
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E
TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO



**A REPRESENTAÇÃO DAS MATRIZES DE
ROTAÇÕES COM O USO DOS QUATÉRNIOS:
APLICAÇÕES À FOTOGRAFOMETRIA**

Amanda Maria da Silva

Orientador: Prof. Dr. Daniel Carneiro da Silva

Dissertação de Mestrado

Recife, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E
TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO

Amanda Maria da Silva

**A REPRESENTAÇÃO DAS MATRIZES DE
ROTAÇÕES COM O USO DOS QUATÉRNIOS:
APLICAÇÕES À FOTOGRAFETRIA**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, do Centro de Tecnologia e Geociências da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, área de concentração Cartografia e Sistema de Geoinformação, defendida e aprovada dia 07/03/2014.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Carneiro da Silva

Recife, 2014

Catalogação na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

S586r Silva, Amanda Maria da.
A Representação das matrizes de rotações com o uso dos quatérnios:
aplicações à fotogrametria / Amanda Maria da Silva. - Recife: O Autor,
2014.
xvi, 134 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Carneiro da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da
Geoinformação, 2014.
Inclui Referências e Apêndices.

1. Ciências Geodésicas. 2. *Gimbal Lock*. 3. Quatérnios. 4.
Fotogrametria. I. Silva, Daniel Carneiro da. (Orientador). II. Título.

UFPE

526.1 CDD (22. ed.)

BCTG/2014-154

**“A REPRESENTAÇÃO DAS MATRIZES DE ROTAÇÕES COM O USO DOS
QUATÉRNIOS: APLICAÇÕES À FOTOGRAFOMETRIA”**

POR

AMANDA MARIA DA SILVA

Dissertação defendida e aprovada em 07/03/2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. DANIEL CARNEIRO DA SILVA

Departamento de Engenharia Cartográfica- Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. JOÃO RODRIGUES TAVARES JUNIOR

Departamento de Engenharia Cartográfica- Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. MAURÍCIO GALO

Departamento de Cartografia- Universidade Estadual do Paulista Júlio de Mesquita Filho

DEDICATÓRIA

À Marli, Isaias e Alex.

AGRADECIMENTOS

A Deus, seu filho Jesus Cristo e Nossa Senhora, pela proteção e força nos momentos de alegria e de dificuldade.

Aos meus pais, que tanto trabalharam e me apoiaram para que eu pudesse sempre prosseguir meus estudos.

Ao meu irmão, grande e melhor amigo Alex, que soube sempre me amparar e aconselhar durante o decorrer do curso.

Ao meu afilhado Kaio Gabriel, que mesmo tão pequeno me fez perceber que vale a pena persistir num sonho, para ter um futuro melhor.

Ao meu namorado e amigo de todas as horas, Marcio, por segurar em minhas mãos quando as minhas pernas teimavam em fraquejar e querer mudar o rumo.

Aos meus tios, que de forma simples me apoiaram, sendo sempre compreensíveis, em especial Djanete, Arlete Costa, José Mariano e Manoel Mariano.

Aos meus amigos, que de uma forma ou de outra me ajudaram a chegar até a conclusão desse trabalho, em especial Edinoan Padre, Michele Sena e Wanessa Oliveira.

A todos os meus colegas da graduação em Engenharia Cartográfica e do Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação que aprendi a respeitar durante o decorrer do curso.

Ao meu orientador Prof. Daniel Carneiro da Silva, pela orientação realizada em todo o decorrer do mestrado.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Cartográfica que me deram apoio para a conclusão do curso.

Ao Prof. Esdras Jafet da UPE de Nazaré da Mata, pelos conselhos durante a realização deste curso.

À professora do Centro de Educação da UFPE, Liliane Maria Teixeira Lima, de Carvalho, pelo apoio e incentivo.

Ao suporte financeiro do projeto REUNI e CAPES, para que eu pudesse dedicar-me integralmente a esta pesquisa.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

O abandono da matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas deste mundo.

Roger Bacon

RESUMO

A fotogrametria usa basicamente a equação da colinearidade em que as rotações segundo os eixos cartesianos são dadas na forma conhecida como ângulos de Euler. No entanto, podem ocorrer combinações desses ângulos que torna a matriz de rotação numa situação instável e, assim, operações acabam incorretas ou até impossíveis, em algumas aplicações fotogramétricas. Este problema, chamado de *gimbal lock* (ou *gimble lock*), é comum em robótica, visão por computadores e aeronáutica, quando é necessário se definir a posição e orientação de uma câmara no espaço tridimensional, e tem sido resolvido com a substituição dos ângulos de Euler pelo uso dos quatérnios. Em fotogrametria podem ocorrer na fotogrametria terrestre ou a curta distância. O presente estudo tem por objetivo usar esta solução para resolver os possíveis problemas de orientações críticas em fotogrametria, em aplicações na resseção espacial e orientação relativa. Para tanto há a necessidade de estudar situações de instabilidades, matrizes de rotação com ângulos de Euler e quatérnios, aplicados para identificar situações críticas em várias operações da fotogrametria. Foram avaliadas situações simuladas e reais dos ângulos de Euler, substituindo pelos quatérnios na resseção espacial e orientação relativa. Pôde ser verificado que os modelos matemáticos da resseção espacial e orientação relativa funcionam bem para situações consideradas normais da fotogrametria. Os testes efetuados comprovaram que os quatérnios são mais robustos, de modo geral, permitem que possa ser calculada a resseção espacial com quatro pontos de forma direta e consegue calcular a resseção espacial, quando usados valores iniciais aproximados, com um menor de iterações, fato que pode fornecer resultados mais confiáveis. Os quatérnios permitem cálculos de resseção espacial e orientação relativa de fotografias em posições com ambiguidades de rotações e situações críticas de *gimbal lock*.

Palavras-chave: *Gimbal Lock*, Quatérnios, Fotogrametria.

SILVA, A. M. da. **A REPRESENTAÇÃO DAS MATRIZES DE ROTAÇÕES COM O USO DOS QUATÉRNIOS: APLICAÇÕES À FOTOGRAFOMETRIA.** Recife, 2012.

Dissertação (Mestrado) – Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

ABSTRACT

Photogrammetry uses basically the equation of collinearity in which the rotations according to the Cartesian axes are given in known as Euler angles form. However, combinations of these angles of rotation matrix become an unstable situation, and thus end up wrong operations or even impossible in some applications photogrammetric may occur. This problem, called gimbal lock (or gimble lock), is common in robotics, computer vision and aeronautics, when it is necessary to define the position and orientation of a camera in three-dimensional space, and has been solved with the replacement of the angles of Euler by the use of quaternions. In photogrammetry can occur in terrestrial photogrammetry or close range photogrammetry. This study aims to use this solution to solve the possible problems of critical in photogrammetry applications in space resection and relative orientation. For this there is a need to study situations of instable, rotation matrices with Euler angles and quaternions, applied to identify critical situations in several operations of photogrammetry. Simulated the actual Euler angles, quaternions replaced by the space resection and guidance on situations and were evaluated. It could be verified that the mathematical models of space resection and orientation on work well for situations considered normal photogrammetry. The conducted tests proved that the quaternions are more robust, in general, allow can be calculated space resection with four points and can directly calculate the space resection, approximate initial values when used with a smaller iterations, the fact that can provide more reliable results. Quaternions allow calculations of space resection and relative orientation of photographs in positions with ambiguities of revolutions and critical situations gimbal lock.

Keywords: Gimbal Lock, Quaternions, Photogrammetry.

SILVA, A. M. da. **THE REPRESENTATION OF THE ROTATIONS MATRIX WITH THE USE OF QUATERNIONS: APPLICATIONS TO PHOTOGRAHMTRY.** Recife, 2012. Dissertação (Mestrado) – Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Situação de instabilidade por geometria deficiente dos pontos.	30
Figura 2- Oclusões devido posições diferentes da câmara.	31
Figura 3- Pontos do espaço objeto e centros de exposição localizados num cilindro.	31
Figura 4- Localização das marcas fiduciais em condição crítica.	32
Figura 5- Localização das marcas fiduciais de forma a evitar círculo crítico.	32
Figura 6- Rotações com os ângulos de Euler.....	33
Figura 7- Orientação dos ângulos <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i> em aviação.	35
Figura 8- Orientação definida pelos ângulos ω , $-\alpha$ e κ na Fotogrametria Terrestre. .	35
Figura 9- Orientação com os ângulos ω , $-\phi$ e κ na fotogrametria terrestre.	36
Figura 10- Interpretação geométrica do sistema <i>tilt</i> (<i>t</i>), <i>swing</i> (<i>s</i>) e azimute (α).	37
Figura 11-Composição dos sistemas de orientação com ângulos de Euler e <i>t</i> , <i>s</i> e α	38
Figura 12- Exemplo de rotação passiva e ativa.....	39
Figura 13- Esquematização da sequência <i>xyz</i>	42
Figura 14- Exemplo de <i>gimbal lock</i> com um avião	47
Figura 15- <i>Gimbal lock</i> na rotação de uma câmara.....	48
Figura 16- Indicação da localização da fotografia 9.	49
Figura 17- Rotação de <i>P</i> por um ângulo θ , pelo vetor \vec{v}	54
Figura 18- Geometria da resseção espacial.....	57
Figura 19- Geometria da resseção espacial proposto por Guan <i>et al</i> (2008).....	62
Figura 20 – Geometria da orientação relativa para condição de coplanaridade.	68
Figura 21- Indicações das posições das estações de exposições.	80
Figura 22- Posições das fotocoordenadas do experimento 4.	81
Figura 23- Posições das fotocoordenadas selecionadas do experimento 4.....	82
Figura 24- Localizações dos ângulos 27° e 153° no ciclo trigonométrico.....	84
Figura 25- Posições das fotografias na simulação do experimento 1 OR.	98
Figura 26- Posições das fotografias na simulação dos experimentos 2 e 3 OR.	99
Figura 27- Posições das fotocoordenadas do experimento 2 OR.	100
Figura 28-Posições das fotocoordenadas do experimento 3 OR.	102
Figura 29- Posições das fotografias experimento 4 OR.	103
Figura 30- Posições das fotocoordenadas do experimento 4 OR.	103

Figura 31-Posições das fotografias na simulação do experimento 5 OR.	105
Figura 32- Posições das fotocoordenadas do experimento 5 OR.	106

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CF- Centro da fotografia.

CP- Centro perspectivo

CI- Com iteração.

FT- Fotografia.

LU- *Low Upper*.

MATLAB[®]- *Matrix Laboratory*.

MMQ- Método dos Mínimos Quadrados.

MVC- Matriz variância covariância.

NASA- *National Aeronautics and Space Administration*.

NC- Não converge.

OR- Orientação relativa.

Pt- Ponto.

SI- Sem iteração.

SOR- *Successive Over-relaxation*.

SVD- Decomposição do Valor Singular.

VANTs- Veículos Aéreos Não Tripulados.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Relação dos Ângulos de Euler com outras nomenclaturas.....	34
Quadro 2- Situações em que ocorre o <i>gimbal lock</i>	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Dados de entrada do experimento 1 SI.....	75
Tabela 2- Resultado da ressecção espacial sem iteração no experimento 1 SI.....	75
Tabela 3- Fotocoordenadas obtidas para o experimento 2 SI.....	76
Tabela 4- Resultado da ressecção espacial sem iteração no experimento 2 SI.....	77
Tabela 5- Dados da simulação de fotocoordenadas do experimento 3 SI.	78
Tabela 6- Fotocoordenadas obtidas para o experimento 3 SI.....	78
Tabela 7- Resultado da ressecção espacial sem iteração no experimento 3 SI.	78
Tabela 8- Novo resultado da ressecção sem iteração no experimento 3 SI.	80
Tabela 9- Fotocoordenadas selecionadas para o experimento 4 SI.	82
Tabela 10- Dados de entrada do experimento 4 SI.....	82
Tabela 11- Resultado da ressecção espacial sem iteração no experimento 4 SI.	83
Tabela 12- Dados de entrada do experimento 5 SI.....	83
Tabela 13- Resultado da ressecção espacial sem iteração no experimento 5 SI.	84
Tabela 14- Novo resultado da ressecção sem iteração no experimento 5 SI.	85
Tabela 15- Dados de entrada do experimento 6 SI.....	85
Tabela 16- Resultado da ressecção espacial sem iteração no experimento 6 SI.	86
Tabela 17- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 1 CI.	89
Tabela 18- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 2 CI.	90
Tabela 19- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 3 CI.	90
Tabela 20- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 4 CI.	91
Tabela 21- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 5 CI.	92
Tabela 22- Novo resultado da ressecção com iteração no experimento 5 CI.	92
Tabela 23- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 6 CI.	93
Tabela 24- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 7 CI.	94
Tabela 25- Novo resultado da ressecção com iteração no experimento 7 CI.	95
Tabela 26- Dados usados na simulação das fotografias do experimento 1 OR.....	98
Tabela 27- Resultado da orientação relativa no experimento 1 OR.....	98
Tabela 28- Dados da simulação das fotografias do experimento 2 e 3 OR.	100
Tabela 29- Resultado da orientação relativa no experimento 2 OR.....	101
Tabela 30- Resultado da orientação relativa no experimento 3 OR.....	102
Tabela 31- Resultado da orientação relativa no experimento 4 OR.....	104
Tabela 32- Dados usados na simulação das fotografias do experimento 5 OR.....	105

Tabela 33- Resultado da orientação relativa no experimento 5 OR106

SUMÁRIO

FOLHA DE APROVAÇÃO.....	III
DEDICATÓRIA.....	IV
AGRADECIMENTOS.....	V
RESUMO.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
LISTA DE FIGURAS.....	IX
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	XI
LISTA DE QUADROS.....	XII
LISTA DE TABELAS.....	XIII
1. INTRODUÇÃO.....	18
1.1 Objetivos da dissertação.....	19
1.1.1 Objetivo geral.....	19
1.1.2 Objetivos específicos.....	19
1.2 Aplicações dos quatérnios.....	20
1.3 Estruturação da dissertação.....	22
2. ESTUDO DE SITUAÇÕES DE INSTABILIDADE.....	24
2.1 Indicadores de situações de instabilidades de sistemas de equações lineares.....	24
2.2 Instabilidade pelo tipo de algoritmo empregado na solução de sistemas lineares.....	28
2.3 Instabilidade por posições e distribuições de pontos.....	29
2.3.1 Geometria deficiente dos pontos.....	29
2.3.2 Distribuições relativas e densidade dos pontos.....	30
2.3.3 Cilindro crítico.....	31
2.3.4 Círculo crítico.....	31
2.4 Situações de instabilidades nas matrizes de rotação com ângulos de Euler.....	32
2.4.1 Ângulos de Euler.....	33
2.4.2 Convenções usadas nas matrizes de rotação.....	38
2.4.3 Matrizes de rotação com ângulos de Euler.....	39
2.4.4 Gimbal lock.....	44
3. MATRIZES DE ROTAÇÃO COM OS QUATÉRNIOS.....	50

3.1 Quatérnios.....	50
3.2 Representação dos quatérnios.....	50
3.3 Operações quaternárias.....	51
3.4 Classificação de quatérnios.....	52
3.4.1 Quatérnio puro.....	52
3.4.2 Quatérnio unitário.....	52
3.4.3 Quatérnio inverso.....	52
3.4.4 Conjugado de um quatérnio.....	52
3.5 Igualdade de um quatérnio.....	53
3.6 Rotações com quatérnios.....	53
3.7 Comparações de Quatérnios com ângulos de Euler.....	56
4. APlicações DE QUATÉRNIOs EM FOTOGRAmETRIA.....	57
4.1 Ressecção espacial em fotogrametria.....	57
4.1.1 Ressecção espacial com a equação da colinearidade.....	58
4.1.2 Ressecção espacial com os quatérnios.....	59
4.1.2.1 Ressecção espacial com equação da colinearidade e quatérnios	60
4.1.2.2 Ressecção espacial sem iteração.....	62
4.2. Orientação Relativa.....	68
4.2.1 Orientação relativa com a equação da colinearidade.....	69
4.2.2 Orientação relativa com equação da coplanaridade.....	70
4.2.3 Orientação relativa com quatérnios.....	72
5. EXPERIMENTOS.....	74
5.1 Aplicação da ressecção espacial.....	74
5.1.1 Aplicação da ressecção espacial sem iteração (SI).....	74
5.1.1.1 Experimento 1 SI.....	75
5.1.1.2 Experimento 2 SI.....	76
5.1.1.3 Experimento 3 SI.....	77
5.1.1.4 Experimento 4 SI.....	80
5.1.1.5 Experimento 5 SI.....	83
5.1.1.6 Experimento 6 SI.....	85
5.1.2 Aplicação da ressecção espacial com iteração (CI).....	87
5.1.2.1 Experimento 1 CI.....	89
5.1.2.2 Experimento 2 CI.....	89
5.1.2.3 Experimento 3 CI.....	90
5.1.2.4 Experimento 4 CI.....	91

5.1.2.5 Experimento 5 Cl.....	91
5.1.2.6 Experimento 6 Cl.....	93
5.1.2.7 Experimento 7 Cl.....	93
5.2 Aplicação da orientação relativa (OR).....	96
5.2.1 Experimento 1 OR.....	97
5.2.2 Experimento 2 OR.....	100
5.2.3 Experimento 3 OR.....	101
5.2.4 Experimento 4 OR.....	102
5.2.5 Experimento 5 OR.....	104
6. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	108
6.1 Resultados da ressecção espacial sem iteração.....	109
6.2 Resultados da ressecção espacial com iteração.....	110
6.3 Resultados da orientação relativa.....	113
7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	115
7.1. Conclusões.....	115
7.2 Recomendações.....	117
REFERÊNCIAS.....	118
APÊNDICE A.....	128
APÊNDICE B.....	131

1. INTRODUÇÃO

A realização de rotações no espaço é aplicada em várias áreas de conhecimento como Geociências, Robótica e Computação Gráfica. Há diversas maneiras de representá-las como, por exemplo, com os ângulos de Euler, a matriz de Rodrigues, a matriz fundamental e com quatérnios.

De modo geral podem ocorrer situações de instabilidades em combinações de rotações em áreas como Aeronáutica, Astronáutica e Fotogrametria. Em fotogrametria esses casos prejudicam a precisão dos resultados, como na orientação relativa e absoluta, quando são usadas as representações pelos ângulos de Euler. Tal situação acontece porque várias combinações de rotações resultam na mesma orientação dos eixos no espaço, em relação a um referencial terrestre, ou chegam a gerar indefinições de orientações. Um exemplo em fotogrametria é encontrado num estudo feito por Silva (1995) que, ao executar um levantamento fotogramétrico para o cálculo de coordenadas tridimensionais de pontos discretos de um tanque cilíndrico vertical, constatou que a submatriz com as variâncias e covariâncias dos parâmetros de posição e orientação de uma determinada câmara apresentavam valores com alta variância, em ordem de grandeza muito acima das demais posições. Na ocasião se verificou que havia uma situação de instabilidade na matriz de rotação devido à existência de dualidades, uma vez que apresentam o mesmo resultado com mais de uma combinação de operações com os ângulos.

O problema não ocorre nos casos comuns dos levantamentos aéreos em que a aquisição é praticamente vertical, mas pode ocorrer em fotogrametria aérea inclinada e terrestre, sendo que estes casos são pouco discutidos em trabalhos práticos e pesquisas, porque pode passar despercebido dentro de um bloco de fototriangulação. Numa fototriangulação há necessidade de obtenção da posição e orientação da câmara fotogramétrica no espaço, a partir da equação da colinearidade, que entre seus parâmetros, contém a matriz de rotação composta de rotações sucessivas em torno dos eixos x, y e z, os conhecidos ângulos de Euler ω , φ e κ , que são facilmente recuperáveis, mas sem a definição do quadrante (KRAUS, 2000), que embora seja trivial para fotografias aéreas verticais pode não ser para os outros casos. Como há múltiplas possibilidades de resultados, as operações de ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) podem

convergir para valores que não são compatíveis com a geometria do problema, não convergir ou apresentar confiabilidade baixa.

A indefinição de orientação no espaço é muito comum em Robótica, Visão computacional e Aeronáutica, sendo conhecida como *gimbal lock*, que é a perda de um grau de liberdade rotacional (ARAÚJO, 2000). Do ponto de vista matemático isto equivale à questão em que, quando escolhida uma sequência de rotações, há uma situação de alinhamento de dois eixos em torno dos quais se realizam as rotações, fazendo com que nem todo o espaço das rotações possíveis possa ser atingido numa próxima sequência de rotações (LAVIERI, 2011). A solução usual adotada nessas áreas de conhecimento é a substituição da representação dos ângulos de Euler por quatérnios, que são uma generalização dos números complexos para o campo tridimensional, com a vantagem de não acontecer o caso de instabilidade de soluções (ARAÚJO, 2000 e SHIH, 1990).

As ocorrências de dualidades e *gimbal lock* devem merecer mais atenção na fotogrametria por serem pouco discutidos e porque atualmente está havendo um grande avanço em aplicações dessa ciência em sistemas terrestres móveis de mapeamento, em Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) e sistemas aéreos com câmaras inclinadas, que criam situações fora dos padrões do planejamento fotogramétrico convencional e podem gerar situações críticas quanto à estabilidade do ajustamento e do processamento.

1.1 Objetivos da dissertação

1.1.1 Objetivo geral

Identificar e avaliar as ocorrências de situações de orientações críticas em fotogrametria, devido ao uso dos ângulos de Euler e analisar os resultados da substituição por quatérnios nas matrizes de rotação.

1.1.2 Objetivos específicos

- Identificar as principais situações de instabilidades gerais em sistemas de equações e problemas de transformações em fotogrametria de modo que não sejam confundidos com os casos devido aos ângulos de rotação.

- Identificar os casos críticos da matriz de rotação com ângulos de Euler, em suas diversas combinações e sequências de composição, que geram ambiguidades e o efeito *gimbal lock*.
- Avaliar os aspectos teóricos, práticos e resultados da substituição dos ângulos de Euler pelos quatérnios em algumas operações fotogramétricas, como resseção espacial e orientação relativa.

1.2 Aplicações dos quatérnios

Atualmente os quatérnios são usados em diversas áreas do conhecimento, para resolver problemas referentes a orientações no espaço tridimensional entre elas:

- Cinemática: no estudo de movimentos que podem gerar o *gimbal lock*, como o caso da cinemática inversa, utilizando o cálculo do autovetor (JOHNSON, 2003); ao se fazer o uso de funções elípticas e álgebra de quatérnio no estudo de movimentos de giroscópios e rotações de corpos rígidos (DAVAILUS e NEWMAN, 2005); ao ser buscar definir a posição de um corpo rígido do espaço, sem que haja singularidades, com matrizes de rotações e quatérnio unitário (DIEBEL, 2006); no estudo de cinemática de robôs (QIAO *et al*, 2010).
- Matemática: na interpolação de rotações de objetos sólidos (ARAÚJO, 2000); nos estudos de funções quaterniônicas, no estudo da hiperperiodicidade das funções exponenciais e logarítmicas com quatérnios e na fórmula de integral de Cauchy (BARREIRO, 2009).
- Geodésia: na transformação do *datum* geodésico baseado em um quatérnio, usando o MMQ (SHEN, CHEN e ZHENG, 2006); na determinação de altitude de satélites artificiais (FERREIRA *et al*, 2008); ao resolver o problema de transformação de coordenadas tridimensionais com quatérnios de modo iterativo, através do método paramétrico (ZENG e YI, 2012).
- Robótica: ao se determinar a posição, orientação e a velocidade angular de um objeto (GODDARD, 1997); no posicionamento, como modelo matemático para sintetizar projetos de robôs (GARCIA, 1999; SANTOS,

2003); na calibração remota de sistemas robóticos, com a utilização de sensores internos e externos (MARQUES, 2005); para rastrear movimentos de um corpo humano, com filtro de Kalman baseado em quatérnios (YUN e BACHMANN, 2006); ao se estimar a posição de uma câmara, usando linhas de correspondências, com matriz de rotação com quatérnios (JIANG, WANG, ZHENG, 2010); na estimativa de orientação de uma câmara em tempo real, a partir de uma única imagem distorcida (WERNECK, 2012); no controle da cinemática de robôs (MARTINS, 2013).

- Visão computacional: na orientação de câmaras, com uso de dados mínimos para estimar essa orientação, em problemas de correspondências de ponto 2D para 3D, através de autovetores (BUJŇÁK, 2012).
- Astronomia: ao buscar estimar posições, através de matrizes de rotações linearizadas e álgebra de quatérnio durante o processo de derivações, para evitar singularidade (BARFOOT, FORBES e FURGALE, 2010); para se estimar a posição de corpos rígidos (GROŸEKATTHÖFER e YOON, 2012).
- Geomática: na determinação de altitude com precisão, usando GPS e quatérnios (WON, KO e LEE, 2001).
- Biomedicina: na orientação de uma molécula (KARNEY, 2007); na modelagem cinemática das articulações humanas, com interpolação linear esférica (PENNESTRÌ e VALENTINI, 2009); no mapeamento da estrutura global da proteína (HANSON e THAKUR, 2012).
- Engenharia naval: na estimativa de posição, com filtro de Kalman estendido (MARINS, 2000); ao se estudar métodos de navegação inercial aplicados a lançamentos submarinos (LAVIERI, 2011).
- Computação gráfica: no estudo de animação em tempo real (MALVEZZI, 2004).

Em se tratando dos trabalhos desenvolvidos com quatérnios em fotogrametria podem ser citados:

- Orientação absoluta: ao se fazer o ajustamento com três ou mais pontos (HORN, 1987).
- Triangulação, com a interpolação linear esférica (JUN, DONGHONG e YONGSHENG, 2008).

- Métodos de ajustamento de blocos (TRIGGS *et al*, 1999);
- Equação da colinearidade e transformação isogonal (GALO e TOZZI, 2001).
- Orientação exterior: ao realizar a orientação exterior, com ajustamento linear (JI *et al*, 2000).
- Automação de processos do LIDAR e de pontos 3D do modelo digital da superfície (ARMENAKIS, GAO e SOHN, 2012).
- Orientação interior com pontos de fuga, com uma ortonormalização da matriz de rotação (FÖRSTNER, 2012).

Para as aplicações fotogramétricas que são abordadas nesta dissertação, foram usadas referências já citadas e principalmente as seguintes:

- Ressecção espacial: Cálculo sem a necessidade de valores iniciais com um quatérnio obtido através de autovetores (GUAN *et al*, 2008); Cálculo da ressecção espacial com interpolação linear esférica (JIANG *et al*, 2010).
- Orientação relativa: Orientação relativa e ressecção espacial (HINSKEN, 1988); Orientação relativa com a equação da coplanaridade, sem a necessidade de valor inicial (HORN, 1989); orientação relativa, usando a condição de coplanaridade e quatérnios (GALO, 2003); Orientação relativa com quatérnios duais (LIN *et al*, 2010).
- Cálculo das distâncias do centro perspectivo aos pontos no espaço objeto (GRAFAREND e SHAN, 1997).
- Cálculo das matrizes de rotações (POPE, 1970).

1.3 Estruturação da dissertação

O presente trabalho está estruturado em sete capítulos. O Capítulo 1- introdução, onde é feita a contextualização da temática, apresentação dos objetivos da dissertação e revisão do estado da arte.

No Capítulo 2 é feito um levantamento bibliográfico sobre: Situações de instabilidade, Ângulos de Euler e *Gimbal lock*.

No Capítulo 3 é feito um estudo sobre a matemática básica de quatérnios e a formação das matrizes de rotações com os quatérnios, por ser a solução proposta para esta dissertação.

No Capítulo 4 trata-se das aplicações fotogramétricas abordadas nesta pesquisa: ressecção espacial com quatérnios e a orientação relativa com quatérnios

No Capítulo 5 são estudados os elementos necessários para implantação dos quatérnios na ressecção espacial e orientação relativa e os resultados obtidos com as implementações.

No Capítulo 6 apresenta-se uma síntese dos resultados obtidos com as implementações de quatérnios na ressecção espacial e na orientação relativa.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e recomendações deste trabalho.

2. ESTUDO DE SITUAÇÕES DE INSTABILIDADE

Neste capítulo são estudadas de forma breve, as situações de instabilidades que podem ocorrer ao serem resolvidos sistemas de equações, seja por motivos do próprio modelo matemático (como, por exemplo, o uso das matrizes de rotações com os ângulos de Euler), seja pelo tipo de algoritmo empregado para a solução ou pela posição dos pontos que entram na solução. Esta abordagem tem o objetivo de mostrar que situações de instabilidades podem ocorrer por várias origens e é necessário se ter algumas pistas do possível, ou possíveis, motivos, além dos casos relativos às matrizes de rotações, que serão objeto de outros capítulos.

A forma mais conhecida de análise de soluções de sistemas de equações vem da análise de determinantes (GEMAEL, 1994). A partir deles é possível definir se um sistema é possível (determinado ou indeterminado), ou impossível. As dificuldades aparecem quando os determinantes têm valores muito diferentes entre si, ou tem valores muito grandes, ou muito pequenos; o que é provocado por incógnitas que tem alta correlação entre si ou por inconsistência de dados com erros grosseiros. Estes dois últimos aspectos são, certamente, a maior origem dos problemas na área de ciências geodésicas aplicadas, porque são usados modelos matemáticos que inherentemente tem parâmetros correlacionados e são usados dados ou observações com erros aleatórios e sistemáticos. Esses erros são responsáveis por sua vez também por inconsistência dos dados, que os métodos de MMQ podem resolver.

Os aspectos dos tópicos discutidos a seguir tem muito a ver com a teoria dos determinantes já citada, mas chama a atenção para procedimentos que de forma mais direta podem ajudar a detectar situações de instabilidades.

2.1 Indicadores de situações de instabilidades de sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares é dito ser mal condicionado quando uma pequena mudança nos elementos, do termo independente ou da matriz dos coeficientes, acarretar uma grande mudança na solução se comparada com a solução inicial. O mau condicionamento acontece devido à quase singularidade da matriz dos coeficientes (CAMPOS FILHO, 2001). A título de exemplo de sistema mal

condicionado é mostrado o sistema a seguir (CAMPOS FILHO, 2001), que tem como solução a equação 2.

$$\begin{cases} x + 0,99y = 1,99 \\ 0,99x + 0,98y = 1,97 \end{cases} \quad (1)$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Caso o valor 0,98 da segunda equação de (1) seja modificado para 0,99 a solução muda completamente (CAMPOS FILHO, 2001):

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -0,0101 \end{pmatrix} \quad (3)$$

É possível observar que as equações do sistema mostrado na equação 1 apresentam coeficientes angulares bem parecidos. Do ponto de vista geométrico essas equações são quase coincidentes. Este exemplo mostra que sistemas de equações, cujas retas são quase coincidentes formam um sistema mal condicionado (BAJPAI, MUSTOE e WALKER, 1980).

Nos trabalhos de Gemael (1994) e Berberan (2002) encontram-se várias descrições de motivos e indicadores de sistemas mal condicionados. A seguir serão citados alguns:

- Determinante de uma matriz que tenha apenas valores pequenos, mas cuja respectiva inversa contenha valores numéricos grandes. Por exemplo, a matriz M a seguir e sua inversa M^{-1} :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,001 & 1 \end{pmatrix}, M^{-1} = \begin{pmatrix} -1000 & 1000 \\ 1001 & -1000 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Det}(M) = -0,001 \quad (5)$$

$$\text{Det}(M^{-1}) = -1000 \quad (6)$$

Na equação 5 a matriz M possui determinante de pequeno valor numérico, enquanto na equação 6 o determinante apresenta grande valor numérico.

Entretanto é importante deixar claro que se o determinante for composto de elementos de alto valor, do ponto de vista numérico, não significa sempre que a matriz é mal condicionada (GEMAEL, 1994), portanto o valor do determinante nem sempre é um bom modo de verificar o condicionamento de um sistema (CAMPOS FILHO, 2001).

- Inversas muito sensíveis ou instáveis. Seja, por exemplo, a matriz M a seguir (GEMAEL, 1994):

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Se o elemento m_{11} de M mudar de cinco para 4,99 a matriz inversa (equação 8) será completamente diferente de M^{-1} da equação 7, o que pode comprometer seriamente os resultados esperados dos cálculos.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 212,5 & -128,125 & -53,125 & 31,25 \\ -128,125 & 77,53125 & 31,78125 & -18,8125 \\ -53,125 & 31,78125 & 14,03125 & -8,3125 \\ 31,25 & -18,8125 & -8,3125 & 5,125 \end{pmatrix} \quad (8)$$

- Forte correlação entre parâmetros. Numericamente isto acontece quando o valor absoluto da correlação é próximo de um. Para haver independência entre os parâmetros o valor ideal deve ser zero (ou bem próximo deste) (MONTGOMERY e RUNGER, 2002).

Um exemplo de correlação forte em fotogrametria é encontrado em Silva (1995) no qual a Matriz Variância Covariância (MVC) dos parâmetros de calibração de uma câmara gerou a matriz de correlações mostrada a seguir (a forte correlação entre k_2 e A' de -0,87 está realçada):

$$\begin{array}{ccccccc} & f & x_0 & y_0 & k_1 & k_2 & A' & B' \\ \hline f & 1,000 & 0,070 & 0,040 & -0,040 & 0,020 & -0,030 & -0,020 \\ x_0 & 0,070 & 1,000 & -0,000 & -0,070 & -0,050 & 0,230 & -0,020 \\ y_0 & 0,040 & -0,000 & 1,000 & -0,020 & -0,020 & -0,020 & 0,160 \\ k_1 & -0,040 & -0,070 & -0,020 & 1,000 & -0,010 & 0,050 & -0,030 \\ k_2 & 0,020 & -0,050 & -0,020 & -0,010 & 1,000 & -0,870 & -0,140 \\ A' & -0,030 & 0,230 & -0,020 & 0,050 & -0,870 & 1,000 & 0,100 \\ B' & -0,020 & -0,020 & 0,160 & -0,030 & -0,140 & 0,100 & 1,000 \end{array} \quad (9)$$

em que:

f distância focal;

x_0 e y_0 coordenadas do ponto principal;

k_i parâmetros de distorção radial, com $i = 1,2$;

A' , B' fatores de correção de escala e não ortogonalidade.

- Análise da distribuição de probabilidade t -Student dado por (BERBERAN, 2002):

$$t_{m_t-1, \alpha_t/2} = \frac{x_i}{\sigma x_i} \quad (10)$$

em que:

m_t é o número de equações;

α_t representa o nível de confiança dos dados;

x_i é o parâmetro;

σ_{x_i} variância de x_i .

O valor de t é calculado para $m - 1$ graus de liberdade para medir o nível de confiança α . Tem a finalidade de avaliar se uma variável pode ser considerada como valor zero e ser retirada do modelo matemático ou permanecer. Esta análise é útil quando, além do valor baixo, se suspeita que haja correlação entre incógnitas, fato que pode tornar o cálculo instável (BERBERAN, 2002);

- Os números de condição de uma matriz podem ser um meio apropriado para medir o quanto a matriz é mal condicionada (CAMPOS FILHO, 2001), mas nenhum indicador reúne condições para permitir um diagnóstico definitivo de mau condicionamento (GEMAEL, 1994). Existem vários deles, como exemplos: o número de condição de Turing, de Todd, de H. Quando esses números são elevados significa que pode haver situação de instabilidade. As equações a seguir apresentam os modelos matemáticos desses números:

- Números de Turing da matriz M:

$$T_1 = \frac{t t'}{n} \begin{cases} t^2 = \text{tr}(M^t M) \\ t'^2 = \text{tr}[(M^{-1})^t M^{-1}] \end{cases}; \quad (11\ i)$$

$$T_2 = n \max|m_{ij}| \max|m'_{ij}|. \quad (11\ ii)$$

em que:

tr é o traço da matriz;

n dimensão da matriz;

m_{ij} é um elemento da matriz M .

Se o traço da matriz for muito grande, ao dividi-la pelo valor que indica a ordem da matriz, o valor de T_1 será muito alto. Já o valor T_2 será muito elevado quando o maior elemento da matriz em questão for muito grande.

- Número de Todd (com λ_i sendo os valores próprios da matriz M):

$$N_{TODD} = \left| \frac{\max \lambda}{\min \lambda} \right| \quad (12)$$

Se o maior valor próprio da matriz for muito grande e o menor valor próprio for bem pequeno, logo a divisão será um valor bastante elevado.

- Número de condição H (em que λ_i representa os valores próprios da matriz produto $M^t M$):

$$H = \sqrt{\frac{\max u}{\min u}} \quad (13)$$

De modo geral em alguns softwares, como o MATLAB® e Scilab, é comum que exista um indicador de mau condicionamento, o "rcond", ao invés do número de condição. A função rcond, nesse software, indica o número recíproco (que em linguagem matemática quer dizer número inverso) do número de condição (MATLAB®, 2013).

2.2 Instabilidade pelo tipo de algoritmo empregado na solução de sistemas lineares

Acontecem situações de instabilidade devido às características do algoritmo adotado para a solução de sistemas de equações normais, em combinação com o número de algarismos significativos dos programas e do processador do computador. Estes casos são comuns na área de Geociências, principalmente em cálculos pelo MMQ.

Só é confiável resolver um problema de mínimos quadrados com equações normais se o número de condição da matriz dos coeficientes for menor que o inverso da raiz quadrada da unidade de arredondamento do computador em questão. O modelo matemático necessário para assegurar tal confiabilidade (GARNÉS, 1996) é:

$$C(M) < \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (14)$$

em que:

C representa o número de condição;

M é a matriz dos coeficientes;

u é a unidade de arredondamento do computador.

Para a resolução do sistema de equações podem ser usados métodos diretos ou iterativos. Dentre os métodos diretos encontram-se: Método de Inversão, Regra

de Cramer, *Banachievicz*, Escalonamento, *Cholesky*, QR, Decomposição *Low Upper* (LU) e Decomposição do Valor Singular (SVD). Os métodos mais recomendado são o QR e o SVD, que é uma das ferramentas mais importantes na análise do problema de mínimos quadrados linear, pois não forma, explicitamente, equações normais (GARNÉS, 2001).

Há também métodos iterativos para resolver sistemas de equações, como: Jacobi, Gauss-Seidel, Sobre-relaxação sucessiva (do inglês *Successive Over-relaxation-SOR*), Gradientes conjugados e Gradientes conjugados com pré-condicionamento. O método que converge melhor é o dos gradientes conjugados com pré-condicionamento, quando o número de condição for grande (como por exemplo, elevado a potência 10) e então podem ser agrupadas todas as observações (GARNÉS, 2001).

2.3 Instabilidade por posições e distribuições de pontos

As situações de instabilidades por posições e distribuições de pontos usados obrigatoriamente em muitas operações geodésicas, e particularmente em fotogrametria, a rigor tem a ver diretamente com a possibilidade de existência, ou não, de dependências lineares ou de correlações, entre as variáveis. Aqui são apresentados alguns casos que devem ser evitados, classificados em três grupos: a) geometria deficiente dos pontos; b) distribuições relativas e densidade de pontos; c) Círculo ou cilindro crítico.

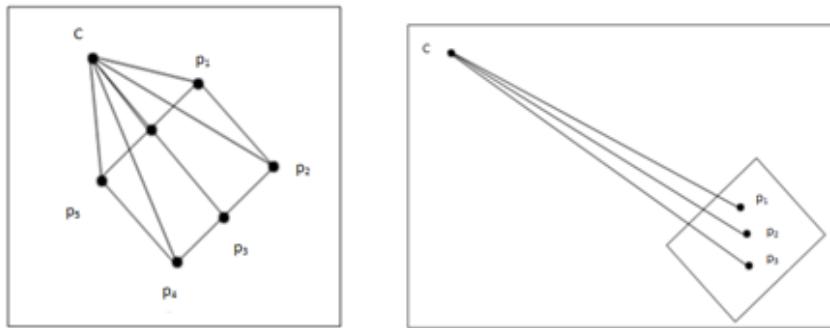
2.3.1 Geometria deficiente dos pontos

A figura geométrica com melhor rigidez é o triângulo equilátero e os pontos de apoio a serem usados em diversas operações fotogramétricas deviam preferencialmente atender a essa distribuição. Porém na prática pode ocorrer formação de triângulo com um ângulo agudo muito pequeno ou com os três pontos quase colineares. Por exemplo, em fotogrametria pode ser o caso de uso de três pontos quase colineares para cálculo da resseção espacial ou para orientação absoluta de um modelo estereoscópico. A Figura 1 mostra exemplos de posição favorável e desfavorável para a resseção espacial, sendo C é o centro perspectivo

(CP) e p_i , com i variando de 1 à 5, as coordenadas no espaço objeto. No primeiro caso (Figura 1a) a configuração dos pontos é favorável. A geometria passa a ser desfavorável, na Figura 1b, pelo pequeno ângulo de visada e pela colinearidade dos pontos p_1 , p_2 e p_3 .

Figura 1- Situação de instabilidade por geometria deficiente dos pontos.

Figura 1 (a) Configuração favorável **Figura 1 (b)** Configuração desfavorável



2.3.2 Distribuições relativas e densidade dos pontos

Ocorrem algumas situações de inconsistências no cálculo da orientação relativa por conta da distribuição dos pontos homólogos. Para que esta operação seja bem sucedida devem ser eliminadas as paralaxes em y em seis pontos (os pontos de *Von-Grüber*). Na fotogrametria digital esta operação pode ser realizada em dezenas (e até centenas) de pontos, mas é necessário que as duas imagens tenham correspondência entre si, que os pontos homólogos estejam bem distribuídos e que sejam inequivocamente identificados e medidos. Isto é obtido com o processamento automático de correspondências (*matching*) de imagens digitais com o devido recobrimento, mas podem ocorrer situações de inconsistências, porque dado um ponto numa imagem, o ponto correspondente na outra imagem pode não existir, devido a fatores como: obstáculo cobrindo o ponto, por mudança da posição da câmara que cria oclusões, ou por existirem múltiplos homólogos devido a padrões repetitivos (GALO, 2003; SANTOS, 2006). A Figura 2 mostra duas imagens, na imagem da esquerda aparecem as fachadas das casas que deixam de existir na imagem da direita devido à mudança de posição da câmara.

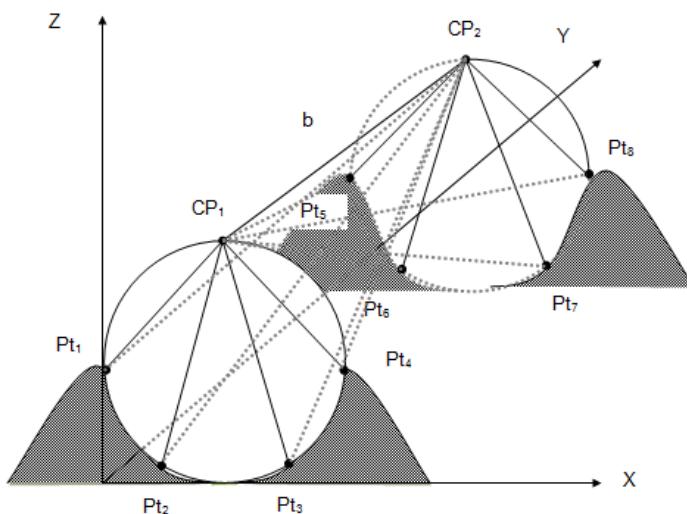
Figura 2- Oclusões devido posições diferentes da câmara.



2.3.3 Cilindro crítico

Uma situação instável pela posição dos pontos pode ocorrer na orientação relativa, quando o terreno é acidentado e coincide que os pontos estejam em um cilindro, como mostrado na Figura 3. Este caso é conhecido como Cilindro Crítico, em que os pontos Pt de 1 a 8, e os centros perspectivos (CP_1 e CP_2) estão num cilindro (KRAUS, 2000).

Figura 3- Pontos do espaço objeto e centros de exposição localizados num cilindro.

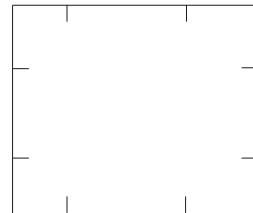


Fonte: Adaptado de Kraus (2000).

2.3.4 Círculo crítico

Pode ocorrer o círculo crítico em casos de orientação interna, quando são medidas oito marcas fiduciais distribuídas como mostra a Figura 4 (GHOSH, 1925).

Figura 4- Localização das marcas fiduciais em condição crítica.



Fonte: Adaptado de Ghosh (1925).

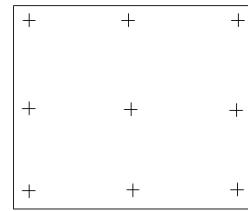
A distribuição dessas marcas fiduciais, embora não seja comum nas câmeras fotogramétricas usuais, encontra-se semelhante a um círculo. O modelo matemático gerado por essa distribuição é (GHOSH, 1925):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (15)$$

em que r^2 representa uma constante e estabelece a dependência dos termos. Este modelo apresenta fortes correlações.

Uma distribuição ideal é apresentada na Figura 5 em que foi introduzido um nono ponto no centro (GHOSH, 1925).

Figura 5- Localização das marcas fiduciais de forma a evitar círculo crítico.



Fonte: Adaptado de Ghosh (1925).

2.4 Situações de instabilidades nas matrizes de rotação com ângulos de Euler

Os ângulos de Euler são usados normalmente em fotogrametria, e em muitas outras disciplinas, na formação das matrizes de rotação, mas em muitos casos apresentam situações de instabilidades, dualidades e condições críticas, que serão discutidas a seguir.

2.4.1 Ângulos de Euler

Os ângulos de rotação ω , φ , κ associados aos eixos x, y e z, são chamados de ângulos de Euler. Em fotogrametria, são os parâmetros que indicam a orientação, ou também atitude, da fotografia no espaço e fazem parte dos parâmetros de orientação exterior, ao lado dos parâmetros de posição (LUGNANI, 1987). Significam rotações que ocorrem no sistema local de coordenadas de cada câmara, em relação ao referencial do terreno e que são aplicadas com os objetivos de tornar a câmara paralela aos eixos definidores do sistema de coordenadas no espaço objeto (COELHO e BRITO, 2007).

A orientação feita pelos ângulos de Euler representam as rotações em torno dos eixos cartesianos, sendo que ω representa a rotação em torno do eixo x, φ é a rotação em torno do eixo y e κ representa a rotação em torno do eixo z (Figura 6). Nota-se que o sentido da rotação é dextrógiro e anti-horário olhando para a origem do sistema.

Figura 6- Rotações com os ângulos de Euler.

Figura 6 (a)- Rotação ângulo ω .

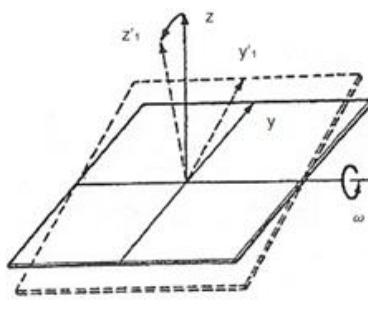


Figura 6 (b)- Rotação ângulo φ .

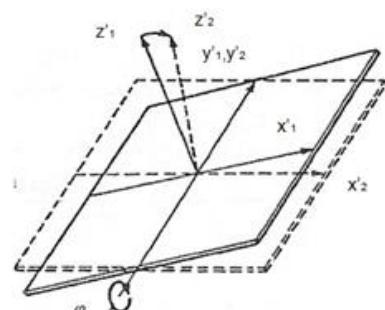
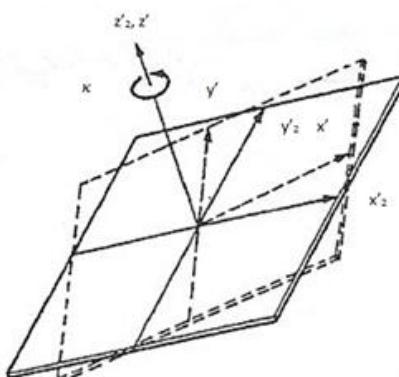


Figura 6 (c)- Rotação ângulo κ



Fonte: Adaptado de Wolf e Dewit (1983).

Na Figura 6 (a) é mostrada a rotação em torno do eixo x por meio do ângulo ω . Em 6 (b) a rotação em torno do eixo y (através do ângulo φ) e em 6 (c) a rotação em torno do eixo z (ângulo κ). Nestas figuras $x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, z', x', y'$ são os eixos após as rotações. Este sistema é o mais comum da fotogrametria, no entanto há outras nomenclaturas para esses ângulos, adotadas, por exemplo, em aviação, sensoriamento e outras áreas, como *roll*, *pitch* e *yaw* (NASA, 2008; FIGUEIREDO, 2005), em sistemas inerciais *roll*, *pitch* e *Heading* (BÄUMKER e HEIMES, 2001). Em fotogrametria terrestre podem ser usados ω , $-\alpha$ (ou $-\varphi$), K (SLAMA, 1980; WOLF e DEWIT, 1983). Em fotogrametria inclinada também é usado o sistema *tilt*, *swing*, α (azimute) (WOLF e DEWIT, 1983).

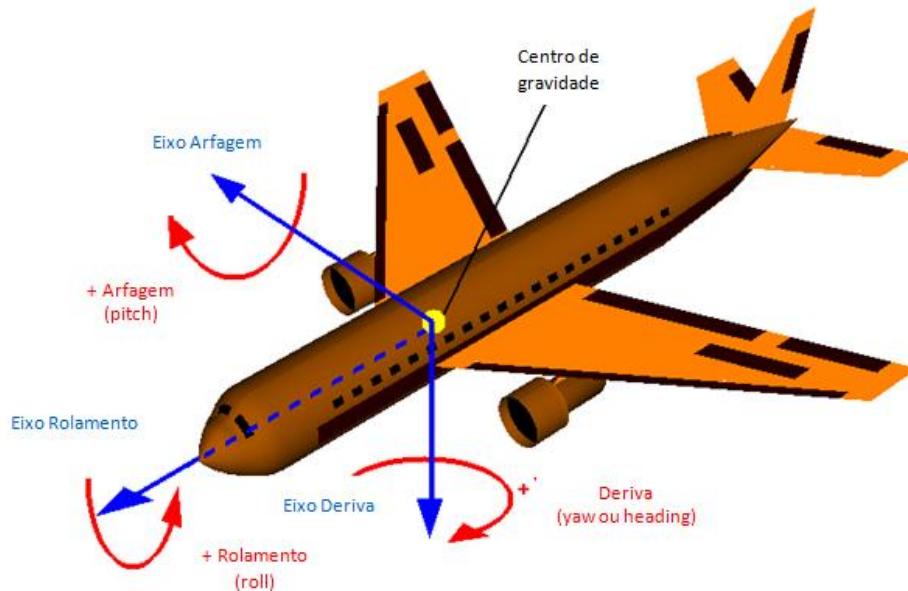
O Quadro 1 relaciona os ângulos de Euler com as outras nomenclaturas, menos para o sistema *tilt*, *swing*, α que não tem uma equivalência direta.

Quadro 1- Relação dos Ângulos de Euler com outras nomenclaturas.

ω	φ	κ
- <i>Roll</i>	- <i>Pitch</i>	- <i>Yaw</i>
<i>Roll</i>	<i>Pitch</i>	<i>Heading</i>
ω	$-\alpha$ (ou $-\varphi$)	$-\kappa$

A orientação baseada nos ângulos *roll* (rolamento), *pitch* (arfagem) e *yaw* (deriva) são aplicados ao controle da orientação de aeronaves (NASA, 2008 e FIGUEIREDO, 2005). Os ângulos *roll* (rolamento), *pitch* (arfagem) e *heading* (que equivale ao ângulo *yaw*) são aplicados em sistema de navegação inercial, que por sua vez é baseado na integração contínua das acelerações medidas pelos acelerômetros. Para a correção devido à gravidade, e outros efeitos, as acelerações devem ser transformadas num sistema de coordenadas local, que é o sistema de coordenadas de navegação, e essa transformação é feita via matriz de rotação que inclui esses três ângulos (BÄUMKER e HEIMES, 2001). Esses ângulos em aeronáutica estão ilustrados na Figura 7.

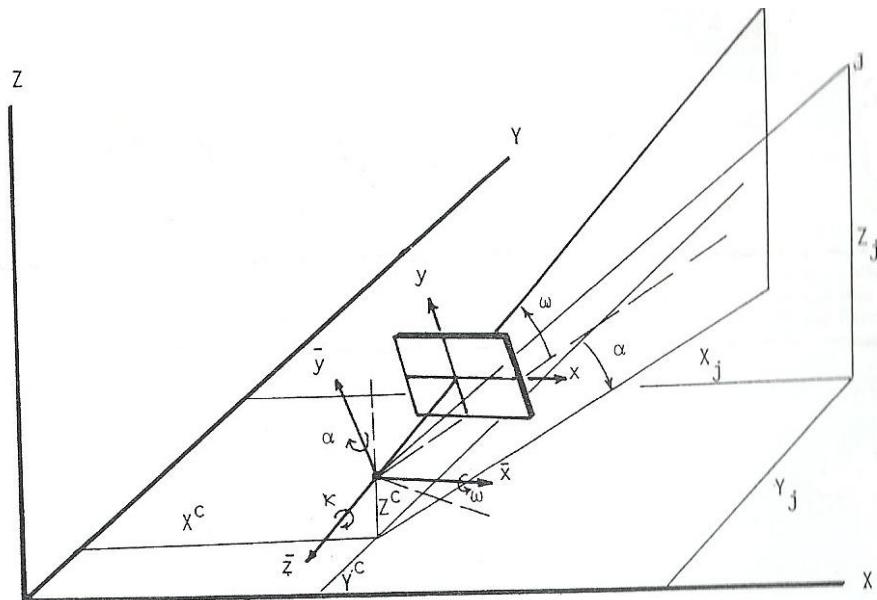
Figura 7- Orientação dos ângulos *roll*, *pitch* e *yaw* em aviação.



Fonte: Adaptado de NASA (2008).

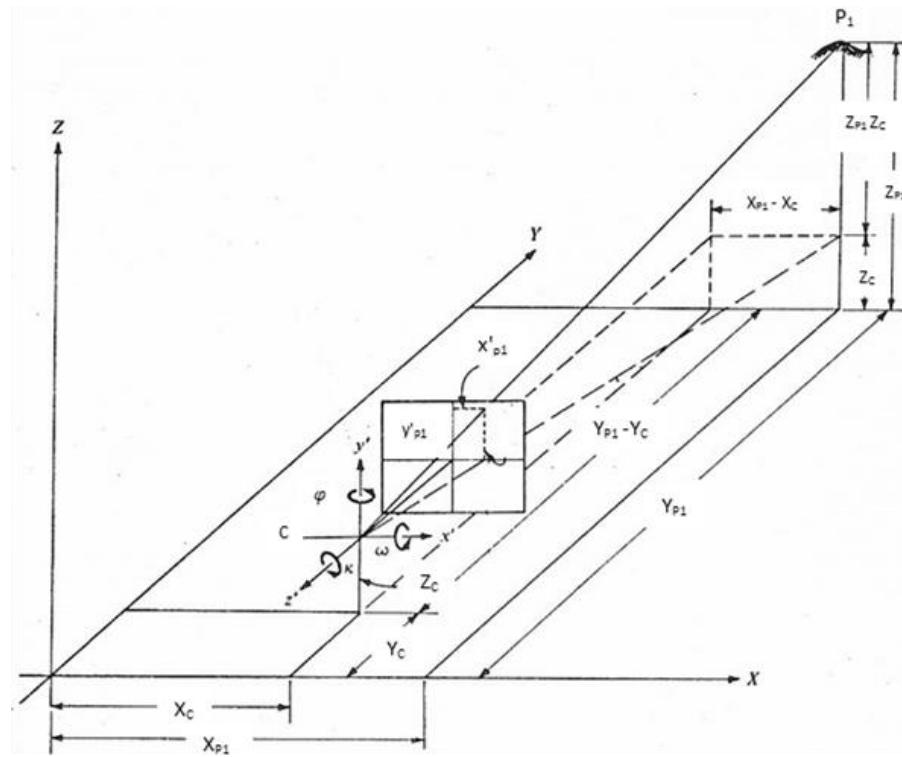
O sistema de orientação definida pelos ângulos ω , $-\alpha$ e κ é aplicado na fotogrametria terrestre e pode ser visto na Figura 8 (SLAMA, 1980). Também há autores que usam o sistema ω, φ e κ , mas tendo o φ com sentido horário, como ilustrado na Figura 9 (WOLF e DEWIT, 1983).

Figura 8- Orientação definida pelos ângulos ω , $-\alpha$ e κ na Fotogrametria Terrestre.



Fonte: SLAMA (1980).

Figura 9- Orientação com os ângulos ω , $-\varphi$ e κ na fotogrametria terrestre.



Fonte: Adaptado de Wolf e Dewit (1983).

Outro sistema de orientação que também é muito utilizado é: *tilt* (t), *swing* (s) e azimute (α) (Figura 10). O ângulo t é o ângulo entre o eixo óptico da câmara e a linha vertical. O ângulo de inclinação proporciona a magnitude da inclinação de uma fotografia, que pode ser dada através de diferentes modos (no sentido frontal ou nos sentidos laterais).

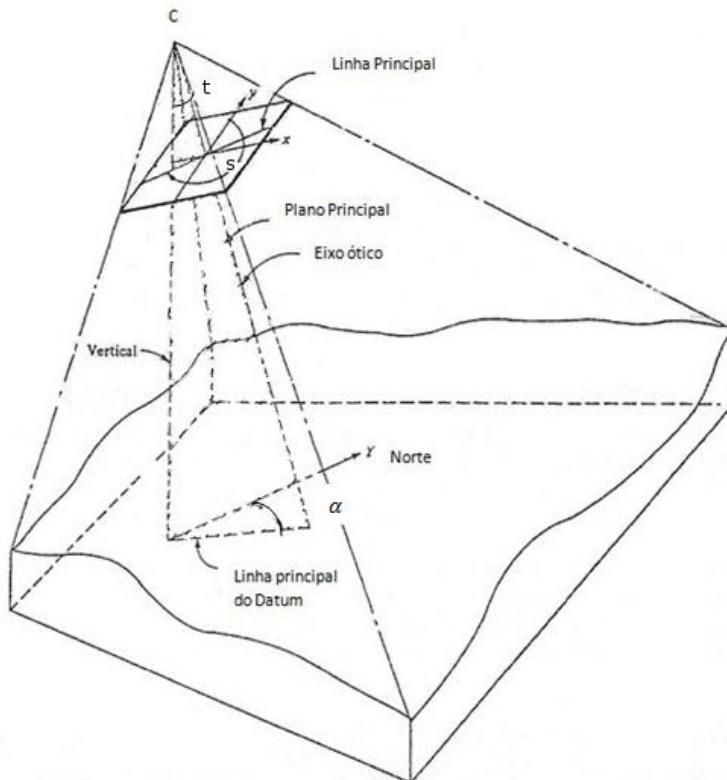
O ângulo s é a posição da linha principal na fotografia com relação ao sistema de referência do eixo fiducial. É definido como o ângulo dos ponteiros do relógio, medido no plano da fotografia, a partir do eixo y positivo ao fim do nadir da linha principal e dá a direção de inclinação na fotografia.

O ângulo α dá a orientação do plano principal com relação ao eixo do sistema de referência do espaço objeto. É medido no sentido horário a partir do eixo Y do solo (geralmente norte) para a linha principal do *datum* e no plano de referência (ou em um plano paralelo ao plano de referência). A equação a seguir apresenta uma relação matemática que pode ser estabelecida entre os ângulos ω , φ de Euler e t (TEWINTEL, 1952):

$$\operatorname{tg} t = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \omega} \quad (16)$$

O sistema *tilt-swing-azimute* não tem relação direta com os ângulos de Euler. Estes ângulos de Euler podem ser obtidos através dos ângulos do sistema *tilt*, *swing* e azimute com um cálculo vetorial (DEWITT, 1996).

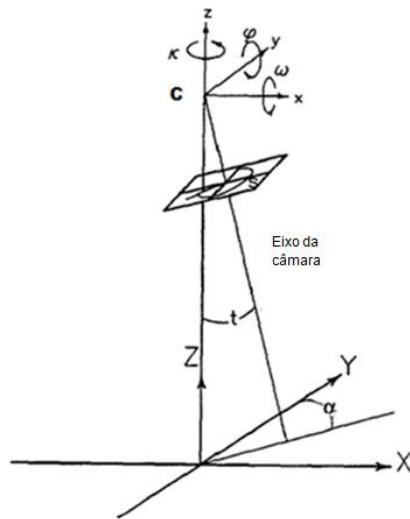
Figura 10- Interpretação geométrica do sistema *tilt* (*t*), *swing* (*s*) e azimute (α).



Fonte: Adaptado de Wolf e Dewit (1983)

Os dois sistemas são diferentes e o sistema com os ângulos ω , φ e κ traz mais vantagens computacionais e por isso é mais popular, mas o sistema *t*, *s* e α é compreendido de modo mais fácil e tem sido utilizado (WOLF e DEWITT, 1983). A Figura 11 mostra as interpretações geométricas dos dois sistemas de orientação.

Figura 11-Composição dos sistemas de orientação com ângulos de Euler e t , s e α .



Fonte: Adaptado de Engineer manual (1993).

Este sistema t , s e α , também tem aplicações na robótica e é comentado, por exemplo, em BATISTA *et al* (1995) e BARRETO (2000).

2.4.2 Convenções usadas nas matrizes de rotação

Para as rotações serem perfeitamente definidas no espaço 2D e 3D, e não haver dúvidas de interpretação, devem estar claras as seguintes convenções quanto aos sinais algébricos:

- Se a rotação é ativa ou passiva;
- Qual o sentido de giro positivo;
- As posições relativas dos eixos dextrógiro ou levógiro.

A Figura 12 mostra rotações passiva e ativa tomando como referência um retângulo. Na rotação ativa o sistema de referência permanece estático e o objeto é transformado. Na rotação passiva o sistema varia e o objeto fica estacionário (LUGNANI, 1987). Em resumo, o termo ativo ou passivo refere-se ao objeto.

Figura 12- Exemplo de rotação passiva e ativa.

Figura 12 (a)- Rotação passiva

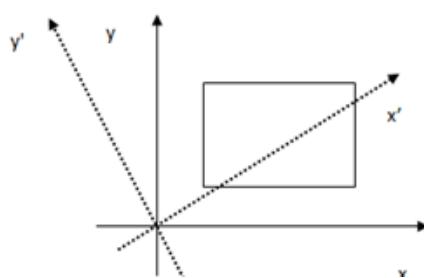
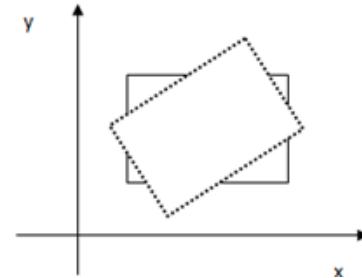


Figura 12 (b)- Rotação ativa.



Na Figura 12 (a) o sistema cartesiano é rotacionado da posição inicial (em linha contínua) para a posição final (em linha tracejada), enquanto o espaço permanece estático e o sistema de referência varia. Já na Figura 12 (b), rotação ativa, o espaço é transformado (da linha contínua para tracejada), enquanto o sistema de referência permanece estacionário (LUGNANI, 1987). Em termos práticos se passa de um para outro sistema apenas trocando os sinais dos senos que compõem as matrizes de rotações ou trocando os sinais da rotação, ou seja, o resultado da rotação de sentido positivo num sistema é o mesmo com sinal negativo no outro.

O sentido de rotação positivo deve atender à convenção de giro anti-horário ou horário. No sistema dextrógiro (de mão direita) as posições relativas dos eixos xyz são equivalentes às posições dos dedos polegar, indicador e médio, respectivamente, estendidos e fazendo 90º entre eles, enquanto no levógiro a referência é a mão esquerda.

2.4.3 Matrizes de rotação com ângulos de Euler

Quando as rotações em fotogrametria são representadas pelos ângulos de Euler considera-se que a matriz de rotação resultante seja o produto de três rotações associadas a cada eixo do sistema cartesiano tridimensional (x, y e z) (GALO e TOZZI, 2001). A matriz resultante também é chamada de matriz de cossenos diretores (LAVIERI, 2011).

As matrizes de rotação são exemplos de matrizes ortogonais. Uma matriz quadrada $M_{n \times n}$ é ortogonal quando vale a relação (LUGNANI, 1987):

$$M^t M = I_n \text{ e } M M^t = I_m \quad (17)$$

ou seja, $M^t = M^{-1}$.

Um exemplo é a matriz descrita a seguir (MANFRA, 2004):

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (18)$$

As matrizes de rotações independentes ativas $R_1(\omega)$, $R_2(\varphi)$ e $R_3(\kappa)$ para os eixos x, y e z, respectivamente, tem os seus elementos com as posições dadas por (POPE, 1970):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Nas equivalentes passivas apenas o sinal do seno é trocado e são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Há quatro possibilidades de multiplicação de rotações. Dois no sistema ativo e dois no sistema passivo (FÖRSTNER e WROBEL, 2004).

- Rotações no sistema ativo:

a) Rotação $R_3(\kappa) \times R_2(\varphi) \times R_1(\omega)$;

b) Rotação $R_1(\omega) \times R_2(\varphi) \times R_3(\kappa)$;

- Rotações no sistema passivo:

c) Rotação $R_1(\omega)^t \times R_2(\varphi)^t \times R_3(\kappa)^t$;

d) Rotação $R_3(\kappa)^t \times R_2(\varphi)^t \times R_1(\omega)^t$;

A sequência das rotações pode ter qualquer ordem de multiplicação, mas como o produto de matrizes não é comutativo, a ordem em que acontecem as rotações afetam as resultantes (GALO e TOZZI, 2001).

As rotações nas letras **a** e **d** são de multiplicação pela esquerda, ou seja, $R_3 \times R_2 \times R_1$. Já as rotações apresentadas nas letras **b** e **c** são o produto da rotação pela direita, ou seja, $R_1 \times R_2 \times R_3$.

O produto $R_{123} = R_3 \times R_2 \times R_1$ indica que a primeira rotação é a R_1 , depois é aplicada a R_2 e finalmente a R_3 , com isso surge a sequência de rotação 123. Dessa forma R_1 é a rotação primária, R_2 é a rotação secundária e R_3 é a rotação terciária.

Com essas relações pode-se observar que a sequência de multiplicação apresentada em **a** tem por inversa a sequência de multiplicação mostrada em **c**, assim como **d** é a inversa de **b**. Para mais detalhes consultar Förstner e Wrobel (2004).

Há diversas sequências de rotações em fotogrametria. A seguir é ilustrada como exemplo a matriz de rotação da sequência $\omega\varphi\kappa$, no sistema ativo (as demais sequências podem ser encontradas no Apêndice A).

$$R_{\omega\varphi\kappa} = R_3(\kappa) \times R_2(\varphi) \times R_1(\omega) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \varphi & \cos \kappa \sin \varphi \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega & \cos \kappa \sin \varphi \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega \\ \sin \kappa \cos \varphi & \sin \kappa \sin \varphi \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega & \sin \kappa \sin \varphi \cos \omega - \cos \kappa \sin \omega \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \omega & \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (25)$$

Além desse tipo de sequência de rotações em torno de três eixos diferentes existem outras em torno de dois eixos. Nestas sequências também acontecem três rotações, de modo que se têm uma rotação em torno de um primeiro eixo, depois a rotação em torno de um segundo eixo e, por fim, há outra rotação em torno do primeiro eixo (que já havia sido rotacionado). Assim passam a surgir sequências do tipo $xy\tilde{x}$, $xz\tilde{x}$, $yx\tilde{y}$, $yz\tilde{y}$, $zx\tilde{z}$ e $zy\tilde{z}$ (onde o eixo com “~” indica uma nova rotação em um eixo antes já rotacionado). A equação a seguir apresenta a matriz de rotação resultante da sequência $\omega\varphi\tilde{\omega}$ para o sistema ativo (as demais sequências podem ser vistas também no Apêndice A):

$$R_{\omega\varphi\tilde{\omega}} = R_3(\tilde{\omega}) \times R_2(\varphi) \times R_1(\omega) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \omega & \sin \varphi \cos \omega \\ \sin \tilde{\omega} \sin \varphi & \cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \cos \varphi \sin \omega & -\cos \tilde{\omega} \sin \omega - \sin \tilde{\omega} \cos \varphi \cos \omega \\ -\cos \tilde{\omega} \sin \varphi & \sin \tilde{\omega} \cos \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \varphi \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (26)$$

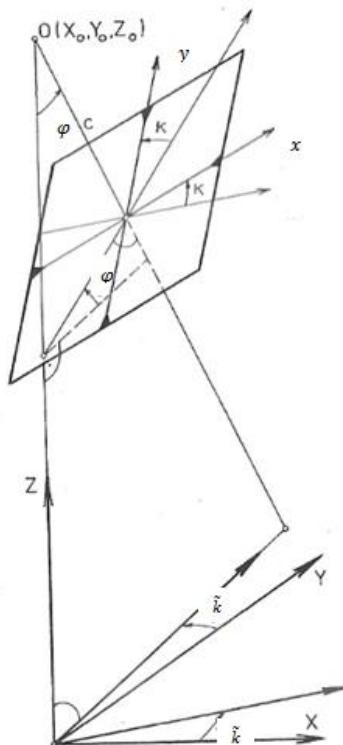
A matriz de rotação dos ângulos do sistema α , t e s é deste tipo em que α e s acontecem em torno do eixo vertical e tem a forma (SHIH, 1990):

$$R_{ats} = \begin{pmatrix} -\cos s \cos \alpha & -\sin s \cos t \sin \alpha & \sin s \cos \alpha - \cos s \cos t \sin \alpha & -\sin t \sin \alpha \\ \cos s \sin \alpha & -\sin s \cos t \cos \alpha & \sin s \sin \alpha - \cos s \cos t \cos \alpha & -\sin t \cos \alpha \\ -\sin s \sin t & & -\cos s \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (27)$$

Há uma diferença entre as definições para ângulos de Euler e ângulos eulerianos. Quando acontecem sequências como $xy\tilde{x}$ (duas rotações em torno de mesmo eixo, neste caso x) são chamados de ângulos eulerianos e são comuns em astronomia e física (POPE, 1970).

Um exemplo desse tipo de sequência de rotação é apresentado na Figura 13, na qual acontecem duas rotações em torno do eixo z e uma sobre o eixo y obedecendo à sequência $zy\tilde{z}$. A primeira rotação acontece em torno do eixo z, com o ângulo κ . A segunda rotação ocorre em torno do eixo y e a terceira rotação acontece novamente sobre o eixo z (agora indicado pelo ângulo $\tilde{\kappa}$) (KRAUS, 2000).

Figura 13- Esquematização da sequência $zy\tilde{z}$.



Fonte: Adaptado de Kraus (2000).

O modelo matemático usado para encontrar as coordenadas de P' é dado por (LUGNANI, 1987):

$$P' = R_{123} \times P \quad (28)$$

em que:

R_{123} é uma matriz de rotação;

P é o vetor com coordenadas a rotacionar.

Para simplificar podem-se escrever essas matrizes como:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (29)$$

De modo geral é relativamente fácil descobrir os valores de ω , φ e κ , desde que sejam conhecidos os elementos da matriz de rotação e qual a sequência efetuada das rotações, como relacionadas nas equações 25 à 27. Por exemplo, para obter esses valores a partir da equação 25 podem ser usadas as seguintes relações (KRAUS, 2000):

$$\omega = \text{arc tg} \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) \quad (30\ i)$$

$$\varphi = \text{arc sen} (-r_{31}) \quad (30\ ii)$$

$$\kappa = \text{arc tg} \left(\frac{r_{21}}{r_{11}} \right) \quad (30\ iii)$$

Em MATLAB® existe também a função atan 2 (função inversa da tangente), que encontra ângulos nos quatro quadrantes (MATLAB®, 2013), fato que pode facilitar a extração dos ângulos de Euler em vários casos (SANTOS, 2003).

$$\omega = \text{atan 2} (r_{32}, r_{33}) \quad (31\ i)$$

$$\varphi = \text{atan 2} \left(-r_{31}, (\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \right) \quad (31\ ii)$$

$$\kappa = \text{atan 2} (r_{21}, r_{11}) \quad (31\ iii)$$

A equação 31 ii é muito útil quando o ângulo da rotação secundária é maior que noventa graus, já que ao usar a equação 30 ii alguns resultados em MATLAB® são dados em números complexos, uma vez que o domínio da função arco seno comprehende o intervalo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. A validade de 31 ii é verificada a seguir:

$$\begin{aligned} \text{atan 2} \left(-r_{31}, (\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \right) &= \\ \text{atan 2} \left(-\text{sen } \varphi, (\sqrt{(\text{sen } \omega \cos \varphi)^2 + (\cos \omega \cos \varphi)^2}) \right) &= \\ \text{atan 2} \left(-\text{sen } \varphi, (\sqrt{(\cos \varphi)^2 (\text{sen } \omega^2 + \cos \omega^2)}) \right) &= \text{atan 2} (-\text{sen } \varphi, \sqrt{(\cos \varphi)^2}) \\ &= \text{atan 2} (-\text{sen } \varphi, \cos \varphi) \end{aligned} \quad (32)$$

A função é válida para valores de $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Porém, há dualidades com os modelos da equação 30. Considerando, por exemplo, os ângulos $\omega = 70^\circ$, $\varphi = 5^\circ$ e $\kappa = 30^\circ$, a matriz de rotação da equação 25 resulta em:

$$R = \begin{pmatrix} 0,863 & -0,100 & 0,496 \\ 0,498 & 0,337 & -0,799 \\ -0,087 & 0,936 & 0,341 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Procedendo agora no sentido inverso para obter o valor de cada ângulo, o valor de φ será dado pela equação 51ii. Como $r_{31} = \sin \varphi = -0,087$ resulta φ igual a 5° ou 175° , já que o seno positivo produz valores no primeiro e segundo quadrante (caso análogo se o seno for negativo). Esta ambiguidade do ângulo φ ocasiona ambiguidade também nos demais ângulos de Euler, uma vez que os dois valores podem satisfazer a solução ao mesmo tempo (SHIH, 1990).

Para superar tais ambiguidades podem ser estudados os sinais das funções senos e cossenos da rotação intermediária. Para a equação 25 a extração dos ângulos de Euler obedece as seguintes equações (SHIH, 1990):

Se $\cos \varphi$ for positivo:

$$k = \text{atan } 2(r_{21}, r_{11}) \quad (34\ i)$$

$$\varphi = -\text{atan } 2\left(r_{31}, \left(\frac{r_{11}}{\cos k}\right)\right) \quad (34\ ii)$$

$$\omega = \text{atan } 2(r_{32}, r_{33}) \quad (34\ iii)$$

Se $\cos \varphi$ for negativo 34 ii deve ser:

$$\varphi = \text{atan } 2\left(r_{31}, \left(\frac{r_{11}}{\cos k}\right)\right) \quad (35)$$

Além das ambiguidades ocorrem situações de instabilidade nas matrizes resultantes de rotações que serão estudadas na próxima seção.

2.4.4 Gimbal lock

O *gimbal lock* é a perda de um grau de liberdade rotacional, quando se perde um grau de liberdade de movimento (ARAÚJO, 2000), que pode ser um sério problema em aeronáutica e robótica e que também acontece em fotogrametria.

Equivale ao problema que acontece quando é escolhida uma sequência de rotações e há uma situação de alinhamento de dois eixos, em torno dos quais estão

sendo realizadas as rotações. Com isto nem todo o espaço das rotações possíveis poderá ser contemplado numa próxima sequência de rotações (LAVIERI, 2011).

É fácil identificar o ângulo possivelmente crítico apenas observando qual a rotação secundária nas matrizes das equações 25 à 27 (ou nas matrizes apresentadas no Apêndice A) em duas situações: a) quando o cosseno do ângulo de Euler da rotação secundária é zero, no caso de rotações realizadas em torno dos três eixos (em outras palavras quando um dos ângulos de Euler é 90° ou 270° , ou bem próximo destes valores); ou b) em se tratando de rotações realizadas em torno de dois eixos, quando o seno da rotação secundária é zero (ou seja, quando um desses ângulos é 0° ou 180° , ou próximo deste). Com estes ângulos a rotação desejada ou prevista pode não ocorrer (GRAVELLE, 2006).

A matriz da equação 25, as matrizes mostradas nas equações 115 à 119 e 125 à 130 do Apêndice A, admitem condição crítica para um ângulo de 90° ou 270° (caso a) por terem um elemento que depende apenas da função seno que pode assumir valores 1 ou -1 enquanto outros dois elementos se tornam zero (vide equação 36). A partir disso as outras duas rotações serão somas dos outros dois ângulos (a explicação é similar para o cosseno dos ângulos 0° e 180° , em se tratando das equações 26 e 27, as matrizes das equações 120 à 124 e 131 à 136 do Apêndice A que tem um elemento que depende só da função cosseno).

Ao se considerar $\varphi = 90^\circ$ a matriz de rotação expressa na equação 25, por exemplo, será dada por (MALVEZZI, 2004):

$$R_{\omega\varphi\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \kappa \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega & \cos \kappa \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega \\ 0 & \sin \kappa \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega & \sin \kappa \cos \omega - \cos \kappa \sin \omega \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Os elementos da equação 36 são agora apenas adições de senos e cossenos de ω e κ , como mostradas a seguir (IEZZI e HAZZAN, 1985):

$$\cos \kappa \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega = \sin(\omega - \kappa) \quad (37 \text{ i})$$

$$\sin \kappa \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega = \cos(\omega - \kappa) \quad (37 \text{ ii})$$

$$\cos \kappa \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega = \cos(\omega - \kappa) \quad (37 \text{ iii})$$

$$\sin \kappa \cos \omega - \cos \kappa \sin \omega = -\sin(\omega - \kappa) \quad (37 \text{ iv})$$

Então a matriz de rotação da equação 36 fica:

$$R_{\omega\varphi\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\omega - \kappa) & \cos(\omega - \kappa) \\ 0 & \cos(\omega - \kappa) & -\sin(\omega - \kappa) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Esta equação mostra que a matriz de rotação depende apenas da subtração de ω e κ . Deste modo esta matriz de rotação perdeu um grau de liberdade rotacional (ARAÚJO, 2000).

Para melhor entendimento serão apresentadas nesta seção outras equações, cujas matrizes apresentam a ocorrência de *gimbal lock*.

A sequência de rotação $\kappa\varphi\omega$ está em situação crítica quando φ é 90° (que pode ser visto na equação 39 i) ou 270° (equação 39 ii).

$$R_{\kappa\varphi\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\kappa + \omega) & \cos(\kappa + \omega) & 0 \\ -\cos(\kappa + \omega) & \sin(\kappa + \omega) & 0 \end{pmatrix} \quad (39 \text{ i})$$

$$R_{\kappa\varphi\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\kappa - \omega) & \cos(\kappa - \omega) & 0 \\ \cos(\kappa - \omega) & \sin(\kappa - \omega) & 0 \end{pmatrix} \quad (39 \text{ ii})$$

Já a sequência de rotação $\omega\varphi\tilde{\omega}$ está em condicionamento crítico quando φ é 0° (equação 40 i) ou 180° (equação 40 ii).

$$R_{\omega\varphi\tilde{\omega}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} + \omega) & -\sin(\tilde{\omega} + \omega) \\ 0 & \sin(\tilde{\omega} + \omega) & \cos(\tilde{\omega} + \omega) \end{pmatrix} \quad (40 \text{ i})$$

$$R_{\omega\varphi\tilde{\omega}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} - \omega) & \sin(\tilde{\omega} - \omega) \\ 0 & \sin(\tilde{\omega} - \omega) & -\cos(\tilde{\omega} - \omega) \end{pmatrix} \quad (40 \text{ ii})$$

As demais sequências de rotações abordadas neste estudo em situação crítica, bem como o detalhamento das equações 39 e 40 podem ser encontradas no Apêndice B.

O caso do *gimbal lock* em aeronáutica pode ser exemplificado na Figura 14. Na Figura 14 (a) o avião encontra-se estabilizado. Na Figura 14 (b) o avião está sujeito a uma rotação em torno do eixo y. Na Figura 14 (c) o mesmo é rotacionado em torno do eixo x e na Figura 14 (d) está rotacionado em z. Por fim é mostrado que ocorre o *gimbal lock* devido ao alinhamento de dois eixos X e Z na Figura 14 (e).

Figura 14- Exemplo de *gimbal lock* com um avião

Figura 14 (a)- Avião estabilizado

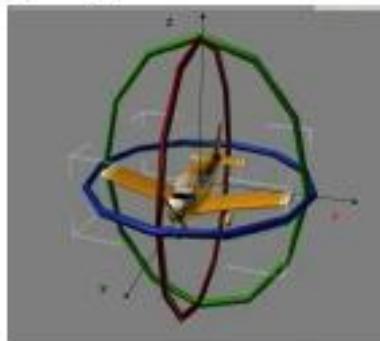


Figura 14 (b)-Rotação em torno do eixo y

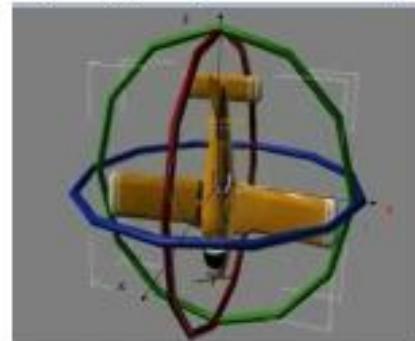


Figura 14 (c)- Rotação em torno do eixo x

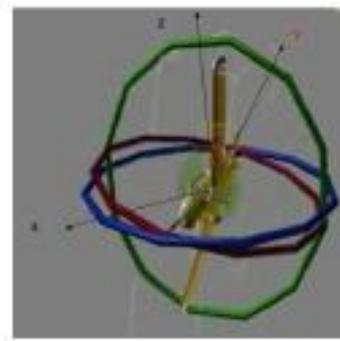


Figura 14 (d)- Rotação em torno do eixo z

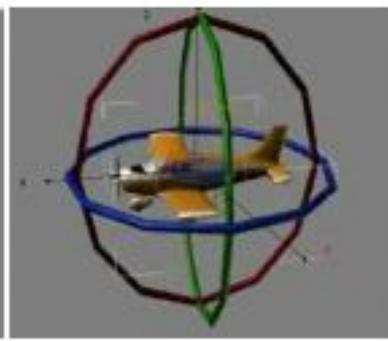
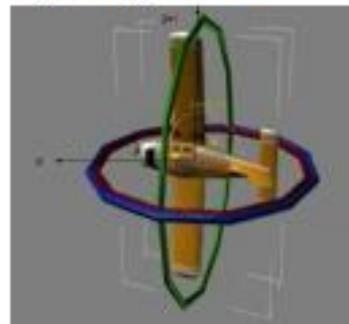


Figura 14 (e)- Gimbal lock

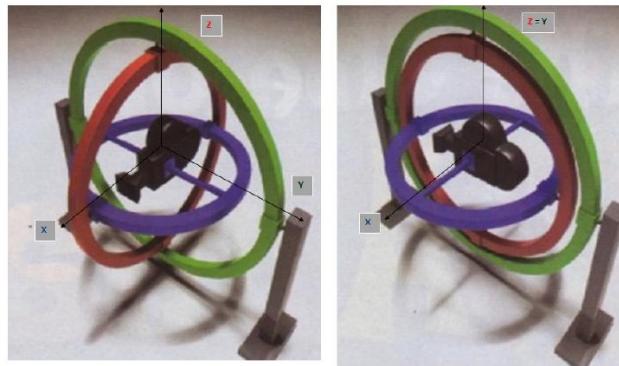


Fonte: Adaptado de *Gimble Lock Explained* (2012).

A Figura 15 mostra um caso de *gimbal lock* com uma câmara fotográfica. Na Figura 15 (a) o objeto admite três graus de liberdade. No entanto, na Figura 15 (b) o objeto já se encontra apenas com dois graus de liberdade devido ao fato do alinhamento de dois eixos (Z representado pelo anel em vermelho e Y representado pelo anel cor verde). Esse exemplo não deve ocorrer com aerofotogrametria, mas pode acontecer em fotogrametria terrestre e a curta distância, ao ser realizado um levantamento que envolve todas as laterais e parte superior de um objeto.

Figura 15- Gimbal lock na rotação de uma câmara.

Figura 15 (a)- Objeto com três graus de liberdade. Figura 15 (b)- Objeto com dois graus de liberdade



Fonte: Adaptado de Vass (2009).

O Quadro 2 mostra a correlação entre as sequências de rotações e as condições críticas que podem ocorrer no caso de fotogrametria terrestre (LAVIERI, 2011).

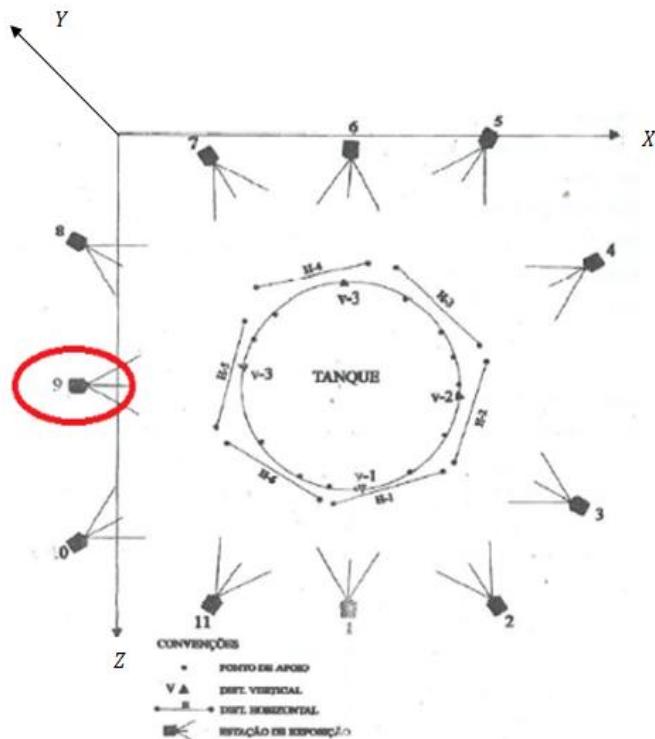
Quadro 2- Situações em que ocorre o *gimbal lock*.

Sequência de Rotação	Eixo rotacionado com ângulo 0 (ou π) ou $n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.	Eixos alinhados
$\omega\varphi\kappa$	y	x e z
$\omega\kappa\varphi$	z	x e y
$\kappa\varphi\omega$	y	x e z
$\kappa\omega\varphi$	x	y e z
$\varphi\omega\kappa$	x	y e z
$\varphi\kappa\omega$	z	y e x
$\omega\varphi\tilde{\omega}$	y	x e \tilde{x}
$\omega\kappa\tilde{\omega}$	z	x e \tilde{x}
$\varphi\omega\tilde{\varphi}$	x	y e \tilde{y}
$\varphi\kappa\tilde{\varphi}$	z	y e \tilde{y}
$\kappa\omega\tilde{\kappa}$	x	z e \tilde{z}
$\kappa\varphi\tilde{\kappa}$	y	z e \tilde{z}

Fonte: Lavieri (2011).

Um exemplo prático desse tipo de situação instável foi obtido por Silva (1995). Ao realizar a fototriangulação, de um conjunto de fotografias destinadas à reconstrução 3D de um tanque, observou que a MVC apresentou valores elevados na fotografia de posição nove, que corresponde a $\varphi = 270^\circ$, na sequência $\kappa\varphi\omega$, de acordo com a disposição dos eixos cartesianos do levantamento (no qual os eixos X e Z estão na horizontal e Y na vertical). Na Figura 16 está em destaque a localização da fotografia nove.

Figura 16- Indicação da localização da fotografia 9.



Fonte: Adaptado de Silva (1995).

No caso do sistema t , s e α ocorre *gimbal lock* quando $tilt$ é igual a zero, conforme se percebe que t é a rotação secundária na matriz apresentada na equação 38.

As dualidades de soluções e os efeitos de *gimbal lock* que podem ocorrer ao para operar com rotações dos ângulos de Euler podem ser evitados com o uso dos quatérnios que será discutido no capítulo a seguir.

3. MATRIZES DE ROTAÇÃO COM OS QUATÉRNIOS

3.1 Quatérnios

Os quatérnios, ou *quaternions*, podem ser considerados números hipercomplexos de ordem quatro, que não possuem todas as características de um corpo, uma vez que não admitem comutatividade na multiplicação (LAVIERI, 2011). Os quatérnios estão definidos no \mathbb{R}^4 e, por vezes, são também representados por H, devido ao nome de seu criador William R. Hamilton (GALO e TOZZI, 2001).

Segundo Wheeler e Ikeuchi (1995), Santana e Braga (2008), Araújo (2000), Dam, Koch, Lillholm (1998) e Shih (1990), as rotações com os quatérnios apresentam algumas vantagens dentre as quais se podem citar:

- Não acontece o problema de situações de instabilidade de soluções;
- Podem ser compostos ou multiplicados de uma maneira simples para acumular os efeitos das rotações;
- Tem fácil interpretação geométrica;
- Os métodos de interpolações são mais simples;
- Utiliza apenas funções lineares;
- Não acarretam o *gimbal lock*.

As desvantagens citadas para os quatérnios são: a) as matrizes de quatérnios não são adequadas para fazer representações tais como translações (que para esse tipo de aplicação são usadas as matrizes homogêneas); b) de modo geral não há muita difusão sobre os quatérnios como assunto da álgebra o que causa, assim, uma aparência de serem complicados (DAM, KOCH e LILLHOLM, 1998).

As demonstrações que se seguem foram desenvolvidas com base em: Hamilton (1866), Biasi e Gattass (2002); Galo e Tozzi (2001); Barreiro (2009); Neves (2008); Cefalo, Mirats-Tur (2011); Celledoni e Safstrom (2010) e Horn (1987).

3.2 Representação dos quatérnios

Os quatérnios podem ser representados através de: a) um vetor com quatro componentes; b) uma composição de um escalar e um vetor; c) um número complexo com três diferentes partes imaginárias. As equações a seguir mostram, respectivamente, estas representações (GALO e TOZZI, 2001 e POPE, 1970):

$$\dot{q} = (q, q_x, q_y, q_z) \quad (41 \text{ i})$$

$$\dot{q} = q + \vec{q} = (q, \vec{q}) \quad (41 \text{ iii})$$

$$\dot{q} = q + q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k} \quad (41 \text{ iv})$$

em que:

q parte real do quatérnio, primeiro componente do quatérnio;

q_x segundo componente do quatérnio;

q_y terceiro componente do quatérnio;

q_z quarto componente do quatérnio;

\dot{q} é o quatérnio.

Para outros autores, como Pope (1970), a notação adotada é:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (42)$$

em que δ , α , β e γ são os componentes do quatérnio.

3.3 Operações quaternárias

Os quatérnios são uma generalização dos números complexos como especificado na Seção 3.1, então $i^2 = -1$, mas também $j^2 = k^2 = -1$. A partir disso outras relações podem ser estabelecidas, atentando-se para o fato de a multiplicação entre esses imaginários são de natureza diferente, o que resulta em (CEFALO e MIRATS-TUR, 2011; HAMILTON, 1866):

$$ij = -ji = k; ki = -ik = j; jk = -kj = i; ijk = -1 \quad (43)$$

As principais operações quaternárias são dadas a seguir.

Dados dois quatérnios $\dot{q}_1 = (q_1, \vec{q}_1)$ e $\dot{q}_2 = (q_2, \vec{q}_2)$, a soma é dada por (GALO e TOZZI, 2001):

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = (q_1, \vec{q}_1) + (q_2, \vec{q}_2) = (q_1 + q_2, \vec{q}_1 + \vec{q}_2) \quad (44)$$

O produto dos quatérnios não é comutativo (LAVIERI, 2011) e é dado por (GALO e TOZZI, 2001):

$$\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 = (q_1 \cdot q_2 - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2, q_1 \cdot \vec{q}_2 + q_2 \cdot \vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2) \quad (45)$$

A multiplicação quaterniônica é associativa e distributiva através da adição (BARREIRO, 2009).

3.4 Classificação de quatérnios

3.4.1 Quatérnio puro

Ocorre quando a parte real desse número é igual à zero. O quatérnio então passa a ser escrito como (GALO e TOZZI, 2001):

$$\dot{q} = (0, \vec{q}) \quad (46)$$

3.4.2 Quatérnio unitário

Acontece quando a norma do quatérnio equivale a um (GALO e TOZZI, 2001):

$$|\dot{q}| = \sqrt{q^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = 1 \quad (47)$$

3.4.3 Quatérnio inverso

O inverso de um quatérnio é representado por \dot{q}^{-1} . O produto de um quatérnio por seu inverso é sempre um. A partir disso se tem a relação (BIASI e GATTASS, 2002):

$$\dot{q}\dot{q}^{-1} = \dot{q}^{-1}\dot{q} = 1 \quad (48)$$

3.4.4 Conjugado de um quatérnio

O conjugado de um quatérnio é dado por (GALO e TOZZI, 2001):

$$\bar{\dot{q}} = q - q_x \vec{i} - q_y \vec{j} - q_z \vec{k} \quad (49)$$

Com base no quatérnio conjugado pode-se definir a subtração de dois quatérnios com sendo a soma de um quatérnios com o seu conjugado que admite as seguintes propriedades (BARREIRO, 2009):

$$\bar{\bar{\dot{q}}} = \dot{q} \quad (50 \text{ i})$$

$$(\bar{p}\bar{q}) = \bar{p}\bar{q} \quad (50 \text{ ii})$$

$$\overline{\dot{p} + \dot{q}} = \bar{p} + \bar{q} \quad (50 \text{ iii})$$

3.5 Igualdade de um quatérnio

Dois quatérnios serão iguais se cada um de seus termos correspondentes forem iguais. Considerando os quatérnios:

$$\dot{q}_1 = (q_1, q_{x_1}, q_{y_1}, q_{z_1}) \quad (51 \text{ i})$$

$$\dot{q}_2 = (q_2, q_{x_2}, q_{y_2}, q_{z_2}) \quad (51 \text{ ii})$$

A igualdade ocorrerá se os elementos correspondentes de cada quatérnio forem iguais:

$$q_1 = q_2 \quad (52 \text{ i})$$

$$q_{x_1} = q_{x_2} \quad (52 \text{ ii})$$

$$q_{y_1} = q_{y_2} \quad (52 \text{ iii})$$

$$q_{z_1} = q_{z_2} \quad (52 \text{ iv})$$

3.6 Rotações com quatérnios

A realização de rotação θ com os quatérnios (com $\theta \in [-\pi, \pi]$) em torno do vetor \vec{v} será dada por (BIASI e GATTASS, 2002):

$$|\dot{q}^2| = q^2 + |\vec{q}|^2 = 1 \quad (53)$$

Mas, pela relação fundamental em trigonometria há um ângulo em que $q = \cos \theta$ e $|\vec{q}| = \sin \theta$. Então se considerando \vec{v} um vetor unitário pode-se escrever o quatérnio do seguinte modo (BIASI e GATTASS, 2002):

$$\dot{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{v} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}\right) \quad (54)$$

Então a rotação com quatérnios em relação aos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , respectivamente, serão expressas por (POPE, 1970):

$$R_q(\theta) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{i}\right) \quad (55 \text{ i})$$

$$R_q(\theta) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{j}\right) \quad (55 \text{ ii})$$

$$R_q(\theta) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{k}\right) \quad (55 \text{ iii})$$

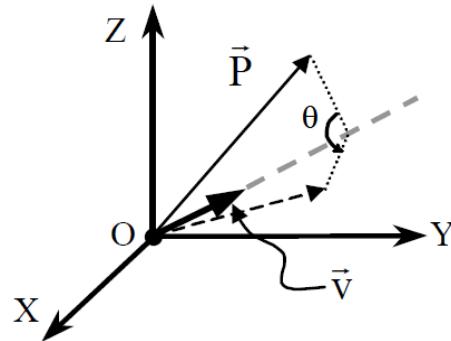
O ponto $\vec{P} = (x, y, z)$ do espaço tridimensional sobre o qual se deseja efetuar uma rotação será representado pelo quatérnio puro da equação 56 e a rotação será (BIASI e GATTASS, 2002):

$$\dot{p} = (0, \vec{P}) \quad (56)$$

$$R_q(\vec{p}) = \dot{q}\vec{p}\bar{q} \quad (57)$$

A Figura 17 ilustra a rotação de \vec{P} por um ângulo θ , pelo vetor \vec{v} .

Figura 17- Rotação de \vec{P} por um ângulo θ , pelo vetor \vec{v} .



Fonte: Galo e Tozzi (2001).

Desenvolvendo a equação 57, por meio das propriedades vetoriais, tem-se (GALO e TOZZI, 2001):

$$\begin{aligned} R_q(\vec{p}) &= (q, \vec{q})(0, \vec{P})(q, -\vec{q}) = (-\vec{q}\vec{P}, q\vec{P} + \vec{q} \times \vec{P})(q, -\vec{q}) \\ &= ((-\vec{q}\vec{P})q - (\vec{q}\vec{P} + \vec{q} \times \vec{P})(-\vec{q}), (-\vec{q}\vec{P})(-\vec{q}) + q(\vec{q}\vec{P} + \vec{q} \times \vec{P}) + (\vec{q}\vec{P} + \vec{q} \times \vec{P}) \times (-\vec{q})) \\ &= (-q(\vec{q}\vec{P}) + q(\vec{P}\vec{q}) + (\vec{q} \times \vec{P})\vec{q}, (\vec{q}\vec{P})\vec{q} + q^2\vec{P} + q(\vec{q} \times \vec{P}) + q(\vec{P} \times (-\vec{q})) + (\vec{q} \times \vec{P}) \times (-\vec{q})) \\ &= ((\vec{q} \times \vec{P})\vec{q}, (\vec{q}\vec{P})\vec{q} + q^2\vec{P} + q(\vec{q} \times \vec{P}) + q(\vec{P} \times -\vec{q}) + (\vec{q} \times \vec{P}) \times (-\vec{q})) \\ &= (0, (\vec{q}\vec{P})\vec{q} + q^2\vec{P} + 2q(\vec{q} \times \vec{P}) + (\vec{q} \times \vec{P}) \times (-\vec{q})) \\ &= (0, 2(\vec{q}\vec{P})\vec{q} + (q^2 - (\vec{q}\vec{q}))\vec{P} + 2q(\vec{q} \times \vec{P})) \end{aligned} \quad (58)$$

Mas, como na rotação se usa o quatérnio representado pela equação 54 a rotação dada por 58, passa a ter, com as fórmulas de multiplicação de trigonometria, a seguinte forma (BIASI e GATTASS, 2002):

$$\begin{aligned} R_q(\vec{p}) &= (0, 2(\sin \theta \vec{v} \cdot \vec{P}) \sin \theta \vec{v} + \cos \theta^2 \vec{P} - (\sin \theta^2 \vec{v} \cdot \vec{v})\vec{P} + 2 \cos \theta (\sin \theta \vec{v} \times \vec{P})) \\ &= (0, \cos \theta^2 \vec{P} - (\sin \theta^2)\vec{P} + (1 - \cos 2\theta)\vec{v} \cdot \vec{P}\vec{v} + (\sin 2\theta)\vec{v} \times \vec{P}) \\ &= (0, (\cos 2\theta)\vec{P} + (1 - \cos 2\theta)\vec{v} \cdot \vec{P}\vec{v} + (\sin 2\theta)\vec{v} \times \vec{P}) \end{aligned} \quad (59)$$

Então para ser realizada a rotação em torno de um eixo deve-se:

- Representar \vec{P} pelo quatérnio $\vec{p} = (0, \vec{P})$;
- Usar o quatérnio da equação 54;
- Aplicar a equação 59.

Pode-se escrever de uma maneira geral para n rotações (GALO e TOZZI, 2001):

$$R_{q_1 \dots q_n}(\vec{p}) = \dot{q}_n \dots \dot{q}_1 \vec{p} \bar{q}_1 \dots \bar{q}_n \quad (60)$$

Para fazer a representação matricial é necessário desenvolver cada termo da equação 58. Antes, porém, a parte real deve ser desconsiderada, uma vez que é nula e a matriz de rotação quaternária será indicada por R . Então é gerada a relação (GALO e TOZZI, 2001):

$$R_q \vec{P} = 2(\vec{q} \vec{P})\vec{q} + (q^2 - (\vec{q} \vec{q}))\vec{P} + 2q(\vec{q} \times \vec{P}) \quad (61)$$

Desenvolvendo agora o primeiro termo tem-se:

$$2(\vec{q} \vec{P})\vec{q} = 2(q_x x + q_y y + q_z z) \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} (q_x x + q_y y + q_z z)q_x \\ (q_x x + q_y y + q_z z)q_y \\ (q_x x + q_y y + q_z z)q_z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} q_x^2 & q_x q_y & q_x q_z \\ q_x q_y & q_y^2 & q_y q_z \\ q_x q_z & q_y q_z & q_z^2 \end{pmatrix} \quad (62)$$

Para o segundo termo vem:

$$(q^2 - (\vec{q} \vec{q}))\vec{P} = (q^2 - q_x^2 - q_y^2 - q_z^2)\vec{P} = (q^2 - q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (63)$$

E para o último termo tem-se:

$$\begin{aligned} 2q(\vec{q} \times \vec{P}) &= 2q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ q_x & q_y & q_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2q ((q_y z - q_z y)\vec{i} + (q_z x - q_x z)\vec{j} + (q_x y - q_y x)\vec{k}) \\ &= 2q \begin{pmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (64)$$

Desse modo a equação 61 passa a ser escrita como (GALO e TOZZI, 2001):

$$\begin{aligned} R_q \vec{P} &= 2 \begin{pmatrix} q_x^2 & q_x q_y & q_x q_z \\ q_x q_y & q_y^2 & q_y q_z \\ q_x q_z & q_y q_z & q_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \\ &2q \begin{pmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

Simplificando a equação 65, após separar \vec{P} formado por (x, y, z) , é obtida a matriz R (GALO e TOZZI), que representa a rotação quaternária:

$$R_q = \begin{pmatrix} q^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q q_z) & 2(q_x q_z + q q_y) \\ 2(q_x q_y + q q_z) & q^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q q_x) \\ 2(q_x q_z - q q_y) & 2(q_y q_z + q q_x) & q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{pmatrix} \quad (66)$$

A matriz da equação 66 pode ser aplicada da mesma forma que as matrizes de rotação com ângulos de Euler. Por exemplo, a matriz R aplicada na equação da colinearidade resulta (GALO e TOZZI, 2001):

$$x = -f \frac{(q^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2)(X - X_c) + 2(q_x q_y - q q_z)(Y - Y_c) + 2(q_x q_z + q q_y)(Z - Z_c)}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (67 \text{ i})$$

$$y = -f \frac{2(q_x q_y + q q_z)(X - X_c) + (q^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)(Y - Y_c) + 2(q_y q_z - q q_x)(Z - Z_c)}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (67 \text{ ii})$$

3.7 Comparações de Quatérnios com ângulos de Euler

Os quatérnios e ângulos de Euler podem ser obtidos uns dos outros desde que sejam conhecidas as sequências de rotação nos dois sistemas.

Ao ser realizada a sequência $R_{\omega\varphi\kappa}$ o quatérnio será dado por:

$$\dot{q} = (\cos \frac{\kappa}{2}, \sin \frac{\kappa}{2} \vec{k}) (\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \vec{j}) (\cos \frac{\omega}{2}, \sin \frac{\omega}{2} \vec{i}) \quad (68)$$

Desenvolvendo este produto chega-se a (SANTOS, 2003 e POPE, 1970):

$$q = \cos \frac{\kappa}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\omega}{2} + \sin \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\omega}{2} \quad (69 \text{ i})$$

$$q_x = \cos \frac{\kappa}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\omega}{2} - \sin \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\omega}{2} \quad (69 \text{ ii})$$

$$q_y = \cos \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\omega}{2} + \sin \frac{\kappa}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\omega}{2} \quad (69 \text{ iii})$$

$$q_z = \sin \frac{\kappa}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\kappa}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\omega}{2} \quad (69 \text{ iv})$$

Com as equações 69 i, 69ii, 69iii e 69iv considerando, por exemplo, $\omega = 45^\circ$, $\varphi = 45^\circ$ e $\kappa = 30^\circ$ gera-se o seguinte quatérnio:

$$\dot{q} = (0,862 + 0,250\vec{i} + 0,433\vec{j} + 0,079\vec{k}) = (0,862 \ 0,250 \ 0,433 \ 0,079) \quad (70)$$

Estudos mais detalhados dos quatérnios podem ser vistos em Pope (1970), Horn (1987), Hamilton (1866), Helmstetter (2012), Wilkins (2000); Gungor e Sarduvan (2011).

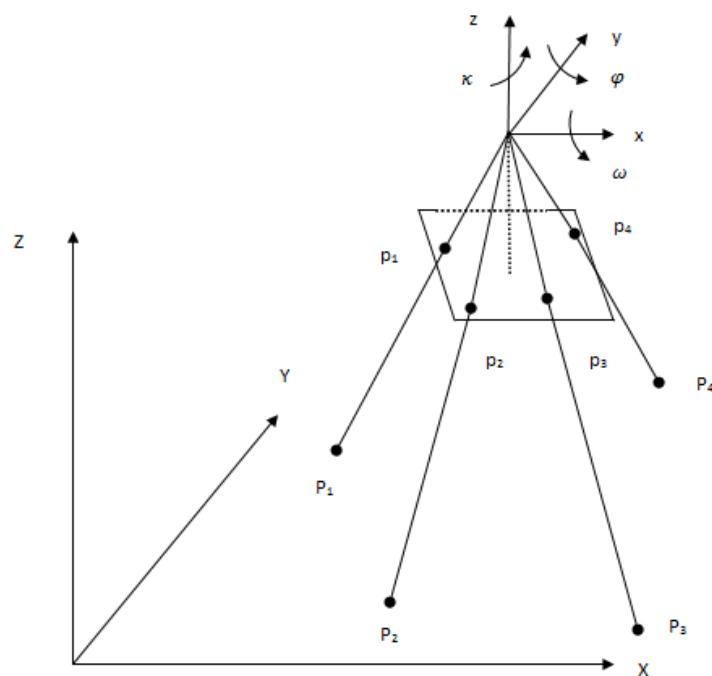
4. APlicações de QUATÉRNIOs EM FOTOGRAmETRIA

Os quatérnios podem ser usados em diversas aplicações de fotogrametria que utilize uma matriz de rotação, por exemplo, na equação da colinearidade, para efetuar a orientação relativa, orientação absoluta e resseção espacial. Nesta pesquisa foram aplicados na resseção espacial e orientação relativa.

4.1 Resseção espacial em fotogrametria

A resseção espacial em fotogrametria determina os parâmetros de orientação exterior de uma fotografia que são ω , φ , κ , X_c , Y_c e Z_c , sendo que os três primeiros elementos indicam a orientação (ou também chamada de atitude) e X_c , Y_c e Z_c são as coordenadas do centro perspectivo (ou a posição da fotografia no espaço), a partir de fotocoordenadas (x_i, y_i) de pontos que tem as correspondentes coordenadas no espaço objeto (X_i, Y_i, Z_i) , e da distância focal (f). São necessários no mínimo três pontos não colineares para ser obtida uma solução. Existem métodos de determinação diretos e por iterações, neste caso é necessário ter um vetor dos parâmetros aproximados dos parâmetros a serem determinados $(\omega_0, \varphi_0, \kappa_0, X_{c0}, Y_{c0}, Z_{c0})$. A Figura 18 apresenta a geometria da resseção espacial.

Figura 18- Geometria da resseção espacial.



Existem vários tipos de procedimentos para a determinação da resseção espacial, como por exemplo, o método de Church, da equação da colinearidade, métodos diretos baseados na lei dos cossenos, etc. O método de Church é um meio de calcular os parâmetros da orientação exterior para fotografias inclinadas ou quase verticais, usado para o sistema t, s e α detalhado em Wolf e Dewit (1983). Os métodos que usam a equação da colinearidade e a lei dos cossenos serão estudados aqui com mais detalhes.

4.1.1 Resseção espacial com a equação da colinearidade

A equação da colinearidade é aplicada ao mínimo de três pontos não colineares com coordenadas conhecidas nos dois espaços imagem (x, y) e objeto (X, Y, Z). O modelo matemático adotado é:

$$x = -f \frac{r_{11}(X - X_c) + r_{12}(Y - Y_c) + r_{13}(Z - Z_c)}{r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c)} \quad (71\ i)$$

$$y = -f \frac{r_{21}(X - X_c) + r_{22}(Y - Y_c) + r_{23}(Z - Z_c)}{r_{31}(X - X_c) + r_{32}(Y - Y_c) + r_{33}(Z - Z_c)} \quad (71\ ii)$$

em que:

x e y são as fotocoordenadas;

f é a distância focal;

X, Y e Z são as coordenadas no espaço objeto;

X_c, Y_c e Z_c são as coordenadas do centro perspectivo;

r_{ij} são os elementos da matriz de rotação, com i e j variando de 1 a 3.

No ajustamento é adotado o MMQ que pode ser pelo método paramétrico (equação 72) ou o método Combinado (equação 73) (LUGNANI, 1987).

$$AX + L = V \quad (72)$$

$$AX + BV + W = 0 \quad (73)$$

em que:

A , representa a matriz das derivadas da equação 71 com relação aos parâmetros;

X , é o vetor das correções dos parâmetros;

$L = L_o - L_b$, sendo L_o obtida a partir dos valores iniciais;

L_b , vetor dos valores observados;

B , matriz que representa as derivadas do modelo funcional com relação aos valores observados;

V , vetor dos resíduos;

W , é o vetor erro de fechamento.

A solução pelo método paramétrico é dada por:

$$X = (A^t PA)^{-1} A^t PL \quad (74)$$

em que:

P é a matriz dos pesos;

A solução para o método combinado é dado por:

$$X = -(A^t M^{-1} A)^{-1} A^t M^{-1} W \quad (75)$$

em que $M = B^t PB$

O vetor com os parâmetros ajustados é conseguido somando as correções aos valores aproximados iniciais em um processo de iterações até haver estabilidade da solução.

$$X_a = X_0 + X \quad (76)$$

Para mais detalhes podem ser consultados Gemael (1994) ou Ghilani e Wolf (2006).

4.1.2 Resseção espacial com os quatérnios

A resseção espacial com as equações da colinearidade e com a lei dos cosenos tem soluções adaptadas para usar quatérnios, que neste trabalho foram classificadas como: a) com iterações; b) sem iterações.

- Com iterações. Fazem uso de valores iniciais no MMQ e calcula a resseção espacial a partir da equação da colinearidade com substituição das rotações com ângulos de Euler por quatérnios, como em Jiang *et al* (2010);
- Sem iterações. São soluções exatas ("closed-form") para o problema da resseção espacial tridimensional em topografia, com adaptações para a fotogrametria, como Hinsken (1988) e Guan *et al* (2008), em que se entra

com a lei dos cossenos para os triângulos. Com base nessa lei são encontradas as distâncias do centro perspectivo às coordenadas no espaço objeto e depois os demais parâmetros de posição e orientação são obtidos basicamente com uma transformação isogonal 3D. A maioria das soluções exatas usa três pontos no espaço objeto como, por exemplo, os estudos de Haralick *et al* (1994) e Zeng (2012). Mas Grafarend e Shan (1997) usam quatro pontos. Esta solução acaba sempre numa equação de terceiro ou quarto grau. A pesquisa de Hinsken (1988) parte da equação da colinearidade, calculando as derivadas parciais com relação aos parâmetros e adapta a equação linearizada para quatérnios. No artigo de Guan *et al* (2008), após serem obtidas as distâncias, é formada uma matriz N da qual são obtidos os autovalores e autovetores e, por conseguinte, são extraídos os elementos de orientação exterior.

4.1.2.1 Ressecção espacial com equação da colinearidade e quatérnios

A ressecção com iterações pode ser calculada com base no modelo matemático que usa a equação da colinearidade fazendo a adaptação das rotações para os quatérnios.

Partindo-se da equação 71 e linearizando resulta na equação a seguir (JIANG *et al*, 2010):

$$x' = a_{11} \frac{\partial x}{\partial X_{ci}} + a_{12} \frac{\partial x}{\partial Y_{ci}} + a_{13} \frac{\partial x}{\partial Z_{ci}} + a_{14} \frac{\partial x}{\partial q_i} + a_{15} \frac{\partial x}{\partial q_{xi}} + a_{16} \frac{\partial x}{\partial q_{yi}} + a_{17} \frac{\partial x}{\partial q_{zi}} - l_x \quad (77\ i)$$

$$y' = a_{21} \frac{\partial y}{\partial X_{ci}} + a_{22} \frac{\partial y}{\partial Y_{ci}} + a_{23} \frac{\partial y}{\partial Z_{ci}} + a_{24} \frac{\partial y}{\partial q_i} + a_{25} \frac{\partial y}{\partial q_{xi}} + a_{26} \frac{\partial y}{\partial q_{yi}} + a_{27} \frac{\partial y}{\partial q_{zi}} - l_y \quad (77\ ii)$$

em que a_{ij} ., com i variando de um a duas vezes o número de pontos e j de 1 a 6 são os elementos da matriz A.

Além das fotocoordenadas são dados de entrada a distância focal, as coordenadas dos pontos no espaço objeto e valores aproximados para todos os parâmetros ($\omega_0, \varphi_0, \kappa_0, X_{c0}, Y_{c0}, Z_{c0}$).

A matriz A é das derivadas com relação aos parâmetros incógnitos, com base nos elementos a_{ij} da equação 77.

Para as derivadas da equação 77 com relação aos parâmetros podem ser usadas as seguintes simplificações (JUN, DONGHONG e YONGSHENG, 2008):

$$\frac{\partial x}{\partial X_c} = \frac{(q^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2)f + (2(q_x q_z - q q_y)) \times x}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (78 i)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y_c} = \frac{2(q_x q_y - q q_z)f + (2(q_y q_z + q q_x)) \times x}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (78 ii)$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z_c} = \frac{2(q_x q_z + q q_y)f + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \times x}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (78 iii)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X_c} = \frac{(2(q_x q_y + q q_z))f + (2(q_x q_z - q q_y)) \times y}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (78 iv)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_c} = \frac{(q^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2)f + (2(q_y q_z + q q_x)) \times y}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (78 v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z_c} = \frac{(2(q_y q_z - q q_x))f + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \times y}{2(q_x q_z - q q_y)(X - X_c) + 2(q_y q_z + q q_x)(Y - Y_c) + (q^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2)(Z - Z_c)} \quad (78 vi)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = 2 \left(-\frac{xy}{f} q_x + \left(f + \frac{x^2}{f} \right) q_y + y q_z \right) \quad (78 vii)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_x} = 2 \left(-\frac{xy}{f} q + y q_y - \left(f + \frac{x^2}{f} \right) q_z \right) \quad (78 viii)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_y} = 2 \left(-\left(f + \frac{x^2}{f} \right) q - y q_x - \frac{xy}{f} q_z \right) \quad (78 ix)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_z} = 2 \left(-y q + \left(f + \frac{x^2}{f} \right) q_x + \frac{xy}{f} q_y \right) \quad (78 x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = 2 \left(-\left(f + \frac{y^2}{f} \right) q_x + \frac{xy}{f} q_y - x q_z \right) \quad (78 xi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_x} = 2 \left(-\left(f + \frac{y^2}{f} \right) q_x - x q_y - \frac{xy}{f} q_z \right) \quad (78 xii)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_y} = 2 \left(-\frac{xy}{f} q + x q_x - \left(f + \frac{y^2}{f} \right) q_z \right) \quad (78 xiii)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_z} = 2 \left(x q + \frac{xy}{f} q_x + \left(f + \frac{y^2}{f} \right) q_y \right) \quad (78 ix)$$

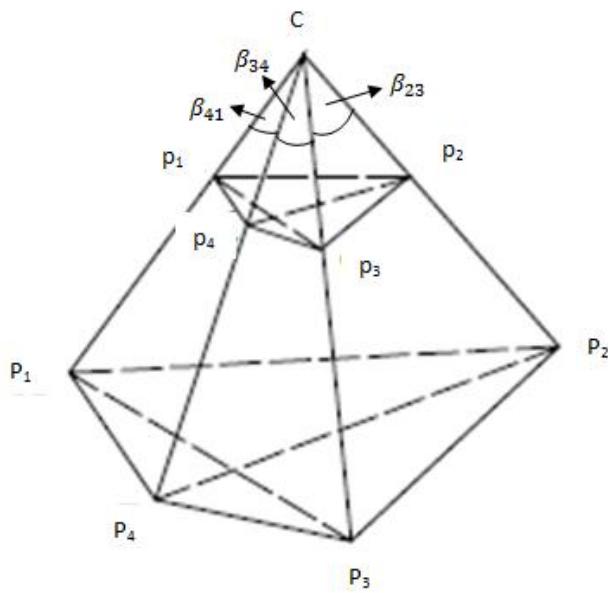
Para o cálculo do quatérnio inicial devem ser usados ângulos de Euler aproximados. Os demais valores aproximados também devem ser obtidos. Considerando a matriz P como a matriz identidade e aplicando o ajustamento pelo método paramétrico (equação 74) encontram-se os parâmetros ajustados.

4.1.2.2 Resseção espacial sem iteração

É o método que encontra os parâmetros da resseção espacial de forma direta, sem a necessidade de iterações e de valores iniciais, usando os quatérnios. No entanto é necessário que sejam previamente conhecidas as distâncias entre o centro perspectivo e cada ponto no terreno. Esta solução é encontrada, por exemplo, em Horn (1987) e para este trabalho foram usadas as fórmulas de implementação de Guan *et al* (2008).

A Figura 19 ilustra a geometria da resseção espacial proposto por Guan *et al* (2008) com a localização do centro perspectivo, dos pontos de controle e as coordenadas da imagem.

Figura 19- Geometria da resseção espacial proposto por Guan *et al* (2008).



Fonte: Adaptado de Guan *et al* (2008).

Na Figura 19 C representa o centro perspectivo, p_i , com $i = 1, \dots, 4$, indicam as fotocoordenadas e P_i são as coordenadas no espaço objeto e β_{ij} , com i e j variando de 1 até 4, são os ângulos espaciais.

A seguir são descritos os procedimentos de cálculo de resseção com este método, com as etapas de obtenção das distâncias entre o centro perspectivo e os pontos no espaço objeto, cálculo do fator escala, cálculo das novas coordenadas a partir do centroide, obtenção de uma matriz N, calcular os autovalores, construção da matriz de rotação, cálculo dos elementos angulares (ω, φ, κ), cálculo da matriz de translação, cálculo dos demais parâmetros de orientação exterior (X_c, Y_c e Z_c).

1. Calcular as distâncias entre o centro perspectivo e os pontos no espaço objeto:

Esta distância pode ser obtida por processo iterativo, com base na lei dos cossenos ou método de Grafarend (GUAN *et al*, 2008). Usando o método de Grafarend [a partir de Grafarend e Shan (1997)] o cálculo da distância deve ser feito do seguinte modo:

- Entrar com as coordenadas no espaço objeto, as fotocoordenadas e distância focal;
- Expressar os ângulos espaciais β_{ij} em termos das fotocoordenadas e distância focal:

$$\cos(\beta_{ij}) = \frac{x_i x_j + y_i y_j + f^2}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2} \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + f^2}} \quad (79)$$

em que:

β_{ij} são os ângulos espaciais;

(x_i, y_i) são as fotocoordenadas;

f distância focal.

- Usar a lei dos cossenos em função dos ângulos espaciais e das distâncias requeridas:

$$\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_1}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_2}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_1}\|\|\overrightarrow{CP_2}\| \cos(\beta_{12}) \quad (80 \text{ } i)$$

$$\|\overrightarrow{P_2 P_3}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_2}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_3}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_2}\|\|\overrightarrow{CP_3}\| \cos(\beta_{23}) \quad (80 \text{ } ii)$$

$$\|\overrightarrow{P_3 P_4}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_3}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_4}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_3}\|\|\overrightarrow{CP_4}\| \cos(\beta_{34}) \quad (80 \text{ } iii)$$

$$\|\overrightarrow{P_4 P_1}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_4}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_1}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_4}\|\|\overrightarrow{CP_1}\| \cos(\beta_{41}) \quad (80 \text{ } iv)$$

$$\|\overrightarrow{P_1P_3}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_1}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_3}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_1}\|\|\overrightarrow{CP_3}\|\cos(\beta_{13}) \quad (80 v)$$

$$\|\overrightarrow{P_2P_4}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_2}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_4}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_2}\|\|\overrightarrow{CP_4}\|\cos(\beta_{24}) \quad (80 vi)$$

Fazendo:

$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\|^2 = b_{12}, \quad \|\overrightarrow{P_2P_3}\|^2 = b_{23}, \quad \|\overrightarrow{P_3P_4}\|^2 = b_{34}, \quad \|\overrightarrow{P_4P_1}\|^2 = b_{41}, \quad \|\overrightarrow{P_1P_3}\|^2 = b_{13},$$

$$\|\overrightarrow{P_2P_4}\|^2 = b_{24}, \quad b_{ij} \in \mathbb{R}^+$$

$$-2\cos(\beta_{12}) = a_{12}$$

$$-2\cos(\beta_{23}) = a_{23}$$

$$-2\cos(\beta_{34}) = a_{34}$$

$$-2\cos(\beta_{41}) = a_{41}$$

$$-2\cos(\beta_{13}) = a_{13}$$

$$-2\cos(\beta_{24}) = a_{24}, \quad -2 \leq a_{ij} \leq 2$$

em que:

C É o centro perspectivo;

P_i São os pontos no espaço objeto.

As distâncias procuradas são:

$$\|\overrightarrow{CP_1}\| = x_1$$

$$\|\overrightarrow{CP_2}\| = x_2$$

$$\|\overrightarrow{CP_3}\| = x_3$$

$$\|\overrightarrow{CP_4}\| = x_4, \quad x_i \in \mathbb{R}^+$$

Com simplificações para os termos b_{ij} chegam-se as equações de Grunert (GRAFARENDE SHAN, 1997):

$$x_1^2 + x_2^2 + a_{12}x_1x_2 = b_{12} \quad (81 i)$$

$$x_2^2 + x_3^2 + a_{23}x_2x_3 = b_{23} \quad (81 ii)$$

$$x_3^2 + x_4^2 + a_{34}x_3x_4 = b_{34} \quad (81 iii)$$

$$x_4^2 + x_1^2 + a_{41}x_4x_1 = b_{41} \quad (81 iv)$$

$$x_1^2 + x_3^2 + a_{13}x_1x_3 = b_{13} \quad (81 \nu)$$

$$x_2^2 + x_4^2 + a_{24}x_2x_4 = b_{24} \quad (81 vi)$$

Entre essas equações apenas três são independentes e escolhendo 81 ii, 81 iii e 81 vi são obtidas as relações para as coordenadas homogêneas y_3 e y_4 :

$$y_3 = \frac{x_3}{x_2} \quad (82)$$

$$y_4 = \frac{x_4}{x_2} \quad (83)$$

Isolando x_2^2 nas equações 81 ii, 81 iii e 81 vi, levando em consideração as equações 82 e 83 são obtidos:

$$x_2^2 = \frac{b_{23}}{1+y_3^2+a_{23}y_3} \quad (84 i)$$

$$x_2^2 = \frac{b_{34}}{y_3^2+y_4^2+a_{34}y_3y_4} \quad (84 ii)$$

$$x_2^2 = \frac{b_{24}}{1+y_4^2+a_{24}y_4} \quad (84 iii)$$

Dividindo 84 ii por 84 i e 84 iii por 84 i resultam as equações a seguir:

$$b_{34}(1 + y_3^2 + a_{23}y_3) = b_{23}(y_3^2 + y_4^2 + a_{34}y_3y_4) \quad (85)$$

$$b_{24}(1 + y_3^2 + a_{23}y_3) = b_{23}(1 + y_4^2 + a_{24}y_4) \quad (86)$$

Subtraindo a equação 85 pela equação 86 é obtido o valor de y_4 :

$$y_4 = \frac{(b_{34} - b_{23} - b_{24})y_3^2 + a_{23}(b_{34} - b_{24})y_3 + (b_{23} + b_{34} - b_{24})}{a_{34}b_{23}y_3 - a_{24}b_{23}} \quad (87)$$

Substituindo este valor na equação 87 chega-se a uma equação do quarto grau, conforme o modelo explicitado:

$$C_4y_3^4 + C_3y_3^3 + C_2y_3^2 + C_1y_3 + C_0 = 0 \quad (88)$$

em que:

$$C_4 = b_{23}(b_{34} - b_{23} - b_{24})^2 - a_{34}^2b_{23}^2b_{24}$$

$$C_3 = (b_{34} - b_{23} - b_{24}) \times [a_{24}a_{34}b_{23}^2 + 2a_{23}b_{23}(b_{34} - b_{24})] + a_{34}b_{23}^2b_{24}(2a_{24} - a_{23}a_{34})$$

$$C_2 = b_{23}[a_{23}^2(b_{34} - b_{24})^2 + 2(b_{34} - b_{23} - b_{24})(b_{23} + b_{34} - b_{24}] \\ + a_{23}a_{24}a_{34}b_{23}^2(b_{24} + b_{34}) + a_{34}^2b_{23}^2(b_{23} - b_{24}) + a_{24}^2b_{23}^2(b_{23} - b_{24})$$

$$C_1 = 2a_{23}b_{23}(b_{34} - b_{24})(b_{23} + b_{34} - b_{24}) + a_{24}a_{34}b_{23}^2(b_{34} + b_{24} - b_{23}) - a_{23}a_{24}^2b_{23}^2b_{34}$$

$$C_0 = b_{23}(b_{23} + b_{34} - b_{24})^2 - a_{24}^2b_{23}^2b_{34}$$

As raízes de 88 são quatro e devem ser testadas para a escolha da raiz “correta”. Uma vez encontrado o valor de y_3 obtém-se x_2 , usando 84 i. Inserindo-se esses valores obtém-se x_3 , pela aplicação da equação 82. Depois se encontra y_4 , com a equação 87, e com ele e x_2 descobre-se x_4 , pela equação 83. Com isso chega ao valor de x_1 , com a equação 81. Ao resolver a equação de quarto grau, deve-se tomar como solução o número positivo e número real, uma vez que se busca o valor de uma distância (ZENG, 2012), mas além disso devem ser verificados os valores absolutos das raízes que não podem exceder um certo limiar. Mais detalhes são dados nos experimentos.

2. Calcular os fatores de escala:

Estes fatores são uma relação entre as distâncias do centro perspectivo até as coordenadas no espaço objeto e centro perspectivo até fotocoordenadas, expresso cada um por (GUAN *et al*, 2008):

$$\lambda_i = \frac{S_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} \quad (89)$$

em que S_i representa a distância do centro perspectivo ao ponto i no espaço objeto;

3. Calcular as novas coordenadas a partir do centroide, efetuando uma translação, com as equações (GUAN *et al*, 2008):

$$\bar{p}_i = p_i - p_g \quad (90)$$

$$\bar{s}_i = s_i - s_g \quad (91)$$

com:

$$s_i = \begin{pmatrix} \lambda_i x_i \\ \lambda_i y_i \\ \lambda_i f \end{pmatrix} \quad (92)$$

$$s_g = \frac{1}{n} \sum_i s_i \quad (93)$$

$$p_g = \frac{1}{n} \sum_i p_i \quad (94)$$

em que:

p_i são as coordenadas no espaço objeto, com $i = 1, \dots, n$;

s_i são as coordenadas que dependem do fator escala e da distância focal;

s_g e p_g são o centroide;

n é o número de pontos.

4. Formação da matriz N e cálculo dos autovalores:

A matriz N é dada pelo produto de duas matrizes que representam a rotação para um vetor no espaço tridimensional e é apresentada como (GUAN *et al*, 2008):

$$N = \sum_i \begin{pmatrix} 0 & -x_{p_i} & -y_{p_i} & -z_{p_i} \\ x_{p_i} & 0 & -z_{p_i} & y_{p_i} \\ y_{p_i} & z_{p_i} & 0 & -x_{p_i} \\ z_{p_i} & -y_{p_i} & x_{p_i} & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & -x_{s_i} & -y_{s_i} & -z_{s_i} \\ x_{s_i} & 0 & z_{s_i} & -y_{s_i} \\ y_{s_i} & -z_{s_i} & 0 & -x_{s_i} \\ z_{s_i} & y_{s_i} & -x_{s_i} & 0 \end{pmatrix} \quad (95)$$

Os elementos que compõem estas matrizes são os quatérnios $P_i = (0, \bar{p}_i)$ e $S_i = (0, \bar{s}_i)$.

5. Selecionar o maior autovalor e calcular o autovetor correspondente para adotar como o quatérnio. Neste caso a seleção é feita tomando-se o autovetor correspondente ao maior autovalor.

6. Construir matriz de rotação. A construção da matriz de rotação é feita conforme a equação apresentada na Seção 3.6.

7. Calcular os elementos angulares. Os elementos angulares são calculados ao se observar a sequência de rotação dos dados que estão sendo processados e estabelecer as relações trigonométricas existentes.

8. Calcular a matriz de translação (GUAN *et al*, 2008):

$$T = R_q^t \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} \quad (96)$$

9. Calcular os demais parâmetros de orientação exterior. Os demais elementos são as coordenadas do centro perspectivo que, por sua vez, são dadas pelo produto da matriz de rotação com o vetor da translação:

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} = T \times R_q \quad (97)$$

O modelo matemático que gera os resíduos é dado por (GUAN *et al*, 2008):

$$V_i = R_q^t p_i - s_i - T \quad (98)$$

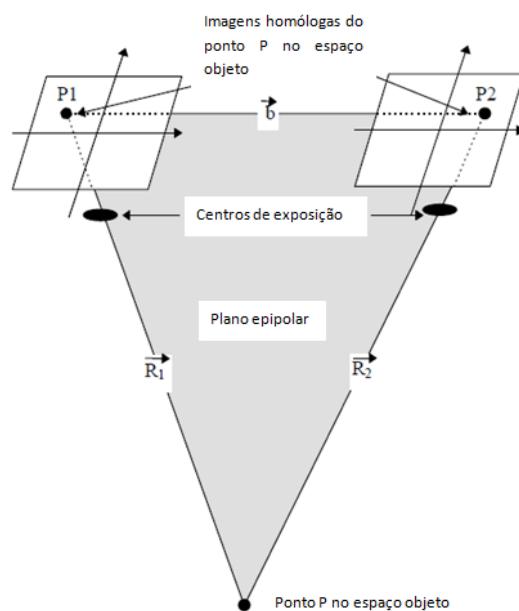
em que T é a matriz que depende das coordenadas do centro perspectivo apresentada na equação 96 (GUAN *et al*, 2008).

Mais detalhes podem ser consultados Guan *et al* (2008) e Horn (1987).

4.2. Orientação Relativa

A orientação relativa é a operação que cria uma representação tridimensional do objeto fotografado (modelo estereoscópico), com um par de fotografias e com superposição adequada (WONG, 1980) e faz parte da orientação exterior, juntamente com a orientação absoluta. A geometria da orientação relativa com o plano epipolar pode ser vista na Figura 20. O plano epipolar faz parte da condição de coplanaridade, que é um dos modelos usados para a orientação relativa neste trabalho, além do modelo que usa a equação da colinearidade.

Figura 20 – Geometria da orientação relativa para condição de coplanaridade.



Fonte: Adaptado de Berberan (2002).

Na Figura 20 P1 representa o ponto P na fotografia esquerda, P2 é o ponto P na fotografia direita, \vec{b} é o vetor da base, \vec{R}_1 e \vec{R}_2 são vetores do espaço objeto.

4.2.1 Orientação relativa com a equação da colinearidade

Ao se calcular a orientação relativa com a equação da colinearidade, além de encontrar os parâmetros de uma câmara com relação à outra, fornece também as coordenadas tridimensionais dos pontos observados. Na solução chamada orientação relativa dependente, os parâmetros da câmara esquerda são considerados como fixos ($\omega_1, \varphi_1, \kappa_1, X_{c1}, Y_{c1}, Z_{c1}$) e são determinados os parâmetros da câmara direita ($\omega_2, \varphi_2, \kappa_2, Y_{c2}, Z_{c2}$) com relação à primeira câmara. É necessário considerar X_{c2} , ou o comprimento da base, como injunção, já que o sistema é singular (GALO, 2003).

Para a obtenção da orientação relativa, neste caso, é aplicado o MMQ (LUGNANI, 1987). Uma das soluções do MMQ é dada pelo Método Paramétrico que, por sua vez, depende das matrizes A, P, L e X_0 .

A formação da matriz A depende das derivadas parciais em relação aos parâmetros incógnitos e fica como (GALO, 2003):

$$A_{4n+1 \times 6+3n} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial x_{l1}}{\partial X_1} & \frac{\partial x_{l1}}{\partial Y_1} & \frac{\partial x_{l1}}{\partial Z_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial y_{l1}}{\partial X_1} & \frac{\partial y_{l1}}{\partial Y_1} & \frac{\partial y_{l1}}{\partial Z_1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial x_{n1}}{\partial X_n} & \frac{\partial x_{n1}}{\partial Y_n} & \frac{\partial x_{n1}}{\partial Z_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial y_{n1}}{\partial X_n} & \frac{\partial y_{n1}}{\partial Y_n} & \frac{\partial y_{n1}}{\partial Z_n} \\ \hline \frac{\partial q_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial q_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial q_2}{\partial \kappa_2} & \frac{\partial q_2}{\partial X_{c2}} & \frac{\partial q_2}{\partial Y_{c2}} & \frac{\partial q_2}{\partial Z_{c2}} & \frac{\partial q_2}{\partial X_2} & \frac{\partial q_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial q_2}{\partial Z_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial y_{l2}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial \kappa_2} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial X_{c2}} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial Y_{c2}} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial Z_{c2}} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial X_2} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial Y_2} & \frac{\partial y_{l2}}{\partial Z_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n2}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial x_{n2}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial x_{n2}}{\partial \kappa_2} & \frac{\partial x_{n2}}{\partial X_{c2}} & \frac{\partial x_{n2}}{\partial Y_{c2}} & \frac{\partial x_{n2}}{\partial Z_{c2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial x_{n2}}{\partial X_n} & \frac{\partial x_{n2}}{\partial Y_n} & \frac{\partial x_{n2}}{\partial Z_n} \\ \frac{\partial y_{n2}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial \kappa_2} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial X_{c2}} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial Y_{c2}} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial Z_{c2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial y_{n2}}{\partial X_n} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial Y_n} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial Z_n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (99)$$

em que x_1 e y_1 são as funções da equação da colinearidade para a câmara esquerda (câmara um). Já x_2 e y_2 são as funções da equação da colinearidade para a câmara direita (câmara dois).

Por meio da equação 99 pode-se notar que a matriz A está basicamente dividida em quatro partes: As superiores e inferiores são referentes às derivadas parciais da equação da colinearidade para a câmara esquerda e direita. As partes esquerda e direita referem-se aos parâmetros de cada fotografia e coordenadas dos pontos do modelo, respectivamente. A parte superior esquerda é toda de zeros porque os parâmetros da fotografia esquerda não entram no modelo, pois são iguais a zero.

A matriz P é uma matriz quadrada que dependerá do valor imposto ao sigma a priori e da MVC das observações (L_b) (GEMAEL, 1994). Já a matriz L é um vetor que resulta de uma relação entre as fotocoordenadas lidas na imagem (vetor L_b) e as coordenadas calculadas da imagem (L_0), a partir dos valores iniciais introduzidas nas equações 71 i e 71 ii. A equação a seguir mostra a relação para obter L:

$$L = L_b - L_0 \quad (100)$$

Para os valores de X_0 são tomados valores aproximados, usando procedimento adequado, para os parâmetros incógnitos em questão, conforme o modelo apresentado na equação a seguir:

$$X_0 = (\omega_{20} \quad \varphi_{20} \quad \kappa_{20} \quad X_{c_{20}} \quad Y_{c_{20}} \quad Z_{c_{20}} \quad X_1 \quad Y_1 \quad Z_1 \quad \dots \quad X_n \quad Y_n \quad Z_n) \quad (101)$$

4.2.2 Orientação relativa com equação da coplanaridade

A orientação relativa também pode ser diretamente obtida da condição de coplanaridade (Figura 20). Como os centros de exposição, fotocoordenadas e ponto no espaço objeto devem estar em um plano, deve valer o modelo matemático (WONG, 1980):

$$F = \vec{b} \cdot (\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) = 0 \quad (102)$$

em que:

\vec{b} representa o vetor que contém as componentes da base que são b_x , b_y e b_z ;

\vec{R}_1 e \vec{R}_2 são vetores dados em funções de fotocoordenadas para a câmara direita e esquerda, respectivamente.

Esses três vetores de forma mais explícita são:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (103)$$

$$\vec{R}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -f \end{pmatrix} \quad (104)$$

$$\vec{R}_2 = \begin{pmatrix} r_{11}x_2 + r_{21}y_2 - r_{31}f \\ r_{12}x_2 + r_{22}y_2 - r_{32}f \\ r_{13}x_2 + r_{23}y_2 - r_{33}f \end{pmatrix} \quad (105)$$

em que:

r_{ij} são os elementos da matriz de rotação;

f é a distância focal;

x_1, y_1 e x_2, y_2 são as fotocoordenadas da câmara esquerda e direita, respectivamente.

Neste caso, para facilitar os cálculos, a orientação relativa pode ser calculada tomando as coordenadas da câmara esquerda fixa. Fazendo as substituições em 102 resulta, para cada ponto, uma equação do tipo:

$$F = (b_x y_1 - b_y x_1)(r_{13}x_2 + r_{23}y_2 - r_{33}f) + (b_z x_1 + b_x f)(r_{12}x_2 + r_{22}y_2 - r_{32}f) - (b_y f + b_z y_1)(r_{11}x_2 + r_{21}y_2 - r_{31}f) \quad (106)$$

em que:

b_x, b_y e b_z são componentes do vetor da base (com b_x fixo);

r_{ij} são os elementos da matriz de rotação;

f é a distância focal;

x_1 e y_1 são as fotocoordenadas da câmara esquerda (fixa);

x_2 e y_2 são as fotocoordenadas da câmara direita (incógnitas).

A solução da orientação relativa é dada pela linearização da equação 106 e aplicação do método combinado (equação 75, da Seção 4.1.1), de modo que a

matriz A será das derivadas parciais em relação à ω , φ , κ , b_y e b_z . Já a matriz B será das derivadas parciais com relação às fotocoordenadas da câmara esquerda e direita, conforme os modelos matemáticos a seguir (WONG, 1980):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_c} & \frac{\partial F}{\partial Y_c} & \frac{\partial F}{\partial Z_c} & \frac{\partial F}{\partial \omega} & \frac{\partial F}{\partial \varphi} & \frac{\partial F}{\partial \kappa} \end{pmatrix} \quad (107)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \end{pmatrix} \quad (108)$$

Mais detalhes podem ser encontrados em Berberan (2002) e Galo (2003).

4.2.3 Orientação relativa com quatérnios

A aplicação dos quatérnios na orientação relativa é encontrada, por exemplo, em Galo (2003), Hinsken (1988) e Horn (1989), que usam a condição da coplanaridade.

Em Galo (2003) a orientação relativa é feita adaptando as fórmulas fotogramétricas da condição de coplanaridade para quatérnios, usando o ajustamento pelo método paramétrico e injunção. Hinsken (1988) calcula esta orientação, a partir da condição de coplanaridade encontrando uma forma linearizada para este cálculo. Em Horn (1989) o cálculo é realizado sem a necessidade de valores iniciais, com quatérnios unitários, deduzindo uma forma de cálculo direto.

Também existe aplicação da orientação relativa em Lin *et al* (2010), que efetua a orientação relativa com vetores e ângulos calculados por quatérnios duais, usando linearização de Taylor.

O método desenvolvido por Galo (2003) para o cálculo da orientação relativa com quatérnios parte de uma adaptação da condição de coplanaridade (que foi apresentada na equação 106 da Seção 4.2.2), que é apresentado a seguir:

$$O_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ y_{1i} \\ f \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & b_z & -b_y \\ -b_z & 0 & b_x \\ b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix} R^t \begin{pmatrix} x_{2i} \\ y_{2i} \\ f \end{pmatrix} \quad (109)$$

em que:

x_{1i} , y_{1i} são as fotocoordenadas da câmara esquerda;

x_{2i} , y_{2i} são as fotocoordenadas da câmara direita;

f distância focal;

b_x , b_y e b_z são os componentes do vetor da base;

R é a matriz de rotação de quatérnios.

Os parâmetros incógnitos desse modelo são:

$$X_a = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \\ q \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \quad (110)$$

Para o cálculo da orientação relativa com quatérnios pode-se inserir a injunção do quatérnio unitário (também considerando o componente b_x como fixo), usar mínimo de seis pontos correspondentes, linearizar a equação 110, conforme a equação a seguir e aplicar o método paramétrico (GALO, 2003):

$$A_{i1} = \left(\frac{\partial O_i}{\partial q} \quad \frac{\partial O_i}{\partial q_x} \quad \frac{\partial O_i}{\partial q_y} \quad \frac{\partial O_i}{\partial q_z} \quad \frac{\partial O_i}{\partial b_x} \quad \frac{\partial O_i}{\partial b_y} \quad \frac{\partial O_i}{\partial b_z} \right) \quad (111)$$

5. EXPERIMENTOS

Foram realizados diversos experimentos com os programas desenvolvidos neste trabalho para a resseção espacial em fotogrametria e orientação relativa, tanto usando os modelos analíticos baseados na equação da colinearidade, como usando modelos com quatérnios.

A metodologia de cada experimento, as particularidades que levaram a suas escolhas e os resultados são detalhados nas próximas seções.

5.1 Aplicação da resseção espacial

Para os experimentos de resseção espacial foram comparados três métodos:

- Equação da colinearidade;
- Resseção direta;
- Equação de colinearidade, adaptada para quatérnios.

O método tradicional da equação da colinearidade com os ângulos de Euler foi usado para comparação com os resultados obtidos com as resseções espaciais com os outros métodos. Este método foi realizado com o ajustamento pelo método paramétrico, desenvolvido por Silva (1995), com iterações.

Foram testados dois métodos com uso de quatérnios. Um método de resseção direta chamado aqui de resseção espacial sem iteração (SI) e outro desenvolvido a partir da equação da colinearidade adaptada com quatérnios, chamado aqui de resseção espacial com iteração (CI).

5.1.1 Aplicação da resseção espacial sem iteração (SI)

Foi implementado um programa para a resseção espacial sem iteração seguindo principalmente o algoritmo de Guan *et al* (2008). Este tipo de solução chamado na literatura internacional de "*closed-form*", na maioria usa três pontos, mas a de Guan *et al* (2008) usa quatro pontos.

Para se resolver este método primeiro é necessário calcular as distâncias entre o centro perspectivo e os pontos no espaço objeto, para o qual foi usado o

método de Grafarend e Shan (1997), cujo detalhamento pode ser visto no Capítulo 4.

5.1.1.1 Experimento 1 SI

O experimento 1 foi realizado para validar o programa de cálculo da ressecção espacial sem iteração, usando os dados originais de Guan *et al* (2008) e para comparação com o método da equação da colinearidade. Os dados de entrada estão na Tabela 1. Os elementos de orientação interior usados foram $x_0 = y_0 = 0,000$ e $f = 153,240$, em milímetros (mm) e as coordenadas do espaço objeto são dadas em metros (m).

Tabela 1- Dados de entrada do experimento 1 SI.

<i>Pt</i>	Coordenadas:				
	Imagen (mm)		Espaço objeto (m)		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
1	-86,150	-68,990	36589,410	25273,320	2195,170
2	-53,400	82,210	37631,080	31324,510	728,690
3	10,460	64,430	40426,540	30319,810	757,310
4	-14,780	-76,630	39100,970	24934,980	2386,500

Fonte: Guan *et al* (2008).

A Tabela 2 mostra os resultados finais da ressecção espacial pela equação de colinearidade (Colinearidade), pelo programa desenvolvido (Sem Iteração) e os resultados originais de Guan *et al* (2008), além das diferenças entre os dados originais e os recalculados. Os ângulos são dados em radianos (rad).

Tabela 2- Resultado da ressecção espacial sem iteração no experimento 1 SI.

Método /Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	ω (rad)	φ (rad)	κ (rad)
Colinearidade	39795,452	27476,462	7572,686	0,002	0,004	-0,068
Sem iteração	39800,558	27469,959	7570,588	0,002	0,005	-0,068
Resultado de Guan <i>et al</i> (2008)	39795,080	27476,750	7572,810	0,002	-0,004	-0,068
Diferenças artigo Guan <i>et al</i> (2008) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega$ (rad)	$\Delta \varphi$ (rad)	$\Delta \kappa$ (rad)
Colinearidade	0,372	-0,288	-0,124	0,000	-0,008	0,000
Sem iteração	5,478	-6,791	-2,222	0,000	-0,009	0,000

A Tabela 2 mostra que a resseção espacial com a equação da colinearidade apresentou um valor próximo ao de Guan *et al* (2008), principalmente no resultado encontrado para os ângulos de Euler. O resultado da resseção espacial sem iteração teve diferença significativa de 6,791m na coordenada Y. Para confirmar se o algoritmo foi implementado corretamente foi realizado um segundo experimento 2 SI.

5.1.1.2 Experimento 2 SI

O experimento 2 SI foi realizado com uma imagem simulada a partir das coordenadas no espaço objeto da Tabela 1 e dos parâmetros de orientação exterior dos resultados originais, Tabela 2, de Guan *et al* (2008). Os elementos de orientação interior foram os mesmos usados no experimento anterior. Foi simulada uma fotografia obedecendo a rotação $R_{\varphi\omega_k}$ no sistema ativo, em MATLAB® com um programa de simulação de fotografias chamado simufoto.m. A Tabela 3 mostra as coordenadas da imagem obtidas com a simulação.

Tabela 3- Fotocoordenadas obtidas para o experimento 2 SI.

Pt	x(mm)	y(mm)
1	86,379	-67,997
2	-53,965	83,435
3	10,145	65,478
4	-15,082	-75,527

A Tabela 3 mostra que os resultados obtidos para os valores das fotocoordenadas são bem próximos, mas não iguais, das fotocoordenadas apresentadas na Tabela 1, o que indica prováveis erros aleatórios nas observações de Guan *et al* (2008).

Entrando com as fotocoordenadas simuladas e repetindo as coordenadas no espaço objeto da Tabela 1 foi calculada a resseção espacial sem iteração, cujos resultados estão na Tabela 4.

Tabela 4- Resultado da resseção espacial sem iteração no experimento 2 SI.

Método /Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega (rad)$	$\varphi (rad)$	$\kappa (rad)$
Colinearidade	39795,000	27476,001	7573,000	-0,004	0,002	-0,068
Sem iteração	39795,087	27476,726	7572,803	-0,004	0,002	0,068
Resultado de Guan et al (2008)	39795,080	27476,750	7572,810	0,002	-0,004	-0,068
Diferenças artigo Guan et al (2008) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega (rad)$	$\Delta \varphi (rad)$	$\Delta \kappa (rad)$
Colinearidade	0,372	-0,288	-0,124	-0,006	0,006	0,000
Sem iteração	0,007	-0,024	-0,007	-0,006	0,006	0,136

A Tabela 4 mostra que o novo resultado da resseção com a colinearidade é muito semelhante ao experimento anterior, com diferenças de coordenadas de até 0,372m. Já a resseção espacial sem iteração ficou bastante semelhante do resultado de Guan *et al* (2008), com diferença máxima de 2,4 cm na coordenada Y.

Esperava-se que essas diferenças fossem menores, e foram realizados outros testes que confirmaram que o algoritmo de Guan *et al* (2008) é muito sensível aos valores das distâncias, que são os dados principais de entrada. Neste sentido foi realizado um teste com as distâncias usadas pelo artigo de Guan *et al* (2008) e o resultado da recessão coincidiu com o mesmo, indicando possíveis erros nas observações descritas no artigo.

As distâncias que são obtidas pelo método de Grafarend por sua vez também apresentam algumas dificuldades de interpretação, conforme ocorrências explicadas nos próximos experimentos. Aparenta ainda ter problemas de ordem numérica, visto que foi feito um teste com simples variação da ordem dos pontos e os resultados não coincidem exatamente.

5.1.1.3 Experimento 3 SI

O experimento 3 foi realizado testar o programa com os dados extraídos de Grafarend e Shan (1997) e para testar também o método de cálculo de distâncias do mesmo. Usando as coordenadas no espaço objeto e os valores da orientação exterior (Tabela 5), foram simuladas as fotocoordenadas no programa simufoto.m, apresentadas na Tabela 6. Os elementos de orientação interior usados foram $x_0 = y_0 = 0,0\text{ mm}$ e $f = 50,0\text{ mm}$.

Tabela 5- Dados da simulação de fotocoordenadas do experimento 3 SI.

Pt	Coordenadas no espaço objeto (m)				
	X	Y	Z		
1	0,000	0,000	1,000		
2	2,000	0,000	-1,000		
3	2,000	2,000	1,000		
4	0,000	2,000	-1,000		
Elementos orientação exterior					
$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
1,000	1,000	4,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: Grafarend e Shan (1997).

Tabela 6- Fotocoordenadas obtidas para o experimento 3 SI.

Pt	$x(mm)$	$y(mm)$
1	-16,667	-16,667
2	10,000	-10,000
3	16,667	16,667
4	-10,000	10,000

Depois foi calculada a resseção espacial sem iteração. A Tabela 7 apresenta os valores obtidos neste experimento. Neste caso os ângulos são dados em graus ($^{\circ}$).

Tabela 7- Resultado da resseção espacial sem iteração no experimento 3 SI.

Método /Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
Colinearidade	1,000	1,000	4,000	0,000	0,000	0,000
Sem iteração	1,335	1,047	-3,0799	0,786	-1,140	0,417
Resultado Grafarend e Shan (1997)	1,000	1,000	4,000	0,000	0,000	0,000
Diferenças Grafarend e Shan (1997) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega(^{\circ})$	$\Delta \varphi(^{\circ})$	$\Delta \kappa(^{\circ})$
Colinearidade	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Sem iteração	0,335	0,047	-7,080	0,786	-1,114	0,417

Nesse experimento a resseção espacial com a equação da colinearidade deu o mesmo resultado de Grafarend e Shan (1997). Mas o resultado da resseção espacial sem iteração apresentou diferenças significativas do esperado, principalmente para a coordenada Z. Depois de alguns testes, foi verificado que o motivo estava no método de escolha das raízes do polinômio de quarto grau, que interfere no cálculo da distância pelo método de Grafarend.

No experimento 1 e 2 (Seções 5.1.1.1 e 5.1.1.2) a raiz escolhida, dentre as quatro obtidas com o método de Grafarend, foi baseada no Teorema de Bolzano, que afirma que ao ser dada uma função contínua (neste caso o polinômio), num intervalo fechado, de modo que as imagens dos pontos extremos do intervalo tenham sinais diferentes, então existe pelo menos um número n tal que $f(n) = 0$ (SARTORI e MANTOVANI, 2010). Foram realizados vários testes de modo empírico que mostraram que os valores que geravam convergência era a maior raiz do domínio $[0; 1,5]$, pois se a raiz encontrada fosse maior que 1,5 as distâncias obtidas com o método de Grafarend (dados de entradas da ressecção espacial sem iteração) faziam com que a ressecção espacial sem iteração não convergisse. Então foi implementado uma sub-rotina com teste de para escolha da raiz, no MATLAB[®], de modo que as raízes saíssem em ordem decrescente (para que pudesse ser tomada diretamente a primeira raiz como a solução adequada para o método de Grafarend), com essa restrição de intervalo.

Para este experimento a sub-rotina com $x \in [0; 1,5]$, sendo x um número real, não funcionou, o que demonstrou que a restrição de intervalo, como implementada, pode falhar. Como tomar a primeira raiz deste intervalo (que foi implementado de modo a ser sempre a maior dentre as quatro possíveis) nem sempre fazia com que a ressecção espacial sem iteração convergisse, então os resultados encontrados com este método foram comparados com os resultados esperados dos experimentos (dados de Guan *et al* (2008), Grafarend e Shan (1997) e Silva (1995)). A cada vez que não havia convergência era feita a troca de raízes de modo que o resultado esperado fosse atingido.

Neste caso ocorreram quatro raízes reais e a solução foi encontrada com a quarta raiz, que resultou nas distâncias que coincidiram com as do artigo de Grafarend e Shan (1997). Com essas distâncias foi recalculada a ressecção espacial sem iteração, cujo resultado está na Tabela 8, que agora se iguala ao de Grafarend e Shan (1997).

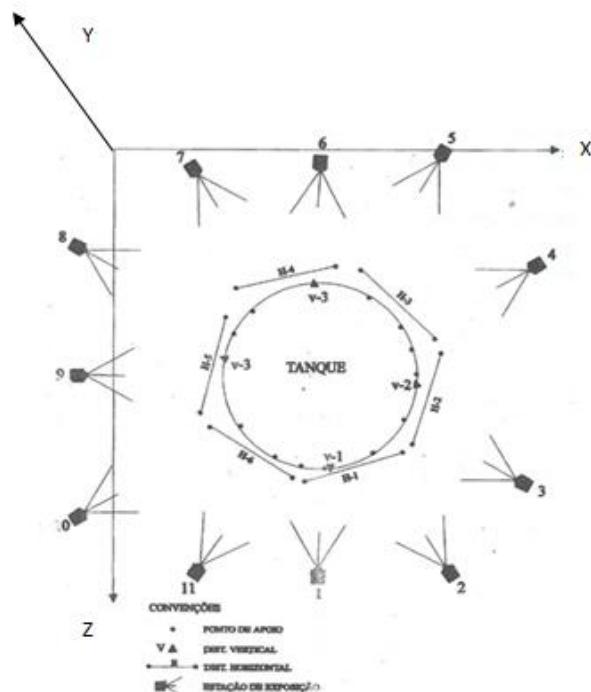
Tabela 8- Novo resultado da resseção sem iteração no experimento 3 SI.

Método/ Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega (\circ)$	$\varphi (\circ)$	$\kappa (\circ)$
Sem iteração	1,000	1,000	4,000	0,000	0,000	0,000
Resultado Grafarend e Shan (1997)	1,000	1,000	4,000	0,000	0,000	0,000
Diferenças Grafarend e Shan (1997) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega (\circ)$	$\Delta \varphi (\circ)$	$\Delta \kappa (\circ)$
Sem iteração	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

5.1.1.4 Experimento 4 SI

O objetivo dos experimentos 4, 5 e 6 é testar a resseção espacial sem iteração com dados reais. As posições das fotografias são conhecidas a partir de uma fototriangulação, que fornece as posições e orientações devidamente ajustadas, e permitirão também análises de resultados com ambiguidades e posições críticas, conforme previsões estudadas na seção 2.4, conforme exemplos nos experimentos 5 e 6.

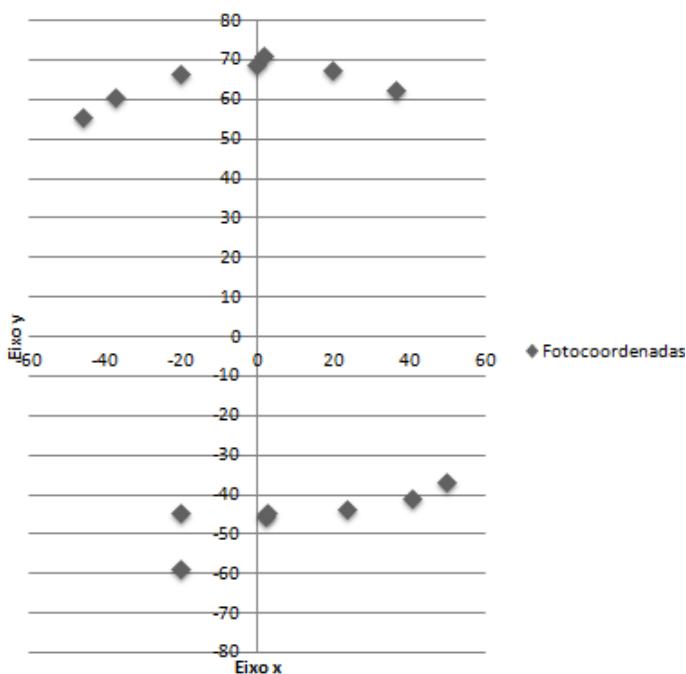
Serão usados dados de Silva (1995), que fez um levantamento em torno de um tanque cilíndrico, composto por 11 fotografias, dispostas de acordo com a Figura 21. Os elementos de orientação interior usados foram $x_0 = y_0 = 0$ mm e $f = 99,800$ mm.

Figura 21- Indicações das posições das estações de exposições.


Fonte: Silva (1995).

Foi realizada a resseção espacial para a fotografia da posição 1 da Figura 21. Como a fotografia tinha mais que quatro pontos no espaço objeto, fez-se uma seleção das fotocoordenadas que estivessem bem distribuídas (dispostas no canto superior e inferior na direita e esquerda da imagem a partir da posição do centro da fotografia, de modo a ter pontos nos quatro quadrantes da fotografia). A seleção foi feita com um gráfico de dispersão do Excel, para verificar as distribuições das fotocoordenadas, conforme a Figura 22. Com esta figura foram observados os quatro pontos mais próximos dos vértices desta fotografia e assim foram extraídas as fotocoordenadas de interesse.

Figura 22- Posições das fotocoordenadas do experimento 4.



Na Figura 23 e Tabela 9 podem ser verificadas as posições dos pontos e do centro da fotografia e valores, respectivamente, das fotocoordenadas selecionadas.

Figura 23- Posições das fotocoordenadas selecionadas do experimento 4.

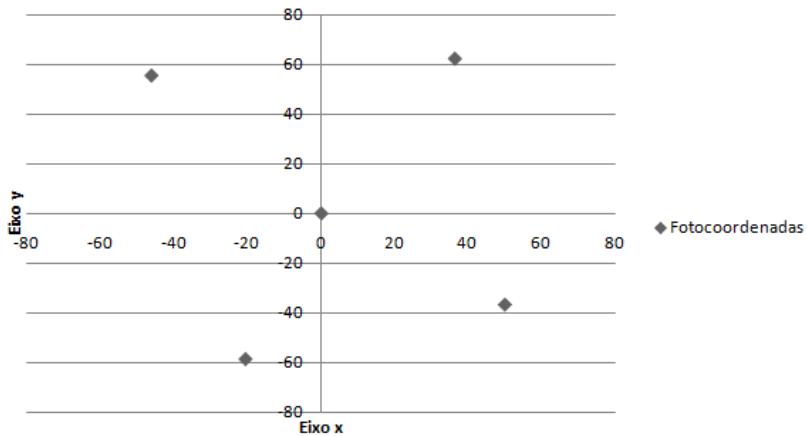


Tabela 9- Fotocoordenadas selecionadas para o experimento 4 SI.

Pt	x(mm)	y(mm)
1	36,290	62,403
2	49,875	-36,817
3	-46,172	55,611
4	-20,623	-58,807

Fonte: Adaptado de Silva (1995).

As coordenadas correspondentes no espaço objeto podem ser vistas na Tabela 10.

Tabela 10- Dados de entrada do experimento 4 SI.

Pt	Coordenadas no espaço objeto (m)		
	X	Y	Z
1	17,457	9,245	21,385
2	18,880	0,344	20,224
3	9,775	9,247	20,604
4	12,952	-0,041	23,414

Fonte: Silva (1995).

Com esses dados foi calculada a ressecção espacial sem iteração. Na Tabela 11 estão os resultados, junto com os valores da ressecção espacial pela colinearidade e de Silva (1995), obtido por fototriangulação e usado como referência.

Tabela 11- Resultado da resseção espacial sem iteração no experimento 4 SI.

Método/ Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega (^{\circ})$	$\varphi (^{\circ})$	$\kappa (^{\circ})$
Colinearidade	14,366	3,250	29,862	3,496	0,894	-0,325
Sem Iteração	14,368	3,253	29,863	3,480	0,903	-0,380
Resultado de Silva (1995)	14,370	3,261	29,875	3,406	0,918	-0,378
Diferenças Silva (1995) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega (^{\circ})$	$\Delta \varphi (^{\circ})$	$\Delta \kappa (^{\circ})$
Com colinearidade	-0,004	-0,011	-0,013	0,092	-0,024	0,053
Sem Iteração	-0,002	-0,008	-0,012	0,074	-0,015	-0,002

O resultado da Tabela 11 mostra que a resseção espacial com a equação da colinearidade tem pouca diferença do resultado encontrado por Silva (1995), porém a resseção espacial sem iteração apresenta a menor diferença.

É importante chamar a atenção que o sistema de coordenadas da Figura 21 não está em posição convencional, comparando com o aéreo, ou seja, o eixo Z não está na vertical. Com isto a fotografia um está em posição equivalente a uma fotografia vertical, caso o sistema estivesse em posição normal.

5.1.1.5 Experimento 5 SI

O experimento 5 foi realizado para testar um caso de resultado ambíguo, a partir da matriz de rotação. Aqui os cálculos são para a fotografia 5 (Figura 21). A Tabela 12 apresenta os dados de entrada deste experimento. As coordenadas foram escolhidas de forma similar ao experimento 4.

Tabela 12- Dados de entrada do experimento 5 SI.

<i>Pt</i>	Coordenadas:				
	Imagem real (mm)		Terreno (m)		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
1	36,290	39,519	12,018	9,282	9,677
2	-34,829	40,527	20,338	9,260	13,861
3	-50,115	-35,718	21,796	-0,008	12,631
4	37,500	-30,047	12,018	9,282	9,677

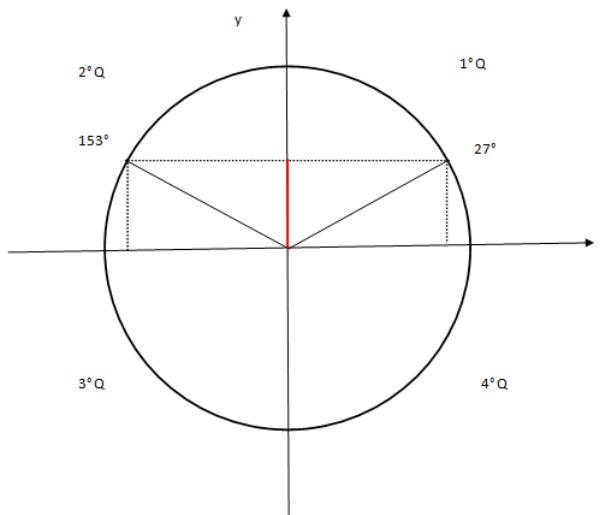
Fonte: Silva (1995).

Com os dados da tabela anterior foi calculada a resseção espacial sem iteração, que é apresentado na Tabela 13.

Tabela 13- Resultado da resseção espacial sem iteração no experimento 5 SI.

Método/ Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega (\circ)$	$\varphi (\circ)$	$\kappa (\circ)$
Colinearidade	NC	NC	NC	NC	NC	NC
Sem iteração	22,029	3,330	0,426	-3,489	27,074	2,360
Resultado de Silva (1995)	22,024	3,340	0,404	-3,420	152,978	2,331
Diferenças Silva (1995) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega (\circ)$	$\Delta \varphi (\circ)$	$\Delta \kappa (\circ)$
Colinearidade	-	-	-	-	-	-
Sem iteração	0,005	-0,01	0,022	-0,069	-125,904	0,029

Os resultados da Tabela 13 mostram que a resseção espacial com a equação da colinearidade não convergiu (NC). A resseção espacial sem iteração se aproximou do resultado de Silva (1995), exceto para o valor de φ . Porém foi observado que arredondando o valor de φ e do resultado de Silva (1995) para um número inteiro, os ângulos são suplementares e tem a mesma imagem para a função seno, conforme apresentado da Figura 24.

Figura 24- Localizações dos ângulos 27° e 153° no ciclo trigonométrico.


Então se concluiu que o MATLAB® estava dando resultado reduzido ao primeiro quadrante (neste caso ambíguo), com a equação 30 *ii*. Para resolver situações como esta Shih (1990) indica o uso da equação 34, desde que seja calculado previamente o valor aproximado do cosseno de φ , porque encontra o valor do ângulo nos quatros quadrantes do ciclo trigonométrico e é livre de dualidades. Neste caso, como não havia valor de φ aproximado, tentou-se inserir a equação 34 *ii* da Seção 2.4.3, mas o valor deste ângulo foi encontrado com sinal oposto. A

solução foi calcular φ com a equação 35 (desta mesma seção). Para isto foi acessada a matriz de rotação calculada a partir do quatérnio no programa e feita sua equivalência com a rotação $R_{\kappa\varphi\omega}$ no sistema passivo que é apresentada na equação 130 do Apêndice A. A Tabela 14 mostra o novo resultado recalculado, que agora se aproxima do resultado de Silva (1995).

Tabela 14- Novo resultado da resseção sem iteração no experimento 5 SI.

Método/ Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
Sem iteração	22,028	3,330	0,426	-3,489	152,860	2,360
Resultado de Silva (1995)	22,024	3,340	0,404	-3,420	152,978	2,331
Diferenças Silva (1995) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega(^{\circ})$	$\Delta \varphi(^{\circ})$	$\Delta \kappa(^{\circ})$
Sem iteração	0,004	-0,01	0,022	-0,069	-0,118	0,029

5.1.1.6 Experimento 6 SI

O objetivo do experimento 6 é testar a resseção espacial sem iteração em fotografias cujas posições são críticas, segundo as discussões da Seção 2.4.4, quando ocorrem *gimbal lock*. Neste caso também foram usados dados de Silva (1995) para a fotografia de posição 9. A posição dessa fotografia é crítica porque ela está em rotação $R_{\kappa\varphi\omega}$, no sistema passivo, com o ângulo da rotação secundário φ próximo de 270°. Na Tabela 15 são mostrados os dados de entrada deste experimento.

Tabela 15- Dados de entrada do experimento 6 SI.

Pt	Coordenadas:				
	Imagem real (mm)		Espaço objeto (m)		
	x	y	X	Y	Z
1	40,064	49,968	9,775	9,247	20,604
2	-38,565	53,28	9,228	9,243	11,534
3	-42,934	-34,928	7,515	-0,103	11,946
4	33,021	-42,275	5,944	-0,027	18,660

Fonte: Silva (1995).

A Tabela 16 mostra o resultado obtido com o cálculo da resseção espacial sem iteração.

Tabela 16- Resultado da resseção espacial sem iteração no experimento 6 SI.

Método/ Parâmetros	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega (^{\circ})$	$\varphi (^{\circ})$	$\kappa (^{\circ})$
Colinearidade	NC	NC	NC	NC	NC	NC
Sem iteração	-1,984	3,250	16,051	29,520	-89,560	30,364
Resultado de Silva (1995)	-1,997	3,251	16,053	26,682	270,439	27,524
Diferenças Silva (1995) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega (^{\circ})$	$\Delta \varphi (^{\circ})$	$\Delta \kappa (^{\circ})$
Colinearidade	-	-	-	-	-	-
Sem iteração	0,013	-0,001	-0,002	2,838	0,001	2,840

A Tabela 16 mostra a resseção espacial com a equação da colinearidade que não converge, fato que era esperado por envolver uma posição classificada como crítica na literatura. Já a resseção espacial sem iteração apresentou valores bem semelhantes para as coordenadas do centro perspectivo, enquanto que para os ângulos existem diferenças em torno de 3° em ω e κ . Essas diferenças podem ser por conta dos erros aleatórios das quatro coordenadas utilizadas, uma vez que no ajustamento de Silva (1995) foram utilizadas mais pontos. O valor de $\varphi = 270,439^{\circ}$, é equivalente a $-89,561^{\circ}$, pois para transformar um ângulo negativo deve-se somar 360° ao ângulo (por isso que a diferença foi de $0,001^{\circ}$ do resultado de Silva (1995)).

O algoritmo da resseção espacial sem iteração necessita inicialmente das distâncias entre o CP e cada ponto no espaço objeto. Porém o método implementado pode fornecer quatro resultados diferentes e é necessário introduzir alguns testes que permitam definir qual grupo de distâncias seja a solução correta.

Um resumo das principais observações sobre esse método de resseção espacial sem iterações, a partir dos resultados obtidos é o seguinte:

1. A resseção espacial sem iteração precisa do cálculo da distância inicial, cujo método implementado foi de Grafarend. Esse método usa raízes do polinômio de quarto grau para encontrar as distâncias, mas é necessário encontrar uma forma mais adequada de selecionar as raízes, além de se verificar possíveis questões numéricas de processamento com base nas posições relativas dos pontos.
2. O método de Guan *et al* (2008) é muito sensível aos dados de entrada das distâncias, isto é, pequenas variações nas distâncias se refletem em significativas diferenças nas coordenadas do CP.

3. Uma desvantagem deste método de resseção sem iteração é que ele só funciona com quatro pontos, não sendo possível tirar vantagem de observações mais abundantes.
4. Ocorrem casos em que os ângulos são ambíguos e que as funções trigonométricas tem que ser alteradas dependendo da linguagem de programação (por exemplo, o uso das funções *atan* e *atan2* no MATLAB[®]);
5. Para o caso da resseção com fotografias em posições ambíguas, e também em casos reconhecidos como críticos, o método da equação da colinearidade pode não funcionar;
6. O método de resseção espacial sem iteração é mais robusto (funciona para casos de ambiguidades e casos críticos) do que a resseção espacial com a equação da colinearidade e não precisa de valor aproximado inicial.

5.1.2 Aplicação da resseção espacial com iteração (CI)

A resseção espacial com iteração usada aqui é uma adaptação da resseção espacial com a equação da colinearidade, com troca da matriz de rotação com ângulos de Euler pelos quatérnios. Neste caso método tem a desvantagem de necessitar de valores iniciais e tem a vantagem de poder usar mais de quatro pontos.

O programa que foi construído no MATLAB[®] para calcular a resseção espacial com iteração segue a seguinte sequência:

- Entrar com valores: da distância focal, coordenadas do ponto principal (obtida pela calibração), das fotocoordenadas e das coordenadas no espaço objeto; aproximados dos parâmetros de orientação exterior;
- Calcular o quatérnio inicial;
- Calcular:
 - A matriz de rotação com os quatérnios;
 - L_0 e formar L , usando L_b ;
 - As derivadas da matriz A ;
 - X_a ;

- O resíduo;
- Critério de convergência;
- Quatérnio ajustado;
- A matriz de rotação ajustada;
- Os elementos de orientação exterior;
- Saída dos parâmetros ajustados.

Mais alguns detalhes são dados a seguir.

Devem ser fornecidos valores iniciais para X_0 , (coordenadas aproximadas do CP e valores iniciais do quatérnio). Com base nestes dados é calculada a matriz de rotação com quatérnio e outros valores aproximados como L_0 . Para o cálculo de L_b foram usadas as fotocoordenadas. A partir L_0 e L_b é obtido L . A matriz A é formada a partir das derivadas parciais da equação da colinearidade, já adaptada para os quatérnios, com relação aos parâmetros incógnitos da resseção espacial, usando a equação 78.

Na sequência é calculado o vetor de correções X_a pela equação 76 (da Seção 4.1.1) e o resíduo pelo modelo apresentado na equação 72 (da mesma seção).

Como o cálculo é feito de modo iterativo, usando o método paramétrico, o critério de convergência usado é a diferença entre os sigmas a *posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$), com valor de $\varepsilon = 10^{-6}$. O $\hat{\sigma}_0^2$ em cada iteração é obtido por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^t PV \quad (112)$$

Como a matriz dos pesos P é, neste caso, igual a matriz identidade, então a equação 112 se resume a:

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^t V \quad (113)$$

Após a convergência é calculado o quatérnio ajustado e por meio dele foram encontrados os elementos da resseção espacial. As coordenadas do centro perspectivo são obtidas diretamente do quatérnio ajustado, tomando os três primeiros elementos.

Para encontrar os ângulos de Euler foram analisadas as sequências de rotações e as suas respectivas equivalências com relações trigonométricas existentes na matriz de rotação de quatérnios.

Os experimentos de 1CI a 6CI foram processados com o método da resseção espacial com iterações para os mesmos casos usados na resseção espacial sem iteração.

5.1.2.1 Experimento 1 CI

O experimento 1CI equivale ao experimento 1 discutido na resseção espacial sem iteração, com dados originais de Guan *et al* (2008). O resultado da resseção espacial com iteração está na Tabela 17, que nas primeiras linhas mostra os valores iniciais usados no método da resseção com a colinearidade e com este método com iterações.

Tabela 17- Resultado da resseção espacial com iteração no experimento 1 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:					
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (rad)	φ_0 (rad)
Colinearidade	39700,000	27400,000	7500,000	0,000	0,000
Com iteração	39700,000	27400,000	7500,000	0,000	0,000
Resultado da resseção espacial com o método:					
	X_c (m)	Y_c (m)	Z_c (m)	ω (rad)	φ (rad)
Colinearidade	39795,452	27476,462	7572,686	0,002	0,004
Com iteração	39795,948	27477,782	7572,939	-0,002	-0,004
Resultado Guan <i>et al</i> (2008)	39795,080	27476,750	7572,810	0,002	-0,004
Diferenças Guan <i>et al</i> (2008) e método:					
	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	ΔZ_c (m)	$\Delta \omega$ (rad)	$\Delta \varphi$ (rad)
Colinearidade	0,372	-0,288	0,129	0,000	0,008
Com iteração	0,868	1,032	0,131	-0,004	0,000

A Tabela 17 mostra que a resseção espacial com a equação da colinearidade se aproximou mais do resultado de Guan *et al* (2008) do que a resseção com iteração. As diferenças com iteração em Y_c chegam a 1,032m.

5.1.2.2 Experimento 2 CI

Os dados de entrada do experimento 2 CI são os mesmos do experimento 2 SI, com dados simulados a partir de dados de Guan *et al* (2008). O resultado com este método está na Tabela 18.

Tabela 18- Resultado da resseção espacial com iteração no experimento 2 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:						
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (rad)	φ_0 (rad)	κ_0 (rad)
Colinearidade	39700,000	27400,000	7500,000	0,000	0,000	0,000
Com iteração	39700,000	27400,000	7500,000	0,000	0,000	0,000
Resultado da resseção espacial com o método:						
	X_c (m)	Y_c (m)	Z_c (m)	ω (rad)	φ (rad)	κ (rad)
Colinearidade	39795,001	27476,001	7573,000	-0,004	0,002	-0,068
Com iteração	39794,981	27476,029	7573,011	0,004	-0,002	0,068
Resultado Guan et al (2008)	39795,080	27476,750	7572,810	0,002	-0,004	-0,068
Diferenças Guan et al (2008) e método:						
	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	ΔZ_c (m)	$\Delta \omega$ (rad)	$\Delta \varphi$ (rad)	$\Delta \kappa$ (rad)
Colinearidade	-0,079	-0,288	-0,124	-0,006	0,006	0,000
Com iteração	-0,099	-0,721	0,201	0,002	-0,008	0,136

A Tabela 18 mostra que os ambos os métodos de cálculo se aproximaram mais do resultado de Guan *et al* (2008) que no experimento anterior mas ainda existe uma diferença significativa em Yc de -0,721m.

5.1.2.3 Experimento 3 CI

Os dados de entrada deste experimento são os mesmo do experimento 3 SI, com dados de Grafarend e Shan (1997). O resultado da resseção espacial com iteração pode ser visto na Tabela 19.

Tabela 19- Resultado da resseção espacial com iteração no experimento 3 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:						
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (rad)	φ_0 (rad)	κ_0 (rad)
Colinearidade	0,700	0,700	3,000	0,000	0,003	0,000
Com iteração	1,000	1,050	3,000	0,000	0,000	0,000
Resultado da resseção espacial com o método:						
	X_c (m)	Y_c (m)	Z_c (m)	ω (rad)	φ (rad)	κ (rad)
Colinearidade	1,000	1,000	4,000	0,000	0,000	0,000
Com iteração	1,004	1,003	4,000	-0,181	0,052	0,000
Resultado Grafarend e Shan (1997)	1,000	1,000	4,000	0,000	0,000	0,000
Diferenças de Grafarend e Shan (1997) e método:						
	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	ΔZ_c (m)	$\Delta \omega$ (rad)	$\Delta \varphi$ (rad)	$\Delta \kappa$ (rad)
Colinearidade	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Com iteração	0,004	0,003	0,000	-0,181	-0,002	0,000

A Tabela 19 mostra que o resultado da resseção espacial com iteração ficou próximo do resultado de Grafarend e Shan (1997), mas o método sem iteração neste caso foi melhor (Tabela 8) porque os resultados coincidiram.

5.1.2.4 Experimento 4 CI

Este experimento equivale ao experimento 4 SI, que usa dados reais de Silva (1995) para a fotografia 1. Vale salientar que os valores iniciais para o método com quatérnios e iterações são mais fracos que para a colinearidade, conforme consta na Tabela 20, que também mostra todo o resultado da resseção espacial com iteração.

Tabela 20- Resultado da resseção espacial com iteração no experimento 4 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:						
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)
Colinearidade	16,000	1,000	27,000	0,000	0,000	0,000
Com iteração	10,000	1,000	17,000	0,000	0,000	0,000
Resultado da resseção espacial com o método:						
	X_c (m)	Y_c (m)	Z_c (m)	ω (°)	φ (°)	κ (°)
Colinearidade	14,366	3,250	29,862	3,496	0,894	-0,325
Com iteração	14,366	3,250	29,862	3,498	0,892	-0,378
Resultado de Silva (1995)	14,370	3,261	29,875	3,406	0,918	-0,378
Diferenças Silva (1995) e método:						
	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	ΔZ_c (m)	$\Delta \omega$ (°)	$\Delta \varphi$ (°)	$\Delta \kappa$ (°)
Colinearidade	-0,004	-0,011	-0,013	0,090	-0,024	0,053
Com iteração	-0,004	-0,011	-0,013	0,092	-0,026	0,000

Na Tabela 20 pode-se verificar que ambos os métodos apresentam valores muito próximos entre si com relação ao resultado de Silva (1995), mas as diferenças são um pouco maiores que na resseção sem iteração (Tabela 11).

5.1.2.5 Experimento 5 CI

O experimento 5 CI equivale ao experimento 5 SI, com um exemplo de ambiguidade de ângulos, com dados de Silva (1995) para a fotografia 5. O resultado obtido com a aplicação da resseção espacial com iteração está na Tabela 21.

Tabela 21- Resultado da ressecção espacial com iteração no experimento 5 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:						
	$X_{c_0}(m)$	$Y_{c_0}(m)$	$Z_{c_0}(m)$	$\omega_0(^{\circ})$	$\varphi_0(^{\circ})$	$\kappa_0(^{\circ})$
Colinearidade	19,000	2,000	-0,420	0,000	150,000	0,000
Com iteração	19,000	2,000	-0,420	0,000	0,000	0,000
Resultado da ressecção espacial com o método:						
	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
Colinearidade	NC	NC	NC	NC	NC	NC
Com iteração	22,020	3,340	0,420	-3,489	-90+ 24,704 <i>i</i>	2,362
Resultado de Silva (1995)	22,024	3,340	0,404	-3,420	152,978	2,331
Diferenças Silva (1995) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega (^{\circ})$	$\Delta \varphi (^{\circ})$	$\Delta \kappa (^{\circ})$
Colinearidade	-	-	-	-	-	-
Com iteração	-0,004	0,000	0,016	-0,069	62+ 24,704 <i>i</i>	0,031

Nesta Tabela 21 verifica-se que a ressecção espacial com iteração apresentou valores próximos para todos os parâmetros, exceto para o valor do segundo ângulo (φ) dado em número complexo. Isso se deu porque o domínio da função arco seno é definida como $\forall x \in [-1; 1]$

$$y = \text{arc sen } x \quad (114)$$

e tem por domínio o intervalo $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Como neste caso existem valores aproximados, então foi possível calcular o cosseno do ângulo da rotação secundária inicial, o que permitiu usar de imediato a equação 35, da Seção 2.4.3, (que resolve problemas de ambiguidades, conforme detalhamento no experimento 5 SI, e aquela equação permite encontrar o valor do ângulo nos quatros quadrantes do ciclo trigonométrico). Com isso o novo valor de φ é encontrado e apresentado na Tabela 22.

Tabela 22- Novo resultado da ressecção com iteração no experimento 5 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:						
	$X_{c_0}(m)$	$Y_{c_0}(m)$	$Z_{c_0}(m)$	$\omega_0(^{\circ})$	$\varphi_0(^{\circ})$	$\kappa_0(^{\circ})$
Com iteração	19,000	2,000	-0,420	0,000	0,000	0,000
Resultado da ressecção espacial com o método:						
	$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$	$\omega(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	$\kappa(^{\circ})$
Com iteração	22,020	3,340	0,420	-3,489	152,968	2,362
Resultado de Silva (1995)	22,024	3,340	0,404	-3,420	152,978	2,331
Diferenças Silva (1995) e método:						
	$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$	$\Delta \omega (^{\circ})$	$\Delta \varphi (^{\circ})$	$\Delta \kappa (^{\circ})$
Com iteração	-0,004	0,000	0,016	-0,069	-0,010	0,031

O resultado da Tabela 22 é um pouco melhor que o resultado da resseção espacial sem iteração (Tabela 14).

5.1.2.6 Experimento 6 CI

Os dados de entrada do experimento 6 CI usam os mesmos dados do experimento 6 SI (a fotografia 9 em posição crítica de Silva (1995)). O resultado da resseção espacial com iteração está na Tabela 23.

Tabela 23- Resultado da resseção espacial com iteração no experimento 6 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:						
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)
Colinearidade	-2,400	2,000	17,000	25,000	265,000	28,000
Com iteração	-2,400	2,000	17,000	0,500	100,760	0,570
Resultado da resseção espacial com o método:						
	X_c (m)	Y_c (m)	Z_c (m)	ω (°)	φ (°)	κ (°)
Colinearidade	NC	NC	NC	NC	NC	NC
Com iteração	-1,983	3,245	16,054	26,238	-90,475	27,108
Resultado de Silva (1995)	-1,997	3,251	16,053	26,682	270,439	27,524
Diferenças Silva (1995) e método:						
	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	ΔZ_c (m)	$\Delta \omega$ (°)	$\Delta \varphi$ (°)	$\Delta \kappa$ (°)
Colinearidade	-	-	-	-	-	-
Com iteração	0,014	-0,006	0,001	-0,444	-0,036	-0,416

Esta Tabela 23 mostra que a resseção espacial com iteração ficou bem semelhante ao resultado de Silva (1995) e bem melhor que os resultados da orientação de resseção sem iteração (Tabela 16). Para se conseguir calcular a resseção espacial com esta fotografia, foi imposto um valor de convergência $\varepsilon = 10^{-3}$, maior que o valor usado nos outros experimentos que era de 10^{-6} , pois com esse valor a convergência não era atingida.

5.1.2.7 Experimento 7 CI

Nos experimentos anteriores sempre foi calculado um quatérnio inicial a partir dos ângulos de Euler aproximados informados, usando as equações da Seção 3.7. Com o quatérnio inicial e com as coordenadas aproximadas do centro perspectivo é possível usar o MMQ e prosseguir nos cálculos da resseção espacial com iteração.

O experimento 7 foi realizado para mostrar que o programa de resseção espacial com iteração também funciona usando diretamente um quatérnio inicial estimado, sem usar os ângulos de Euler, como nos outros experimentos, desde que seja adequado à geometria da resseção. Neste experimento foram usados os dados do experimento 4, fotografia 1 da Figura 21. O resultado da resseção espacial com iteração está na Tabela 24.

Tabela 24- Resultado da resseção espacial com iteração no experimento 7 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:							
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	q_0	q_1	q_2	q_3
Com iteração	-2,400	2,000	17,000	1,000	0,000	0,000	0,000
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)	
Colinearidade	16,000	1,000	27,000	0,000	0,000	0,000	
Resultado da resseção espacial com o método:							
	X_c (m)	Y_c (m)	Z_c (m)	ω (°)	φ (°)	κ (°)	
Com iteração	14,366	3,250	29,862	3,498	0,893	-0,378	
Colinearidade	14,366	3,250	29,862	3,496	0,894	-0,325	
Resultado de Silva (1995)	14,370	3,261	29,875	3,406	0,918	-0,378	
Diferenças Silva (1995) e método:							
	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	ΔZ_c (m)	$\Delta \omega$ (°)	$\Delta \varphi$ (°)	$\Delta \kappa$ (°)	
Com iteração	-0,004	-0,011	-0,013	0,092	-0,026	0,000	
Colinearidade	-0,004	-0,011	-0,013	0,090	-0,025	0,053	

A Tabela 24 mostra que os valores obtidos com uso do quatérnio (1, 0, 0, 0) estimado são iguais ao do experimento 4 CI, que na entrada usava ângulos de Euler aproximados.

Porém, só é possível entrar com quatérnio inicial se houver conhecimento anterior dos valores aproximados do mesmo, o que é mais difícil de estimar em qualquer situação que os ângulos de Euler. No caso de fotografia vertical (a fotografia 1 é equivalente uma vertical por conta da geometria adotada no levantamento, com já explicado antes na Seção 5.1.1.4) um quatérnio aproximado com valores (1, 0, 0, 0) se aplica bem, mas com valores como (0,1, 0, 0), (0, 0, 1,0) ou (0,0,0,1) não darão certo. A título de exemplo é mostrado o resultado da resseção espacial com os dados usados do experimento 6CI (fotografia 9) e com o quatérnio de entrada (1, 0, 0, 0), na Tabela 25.

Tabela 25- Novo resultado da resseção com iteração no experimento 7 CI.

Parâmetros aproximados iniciais no método:							
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	q_0	q_1	q_2	q_3
Com iteração	-2,400	2,000	17,000	1,000	0,000	0,000	0,000
	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)	
Colinearidade	-2,400	2,000	17,000	25,000	265,000	28,000	
Resultado da resseção espacial com o método:							
	X_c (m)	Y_c (m)	Z_c (m)	ω (°)	φ (°)	κ (°)	
Com iteração	10,268	8,620	22,860	-16,657	170,903	38,450	
Colinearidade	NC	NC	NC	NC	NC	NC	
Resultado de Silva (1995)	-1,997	3,251	16,053	26,682	270,439	27,524	
Diferenças Silva (1995) e método:							
	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	ΔZ_c (m)	$\Delta \omega$ (°)	$\Delta \varphi$ (°)	$\Delta \kappa$ (°)	
Com iteração	12,265	5,369	6,807	-43,339	-99,536	10,926	
Colinearidade	-	-	-	-	-	-	

A Tabela 25 mostra que o cálculo da resseção espacial com iteração, usando o quatérnio (1, 0, 0, 0), apresentou valores bem diferentes dos obtidos no experimento 6CI, porque o quatérnio aproximado de entrada não foi o adequado.

Um resumo das observações mais importantes sobre os resultados desse método de resseção com iterações é o seguinte:

1. O método da resseção espacial com iteração, apesar de ter sido implementado com quatro pontos, pode ser implementado com mais pontos, com isso haverá maior redundância, o que pode ser vantajoso para aumentar a confiabilidade do resultado e detectar erros grosseiros.
2. O método com iterações ele precisa de valores iniciais. Ao usar quatérnios com valores iniciais é preciso ter uma boa aproximação deles ou o melhor é usar ângulos de Euler aproximados e, com esses ângulos, calcular o quatérnio correspondente;
3. Os resultados obtidos com esse método foram bem parecidos com os resultados da resseção espacial sem iteração, melhores em alguns casos (nos experimentos 3, 4, 5 e 7, chegando a ter coincidências com os resultados da resseção espacial com o método da equação da colinearidade) e piores em outros (como os experimentos 1, 2 e 6, chegando a ter erros de cinco metros (experimento 1, por exemplo) e em torno de 2º de diferenças (experimento 6 SI));

4. Chegou a ser testada uma implementação de injunção para quatérnio unitário (segundo o modelo matemático mostrado na Seção 3.4.2), mas não apresentou diferença significativas com o programa sem a injunção. Porém esta questão merece mais estudos por ser teoricamente justificável a comparação de uso de quatérnios quaisquer com o quatérnio normalizado de valor 1.

5.2 Aplicação da orientação relativa (OR)

Com o objetivo de análise da aplicação dos quatérnios na orientação relativa também foram usados três métodos em três programas em MATLAB®, de modo a ser possível fazer comparações de desempenho:

- Programa 1 - Equação da colinearidade com ajustamento paramétrico.
- Programa 2 - Condição da coplanaridade com ajustamento combinado.
- Programa 3 - Condição da coplanaridade com quatérnios com ajustamento combinado.

As orientações relativas implantadas são do tipo dependente (orientação de uma câmara em relação à outra, que se mantém fixa), portanto o sistema de coordenadas é o da fotografia da esquerda. Os resultados dos experimentos estão respectivamente em tabelas como a 27. Nas tabelas os parâmetros Y_c e Z_c são translações relativas ao centro perspectivo da fotografia esquerda para o caso da colinearidade (a base fotográfica X_c entra como fixa no programa e varia conforme a distância focal de cada experimento). Já b_y e b_z são os equivalentes para os dois outros métodos, mas sendo proporcionais ao b_x , que nos programas são valores fixos e iguais a 1,0.

O método da equação da colinearidade foi desenvolvido com base nas equações 71 da Seção 4.1.1 e 99 da Seção 4.2.1. Já o método da condição da coplanaridade foi construído com as equações 102 à 108, da Seção 4.2.2. O método do programa 3 tem a seguinte sequência:

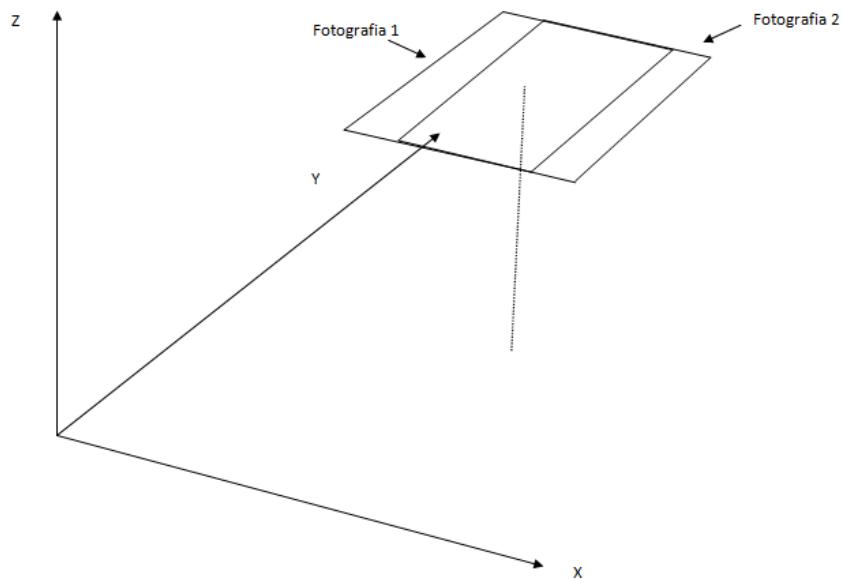
- Entrada dos dados das fotocoordenadas das duas fotografias;
- Entrada do quatérnio inicial, considerando a parte imaginária nula;

- Cálculo do vetor L_b ;
- Estimação do vetor que contém os componentes iniciais da base;
- Cálculo de X_0 ;
- Cálculo da matriz dos pesos (que aqui foi usada a identidade);
- Cálculo da matriz de rotação de quatérnios;
- Formação da matriz A e B , com base nas derivadas parciais em relação aos parâmetros, seguindo a equação 109;
- Cálculo do vetor R_1 e R_2 ;
- Cálculo do vetor fechamento;
- Cálculo de M ;
- Cálculo de X ;
- Cálculo da injunção;
- Cálculo da correção;
- Cálculo de X_a ajustado, segundo a equação 110.

Foram usadas fotografias simuladas com elementos de orientação interior $x_0 = y_0 = 0,0 \text{ mm}$ e $f = 50,0 \text{ mm}$. Os demais elementos necessários para as simulações são definidos em cada experimento.

5.2.1 Experimento 1 OR

O experimento 1 da orientação relativa serviu para verificar se os programas desenvolvidos estavam corretas, com comparações de valores utilizados nas simulações de fotografias. Foram simuladas duas fotografias aéreas verticais, com sobreposição longitudinal de 60%, com a rotação $R_{\kappa\varphi\omega}$, no sistema passivo, conforme a geometria da Figura 25. Na Tabela 26 estão as coordenadas no espaço objeto e na Tabela 27 os dados de orientação exterior usados na simulação.

Figura 25- Posições das fotografias na simulação do experimento 1 OR.

Tabela 26- Dados usados na simulação das fotografias do experimento 1 OR.

<i>Pt</i>	Coordenadas no espaço objeto (m)		
1	12,000	10,000	28,000
2	20,000	11,000	31,000
3	23,000	19,000	13,000
4	10,000	20,000	14,000
5	16,000	12,500	8,000
6	21,000	07,000	11,000
7	10,000	15,000	28,000
8	15,000	10,000	3,000

Tabela 27- Resultado da orientação relativa no experimento 1 OR.

Elementos orientação exterior da simulação						
<i>FT</i>	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)
1	12,000	15,000	50,000	3,000	2,000	1,000
2	18,000	15,000	50,000	2,500	1,800	2,000
Resultado da orientação relativa com o método:						
Parâmetro	Y_{c_2} ou b_y		Z_{c_2} ou b_z	ω_2	φ_2	κ_2
Colinearidade	-0,174		0,349	-0,503	-0,191	0,982
Coplanaridade	-0,017		0,035	-0,503	-0,195	0,982
Quatérnios	-0,017		0,036	-0,504	-0,240	0,945

Na Tabela 27 são mostrados os valores dos elementos de orientação exterior usadas durante a simulação de fotografias (as coordenadas do centro perspectivo e os ângulos de orientação). Também são apresentados os resultados obtidos com o cálculo da orientação relativa. Os valores para Y_{c_2} e Z_{c_2} são os resultados obtidos

com a equação da colinearidade, já b_y e b_z são os valores encontrados com os outros dois métodos e apresentam diferenças significativas porque as bases de entrada nos programas são diferentes.

Os resultados da Tabela 27 mostram que os três métodos de cálculo apresentaram resultados semelhantes, portanto os programas implementados estão funcionando corretamente, para este exemplo comum de fotografias quase verticais. Os valores encontrados dessas orientações relativas foram aproximadamente iguais às diferenças entre os ângulos usados na simulação (0,5 graus em ômega, 0,2 graus em fi e 1,0 grau em kappa), como se esperava.

Nos experimentos 2 e 3 foram simuladas fotografias típicas de levantamento de fotogrametria terrestre, em que as posições são mais variadas do que na fotogrametria aérea e podem ocorrer com mais facilidades casos de dualidades e situações críticas. Foram formados pares estereoscópicos em posições sucessivas com diferenças de 90° (com a mesma sobreposição do experimento anterior) como indicadas na Figura 26. Os pontos no espaço objeto estão na Tabela 28.

Figura 26- Posições das fotografias na simulação dos experimentos 2 e 3 OR.

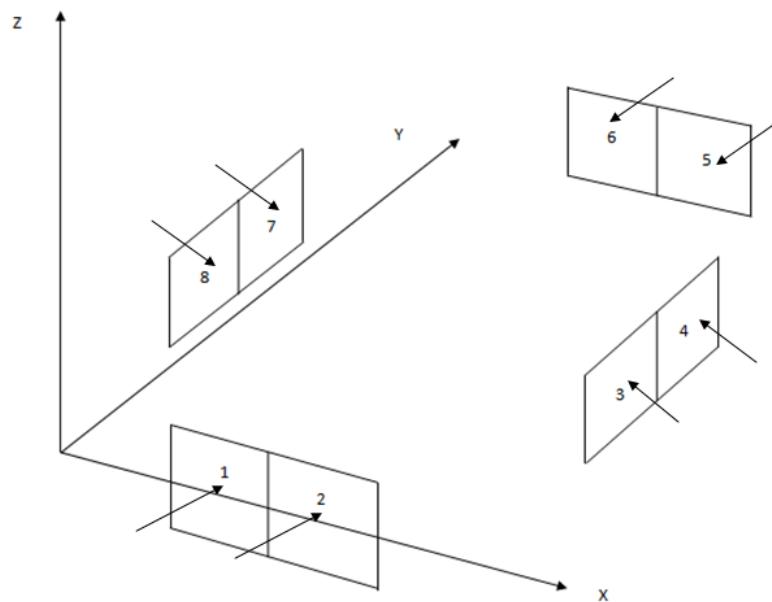


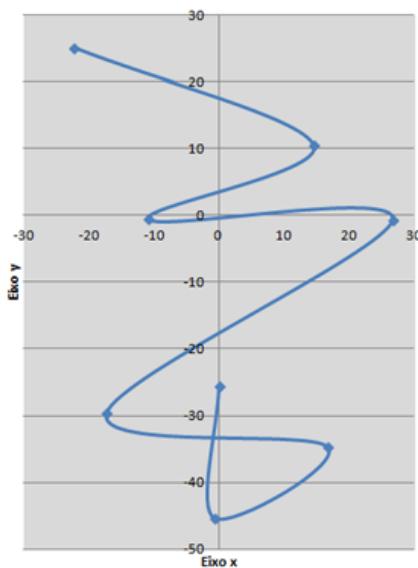
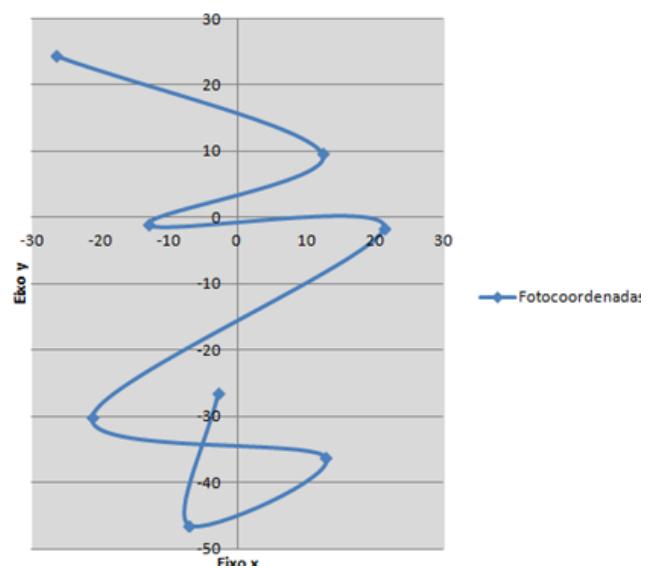
Tabela 28- Dados da simulação das fotografias do experimento 2 e 3 OR.

Pt	Coordenadas no espaço objeto (m)		
1	4,000	4,100	5,100
2	8,100	7,900	4,900
3	4,100	8,100	3,000
4	8,050	4,000	3,100
5	3,950	6,000	-0,500
6	8,000	6,000	-0,900
7	6,000	4,000	-0,500
8	6,000	8,000	-0,900

5.2.2 Experimento 2 OR

O objetivo deste experimento é testar se a orientação relativa com quatérnios funciona para o caso de posições de fotografias em que um dos ângulos de Euler, neste caso o ω , seja próximo de 90° , com a rotação $R_{\kappa\varphi\omega}$, no sistema passivo. Para tanto foram usadas as fotocoordenadas das fotografias 1 e 2 (posições indicadas na Figura 26). As fotocoordenadas estão apresentadas na Figura 27, para fins de visualização quanto à distribuição na fotografia e da paralaxe em y (a linha de ligação é apenas para facilitar a leitura da sequência de identificação dos pontos na figura, que é de cima para baixo).

Figura 27- Posições das fotocoordenadas do experimento 2 OR.

Figura 27 a- Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 1.

Figura 27 b- Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 2.


A Figura 27 mostra que as diferenças de paralaxes y nos oito pontos entre as fotografias são bem pequenas. Esta observação é importante porque em outras simulações as diferenças podem ser muito significativas em alguns, ou em todos os pontos, e perfeitamente notadas nas figuras. Os resultados do cálculo da orientação relativa com todos os métodos encontram-se na Tabela 29.

Tabela 29- Resultado da orientação relativa no experimento 2 OR.

Elementos orientação exterior da simulação						
FT	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)
1	6,000	0,000	3,000	91,000	1,000	2,000
2	6,500	0,000	3,000	92,000	2,000	3,000
Resultado da orientação relativa com o método:						
Parâmetro	Y_{c_2} ou b_y	Z_{c_2} ou b_z	ω_2	φ_2	κ_2	
Colinearidade	-0,350	0,176	1,034	0,963	1,017	
Coplanaridade	-0,032	0,021	1,036	0,982	1,040	
Quatérnios	-0,033	0,021	1,053	0,960	1,062	

A Tabela 29 mostra que todos os métodos apresentaram bons resultados, próximos dos esperados, neste exemplo, com valores em torno de $\omega = \varphi = \kappa = 1$, que são as diferenças entre os ângulos das fotografias 1 e 2.

5.2.3 Experimento 3 OR

O experimento 3 tem o objetivo de se analisar a sensibilidade dos métodos, na medida em que os ângulos simulados tem diferenças maiores que três ou cinco graus, normalmente definidos como tolerâncias em levantamento fotogramétrico, neste exemplo com 9°. Essa limitação seria de ângulos, que vem da fotogrametria analógica e continuou mesmo na fase de fotogrametria analítica, é teoricamente devida ao uso de modelos de matrizes de rotação simplificadas, como a de Rodriguez e que só funciona com fotografias quase verticais. Com os modelos completos das matrizes de rotação deste trabalho não deve ocorrer dificuldades para os cálculos.

As posições das fotografias usadas neste experimento foram 7 e 8 (Figura 26), com a rotação $R_{\omega\varphi\kappa}$, no sistema passivo. A Figura 28 mostra a distribuição das fotocoordenadas das fotografias 7 e 8, respectivamente, em que é possível perceber

que existe uma paralaxe em y em torno de 10 unidades em todos os pontos. O resultado da orientação relativa pode ser visto na Tabela 30.

Figura 28-Posições das fotocoordenadas do experimento 3 OR.

Figura 28 a- Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 7. **Figura 28 b-** Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 8.

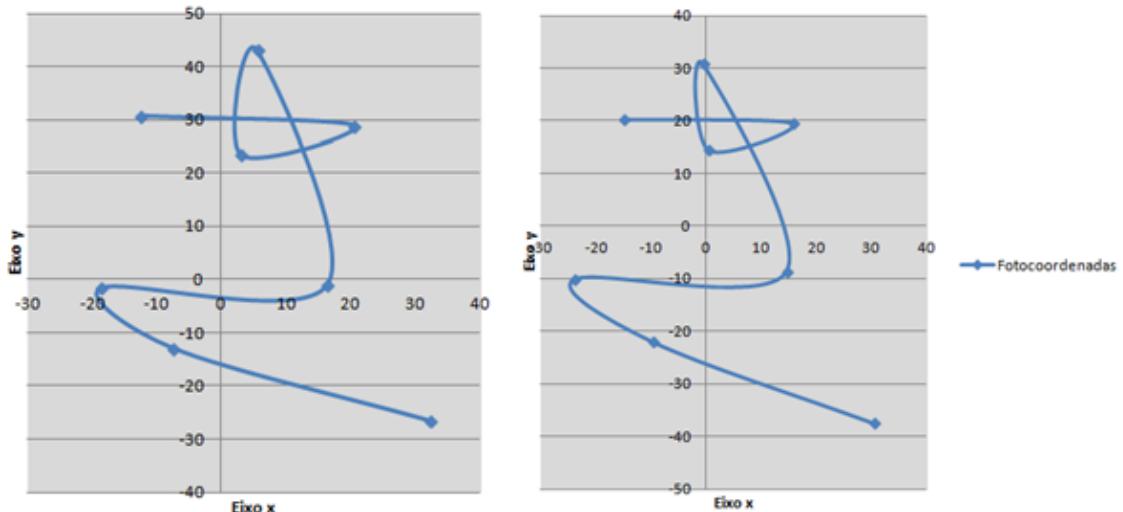


Tabela 30- Resultado da orientação relativa no experimento 3 OR.

Elementos orientação exterior da simulação						
FT	$X_{c_0}(m)$	$Y_{c_0}(m)$	$Z_{c_0}(m)$	$\omega_0(^{\circ})$	$\varphi_0(^{\circ})$	$\kappa_0(^{\circ})$
7	0,000	6,500	3,000	91,000	2,000	91,000
8	0,000	6,000	3,000	100,000	3,000	92,000
Resultado da orientação relativa com o método:						
Parâmetro	Y_{c_2} ou b_y	Z_{c_2} ou b_z	ω_2	φ_2	κ_2	
Colinearidade	0,352	0,169	8,964	0,814	-1,159	
Coplanaridade	0,039	0,022	8,966	0,774	-0,793	
Quatérnios	0,028	0,036	9,032	0,784	-0,885	

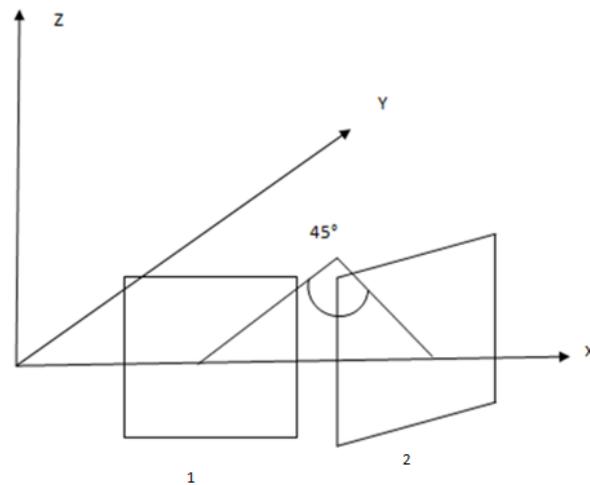
A Tabela 30 mostra que o método da equação da colinearidade apresentou valores semelhantes do resultado esperado para as diferenças dos ângulos e das translações. O método da coplanaridade e de quatérnios tiveram valores bem semelhantes e de acordo com o esperado.

5.2.4 Experimento 4 OR

Este experimento serviu para verificar o cálculo da orientação relativa com câmeras convergentes em torno do eixo vertical, ou seja, com eixo ótico horizontal e

convergente. Neste exemplo as posições das duas fotografias (1 e 2 da Figura 29) tem 45° entre si, com a sequência $R_{\omega\varphi\kappa}$, no sistema passivo, o que não é o caso para formar pares estereoscópicos, mas que pode ocorrer em fotogrametria terrestre.

Figura 29- Posições das fotografias experimento 4 OR.



As posições das fotocoordenadas referentes às fotografias 1 e 2, respectivamente, estão na Figura 30, que mostra que as paralaxes de y de todos os pontos dessas duas fotografias apresentam diferenças muito significativas e não constantes. Os resultados dos cálculos das orientações relativas encontram-se na Tabela 31.

Figura 30- Posições das fotocoordenadas do experimento 4 OR.

Figura 30 a- Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 1.

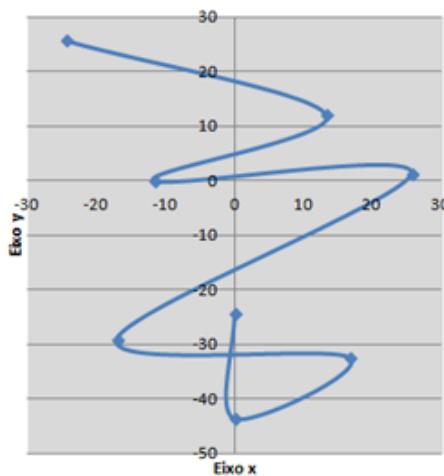


Figura 30 b- Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 2.

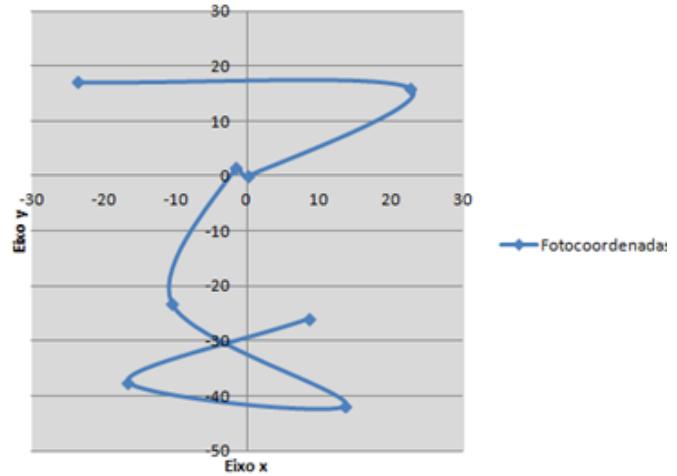


Tabela 31- Resultado da orientação relativa no experimento 4 OR.

Elementos orientação exterior da simulação						
FT	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)
1	6,000	0,000	3,000	90,000	0,000	0,000
2	10,400	1,800	3,000	90,000	0,000	45,000

Resultado da orientação relativa com o método:					
Parâmetro	Y_{c_2} ou b_y	Z_{c_2} ou b_z	ω_2	φ_2	κ_2
Colinearidade	$4,8 \times 10^{23}$	$2,6 \times 10^{22}$	-43,727	-3,402	11,444
Coplanaridade	0,001	-0,392	-0,065	-0,105	45,080
Quatérnios	0,014	-0,391	-0,647	-0,409	45,003

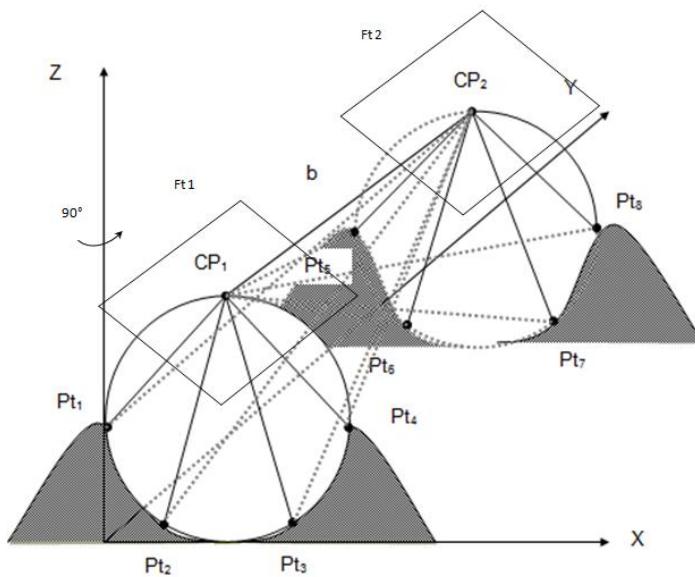
A Tabela 31 mostra que o método da equação da colinearidade apresenta resultados totalmente diferentes dos esperados para os ângulos relativos, que neste caso, era de 0° para ω e φ e de 45° para κ . Os ângulos encontrados também foram muito diferentes dos outros métodos da coplanaridade e quatérnios. Os resultados das translações apresentaram valores extremamente grandes, na ordem de 10^{23} . Neste caso houve um alerta do MATLAB®, indicando que o número de condição estava muito alto, e assim o resultado pode não ser confiável conforme as discussões da Seção 2.1.

O método da condição de coplanaridade e de quatérnios tiveram resultados semelhantes e compatíveis com a simulação. Portanto para este tipo de geometria das posições das fotografias são mais confiáveis que o método da colinearidade.

5.2.5 Experimento 5 OR

Foram realizados diversos experimentos para testar o caso de orientação relativa com pontos simulados que reproduzem o problema do cilindro crítico. Aqui será apresentado um dos testes. A distribuição dos pontos no terreno e dos CPs formam um cilindro, conforme a Figura 31, e com eles foram simuladas duas fotografias no simufoto.m, obedecendo a rotação $R_{\kappa\varphi\omega}$, no sistema passivo. Os pontos no espaço objeto estão na Tabela 32.

Figura 31-Posições das fotografias na simulação do experimento 5 OR.



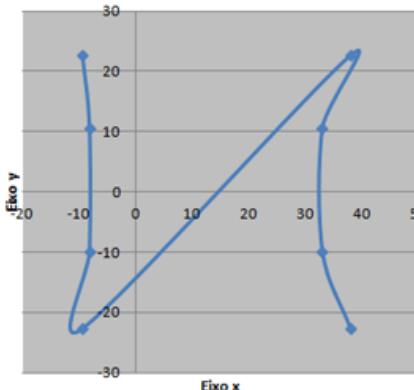
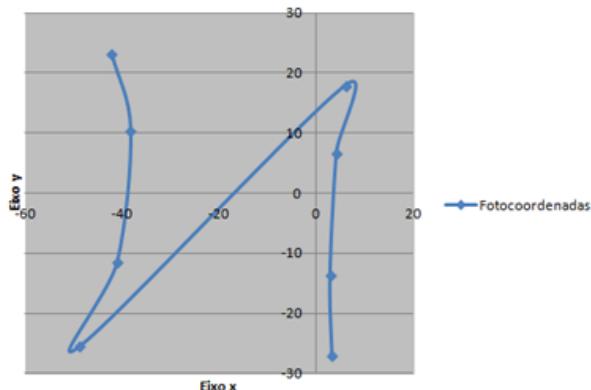
Fonte: Adaptado de Kraus (2000).

Tabela 32- Dados usados na simulação das fotografias do experimento 5 OR.

Pt	Coordenadas no espaço objeto (m)		
1	8,000	30,000	11,000
2	19,000	30,000	3,000
3	44,000	30,000	3,000
4	56,000	30,000	11,000
5	8,000	80,000	11,000
6	19,000	80,000	3,000
7	44,000	80,000	3,000
8	56,000	80,000	11,000

A Figura 32 mostra a distribuição das fotocoordenadas das fotografias 1 e 2 (da Figura 31), respectivamente. Os resultados da orientação relativa estão na Tabela 33.

Figura 32- Posições das fotocoordenadas do experimento 5 OR.

Figura 32 a- Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 1.

Figura 32 b- Distribuição das fotocoordenadas da fotografia 2.

Tabela 33- Resultado da orientação relativa no experimento 5 OR

Elementos orientação exterior da simulação						
FT	X_{c_0} (m)	Y_{c_0} (m)	Z_{c_0} (m)	ω_0 (°)	φ_0 (°)	κ_0 (°)
1	32,000	40,000	64,000	0,000	0,000	90,000
2	32,000	70,000	64,000	1,000	2,000	93,000
Resultado da orientação relativa com o método:						
Parâmetro	Y_{c_2} ou b_y	Z_{c_2} ou b_z	ω_2	φ_2	κ_2	
Colinearidade	0,003	0,000	2,003	-0,999	3,035	
Coplanaridade	0,002	0,000	1,944	-1,009	3,035	
Quatérnios	0,002	0,000	1,529	-1,102	2,993	

A Tabela 33 mostra que os cálculos da orientação relativa com dados simulados de uma situação de pontos e CPs em um cilindro crítico foram obtidos com todos os três métodos. Embora o cilindro crítico seja normalmente citado como um caso de difícil solução ou de solução instável, não foi encontrado na literatura um exemplo de cálculo analítico que ilustrasse o problema. Nos vários testes realizados nesta pesquisa, com dados e posições pouco diferentes dos pontos e até posição transversa do cilindro, sempre houve a convergência nos três métodos.

Um resumo dos principais resultados das comparações de orientação relativa com os três métodos é o seguinte:

1. Além desses experimentos acima foram realizados outros que mostraram que diferenças de orientação entre as fotografias simuladas, com variações maiores, como de três a dez graus, ao se fazer a orientação relativa com a equação da colinearidade, os resultados sempre são piores (porque não convergiam ou apresentavam maiores resíduos) que com

coplanaridade e coplanaridade com quatérnios. Conclui-se que esses métodos são mais robustos, pois mesmo com variações significativas de inclinações forneceram resultados melhores.

2. De modo geral não houve diferença significativa entre a coplanaridade e coplanaridade com quatérnios, uma vez que eles apresentaram resultados extremamente semelhantes.

6. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para o desenvolvimento deste trabalho foi relativamente fácil conseguir literatura adequada e suficiente sobre a teoria, relatos e proposições de aplicações de quatérnios, mas houve grande dificuldade para encontrar exemplos numéricos com detalhes suficientes para validar os programas que foram implementados. Além disso, foram detectadas outras dificuldades menores, mas que exigiram estudos adicionais para deixar o assunto mais claro e conceitos mais precisos, entre elas:

- É necessário atrelar a matriz de rotação de quatérnios com a sequência de rotação em torno dos eixos x, y e z, porque isto gera quatérnios diferentes.
- Como são diversas as possibilidades de rotações e de combinações com ângulos de Euler e com os quatérnios, no caso de transformações todos devem obedecer à mesma sequência para ficarem estreitamente relacionados. Isto porque na literatura encontram-se enganos nos modelos matemáticos das matrizes de rotações e até confusão com relação à sequência de rotação primária, secundária e terciária, pois existem duas possibilidades de multiplicação para uma sequência no sistema ativo e duas no sistema passivo (multiplicação pela direita e pela esquerda).
- O *gimbal lock* ocorre sempre na segunda rotação, quando o ângulo for 90° ou 270° (para as matrizes que tem a função seno isoladas), ou, 0° ou 180° (para as matrizes que tem a função cosseno isoladas) ou bem próximos desses valores, porém esta forma de detecção a partir da observação dos elementos da matriz de rotação não é comum na literatura.

Com os programas desenvolvidos para verificações das possíveis vantagens de substituição dos ângulos de Euler pelos quatérnios, com dados simulados e reais, foi possível realizar vários testes que permitiram fazer comparações e análises de eficiência dos métodos utilizados nos experimentos do capítulo 5, que serão resumidos nas próximas seções.

6.1 Resultados da resseção espacial sem iteração

No experimento 1 (Seção 5.1.1.1) a resseção espacial com a equação da colinearidade ficou bem próximo do resultado esperado, mas a resseção sem iteração não apresentou bons valores, pois não convergiu. Então foram simuladas novas fotocoordenadas, usadas no experimento 2, Seção 5.1.1.2, e a resseção agora ficou muito semelhante do resultado esperado, já que a diferença só ocorreu na casa segunda casa decimal, o que pode indicar possíveis erros de arredondamento do programa implementado ou do computador.

O primeiro resultado para o experimento 3 (Seção 5.1.1.3) mostrou que o método de Grafarend não calculou corretamente as distâncias do CP até as coordenadas no espaço objeto. O fato das distâncias estarem com erros interferiu no resultado da resseção que foi muito diferente do esperado. Depois de efetuados diversos testes foi observado que todas as raízes do polinômio de quarto grau, que faz parte do cálculo do método de Grafarend, devem ser testadas para verificar qual a correta. Este é um problema deste método, mas ele foi o escolhido para fornecer as distâncias, que é um dado essencial para ser calculada a resseção sem valores iniciais para o caso de quatro pontos. Existem outros métodos para o cálculo das distâncias, mas que também não são de fácil aplicação.

Para este experimento a resseção espacial sem iteração correta foi encontrada com a quarta raiz, com a qual o resultado coincidiu com o esperado. Mas como a definição da raiz correta no método de Grafarend é variável, uma sugestão é implementar alguns testes com as diversas raízes, e comparar os resultados, ou ainda usar os procedimentos que também fornecem a posição do CP, sem uso de quatérnios, do artigo Grafarend e Shan (1997).

O experimento 4 (Seção 5.1.1.4) aplica a resseção espacial sem iteração em dados reais com quatro pontos bem distribuídos na área da imagem, de um conjunto com muito mais pontos, com resultado considerado bom. O experimento, apesar de usar dados de fotogrametria terrestre, foi equivalente a uma fotografia vertical em situação normal.

O experimento 5 (Seção 5.1.1.5) ilustra um caso em que pode haver ambiguidades nos resultados da resseção espacial, mesmo com quatérnios, devido

a função trigonométrica que está em uso para obter os ângulos de Euler no final. Para superar esta dificuldade teve que ser introduzido no programa a função de Shih (1990), que extrai o valor do ângulo da rotação secundária e assim o ângulo correto foi obtido. A resseção espacial com a equação da colinearidade não funciona para esse caso.

O experimento 6 (5.1.1.6) é de um caso de fotografia em situação crítica, com ângulo de rotação secundária próximo de 270° , em que a resseção espacial com a equação da colinearidade não convergiu e que a resseção sem iteração forneceu um resultado compatível com o esperado para as coordenadas do centro perspectivo. Os valores obtidos para os ângulos ω e κ apresentaram uma diferença em cerca de três graus. Este problema talvez possa ser solucionado se tomar outras fotocoordenadas ou se forem usados mais pontos.

6.2 Resultados da resseção espacial com iteração

No método de resseção espacial com quatérnios e com iteração é necessário fornecer os valores iniciais aproximados para a posição e ângulos do CP, caso esses valores não sejam adequados pode não haver convergência. Os experimentos usam os mesmos dados das resseções sem iteração discutidos anteriormente.

O experimento 1 CI da Seção 5.1.2.1 (com os dados originais de Guan) mostrou que a resseção espacial com a equação da colinearidade teve diferenças menores que a resseção com iteração, mas tem uma diferença significativa de 1,032m em Y. Os possíveis motivos dessas diferenças podem ser problemas numéricos de computação e/ou dos algoritmos porque ao longo dos experimentos notou-se que ocorriam alterações significativas de valores finais, ao serem alterados os critérios de convergência para as posições e ângulos, que algumas vezes nem chegava a acontecer.

O experimento 2, da Seção 5.1.2.2, é similar ao 1, mas com dados simulados. Os resultados foram pouco melhores que o anterior e a diferença em Y diminuiu para 0,721m.

O experimento 3, Seção 5.1.2.3, usa dados de Grafarend e Shan (1997). O método de resseção espacial com iteração se aproximou do esperado, mas neste caso os valores iniciais precisaram ser melhores que os experimentos anteriores e mesmo melhor que o valor usado na recessão espacial com a equação da colinearidade (Tabela 19).

O experimento 4, Seção 5.1.2.4, com dados de Silva (1995) mostrou que tanto a resseção com a equação da colinearidade quanto a recessão espacial com iteração apresentaram resultados muito parecidos com os valores da fototriangulação, fato que indica um bom resultado.

O experimento 5, Seção 5.1.2.5, caso com ambiguidade de ângulos (neste caso o modelo com a equação da colinearidade falha como já visto na seção 5.1.1.5). Com a resseção com iteração o resultado para o valor do ângulo (φ) foi em número complexo, mas após a correção de intervalo (vide Seção 2.4.3) foi obtido o valor correto. Todos os valores finais foram muito pouco melhores que na resseção sem iteração.

O resultado do experimento 6 (Seção 5.1.2.6) mostrou que a resseção espacial para fotografias críticas só foi obtida com os quatérnios, nos métodos sem iteração e com iteração, uma vez que a resseção com a equação da colinearidade não convergiu. Os valores finais de cada elemento da resseção são semelhantes entre os dois métodos com quatérnios, embora tenha sido necessário baixar o critério de convergência de 10^{-6} para 10^{-3} neste experimento.

No experimento 7, Seção 5.1.2.7, são avaliados casos de entrada direta de quatérnios com valores iniciais. No caso de posições comuns, como em fotografia vertical o quatérnio (1, 0, 0, 0) é adequado e haverá convergência para valores corretos da resseção, mas para fotografias em posições que possam gerar ambiguidades ou *gimbal lock*, a estimativa de um quatérnio arbitrário não é aconselhável.

De maneira geral os resultados da resseção espacial com a equação da colinearidade mostraram que ele funciona muito bem para situações normais. Já

para os casos em que podem ocorrer ambiguidades e *gimbal lock* o método pode não funcionar.

Os métodos de cálculos da resseção espacial sem iteração na literatura também são chamados de métodos diretos ou exatos. Esses métodos dependem de distâncias que, por sua vez, podem ser obtidas por várias formas, como a das iterações, lei de cossenos e Grafarend. Foram implementados os três tipos, mas usado efetivamente apenas o de Grafarend. Um de iterações foi testado, mas necessita de valores iniciais muito bons para ser eficiente. Um com base na lei dos cossenos foi implementado para três pontos, que é o algoritmo mais comum, mas como um dos objetivos era usar quatro pontos, também não houve vantagem em usá-lo. Embora Grafarend tenha sido o método adotado ele se mostrou ser muito sensível nas suas soluções e para usos práticos necessita de alguns aperfeiçoamentos.

O método de resseção espacial sem iteração funciona também para casos de dualidades da matriz de rotação. Já nos casos críticos podem ocorrer erros um pouco maiores do que os esperados. Este método só calcula corretamente quando se tem quatro pontos com boa distribuição das fotocoordenadas nos quatro quadrantes da imagem e boa distribuição no terreno.

O método de resseção espacial com iteração, com adaptação para os quatérnios, funciona bem para casos críticos e de ambiguidades. No caso da resseção espacial com iteração os ângulos de Euler iniciais não precisam ser tão próximos como na resseção com a equação da colinearidade, o que é uma vantagem. Os quatérnios permitem convergência com menor quantidade de iterações. Por exemplo, em alguns experimentos os modelos matemáticos baseado nos quatérnios convergiam até mesmo na primeira iteração, enquanto o método da resseção espacial com a equação da colinearidade convergia em dez ou mais iterações.

É fácil extrair os ângulos de Euler duma matriz de rotação, quando é conhecida a sequência das rotações, mas devido às dualidades as funções trigonométricas devem ser aprimoradas para prever os intervalos de uso e para as determinações de quadrantes. As equações mais comuns, por exemplo, usam a

função arco seno para encontrar o ângulo da rotação intermediária, porém este modelo matemático podem ocasionar dualidades, já que a função seno apresenta imagens simétricas e, além disso, alguns resultados podem ser dados em números complexos, dependendo do software utilizado nos cálculos. O domínio da função arco-seno é restrito ao intervalo ($-90^\circ, 90^\circ$).

Para evitar esses problemas pode-se calcular o ângulo da rotação secundária no MATLAB® com a função *atan2*, que encontra valores nos quatros quadrantes do ciclo trigonométrico, mas em modelos matemático descritos por Shih (1990).

Em vários experimentos foram encontrados diferenças entre os resultados acima do esperado, tanto com dados reais como simulados. No caso de dados reais (experimentos 4, 5 e 6 da resseção espacial) as diferenças podem ter ocorrido por terem sido usados apenas quatro pontos, enquanto que os valores de referência são de um ajustamento de fototriangulação, que usou muito mais que quinze pontos por fotografia. No caso de dados simulados ocorreram casos em que os resultados coincidiam com o esperado e em outros não, sendo que claramente em muitas situações havia indicação clara de problemas numéricos, seja de estabilidade dos algoritmos como de sensibilidade a pequenas mudanças de valores iniciais.

6.3 Resultados da orientação relativa

O experimento 1 (Seção 5.2.1) da orientação relativa serviu para validar os programas implementados com um par de fotografias verticais e todos os resultados foram compatíveis com o esperado.

No experimento 2 (Seção 5.2.2) foi usado um par de fotografias com eixo na horizontal. Todos os resultados também foram bem aproximados dos valores esperados.

O experimento 3 (Seção 5.2.3) mostrou que mesmo com diferenças de ângulos maiores entre fotografias sucessivas, o valor da orientação relativa é calculado com os três métodos implementados.

O experimento 4 (Seção 5.2.4) mostrou que a orientação relativa pode não ser calculada com a equação da colinearidade para casos de eixos convergentes em torno, ou maiores, que quarenta e cinco graus entre duas fotografias, mas com os métodos da condição de coplanaridade e com quatérnios os resultados são bem parecidos com o esperado.

O experimento 5 (Seção 5.2.5) testou o caso do problema citado na literatura do chamado cilindro crítico, mas todos os métodos fizeram o cálculo, portanto existe solução analítica para o problema.

De modo geral a orientação relativa com a equação da colinearidade foi obtida de pares de fotografias verticais e com diferenças maiores que as especificadas em levantamentos fotogramétricos, mas nos outros casos, com diferença grande como 45°, não foi calculada. Para diferenças como esta a condição da coplanaridade se mostrou ser mais robusta que a equação da colinearidade.

A orientação relativa com a condição de coplanaridade e quatérnios de modo geral teve resultados bem semelhantes à orientação relativa apenas com a condição de coplanaridade. Estes dois métodos funcionaram para fotos com 45º entre si e no caso do cilindro crítico.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1. Conclusões

O principal objetivo desta dissertação foi analisar a substituição dos ângulos de Euler por quatérnios em algumas aplicações de fotogrametria, tendo em vista que ocorrem várias situações, comuns em aeronáutica e robótica, em que os modelos matemáticos com os ângulos de Euler não funcionam bem ou não chegam a ser calculados quando ocorrem singularidades e o *gimbal lock*. As aplicações que foram testadas, com a substituição proposta, foram da ressecção espacial e da orientação relativa e os resultados finais de modo geral comprovam que o uso de quatérnios permite obter soluções mais estáveis e mais confiáveis, principalmente para a fotogrametria terrestre e curta distância.

Como resultado do desenvolvimento dos trabalhos de revisão da literatura foi possível definir melhor quando podem ocorrer, e como detectar, os casos de *gimbal lock* na fotogrametria:

- As posições críticas de orientação que provocam o *gimbal lock* dificilmente ocorrem na fotogrametria aérea vertical, mas podem ocorrer na fotogrametria terrestre e a curta distância. Nestes casos as posições críticas podem passar despercebidas nos ajustamentos em bloco de feixes de raios (que usa normalmente a equação da colinearidade), porque as posições e orientações de cada fotografia conseguem ser calculadas. A detecção nestes casos é possível apenas com análise da MVC fornecida pelo ajustamento porque as variâncias são significativamente maiores que das fotografias vizinhas.

- Além dos exemplos dos casos conhecidos de *gimbal lock*, comuns em aplicações em robótica e aeronáutica, uma forma segura para prever em fotogrametria é analisar as funções trigonométricas que formam cada elemento da matriz de rotação. O *gimbal lock* vai ocorrer quando o ângulo da segunda rotação for 90° ou 270° , para as matrizes que tem a função seno isolada ou, 0° ou 180° , para as matrizes que tem a função cosseno isoladas, ou quando os ângulos forem bem próximos desses valores.

Em relação aos processamentos e comparações entre os métodos de resseção espacial com equação da colinearidade com matriz de rotação de Euler; resseção espacial sem iterações e resseção com iterações, com os quatérnios; orientação relativa dependente com equação da colinearidade e Euler; coplanaridade normal e coplanaridade com quatérnios foi possível concluir o seguinte:

- Ao comparar resultados de rotações por procedimentos diferentes, é essencial que sejam conhecidas perfeitamente qual a sequência das rotações primárias, secundárias e terciárias, e dos eixos envolvidos. É muito comum que haja falta de informações ou mesmo ocorram informações erradas a respeito das rotações, no que se refere ao sistema ativo ou passivo e a sequencia da multiplicação empregada, pela direita ou pela esquerda.
- Os componentes dos quatérnios têm relações diretas com as sequências de rotação dos ângulos de Euler, portanto não podem ser feitas conversões indiscriminadamente. É necessário haver testes de verificação, para conferir se as matrizes de rotações são realmente equivalentes, antes de adotar um resultado.
- O método de resseção espacial sem iterações, direto com quatro pontos, adotado neste trabalho é muito sensível aos dados de entrada das distâncias entre pontos no espaço objeto e centro perspectivo. Portanto é necessário um procedimento complementar que forneça as distâncias com alta confiabilidade para qualquer caso de posição da câmera e isto não é trivial.
- O método de resseção espacial direto com quatérnio, sem iteração, apresenta melhores resultados do que a resseção espacial com a equação da colinearidade. Tem ainda a vantagem de não necessitar de valores iniciais, que podem ser muito difíceis de serem obtidos nos casos não comuns da fotogrametria terrestre. Como desvantagem só utiliza quatro pontos fica muito sensível aos erros dos mesmos.
- O método resseção de espacial com iteração funciona bem para casos críticos e de ambiguidades.

- O método de resseção espacial com iterações necessita de valores iniciais, inclusive para os quatérnios, mas pode utilizar mais que quatro pontos, o que pode melhorar os resultados, tornando-os mais confiáveis.
- Os testes efetuados mostraram que os valores iniciais aproximados para os ângulos e posições do CP nas resseções, ao usar quatérnios, podem ser mais grosseiros que os valores aproximados iniciais para os ângulos de Euler com a equação da colinearidade comum.
- O uso dos quatérnios permitem convergências mais rápidas em relação aos ângulos de Euler, com um número menor de iterações.

7.2 Recomendações

Como recomendações para continuação das pesquisas apresentadas neste trabalho, a seguir são elencadas algumas propostas:

- Analisar e implementar outros métodos de obtenção das distâncias entre os pontos no terreno e o CP, que entram no método de resseção espacial sem iterações, como o cálculo de distâncias com iterações ou com base na lei dos cossenos.
- Implementar e aperfeiçoar testes para escolha de raízes da equação de quarto grau, de forma confiável, que são usada para a obtenção das distâncias pelo método de Grafarend.
- Analisar as situações limites de cálculo da orientação relativa de fotografias com grande convergência, como 45° , em comparações entre uso da equação da colinearidade e condição de coplanaridade, com relação à precisão a partir da MVC.
- Implementar os quatérnios em programa de fototriangulação de bloco para fotogrametria terrestre.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. L. **Interpolação de Rotações de Objetos Sólidos via Quatérnios.** 2000. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2000.

ARMENAKIS, C.; GAO, Y.; SOHN, G. Semi-automatic co-registration of Photogrammetric and LIDAR data using buildings. In: XXII ISPRS Congress, 25 August-1 September 2012, Melbourne. **Proceedings:** ISPRS, Annals of the Photogrammetric, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. Melbourne: ISPRS, 2012. Vol. I, p. 13-18.

BÄUMKER, M.; HEIMES, F. J. New Calibration and Computing Method for Direct Georeferencing of Image and Scanner Data Using the Position and Angular Data of an Hybrid Inertial Navigation System. In: European Organisation for Experimental Photogrammetric Research Workshop Integrated Sensor Orientation, 17-18 September, Hannover, 2001. **Proceedings:** European Organization for Experimental Photogrammetric Research-OEEPE Workshop on Integrated Sensor Orientation. Hannover: Institute for Photogrammetry and GeoInformation (IPI), University of Hannover, 2001. P. 1-17. Disponível em: <http://www.hochschule-bochum.de/fileadmin/media/fb_v/veroeffentlichungen/baeumker/baheimesoepe.pdf> Acesso em: junho de 2013.

BAJPAI, A. C.; MUSTOE, L. R.; WALKER D. **Matemática para engenharia.** São Paulo: Hemus Livraria e Editora, 1980.

BARFOOT, T.; FORBES, J. R; FURGALE, P. T. Pose Estimation using Linearized Rotations and Quaternion Algebra. **Acta Astronautica.** Stockholm: Elsevier Press, 2010, Vol. 68, January-February, pg 101-112.

BARREIRO, R. C. **Quatérnios, um ensaio sobre a regularidade e hiperperiodicidade de funções quaterniônicas, e o Teorema de Cauchy.** 2009. 87 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual Paulista (UNESP). São José do Rio Preto, 2009.

BARRETO, J. P. de A. **Soluções para controlo visual de movimento:** aplicação em seguimento com visão activa. Coimbra: Universidade de Coimbra, 2000. Disponível em: <http://www2.isr.uc.pt/~jpbar/Publication_Source/papcc_thesis.pdf>. Acesso em: nov. 2012.

BATISTA, J.; DIAS, J.; ARAÚJO, H; ALMEIDA, A. T. The ISR Multi-Degrees-of-Freedom Active Vision Robot Head. **Proceedings:** Second International Conference

on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP'95), City University Hong-Kong: Hong-Kong, September, 1995. p. 1-13.

BERBERAN, A. Estimação de parâmetros em modelos lineares homogêneos. **Elementos de Fotogrametria Digital**. Coimbra: Universidade de Coimbra, UFTUC, Engenharia Geográfica, 2002.

BIASI, S. C. de; GATTASS, M. **Utilização de Quaternios para a representação de rotações em 3D**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2002. Disponível em: <www.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass/Quaternios.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2011.

BUJŇÁK, M. **Algebraic solutions to absolute pose problems**. 2012. 140 f. Dissertação (PhD em Licenciatura em Estudos de Programas). Czech Technical University, Prague, 2012.

CAMPOS, FILHO, F. F. **Algoritmos Numéricos**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2001, 383 p.

CEFALO, M.; MIRATS-TUR, J.A comprehensive dynamic model for class-1 tensegrity systems based on quaternions. **International Journal of Solids and Structures**. [s. l.] Elsevier, n. 48, p. 785–802, 2011.

CELLEDONI, E.; SAFSTROM, N. A Hamiltonian and multi- Hamiltonian formulation of a rod model using quaternions. **Computer methods in applied mechanics and engineering**. Norway: Elsevier, n. 199, p. 2813–2819, 2010.

COELHO, L.; BRITO, J. N. **Fotogrametria Digital**. Rio de Janeiro: Editora da UERJ, 2007.

DAM, E. B.; KOCH, M.; LILLHOLM, M. **Quaternions, interpolation and animation**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1998.

DAVAILUS, G. P.; NEWMAN, B. A. The Application of Quaternion Algebra to Gyroscopic Motion, Navigation, and Guidance. **Proceedings**: AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 15-18 August, 2005. p. 1-7.

DEWITT, B.A. Initial approximations for the Three-Dimensional Conformal Coordinate Transformation. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing**. Maryland: American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Vol. 62, n. 1, January 1996, p. 79-83.

DIEBEL, J. **Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors.** Penn: Penn State University, 2006.

ENGINEER MANUAL. **Engineer Manual- EM No. 1110-1-1000.** Engineering and Design Photogrammetric Mapping. Washington: Department of the Army, 31, March, 1993. Disponível em: <http://gisceu.net/PDF/U5R.PDF>. Acesso em maio de 2013.

FÖSTNER, W. On estimations rotations. **Geodezija ir Kartografija.** London: Taylor & Francis, 2012. p. 139-150. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/13921541.2001.10552931>. Acesso em: Agosto de 2013.

FÖSTNER, W.; WROBEL, B. **Mathematical concepts in photogrammetry.** In: McGLONE, J. C. (Ed.). Manual of photogrammetry. Fifth edition. Bethesda: American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 2004.

FERREIRA, A. J.; CASTRO, J. C. V.; MARTINS- FILHO, L. S.; DUARTE, R. O.; PRADO, R. S.; ROCHA, R. Procedimento experimental para a determinação de atitude de satélites artificiais. **Ciência & Engenharia.** Vol. 17, N. 57, p. 57-64, jan.-dez. 2008.

FIGUEIREDO, D. **Conceitos básicos de sensoriamento remoto.** Brasília: Companhia Nacional de Abastecimento- CONAB, 2005.

GALO, M. **Automação dos processos de correspondência e orientação relativa em Visão estéreo.** 2003. 282 f. Tese (Doutorado em Engenharia elétrica). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação- FEEC, da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP. Campinas, 2003.

GALO, M.; TOZZI, C. L. **A representação de matrizes de rotação e o uso de quatérnios em ciências geodésicas.** Vol.1 Curitiba: UFPR, 2001, p. 214-231. (Série em Ciências Geodésicas).

GARCIA, C. Fully Vision-based calibration of a Hand-Eye Robot. **Autonomous Robots.** Boston: Kluwer Academic Publishers. N. 6, 1999, p. 223–238.

GARNÉS, S. J.A. **Ajustamento paramétrico por mínimos quadrados com análise na estabilidade da solução.** 1996. 163 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná (UFPR). Curitiba, 1996.

GARNÉS, S. J.A. **Resolução das ambiguidades GPS para linhas de base curta: análise dos algoritmos de otimização.** 2001. 218 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas). Universidade Federal do Paraná (UFPR). Curitiba, 2001.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento das observações: aplicações geodésicas.** Curitiba: Ed. UFPR, 1994, 319 p.

GHOSH, S. K. Geometry of the photographs. **Analytical Photogrammetry.** New York: Pergamon Press, 1925. p. 61-84.

Gimble Lock Explained. il. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=rrUCBOIJdt4>>. Acesso em 24 nov. 2012.

GODDARD, J. S. Pose and Motion Estimation Using Dual Quaternion-Based Extended Kalman Filtering. 1997. 206 f. Tese (Doctor of Philosophy) . University of Tennessee, Knoxville, 1997.

GRAFARENDS, E.; SHAN. J. Closed-form solution of P4P or three-dimensional resection problem in terms of Möbius barycentric coordinates. **Journal of Geodesy.** Stuttgart: Springer. n. 71. p. 217-231, 1997.

GRAVELLE, M. **Quaternions and their Applications to Rotation in 3D Space.** Morris: University of Minnesota Morris. May, 2006. Disponível em: <<http://www.morris.umn.edu/academic/math/Ma4901/gravelle.pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2012.

GROÖEKATTHÖFER, K.; YOON, Z. **Introduction into quaternions for spacecraft attitude representation.** Berlin: Department of Astronautics and Aeronautics, Technische Universität Berlin, May 31, 2012. Disponível em: <http://www.tu-berlin.de/fileadmin/fg169/miscellaneous/Quaternions.pdf>. Acesso em: Dezembro de 2012.

GUAN, Y.; CHENG, X.; ZHAN, X.; ZHOU, S. Closed-form solution of space resection using unit quaternion. In: XXIst ISPRS CONGRESS: 3-11 JUL 2008 BEIJING, CHINA. **Proceedings:** IAPRS, Vol.XXXVII, ISSN 1682-1750, 2008, p. 43-48. Disponível em: http://www.isprs.org/proceedings/XXXVII/congress/3b_pdf/09.pdf. Acesso em dezembro de 2012.

GUNGOR, M. A.; SARDUVAN, M. **A note on dual quaternions and matrices of dual quaternions.** Sakarya: Scientia Magna. Vol. 7. n. 1, 2011, p. 1-11.

HAMILTON, S. W. R. **Elements of quaternions.** London: Longmans, green & co, 1866. 768 p. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=fIRAAAAIAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 17 novembro de 2012.

HANSON, A. J.; THAKUR, S. Quaternion maps of global protein structure. **Journal of Molecular Graphics and Modelling.** Philadelphia: Elsevier. Vol. 38, p. 256-278, 2012.

HARALICK, R. M. ; LEE, C.-N.; OTTENBERG, K.; NOLIE, M. Review and Analysis of Solutions of three Point Perspective Pose Estimation Problem. **International Journal of Computer Vision.** [s.l.] . 13, n. 3, p. 331-356, 1994.

HELMSTETTER, J. The quaternionic equation $ax + xb = c$. **Advances in Applied Clifford Algebras.** Basel: Springer Basel, n. 22, p. 1055–1059, 2012.

HINSKEN, L. A singularity free algorithm for spatial orientation of bundles. In: XVIth ISPRS Congress, July 1-10, Kyoto, Japan. **Proceedings:** Technical Commission V: Other Non-Cartographic Applications of Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. XXVII part B5, 1988, p. 262-272. Disponível em: http://www.isprs.org/proceedings/xxvii/congress/part5/262_XXVII-part5.pdf. Acesso em: Dezembro de 2012.

HORN, B. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. **Journal of the Optical Society of America A.** Hawaii: University of Hawaii at Manoa. Hawaii, 1987. Vol. 4. Disponível em: <http://people.csail.mit.edu/bkph/papers/Absolute_Orientation.pdf>. Acesso em: 25 out. 2012.

HORN, B. K. P. **Relative orientation.** Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1989.

IEZZI, G; HAZZAN. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Vol. 4. Sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo: Atual, 1985, 5^a edição.

JI, Q.; COSTA, M. S.; HARALICK, R. M.; SHAPIRO, L. G. A robust linear least-squares estimation of camera exterior orientation using multiple geometric features. **ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing:** Elsevier. N. 55, p. 75-93, 2000.

JIANG, C.; WANG, F.; ZHENG, N. Linear pose estimation algorithm based on quaternion for line correspondences. In: The 3rd International Conference on Machine Vision **Proceedings:** of The 3rd International Conference on Machine Vision (ICMV 2010), 2010. p. 82-87.

JIANG, G.; JIANG, T.; GONG, H.; WANG, X. Exterior orientation of line-array CCD images based on quaternion spherical linear interpolation. In: ISPRS TC VII Symposium- 100 Years ISPRS, Vienna, Austria, July 5-7, 2010. **Proceedings:** IAPRS, vol. XXXVIII, part 7A. 2010. p. 71-76.

JOHNSON, M. P. **Exploiting quaternions to support expressive interactive character motion.** 2003. 266 f. Thesis (Doctor of Philosophy).Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2003.

JUN, L.; DONGHONG, W.; YONGSHENG, Z. Triangulation of airborne three-line images using quaternion. In: XXIst ISPRS CONGRESS: 3-11 JUL 2008 BEIJING, CHINA. **Proceedings:** IAPRS, Vol.XXXVII, ISSN 1682-1750, 2008, p. 573-578. Disponível em: http://www.isprs.org/proceedings/XXXVII/congress/1_pdf/97.pdf. Acesso em dezembro de 2012.

KARNEY, C. F. F. Quaternions in molecular modeling. **Journal of Molecular Graphics and Modelling.** Elsevier. N. 25, p. 595-604, 2007.

KRAUS, K. **Photogrammetry.** vol.1.Vienna: Dummler, 2000.

LAVIERI, R. S. **Métodos de navegação inercial aplicados a lançamentos submarinos.** 2011. 292 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011. Disponível em: <<http://www.pnv.poli.usp.br/fAulas/RGlzc2VydGFjYW9fUm9kcmlnb19TYXVyaV9MYXZpZXJpLnBkZg==.pdf>>. Acesso em: 18 novembro de 2012.

LIN, Y.-H.; WANG, H.-S.; CHIANG, Y.-T.; CHANG, F.-R. Estimation of relative orientation using dual quaternion. **Proceedings:** International Conference on System Science and Egineering, 2010.

LUGNANI, J. B. **Introdução à fototriangulação.** Curitiba: Imprensa Universitária, 1987, 134 p.

MALVEZZI, M. C. **Animação em tempo real com keyframe.** Monografia. 2004. 54 f. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <http://www-di.inf.puc-rio.br/~celes/monograph/pf_malvezzi2004.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2012.

MANFRA, M. M. G. K. **Uma contribuição ao estudo da solução numérica do problema de programação quadrática.** 2004. 98 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas). Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2004. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_arquivos/9/TDE-2010-01-11T164230Z-1329/Publico/MarciaManfra.pdf>. Acesso em 3 de maio de 2012.

MARINS, J. L. **An extended Kalman Filter for quaternion-based attitude estimation.** 2000. 111 f. Thesis (Master of Science in Electrical engineering). Naval Postgraduate School. Monterey, September, 2000.

MARQUES, G. C. **Calibração remota de sistemas robóticos utilizando sensores internos e externos.** 2005. 115 f. Tese (Mestre em Ciências em Engenharia elétrica). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

MARTINS, M. R. **Desenvolvimento de uma biblioteca em C++ para modelagem e controle cinemático de robôs manipuladores usando quatérnios duais.** 2013. 81 f. Monografia (Graduação em Engenharia de controle e automação). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

MATLAB®- **Matrix Laboratory.** Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2013. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/atan2.html>. Acesso em: Janeiro de 2014.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied statistics and probability for engineers.** New York: John Wiley & Sons, 2003.

National Aeronautics and Space Administration- NASA. **Aircraft Rotations:** Body axes. Washington: Glenn Research Center, 2008. Disponível em: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/rotations.html>. Acesso em: maio de 2013.

NEVES, R. C. **Os quatérnios de Hamilton e o Espaço.** 2008. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <<http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/70/07%20Robson%20Neves.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 3º mar. 2012.

PENNESTRÌ, E.; VALENTINI, P. P. Dual quaternions as a tool for rigid body motion analysis: a tutorial with an application to biomechanics. **Proceedings:** ECCOMAS Thematic Conference, K. Arczewski, J. Fraczek, M. Wojtyra (eds.), MULTIBODY DYNAMICS 2009, Warsaw, Poland, 29 June–2 July 2009.p. 1-17.

POPE, A. J. An advantageous, alternative parameterization of rotations for analytical photogrammetry. **Proceedings:** 1970 Symposium on Computational Photogrammetry of the American Society of Photogrammetry, Alexandria, January 7-9, 1970.

QIAO, S.; LIAO, Q.; WEI, S.; SU, H-J. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on double quaternions. **Mechanism and Machine Theory.** [s. l.] Elsevier, n. 45, p. 193–199, 2010.

SANTANA, P. H de R.Q e A.; BRAGA, M. A. **Concepção de um veículo aéreo não-tripulado do tipo quadrirrotor.** Brasília: Universidade de Brasília, 2008. Disponível em: <http://people.csail.mit.edu/psantana/data/files/other/Santana_Braga_Conception_Quadrador.pdf>. Acesso em: 25 set. 2012.

SANTOS, O. B. **Localização de pontos homólogos em regiões homogêneas de fotografias aéreas por refinamento do método das áreas.** 2006. 146 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Cartográfica). Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: http://www.cartografia.ime.eb.br/trabalhos/MESTRADO/2006_OSEIAS_BORGES_DOS_SANTOS/DISSERTACAO_Santos.pdf. Acesso em março de 2013.

SANTOS, W. E. **Sistema para identificação da curvatura na junta prismática de um robô via quaternions.** 2003. 192 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2003. Disponível em: <http://www.pessoal.utfpr.edu.br/winderson/arquivos/tese_winderson.pdf>. Acesso em: 14 novembro de 2012.

SARTORI, C. S.; MANTOVANI, E. C. **Cálculo numérico:** com o programa cálculo e análise numérica. São Paulo: Página 10, 2010, 124 p. Disponível em: <http://www.pagina10.com.br/downloads/21.pdf>. Acesso em: Março de 2014.

SHEN, Y.-Z.; CHEN, Y.; ZHENG, D.-H. A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm. **Journal of Geodesy.** Springer, August 2006, Vol. 80, pg 233-239, 2006.

SHIH, T-Y. The Duality and Critical Condition in the Formulation and Decomposition of a Rotation Matrix. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing (PE&RS).** Maryland: American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Vol. 56, n. 8, p. 1173-1179, Aug. 1990.

SILVA, D.C da. **Considerações práticas em Fotogrametria a curta distância aplicada ao levantamento de um tanque e a questão da precisão e exatidão.** 1995. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ciências geodésicas). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1995.

SLAMA, C. C. (Ed). **Manual of Photogrammetry.** 4th ed. AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAFOMETRY, ASP. Virgínia, 1056 p, 1980.

TEWINKEL, G. C. Basic Mathematics of Photogrammetry. **Manual of Photogrammetry.** 2nd ed. Washington: American Society of Photogrammetry, 1952. p. 309-380.

TRIGGS, B.; MCLAUCHLAN, P. F.; HARTLEY, R. I.; FITZGIBBON, A. W. Bundle Adjustment — A Modern Synthesis. ICCV '99. **Proceedings:** International Workshop on Vision Algorithms. Springer-Verlag. p. 298–372, 1999.

VASS, G. **Avoiding Gimbal lock.** [s. l.] il. Viewpoint, June, 2009.

WERNECK, N. L. **Estimação de orientação de câmera em ambientes antrópicos a partir de edgels.** 2012. 242 f. Tese (Doutorado em Ciências). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

WHEELER, M. D.; IKEUCHI, K. **Iterative Estimation of Rotation and Translation using the Quaternion.** Pittsburgh: Carnegie Mellon University, Dec. 1995. CMU-CS-95-215. Disponível em: <http://swing.adm.ri.cmu.edu/pub_files/pub1/wheeler_m_d_1995_1/wheeler_m_d_1995_1.pdf>. Acesso em: 27 novembro de 2012.

WILKINS, D. R. **On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra** by William Rowan Hamilton. Dublin: Philosophical Magazine, 2000. Disponível em: <<http://ftp4.de.freesbie.org/pub/EMIS/classics/Hamilton/OnQuat.pdf>>. Acesso em: 17 nov. 2012.

WOLF. P. R.; DEWITT. B. A. **Elements of Photogrammetry:** with application in GIS. India: McGraw-Hill, 1983, 3^a Ed. 608 p.

WON, J.-H. ; KO, S.-J. ;LEE, J.-S. New Quaternion-based Least-squares Method for Attitude Determination with Vector Observations. **Proceedings:** International Symposium on Kinematics System in Geodesy, Geomatics, and Navigation, June 5th - 8th, Banff, 2001. Banff: University of Calgary, 2001. p. 415-420.

WONG, K. W. Basic Mathematics of Photogrammetry. SLAMA, C. C. et al. (Ed.). **Manual of Photogrammetry**. Virginia: American Society of Photogrammetry, 1980. Chap. II, p. 37-101.

YUN, X.; BACHMANN, E. R. Design, implementation, and experimental results of a quaternion-based Kalman Filter for human body motion tracking. **IEEE Transactions on robotics**. Zencan: University of Zanjan, Vol. 22, N. 6, December, 2006.

ZENG, H. New Non-iterative Solution of the Perspective 3-Point Problem. **Journal of Computacional Information Systems**. Binary Information Press: Hong Kong, Vol. 8. N. 9. Pag. 3745-3755, 2012.

ZENG, H.; YI, Q. Quaternion- Based Iterative Solution of Three-Dimensional Coordinate Transformation Problem. **Journal of computers**. Vol 6. N. 7. July Pag. 1361-1368, 2011.

APÊNDICE A

Modelo matemático das matrizes de rotações, cujas sequências de rotações são comuns em fotogrametria (sistema ativo):

$$R_{\omega\kappa\varphi} = R_3(\varphi) \times R_2(\kappa) \times R_1(\omega) = \\ \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & -\cos \varphi \sen \kappa \cos \omega + \sen \varphi \sen \omega & \cos \varphi \sen \kappa \sen \omega + \sen \varphi \cos \omega \\ \sen \kappa & \cos \kappa \cos \omega & -\cos \kappa \sen \omega \\ -\sen \varphi \cos \kappa & \sen \varphi \sen \kappa \cos \omega + \cos \varphi \sen \omega & -\sen \varphi \sen \kappa \sen \omega + \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (115)$$

$$R_{\kappa\varphi\omega} = R_3(\omega) \times R_2(\varphi) \times R_1(\kappa) = \\ \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & -\cos \varphi \sen \kappa & \sen \varphi \\ \sen \omega \sen \varphi \cos \kappa + \cos \omega \sen \kappa & -\sen \omega \sen \varphi \sen \kappa + \cos \omega \cos \kappa & -\sen \omega \cos \varphi \\ -\cos \omega \sen \varphi \cos \kappa + \sen \omega \sen \kappa & \cos \omega \sen \varphi \sen \kappa + \sen \omega \cos \kappa & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (116)$$

$$R_{\kappa\omega\varphi} = R_3(\varphi) \times R_2(\omega) \times R_1(\kappa) = \\ \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa + \sen \varphi \sen \omega \sen \kappa & -\cos \varphi \sen \kappa + \sen \varphi \sen \omega \cos \kappa & \sen \varphi \cos \omega \\ \cos \omega \sen \kappa & \cos \omega \cos \kappa & -\sen \omega \\ -\sen \varphi \cos \kappa + \cos \varphi \sen \omega \sen \kappa & \sen \varphi \sen \kappa + \cos \varphi \sen \omega \cos \kappa & \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (117)$$

$$R_{\varphi\omega\kappa} = R_3(\kappa) \times R_2(\omega) \times R_1(\varphi) = \\ \begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \varphi - \sen \kappa \sen \omega \sen \varphi & -\sen \kappa \cos \omega & \cos \kappa \sen \varphi + \sen \kappa \sen \omega \cos \varphi \\ \sen \kappa \cos \varphi + \cos \kappa \sen \omega \sen \varphi & \cos \kappa \cos \omega & \sen \kappa \sen \varphi - \cos \kappa \sen \omega \cos \varphi \\ -\sen \varphi \cos \omega & \sen \omega & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (118)$$

$$R_{\varphi\kappa\omega} = R_3(\omega) \times R_2(\kappa) \times R_1(\varphi) = \\ \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & -\sen \kappa & \cos \kappa \sen \varphi \\ \cos \omega \sen \kappa \cos \varphi + \sen \omega \sen \varphi & \cos \omega \cos \kappa & \cos \omega \sen \kappa \sen \varphi - \sen \omega \cos \varphi \\ \sen \omega \sen \kappa \cos \varphi - \cos \omega \sen \varphi & \sen \omega \sen \kappa & \sen \omega \sen \kappa \sen \varphi + \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (119)$$

$$R_{\omega\kappa\tilde{\omega}} = R_3(\tilde{\omega}) \times R_2(\kappa) \times R_1(\omega) = \\ \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sen \kappa \cos \omega & \sen \kappa \sen \omega \\ \cos \tilde{\omega} \sen \kappa & \cos \tilde{\omega} \cos \kappa \cos \omega - \sen \tilde{\omega} \sen \omega & -\cos \tilde{\omega} \cos \kappa \sen \omega - \sen \tilde{\omega} \cos \omega \\ \sen \tilde{\omega} \sen \kappa & \sen \tilde{\omega} \cos \kappa \cos \omega + \cos \tilde{\omega} \sen \omega & -\sen \tilde{\omega} \cos \kappa \sen \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix} \quad (120)$$

$$R_{\varphi\omega\tilde{\varphi}} = R_3(\tilde{\varphi}) \times R_2(\omega) \times R_1(\varphi) = \\ \begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sen \tilde{\varphi} \cos \omega \sen \varphi & \sen \tilde{\varphi} \sen \omega & \cos \tilde{\varphi} \sen \varphi + \sen \tilde{\varphi} \cos \omega \cos \varphi \\ \sen \omega \sen \varphi & \cos \omega & -\sen \omega \cos \varphi \\ -\sen \tilde{\varphi} \cos \varphi - \cos \tilde{\varphi} \cos \omega \sen \varphi & \cos \tilde{\varphi} \sen \omega & -\sen \tilde{\varphi} \sen \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (121)$$

$$R_{\varphi\kappa\tilde{\varphi}} = R_3(\tilde{\varphi}) \times R_2(\kappa) \times R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \kappa \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & -\cos \tilde{\varphi} \sin \kappa & \cos \tilde{\varphi} \cos \kappa \sin \varphi + \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ \sin \kappa \cos \varphi & \cos \kappa & \sin \kappa \sin \varphi \\ -\sin \tilde{\varphi} \cos \kappa \cos \varphi - \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & \sin \tilde{\varphi} \sin \kappa & -\sin \tilde{\varphi} \cos \kappa \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (122)$$

$$R_{\kappa\omega\tilde{\kappa}} = R_3(\tilde{\kappa}) \times R_2(\omega) \times R_1(\tilde{\kappa}) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \omega \sin \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \sin \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \omega \cos \kappa & \sin \tilde{\kappa} \sin \omega \\ \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \omega \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \omega \cos \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \sin \omega \\ \sin \omega \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa & \cos \omega \end{pmatrix} \quad (123)$$

$$R_{\kappa\varphi\tilde{\kappa}} = R_3(\tilde{\kappa}) \times R_2(\varphi) \times R_1(\tilde{\kappa}) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \varphi \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \cos \varphi \sin \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & \cos \tilde{\kappa} \sin \varphi \\ \sin \tilde{\kappa} \cos \varphi \cos \kappa + \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \cos \varphi \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & \sin \tilde{\kappa} \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \kappa & \sin \varphi \sin \kappa & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (124)$$

As matrizes de rotações mais comuns no sistema passivo são:

$$R_{\omega\varphi\kappa} = R_3(\kappa) \times R_2(\varphi) \times R_1(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \varphi & \cos \kappa \sin \varphi \sin \omega + \sin \kappa \cos \omega & -\cos \kappa \sin \varphi \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega \\ -\sin \kappa \cos \varphi & -\sin \kappa \sin \varphi \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega & \sin \kappa \sin \varphi \cos \omega + \cos \kappa \sin \omega \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \omega & \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (125)$$

$$R_{\omega\kappa\varphi} = R_3(\varphi) \times R_2(\kappa) \times R_1(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa \cos \varphi + \sin \omega \sin \varphi & \sin \omega \sin \kappa \cos \varphi - \cos \omega \sin \varphi \\ -\sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa \\ \cos \kappa \sin \varphi & \cos \omega \sin \kappa \sin \varphi - \sin \omega \cos \varphi & \sin \omega \sin \kappa \sin \varphi + \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (126)$$

$$R_{\varphi\omega\kappa} = R_3(\kappa) \times R_2(\omega) \times R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa + \sin \varphi \sin \omega \sin \kappa & \cos \omega \sin \kappa & -\sin \varphi \cos \kappa + \cos \varphi \sin \omega \sin \kappa \\ -\cos \varphi \sin \kappa + \sin \varphi \sin \omega \cos \kappa & \cos \omega \cos \kappa & \sin \varphi \sin \kappa + \cos \varphi \sin \omega \cos \kappa \\ \sin \varphi \cos \omega & -\sin \omega & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (127)$$

$$R_{\varphi\kappa\omega} = R_3(\omega) \times R_2(\kappa) \times R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & \sin \kappa & -\sin \varphi \cos \kappa \\ -\cos \varphi \sin \kappa \cos \omega + \sin \varphi \sin \omega & \cos \kappa \cos \omega & \sin \varphi \sin \kappa \cos \omega + \cos \varphi \sin \omega \\ \cos \varphi \sin \kappa \sin \omega + \sin \varphi \cos \omega & -\cos \kappa \sin \omega & -\sin \varphi \sin \kappa \sin \omega + \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (128)$$

$$R_{\kappa\omega\varphi} = R_3(\varphi) \times R_2(\omega) \times R_1(\kappa) = \begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \varphi - \sin \kappa \sin \omega \sin \varphi & \sin \kappa \cos \varphi + \cos \kappa \sin \omega \sin \varphi & -\sin \varphi \cos \omega \\ -\sin \kappa \cos \omega & \cos \kappa \cos \omega & \sin \omega \\ \cos \kappa \sin \varphi + \sin \kappa \sin \omega \cos \varphi & \sin \kappa \sin \varphi - \cos \kappa \sin \omega \cos \varphi & \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (129)$$

$$R_{\kappa\varphi\omega} = R_3(\omega) \times R_2(\varphi) \times R_1(\kappa) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \omega \cos \varphi & \sin \kappa \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \cos \kappa \sin \varphi \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega & \sin \kappa \sin \varphi \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega & \cos \varphi \sin \omega \\ \cos \kappa \sin \varphi \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega & \sin \kappa \sin \varphi \cos \omega - \cos \kappa \sin \omega & \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (130)$$

$$R_{\omega\varphi\tilde{\omega}} = R_3(\tilde{\omega}) \times R_2(\varphi) \times R_1(\omega) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \omega & -\sin \varphi \cos \omega \\ \sin \tilde{\omega} \sin \varphi & \cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \cos \varphi \sin \omega & \cos \tilde{\omega} \sin \omega + \sin \tilde{\omega} \cos \varphi \cos \omega \\ \cos \tilde{\omega} \sin \varphi & -\sin \tilde{\omega} \cos \omega - \cos \tilde{\omega} \cos \varphi \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (131)$$

$$R_{\omega\kappa\tilde{\omega}} = R_3(\tilde{\omega}) \times R_2(\kappa) \times R_1(\omega) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa \cos \omega & \sin \kappa \sin \omega \\ -\cos \tilde{\omega} \sin \kappa & \cos \tilde{\omega} \cos \kappa \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \sin \omega & \cos \tilde{\omega} \cos \kappa \sin \omega + \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ \sin \tilde{\omega} \sin \kappa & -\sin \tilde{\omega} \cos \kappa \cos \omega - \cos \tilde{\omega} \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \cos \kappa \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix} \quad (132)$$

$$R_{\varphi\omega\tilde{\varphi}} = R_3(\tilde{\varphi}) \times R_2(\omega) \times R_1(\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \cos \omega \sin \varphi & \sin \tilde{\varphi} \sin \omega & -\cos \tilde{\varphi} \sin \varphi - \sin \tilde{\varphi} \cos \omega \cos \varphi \\ \sin \omega \sin \varphi & \cos \omega & \sin \omega \cos \varphi \\ \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \omega \sin \varphi & -\cos \tilde{\varphi} \sin \omega & -\sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (133)$$

$$R_{\varphi\kappa\tilde{\varphi}} = R_3(\tilde{\varphi}) \times R_2(\kappa) \times R_1(\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \kappa \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & \cos \tilde{\varphi} \sin \kappa & -\cos \tilde{\varphi} \cos \kappa \sin \varphi - \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ -\sin \kappa \cos \varphi & \cos \kappa & \sin \kappa \sin \varphi \\ \sin \tilde{\varphi} \cos \kappa \cos \varphi + \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & \sin \tilde{\varphi} \sin \kappa & -\sin \tilde{\varphi} \cos \kappa \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (134)$$

$$R_{\kappa\omega\tilde{\kappa}} = R_3(\tilde{\kappa}) \times R_2(\omega) \times R_1(\tilde{\kappa}) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \omega \sin \kappa & \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa + \sin \tilde{\kappa} \cos \omega \cos \kappa & \sin \tilde{\kappa} \sin \omega \\ -\sin \tilde{\kappa} \cos \kappa - \cos \tilde{\kappa} \cos \omega \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \omega \cos \kappa & \cos \tilde{\kappa} \sin \omega \\ \sin \omega \sin \kappa & -\sin \omega \cos \kappa & \cos \omega \end{pmatrix} \quad (135)$$

$$R_{\kappa\varphi\tilde{\kappa}} = R_3(\tilde{\kappa}) \times R_2(\varphi) \times R_1(\tilde{\kappa}) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \varphi \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & \cos \tilde{\kappa} \cos \varphi \sin \kappa + \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \sin \varphi \\ -\sin \tilde{\kappa} \cos \varphi \cos \kappa - \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \cos \varphi \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & \sin \tilde{\kappa} \sin \varphi \\ \sin \varphi \cos \kappa & \sin \varphi \sin \kappa & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (136)$$

APÊNDICE B

Detalhamento das matrizes de rotações em situações críticas.

As equações 125 à 130 em *gimbal lock* foram omitidas nesse estudo por serem apenas matrizes transpostas relacionadas às equações 25 à 30.

Sequência /equação	Ângulo	Equação resultante	Equação simplificada
$\omega\varphi\kappa/25$	$\varphi = 90^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & \cos \kappa \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega & \cos \kappa \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega \\ 0 & \sin \kappa \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega & \sin \kappa \cos \omega - \cos \kappa \sin \omega \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \sin(\omega - \kappa) & \cos(\omega - \kappa) \\ 0 & \cos(\omega - \kappa) & -\sin(\omega - \kappa) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\omega\varphi\kappa/25$	$\varphi = 270^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & -\cos \kappa \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega & -\cos \kappa \cos \omega + \sin \kappa \sin \omega \\ 0 & -\sin \kappa \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega & -\sin \kappa \cos \omega - \cos \kappa \sin \omega \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\sin(\omega + \kappa) & -\cos(\omega + \kappa) \\ 0 & \cos(\omega + \kappa) & -\sin(\omega + \kappa) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\omega\varphi\tilde{\omega}/26$	$\varphi = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \sin \omega & -\cos \tilde{\omega} \sin \omega - \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & \sin \tilde{\omega} \cos \omega + \cos \tilde{\omega} \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} + \omega) & -\sin(\tilde{\omega} + \omega) \\ 0 & \sin(\tilde{\omega} + \omega) & \cos(\tilde{\omega} + \omega) \end{pmatrix}$
$\omega\varphi\tilde{\omega}/26$	$\varphi = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\omega} \cos \omega + \sin \tilde{\omega} \sin \omega & -\cos \tilde{\omega} \sin \omega + \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & \sin \tilde{\omega} \cos \omega - \cos \tilde{\omega} \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega - \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} - \omega) & \sin(\tilde{\omega} - \omega) \\ 0 & \sin(\tilde{\omega} - \omega) & -\cos(\tilde{\omega} - \omega) \end{pmatrix}$
$\alpha ts/27$	$t = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} -\cos s \cos \alpha - \sin s \sin \alpha & \sin s \cos \alpha - \cos s \sin \alpha & 0 \\ \cos s \sin \alpha - \sin s \cos \alpha & -\sin s \sin \alpha + \cos s \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\cos(s - \alpha) & \sin(s - \alpha) & 0 \\ \sin(\alpha - s) & \cos(s + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\alpha ts/27$	$t = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -\cos s \cos \alpha + \sin s \sin \alpha & \sin s \cos \alpha + \cos s \sin \alpha & 0 \\ \cos s \sin \alpha + \sin s \cos \alpha & \sin s \sin \alpha + \cos s \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\cos(s + \alpha) & \sin(s + \alpha) & 0 \\ \sin(\alpha + s) & \cos(s - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\omega\kappa\varphi/115$	$\kappa = 90^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & -\cos \varphi \cos \omega + \sin \varphi \sin \omega & \cos \varphi \sin \omega + \sin \varphi \cos \omega \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi \cos \omega + \cos \varphi \sin \omega & -\sin \varphi \sin \omega + \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\cos(\varphi + \omega) & \sin(\varphi + \omega) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi + \omega) & \cos(\varphi + \omega) \end{pmatrix}$

$\omega\kappa\varphi/115$	$\kappa = 270^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & \cos \varphi \cos \omega + \sin \varphi \sin \omega & -\cos \varphi \sin \omega + \sin \varphi \cos \omega \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi \cos \omega + \cos \varphi \sin \omega & \sin \varphi \sin \omega + \cos \varphi \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \cos(\varphi - \omega) & \sin(\varphi - \omega) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi - \omega) & \cos(\varphi - \omega) \end{pmatrix}$
$\kappa\varphi\omega/116$	$\varphi = 90^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \cos \kappa & \cos \kappa \cos \omega - \sin \omega \sin \kappa & 0 \\ \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \cos \kappa & \cos \kappa \sin \omega + \cos \omega \sin \kappa & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\omega + \kappa) & \cos(\omega + \kappa) & 0 \\ -\cos(\omega + \kappa) & \sin(\omega + \kappa) & 0 \end{pmatrix}$
$\kappa\varphi\omega//116$	$\varphi = 270^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \cos \omega \sin \kappa - \sin \omega \cos \kappa & \cos \kappa \cos \omega + \sin \omega \sin \kappa & 0 \\ \sin \omega \sin \kappa + \cos \omega \cos \kappa & \cos \kappa \sin \omega - \cos \omega \sin \kappa & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\omega - \kappa) & \cos(\omega - \kappa) & 0 \\ \cos(\omega - \kappa) & \sin(\omega - \kappa) & 0 \end{pmatrix}$
$\kappa\omega\varphi/117$	$\omega = 90^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa + \sin \varphi \sin \kappa & -\cos \varphi \sin \kappa + \sin \varphi \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \varphi \cos \kappa + \cos \varphi \sin \kappa & \sin \varphi \sin \kappa + \cos \varphi \cos \kappa & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi - \kappa) & \sin(\varphi - \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\varphi - \kappa) & \cos(\varphi - \kappa) & 0 \end{pmatrix}$
$\kappa\omega\varphi/117$	$\omega = 270^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa - \sin \varphi \sin \kappa & -\sin \varphi \sin \kappa + \cos \varphi \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \varphi \cos \kappa - \cos \varphi \sin \kappa & \sin \varphi \sin \kappa - \cos \varphi \cos \kappa & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \kappa) & \sin(\varphi + \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin(\varphi + \kappa) & \cos(\varphi + \kappa) & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi\omega\kappa/118$	$\omega = 90^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \varphi - \sin \kappa \sin \varphi & 0 & \cos \kappa \sin \varphi + \sin \kappa \cos \varphi \\ \sin \kappa \cos \varphi + \cos \kappa \sin \varphi & 0 & \sin \kappa \sin \varphi - \cos \kappa \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \kappa) & 0 & \sin(\varphi + \kappa) \\ \sin(\varphi + \kappa) & 0 & -\cos(\varphi + \kappa) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi\omega\kappa/118$	$\omega = 270^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \varphi + \sin \kappa \sin \varphi & 0 & \cos \kappa \sin \varphi - \sin \kappa \cos \varphi \\ \sin \kappa \cos \varphi - \cos \kappa \sin \varphi & 0 & \sin \kappa \sin \varphi + \cos \kappa \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(-\varphi + \kappa) & 0 & -\sin(-\varphi + \kappa) \\ \sin(-\varphi + \kappa) & 0 & \cos(-\varphi + \kappa) \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi\kappa\omega/119$	$\kappa = 90^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos \omega \cos \varphi + \sin \omega \sin \varphi & 0 & \cos \omega \sin \varphi - \sin \omega \cos \varphi \\ \sin \omega \cos \varphi - \cos \omega \sin \varphi & 0 & \sin \omega \sin \varphi + \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos(\omega - \varphi) & 0 & -\sin(\omega - \varphi) \\ \sin(\omega - \varphi) & 0 & \cos(\omega - \varphi) \end{pmatrix}$
$\varphi\kappa\omega/119$	$\kappa = 270^\circ$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \omega \cos \varphi - \sin \omega \sin \varphi & 0 & -\cos \omega \sin \varphi - \sin \omega \cos \varphi \\ -\sin \omega \cos \varphi - \cos \omega \sin \varphi & 0 & -\sin \omega \sin \varphi + \cos \omega \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\omega + \varphi) & 0 & -\sin(\omega + \varphi) \\ -\sin(\omega + \varphi) & 0 & \cos(\omega + \varphi) \end{pmatrix}$

$\omega\kappa\tilde{\omega}/120$	$\kappa = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \sin \omega & -\cos \tilde{\omega} \sin \omega - \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & \sin \tilde{\omega} \cos \omega + \cos \tilde{\omega} \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} + \omega) & -\sin(\tilde{\omega} + \omega) \\ 0 & \sin(\tilde{\omega} + \omega) & \cos(\tilde{\omega} + \omega) \end{pmatrix}$
$\omega\kappa\tilde{\omega}/120$	$\kappa = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \sin \omega & \cos \tilde{\omega} \sin \omega - \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & -\sin \tilde{\omega} \cos \omega + \cos \tilde{\omega} \sin \omega & \sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\tilde{\omega} - \omega) & -\sin(\tilde{\omega} - \omega) \\ 0 & -\sin(\tilde{\omega} - \omega) & \cos(\tilde{\omega} - \omega) \end{pmatrix}$
$\varphi\omega\tilde{\varphi}/121$	$\omega = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi + \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tilde{\varphi} \cos \varphi - \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & \sin(\tilde{\varphi} + \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) \end{pmatrix}$
$\varphi\omega\tilde{\varphi}/121$	$\omega = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi + \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi - \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin \tilde{\varphi} \cos \varphi + \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\sin \tilde{\varphi} \sin \varphi - \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & -\sin(\tilde{\varphi} - \varphi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & -\cos(\tilde{\varphi} - \varphi) \end{pmatrix}$
$\varphi\kappa\tilde{\varphi}/122$	$\kappa = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi + \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tilde{\varphi} \cos \varphi - \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & \sin(\tilde{\varphi} + \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) \end{pmatrix}$
$\varphi\kappa\tilde{\varphi}/122$	$\kappa = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -\cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\cos \tilde{\varphi} \sin \varphi + \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi - \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & \sin(\tilde{\varphi} - \varphi) \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & \cos(\tilde{\varphi} - \varphi) \end{pmatrix}$
$\kappa\omega\tilde{\kappa}/123$	$\omega = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \sin \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa + \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & -\sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ \sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\kappa\omega\tilde{\kappa}/123$	$\omega = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa + \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \sin \kappa + \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa - \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa - \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & \sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ \sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & -\cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\kappa\varphi\tilde{\kappa}/124$	$\varphi = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \sin \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa + \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & -\sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ \sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\kappa\varphi\tilde{\kappa}/124$	$\varphi = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -\cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ -\sin \tilde{\kappa} \cos \kappa + \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & -\sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ -\sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & \cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\omega\varphi\tilde{\omega}/131$	$\varphi = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \sin \omega & \cos \tilde{\omega} \sin \omega + \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & -\sin \tilde{\omega} \cos \omega - \cos \tilde{\omega} \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} + \omega) & \sin(\tilde{\omega} + \omega) \\ 0 & -\sin(\tilde{\omega} + \omega) & \cos(\tilde{\omega} + \omega) \end{pmatrix}$
$\omega\varphi\tilde{\omega}/131$	$\varphi = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\omega} \cos \omega + \sin \tilde{\omega} \sin \omega & \cos \tilde{\omega} \sin \omega - \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & -\sin \tilde{\omega} \cos \omega + \cos \tilde{\omega} \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega - \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} - \omega) & -\sin(\tilde{\omega} - \omega) \\ 0 & -\sin(\tilde{\omega} - \omega) & -\cos(\tilde{\omega} - \omega) \end{pmatrix}$
$\omega\kappa\tilde{\omega}/132$	$\kappa = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \sin \omega & \cos \tilde{\omega} \sin \omega + \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & -\sin \tilde{\omega} \cos \omega - \cos \tilde{\omega} \sin \omega & -\sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\omega} + \omega) & \sin(\tilde{\omega} + \omega) \\ 0 & -\sin(\tilde{\omega} + \omega) & \cos(\tilde{\omega} + \omega) \end{pmatrix}$
$\omega\kappa\tilde{\omega}/132$	$\kappa = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \tilde{\omega} \cos \omega - \sin \tilde{\omega} \sin \omega & -\cos \tilde{\omega} \sin \omega + \sin \tilde{\omega} \cos \omega \\ 0 & \sin \tilde{\omega} \cos \omega - \cos \tilde{\omega} \sin \omega & \sin \tilde{\omega} \sin \omega + \cos \tilde{\omega} \cos \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\tilde{\omega} - \omega) & \sin(\tilde{\omega} - \omega) \\ 0 & \sin(\tilde{\omega} - \omega) & \cos(\tilde{\omega} - \omega) \end{pmatrix}$
$\varphi\omega\tilde{\varphi}/133$	$\omega = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\cos \tilde{\varphi} \sin \varphi - \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi + \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & -\sin(\tilde{\varphi} + \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) \end{pmatrix}$
$\varphi\omega\tilde{\varphi}/133$	$\omega = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi + \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\cos \tilde{\varphi} \sin \varphi + \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi - \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\sin \tilde{\varphi} \sin \varphi - \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & \sin(\tilde{\varphi} - \varphi) \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & -\cos(\tilde{\varphi} - \varphi) \end{pmatrix}$
$\varphi\kappa\tilde{\varphi}/134$	$\kappa = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\cos \tilde{\varphi} \sin \varphi - \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi + \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & -\sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & -\sin(\tilde{\varphi} + \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\tilde{\varphi} + \varphi) & 0 & \cos(\tilde{\varphi} + \varphi) \end{pmatrix}$

$\varphi\kappa\tilde{\varphi}/134$	$\kappa = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -\cos \tilde{\varphi} \cos \varphi - \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi - \sin \tilde{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin \tilde{\varphi} \cos \varphi + \cos \tilde{\varphi} \sin \varphi & 0 & \sin \tilde{\varphi} \sin \varphi + \cos \tilde{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & -\sin(\tilde{\varphi} - \varphi) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\tilde{\varphi} - \varphi) & 0 & \cos(\tilde{\varphi} - \varphi) \end{pmatrix}$
$\kappa\omega\tilde{\kappa}/135$	$\omega = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa + \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ -\sin \tilde{\kappa} \cos \kappa - \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & \sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ -\sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\kappa\omega\tilde{\kappa}/135$	$\omega = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa + \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa - \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ -\sin \tilde{\kappa} \cos \kappa + \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa - \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & -\sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ -\sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & -\cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\kappa\varphi\tilde{\kappa}/136$	$\varphi = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa + \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ -\sin \tilde{\kappa} \cos \kappa - \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & \sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ -\sin(\tilde{\kappa} + \kappa) & \cos(\tilde{\kappa} + \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\kappa\varphi\tilde{\kappa}/136$	$\varphi = 180^\circ$	$\begin{pmatrix} -\cos \tilde{\kappa} \cos \kappa - \sin \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\cos \tilde{\kappa} \sin \kappa + \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ \sin \tilde{\kappa} \cos \kappa - \cos \tilde{\kappa} \sin \kappa & -\sin \tilde{\kappa} \sin \kappa + \cos \tilde{\kappa} \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & \sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ \sin(\tilde{\kappa} - \kappa) & \cos(\tilde{\kappa} - \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$