das  $B$  estimativas.

A segunda maneira de usar os métodos de bootstrap para construir intervalos de confiança é através do método de bootstrap- $t$ . Esse método consiste em construir o intervalo definido em (2.4.2) usando o CHC0 para obter uma estimativa consistente da matriz de covariâncias, em conjunção com valores críticos obtidos a partir de um esquema de bootstrap.

O esquema de bootstrap- $t$  por pares pode ser sumarizado a partir do passo (2), que é modificado para:

- (2) obter  $\hat{\beta}_j^*$  e calcular a quantidade  $\tau^* = (\hat{\beta}_j^* - \hat{\beta}_j) / \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$ , em que  $\sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$  é o erro-padrão de  $\hat{\beta}_j^*$  estimado com o CHC0;
- (3) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes; e
- (4) os limites inferior e superior do intervalo de confiança de nível  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\beta_j$  ( $0 < \alpha < 1/2$ ) são, respectivamente,  $\hat{\beta}_j - \hat{t}^{(1-\alpha/2)} \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$  e  $\hat{\beta}_j - \hat{t}^{(\alpha/2)} \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$ , em que  $\hat{t}^{(\gamma)}$  é quantil ( $0 < \gamma < 1$ ) dos  $B$  valores de  $\tau^*$  e  $\sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$  é o erro-padrão computado com o estimador consistente CHC0, calculado usando-se os dados originais e não os da pseudo-amostra.

A rotina para construção dos intervalos de confiança por bootstrap- $t$  selvagem, pode ser resumida da seguinte forma:

- (1) reamostrar aleatoriamente  $\hat{u}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{iT})'$  com reposição e apenas em  $i$ , em que  $\hat{u}_i$  é o vetor de resíduos obtidos da regressão de  $\tilde{y}_i$  em  $\tilde{X}_i$ ;
- (2) formar a amostra de bootstrap:  $\tilde{y}_i^* = \tilde{x}_i \hat{\beta} + \tilde{u}_i^*$ , em que  $\hat{\beta}$  é o vetor de estimativas e  $\tilde{u}_i^*$  o vetor de resíduos;
- (3) obter  $\hat{\beta}^* = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{y}_i^*$ ;
- (4) calcular a quantidade  $\tau^* = (\hat{\beta}_j^* - \beta_j) / \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$ , em que  $\sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$  é o erro-padrão de  $\hat{\beta}_j^*$  de obtido através do estimador CHC0;
- (5) repetir os passos anteriores grande número ( $B$ ) de vezes; e
- (6) os limites inferior e superior do intervalo de confiança de nível  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\beta_j$  ( $0 < \alpha < 1/2$ ) são, respectivamente,  $\hat{\beta}_j - \hat{t}^{(1-\alpha/2)} \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$  e  $\hat{\beta}_j - \hat{t}^{(\alpha/2)} \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$ , em que  $\hat{t}^{(\gamma)}$  é quantil ( $0 < \gamma < 1$ ) dos  $B$  valores de  $\tau^*$  e  $\sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(0)}}$  é o erro-padrão computado com o estimador consistente CHC0 calculado usando-se os dados originais e não os da pseudo-amostra.

## 2.6 Avaliação numérica

Para avaliar as propriedades em amostras finitas dos EICH's utilizamos o seguinte modelo nos experimentos de Monte Carlo:

$$y_{it} = \beta_1 x_{1,it} + \beta_2 x_{2,it} + u_{it}, \quad (2.6.1)$$

em que:

1.  $x_{it} = \alpha_i + v_{it}$ ; e
2.  $u_{it} = \alpha_i + \sigma_{it}\varepsilon_{it}$ .

Os valores de  $\alpha_i$  foram gerados da distribuição normal padrão e  $\varepsilon_{it} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Os valores de  $v_{it}$  foram gerados de duas maneiras distintas. No primeiro caso,  $v_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$  de forma que os dados contêm pontos de alta alavancagem (conjunto de dados som pontos alavancados). No segundo,  $v_{it} \sim \mathcal{U}(0, 1)$  em que não há pontos de alavanca nos dados (conjunto de dados sem pontos de alavanca). Deve-se notar que nos modelos de DP pontos de alavanca podem ocorrer em bloco ou isolados. Neste ensaio os intervalos de confiança são avaliados na presença de pontos de alavanca isolados. Foram feitas também simulações com pontos de alavanca em bloco, o que não altera as conclusões aqui apresentadas. Uma discussão abrangente sobre os vários de tipos de contaminação possíveis com DP pode ser encontrada em (BRAMATI; CROUX, 2007).

Para simular o comportamento heteroscedástico do modelo, o termo  $\sigma_{it}$  foi especificado como

$$\sigma_{it} = \sqrt{\exp[\gamma(\tilde{x}_{1,it} + \tilde{x}_{2,it}^2)]}.$$

Desta maneira, quando  $\sigma_{it} = 1$  os erros são homoscedásticos e quando  $\sigma_{it} > 1$ , os dados são heteroscedásticos, sendo tanto mais forte a heterocedasticidade, quanto maior o valor de  $\lambda$ . O grau de heteroscedasticidade é  $\lambda = (\max \sigma_{it}^2) / (\min \sigma_{it}^2)$ .

Os valores de  $x_{it}$  foram mantidos constantes ao longo das simulações com  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 0$ . Os tamanhos considerados foram de  $n = 20, 60$  e  $100$  enquanto a dimensão temporal  $T$  é mantida fixa e igual a  $5$ , conduzindo aos tamanhos amostrais  $nT = 100, 300$  e  $500$ . Inicialmente, foi gerado um conjunto de dados de tamanho  $nT = 100$ . Os demais tamanhos amostrais foram obtidos replicando-se os valores iniciais até obter o tamanho amostral desejado. Deste modo, para  $n = 60$  repetiu-se os valores das variáveis três vezes e para  $n = 100$  cinco vezes. Esta replicação tem por objetivo garantir que o grau de heterocedasticidade não se altera à medida que o número de observações aumenta.

A cobertura nominal de todos os intervalos é  $1 - \alpha = 0,95$ . O intervalo de confiança construído com base no estimador de EF foi calculado como

$$\hat{\beta}_2 \pm t_{1-\alpha/2, nT-n-1} \sqrt{\hat{\sigma}^2 c_{jj}},$$

em que  $t_{1-\alpha/2, nT-n-1}$  é o quantil  $1 - \alpha/2$  da distribuição  $t_{nT-n-1}$ . Os intervalos consistentes foram construídos com a especificação

$$\hat{\beta}_2 \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\omega}_{jj}^{(s)}},$$

sendo  $s = 0, 2, 3, 4$  para os estimadores CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4, respectivamente e  $z_{1-\alpha/2}$  o quantil  $1 - \alpha/2$  da distribuição normal padrão.

Os resultados apresentados seguir, foram obtidos com 50.000 réplicas de Monte Carlo e com 999 réplicas de bootstrap. Na Tabela 2.6.1 são apresentados os valores máximos de  $\tilde{h}_{it}$  usados na identificação dos pontos de alavanca, em cada um dos conjuntos de dados gerados. Os valores limites de  $2p/n$  e  $3p/n$ , usados na identificação desses pontos, também são mostrados.

Quando os valores da covariável são gerados da distribuição  $\mathcal{LN}(0, 1)$ , existem 6 pontos de alavancagem sendo, o maior grau de alavancagem mais de três vezes (3, 35) maior que o limite de  $3p/n$ . Por outro lado, quando os valores da covariável são obtidos a partir da distribuição  $\mathcal{U}(0, 1)$ , a alavancagem máxima não excede o valor limite de  $3p/n$ , criando um conjunto de dados sem pontos de alavanca.

**Tabela 2.6.1** Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados.

$n$	$T$	$\tilde{h}_{max}$		limites	
		$\mathcal{U}(0, 1)$	$\mathcal{LN}(0, 1)$	$2p/nT$	$3p/nT$
20	5	0,0524	0,2012	0,040	0,060
60	5	0,0175	0,0671	0,013	0,020
100	5	0,0105	0,0402	0,008	0,012

As taxas de cobertura e as amplitudes médias dos intervalos de confiança para o parâmetro  $\beta_2$  quando os dados não contêm pontos alavancados são mostrados nas Tabelas 2.6.2 e 2.6.3. A amplitude do intervalo de confiança é inversamente proporcional ao tamanho da amostra.

Os resultados mostram que os intervalos de confiança obtidos com os CHC's têm coberturas empíricas próximas ao nível nominal estabelecido, para todos os tamanhos amostrais. Nota-se, no entanto, que há excesso de cobertura, notadamente quando  $\lambda = 98, 91$ . A amplitude média dos intervalos de confiança são também muitos semelhantes. As amplitudes médias de todos os intervalos aumentam substancialmente em relação ao caso homocedástico. Por exemplo, com  $n = 20$  o CHC0 tem amplitude média de 1,492 quando  $\lambda = 1$  e salta para 2,641 com  $\lambda = 98, 91$ . O intervalo obtido com o EEF, tem amplitude média de 1,600 sob homoscedasticidade, que aumenta para 2,457 quando  $\lambda = 98, 91$ .

Os resultados apresentados na Tabela 2.6.3 mostra que as taxas de cobertura e amplitudes médias dos intervalos construídos com o método do bootstrap por pares e bootstrap selvagem são semelhantes as observadas nos estimadores consistentes. O bootstrap selvagem (BSC) apresenta resultados ligeiramente superiores, possuindo taxas de cobertura mais próximas ao nível de cobertura nominal. A amplitude média do bootstrap- $t$  selvagem é a maior dentre todos os estimadores considerados. Com  $n = 20$ , essas amplitudes são de 1,713; 1,957; 2,383 e 3,046 para  $\lambda$ 's iguais a 1; 4,62; 21,39 e 98,91; respectivamente.

Os resultados reportados nas Tabelas 2.6.4 e 2.6.5 dizem respeito ao conjunto de dados que possui pontos de alta alavancagem. Na Tabela 2.6.4, que apresenta resultados relativos aos intervalos construídos com os estimadores consistentes e de EF, pode-se notar, logo de início,

que sob homoscedasticidade ( $\lambda = 1$ ) este último é o que apresenta o melhor desempenho dentre todos os estimadores avaliados. As coberturas são virtualmente idênticas ao nível nominal, para todos os tamanhos amostrais. Dentre os estimadores consistentes o CHC4 conduz às melhores taxas de cobertura, notadamente sob severa heteroscedasticidade ( $\lambda = 98,51$ ). O CHC0 é o que apresenta as piores taxas de cobertura. Por exemplo, com  $n = 20$ , essas taxas são 88,09% para  $\lambda = 1$ , 85,15% para  $\lambda = 4,62$ , 83,10% para  $\lambda = 21,33$  e 84,20% para  $\lambda = 98,51$ .

O EICH construído com o CHC0 tem, sob homoscedasticidade, a menor de todas as amplitudes médias. Na presença de heteroscedasticidade apenas a amplitude do estimador de EF é menor que a do CHC0, a despeito de sua inconsistência. Nota-se também que o estimador CHC4 apresenta as maiores amplitudes para todos os valores de  $\lambda$  e em todos os tamanhos amostrais.

No menor dos tamanhos amostrais considerados ( $n = 20$ ), as coberturas empíricas do intervalo CHC0 deterioram-se consideravelmente. Sob heteroscedasticidade ( $\lambda = 4,62, 21,33$  e  $98,51$ ), essas taxas são 85,15%, 83,10% e 84,20%. Observa-se aqui, que os intervalos obtidos com o estimador CHC0 podem apresentar desempenhos ruins quando o tamanho da amostra não é grande e, apesar de melhorar na medida em que o tamanho amostral aumenta, não supera os demais estimadores consistentes.

Com dados heteroscedásticos, o estimador CHC4 conduz às melhores taxas de cobertura. O EICH construído com este estimador é o menos sensível ao aumento do grau de heteroscedasticidade. Por exemplo, sob heteroscedasticidade forte ( $\lambda = 98,51$ ) e  $n = 20$ , a cobertura empírica para o intervalo de confiança para  $\beta_2$  se mantém próxima a 95% (93,49%). Já as coberturas do CHC2 e CHC3 são, respectivamente, 92,06% e 93,92%.

No geral, os resultados favorecem o estimador intervalar CHC4, principalmente quando o tamanho amostral não é grande e/ou existem pontos de alavanca nos dados. Seu comportamento é mais confiável do que os dos intervalos obtidos com os estimadores CHC0, CHC2 ou mesmo o CHC3. À medida que o tamanho amostral aumenta, essas diferenças tornam-se menos significativas, mas o EICH CHC4 preserva suas qualidades.

No que tange aos resultados relativos aos EICH's percentil- $t$  e bootstrap- $t$  nota-se que esse último produz intervalos com melhor qualidade. O uso do bootstrap- $t$  selvagem, identificado na Tabela 2.6.5 por BSC- $t$ , resulta nas melhores taxas de cobertura. Por exemplo, com  $n = 20$ , as taxas de cobertura empíricas observadas são 95,07%, 95,03%, 94,49% e 95,90 para valores de  $\lambda$  de 1 a 98,51, respectivamente. Para esse mesmo tamanho amostral, as taxas de cobertura para o bootstrap- $t$  por pares (BPC- $t$ ) são 92,56% com  $\lambda = 1$ ; 91,93% com  $\lambda = 4,62$ ; 94,36% com  $\lambda = 21,33$  e 96,94% com  $\lambda = 98,51$ . Contrastando esses resultados com os obtidos com o método de bootstrap percentil- $t$  pode-se perceber que este último apresenta desempenho bastante inferior ao primeiro. O percentil- $t$  por pares (identificado na Tabela 2.6.5 por BPC- $t$ ) tem taxas de coberturas melhores que o intervalo percentil- $t$  selvagem. Por exemplo, com  $n = 20$  e  $\lambda = 4,62$  essas taxas são 89,82% e 82,87%, respectivamente.

Com  $n = 60$  a taxa de cobertura do estimador intervalar bootstrap percentil- $t$  selvagem é bastante próxima ao nível nominal, o que permite concluir que este EICH tem o melhor

**Tabela 2.6.2** Intervalos de confiança para  $\beta_1$  na ausência de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	Cobertura (%)					Amplitude				
				EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
20	5	0,00	1,00	97,38	96,04	96,24	96,43	96,38	1,600	1,497	1,520	1,542	1,536
			4,62	96,82	96,12	96,32	96,54	96,49	1,733	1,716	1,742	1,770	1,764
			2,98	96,25	96,21	96,43	96,60	96,57	2,008	2,081	2,116	2,151	2,145
			4,47	95,55	96,07	96,33	96,55	96,53	2,457	2,641	2,687	2,734	2,730
60	5	0,00	1,00	96,00	94,99	95,12	95,22	95,19	0,916	0,896	0,901	0,905	0,904
			4,62	96,12	96,22	96,36	96,49	96,45	0,993	1,026	1,031	1,037	1,035
			2,98	96,17	97,01	97,08	97,14	97,14	1,153	1,248	1,255	1,262	1,261
			4,47	95,51	96,96	97,02	97,09	97,09	1,415	1,587	1,596	1,606	1,605
100	5	0,00	1,00	95,01	94,57	94,64	94,72	94,70	0,708	0,699	0,701	0,703	0,703
			4,62	93,87	94,65	94,72	94,78	94,77	0,769	0,801	0,803	0,806	0,805
			2,98	93,70	96,13	96,21	96,30	96,28	0,892	0,974	0,977	0,980	0,980
			4,47	95,60	97,18	97,22	97,26	97,26	1,096	1,239	1,243	1,248	1,247

**Tabela 2.6.3** Intervalos de confiança para  $\beta_1$  na ausência de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	Cobertura (%)				Amplitude			
				BPC	BSC	BPC- $t$	BSC- $t$	BPC	BSC	BPC- $t$	BSC- $t$
20	5	0,00	1,00	96,29	96,20	97,51	97,58	1,518	1,494	1,713	1,683
		1,49	4,62	96,18	95,97	97,45	97,18	1,732	1,705	1,957	1,919
		2,98	21,39	95,92	95,71	97,49	97,27	2,099	2,065	2,383	2,326
		4,47	98,91	96,37	96,24	97,82	97,56	2,669	2,628	3,046	2,959
60	5	0,00	1,00	94,76	94,82	95,76	95,78	0,897	0,893	0,929	0,927
		1,49	4,62	96,09	96,25	96,85	97,02	1,026	1,022	1,064	1,061
		2,98	21,39	97,06	97,02	97,52	97,54	1,250	1,245	1,296	1,292
		4,47	98,91	97,13	97,03	97,78	97,63	1,586	1,579	1,647	1,640
100	5	0,00	1,00	94,25	94,22	94,88	94,86	0,697	0,696	0,712	0,711
		1,49	4,62	94,40	94,45	94,96	95,00	0,799	0,797	0,816	0,815
		2,98	21,39	96,12	96,14	96,78	96,66	0,972	0,969	0,992	0,991
		4,47	98,91	97,10	97,09	97,41	97,30	1,240	1,237	1,267	1,266

desempenho dentre todos os estimadores intervalares avaliados até aqui. Os números também mostram que o intervalo construído com BPC supera o BSC quando a matriz de regressores contém pontos de alavanca. Com  $n = 20$  e  $\lambda = 98,53$ ; por exemplo, as taxas de cobertura são, respectivamente, 89,87 e 78,52 e, com  $n = 100$  tornam-se 92,00 e 91,89.

As taxas de cobertura empírica obtidas com o BSC- $t$  são, notadamente, as mais próximas da cobertura nominal (95%), principalmente quando existem pontos de alavanca nos dados. O EICH CHC4 é o que mais se aproxima em termos de desempenho do BSC- $t$ , não necessitando contudo do mesmo custo computacional. Por este motivo, o CHC4 fornece uma alternativa bastante próxima ao BSC- $t$ .

## 2.7 Regiões de confiança

Muitas vezes, o usuário está interessado em definir não um intervalo mas, uma região de confiança para os parâmetros, ou seja, definir um 'intervalo' de confiança multidimensional. É possível definir regiões de confiança para os parâmetros de um modelo de regressão de EF, as-

**Tabela 2.6.4** Intervalos de confiança para  $\beta_1$  na presença de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	Cobertura (%)								Amplitude			
				EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4		
20	5	0,00	1,00	94,88	88,09	89,19	90,35	92,26	92,26	0,299	0,260	0,272	0,285	0,313	
			0,04	84,38	85,15	86,74	88,36	91,08	0,313	0,354	0,375	0,399	0,450		
			0,08	64,29	83,10	85,48	87,83	91,28	0,342	0,558	0,598	0,643	0,742		
			0,12	45,52	84,20	87,09	89,54	93,49	0,413	0,977	1,054	1,140	1,334		
60	5	0,00	1,00	95,06	92,96	93,33	93,67	94,27	94,27	0,171	0,164	0,166	0,169	0,173	
			0,04	84,26	91,80	92,30	92,81	93,64	0,180	0,233	0,238	0,243	0,252		
			0,08	64,85	91,13	91,79	92,37	93,37	0,199	0,384	0,393	0,402	0,421		
			0,12	46,97	90,96	91,72	92,45	93,72	0,248	0,693	0,711	0,729	0,766		
100	5	0,00	1,00	94,98	93,76	93,97	94,19	94,57	94,57	0,133	0,129	0,130	0,131	0,133	
			0,04	84,38	93,15	93,42	93,72	94,27	0,139	0,186	0,188	0,190	0,194		
			0,08	64,90	92,61	92,95	93,29	93,96	0,155	0,308	0,312	0,316	0,325		
			0,12	47,81	92,67	93,08	93,50	94,22	0,194	0,558	0,567	0,575	0,592		

**Tabela 2.6.5** Intervalos de confiança para  $\beta_1$  na presença de pontos de alavanca: cobertura (%) e amplitude.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	Cobertura (%)				Amplitude			
				BPC	BSC	BPC- $t$	BSC- $t$	BPC	BSC	BPC- $t$	BSC- $t$
20	5	0,00	1,00	91,26	87,30	92,56	95,07	0,292	0,248	0,362	0,351
		0,04	4,62	89,82	82,87	91,93	95,03	0,377	0,330	0,582	0,522
		0,08	21,33	89,24	79,33	94,36	94,49	0,559	0,497	1,098	0,818
		0,12	98,51	89,87	78,52	96,94	95,90	0,939	0,834	2,395	1,306
60	5	0,00	1,00	93,51	93,07	94,66	95,04	0,168	0,164	0,182	0,181
		0,04	4,62	92,88	91,77	95,17	95,14	0,235	0,231	0,273	0,266
		0,08	21,33	91,34	90,30	96,51	94,54	0,382	0,377	0,481	0,447
		0,12	98,51	90,59	89,78	98,17	95,05	0,684	0,673	0,923	0,810
100	5	0,00	1,00	93,68	93,37	94,26	94,61	0,130	0,129	0,136	0,136
		0,04	4,62	93,32	92,87	94,83	94,64	0,186	0,185	0,203	0,200
		0,08	21,33	92,83	92,43	96,57	94,98	0,306	0,305	0,348	0,337
		0,12	98,51	92,00	91,89	97,72	94,72	0,553	0,549	0,648	0,612

sintoticamente válidos sob heteroscedasticidade de forma desconhecida, usando os estimadores da Seção 2.3.

Para tanto, considere o modelo definido em (2.6.1). A matriz de regressores é composta por duas matrizes. Em sua forma transformada e empilhada, pode ser representada por  $\tilde{X} = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]$ . Da mesma maneira, o número parâmetros do modelo é dado por  $k = k_1 + k_2$ . O estimador de EF de  $\beta_2$  pode ser obtido através da fórmula

$$\hat{\beta}_2 = (\tilde{R}'_2 \tilde{R}_2)^{-1} \tilde{R}'_2 \tilde{y}, \quad (2.7.1)$$

com  $\tilde{R}_2 = \tilde{M}_1 \tilde{X}_2$  e  $\tilde{M}_1 = I_{nT} - \tilde{X}_1 (\tilde{X}'_1 \tilde{X}_1)^{-1} \tilde{X}'_1$ . Sob a validade das hipóteses estabelecidas na Seção 2.3,  $\hat{\beta}_2$  é assintoticamente normal com média  $\beta_2$  e variância

$$\tilde{\Psi}_{22} = (\tilde{R}'_2 \tilde{R}_2)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{r}'_{i,2} \tilde{u}_i \tilde{u}'_i \tilde{r}_{i,2} \right) (\tilde{R}'_2 \tilde{R}_2)^{-1},$$

em que  $\tilde{r}_i = (\tilde{r}_{i1}, \dots, \tilde{r}_{iT})'$  e  $\tilde{R} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)'$ . Então, a forma quadrática

$$\tilde{W} = (\hat{\beta}_2 - \beta_2)' \tilde{\Psi}_{22}^{-1} (\hat{\beta}_2 - \beta_2)$$

tem distribuição assintótica  $\chi_1^2$ . Este resultado se mantém quando  $\tilde{\Psi}_{22}$  é substituído por um estimador consistente da matriz de covariâncias, tal que  $\text{plim}(\hat{\Psi}) = \tilde{\Psi}$ . Sendo assim, é possível substituir  $\tilde{\Psi}_{22}$  por um dos CHC's descritos anteriormante, de forma que

$$\hat{\Psi}_{22}^{(s)} = (\tilde{R}'_2 \tilde{R}_2)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{r}'_{i,2} \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{r}_{i,2} \right) (\tilde{R}'_2 \tilde{R}_2)^{-1}.$$

De posse deste resultado, uma região de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\beta_2$  corresponde ao conjunto de pontos que satisfazem a desigualdade

$$\hat{W}_{22}^{(s)} < \chi_{p_2, \alpha}^2, \quad (2.7.2)$$

na qual  $\hat{W}_{22}^{(s)} = (\hat{\beta}_2 - \beta_2)' (\hat{\Psi}_{22}^{(s)})^{-1} (\hat{\beta}_2 - \beta_2)$  e o sobrescrito entre parênteses  $s = 0, 2, 3$  ou  $4$  indica qual dos estimadores está sendo considerado (ver (CRIBARI-NETO; LIMA, 2009) e (HANSEN, 2007)).

Para avaliar numericamente os desempenhos dos estimadores consistentes na construção de regiões de confiança, o seguinte modelo de regressão foi utilizado:

$$y_{it} = \beta_1 x_{it,1} + \beta_2 x_{it,2} + \beta_3 x_{it,3} + u_{it}. \quad (2.7.3)$$

Os valores da covariável, assim como antes, foram selecionados das distribuições  $\mathcal{U}(0, 1)$  e  $\mathcal{LN}(0, 1)$ , conduzindo aos mesmos conjuntos de dados com e sem pontos de alavanca. O número de réplicas, os tamanhos amostrais considerados e o nível nominal permanecem os mesmos. As simulações foram realizadas em ambos os casos de homoscedasticidade e heteroscedasticidade com  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$  e  $\beta_3 = 0$ .

**Tabela 2.7.1** Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados.

$n$	$T$	$\tilde{h}_{max}$		limites	
		$\mathcal{U}(0, 1)$	$\mathcal{LN}(0, 1)$	$2p/nT$	$3p/nT$
20	5	0,230	0,082	0,060	0,090
60	5	0,077	0,027	0,020	0,030
100	5	0,046	0,016	0,012	0,018

As taxas de cobertura reportadas nas Tabelas 2.7.2 e 2.7.3, correspondem aos percentis de vezes em que (2.7.2) é verificada para  $\beta_2$  e  $\beta_3$ . Além das regiões de confiança conjuntas, são

apresentadas ainda as taxas de cobertura individuais para as regiões de confiança individuais de  $\beta_2$  e  $\beta_3$ . Em ambos os casos, foram usados os CHC's e os CHCR's como estimadores de  $\tilde{\Psi}$ . Os valores máximos de  $\tilde{h}_{it}$  e os limites usados na identificação dos pontos de alavanca, em cada um dos desenhos de regressão de (2.7.3) são apresentados na Tabela 2.7.1.

Quando os dados não contêm pontos alavancados (Tabela 2.7.2), nota-se que os EICH's CHC0 e CHC2 apresentam os maiores problemas de subcobertura quando  $n = 20$ . Pode-se notar também que as taxas de coberturas conjuntas são sempre maiores do que as individuais, sendo esta diferença maior quando são usados dados alavancados.

Os EICH's CHC3 e CHC4, que têm desempenhos similares, apresentam as melhores taxas de cobertura neste mesmo tamanho amostral. No entanto, à medida que o tamanho amostral cresce, a distorção é bastante minimizada. Por exemplo, com  $n = 60$  e  $\lambda = 98,53$ ; as taxas de cobertura empíricas para as regiões confiança conjuntas são 93,14%; 93,33%; 93,54% e 93,53%; respectivamente para os estimadores CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4. Com  $n = 100$  todos estimadores já produzem taxas de cobertura próximas ao nível nominal especificado.

Quando existem pontos de alavanca nos dados (Tabela 2.7.3), a região de confiança conjunta construída com o estimador CHC0 e sob heteroscedasticidade forte ( $\lambda = 98,66$  e  $n = 20$ ) tem taxa de cobertura de apenas 77,96%. Em comparação, os valores correspondentes dos EICH's CHC3 e CHC4, são 85,24% 90,35%. Com  $n = 100$  e  $\lambda = 98,66$ , as taxas de cobertura empíricas para as regiões confiança conjuntas são 92,10%, 92,58%, 93,06% 93,87%; respectivamente para os estimadores CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4. Mais uma vez, os resultados permitem concluir que as regiões de confiança baseadas no estimador CHC4, superam as construídas com o demais CHC's quando são empregados resíduos irrestritos e os dados possuem pontos de alavanca. Com dados sem pontos de alavanca (Tabela 2.7.2), as regiões de confiança têm taxas de cobertura similares sendo o EICH CHC3 aquele que tem desempenho mais próximo ao do CHC4.

## 2.8 Considerações finais

Não é raro que regressões com DP e EF violem a hipótese de homoscedasticidade dos erros. Nessa situação, uma estratégia comumente utilizada em trabalhos aplicados é recorrer ao estimador consistente da matriz de covariâncias proposto por Arellano (aqui chamado de CHC0). Este ensaio teve por objetivo obter evidências numéricas, em amostras finitas, sobre o desempenho do CHC0 e de outros estimadores consistentes da matriz de covariâncias na construção de intervalos e regiões de confiança. Para tanto, avaliou-se numericamente o comportamento de uma classe de estimadores consistentes estendidos para modelos de EF, comparando ainda seus desempenhos com os obtidos através de dois métodos de bootstrap.

Os resultados mostram que as taxas de cobertura dos intervalos baseados na opção mais popular, o estimador CHC0, podem ser bastante enganosas quando o tamanho da amostra é pequeno e, em particular, na presença de pontos de alavanca. De maneira geral, os resultados favorecem o estimador intervalar CHC4, que exibiu comportamento mais confiável que os

**Tabela 2.7.2** Regiões de confiança para  $\beta_2$  e  $\beta_3$  na ausência de pontos de alavanca nos dados.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	$\beta_2$				$\beta_3$				$\beta_2$ e $\beta_3$			
				CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
20	5	0,00	1,00	92,05	92,45	92,85	92,78	92,19	92,58	92,98	92,86	88,97	89,53	90,12	89,95
				92,09	92,50	92,87	92,81	92,17	92,57	93,00	92,91	88,93	89,55	90,18	90,02
				91,94	92,39	92,84	92,81	92,39	92,81	93,22	93,16	89,07	89,76	90,40	90,28
				91,62	92,13	92,62	92,60	92,19	92,66	93,10	93,05	88,51	89,29	89,95	89,87
60	5	0,00	1,00	94,17	94,27	94,40	94,37	94,11	94,24	94,33	94,30	93,13	93,28	93,45	93,40
				94,06	94,19	94,30	94,27	94,02	94,17	94,33	94,29	93,18	93,37	93,56	93,54
				94,05	94,19	94,33	94,32	94,11	94,23	94,35	94,34	93,09	93,30	93,49	93,47
				93,89	94,06	94,23	94,23	94,07	94,22	94,36	94,33	93,14	93,33	93,54	93,53
100	5	0,00	1,00	94,45	94,53	94,56	94,55	94,54	94,61	94,69	94,67	93,96	94,08	94,17	94,14
				94,61	94,69	94,76	94,75	94,46	94,52	94,57	94,56	93,99	94,11	94,21	94,18
				94,43	94,49	94,56	94,55	94,43	94,52	94,61	94,59	94,02	94,12	94,22	94,22
				94,38	94,46	94,56	94,56	94,42	94,51	94,59	94,59	93,81	93,93	94,08	94,08

**Tabela 2.7.3** Regiões de confiança para  $\beta_2$  e  $\beta_3$  na presença de pontos de alavanca nos dados.

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	$\beta_2$				$\beta_3$				$\beta_2$ e $\beta_3$			
				CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
20	5	0,00	1,00	88,24	89,61	90,90	92,86	88,09	89,19	90,35	92,26	83,21	85,22	87,02	89,91
				87,21	88,68	90,05	92,35	85,15	86,74	88,36	91,08	80,22	82,63	84,96	88,71
				86,92	88,50	90,04	92,32	83,02	85,41	87,76	91,24	78,65	81,74	84,66	88,99
				86,93	88,55	90,06	92,61	81,61	84,95	87,89	92,66	77,96	81,78	85,24	90,35
60	5	0,00	1,00	92,81	93,25	93,67	94,34	92,96	93,33	93,67	94,27	91,43	91,99	92,58	93,44
				92,46	92,95	93,34	94,04	91,80	92,30	92,81	93,64	90,49	91,14	91,81	92,95
				92,40	92,86	93,36	94,12	91,13	91,79	92,37	93,37	90,10	90,89	91,65	92,93
				92,14	92,75	93,21	94,10	90,77	91,53	92,25	93,51	89,79	90,74	91,54	92,99
100	5	0,00	1,00	93,82	94,07	94,28	94,72	93,76	93,97	94,19	94,57	93,00	93,30	93,61	94,09
				93,67	93,94	94,16	94,55	93,15	93,42	93,72	94,27	92,44	92,86	93,22	93,89
				93,41	93,70	93,98	94,44	92,61	92,95	93,29	93,96	92,19	92,62	93,04	93,78
				93,38	93,70	93,99	94,46	92,67	93,07	93,49	94,20	92,10	92,58	93,06	93,87

demais. Com dados sem alavancagem, o desempenho do estimador CHC4 mostra-se similar ao do CHC3 mas, quando os dados possuem pontos de alavanca o desempenho do estimador CHC4 supera o do CHC3.

Intervalos construídos por bootstrap também foram avaliados e comparados com os CHC's. Duas técnicas foram consideradas: bootstrap por pares e bootstrap selvagem. A partir destes dois métodos, os intervalos foram obtidos por percentil bootstrap e bootstrap- $t$ . Dentre esses estimadores o BSC- $t$  apresenta comportamento ainda melhor que o do CHC4. Nota-se também que o estimador BSC exibe fraca cobertura dados contêm pontos de alta alavancagem. O BPC tem desempenho melhor que o BSC nesse contexto, principalmente quando a amostra é pequena e há forte heteroscedasticidade. Já o BPC- $t$  apresenta, no geral, um comportamento melhor que o BPC.

# Avaliação de testes em modelos de efeitos fixos heteroscedásticos

## 3.1 Introdução

Não é incomum que modelos de regressão de Efeitos Fixos (EF) apresentem comportamento heteroscedástico (variância não constante dos erros), que decorre naturalmente das diferenças individuais. Neste caso, é sabido que o Estimador de Efeitos Fixos (EEF) dos parâmetros da regressão permanece imparcial, consistente e assintoticamente normal. O estimador da matriz de covariâncias das estimativas dos parâmetros, no entanto, passa a ser enviesado e inconsistente, ou seja, não converge em probabilidade para seu verdadeiro valor à medida que o tamanho amostral cresce.

O EEF tem sido amplamente empregado nas análises econométricas de Dados em Paineis (DP) como maneira de tratar a questão da heterogeneidade individual. Em um modelo linear heteroscedástico de EF, quando a forma da heteroscedasticidade não é conhecida, o procedimento geralmente adotado é empregar o EEF para estimar os parâmetros do modelo juntamente com um estimador consistente de sua matriz de covariâncias.

O estimador proposto por Arellano (1987), que pode ser visto como uma extensão do estimador HC0 (*heteroskedasticity consistent estimator*) proposto por White (1980), é o mais utilizado em aplicações práticas. Este estimador é bastante popular pois sua consistência é mantida mesmo sob pressupostos fracos, além de permitir a existência de autocorrelação dentro de cada grupo.

O objetivo deste artigo é empregar métodos de integração numérica para avaliar a confiabilidade de testes quase- $t$  que são assintoticamente válidos sob heteroscedasticidade. Além do estimador de Arellano, serão avaliados também, três outras variantes do HC0, estendidas para os modelos de EF, a saber: o HC2, proposto por Horn et al. (1975); HC3, introduzido por Davidson e MacKinnon (1993) e o HC4, proposto por Cribari-Neto (2004). Nos modelos de dados em corte transversal, os resultados baseados em simulações de Monte Carlo favorecem o estimador HC4, principalmente quando existem pontos de alanca nos dados. Neste ensaio serão apresentados resultados exatos a obtidos através dos métodos de integração numérica. Uma outra questão a ser analisada é o uso de resíduos restritos na construção dos estimadores.

Uma avaliação dos testes baseados nesses estimadores nos modelos de regressão com dados em corte transversal foi feita por Chesher e Austin (1991). Cribari-Neto et al. (2005)

conduziram uma nova avaliação, desta vez incorporando uma classe de estimadores corrigidos para viés em suas análises. No entanto, ainda não foi feita uma avaliação deste tipo nos modelos de regressão de EF. Ademais, dada a frequência com que o problema da heteroscedasticidade ocorre nos modelos de EF, torna-se importante verificar os desempenhos de testes quase- $t$  que são construídos usando-se estimativas dos erros-padrão obtidas com os estimadores consistentes. Isto porque nada garante que estimadores com menor viés forneçam estatísticas de teste cujas distribuições nulas exatas (desconhecidas) estejam mais próximas da distribuição assintótica utilizada na realização do teste.

Além dessa introdução, a Seção seguinte estende os estimadores HC2, HC3 e HC4 para os modelos de EF. Na terceira Seção, a forma exata da distribuição do teste é derivada. Na quarta Seção, é feita uma breve exposição sobre o algoritmo de Imhof (1961), que será usado nas simulações. Os resultados numéricos são apresentados na Seção 3.5 e, por fim, são feitas algumas considerações finais na Seção 3.6.

### 3.2 Modelo e estimadores

O modelo de regressão de interesse é o linear de EF, que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}\beta + u_{it}, \quad (3.2.1)$$

em que o subscrito  $i = 1, \dots, n$  denota a dimensão individual e  $t = 1, \dots, T$  indica a dimensão temporal, de forma que existem  $T$  observações sobre cada indivíduo.  $x_{it}$  é um vetor  $1 \times p$  de covariáveis e  $u_{it}$  é o componente de erro. O termo  $\alpha_i$  capta o efeito não observável causado pela heterogeneidade e  $u_{it}$  é i.i.d. variando tanto em  $i$  quanto em  $t$  que, por este motivo, é chamado erro idiossincrático ou distúrbio idiossincrático (WOOLDRIDGE, 2002).

O modelo (3.2.1) pode ainda ser representado em notação vetorial. Empilhando-se as  $T$  observações de cada  $i$ , (3.2.1) toma a forma

$$y_i = \alpha_i + X_i\beta + u_i,$$

em que cada  $i$  é um vetor de dimensão  $T \times 1$ , tal que  $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{iT})'$ ,  $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{iT})'$  e  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{iT})'$ . Empilhando-se novamente as observações, é possível também escrever

$$y = \alpha \otimes \iota_T + X\beta + u, \quad (3.2.2)$$

sendo  $y = (y_1, \dots, y_n)'$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)'$  e  $X = (X_1, \dots, X_n)'$ . O efeito fixo é captado por  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$ , sendo  $\iota_T$  é um vetor  $T \times 1$  de uns e  $\otimes$  denota o produto de kronecker.  $y$  é um vetor  $n \times 1$  de observações da variável dependente,  $X$  uma matriz  $n \times k$  de regressores (com  $p < n$ ),  $\beta$  o vetor  $p \times 1$  de parâmetros desconhecidos e  $u$  um vetor  $n \times 1$  de erros aleatórios. As três representações acima são equivalentes e serão empregadas de acordo com o contexto em

análise, visando simplificar a manipulação algébrica.

O problema na estimação de (3.2.2) é a presença do efeito individual que cresce à medida que  $n \rightarrow \infty$ . Para contornar este problema, o EFE parte da ideia de transformar o modelo de modo a eliminar o efeito fixo. Isto pode ser feito subtraindo de cada variável do modelo sua média temporal. Para tanto, considere a seguinte matriz  $D$  capaz de efetuar a transformação desejada

$$D = I_{nT} - I_n \otimes \left( \frac{1}{T} \times \iota_T \right),$$

onde  $I_{nT}$  é uma matriz identidade de ordem  $nT \times nT$ ,  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n \times n$  e  $\iota_T$  uma matriz unitária de dimensão  $T \times T$ . Pré multiplicando (3.2.2) pela matriz  $Q$ , obtém-se o modelo transformado,

$$\tilde{y} = \tilde{X}\tilde{\beta} + \tilde{u}, \quad (3.2.3)$$

onde  $\tilde{y} = Dy$ ,  $\tilde{X} = DX$  e  $\tilde{u} = Du$ .

Em outras palavras, a matriz  $D$  retira o efeito fixo causado pela heterogeneidade individual.

As seguintes suposições são usualmente feitas sobre o modelo de regressão de EF:

**S1**  $(X_i, u_i)$  são i.i.d. em  $i$ ;

**S2**  $\mathbb{E}(u_{it} | X_i) = 0$ ;

**S3**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{X}_i \right) = \tilde{Q}$ , em que  $\tilde{Q}$  é uma matriz positiva definida;

**S3'**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\tilde{X}'_i \tilde{u}_i \tilde{u}'_i \tilde{X}_i) = W$ ;

**S4**  $\mathbb{E}(u_i u'_i | X_i) = \sigma^2 I_T$ , em que  $I_T$  é a matriz identidade de ordem  $T \times T$ ;

**S4'**  $\mathbb{E}(u_i u'_i | X_i) = \Omega_i$ ;

Sob as suposições **S1** e **S2** o EEF é não enviesado e consistente, ou seja,  $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$  e  $\text{plim}(\hat{\beta}) = \beta$ . **S1** impõe a independência entre os indivíduos, descartando correlação espacial, mas permite a existência de autocorrelação temporal e de heterogeneidade individual. **S2** garante a exogeneidade estrita de  $X_i$  e **S3** afirma que não há multicolinearidade perfeita entre as variáveis explicativas. A suposição **S4** assegura a homocedasticidade dos erros. Por outro lado, se **S4'** é válida então os erros não possuem variância constante. Se **S3** e **S4** são válidas, então o EEF é o Melhor Estimador Linear Não-Viesado de  $\beta$  (MELNV) (HAYASHI, 2000).

O EEF de  $\beta$  é obtido aplicando-se o estimador de MQO à equação (3.2.3). Isto significa minimizar a soma dos quadrados dos erros, ou seja, encontrar o mínimo de

$$\tilde{u}'\tilde{u} = (\tilde{y} - \tilde{X}\tilde{\beta})'(\tilde{y} - \tilde{X}\tilde{\beta}),$$

cujas solução é dada por

$$\hat{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{y}.$$

Para avaliar a precisão das estimativas  $\hat{\beta}$  é necessário obter sua variância assintótica. Sob a validade das suposições **S1** a **S4'** o EFE tem distribuição assintoticamente normal, tal que

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \tilde{Q}^{-1}W\tilde{Q}^{-1}),$$

em que  $\tilde{Q}$  é definida em **S3** e  $W$  em **S3'**, tal que,  $\hat{\beta}$  será uma estimativa consistente de  $\beta$  se  $W$  existir.

Se a hipótese mais restritiva **S4** é verificada, então o estimador da variância de  $\hat{\beta}$  é dado por

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \tilde{X}_i \right)^{-1}, \quad (3.2.4)$$

sendo  $\hat{\sigma}^2$  a variância residual definida como  $[n(T-1) - p]^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i' \hat{u}_i$ .

O interesse aqui recai em analisar o estimador da variância de  $\hat{\beta}$  nos casos em que a hipótese **S4** é substituída por **S4'**. Neste caso, (3.2.4) produz erros-padrão inconsistentes e, por conseguinte, pode-se chegar a uma falsa avaliação sobre a validade das estimativas obtidas. Como solução, pode-se pensar, a princípio, em usar o estimador HC0 proposto por White (1980). No entanto, isto não é possível pois, embora este estimador seja consistente em regressões com dados em corte transversal, torna-se inconsistente em regressões de EF, à medida que  $n$  aumenta ( $n \rightarrow \infty$ ) e  $T$  é mantido fixo (e maior que 2) (ARELLANO, 2003).

Arellano (1987) propôs um estimador consistente em modelos de regressão de EF sob heterocedasticidade de forma desconhecida, que pode ser visto como generalização do HC0. Este estimador é comumente conhecido por estimador Cluster-Robusto da Matriz de Covariâncias (CRMC) e tem sido amplamente utilizado em aplicações práticas. Sua representação pode ser feita da forma:

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \hat{\Omega}_i^{(0)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}, \quad (3.2.5)$$

em que  $\hat{\Omega}_i^{(0)} = \hat{u}_i \hat{u}_i'$ ,  $\hat{\Omega}^{(0)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(0)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(0)} \}$  e  $\hat{u}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{iT})'$  é o vetor de resíduos de EF obtido de

$$\hat{u} = \tilde{y} - \tilde{X}\hat{\beta} = (I_{nT} - \tilde{H})\tilde{y}. \quad (3.2.6)$$

A matriz  $\tilde{H} = \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'$  em (3.2.6) é conhecida como “matriz chapéu” e  $I_{nT}$  é uma matriz identidade de ordem  $nT \times nT$ . Os elementos da diagonal principal de  $\tilde{H}$  tomam valores no intervalo padrão  $(0, 1)$  e, denotando-se esses elementos por  $\tilde{h}_{it}$ , pode ser mostrado que estes possuem valor médio  $p/(nT)$ . Uma regra prática é considerar valores de  $\tilde{h}_{it}$  superiores a duas ou três vezes a média (isto é,  $2p/(nT)$  e  $3p/(nT)$ ) como influentes e, portanto, merecedores de análise mais detalhada.

Para fins de notação, e manter alguma conformidade com a nomenclatura empregada nos modelos de dados em corte transversal, ao longo do texto o estimador CRMC de Arellano, definido em (3.2.4), será denominado de CHC0 (*Clustered Heteroscedasticity-Consistent*). Os demais estimadores seguirão na mesma direção de modo que o estimador HC2 aplicado aos modelos de regressão de EF será denominado de CHC2 (*Clustered HC2*), e assim por diante.

O estimador CHC0 não impõe qualquer restrição sobre a forma da heteroscedasticidade, no entanto, assume-se a independência dos erros entre os indivíduos. Deve-se notar porém, que este estimador é consistente para  $n \rightarrow \infty$ , com  $T$  mantido fixo. Para garantir a consistência nos casos em que  $T \rightarrow \infty$  com  $n$  fixo ou mesmo com  $n \rightarrow \infty$ , outras considerações devem ser feitas (a propósito, ver Hansen (2007) e Stock e Watson (2008).)

As propriedades do CHC0 estão bem estabelecidas. Kezdi (2005), por exemplo, analisa a obtenção de erros-padrão quando há heteroscedasticidade e autocorrelação serial nos resíduos. O autor argumenta que os pesquisadores muitas vezes ignoram esses problemas, provavelmente porque os principais pacotes estatísticos não disponibilizam erros-padrão robustos em modelos de EF. Não surpreendentemente, isso pode levar a graves distorções nas estimativas desses erros-padrão. Segundo o autor, uma das possíveis razões pelas quais os estimadores robustos não são usados com frequência é o desconhecimento de suas propriedades em amostras finitas. Seus resultados evidenciam que é o número de indivíduos que afeta o comportamento do estimador CRMC em amostras finitas, e não o tamanho total da amostra ( $nT$ ).

Hansen (2007) analisa as propriedades assintóticas do estimador CHC0 sob comportamentos assintóticos diversos do padrão, ou seja, quando o número de indivíduos aumenta e a dimensão temporal é mantida fixa. O autor argumenta que em conjuntos de DP, a dimensão temporal nem sempre pode ser negligenciada. Neste sentido, a análise usual é estendida para casos em que tanto o número de indivíduos, quanto de observações no tempo, aumentam ou ainda, quando a dimensão temporal aumenta e o número de indivíduos se mantém constante. O autor fornece ainda, condições sob as quais os testes de hipóteses construídos com o CHC0 são assintoticamente válidos.

Stock e Watson (2008) propuseram uma versão do estimador HC0 com correção de viés que é consistente nos modelos de EF. Sob certas circunstâncias, seu estimador mostrou melhores resultados que o CHC0 tradicional. Os autores mostram ainda que sua versão pode ser estendida para lidar com resíduos autocorrelacionados no tempo.

É sabido que o estimador HC0, apesar de consistente, tende a subestimar a variância em amostras finitas. Uma correção para esta tendência é dada pelo estimador HC2, que tem o intuito de amenizar a subestimação dos erros pelos resíduos. Sua formulação nos modelos de EF pode ser feita substituindo-se  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$  por

$$\hat{\Omega}_i^{(2)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-1},$$

em que o termo  $\text{diag}$  é uma matriz diagonal contendo o vetor  $\{1 - \tilde{h}_i\}^{-1}$ ,  $\tilde{h}_i = (\tilde{h}_{i1}, \dots, \tilde{h}_{iT})'$ ,  $\tilde{h}_{it}$  é o  $it$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $\tilde{H}$  e  $\hat{\Omega}^{(2)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(2)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(2)} \}$ .

O estimador HC3, que fornece uma aproximação para o estimador *jackknife*, parte da ideia de incorporar um ajuste baseado nas medidas de alavancagem da estimativa da matriz de covariâncias. Este estimador no contexto em análise utiliza

$$\hat{\Omega}_i^{(3)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-2},$$

sendo  $\hat{\Omega}^{(3)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(3)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(3)} \}$ .

O quarto estimador considerado, conhecido por HC4, tem o intuito de acentuar a intensidade do ajuste feito no estimador HC3. Isto é feito elevando-se o termo de ajuste  $(1 - \tilde{h}_{it})$  à potência  $\delta_{it}$ . Então,

$$\hat{\Omega}_i^{(4)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-\delta_i},$$

$\delta_i = \left( \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{i1}}{\tilde{h}_{i1}} \right\}, \dots, \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{iT}}{\tilde{h}_{iT}} \right\} \right)'$ ,  $\tilde{h}_{it}$  é a média de  $\tilde{h}_{iT}$  e  $\hat{\Omega}^{(4)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(4)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(4)} \}$ .

Os quatro estimadores apresentados até aqui podem ser descritos dentro de um esquema comum. Para tanto, considere a expressão

$$\hat{\Psi}^{(s)} = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1}, \quad (3.2.7)$$

em que o sobrescrito entre parênteses  $s = 0, 2, 3$  ou  $4$  indica qual dos estimadores está sendo considerado. Assim, quando  $s = 0$  está sendo empregado estimador CHC0 e, portanto, o termo  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$ . Os demais estimadores são obtidos da mesma maneira, ou seja, para o CHC2  $s = 2$  e  $\hat{\Omega}_i^{(2)}$ , o CHC3  $s = 3$  e  $\hat{\Omega}_i^{(3)}$  e o CHC4  $s = 4$  e  $\hat{\Omega}_i^{(4)}$ .

### 3.3 Testes exatos em Modelos de Efeitos Fixos

O objetivo deste ensaio é usar o algoritmo de integração numérica de Imhof (1961) para avaliar a distribuição exata das estatísticas quase- $t$  sob a hipótese nula, baseadas nos estimadores da matriz de covariâncias CHC's discutidos acima. Em seguida, esta distribuição será comparada com a distribuição nula assintótica da estatística de teste, usada em aplicações práticas. Pretende-se com isso observar a qualidade do ajuste das diferentes estratégias de inferência. Esta análise é similar àquelas produzidas por Chesher e Austin (1991) e Cribari-Neto et al. (2005), feitas em modelos de regressão com dados em corte transversal.

Primeiramente, é necessário escrever a estatística de teste como uma razão de formas quadráticas em variáveis aleatórias normais. Considere para tanto a seguinte estatística de teste:

$$\tau = \frac{c'\hat{\beta} - a}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}}. \quad (3.3.1)$$

Nosso interesse reside em testar  $\mathcal{H}_0 : c'\beta = a$  versus  $\mathcal{H}_0 : c'\beta \neq a$ , em que  $c'$  é um vetor  $p \times 1$  e  $a$  é uma constante que representa o valor sobre o qual deseja-se fazer o julgamento. Sob heteroscedasticidade e sob a hipótese nula, a estatística de teste  $\tau$  converge para  $\mathcal{N}(0, 1)$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e  $T$  é mantido fixo (HANSEN, 2007).

Tomando o quadrado da estatística de teste é possível escrever

$$\tau^2 = \frac{(c'\hat{\beta} - a)^2}{\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta})}, \quad (3.3.2)$$

e, conseqüentemente,  $\tau^2 \xrightarrow{d} \chi_1^2$  sob  $\mathcal{H}_0$ .

Alguns autores, entre eles Cribari-Neto e Galvão (2003) e Cribari-Neto et al. (2005), derivaram uma expressão para a estatística de teste quase- $t$  usados nos modelos com dados em corte transversal. A tarefa aqui é análoga, porém deve-se considerar que o estimador da matriz de covariâncias de  $\hat{\beta}$  é agora na forma de (3.2.7).

Para escrever o denominador de (3.3.2) na forma desejada, considere a combinação linear dos elementos de  $\hat{\beta}$  tal que

$$\begin{aligned} \widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta}) &= c' [\widehat{\text{var}}(\hat{\beta})] c \\ &= c' (\hat{\Psi}^{(s)}) c \\ &= c' \left[ (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{X}_i) (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \right] c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c' \left[ \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{X}_i) \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \right] c \\
&= c' \left[ \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \tilde{X}'_i \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{X}_i (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \right] c.
\end{aligned}$$

Seja  $v_i^{(s)} = c' \left[ (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} X_i \sqrt{\Phi_i^{(s)}} \right]$ , sendo  $\Phi_i^{(s)}$  os pesos empregados em cada um dos CHC's tal que:

$\Phi^{(0)} = I_{nT}$  para o estimador CHC0;

$\Phi^{(2)} = \text{diag} \left\{ (1 - \tilde{h}_1)^{-1}, \dots, (1 - \tilde{h}_n)^{-1} \right\}$  para o estimador CHC2;

$\Phi^{(3)} = \text{diag} \left\{ (1 - \tilde{h}_1)^{-2}, \dots, (1 - \tilde{h}_n)^{-2} \right\}$  para o estimador CHC3; e

$\Phi^{(4)} = \text{diag} \left\{ (1 - \tilde{h}_1)^{-\delta}, \dots, (1 - \tilde{h}_n)^{-\delta} \right\}$  para o estimador CHC4.

Logo, o denominador de (3.3.2) pode ser decomposto na forma

$$\widehat{\text{var}}(c' \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left( v_i^{(s)} \hat{\Omega}_i v_i'^{(s)} \right).$$

Considere ainda a matriz  $V_i^{(s)} = \left( v_i'^{(s)} v_i^{(s)} \right)$  tal que

$$\widehat{\text{var}}(c' \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left( \hat{u}_i' V_i^{(s)} \hat{u}_i \right).$$

O vetor de resíduos é dado por  $\hat{u} = \tilde{M} \tilde{y}$  em que  $\tilde{M} = I_{nT} - \tilde{H}$ . Então,

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{var}}(c' \hat{\beta}) &= \tilde{y}' \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}_{n,i} V_i^{(s)} \tilde{M}_{i,n} \right) \tilde{y} \\
&= (\tilde{M} \tilde{y})' \left( \sum_{i=1}^n V_i^{(s)} \right) (\tilde{M} \tilde{y}) \\
&= \tilde{y}' \tilde{\Omega}^{-1/2} \tilde{\Omega}^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}_{n,i} V_i^{(s)} \tilde{M}_{i,n} \right) \tilde{\Omega}^{1/2} \tilde{\Omega}^{-1/2} \tilde{y},
\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\widehat{\text{var}}(c' \hat{\beta}) = z' G^{(s)} z,$$

em que  $G^{(s)} = \tilde{\Omega}^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}_{n,i} V_i^{(s)} \tilde{M}_{i,n} \right) \tilde{\Omega}^{1/2}$  e  $z = \tilde{\Omega}^{-1/2} \tilde{y}$ . O vetor  $z$  tem covariância unitária e, para que a forma quadrática tenha média zero, é suficiente fazer uma translação de sua média (CRIBARI-NETO; Galvão, 2003). Para tanto, basta definir  $w = z - \theta$ , com  $\theta = \mathbb{E}[z]$ . Com este

resultado, pode-se então escrever o denominador de  $\tau^2$  como uma forma quadrática, com o vetor que define esta forma tendo média zero e variância unitária, ou seja,

$$\widehat{\text{var}}(c'\hat{\beta}) = w'G^{(s)}w.$$

Observando que  $\hat{\beta} - \tilde{\beta} = \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \tilde{u}_i \right)$ , então é possível, também, escrever  $\hat{\beta} = \tilde{\beta} + \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i)$  (HAYASHI, 2000). Logo, o numerador de (3.3.2) pode ser decomposto em:

$$\begin{aligned} (c'\hat{\beta} - a)^2 &= (c'\hat{\beta} - a)(c'\hat{\beta} - a) \\ &= \left\{ c' \left[ \tilde{\beta} + \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right] - a \right\}' \left\{ c' \left[ \tilde{\beta} + \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right] - a \right\} \\ &= \left\{ c'\tilde{\beta} + c' \left[ \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right] - a \right\}' \left\{ c'\tilde{\beta} + \left[ c' \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right] - a \right\} \\ &= \left\{ (c'\tilde{\beta} - a) + \left[ c' \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right] \right\}' \left\{ (c'\tilde{\beta} - a) + \left[ c' \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right] \right\} \\ &= (c'\tilde{\beta} - a)' (c'\tilde{\beta} - a) + 2(c'\hat{\beta} - a) \left[ c' \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right] \\ &\quad + \left[ \sum_{i=1}^n (w'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} \tilde{X}_i) \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} c c' \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right]. \end{aligned}$$

De posse desses resultados, a estatística (3.3.2) pode ser escrita como uma razão de formas quadráticas de variáveis normais padrão, expressa por

$$\tau^2 = \frac{w' R w}{w' G^{(s)} w} + \frac{(c' \beta - a)' (c' \beta - a) + 2(c' \hat{\beta} - a) \left( c' \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right)}{w' G^{(s)} w} \quad (3.3.3)$$

em que  $R = \left[ \sum_{i=1}^n (w'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} \tilde{X}_i) \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} c c' \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \tilde{X}_i)^{-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{X}'_i \sqrt{\tilde{\Omega}_i} w_i) \right]$  e  $G^{(s)}$  definido acima.

Sob  $\mathcal{H}_0$ , o segundo termo de (3.3.3) se anula e assim

$$\tau^2 = \frac{w' R w}{w' G^{(s)} w}.$$

Tomando  $\zeta > 0$ , a probabilidade  $\Pr(\tau^2 \leq \zeta \mid \mathcal{H}_0)$  é dada por

$$\Pr_0(\tau^2 \leq \zeta) = \Pr_0\left(\frac{w' R w}{w' G^{(s)} w} \leq \zeta\right), \quad (3.3.4)$$

em que  $\Pr_0$  indica que a probabilidade é tomada sob a hipótese nula.

A quantidade (3.3.4) pode ser avaliada numericamente utilizando-se o algoritmo de Imhof (1961). Isso será feito na Seção 3.5 e as probabilidades calculadas serão comparadas a  $\Pr(\chi^2_1 \leq \zeta)$ . Variando a constante  $\zeta$  e os diferentes estimadores, é possível avaliar a qualidade da aproximação das distribuições nulas exatas das estatísticas de teste, construídas com os diferentes CHC's, em diversas situações de interesse.

### 3.4 O algoritmo de Imhof

Seja a forma quadrática  $R = v' A v$  em que  $A$  é uma matriz simétrica e  $x$  é um vetor normal  $n \times 1$  com vetor de médias  $\mu$  e matriz de covariâncias  $\Omega$ . O que se deseja é calcular a probabilidade

$$\Pr(P < \zeta), \quad (3.4.1)$$

sendo  $\zeta$  um escalar.

Se  $\Omega$  é positiva definida e simétrica então, através de uma transformação linear não-singular, é possível expressar  $P$  na forma de

$$P = \sum_{r=1}^m \lambda_r \chi_{h_r; \sigma_i^2}^2$$

em que os  $h_r$ 's são as ordens de multiplicidade dos  $\lambda_r$ 's e  $\chi_{h_r; \sigma_i^2}^2$  são variáveis aleatórias qui-

quadrado independentes com  $h_r$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $\sigma_r^2$ .

A função característica de  $P$  é dada por

$$\phi(t) = \prod_{r=1}^m (1 - 2it\lambda_r t)^{-1/2h_r} \exp \left\{ i \sum_{r=1}^m \frac{t\sigma_r^2 \lambda_r}{1 - 2it\lambda_r} \right\},$$

em que  $i$  representa a unidade imaginária.

A função de distribuição acumulada  $F(\zeta)$  de  $P$  pode então ser escrita como Imhof (1961)

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{-1} \text{Im} \{ \exp(-it\zeta) \phi(t) \} dt,$$

em que  $\text{Im}(s)$  denota a parte imaginária do número complexo  $s$ ,  $i$  é a unidade imaginária e  $\phi(t)$  é a função característica de  $P$  dada pela equação (3.3.4). A função  $F(\zeta)$ , após algumas manipulações algébricas, pode ser escrita como

$$F(\zeta) = \Pr(T(x) < \zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta(u)}{u\rho(u)} du,$$

tal que

$$u = 2\zeta,$$

$$\theta(u) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \left[ h_r \arctan(\lambda_r u) + \sigma_r^2 \lambda_r u (1 + \lambda_r^2 u^2)^{-1} \right] - \frac{1}{2} \zeta u,$$

e

$$\rho(u) = \prod_{r=1}^m (1 + \lambda_r^2 u^2)^{\frac{1}{4}h_r} \exp \left\{ \frac{1/2 \sum_{r=1}^m (\sigma_r \lambda_r u)^2}{(1 + \lambda_r^2 u^2)} \right\}.$$

Em Lima (2008) é deduzida a expressão de  $\Pr(v'Av < \zeta)$  para caso particular em que  $\mu = 0$  e  $\Omega = I_n$ . Para tanto é tomada a diagonalização de  $A$  na sua forma canônica

$$Au_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.4.2)$$

em que  $\lambda_k$  e  $u_k$  são, respectivamente, os autovalores e autovetores de  $A$ . Seja ainda  $U$  a matriz que representa os  $n$  autovetores de  $A$  e  $D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  uma matriz formada a partir dos seus autovalores. O conjunto de equações (3.4.2) pode ser representado na forma de  $AU = UD$  e como a matriz  $A$  é simétrica, a matriz  $U$  é não-singular, de modo que  $D = U^{-1}AU$ . Normalizando os autovalores de  $A$  é possível obter  $U$  como uma matriz ortogonal tal que  $UU' = I_n$ ,  $D = U'AU$  e  $A = UDU'$ . Segue daí que a equação (3.4.1) em função do vetor  $w = U'$ , que é

normalmente distribuído com média  $\mathbb{E}(w) = U' = 0$  e cov(w) =  $U'U = I_n$ , torna-se

$$\begin{aligned} \Pr(v'Av < \zeta) &= \Pr(v'UDU'v < \zeta) \\ &= \Pr(w'Dw < \zeta) \\ &= \Pr\left(\sum \lambda_k w_k^2 < \zeta\right) \\ &= \Pr\left(\sum \lambda_k \chi_1^2 < \zeta\right) \\ &= \Pr(P < \zeta), \end{aligned}$$

onde a variável  $v$  tem média zero e matriz de covariâncias igual a  $I_n$ .

A função **ProbImhof**, disponível para a linguagem de programação **Ox Doornik (2001)**, avalia numericamente a probabilidade de um quociente de formas quadráticas de variáveis normais ser menor ou igual a um dado valor  $\zeta > 0$ . Sendo assim, considerando a razão de formas quadráticas  $Rq = \frac{z'Az}{z'Bz}$  no vetor normal  $z$  de média  $m$  e matriz de covariâncias  $S$ , onde  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas cuja ordem é o número de linhas de  $z$ , a função **ProbImhof(x, A, B, m, S)** avalia numericamente a probabilidade  $\Pr(Rq \leq \zeta)$ ,  $\zeta > 0$  e, se  $B = 0$ , calcula a probabilidade  $\Pr(z'Az < \zeta)$ . Na análise da distribuição exata do teste, será empregada a função **ProbImhof** para calcular a probabilidade (3.3.4), para diferentes valores de  $\zeta$  que correspondem aos valores críticos mais usados em aplicações práticas.

### 3.5 Resultados numéricos

Nesta seção, o método de Imhof será usado para avaliar numericamente as distribuições nulas das estatísticas quase- $t$ , construídas com base nos estimadores consistentes da matriz de covariâncias discutidos na Seção 3.2. Mais especificamente, o objetivo será avaliar o quão bem a distribuição exata nula da estatística de teste é aproximada por sua distribuição assintótica de referência. Para que isso seja possível, a análise se restringirá ao caso onde a variável resposta é normalmente distribuída.

O modelo de regressão considerado é

$$y_{it} = \beta_1 x_{1,it} + \beta_2 x_{2,it} + u_{it},$$

com  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 0$ . Os valores de  $\alpha_i$  foram gerados a partir da distribuição  $\mathcal{N}(0, 1)$  enquanto,  $x_{it}$  e  $u_{it}$  foram gerados da seguinte forma:

1.  $x_{it} = \alpha_i + z_{it}$ ;
2.  $u_{it} = \alpha_i + \sigma_{it}\varepsilon_{it}$ .

Os valores de  $x_{it}$  foram obtidos de duas distribuições distintas e  $\varepsilon_{it} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . No primeiro caso,

$x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$  de forma que existem pontos de alta alavancagem nos dados (dados com pontos de alavanca). No segundo caso,  $x_{it} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ , tal que não existem pontos de alavanca nos dados (dados sem pontos de alavanca). Deve-se notar que nos modelos de DP pontos de alavanca podem ocorrer em bloco ou isolados. Neste ensaio os CHC's são avaliados na presença de pontos de alavanca isolados. Foram feitas simulações com pontos de alavanca em bloco o que não altera os resultados. Uma discussão abrangente sobre os vários de tipos de contaminação possíveis com dados em painel, pode ser encontrada em Bramati e Croux (2007).

Para simular o comportamento heteroscedástico do modelo, o termo  $\sigma_{it}$  foi especificado como

$$\sigma_{it} = \sqrt{\exp[\gamma(\tilde{x}_{1,it} + \tilde{x}_{2,it}^2)]}, \quad (3.5.1)$$

o grau de heteroscedasticidade sendo medido por  $\lambda = (\max \sigma_{it}^2) / (\min \sigma_{it}^2)$ . Desta maneira, quando  $\sigma_{it} = 1$  os erros são homoscedásticos e quando  $\sigma_{it} > 1$ , os dados são heteroscedásticos, sendo tanto mais forte a heteroscedasticidade, quanto maior o valor de  $\lambda$ . Note que a especificação de  $\sigma_{it}$  emprega os valores transformados  $\tilde{x}_{it}$  e não os valores de  $x_{it}$ .

Na presença de pontos de alavanca, os valores de  $\gamma$  considerados para geração dos dados heteroscedásticos foram 0,00; 0,04; 0,08 e 0,12 que conduzem aos valores de  $\lambda$  correspondentes 0,00; 4,62; 21,33 e 98,51; com isto quando  $\lambda = 1$  o modelo é homocedástico. Nos demais valores de  $\lambda$  a heteroscedasticidade varia de moderada a severa. Quando os dados não contém pontos de alavanca os valores de  $\gamma$  foram alterados para 4,62; 21,39 e 98,91 de forma a alcançar níveis de heteroscedasticidade semelhantes aos anteriores. Para a avaliar os desempenho dos estimadores sob homocedasticidade, considera-se  $\gamma = 1$ .

A hipótese a ser testada é a exclusão da covariável  $\beta_2$ , ou seja, testar se  $\beta_2 = 0$ . O teste de hipótese é então da forma:  $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$  versus  $\mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$  e, portanto, a estatística de teste é

$$\tau = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta})}}, \quad (3.5.2)$$

onde  $\widehat{\text{var}}(\hat{\beta})$  é obtida com os diferentes estimadores consistentes, quais sejam: CHC0, CHC2, CHC3 ou CHC4.

A avaliação numérica será realizada comparando a função de distribuição exata nula da estatística de teste (3.5.2) com a função de distribuição  $\chi_1^2$ . As duas funções de distribuição serão mostradas também graficamente. Quanto mais perto essas duas curvas estão uma da outra, melhor a aproximação assintótica utilizada no teste.

A presença de pontos de alavanca pode ser identificada observando-se os valores de  $\tilde{h}_{it}$ , ou seja, os elementos da diagonal principal de  $\tilde{H}$ . A Tabela 3.5.1 apresenta os valores máximo e mínimo dos  $\tilde{h}_{it}$  nos dois cenários analisados, comparando-os com as quantidades  $2p/(nT)$  e  $3p/(nT)$ . Quando os valores da covariável são obtidos de uma distribuição  $\mathcal{LN}(0, 1)$ , existem 6 observações cujos  $\tilde{h}_{it}$ 's correspondentes ultrapassam o limite de  $3p/(nT)$ , sendo o mais elevado destes igual a 0,253.

**Tabela 3.5.1** Pontos de alavancagem: limites usados e máximos encontrados.

$n$	$T$	$\tilde{h}_{max}$		limites	
		$\mathcal{U}(0, 1)$	$\mathcal{LN}(0, 1)$	$2p/nT$	$3p/nT$
20	5	0,0524	0,2012	0,040	0,060
60	5	0,0175	0,0671	0,013	0,020

Variando o valor de  $\lambda$  é possível avaliar o impacto do aumento no grau de heteroscedasticidade, sobre as aproximações assintóticas das probabilidades  $\Pr(t^2 \leq \zeta | \mathcal{H}_0)$  da distribuição nula assintótica ( $\chi_1^2$ ), nos quantis de interesse. Por exemplo, quando  $\zeta = 2,706$ ;  $3,841$  e  $6,635$ , estas quantidades correspondem aos valores críticos do teste quase- $t$  mais usados em aplicações práticas: os quantis  $0,90$ ;  $0,95$  e  $0,99$ .

Os tamanhos amostrais considerados foram  $n = 20$  e  $n = 60$ , com  $T = 5$ ; os valores das covariáveis foram mantidos constantes ao longo das simulações. Inicialmente, foi gerada uma amostra de  $x_{it}$  com  $n = 20$  e  $T = 5$ , tal que  $nT = 100$ . Para obter  $n = 60$  os valores de obtidos inicialmente foram replicados 3 vezes, alcançando  $nT = 300$ . Esta replicação tem por objetivo garantir que o grau de heteroscedasticidade não se altere quando o tamanho amostral varia.

Os resultados apresentados nas Tabelas 3.5.2 e 3.5.3 referem-se à comparação da distribuição nula exata da estatística (3.3.2) com sua distribuição nula limite ( $\chi_1^2$ ) em vários quantis que são tipicamente usados em aplicações práticas. Os valores exatos de  $\tau^2$  são obtidos com o algoritmo de Imhof (1961) a partir do resultado apresentado na Seção 3.4.

Na Tabela 3.5.2, pode-se notar que, na presença de pontos de alavanca e amostra pequena ( $n = 20$ ), a estatística de teste que emprega o estimador de Arellano (CHC0), apresenta as piores aproximações. Por exemplo, na ausência de heteroscedasticidade ( $\lambda = 1$ ), os valores exatos do teste que emprega este estimador são  $0,8346$  e  $0,8949$ , para os quantis  $0,90$  e  $0,95$ .

O estimador CHC3 produz resultados mais confiáveis. Na mesma situação e quantis acima, os valores exatos do teste são  $0,8623$  e  $0,9156$ . O estimador CHC4 é o que conduz às melhores aproximações da distribuição nula. Para os valores de  $\zeta$  que representam os quantis  $0,90$ ;  $0,95$  e  $0,99$ , a estatística de teste tem valores correspondentes de  $0,8846$ ;  $0,9310$  e  $0,9757$ .

À medida que grau de heteroscedasticidade aumenta a discrepância entre a distribuição nula exata do teste construído com o estimador CHC0 e a assintótica de referência aumenta ainda mais. Com  $\lambda = 98,51$  e ainda na presença de pontos de alavanca, o valor exato obtido para  $\zeta = 3,841$  no quantil correspondente de  $0,95$  da distribuição exata é de  $0,8576$ . Com os testes que empregam os estimadores CHC2, CHC3 e CHC4 são de  $0,9035$ ;  $0,9332$  e  $0,9652$ .

Os valores das probabilidades referentes ao conjunto de dados sem pontos de alavanca mostram uma considerável redução das discrepâncias encontradas, particularmente das estatísticas que empregam os estimadores CHC0 e CHC2. Sob homocedasticidade e  $\zeta = 2,706$ ; o que corresponde ao quantil  $0,90$  da distribuição nula limite, os valores obtidos com os estimadores CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4 são  $0,8704$ ;  $0,8762$ ;  $0,8819$  e  $0,8811$ . Sob heteroscedasticidade

**Tabela 3.5.2**  $\Pr(\tau^2 \leq \zeta | \mathcal{H}_0)$  para  $n = 20$  e  $T = 5$ ;  $\zeta$  igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição  $\chi_1^2$ .

$x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$													
$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
0,00	1,00	2,706	0,8346	0,8483	0,8623	0,8846	0,00	1,00	2,706	0,8704	0,8762	0,8819	0,8811
		3,841	0,8949	0,9053	0,9156	0,9310			3,841	0,9251	0,9293	0,9334	0,9328
		6,635	0,9591	0,9643	0,9691	0,9757			6,635	0,9767	0,9786	0,9803	0,9801
0,04	4,62	2,706	0,7904	0,8156	0,8403	0,8813	1,49	4,62	2,706	0,8694	0,8752	0,8810	0,8801
		3,841	0,8603	0,8803	0,8988	0,9273			3,841	0,9245	0,9288	0,9330	0,9323
		6,635	0,9398	0,9505	0,9597	0,9724			6,635	0,9766	0,9785	0,9803	0,9800
0,08	21,33	2,706	0,7516	0,8014	0,8446	0,9050	2,98	21,39	2,706	0,8680	0,8741	0,8802	0,8793
		3,841	0,8412	0,8777	0,9066	0,9441			3,841	0,9246	0,9291	0,9335	0,9328
		6,635	0,9355	0,9523	0,9646	0,9794			6,635	0,9776	0,9795	0,9813	0,9810
0,12	98,51	2,706	0,7438	0,8241	0,8791	0,9382	4,47	98,91	2,706	0,8670	0,8737	0,8802	0,8794
		3,841	0,8576	0,9035	0,9332	0,9652			3,841	0,9259	0,9307	0,9353	0,9347
		6,635	0,9500	0,9661	0,9765	0,9877			6,635	0,9797	0,9816	0,9834	0,9831

máxima ( $\lambda = 4,47$ ), as estatísticas obtidas com os mesmos estimadores tem valores exatos de 0,8670; 0,8737; 0,8802 e 0,8794. No geral, o CHC3 supera o CHC4 nas aproximações quando não há pontos de alavanca, ainda que esta diferença seja, muitas vezes, desprezível.

Quando o tamanho amostral aumenta as discrepâncias entre os estimadores se reduzem sensivelmente; seja na presença de pontos de alavanca ou não. Como é possível notar na Tabela 3.5.3, o estimador CHC4 permanece sendo uma opção mais adequada na presença de pontos de alavanca. Com  $\lambda = 98,51$  e pontos de alavanca, os valores das probabilidades da distribuição nula da estatística  $\tau^2$  são de 0,8976; 0,9127; 0,9267 e 0,9509 contra 0,95 da distribuição assintótica. Sem pontos de alavanca, esses valores são de 0,9421; 0,9435; 0,9449 e 0,9448.

Observando as duas Tabelas conjuntamente, percebe-se que, no geral, a qualidade da aproximação piora à medida que o grau de heteroscedasticidade aumenta. As piores aproximações, considerando-se os valores  $\zeta = 2,706$  e  $3,841$ , que representam os quantis 0,90 e 0,95 da distribuição nula da estatística  $\tau^2$ , são observados quando se utiliza os estimadores CHC0 e CHC2, principalmente se o conjunto de dados contém pontos de alta alavancagem.

As análises a seguir são feitas por meio de gráficos que contêm duas curvas, a saber: a distribuição nula assintótica da estatística de teste ( $\chi_1^2$ ), representada com uma linha sólida, e as distribuições exatas calculadas, representadas com linhas tracejadas. Os testes avaliados utilizam os estimadores CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4. As linhas correspondem às probabilidades calculadas para valores de  $\zeta$ , variando entre 0 e 10. Quanto mais próxima a linha que representa a distribuição nula da estatística  $\tau^2$  estiver da linha sólida (que representa a distribuição assintótica), melhor será a aproximação desta e, conseqüentemente, mais confiável será o teste.

A Figura 3.5.1 apresenta o caso onde a covariável é obtida de uma distribuição uniforme e há forte heteroscedasticidade ( $\lambda = 98,91$ ). Os quatro painéis, iniciando no canto superior esquerdo e terminando no canto inferior direito, correspondem às análises comparativas da distribuição nula limite e das distribuições nulas exatas das estatísticas de teste. Pode-se notar que as curvas tracejadas se encontram abaixo da curva sólida que representa a função de distribuição de uma variável aleatória  $\chi_1^2$ , em praticamente todos os quantis. Este fato evidencia a liberalidade dos quatro testes sob consideração, ou seja, a tendência de apresentar probabilidades de erro do tipo I superiores ao nível nominal selecionado. Quanto maior a distância entre as duas curvas no quantil assintótico de referência, maior a tendência do teste a sobre-rejeição. Por exemplo, as funções de distribuição exatas das quatro estatísticas de teste, que utilizam os estimadores CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4, no ponto 3,841 (quantil assintótico de 95%) são, respectivamente, iguais a 0,9259; 0,9307; 0,9353 e 0,9347 (ver Tabela 3.5.2). As aproximações obtidas nos testes com os diferentes estimadores são muito similares, mas nota-se que a pior delas é obtida quando o estimador CHC0 é usado.

Na Figura 3.5.2 são apresentados gráficos semelhantes, mas desta vez para as aproximações dos testes quando o conjunto de dados contém pontos potencialmente influentes e heteroscedasticidade forte ( $\lambda = 98,51$ ). Comparando-se os gráficos apresentados nesta figura com os da Figura 3.5.1, nota-se que aumentaram consideravelmente as distorções na aproximação dos testes quase- $t$ . Isso ocorre principalmente para o teste cuja estatística utiliza o estimador CHC0; a curva tracejada encontra-se agora bem mais distante da curva sólida no painel superior es-

**Tabela 3.5.3**  $\Pr(\tau^2 \leq \zeta | \mathcal{H}_0)$  para  $n = 60$  e  $T = 5$ ; igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição  $\chi^2_1$ .

		$x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$								$x_{it} \sim \mathcal{U}(0,1)$										
$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
0,00	1,00	2,706	0,8767	0,8815	0,8863	0,8939	0,00	1,00	2,706	0,8904	0,8923	0,8941	0,8939	0,00	1,00	2,706	0,8904	0,8923	0,8941	0,8939
		3,841	0,9309	0,9343	0,9376	0,9428			3,841	0,9421	0,9434	0,9447	0,9445			3,841	0,9421	0,9434	0,9447	0,9445
		6,635	0,9805	0,9818	0,9831	0,9850			6,635	0,9862	0,9866	0,9871	0,9870			6,635	0,9862	0,9866	0,9871	0,9870
0,04	4,62	2,706	0,8574	0,8656	0,8738	0,8886	1,49	4,62	2,706	0,8900	0,8919	0,8938	0,8935			2,706	0,8900	0,8919	0,8938	0,8935
		3,841	0,9162	0,9224	0,9283	0,9386			3,841	0,9419	0,9432	0,9445	0,9443			3,841	0,9419	0,9432	0,9445	0,9443
		6,635	0,9737	0,9763	0,9788	0,9828			6,635	0,9861	0,9866	0,9871	0,9870			6,635	0,9861	0,9866	0,9871	0,9870
0,08	21,33	2,706	0,8354	0,8489	0,8621	0,8868	2,98	21,39	2,706	0,8894	0,8914	0,8933	0,8931			2,706	0,8894	0,8914	0,8933	0,8931
		3,841	0,9041	0,9145	0,9243	0,9416			3,841	0,9418	0,9432	0,9446	0,9444			3,841	0,9418	0,9432	0,9446	0,9444
		6,635	0,9720	0,9764	0,9803	0,9863			6,635	0,9864	0,9869	0,9874	0,9873			6,635	0,9864	0,9869	0,9874	0,9873
0,12	98,51	2,706	0,8164	0,8349	0,8529	0,8873	4,47	98,91	2,706	0,8888	0,8908	0,8929	0,8927			2,706	0,8888	0,8908	0,8929	0,8927
		3,841	0,8976	0,9127	0,9267	0,9509			3,841	0,9421	0,9435	0,9449	0,9448			3,841	0,9421	0,9435	0,9449	0,9448
		6,635	0,9779	0,9832	0,9874	0,9930			6,635	0,9871	0,9876	0,9881	0,9880			6,635	0,9871	0,9876	0,9881	0,9880

querdo da Figura 3.5.2 do que no correspondente painel da Figura 3.5.1. Nota-se ainda que há alguma redução na distância dos testes cuja estatística, utiliza os estimadores CHC2 e CHC3. Uma melhora ainda maior na qualidade da aproximação é observada no teste cuja estatística é construída com base no estimador CHC4.

Comparando as Figuras 3.5.1 e 3.5.2, é possível notar que a introdução de pontos de alavanca nitidamente deteriora a qualidade na aproximação dos testes quase- $t$  de sua distribuição assintótica de referência. Para constatar este fato, basta notar que as distâncias entre as linhas tracejadas e sólidas são amplificadas quando pontos de alavanca são introduzidos no conjunto de dados. As funções de distribuição exatas das quatro estatísticas de teste avaliadas no ponto  $\zeta = 3,841$  são, a título de exemplo, 0,8976; 0,9127; 0,9267 e 0,9509 (Tabela 3.5.2). O teste baseado no estimador CHC4 é, assim, o menos influenciado pela existência de pontos de alavanca.

A análise acima foi realizada com base em uma estrutura heteroscedástica de regressão. É importante, contudo, investigar o comportamento dos diferentes testes quando o modelo é homoscedástico, ou seja, quando as variâncias dos diferentes erros são de fato constantes. Nas Figuras 3.5.3 e 3.5.4 considera-se o mesmo tamanho amostral ( $n = 20$ ), com  $\lambda = 1$ .

Mesmo sob homocedasticidade, o teste que mais se beneficia da existência de pontos de alavanca é o construído com o estimador CHC4. A correção efetuada por este estimador torna a presença desses pontos pouco influente. Por outro lado, o teste mais prejudicado é aquele cuja estatística se baseia no estimador CHC0. A deterioração da qualidade da aproximação assintótica do teste que usa esse estimador, quando existem pontos de alavanca, é bastante clara, ainda que não haja heteroscedasticidade.

O efeito do aumento do tamanho amostral sobre as distorções apresentadas nos gráficos acima pode ser constatado analisando-se as Figuras 3.5.5 a 3.5.8, que correspondem aos casos descritos nas Figuras 3.5.1 a 3.5.4, mas agora com tamanho amostral maior,  $n = 60$ . Uma inspeção visual dessas figuras revela que, conforme esperado, a qualidade da aproximação assintótica dos testes quase- $t$  melhora à medida que o número de observações cresce. Além disso, o aumento na distorção causado pela existência de pontos de alavanca também diminui.

As conclusões obtidas anteriormente acerca dos desempenho dos testes com cada um dos estimadores, não se alteram. Verifica-se, no geral, que as conclusões para o menor tamanho amostral permanecem as mesmas, favorecendo o estimador CHC4, principalmente na presença de pontos de alavanca. Verifica-se também que a estatística de teste que emprega o estimador CHC3 supera a obtida com CHC4 quando não há alavancagem. Nesse caso, as aproximações assintóticas da distribuição de  $\tau^2$  são melhores com o CHC3, mas esta diferença é bastante pequena.

Godfrey (2006) defende a utilização de resíduos restritos quando os HC's são utilizados na construção de testes destinados a inferir sobre alguma restrição sobre os parâmetros da regressão. O autor argumenta ainda que se deve-se empregar resíduos restritos se o objetivo da análise for produzir evidências de que os testes quase- $t$  associados têm um bom desempenho em amostras finitas.

O uso de resíduos restritos denota que o modelo regressão é estimado impondo-se a restrição que está sendo testada, ou seja, impondo-se  $\mathcal{H}_0$ . Se a hipótese nula é verdadeira, pode-se argumentar que o uso de resíduos restritos promove uma melhora na confiabilidade dos testes. Os resultados obtidos por Davidson e MacKinnon (1985) sugerem que os testes construídos com resíduos restritos são mais confiáveis e tendem a subrejeitar ligeiramente a hipótese nula, enquanto os testes baseados em resíduos irrestritos sofrem do problema de sobre-rejeição discutido anteriormente. Assim, os autores recomendam o uso de resíduos restritos quando o interesse está na construção de testes quase- $t$ .

As diferenças entre as duas abordagens são assintoticamente desprezíveis. No entanto, Davidson e MacKinnon (1985) encontraram diferenças importantes no uso de resíduos irrestritos ao invés dos restritos em amostras finitas. Suas conclusões mostram que os testes que utilizam os resíduos irrestritos baseados no HC3 têm desempenho superior ao HC2, que supera o HC0. Em contraste, as variantes desses estimadores obtidas com resíduos restritos, denotados por HCR's, têm bom desempenho com pequenas diferenças entre si quando não há pontos de alavanca nos dados sendo o HCR0 mais confiável do que os demais HCR's Godfrey e Orme (2004).

A distribuição exata do teste, apresentada na Seção 3.4, foi derivada usando o vetor de resíduos irrestritos dado por  $\hat{u} = \tilde{M}\tilde{y}$ . Para substituir  $\hat{u}$  pelo vetor de resíduos restritos, deve-se impor a hipótese nula ao modelo, o que no caso em análise implica impor  $\beta_2 = 0$  em (3.5.1). Isto significa tomar  $\hat{u}^R = \tilde{M}^R\tilde{y}$ , onde  $\tilde{M}^R = I_{nT} - \tilde{X}_1(\tilde{X}_1'\tilde{X}_1)^{-1}\tilde{X}_1'$  (ver a propósito, Cribari-Neto e Lima (2010) e Greene e Seaks (1991)).

O modelo restrito é dado por

$$y_{it} = \beta_1 x_{it,1} + u_{it}. \quad (3.5.3)$$

As estatísticas  $\tau^2$  que empregam os CHCR's têm a mesma formulação descrita na Seção 3.4. A alteração pertinente é empregar o vetor de resíduos restritos  $\hat{u}_i^R = (\hat{u}_{i1}^R, \dots, \hat{u}_{iT}^R)'$  obtido aplicando-se o EEF ao modelo de regressão (3.5.3).

Seguindo a denominação empregada nos CHC's, o estimador CHC0 que emprega o vetor de resíduos restritos será denominado de CHCR0; os demais estimadores construídos com resíduos restritos, seguem na mesma linha. Os resultados apresentados nas Tabelas 3.5.4 e 3.5.5 dizem respeito às probabilidades nulas exatas da estatística  $\tau^2$  em vários quantis de interesse. A distribuição exata das estatísticas quase- $t$ , baseadas nos estimadores CHCR0, CHCR2, CHCR3 e CHCR4, são também comparadas com a distribuição nula limite ( $\chi_1^2$ ).

Usando resíduos irrestritos o estimador com o melhor desempenho dentre os CHC's foi o CHC4. Esses resultados se invertem com o uso de resíduos restritos. Agora, o teste baseado no estimador CHCR4 mostra o pior desempenho dentre os considerados, tanto sob homocedasticidade quanto sob heteroscedasticidade.

Com  $n = 20$  e  $\lambda = 21,33$ , o CHCR0, na presença de pontos de alavanca ( $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$ ), produz a estatística de teste com as melhores aproximações. Por exemplo, com  $\lambda = 21,33$ , as probabilidades exatas do teste que emprega este estimador são 0,9334, 0,9850 e 0,9996 para os quantis 0,90; 0,95 e 0,99. O estimador CHCR4 produz resultados muito ruins. Na mesma

situação e quantis acima, os valores exatos do teste são 0,9935; 0,9988 e 1,0000. O estimador CHCR2 é o que produz aproximações mais próximas às do CHCR0. Para os valores de  $\zeta$  que representam os quantis 0,90, 0,95 e 0,99 as probabilidades têm valores correspondentes de 0,9634; 0,9928 e 0,9998.

O CHCR0 tende a apresentar probabilidades maiores que as da distribuição nula limite. Como consequência, os demais CHCR's acabam por agravar este problema. Isso pode ser explicado pelo fato de que esses estimadores foram desenvolvidos a partir da ideia de inflacionar os resíduos, problema que é observado quando empregam resíduos irrestritos. O uso de resíduos restritos, faz com que as estatísticas de teste construídas com CHCR0 tendam a subrejeitar a hipótese nula. Sendo assim, a inflação dos resíduos toma o caminho inverso, ou seja, agrava o problema de subrejeição. Uma possível explicação para este novo resultado está no fato de que os HC's foram desenvolvidos para corrigir um problema de sobre-rejeição da hipótese nula do HC0, observada com o uso de resíduos irrestritos.

Na ausência de pontos de alavanca, as distorções se reduzem consideravelmente e os diferentes testes exibem comportamentos similares. Por exemplo, com  $n = 20$ ,  $\lambda = 98,91$  e  $\zeta = 3,841$  (o que corresponde ao quantil 0,95), as probabilidades são 0,9538, 0,9582, 0,9623 e 0,9621 obtidas, respectivamente com os estimadores CHCR0, CHCR2, CHCR3 e CHCR4. Observa-se também que as probabilidades exatas dos testes construídos com CHCR2, CHCR3 e CHCR4 situam-se ligeiramente acima dos os quantis avaliados.

A Tabela 3.5.5 apresenta as probabilidades obtidas com um tamanho amostral maior ( $n = 60$ ). O efeito dos pontos de alavanca sobre a distorção dos teste é menor, mas o CHCR0 permanece com as melhores aproximações. Sob heteroscedasticidade severa ( $\lambda = 98,51$ ) as probabilidades exatas observadas no quantil 0,90 ( $\zeta = 2,706$ ) são de 0,9029 com o CHCR0, 0,9161 com o CHCR2, 0,9285 com o CHCR3 e 0,9504 com o CHCR4. Sem pontos de alavanca, as distorções tornam-se praticamente inexistentes. Pode-se observar que com  $\lambda = 98,91$ , as probabilidades das estatísticas quase- $t$  no quantil 0,90 são de 0,8988; 0,9008; 0,9029 e 0,9028 com os estimadores CHCR0, CHCR2, CHCR3 e CHCR4.

Nas Figuras 3.5.9 a 3.5.12 são apresentados gráficos que contêm as duas curvas discutidas anteriormente, para os testes construídos com os estimadores CHCR's. A distribuição nula assintótica da estatística de teste ( $\chi_1^2$ ) é representada com uma linha sólida e as distribuições exatas calculadas, com linhas tracejadas. Dado que na ausência de pontos de alavanca os estimadores produzem testes com aproximações muito semelhantes, são apresentados apenas os resultados em conjunto de dados com pontos de alavanca.

A Figura 3.5.9 apresenta o caso onde há homocedasticidade ( $\lambda = 1,00$ ) e  $n = 20$ . Pode-se notar que agora as curvas tracejadas se encontram acima da curva sólida que representa a função de distribuição de uma variável aleatória  $\chi_1^2$ . Este fato corrobora a tendência de subrejeição dos quatro testes sob consideração, ou seja, a tendência de apresentar probabilidades de erro do tipo I inferiores ao nível nominal especificado. As aproximações obtidas nos testes que empregam os estimadores CHCR3 e CHCR4 são as que conduzem às maiores distorções. O CHCR0 produz testes com a melhor aproximação, mas nota-se que, também, exibe a linha tracejada pouco acima da linha sólida.

A aumento do grau de heteroscedasticidade tem efeito bastante danoso sobre os testes. A Figura 3.5.10 mostra as aproximações para  $n = 20$  e  $\lambda = 98,51$ . Percebe-se, logo de imediato, a distorção do teste que emprega o CHCR4. Próximo a  $\zeta = 2,706$ , a linha tracejada está muito acima da distribuição nula assintótica. Ademais, pode-se verificar na Tabela 3.5.4 que as probabilidades exatas observadas com os estimadores CHCR0, CHCR2, CHCR3 e CHCR4 são 0,9577, 0,9821, 0,9921 e 0,9979, respectivamente.

As Figuras 3.5.11 e 3.5.12 correspondem aos casos em que há homocedasticidade ( $\lambda = 1,00$ ) e heteroscedasticidade forte ( $\lambda = 98,51$ ), para  $n = 60$ . As conclusões obtidas anteriormente, de que o teste que mais se beneficia do uso de resíduos restritos é o que usa o estimador CHCR0, permanecem válidas. No entanto, verifica-se ainda alguma distorção provocada pelos pontos de alavanca. Com  $\lambda = 1$  todos os estimadores produzem testes com aproximação razoável, sendo que os estimadores CHCR0 e CHCR2 apresentam menor distorção que o CHCR3 e CHCR4.

Na análise realizada com resíduos restritos, os testes quase- $t$  que empregam o estimador CHCR0 tem melhor desempenho. Em resumo, quanto maior a intensidade do ajuste feita nos demais CHC's, maior a distorção observada. Por conseguinte, quando o teste é formulado impondo-se a hipótese nula, o CHCR0 é preferível, seguido pelos estimadores CHCR2, CHCR3 e CHCR4.

### 3.6 Considerações finais

Este ensaio procurou avaliar as distribuições nulas exatas dos testes quase- $t$  nos modelos de regressão de EF, que empregam o estimador proposto por Arellano (CHC0) e suas versões modificadas CHC2, CHC3 e CHC4. As análises realizadas por meio de integração numérica trouxeram importantes conclusões sobre a qualidade dos testes quase- $t$  em modelos de dados em painel com EF sob heteroscedasticidade de forma desconhecida. Os resultados evidenciam que o estimador consistente mais amplamente empregado nas análises dos modelos de EF pode não ser a melhor opção sob determinadas circunstâncias. Isto porque os desempenhos dos testes quase- $t$  baseados nos diferentes CHC's em amostras de tamanho pequeno a moderado são influenciados pela presença de pontos de alavanca na estrutura de regressão.

Usando resíduos irrestritos, forma padrão nos principais pacotes econmétricos, o teste menos afetado pela presença de pontos de alavanca é o que utiliza o estimador CHC4. Isto porque a estratégia de inferência baseada neste estimador apresenta as melhores aproximações entre sua distribuição nula exata e a distribuição assintótica de referência. Quando não há pontos influentes a estatística de teste construída com o CHC3 tem distorção pouco menor que a do CHC4.

As análises conduzidas com resíduos restritos levam a conclusões diferentes. O problema passa a ser de subrejeição da hipótese nula e o teste CHCR0 a ter desempenho amplamente superior aos demais CHCR's. Na ausência de pontos de alavanca, essa diferença se reduz, mas o teste CHCR0 continua tendo as melhores aproximações. Os fatores de correção dos demais

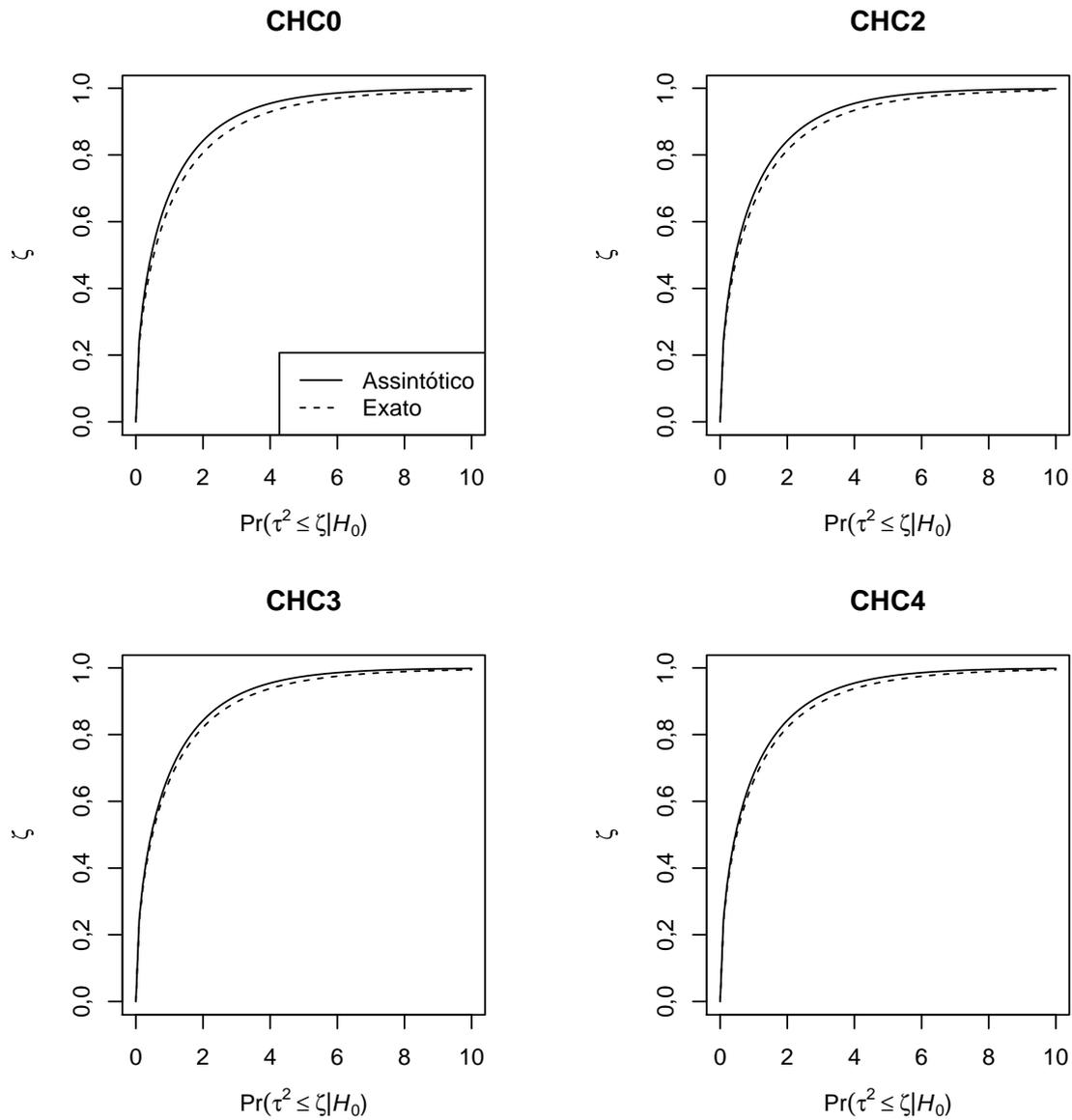
**Tabela 3.5.4**  $\Pr(\tau^2 \leq \zeta \mid \mathcal{H}_0)$  para  $n = 20$  e  $T = 5$ ;  $\zeta$  igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição  $\chi_1^2$ .

$\gamma$	$x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$					$x_{it} \sim \mathcal{U}(0,1)$							
	$\lambda$	$\zeta$	CHCR0	CHCR2	CHCR3	CHCR4	$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHCR0	CHCR2	CHCR3	CHCR4
0,00	1,00	2,706	0,9035	0,9221	0,9391	0,9621	0,00	1,00	2,706	0,8971	0,9026	0,9080	0,9065
		3,841	0,9632	0,9733	0,9812	0,9896			3,841	0,9527	0,9563	0,9598	0,9588
		6,635	0,9978	0,9988	0,9993	0,9996			6,635	0,9941	0,9950	0,9958	0,9955
0,04	4,62	2,706	0,9135	0,9404	0,9608	0,9823	1,49	4,62	2,706	0,8973	0,9031	0,9088	0,9077
		3,841	0,9729	0,9840	0,9907	0,9961			3,841	0,9529	0,9568	0,9604	0,9597
		6,635	0,9989	0,9995	0,9998	0,9999			6,635	0,9942	0,9951	0,9959	0,9958
0,08	21,33	2,706	0,9334	0,9634	0,9804	0,9935	2,98	21,39	2,706	0,8973	0,9036	0,9097	0,9090
		3,841	0,9850	0,9928	0,9965	0,9988			3,841	0,9533	0,9574	0,9613	0,9608
		6,635	0,9996	0,9998	0,9999	1,0000			6,635	0,9944	0,9954	0,9962	0,9961
0,12	98,51	2,706	0,9577	0,9821	0,9921	0,9979	4,47	98,91	2,706	0,8973	0,9040	0,9105	0,9102
		3,841	0,9936	0,9974	0,9988	0,9997			3,841	0,9538	0,9582	0,9623	0,9621
		6,635	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000			6,635	0,9948	0,9957	0,9965	0,9965

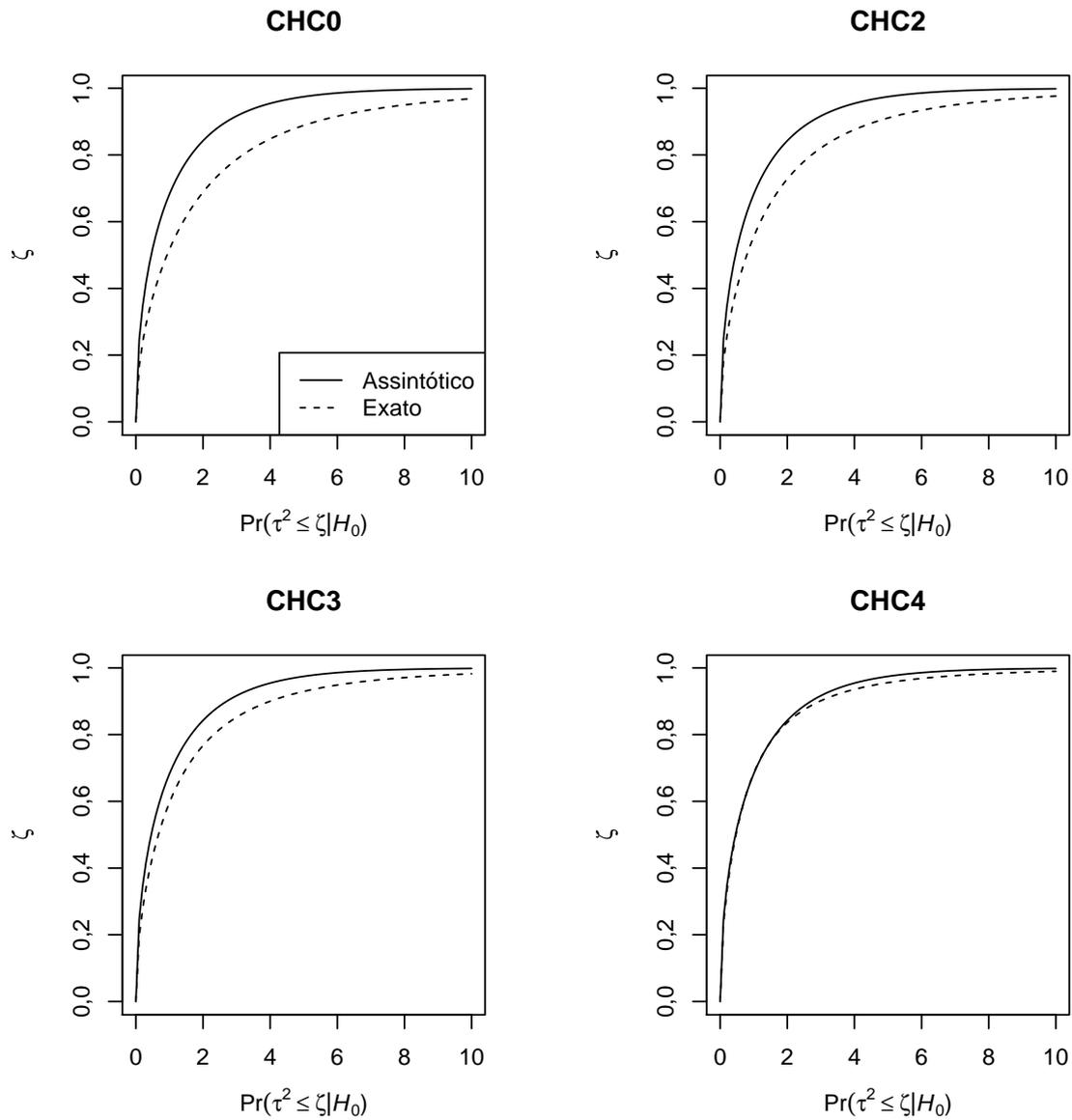
**Tabela 3.5.5**  $\Pr(\tau^2 \leq \zeta \mid \mathcal{H}_0)$  para  $n = 60$  e  $T = 5$ ; igual aos quantis 0,90; 0,95 e 0,99 da distribuição  $\chi^2_1$ .

$x_{it} \sim \mathcal{LN}(0,1)$													
$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHCR0	CHCR2	CHCR3	CHCR4	$\gamma$	$\lambda$	$\zeta$	CHCR0	CHCR2	CHCR3	CHCR4
0,00	1,00	2,706	0,8994	0,9049	0,9104	0,9194	0,00	1,00	2,706	0,8989	0,9006	0,9023	0,9018
		3,841	0,9533	0,9569	0,9604	0,9660			3,841	0,9506	0,9518	0,9529	0,9526
		6,635	0,9935	0,9944	0,9952	0,9964			6,635	0,9913	0,9916	0,9920	0,9919
0,04	4,62	2,706	0,9002	0,9086	0,9169	0,9314	1,49	4,62	2,706	0,8989	0,9007	0,9025	0,9022
		3,841	0,9564	0,9618	0,9668	0,9750			3,841	0,9507	0,9519	0,9531	0,9529
		6,635	0,9954	0,9965	0,9973	0,9984			6,635	0,9913	0,9917	0,9921	0,9920
0,08	21,33	2,706	0,9016	0,9129	0,9236	0,9426	2,98	21,39	2,706	0,8989	0,9008	0,9027	0,9025
		3,841	0,9614	0,9682	0,9742	0,9837			3,841	0,9508	0,9521	0,9534	0,9532
		6,635	0,9977	0,9985	0,9990	0,9996			6,635	0,9914	0,9918	0,9922	0,9922
0,12	98,51	2,706	0,9029	0,9161	0,9285	0,9504	4,47	98,91	2,706	0,8988	0,9008	0,9029	0,9028
		3,841	0,9661	0,9737	0,9802	0,9898			3,841	0,9509	0,9523	0,9536	0,9536
		6,635	0,9992	0,9996	0,9998	0,9999			6,635	0,9916	0,9920	0,9924	0,9924

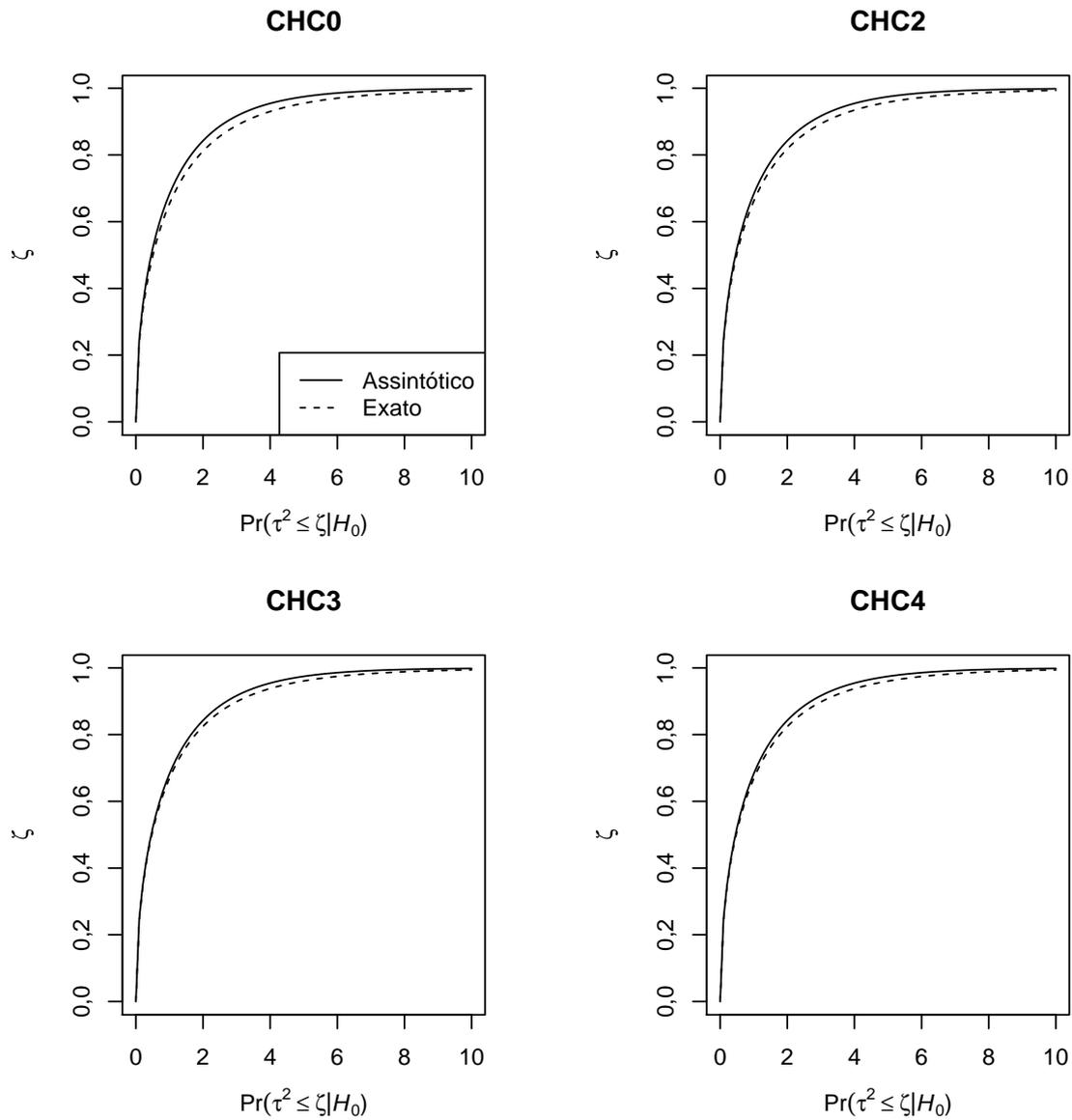
estimadores avaliados têm efeito adverso, agravando o problema de sobrejeição. O estimador  $CHCR0$  constitui assim a melhor opção dentre os  $CHCR$ 's.



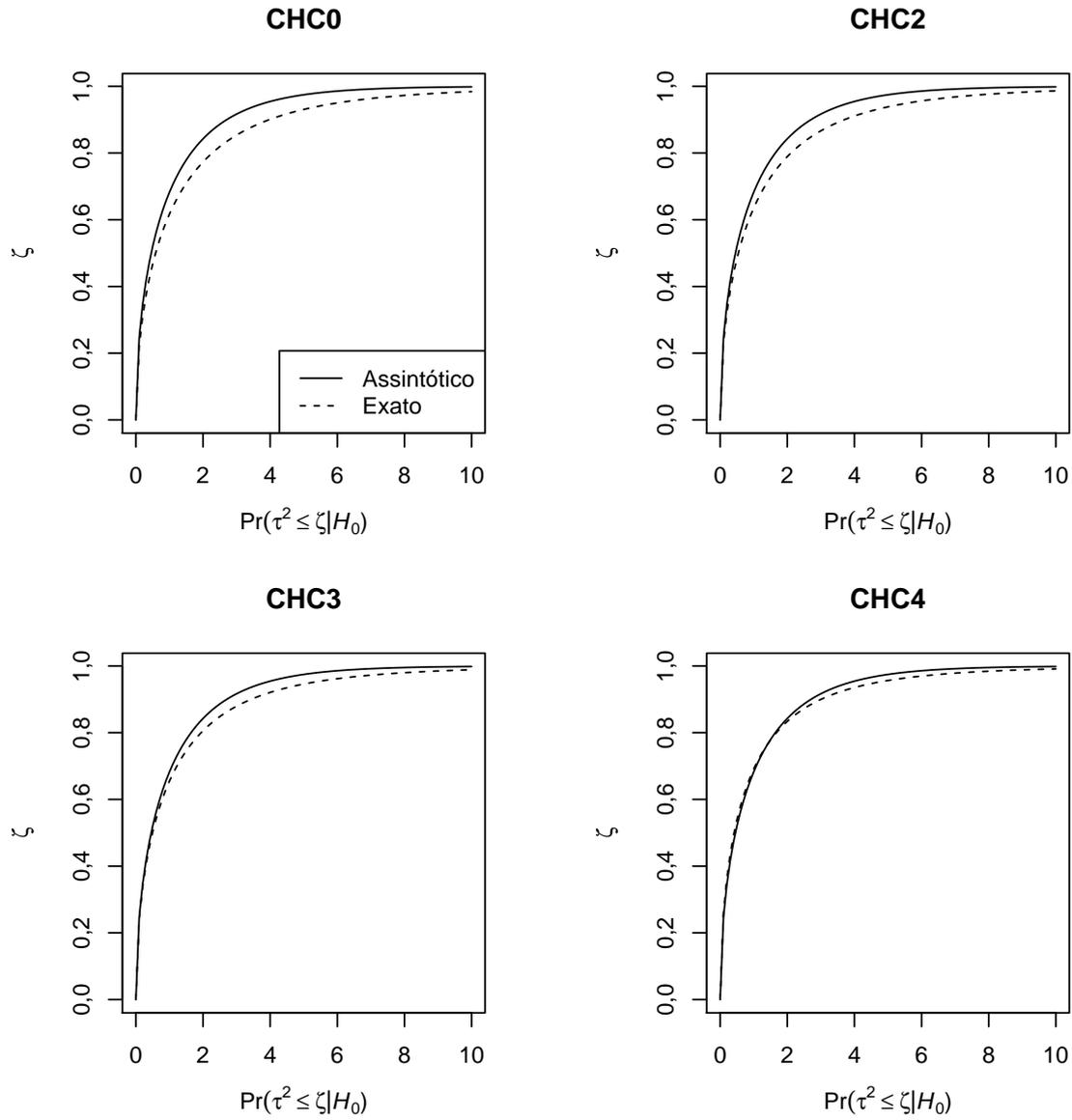
**Figura 3.5.1** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 20$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 98,91$  e  $x_{it} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .



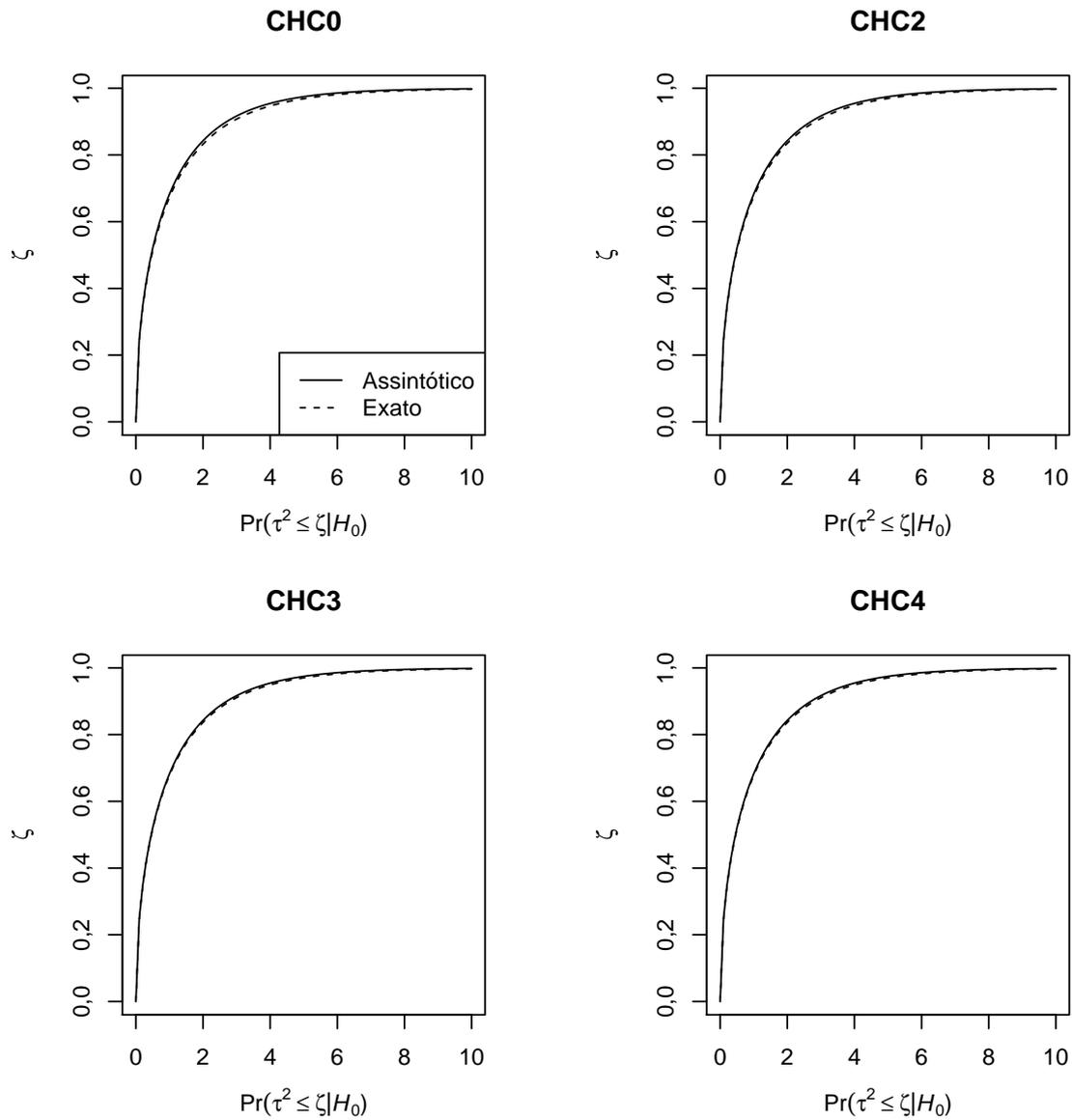
**Figura 3.5.2** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 20$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 98,51$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .



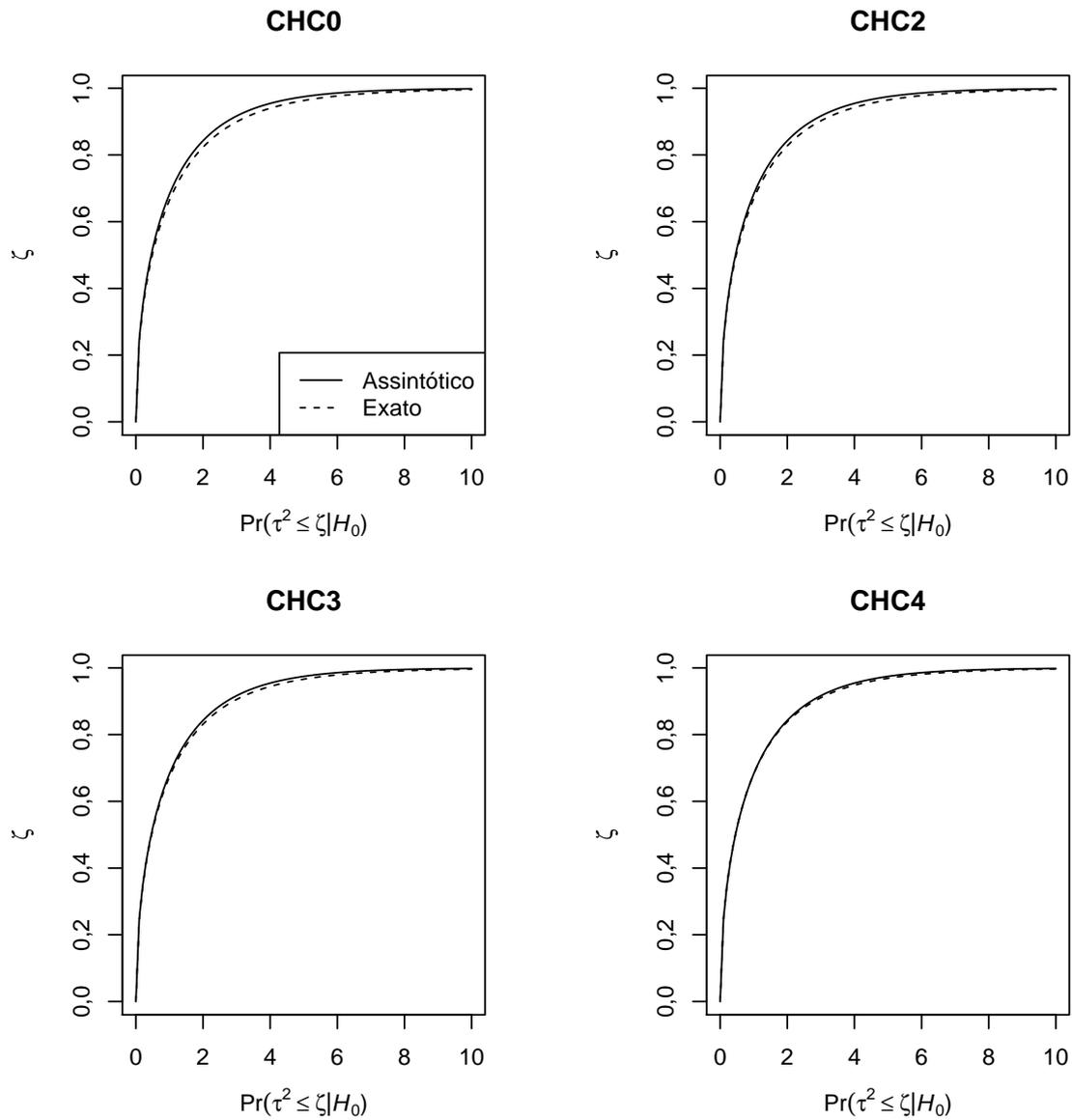
**Figura 3.5.3** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 20$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 1$  e  $x_{it} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .



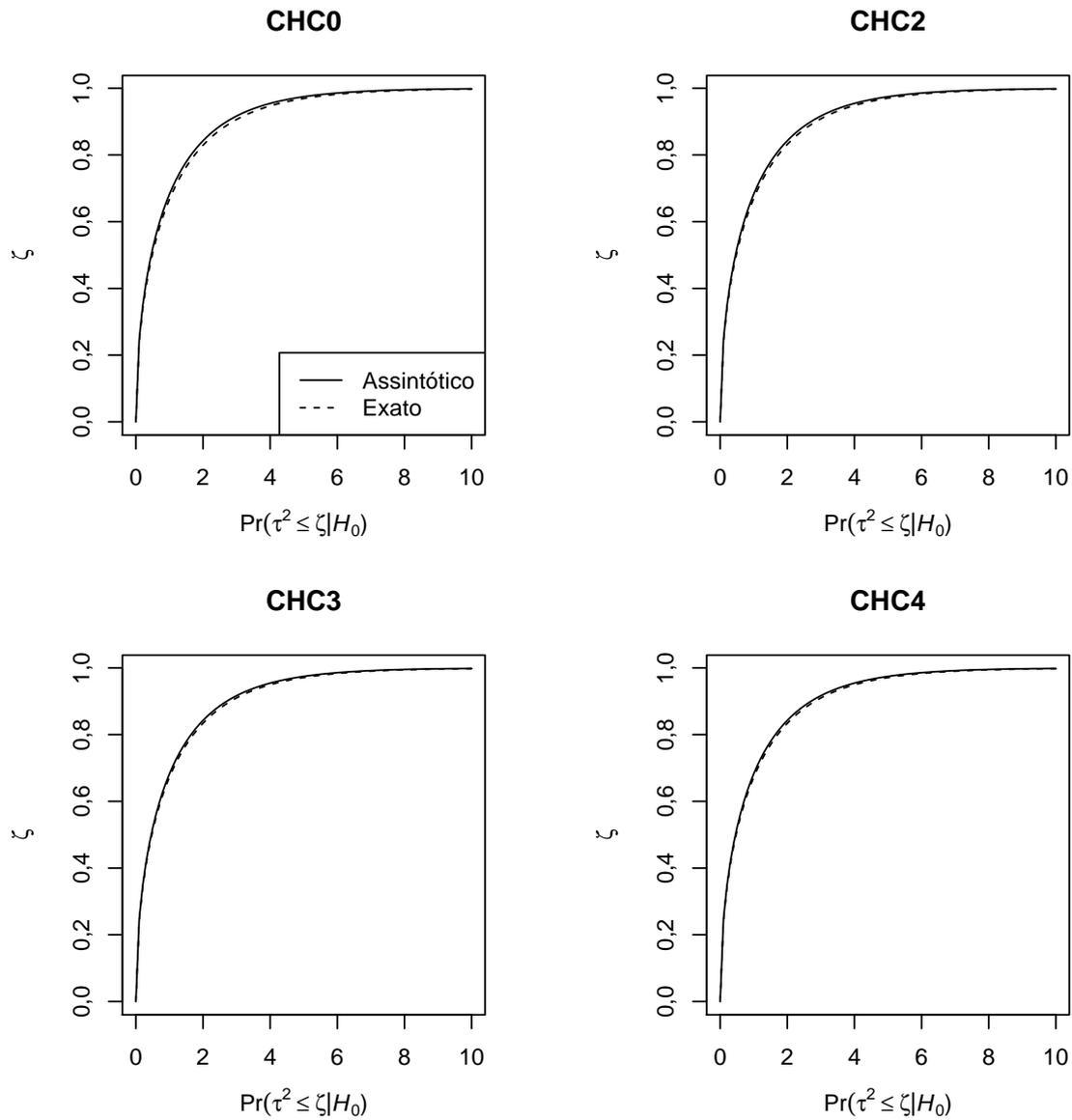
**Figura 3.5.4** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 20$ ,  $\tau = 5$ ,  $\lambda = 1$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .



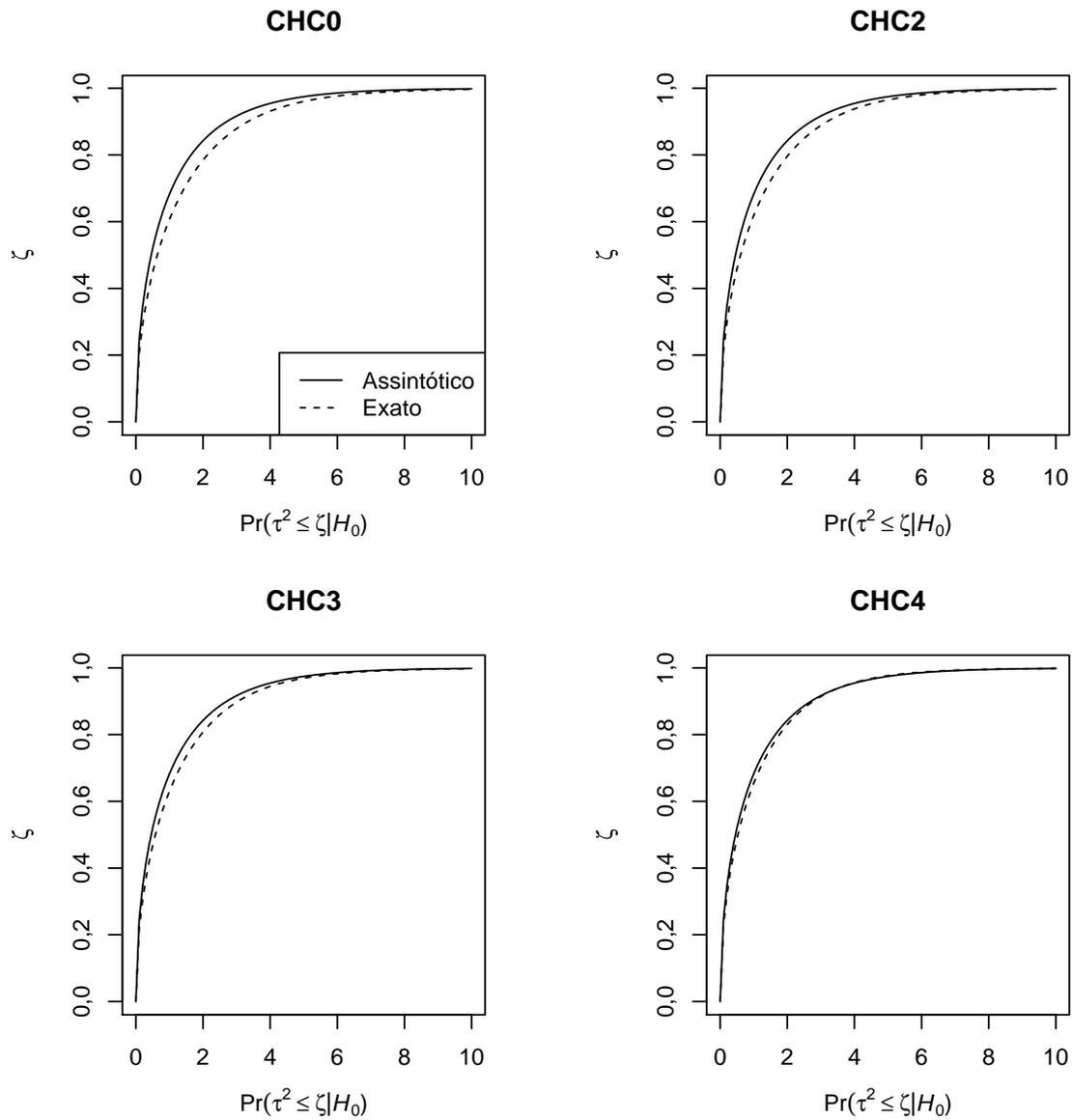
**Figura 3.5.5** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 20$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $x_{it} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .



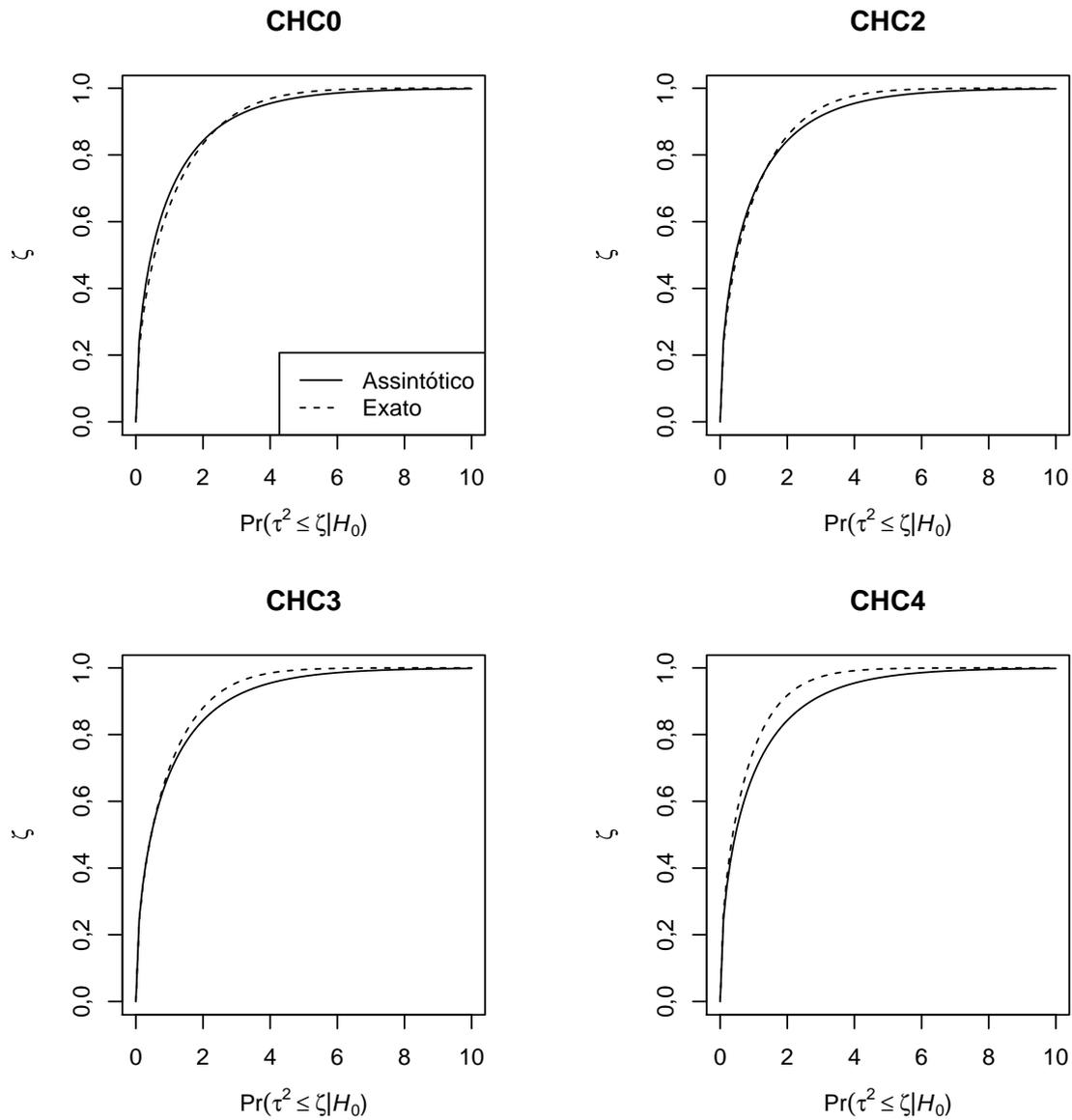
**Figura 3.5.6** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 60$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .



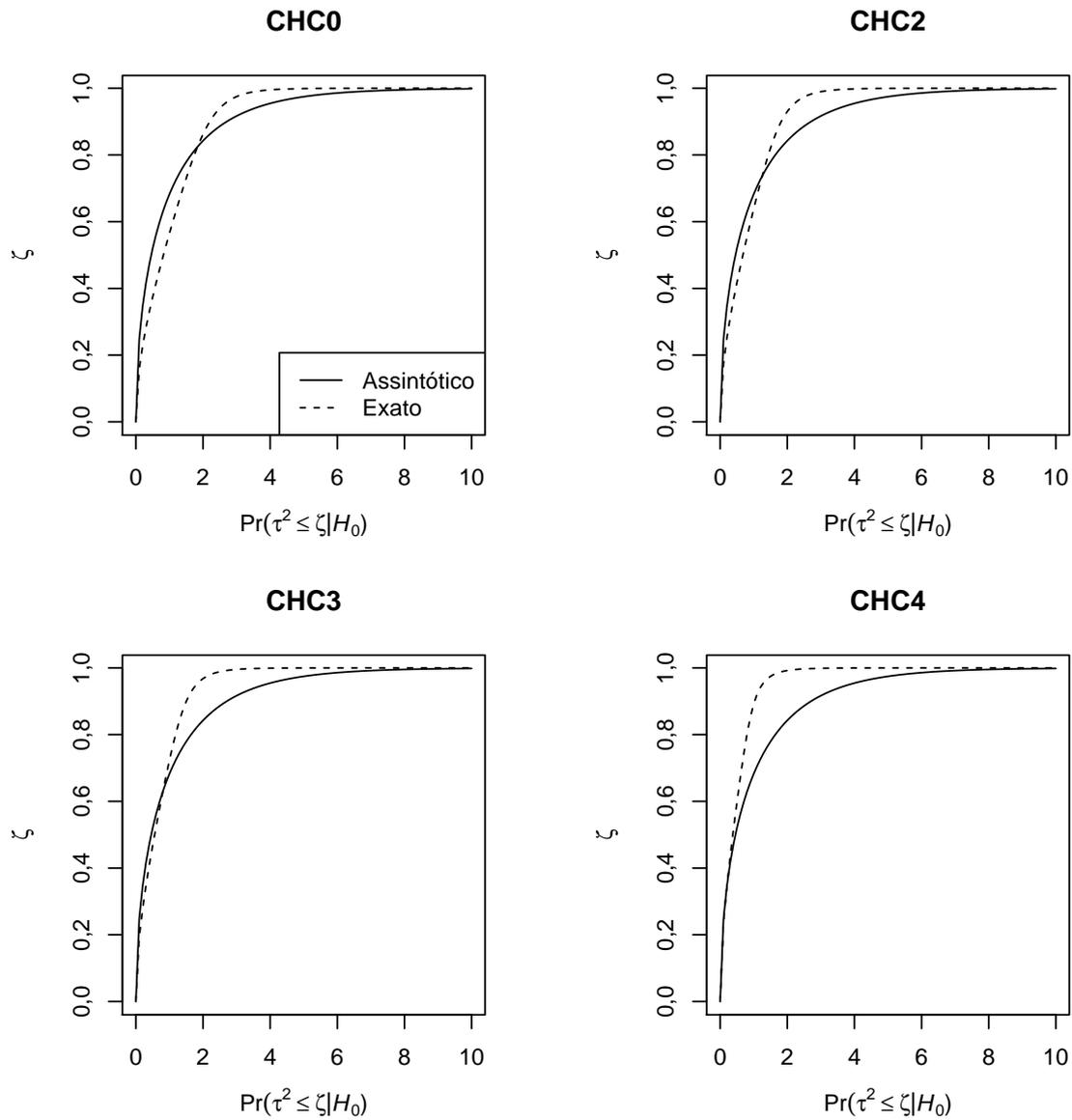
**Figura 3.5.7** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 20$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 98,91$  e  $x_{it} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .



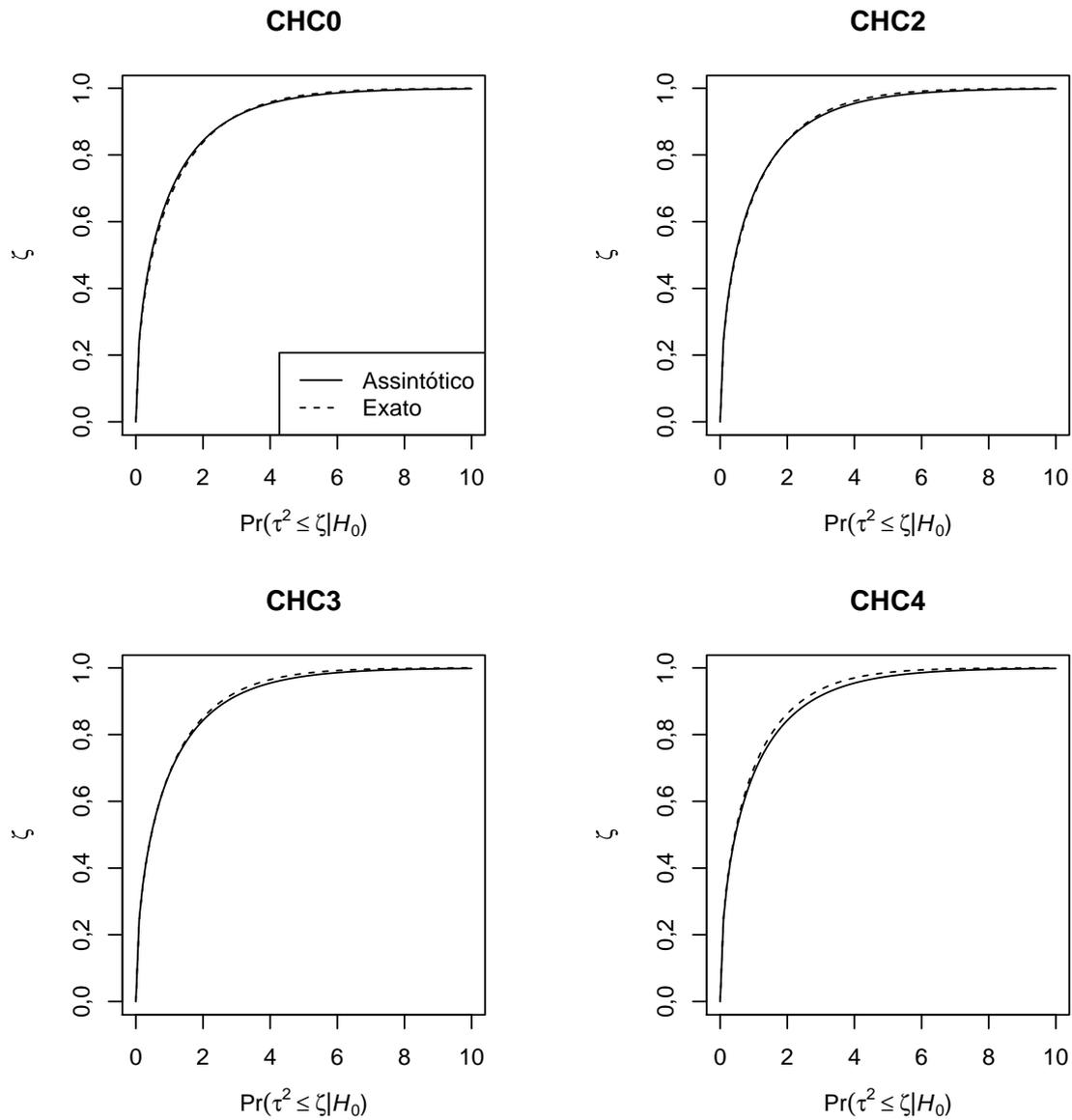
**Figura 3.5.8** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos irrestritos;  $n = 60$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 98,91$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .



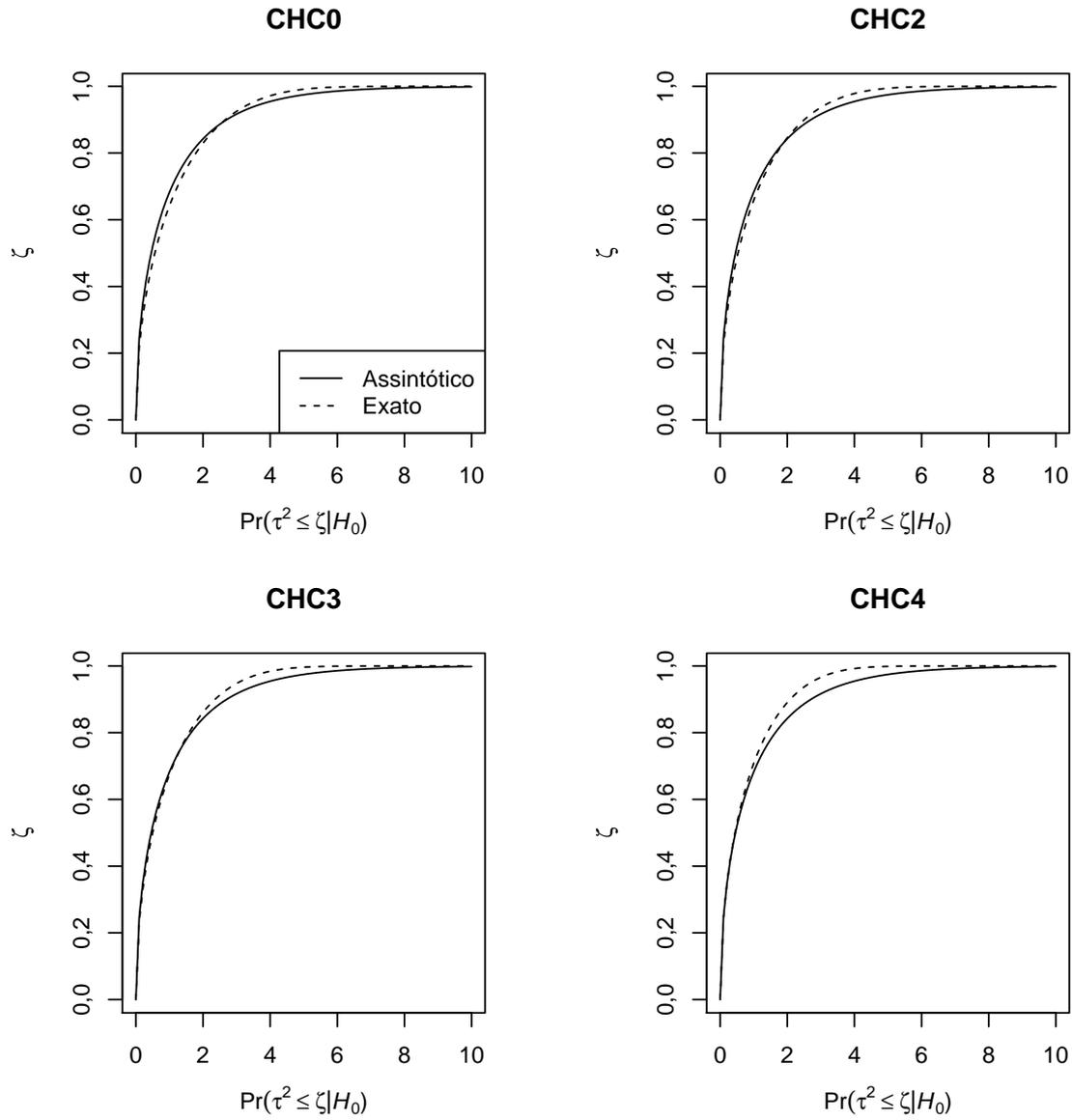
**Figura 3.5.9** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos restritos;  $n = 20$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .



**Figura 3.5.10** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos restritos;  $n = 20$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 98,51$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .



**Figura 3.5.11** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos restritos;  $n = 60$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 1,00$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .



**Figura 3.5.12** Distribuições exatas e assintótica de  $\tau^2$  sob  $\mathcal{H}_0$  com resíduos restritos;  $n = 60$ ,  $T = 5$ ,  $\lambda = 98,51$  e  $x_{it} \sim \mathcal{LN}(0, 1)$ .

# Inferência em modelos de diferenças em diferenças sob autocorrelação e heteroscedasticidade

## 4.1 Introdução

Modelos de Diferenças-em-Diferenças (DD) são uma maneira popular de estimar relações causais. A ideia é identificar se uma intervenção específica gera diferenças significativas entre os grupos afetados pela intervenção e os não afetados. Em aplicações práticas as suposições de ausência de autocorrelação serial e homocedasticidade são comumente violadas. Nestas circunstâncias o estimador da matriz de covariâncias torna-se inconsistente e tendencioso de modo que inferir corretamente sobre a validade das estimativas obtidas para os parâmetros do modelo, não é mais possível.

Para realizar testes de hipóteses assintoticamente válidos sobre os parâmetros do modelo é necessário recorrer a um estimador consistente da matriz de covariâncias. Uma opção amplamente empregada em aplicações práticas é o estimador de Arellano (1987), generalização do estimador HC0 proposto por White (1980). Tal estimador é bastante popular dado que sua consistência é mantida mesmo sob pressupostos fracos, além de ser válido tanto na presença de heteroscedasticidade quanto de autocorrelação serial nos resíduos. Sua utilização permite que o pesquisador forme intervalos de confiança válidos, sem a necessidade especificar um modelo exato para o comportamento dos resíduos (BALTAGI, 2005).

As propriedades do estimador de Arellano nos modelos de DD sob autocorrelação serial dos erros foram analisadas por Bertrand et al. (2004) (BDM). Suas conclusões mostraram que é possível usar tal estimador para produzir testes de hipóteses assintoticamente válidos. Por outro lado, Hansen (2007) ao analisar o desempenho do estimador de Arellano sob heteroscedasticidade e autocorrelação serial em modelos de efeitos fixos, argumenta que em várias análises, inclusive feitas com modelos de DD, a dimensão temporal nem sempre pode ser negligenciada. Partindo deste princípio as propriedades assintóticas do teste baseado nesse estimador são estendidas para casos em que tanto o número de indivíduos quanto de observações no tempo aumentam, ou ainda, quando a dimensão temporal aumenta e o número de indivíduos se mantém constante.

Vários autores já demonstraram que os tamanhos dos testes baseados no estimador de White tendem a ser maiores do que a probabilidade do erro tipo I especificada, especialmente quando os dados contêm pontos de alavanca, o que também acontece com o estimador de Arellano. Para modelos de regressão com dados em corte transversal, a literatura oferece uma

variedade de soluções para este problema. A ideia fundamental por trás dessas alternativas é estabilizar a variância, com a finalidade de reduzir a distância entre o erro tipo I esperado e o obtido nos testes de hipótese (KEZDI, 2005).

O objetivo deste ensaio é avaliar o comportamento dos testes baseados em outros estimadores consistentes da matriz de covariâncias que podem contribuir para a melhoria da qualidade da inferência nos modelos de DD, notadamente na presença de pontos de alavanca e em pequenas amostras. Para tanto, na seção seguinte é feita uma breve exposição sobre os modelos de DD e os estimadores consistentes a serem avaliados. A terceira seção apresenta os resultados de BDM acrescentando os resultados dos demais estimadores. A seção seguinte apresenta resultados numéricos adicionais onde covariáveis adicionais são introduzidas no modelo com intuito de avaliar o impacto da presença de pontos de alavanca. A Seção 5 apresenta um exemplo empírico sobre o impacto da liberação do porte de armas sobre a taxa de roubos. Por fim são feitas algumas considerações finais.

## 4.2 Modelos e estimadores consistentes da matriz de covariâncias

Considere, a princípio, que existe apenas um período pré e outro pós tratamento onde uma parte dos indivíduos está sujeita à intervenção (grupo de tratamento) e a outra não (grupo de controle). Por exemplo, na avaliação de programas de treinamento, um grupo de participantes e não participantes são observados antes e depois da implementação do programa. Em cada um dos períodos o modelo assume a forma de (CAMERON; TRIVEDI, 2005)

$$y_{it_0} = \alpha_i + \delta_{t_0} + u_{it_0},$$

antes da intervenção e

$$y_{it_1} = \phi + y_{it_0},$$

após a intervenção. O termo  $\alpha_i$  é introduzido para captar o efeito fixo introduzido pela heterogeneidade individual e  $\delta_t$  para captar o efeito temporal o que pode ser feito, por exemplo, introduzindo-se *dummies* para cada indivíduo e período de tempo.

Combinando as duas expressões o modelo pode ser reescrito na forma de

$$y_{it_1} = \phi + y_{it_0},$$

e de maneira alternativa como

$$y_{it} = \alpha_i + \delta_t + \phi D_{it} + u_{it},$$

em que  $D_{it}$  é uma variável *dummy* igual a 1 se o indivíduo  $i$  recebe o tratamento no período  $t$  e zero caso contrário.

Um modelo de DD com a configuração acima, ou seja, com apenas dois períodos (um

antes e outro após a intervenção) e dois grupos (um de controle e outro de tratamento), pode ser visto como um modelo de dados em painel na sua forma mais simples. Se existem mais de dois períodos e grupos a existência de efeitos individuais ou temporais torna-se relevante para a análise. De maneira mais geral em um modelo que considera a existência vários períodos de tempo podem ser adicionadas outra variáveis explicativas tal que (ANGRIST; PISCHKE, 2008)

$$y_{it} = \alpha_i + \delta_t + \phi D_{it} + \beta X_{it} + u_{it}. \tag{4.2.1}$$

O modelo (4.2.1) pode ser visto como um caso particular do modelo de EF no qual as estimativas dos erros padrão podem ser obtidas através do estimador de Arellano. As propriedades desse estimador na construção de testes de hipóteses foram analisadas por BDM e Donald e Lang (2007) nos modelos de DD e por Hansen (2007), Stock e Watson (2008), Kezdi (2005) entre outros, nos modelos de Efeitos Fixos.

O interesse aqui é o de analisar as propriedades dos testes construídos com diferentes estimadores consistentes da variância de  $\hat{\beta}$  nos casos em que a hipótese de homocedasticidade dos erros e ausência de autocorrelação serial intra grupos são violadas. A fim de obter uma expressão para o estimador consistente da matrix de covariâncias considere (4.2.1) reformulado de maneira que a matriz  $X$  agora inclui, além das covariáveis, a dummy de intervenção  $D_{it}$ . Então o modelo toma a forma de um modelo de EF tradicional

$$y_{it} = \alpha_i + \delta_t + \beta X_{it} + u_{it},$$

de forma que o estimador proposto por Arellano pode ser escrito na forma de

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}'_i \hat{\Omega}_i^{(0)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}, \tag{4.2.2}$$

em que  $\hat{\Omega}_i^{(0)} = \hat{u}_i \hat{u}'_i$ ,  $\hat{\Omega}^{(0)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(0)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(0)} \}$  e  $\hat{u}_i = (\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{iT})'$  é o vetor de resíduos de EF obtido de

$$\hat{u} = \tilde{y} - \tilde{X}\hat{\beta} = (I_{nT} - \tilde{H})\tilde{y}. \tag{4.2.3}$$

A matriz  $\tilde{H} = \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'$  em (4.2.3) é conhecida como “matriz chapéu” e  $I_{nT}$  é uma matriz identidade de ordem  $nT \times nT$ . Os elementos da diagonal principal de  $\tilde{H}$  tomam valores no intervalo padrão  $(0, 1)$  e, denotando-se esses elementos por  $\tilde{h}_{it}$ , pode ser mostrado que estes possuem valor médio  $p/(nT)$ . Uma regra prática é considerar valores de  $\tilde{h}_{it}$  superiores a duas ou três vezes a média (isto é,  $2p/(nT)$  e  $3p/(nT)$ ) como influentes e, portanto, merecedores de análise mais detalhada.

Para fins de notação, e manter alguma conformidade com a nomenclatura empregada nos

modelos de dados em corte transversal, ao longo do texto o estimador de Arellano, definido em (4.2.2), será denominado de CHC0 (*Clustered Heteroscedasticity-Consistent*). Os demais estimadores seguirão na mesma direção de modo que o estimador HC2 aplicado aos modelos de regressão de EF será denominado de CHC2 (*Clustered HC2*), e assim por diante.

Como observou Kezdi (2005), (4.2.2) converge em distribuição para  $\mathcal{N}(0, 1)$  quando o número de *clusters* tende para infinito ( $n \rightarrow \infty$ ) enquanto a dimensão temporal é mantida fixa e pequena em relação a  $n$ . Segundo o autor, um número de 50 *clusters* e (com tamanhos constantes) é, em geral, suficiente para garantir a qualidade da inferência. No entanto, com um pequeno número de *clusters*, a inferência baseada nesse estimador pode ser bastante imprecisa. Se  $n$  é pequeno, o estimador tende a produzir estimativas de erros padrão que são substancialmente enviesadas para baixo, ou seja, há um problema de sobre-rejeição da hipótese nula.

O estimador CHC0 não impõe qualquer restrição sobre a forma da heteroscedasticidade, no entanto, assume-se a independência dos erros entre os indivíduos. É comum que estudos realizados com modelos de DD sejam realizados com bases de dados onde a dimensão temporal é mais relevante que a individual. Neste caso, as propriedades assintóticas do estimador CHC0 devem ser avaliadas para  $T \rightarrow \infty$  com  $n$  fixo. Nesta situação Hansen (2007) demonstrou que o teste  $t$  construído com estimador CHC0, multiplicado por  $n/(n-1)$ , converge em distribuição para uma variável aleatória  $t_{n-1}$ . Os resultados das simulações sugerem que inferências realizadas com esta configuração conduzem a testes com tamanho correto, independentemente dos tamanhos relativos de  $n$  e  $T$  desde que a autocorrelação temporal é finita. As análises numéricas serão conduzidas com base nesses resultados uma vez que é comum nos estudos de DD que a dimensão temporal seja maior que a individual.

Uma limitação conhecida do estimador HC0 é que este, apesar de consistente, tende a subestimar a variância em amostras finitas. Uma correção para esta tendência é dada pelo estimador HC2, que tem o intuito de amenizar a subestimação dos erros pelos resíduos. O estimador HC2, introduzido por Horn et al. (1975), incorpora um ajuste baseado nas medidas de alavancagem à estimativa da matriz de covariâncias. Como observam Chesher e Austin (1991), é possível existir um viés severo no estimador HC0 quando existem pontos de alta alavancagem nos dados então, o HC2 visa corrigir a distorção causada por esses pontos.

Sua formulação nos modelos de EF, e por conseguinte de DD, pode ser feita substituindo-se  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$  por

$$\hat{\Omega}_i^{(2)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-1},$$

em que o termo  $\text{diag}$  é uma matriz diagonal contendo o vetor  $\{1 - \tilde{h}_i\}^{-1}$ ,  $\tilde{h}_i = (\tilde{h}_{i1}, \dots, \tilde{h}_{iT})'$ ,  $\tilde{h}_{it}$  é o  $it$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $\tilde{H}$  e  $\hat{\Omega}_i^{(2)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(2)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(2)} \}$ .

O estimador HC3 proposto por Davidson e MacKinnon (1993), que pode ser visto também como uma aproximação da técnica de *jackknife*, procura corrigir de maneira mais acentuada os efeitos da alavancagem, reduzindo a tendência dos resíduos de flutuar menos que os verdadeiros erros. Num estudo numérico detalhado Long e Ervin (1998) concluíram que no tocante

ao desempenho dos testes associados em amostras de tamanho típico o estimador HC3 tem desempenho superior ao HC0 e HC2.

O estimador HC3, que fornece uma aproximação para o estimador *jackknife*, parte da ideia de incorporar um ajuste baseado nas medidas de alavancagem da estimativa da matriz de covariâncias. Este estimador no contexto em análise é dado por

$$\hat{\Omega}_i^{(3)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-2},$$

sendo  $\hat{\Omega}^{(3)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(3)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(3)} \}$ .

Um quarto estimador a ser avaliado, denominado de HC4, originalmente proposto por Cribari-Neto (2004), tem o intuito de acentuar a intensidade do ajuste feito no estimador HC3, inflacionando os resíduos, cujas observações correspondentes possuem um maior grau de alavancagem. Isto porque, como demonstraram Cribari-Neto e Zarkos (1999), em pequenas amostras, a presença de pontos de alta alavancagem na matriz de regressores é mais decisiva para o comportamento dos estimadores da matriz de covariâncias, do que o grau de heteroscedasticidade em si.

O HC4 tem o intuito de acentuar a intensidade do ajuste feito no estimador HC3 ao elevar o termo de ajuste  $(1 - \tilde{h}_{it})$  à potência  $\delta_{it}$ . Então,

$$\hat{\Omega}_i^{(4)} = (\hat{u}_i \hat{u}_i') \cdot \text{diag} \{1 - \tilde{h}_i\}^{-\delta_i},$$

$\delta_i = \left( \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{i1}}{\tilde{h}_{i1}} \right\}, \dots, \min \left\{ 4, \frac{\tilde{h}_{iT}}{\tilde{h}_{iT}} \right\} \right)'$ ,  $\tilde{h}_{it}$  é a média de  $\tilde{h}_{iT}$  e  $\hat{\Omega}^{(4)} = \text{diag} \{ \hat{\Omega}_1^{(4)}, \dots, \hat{\Omega}_n^{(4)} \}$ .

Os quatro estimadores apresentados até aqui podem ser descritos dentro de um esquema comum. Para tanto, considere a expressão

$$\hat{\Psi}^{(s)} = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i' \hat{\Omega}_i^{(s)} \tilde{X}_i \right) (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1}, \tag{4.2.4}$$

em que o sobrescrito entre parênteses  $s = 0, 2, 3$  ou  $4$  indica qual dos estimadores está sendo considerado. Assim, quando  $s = 0$  está sendo empregado o estimador CHC0 e, portanto, o termo  $\hat{\Omega}_i^{(0)}$ . Os demais estimadores são obtidos da mesma maneira, ou seja, para o CHC2  $s = 2$  e  $\hat{\Omega}_i^{(2)}$ , o CHC3  $s = 3$  e  $\hat{\Omega}_i^{(3)}$  e o CHC4  $s = 4$  e  $\hat{\Omega}_i^{(4)}$ .

### 4.3 Resultados numéricos

Os resultados apresentados nesta seção são obtidos com um modelo de DD contendo um dummy de intervenção e uma covariável na forma

$$y_{it} = \alpha_i + \delta_t + \phi D_{it} + \beta x_{it} + u_{it}, \quad (4.3.1)$$

sendo que:

1.  $x_{it} = \rho x_{it-1} + v_{it}$ , ; e
2.  $u_{it} = \rho u_{it} + \sigma_{it} \varepsilon_{it}$ ,  $\varepsilon_{it} \sim \mathcal{N}(0, 1 - \rho^2)$ .

Os valores de  $\varepsilon_{it}$  foram obtidos de uma distribuição  $\mathcal{N}(0, 1)$  enquanto os valores de  $x_{it}$  foram gerados de duas maneiras distintas: no primeiro caso  $x_{i0}$  é obtido de uma distribuição  $\mathcal{LN}(0, 1)$  e  $v_{it} \sim \mathcal{N}(0, 0.75)$  gerando um conjunto de dados contendo pontos alavancados e, no segundo caso,  $x_{i0}$  e  $v_{it}$  são obtidos de uma distribuição  $\mathcal{U}(0, 1)$  onde não são criados pontos de alavanca. A variável de intervenção  $D_{it}$  foi criada de maneira que metade dos indivíduos são selecionados aleatoriamente para sofrer a intervenção placebo (grupo de tratamento) enquanto a outra metade não sofre a intervenção (grupo de controle). A data da intervenção é a mesma para todos os indivíduos do grupo de tratamento, metade do período, e a partir da data da intervenção todos os indivíduos no grupo de tratamento são afetados daí por diante. Os valores de  $\alpha_i$  e  $\delta_t$  foram obtidos de uma distribuição  $\mathcal{U}(0, 1)$  e  $\rho = 0.5$  de forma que os erros possuem autocorrelação serial finita intra grupos.

O termo  $\sigma_{it}$  determina o comportamento heteroscedástico no modelo, tendo sido especificado como

$$\sigma_{it} = \sqrt{\exp[\gamma(x_{it} + x_{it}^2)]}.$$

O critério  $\lambda = (\max \sigma_{it}^2) / (\min \sigma_{it}^2)$  é empregado para medir o grau de heteroscedasticidade. Então, quando  $\sigma_{it} = 1$  os erros são homoscedásticos e para valores de  $\sigma_{it} > 1$  os erros são heteroscedásticos, sendo tanto mais forte a heteroscedasticidade, quanto maior for o valor de  $\lambda$ .

Os tamanhos considerados de  $n$  e  $T$  foram 10, 20 e 50 e, inicialmente, foi gerada uma amostra de tamanho  $n = 10$  e  $T = 50$ . Os demais tamanhos amostrais de  $n$  foram obtidos replicando-se em  $n$  o conjunto de dados inicial. O tamanhos amostrais para  $T$  foram obtidos tomando-se a subamostra de interesse, por exemplo, para  $T = 10$  tomou-se os 10 primeiros valores e assim por diante. Este procedimento tem por objetivo garantir que o grau de heteroscedasticidade não se altere à medida que o número de observações aumenta. Os parâmetros do modelo de regressão foram definidos como  $\phi = 0$  e  $\beta = 1$ . Os resultados apresentados a seguir foram obtidos com 50.000 réplicas de MC e os valores de  $\alpha_i$ ,  $\delta_t$ ,  $D_{it}$  e  $x_{it}$  foram mantidos constantes ao longo das simulações.

As Tabelas 4.3.1 e 4.4.1 contém as estimativas das taxas de rejeição, expressas em percentagens, dos testes quase- $t$  que empregam os diferentes estimadores da variância de  $\phi$  e  $\beta$ , ao

**Tabela 4.3.1** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  na presença de pontos de alavanca;  $\alpha = 5\%$  e  $n = 10$ .

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	$\phi$				$\beta$			
				CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
10	10	0.00	1	7.53	7.27	7.02	7.11	7.67	7.14	6.60	6.25
		0.04	4.6	7.71	7.42	7.13	7.17	9.55	8.79	8.06	7.20
		0.08	21.1	8.24	7.93	7.57	7.43	12.56	11.20	9.99	8.17
		0.12	96.8	8.85	8.21	7.66	7.07	14.34	12.27	10.37	7.61
10	20	0.00	1	7.41	7.31	7.16	7.23	7.08	6.75	6.46	6.18
		0.04	4.6	7.16	7.01	6.87	6.92	7.98	7.62	7.22	6.59
		0.08	21.1	7.19	7.03	6.86	6.80	9.43	8.71	7.99	6.83
		0.12	96.8	7.50	7.23	6.91	6.55	10.16	8.97	7.85	6.03
10	50	0.00	1	6.54	6.49	6.45	6.45	6.34	6.24	6.13	6.05
		0.04	4.6	6.38	6.33	6.27	6.29	6.87	6.75	6.63	6.44
		0.08	21.1	6.54	6.47	6.40	6.35	7.62	7.41	7.15	6.75
		0.12	96.8	6.62	6.51	6.38	6.25	7.53	7.17	6.77	6.12

nível nominal de  $\alpha = 5\%$  quando o conjunto de dados contém pontos de alavanca. As hipóteses testadas são a exclusão de  $\phi$ , de forma que o teste pode ser formulado como  $\mathcal{H}_0 : \phi = 0$  contra  $\mathcal{H}_1 : \phi \neq 0$ , e  $\beta = 1$  tal que o teste de hipóteses é dado por  $\mathcal{H}_0 : \beta = 1$  contra  $\mathcal{H}_1 : \beta \neq 1$ . A hipótese nula é rejeitada toda vez que o valor absoluto da estatística de teste excede o valor crítico obtido de uma distribuição  $\sqrt{\frac{n}{n-1}}t_{n-1}$  (HANSEN, 2007).

Os resultados mostram que, na inferência sobre  $\phi$ , o teste que utiliza o estimador CHC0 é o mais liberal tanto sob homocedasticidade quanto heteroscedasticidade. Por exemplo, com  $n = 10$ ,  $T = 10$  e  $\lambda = 1$ , a taxa de rejeição da hipótese nula é de 7,53%, saltando para 8,85% com  $\lambda = 96,83$ . A existência de autocorrelação serial nos erros (que é constante) parece afetar menos o desempenho dos teste com do que a severidade da heteroscedasticidade. Os testes construídos com os estimadores CHC's têm desempenhos superiores. Na inferência sobre  $\beta$  o teste que utiliza o estimador CHC0 é ainda mais liberal em relação ao teste CHC4. Com  $\lambda = 96,83$  a taxa de rejeição do teste CHC0 é, aproximadamente, duas vezes maior a do teste CHC4 (14,34% contra 7,61%, respectivamente).

Os testes quase- $t$  baseados nos estimadores CHC2 e CHC3 se revelam menos liberais pois a distorção é reduzida por seus respectivos fatores de correção. O estimador CHC4 apresenta o melhor desempenho dentre os CHC's, conduzindo a testes associados cujas taxas de rejei-

**Tabela 4.3.2** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  na presença de pontos de alavanca;  $\alpha = 5\%$  e  $n = 50$ .

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	$\phi$				$\beta$			
				CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
50	10	0.00	1	5.29	5.25	5.20	5.21	5.74	5.61	5.48	5.38
		0.04	4.6	5.40	5.33	5.27	5.26	6.25	6.09	5.93	5.74
		0.08	21.1	5.49	5.37	5.27	5.17	7.34	7.06	6.79	6.33
		0.12	96.8	5.40	5.20	5.02	4.77	7.61	7.28	6.99	6.32
50	20	0.00	1	5.52	5.49	5.46	5.47	5.58	5.52	5.46	5.38
		0.04	4.6	5.41	5.37	5.34	5.35	5.89	5.79	5.68	5.53
		0.08	21.1	5.37	5.32	5.29	5.27	6.26	6.09	5.96	5.71
		0.12	96.8	5.35	5.29	5.22	5.11	6.81	6.57	6.39	6.02
50	50	0.00	1	5.27	5.27	5.26	5.26	5.30	5.28	5.25	5.24
		0.04	4.6	5.37	5.36	5.36	5.36	5.48	5.45	5.42	5.38
		0.08	21.1	5.40	5.38	5.35	5.34	5.94	5.87	5.82	5.74
		0.12	96.8	5.27	5.23	5.20	5.16	6.00	5.92	5.85	5.69

ção estão mais próximas ao nível nominal especificado. Esta vantagem é mais evidente nas amostras de menor tamanho e heteroscedasticidade maior ( $\lambda = 21,09$  e  $\lambda = 96,83$ ). Em particular, na inferência sobre  $\beta$  o percentual de rejeições da hipótese nula do teste que emprega este estimador CHC4 é o mais próximo do nível nominal especificado dentre as opções avaliadas.

Com  $n = 50$  e  $T = 10$ , as taxas de rejeição produzidas pelo testes já estão bastante próximas do nível nominal especificado mesmo ocorre com  $T = 50$ . Com  $n = 50$  e  $T = 50$  as taxas de rejeição produzidas pelos testes CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4 para  $\phi$  são, respectivamente, de 5,27%, 5,27%, 5,26% e 5,26% sob homocedasticidade e de 5,27%, 5,23%, 5,20% e 5,16% com heteroscedasticidade máxima. Pode-se perceber que a distorção no tamanho dos teste associados causada pelos pontos de alavanca diminui mas, o estimador CHC4 ainda apresenta taxas mais próximas a 5%.

Em resumo, os testes baseados no estimador de Arellano (CHC0) podem apresentar problemas de sobre rejeição em pequenas amostras. Este problema tende a se agravar quando existem pontos de alavanca nos dados, o que não é incomum em aplicações práticas. Os testes CHC3 e CHC4 têm desempenho superior, mostrando-se uma opção viável. Testes baseados nos estimadores de bootstrap também possuem bom desempenho mas requerem um custo computacional muito maior (ver a respeito o trabalho de Hounkannounon (2011)).

**Tabela 4.3.3** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  na ausência de pontos de alavanca;  $\alpha = 5\%$  e  $n = 10$ .

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	$\phi$				$\beta$			
				CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
10	10	0.00	1	6.83	6.59	6.34	6.51	6.79	6.48	6.17	6.27
		0.58	4.6	6.69	6.41	6.16	6.32	6.59	6.29	5.95	6.07
		1.16	21.1	6.58	6.29	6.08	6.23	6.95	6.59	6.29	6.39
		1.74	96.6	6.61	6.33	6.09	6.25	7.14	6.80	6.39	6.51
10	20	0.00	1	5.91	5.79	5.66	5.75	5.81	5.67	5.52	5.57
		0.58	4.6	5.92	5.79	5.69	5.75	6.03	5.86	5.72	5.77
		1.16	21.1	6.02	5.86	5.72	5.80	6.27	6.06	5.87	5.93
		1.74	96.6	6.17	6.02	5.87	5.93	6.35	6.18	6.00	6.04
10	50	0.00	1	5.20	5.15	5.08	5.09	5.34	5.27	5.19	5.23
		0.58	4.6	5.09	5.03	4.96	4.98	5.40	5.35	5.27	5.28
		1.16	21.1	5.24	5.18	5.12	5.13	5.40	5.32	5.25	5.26
		1.74	96.6	5.42	5.37	5.29	5.30	5.50	5.42	5.34	5.35

A fim de examinar o quanto da liberalidade dos testes construídos com as diferentes estratégias de inferência consideradas ocorre em função da presença de pontos de alavanca, o experimento foi reconduzido. Desta vez, os valores de  $x_{i0}$  e  $v_{it}$  foram gerados de uma distribuição  $\mathcal{U}(0, 1)$  e, portanto, o desenho de regressão não contém pontos de alavanca, ou seja, o maior valor observado de  $\tilde{h}_{it}$  não ultrapassa o limite de  $3p/(nT)$ . A fim de obter graus de heterocedasticidade semelhantes aos do experimento anterior, os valores de  $\gamma$  foram alterados.

Nas Tabelas 4.3.3 e 4.3.4 são rerepresentados os tamanhos estimados para os diferentes testes (expressos em percentual) construídos com os estimadores aqui avaliados. Pode-se perceber logo de início que as distorções no tamanho dos testes são menores do que as observadas em dados com pontos de alavanca. O teste CHC3 apresenta desempenho levemente superior aos demais. O teste que utiliza o estimador CHC0 revela-se agora bem mais confiável.

Por exemplo, com  $n = 10$  e  $T = 10$  as taxas de rejeição do teste CHC0 para  $\phi$  são de 6,83%; 6,69%; 6,58% e 6,61% para valores de  $\lambda$  entre 1 a 96,6. Também é importante notar que o teste baseado no estimador CHC3 passa a ter comportamento melhor que o do teste baseado no estimador CHC4. O estimador CHC4 por sua vez permanece produzindo testes associados confiáveis; com  $n = 50$  e  $T = 10$ , por exemplo, as taxas de rejeição para  $\phi$  são de 7,10%; 7,08%; 6,81% e 6,93% para  $\lambda$  entre 1 a 96,6.

**Tabela 4.3.4** Taxas de rejeição dos testes quase- $t$  na ausência de pontos de alavanca;  $\alpha = 5\%$  e  $n = 50$ .

$n$	$T$	$\gamma$	$\lambda$	$\phi$				$\beta$			
				CHC0	CHC2	CHC3	CHC4	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
50	10	0.00	1	7.18	7.12	7.06	7.10	6.20	6.13	6.05	6.07
		0.58	4.6	7.13	7.10	7.05	7.08	6.31	6.25	6.18	6.20
		1.16	21.1	6.88	6.83	6.78	6.81	6.37	6.31	6.25	6.27
		1.74	97.0	7.04	6.97	6.91	6.93	6.59	6.53	6.46	6.48
50	20	0.00	1	5.72	5.69	5.66	5.68	5.67	5.63	5.59	5.60
		0.58	4.6	5.72	5.71	5.68	5.70	5.62	5.59	5.56	5.57
		1.16	21.1	5.71	5.69	5.66	5.68	5.91	5.87	5.83	5.84
		1.74	97.0	5.61	5.59	5.56	5.57	5.65	5.64	5.60	5.61
50	50	0.00	1	5.26	5.26	5.26	5.26	5.16	5.16	5.15	5.15
		0.58	4.6	5.27	5.26	5.24	5.25	5.50	5.49	5.48	5.48
		1.16	21.1	5.16	5.13	5.12	5.13	5.10	5.08	5.07	5.07
		1.74	97.0	5.25	5.24	5.23	5.24	5.48	5.46	5.45	5.46

#### 4.4 Exemplo empírico: armas e crimes

Considere a discussão sobre o porte de armas nos EUA e sua relação com o crime. Alguns estados americanos promulgaram leis, conhecidas como “*shall-issue*”, instruem as autoridades locais a emitir o porte de armas a todos os candidatos que sejam cidadãos, mentalmente sadios e que não foram condenados criminalmente (alguns estados impõem restrições adicionais). Os defensores da lei argumentam que se mais pessoas portam armas o crime tende a diminuir. Isto ocorreria porque os criminosos são dissuadidos de agir em razão da incerteza sobre a reação da vítima. Os opositores argumentam que, ao contrário, a violência tende a aumentar devido ao uso acidental ou espontâneo de armas de fogo.

Os dados foram obtidos no pacote AER (KLEIBER; ZEILEIS, 2008) para o pacote estatístico R (R Development Core Team, 2008) e referem-se ao exercício 10.1 de Stock e Watson (2003). Os dados originais provêm do estudo de Ayres e Donohue (2002) sobre a eficácia da legislação sobre o porte de armas na redução das taxas de crimes violentos, assassinato, estupro, extorsão, crimes contra a propriedade, roubo de veículos, Roubo e Furto.

A base de dados original é formada por um painel balanceado com observações dos 50 estados dos EUA mais a Capital Federal entre os anos de 1977 a 1999. Cada observação refere-

se a um estado em um determinado ano e totalizando 1173 observações, 51 estados em 23 anos. Os resultados a seguir foram obtidos a partir de uma sub amostra composta dos 51 estados nos anos de 1991 a 1999 a exemplo da Tabela 4a apresentada em Ayres e Donohue (2002).

Com base na equação (4.2.1) a variável de interesse é uma *dummy* de intervenção ( $D_{it}$ ) que assume valor 1 se o estado  $i$  promulgou uma lei do tipo “*shall-issue*” no período  $t$  e 0 caso contrário. Caso a intervenção seja significativa deve haver uma diferença entre as taxas de roubos nos estados que promulgaram a lei (grupo de tratamento) e aqueles que não alteraram suas leis (grupo de controle). O sinal esperado pode ser negativo caso a intervenção leve a uma redução do crime e positiva se o aumento no uso de armas elevar os assaltos. A variável dependente é o número de roubos por 100.000 habitantes. O taxa de roubos é uma variável interessante porque está diretamente relacionada com com poder de dissuasão defendido por Lott e Mustard (1997). Se esse argumento faz sentido é bastante provável que se verifique um declínio das taxas de roubos.

O grupo de controle é formado pelos estados que nunca aprovaram leis que facilitaram o porte de armas: Alabama, Califórnia, Colorado, Connecticut, Delaware, D.C., Hawaii, Illinois, Indiana, Iowa, Kansas, Maryland, Massachusetts, Michigan, Minnesota, Missouri, Nebraska, New Hampshire, New Jersey, New Mexico, New York, North Dakota, Ohio Rhode, Island, South Dakota, Vermont, Washington e Wisconsin. O grupo de tratamento é constituídos pelos 14 estados que aprovaram leis do tipo “*shall-issue*” entre os anos de 1991 e 1999: Alaska, Arizona, Tennessee, Wyoming, Arkansas, North Carolina, Nevada, Oklahoma, Texas, Utah, Kentucky, Louisiana e South Carolina. Os demais estados não foram incluídos porque já haviam aprovado leis antes de 1991.

Além da variável que capta se as diferenças são significativas foram adicionadas outras variáveis de controle no modelo de regressão: a proporção de presos no estado no ano anterior (presos condenados por 100.000 habitantes ano anterior), a densidade populacional, a proporção de homens jovens (entre 10 e 29 anos), a proporção de negros, a proporção de brancos, a renda real per capita e a população constam no trabalho original. A taxa de desemprego e o número de policias por 100.000 habitantes foram adicionadas por serem comumente empregadas em estudos do tipo e evitar um possível viés de omissão.

A Tabela 4.4.1 apresenta os resultados da regressão e os  $p$ -valores obtidos com os estimadores CHC0, CHC2, CHC3 e CHC4, além do estimador padrão de EF. A fim de averiguar a presença de pontos de alavanca nos dados, o que pode influenciar nos resultados dos testes, os valores limites de  $\frac{2p}{nT}$  e  $\frac{3p}{nT}$  são fornecidos juntamente com a média de  $\tilde{h}_{it}$  e número de observações cujo o valor correspondente de  $\tilde{h}_{it}$  ultrapassa  $\frac{3p}{nT}$ .

É possível verificar na Tabela 4.4.1 que o teste baseado no estimador de EF rejeita a hipótese nula ao nível de 5% nominal. Já os testes baseados nos estimadores consistentes rejeitam a hipótese nula apenas ao nível nominal de 10%. Em particular os  $p$ -valores dos testes baseados nos estimadores CHC3 e CHC4 se aproximam bastante do nível nominal de 10% (0.092 e 0.093, respectivamente) contra 0.084 do teste CHC0.

A covariável presos que é significativa se o teste baseado no estimador CHC0 for conside-

rado, deixa de ser pelos resultados do teste CHC4. O teste de quase- $t$  com base no estimador CHC4 tem o maior  $p$ -valor de todos os testes. A hipótese de que a proporção de presos é importante para ajudar a explicar o comportamento criminoso não se verifica pelo teste CHC4. O mesmo acontece com a covariável brancos. O  $p$ -valor obtido com o estimador de EF sugere a rejeição da hipótese nula de exclusão desta covariável. Considerando-se o estimador CHC0 a hipótese nula deve ser rejeitada apenas ao nível nominal de 10%. O  $p$ -valor reportado pelo estimador CHC4 indica a não rejeição da hipótese nula mesmo que o nível nominal considerado seja de 10%.

## 4.5 Considerações finais

Heteroscedasticidade e autocorrelação serial são problemas bastante recorrentes em modelos de DD. Uma prática comum nestas circunstâncias é empregar um estimador consistente da matriz de covariâncias a fim de formular teste de hipóteses assintoticamente válidos. Um estimador amplamente empregado nesses casos é o proposto por Arellano (aqui chamado de CHC0), que pode ser visto como uma extensão do estimador HC0 de White. Tal estimador oferece uma alternativa viável pois é consistente tanto na presença de heteroscedasticidade quando de autocorrelação serial dos erros intra grupos.

As propriedades do estimador de Arellano já são bem conhecidas e sabe-se que é possível utilizar tal estimador em situações onde as propriedades assintóticas são derivadas também para  $T \rightarrow \infty$  com  $n$  fixo. No entanto, o desempenho das outras variantes do HC0 não haviam sido analisadas nos modelos de DD. Este ensaio buscou preencher esta lacuna estendendo e analisando outros HCCME's, a saber: HC2, HC3 e HC4. As simulações de MC evidenciam que, de maneira similar ao que ocorre em dados de corte transversal, o CHC0 pode não ser a melhor opção em amostras pequenas e/ou na presença de pontos de alavanca nos dados. Isto porque os testes quase- $t$  construídos com este estimador tornam-se liberais e essa liberalidade tende a aumentar à medida em que o grau de heteroscedasticidade cresce. Uma consequência direta deste fato é encontrar significância para variáveis que, de fato, não são significantes.

No exemplo empírico sobre o impacto da liberação do porte de armas sobre as taxas de roubos pode-se perceber que as conclusões podem ser enganosas se tanto heteroscedasticidade quanto autocorrelação serial são ignoradas. A qualidade da inferência sobre a *dummy* de intervenção pode ser afetada pela presença de pontos de alavanca nos dados. Em particular, a inferência sobre outras variáveis de controle que não a *dummy* de intervenção podem ser ainda mais imprecisas.

**Tabela 4.4.1** Impacto estimado da aprovação de lei “*shall-issue*” no crime de assalto, dados estaduais de 1991 a 1999.

Variável	Coeficiente	P-valores				
		EF	CHC0	CHC2	CHC3	CHC4
lei	0.065	0.016	0.084	0.088	0.092	0.093
presos	-0.001	0.004	0.025	0.039	0.059	0.116
policiais	-0.001	0.030	0.181	0.195	0.210	0.230
renda	0.000	0.713	0.763	0.769	0.774	0.778
desemprego	8.984	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
densidade	0.383	0.029	0.053	0.063	0.075	0.097
população	-0.105	0.005	0.035	0.044	0.055	0.077
negros	-0.002	0.980	0.987	0.987	0.988	0.988
brancos	0.053	0.027	0.079	0.086	0.094	0.102
homens jovens	-0.023	0.628	0.708	0.714	0.720	0.723
$n$	41					
$T$	9					
$2p/nT$	0.054					
$3p/nT$	0.081					
$\#\tilde{h}_{it} > 3p/nT$	21					
$\max \tilde{h}_{it}$	0.280					

## Referências Bibliográficas

- [1] ANGRIST, J. D.; PISCHKE, J. S. *Mostly harmless econometrics: an empiricist's companion*. [S.l.]: Princeton University Press, 2008. (Princeton University Press).
- [2] ARELLANO, M. Computing robust standard errors for within-groups estimators. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, v. 49, n. 4, p. 431–434, Nov 1987.
- [3] ARELLANO, M. *Panel data econometrics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2003. (Advanced Texts in Econometrics).
- [4] AYRES, I.; DONOHUE, J. J. *Shooting down the more guns, less crime hypothesis*. [S.l.], Nov 2002. (Working Paper Series, 9336).
- [5] BALTAGI, B. *Econometric analysis of panel data*. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2005.
- [6] BERTRAND, M.; DUFLO, E.; MULLAINATHAN, S. How much should we trust differences-in-differences estimates? *The Quarterly Journal of Economics*, v. 119, n. 1, p. 249–275, Feb 2004.
- [7] BRAMATI, M. C.; CROUX, C. Robust estimators for the fixed effects panel data model. *Econometrics Journal*, v. 10, n. 3, p. 521–540, Nov 2007.
- [8] CAMERON, A. C.; GELBACH, J. B.; MILLER, D. L. Bootstrap-based improvements for inference with clustered errors. *Review of Economics and Statistics*, v. 90, n. 3, p. 414–427, Aug 2008.
- [9] CAMERON, A. C.; TRIVEDI, P. K. *Microeconometrics: methods and applications*. New York: Cambridge University Press, 2005.
- [10] CHESHER, A.; AUSTIN, G. The finite-sample distributions of heteroskedasticity robust wald statistics. *Journal of Econometrics*, v. 47, n. 1, p. 153–173, Jan 1991.
- [11] CRIBARI-NETO, F. Econometric programming environments: Gauss, ox and s-plus. *Journal of Applied Econometrics*, v. 12, n. 1, p. 77–89, Jan-Fev 1997.
- [12] CRIBARI-NETO, F. Asymptotic inference under heteroskedasticity of unknown form. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 45, n. 2, p. 215–233, Mar 2004.
- [13] CRIBARI-NETO, F.; FERRARI, S. L. P.; OLIVEIRA, W. A. S. C. Numerical evaluation of tests based on different heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 75, n. 8, p. 611–628, 2005.

- [14] CRIBARI-NETO, F.; Galvão, N. M. S. A class of improved heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 32, n. 10, p. 1951–1980, Jan 2003.
- [15] CRIBARI-NETO, F.; LIMA, M. A. G. Approximate inference in heteroskedastic regressions: A numerical evaluation. *Journal of Applied Statistics*, v. 37, n. 4, p. 591–615, 2010.
- [16] CRIBARI-NETO, F.; LIMA, M. G. A. Heteroskedasticity-consistent interval estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 79, n. 6, p. 787–803, 2009.
- [17] CRIBARI-NETO, F.; ZARKOS, S. G. Bootstrap methods for heteroskedastic regression models: evidence on estimation and testing. *Econometric Reviews*, v. 18, n. 2, p. 211–228, 1999.
- [18] DAVIDSON, R.; FLACHAIRE, E. *The wild bootstrap, tamed at last*. [S.l.], Oct 2001. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/qed/wpaper/1000.html>>.
- [19] DAVIDSON, R.; MACKINNON, J. G. *Heteroskedasticity-robust tests in regression directions*. [S.l.], 1985.
- [20] DAVIDSON, R.; MACKINNON, J. G. *Estimation and inference in econometrics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1993.
- [21] DAVIDSON, R.; MACKINNON, J. G. The size distortion of bootstrap tests. *Econometric Theory*, v. 15, n. 3, p. 361–376, Oct 1999.
- [22] DONALD, S. G.; LANG, K. Inference with difference-in-differences and other panel data. *The Review of Economics and Statistics*, v. 89, n. 2, p. 221–233, 03 2007.
- [23] DOORNIK, J. A. *Ox: an object-oriented matrix programming language*. 4. ed. Londres: Timberlake Consultants e Oxford, 2001. Disponível em: <<http://www.nuff.ox.ac.uk/Users-/Doornik>>.
- [24] EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 7, n. 1, p. 1–26, 1979.
- [25] FLACHAIRE, E. *Bootstrapping heteroskedasticity consistent covariance matrix estimator*. [S.l.], 2002. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/hal/cesptp/halshs-00175897.html>>.
- [26] GODFREY, L. G. Tests for regression models with heteroskedasticity of unknown form. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 50, n. 10, p. 2715–2733, Jun 2006.
- [27] GODFREY, L. G.; ORME, C. D. Controlling the finite sample significance levels of heteroskedasticity-robust tests of several linear restrictions on regression coefficients. *Economics Letters*, v. 82, n. 2, p. 281–287, 2004.

- [28] GREENE, W. H.; SEAKS, T. G. The restricted least squares estimator: A pedagogical note. *The Review of Economics and Statistics*, v. 73, n. 3, p. 563–567, Aug 1991.
- [29] HANSEN, C. B. Asymptotic properties of a robust variance matrix estimator for panel data when  $t$  is large. *Journal of Econometrics*, v. 141, n. 2, p. 597–620, Dec 2007.
- [30] HAYASHI, F. *Econometrics*. [S.l.]: Princeton University Press, 2000.
- [31] HORN, S. D.; HORN, R. A.; DUNCAN, D. B. Estimating heteroscedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, v. 70, n. 350, p. 380–385, Jun 1975.
- [32] HOUNKANNOUNON, B. *Bootstrapping differences-in-differences estimates*. [S.l.], Dec 2011.
- [33] HSIAO, C. *Analysis of panel data*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- [34] IMHOF, J. P. Computing the distribution of quadratic forms in normal variables. *Biometrika*, v. 48, n. 3/4, p. 419–426, 1961.
- [35] KEZDI, G. *Robust standard error estimation in fixed-effects panel models*. [S.l.], 2005.
- [36] KLEIBER, C.; ZEILEIS, A. *Applied econometrics with R*. New York: Springer-Verlag, 2008. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=AER>>.
- [37] LIMA, M. G. A. *Essays on heteroskedasticity*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2008.
- [38] LIU, R. Y. Bootstrap procedures under some non-i.i.d. models. *The Annals of Statistics*, v. 16, n. 4, p. 1696–1708, 1988.
- [39] LONG, J. S.; ERVIN, L. H. *Correcting for heteroscedasticity with heteroscedasticity consistent standard errors in the linear regression model: small sample considerations*. [S.l.], Sep 1998. Working Paper. Disponível em: <[http://www.indiana.edu/~jlsoc/research\\_hccm.htm](http://www.indiana.edu/~jlsoc/research_hccm.htm)>.
- [40] LONG, J. S.; ERVIN, L. H. Using heteroscedasticity-consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician*, v. 54, p. 217–224, 2000.
- [41] LOTT, J. R.; MUSTARD, D. B. Crime, deterrence, and right-to-carry concealed handguns. *The Journal of Legal Studies*, v. 26, n. 1, p. 1–68, 1997.
- [42] MACKINNON, J. G. *Bootstrap methods in econometrics*. [S.l.], Feb 2006.
- [43] MACKINNON, J. G.; WHITE, H. Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. *Journal of Econometrics*, v. 29, n. 3, p. 305–325, Sep 1985.

- [44] MARSAGLIA, G. *The marsaglia random number CD-ROM with the diehard battery of tests of randomness*. 1995. CD-ROM. Disponível em: <[www.csis.hku.hk/~diehard](http://www.csis.hku.hk/~diehard)>.
- [45] R Development Core Team. *R: a language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria, 2008. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>.
- [46] STOCK, J.; WATSON, M. Heteroskedasticity–robust standard errors for fixed effects panel data regression. *Econometrica*, v. 76, n. 1, p. 155–174, Jan 2008.
- [47] STOCK, J. H.; WATSON, M. W. *Introduction to econometrics*. 2. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2003. (Addison-Wesley series in economics).
- [48] WHITE, H. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, v. 48, n. 4, p. 817–838, 1980.
- [49] WOOLDRIDGE, J. M. *Econometric analysis of cross section and panel data*. 1. ed. [S.l.]: The MIT Press, 2002.
- [50] WU, C. F. J. Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *Ann. Statist.*, v. 14, n. 4, p. 1261–1295, 1986.