

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Ensaaios sobre  
Equilíbrio Misto de Nash

Filipe Costa de Souza

Orientador: Francisco de Sousa Ramos

Co-orientador: Leandro Chaves Rêgo

Recife, 2012

FILIPPE COSTA DE SOUZA

Ensaio sobre  
Equilíbrio Misto de Nash

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Economia, área de concentração em Métodos Quantitativos, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título Doutor em Economia.

Orientador: Francisco de Sousa Ramos

Co-orientador: Leandro Chaves Rêgo

Recife, 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA  
PIMES/PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DO  
DOUTORADO EM ECONOMIA DE:

**FILIPPE COSTA DE SOUZA**

A comissão Examinadora composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera o Candidato Filipe Costa de Souza **APROVADO**.

Recife, 15/03/2012

---

Prof. Dr. Francisco de Sousa Ramos  
Orientador

---

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo  
Co-Orientador e Examinador Interno

---

Prof. Dr. Alexandre Stamford da Silva  
Examinador Interno

---

Prof. Dr. André Leite Wanderley  
Examinador Externo/Depatº de Estatística/UFPE

---

Prof. Dr. Luciano Menezes Bezerra Sampaio  
Examinador Interno/UFRN

## Agradecimentos

Inicialmente agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro durante os quatro anos do meu doutorado. Também sou grato ao meu orientador Francisco Ramos pelas inúmeras portas que ele me abriu ao longo desses seis anos de convivência, e ao meu co-orientador Leandro Rêgo, pela paciência e extrema dedicação. Em uma tentativa de resumir as inúmeras qualidades de Leandro, irei defini-lo como um pesquisador digno de admiração. Agradeço ainda aos funcionários do PIMES, sobretudo a Patrícia, por sempre resolverem nossas demandas prontamente.

Aos professores Paulo, Alexandre e Álvaro pelas contribuições dadas na defesa do meu projeto de tese, e aos professores André, Fernanda e Cássio por me auxiliarem na aplicação dos questionários. Aqui também não poderia faltar um agradecimento especial a todos que responderam e testaram o questionário de forma voluntária.

Aos meus colegas de curso, de disciplinas e de sala que, mesmo sem citá-los nominalmente, foram sempre solidários.

Aos meus amigos Tiago Buarque, Ticiano Azevedo, Emmanuel Marques, Pedro Ivo, Edylla, Joelma e Samantha por compreenderem à minha ausência e por sempre me darem o incentivo necessário para alcançar novas metas. Sempre me orgulho das conquistas deles como se fossem minhas.

Agradeço também à minha namorada Camilla, que me acompanha desde o primeiro ano do doutorado e torce pelo meu sucesso. Também lamento minhas inúmeras ausências, mas sou confortado por saber que ela sempre tem a companhia de seu gato Raj.

Agradeço à minha mãe, Luzia, pela dedicação e incentivo que vão muito além dessa tese. Ela sempre se orgulha das minhas conquistas por menores que sejam. Espero um dia poder dar para ela um verdadeiro motivo para se orgulhar. Ao meu irmão Fernando, por ter sempre cumprido, de forma exemplar, o seu papel de irmão mais velho e por ser sempre um exemplo com sua coragem e generosidade. Quem sabe um dia eu terei tantas virtudes quanto ele.

Sei que cometi o pecado da omissão ao longo deste agradecimento. Assim, na tentativa de me retratar (ou pelo menos minimizar esta falha), expresso a todos que de alguma forma *colaboraram* o meu muito obrigado.

## Resumo

Nesta tese realizamos uma análise crítica sobre o equilíbrio misto de Nash por meio de três ensaios. Inicialmente, desenvolvemos os conceitos de dominância colaborativa e de equilíbrio colaborativo e, a partir deles, chegamos à seguinte conclusão: em jogos 2x2 na forma estratégica, se existir um equilíbrio colaborativo, então, o equilíbrio misto é irracional. Além disso, mostramos que as utilidades esperadas do equilíbrio colaborativo são sempre as maiores do jogo para cada jogador e, por essa razão, este poderia ter a característica de um ponto focal. Também mostramos que existem situações estratégicas nas quais os *payoffs* do equilíbrio misto são ineficientes, e que os jogadores conseguiriam obter um resultado melhor ao transformarem um perfil de estratégias colaborativamente dominantes instável em um equilíbrio colaborativo através de contratos de auto-penalização. Em seguida, propomos uma nova abordagem para avaliar o comportamento de queima de dinheiro, a partir da utilidade esperada do equilíbrio misto. Provamos que para jogos 2x2 com um equilíbrio misto bem definido (na sua forma não-degenerada) a existência de uma estratégia colaborativamente dominante do jogador  $j$  para o jogador  $i$  é condição necessária e suficiente para a existência de derivadas da utilidade esperada do equilíbrio misto negativas (ou pelo menos não-positiva) para o jogador  $i$ , o que justificaria um comportamento de queima de dinheiro ao permitir um aumento da utilidade esperada do equilíbrio misto para tal jogador. Por fim, testamos experimentalmente as previsões teóricas anteriormente expostas, a saber: se os jogadores se comportam de acordo com o equilíbrio misto em jogos que possuam um perfil de estratégias colaborativas, o equilíbrio colaborativo como ponto focal e a queima de dinheiro como mecanismo de incentivo à colaboração. Os resultados mostraram que os jogadores não aparentam se comportar como predito pelo equilíbrio misto, nem o equilíbrio colaborativo aparenta ter a propriedade de ponto focal. Também detectamos que o mecanismo de queima de dinheiro apenas auxiliou na colaboração quando transformou um perfil de estratégias colaborativamente dominantes instável em um equilíbrio colaborativo.

**Palavras Chave:** Equilíbrio Misto, Dominância Colaborativa, Queima de Dinheiro, Experimento.

# Abstract

In this thesis we developed a critical analysis of the mixed Nash equilibrium by means of three surveys. Initially, we developed the concept of collaborative dominance and collaborative equilibrium, and from them we reached the follow conclusion: in 2x2 games in the strategic form, if there is a collaborative equilibrium then the mixed equilibrium is irrational. Furthermore, we show that the collaborative equilibrium's expected utilities are always the highest utilities available for the players on the game and, for this reason, the collaborative equilibrium may be seen for the players as a focal point. We also show that there are strategic situations in which the mixed equilibrium's expected utilities are inefficient, but that the players can reach a better result transforming a profile of unstable collaboratively dominant strategies into a collaborative equilibrium by means of self-sacrificing contracts. After that, we propose a new approach to evaluate the burning money behavior based on the mixed equilibrium's expected utility. We proved that, for 2x2 games with a well defined mixed equilibrium (in non-degenerate sense), the existence of collaboratively dominant strategy of player  $j$  for player  $i$  is a necessary and sufficient condition for the existence of negative derivatives of the mixed equilibrium's expected utility, which would justify a burning money behavior, since it increases player  $i$ 's mixed equilibrium expected utility. Finally, we tested experimentally the theoretical predictions above, namely: if players behave according to the mixed equilibrium in games that have a collaborative strategy profile, the collaborative equilibrium as a focal point, and the burning money mechanism as an incentive to collaboration. The results showed that players do not seem to behave as predicted by the mixed equilibrium and that the collaborative equilibrium does not appear to have focal point properties. Also, we detected that a burning money mechanism only helps players to collaborate when it transforms an unstable collaborative strategy profile into a collaborative equilibrium.

**Keywords:** Mixed Equilibrium, Collaborative Dominance, Burning money, Experiments.

# Lista de Figuras

<i>Figura 1.1: O jogo da Caça ao cervo.</i>	3
<i>Figura 1.2: Estrutural geral do jogo da Caça ao cervo.</i>	4
<i>Figura 2.1: A instabilidade do equilíbrio misto.</i>	8
<i>Figura 2.2: Adicionando as estratégias mistas.</i>	8
<i>Figura 2.3: Na busca por novos equilíbrios.</i>	9
<i>Figura 2.4: Batalha dos sexos adicionando as estratégias mistas.</i>	10
<i>Figura 2.5: Jogo com múltiplos equilíbrios puros.</i>	11
<i>Figura 2.6: Jogo com múltiplos equilíbrios puros e infinitos equilíbrios mistos.</i>	11
<i>Figura 2.7: Jogos com estratégia colaborativamente dominante.</i>	12
<i>Figura 2.8: Jogos com estratégias colaborativamente dominante – parte II.</i>	15
<i>Figura 2.9: Transformando estratégias colaborativas instáveis em estáveis.</i>	16
<i>Figura 2.10: Definindo a utilidade esperada.</i>	18
<i>Figura 2.11: jogo <math>\Gamma</math> na forma matricial.</i>	21
<i>Figura 2.12: jogo transposto equivalente.</i>	21
<i>Figura 2.13: Jogo do Dilema dos Prisioneiros</i>	22
<i>Figura 2.14: O Dilema dos Prisioneiros Transposto</i>	23
<i>Figura 2.15: equilíbrio colaborativo vs. critérios de seleção de equilíbrio.</i>	27
<i>Figura 2.16: Jogo de soma-zero.</i>	28
<i>Figura 3.1: Batalha dos sexos.</i>	31
<i>Figura 3.2: Batalha dos sexos com queima de dinheiro.</i>	32
<i>Figura 3.3: Caça ao cervo.</i>	33
<i>Figura 3.4: Caça ao cervo com queima de dinheiro.</i>	33
<i>Figura 3.5: Jogo com equilíbrio ineficiente</i>	34
<i>Figura 3.6: Alcançando o equilíbrio eficiente</i>	34
<i>Figura 3.7: Estrutura geral dos jogos 2x2.</i>	36
<i>Figura 3.8: Tentativa de generalização</i>	50
<i>Figura 3.9: Limitações para generalização.</i>	50
<i>Figura 3.10: Limitações para generalização – Parte II.</i>	51
<i>Figura 3.11: A utilidade esperado do jogador 1 em função do payoff <math>a</math>.</i>	52
<i>Figura 3.12: Limitações para generalização – Parte III</i>	53
<i>Figura 4.1: Um teste para o equilíbrio misto.</i>	58
<i>Figura 4.2: O jogo do falcão e do pombo.</i>	59
<i>Figura 4.3: O jogo do falcão e do pombo, com a definição dos tipos.</i>	60
<i>Figura 4.4: O jogo da galinha – Parte I.</i>	64
<i>Figura 4.5: O jogo da caça ao cervo – Parte II.</i>	65
<i>Figura 4.6: Um teste para queima de dinheiro – Parte III.</i>	66
<i>Figura A.1: Estrutura geral dos jogos 2x2.</i>	98

## Lista de Tabelas

<i>Tabela 4.1: Estatísticas descritivas para Idade.</i>	68
<i>Tabela 4.2: Tabela de frequência acumulada para Renda.</i>	69
<i>Tabela 4.3: Tabela de frequência acumulada para Grau de Instrução.</i>	69
<i>Tabela 4.4: Estatísticas descritivas para Parte I e II.</i>	74
<i>Tabela 4.5: Tabela cruzada para melhor resposta – Parte I.</i>	75
<i>Tabela 4.6: Tabela cruzada para melhor resposta – Parte II.</i>	75
<i>Tabela 4.7: Estatísticas descritivas para o Jogo 1 - Parte III.</i>	78
<i>Tabela 4.8: Estatísticas descritivas para o Jogo 2 - Parte III.</i>	79
<i>Tabela 4.9: Estatísticas descritivas para o Jogo 3 - Parte III.</i>	81
<i>Tabela 4.10: Colaboração vs. Gênero.</i>	83
<i>Tabela 4.11: Outras relações com o Gênero.</i>	85
<i>Tabela 4.12: Colaboração vs. Curso.</i>	85
<i>Tabela 4.13: Outras relações com o Curso.</i>	86
<i>Tabela 4.14: Colaboração vs. Conhecimento sobre Teoria dos Jogos.</i>	87
<i>Tabela 4.15: Outras relações com o Conhecimento sobre Teoria dos Jogos.</i>	88
<i>Tabela 4.16: Tabela cruzada conhecimento em Teoria dos Jogos vs. Cursos.</i>	88



## Lista de Gráficos

<i>Gráfico 4.1: Composição dos participantes por Religião.....</i>	<i>68</i>
<i>Gráfico 4.2: Conhecimento dos estudantes sobre Teoria dos Jogos. ....</i>	<i>70</i>
<i>Gráfico 4.3: Distribuição do número de Colaborações – Parte I.....</i>	<i>71</i>
<i>Gráfico 4.4: Distribuição da crença no número de Colaborações – Parte I.....</i>	<i>71</i>
<i>Gráfico 4.5: Distribuição da crença no número de Colaborações – Parte II.....</i>	<i>73</i>
<i>Gráfico 4.6: Distribuição da crença no número de Colaborações – Parte II.....</i>	<i>73</i>
<i>Gráfico 4.7: Distribuição do número de colaborações por tipo de jogo – Jogo 1.....</i>	<i>77</i>
<i>Gráfico 4.8: Distribuição da crença no número de colaborações por jogo – Jogo 1. ....</i>	<i>77</i>
<i>Gráfico 4.9: Distribuição do número de colaborações por tipo de jogo – Jogo 2.....</i>	<i>79</i>
<i>Gráfico 4.10: Distribuição da crença no número de colaborações por jogo – Jogo 2. ....</i>	<i>80</i>
<i>Gráfico 4.11: Distribuição do número de colaborações por tipo de jogo – Jogo 3.....</i>	<i>81</i>
<i>Gráfico 4.12: Distribuição da crença no número de colaborações por jogo – Jogo 3. ....</i>	<i>82</i>
<i>Gráfico 4.13: Distribuição do número de colaborações por gênero – Jogo 1 (Parte III) com queima de dinheiro. ....</i>	<i>84</i>

# Sumário

1. Considerações Iniciais .....	1
2. Equilíbrio Misto: quando tornar o outro jogador indiferente parece irracional .....	6
2.1. Introdução .....	6
2.2. Dominância colaborativa estável .....	12
2.3. Em busca da colaboração estável .....	15
2.4. Extensões e discussões .....	20
2.4.1. Jogo transposto e a racionalidade altruísta .....	20
2.4.2. Extensões ao conceito de dominância colaborativa .....	23
2.5. Considerações Finais .....	30
3. Equilíbrio Misto: quando queimar dinheiro é racional .....	31
3.1. Introdução .....	31
3.2. Uma análise das primeiras derivadas .....	36
3.3. Definindo o sinal das derivadas .....	41
3.4. Queimando dinheiro .....	45
3.5. Discussões .....	49
3.6. Aplicação: O Dilema da Segurança .....	53
3.7. Considerações Finais .....	56
4. Equilíbrio Misto, Dominância Colaborativa e Queima de Dinheiro: um estudo experimental .....	57
4.1. Introdução .....	57
4.2. Uma visão da literatura .....	58
4.3. O desenho do experimento .....	63
4.4. Resultados .....	67
4.4.1. Um resumo dos dados .....	68
4.4.2. Partes I e II .....	70
4.4.3. Parte III .....	75
4.4.4. Outros resultados .....	82
4.4.4.1. <i>Gênero:</i> .....	82
4.4.4.2. <i>Curso:</i> .....	85
4.4.4.3. <i>Conhecimento sobre teoria dos jogos:</i> .....	86
4.4.4.4. <i>As demais variáveis:</i> .....	88

4.5. Considerações Finais .....	89
5. Considerações Finais .....	90
5.1. Conclusões .....	90
5.2. Sugestões para trabalhos futuros .....	91
REFERÊNCIAS.....	94
APÊNDICE 1 .....	98
APÊNDICE 2 .....	103

# Capítulo 1

## Considerações Iniciais

*“O que quereis que os homens vos façam, fazei-o também a eles” (Lucas, 6: 31)*

Mesmo sendo uma teoria relativamente jovem, a Teoria dos Jogos, nos moldes iniciados por Von Neumann & Morgenstern (1944) e na posterior contribuição de Nash (1951), proporcionou uma revolução nos estudos econômicos. Isso se deve, em grande parte, a linguagem e técnicas matemáticas utilizadas, as quais permitiram maior formalismo dos conceitos e novas formas para analisar situações envolvendo interações entre múltiplos decisores.

Myerson (1999) destaca que, mesmo com a contribuição pioneira e inovadora de Von Neumann e Morgenstern, foi o trabalho de Nash que ampliou o alcance da teoria dos jogos, extrapolando a contribuição de Cournot e generalizando o Teorema Minmax de Von Neumann, ao introduzir o hoje tão popular conceito de equilíbrio de Nash. Nash (1951) provou que todo jogo finito (no conjunto de jogadores e no conjunto de estratégias de cada um deles) tem pelo menos um perfil de estratégia mista que é equilíbrio do jogo. Ele também apontou duas interpretações<sup>1</sup> para o conceito de equilíbrio: primeiro, temos a idéia de que o equilíbrio de Nash delimita um conjunto de perfis de estratégias mistas as quais, suportadas pelo critério de racionalidade<sup>2</sup>,

---

<sup>1</sup> Além das interpretações racional e evolucionária de Nash, o equilíbrio misto pode ser interpretado de outras formas. Autores renomados como Harsanyi (1973) e Aumann (1987) também propuseram suas visões sobre o assunto. Contudo, não existe um consenso na literatura sobre qual interpretação é a mais apropriada. Uma interessante discussão sobre as interpretações do equilíbrio misto de Nash pode ser vista em Osborne & Rubinstein (1994). Neste livro é possível perceber o desacordo dos autores em alguns pontos.

<sup>2</sup> Para uma maior discussão de como a racionalidade dos jogadores é derivada dos axiomas de Von Neumann, recomendamos o capítulo 1 do Myerson (1991).

poderiam ser escolhidas pelos jogadores como possíveis soluções para o jogo; ou seja, o equilíbrio de um jogo pode ser visto como o comportamento de um conjunto de jogadores em que todos (agindo individualmente) se comportam de forma racional. Em segundo lugar, temos que a idéia de estratégia mista (e, com efeito, do equilíbrio misto) poderia refletir a frequência com que um grupo de  $n$  jogadores (escolhidos aleatoriamente de  $n$  populações) escolheria suas estratégias puras, isto é, a estratégia mista seria composta pelo comportamento médio dos jogadores de cada uma das  $n$  populações<sup>3</sup>. No decorrer desta tese, iremos adotar a tradicional interpretação racional para desenvolver nossos argumentos, ou seja, estudaremos jogos com uma única rodada em que os jogadores dispõem de algum mecanismo probabilístico que os habilita a realmente adotarem uma estratégia mista (randomizada).

Em pouco tempo, inúmeras aplicações econômicas passaram a fazer uso do conceito de equilíbrio de Nash, o qual, pela sua relevância, também passou a ser alvo constante de análises teóricas e experimentais. Em trabalhos posteriores, diversos autores procuraram aprimorar e introduzir novas noções de equilíbrio, além de propostas de seleção de equilíbrio para jogos com múltiplos equilíbrios de Nash, ou ainda buscavam comparar as previsões teóricas com o “real” comportamento dos indivíduos quando deparados com situações estratégicas diversas e, a partir daí, propor novos modelos teóricos.

Mesmo após eminentes trabalhos como, por exemplo, Myerson (1978), Harsanyi & Selten (1988) do lado teórico e recentes contribuições como as de Walker & Wooders (2001), Chiappori, Levitt & Groseclose (2002) e Golman & Page (2010) no campo empírico e experimental, entre tantos outros, ainda existem alguns aspectos a serem analisados com relação ao equilíbrio de Nash, em particular no que tange o equilíbrio misto (na sua forma não-degenerada), como tentaremos mostrar ao longo desta tese.

Agora, apresentamos o nosso problema de pesquisa, no qual procuramos levantar uma nova crítica ao equilíbrio misto no que tange a sua racionalidade (como será explicado mais a frente). A discussão exposta é baseada na análise de como a distribuição de probabilidade do equilíbrio misto reage à variação nos *payoffs* dos jogadores, sobretudo, quando alguns *payoffs* tendem a valores específicos. Vale ressaltar que no decorrer da tese, supomos que os jogadores se comportam de acordo com o equilíbrio misto, ou seja, eles de fato randomizam as suas estratégias puras. Para

---

<sup>3</sup> Ver Young (2011).

auxiliar na argumentação, é utilizado o jogo da Caça ao cervo<sup>4</sup>. Esse jogo é inspirado na análise proposta por Rousseau (1755)<sup>5</sup> sobre a origem da desigualdade entre os homens, como ilustra a passagem a seguir:

“Eis como os homens puderam paulatinamente adquirir certas idéias grosseira dos compromissos mútuos e da vantagem de honrá-los, mas só na medida em que pudesse exigir-lo o interesse presente e sensível; pois a previdência nada era para eles, e, longe de se preocuparem com um provir distante, sequer pensavam no dia seguinte. Se precisassem capturar um cervo, cada um sentia que devia para tanto manter-se fielmente em seu posto; mas se uma lebre viesse a passar ao alcance de um deles, não há dúvida que ele a perseguiria sem escrúpulos e que, alcançando a sua presa, pouco se preocuparia em ter feito os companheiros perderem a deles” ROUSSEAU (1755, p.121).

Para analisarmos a passagem proposta por Rousseau via teoria dos jogos, é necessário que façamos algumas suposições sobre a história dos caçadores que decidem sair para caçar um cervo. Dois caçadores decidem conjuntamente caçar um cervo e partem para esta jornada, quando, no meio do caminho, eles se deparam com uma lebre e devem decidir separadamente se permanecem com o plano de caçar o cervo, ou se partem para caçar a lebre. Neste ponto, são assumidas algumas hipóteses, a saber: o cervo só pode ser capturado por dois caçadores, porém a lebre pode ser capturada por apenas um caçador; os caçadores não podem se comunicar no momento da decisão e, caso eles permaneçam seguindo o plano de caça ao cervo, o animal será capturado com certeza. Um exemplo do jogo da Caça ao cervo é ilustrado na Figura 1.1.

Jogador 1	Jogador 2	
	Cervo	Lebre
	Cervo	(9, 9)
	Lebre	(7, 0)

Figura 1.1: O jogo da Caça ao cervo.

Nesse jogo existem dois equilíbrios em estratégia pura (*Cervo, Cervo*) e (*Lebre, Lebre*) e um terceiro equilíbrio em estratégia mista  $E = (M, N)$ , com  $M = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$  e

<sup>4</sup> Para uma melhor compreensão da história do jogo da Caça ao cervo, recomendamos a leitura de Binmore (1994) e Shyrms (2004).

<sup>5</sup> Rousseau tinha uma idéia particular sobre o comportamento humano, a saber: “... em vez dessa máxima sublime de justiça arrazoada: faz ao outro o que queres que te façam, inspira a todos os homens esta outra máxima de bondade natural muito menos perfeita, mas talvez mais útil do que a anterior: faz o teu bem com o mínimo de mal possível para os outros” ROUSSEAU (1755, p.112).

$N=(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ , o que dá uma utilidade esperada de 6,75 para cada jogador. Todavia, para tornar a análise do jogo da Caça ao cervo mais geral, é utilizada a seguinte matriz de *payoffs*<sup>6</sup>, como mostra a Figura 1.2. Para que este jogo represente o problema da Caça ao cervo a ordem do *payoffs* deve ser  $a > b > c > d$ .

Sabe-se que em um equilíbrio misto, a escolha da distribuição de probabilidade (ou seja, da estratégia mista) é feita com o intuito de que os demais jogadores fiquem indiferentes entre as estratégias puras deles no suporte do equilíbrio (isto é, entre as estratégias que são jogadas com probabilidade positiva). Agora, é solicitado ao leitor que volte e analise atentamente o jogo da Caça ao cervo. Nele é possível perceber que cada jogador tem uma preferência estrita<sup>7</sup> de que o outro jogue a estratégia *Cervo*, uma vez que  $a > d$  e  $b > c$ . Contudo, mesmo neste caso, o equilíbrio misto é indicado como uma opção racional para os jogadores, contrariando as preferências originais e acarretando em resultado ineficiente no sentido de Pareto. Então, levanta-se o seguinte problema: em jogos em que os jogadores têm uma preferência estrita para que o outro jogador escolha uma dada estratégia, por que eles gostariam de tornar o outro jogador indiferente com relação às estratégias dele, ou seja, por que eles jogariam de acordo com o equilíbrio misto?

Jogador 1	Jogador 2	
	<i>Cervo</i>	<i>Lebre</i>
	<i>Cervo</i>	<i>Lebre</i>
	$(a, a)$	$(d, b)$
	$(b, d)$	$(c, c)$

Figura 1.2: Estrutura geral do jogo da Caça ao cervo.

Para responder esse questionamento e desenvolver um estudo crítico sobre o equilíbrio misto de Nash, esta tese está organizada na forma de três ensaios. No primeiro ensaio intitulado “Equilíbrio misto: quando tornar o outro jogador indiferente parece irracional”, apresentamos o conceito de dominância colaborativa e de equilíbrio colaborativo e utilizamos estes conceitos para explicar porque alguns equilíbrios mistos parecem ser irracionais e, por isso, não deveriam ser escolhidos pelos participantes de um jogo estratégico. No segundo, intitulado “Equilíbrio misto: quando queimar dinheiro é racional” seguimos a linha crítica de análise ao equilíbrio misto estudando quando o

<sup>6</sup> Os *payoffs* são representados em utilidade cardinal.

<sup>7</sup> Outros jogos, além da Caça ao cervo, em que os jogadores têm preferência estrita que o outro jogue uma dada estratégia são, por exemplo, o jogo da Galinha, o Dilema dos prisioneiros, entre outros.

comportamento de queima de dinheiro (ou utilidade) pode ser utilizado como um mecanismo de cooperação entre os jogadores, garantido uma melhora da utilidade esperada do equilíbrio misto. Por fim, no último ensaio intitulado “Equilíbrio misto, dominância colaborativa e queima de dinheiro: um estudo experimental” buscamos fazer uma comparação entre as previsões teóricas desenvolvidas nos ensaios anteriores com o real comportamento dos participantes em situações estratégicas por meio de um estudo experimental.



## Capítulo 2

### **Equilíbrio Misto: quando tornar o outro jogador indiferente parece irracional**

#### **2.1. Introdução**

O equilíbrio de Nash<sup>8</sup> em estratégia mista (Nash, 1951) é o conceito de solução mais popular na Teoria dos Jogos e amplamente apontado em livros-texto como a solução para jogos sem e, em alguns casos, com múltiplos equilíbrios em estratégia pura. O seu uso é justificado em jogos de soma-zero (como o jogo do par ou ímpar), jogos de coordenação (como, por exemplo, o jogo da Batalha dos sexos) e muitos outros.

Em linhas gerais, uma estratégia mista<sup>9</sup> para um jogador é uma distribuição de probabilidade sobre as suas estratégias puras. Um perfil de estratégias mistas é uma coleção de estratégias mistas, sendo uma para cada jogador que participa do jogo. Assim, um equilíbrio de Nash em estratégias mistas é um perfil de estratégias mistas tal que nenhum jogador tem incentivo de utilizar outra estratégia quando os demais jogam de acordo com o perfil de estratégias do equilíbrio, ou seja, qualquer jogador ao trocar unilateralmente sua estratégia de equilíbrio por outra obterá uma utilidade esperada menor do que ou igual àquela que é obtida no equilíbrio. Em um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, os jogadores são indiferentes entre as suas estratégias puras que

---

<sup>8</sup> Para uma melhor compreensão das contribuições de Nash para a Teoria dos jogos e seus reflexos na Teoria Econômica recomendamos a leitura de Kunh *et al.* (1996), Myerson (1999), Binmore (2011), Hart (2011), Maskin (2011) e Young (2011).

<sup>9</sup> Para definições mais formais do equilíbrio misto recomendamos: Nash (1951) e livros textos como, por exemplo, Myerson (1991), Gibbons (1992), Osborne & Rubinstein (1994) e Rasmusen (1996).

recebem probabilidade positiva de acordo com a estratégia mista. De fato, como os jogadores são indiferentes entre essas estratégias puras, qualquer distribuição de probabilidade sobre elas dará ao jogador a mesma utilidade esperada. Assim, em um equilíbrio misto, a escolha da estratégia mista é feita com o intuito de que os demais jogadores fiquem indiferentes entre as estratégias puras deles no suporte do equilíbrio.

Existem diversas situações estratégicas como, por exemplo, o jogo da Caça ao cervo, em que os jogadores têm uma preferência estrita por uma dada estratégia pura do outro jogador e, mesmo assim, o equilíbrio misto é considerado como um comportamento racional por parte dos jogadores. Contudo, ao jogarem de acordo com o equilíbrio misto (deixando o outro jogador indiferente), os jogadores estão contrariando suas preferências originais bem como estão obtendo utilidades esperadas ineficientes, o que pode ser considerado como um comportamento irracional. Embora caçar a lebre também contrarie as preferências originais dos jogadores e resulte em *payoffs* ineficientes, o equilíbrio (*Lebre, Lebre*) representa uma opção segura para os jogadores como discutido por Aumann (1990). Aumann<sup>10</sup> propõe uma discussão de quando um equilíbrio de Nash pode ser considerado auto-imposto (*self-enforcing*) baseado em anúncios verbais por parte dos jogadores; ou seja, quando podemos garantir que os jogadores irão jogar de acordo com certo equilíbrio de Nash uma vez que anunciaram que o fariam. Logo, também tomando como base o jogo da Caça ao cervo, ele conclui que embora os jogadores afirmem que irão jogar (*Cervo, Cervo*) isso não aumenta o incentivo deles de realmente escolher essas respectivas estratégias. Assim sendo, quando o jogador 1 declara que vai jogar cervo, isso não acrescenta nenhuma informação para o jogador 2, pois, este sabe que o jogador 1 prefere que ele sempre jogue cervo. Deste modo, o jogador 2 sabe que o jogador 1 afirmaria concordar com qualquer acordo em que o jogador 2 jogue cervo, mas isso não garante que o jogador 1 irá de fato cumprir o acordo e jogar cervo também. Por exemplo, o jogador 1 pode preferir jogar lebre uma vez que esta é uma opção mais segura<sup>11</sup>. Um raciocínio análogo também se aplica ao jogador 2. Contudo, o equilíbrio misto não possui esta propriedade de segurança e assim, além da propriedade de estabilidade pertencente a todos os

---

<sup>10</sup> Em um trabalho recente, Maskin (2011) segue a mesma argumentação proposta por Aumann (1990) para analisar quando o equilíbrio de Nash não pode ser considerado como *self-enforcing*. Uma discussão sobre *self-enforcing* equilíbrios em jogos mais gerais pode ser vista em Bernheim, Peleg & Whinston (1987) e Moreno & Wooders (1996).

<sup>11</sup> No jogo da Caça ao cervo, o equilíbrio (*Cervo, Cervo*) é dito *payoff* dominante enquanto o equilíbrio (*Lebre, Lebre*) é dito risco dominante. Para maiores informações ver Harsanyi & Selten (1988).

equilíbrios, os jogadores não têm nenhuma razão racional de se comportar como sugere o equilíbrio misto.

Baseados nessa intuição, nossa proposta é discutir em que situações tornar os demais jogadores indiferentes entre que estratégia escolher é racional (maximiza utilidade). Mas, antes de discutir esse ponto, iremos expor algumas críticas já existentes ao uso do equilíbrio misto. Por serem co-laureados do Prêmio Sveriges Riksbank de Ciências Econômicas em Memória de Alfred Nobel em 1994 juntamente com Nash, a primeira crítica exposta será a argumentação de instabilidade<sup>12</sup> presente em Harsanyi & Selten (1988, p.14-16).

Imagine um jogo sem equilíbrio em estratégia pura, ou seja, tendo apenas equilíbrio em estratégia mista como mostra a Figura 2.1.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	(45, 30)	(0, 90)
	(30, 75)	(60, 45)

Figura 2.1: A instabilidade do equilíbrio misto.

O equilíbrio em estratégia mista nesse jogo é  $E=(M, N)$ , com  $M=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , no qual o jogador 1 escolhe sua estratégia  $X$  como probabilidade  $\frac{1}{3}$  e sua estratégia  $Y$  com a probabilidade complementar de  $\frac{2}{3}$  e  $N=(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ , no qual o jogador 2 escolhe a estratégia  $W$  com probabilidade  $\frac{4}{5}$  e  $Z$  com a probabilidade complementar de  $\frac{1}{5}$ . Por uma questão didática, os autores propõem que se defina uma nova matriz de *payoffs*, sendo que desta vez, incluindo  $M$  como uma nova linha para o jogador 1 e  $N$  como uma nova coluna para o jogador 2, resultado que pode ser visto na Figura 2.2.

Jogador 1	Jogador 2		
	X	Y	N
	A	B	M
	(45, 30)	(0, 90)	(36, 42)
	(30, 75)	(60, 45)	(36, 69)
	(35, 60)	(40, 60)	(36, 60)

Figura 2.2: Adicionando as estratégias mistas.

<sup>12</sup> O conceito de instabilidade discutida aqui é diferente da idéia de instabilidade presente no conceito de mão trêmula (*Trembling Hand Perfect Equilibrium*). Para maiores informações ver Selten (1975).

Realizado o processo de avaliação da utilidade esperada, os autores partem para uma análise de estabilidade do jogo em questão. Observe que se o jogador 1 escolher a sua estratégia mista  $M$ , o jogador 2 não tem nenhum incentivo direto para também jogar sua estratégia mista (mesmo o par  $(M, N)$  sendo o equilíbrio do jogo). Isso ocorre, pois, dado que assumimos que o jogador 1 escolheu  $M$ , a utilidade esperada do jogador 2 será sempre de 60 independentemente de sua escolha. O mesmo ocorre se assumirmos que o jogador 2 escolhe  $N$ , e assim o jogador 1 teria uma utilidade esperada de 36, independentemente da estratégia que venha a escolher. Logo, por existirem infinitas estratégias que agem como melhor resposta a estratégia mista do adversário, o equilíbrio em estratégia mista é classificado como instável<sup>13</sup>.

A segunda crítica apresentada é do também laureado Robert Aumann (1974). O autor argumenta que existe uma gama de jogos nos quais os *payoffs* relativos a alguns equilíbrios são ineficientes para todos os jogadores quando comparados com os *payoffs* de outros perfis de estratégias do jogo (que não são equilíbrios). Com isso, é natural que os jogadores tentem obter meios de aumentar o conjunto de equilíbrios do jogo de modo a incluir resultados eficientes (ou, então, menos ineficientes). Para ilustrar a análise Aumann supõe o seguinte jogo exposto na Figura 2.3.

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>		
	W	Z	
	<i>X</i>	(5, 1)	(0, 0)
	<i>Y</i>	(4, 4)	(1, 5)

Figura 2.3: Na busca por novos equilíbrios.

Este jogo tem três equilíbrios, sendo dois puros,  $(X, W)$  e  $(Y, Z)$ , e um misto na forma  $E=((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$  o qual proporciona uma utilidade esperada de 2,5 para cada jogador. Contudo, note que o par de estratégias  $(Y, W)$  proporcionaria utilidades de  $(4, 4)$  para os jogadores, o que faz da utilidade esperada do equilíbrio misto ineficiente. Uma vez que os dois equilíbrios puros são assimétricos, os jogadores poderiam buscar meios para se coordenarem e obterem um melhor resultado esperado quando comparado com aquele do equilíbrio misto. Então, Aumann desenvolve o conceito de *correlated equilibrium* indicando que se existir um mediador externo e imparcial, este poderia sugerir uma distribuição de probabilidade sobre os perfis de estratégias do jogo e,

<sup>13</sup> Ver também Kuhn *et al* (1996).

posteriormente, como reflexo da distribuição de probabilidade, recomendar individualmente a escolha de uma dada estratégia para cada jogador, o que constituiria um novo equilíbrio do jogo<sup>14</sup>. Para o exemplo da Figura 2.3, no *correlated equilibrium* os perfis de estratégia  $(X, W)$ ,  $(Y, W)$  e  $(Y, Z)$  seriam escolhidos com probabilidade de  $1/3$ , o que proporcionaria uma utilidade esperada de  $10/3$  para cada jogador, utilidade esta superior a do equilíbrio misto.

A próxima crítica apresentada é proposta por Kalai & Samet (1984). Os autores seguem uma linha diferente da de Aumann e desenvolvem um refinamento ao conceito de equilíbrio de Nash na tentativa de eliminar pontos implausíveis do conjunto original de equilíbrios, denominando-o de equilíbrio persistente (*persistent equilibria*). Quando tal refinamento é aplicado ao jogo Batalha dos sexos<sup>15</sup>, por exemplo, ele elimina o equilíbrio misto, uma vez que a utilidade esperada obtida por cada jogador nesse equilíbrio é ineficiente, ou seja, é inferior a menor utilidade obtida em qualquer um dos equilíbrios puros do jogo, como ilustra a Figura 2.4.

Jogador 1	Jogador 2			
		W	Z	N
	X	(2, 1)	(0, 0)	( $2/3, 1/3$ )
	Y	(0, 0)	(1, 2)	( $2/3, 4/3$ )
	M	( $4/3, 2/3$ )	( $1/3, 2/3$ )	( $2/3, 2/3$ )

Figura 2.4: Batalha dos sexos adicionando as estratégias mistas.

Contudo, Harsanyi & Selten (1988) realizam fortes críticas ao conceito de refinamento<sup>16</sup> proposto por Kalai & Samet (1984), sobretudo, no tocante à eliminação do equilíbrio misto no jogo citado. Os autores indicam que uma vez eliminado tal equilíbrio, os jogadores não poderiam aplicar nenhum critério de seleção de equilíbrio para saírem do impasse em que se encontram e, por essa razão, o equilíbrio misto seria a opção mais plausível para os jogadores. Ademais Myerson (1991) argumenta que, na ausência de comunicação ou mediadores, para saírem desse impasse, os jogadores

<sup>14</sup> Para uma discussão mais formal sobre conceito de *correlated equilibrium* recomendamos a leitura de Aumann (1974) e Myerson (1991).

<sup>15</sup> Para uma melhor compreensão da história do jogo Batalha dos sexos, recomendamos a leitura de Luce & Raiffa (1989).

<sup>16</sup> Para uma discussão sobre refinamentos do equilíbrio de Nash recomendamos Myerson (1978) e Kohlberg & Mertens (1986).

teriam que recorrer ao conceito de ponto focal<sup>17</sup> o qual, vale ressaltar, a depender do contexto do jogo, pode não existir.

Por fim, seguindo esta linha de crítica baseada na eficiência (ou melhor, na ineficiência) das utilidades esperadas resultantes do equilíbrio misto, um problema ainda mais grave pode emergir: o bem-estar social. Observe o jogo proposto por Luce & Raiffa (1989, p. 107) e exposto na Figura 2.5.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
X	(1, 3)	(2, 3)
Y	(1, 1)	(2, 1)

Figura 2.5: Jogo com múltiplos equilíbrios puros.

Nesse jogo específico, todo perfil de estratégia é um equilíbrio de Nash. Assim, utilizando a mesma abordagem de Harsanyi & Selten (1988), é criada uma nova matriz do jogo incluindo as estratégias mistas ( $M$ ,  $N$ ), como mostra a Figura 2.6. Porém, o leitor pode perceber que esse jogo tem infinitos equilíbrios em estratégias mistas, isto é, qualquer estratégia mista  $M=(p^*, 1-p^*)$  para o jogador 1, na qual  $p^* \in [0,1]$  e qualquer estratégia mista  $N=(q^*, 1-q^*)$  para o jogador 2, na qual  $q^* \in [0,1]$ , é uma equilíbrio misto do jogo em questão.

Jogador 1	Jogador 2		
	W	Z	N
X	(1, 3)	(2, 3)	(2 - $q^*$ , 3)
Y	(1, 1)	(2, 1)	(2 - $q^*$ , 1)
M	(1, $2p^*+1$ )	(2, $2p^*+1$ )	(2 - $q^*$ , $2p^*+1$ )

Figura 2.6: Jogo com múltiplos equilíbrios puros e infinitos equilíbrios mistos.

Assim, a depender da escolha de  $p^*$  e  $q^*$ , e supondo que a sociedade é composta apenas pelos dois jogadores, a mesma poderia se encontrar no melhor estado social (e eficiente no sentido de Pareto) ou, em contrapartida, no estado social mais ineficiente.

A crítica que desenvolvemos neste capítulo apresenta duas características de natureza distintas, quais sejam: características dos refinamentos e característica dos critérios de seleção de equilíbrio. Primeiro, discutimos quando um dado equilíbrio misto é considerado irracional, como feito nos refinamentos; contudo, nossa crítica não se

<sup>17</sup> Para idéias originais ver Schelling (1980), e para contribuições mais recentes sobre o tema ver Binmore & Samuelson (2006).

baseia em uma nova definição de equilíbrio uma vez que nem sempre os jogadores têm uma preferência pelas estratégias do outro jogador. Por outro lado, nossa crítica recomenda a adoção de um equilíbrio puro sempre que o equilíbrio misto for caracterizado como irracional, o que é uma característica da literatura de seleção de equilíbrio.

O restante do capítulo está organizado como segue: na Seção 2.2 nós introduzimos o conceito de dominância colaborativa para jogos 2x2 e discutimos como este conceito pode ser utilizado como uma crítica a alguns equilíbrios mistos; na Seção 2.3 nós discutimos como os jogadores podem alcançar a cooperação via contratos de queima de dinheiro (ou auto-penalização) – vale ressaltar que nesta seção (e apenas nela) discutiremos o problema proposto pela ótica dos jogos cooperativos –; na Seção 2.4, estendemos o conceito de dominância colaborativa para jogos mais gerais e discutimos as implicações adicionais desta definição; na Seção 2.5 apresentamos as considerações finais.

## 2.2. Dominância colaborativa estável

Iniciamos nossa crítica ao equilíbrio misto analisando a seguinte questão: com base nos jogos expostos na Figura 2.7, por que o jogador 1 gostaria de tornar o jogador 2 indiferente com relação às estratégias dele, ou seja, por que ele jogaria de acordo com o equilíbrio misto?

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>		
		<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	(3, 3)	(0, 2)
	<i>Y</i>	(2, 0)	(1, 1)

*Jogo da Caça ao cervo*  
(i)

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>		
		<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	(0, 0)	(3, 1)
	<i>Y</i>	(1, 3)	(2, 2)

*Jogo da Galinha*  
(ii)

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>		
		<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	(1, 3)	(2, 3)
	<i>Y</i>	(1, 1)	(2, 1)

*Jogo com múltiplos equilíbrios puros*  
(iii)

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>		
		<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	(3, 0)	(0, 1)
	<i>Y</i>	(2, 3)	(1, 2)

*Jogo sem equilíbrio puro*  
(iv)

Figura 2.7: Jogos com estratégia colaborativamente dominante.

Observe que nos jogos em questão, ambos os jogadores prefeririam que o outro escolhesse uma estratégia específica, independentemente de sua própria decisão. Mas, antes de responder a questão inicialmente proposta, formalizamos, pois, esta idéia. Seja  $\Gamma = (K, (S_i)_{i \in K}, (U_i)_{i \in K})$  um jogo 2x2 na forma normal, em que  $K = \{1, 2\}$  é o conjunto de jogadores e  $S_i$  é o conjunto de estratégias puras e  $U_i: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a função utilidade, ambas para o jogador  $i \in K$ . Então, podemos definir:

**Dominância Colaborativa forte (ou estrita):** Para o jogo  $\Gamma$ , dizemos que a estratégia  $s_2^* \in S_2$  (resp.  $s_1^* \in S_1$ ) é colaborativamente dominante no sentido estrito em relação à estratégia  $s_2 \in S_2$  (resp.  $s_1 \in S_1$ ) para o jogador 1 (resp. 2) se  $U_1(s_1, s_2^*) > U_1(s_1, s_2)$ ,  $\forall s_1 \in S_1$  (resp.  $U_2(s_1^*, s_2) > U_2(s_1, s_2)$ ,  $\forall s_2 \in S_2$ ).

**Dominância Colaborativa fraca (ou não-estrita):** Para o jogo  $\Gamma$ , dizemos que a estratégia  $s_2^* \in S_2$  (resp.  $s_1^* \in S_1$ ) é colaborativamente dominante no sentido não-estrito em relação à estratégia  $s_2 \in S_2$  (resp.  $s_1 \in S_1$ ) para o jogador 1 (resp. 2) se  $U_1(s_1, s_2^*) > U_1(s_1, s_2)$ ,  $\forall s_1 \in S_1$  (resp.  $U_2(s_1^*, s_2) > U_2(s_1, s_2)$ ,  $\forall s_2 \in S_2$ ) e, para um  $\hat{s}_1 \in S_1$ ,  $U_1(\hat{s}_1, s_2^*) > U_1(\hat{s}_1, s_2)$  (resp.  $\hat{s}_2 \in S_2$ ,  $U_2(s_1^*, \hat{s}_2) > U_2(s_1, \hat{s}_2)$ ).

A partir do conceito de dominância colaborativa exposto, podemos refazer a questão anteriormente inquirida: uma vez que exista uma estratégia do jogador  $j$  que é colaborativamente dominante para o jogador  $i$ , por que este último gostaria de tornar o jogador  $j$  indiferente com relação às estratégias dele, ou seja, por que ele jogaria o equilíbrio misto?

Uma vez que o jogador  $i$  tem uma preferência por uma das estratégias do jogador  $j$ , nós podemos imaginar que aquele tentará fazer o que for possível para estimular este a escolher tal estratégia (a estratégia colaborativamente dominante) e, por essa razão, tornar o jogador  $j$  indiferente entre que estratégias escolher não parece um bom começo. Logo, com base simplesmente no conceito de dominância colaborativa, o jogador  $i$  não deveria ter incentivo a jogar sua estratégia do equilíbrio misto. Portanto, uma possível justificativa para este jogar de acordo com o equilíbrio misto se fundamenta na propriedade de estabilidade do equilíbrio, conforme vemos a seguir.

Consideremos novamente os jogos da Figura 2.7. Neles, ambos os jogadores têm estratégias colaborativamente dominantes. Então, analisemos o que ocorreria se ambos



resolvessem colaborar, isto é, se resolvessem fazer ao outro aquilo que eles gostariam que o outro o fizessem<sup>18</sup>. Caso se comportem como suposto, os jogadores chegariam a um equilíbrio único nos jogos (i) e (iii), os quais são eficientes no sentido de Pareto e proporcionam uma utilidade esperada maior do que (ou pelo menos igual a) a utilidade esperada do equilíbrio misto para ambos os jogadores. Isso ocorre porque a estratégia colaborativamente dominante de cada jogador é uma melhor resposta para a estratégia colaborativamente dominante do outro. Por essa razão, poderíamos denominar esses dois equilíbrios de Nash de equilíbrios colaborativos. Todavia, para os jogos (ii), e (iv) a combinação de estratégias colaborativamente dominantes levaria os jogadores a pontos da matriz de *payoffs* que não correspondem a equilíbrios de Nash (no sentido puro), mesmo que desejados por ambos. Isso ocorre porque a estratégia colaborativamente dominante de pelo menos um jogador não é uma melhor resposta para a estratégia colaborativamente dominante do outro. Para tornar essa idéia mais clara, observe o jogo (ii). Nele, a estratégia Z do jogador 2 é colaborativamente dominante para o jogador 1 e a estratégia Y do jogador 1 é colaborativamente dominante para o jogador 2. Contudo, se escolhessem o par (Y, Z) resultando em *payoffs* de (2, 2) – que são maiores do que as utilidades esperadas do equilíbrio misto – ambos teriam benefícios por desvios unilaterais de estratégia. Logo o par (Y, Z) não é estável e, por isso, não poderia ser considerado um equilíbrio, ao menos em jogos não-repetidos.

Percebemos, então, que o conceito de estratégia colaborativamente dominante não é suficiente para garantir que os jogadores não optarão pela estratégia mista. Por isso, é necessário classificar as estratégias colaborativamente dominantes de acordo com o critério de estabilidade a seguir:

***Dominância Colaborativa estável (equilíbrio colaborativo):*** Para o jogo  $\Gamma$ , seja  $s_1^* \in S_1$  uma estratégia colaborativamente dominante (fraca ou forte) para o jogador 2, e seja  $s_2^* \in S_2$  uma estratégia colaborativamente dominante (fraca ou forte) para o jogador 1. Dizemos que o par de estratégias  $(s_1^*, s_2^*)$  é colaborativamente estável se for um equilíbrio puro de Nash.

---

<sup>18</sup> Esta idéia é conhecida como a Regra de Ouro da Bíblia, que diz: “O que quereis que os homens vos façam, fazei-o também a eles” (Lucas, 6: 31). No contexto de Teoria dos Jogos, esta idéia corresponde a jogar a estratégia que é colaborativamente dominante para o outro jogador.

Adicionalmente, por simplicidade de notação, sempre que  $U_1(s_1^*, s_2^*) \geq U_1(s_1, s_2^*)$ ,  $\forall s_1 \in S_1$ , mas ocorrer que  $U_2(s_1^*, s_2^*) < U_2(s_1^*, s_2)$ , para algum  $s_2 \in S_2$ , diremos que o par  $(s_1^*, s_2^*)$  é instável para o jogador 2 (com as devidas alterações, o mesmo também é válido para o jogador 1, ou seja, o par pode ser instável apenas para um jogador).

Agora, estamos aptos a responder a questão proposta no início da seção. Em um jogo 2x2, uma vez que os jogadores tiverem estratégias colaborativamente dominantes, eles apenas devem optar pela escolha de outras estratégias, sobretudo mistas, quando o par de estratégias colaborativamente dominantes for instável, ao menos para um deles.

### 2.3. Em busca da colaboração estável

Na seção anterior, focamos nossa análise em jogos que tinham pelo menos um equilíbrio misto na forma não-degenerada<sup>19</sup>. Agora, ampliamos o debate de modo a incluir jogos com apenas um equilíbrio puro, ou seja, com equilíbrio misto degenerado. Para isso, acrescentamos à análise outros dois jogos além dos já expostos na Figura 2.7, como mostra a Figura 2.8.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	(3, 3)	(0, 4)
	(4, 0)	(1, 1)

*Jogo do Dilema dos Prisioneiros*  
(v)

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	(3, 0)	(2, 2)
	(1, 1)	(0, 3)

*Jogo com equilíbrio puro eficiente*  
(vi)

Figura 2.8: Jogos com estratégias colaborativamente dominante – parte II.

Avaliando cada jogo, observamos que: no jogo (v), a estratégia W do jogador 2 é colaborativamente dominante para o jogador 1 e a estratégia X do jogador 1 é colaborativamente dominante para o jogador 2. Nesse jogo, o par (X, W) é instável e o único equilíbrio existente é o par de estratégias (Y, Z) que é, contudo, ineficiente. Por outro lado, no jogo (vi), a estratégia W do jogador 2 é colaborativamente dominante para o jogador 1 e a estratégia Y do jogador 1 é colaborativamente dominante para o jogador

<sup>19</sup> Utilizaremos os termos equilíbrio misto *degenerado* e *não-degenerado* no mesmo sentido de Fudenberg & Tirole (1991).

2. Observe também que o par  $(Y, W)$  é instável e o único equilíbrio do jogo é o par de estratégias  $(X, Z)$  que é, por sua vez, eficiente.

Agora, com base nos seis jogos expostos (os quatro jogos da Figura 2.7 e os dois jogos da Figura 2.8), podemos afirmar que utilizando o conceito de dominância colaborativa estável, os jogadores seriam capazes de alcançar o equilíbrio eficiente nos jogos (i) e (iii) da Figura 2.7. Todavia, nos jogos (ii) e (iv) da Figura 2.7 e no jogo (v) da Figura 2.8, se optarem pelo equilíbrio misto – que no caso do jogo (v) é um equilíbrio degenerado, isto é, ambos os jogadores atribuem probabilidade um às suas estratégias dominantes – os jogadores receberiam uma utilidade esperada menor do que a utilidade proveniente do perfil formado pelas estratégias colaborativamente dominantes (mesmo este não sendo um equilíbrio de Nash). Assim, podemos afirmar que, nesses casos, os jogadores gostariam de tornar o par de estratégias colaborativamente dominantes instável em um equilíbrio de Nash.

Porém, para que esta transformação seja admissível, temos que analisar o jogo não mais pela ótica dos jogos não-cooperativos e sim dos jogos cooperativos (ou semi-cooperativos<sup>20</sup>), nos quais a comunicação entre os jogadores bem como a assinatura de acordos são possíveis. Para facilitar o entendimento do problema proposto e manter a didática utilizada ao longo do texto, analisaremos inicialmente a questão por meio de alguns exemplos antes de defini-la formalmente.

Primeiro, admita o jogo do dilema dos prisioneiros e que a comunicação entre os jogadores é permitida pelo contexto. Então, os jogadores poderiam, por exemplo, antes do início do jogo firmar o seguinte acordo conjunto: se o meu adversário cooperar comigo e eu não cooperar com ele, eu serei obrigado a me penalizar em uma unidade de minha utilidade (queimar dinheiro). A partir desse acordo o jogo (v) da Figura 2.8 seria transformado como mostra a Figura 2.9. O novo jogo passaria a ter dois equilíbrios de Nash em estratégia pura, e pelo critério da dominância colaborativa estável, o par  $(X, W)$  seria escolhido.

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>			$\Rightarrow$	<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>		
		W	Z				W	Z
	X	(3, 3)	(0, 4)			X	(3, 3)	(0, 3)
	Y	(4, 0)	(1, 1)			Y	(3, 0)	(1, 1)
<i>Jogo original</i>					<i>Jogo transformado</i>			

Figura 2.9: Transformando estratégias colaborativas instáveis em estáveis.

<sup>20</sup> Kalai & Kalai (2009).

Utilizando um acordo análogo, um resultado semelhante poderia ser obtido no jogo (i) da Figura 2.7. No jogo (iv) da Figura 2.7, note que o par de estratégias colaborativamente dominantes é instável apenas para o jogador 1, assim, a comunicação e o acordo necessitam ser apenas parciais, isto é, o contrato poderia ser unilateral. O contrato diria, por exemplo: se o jogador 1 não colaborar com o jogador 2 quando este colaborar, ele terá que se auto-penalizar em uma unidade de sua utilidade. Por fim, percebemos que mesmo existindo contratos capazes de transformar o par  $(Y, W)$  em um equilíbrio de Nash no jogo (vi) da Figura 2.8, o mesmo não seria assinado pelos jogadores, uma vez que as utilidades esperadas obtida por ambos os jogadores com o par  $(Y, W)$  são menores do que as obtidas no equilíbrio original. Com base nos exemplos, formalizemos a idéia de jogos com auto-penalização:

**Jogo com auto-penalização:** Seja  $\Gamma = (K, (S_i)_{i \in K}, (U_i)_{i \in K})$  um jogo na forma normal. Dizemos que a função  $\Psi(\cdot)$  transforma o jogo  $\Gamma$  em um jogo com auto-penalização (ou queima de dinheiro) se além do conjunto de estratégias  $S_i$ , cada jogador tiver a opção de destruir (queimar) uma quantidade contínua e positiva de sua utilidade. Assim temos:  $\Psi(\Gamma) = (K, (S_i)_{i \in K}, (\hat{U}_i)_{i \in K})$ , em que  $\hat{U}_i((\times s_i)_{i \in K}) = U_i((\times s_i)_{i \in K}) - p_i((\times s_i)_{i \in K})$ , em que  $p_i((\times s_i)_{i \in K}) \geq 0$ , indica a penalidade sofrida pelo jogador  $i$  caso ocorra a combinação de estratégias  $(\times s_i)_{i \in K}$ .

Como o objetivo é penalizar o jogador que não cooperar com o outro jogador quando este cooperar então, podemos definir sem perda de generalidade que se  $s_1^*$  e  $s_2^*$  são estratégias colaborativamente dominantes para os jogadores 2 e 1, respectivamente, então,  $\forall s_1 \neq s_1^*$  e  $s_2 \neq s_2^*$ , temos  $p_1(s_1, s_2^*) > 0$ ,  $p_2(s_1^*, s_2) > 0$  e  $p_1$  e  $p_2$  são iguais a zero nos demais casos. Notemos que o contrato com queima de dinheiro tem uma vantagem sobre outros tipos de contrato uma vez que explicita as penalidades que os jogadores devem sofrer.

A função de transformação, ou melhor, o contrato entre os jogadores só será assinado se satisfizer a restrição de participação (ou restrição de racionalidade individual) que é dada por:  $\hat{U}_i((\times s_k^*)_{k \in K}) \geq U_i^*, \forall i \in K$ . Ela indica que os jogadores só irão assinar o contrato de cooperação se a utilidade obtida ao jogarem suas estratégias colaborativamente dominantes for maior do que ou igual à utilidade esperada obtida pela escolha do equilíbrio misto no jogo original, que é representada por  $U_i^*$ . Como o nosso objetivo é analisar em que situação é irracional jogar um determinado equilíbrio

misto, então fixamos um dado equilíbrio misto do jogo (caso exista mais de um) e  $U_i^*$  será a utilidade esperada deste equilíbrio para o jogador  $i$ . Para tornar esta intuição mais clara, observemos o seguinte jogo da Figura 2.10.

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>		
	W	Z	
	X	(4, 1)	(2, 1)
	Y	(3, 3)	(1, 2)

Figura 2.10: Definindo a utilidade esperada.

Nele existem dois equilíbrios puros  $(X, W)$  e  $(X, Z)$ , mas existem infinitos equilíbrios mistos,  $E = (M, N)$ , nos quais  $M = (1, 0)$  e  $N = (q^*, 1 - q^*)$ , com  $q^* \in [0, 1]$ . Assim, é fácil ver que nesse exemplo, a restrição de participação sempre será atendida para o jogador 2, porém, só será atendida para o jogador 1 se  $q^* \in [0, \frac{1}{2}]$ . Por esta razão, o termo  $U_i^*$  é fixado como a utilidade esperada de um determinado equilíbrio misto não-degenerado caso haja mais de um equilíbrio puro no jogo, ou é igual à utilidade proveniente do equilíbrio misto degenerado caso o jogo tenha apenas um equilíbrio puro. Ademais, como assumimos que  $p_i((\times s_k^*)_{k \in K}) = 0, \forall i \in K$ , então, a restrição de participação poderia ser reescrita como:

$$\textbf{Restrição de participação: } U_i((\times s_k^*)_{k \in K}) = \widehat{U}_i((\times s_k^*)_{k \in K}) \geq U_i^*, \forall i \in K.$$

Se satisfeita a restrição de participação, o contrato deve garantir que o par de estratégias colaborativamente dominantes seja estável no novo jogo, logo, o mesmo teria que atender a restrição de estabilidade (ou restrição de incentivo) dada por:  $\widehat{U}_1(s_1^*, s_2^*) \geq \widehat{U}_1(s_1, s_2^*), \forall s_1 \in S_1$  e  $\widehat{U}_2(s_1^*, s_2^*) \geq \widehat{U}_2(s_1^*, s_2), \forall s_2 \in S_2$ . Novamente, como assumimos que  $p_i((\times s_i^*)_{i \in K}) = 0$ , também podemos reescrever a restrição de estabilidade:

$$\textbf{Restrição de estabilidade (ou incentivo): } U_1(s_1^*, s_2^*) = \widehat{U}_1(s_1^*, s_2^*) \geq \widehat{U}_1(s_1, s_2^*), \forall s_1 \in S_1 \text{ e } U_2(s_1^*, s_2^*) = \widehat{U}_2(s_1^*, s_2^*) \geq \widehat{U}_2(s_1^*, s_2), \forall s_2 \in S_2. \text{ Além disso, como desejamos que } s_i^* \text{ permaneça uma estratégia colaborativamente dominante, podemos assumir sem perda de generalidade, } p_1(s_1, s_2^*) = U_1(s_1, s_2^*) - U_1(s_1^*, s_2^*) \text{ e } p_2(s_1^*, s_2) = U_2(s_1^*, s_2) - U_2(s_1^*, s_2^*).$$

O teorema a seguir mostra que sempre que um par de estratégias fortemente colaborativamente dominantes for instável para ambos os jogadores e este também for capaz de satisfazer a restrição de participação, então existirá um contrato de auto-penalização, de forma que tornará este par em um equilíbrio eficiente.

**Teorema 2.1:** Seja  $\Gamma$  um jogo 2x2 na forma normal com comunicação e seja  $(s_1^*, s_2^*)$  um par de estratégias colaborativamente dominantes estritas e instáveis para ambos os jogadores.

**Parte A:** Se a restrição de participação for atendida de forma estrita para ambos os jogadores, então existe uma função transformação  $\Psi(\cdot)$  capaz de transformar uma situação de não-cooperação em uma situação de cooperação através da auto-penalização de ambos os jogadores, ou seja, tal que transformará o par  $(s_1^*, s_2^*)$  em um equilíbrio colaborativo, e que preserva as estratégias  $s_1^*$  e  $s_2^*$  como estratégias fortemente colaborativamente dominantes.

**Parte B:** Se a restrição de participação for atendida para ambos os jogadores, então existe uma função transformação  $\Psi(\cdot)$  capaz de transformar uma situação de não-cooperação em uma situação de cooperação através da auto-penalização de ambos os jogadores, isto é, tal que transforma o par  $(s_1^*, s_2^*)$  em um equilíbrio colaborativo; e garantindo que as estratégias  $s_1^*$  e  $s_2^*$  serão pelo menos fracamente colaborativamente dominantes.

**Prova:** Ver Apêndice 1 no final da tese. □

Para os casos em que o par de estratégias colaborativamente dominantes for instável para apenas um dos jogadores, podemos estender esta idéia com o seguinte corolário:

**Corolário 2.1:** Seja  $\Gamma$  um jogo 2x2 na forma normal com comunicação parcial e seja  $(s_1^*, s_2^*)$  par de estratégias colaborativamente dominantes estritas, mas instável apenas para o jogador 1 (respectivamente 2).

**Parte A:** Se a restrição de participação for atendida de forma estrita para ambos os jogadores, então existe uma função transformação  $\Psi(\cdot)$  capaz de transformar uma situação de não-cooperação em uma situação de cooperação através da auto-penalização

do jogador 1 (respectivamente 2), ou seja, tal que transformará o par  $(s_1^*, s_2^*)$  em um equilíbrio colaborativo; e preservará as estratégias  $s_1^*$  e  $s_2^*$  como estratégias fortemente colaborativamente dominantes.

**Parte B:** Se a restrição de participação for atendida para ambos os jogadores, então existe uma função transformação  $\Psi(\cdot)$  capaz de transformar uma situação de não-cooperação em uma situação de cooperação através da auto-penalização do jogador 1 (respectivamente 2), ou seja, tal que transformará o par  $(s_1^*, s_2^*)$  em um equilíbrio colaborativo; e garantindo que as estratégias  $s_1^*$  e  $s_2^*$  serão pelo menos fracamente colaborativamente dominantes.

**Prova:** É imediata a partir da prova do Teorema 2.1. □

Conclusões e resultados semelhantes também poderiam ser obtidos se assumíssemos jogos com transferência de utilidade. Para um exemplo do mesmo, recomendamos a leitura de Andreoni & Varian (1999).

## 2.4. Extensões e discussões

O conceito de dominância colaborativa proposto na Seção 2.2 foi originalmente concebido para se aplicar em jogos 2x2. Contudo, é natural que se deseje estender esta idéia para casos mais gerais, seja no número de estratégias para cada jogador e/ou no número de jogadores. O objetivo desta seção (e subseções) é, pois, apresentar definições mais gerais do conceito de dominância colaborativa e sua relação com outros conceitos já populares em teoria dos jogos, bem como reforçar as conclusões da seção 2.2.

### 2.4.1. Jogo transposto e a racionalidade altruísta

Seja  $\Gamma = (K, (S_k)_{k \in K}, (U_k)_{k \in K})$  um jogo na forma normal, em que  $K = \{1, 2\}$  é o conjunto de jogadores,  $S_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  e  $S_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  são os conjuntos de estratégias puras dos jogadores 1 e 2 respectivamente e  $U_k: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a função *payoff* do jogador  $k \in K$ . Podemos então representar o jogo  $\Gamma$  em uma forma matricial, como mostra a Figura 2.11.

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \cdots & \beta_m \\ \left[ \begin{array}{ccc} (a_{1,1}, b_{1,1}) & \cdots & (a_{1,m}, b_{1,m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n,1}, b_{n,1}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 2.11: jogo  $\Gamma$  na forma matricial.

Os elementos da matriz acima, como de costume, devem ser interpretados da seguinte forma: o termo  $a_{i,j} = U_1(\alpha_i, \beta_j)$ , enquanto o termo  $b_{i,j} = U_2(\alpha_i, \beta_j)$ . Logo, chamaremos de  $A$  a matriz  $n \times m$  dos *payoffs* do jogador 1 e, por sua vez, chamaremos de  $B$  a matriz  $n \times m$  dos *payoffs* do jogador 2.

Adicionalmente, seja  $\Gamma^T = (K, (S_k^T)_{k \in K}, (U_k^T)_{k \in K})$  um jogo na forma normal, em que  $K = \{1, 2\}$  é o conjunto de jogadores,  $S_1^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  e  $S_2^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  são os conjuntos de estratégias puras dos jogadores 1 e 2, respectivamente, e  $U_k^T: S_1^T \times S_2^T \rightarrow \mathbb{R}$  é a função *payoff* do jogador  $k \in K$ , em que  $U_1^T(\beta_j, \alpha_i) = U_1(\alpha_i, \beta_j)$  e  $U_2^T(\beta_j, \alpha_i) = U_2(\alpha_i, \beta_j)$ .

Com base nas definições dos jogos  $\Gamma$  e  $\Gamma^T$ , percebemos que a principal diferença entre eles é a troca do conjunto de estratégias puras dos jogadores, ou seja,  $S_1^T = S_2$  e  $S_2^T = S_1$ . Deste modo, a representação matricial do jogo  $\Gamma^T$  é apenas uma transposição da matriz exposta na Figura 2.11. Então, em  $\Gamma^T$ ,  $A^T$  ( $A$  transposta) é a matriz  $m \times n$  dos *payoffs* do jogador 1 e, por sua vez,  $B^T$  ( $B$  transposta) é a matriz  $m \times n$  dos *payoffs* do jogador 2. Desta forma, definimos o jogo  $\Gamma^T$  como a transposição do jogo  $\Gamma$  e, por isso, denominaremos, daqui em diante, o jogo  $\Gamma$  de jogo original. Comparando o jogo  $\Gamma^T$  como o jogo  $\Gamma$ , vemos que o jogo transposto é equivalente ao jogo original se neste os jogadores escolhessem o melhor para si com base no conjunto de estratégia do outro.

Suponhamos ainda outro jogo. Seja  $\Gamma' = (K, (S'_k)_{k \in K}, (U'_k)_{k \in K})$  um jogo na forma normal, em que  $K = \{1, 2\}$  é o conjunto de jogadores,  $S'_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  e  $S'_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$  são os conjuntos de estratégias puras dos jogadores 1 e 2 respectivamente e  $U'_k: S'_1 \times S'_2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função *payoff* do jogador  $k \in K$ , em que  $U'_r(\alpha_i, \beta_j) = U_s(\alpha_i, \beta_j)$ , com  $r \neq s$ . Deste modo, a representação matricial do jogo  $\Gamma'$  é exposta na Figura 2.12 e este jogo é denominado de jogo transposto equivalente.

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \cdots & \beta_m \\ \left[ \begin{array}{ccc} (b_{1,1}, a_{1,1}) & \cdots & (b_{1,m}, a_{1,m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{n,1}, a_{n,1}) & \cdots & (b_{n,m}, a_{n,m}) \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 2.12: jogo transposto equivalente.



Para melhor compreender a idéia de um jogo transposto equivalente façamos a seguinte suposição: admitamos que no jogo  $\Gamma$  em vez de escolherem o melhor para si, os jogadores resolvessem escolher o melhor para o outro. A essa mudança de paradigma de racionalidade, daremos o nome de racionalidade altruísta<sup>21</sup>.

Agora explicaremos porque o jogo  $\Gamma'$  é chamado de equivalente do jogo  $\Gamma^T$ . Aqui o termo equivalente significa que os jogos têm o mesmo conjunto de equilíbrios (ou seja,  $(\alpha_i, \beta_j)$  será um equilíbrio do jogo  $\Gamma'$  se, e somente se, o par de estratégias  $(\beta_j, \alpha_i)$  for um equilíbrio do jogo  $\Gamma^T$ ) e, com efeito, compartilham o mesmo princípio de racionalidade. Notemos que as duas interpretações para a idéia de racionalidade altruísta são semelhantes: quando os jogadores escolhem suas estratégias em um dado jogo  $\Gamma$  de acordo com o *payoff* do outro jogador, ou de forma equivalente, quando escolhem as estratégias dos outros com base nos seus próprios *payoffs*. Tal fato é sumarizada no Teorema 2.2.

**Teorema 2.2:** Os jogos  $\Gamma'$  e  $\Gamma^T$  têm o mesmo conjunto de equilíbrio.

**Prova:** Apenas note que o jogador 1 em  $\Gamma'$  é o jogador 2 em  $\Gamma^T$  e que o jogador 2 em  $\Gamma'$  é o jogador 1 em  $\Gamma^T$ . □

Para entender melhor a idéia de racionalidade altruísta iremos ilustrá-la com uma versão do dilema dos prisioneiros proposta por Varian (1992). Seja  $\Gamma$  o jogo em que dois indivíduos estão diante da seguinte situação estratégica: cada um deles tem a possibilidade de doar três unidades monetárias para o outro indivíduo ou então ficar com uma unidade monetária para si, como mostra o jogo da Figura 2.13.

Jogador 1	Jogador 2	
	Doar \$3	Ficar com \$1
Doar \$3	(3, 3)	(0, 4)
Ficar com \$1	(4, 0)	(1, 1)

Figura 2.13: Jogo do Dilema dos Prisioneiros

Ao transpormos esse jogo, o conjunto de estratégias de cada jogador muda de tal forma que em  $\Gamma^T$  os jogadores têm as seguintes estratégias disponíveis: ficar com 3

<sup>21</sup> O termo *racionalidade altruísta* é utilizado contrapondo a idéia de *racionalidade egoísta*.

unidades monetárias para si ou então doar uma unidade monetária para o outro indivíduo, como mostra o jogo da Figura 2.14.

Jogador 1	Jogador 2	
	Ficar com \$3	Doar \$1
	Ficar com \$3	Doar \$1
	(3, 3)	(4, 0)
	(0, 4)	(1, 1)

Figura 2.14: O Dilema dos Prisioneiros Transposto

No jogo do dilema do prisioneiro sabemos que quando cada indivíduo faz o melhor para si, os jogadores acabam alcançando um resultado ineficiente para ambos (isto é, cada um escolhe ficar com \$1, quando poderiam obter \$3). Todavia, eles poderiam obter um resultado eficiente se fizessem o melhor para o outro. Daí surge a seguinte indagação: fazer o melhor para o outro garante eficiência? A resposta é evidentemente ‘não’ e para isto basta ver que  $(\Gamma^T)^T = \Gamma$ . Ou seja, se originalmente os jogadores estivessem jogando o jogo cujas estratégias são: ficar com três unidades monetárias para si e doar uma unidade monetária para o outro, caso transpormos este jogo, voltaríamos ao dilema dos prisioneiros em que o resultado do equilíbrio é ineficiente.

Então chegamos à seguinte conclusão: individualmente, nem o critério de racionalidade egoísta (racionalidade individual) nem tampouco o critério de racionalidade altruísta garantem eficiência da solução.

#### 2.4.2. Extensões ao conceito de dominância colaborativa

Nesta subseção, iremos inicialmente estender o conceito de dominância colaborativa de modo a permitir sua aplicação em jogos com um número finito de jogadores cada um com um número finito de estratégias. Em seguida, de posse deste conceito mais amplo, veremos como utilizá-lo na análise de jogos com dois jogadores, fazendo um paralelo com o conceito de estratégia dominada. Além disso, mostraremos como a idéia de dominância colaborativa estável garante que os jogadores de um dado jogo obterão as maiores utilidades possíveis para cada um deles, estabelecendo não apenas a eficiência da solução como também (quando possível) o bem-estar social. Por fim, discutiremos o conceito de dominância colaborativa em jogos de soma-zero.

Seja  $\Gamma = (K, (S_k)_{k \in K}, (U_k)_{k \in K})$  um jogo na forma normal, em que  $K$  é o conjunto finito de jogadores,  $S_k$  é o conjunto finito das estratégias puras do jogador  $k \in K$  e  $U_k: \times_{i \in K} S_i \rightarrow \mathbb{R}$  é a função *payoff* também do jogador  $k \in K$ . Chamaremos  $\Delta(S_k)$  o conjunto de todas as estratégias mistas do jogador  $k$ , com  $\sigma_k(s_k)$  indicando a probabilidade com que o jogador  $k$  escolhe a estratégia pura  $s_k$  quando implementa a estratégia mista  $\sigma_k \in \Delta(S_k)$ . Adicionalmente, para simplificar a notação, chamaremos de  $S_{-k} = \times_{i \in K - \{k\}} S_i$  o conjunto de todas as possíveis combinações de estratégias dos jogadores do jogo  $\Gamma$ , exceto o jogador  $k$ . Assim, podemos redefinir o conceito de dominância colaborativa forte como:

**Dominância Colaborativa forte:** Para qualquer jogo  $\Gamma = (K, (S_k)_{k \in K}, (U_k)_{k \in K})$  na forma normal, para qualquer jogador  $i \in K$  e para qualquer estratégia pura  $s_i \in S_i$ ,  $s_i$  é dita fortemente colaborativamente dominada<sup>22</sup> para um dado jogador  $j \in K$ , com  $j \neq i$ , se existe alguma estratégia mista  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$  tal que  $U_j(s_i, s_{-i}) < \sum_{s'_i \in S_i} \sigma_i(s'_i) U_j(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ .

De forma análoga, também podemos redefinir o conceito de dominância colaborativa fraca, a saber:

**Dominância Colaborativa fraca:** Para qualquer jogo  $\Gamma = (K, (S_k)_{k \in K}, (U_k)_{k \in K})$  na forma normal, para qualquer jogador  $i \in K$  e para qualquer estratégia pura  $s_i \in S_i$ ,  $s_i$  é dita fracamente colaborativamente dominada para um dado jogador  $j \in K$ , com  $j \neq i$ , se existe alguma estratégia mista  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$  tal que  $U_j(s_i, s_{-i}) \leq \sum_{s'_i \in S_i} \sigma_i(s'_i) U_j(s'_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ , com pelo menos uma desigualdade estrita.

Assim, aplicando a nova definição de estratégias colaborativamente dominadas (forte ou fraca) em um jogo com dois jogadores do tipo  $n \times m$  é possível associar tais conceitos ao de estratégia dominada em um jogo transposto. Tal resultado é exposto no Lema 2.1.

<sup>22</sup> De forma análoga, poderíamos dizer que  $\sigma_k$  é *fortemente colaborativamente dominante* com relação à estratégia  $s_k$ .

**Lema 2.1:** Dizemos que a estratégia  $s_i \in S_i$  é fortemente (resp. fracamente) colaborativamente dominada pela estratégia mista  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$  para o jogador  $j$  (com  $j \neq i$ ), no jogo  $\Gamma$  se, e somente se, a estratégia  $s_i \in S_i$  for fortemente (resp. fracamente) dominada pela estratégia mista  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$  para o jogador  $j$  no jogo  $\Gamma^T$ .

A prova deste lema é direta da aplicação dos conceitos de dominância e dominância colaborativa e por isso será omitida. Assim, prosseguindo com a análise, utilizamos o Lema 2.1 para provar o seguinte teorema sobre a unicidade do equilíbrio de Nash em um jogo transposto.

**Teorema 2.3:** Seja  $\Gamma$  um jogo  $n \times m$  na forma estratégica. Se  $\beta_j^* \in S_2$  e  $\alpha_i^* \in S_1$  forem as únicas estratégias a sobreviverem a eliminação de estratégias fortemente colaborativamente dominadas para os jogadores 1 e 2, respectivamente, então, o par  $(\beta_j^*, \alpha_i^*)$  será o único equilíbrio do jogo  $\Gamma^T$ .

**Prova:** Novamente, a prova é bastante intuitiva. Uma vez que as estratégias  $\beta_j^*$  e  $\alpha_i^*$  são as únicas estratégias remanescentes após a eliminação das estratégias fortemente colaborativamente dominadas no jogo  $\Gamma$ , então elas serão consequentemente as únicas estratégias remanescentes após a eliminação das estratégias fortemente dominadas no jogo  $\Gamma^T$ . Assim, pela eliminação das estratégias dominadas concluímos que o único equilíbrio de Nash do jogo  $\Gamma^T$  é o par  $(\beta_j^*, \alpha_i^*)$ .  $\square$

Agora, vejamos como o conceito de dominância colaborativa estável garante que os jogadores de um dado jogo obterão as maiores utilidades possíveis para cada um deles. Mas, antes disto, convém ainda, como feito com os conceitos de dominância colaborativa forte e fraca, ampliar a definição de dominância colaborativa estável:

**Dominância Colaborativa Estável (equilíbrio colaborativo):** Dado o jogo  $\Gamma = (K, (S_k)_{k \in K}, (U_k)_{k \in K})$  na forma normal. Se  $(\times s_{k \in K}^*)$  for de tal maneira que para todo jogador  $k \in K$  e para toda estratégia  $s_k \in S_k$  temos que  $s_k$  é fracamente colaborativamente dominada pela estratégia pura  $s_k^*$  para todo jogador  $j \neq k$ . Então, dizemos que o perfil de estratégias  $(\times s_{k \in K}^*)$  é colaborativamente estável se for um equilíbrio puro de Nash.

De posse deste novo conceito, obtemos o resultado sumarizado no Teorema 2.4:

**Teorema 2.4:** Seja  $\Gamma$  um jogo na forma normal. Se  $(\times s_{k \in K}^*)$  for um equilíbrio colaborativo, então, para todo jogador  $k$  em  $K$ , temos que  $U_k(\times s_{k \in K}^*)$  é a maior utilidade possível para o jogador  $k$  em  $\Gamma$ .

**Prova:** Assumamos que  $(\times s_{k \in K}^*)$  é um equilíbrio colaborativo. Assim, pelo conceito de estabilidade temos:

$$U_k(s_k^*, s_{-k}^*) \geq U_k(s_k, s_{-k}^*), \forall k \in K \text{ e } \forall s_k \in S_k.$$

Por sua vez, aplicando o conceito de dominância colaborativa  $\|K\| - 1$  vezes temos:

$$U_k(s_k, s_{-k}^*) \geq U_k(s_k, s_{-k}), \forall k \in K, \forall s_k \in S_k \text{ e } \forall s_{-k} \in S_{-k}.$$

Logo,  $U_k(\times s_{k \in K}^*)$  é maior do que ou igual a qualquer outra utilidade que possa ser obtida pelo jogador  $k$  no jogo  $\Gamma$ . E, como visto, tal afirmação é válida  $\forall k \in K$ , o que completa a prova.  $\square$

Para permitir uma visualização do argumento exposta no Teorema 2.4, iremos aplicá-lo para o caso apenas com dois jogadores, em que o leitor poderá fazer uso da forma matricial apresentada na Figura 2.12 da subseção 2.4.1, como mostra o exemplo abaixo: seja  $\Gamma$  um jogo  $n \times m$  na forma normal. Sempre que o par de estratégias  $(\alpha_i^*, \beta_j^*)$  for colaborativamente estável, então  $U_1(\alpha_i^*, \beta_j^*)$  e  $U_2(\alpha_i^*, \beta_j^*)$  são as maiores utilidades de cada jogador no jogo. Para verificar tal afirmação suponhamos, por conveniência, que  $(\alpha_1^*, \beta_1^*)$  seja o nosso equilíbrio colaborativo. Então, pelo conceito de estabilidade temos que:

$$a_{1,1} = U_1(\alpha_1^*, \beta_1^*) \geq a_{i,1} = U_1(\alpha_i, \beta_1^*), \forall i = 1, \dots, n \text{ e}$$

$$b_{1,1} = U_2(\alpha_1^*, \beta_1^*) \geq b_{1,j} = U_2(\alpha_1^*, \beta_j), \forall j = 1, \dots, m.$$

Além disso, pelo conceito de dominância colaborativa temos que:

$$a_{i,1} = U_1(\alpha_i, \beta_1^*) \geq a_{i,j} = U_1(\alpha_i, \beta_j), \forall i = 1, \dots, n \text{ e } \forall j = 1, \dots, m \text{ e}$$

$$b_{1,j} = U_2(\alpha_1^*, \beta_j) \geq b_{i,j} = U_2(\alpha_i, \beta_j), \forall j = 1, \dots, m \text{ e } \forall i = 1, \dots, n.$$

Com base nestas condições, é provado que  $a_{1,1}$  e  $b_{1,1}$  são as maiores utilidades do jogo.

Ainda, o Teorema 2.4 nos fornece um importante resultado, o de que se existir um perfil de estratégia colaborativamente estável em um dado jogo na forma normal, então, nenhum jogador pode obter um resultado melhor do que obteria jogando o equilíbrio colaborativamente estável. De posse deste resultado somos tentados a falar de bem-estar social, uma vez que, como dito, as utilidades obtidas por cada jogador são as maiores possíveis no jogo. Contudo, para que o resultado proveniente de uma combinação de estratégias colaborativamente estáveis seja socialmente eficiente, é necessário admitir que o conjunto  $K$  (conjunto dos jogadores) corresponda a toda a sociedade. Por exemplo, considere um jogo de horizonte infinito<sup>23</sup> entre duas empresas idênticas. Elas podem concorrer *à la* Cournot ou então se unir em um cartel e agirem como uma empresa monopolista. Assim, o resultado eficiente (e colaborativamente estável) para o jogo repetido infinitamente é as firmas se unirem em um cartel. Todavia, este resultado não traria o bem-estar social caso incluíssemos os consumidores na análise.

Outro ponto que merece atenção é a relação entre equilíbrio colaborativo e o problema de seleção de equilíbrio<sup>24</sup> *à la* Harsanyi & Selten (1988). Para fazer uma breve comparação entre essas duas idéias, utilizaremos o jogo proposto pelos próprios autores na página 91, e discutido posteriormente na página 106, como ilustra a Figura 2.15.

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	(1, 1) (0, 1)
	<i>Y</i>	(1, 0) (0, 0)

Figura 2.15: equilíbrio colaborativo vs. critérios de seleção de equilíbrio

Como podemos ver, esse jogo tem infinitos equilíbrios de Nash, mas apenas o equilíbrio (X, W) é eficiente no sentido de Pareto. Contudo, a teoria de seleção de

<sup>23</sup> Para uma interessante discussão sobre jogos repetidos recomendamos Axelrod (1984). Para uma discussão formal do assunto recomendamos Mailath & Samuelson (2006).

<sup>24</sup> Para uma maior discussão sobre o problema de seleção de equilíbrio ver, por exemplo, Harsanyi & Selten (1988), Van Damme (1991) e Rydval & Ortmann (2005).

equilíbrio desenvolvida por Harsanyi & Selten (1988) seleciona o equilíbrio misto  $E=((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$  como solução para o jogo em questão, uma vez que ficamos impossibilitados de utilizar a idéia de dominância em termos de *payoff* (*payoff dominance*) bem como a de risco dominância (*risk dominance*). Por outro lado, se o conceito de equilíbrio colaborativo for utilizado, ele levaria os jogadores a alcançarem um resultado eficiente, diferentemente do obtido *à la* Harsanyi & Selten.

Outro aspecto a se destacar é que o conceito de dominância colaborativamente estável faz uso de ambas idéias de racionalidade, egoísta e altruísta, e unindo esses dois pontos é capaz de garantir a eficiência da solução. Assim a característica de sempre garantir uma solução eficiente poderia indicar o equilíbrio colaborativo como um ponto focal.

A partir do conceito de dominância colaborativamente estável (equilíbrio colaborativo) e das conclusões expostas, podemos ainda destacar que jogos de soma-zero não têm equilíbrios colaborativos. Esse resultado é bastante intuitivo, uma vez que em jogos de soma-zero<sup>25</sup> são caracterizados pelo seu aspecto competitivo e pela oposição de interesses entre os jogadores. Alguns resultados são sumarizados a seguir.

**Lema 2.2:** Em um jogo de soma-zero com dois jogadores, como ilustrado pela Figura 2.16, se a estratégia  $\alpha_i$  for fortemente (resp. fracamente) colaborativamente dominante com relação à estratégia  $\alpha_j$ , então, a estratégia  $\alpha_j$  será fortemente (resp. fracamente) dominante com relação à estratégia  $\alpha_i$ .

**Prova:** Admita a Figura 2.16:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_m \\ (a_{1,1}, -a_{1,1}) & \dots & (a_{1,m}, -a_{1,m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n,1}, -a_{n,1}) & \dots & (a_{n,m}, -a_{n,m}) \end{bmatrix}$$

Figura 2.16: Jogo de soma-zero.

Suponha, por conveniência, que a estratégia  $\alpha_1$  do jogador 1 é fortemente (resp. fracamente) colaborativamente dominante com relação à estratégia  $\alpha_n$  para o jogador 2. Isso implica que  $-a_{1,j} > -a_{n,j}$ , para  $j=1, \dots, m$  (resp.  $-a_{1,j} \geq -a_{n,j}$ ,

<sup>25</sup> Para maiores informações sobre jogos de soma-zero *vide* Von Neumann & Morgenstern (1944).

para  $j=1, \dots, m$ , com pelo menos uma desigualdade estrita). Mas,  $-a_{1,j} \geq -a_{n,j}$  se, e somente se,  $a_{1,j} \leq a_{n,j}$ , então, isso nos leva a conclusão que a estratégia  $\alpha_1$  é fortemente (resp. fracamente) dominada, para o jogador 1, pela estratégia  $\alpha_n$ . Uma conclusão análoga também é válida para o jogador 2.  $\square$

**Teorema 2.5:** Um jogo de soma-zero, como ilustrados pela Figura 2.16, não tem equilíbrio colaborativo.

**Prova:** Admita inicialmente que  $(\alpha_1, \beta_1)$  seja um par de estratégias tal que ou  $\alpha_1$  é fortemente colaborativamente dominante em relação a todas as outras estratégias do jogador 1 ou  $\beta_1$  é fortemente colaborativamente dominante em relação a todas as outras estratégias do jogador 2. Pelo Lema 2.2, temos que ou  $\alpha_1$  ou  $\beta_1$  é fortemente dominada e logo não pode fazer parte de um equilíbrio de Nash. Suponha agora que tanto  $\alpha_1$  quanto  $\beta_1$  são fracamente colaborativamente dominantes. Isto implica que existe um  $j$  tal que  $-a_{1,j} > -a_{n,j}$ . Se  $j=1$ , então  $\alpha_1$  não é uma melhor resposta para  $\beta_1$ . Se  $j$  for diferente de 1, então isto implica que  $\beta_1$  não é colaborativamente dominante em relação a  $\beta_j$ , uma contradição.  $\square$

**Teorema 2.6:** Se, em um jogo de soma-zero como o da Figura 2.16, a estratégia  $\alpha_i$  do jogador 1 for colaborativamente dominada pelas demais estratégias  $\alpha_j$  para o jogador 2 e se a estratégia  $\beta_i$  do jogador 2 for colaborativamente dominada pelas demais estratégias  $\beta_j$  para o jogador 1, então, o par  $(\alpha_i, \beta_i)$  é um equilíbrio de Nash do jogo. Ademais, se a dominância colaborativa for forte, então o equilíbrio é único.

**Prova:** Pelo Lema 2.2 sabemos que se uma estratégia é colaborativamente dominada fortemente (resp. fracamente) por outra estratégia, então ela é fortemente (resp. fracamente) dominante em relação a esta estratégia. Portanto, dado o perfil  $(\alpha_i, \beta_i)$ , nenhum jogador terá incentivo de se desviar deste perfil, logo o mesmo é um equilíbrio de Nash. Se a dominância for forte, então, temos que o perfil  $(\alpha_i, \beta_i)$  é o único que sobrevive o processo de eliminação de estratégias fortemente dominadas. Logo, é o único equilíbrio de Nash do jogo.  $\square$



## 2.5. Considerações Finais

Por ser, sem dúvida, o mais importante conceito em Teoria dos Jogos, o equilíbrio de Nash é constante alvo de análise. Neste capítulo, estudamos o equilíbrio de Nash sob a ótica da racionalidade do equilíbrio misto. Para isso, propomos o conceito de dominância colaborativa estável (que é um equilíbrio de Nash no sentido puro) e, a partir desta definição, concluímos que em um jogo  $2 \times 2$ , se existir um par de estratégias colaborativamente dominantes estáveis, então, o equilíbrio misto não é apropriado. Ademais, mostramos que existem situações as quais, embora o par de estratégias colaborativamente dominantes fosse instável, os jogadores eram capazes de cooperar via acordos de auto-penalização, alcançando um resultado melhor do que obteriam com o equilíbrio misto.

Também mostramos que, a partir da ideia de jogo transposto e jogo transposto equivalente, o conceito de equilíbrio colaborativo faz uso tanto do princípio da racionalidade egoísta quanto da racionalidade altruísta, garantindo assim a eficiência da solução. Por isso, o equilíbrio colaborativo poderia ser visto pelos jogadores como um ponto focal.

## Capítulo 3

### Equilíbrio Misto: quando queimar dinheiro é racional

#### 3.1. Introdução

Baseados no conceito de *forward induction* proposto por Kohlberg & Mertens (1986) e, sobretudo, suportados pela idéia da eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas, Van Damme (1989) e Ben-Porath & Dekel (1992) estudaram os efeitos da queima de dinheiro como uma forma de sinalizar intenções futuras. Os autores inicialmente analisaram o jogo da Batalha dos sexos, no qual o jogador 1 teria a oportunidade de, antes de começar o jogo, sinalizar para o jogador 2 a sua possibilidade de queimar dinheiro (ou melhor, queimar utilidade). O jogo original da Batalha dos sexos é apresentado na Figura 3.1.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X (3, 1) (0, 0)	(0, 0) (1, 3)

Figura 3.1: Batalha dos sexos.

O jogo da Figura 3.1 tem três equilíbrios, sendo dois puros (X, W) e (Y, Z) e um misto  $E=(M, N)$ , em que  $M=(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$  e  $N=(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ . Agora, imaginemos que o jogador 1 pode queimar digamos uma unidade monetária (uma unidade de sua utilidade) antes do jogo original da Batalha dos sexos ser iniciado. A representação na forma normal deste jogo é exposta na Figura 3.2. Para simplificar a notação,  $B$  indicará que o jogador 1 queimou dinheiro, e  $NB$  que ele não queimou; ademais, a segunda letra,  $X$  ou  $Y$ , indicará

a estratégia que ele escolheu após ter decidido queimar ou não dinheiro. Por sua vez, para o jogador 2, a primeira letra indicará a estratégia escolhida caso o jogador 1 queime dinheiro e a segunda letra indicará a estratégia escolhida caso o jogador 1 não queime dinheiro.

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>				
		<i>WW</i>	<i>WZ</i>	<i>ZW</i>	<i>ZZ</i>
	<i>BX</i>	<i>(2, 1)</i>	<i>(2, 1)</i>	<i>(-1, 0)</i>	<i>(-1, 0)</i>
	<i>BY</i>	<i>(-1, 0)</i>	<i>(-1, 0)</i>	<i>(0, 3)</i>	<i>(0, 3)</i>
	<i>NBX</i>	<i>(3, 1)</i>	<i>(0, 0)</i>	<i>(3, 1)</i>	<i>(0, 0)</i>
	<i>NBY</i>	<i>(0, 0)</i>	<i>(1, 3)</i>	<i>(0, 0)</i>	<i>(1, 3)</i>

Figura 3.2: Batalha dos sexos com queima de dinheiro.

Com base no novo jogo, e utilizando o princípio da eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas, é fácil ver que o único equilíbrio remanescente será  $(NBX, WW)$ , ou seja, o jogador 1 não queimará dinheiro e escolherá a estratégia X, e o jogador 2 escolherá a estratégia W, fato este que leva os jogadores a escolherem o equilíbrio preferido pelo jogador 1. Assim, Ben-Porath & Dekel (1992) chegam à seguinte conclusão geral: nos jogos em que um jogador tiver um equilíbrio estritamente preferido, se este jogador individualmente puder se sacrificar (queimar utilidade), então, a *forward induction rationality* e a eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas o levarão ao seu resultado mais preferido<sup>26</sup>. Esta conclusão é corroborada por Huck & Müller (2005) em um estudo experimental<sup>27</sup>.

Em contrapartida, ao analisar um jogo similar ao exposto, Myerson (1991, p.194-195) argumenta que no contexto do equilíbrio sequencial, a queima de dinheiro pelo jogador 1 pode ser interpretada, pelo jogador 2, como um erro irracional e, por isso, não deveria ser considerada para a predição do comportamento futuro do jogador 1. Outra crítica a conclusão obtida por Ben-Porath & Dekel (1992) é inspirada em idéias presentes em Luce & Raiffa (1989). Estes autores argumentam que qualquer tentativa de comunicação ou troca de mensagens entre os jogadores antes do começo do jogo pode alterar a matriz de *payoffs*, ou seja, pode levar os indivíduos a jogarem um jogo diferente no futuro. No contexto em questão, a opção de queimar dinheiro do jogador 1 pode ser vista como uma ameaça pelo jogador 2, alterando o seu humor. Logo, esta

<sup>26</sup> Para maiores informações sobre jogos com queima de dinheiro e *forward induction* recomendamos: Gersbach (2004), Shimoji (2002), Stalnaker (1998) e Hammond (1993).

<sup>27</sup> Para outros resultados experimentais, também recomendamos a leitura de Brandts & Holt (1995).

mudança de humor também poderia conduzir a uma mudança nos *payoffs* e, eventualmente, dos pontos de equilíbrio.

Além disso, Van Damme (1989) e Ben-Porath & Dekel (1992) reconhecem que se todos os jogadores pudessem sinalizar suas intenções a partir da queima de dinheiro (sacrifício), o resultado obtido talvez fosse ineficiente. Para visualizar este resultado observe os jogos das Figuras 3.3 e 3.4 propostos por Ben-Porath & Dekel (1992). Na primeira, temos um jogo da Caça ao cervo.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	(9, 9)	(0, 7)
	(7, 0)	(6, 6)

Figura 3.3: Caça ao cervo.

Agora, suponhamos que os jogadores possam simultaneamente sinalizar suas intenções futuras a partir da queima de 1,5 unidades de utilidade e, após isso, passem a jogar o jogo da Caça ao cervo tradicional. O resultado deste novo jogo é apresentado na Figura 3.4.

Jogador 1	Jogador 2								
		BWW	BWZ	BZW	BZZ	NBWW	NBWZ	NBZW	NBZZ
	BXX	(7,5, 7,5)	(7,5, 7,5)	(-1,5, 5,5)	(-1,5, 5,5)	(7,5, 9)	(7,5, 9)	(-1,5, 7)	(-1,5, 7)
	BXY	(7,5, 7,5)	(7,5, 7,5)	(-1,5, 5,5)	(-1,5, 5,5)	(5,5, 0)	(5,5, 0)	(4,5, 6)	(4,5, 6)
	BYX	(5,5, -1,5)	(5,5, -1,5)	(4,5, 4,5)	(4,5, 4,5)	(7,5, 9)	(7,5, 9)	(-1,5, 7)	(-1,5, 7)
	BYY	(5,5, -1,5)	(5,5, -1,5)	(4,5, 4,5)	(4,5, 4,5)	(5,5, 0)	(5,5, 0)	(4,5, 6)	(4,5, 6)
	NBXX	(9, 7,5)	(0, 5,5)	(9, 7,5)	(0, 5,5)	(9, 9)	(0, 7)	(9, 9)	(0, 7)
	NBXY	(9, 7,5)	(0, 5,5)	(9, 7,5)	(0, 5,5)	(7, 0)	(6, 6)	(7, 0)	(6, 6)
	NBYX	(7, -1,5)	(6, 4,5)	(7, -1,5)	(6, 4,5)	(9, 9)	(0, 7)	(9, 9)	(0, 7)
	NBYY	(7, -1,5)	(6, 4,5)	(7, -1,5)	(6, 4,5)	(7, 0)	(6, 6)	(7, 0)	(6, 6)

Figura 3.4: Caça ao cervo com queima de dinheiro.

Observe que a partir da eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas, apenas a estratégia *BYY* e *BZZ* seriam eliminadas. Assim, se ambos os jogadores tiverem a opção de queimar dinheiro simultaneamente, o processo de eliminação iterativa não os levaria a um equilíbrio eficiente. Adicionalmente a isso, os autores reforçam que a ordem a qual os jogadores queimam dinheiro é que define o poder de cada uma deles no jogo, pois, a oportunidade de contra-sinalizar tornaria as sinalizações iniciais inválidas. Por esta razão, a vantagem ficaria com o jogador que sinalizasse por último.

Os jogos com queima de dinheiro também podem ser analisados em outra ótica, a qual envolve a queima de dinheiro apenas para algumas ações específicas, como

discutido em Fudenberg & Tirole (1991, p.9). Os autores propõem que o leitor avalie o seguinte jogo apresentado na Figura 3.5. Nele, há apenas um equilíbrio puro  $(X, W)$  com *payoffs* de  $(1, 3)$ .

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	$(1, 3)$	$(4, 1)$
	$(0, 2)$	$(3, 4)$

Figura 3.5: Jogo com equilíbrio ineficiente

Porém, imagine que o jogador 1 consiga mostrar para o jogador 2 que a estratégia  $Y$  não é fortemente dominada pela estratégia  $X$ , ou seja, ele é capaz de assinar um contrato que o forçará a queimar duas unidades monetárias caso escolha a estratégia  $X$ . O novo jogo em questão é exposto na Figura 3.6. Nele, há apenas um equilíbrio  $(Y, Z)$  que é eficiente.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	$(-1, 3)$	$(2, 1)$
	$(0, 2)$	$(3, 4)$

Figura 3.6: Alcançando o equilíbrio eficiente

Assim, baseados nos exemplos expostos, percebemos que um comportamento de queima de dinheiro pode ser um importante mecanismo para cooperação além de permitir que os jogadores alcancem resultados eficientes nos jogos. Além disso, uma vez que assumimos ser os jogadores capazes de se auto-penalizar (é mais simples supor que os jogadores são capazes de reduzir os seus próprios *payoffs* do que aumentá-los) é natural supor que se a mesma penalidade for atribuída por um agente externo e imparcial, o mesmo resultado vai emergir. Nesse sentido, Laffont & Martimort (2002) afirmam que uma das hipóteses básicas do modelo principal agente é a existência de um mediador (externo e imparcial) que pode monitorar e punir o participante (seja o principal ou o agente) que violar o contrato. Assim, um comportamento de queima de dinheiro pode se aplicar a contextos econômicos mais gerais.

Neste capítulo, discutimos a racionalidade dos jogos com queima de dinheiro sob uma nova perspectiva: a do equilíbrio misto. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para a existência de derivadas negativas (ou pelo menos não positivas) da utilidade esperada do equilíbrio misto de um dado jogador com relação aos seus próprios *payoffs*. Em particular, jogos nos quais derivadas negativas ocorrem são

aqueles que criam incentivos para um comportamento de queima de dinheiro, uma vez que tal comportamento aumenta a utilidade esperada do equilíbrio misto para o jogador que se auto-penaliza.

Ainda provamos que uma derivada da utilidade esperada do equilíbrio misto negativa para um dado jogador  $i$  ocorrerá se, e somente se, o jogador  $j$  tiver uma estratégia fortemente colaborativamente dominante para o jogador  $i$ . Adicionalmente, as derivadas negativas sempre ocorrem com relação ao maior e menor *payoffs* do jogador  $i$ . Posteriormente, nós avaliamos como o jogador  $j$  reage à queima de dinheiro feita pelo jogador  $i$ , isto é, avaliamos como a estratégia mista do jogador  $j$  se adequa a queima de dinheiro realizada pelo jogador  $i$ . Daí, somos capazes de provar que sempre que o jogador  $i$  reduz os *payoffs* cujas derivadas da utilidade esperada são negativas, ele está induzindo o jogador  $j$  a colaborar com maior frequência, e isto o auxilia a alcançar um resultado mais desejado. Assim, este jogador deveria queimar dinheiro com relação ao *payoff* que fará com que o jogador  $j$  convirja mais rapidamente para a estratégia colaborativamente dominante para ele, (jogador  $i$ ). Ademais, também apontamos algumas dificuldades que nos impedem de estender a análise proposta para jogos mais gerais. Finalmente, apresentamos um exemplo de como os resultados obtidos ao longo do capítulo podem ser usados para avaliar a cooperação entre os jogadores, revisando algumas das conclusões de Jervis (1978) sobre o dilema da segurança.

O restante do capítulo será organizado como segue: na Seção 3.2, focando nos jogos 2x2 na forma estratégica, realizamos uma análise da primeira derivada da utilidade esperada do equilíbrio misto dos jogadores com relação aos seus respectivos *payoffs*; na Seção 3.3 são discutidas as condições necessárias e suficientes para que se tenham derivadas da utilidade esperada negativas (ou, ao menos, não-positivas), o que justificaria a queima de dinheiro; na Seção 3.4 nós estudamos o problema de encontrar a melhor estratégia para queima de dinheiro; na Seção 3.5 discutimos as dificuldades para generalizar a abordagem proposta para jogos mais gerais (além dos jogos 2x2); na Seção 3.6, para ilustrar possíveis aplicações para o problema da queima de dinheiro, utilizamos as conclusões das seções anteriores para revisar alguns dos resultados de Jervis (1978) em seu dilema da segurança. Por fim, as conclusões são apresentadas na Seção 3.7.

### 3.2. Uma análise das primeiras derivadas

Iniciamos nosso estudo considerando a estrutura geral de um jogo 2x2 na forma normal, como ilustra a Figura 3.7.

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	$(a, e)$
	<i>Y</i>	$(c, g)$

Figura 3.7: Estrutura geral dos jogos 2x2.

Seja  $p$  a probabilidade do jogador 1 escolher a estratégia pura  $X$  e  $1-p$  a probabilidade de escolher a estratégia pura  $Y$ . Seja também  $q$  a probabilidade do jogador 2 escolher a estratégia pura  $W$  e  $1-q$  a probabilidade dele escolher a estratégia pura  $Z$ . Queremos, então, restringir nossa atenção para jogos com apenas um equilíbrio misto na forma não-degenerada (nenhuma restrição é feita ao número de equilíbrios puros do jogo). Neste caso, podemos escrever as probabilidades do jogador 1 escolher  $X$  e do jogador 2 escolher  $W$  no equilíbrio misto<sup>28</sup> como:

$$p = \frac{h - g}{e - f - g + h} \quad (3.1) \quad \text{e} \quad q = \frac{d - b}{a - b - c + d} \quad (3.2)$$

Logo, com base nas Expressões 3.1 e 3.2, podemos escrever a utilidade esperada do equilíbrio misto de Nash de cada jogador como uma função dos *payoffs* individuais de cada uma delas, como segue:

$$EU_1 = \frac{ad - bc}{a - b - c + d} \quad (3.3)$$

$$EU_2 = \frac{eh - fg}{e - f - g + h} \quad (3.4)$$

<sup>28</sup> Para os interessados em algoritmos para o cálculo de equilíbrio misto recomendamos contribuições pioneiras como os trabalhos de Mangasarian (1964) e Wilson (1971), e trabalhos mais recentes com o de Porter, Nudelman & Shoham (2008) ou ainda McKelvy, McLennan & Turocy (2010).

Uma vez reescritas as utilidades esperadas apenas em funções dos *payoffs* de cada jogador, podemos então avaliar como a utilidade esperada se comporta com relação às variações nos mesmos, através de uma análise da primeira derivada. Nesta análise, nos restringimos às variações nos *payoffs* que não alteram a ordem geral das preferências, de modo a manter a mesma situação estratégica original. Por ‘ordem geral dos *payoffs*’ entende-se: se o *payoff*  $u \geq v$ , então, após a variação nos *payoffs*, não pode ocorrer que  $v > u$ , bem como se  $u = v$ , essa relação também deve ser mantida após as variações. Assim, para o jogador 1 temos as Equações (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8):

$$\frac{\partial EU_1}{\partial a} = \frac{(c-d)(b-d)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.5) \quad \frac{\partial EU_1}{\partial b} = \frac{(c-d)(c-a)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial c} = \frac{(b-a)(b-d)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.7) \quad \frac{\partial EU_1}{\partial d} = \frac{(b-a)(c-a)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial e} = \frac{\partial EU_1}{\partial f} = \frac{\partial EU_1}{\partial g} = \frac{\partial EU_1}{\partial h} = 0$$

Por sua vez, para o jogador 2 temos as equações (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12):

$$\frac{\partial EU_2}{\partial e} = \frac{(g-h)(f-h)}{(e-f-g+h)^2} \quad (3.9) \quad \frac{\partial EU_2}{\partial f} = \frac{(g-h)(g-e)}{(e-f-g+h)^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial EU_2}{\partial g} = \frac{(f-e)(f-h)}{(e-f-g+h)^2} \quad (3.11) \quad \frac{\partial EU_2}{\partial h} = \frac{(f-e)(g-e)}{(e-f-g+h)^2} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial EU_2}{\partial a} = \frac{\partial EU_2}{\partial b} = \frac{\partial EU_2}{\partial c} = \frac{\partial EU_2}{\partial d} = 0$$

Por meio dessas expressões gerais, podemos avaliar como se comportam as utilidades esperadas de cada jogador, quando os seus respectivos *payoffs* variam, realizando uma análise do sinal das derivadas. Mas, antes de apresentar conclusões mais gerais iremos avaliar alguns jogos clássicos e verificar como o sinal das derivadas se comporta para cada um deles.



*Batalha dos sexos:*

Com base na Figura 3.7, a ordem dos *payoffs* para este jogo é:  $a > d > c = b = 0$ , e  $h > e > f = g = 0$ . Nesse jogo, existem dois equilíbrios puros (X, W) e (Y, Z) e um equilíbrio misto. Logo, teremos que para o jogador 1:

$$\frac{\partial EU_1}{\partial a} = \frac{d^2}{(a+d)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial b} = \frac{\partial EU_I}{\partial c} = \frac{2ad}{(a+d)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial d} = \frac{a^2}{(a+d)^2} > 0.$$

E analogamente para o jogador 2,

$$\frac{\partial EU_2}{\partial e} = \frac{h^2}{(e+h)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_2}{\partial f} = \frac{\partial EU_{II}}{\partial g} = \frac{2eh}{(e+h)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_2}{\partial h} = \frac{e^2}{(e+h)^2} > 0.$$

Então, concluímos facilmente que qualquer aumento no valor dos *payoffs* também leva a um aumento no valor da utilidade esperada do seu respectivo jogador. Porém, será que isso sempre ocorre? Isto é, um aumento em um dos *payoffs* sempre aumenta a utilidade esperada do equilíbrio misto para os jogadores (ou pelo menos deixa constante)? Veremos que não no jogo a seguir.

*Caça ao cervo:*

Com base na Figura 3.7, a ordem dos *payoffs* para este jogo é:  $a > c > d > b = 0$ , e  $e > f > h > g = 0$ . Logo, temos dois equilíbrios puros (X, W) e (Y, Z) e um equilíbrio misto, porém o equilíbrio (X, W) domina em termos de *payoffs* o equilíbrio (Y, Z), ou seja, é Pareto eficiente. Daí, temos para o jogador 1:

$$\frac{\partial EU_1}{\partial a} = \frac{d(d-c)}{(a-c+d)^2} < 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial b} = \frac{(c-d)(c-a)}{(a-c+d)^2} < 0,$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial c} = \frac{ad}{(a-c+d)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial d} = \frac{a(a-c)}{(a-c+d)^2} > 0.$$

E de forma análoga para o jogador 2:

$$\frac{\partial EU_2}{\partial e} = \frac{h(h-f)}{(e-f+h)^2} < 0, \quad \frac{\partial EU_2}{\partial f} = \frac{eh}{(e-f+h)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial EU_2}{\partial g} = \frac{(f-h)(f-e)}{(e-f+h)^2} < 0, \quad \frac{\partial EU_2}{\partial h} = \frac{e(e-f)}{(e-f+h)^2} > 0.$$

Agora, um estranho resultado surge: em alguns casos, quando o *payoff* do jogador aumenta, a sua utilidade esperada diminui. Por exemplo, quando os *payoffs*  $a$  e  $e$  (que são os maiores do jogo) aumentam, as utilidades esperadas dos jogadores diminuem, mesmo o par de estratégias  $(X, W)$  sendo um equilíbrio de Nash.

Para realçar ainda mais o problema em questão, imaginemos um caso<sup>29</sup> em que os *payoffs*  $a$  e  $e$  aumentam indefinidamente,  $a \rightarrow \infty$  e  $e \rightarrow \infty$ , enquanto os outros *payoffs* permanecem constantes e respeitando a ordem estabelecida. Então,  $\lim_{a \rightarrow \infty} q = \lim_{e \rightarrow \infty} p = 0$ , o que nos diz que os jogadores irão convergir para o equilíbrio  $(Y, Z)$ . Assim, quando as utilidades do equilíbrio  $(X, W)$  se tornam extraordinariamente maiores do que os outros resultados da matriz de *payoffs*, o equilíbrio misto recomenda que os jogadores escolham tais estratégias puras com uma probabilidade infinitesimal. Conclusão semelhante seria obtida se fizéssemos  $b \rightarrow d$  e  $g \rightarrow h$  simultaneamente, e desse modo, variações nas maiores e menores utilidades de cada jogador, levariam a uma redução na utilidade esperada dos mesmos. Mas, antes de discutir as causas desses resultados, é conveniente analisar mais alguns exemplos, constatando as similaridades entre eles.

#### *Dois Jogos sem equilíbrios puros:*

Agora, analisaremos paralelamente dois jogos sem equilíbrio puro. No primeiro deles, com base na Figura 3.7, a ordem dos *payoffs* é:  $d > a > c > b = 0$ , e  $f > g > h > e = 0$ . Com isso, temos para o jogador 1:

$$\frac{\partial EU_1}{\partial a} = \frac{d(d-c)}{(a-c+d)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial b} = \frac{(c-d)(c-a)}{(a-c+d)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial c} = \frac{ad}{(a-c+d)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial d} = \frac{a(a-c)}{(a-c+d)^2} > 0.$$

<sup>29</sup> O leitor é convidado a testar outros casos quando os *payoffs* tendem a limites específicos e verificar outros estranhos resultados para o jogo.

E para o jogador 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial EU_2}{\partial e} &= \frac{(g-h)(f-h)}{(h-f-g)^2} > 0, & \frac{\partial EU_2}{\partial f} &= \frac{g(g-h)}{(h-f-g)^2} > 0, \\ \frac{\partial EU_2}{\partial g} &= \frac{f(f-h)}{(h-f-g)^2} > 0, & \frac{\partial EU_2}{\partial h} &= \frac{fg}{(h-f-g)^2} > 0.\end{aligned}$$

Por sua vez, para o segundo jogo, a ordem dos *payoffs* será:  $a > c > d > b = 0$ , e  $g > h > f > e = 0$ . Porém, observe que dada esta nova ordem, algumas derivadas passam a ter o sinal negativo. Assim, para o jogador 1 temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial EU_1}{\partial a} &= \frac{d(d-c)}{(a-c+d)^2} < 0, & \frac{\partial EU_1}{\partial b} &= \frac{(c-d)(c-a)}{(a-c+d)^2} < 0, \\ \frac{\partial EU_1}{\partial c} &= \frac{ad}{(a-c+d)^2} > 0, & \frac{\partial EU_1}{\partial d} &= \frac{a(a-c)}{(a-c+d)^2} > 0.\end{aligned}$$

E para o jogador 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial EU_2}{\partial e} &= \frac{(g-h)(f-h)}{(h-f-g)^2} < 0, & \frac{\partial EU_2}{\partial f} &= \frac{g(g-h)}{(h-f-g)^2} > 0, \\ \frac{\partial EU_2}{\partial g} &= \frac{f(f-h)}{(h-f-g)^2} < 0, & \frac{\partial EU_2}{\partial h} &= \frac{fg}{(h-f-g)^2} > 0.\end{aligned}$$

Embora no primeiro jogo todas as derivadas sejam positivas, no segundo, existem derivadas negativas, as quais ocorrem novamente com relação ao maior e ao menor *payoffs* de cada jogador.

*Jogo da galinha:*

Com base na Figura 3.7, a ordem dos *payoffs* para este jogo é:  $b > d > c > a = 0$ , e  $g > h > f > e = 0$ . Nesse jogo temos dois equilíbrios puros (Y, W) e (X, Z) e um equilíbrio misto. Deste modo, temos para o jogador 1:

$$\frac{\partial EU_1}{\partial a} = \frac{(c-d)(b-d)}{(d-b-c)^2} < 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial b} = \frac{c(c-d)}{(d-b-c)^2} < 0,$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial c} = \frac{b(b-d)}{(d-b-c)^2} > 0, \quad \frac{\partial EU_1}{\partial d} = \frac{bc}{(d-b-c)^2} > 0.$$

E de forma análoga para o jogador 2:

$$\frac{\partial EU_2}{\partial e} = \frac{(g-h)(f-h)}{(h-f-g)^2} < 0, \quad \frac{\partial EU_2}{\partial f} = \frac{g(g-h)}{(h-f-g)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial EU_2}{\partial g} = \frac{f(f-g)}{(h-f-g)^2} < 0, \quad \frac{\partial EU_2}{\partial h} = \frac{fg}{(h-f-g)^2} > 0.$$

Por fim, no jogo da Galinha, nós também temos derivadas negativas. É importante destacar que tais derivadas também ocorrem com relação aos maiores e menores payoffs de cada jogador. Na próxima seção são apresentadas condições necessárias e suficientes para a existência de derivadas negativas e mostramos que as similaridades dos exemplos não são uma mera coincidência.

### 3.3. Definindo o sinal das derivadas

Nesta seção, discutimos algumas regularidades (condições necessárias e suficientes), as quais fazem com que, em um dado jogo 2x2, a derivada da utilidade esperada com relação aos *payoffs* seja negativa (ou ao menos não-positiva). Inicialmente analisamos o caso da utilidade esperada para algum equilíbrio puro, como resume o Lema 3.1.

**Lema 3.1:** Em qualquer equilíbrio de Nash puro, as derivadas das utilidades esperadas em relação aos *payoffs* são não-negativas.

**Prova:** A prova deste lema é bastante simples e intuitiva. Suponha que o par de estratégias  $(s_1, s_2)$  é um equilíbrio puro de um dado jogo, resultando em uma utilidade  $U_i(s_1, s_2) = x$  para o jogador  $i$ . Logo, a derivada da utilidade esperada com relação a

algum *payoff* do jogador  $i$  será igual a um, para todo *payoff* igual a  $x$ , e será igual a zero, para os demais casos.  $\square$

Este resultado nos indica que, quando isolamos um dado equilíbrio puro de um jogo (quando existe ao menos um equilíbrio puro), um aumento em algum dos *payoffs* de um dos jogadores, jamais lhe reduzirá a utilidade esperada proveniente daquele equilíbrio. Ademais, também podemos garantir derivadas não-negativas para os seguintes casos, como resume o Lema 3.2. Mas antes façamos uma breve definição:

**Definição 3.1:** Com base no jogo  $\Gamma$ , sejam  $s_1 \neq \hat{s}_1$  (resp.  $s_2 \neq \hat{s}_2$ ) duas estratégias pertencentes ao conjunto  $S_1$  (resp.  $S_2$ ), então, dizemos que a estratégia  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) é indiferente com relação à estratégia  $\hat{s}_1$  (resp.  $\hat{s}_2$ ) para o jogador 1 (resp. 2) se  $U_1(s_1, s_2) = U_1(\hat{s}_1, s_2), \forall s_2 \in S_2$  (resp.  $U_2(s_1, s_2) = U_2(s_1, \hat{s}_2), \forall s_1 \in S_1$ ).

**Lema 3.2:** Com base no jogo da Figura 3.7, se o jogador  $i$  possui uma estratégia forte ou fracamente dominante ou for indiferente entre suas estratégias, então, as derivadas das utilidades esperadas de equilíbrio do jogador  $i$  são não-negativas.

**Prova:** Sem perda de generalidade, iremos supor que  $i=1$ . Analisando o caso em que tal jogador possui uma estratégia fortemente dominante, digamos<sup>30</sup> a estratégia  $X$ , então existem três possibilidades para formação dos equilíbrios do jogo: se  $e > f$  ou  $f > e$ , o jogo terá apenas um equilíbrio puro,  $(X, W)$  ou  $(X, Z)$  respectivamente, e como vimos pelo Lema 3.1, em qualquer equilíbrio de Nash puro, as derivadas das utilidades esperadas em relação aos *payoffs* são não-negativas. Assim, nos resta verificar o caso em que  $e = f$ . Se esta condição ocorrer, então o jogo em questão terá dois equilíbrios puros e infinitos equilíbrios mistos na forma  $E = (M, N)$ , nos quais  $M = (1, 0)$  e  $N = (q^*, 1 - q^*)$ , com  $q^* \in [0, 1]$ . Então, a utilidade esperada do jogador 1 seria:  $EU_1 = aq^* + b(1 - q^*)$  e com isso, as derivadas das utilidades esperadas em relação aos *payoffs* também são não-negativas. Agora, analisemos o caso em que  $X$  é fracamente dominante (como já sabemos que para os equilíbrios puros as derivadas são sempre não-negativas, então daqui para frente tais situações não serão mais consideradas). Nesse caso temos duas possibilidades: (A)  $a = c$  e  $b > d$  ou (B)  $a > c$  e  $b = d$ . Por (A), a utilidade esperada do

<sup>30</sup> Resultados similares também seriam obtidos se escolhida a estratégia  $Y$ .

equilíbrio misto do jogador 1 é  $EU_1 = a = c$ ; por outro lado, em (B), a utilidade esperada do equilíbrio misto é  $EU_1 = d = b$ . Logo, é fácil ver que as derivadas serão ao menos não-negativas. Por fim, nos resta analisar o caso em que as estratégias  $X$  e  $Y$  são indiferentes, isto é, quando  $a = c$  e  $b = d$ . Nessas condições, independentemente da estratégia mista,  $(q, 1 - q)$ , escolhida pelo jogador 2, o equilíbrio misto irá proporcionar uma utilidade esperada para o jogador 1 de  $EU_1 = aq + b(1 - q)$ . Assim, as derivadas serão também não-negativas, o que completa a prova  $\square$

Para dar continuidade as condições que garantem derivadas não-positivas e estritamente negativas, solicitamos que o leitor reavalie os jogos expostos na Seção 3.2. Neles, é possível perceber que as derivadas negativas só ocorreram em jogos nos quais os jogadores preferem que o outro utilize uma estratégia em particular, independentemente de sua própria escolha, ou seja, para jogos em que existem estratégias colaborativamente dominantes. O conceito de dominância colaborativa foi formalmente exposto no Capítulo 2.

A seguir, os Teoremas 3.1 e 3.2 nos mostram formalmente que derivadas não-positivas (resp. negativas) para um jogador  $i$  com relação aos *payoffs* dele só ocorrem se, e somente se, o jogador  $j$  tiver uma estratégia fracamente (resp. fortemente) colaborativamente dominante para esse jogador. Além disso, derivadas não-positivas (resp. negativas) sempre ocorrem quando são tomadas com relação às utilidades do jogador  $i$  associadas com a estratégia que é uma melhor resposta à estratégia fracamente (resp. fortemente) colaborativamente dominante do jogador  $j$  (e estes são o maior e o menor *payoffs* do jogador  $i$ ).

**Teorema 3.1:** Com base no jogo da Figura 3.7, suponhamos que o jogador  $i$  não tenha estratégias forte ou fracamente dominantes tampouco é indiferente entre suas estratégias. Então, existem duas derivadas da utilidade esperada de equilíbrio do jogador  $i$  não-positivas e duas positivas se, e somente se, o jogador  $j$  possuir uma estratégia fracamente colaborativamente dominante para esse jogador. Além disso, as derivadas não-positivas sempre ocorrem com relação às utilidades do jogador  $i$  associadas com a estratégia que é uma melhor resposta à estratégia fracamente colaborativamente dominante do jogador  $j$  (e estes são o maior e o menor *payoffs* do jogador  $i$ ).

**Prova:** Sem perda de generalidade, assumamos  $i=1$ . Então dada as suposições do teorema, existem duas possibilidades para um ordenamento parcial dos *payoffs* para o jogador 1, são elas: (A)  $a > c$  e  $b < d$  ou (B)  $a < c$  e  $b > d$ . Admitamos que vale a condição (A), então:  $\frac{\partial EU_1}{\partial a} \leq 0 \leftrightarrow c \geq d$ ,  $\frac{\partial EU_1}{\partial b} \leq 0 \leftrightarrow c \geq d$ ,  $\frac{\partial EU_1}{\partial c} \leq 0 \leftrightarrow b \geq a$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial d} \leq 0 \leftrightarrow b \geq a$ . Daí, devemos considerar os três subcasos a seguir:

(A1)  $c \geq d$ : Neste subcaso,  $a > c \geq d > b$  e  $W$  é fracamente colaborativamente dominante para o jogador 1. Além disso, a estratégia  $X$  é uma melhor resposta à estratégia  $W$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial a}$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial b}$  são não-positivas ( $a$  é o maior *payoff* e  $b$  o menor) enquanto as outras derivadas são positivas.

(A2)  $b \geq a$ . Neste subcaso,  $d > b \geq a > c$ , e  $Z$  é fracamente colaborativamente dominante para o jogador 1. Além disso, a estratégia  $Y$  é uma melhor resposta à estratégia  $Z$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial c}$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial d}$  são não-positivas ( $d$  é o maior *payoff* e  $c$  o menor) enquanto as outras derivadas são positivas.

(A3)  $d > c$  e  $a > b$ . Neste caso não temos estratégias fracamente colaborativamente dominantes e todas as derivadas são positivas.

A prova da condição (B) é análoga e por isso será omitida.  $\square$

**Teorema 3.2:** Com base no jogo da Figura 3.7, suponhamos que o jogador  $i$  não tenha estratégias forte ou fracamente dominantes tampouco é indiferente entre suas estratégias. Então, existem duas derivadas da utilidade esperada de equilíbrio do jogador  $i$  negativas e duas positivas se, e somente se, o jogador  $j$  possuir uma estratégia fortemente colaborativamente dominante para esse jogador. Além disso, as derivadas negativas sempre ocorrem com relação às utilidades do jogador  $i$  associadas com a estratégia que é uma melhor resposta à estratégia fortemente colaborativamente dominante do jogador  $j$  (e estes são o maior e o menor *payoffs* do jogador  $i$ ).

**Prova:** Novamente assumamos  $i=1$ . Então dada as suposições do teorema, existem duas possibilidades para um ordenamento parcial dos *payoffs* para o jogador 1, são elas: (A)  $a > c$  e  $b < d$  ou (B)  $a < c$  e  $b > d$ . Suponhamos que vale a condição (A), então:  $\frac{\partial EU_1}{\partial a} < 0 \leftrightarrow c > d$ ,  $\frac{\partial EU_1}{\partial b} < 0 \leftrightarrow c > d$ ,  $\frac{\partial EU_1}{\partial c} < 0 \leftrightarrow b > a$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial d} < 0 \leftrightarrow b > a$ . Logo, devemos considerar os três subcasos a seguir:

(A1)  $c > d$ : Neste subcaso,  $a > c > d > b$  e  $W$  é fortemente colaborativamente dominante para o jogador 1. Além disso, a estratégia  $X$  é uma melhor resposta à estratégia  $W$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial a}$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial b}$  são negativas ( $a$  é o maior *payoff* e  $b$  o menor) enquanto as outras derivadas são positivas.

(A2)  $b > a$ . Neste subcaso,  $d > b > a > c$ , e  $Z$  é fortemente colaborativamente dominante para o jogador 1. Além disso, a estratégia  $Y$  é uma melhor resposta à estratégia  $Z$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial c}$  e  $\frac{\partial EU_1}{\partial d}$  são negativas ( $d$  é o maior *payoff* e  $c$  o menor) enquanto as outras derivadas são positivas.

(A3)  $d \geq c$  e  $a \geq b$ . Neste caso não temos estratégias fortemente colaborativamente dominantes e todas as derivadas são não-negativas.

A prova da condição (B) é análoga e por isso será omitida.  $\square$

### 3.4. Queimando dinheiro

Na seção anterior vimos que, atendidas as condições para existência de derivadas da utilidade esperada do equilíbrio misto negativas, as mesmas sempre serão relativas ao maior e ao menor *payoffs* do jogador. Agora, responderemos a seguinte questão: supondo que os jogadores irão jogar de acordo com o equilíbrio misto, e que existem duas derivadas da utilidade esperada negativas para um dado jogador, se esse indivíduo tivesse a oportunidade de queimar  $x$  unidade de utilidade para um dado perfil de estratégias, então qual seria a melhor estratégia de queima de dinheiro que ele poderia adotar?

Para responder esta pergunta, analisaremos inicialmente como as probabilidades do equilíbrio misto de um dado jogador reagem a variações nos *payoffs* do outro jogador. Logo, para o jogador 2 temos<sup>31</sup> as Equações (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16):

$$\frac{\partial q}{\partial a} = \frac{\partial(1-q)}{\partial c} = \frac{(b-d)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{\partial(1-q)}{\partial d} = \frac{(c-a)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.14)$$

<sup>31</sup> A análise para o Jogador 1 é análoga.



$$\frac{\partial q}{\partial c} = \frac{\partial(1-q)}{\partial a} = \frac{(d-b)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial q}{\partial d} = \frac{\partial(1-q)}{\partial b} = \frac{(a-c)}{(a-b-c+d)^2} \quad (3.16)$$

Agora, de posse desses resultados, podemos reescrever as Equações (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8), como mostram as Equações (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), respectivamente. Nestas, vemos a derivada da utilidade esperada do jogador 1 como função da derivada da probabilidade do equilíbrio misto do jogador 2.

$$\frac{\partial EU_1}{\partial a} = (c-d) \frac{\partial q}{\partial a} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial b} = (c-d) \frac{\partial q}{\partial b} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial c} = (a-b) \frac{\partial q}{\partial c} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial EU_1}{\partial d} = (a-b) \frac{\partial q}{\partial d} \quad (3.20)$$

Pelo Teorema 3.2, sabemos que só haverá derivada da utilidade esperada do equilíbrio misto negativa para o jogador 1 se, e somente se, uma das quatro seguintes ordenações dos *payoffs* for respeitada: (1)  $d > b > a > c$ ; (2)  $a > c > d > b$ ; (3)  $b > d > c > a$ ; (4)  $c > a > b > d$ . Vamos supor o caso (1).

*Caso 1:  $d > b > a > c$ .* Aqui, a estratégia Z do jogador 2 é fortemente colaborativamente dominante para o jogador 1 e, com efeito, temos que a derivada da utilidade esperada é negativa com relação aos *payoffs*  $d$  e  $c$  (enquanto  $\frac{\partial q}{\partial c}$  e  $\frac{\partial q}{\partial d}$  são positivas) o que implica que uma redução em um desses *payoffs* também reduz a chance do jogador 2 escolher a estratégia W e, consequentemente, aumenta a chance do jogador 2 escolher a estratégia Z a qual, como dito, é fortemente colaborativamente dominante para o jogador 1. A análise dos demais casos é análoga e, portanto, será omitida.

Então, fica evidente que o jogador 1 deveria reduzir o *payoff* (queimar dinheiro) de modo a fazer o jogador 2 convergir mais rapidamente para a estratégia que é fortemente colaborativamente dominante para ele, jogador 1. Para enfatizar esta conclusão, observemos o mesmo problema sob outra perspectiva. Imagine agora que o jogador 1 tem  $x > 0$  unidades de utilidade para queimar. Então, com relação a que *payoff* ele deveria queimar as  $x$  unidades de utilidade?

Imagine, por exemplo, que estamos no *Caso 1*, em que  $d > b > a > c$ , suponha também que o jogador 1 resolveu queimar  $\alpha x$  unidades em  $c$  e  $(1 - \alpha)x$  unidades em  $d$ , sendo  $\alpha \in [0, 1]$ . É importante ressaltar que para manter a ordem dos *payoffs* precisamos garantir que  $(1 - \alpha)x \leq d - b$ . Deste modo temos que a utilidade esperada do jogador 1 fica igual a:

$$EU_1 = \frac{a(d - x(1 - \alpha)) - b(c - x\alpha)}{a - b - (c - x\alpha) + (d - x(1 - \alpha))} \quad (3.21)$$

Daí, podemos encontrar o valor de  $\alpha$  que maximiza a Equação 3.21 derivando  $EU_1$  com relação a  $\alpha$ , como mostra a Equação 3.22.

$$\frac{\partial EU_1}{\partial \alpha} = \frac{x(a - b)(x + a + b - c - d)}{(a - b - c + d - x + 2x\alpha)^2} \quad (3.22)$$

Assim, com base na Equação 3.22, podemos mostrar que tal derivada será positiva se  $0 < x < (d - b) + (c - a)$  e, neste caso, o jogador queimaria as  $x$  unidades no menor *payoff*,  $c$ . Por outro lado, se  $d - b \geq x > (d - b) + (c - a)$ , ele queimaria as  $x$  unidades no maior *payoff*,  $d$ . Se  $x = (d - b) + (c - a)$ , então a derivada seria igual a zero e não faria diferença em que *payoff* ele deveria queimar utilidade. Notemos ainda que para um valor pequeno e positivo de  $x$ , as conclusões são as mesmas obtidas com a análise da derivada acima, ou seja, o jogador queimaria dinheiro com relação ao *payoff*  $c$  enquanto  $\frac{\partial q}{\partial c} > \frac{\partial q}{\partial d}$ , o que é equivalente a  $d - b > a - c$ , ou queimaria dinheiro em  $d$  no caso oposto. Então, podemos detalhar a conclusão obtida, indicando qual deveria ser o comportamento do jogador 1 para cada um dos quatro casos a que ele tem incentivo para queimar dinheiro.

*Caso 1:  $d > b > a > c$ .* Se  $x < (d-b) + (c-a)$ , então ele deve queimar as  $x$  unidades de utilidade no *payoff*  $c$ , enquanto se  $(d-b) \geq x > (d-b) + (c-a)$ , deve queimá-las em  $d$ .

*Caso 2:  $a > c > d > b$ .* Se  $x < (a-c) + (b-d)$ , então ele deve queimar as  $x$  unidades de utilidade no *payoff*  $b$ , enquanto se  $(a-c) \geq x > (a-c) + (b-d)$ , deve queimá-las em  $a$ .

*Caso 3:  $b > d > c > a$ .* Se  $x < (b-d) + (a-c)$ , então ele deve queimar as  $x$  unidades de utilidade no *payoff*  $a$ , enquanto se  $(b-d) \geq x > (b-d) + (a-c)$ , deve queimá-las em  $b$ .

*Caso 4:  $c > a > b > d$ .* Se  $x < (c-a) + (d-b)$ , então ele deve queimar as  $x$  unidades de utilidade no *payoff*  $d$ , enquanto se  $(c-a) \geq x > (c-a) + (d-b)$ , deve queimá-las em  $c$ .

Assuma que as condições do Teorema 3.2 são atendidas. Então é importante destacar que, em jogos sem nenhum equilíbrio puro e em que ambos os jogadores têm uma estratégia colaborativamente dominante para o outro, se medirmos o valor de participação no jogo pela utilidade esperada do equilíbrio misto, então este valor diminuirá à medida que o maior e o menor *payoff* de cada jogador aumentar. Além disso, uma vez que um jogador sabe que uma redução em alguns de seus *payoffs* aumenta sua utilidade esperada do equilíbrio misto, ele pode ser tentado a mentir sobre sua verdadeira utilidade o que pode causar um sério problema para a educação de utilidade em ambientes estratégicos.

Em um trabalho recente, Englemann & Steiner (2007) desenvolveram um estudo que avaliava como o ganho material esperado<sup>32</sup> (*expected material payoff*) do equilíbrio misto para um dado jogador se comportava (aumentava ou diminuía) com relação a variações no grau aversão a risco deste jogador. Para tanto, os autores focaram em jogos 2x2 com dois equilíbrios puros e um equilíbrio misto, restringindo a análise ao equilíbrio misto. Como uma de suas principais contribuições, os autores conseguiram identificar condições, com relação aos ganhos materiais, as quais garantem que o ganho material esperado do equilíbrio misto de um dado jogador será uma função crescente do seu grau de aversão ao risco. Tais condições são sumarizadas nas proposições a seguir:

**Proposição 3.1** (ENGLEMAN & STEINER, 2007, p.383-384): Quando  $a > c > d > b$  ou  $a > d > c > b$ , a probabilidade de equilíbrio  $q$  com que o jogador 2 escolhe a estratégia  $W$  aumenta com o grau de aversão a risco do jogador 1.

<sup>32</sup> Quando Englemann & Steiner (2007) avaliam um jogo semelhante ao da Figura 3.7, eles não consideram os valores da matriz de *payoffs* como sendo utilidade e sim como sendo ganhos monetários (ou ganhos materiais).

**Proposição 3.2** (ENGLEMAN & STEINER, 2007, p.383-384): Em qualquer equilíbrio misto de um jogo  $2 \times 2$ , se  $a > c > d > b$ , então o ganho material do jogador 1 aumenta com relação ao grau de aversão ao risco dele.

Utilizando a idéia de dominância colaborativa e a argumentação desenvolvida ao longo deste capítulo, podemos fornecer uma explicação intuitiva para o resultado por trás da Proposição 3.2: uma vez que  $a > c > d > b$ , então, a Proposição 3.1 nos diz que a probabilidade  $q$  com que o jogador 2 escolhe a estratégia  $W$  irá aumentar a medida que o jogador 1 se torna mais avesso ao risco. Então, como a estratégia  $W$  do jogador 2 é colaborativamente dominante para o jogador 1, este sempre se beneficiará (em termo dos *payoffs* materiais) com qualquer aumento de  $q$ . Para uma prova formal dessas proposições recomendamos a leitura Englemann & Steiner (2007).

Os autores admitem ainda que a abordagem utilizada por eles não permite que nenhuma conclusão sobre o comportamento da utilidade esperada seja feita, e isso porque uma variação na preferência pelo risco também causaria uma variação na utilidade de cada (ou pelo menos de alguns) perfis de estratégias puras e, dependendo do efeito conjunto dessa variação, a nova utilidade esperada do equilíbrio misto poderia aumentar, diminuir ou permanecer inalterada. Neste capítulo, apresentamos uma nova contribuição no sentido de que nós não lidamos com ganhos materiais. De fato, nós discutimos como uma variação na utilidade de um dado perfil de estratégia (para um dado jogador) pode aumentar a utilidade esperada do equilíbrio misto para este jogador.

### 3.5. Discussões

Até a presente seção, discutimos o cálculo do equilíbrio misto, bem como o problema da queima de dinheiro, apenas para jogos  $2 \times 2$  com um equilíbrio misto bem definido. Agora, apresentamos alguns exemplos numéricos que nos auxiliarão a compreender as principais limitações que nos impede de estender os resultados já expostos para jogos mais gerais. Iniciamos nossa discussão analisando o jogo da Figura 3.8, para o qual as conclusões obtidas nas Seções 3.3 e 3.4 ainda são válidas (com as devidas adequações).

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>			
		$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
	$\alpha_1$	(7, 3)	(4, 7)	(3, 5)
	$\alpha_2$	(5, 7)	(6, 2)	(4, 6)

Figura 3.8: Tentativa de generalização

Neste jogo temos apenas um equilíbrio misto  $((1/3, 2/3), (1/3, 0, 2/3))$  e, com efeito, o suporte do equilíbrio misto é  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \times \{\beta_1, \beta_3\}$ . Sendo a utilidade esperada dos jogadores  $(13/3, 17/3)$ . Note ainda que a estratégia  $\beta_1$  é fortemente colaborativamente dominante com relação à estratégia  $\beta_3$  para o jogador 1 e, sem considerarmos a estratégia  $\beta_2$  pois ele não está no suporte do equilíbrio misto, a estratégia  $\alpha_2$  é fortemente colaborativamente dominante com relação à estratégia  $\alpha_1$  para o jogador 2. Então, podemos usar os resultados do Teorema 3.2 que indicam, por exemplo, que uma redução na utilidade  $U_1(\alpha_1, \beta_1)$ , em duas unidades, elevaria a utilidade esperada do jogador 1 para 5 e uma redução da utilidade  $U_2(\alpha_2, \beta_1)$  em uma unidade elevaria a utilidade esperada do jogador 2 para 6, ou seja, ambos os jogadores desejariam queimar dinheiro se assim o pudessem.

Contudo, nesse caso particular, o jogo tem apenas um equilíbrio misto, cujo suporte é composto por duas estratégias puras de cada jogador, fazendo-o se assemelhar a um jogo 2x2. Analisaremos agora um jogo em que as três estratégias puras do jogador 2 estão no suporte do equilíbrio misto, como ilustra a Figura 3.9.

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>			
		$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
	$\alpha_1$	(8, 0)	(3, 1)	(2, 1)
	$\alpha_2$	(6, 1)	(4, 0)	(5, 0)

Figura 3.9: Limitações para generalização.

Mas, antes de calcular os equilíbrios mistos deste jogo, vamos definir algumas notações. Seja  $\sigma(\alpha_1)$  a probabilidade do jogador 1 escolher a estratégia pura  $\alpha_1$  (consequentemente,  $\sigma(\alpha_2) = 1 - \sigma(\alpha_1)$  é a probabilidade de ele escolher a estratégia pura  $\alpha_2$ ); seja também  $\sigma(\beta_1)$  a probabilidade do jogador 2 escolher  $\beta_1$  e  $\sigma(\beta_2)$  a probabilidade de escolher a estratégia pura  $\beta_2$  (e  $\sigma(\beta_3) = 1 - \sigma(\beta_1) - \sigma(\beta_2)$ ) então, podemos caracterizar os equilíbrio misto deste jogo da seguinte forma:

$\left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left( \sigma(\beta_1), \frac{3-5\sigma(\beta_1)}{2}, \frac{3\sigma(\beta_1)-1}{2} \right) \right)$  com  $\sigma(\beta_1) \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{3}{5} \right]$ . Ademais, a utilidade

esperada do equilíbrio misto para o jogador 1 é  $EU_1 = \frac{7\sigma(\beta_1)+7}{2}$ , que a depender do valor de  $\sigma(\beta_1)$ , pode variar no intervalo  $EU_1 \in \left[\frac{14}{3}, \frac{28}{5}\right]$ .

Vamos, por conveniência, assumir o equilíbrio misto  $((1/2, 1/2), (1/2, 1/4, 1/4))$ , em que a utilidade esperada do jogador 1 é 5,25. Notemos que a estratégia  $\beta_1$  do jogador 2 é colaborativamente dominante (com relação a todas as outras estratégias do jogador 2) para o jogador 1. Assim, vemo-nos tentados a aplicar o conceito de dominância colaborativa e pensar que o jogador 1 poderia reduzir, por exemplo, o seu maior *payoff* para induzir o jogador 2 a escolher com maior frequência a estratégia  $\beta_1$ . Suponha que o jogador 1 reduza  $U_1(\alpha_1, \beta_1)$  de 8 para 7. Feito isso, podemos caracterizar os equilíbrio misto do novo jogo da seguinte forma:  $\left((1/2, 1/2), \left(\sigma(\beta_1), \frac{3-4\sigma(\beta_1)}{2}, \frac{2\sigma(\beta_1)-1}{2}\right)\right)$ , com  $\sigma(\beta_1) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ . Com efeito, a utilidade esperada do equilíbrio misto para o jogador 1 é  $EU_1 = \frac{6\sigma(\beta_1)+7}{2}$  que, a depender do valor de  $\sigma(\beta_1)$ , pode varia no intervalo  $EU_1 \in \left[5, \frac{23}{4}\right]$ .

Nesse caso, é fácil ver que o jogador 2 pode, por exemplo, manter  $\sigma(\beta_1)$  constante (ou seja, igual a  $1/2$ ), alterando apenas os valores de  $\sigma(\beta_2)$  e  $\sigma(\beta_3)$ , o que levaria uma redução na utilidade esperada do jogador 1 para 5. Como o jogador 2 tem uma margem<sup>33</sup> de valores para os quais ele pode manipular  $\sigma(\beta_1)$ , fica então impossível afirmar como ele irá reagir a eventuais alterações nos *payoffs* do jogador 1.

Consideremos outra situação estratégica, sendo dessa vez com três jogadores e cada uma deles com duas estratégias puras, como exposto na Figura 3.10. Admita que o *payoff*  $a$  do perfil de estratégia  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  é um valor entre 6 e 9,  $a \in [6, 9]$ . Assim, este jogo tem dois equilíbrios puros,  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  e  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ , e um equilíbrio misto.

			$\gamma_1$				$\gamma_2$
	$\beta_1$	$\beta_2$			$\beta_1$	$\beta_2$	
$\alpha_1$	$(a, 8, 8)$	$(5, 7, 5)$		$\alpha_1$	$(0, 3, 7)$	$(1, 4, 6)$	
$\alpha_2$	$(3, 5, 3)$	$(6, 6, 1)$		$\alpha_2$	$(4, 1, 4)$	$(2, 2, 2)$	

Figura 3.10: Limitações para generalização – Parte II.

Nesse exemplo, fazemos o *payoff*  $a$  variar entre 6 e 9 para analisar como o a utilidade esperada do equilíbrio misto do jogador 1 reage a tais mudanças. Em

<sup>33</sup> Há um intervalo de interseção entre os dois casos,  $\sigma(\beta_1) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ .

particular, nós estamos interessados em saber se a utilidade esperada é uma função crescente ou decrescente de  $a$ . A expressão da utilidade do jogador 1 é exposta na Equação 3.23 e a Figura 3.11 nos mostra os valores da utilidade esperada do jogador 1 para cada valor de  $a$  entre 6 e 9.

$$EU_1 = (a - 4) \left( \frac{3 + \sqrt{13 + 4a}}{2a + 2} \right)^2 + 3 \left( \frac{3 + \sqrt{13 + 4a}}{2a + 2} \right) + 1 \quad (3.23)$$

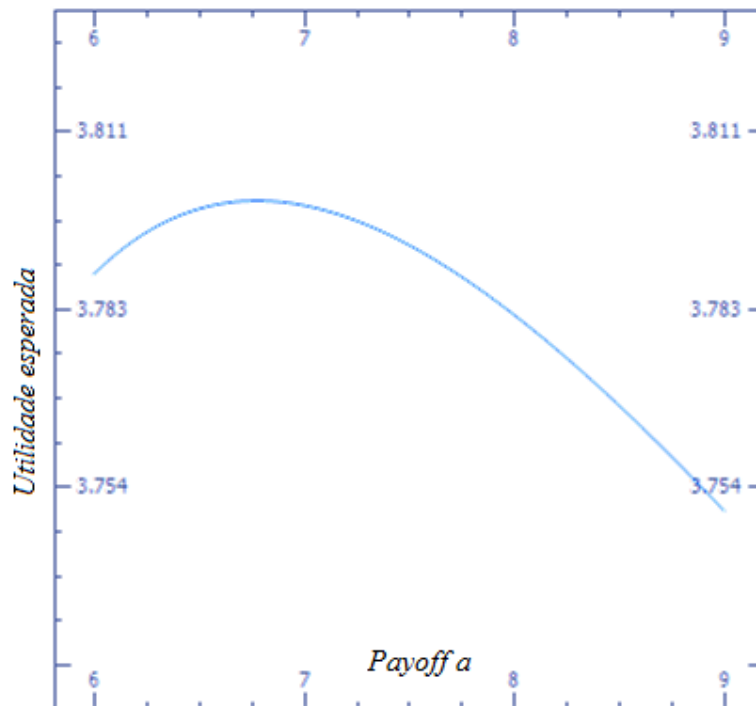


Figura 3.11: A utilidade esperada do jogador 1 em função do payoff  $a$ .

Pela análise do gráfico, percebemos que para qualquer valor de  $a$  maior do que 6.9 (aproximadamente) e menor do que 9, uma redução em  $a$  implica em um aumento da utilidade esperada. Por outro lado, para qualquer valor de  $a$  menor do que 6.9 e maior do que 6, uma redução em  $a$  também gera uma redução na utilidade esperada do equilíbrio misto. Além disso, se assumirmos que inicialmente o payoff  $a$  é igual a 6, então, qualquer redução em qualquer payoff do jogador 1 também acarretará em uma redução da utilidade esperada deste jogador. Contudo, se fosse assumido que o payoff  $a$  era inicialmente igual a 8, então, uma pequena redução em qualquer payoff da estratégia

pura  $\alpha_1$  iria aumentar a utilidade esperada do jogador 1, mesmo que nem o jogador 2 nem o jogador 3 tenham estratégias colaborativamente dominantes para o jogador 1.

Com efeito, podemos concluir que em jogos mais gerais, a existência de derivadas negativas não depende da existência de estratégias colaborativamente dominantes. Também, uma vez que  $a$  é sempre o maior *payoff* do jogador 1, a existência de derivadas negativas não depende da ordem dos *payoffs*.

Por fim, baseado na Figura 3.10, suponha que o *payoff* do jogador 2 referente ao perfil de estratégia  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_1)$  seja reduzido de 6 para 4, e o *payoff*  $a$  assumo o valor de 8, como ilustrado na Figura 3.12.

	$\gamma_1$			$\gamma_2$	
	$\beta_1$	$\beta_2$		$\beta_1$	$\beta_2$
$\alpha_1$	(8, 8, 8)	(5, 7, 5)	$\alpha_1$	(0, 3, 7)	(1, 4, 6)
$\alpha_2$	(3, 5, 3)	(6, 4, 1)	$\alpha_2$	(4, 1, 4)	(2, 2, 2)

Figura 3.12: Limitações para generalização – Parte III

Esse novo jogo tem dois equilíbrios puros,  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  e  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ , e um equilíbrio misto na forma  $((3/4; 1/4), (2/3; 1/3); (1/2, 1/2))$ . Entretanto, quando fazemos uma pequena redução em qualquer *payoff* do jogador 1, então a utilidade esperada do equilíbrio misto também se reduz. Isso nos mostra que em jogos mais gerais, a existência de derivadas negativas da utilidade esperada do equilíbrio misto com relação aos *payoffs* de um dado jogador não depende apenas dos *payoffs* dele, como era no caso dos jogos 2x2. Assim, esses fatos nos impedem de estender o Teorema 3.1 e 3.2 para jogos mais gerais.

### 3.6. Aplicação: O Dilema da Segurança

Como já discutido brevemente do Capítulo 2, Aumann (1990) propõem uma discussão sobre quando um equilíbrio de Nash pode ser considerado auto-imposto tendo como base um acordo (verbal) entre os jogadores. Para desenvolver sua argumentação, Aumann usa como exemplo base o jogo da Caça ao cervo. Para o referido autor, existem duas formas de incentivar um jogador a realizar uma dada escolha. A primeira seria referente a uma mudança nas informações disponíveis para o jogador; e a segunda seria referente a uma mudança nos *payoffs*.



Agora, discutimos uma aplicação para o problema da queima de dinheiro explorando a lacuna deixada por Aumann (1990), ou seja, avaliamos como incentivar os jogadores a realizarem uma dada escolha com base em mudança nos *payoffs* do jogo. Para tanto, também nos baseamos no jogo da Caça ao cervo, que na literatura de relações internacionais é conhecido como o dilema da segurança (*security dilemma*) devido ao trabalho de Jervis (1978). Ademais, iremos analisar de forma crítica algumas passagens do trabalho de Jervis revisando as conclusões do autor sobre a ótica da teoria dos jogos.

Para sumarizar o dilema da segurança<sup>34</sup>, imagine duas nações que passam por um período de tensão internacional. Elas têm duas opções de estratégia, a saber: não realizar investimento bélico (cooperar, C) ou realizar investimento bélico (não-cooperar, D - *defecting*)<sup>35</sup>, e a ordem das preferências pelos possíveis perfis de estratégias são equivalentes ao do jogo da Caça ao cervo, como dito anteriormente. Contudo, Jervis (1978) afirma que as nações só irão cooperar se acreditarem que a outra também o fará e aponta algumas das possíveis justificativas para os jogadores sacrificarem a opção mais desejada (CC), a saber: medo de ser atacado e não ter condições de se defender, incerteza quanto ao futuro político nas nações vizinhas e até mesmo oportunidades de coerção e participação em questões internacionais devido ao poderio bélico (reputação).

Então, o autor passa a estudar o que tornar a cooperação mútua mais provável<sup>36</sup> listando um conjunto de condições. Para ele, a chance de alcançar a cooperação aumentaria por:

“(1) qualquer coisa que aumente o incentivo a cooperar aumentando os ganhos mútuos pela cooperação (CC) e/ou reduzindo o custo que o ator irá pagar se ele cooperar e o outro não (CD); (2) qualquer coisa que reduza o incentivo de não-cooperar reduzindo os ganhos por tirar vantagem do outro jogador (DC) e/ou aumentando o custo da não-cooperação mútua (DD); (3) qualquer coisa que aumente a expectativa de cada um dos lados de que o outro irá cooperar” (JERVIS, 1978, p. 171).

---

<sup>34</sup> Jervis alerta que um problema presente nas questões de políticas internacionais, mas não presente diretamente no jogo da Caça ao cervo é o dilema da segurança, ou seja, quando uma nação busca aumentar sua segurança interna, isto pode acabar por reduzir a segurança das demais nações.

<sup>35</sup> No jogo da Caça ao cervo, a cooperação é indicada pelas estratégias X e W, por sua vez, a não-cooperação é indicada pelas estratégias Y e Z.

<sup>36</sup> A segunda seção do artigo de Jervis (1978) se dedica a esta avaliação e é sugestivamente intitulada: o que torna a cooperação mais provável (*what makes cooperation more likely*).

Vamos agora avaliar os efeitos dessas medidas propostas por Jervis, sobretudo no que tange às condições (1) e (2) expostas. A idéia de ‘o que torna a cooperação mais provável’ pode levantar diversas interpretações, por exemplo, podemos pensar no conceito de seleção de equilíbrio ou de ponto focal<sup>37</sup>, mas, devemos refletir, que para aplicar esses conceitos, não é necessário realizar nenhuma alteração nos *payoffs*, ou seja, se os jogadores estavam decididos a aplicar algum critério de seleção de equilíbrio (ou identificaram algum equilíbrio como ponto focal), então uma alteração nos *payoffs* não deveria alterar a decisão inicial, exceto que a mudança nos *payoffs* seja tal que altere o conjunto original de equilíbrios do jogo. Logo, devemos analisar ‘o que torna a cooperação mais provável’ pela ótica do equilíbrio misto.

Recorde da Seção 3.3 e pela Figura 3.7, que ordem dos *payoffs* para o jogo da Caça ao Cervo (dilema da segurança) é  $a > c > d > b$  (para o jogador 1) e  $e > f > h > g$  (para o jogador 2). Assim, pela condição (1) Jervis sugere que a cooperação seria mais provável se os jogadores fossem capazes de aumentar os *payoffs*  $a$  e  $e$  ou se fossem capazes de aumentar os *payoffs*  $b$  e  $g$ . Todavia, pelo Caso 2 da Seção 3.5, vimos que  $\frac{\partial q}{\partial a}$  e  $\frac{\partial q}{\partial b}$  são negativas (o mesmo é válido para  $\frac{\partial p}{\partial e}$  e  $\frac{\partial p}{\partial g}$ ) e, com isso, aumento nos referidos *payoffs*, na verdade, tornaria a cooperação menos provável.

Por sua vez, pela condição (2), o autor sugere que a cooperação teria maior chance de ocorrer se os jogadores reduzissem os *payoffs*  $c$  e  $f$  ou reduzissem os *payoffs*  $d$  e  $h$ ; mas, como  $\frac{\partial q}{\partial c}$  e  $\frac{\partial q}{\partial d}$  são positivas, o efeito seria o inverso e a cooperação, mais uma vez, seria menos provável. Em particular, pela condição (2) a cooperação só se tornaria mais provável se, por exemplo, a redução nos *payoffs*  $d$  e  $h$  fosse de tamanha intensidade que os tornasse os menores *payoffs* do jogo, o que faria com que o novo jogo passasse a ter apenas um equilíbrio de Nash (CC).

Mais adiante em seu estudo, Jervis se questiona quais as medidas que um jogador (nação) deveria tomar para aumentar a probabilidade de o outro jogador cooperar, afirmando:

“As variáveis discutidas até agora influenciam os *payoffs* para cada um dos quatro possíveis resultados. Para decidir o que fazer, o país tem que ir além e calcular o valor esperado de cooperar e não-cooperar. Como esses cálculos envolvem estimar a probabilidade de que o outro irá cooperar, o país terá que julgar como as variáveis discutidas até agora agem nos outros. Para encorajar

<sup>37</sup> Vide Harsanyi & Selten (1988) e Schelling (1980), respectivamente.

o outro a cooperar, o país pode tentar manipular estas variáveis. Pode-se reduzir o incentivo do outro não cooperar reduzindo o que se ganharia por explorar aquele país (DC)...” (JERVIS, 1978, p. 179).

O autor segue sua argumentação apontando outro exemplo:

“O país também pode aumentar o ganho que irá acorrer ao outro da cooperação mútua (CC). Embora o país irá ganhar com certeza se receber uma parte de qualquer novo benefício, mesmo um aumento que ocorra inteiramente para o outro irá ajudar o país aumentando a probabilidade de que o outro irá cooperar” (JERVIS, 1978, p. 180).

Novamente, devemos nos concentrar nas estratégias mistas dos jogadores. Com base na primeira afirmação, como visto, reduzir os *payoffs*  $c$  e  $f$ , na verdade, reduz a probabilidade do outro cooperar. Ademais, se as medidas sugeridas pelo autor fossem adotadas, a utilidade esperada proveniente do equilíbrio misto se reduziria. Por sua vez, com base na segunda afirmação, aumentar o *payoff* do outro jogador pela cooperação mútua, não altera a estratégia mista do jogador beneficiado e, conseqüentemente, não torna a cooperação mais provável.

Reconhecemos que os problemas de cooperação internacional são bem mais complexos do que o exposto, pois envolvem aspectos de reputação, relacionamento de longo prazo etc., mas esperamos que a abordagem utilizada possa contribuir para a melhor compreensão de alguns aspectos.

### 3.7. Considerações Finais

Neste capítulo propomos uma nova abordagem para analisar o comportamento de queima de dinheiro a partir da análise do equilíbrio misto. Provamos condições necessárias e suficientes para existência de derivadas da utilidade esperada do equilíbrio misto negativas, o que justificaria um comportamento de queima de dinheiro. Também discutimos as dificuldades que nos impossibilitam de estender os resultados para jogos mais gerais. Por fim, utilizamos nossos resultados para rever algumas das conclusões de Jervis (1978) em seu dilema da segurança.

## Capítulo 4

### Equilíbrio Misto, Dominância Colaborativa e Queima de Dinheiro: um estudo experimental

#### 4.1. Introdução

No Capítulo 2, definimos o conceito de dominância colaborativa (forte e fraca) bem como o conceito de dominância colaborativa estável e a partir destes desenvolvemos uma crítica à racionalidade do equilíbrio misto chegando à seguinte conclusão: para jogos 2x2 com um equilíbrio colaborativo, o equilíbrio misto não deve ser considerado como uma escolha racional por parte dos jogadores. Também provamos que as utilidades provenientes de um equilíbrio colaborativo são sempre as maiores utilidades para cada jogador no jogo, fato que poderia fazer do equilíbrio colaborativo um ponto focal. Provamos também que em muitas situações estratégicas, quando o par de estratégias colaborativamente dominantes é instável, os jogadores são capazes de alcançar a cooperação via contratos de queima de dinheiro.

Dando continuidade às críticas à racionalidade de alguns equilíbrios mistos, discutimos no Capítulo 3 como a utilidade esperada do equilíbrio misto de um dado jogador varia com mudanças nos *payoffs* deste. Assim, também suportados pela idéia de dominância colaborativa, foi provado que em jogos 2x2 as derivadas negativas para um dado jogador  $i$  só ocorrem quando o jogador  $j$  tem uma estratégia fortemente colaborativamente dominante para o jogador  $i$ . A existência de derivadas da utilidade esperada negativas também se mostrou um bom argumento a favor da queima de dinheiro. Em seguida, foi avaliado como o jogador  $j$  reage à queima de dinheiro por parte do jogador  $i$ , chegando à seguinte conclusão: sempre que este queima dinheiro nos *payoffs* cujas derivadas da utilidade esperada do equilíbrio misto são negativas, ele

induz aquele a escolher com maior probabilidade a estratégia que é fortemente colaborativamente dominante para ele, alcançando assim um resultado mais desejado.

Neste capítulo, nosso objetivo é testar experimentalmente os principais resultados obtidos nos capítulos anteriores (e sumarizados acima), de modo a fazer um confronto entre as previsões teóricas e o “real” comportamento dos indivíduos diante de situações estratégicas. Para tanto, o restante deste capítulo será organizado como segue: na Seção 4.2, expomos uma breve revisão sobre resultados experimentais e empíricos a respeito do equilíbrio misto e dos jogos com queima de dinheiro; na Seção 4.3, apresentamos o desenho do experimento e as principais hipóteses a serem testadas; na Seção 4.4, discutimos os principais resultados do experimento; e finalizamos o capítulo na Seção 4.5 com as considerações finais.

## 4.2. Uma visão da literatura

Ao se desenvolver uma teoria sobre o comportamento humano do ponto de vista econômico, duas idéias centrais passam a coexistir, a saber: desejamos criar uma teoria que indique como os indivíduos devem se comportar frente a uma dada situação, ou desejamos desenvolver uma teoria que explique como os indivíduos de fato se comportam? O método experimental e as avaliações empíricas buscam reduzir eventuais hiatos entre essas duas idéias, ao ponto que podem auxiliar na validação de teorias vigentes ou ainda fornecer evidências para o surgimento de novas teorias.

Além das contribuições puramente teóricas que discutem o equilíbrio de Nash e os jogos com queima de dinheiro, como já discutidos, contribuições experimentais e empíricas também são frequentemente utilizadas para acalorar o debate sobre estes temas. Agora, apresentamos algumas importantes contribuições existentes na literatura, começando pela análise do equilíbrio misto.

Ochs (1995) testou experimentalmente três variações do jogo da Figura 4.1 com o intuito de avaliar se os jogadores se comportariam como previsto pelo equilíbrio misto.

Jogador 1	Jogador 2	
	A	B
	A	B
A	$(a, 0)$	$(0, b)$
B	$(0, b)$	$(c, 0)$

Figura 4.1: Um teste para o equilíbrio misto.

No experimento, os *payoffs*  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eram todos positivos e, com efeito, o jogo não tinha equilíbrios puros, tendo apenas um equilíbrio misto na forma  $E=((1/2, 1/2), (c/(a+c), a/(a+c)))$ . No estudo, o parâmetro que variava era o *payoff*  $a$ , sendo o caso base aquele em que  $a=c=b$ , e nos demais casos,  $a>c=b$ . Assim, variando o *payoff*  $a$  em diferentes jogos, mas mantendo os demais *payoffs* constantes, o autor procurou avaliar se os indivíduos se comportam de acordo como o previsto pelo equilíbrio misto.

Como parte dos resultados, foi constatada que quase a totalidade dos jogadores 1 respondeu aos aumentos no *payoff*  $a$  aumentando a frequência relativa com que jogavam a estratégia  $A$ , fato este que é contrário à teoria do equilíbrio misto. Em contrapartida, foi observado que quando o *payoff*  $a$  do jogador 1 aumentava, o jogador 2 reduzia a frequência com que escolhia a estratégia  $A$ , fato que corrobora a teoria. Como uma das possíveis explicações para estes resultados, o autor sugere que os participantes podem ter um processo dinâmico de aprendizado, condicionando seus processos de resposta ao comportamento passado do seu oponente.

Em um estudo recente, Neugebauer, Poulsen & Schram (2008) não se limitaram a avaliar a validade do equilíbrio misto e passaram a analisar aspectos de divisão justa e reciprocidade a partir do jogo do falcão e do pombo<sup>38</sup> (*Hawk-Dove game*), exposto na Figura 4.2. Neste jogo, existem dois equilíbrios puros assimétricos  $(H, D)$  e  $(D, H)$ , e um equilíbrio misto, o que leva a literatura sugerir o equilíbrio misto como solução de tais jogos<sup>39</sup>.

Jogador 1	Jogador 2	
	$D$	$H$
	$D$	$H$
$D$	$(1/2, 1/2)$	$(1/4, 3/4)$
$H$	$(3/4, 1/4)$	$(0, 0)$

Figura 4.2: O jogo do falcão e do pombo.

Para atingir os seus propósitos, os autores dividiram o experimento em três partes. Na primeira, o jogador deveria escolher um valor de 0 até 100 que indicaria sua chance de jogar a estratégia  $H$ . Na segunda etapa, os jogadores deveriam indicar como reagiriam se, no primeiro jogo, o adversário escolhesse a estratégia  $D$  ou  $H$ , isto é, teriam que atribuir um valor entre 0 e 100 para a chance de escolher a estratégia  $H$  se no primeiro jogo o outro jogador escolheu  $D$ , e um valor entre 0 e 100 para a chance de

<sup>38</sup> Este jogo também é conhecido na literatura como jogo da galinha (*Chicken game*).

<sup>39</sup> Harsanyi & Selten (1988).

escolher a estratégia  $H$  caso, no primeiro jogo, o outro jogador também tivesse escolhido  $H$ . Por fim, na terceira etapa do experimento, os jogadores deveriam ranquear suas preferências pelos perfis  $(D, D)$ ,  $(D, H)$ ,  $(H, D)$  e  $(H, H)$ .

Para permitir a análise da divisão justa e da reciprocidade, os autores decidiram classificar o comportamento dos participantes em quatro grupos, de acordo com as características das funções utilidades de cada um deles. O modelo utilizado para descrever a utilidade dos participantes foi:  $U_i(x_i, x_j) = x_i - \alpha_i \max[x_j - x_i, 0] - \beta_i \max[x_i - x_j, 0]$ , com  $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$  e  $x_i$  e  $x_j$  indicando os ganhos monetários dos mesmos.

Esse modelo permitia aos autores identificar o comportamento dos jogadores com base nas relações entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Se  $\alpha$  e  $\beta < 0,5$ , o jogador era classificado como materialista (*materialist*), ou seja, joga  $H$  (resp.  $D$ ) se o outro jogar  $D$  (resp.  $H$ ). Se  $\alpha > 0,5$  e  $\beta < 0,5$  então o jogador era definido como falcão (*Hawk*), pois, sempre jogará  $H$  (esse comportamento é interpretado como uma reciprocidade negativa, pois responde  $H$  com  $H$ ). Se  $\alpha > \beta > 0,5$  (ou se  $\beta > \alpha > 0,5$ , ademais, note que  $\beta > \alpha$  indica um comportamento altruísta), então, ele era classificado como recíproco (*reciprocator*), ou seja, joga  $D$  (resp.  $H$ ) se o outro jogar  $D$  (resp.  $H$ ). Por fim, se  $\alpha < 0,5$  e  $\beta > 0,5$ , então, o modelo descreve o jogador como Pombo (*Dove*), pois sempre joga  $D$  (ao contrário do que ocorre com o falcão, o comportamento tipo pombo é visto como uma reciprocidade positiva uma vez que responde  $D$  com  $D$ ). Assim, os equilíbrios do jogo passam a depender do tipo de cada jogador (e de suas crenças sobre o tipo do outro jogador<sup>40</sup>) como ilustrado na Figura 4.3.

Jogador 1	Jogador 2	
	$D$	$H$
	$D$	$H$
$D$	$(1/2, 1/2)$	$(1/4 - \alpha_1/2, 3/4 - \beta_2/2)$
$H$	$(3/4 - \beta_1/2, 1/4 - \alpha_2/2)$	$(0, 0)$

Figura 4.3: O jogo do falcão e do pombo, com a definição dos tipos.

Após a execução do experimento, os autores chegaram aos seguintes resultados: na primeira parte, aproximadamente 70% dos participantes optaram por estratégias puras (44% jogaram  $D$  e 26% escolheram  $H$ ) e apenas 5% optaram pela estratégia mista 50-50 (tendo os demais, optado por outras estratégias mistas diversas). Na segunda etapa, 54% dos participantes responderam à  $D$  com  $H$  e 73% escolheram  $D$  em resposta

<sup>40</sup> O aspecto das crenças que nos levaria a análise de jogos bayesianos não foi levado em consideração pelos pesquisadores.

a  $H$ . Com base nesses resultados, aproximadamente 53% dos participantes foram classificados como materialistas, 30% como pombos, 6% como falcões e 5% como recíproco. Não foi possível classificar o restante dos participantes (aproximadamente 5%), pois eles escolheriam  $H$  com 50% de chance.

Por fim, na terceira etapa do experimento, aproximadamente 87% dos participantes apresentaram preferências com características materialistas, 11% tiveram preferências do tipo pombo e 2% demonstraram preferências do tipo falcão. Nenhuma preferência tipo recíproco foi constatada. Estes resultados indicaram forte presença de indivíduos materialistas. Para os autores, uma das explicações para os resultados divergentes (grande número de indivíduos com preferências materialistas) com os de outros experimentos presentes na literatura como, por exemplo, experimentos de jogo do ultimato, bens públicos etc. está no jogo escolhido para análise, pois o jogo do falcão e do pombo é um jogo de caráter competitivo, em que não há melhoria de Pareto em escolher  $D$ .

Chiappori, Levitt & Groseclose (2002) apontam que a maioria das pesquisas as quais buscam confrontar a teoria com a prática é suportada por estudos experimentais, os quais muitas vezes geram conclusões divergentes em alguns aspectos (ou até mesmo totalmente contraditórias), justificando que isso se deve, em particular, pelo desenho dos experimentos. Recentemente, para testar aspectos teóricos como, por exemplo, o equilíbrio misto, pesquisadores passam a tomar como base observações empíricas, sobretudo aquelas provenientes de competições esportivas (devido à facilidade de obter dados e modelar o problema como um “jogo”), apontando uma alternativa ao estudo experimental. Esses estudos ainda são escassos, porém podemos destacar os trabalhos de Walker & Wooders (2001) que avaliaram a probabilidade do jogador sacar no lado direito ou no lado esquerdo do adversário com base em dados históricos do torneio de tênis de *Wimbledon*; e Chiappori, Levitt & Groseclose (2002), os quais avaliaram a chance do batedor de pênalti escolher chutar no lado esquerdo, direito ou no centro, tomando como base de dados as cobranças de pênalti dos campeonatos italiano e francês por um período aproximado de três anos. Em ambos os estudos, os autores encontraram evidências empíricas que corroboram os resultados teóricos.

Agora, dando uma pausa no estudo do equilíbrio misto e passando para os jogos com queima de dinheiro, podemos destacar o trabalho de Huck & Müller (2005), os quais avaliaram se a predição teórica, introduzida por Van Damme (1989) e Ben-Porath



& Dekel (1992), de que a oportunidade de um jogador sinalizar<sup>41</sup> sua intenção futura de jogada através de seu potencial de queimar dinheiro, o levaria à alcançar o equilíbrio mais preferido do jogo para ele, isto é, se a possibilidade de fazer a primeira jogada efetivamente lhe traria algum benefício.

Para tanto, os autores desenvolveram um experimento em três partes<sup>42</sup>. No primeiro experimento, os participantes jogavam o jogo da batalha dos sexos (semelhante ao jogo da Figura 3.1, no Capítulo 3) e, neste caso, os autores constataram que a frequência com que os jogadores escolhiam suas estratégias não se afastava muito da predição teórica<sup>43</sup>.

O segundo experimento constava de um jogo sequencial em que o jogador 1 deveria escolher entre duas matrizes, uma em que os *payoffs* eram idênticos ao jogo da batalha dos sexos original (ou seja, sem queima de dinheiro) e outra em que o jogador 1 queimaria uma unidade de sua utilidade (isto é, com queima de dinheiro). O jogador 2 observaria a escolha do jogador 1 e, após isso, ambos escolheriam simultaneamente suas estratégias. Os autores testavam a hipótese de que o jogador 1 teria uma vantagem, a qual se traduziria no fato de que ele optaria por não queimar dinheiro e, em seguida, o perfil de estratégia escolhido seria o seu preferido. Essa hipótese foi confirmada estatisticamente, pois, em mais de 93% das vezes, o jogador 1 optou por não queimar dinheiro e, paralelamente, o perfil de estratégia mais desejado por ele foi obtido 68% das vezes, (valor bem superior as 22,75% obtidos no jogo da batalha dos sexos do primeiro experimento). Todavia, os autores fazem a ressalva de que mesmo que os resultados sejam estatisticamente significantes, indicando a vantagem do primeiro jogador, a frequência observada ainda está abaixo do esperado pela teoria, a qual resolveria completamente o problema da coordenação entre os jogadores.

No terceiro experimento, o problema era o mesmo do segundo, com a única diferença de que ao invés do jogo ser apresentado na forma sequencial, ele era exposto

---

<sup>41</sup> Ben-Porath & Dekel (1992) alertam que a possibilidade de queima de dinheiro não é de fato um problema de sinalização, na verdade, a idéia mais adequada seria a indicação de que os jogadores são capazes de deduzir a jogada futura do jogador que tem potencial para sinalizar. O termo sinalização é, então, utilizado para sumarizar tal idéia.

<sup>42</sup> Na verdade o experimento foi composto de cinco partes, mas as duas etapas finais apenas corroboraram as conclusões iniciais e, portanto, não serão discutidas. Para maiores informações *vide* Huck & Müller (2005).

<sup>43</sup> Enquanto a predição teórica aponta que, por exemplo, o jogador 1 deveria escolher a estratégia X em 75% dos casos, os resultados do experimento apontaram que isso ocorria em 65% das jogadas, fato que levava com que o equilíbrio preferido pelo jogador 1 fosse obtido em 22.75% das vezes (65% de chance do jogador 1 jogar X e 35% de chance do jogador 2 jogar W). Nenhum teste estatístico foi realizado nesse caso.

na forma normal reduzida. Nesta etapa do estudo, o resultado obtido foi bastante diferente da etapa anterior uma vez que em apenas 6,5% dos casos o jogador 1 conseguiu alcançar o seu equilíbrio mais preferido. Como explicação para esse insucesso, os autores apontam que os participantes foram incapazes de realizar o processo de eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas, o que os levou a escolher outras estratégias com maior probabilidade. Com esses resultados, os pesquisadores apontam que o sucesso da sinalização depende da forma como o problema é apresentado, mas, pelo caráter sequencial da queima de dinheiro, é possível inferir uma vantagem para o primeiro jogador<sup>44</sup>.

### 4.3. O desenho do experimento

Há uma crescente literatura que busca explicar o comportamento dos indivíduos em situações estratégicas por meio de aspectos ligados a reciprocidade, reciprocidade indireta, reputação etc. Tais estudos são fundamentados especialmente pela teoria dos jogos evolucionários, em que, por exemplo, a possibilidade de aprendizado durante uma sequência de jogos é levada em consideração. Para o leitor interessado no tema sugerimos, por exemplo, Van Huyck, Battalio & Beil (1990), Sethi & Somanathan (2003), Falk & Fischbacher (2006), Engelmann & Fischbacher (2009), Stanca (2009), Bergin, Bernhard (2009), Gintis (2009), Anctil *et al* (2010) e Berger (2011).

Graças a estes aspectos evolucionários, Maskin (2011) afirma que o equilíbrio de Nash (tanto na sua forma pura quanto mista) fornece uma boa predição do comportamento dos indivíduos, pelo menos quando estes adquirem experiência suficiente no jogo em questão. Em contrapartida, Rey-Biel (2009), indica que o mesmo não ocorre quando os indivíduos se deparam pela primeira vez com um dado jogo. Assim, neste experimento, seguimos a mesma linha de Rey-Biel, isto é, analisamos o comportamento dos indivíduos quando eles se deparam com uma dada situação estratégica pela primeira vez, testando as principais conclusões dos capítulos anteriores, como será detalhado a seguir.

O experimento foi modelado em três partes básicas em que se estuda: o equilíbrio misto (Parte I), o equilíbrio misto e a dominância colaborativa como ponto

---

<sup>44</sup> Outras discussões e resultados semelhantes sobre a *forward induction rationality* e a eliminação iterativa de estratégias dominadas podem ser encontrados em Brandts & Holt (1995).

focal (Parte II) e aspectos de queima de dinheiro como impulsionador da cooperação (Parte III). Ademais, em cada uma das partes, os jogadores também deveriam expressar suas crenças sobre o comportamento do outro jogador.

Nas Partes I e II, os participantes do experimento eram indagados sobre quantas vezes eles escolheriam uma estratégia particular se tivessem que jogar o jogo em questão 15 vezes. A indagação foi formulada desta forma de modo a permitir uma análise do equilíbrio misto que se refletiria no número de vezes em que a referida estratégia seria escolhida. O jogo escolhido para testar o comportamento dos participantes na Parte I foi o jogo da Galinha (ou do falcão e do pombo) como exposto na Figura 4.4.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	(10, 10)	(90, 50)
	(50, 90)	(70, 70)

Figura 4.4: O jogo da galinha – Parte I.

Esse jogo foi selecionado para a primeira parte do experimento, pois ele tem dois equilíbrios de Nash puros assimétricos,  $(X, W)$  e  $(Y, Z)$ , e um equilíbrio misto na forma  $E=((1/3, 2/3), (1/3, 2/3))$ , fato que leva as teorias de seleção de equilíbrio (como a de Harsanyi & Selten (1988)) a indicarem o equilíbrio misto como solução para o impasse existente. Contudo, neste jogo, os jogadores têm uma preferência estrita por uma das estratégias do outro jogador, fato que poderia levá-los à cooperação mesmo que esta não represente um equilíbrio do jogo. Assim, avaliamos se os jogadores se comportam de acordo como as previsões do equilíbrio misto e com isso, a hipótese a ser testada é:

### Hipótese 1:

$H_0$ : A média de vezes que os indivíduos colaboram (escolhem  $Y$  ou  $Z$ ) é igual a 10 (número esperado de colaborações uma vez assumido que os jogadores se comportam de acordo com o equilíbrio misto).

$H_1$ : A média de vezes que os indivíduos colaboram (escolhem  $Y$  ou  $Z$ ) é diferente de 10; isto é, existem evidências estatísticas de que os participantes não jogam de acordo com o equilíbrio misto.

Para a Parte II, o jogo utilizado foi o da Caça ao cervo, como mostra a Figura 4.5. Este jogo foi escolhido porque nele existem dois equilíbrios puros simétricos,  $(X, W)$  e  $(Y, Z)$  e um equilíbrio misto na forma  $E=((2/3, 1/3), (2/3, 1/3))$ . Além disso, o equilíbrio puro  $(X, W)$  é colaborativamente estável e *payoff* dominante enquanto o equilíbrio  $(Y, Z)$ , mesmo ineficiente, é risco dominante.

Goldman & Page (2010) apontam que qualquer um dos equilíbrios puros poderia ser escolhido como solução do jogo a depender do critério de seleção de equilíbrio invocado. Adicionalmente, Rankin, Van Huyck & Battalio (2000) ressaltam que, quando mais de um critério de seleção de equilíbrio podem ser utilizados, os jogadores devem procurar meios para focar no mesmo princípio. Deste modo, testaríamos a idéia de que o equilíbrio colaborativo poderia ser visto pelos jogadores como um ponto focal (devido as suas propriedades como, por exemplo, sempre garantir aos jogadores os maiores *payoffs* possíveis nos jogos), o que eliminaria o problema da coordenação, evitando ainda que os jogadores jogassem de acordo com o equilíbrio misto. Logo, a segunda parte do experimento procuraria verificar se os jogadores escolhem suas estratégias de modo a colaborar com o outro jogador.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	(90, 90)	(10, 70)
	(70, 10)	(50, 50)

Figura 4.5: O jogo da caça ao cervo – Parte II.

À semelhança da hipótese testada na primeira parte do experimento, aqui a hipótese a ser testada é:

### Hipótese 2:

$H_0$ : A média de vezes que os indivíduos colaboram (escolhem X ou W) igual a 10.

$H_1$ : A média de vezes que os indivíduos colaboram é diferente de 10; isto é, há evidências de que os participantes não jogam de acordo com o equilíbrio misto.

Na Parte III, inicialmente, os jogadores deveriam escolher entre dois jogos, um sem queima de dinheiro e outro com queima de dinheiro. Essa opção de escolha entre os dois jogos seria desconhecida pelo outro jogador que tomaria o jogo selecionado como

dados. Posteriormente, os participantes deveriam repetir o mesmo procedimento das Partes I e II. Os jogos estudados na Parte III são expostos na Figura 4.6.

		()		Jogo 1		()	
		Jogador 2				Jogador 2	
			W		Z		
Jogador 1	X	(10, 10)	(90, 50)	Jogador 1	X	(10, 10)	(70, 50)
	Y	(50, 90)	(70, 70)		Y	(50, 70)	(70, 70)

		()		Jogo 2		()	
		Jogador 2				Jogador 2	
			W		Z		
Jogador 1	X	(10, 10)	(90, 50)	Jogador 1	X	(10, 10)	(80, 50)
	Y	(50, 90)	(70, 70)		Y	(50, 80)	(70, 70)

		()		Jogo 3		()	
		Jogador 2				Jogador 2	
			W		Z		
Jogador 1	X	(90, 90)	(10, 70)	Jogador 1	X	(80, 80)	(10, 70)
	Y	(70, 10)	(50, 50)		Y	(70, 10)	(50, 50)

Figura 4.6: Um teste para queima de dinheiro – Parte III.

Por meio desta abordagem, pretendemos verificar se os participantes reconhecem a oportunidade de queimar dinheiro como um mecanismo de incentivo à colaboração e que os auxiliaria a obter uma utilidade esperada maior do que aquela obtida com o equilíbrio misto da Parte I e II. Assim duas hipóteses são testadas:

### Hipótese 3:

$H_0$ : A proporção de indivíduos que escolheu o jogo com os maiores *payoffs* é igual à proporção dos jogadores que escolhe o jogo com os menores *payoffs*.

$H_1$ : A proporção de indivíduos que escolheu o jogo com os maiores *payoffs* é diferente da proporção dos jogadores que escolhe o jogo com os menores *payoffs*.

E,

**Hipótese 4:**

$H_0$ : A média de vezes que os jogadores colaboram quando escolhem queimar dinheiro é igual à média de vezes que eles colaboram quando escolhem não queimar dinheiro.

$H_1$ : A média de vezes que os jogadores colaboram quando escolhem queimar dinheiro é diferente da média de vezes que eles colaboram quando escolhem não queimar dinheiro.

Além dos jogos nas Partes I, II e III, os participantes responderam um breve questionário socioeconômico. Estas questões tinham o objetivo de permitir uma análise de dependência entre certos comportamentos (como, por exemplo, o de colaboração) com outras variáveis. Vale ressaltar que para todos os testes realizados, o nível de significância será de 5%.

A elaboração do questionário utilizado no experimento passou por duas etapas iniciais de teste para verificar se os participantes estavam compreendendo corretamente aos questionamentos, bem como para estimar o tempo de resposta (que ficou em torno de 30 minutos). Também avaliamos algumas formas de pagamento para estimular os participantes a responderem às indagações propostas com o máximo de atenção. Assim, os participantes eram informados que para cada tipo de jogador (jogador 1 e jogador 2), aquele que obtivesse o maior ganho esperado na soma de todos os jogos ganharia um prêmio de R\$ 250,00. Para computar o ganho esperado, o desempenho de cada jogador foi calculado considerando que ele jogaria contra a estratégia média utilizada por todos os participantes com o tipo de jogador diferente do seu. Em caso de empate, o ganho deveria ser dividido igualmente entre os jogadores. O experimento teve um ganhador como jogador 1 e dois ganhadores como jogador 2.

**4.4. Resultados**

Nesta seção, inicialmente resumimos a base de dados por meio de uma análise descritiva e, posteriormente, passamos aos testes de hipóteses propostos na seção anterior bem como a análise de outros aspectos adicionais. Antes de prosseguir, recomendamos a leitura do questionário completo no Apêndice 2 desta tese.

#### 4.4.1. Um resumo dos dados

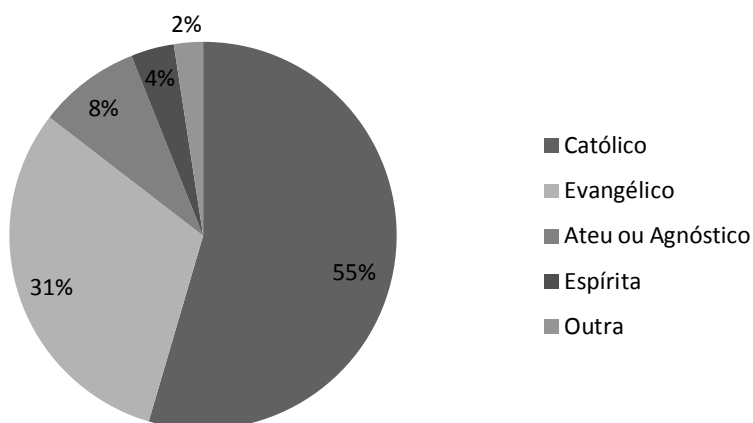
Nossa base de dados é composta por 167 participantes, sendo 82 deles classificados como jogador 1 e os demais 85 classificados como jogador 2. Os questionários foram respondidos de forma voluntária por estudantes de graduação e pós-graduação dos cursos de Economia (95 estudantes, aproximadamente 56,9%) e Contabilidade (72 estudantes, aproximadamente 43,1%). O processo de aplicação dos questionários se deu no mês de outubro de 2011.

Na base de dados, 78 participantes (aproximadamente 46,7%) são do gênero feminino e os 89 restantes (aproximadamente 53,3%) são do gênero masculino. A idade média desses estudantes é de aproximadamente 22 anos, sendo 18 anos a moda da idade com 26 observações, a idade mínima observada foi 17 anos e a idade máxima foi de 52 anos. As principais estatísticas descritivas da variável Idade são expostas na Tabela 4.1.

*Tabela 4.1: Estatísticas descritivas para Idade.*

Variável	Média	Mediana	Moda	Max.	Min.	Desvio padrão
Idade	22,37267	21	18	52	17	5,485002

Quando inquiridos sobre a religião, os participantes apresentaram o seguinte agrupamento como mostra o Gráfico 4.1. Pelo gráfico, podemos perceber que a moda das observações é a religião Católica com aproximadamente 55% das observações. Vale ressaltar que duas pessoas não responderam a este questionamento.



*Gráfico 4.1: Composição dos participantes por Religião.*

Passando para a análise da renda dos participantes, temos que a moda é ter uma renda familiar de até 4 salários mínimos<sup>45</sup> com mais de 49% das observações, e menos de 10% dos entrevistados indicaram ter uma renda familiar superior à 20 salários mínimos. Devemos destacar que 8 participantes optaram por não revelar a renda familiar. Os dados referentes à renda são sumarizados na Tabela 4.2.

*Tabela 4.2: Tabela de frequência acumulada para Renda.*

<b>Renda</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>Σf</i></b>	<b>%</b>	<b><i>Σ%</i></b>
Até 4 Salários mínimos	78	78	49,0566	49,0566
Entre 4 e 10 Salários mínimos	40	118	25,1572	74,2138
Entre 10 e 20 Salários mínimos	28	146	17,6101	91,8239
Mais de 20 Salários mínimos	13	159	8,1761	1

Quando ao grau de instrução, quase a totalidade dos participantes (mais de 90%) ainda está cursando o nível superior, além disso, 9 dos participantes cursam o mestrado em Contabilidade. Os dados referentes ao grau de instrução são expostos na Tabela 4.3.

*Tabela 4.3: Tabela de frequência acumulada para Grau de Instrução*

<b>Grau de instrução</b>	<b><i>f</i></b>	<b><i>Σf</i></b>	<b>%</b>	<b><i>Σ%</i></b>
Superior incompleto	151	151	90,4192	90,4192
Superior completo	4	155	2,3952	92,8144
Especialização incompleta	2	157	1,1976	94,012
Especialização completa	1	158	0,5988	94,6108
Mestrado incompleto	9	167	5,3892	1

Por fim, os estudantes foram questionados sobre o conhecimento que eles possuíam a respeito da Teoria dos jogos. Apenas 4 indivíduos afirmaram já ter realizado um curso sobre Teoria dos jogos e a maioria dos participantes (96 indivíduos, aproximadamente 58%) revelou desconhecer o assunto. Um resumo dos dados sobre o conhecimento dos estudantes sobre Teoria dos jogos é exposto no Gráfico 4.2.

<sup>45</sup> No período em que o experimento foi realizado, o salário mínimo era de R\$ 545,00.



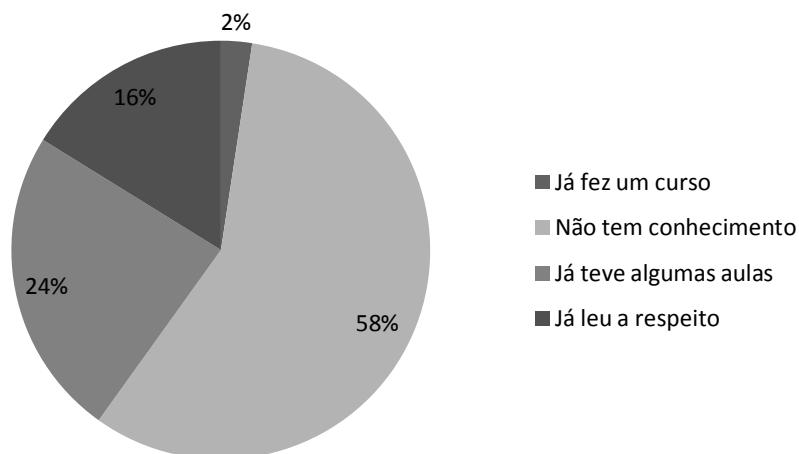


Gráfico 4.2: Conhecimento dos estudantes sobre Teoria dos Jogos.

#### 4.4.2. Partes I e II

Na Parte I (Jogo da Galinha), o número médio de vezes que os participantes optaram por colaborar foi de 6,74 vezes, a moda foi ‘não colaborar’ (escolher *Y* ou *Z* nenhuma vez) com 57 observações (aproximadamente 34%) e o desvio padrão foi de 5,84. A distribuição do número de colaborações na Parte I é apresentada no Gráfico 4.3. Quando questionados sobre suas crenças a respeito das escolhas do outro jogador, os participantes apresentaram o seguinte comportamento: eles acreditavam que o outro jogador colaboraria em média 7,93 vezes, sendo a moda ‘não colaborar’ com 45 observações (aproximadamente 27%) e um desvio padrão de, aproximadamente, 5,66. A distribuição da crença dos participantes no número de colaborações do outro jogador na Parte I é apresentada no Gráfico 4.4.

Como o jogo da Galinha é um jogo simétrico, testamos inicialmente (como uma análise secundária) se a média de vezes que os jogadores colaboram é igual a média de vezes que eles acreditam que o outro jogador irá colaborar. Então, realizando o teste de Wilcoxon obtemos um valor- $p=0,007691$ , ou seja, existem fortes evidências de que as médias são diferentes. De fato, existem evidências de que a média de vezes que os participantes colaboram é menor do que a média de vezes em que eles acreditam que os outros colaborará. Além disso, a correlação entre colaboração e crença na colaboração é de 0,52, e isso se deve em parte, pois, 75 participantes (aproximadamente 45%) acreditam que o outro jogador terá um comportamento idêntico ao seu.

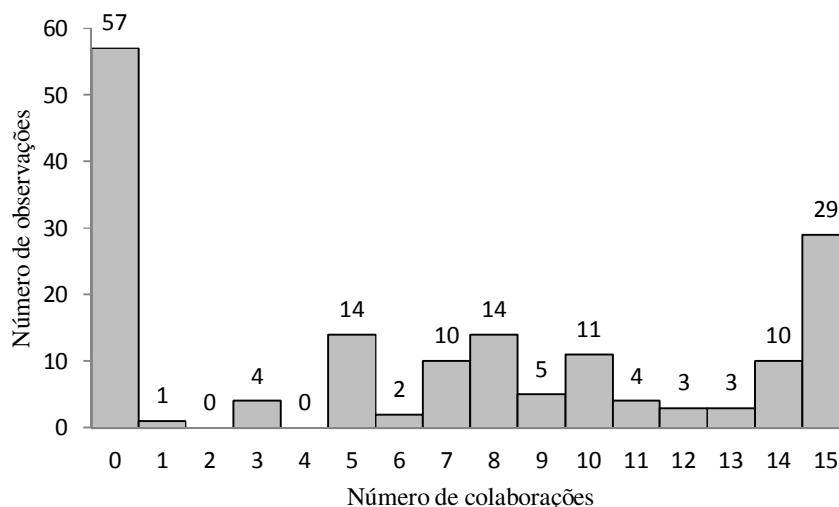


Gráfico 4.3: Distribuição do número de Colaborações – Parte I

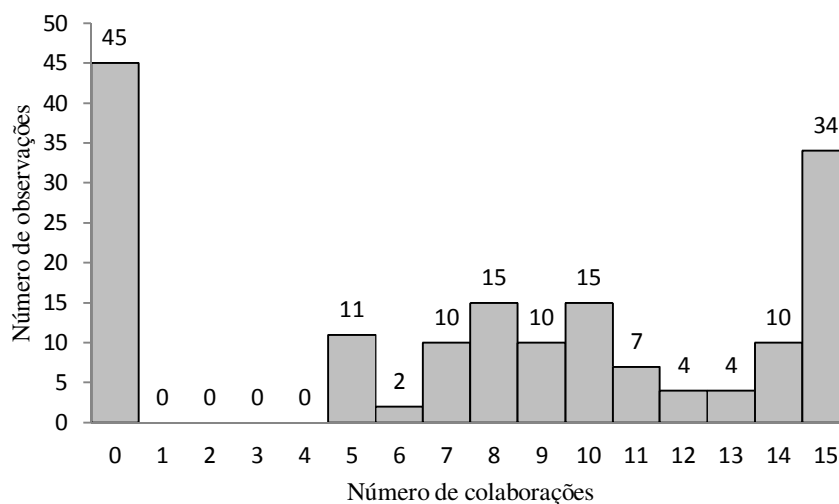


Gráfico 4.4: Distribuição da crença no número de Colaborações – Parte I

Então, após analisar a distribuição dos gráficos, realizamos o teste t para avaliarmos nossa **Hipótese 1**, ou seja, comparamos o número médio de colaborações em cada caso (colaboração e crença sobre colaboração) contra uma constante de referência, o número 10, o qual, como dito, indica o número esperado de colaborações caso os participantes se comportassem como predito pelo equilíbrio misto. O valor-p para colaboração e para crença na colaboração foram, respectivamente, 0.000000 e 0.000005, ou seja, existem fortes evidências estatísticas de que os jogadores não se comportam (nem acreditam que o outro jogador se comportará) como sugere o equilíbrio misto. Na verdade, podemos inferir que os participantes colaboram menos do

que o esperado. Uma das possíveis explicações para esses resultados é o caráter competitivo do jogo da Galinha, isto é, colaborar quando o outro jogador colabora não é um equilíbrio de Nash. Estes resultados também são semelhantes aos obtidos por Neugebauer, Poulsen & Schram (2008). Além disso, uma vez que os participantes se comportam dessa maneira (em média colaboram menos do que o esperado pela teoria do equilíbrio misto), a melhor resposta seria colaborar sempre.

Passando para análise da Parte II (Jogo da Caça ao Cervo), os participantes colaboravam em média 7,11 vezes, a moda foi ‘não colaborar’ (escolher *X* ou *W* nenhuma vez) com 49 observações (aproximadamente 29%), seguida de perto por ‘sempre colaborar’ (jogar *X* ou *W* as 15 vezes) com 47 observações (28%) e um desvio padrão foi de 6,01. A distribuição do número de colaborações na Parte II é apresentada no Gráfico 4.5. Ademais, quando questionados sobre suas crenças a respeito das escolhas do outro jogador, os participantes apresentaram o seguinte comportamento: eles acreditaram que outro jogador colaboraria em média 7,61 vezes, sendo a moda ‘sempre colaborar’ com 51 observações (aproximadamente 30,5%) e um desvio padrão de aproximadamente 5,95. A distribuição da crença dos participantes no número de colaborações do outro jogador na Parte II é apresentada no Gráfico 4.6.

Como o jogo da Caça ao cervo também é simétrico, testamos novamente se a média de colaborações é igual a média das crenças sobre colaboração. Então, realizando o teste de Wilcoxon obtemos um valor- $p=0,200348$ , isto é, não existe evidência estatística de que a média de vezes que os participantes colaboram é diferente da média de vezes que eles acreditam que o outro colaborará. Nesse caso, a correlação entre colaboração e crença na colaboração foi de 0,65, além disso, 100 participantes (aproximadamente 60%) acreditam que o outro jogador se comportará de forma igual a sua. Uma possível explicação para essa diferença de comportamento dos jogadores na Parte I e II deve-se ao fato dos participantes tentarem obter proveito da colaboração do outro jogador na Parte I (jogo da Galinha) uma vez que os maiores *payoffs* ocorrem quando não se colabora e o outro colabora, fato que não ocorre na Parte II (jogo da Caça ao cervo).

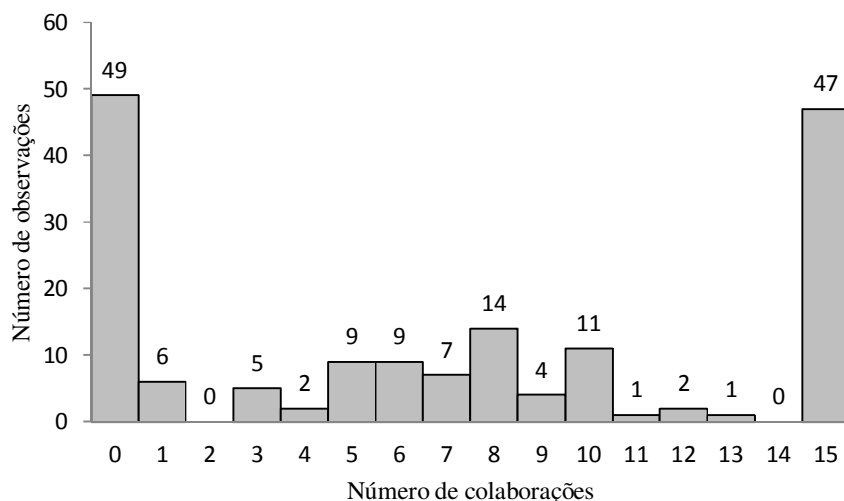


Gráfico 4.5: Distribuição da crença no número de Colaborações – Parte II.

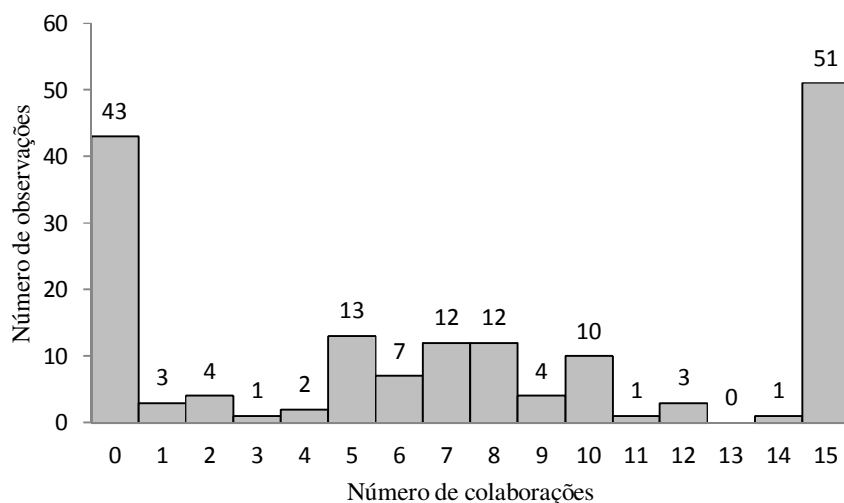


Gráfico 4.6: Distribuição da crença no número de Colaborações – Parte II

À semelhança da Parte I, agora, repetimos o teste t comparando a média de colaborações com a constante de referência, 10, para avaliarmos nossa **Hipótese 2**. Nesse caso, o valor-p para colaboração e para crença na colaboração foram, respectivamente, 0.000000 e 0.000001, ou seja, existem fortes evidências estatísticas de que os jogadores não se comportam (nem acreditam que o outro jogador se comportará) como o predito pelo equilíbrio misto. Novamente, podemos inferir que os participantes colaboram menos do que o esperado, contrariando nossa expectativa inicial de que a existência de um equilíbrio colaborativo poderia servir como um ponto focal para os jogadores. Uma das possíveis explicações para esses resultados é a de que mesmo o jogo da Caça ao Cervo tendo um equilíbrio colaborativo ( $X, W$ ), este equilíbrio é mais

arriscado do que o equilíbrio  $(Y, Z)$  e, deste modo, os participantes podem optar por não colaborar (ou colaborar pouco) como um mecanismo de defesa, uma vez que eles não conhecem o comportamento dos outros jogadores nem têm a oportunidade de aprender com a repetição dos jogos. Assim, dado que em média os jogadores colaboram menos do que o esperado pela teoria do equilíbrio misto, a melhor resposta para esse caso seria não colaborar (fato oposto à Parte I). As principais estatísticas descritivas das Partes I e II são resumidas na Tabela 4.4.

*Tabela 4.4: Estatísticas descritivas para Parte I e II.*

<b>Variável</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Moda</b>	<b>Desvio Padrão</b>
Parte I: Colaborar	6,74251	7	0	5,842268
Parte I: Crença sobre colaboração	7,928144	9	0	5,660654
Parte II: Colaborar	7,113772	7	0	6,010452
Parte II: Crença sobre colaboração	7,610778	7	15	5,945384

Por fim, avaliamos se os participantes realizam suas escolhas como uma melhor resposta as crenças deles sobre o comportamento do oponente e vice-versa, ou seja, iremos avaliar a existência de dependência estatística entre ‘se comportar como uma melhor resposta à escolha do oponente’ e ‘acreditar que o oponente terá um comportamento de melhor resposta’.

Na Parte I consideramos como um comportamento de melhor resposta os seguintes casos: se o jogador acredita que o outro colaborará mais de 10 vezes, então ele nunca deve colaborar, se o jogador acredita que o outro colaborará menos de 10 vezes, então ele sempre deve colaborar e, se o jogador acredita que o outro irá colaborar exatamente 10 vezes, então qualquer escolha é considerada como uma melhor resposta (em virtude do equilíbrio misto). Por sua vez, na parte II, consideramos como um comportamento de melhor resposta os seguintes casos: se o jogador acredita que o outro colaborará mais de 10 vezes, então ele sempre colaborará, se o jogador acredita que o outro colaborará menos de 10 vezes, então ele nunca colaborará e, se o jogador acredita que o outro irá colaborar exatamente 10 vezes, então qualquer escolha é considerada como uma melhor resposta. A Tabela 4.5 relaciona o comportamento de melhor resposta dos jogadores e as crenças na melhor resposta do outro na Parte I.

*Tabela 4.5: Tabela cruzada para melhor resposta – Parte I.*

<b>Melhor Resposta - participante</b>	<b>Melhor resposta - outro</b>	
	<b>Não</b>	<b>Sim</b>
<b>Não</b>	121	11
<b>Sim</b>	15	20

Realizando o teste  $\chi^2$  de independência obtemos um p-valor=0,000, ou seja, há evidências de dependência entre as variáveis (melhor resposta e crença na melhor resposta). Intuitivamente este resultado nos revela que, a maioria dos jogadores não demonstrou um comportamento de melhor resposta na Parte I nem tampouco acredita que o outro jogador também terá tal comportamento; por sua vez, em grande parte, os poucos jogadores que têm um comportamento de melhor resposta também acreditam que o outro jogador se comportará igualmente, isto é, em geral, cada jogador espera que o outro se comporte de modo semelhante ao dele.

Analogamente, realizando a análise de melhor resposta para o jogo na Parte II, temos os seguintes valores sumarizados na Tabela 4.6. Realizando o teste  $\chi^2$  de independência obtemos um p-valor=0,000, ou seja, novamente temos evidências de dependência entre as variáveis. Contudo, podemos destacar que o comportamento de melhor resposta passou a ser o comportamento predominante nesse caso, talvez influenciado pela simetria nos *payoffs* dos equilíbrios puros do jogo.

*Tabela 4.6: Tabela cruzada para melhor resposta – Parte II.*

<b>Melhor Resposta - participante</b>	<b>Melhor resposta - outro</b>	
	<b>Não</b>	<b>Sim</b>
<b>Não</b>	70	8
<b>Sim</b>	8	81

#### 4.4.3. Parte III

No Jogo 1 da Parte III, 119 participantes (aproximadamente 71%) optaram pelo jogo sem queima de dinheiro; no Jogo 2, 111 participantes (aproximadamente 66,5%) escolheram o jogo sem queima; por fim, no Jogo 3, 134 indivíduos (mais de 80%) escolheram não queimar dinheiro. Vale ressaltar que realizando uma comparação da média de colaboração das Partes I e II com os respectivos jogos da Parte III para os jogadores que optaram por não queimar dinheiro, constatamos pelo teste de Wilcoxon

que não há evidências de diferenças entre as médias, como era esperado. Este resultado pode nos indicar que os jogadores estavam realizando suas escolhas de forma consciente.

Agora, testamos a **Hipótese 3** em que metade dos indivíduos optaria por queimar dinheiro e a outra metade optaria por não queimar dinheiro. Realizamos o teste t comparando a média de vezes que o jogo com queima de dinheiro é escolhido com a constante de referência 0,5. Em todos os três jogos foram constatadas evidências estatísticas de que os jogadores não se dividem igualmente entre os dois tipos de jogos, na verdade, eles se apresentam mais propícios a escolher os jogos sem queima de dinheiro. O valor-p para cada uma dos jogos é: Jogo 1, valor-p=0,0000000; Jogo 2, valor-p=0,000013; Jogo 3, valor-p=0,000000.

Agora, iremos analisar cada jogo separadamente. No jogo 1, para aqueles que escolheram o jogo sem queima de dinheiro, o número médio de colaborações foi de aproximadamente 6,24, a moda foi ‘não colaborar’ com 47 observações (aproximadamente 39,5%) e o desvio padrão foi de aproximadamente 6,06. Para esse mesmo grupo de participantes, quando avaliamos as crenças deles sobre a colaboração do outro jogador, observamos um valor médio de 6,78 colaborações, sendo a moda ‘não colaborar’ com 43 observações (aproximadamente 36%) e o desvio padrão de 5,95. Além disso, aproximadamente 50% (60 de 119) dos jogadores que optaram por não queimar dinheiro acreditam que o outro jogador irá se comportar de forma igual à deles.

Por sua vez, quando analisamos os jogadores que optaram pelo jogo com queima de dinheiro, temos que o número médio de colaborações foi 8,52, sendo a moda ‘sempre colaborar’ com 14 observações (aproximadamente 29%) e com um desvio padrão de 5,87. Quando passamos a avaliar a crença desses participantes na colaboração do outro jogador, observamos um valor médio de colaborações de aproximadamente 10,19, sendo a moda ‘sempre colaborar’ com 18 observações (aproximadamente 37,5%) e o desvio padrão de 5,13. Além disso, exatamente 50% (24 de 48) dos jogadores que optaram por queimar dinheiro acreditam que o outro jogador irá se comportar de forma igual à deles. As distribuições do número de colaborações por tipo de jogo (com e sem queima de dinheiro) e da crença na colaboração são expostas, respectivamente nos Gráficos *Boxplot*<sup>46</sup> 4.7 e 4.8.

<sup>46</sup> Nesta tese, o *Boxplot* terá as seguintes características: a linha central indica a mediana, a caixa indica o limite entre o primeiro e terceiro *quartil*, e o bigode indica 1,5 vezes a diferença interquartil, isto é, claro, respeitando os limites inferior e superior da distribuição.

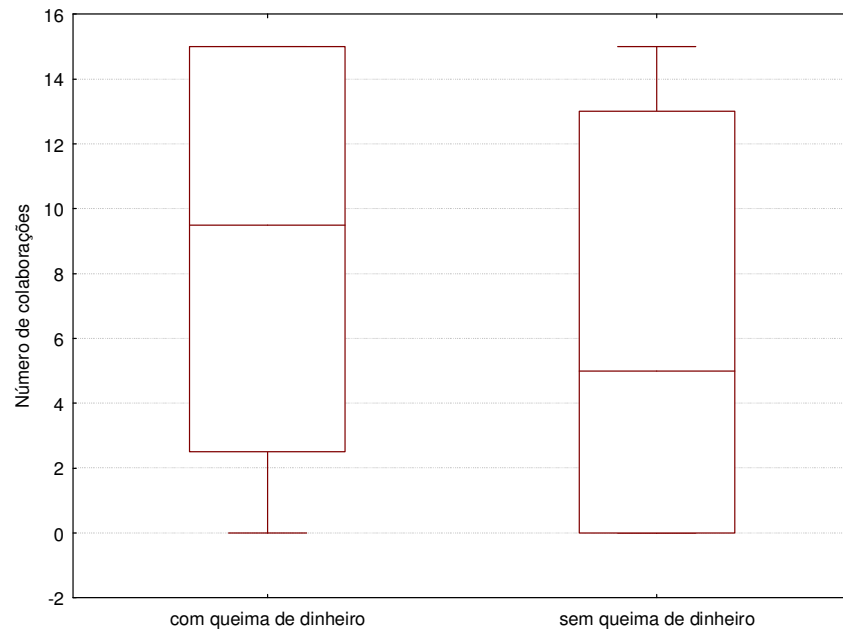


Gráfico 4.7: Distribuição do número de colaborações por tipo de jogo – Jogo 1

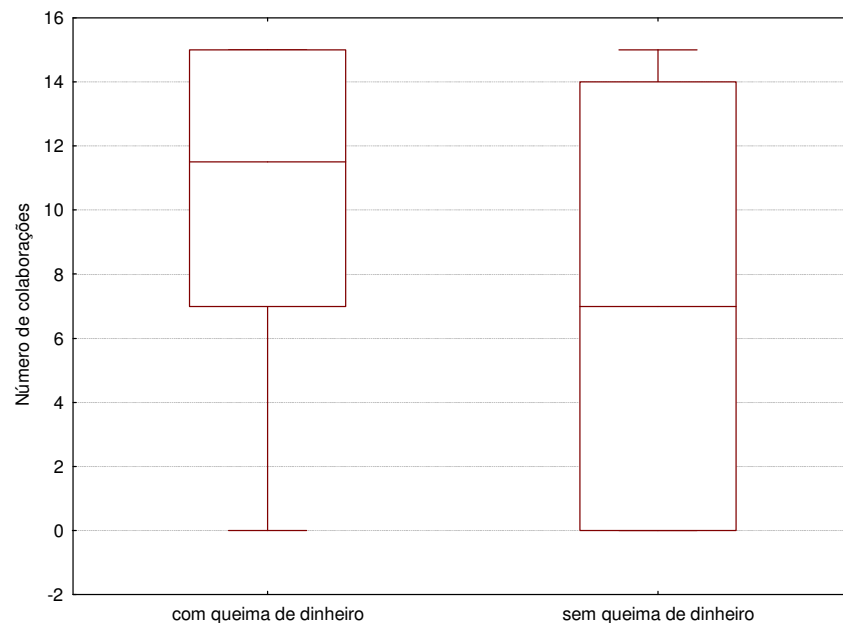


Gráfico 4.8: Distribuição da crença no número de colaborações por jogo – Jogo 1.

A distribuição dos dados nos dá uma primeira impressão de que apenas uma pequena parcela (menos de 30%) dos participantes escolhe o jogo com queima de dinheiro, porém, estes poucos que o fazem parecem ser mais propensos à colaboração. Assim, passamos para o teste da **Hipótese 4** no Jogo 1. Esta conjectura inicial é confirmada pelo teste de Mann-Whitney U. Primeiro, comparando a inclinação a



colaborar dos dois grupos (os que escolheram o jogo com queima de dinheiro e os que escolheram o jogo sem queima de dinheiro), obtemos um valor-p de 0,025193 e comparando a crença na colaboração dos dois grupos, temos um valor-p de 0,000916. Logo, existem evidências estatísticas de que o mecanismo de queima de dinheiro auxilia os jogadores a colaborarem mais, uma vez que ele transforma um perfil de estratégias colaborativamente dominantes em um equilíbrio colaborativo. As principais estatísticas descritivas do Jogo 1 são resumidas na Tabela 4.7.

*Tabela 4.7: Estatísticas descritivas para o Jogo 1 - Parte III.*

<b>Jogo 1</b>	<b>N</b>	<b>Variável</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Moda</b>	<b>Desvio padrão</b>
Sem queima de dinheiro	119	Colaborar	6,235294	5	0	6,060019
		Crença sobre colaboração	6,781513	7	0	5,950587
Com queima de dinheiro	48	Colaborar	8,520833	9,5	15	5,874538
		Crença sobre colaboração	10,18750	11,5	15	5,130867

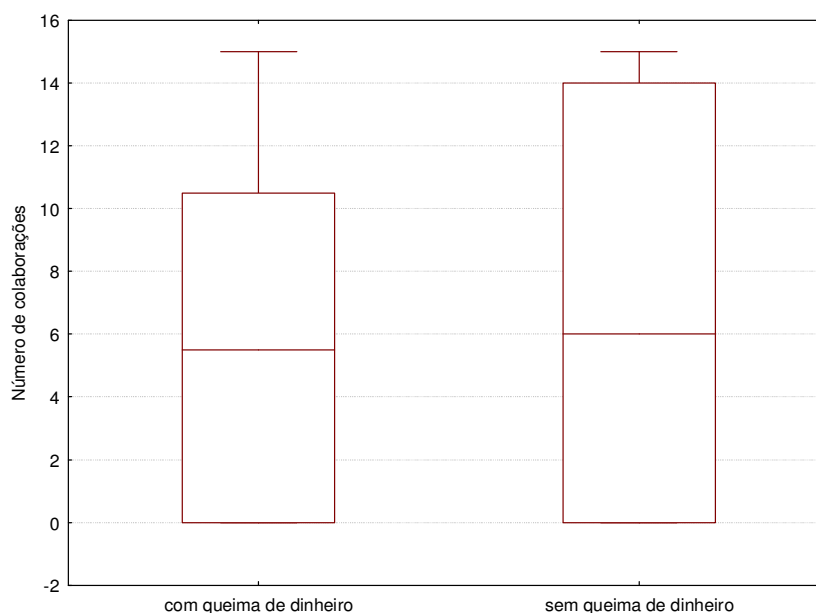
No jogo 2, para aqueles que escolheram o jogo sem queima de dinheiro, o número médio de colaborações foi de aproximadamente 6,47, a moda foi ‘não colaborar’ com 42 observações (aproximadamente 38%) e o desvio padrão foi de aproximadamente 6,11. Para esse mesmo grupo de participantes, quando avaliamos as crenças deles sobre a colaboração do outro jogador, observamos um valor médio de 7,79 colaborações, sendo a moda ‘não colaborar’ com 34 observações (aproximadamente 31%) e o desvio padrão de 5,93. Além disso, aproximadamente 45% (50 de 111) dos jogadores que optaram por não queimar dinheiro acreditam que o outro jogador irá se comportar de forma igual à deles.

Por outro lado, quando analisamos os jogadores que optaram pelo jogo com queima de dinheiro, temos que o número médio de colaborações foi 6,48, sendo a moda ‘não colaborar’ com 15 observações (aproximadamente 27%) e com um desvio padrão de 5,41. Quando passamos a avaliar a crença desses participantes na colaboração do outro jogador, observamos um valor médio de colaborações de aproximadamente 8,1, sendo a moda novamente ‘não colaborar’ com 12 observações (aproximadamente 21%) e o desvio padrão de aproximadamente 5,4. Além disso, aproximadamente 41% (23 de 56) dos jogadores que optaram por queimar dinheiro acreditam que o outro jogador irá se comportar de forma igual à deles. As distribuições do número de colaborações por tipo de jogo (com e sem queima de dinheiro) e da crença na colaboração para o Jogo 2

são expostas, respectivamente, nos Gráficos *Boxplot* 4.9 e 4.10. As principais estatísticas descritivas do Jogo 2 são resumidas na Tabela 4.8.

*Tabela 4.8: Estatísticas descritivas para o Jogo 2 - Parte III.*

Jogo 2	N	Variável	Média	Mediana	Moda	Desvio padrão
Sem queima de dinheiro	111	Colaborar	6,468468	6	0	6,112312
		Crença sobre colaboração	7,792793	9	0	5,931606
Com queima de dinheiro	56	Colaborar	6,482143	5,5	0	5,407036
		Crença sobre colaboração	8,107143	9	0	5,402621



*Gráfico 4.9: Distribuição do número de colaborações por tipo de jogo – Jogo 2*

Avaliando os gráficos, ficamos com a impressão inicial de que, mesmo com a possibilidade de queima de dinheiro, os participantes não parecem mais dispostos a colaborar, isto é, não há diferença entre as médias dos dois grupos. Esta conjectura é confirmada pelo teste de Mann-Whitney U. Primeiro, comparando a propensão à colaboração dos dois grupos obtemos um valor- $p=0,813747$  e comparando a crença na colaboração dos dois grupos temos um valor- $p=0,853428$ . Então, não existem evidências estatísticas de que este mecanismo de queima de dinheiro auxilia os jogadores a colaborarem. Este não é um resultado surpreendente, uma vez que a

colaboração só aumentaria se os participantes jogassem de acordo com o equilíbrio misto; mas, como discutido na Parte I, isso não ocorre.

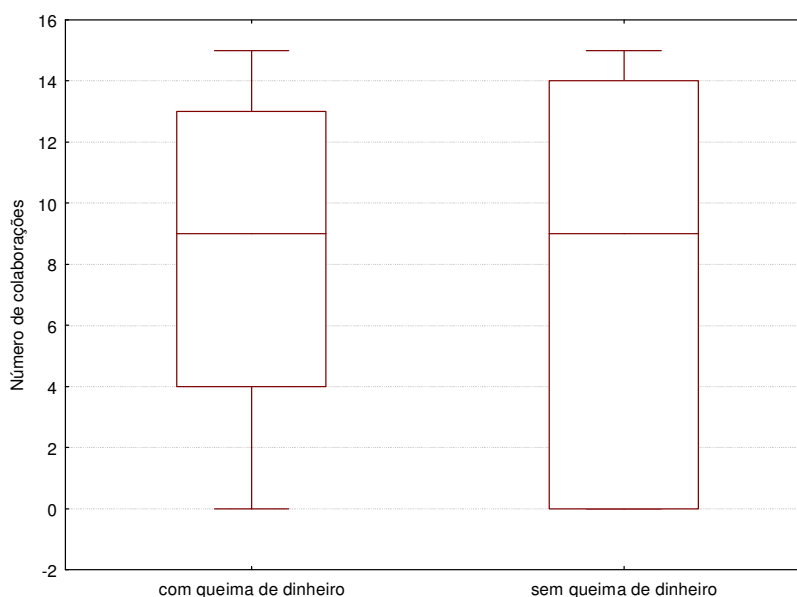


Gráfico 4.10: Distribuição da crença no número de colaborações por jogo – Jogo 2.

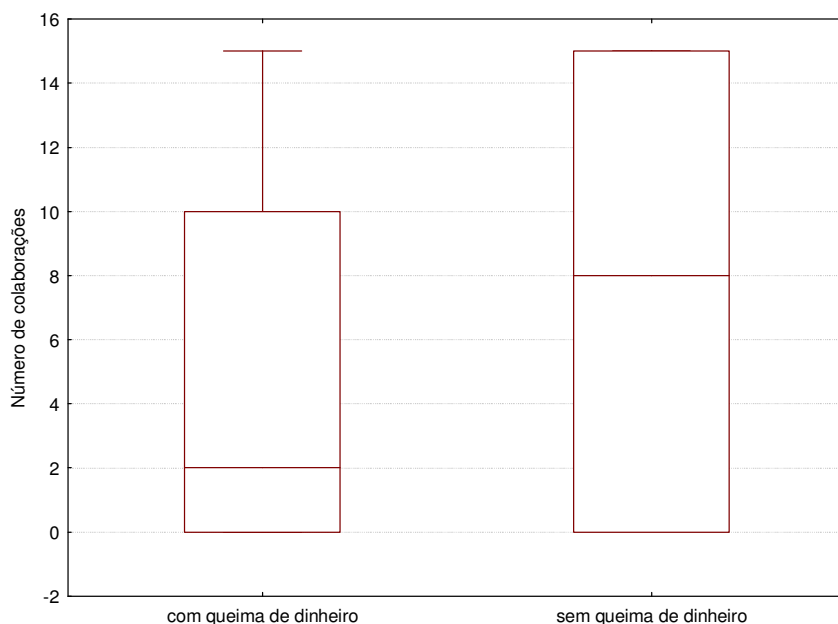
Por fim, no Jogo 3, para aqueles que escolheram queimar dinheiro, o número médio de colaborações foi de aproximadamente 8,02, a moda foi ‘sempre colaborar’ com 47 observações (aproximadamente 35%) e o desvio padrão foi de aproximadamente 6,17. Para esse mesmo grupo de participantes, quando avaliamos as crenças deles sobre a colaboração do outro jogador, observamos um valor médio de 7,21 colaborações, sendo a moda ‘não colaborar’ com 41 observações (aproximadamente 31%) e o desvio padrão de 6,12. Além disso, aproximadamente 58% (78 de 134) dos jogadores que optaram por não queimar dinheiro acreditam que o outro jogador irá se comportar de forma igual à deles.

Por outro lado, quando analisamos os jogadores que optaram pelo jogo com queima de dinheiro, temos que o número médio de colaborações foi 5,15, sendo a moda ‘não colaborar’ com 12 observações (aproximadamente 36%) e com um desvio padrão de 5,85. Quando passamos a avaliar a crença desses participantes na colaboração do outro jogador, observamos um valor médio de colaborações de aproximadamente 4,48, sendo a moda ‘não colaborar’ com 14 observações (aproximadamente 42%) e o desvio padrão de 5,06. Além disso, aproximadamente 48% (16 de 33) dos jogadores que optaram por queimar dinheiro também acreditam que o outro jogador irá se comportar

de forma igual à deles. As distribuições do número de colaborações por tipo de jogo (com e sem queima de dinheiro) e da crença na colaboração para o Jogo 3 são expostas, respectivamente, nos Gráficos 4.11 e 4.12. Também, algumas estatísticas descritivas do Jogo 3 são expostas na Tabela 4.9.

*Tabela 4.9: Estatísticas descritivas para o Jogo 3 - Parte III.*

<b>Jogo 3</b>	<b>N</b>	<b>Variável</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Moda</b>	<b>Desvio padrão</b>
Sem queima de dinheiro	134	Colaborar	8,022388	8	15	6,169859
		Crença sobre colaboração	7,208955	7	15	6,116752
Com queima de dinheiro	33	Colaborar	5,151515	2	0	5,858334
		Crença sobre colaboração	4,484848	4	0	5,056686



*Gráfico 4.11: Distribuição do número de colaborações por tipo de jogo – Jogo 3*

Analisando a distribuição dos dados, temos a primeira idéia de que os participantes raramente optam pela queima de dinheiro, e quando isso acontece eles se tornam menos propensos à colaborar. Mais uma vez, essa conjectura é confirmada pelo teste de Mann-Whitney U. Primeiro, comparando a propensão à colaboração dos dois grupos temos um valor- $p=0,016715$  e comparando a crença na colaboração dos dois grupos obtemos um valor- $p=0,01917$ . Então, existem evidências estatísticas de que queimar dinheiro apenas para algum perfil de estratégia específico não auxilia os

jogadores a colaborarem. Uma possível explicação para este resultado vem do fato de que o jogo da Caça ao cervo já têm um equilíbrio colaborativo ( $X, W$ ) e, uma vez que os jogadores optaram por não queimar dinheiro nos *payoffs* do equilíbrio ( $X, W$ ), eles podem ficar mais tentados a colaborar, mesmo o outro jogador desconhecendo esta escolha inicial.

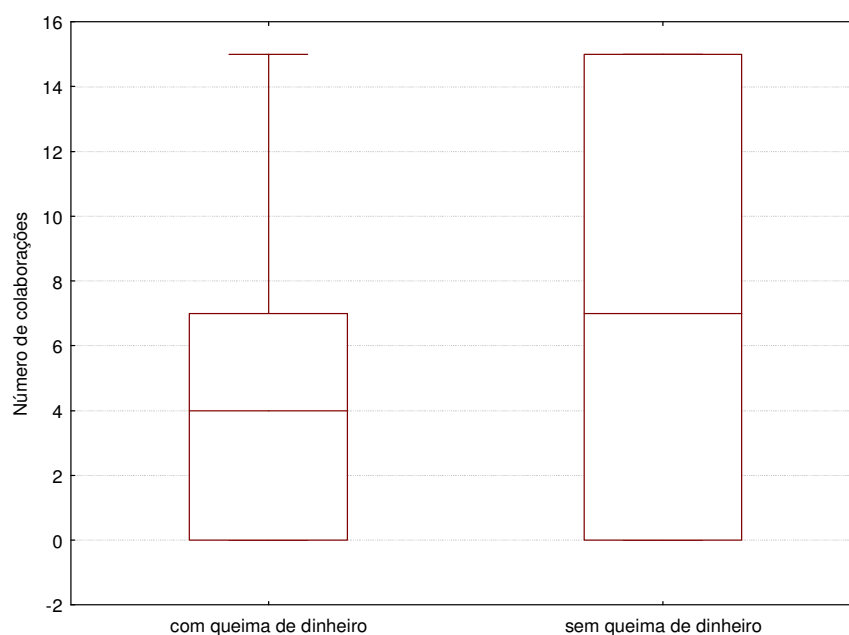


Gráfico 4.12: Distribuição da crença no número de colaborações por jogo – Jogo 3.

#### 4.4.4. Outros resultados

Nesta última seção de resultados, associamos o número de colaborações (e crença na colaboração) em cada jogo das Partes I, II e III, com as características gerais dos participantes como, por exemplo, gênero, curso, etc; de modo a verificar a existência de alguma evidência que nos leve a distinguir o comportamento dos grupos em certas situações estratégicas. Também procuramos evidências de relações entre estas variáveis e o comportamento de melhor resposta e de queima de dinheiro.

##### 4.4.4.1. Gênero:

Iniciamos nosso estudo com a variável Gênero e além de agrupar os dados pelo gênero, também utilizamos outras variáveis adicionais de agrupamento com o intuito de permitir uma análise mais detalhada dos dados. Na Parte I e II, a variável utilizada é o

comportamento de melhor resposta; já para os jogos da Parte III, agrupamos os dados pelo tipo do jogo (com ou sem queima de dinheiro). A Tabela 4.10 apresenta um resumo do valor-p do teste Mann-Whitney U para cada um dos casos possíveis.

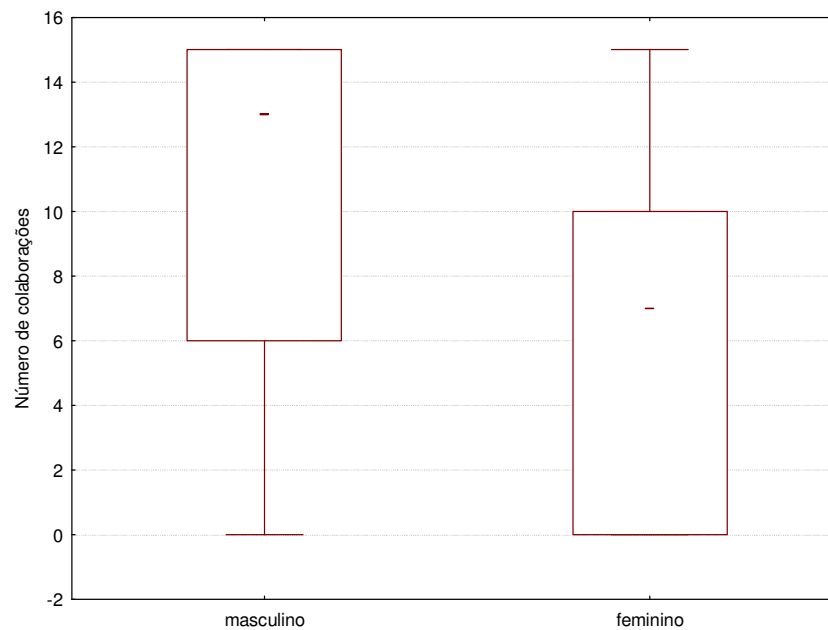
Pela análise da Tabela 4.10, percebemos que existe apenas uma diferença estatisticamente significativa<sup>47</sup> no número de colaborações entre pessoas do gênero masculino e feminino quando avaliamos o número de colaborações para aqueles indivíduos que optaram por queimar dinheiro no Jogo 1. Nesse caso, os participantes do gênero masculino apresentaram um maior nível de colaboração. Se levarmos em conta que foi observado um aumento no número de colaborações para os indivíduos que queimam dinheiro no Jogo 1 da Parte III, quando comparado com os indivíduos que não queimam dinheiro, podemos então constatar que esse aumento se deu em grande parte pelo aumento da colaboração das pessoas do gênero masculino. A distribuição do número de colaborações por gênero para o Jogo 1 com queima de dinheiro é exposta no Gráfico 4.13. Nos demais casos, o comportamento entre os gêneros foi semelhante.

*Tabela 4.10: Colaboração vs. Gênero.*

Jogo	Agrupamento	Variável	Valor-p (Mann-Whitney U)
<b>Parte I</b>	Todos	Colaborar	0,611159
		Crença na colaboração	0,208023
	Melhor resposta	Colaborar	0,205275
		Crença na colaboração	0,257936
	Não melhor resposta	Colaborar	0,228195
		Crença na colaboração	0,636526
<b>Parte II</b>	Todos	Colaborar	0,253479
		Crença na colaboração	0,11017
	Melhor resposta	Colaborar	0,118
		Crença na colaboração	0,133328
	Não melhor resposta	Colaborar	0,940077
		Crença na colaboração	0,928311
<b>Jogo 1 (Parte III)</b>	Todos	Colaborar	0,892593
		Crença na colaboração	0,496771
	Com queima de dinheiro	Colaborar	0,014193*
		Crença na colaboração	0,176737
	Sem queima de	Colaborar	0,073029

<sup>47</sup> Os resultados estatisticamente significantes são destacados com um asterisco (\*).

	dinheiro	Crença na colaboração	0,158707
<b>Jogo 2 (Parte III)</b>	Todos	Colaborar	0,793763
		Crença na colaboração	0,745955
	Com queima de dinheiro	Colaborar	0,466313
		Crença na colaboração	0,518468
	Sem queima de dinheiro	Colaborar	0,885067
		Crença na colaboração	0,379353
<b>Jogo 3 (Parte III)</b>	Todos	Colaborar	0,233395
		Crença na colaboração	0,082677
	Com queima de dinheiro	Colaborar	0,645124
		Crença na colaboração	0,253389
	Sem queima de dinheiro	Colaborar	0,392685
		Crença na colaboração	0,265723



*Gráfico 4.13: Distribuição do número de colaborações por gênero – Jogo 1 (Parte III) com queima de dinheiro.*

Para esta tese, optamos por evitar ao máximo propor explicações para os diferentes tipos de comportamento constatados nesta última subseção. Assim, iremos apenas enunciá-los. Estas constatações poderão auxiliar no desenvolvimento de estudos mais específicos que pretendam, posteriormente, justificar as diferenças de comportamento existentes com base em aspectos socioeconômicos entre outros.

Por fim, analisamos se haveria uma relação entre gênero e comportamentos como “melhor resposta” e “queima de dinheiro”, através do teste  $\chi^2$  de independência, como mostra a Tabela 4.11. Nesse caso, nenhuma relação se mostrou estatisticamente significativa.

*Tabela 4.11: Outras relações com o Gênero.*

<b>Jogo</b>	<b>Variável</b>	<b>valor-p (<math>\chi^2</math>)</b>
Parte I	Melhor resposta	0,6077
	Melhor resposta outro	0,3146
Parte II	Melhor resposta	0,0834
	Melhor resposta outro	0,6257
Jogo 1	Tipo do jogo	0,6267
Jogo 2	Tipo do jogo	0,4788
Jogo 3	Tipo do jogo	0,3472

#### 4.4.4.2. Curso:

À semelhança da análise realizada para o Gênero, a Tabela 4.12 apresenta um resumo do valor-p do teste Mann-Whitney U para cada um dos casos possíveis com relação à variável Curso.

*Tabela 4.12: Colaboração vs. Curso.*

<b>Jogo</b>	<b>Agrupamento</b>	<b>Variável</b>	<b>Valor-p (Mann-Whitney U)</b>
<b>Parte I</b>	Todos	Colaborar	0,164174
		Crença na colaboração	0,012721*
	Melhor resposta	Colaborar	0,194529
		Crença na colaboração	0,982640
	Não melhor resposta	Colaborar	0,017528*
		Crença na colaboração	0,015901*
<b>Parte II</b>	Todos	Colaborar	0,066911
		Crença na colaboração	0,134183
	Melhor resposta	Colaborar	0,132722
		Crença na colaboração	0,037771*
	Não melhor resposta	Colaborar	0,347537
		Crença na colaboração	0,564395
<b>Jogo 1 (Parte III)</b>	Todos	Colaborar	0,053304
		Crença na colaboração	0,141907
	Com queima de	Colaborar	0,125883



	dinheiro	Crença na colaboração	0,171042
	Sem queima de dinheiro	Colaborar	0,243101
<b>Jogo 2 (Parte III)</b>	Todos	Crença na colaboração	0,563057
		Colaborar	0,094463
	Com queima de dinheiro	Crença na colaboração	0,360443
		Colaborar	0,85659
	Sem queima de dinheiro	Crença na colaboração	0,435175
		Colaborar	0,059346
		Crença na colaboração	0,112667
		Colaborar	0,004573*
<b>Jogo 3 (Parte III)</b>	Todos	Crença na colaboração	0,128809
		Colaborar	0,433536
	Com queima de dinheiro	Crença na colaboração	0,014666*
		Colaborar	0,004083*
	Sem queima de dinheiro	Crença na colaboração	0,456008
		Colaborar	

Pela análise da tabela, percebemos que sete diferenças se mostraram estatisticamente significantes e, em todas elas, os estudantes de economia se apresentaram mais colaborativos do que os estudantes de contabilidade. Por sua vez, quando analisamos a existência de relação entre curso e comportamento de melhor resposta, e entre curso e queima de dinheiro, nenhuma relação se mostrou estatisticamente significativa, como nos revela a Tabela 4.13.

*Tabela 4.13: Outras relações com o Curso.*

<b>Jogo</b>	<b>Variável</b>	<b>Valor-p (<math>\chi^2</math>)</b>
Parte I	Melhor resposta	0,4224
	Melhor resposta outro	0,0794
Parte II	Melhor resposta	0,0925
	Melhor resposta outro	0,4577
Jogo 1	Tipo do jogo	0,2021
Jogo 2	Tipo do jogo	0,539
Jogo 3	Tipo do jogo	0,9289

#### 4.4.4.3. Conhecimento sobre teoria dos jogos:

Como a variável ‘Conhecimento sobre Teoria dos Jogos’ permitia quatro agrupamentos iniciais, dos quais alguns apresentaram uma baixa frequência, então

optamos por reagrupar esta variável em apenas dois grupos, a saber: ‘com algum conhecimento em teoria dos jogos’, composta pelos participantes que já fizeram um curso, ou tiveram algumas aulas ou já leram sobre o tema; e ‘sem conhecimento’. Com base neste novo agrupamento, a Tabela 4.14 apresenta um resumo do valor-p do teste Mann-Whitney U para cada um dos possíveis casos.

*Tabela 4.14: Colaboração vs. Conhecimento sobre Teoria dos Jogos.*

<b>Jogo</b>	<b>Agrupamento</b>	<b>Variável</b>	<b>Valor-p (Mann-Whitney U)</b>
<b>Parte I</b>	Todos	Colaborar	0,448911
		Crença na colaboração	0,176088
	Melhor resposta	Colaborar	0,691103
		Crença na colaboração	0,247677
	Não melhor resposta	Colaborar	0,236201
		Crença na colaboração	0,202209
<b>Parte II</b>	Todos	Colaborar	0,65123
		Crença na colaboração	0,540546
	Melhor resposta	Colaborar	0,973614
		Crença na colaboração	0,996701
	Não melhor resposta	Colaborar	0,262084
		Crença na colaboração	0,128656
<b>Jogo 1 (Parte III)</b>	Todos	Colaborar	0,019526*
		Crença na colaboração	0,263612
	Com queima de dinheiro	Colaborar	0,001033*
		Crença na colaboração	0,090593
	Sem queima de dinheiro	Colaborar	0,662901
		Crença na colaboração	0,879391
<b>Jogo 2 (Parte III)</b>	Todos	Colaborar	0,012414*
		Crença na colaboração	0,811674
	Com queima de dinheiro	Colaborar	0,268186
		Crença na colaboração	0,534776
	Sem queima de dinheiro	Colaborar	0,033258*
		Crença na colaboração	0,887609
<b>Jogo 3 (Parte III)</b>	Todos	Colaborar	0,665399
		Crença na colaboração	0,925886
	Com queima de dinheiro	Colaborar	0,439097
		Crença na	0,605985

	Sem queima de dinheiro	colaboração	
		Colaborar	0,904295
		Crença na colaboração	0,98733

Pela análise da tabela, percebemos que quatro diferenças são estatisticamente significantes e, em todas elas, os indivíduos com algum conhecimento sobre teoria dos jogos colaboraram mais. Novamente, quando analisamos a existência de relação entre conhecimento sobre teoria dos jogos e comportamento de melhor resposta, e com queima de dinheiro, nenhuma relação se mostrou estatisticamente significativa, como revela a Tabela 4.15. Vale ressaltar que existe uma relação estatisticamente significativa (valor-p=0,0001 para o teste  $\chi^2$  de independência) entre Curso e Conhecimento sobre Teoria dos jogos. Os dados sobre a relação entre estas variáveis são sumarizados na Tabela 4.16.

*Tabela 4.15: Outras relações com o Conhecimento sobre Teoria dos Jogos.*

Jogo	Variável	Valor-p ( $\chi^2$ )
Parte I	Melhor resposta	0,6920
	Melhor resposta outro	0,3632
Parte II	Melhor resposta	0,769
	Melhor resposta outro	0,769
Jogo 1	Tipo do jogo	0,1219
Jogo 2	Tipo do jogo	0,5172
Jogo 3	Tipo do jogo	0,6613

*Tabela 4.16: Tabela cruzada conhecimento em Teoria dos Jogos vs. Cursos.*

Teoria dos Jogos	Curso	
	Economia	Contabilidade
Com conhecimento	53	18
Sem conhecimento	42	53

#### 4.4.4.4. As demais variáveis

Finalizamos nossa discussão sobre os resultados do experimento comentando o porquê de nenhum teste com as variáveis Religião, Renda e Grau de instrução ter sido realizado. Essas variáveis apresentavam uma grande concentração de indivíduos em poucas classes, e não encontramos uma forma adequada de reagrupar os dados de modo a validar a aplicação dos testes estatísticos apropriados. Assim, optamos por não realizar uma discussão mais aprofundada sobre tais variáveis.

Também vale ressaltar que, como esperado, nenhum resultado estatisticamente significativo foi detectado quando avaliamos o comportamento dos diferentes tipos de jogadores (jogador 1 e jogador 2) com relação ao número médio de colaborações (e crença na colaboração), tampouco com relação a comportamento de melhor resposta ou de queima de dinheiro. Tal fato nos leva a crer na ausência de *framing effect* com relação aos tipos de questionários, o que também poderia ter influenciado outros resultados do experimento.

#### 4.5. Considerações Finais

Neste capítulo nós testamos experimentalmente três aspectos centrais dos jogos 2x2 com estratégias colaborativamente dominantes, a saber: o equilíbrio misto, o equilíbrio colaborativo como ponto focal e a queima de dinheiro como mecanismo de incentivo à colaboração. Primeiro constatamos que os jogadores não aparentam se comportar como predito pela teoria do equilíbrio misto, tampouco o equilíbrio colaborativo demonstrou ter a propriedade de ponto focal. Ainda detectamos que o mecanismo de queima de dinheiro apenas auxiliou na colaboração dos jogadores quando transformou um perfil de estratégias colaborativamente dominante em um equilíbrio colaborativo.

## Capítulo 5

### Considerações Finais

*“...tão fácil parece, depois de encontrado; o que oculto, para a maioria, parecia impossível” (John Milton).*

#### 5.1. Conclusões

Ao longo desta tese procuramos desenvolver, por meio de três ensaios, uma visão crítica sobre o equilíbrio misto tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista experimental. Inicialmente, no primeiro ensaio, partindo dos conceitos de dominância colaborativa e de equilíbrio colaborativo, discutimos em que situações um equilíbrio misto deve ser considerado irracional, chegando à seguinte conclusão: em jogos 2x2 na forma estratégica, se existir um par de estratégias colaborativamente dominantes estáveis (um equilíbrio colaborativo), então, o equilíbrio misto é irracional, uma vez que contraria as preferências originais dos jogadores, proporciona uma utilidade esperada ineficiente e não tem nenhuma propriedade de segurança, a qual eventualmente justificaria o uso desse equilíbrio.

Mostramos também que as utilidades esperadas do equilíbrio colaborativo são sempre as maiores para cada um dos jogadores envolvidos no jogo e isso porque o equilíbrio colaborativo faz uso tanto do princípio de racionalidade egoísta (tradicional) quanto do princípio de racionalidade altruísta. Assim, como é impossível para qualquer grupo de jogadores obter um resultado melhor do que se obteria jogando de acordo com o equilíbrio colaborativo, este equilíbrio poderia ter a característica de um ponto focal. Ainda mostramos que existem situações estratégicas nas quais os *payoffs* do equilíbrio misto são ineficientes, e que os jogadores conseguiriam obter um resultado melhor ao

transformarem um perfil de estratégias colaborativamente dominantes instável em um equilíbrio colaborativo, mesmo que isso dependesse da auto-penalização dos mesmos.

No segundo ensaio, dando continuidade à análise crítica sobre o equilíbrio misto, ainda do ponto de vista teórico, propusemos uma nova abordagem para avaliar o comportamento de auto-penalização (queima de dinheiro) dos jogadores a partir da utilidade esperada do equilíbrio misto. Provamos que para jogos 2x2 com um equilíbrio misto bem definido (na sua forma não-degenerada) a existência de uma estratégia colaborativamente dominante do jogador  $j$  para o jogador  $i$  é condição necessária e suficiente para existência de derivadas da utilidade esperada do equilíbrio misto negativas (ou pelo menos não-positiva) para o jogador  $i$ , o que justificaria um comportamento de queima de dinheiro ao permitir um aumento da utilidade esperada do equilíbrio misto para o jogador  $i$ . Além disso, utilizamos esses resultados para rever algumas das conclusões de Jervis (1978) em seu dilema da segurança, mostrando uma das possíveis aplicações da nossa abordagem para jogos com queima de dinheiro.

Por fim, no último ensaio, testamos experimentalmente as principais previsões teóricas dos ensaios anteriores, a saber: o comportamento do equilíbrio misto, o equilíbrio colaborativo como ponto focal e a queima de dinheiro como mecanismo de incentivo à colaboração. Os resultados nos mostraram que os jogadores não demonstram se comportar de acordo com o equilíbrio misto, nem o equilíbrio colaborativo aparenta ser um ponto focal. Também detectamos que o mecanismo de queima de dinheiro só auxiliou na colaboração quando transformou um perfil de estratégias colaborativamente dominante instável em um equilíbrio colaborativo.

## 5.2. Sugestões para trabalhos futuros

Após o desenvolvimento de um trabalho tão longo quanto o de uma tese de doutorado, é natural que os pesquisadores tenham inúmeras idéias e desejos de realizar novos estudos. Assim, essa última seção da tese reflete esses anseios. Aqui, apresentamos algumas linhas de estudo que podem ser desenvolvidas dando continuidade às discussões sobre o equilíbrio misto, dominância colaborativa e jogos com queima de dinheiro.

A primeira proposta apresentada é inspirada no desejo de Harsanyi & Selten (1988) de estender o conceito de dominância em termos de *payoff* (*payoff dominance*), para um conceito mais forte, como descrito a seguir:

“Uma possível mudança que temos em mente é substituir nosso presente conceito de dominância em termos de *payoff* por um conceito de algum modo mais forte. No presente, para estabelecer a dominância em termos de *payoff*, nós requeremos que todos os jogadores devam preferir um equilíbrio ao outro. Mas pode ser desejável estender a dominância em termos de *payoff* para um caso onde todos os jogadores “importantes” preferem o primeiro equilíbrio ao segundo, mesmo que alguns jogadores muito fracos possam ter preferências indo no outro sentido, ou talvez sejam indiferentes entre os dois. É claro que nós teríamos que achar um critério convincente para decidir quais seriam os jogadores “importantes” e quais os “não-importantes” em um dado caso” (HARSANYI & SELTEN, 1988, p.362-363).

Também temos o desejo de estender o conceito de dominância colaborativa de modo que ele possa ser utilizado em um conjunto mais amplo de jogos como, por exemplo, jogos em que apenas um conjunto de jogadores tem estratégia colaborativamente dominantes para outro conjunto de jogadores. Um novo conceito nesse sentido, também aproximaria nossas idéias à teoria dos jogos cooperativos, a qual nos permitiria o estudo de coalizões, etc.

A segunda proposta é inspirada na idéia de que jogos com derivadas da utilidade esperada do equilíbrio misto negativas poderiam incentivar os jogadores a mentirem sobre as suas reais preferências, resultando em um problema para educação de utilidade e, com efeito, para a análise dos jogos com tal característica (derivadas negativas). Logo, pretendemos estudar os métodos de educação de utilidade buscando, se necessário, propor um método que revele quando o jogador faz uso desse artifício (reduzir os seus *payoffs*) de modo a se beneficiar no jogo, e/ou até mesmo desenvolver um método que minimize (ou elimine) está prática.

Por fim, talvez a área mais frutífera para trabalhos futuros esteja ligada aos estudos experimentais. Recentemente, diversos estudos buscam discutir e explicar diferença de comportamento entre os jogadores em um experimento por meio de aspectos como gênero (CHARNESS & RUSTICHINI, 2011), aspectos culturais derivados de diferentes nacionalidades (CHUAH *et al*, 2007), entre outros. Assim, pretendemos desenhar alguns experimentos que busquem especificamente analisar a eventual existência de diferença de comportamento entre determinados grupos.

Além disso, como nosso experimento foi desenhado para refletir um jogo de uma única rodada (sem a possibilidade de aprendizagem), pretendemos repetir o experimento, porém, modelando-o a partir da idéia de jogos repetidos, nos quais os participantes podem aprender com suas jogadas passadas. Isso nos permitiria rever as conclusões obtidas sobre o equilíbrio misto, a dominância colaborativa como ponto focal e os mecanismos de queima de dinheiro, proporcionando um entendimento mais amplo desses temas.



## REFERÊNCIAS

1. ANCTIL, R. M. *et al.* Does information transparency decrease coordination failure? **Games and Economic Behavior**, 70, p.228-241, 2010.
2. ANDREONI, James; VARIAN, Hal. *Preplay contracting in the Prisoners' Dilemma*. **Economic Sciences**. v.96, p.10933-10938, 1999.
3. AUMANN, R. J. *Subjectivity and correlation in randomized strategies*. **Journal of Mathematical Economics**, 1, p.67-96, 1974.
4. AUMANN R. J. *Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality*. **Econometrica**. 55, p.1-18, 1987.
5. AUMANN R. J. *Nash Equilibria are not Self-Enforcing*, in GABSZEWICZ, J. J.; RICHARD, J.F; WOLSEY, L., Elsevier Science Publishers, Amsterdam, p.201-206, 1990.
6. AXELROD, Robert. *The evolution of cooperation*. New York, NY: Basic Books, 1984.
7. BEN-PORATH, E., DEKEL, E. *Signaling future actions and the potential for sacrifice*, **Journal of Economic Theory**, 57, p.36-51, 1992.
8. BERGER, U. *Learning to cooperate via indirect reciprocity*. **Games and Economic Behavior**, 72, p.30-37, 2011.
9. BERGIN, J.; BERNAHARDT, D. *Cooperation through imitation*. **Games and Economic Behavior**, 67, p.376-388, 2009.
10. BERNHEIM, B.; PELEG, B.; WHINSTON, M. *Coalition-Proof Nash Equilibria I: Concepts*. **Journal of Economic Theory**. 42, 1-12, 1987.
11. BINMORE, K. *Game theory and the Social Contract Volume I: Playing Fair*. Cambridge, MA: MIT Press, 1994.
12. BINMORE, K. *Commentary: Nash's work in economics*. **Games and Economic Behavior**, 71, p.2-5, 2011.
13. BINMORE, K.; SAMUELSON, L. *The evolution of focal points*. **Games and Economic Behavior**, 55, p.21-42, 2006.
14. BRANDTS, J; HOLT, A. *Limitations of dominance and forward induction: Experimental evidence*, **Economics Letters**, v.49, p.391-395, 1995.
15. CHARNESS, G.; RUSTICHINI, A. *Gender differences in cooperation with group membership*. **Games and Economic Behavior**, 72, p.77-85, 2011.
16. CHIAPPORI, P.-A.; LEVITT, S.; GROSECLOSE, T. *Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: the case of penalty kicks in soccer*. **The American Economic Review**, v. 92 n. 4, p.1138-1151, 2002.
17. CHUAH, Swee-Hoon *et al.* *Do cultures clash? Evidence from cross-national ultimatum game experiments*. **Journal of Economic Behavior & Organization**. V. 64, p.35-48, 2007.

18. ENGELMANN, D.; STEINER, J. *The effects of risk preferences in mixed-strategy equilibria of 2x2 games*. **Games and Economic Behavior**, 60, p.381-388, 2007.
19. ENGELMANN, D.; FISCHBACHER, U. *Indirect reciprocity and strategic reputation building in an experimental helping game*. **Games and Economic Behavior**, 67, p.399-407, 2009.
20. FALK, A.; FISCHBACHER, U. *A theory of reciprocity*. **Games and Economic Behavior**, 54, p.293-315, 2006.
21. FUNDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game Theory**. Cambridge: MIT Press, 1991.
22. GERSBACH, H. *The money-burning refinement: with an application to a political signalling game*, **International Journal of Game Theory**, v. 33, p. 67-87, 2004.
23. GIBBONS, R. **Game Theory for applied economists**. Princeton: Princeton University Press, 1992.
24. GINTIS, H. **Game Theory Evolving: A problem-centered introduction to modeling strategic interaction**. Princeton: Princeton University Press, 2009.
25. GOLMAN, R.; PAGE, S. E. *Individual and cultural learning in stag hunt games with multiple actions*. **Journal of Economic Behavior & Organization**, 73, p. 359-376, 2010.
26. HAMMOND, P.J. *Aspects of rational behavior*, in BINMORE, K., KIRMAN, A. & TANI, P. **Frontiers of Games Theory**, p.307-320, 1993.
27. HARSANYI, J. C. *Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points*, **International Journal of Game Theory**, 2, p.1-23, 1973.
28. HARSANYI, J. C.; SELTEN, R. **A General Theory of Equilibrium Selection in Games**. Londres: MIT Press, 1988.
29. HART, S. *Commentary: Nash equilibrium and dynamics*. **Games and Economic Behavior**, 71, p.6-8, 2011.
30. HUCK, S.; MÜLLER, W. *Burning money and (pseudo) first-mover advantages: an experimental study on forward induction*, **Games and Economic Behavior**, v. 51, p.109-127, 2005.
31. JERVIS, R. *Cooperation under the Security Dilemma*, **World Politics**, v. 30, n. 2, p.167-214, 1978.
32. KALAI, T.; KALAI, E. *Engineering cooperation in two-player games*. **Working paper**, 2009.
33. KALAI, E.; SAMET, D. *Persistente Equilibria*, **International Journal of Game Theory**, 13, p.129-144, 1984.
34. KOHLBERG, E.; MERTENS, J. F. *On the Strategic Stability of Equilibria*, **Econometrica**, 54, p.1003-1037, 1986.
35. KUHN, H *et al.* *The work of John Nash in game theory*, **Journal of Economic Theory**, 69, p.153-185, 1996.

36. LAFFONT, Jean-Jacques; MARTIMORT, David. *The Theory of Incentive: The principal-agent model*. Princeton: Princeton University Press, 2002.
37. LUCE, R. D; RAIFFA, H. *Games and Decision: Introduction and Critical Survey*. New York: Dover, 1989.
38. MAILATH, G. J.; SAMUELSON, L. *Repeated Games and Reputation: long-run relationships*. Oxford: Oxford University Press, 2006.
39. MANGASARIAN, O. L. *Equilibrium Points of Bimatrix Games*. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, 12, p.778-780, 1964.
40. MASKIN, E. *Commentary: Nash equilibrium and mechanism design*. **Games and Economic Behavior**, 71, p.9-11, 2011.
41. MCKELVEY, R. D., MCLENNAN, A. M., TUROCY, T.L. *Gambit: Software Tools for Game Theory*, <http://www.gambit-project.org>, 2010.
42. MORENO, D.; WOODERS, J. *Coalition-Proof Equilibrium*. **Games and Economic Behavior**, 17, 80-112, 1996.
43. MYERSON, R.B. *Refinements of the Nash Equilibrium Concept*, **International Journal of Game Theory**, v. 7, p.73-80, 1978.
44. MYERSON, R.B. *Game Theory: analysis of conflict*. Londres: Harvard University Press, 1991.
45. MYERSON, R.B. *Nash Equilibrium and the History of Economic Theory*, **Journal of Economic Literature**, 37, p.1067-1082, 1999.
46. NASH, J. F. *Non-Cooperative Games*. **The Annals of Mathematics**, 54, p.286-295, 1951.
47. NEUGEBAUER, T.; POULSEN, A.; SCHRAM, A. *Fairness and reciprocity in the Hawk-Dove Game*. **Journal of Economic Behavior & Organization**, v. 66 p.243-250, 2008.
48. OCHS, J. *Games with unique mixed strategy equilibria: an experimental study*. **Games and Economic Behavior**, v.10, p.200-217, 1995.
49. OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. *A Course in Game Theory*. Cambridge Mass: MIT Press, 1994.
50. PORTER, R; NUDELMAN, E; SHOHAM, Y. *Simple search methods for finding a Nash equilibrium*. **Games and Economic Behavior**, 63, p.642-662, 2008.
51. RANKIN, F. W.; VAN HUYCK, J. B.; BATTALIO, R. C. *Strategic Similarity and Emergent Conventions: Evidence from Similar Stag Hunt Games*. **Games and Economic Behavior**, v.32, p.315-337, 2000.
52. RASMUSEN, E. *Game and Information: an introduction to game theory*. Cambridge: Blackwell, 1996.
53. ROUSSEAU, J-J. **Discurso sobre a origem e os fundamentos da desigualdade entre os homens**. São Paulo: Martin Claret, 1755.
54. REY-BIEL, P. *Equilibrium play and best response to (stated) beliefs in normal form games*. **Games and Economic Behavior**, 65, p.572-585, 2009.

55. RYDVAL, O; ORTMANN, A. *Loss avoidance as selection principle: Evidence from simple stag-hunt games*, **Economics Letters**, 88, p.101–107, 2005.
56. SCHELLING, T. C. *The Strategy of Conflict*. Londres: Harvard University Press, 1980.
57. SELTEN, R. *Reexamination of the Perfection Concept for Equilibrium Points in Extensive Games*. **International Journal of Game Theory**, 4, p.25-55, 1975.
58. SETHI, R; SOMANATHAN, E. *Understanding Reciprocity*. **Journal of Economic Behavior & Organization**, 50, p.1-27, 2003.
59. SHIMOJI, M. *On forward induction in money-burning games*, **Economic Theory**, v. 19, p.637–648, 2002.
60. SKYRMS, B. *The stag hunt and the evolution of social structure*. Cambridge: Cambridge University Press.
61. STALNAKER, R. *Belief revision in games: forward and backward induction*, **Mathematical Social Sciences**, v. 36, p.31–56, 1998.
62. STANCA, L. *Measuring indirect reciprocity: whose back do we scratch?* **Journal of Economic Psychology**, 30, p.190-202, 2009.
63. VAN DAMME, E. *Stable equilibria and forward induction*, **Journal of Economic Theory**, 48, p.476-496, 1989.
64. VAN DAMME, E. *Equilibrium selection in 2x2 games*, **Revista Española de Economía** 8, p.37-52, 1991.
65. VAN HUYCK, J. B.; BATTALIO, R. C.; BEIL, R. O. *Tacit Coordination Games, Strategic Uncertainty, and Coordination Failure*. **The American Economic Review**, v.80, p.234-248, 1990.
66. VARIAN, H. R. *Microeconomic Analysis*. Nova York: Norton, 1992.
67. VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
68. YOUNG, H, P.; *Commentary: John Nash and evolutionary game theory*. **Games and Economic Behavior**, 71, p.12-13, 2011.
69. WALKER, M.; WOODERS, J. *Minimax Play at Wimbledon*. **American Economic Review**, v.91, p.1521-1538, 2001.
70. WILSON, R. *Computing Equilibria of N-Person Games*. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 21, p.80-87, 1971.

## APÊNDICE 1

**Teorema 2.1:** Seja  $\Gamma$  um jogo 2x2 na forma normal com comunicação e seja  $(s_1^*, s_2^*)$  um par de estratégias colaborativamente dominantes estritas e instáveis para ambos os jogadores.

**Parte A:** Se a restrição de participação for atendida de forma estrita para ambos os jogadores, então existe uma função transformação  $\Psi(\cdot)$  capaz de transformar uma situação de não-cooperação em uma situação de cooperação através da auto-penalização de ambos os jogadores, ou seja, tal que transformará o par  $(s_1^*, s_2^*)$  em um equilíbrio colaborativo; e que preserva as estratégias  $s_1^*$  e  $s_2^*$  como estratégias fortemente colaborativamente dominantes.

**Parte B:** Se a restrição de participação for atendida para ambos os jogadores, então existe uma função transformação  $\Psi(\cdot)$  capaz de transformar uma situação de não-cooperação em uma situação de cooperação através da auto-penalização de ambos os jogadores, isto é, tal que transforma o par  $(s_1^*, s_2^*)$  em um equilíbrio colaborativo; e garantindo que as estratégias  $s_1^*$  e  $s_2^*$  serão pelo menos fracamente colaborativamente dominantes.

**Prova:** Para a prova do teorema nos basearemos na estrutura geral de um jogo 2x2 na forma normal como representado na Figura A.1. Suponha então que as estratégias  $Y$  e  $W$  são colaborativamente dominantes no sentido estrito, então temos que  $a > b$  e  $c > d$  (para o jogador 1) e  $g > e$  e  $h > f$  (para o jogador 2). Suponha também que o par  $(Y, W)$  é instável; logo,  $a > c$  para o jogador 1 e  $h > g$  para o jogador 2.

Jogador 1	Jogador 2	
	W	Z
	X	Y
	(a, e)	(b, f)
	(c, g)	(d, h)

Figura A.1: Estrutura geral dos jogos 2x2.

Assim, para provar o teorema, basta mostrar que nos jogos em que a restrição de participação for satisfeita, existe uma função transformação  $\Psi(\cdot)$  tal que as penalidades<sup>48</sup>  $p_1(X, W) = a - c$  (e nos demais casos,  $p_1(\cdot) = 0$ ) e  $p_2(Y, Z) = h - g$  (e

<sup>48</sup> Baseadas na restrição de estabilidade (ou incentive).

nos demais casos,  $p_2(\cdot) = 0$ ) tornarão o par  $(Y, W)$  em um par colaborativamente estável, uma vez que  $\hat{U}_1(Y, W) = \hat{U}_1(X, W) = c$  e  $\hat{U}_2(Y, W) = \hat{U}_2(Y, Z) = g$ .

Na parte (A), nos precisamos mostrar que  $(Y, W)$  é um par de estratégias fortemente colaborativamente dominantes no jogo  $\Psi(\Gamma)$  quando a restrição de participação é atendida de forma estrita, ou seja, devemos mostrar que todas as vezes que a restrição de participação é atendida de forma estrita, o jogo terá a seguinte ordenação parcial dos *payoffs*:  $c > b$  e  $g > f$ . Por sua vez, para a Parte (B) precisamos mostrar que  $(Y, W)$  é um par de estratégias fracamente colaborativamente dominantes no jogo  $\Psi(\Gamma)$  quando a restrição de participação é atendida, ou seja, devemos provar que todas as vezes que a restrição de participação é atendida, o jogo terá a seguinte ordenação parcial dos *payoffs*:  $c \geq b$  e  $g \geq f$ .

As suposições assumidas inicialmente nos levam as seguintes conclusões sobre a ordenação parcial dos *payoffs*:  $a > c > d$  e  $h > g > e$ . Agora, para computarmos os equilíbrios do jogo, precisamos conhecer a relação de ordem entre os *payoffs*  $b$  e  $d$  e  $e$  e  $f$ . Então, consideraremos exaustivamente todos os possíveis casos:

*Caso 1:*  $b > d$  e  $e > f$ , então a estratégia  $Y$  é fortemente dominada por  $X$ .

*Caso 2:*  $b > d$  e  $f = e$ , então a estratégia  $Y$  é fortemente dominada por  $X$  e  $W$  é fracamente dominada por  $Z$ .

*Caso 3:*  $b > d$  e  $e < f$ , então a estratégia  $Y$  é fortemente dominada por  $X$  e  $W$  é fortemente dominada por  $Z$ .

*Caso 4:*  $b = d$  e  $e > f$ , então a estratégia  $Y$  é fracamente dominada por  $X$ .

*Caso 5:*  $b = d$  e  $f = e$ , então a estratégia  $Y$  é fracamente dominada por  $X$  e  $W$  é fracamente dominada por  $Z$ .

*Caso 6:*  $b = d$  e  $e < f$ , então a estratégia  $Y$  é fracamente dominada por  $X$  e  $W$  é fortemente dominada por  $Z$ .

*Caso 7:*  $d > b$  e  $e > f$ .

*Caso 8:*  $d > b$  e  $f = e$ , então a estratégia  $W$  é fracamente dominada por  $Z$ .

*Caso 9:*  $d > b$  e  $e < f$ , então a estratégia  $W$  é fortemente dominada por  $Z$ .

Agora, analisemos individualmente cada um deles.

*Caso 1:* Há apenas um equilíbrio puro  $(X, W)$ , e a restrição de participação não é atendida uma vez que  $a > c$ .

*Caso 2:* Existem dois equilíbrios puros  $(X, W)$ ,  $(X, Z)$  e infinitos equilíbrios mistos  $E = (M, N)$ , nos quais  $M = (1, 0)$  e  $N = (q^*, 1 - q^*)$ , com  $q^* \in [0, 1]$ . Nesse caso, a utilidade esperada do jogador 2 é  $U_2^* = e = f$ , e como  $g > e = f$ , o jogador 2 aceitará o acordo. Por sua vez, o jogador 1 tem uma utilidade esperada de  $U_1^* = aq^* + b(1 - q^*)$ . Logo, a

restrição de participação só é atendida para os valores de  $q^*$  que satisfaçam:  $c \geq aq^* + b(1 - q^*) \leftrightarrow q^* \leq \frac{c-b}{a-b}$ . Note que se a restrição de participação for atendida estritamente, então necessariamente temos  $c > b$ , o que implica que  $(Y, W)$  é fortemente colaborativamente dominante no jogo  $\Psi(\Gamma)$ . Por outro lado, se a restrição de participação for atendida na igualdade só podemos garantir que  $c \geq b$ , o que garante apenas que  $(Y, W)$  seja fracamente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ .

*Caso 3:* Há apenas um equilíbrio puro  $(X, Z)$ . Com isso, a restrição de participação só é atendida se  $c \geq b$  e  $g \geq f$ . Note que se ambas as restrições de participação forem atendidas estritamente então necessariamente temos  $c > b$  e  $g > f$ , o que implica que o par  $(Y, W)$  é fortemente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ . Se não, se ao menos uma restrição de participação for atendida na igualdade, só podemos garantir o par  $(Y, W)$  seja fracamente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ .

*Caso 4:* Existem dois equilíbrios puros  $(X, W)$  e  $(Y, Z)$  e infinitos equilíbrios misto  $E=(M, N)$ , em que  $M = (p^*, 1 - p^*)$ , com  $p^* \leq \frac{h-g}{e-f-g+h}$ ; e  $N = (0, 1)$ , e cujas utilidades esperadas são  $EU_1 = d = b$  e  $EU_2 = fp^* + h(1 - p^*)$ , respectivamente. Logo, com relação a um equilíbrio mistos não degenerado é fácil ver que a restrição de participação sempre é atendida para o jogador 1. Já para o jogador 2, a restrição de participação será atendida se, e somente se,  $\frac{h-g}{e-f-g+h} \geq p^* \geq \frac{h-g}{h-f}$ . Então, note que se a restrição de participação é satisfeita de modo estrito, então,  $g > e$ , implicando que o par  $(Y, W)$  é fortemente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ . Por outro lado, se a restrição de participação for atendida na igualdade, nos apenas podemos garantir que  $g \geq e$ , indicando que o par  $(Y, W)$  é fracamente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ .

*Caso 5:* Existem três equilíbrios em estratégia pura  $(X, W)$ ,  $(X, Z)$  e  $(Y, Z)$  e infinitos equilíbrios em estratégia mista  $E=(M, N)$ , que podem ser de duas formas:  $M = (p^*, 1 - p^*)$ , com  $p^* \in [0, 1]$ , e  $N = (0, 1)$  ou  $M = (1, 0)$  e  $N = (q^*, 1 - q^*)$ , com  $q^* \in [0, 1]$ . Para os equilíbrios mistos do tipo  $M = (p^*, 1 - p^*)$ , com  $p^* \in [0, 1]$ , e  $N = (0, 1)$ , temos que a utilidade esperada do jogador 1 é  $U_1^* = d = b$  e, uma vez que  $c > d = b$ , o jogador aceitará o acordo. Por sua vez, o jogador 2 tem uma utilidade esperada de  $U_2^* = fp^* + h(1 - p^*)$ . Deste modo, a restrição de participação só será

satisfeita para valores de  $p^*$  tais que:  $g \geq fp^* + h(1 - p^*) \leftrightarrow p^* \geq \frac{h-g}{h-f}$ . Perceba que se a restrição de participação for atendida de forma estrita, então necessariamente teremos que  $g > f$ , e, com efeito, o par  $(Y, W)$  será fortemente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ . Se a restrição de participação for atendida na igualdade, então só podemos garantir que  $g \geq f$ , e, conseqüentemente o par  $(Y, W)$  será fracamente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ . Quando o equilíbrio misto for do tipo  $M = (I, 0)$  e  $N = (q^*, 1 - q^*)$ , com  $q^* \in [0, 1]$  então a utilidade esperada do jogador 2 será  $U_2^* = e = f$  e, como  $g > e = f$ , o jogador 2 aceitará o acordo. Por outro lado, o jogador 1 tem uma utilidade esperada de  $U_1^* = aq^* + b(1 - q^*)$ . Assim, a restrição de participação só é satisfeita para valores de  $q^*$  tais que:  $c \geq aq^* + b(1 - q^*) \leftrightarrow q^* \leq \frac{c-b}{a-b}$ . Perceba que se a restrição de participação for atendida de forma estrita, então necessariamente teremos que  $c > b$  e, com efeito, o par  $(Y, W)$  será fortemente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ . Se a restrição de participação for atendida na igualdade, então só podemos garantir que  $c \geq b$ , e, conseqüentemente o par  $(Y, W)$  será fracamente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ .

*Caso 6:* Existem dois equilíbrios puros  $(X, Z)$ ,  $(Y, Z)$  e infinitos equilíbrios mistos  $E = (M, N)$ , nos quais  $M = (p^*, 1 - p^*)$ , com  $p^* \in [0, 1]$  e  $N = (0, 1)$ . Nesse caso, a utilidade esperada do jogador 1 é  $U_1^* = d = b$ , como  $c > d = b$ , o jogador 1 aceitará o acordo. Por sua vez, o jogador 2 tem uma utilidade esperada de  $U_2^* = fp^* + h(1 - p^*)$ . Logo, a restrição de participação só será atendida para os valores de  $p^*$  que satisfaçam:  $g \geq fp^* + h(1 - p^*) \leftrightarrow p^* \geq \frac{h-g}{h-f}$ . Note que se a restrição de participação for atendida estritamente, então necessariamente temos  $g > f$ , o que implica que  $(Y, W)$  é fortemente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ . Por outro lado, se a restrição de participação for atendida na igualdade só podemos garantir que  $g \geq f$ , o que garante apenas que  $(Y, W)$  é fracamente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ .

*Caso 7:* Neste caso, a ordenação geral dos *payoffs* é  $a > c > d > b$  e  $h > g > e > f$ . Assim, existem dois equilíbrios puros  $(X, W)$  e  $(Y, Z)$  e um equilíbrio misto  $E = (M, N)$ , com  $M = \left( \frac{h-g}{e-f-g+h}, \frac{e-f}{e-f-g+h} \right)$  e  $N = \left( \frac{d-b}{a-b-c+d}, \frac{a-c}{a-b-c+d} \right)$ , o qual resulta nas utilidades esperadas de  $U_1^* = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$  e  $U_2^* = \frac{eh-fg}{e-f-g+h}$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $b=f=0$ , fato que reduziria ainda mais as expressões das utilidades esperadas



de cada jogador, que seriam  $U_1^* = \frac{ad}{a-c+d}$  e  $U_2^* = \frac{eh}{e-g+h}$ . Uma vez que  $a(d-c) < c(d-c)$  segue-se daí que  $ad < c(d-c+a)$ . Assim,  $c > \frac{ad}{a-c+d} = U_1^*$ . De forma similar, uma vez que  $h(e-g) < g(e-g)$  isso implica que  $eh < g(e-g+h)$ . Logo  $g > \frac{eh}{e-g+h} = U_2^*$ . Estes fatos indicam que a restrição de participação é sempre atendida. Ademais, como  $c > b$  e  $g > f$ , logo, o par  $(Y, W)$  é fortemente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ .

*Caso 8:* Neste caso, a ordenação geral dos *payoffs* é  $a > c > d > b$  e  $h > g > e = f$ . Assim, existem dois equilíbrios puros  $(X, W)$ ,  $(Y, Z)$  e um equilíbrio misto  $E = (M, N)$ , com  $M = (1, 0)$  e  $N = (q^*, 1 - q^*)$ , com  $q^* \geq \frac{d-b}{a-b-c+d}$ . Logo, a restrição de participação é sempre atendida para o jogador 2, pois  $U_2^* = e < g$ . Para o jogador 1 temos que a restrição de participação será satisfeita se  $c \geq aq^* + b(1 - q^*) \leftrightarrow q^* \leq \frac{c-b}{a-b}$ . Então, a restrição de participação só será atendida para os equilíbrios mistos em que:  $\frac{a-c}{a-b} \leq 1 - q^* \leq \frac{a-c}{a-b-c+d}$ . Então, note que se a restrição de participação é satisfeita de modo estrito, logo,  $c > d$ , implicando que o par  $(Y, W)$  é fortemente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ . Por outro lado, se a restrição de participação for atendida na igualdade, nos apenas podemos garantir que  $c \geq d$ , indicando que o par  $(Y, W)$  fracamente colaborativamente dominante em  $\Psi(\Gamma)$ .

*Caso 9:* Há apenas um equilíbrio puro  $(Y, Z)$ , e a restrição de participação não é atendida uma vez que  $h > g$ .

## APÊNDICE 2

### Instruções:

Bom dia e obrigado por participar do nosso experimento! Por favor, leia atentamente todas as instruções deste questionário. Também solicitamos que todos os participantes permaneçam em silêncio durante todo o experimento e não se comuniquem com outros participantes durante a realização do mesmo. Caso você tenha alguma dúvida, basta chamar algum dos pesquisadores.

Durante o experimento você se deparará com alguns jogos em que terá de escolher entre duas opções. Em cada jogo você será o *jogador 1* e jogará com um *jogador 2*, que também terá duas opções de jogada. O resultado final do jogo dependerá tanto da sua escolha quanto da escolha do *jogador 2*. Vocês deverão realizar suas escolhas simultaneamente, ou seja, sem saber qual foi a jogada do outro. O jogo é representado como segue:

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
<i>X</i>	(3, 0)	(0, 1)
<i>Y</i>	(2, 3)	(1, 2)

Os valores na tabela são interpretados do seguinte modo: caso você jogue *X* e o *jogador 2* jogue *W*, você ganhará \$3 e o *jogador 2* ganhará nada (\$0); se você jogar *X* e ele jogar *Z*, então você ganhará nada (\$0) e ele obterá \$1; se você escolher *Y* e ele escolher *W*, você obterá \$2 e ele \$3; por fim, se você jogar *Y* e ele jogar *Z*, você ganhará \$1 e ele \$2. Assim, em cada célula, o primeiro valor indica quanto você (o jogador 1) ganharia dado uma determinada combinação de jogadas e o segundo valor indica quanto ele (o jogador 2) ganharia.

No experimento, aproximadamente 50% dos participantes serão classificados como *jogador 1* e 50% como *jogador 2*. Pela participação, você poderá ser remunerado da seguinte forma: aquele indivíduo que obtiver a maior pontuação esperada na soma de todos os jogos ganhará um prêmio de R\$ 250,00. Para determinar a pontuação esperada, o desempenho dos participantes classificados como *jogador 1* será medido considerando a soma de sua pontuação contra as escolhas de todos os participantes que são classificados como *jogador 2*. Em caso de empate o prêmio será repartido igualmente entre os ganhadores.

Caso não tenha dúvidas prossiga com o experimento.

**Parte I:** Lembre, você é o *jogador 1*. No jogo abaixo, indique:

- Quantas vezes você escolheria *X* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *W* será escolhida? \_\_\_\_\_

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(90, 50)
	(50, 90)	(70, 70)

**Parte II:** No jogo abaixo indique:

- Quantas vezes você escolheria *X* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *W* será escolhida? \_\_\_\_\_

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(90, 90)	(10, 70)
	(70, 10)	(50, 50)

**Parte III:** Você continua sendo o *jogador 1*. Agora, você deverá escolher entre dois jogos aquele que você prefere jogar (o jogo da esquerda ou o jogo da direita) marcando um **x** sobre o jogo. O *jogador 2* não sabe que você teve a opção de escolher entre os dois jogos e tomará o jogo escolhido por você como dado. Após escolher o jogo, repita o processo da Parte I e II para o jogo escolhido.

- Quantas vezes você escolheria *X* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *W* será escolhida? \_\_\_\_\_

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(90, 50)
	(50, 90)	(70, 70)

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(70, 50)
	(50, 70)	(70, 70)

- Quantas vezes você escolheria *X* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *W* será escolhida? \_\_\_\_\_

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(90, 50)
	(50, 90)	(70, 70)

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(80, 50)
	(50, 80)	(70, 70)

- i. Quantas vezes você escolheria  $X$  se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- ii. Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que  $W$  será escolhida? \_\_\_\_\_

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	$W$	$Z$
	$X$ (90, 90)	(10, 70)
	$Y$ (70, 10)	(50, 50)

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	$W$	$Z$
	$X$ (80, 80)	(10, 70)
	$Y$ (70, 10)	(50, 50)

**Dados pessoais:**

1- Sexo: ☐ Feminino ☐ Masculino

2- Ano em que nasceu: \_\_\_\_\_

3- Religião:

☐ Católico ☐ Evangélico (especificar: \_\_\_\_\_)

☐ Espírita ☐ Outras religiões (especificar: \_\_\_\_\_)

☐ Ateu/Agnóstico

4- Renda familiar:

☐ Até 4 Salários mínimos ☐ Entre 4 e 10 Salários mínimos

☐ Entre 10 e 20 Salários mínimos ☐ Mais de 20 Salários mínimos

5- Grau de Instrução:

☐ Superior Incompleto ☐ Superior Completo

☐ Especialização Incompleta ☐ Especialização Completa

☐ Mestrado Incompleto ☐ Mestrado Completo

☐ Doutorado Incompleto ☐ Doutorado Completo

6- Conhecimento sobre Teoria dos Jogos (marque a alternativa que mais se assemelha ao seu conhecimento)

☐ Já fez um curso ☐ Já teve algumas aulas

☐ Já leu a respeito ☐ Não tem conhecimento

Nome: \_\_\_\_\_

E-mail: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Turno: \_\_\_\_\_ Período: \_\_\_\_\_

**Instruções:**

Bom dia e obrigado por participar do nosso experimento! Por favor, leia atentamente todas as instruções deste questionário. Também solicitamos que todos os participantes permaneçam em silêncio durante todo o experimento e não se comuniquem com outros participantes durante a realização do mesmo. Caso você tenha alguma dúvida, basta chamar algum dos pesquisadores.

Durante o experimento você se deparará com alguns jogos em que terá de escolher entre duas opções. Em cada jogo você será o *jogador 2* e jogará com um *jogador 1*, que também terá duas opções de jogada. O resultado final do jogo dependerá tanto da sua escolha quanto da escolha do *jogador 1*. Vocês deverão realizar suas escolhas simultaneamente, ou seja, sem saber qual foi a jogada do outro. O jogo é representado como segue:

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(3, 0)	(0, 1)
	(2, 3)	(1, 2)

Os valores na tabela são interpretados do seguinte modo: caso o *jogador 1* jogue *X* e você jogue *W*, ele ganhará \$3 e você ganhará nada (\$0); se ele jogar *X* e você jogar *Z*, então ele ganhará nada (\$0) e você obterá \$1; se ele escolher *Y* e você escolher *W*, ele obterá \$2 e você \$3; por fim, se ele jogar *Y* e você jogar *Z*, ele ganhará \$1 e você \$2. Assim, em cada célula, o primeiro valor indica quanto ele (o *jogador 1*) ganharia dado uma determinada combinação de jogadas e o segundo valor indica quanto você (o *jogador 2*) ganharia.

No experimento, aproximadamente 50% dos participantes serão classificados como *jogador 1* e 50% como *jogador 2*. Pela participação no experimento, você poderá ser remunerado da seguinte forma: aquele indivíduo que obtiver a maior pontuação esperada na soma de todos os jogos ganhará um prêmio de R\$ 250,00. Para determinar a pontuação esperada, o desempenho dos participantes classificados como *jogador 2* será medido considerando a soma de sua pontuação contra as escolhas de todos os participantes que são classificados como *jogador 1*. Em caso de empate o prêmio será repartido igualmente entre os ganhadores.

Caso não tenha dúvidas prossiga com o experimento.

**Parte I:** Lembre, você é o *jogador 2*. No jogo abaixo, indique:

- iii. Quantas vezes você escolheria *W* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- iv. Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *X* será escolhida? \_\_\_\_\_

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(90, 50)
	(50, 90)	(70, 70)

**Parte II:** No jogo abaixo indique:

- Quantas vezes você escolheria *W* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *X* será escolhida? \_\_\_\_\_

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(90, 90)	(10, 70)
	(70, 10)	(50, 50)

**Parte III:** Você continua sendo o *jogador 2*. Agora, você deverá escolher entre dois jogos aquele que você prefere jogar (o jogo da esquerda ou o jogo da direita) marcando um **x** sobre o jogo. O *jogador 1* não sabe que você teve a opção de escolher entre os dois jogos e tomará o jogo escolhido por você como dado. Após escolher o jogo, repita o processo da Parte I e II para o jogo escolhido.

- Quantas vezes você escolheria *W* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *X* será escolhida? \_\_\_\_\_

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(90, 50)
	(50, 90)	(70, 70)

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(70, 50)
	(50, 70)	(70, 70)

- Quantas vezes você escolheria *W* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *X* será escolhida? \_\_\_\_\_

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(90, 50)
	(50, 90)	(70, 70)

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(10, 10)	(80, 50)
	(50, 80)	(70, 70)

- Quantas vezes você escolheria *W* se tivesse que jogar este jogo 15 vezes? \_\_\_\_\_
- Nos 15 jogos, quantas vezes você acredita que *X* será escolhida? \_\_\_\_\_

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(90, 90)	(10, 70)
	(70, 10)	(50, 50)

( )

<i>Jogador 1</i>	<i>Jogador 2</i>	
	<i>W</i>	<i>Z</i>
	<i>X</i>	<i>Y</i>
	(80, 80)	(10, 70)
	(70, 10)	(50, 50)

Catálogo na Fonte  
Bibliotecária Ângela de Fátima Correia Simões, CRB4-773

S729e	<p>Souza, Filipe Costa de Ensaio sobre Equilíbrio Misto de Nash / Filipe Costa de Souza. - Recife : O Autor, 2012. 107 folhas : il. 30 cm.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Francisco de Sousa Ramos e Co-orientador Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCSA. Economia, 2012. Inclui bibliografia e apêndices.</p> <p>1. Equilíbrio misto. 2. Dominância colaborativa. 3. Queima de dinheiro. 4. Experimento. I. Ramos, Francisco de Sousa (Orientador). II. Rêgo, Leandro Chaves (Co-orientador). III. Título</p> <p>330.1 CDD (22.ed.) UFPE (CSA 2012 – 065)</p>
-------	---