



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Mestrado em Física

Bifurcações Dinâmicas em Circuitos Eletrônicos

Heloisa Helena dos Santos Onias

Dissertação de Mestrado

Recife
Agosto de 2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BIFURCAÇÕES DINÂMICAS EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS

por

Heloisa Helena dos Santos Onias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. José Roberto Rios Leite (DF-UFPE)
Prof. Flávio Menezes de Aguiar (DF-UFPE)
Prof. Marcos César Santos Oriá (DF-UFPB)

Recife - PE, Brasil
Agosto - 2012

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno, CRB 4-1758

Onias, Heloisa Helena dos Santos.
Bifurcações dinâmicas em circuitos eletrônicos/
Heloisa Helena dos Santos Onias. – Recife: O Autor,
2012.

xi, 70 p.: fig.

Orientador: José Roberto Rios Leite.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Comportamento caótico nos sistemas. 2. Circuitos
Eletrônicos- RLD. 3. Teoria da Bifurcação. 4. Dinâmica
não linear.

I. Leite, José Roberto Rios (orientador). II. Título.

621.3192

(22. ed.)

FQ 2012-033



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-7640/2126-8449 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.ufpe.br/ppgfisica/> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Heloisa Helena dos Santos Onias

BIFURCAÇÕES DINÂMICAS EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS

A Banca Examinadora composta pelos Professores José Roberto Rios Leite (Presidente e Orientador), Prof. Flávio Menezes de Aguiar, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Prof. Marcos César Santos Oriá, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, consideram a candidata:

Aprovada Reprovada Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e nove de agosto de dois mil e doze.

Prof. Prof. José Roberto Rios Leite
Presidente e Orientador

Prof. Prof. Flávio Menezes de Aguiar

Prof. Prof. Marcos César Santos Oriá

Agradecimentos

A Deus, o autor da vida! Porque dEle, por Ele e para Ele são todas as coisas.

À minha família, em especial meus pais, Willame Onias e Helena Onias, e minha irmã Helen Onias. O amor e motivação que vocês me deram foi fundamental!

Ao Professor Rios pela orientação e apoio. A sua empolgação ao falar de física é contagiante e nos faz ver o quanto essa ciência é bonita. Aos meus colegas de laboratório Wendson, Edson e Daniel, vocês me socorreram muitas vezes quando eu estava longe e precisei de alguém para ligar/desligar os equipamentos. Hugo Andrade e Tiago Araújo, muito obrigada por ajudar a encontrar os erros nos meus programas. À Rebecca Diniz, minha companheira de estudos desde a 5^o série. À Anderson Amaral pela ajuda com o Lyx!

Agradeço ao Professor Dráulio de Araújo, chefe do laboratório de NeuroImagem Funcional do Instituto do Cérebro da UFRN, do qual sou funcionária, pela compreensão e apoio que possibilitaram a conclusão desse mestrado.

À agência de fomento CAPES.

*O cientista não estuda a natureza porque ela é útil;
ele a estuda porque ele se encanta com ela,
e ele se encanta porque ela é bela.*

—HENRI POINCARÉ

Resumo

O circuito RLD, formado por um resistor, um indutor e um diodo em série, apresenta uma dinâmica muito rica quando forçado por uma tensão externa harmônica e vem sendo estudado há décadas. Contudo, ainda existem tópicos em dinâmica não-linear sendo estudados com variantes deste circuito. Varreduras nos parâmetros de controle podem fazer com que esse sistema oscile eletronicamente entre regiões periódicas e regiões caóticas. O diodo é o elemento não linear responsável pelo surgimento do caos. Utilizando um modelo de capacitância não linear para descrever o comportamento do diodo, podemos escrever as equações para esse sistema e estudar a sua dinâmica numericamente.

Nosso principal objetivo foi o estudo de expoentes críticos complexos em bifurcações dinâmicas. Para isso, realizamos um estudo numérico do circuito RLD forçado senoidalmente utilizando como parâmetros de controle a frequência e a amplitude da tensão de entrada. Construímos, a partir das séries temporais da corrente total e da tensão no diodo, diagramas de bifurcação com diferentes cortes estroboscópicos, que apresentam cascata de dobramento de período, janelas periódicas e transição intermitente. Também realizamos estudos numéricos do comportamento da média na região de transição caos-periódico na busca de encontrar um expoente crítico característico e oscilações na média, elementos que já foram observados no mapa logístico. Não foram possíveis observar numericamente as oscilações, mas observamos um decaimento exponencial com expoente crítico de aproximadamente 0,5.

Montamos um sistema de controle, aquisição e tratamento de dados experimentais no qual é possível a realização remota de experimentos simultâneos com dois circuitos diferentes. Obtivemos diagramas de bifurcações experimentais nos quais observamos que o sistema apresenta

histerese e alta sensibilidade às condições do experimento como, por exemplo, o passo de varredura do parâmetro de controle.

Palavras-chave: Caos, Circuito RLD, Dinâmica Não Linear

Abstract

The RLD circuit, formed by a resistor, an inductor and a diode in series, displays a very rich dynamics when forced by an external harmonic voltage, and it has been studied for decades. However, there are some topics in nonlinear dynamics that are still studied with variants of this circuit nowadays. Changes in the control parameters may cause electronic oscillations between regular and chaotic regions. The diode is the nonlinear element responsible for the appearance of chaos. Using a nonlinear capacitance model to describe the behavior of the diode, we can write the equations for this system and study its dynamics numerically.

Our main objective was the study of critical exponents in complex dynamic bifurcations. For that, we did a numerical study of the RLD circuit forced sinusoidally using as control parameters the amplitude of the input voltage and the frequency. We made, from the time series obtained, bifurcation diagrams with different stroboscopic cuts, which have cascade of period-doubling, periodic windows and intermittent transition. We also did numerical studies of the average behavior in the periodic-chaos transition region searching for characteristic critical exponent and oscillations on average, elements that have been observed in the logistic map. It was not possible to observe the oscillations numerically, but we observed an exponential decay with critical exponent of approximately 0.5.

We set up a system able to control, acquire and process experimental data making it possible to perform remote simultaneous experiments with two different circuits. We have obtained experimental diagrams bifurcations in which we observe that the system has hysteresis and high sensitivity to the conditions of the experiment such as the step of scanning the control parameter.

Keywords: Chaos, RLD circuit, Nonlinear Dynamics

Conteúdo

1	Sistemas Dinâmicos	2
1.1	Análise da estabilidade	6
1.2	Bifurcação	10
1.3	Mapas	17
2	Caos	21
2.1	Caos em Mapas	25
2.2	Rotas para o Caos	26
2.2.1	Cenário de Feigenbaum via duplicação de período	27
2.2.2	Cenário de Pomeau-Mannville via intermitência	28
3	Circuito RLD	32
4	Tratamento Numérico	42
4.1	RLD Simplificado	42
4.2	Circuito RLD - Equações Não Simplificadas	49
5	Resultados Experimentais	59
6	Conclusões e Perspectivas	65
	Referências Bibliográficas	67

Lista de Figuras

1.1	Campo vetorial para o sistema $\dot{x} = \sin x$.	3
1.2	Retrato de fase que mostra a evolução temporal do sistema $\dot{x} = \sin x$ para diferentes condições iniciais.	4
1.3	Classificação da estabilidade dos elementos dinâmicos.	5
1.4	Representação do ciclo limite (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável.	6
1.5	Resumo da classificação dos pontos fixos em duas dimensões [1].	9
1.6	Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação sela nó (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.	11
1.7	Diagrama da bifurcação sela nó onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.	11
1.8	Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação sela nó em um sistema bidimensional (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.	12
1.9	Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação transcritical (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.	12
1.10	Diagrama da bifurcação transcritical onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.	13
1.11	Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação forquilha supercritical (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.	14
1.12	Diagrama da bifurcação forquilha supercritical onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.	14
1.13	Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação forquilha subcritical (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.	15
1.14	Diagrama da bifurcação forquilha subcritical onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.	15
1.15	Diagrama da bifurcação hopf. A variação do parâmetro μ faz com que o ponto fixo perca a estabilidade juntamente com o aparecimento de uma órbita estável. Figura retirada de [1].	16
1.16	Um ponto fixo estável sofre uma bifurcação de hopf de (a)→(b) e em seguida uma bifurcação de duplicação de período de (b)→(c). Figura retirada de [1].	17
1.17	Multiplicadores de Floquet no plano complexo e a determinação da estabilidade do ponto fixo: (a) nó estável (b) nó instável (c) espiral estável (d) espiral instável (e) ponto de sela (f) ponto de sela.	18
1.18	Diagrama stair-step aplicado no mapa (em vermelho) para condições iniciais próximas a um ponto fixo (a) instável e (b) estável.	19

1.19	Mapa de primeira e segunda iterada (a) antes e (b) depois da bifurcação por dobramento de período.	20
1.20	Mapa de primeira iterada (a) antes (b) no ponto crítico e (c) depois da bifurcação tangente	20
2.1	Séries temporais do Sistema de Lorenz com parâmetros de controle: $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$.	22
2.2	Atrator de Lorenz no plano xz.	23
2.3	Evolução temporal de duas trajetórias próximas com expoente de Lyapunov positivo.	24
2.4	Diagrama de bifurcação do mapa logístico.	26
2.5	Cascata de dobramento de período.	27
2.6	Tipos de intermitência e sua associação com a passagem dos autovalores da matriz floquet pelo círculo unitário e as bifurcações.	28
2.7	Comportamento do mapa (em vermelho) próximo a uma bifurcação tangente. Em (a) é possível observar que a existência dos pontos fixos está condicionada ao valor de ε . Em (b) é possível observar a formação de um canal no qual o sistema apresenta um comportamento quasi-periódico, conhecido como fase laminar.	29
2.8	Diagrama de bifurcação e média do mapa logístico.	30
2.9	Gráfico da média no mapa logístico na janela de período 7 e fit.	31
3.1	Circuito RLD em série.	32
3.2	Bandas de energia do condutor, do semicondutor e do isolante.	33
3.3	Rede cristalina de Si, em (a) puro, em (b) com impureza tipo doadora e em (c) com impureza tipo aceitadora.	34
3.4	Surgimento dos níveis de energia na banda proibida devido às impurezas no semicondutor: (a) impureza do tipo doadora (b) impureza do tipo aceitadora.	35
3.5	(a) Junção PN (b) Zona de Depleção (c) Distribuição da densidade de cargas na junção (d) Campo elétrico na junção (e) Potencial interno da junção.	36
3.6	Variação do potencial interno da junção de acordo com uma tensão externa aplicada: (a) Polarização Inversa (b) Polarização Direta.	37
3.7	Modelo do diodo em um circuito: o diodo é tratado como um capacitor de capacitância não linear C em paralelo com uma fonte de corrente.	39
4.1	Séries temporais obtidas com o amortecimento $a=0,75$. Em (a) temos a corrente total I e em (b) a carga Q.	43
4.2	Diagrama de Bifurcação obtido com máximos da carga Q usando como parâmetro a amplitude na tensão de entrada A_0 com amortecimento de $a=0,75$.	44
4.3	Diagrama de Bifurcação obtido com mínimos da carga Q usando como parâmetro a amplitude na tensão de entrada A_0 com amortecimento de $a=0,75$.	45
4.4	Diagrama de Bifurcação obtido com máximos da corrente total I usando como parâmetro a amplitude na tensão A_0 com amortecimento de $a=0,75$.	45

- 4.5 Diagrama de Bifurcação obtido com mínimos da corrente total I usando como parâmetro a amplitude na tensão A_0 com amortecimento de $a=0,75$. 46
- 4.6 (a) Diagrama de bifurcação dos máximos da carga Q próximo à janela de período 3 utilizando como parâmetro de controle a amplitude da tensão de entrada A_0 com amortecimento $a = 0,75$. (b) Mapa de retorno do terceiro máximo da carga Q . 47
- 4.7 Média calculada com aproximadamente 35000 máximos da carga Q próximo à janela periódica 3 utilizando como parâmetro a amplitude da tensão de entrada A_0 . Em vermelho, o ajuste feito utilizando a equação. 4.2 48
- 4.8 Série temporal ilustrando a seleção dos mínimos da corrente I para a construção do diagrama de bifurcação. 50
- 4.9 Série temporal ilustrando a aquisição dos máximos da tensão no diodo V_d para a construção do diagrama de bifurcação. 50
- 4.10 Série temporal da tensão de entrada V_g ilustrando os cortes estroboscópicos para a seleção dos pontos e construção dos diagramas de bifurcação. Os pontos selecionados foram: o valor da corrente total e da tensão no diodo quando a tensão de entrada era máxima ($I_{V_{gMAX}}$ e $V_{dV_{gMAX}}$) e quando a tensão de entrada era zero e crescente ($I_{V_{gZERO}}$ e $V_{dV_{gZERO}}$). 51
- 4.11 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os mínimos da corrente total do circuito. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$. 52
- 4.12 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os pontos da corrente total do circuito no momento em que a tensão de entrada era máxima. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$. 52
- 4.13 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os pontos da corrente total do circuito no momento em que a tensão de entrada era zero e crescente. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$. 53
- 4.14 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os máximos da tensão no diodo. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$. 53
- 4.15 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os pontos da tensão no diodo no momento em que a tensão de entrada era zero e crescente. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$. 54

- 4.16 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os pontos da tensão no diodo no momento em que a tensão de entrada era máxima. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$. 54
- 4.17 Média calculada com aproximadamente 7500 máximos da tensão no diodo utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle na região de transição caos-periódica próximo à janela de período 4. Em vermelho está representado o ajuste segundo da equação 4.4. 55
- 4.18 Média calculada com aproximadamente 7500 máximos da tensão no diodo utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle na região de transição caos-periódica próximo à janela de período 5. Em vermelho está representado o ajuste segundo da equação 4.4. 56
- 4.19 Média calculada com aproximadamente 7500 máximos da tensão no diodo utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle na região de transição caos-periódica próximo à janela de período 6. Em vermelho está representado o ajuste segundo da equação 4.4. 56
- 4.20 Diagrama de bifurcação utilizando a frequência como parâmetro. 57
- 4.21 (a) Diagrama de bifurcação utilizando a frequência como parâmetro. (b) Média na janela de período 10 utilizando a frequência como parâmetro 58
- 5.1 Foto da montagem experimental do circuito RLD. 59
- 5.2 Ilustração da forma como o osciloscópio captura as séries temporais. Os retângulos trasejados correspondem às janelas de captura. 60
- 5.3 Ressonância no circuito RLD para baixas amplitudes da tensão de entrada. 62
- 5.4 Diagrama de bifurcação dos máximos da tensão no diodo com a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle com $f=120\text{kHz}$. O passo utilizado foi de 0.001V e a aquisição dos dados ocorreu durante 30 horas. 62
- 5.5 Diagrama de bifurcação com os máximos da tensão no diodo e utilizando como parâmetro a frequência. A amplitude da tensão de entrada foi $1,5\text{V}$ e o passo da variação da frequência foi 130 Hz . 63
- 5.6 Diagrama de bifurcação com histerese obtida com os máximos da tensão no diodo utilizando como parâmetro a frequência. 64
- 5.7 Diagrama de bifurcação mostrando a sensibilidade ao passo escolhido para a varredura do parâmetro. Em preto, o diagrama foi obtido com o passo de variação da frequência de 130 Hz e em vermelho o passo foi de 40 Hz . Os dois gráficos possuíam a mesma frequência inicial e a mesma amplitude da tensão de entrada que foi $1,5 \text{ V}$. 64

Apresentação

A natureza, sempre cercada de beleza e mistério, tem sido o objeto de admiração e fonte de inspiração para os cientistas, que buscam não apenas entendê-la, mas também imitá-la. Nesse processo, a observação de fenômenos como o caos nos surpreende e nos mostra que até mesmo os sistemas considerados simples em sua constituição carregam em si uma enorme complexidade de efeitos. O sistema abordado nessa dissertação se enquadra perfeitamente nessa descrição: o circuito RLD (resistor, indutor, diodo) em série possui uma montagem experimental simples, mas uma rica dinâmica.

Essa dissertação está dividida em quatro partes: na primeira parte estarão descritos os conceitos básicos de dinâmica não linear, caos, e do circuito RLD. Na segunda parte mostraremos os resultados obtidos utilizando a simulação numérica para esse circuito, na terceira parte traremos os resultados experimentais e na quarta parte teremos as conclusões e perspectivas.

CAPÍTULO 1

Sistemas Dinâmicos

Sistema pode ser definido como um conjunto de elementos que interagem de forma a existir uma relação de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem nele. Quando uma ou mais grandezas que caracterizam o sistema depende do tempo, ele é chamado Sistema Dinâmico. Leibniz foi o primeiro a usar a palavra dinâmica nesse contexto [2]. Quando a descrição matemática do sistema possui termos não lineares, ele deixa de obedecer ao princípio da superposição ¹ e é dito sistema dinâmico não-linear.

Sistemas não lineares são, em geral, muito complicados de serem resolvidos analiticamente e, além disso, a solução pode ser de difícil interpretação[3]. Tomando por exemplo um sistema descrito pela equação não linear

$$\dot{x} = \sin x \tag{1.1}$$

cuja solução é

$$t = \ln \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x} \tag{1.2}$$

Podemos perceber que apesar de conseguirmos resolver o problema analiticamente, a solução não nos fornece intuição com relação ao comportamento desse sistema. Para obter informações qualitativas do sistema, podemos abordá-lo utilizando uma outra estratégia. A equação (1.1) representa um campo vetorial em uma linha que pode ser observado no gráfico \dot{x} por x :

¹Princípio da superposição: se x_1 e x_2 são soluções, então qualquer combinação linear $c_1x_1 + c_2x_2$ também é solução do sistema.

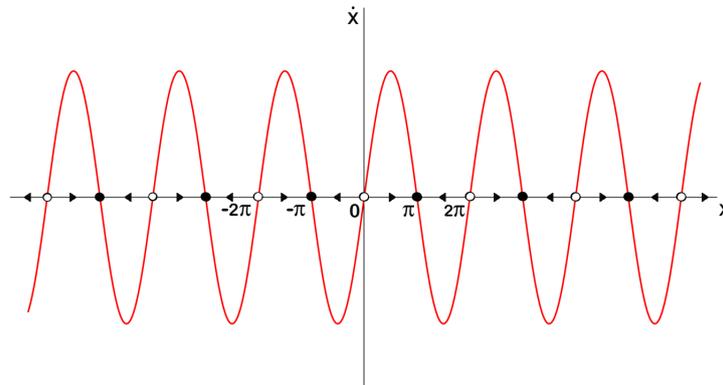


Figura 1.1 Campo vetorial para o sistema $\dot{x} = \sin x$.

Observando o sinal de \dot{x} podemos analisar para onde o campo vetorial “flui” (representado graficamente pelas setas). Em regiões em que $\dot{x} > 0$ o fluxo é para direita, em regiões onde $\dot{x} < 0$ o fluxo é para esquerda e nos pontos em que $\dot{x} = 0$ não existe fluxo para nenhum dos lados. Esses pontos em que $\dot{x} = 0$ são conhecidos como pontos fixos e são classificados em dois grupos: estáveis (também conhecidos como atratores ou sumidouros) e instáveis (também conhecidos como repulsores ou fontes), representados graficamente pelos pontos cheios e vazios respectivamente. Utilizando essa idéia de fluxo, podemos ver que a evolução temporal leva o sistema a buscar os pontos fixos estáveis (os pontos fixos instáveis são muito sensíveis a pequenas perturbações).

O conhecimento das condições iniciais nos permite construir a solução para $t > 0$. Essa solução pode ser representada por uma curva, chamada de trajetória, no espaço das coordenadas, chamado de espaço de fase. Utilizando o teorema da existência e unicidade² podemos afirmar que as trajetórias no espaço de fase nunca se cruzam[3]. Quando representamos várias trajetórias, ou seja, várias curvas de condições iniciais diferentes, em um mesmo espaço de fase ele passa a ser chamado de retrato de fase. Na figura 1.2 está esboçado o retrato de fase do sistema descrito na equação 1.1.

²O teorema da existência e unicidade garante que, para $\dot{x} = f(x)$ com $f(x)$ e todas as suas derivadas contínuas para x em um intervalo aberto D , existe apenas uma única solução $x(t)$ para uma condição inicial $x(0) = x_0$ dentro do intervalo D . [3]

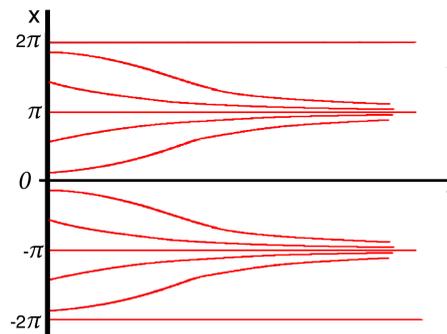


Figura 1.2 Retrato de fase que mostra a evolução temporal do sistema $\dot{x} = \sin x$ para diferentes condições iniciais.

Essa idéia pode ser estendida para um problema com N dimensões. Para isso, precisamos reorganizar as equações de forma a obter um sistema com N equações de primeira ordem³

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases} \quad (1.3)$$

ou, de forma vetorial,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}[\vec{x}(t)] \quad (1.4)$$

No caso do tempo ser uma variável discreta, a descrição da evolução temporal do sistema é feito por equações de diferenças ou mapas discretos, tema que abordaremos mais adiante.

Para o caso unidimensional, como o descrito pela equação 1.1, o sistema só pode apresentar na sua dinâmica pontos fixos estáveis e instáveis, contudo, em sistemas com maiores dimensões apresentam uma grande variedade de elementos. De uma forma geral, podemos classificar da

³No caso de um sistema não-autônomo (que depende explicitamente de t) é necessário torná-lo autônomo. Isso é feito escrevendo mais uma equação: $x_{N+1} = t$. O custo para tornar o sistema autônomo é aumentar a dimensão do sistema.

seguinte maneira os elementos que aparecem na dinâmica dos sistemas:

- **Atratores:** Pontos para os quais as trajetórias, que passam suficientemente perto, convergem. No caso unidimensional, são os pontos fixos estáveis, para mais dimensões, podem ser os nós estáveis (figura 1.3a) e espiras estáveis (figura 1.3b). A representação desses elementos é feita por pontos ou linhas cheias.
- **Repulsores:** Pontos para os quais as trajetórias, que passam suficientemente perto, divergem. No caso unidimensional, são os pontos fixos instáveis, para mais dimensões, podem ser os nós instáveis (figura 1.3c) e espiras instáveis (figura 1.3d). A representação desses elementos é feita por pontos vazios ou linhas tracejadas.
- **Pontos de Sela:** Pontos para os quais as trajetórias, que passam suficientemente perto, convergem ou divergem a depender da região. Só existem em sistemas de pelo menos duas dimensões (figura 1.3e).

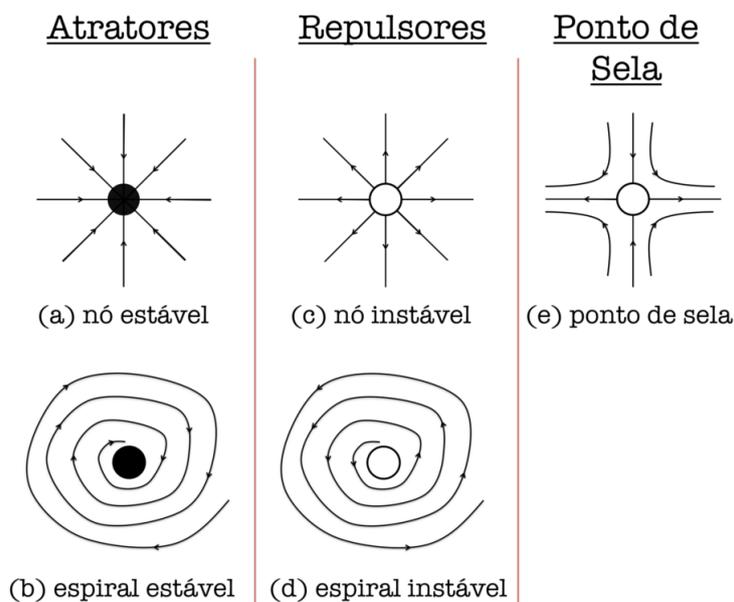


Figura 1.3 Classificação da estabilidade dos elementos dinâmicos.

Para sistemas com pelo menos duas dimensões é possível a existência de orbitas fechadas para as quais as trajetórias convergem ou divergem. Essas órbitas são chamadas de ciclo limite e podem ser estáveis, instáveis ou semi-estáveis como representado na figura 1.4:

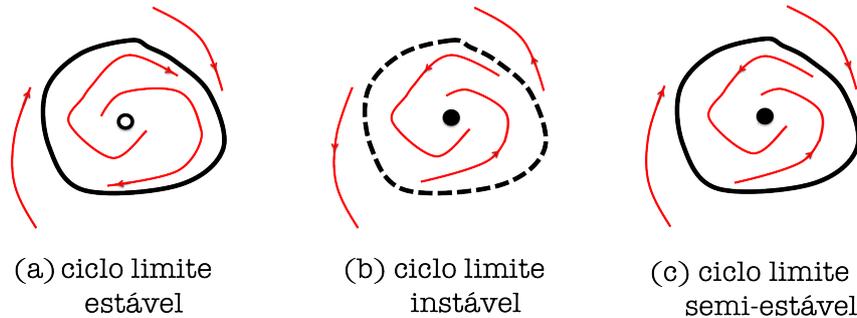


Figura 1.4 Representação do ciclo limite (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável.

A classificação da estabilidade dos elementos dinâmicos apresentados até agora foi feita baseada numa análise local, via perturbações nas condições iniciais. Um outro conceito de estabilidade é o de estabilidade estrutural que observa a robustez do retrato de fase sob a ação de perturbação no campo vetorial completo, que é feita adicionando-se um termo perturbativo na equação diferencial que descreve o sistema[1]. Um sistema é dito estruturalmente estável se, com a adição do termo perturbativo, o fluxo resultante é topologicamente equivalente àquele das equações sem perturbação.

1.1 Análise da estabilidade

Em sistemas não lineares a análise da estabilidade⁴ é feita através da linearização, via expansão em série de Taylor próximo ao ponto fixo do qual se deseja conhecer a estabilidade.

⁴aqui estamos tratando de estabilidade local

Tomando como exemplo um sistema bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.5)$$

expandindo em torno do ponto fixo (x^*, y^*)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \text{termos de ordem superior} \\ \dot{y} = g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \text{termos de ordem superior} \end{cases} \quad (1.6)$$

com,

$$\begin{cases} x = x^* + \delta x \\ y = y^* + \delta y \end{cases}$$

e utilizando,

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0, \quad \dot{x} = \dot{\delta x} \text{ e } \dot{y} = \dot{\delta y}$$

obtemos, após desprezar os termos de ordem superior:

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*, y^*} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x^*, y^*} \delta y = a \delta x + b \delta y \\ \dot{\delta y} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x^*, y^*} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x^*, y^*} \delta y = c \delta x + d \delta y \end{cases} \quad (1.7)$$

onde os coeficientes a, b, c e d são as derivadas parciais de $f(x, y)$ e $g(x, y)$ calculadas no ponto fixo (x^*, y^*) . Reescrevendo a equação 1.7 de forma vetorial:

$$\frac{d}{dt} \vec{\delta X}(t) = J \vec{\delta X}(t) \quad (1.8)$$

onde J é a matriz dos coeficientes, chamada de matriz jacobiana.

As soluções $\delta x(t)$ e $\delta y(t)$ obtidas a partir do sistema de equações 1.7 nos fornece o comportamento local próximo ao ponto fixo. A estabilidade do ponto fixo é obtida através dos

autovalores da matriz jacobiana:

$$\det(J - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \quad (1.9)$$

Essa equação possui duas raízes λ_1 e λ_2 que podem ser escritas de forma genérica:

$$\lambda_j = \text{Re}(\lambda_j) + i\text{Im}(\lambda_j) \quad (1.10)$$

onde Re e Im representam respectivamente as partes real e imaginária de λ_j .

Admitindo que a solução de 1.7 é do tipo:

$$\vec{\delta X}(t) = \vec{\delta X}(0)e^{\lambda t} = \vec{\delta X}(0)e^{\text{Re}(\lambda)t}e^{i\text{Im}(\lambda)t} \quad (1.11)$$

É possível perceber então que a estabilidade da solução depende basicamente de $\text{Re}(\lambda)$: se $\text{Re}(\lambda) > 0$, $e^{\text{Re}(\lambda)t}$ cresce continuamente e com isso $\vec{\delta X}(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$; em outras palavras, as trajetórias próximas ao ponto fixo irão afastar-se dele[1]. Para $\text{Re}(\lambda) < 0$ $\vec{\delta X}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, as trajetórias próximas ao ponto fixo convergem para ele. Para conhecer o comportamento próximo ao ponto fixo é preciso conhecer as diferentes combinações dos autovalores de λ_j :

1. λ_1 e λ_2 reais, distintos, não nulos e de mesmo sinal: o ponto fixo é um nó e sua estabilidade é determinada pelos sinais de λ_1 e λ_2 . Para λ_1 e $\lambda_2 > 0$ as trajetórias se afastam e o ponto fixo é instável. Para λ_1 e $\lambda_2 < 0$ as trajetórias convergem e o ponto fixo é estável. Os autovetores da matriz J irão determinar as direções de aproximação/afastamento das trajetórias.
2. λ_1 e λ_2 reais, iguais e diferente de zero: o ponto fixo é um nó impróprio. Nesse caso a matriz Jacobiana possui o autovalor degenerado e assim existe apenas uma direção de aproximação/afastamento.
3. λ_1 e λ_2 reais, distintos e sinais diferentes: o ponto fixo é tipo sela. As trajetórias aproximam-se por uma direção por uma direção e afastam-se por outra.

4. λ_1 e λ_2 complexos conjugados: a trajetória é uma espiral que converge (espiral estável) para o ponto se a parte real de λ_j for negativa e diverge (espiral instável) se for positiva. Se a parte real for nula as trajetórias são tipo centro.

A figura 1.5 resume os casos descritos até agora.

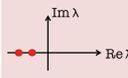
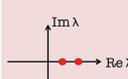
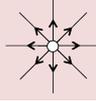
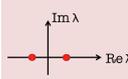
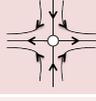
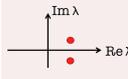
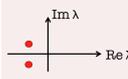
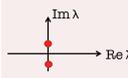
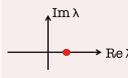
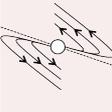
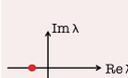
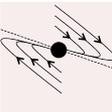
Autovalores	Sinal da Parte Real	Representação no Plano Complexo	Ponto Fixo	Estabilidade	Exemplo
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó	estável	
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó	instável	
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela	instável	
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (Complexos Conjugados)	Positiva		espiral	instável	
	Negativa		espiral	estável	
	Nula		centro (caso degenerado)	estável	
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	Nula	CASOS DEGENERADOS			
$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	Positiva		nó impróprio	instável	
	Negativa		nó impróprio	estável	

Figura 1.5 Resumo da classificação dos pontos fixos em duas dimensões [1].

1.2 Bifurcação

Até aqui observamos o comportamento das trajetórias para diferentes condições iniciais. Contudo, a variação dos parâmetros de controle do sistema podem alterar a dinâmica e mudar a posição, a estabilidade dos pontos fixos e fazer com que outros surjam ou sumam. Essas mudanças de comportamento no sistema são chamadas de bifurcação e o valor do parâmetro no qual a mudança ocorre é chamado de ponto de bifurcação. Existem vários tipos de bifurcação e para cada uma delas podemos escrever equações características que descrevem a dinâmica na vizinhança do ponto fixo com o parâmetro próximo ao ponto de bifurcação. Essas equações são chamadas de forma normal e é possível chegar a elas expandindo as equações que descrevem o modelo do sistema em série de Taylor em torno do ponto fixo. Passaremos agora a apresentar algumas das principais bifurcações.

- Bifurcação Sela-Nó:

$$\text{Forma Normal: } \dot{x} = \mu + x^2$$

Essa bifurcação, também chamada de bifurcação tangente, é caracterizada pelo aparecimento/desaparecimento de pontos fixos. Para determinados valores do parâmetro μ o sistema não apresenta pontos fixos, variando esse parâmetro, após um valor crítico surgem um ponto fixo estável e um ponto fixo instável como mostrado na figura 1.6.

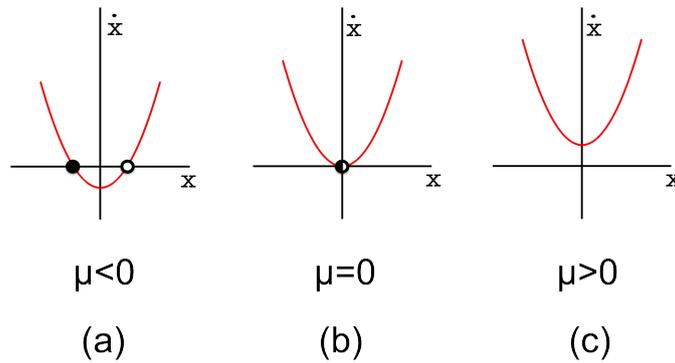


Figura 1.6 Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação sela nó (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.

O gráfico que mostra a mudança de comportamento do sistema com a variação do parâmetro μ é chamado de diagrama de bifurcação (figura 1.7), onde a linha tracejada representa uma solução instável e a linha cheia representa uma solução estável.

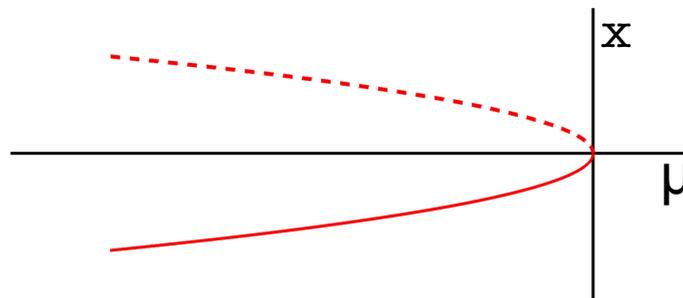


Figura 1.7 Diagrama da bifurcação sela nó onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.

Observando a forma normal em duas dimensões é possível compreender o porquê dessa bifurcação ser conhecida como sela nó:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.12)$$

Nesse caso, quando $\mu < 0$ o sistema apresenta um nó estável e um ponto de sela. Aumentando o valor do parâmetro μ esses pontos desaparecem, como mostrado na figura 1.8:

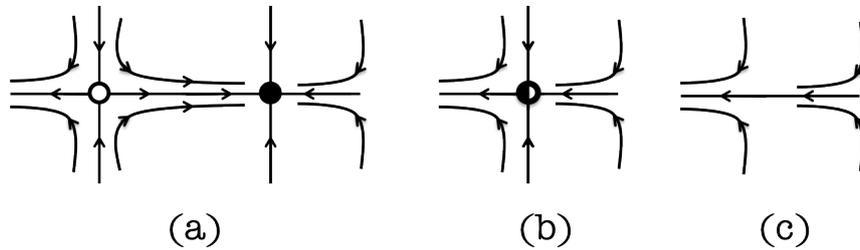


Figura 1.8 Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação sela nó em um sistema bidimensional (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.

- Bifurcação Transcrítica:

$$\text{Forma Normal: } \dot{x} = \mu x - x^2$$

Essa bifurcação é caracterizada pela troca de estabilidade dos pontos fixos, com a variação do parâmetro μ (figura 1.9):

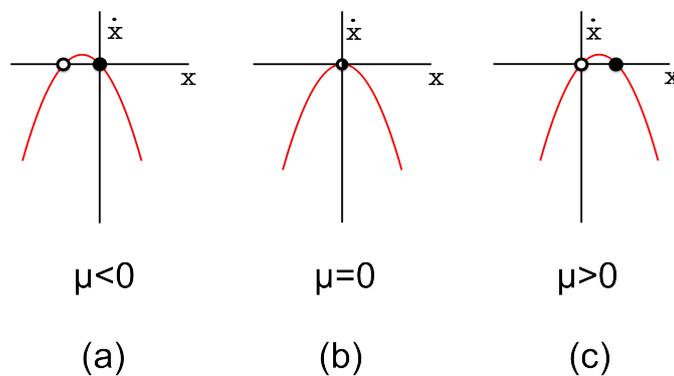


Figura 1.9 Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação transcritical (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.

Quando $\mu > \mu_c$ ocorre a troca de estabilidade, como mostrado no diagrama de bifurcação (figura 1.10):

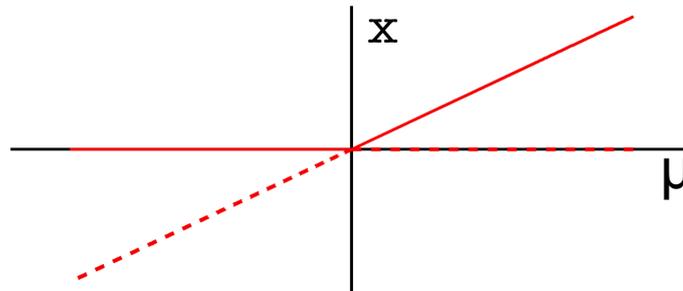


Figura 1.10 Diagrama da bifurcação transcritical onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.

- Bifurcação Forquilha:

Essa bifurcação é caracterizada pelo aparecimento/desaparecimento de pontos fixos e troca de estabilidade. Ela é classificada em dois tipos: supercrítica e subcrítica.

No caso supercrítico:

$$\text{Forma Normal: } \dot{x} = \mu x - x^3$$

Variando o valor do parâmetro μ o sistema pode apresentar um ponto fixo estável ou dois pontos fixos estáveis e um instável como mostrado na figura 1.11:

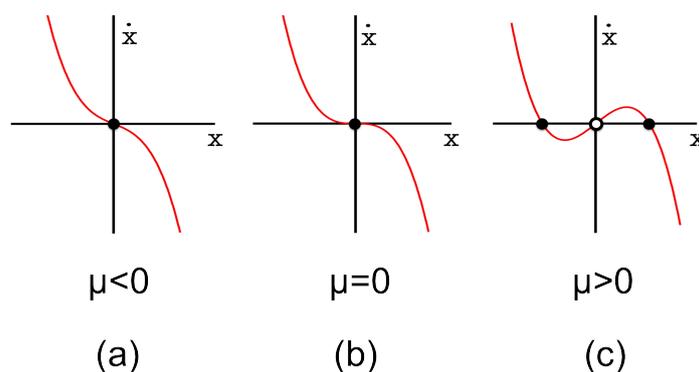


Figura 1.11 Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação forquilha supercrítica (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.

O diagrama de bifurcação está representado na figura 1.12:

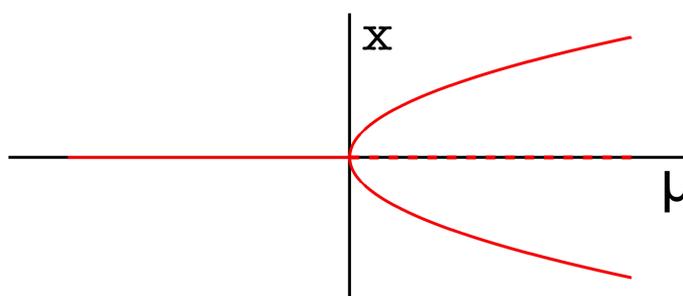


Figura 1.12 Diagrama da bifurcação forquilha supercrítica onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.

Para o subcrítico:

$$\text{Forma Normal: } \dot{x} = \mu x + x^3$$

Variando o valor do parâmetro μ o sistema pode apresentar um ponto fixo estável e dois pontos fixos instáveis ou um ponto fixo instável como mostrado na figura 1.13 e no diagrama de bifurcação (figura 1.14):

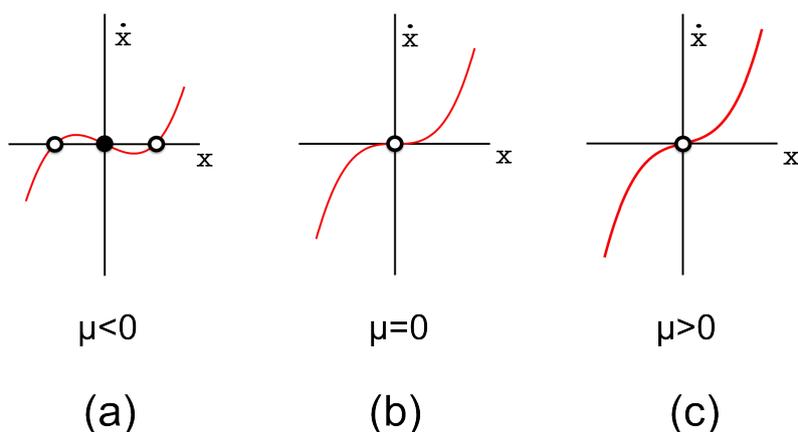


Figura 1.13 Retratos de fase unidimensionais para a bifurcação forquilha subcrítica (a) antes, (b) no instante e (c) após a bifurcação.

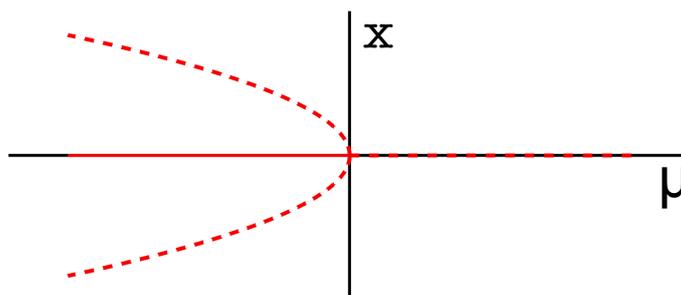


Figura 1.14 Diagrama da bifurcação forquilha subcrítica onde a linha trasejada representa os pontos fixos instáveis e a linha cheia representa os pontos fixos estáveis.

- Bifurcação de Hopf

Essa bifurcação ocorre apenas em sistemas com mais de uma dimensão. Ela é caracterizada pela passagem dos autovalores⁵ da matriz jacobiana pelo eixo imaginário, no ponto crítico os autovalores são puramente imaginários. Assim como na bifurcação forquilha, a bifurcação de Hopf possui os casos supercrítico e subcrítico.

⁵Os autovalores nesse caso são complexos conjugados.

No caso supercrítico o sistema possui para $\mu < \mu_c$ um ponto fixo estável. Quando $\mu > \mu_c$ o ponto fixo perde a estabilidade e um ciclo limite estável surge envolvendo-o (figura 1.15). No caso subcrítico o sistema possui para $\mu < \mu_c$ um ciclo limite instável que colapsa em um nó estável quando $\mu > \mu_c$ [1].

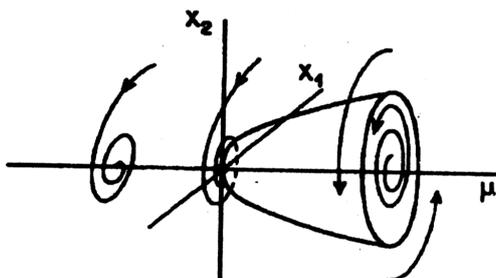


Figura 1.15 Diagrama da bifurcação hopf. A variação do parâmetro μ faz com que o ponto fixo perca a estabilidade juntamente com o aparecimento de uma órbita estável. Figura retirada de [1].

- Bifurcação de Duplicação de Período

Essa bifurcação ocorre apenas em sistemas com pelo menos três dimensões. Ela ocorre da seguinte maneira: após um ponto fixo sofrer uma bifurcação de hopf supercrítica, continua-se a aumentar o valor do parâmetro de controle e então o ciclo limite torna-se instável e uma órbita de período duplo aparece. Na figura 1.16 é possível observar o que ocorre nesse tipo de bifurcação:

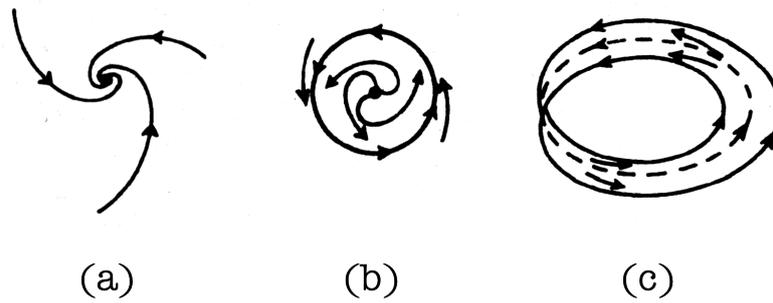


Figura 1.16 Um ponto fixo estável sofre uma bifurcação de hopf de (a)→(b) e em seguida uma bifurcação de duplicação de período de (b)→(c). Figura retirada de [1].

A bifurcação por duplicação de período também apresenta as formas supercrítica e subcrítica.

1.3 Mapas

Mapas são sistemas dinâmicos no qual o tempo é uma variável discreta e a evolução temporal da variável x_{t+1} depende do seu valor no instante anterior x_t e pode ser escrita de forma geral como:

$$x_{t+1} = M(x_t) \quad (1.13)$$

onde os pontos obtidos a partir de x_0 ($x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$) definem uma trajetória. Conceito de ponto fixo estende-se para o caso discreto e pode ser escrito da seguinte maneira:

$$x^* = M(x^*) \quad (1.14)$$

Também é possível investigar a estabilidade do ponto fixo pelos autovalores λ_i da matriz jacobiana, denominados de multiplicadores de Floquet. Se $|\lambda_i| < 1, i=1, \dots, N^6$, o ponto fixo é

⁶Onde N é a dimensão do sistema.

estável; se $|\lambda_i| > 1$, $i=1, \dots, N$, o ponto fixo é instável; de outra forma é um ponto de sela⁷. Os valores dos multiplicadores de Floquet podem ser complexos conjugados, nesse caso a análise da estabilidade ainda é feita da mesma forma, tomando o valor absoluto e comparando com a unidade. Na figura 1.16 mostramos as várias combinações para dois multiplicadores de Floquet no plano complexo e representamos o círculo de raio unitário que é utilizado para comparação na determinação da sua estabilidade.

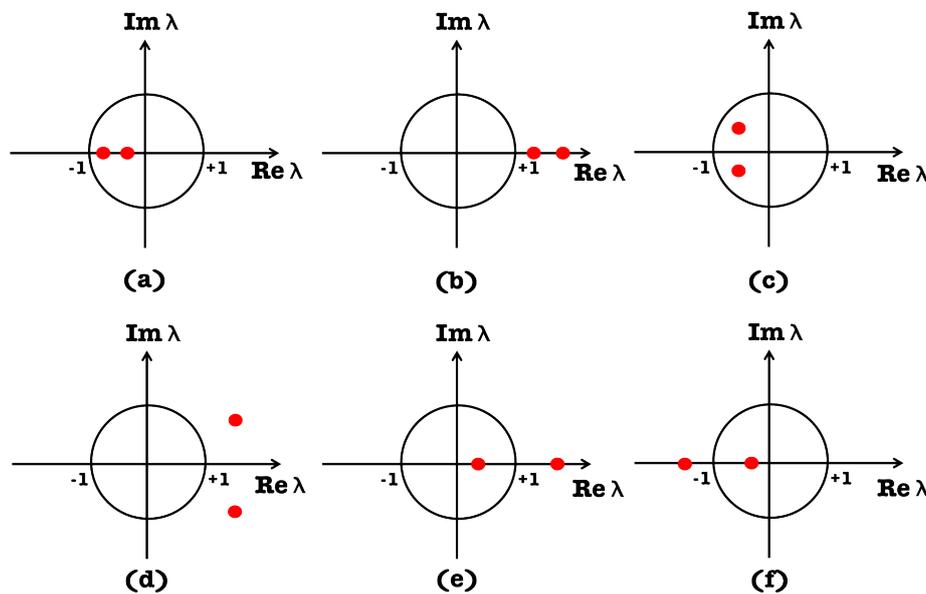


Figura 1.17 Multiplicadores de Floquet no plano complexo e a determinação da estabilidade do ponto fixo: (a) nó estável (b) nó instável (c) espiral estável (d) espiral instável (e) ponto de sela (f) ponto de sela.

A órbita para uma dada condição inicial x_0 pode ser obtida geometricamente a partir do diagrama “stair-step” (figura 1.18). Esse diagrama é construído da seguinte forma: traçamos o gráfico $x_{n+1} = M(x_n)$ e a reta $x_{n+1} = x_n$ então com $x_n = x_0$ traçamos uma linha vertical até o gráfico para obter o x_{n+1} , depois traçamos uma reta horizontal até a reta $x_{n+1} = x_n$ para que x_1 torne-se a condição inicial para se obter o x_2 . Repetindo-se esse processo obtemos a órbita para a uma dada condição e, quando x_0 é escolhido próximo ao ponto fixo, é possível obter sua estabilidade.

⁷Para $|\lambda_i| = 1$ é necessário uma análise não linear.

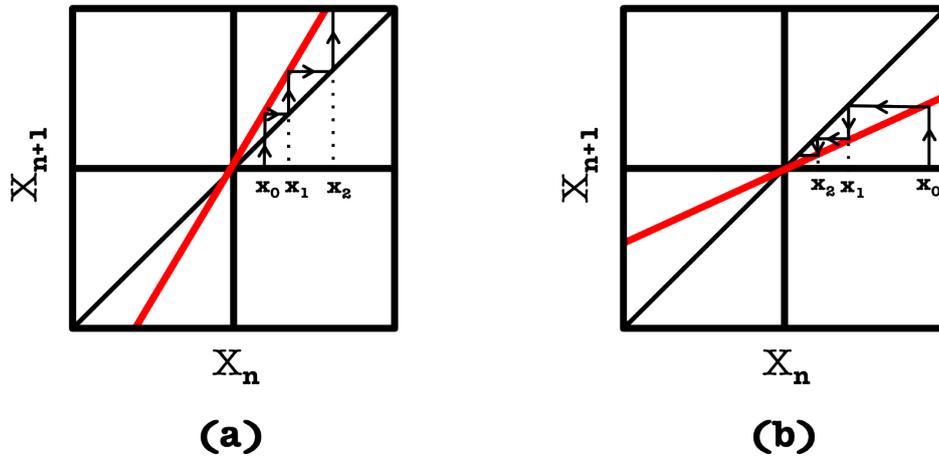


Figura 1.18 Diagrama stair-step aplicado no mapa (em vermelho) para condições iniciais próximas a um ponto fixo (a) instável e (b) estável.

Com relação às bifurcações, os mapas, diferentemente dos sistemas contínuos, já apresentam uma dinâmica rica com apenas uma dimensão. A bifurcação por dobramento de período, que em sistemas contínuos precisam de pelo menos três dimensões, já ocorre em mapas unidimensionais. Nesse caso um ponto fixo estável com período 1 (figura 1.19a) torna-se instável simultaneamente ao aparecimento de um ponto de período 2 (figura 1.19b). Um ponto fixo x^* é dito de período n quando são necessárias no mínimo n aplicações do mapa para que ele volte a ter x^* como resultado:

$$M(M(M(\dots M(x^*)\dots))) = M^n(x^*) = x^* \quad (1.15)$$

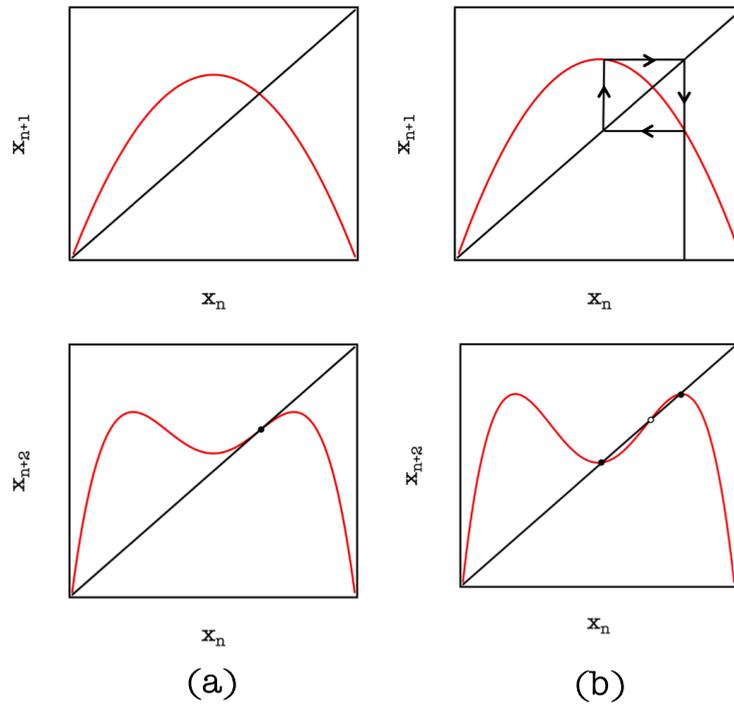


Figura 1.19 Mapa de primeira e segunda iterada (a) antes e (b) depois da bifurcação por dobramento de período.

Outra bifurcação presente em mapas é a bifurcação tangente, ela é análoga à bifurcação sela nó. Antes no ponto de bifurcação, o gráfico do mapa tangencia a reta $x_{n+1} = x_n$ e depois disso, variando o parâmetro surgem dois pontos fixos, um estável e um instável, como mostrado na figura 1.20:

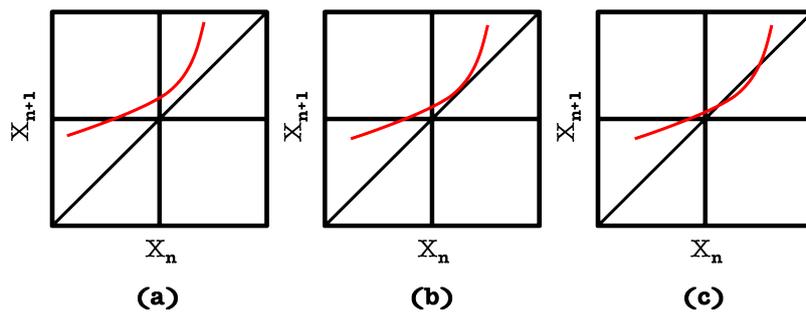


Figura 1.20 Mapa de primeira iterada (a) antes (b) no ponto crítico e (c) depois da bifurcação tangente

Após essa breve apresentação de alguns conceitos gerais de dinâmica não-linear, passaremos agora a tratar de uma forma mais específica dos conceitos relacionados à dinâmica caótica.

CAPÍTULO 2

Caos

Um dos primeiros sistemas não lineares a ser estudado foi o problema da atração gravitacional de 3 corpos. Poincaré dedicou-se ao estudo desse problema no final do século XIX e concluiu que o comportamento geral de um corpo sob a influência gravitacional de outros dois muito mais pesados era imprevisível. Ele descreveu o seu resultado da seguinte maneira:

“ Uma causa muito diminuta, que nos escapa, determina um efeito considerável, que não podemos deixar de ver, e então dizemos que este efeito é devido ao acaso. Se pudéssemos conhecer exatamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, seríamos capazes de prever exatamente a situação deste mesmo universo no instante subsequente. Mas mesmo quando as leis naturais já não tivessem mais segredo para nós, só poderíamos conhecer a situação inicial aproximadamente. Se isto nos permite antecipar a situação subsequente com o mesmo grau de aproximação, ficamos satisfeitos, dizemos que o fenômeno foi previsto, que é governado por leis. Mas nem sempre isso ocorre; pode acontecer que diferenças mínimas nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes no fenômeno final; um erro mínimo nas primeiras produziria um erro enorme neste último. A previsão torna-se impossível e temos o fenômeno do acaso”.[4]

Podemos então descrever o caos como um comportamento aperiódico e com alta sensibilidade às condições iniciais, que existe apenas em sistemas não lineares, que torna impossível a previsão do estado do sistema apesar do mesmo ser determinístico. O ambiente científico nessa época era extremamente determinista e, apesar dos resultados apresentados por Poincaré, a idéia da imprevisibilidade em sistemas determinísticos não teve aceitação.[4] Apenas em 1963 essa idéia ganhou força com os estudos de Lorenz sobre problemas atmosféricos. Uti-

lizando um computador, Lorenz observou que uma pequena variação nas condições iniciais poderia acarretar grandes diferenças na evolução do sistema. As equações que descrevem esse problema (de maneira simplificada) são::

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.1}$$

Utilizando os seguintes valores para os parâmetros de controle: $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$ obtemos as séries temporais mostradas na figura 2.1, onde é possível observar que a solução oscila irregularmente.

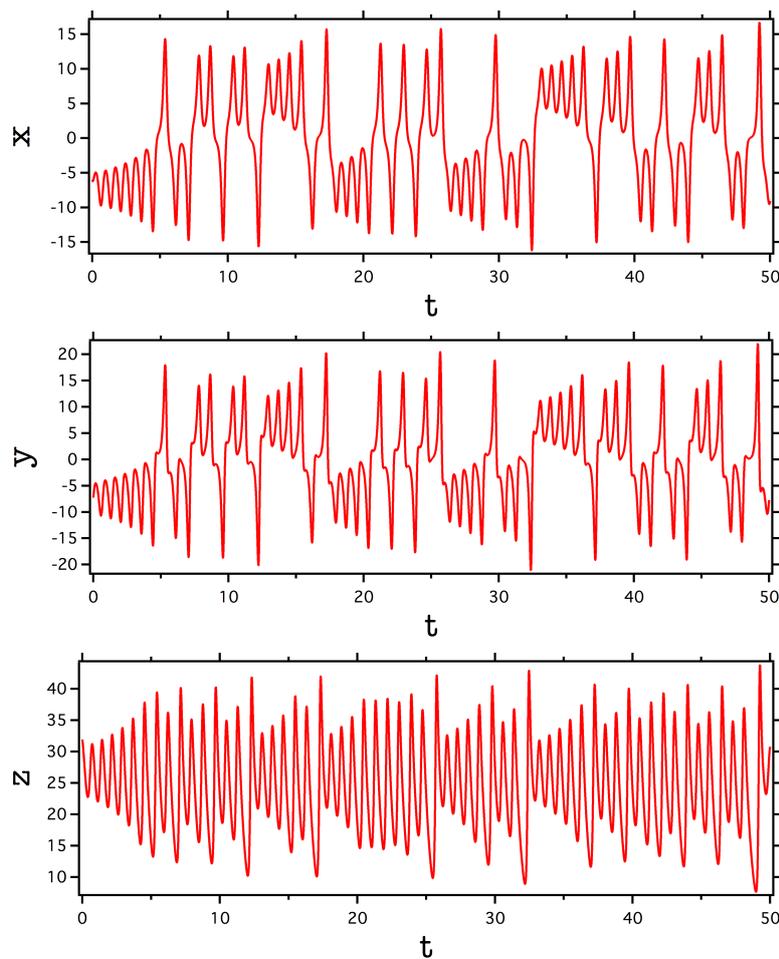


Figura 2.1 Séries temporais do Sistema de Lorenz com parâmetros de controle: $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$.

Plotando o gráfico z vs. x como mostrado na figura 2.2 obtemos o atrator de Lorenz que possui uma trajetória caótica que espirala de um lado para o outro sem que seja possível prever o número de voltas dadas em cada uma das espirais[3].

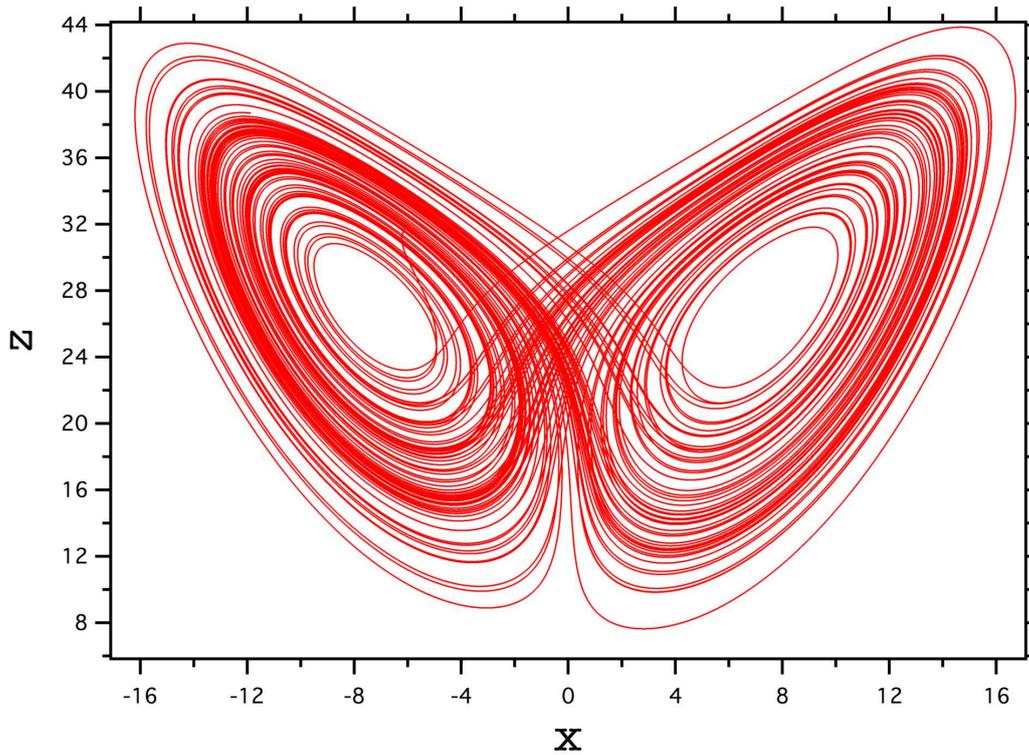


Figura 2.2 Atrator de Lorenz no plano xz .

A forte sensibilidade às condições iniciais é fundamental para que o sistema apresente caos e essa sensibilidade pode ser medida através do expoente de Lyapunov. Duas condições iniciais próximas

$$\vec{x}_1(0) \text{ e } \vec{x}_2(0) = \vec{x}_1(0) + \delta(0) \quad (2.2)$$

possuem após sua evolução temporal uma separação $\delta(t)$

$$\vec{x}_1(t) \text{ e } \vec{x}_2(t) = \vec{x}_1(t) + \delta(t) \quad (2.3)$$

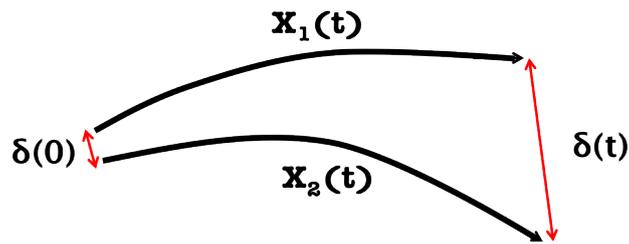


Figura 2.3 Evolução temporal de duas trajetórias próximas com expoente de Lyapunov positivo.

O expoente de Lyapunov λ é então definido como a velocidade com que essas órbitas se separam:

$$|\delta(t)| \sim |\delta(0)| e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

Para cada dimensão do sistema existe um expoente de Lyapunov associado. Quando $\lambda < 0$ a distância entre os pontos \vec{x}_1 e \vec{x}_2 é atenuada exponencialmente, quando $\lambda > 0$ a distância entre os pontos \vec{x}_1 e \vec{x}_2 é acentuada exponencialmente. Para que o sistema apresente caos é necessário a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

O comportamento caótico ocorre apenas em sistemas não lineares com pelo menos três dimensões¹. O teorema de Poincaré Bendixson limita as possibilidades da dinâmica e impossibilita a existência do caos em duas dimensões. Esse teorema mostra que, para fluxos em duas dimensões, se uma trajetória está confinada em uma região fechada, limitada e que não contém pontos fixos em seu interior, então essa trajetória ou é uma órbita fechada ou tende para uma órbita fechada. Portanto é impossível a existência de caos em sistemas com duas dimensões[3]. Em sistemas discretos entretanto, é possível a obtenção de caos com apenas uma dimensão desde que o mesmo seja não inversível. Para mapas inversíveis é possível a existência do caos em sistemas com duas dimensões.

¹A necessidade de três dimensões ocorre apenas em sistemas contínuos, em sistemas discretos é possível obter caos com menos dimensões, caso que trataremos mais a frente.

2.1 Caos em Mapas

Dentre os vários sistemas que apresentam comportamento caótico, destacaremos o mapa logístico por ser um sistema simples mas que apresenta uma grande riqueza na sua dinâmica. O mapa logístico é um sistema unidimensional e unimodal² descrito pela equação³

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i) \quad (2.5)$$

Quando o parâmetro de controle r está no intervalo $0 \leq r \leq 4$ e $x_0 \in [0, 1]$ então $x_i \in [0, 1] \forall i$, ou seja, para uma condição inicial dentro desse intervalo a órbita fica confinada nele; esse é portanto o intervalo de interesse para o estudo da dinâmica. Iniciaremos buscando os pontos fixos desse sistema:

$$x^* = M(x^*) = rx^*(1 - x^*) \quad (2.6)$$

que apresenta uma solução trivial nula $x_1^* = 0$ e uma solução não trivial $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ que possuem autovalores associados $\lambda_1 = r$ e $\lambda_2 = 2 - r$. Dessa maneira, a origem é estável para $0 \leq r < 1$ e instável para $r > 1$. O ponto fixo x_2^* é estável apenas no intervalo $1 < r < 3$. Para $r=1$ o sistema sofre uma bifurcação transcítica, ocorrendo uma troca de estabilidade entre os pontos fixos. Uma nova bifurcação ocorre em $r=3$, mas dessa vez a bifurcação é por duplicação de período.

Variando o valor do parâmetro r novas bifurcações por duplicação de período ocorrem gerando órbitas de período 4,8,16,32... A distância entre as bifurcações vai diminuindo até chegar num ponto de acumulação onde infinitas órbitas de diferentes períodos coexistem. Nesse ponto

²Mapa $x_{i+1} = M(x_i)$ é dito unimodal se M é diferenciável, com um único máximo, com a existência de fronteiras que contém dentro de si todos os possíveis resultados da aplicação do mapa tornado possível uma normalização de forma que o mapa pode ser representado no intervalo $[0, 1]$ e $M(0)=M(1)=0$.

³A equação 2.5 é uma versão normalizada da equação que surgiu inicialmente para descrever o modelo populacional de Verhulst. Em 1976 R.M. May publicou um artigo intitulado “*Simple mathematical models with very complicated dynamics*” no qual descreve as principais características dos sistemas dinâmicos não lineares conhecidos até então presentes nesse mapa tornando-o largamente conhecido.

as trajetórias são aperiódicas e extremamente sensíveis às condições iniciais, ou seja, o sistema passa a apresentar um comportamento caótico. Na figura 2.4 podemos observar essas bifurcações e o surgimento de regiões caóticas interrompidas por janelas periódicas:

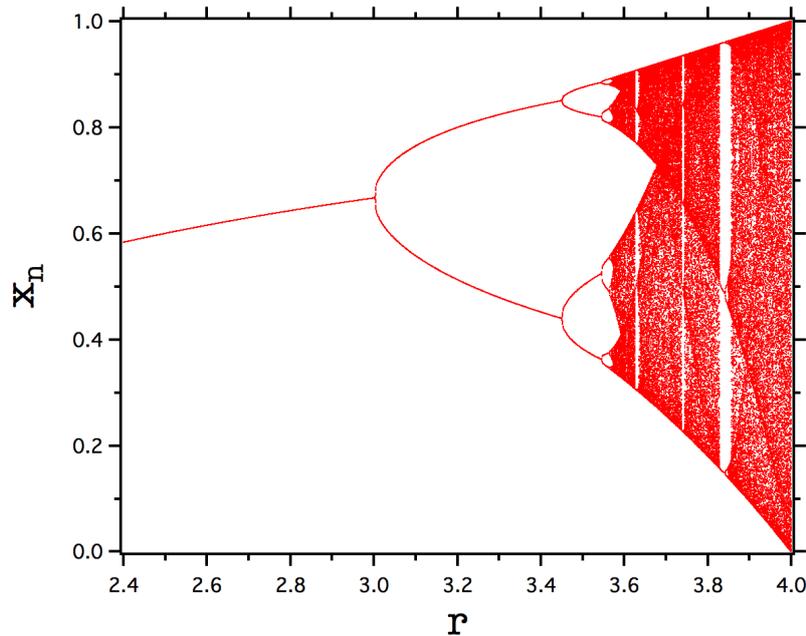


Figura 2.4 Diagrama de bifurcação do mapa logístico.

2.2 Rotas para o Caos

As rotas para o caos estão associadas a uma sequência de bifurcações que fazem com que o sistema passe de um regime periódico para um caótico. Dentre as várias rotas, abordaremos apenas duas: cenário de Pomeau-Mannville via intermitência e o cenário de Feigenbaum via duplicação de período.

2.2.1 Cenário de Feigenbaum via duplicação de período

A rota para o caos via duplicação de período, presente no mapa logístico, está entre as mais conhecidas e estudadas. Ela é caracterizada por múltiplas ocorrências seguidas da bifurcação por duplicação de período, sobre a qual tratamos no capítulo anterior, até chegarem ao ponto de acumulação r_∞ que só pode ser obtido numericamente. Após o ponto de acumulação o sistema apresenta o comportamento caótico como mostrado na figura 2.5:

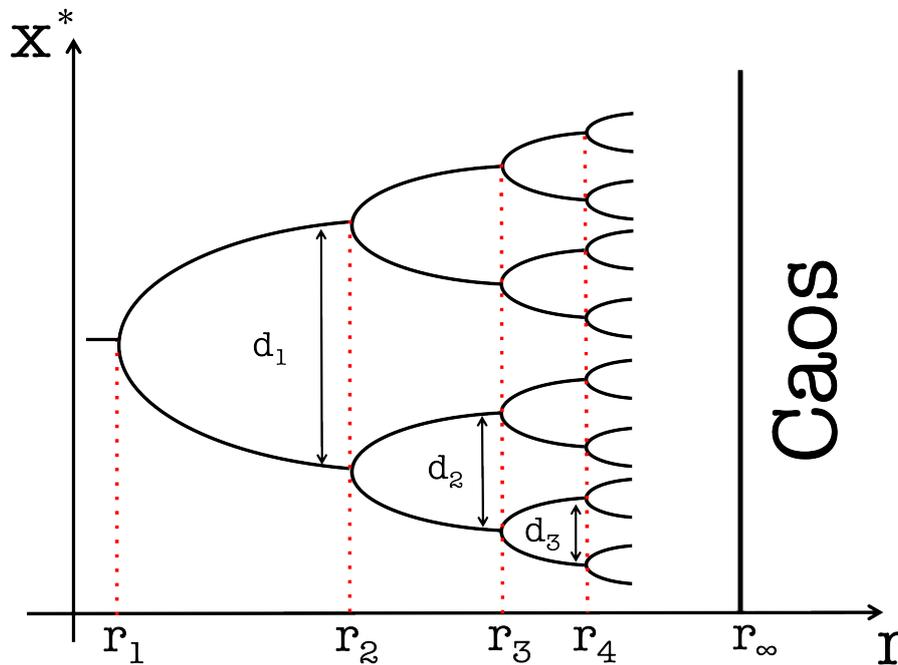


Figura 2.5 Cascata de dobramento de período.

Sistemas com esse tipo de rota para o caos parecem apresentar algumas “propriedades universais” que são as leis de escala e seqüências universais. Uma das leis de escala está ligada à “velocidade” com que o sistema atinge o caos e relaciona dois valores consecutivos do parâmetro nos quais ocorreram a bifurcação:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta = 4,6692016... \quad (2.7)$$

Uma outra lei de escala relaciona as distâncias d_n dos pontos fixos:

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$$

$$\alpha = 2.5029078\dots, n \gg 1$$
(2.8)

Essas propriedades universais foram observadas também no circuito RLD [5].

2.2.2 Cenário de Pomeau-Mannville via intermitência

A intermitência é caracterizada por um comportamento periódico interrompido por regiões de comportamento caótico. Pomeau e Mannville classificaram três formas diferentes de um sistema apresentar intermitência, cada uma delas associada com uma bifurcação e uma passagem dos autovalores da matriz de Floquet pelo círculo de raio unitário no plano complexo: no tipo I os autovalores cruzam em $+1$ e está ligado à bifurcação tangente (sela-nó), no tipo II os dois autovalores complexos conjugados cruzam o círculo unitário simultaneamente e está ligado à bifurcação de Hopf subcrítica e no tipo III os autovalores cruzam em -1 e está ligado à bifurcação por dobramento de período inversa como mostrado na figura 2.6.

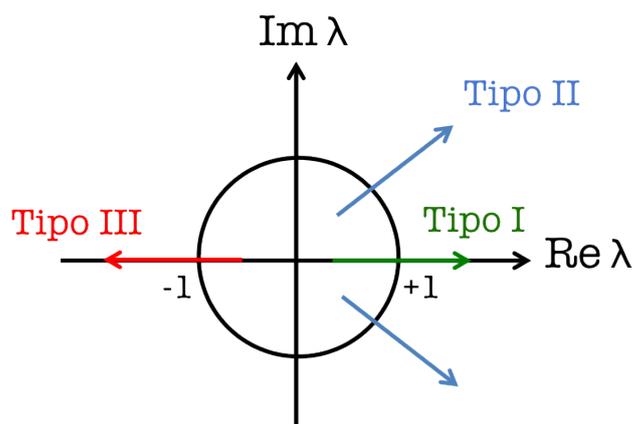


Figura 2.6 Tipos de intermitência e sua associação com a passagem dos autovalores da matriz floquet pelo círculo unitário e as bifurcações.

A intermitência tipo I está presente no mapa logístico e é caracterizada pela ocorrência uma desestabilização de um ciclo limite devido ao crescimento de uma perturbação que ocorre no cruzamento do autovalor pelo círculo unitário em +1. A forma normal para esse tipo é

$$x_{n+1} = \varepsilon + x_n + x_n^2 \quad (2.9)$$

e possui como pontos fixos: $x_{1,2}^2 = \pm\sqrt{-\varepsilon}$. O sistema possui dois pontos fixos para $\varepsilon < 0$, um quando $\varepsilon = 0$ e nenhum ponto fixo quando $\varepsilon > 0$ conforme mostrado na figura 2.7. Quando ε é ligeiramente maior do que zero, o gráfico de x_{n+1} aproxima-se da reta $x_{n+1} = x_n$, ao passar por essa região o sistema apresenta um comportamento quasi-periódico, conhecido como fase laminar. Após sair dessa região o sistema comporta-se caoticamente até ser reinjetado nesse canal e voltar a ser quasi-periódico.

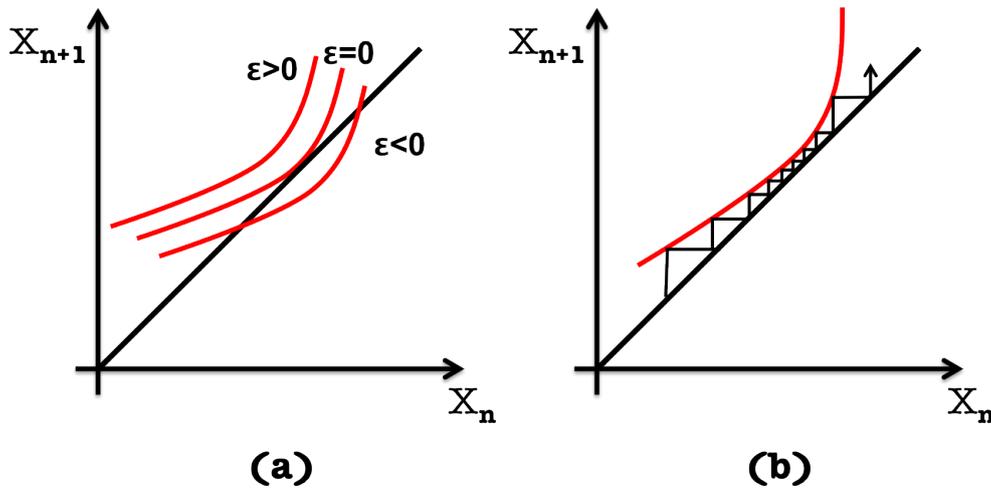


Figura 2.7 Comportamento do mapa (em vermelho) próximo a uma bifurcação tangente. Em (a) é possível observar que a existência dos pontos fixos está condicionada ao valor de ε . Em (b) é possível observar a formação de um canal no qual o sistema apresenta um comportamento quasi-periódico, conhecido como fase laminar.

Uma característica marcante estudada por Pomeau e Mannville é que a intermitência do tipo I apresenta a seguinte relação para o comprimento das fases laminares, $\langle l \rangle$:

$$\langle l \rangle = \varepsilon^{-1/2} \quad (2.10)$$

Além disso, estudos feitos observando a média da variável dinâmica na região de transição caos periódica apontam para a existência de um expoente crítico característico[6]. No mapa logístico, a média é calculada da seguinte maneira:

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \quad (2.11)$$

É possível perceber na figura 2.8 a mudança de comportamento da média quando o sistema sai da região caótica para a região periódica:

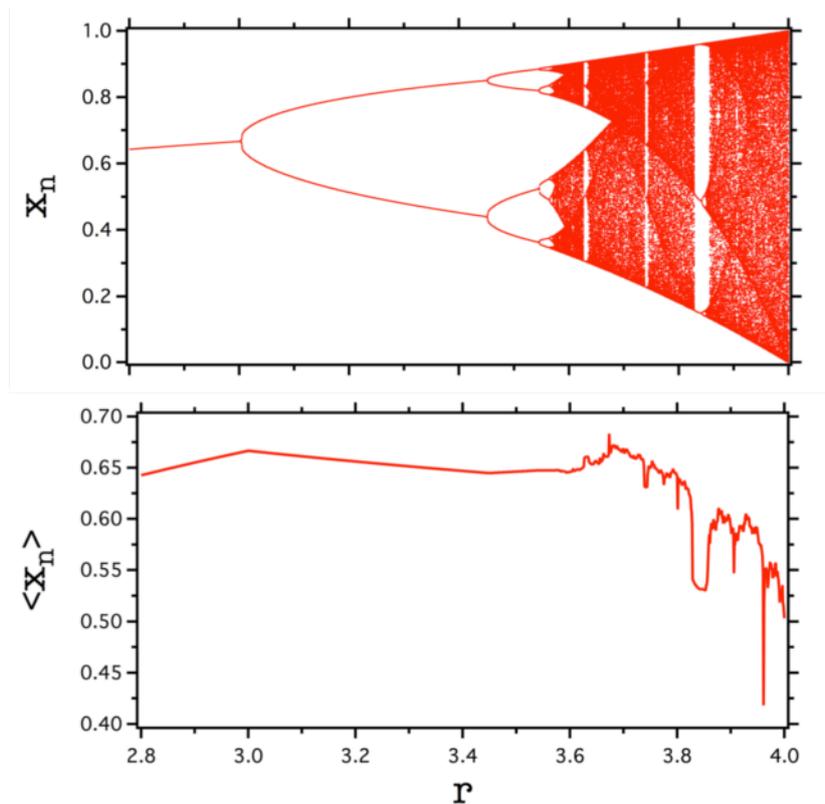


Figura 2.8 Digrama de bifurcação e média do mapa logístico.

de S. Cavalcante mostrou em [6] que na transição para a janela de período 7, que ocorre via bifurcação tangente, é possível observar na média um comportamento oscilatório e um decai-

mento com um expoente crítico característico igual a $\frac{1}{2}$. A figura 2.9 é o gráfico apresentado no artigo, onde a média foi obtida com uma condição inicial escolhida aleatoriamente no intervalo $x_0 = \frac{1}{2} \pm 0,1$, com médias calculadas com 10^7 iteradas do mapa e média entre 20 médias vizinhas. :

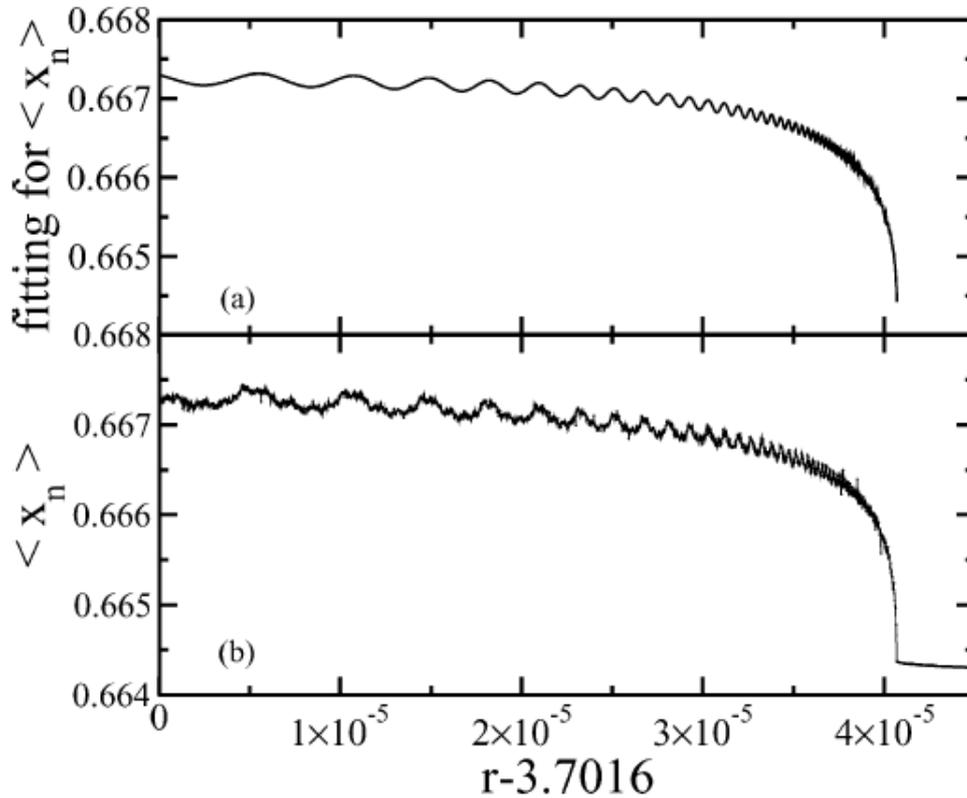


Figura 2.9 Gráfico da média no mapa logístico na janela de período 7 e fit.

O nosso interesse nessa dissertação foi observar se o circuito RLD também apresenta na média da variável dinâmica as características observadas no mapa logístico.

CAPÍTULO 3

Circuito RLD

O sistema dinâmico escolhido para ser estudado foi o circuito composto por um resistor, um indutor e um diodo em série alimentados por uma fonte de tensão alternada como o representado na figura 3.1:

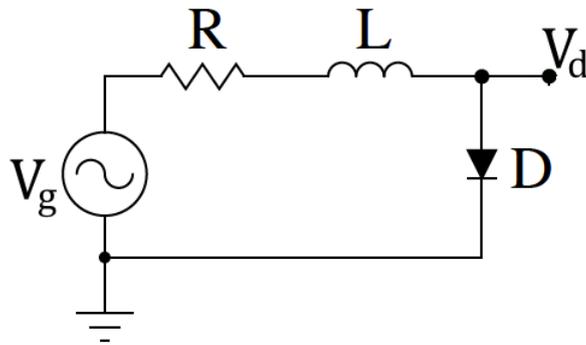


Figura 3.1 Circuito RLD em série.

Esse é um circuito que possui apenas elementos passivos mas que possui uma dinâmica rica e por isso vem sendo objeto de estudo desde a década de 80. Paul S. Linsay foi um dos primeiros a relatar a existência de dobramento de período e caos nesse sistema[7]. Ele conclui no final do seu artigo que a simplicidade desse sistema permite teste simples das teorias de comportamento caótico. Desde então vários outros estudos foram feitos utilizando o circuito RLD nos quais foram observado cascata de dobramento de período[5], janelas periódicas[5], crise[8], intermitência tipo I[9][10] e tipo III. O diodo é o o elemento responsável pela dinâmica não linear desse sistema [11] e por isso vários estudos foram feitos para tentar modelar o seu comportamento.

O diodo é um material formado por uma junção de semicondutores. Usando como parâme-

tro a condutividade elétrica, os materiais podem ser classificados em condutores, semicondutores ou isolantes. Os condutores possuem alta condutividade e apresentam superposição entre as bandas de valência e condução. Os semicondutores são materiais que possuem baixa condutividade, a banda de condução vazia, a banda de valência completamente preenchida e um gap (ou banda proibida) entre essas duas bandas. Essas também são características apresentadas pelos isolantes, a diferença entre eles é que em semicondutores o gap entre as bandas é menor e, com isso, alguns poucos elétrons podem, com a energia térmica da rede, passar da banda de valência para a de condução. A representação das bandas de energia desses materiais está representado na figura 3.2:

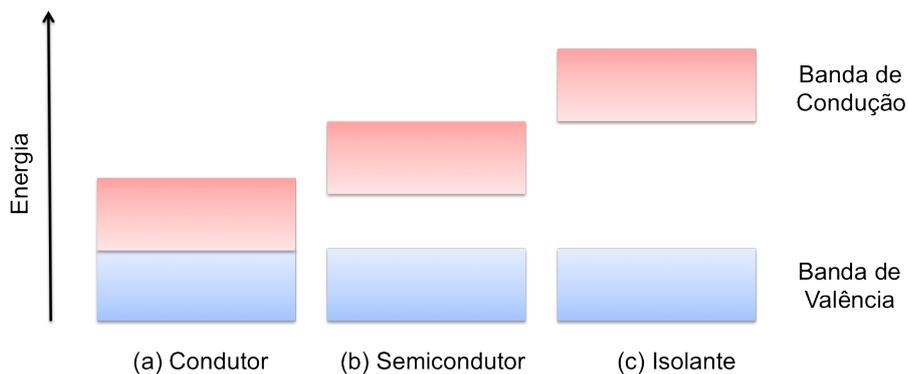


Figura 3.2 Bandas de energia do condutor, do semicondutor e do isolante.

Os semicondutores podem ser classificados como intrínsecos ou extrínsecos. Os intrínsecos são semicondutores puros, que não possuem dopagem, e os extrínsecos são aqueles que apresentam impurezas que podem ser do tipo doadoras ou aceitadoras. Para compreender essa diferença, tomemos como exemplo um semicondutor de Si. A figura 3.3a mostra uma rede pura formada por átomos de Si. Eles possuem 4 elétrons na camada de valência e por isso formam 4 ligações covalentes. Se substituirmos alguns átomos dessa rede por elementos do grupo V (P, As ou Sb), que possuem 5 elétrons na camada de valência, um elétron desse átomo ficará

fracamente ligado pois não participa de nenhuma ligação química e, por tanto, torna-se facilmente um elétron livre na rede. Esses átomos são impurezas doadoras pois eles doam elétrons para a rede, como mostrado na figura 3.3b. No caso da impureza aceitadora, a substituição de alguns átomos dessa rede é feita com elementos do grupo III (B, Al, Ga, In), que possuem 3 elétrons na camada de valência. Um dos 4 átomos de Si vizinhos ficará com a ligação covalente incompleta podendo facilmente receber um elétron de uma ligação química vizinha, formando-se assim uma lacuna (Figura 3.3c).¹

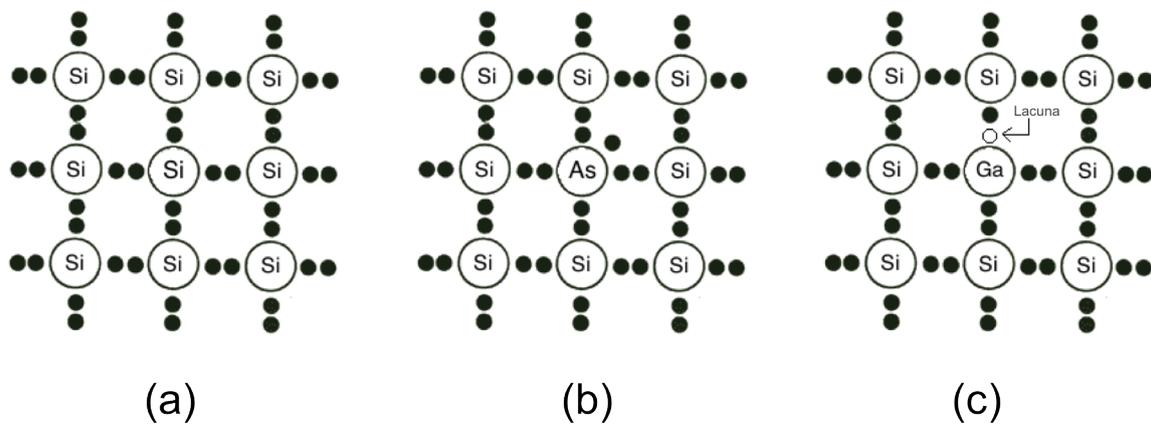


Figura 3.3 Rede cristalina de Si, em (a) puro, em (b) com impureza tipo doadora e em (c) com impureza tipo aceitadora.

Em semicondutores intrínsecos, a densidade de elétrons (definida por n) e a densidade de lacunas (definida por p) são iguais pois eles são gerados termicamente aos pares. Contudo, em semicondutores extrínsecos, a densidade de portadores (elétrons ou lacunas) muda de acordo com o tipo de impureza. Quando a dopagem é feita com impurezas doadoras, a densidade de elétrons é maior do que a densidade de lacunas ($n > p$), em outras palavras, os elétrons são os portadores majoritários e as lacunas são os portadores minoritários. Por isso, semicondutores que possuem impurezas doadoras são conhecidos como semicondutores tipo N. Nos semicondutores com impurezas aceitadoras ocorre o contrário, os portadores majoritários são as lacunas

¹Lacunas referem-se a estados da banda de valência não preenchidos por elétrons. É importante perceber que a lacuna não existe como partícula, ou entidade isolada, mas que ela surge como consequência do movimento dos elétrons na rede.

e os portadores minoritários são os elétrons, de forma que eles são conhecidos como semicondutores tipo P.

A vantagem da adição de impurezas em semicondutores é que elas geram uma perturbação no potencial periódico da rede fazendo surgir níveis de energia na banda proibida diminuindo assim o gap entre a banda de condução e a banda de valência. No caso de redes dopadas com impurezas tipo doadoras, um nível de energia descontínuo surge abaixo do mínimo da banda de condução. Em impurezas tipo aceitadoras esse nível descontínuo² surge acima da banda de valência conforme mostrado na figura 3.4:

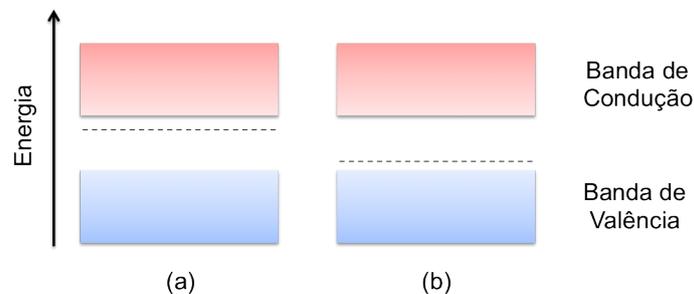


Figura 3.4 Surgimento dos níveis de energia na banda proibida devido às impurezas no semicondutor: (a) impureza do tipo doadora (b) impureza do tipo aceitadora.

Os diodos são formados por junções de semicondutores do tipo P e do tipo N, conforme a figura 3.5a. Considerando inicialmente as regiões P e N separadas, sabemos que na região P existirá excesso de buracos e na região N existirá excesso de elétrons. No instante em que juntarmos essas regiões, a variação abrupta na concentração de portadores dá origem a uma corrente, chamada de corrente de difusão³. Com isso, lacunas que estavam em excesso na região P migram para a região N e elétrons que estavam em excesso na região N migram para

²A descontinuidade desses níveis deve-se ao fato da concentração de impurezas ser muito menor do que a concentração dos átomos da rede.

³O processo de difusão ocorre com qualquer tipo de partícula que esteja em um sistema que possui diferença de concentração. A difusão é o movimento de espalhamento das partículas de regiões de maior concentração para as de menor concentração de forma a se distribuírem uniformemente no espaço.

a região P. Esse deslocamento de portadores faz com que cada região individualmente deixe de ser eletricamente neutra (a junção como toda continua neutra): no lado P da junção surge uma densidade de carga negativa e do lado N surge uma densidade de carga positiva. Essa densidade de carga está presente nos dois lados próximos à interface da junção em uma região chamada de zona de depleção (representada na figura 3.5b).

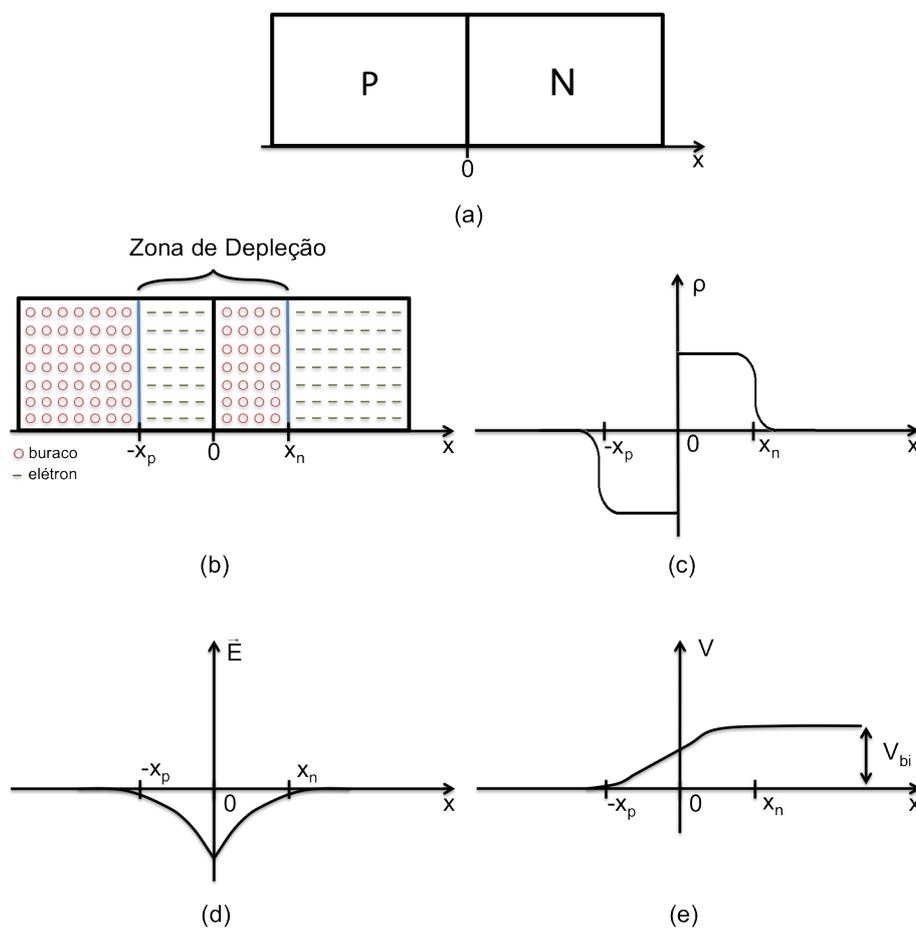


Figura 3.5 (a) Junção PN (b) Zona de Depleção (c) Distribuição da densidade de cargas na junção (d) Campo elétrico na junção (e) Potencial interno da junção.

Como consequência da quebra da neutralidade nos lados da junção, um outro fator passa a ser significativo: o acúmulo de cargas negativas no lado P e de cargas positivas do lado N

faz surgir um campo elétrico e este campo gera uma corrente, chamada corrente de deriva, que contrabalança a corrente de difusão. No equilíbrio, essas correntes são iguais (mas em sentidos opostos), fazendo com que o transporte líquido de portadores entre as regiões P e N seja nulo.⁴ Na figura 3.5 é possível observar a distribuição da densidade de cargas através da junção (c), o campo elétrico (d) e do potencial interno da junção (e).

Apesar de existir independente de uma tensão externa, o potencial interno é sensível à aplicação da tensão externa como ilustra a figura 3.6. Quando polarizado diretamente, a tensão interna é reduzida do seu valor original, facilitando a passagem de corrente pela junção, quando polarizado reversamente, a tensão interna aumenta, dificultando ao ponto de impedir a passagem de corrente.

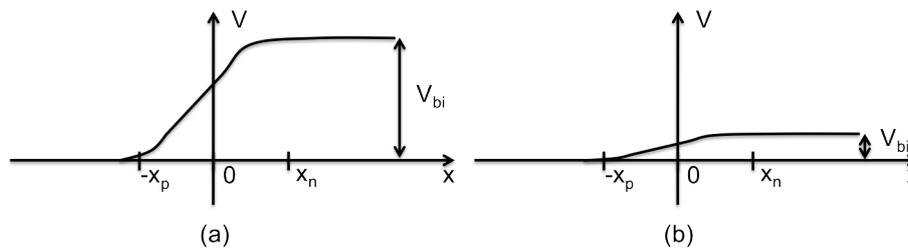


Figura 3.6 Variação do potencial interno da junção de acordo com uma tensão externa aplicada: (a) Polarização Inversa (b) Polarização Direta.

Na busca entender o comportamento do diodo no circuito, surgiram modelos que consideram diferentes efeitos. Um desses modelos foi descrito por E. R. Hunt [11] e utiliza o tempo de recuperação reversa τ_r , que é o tempo que o diodo leva para deixar de conduzir quando a tensão aplicada muda bruscamente da polarização direta para a polarização reversa. Rollins e Hunt[12] propuseram uma descrição na qual o diodo se comporta como um diodo ideal com algumas características adicionais: o diodo só conduz quando a tensão sobre ele é maior do

⁴É importante perceber que apesar do sistema estar em equilíbrio, as regiões P e N não voltam a ser neutras, o que acontece é uma estabilização do tamanho da zona de depleção e da distribuição da densidade de carga.

que a tensão de polarização V_f , enquanto não conduz o diodo é tratado como um capacitor de capacitância fixa C , quando polarizado reversamente o diodo continua conduzindo durante um tempo τ_{RR} que depende dos picos recentes da corrente e é descrito pela seguinte equação:

$$\tau_r = f(|I_m|) = \tau_m \left[1 - \exp\left(\frac{-|I_m|}{I_c}\right) \right] \quad (3.1)$$

onde $|I_m|$ é a magnitude do máximo mais recente da corrente direta e τ_m e I_c são parâmetros que descrevem um diodo em particular. Para obter as equações do circuito o tempo é dividido em intervalos quando o diodo está conduzindo ou em corte e, considerando a condição de continuidade entre esses intervalos, é possível resolvê-las analiticamente. O mapa de retorno construído com os máximos da corrente $I_{n+1} \times I_n$ é unidimensional e unimodal e por isso não exibe histerese, uma característica que o circuito apresenta. Por isso Hunt e Rollins [13] propuseram que não apenas o pico mais recente deveria ser considerado no tempo de recuperação reversa, mas que teria uma contribuição de ciclos anteriores da seguinte forma:

$$\tau_{r,n} = f(|I_m|_n) + \alpha_1 f(|I_m|_{n-1}) + \dots + \alpha_k f(|I_m|_{n-k}) \quad (3.2)$$

onde α_k pondera a contribuição dos termos e diminuem para ciclos mais distantes. Utilizando a equação 3.2 até o termo α_3 foi possível simular histerese.

Uma outra descrição do diodo é aquela que o considera o efeito capacitivo como principal responsável pelo comportamento não linear. Matsumoto, Chua e Tanaka propuseram um modelo de capacitância linear por partes, no qual o diodo possui uma capacitância C_1 quando polarizado diretamente e uma capacitância C_2 quando polarizado reversamente, com C_1 e C_2 constantes[14]. Outro modelo também considera o efeito capacitivo, mas descreve o diodo com uma capacitância não linear em paralelo com uma fonte de corrente [15, 16] conforme demonstrado da figura 3.7:

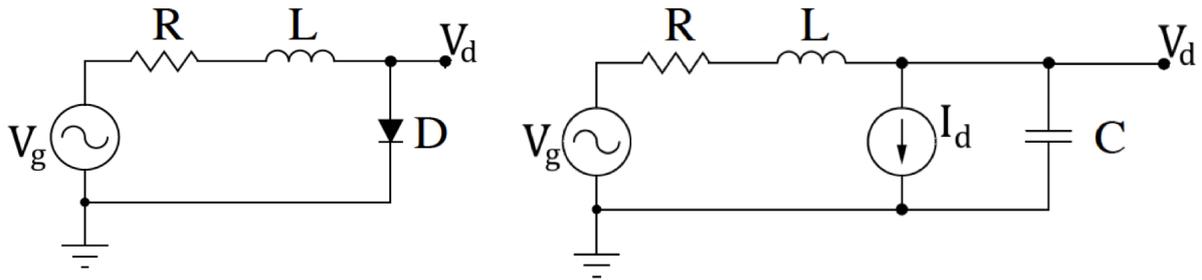


Figura 3.7 Modelo do diodo em um circuito: o diodo é tratado como um capacitor de capacitância não linear C em paralelo com uma fonte de corrente.

A corrente I_d é dada por:

$$I_d = I_S \left(e^{V_d/nV_t} - 1 \right) \quad (3.3)$$

onde I_S é a corrente de saturação reversa, pois quando polarizado reversamente a corrente no diodo tende a $-I_S$; $V_t \equiv \frac{k_B T}{e}$ é a tensão térmica; n é coeficiente de emissão e controla a inclinação da curva I_d/V_d .

O capacitor possui uma capacitância não linear da seguinte forma:

$$C = \left| \frac{dQ}{dV} \right| \quad (3.4)$$

O efeito capacitivo dos diodos de junção é resultado da contribuição de dois termos, o primeiro é a capacitância de junção, que é resultado da presença das densidades de carga na zona de depleção. Esse termo é dominante quando o diodo está reversamente polarizado e depende da tensão aplicada como descrito na equação:

$$C_j = C_{j0} \left(1 - \frac{V_d}{V_j} \right)^{-1/2} \quad (3.5)$$

onde C_{j0} é a capacitância da junção quando não há tensão externa aplicada e V_j é o potencial da junção. O segundo termo que contribui para a capacitância do diodo é a capacitância de difusão, essa decorre da densidade de portadores injetados através da junção.

$$C_d = C_{d0} e^{V_d/nV_t} \quad (3.6)$$

Dessa forma, a capacitância do diodo devido às duas contribuições é:

$$C = C_j + C_d \quad (3.7)$$

$$C = C_{j0} \left(1 - \frac{V_d}{V_j}\right)^{-1/2} + C_{d0} e^{V_d/nV_t} \quad (3.8)$$

Utilizando esse modelo para o diodo, a lei das malhas de Kirchoff e a lei dos nós, podemos então escrever as seguintes equações que descrevem o circuito RLD em série:

$$\begin{cases} \dot{i} = \frac{V_g(\theta) - RI - V_d}{L} \\ \dot{V}_d = \frac{I - I_d}{C} \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (3.9)$$

onde a ultima equação é escrita para tornar o sistema autônomo e é obtida a partir da equação para a fase da tensão de controle ($\theta = \omega t$).

Em 1985 Van Buskirk e Jeffries propuseram uma simplificação para esse sistema[17]. Reorganizando a primeira equação do sistema acima e utilizando $\dot{Q} = I$ temos que:

$$\ddot{Q} + a(Q)\dot{Q} - f(Q) = V_g(\theta) \quad (3.10)$$

onde

$a(Q) = \frac{R}{L} + \frac{1}{C(Q)} \frac{\partial I_d}{\partial V_d}$ é o coeficiente de amortecimento não linear;

$f(Q) = -\frac{1}{L} [V_d(Q) + RI_d(V_d(Q))]$ é a força restauradora.

A simplificação proposta consiste em fazer:

$$\begin{cases} a(Q) \rightarrow \text{constante} \\ -f(Q) \rightarrow -1 + e^Q \\ \omega \rightarrow 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

de forma que as equações simplificadas para o circuito RLD ficam:

$$\begin{cases} i = -aI - e^Q + 1 + V_g(\theta) \\ \dot{Q} = I \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Para a realização dos cálculos numéricos do circuito RLD utilizamos primeiramente a simplificação proposta por Van Buskirk e Jeffries e depois retornamos às equações 3.7.

Tratamento Numérico

Iniciamos o estudo do circuito RLD realizando simulação computacional utilizando a linguagem de programação C. A escolha dessa linguagem foi baseada em estudos anteriores desenvolvidos em nosso laboratório. Em sua dissertação Fábio Oikawa dos Santos relatou que testou o Python, Spice e C e chegou a conclusão que a implementação em C mostrou-se mais interessante pois, apesar de ser necessário mais tempo para a elaboração dos códigos fonte, o tempo de processamento era bem menor do que as outras opções testadas[18]. O método utilizados para a resolução das EDOs foi o Runge-Kutta de 4º ordem.

O tratamento numérico do circuito RLD foi feito de duas formas, primeiramente utilizamos a simplificação proposta por Van Buskirk e Jeffries [17] (equação 3.12) e em seguida utilizaremos as equações não simplificadas.

4.1 RLD Simplificado

As equações para o circuito RLD simplificado são:

$$\begin{cases} \dot{I} = -aI - e^{\mathcal{Q}} + 1 + V_g(\theta) \\ \dot{\mathcal{Q}} = I \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde o amortecimento utilizado foi $a = 0,75^1$, a alimentação externa do circuito foi do tipo

¹Valor escolhido baseado no artigo[17]

senoidal: $V_g = A_0 \text{sen}(\theta)$ cuja amplitude, A_0 , foi escolhida como parâmetro para a construção dos diagramas de bifurcação.

A figura 4.1 mostra o exemplo de uma das séries temporais calculadas da corrente I e da carga Q . É importante perceber que a simplificação faz com que as informações de unidades sejam perdidas e, por isso, os gráficos estão em unidades arbitrárias.

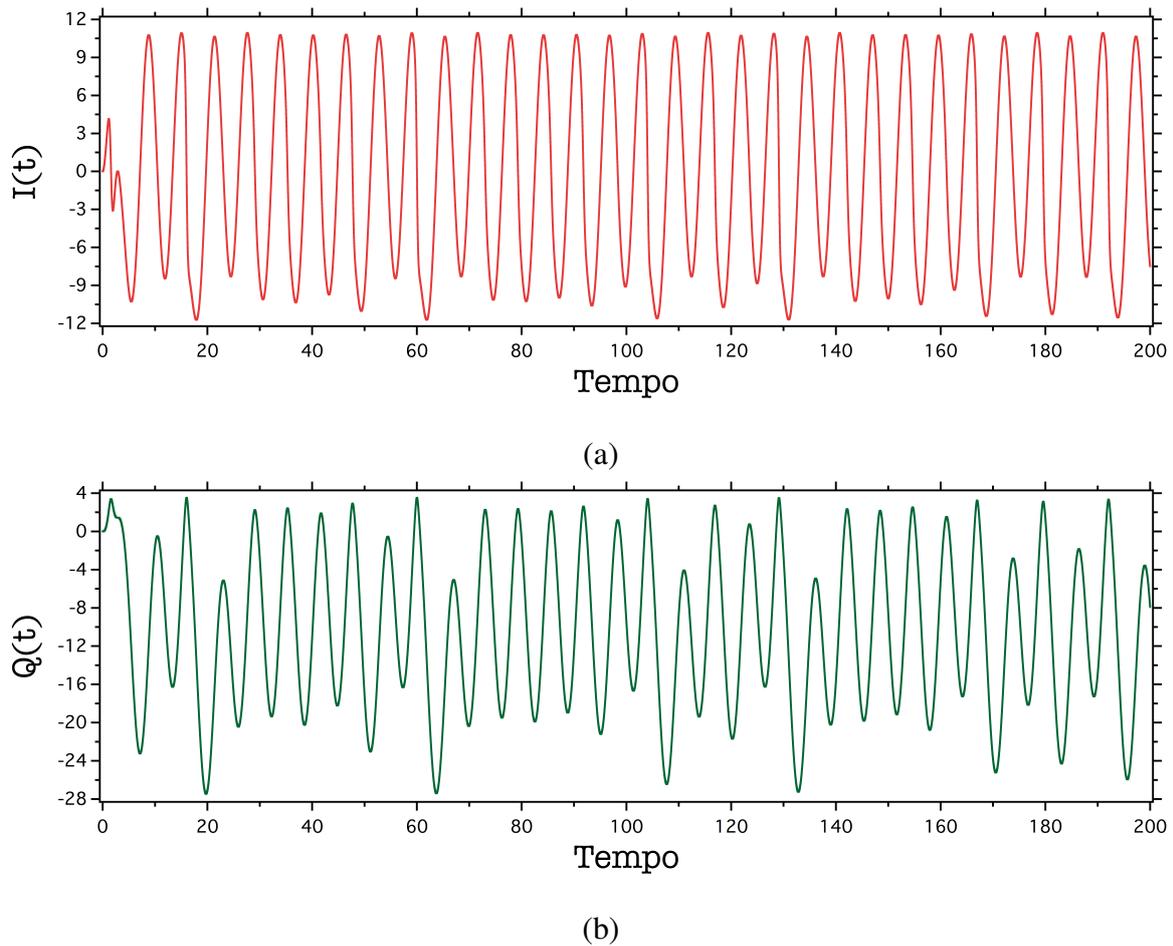


Figura 4.1 Séries temporais obtidas com o amortecimento $a=0,75$. Em (a) temos a corrente total I e em (b) a carga Q .

Conforme discutido anteriormente no capítulo 2, sistemas caóticos apresentam grande sensibilidade às condições iniciais. Diante disso podemos questionar a fidelidade dos resultados numéricos pois além da discretização do tempo temos arredondamentos em todas as etapas do

cálculo. Apesar disso, os resultados numéricos podem sim ser considerados como uma boa representação da realidade do fenômeno físico. O que nos dá suporte para tal confiabilidade é o Teorema do Sombreamento [19] que garante matematicamente que mesmo que a trajetória calculada numericamente divirja exponencialmente da trajetória verdadeira com as mesmas condições iniciais, existe uma trajetória verdadeira com condições iniciais ligeiramente diferente que se aproxima da trajetória numérica. Em outras palavras, a solução numérica encontrada para a condição inicial x_0 corresponde na realidade ao comportamento do sistema com condição inicial $x_0 \pm \delta$ e isso valida os resultados obtidos numericamente.

Para obtenção de diagramas de bifurcação escolhemos utilizar os valores mínimos ou máximos extraídos de séries temporais longas da corrente total e da carga e são mostrados nas figuras 4.2 a 4.5:

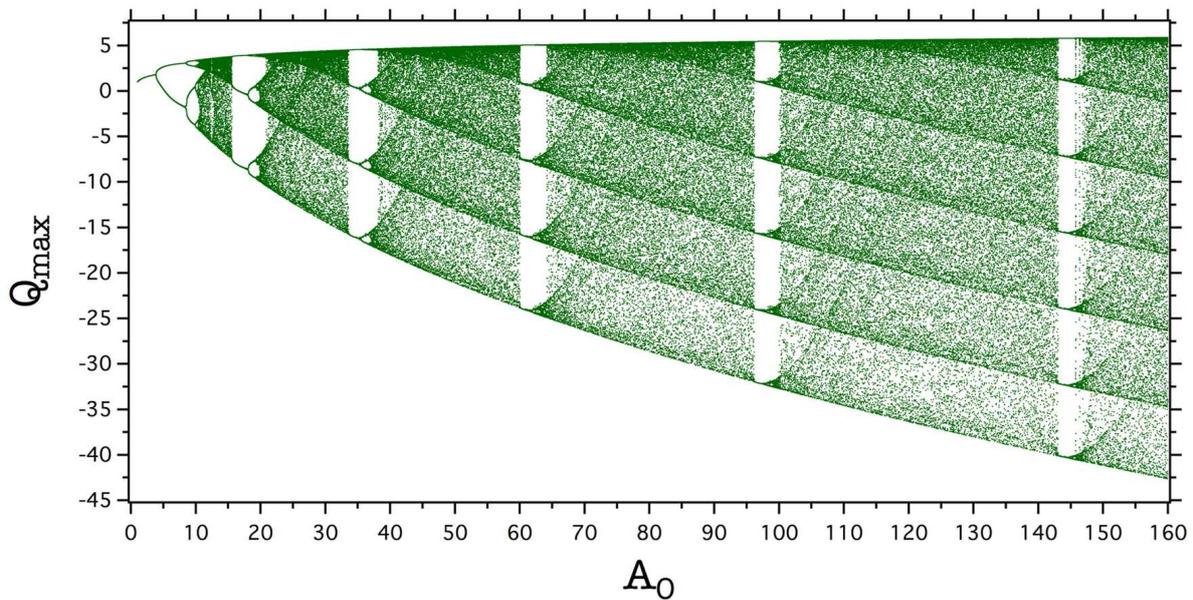


Figura 4.2 Diagrama de Bifurcação obtido com máximos da carga Q usando como parâmetro a amplitude na tensão de entrada A_0 com amortecimento de $a=0,75$.

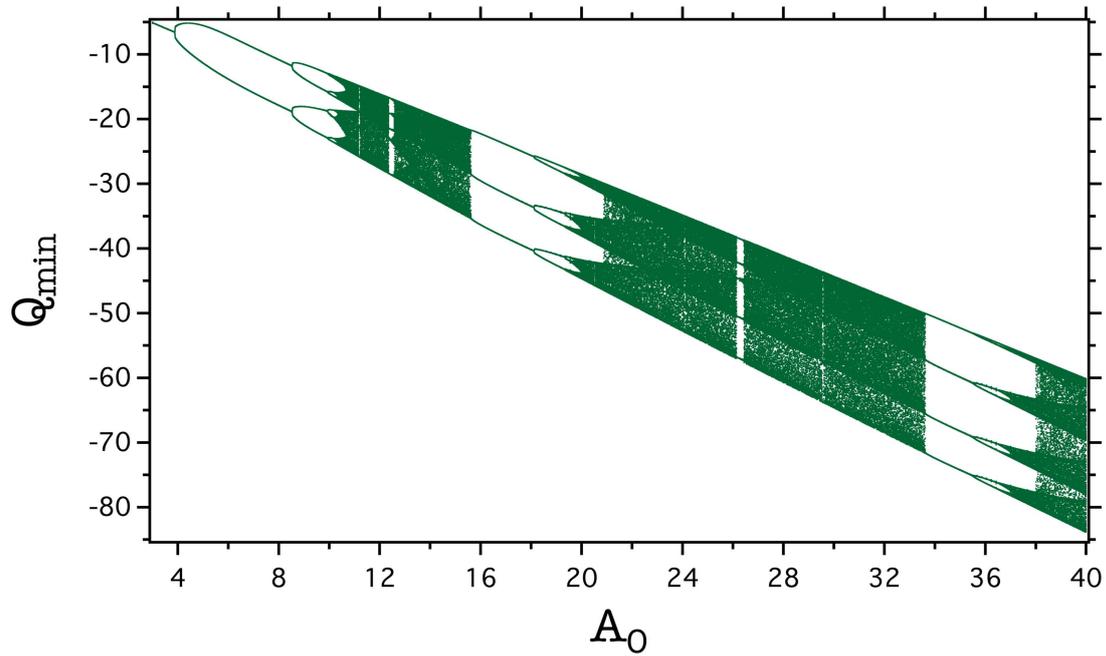


Figura 4.3 Diagrama de Bifurcação obtido com mínimos da carga Q usando como parâmetro a amplitude na tensão de entrada A_0 com amortecimento de $a=0,75$.

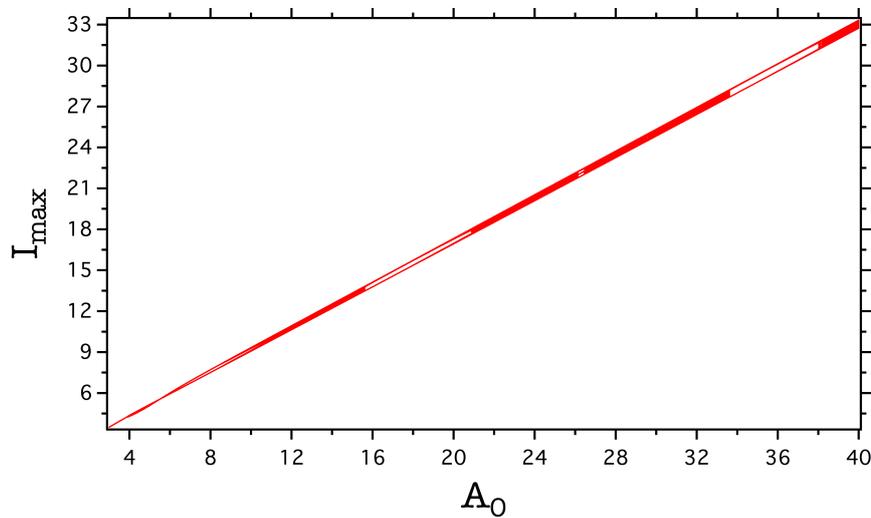


Figura 4.4 Diagrama de Bifurcação obtido com máximos da corrente total I usando como parâmetro a amplitude na tensão A_0 com amortecimento de $a=0,75$.

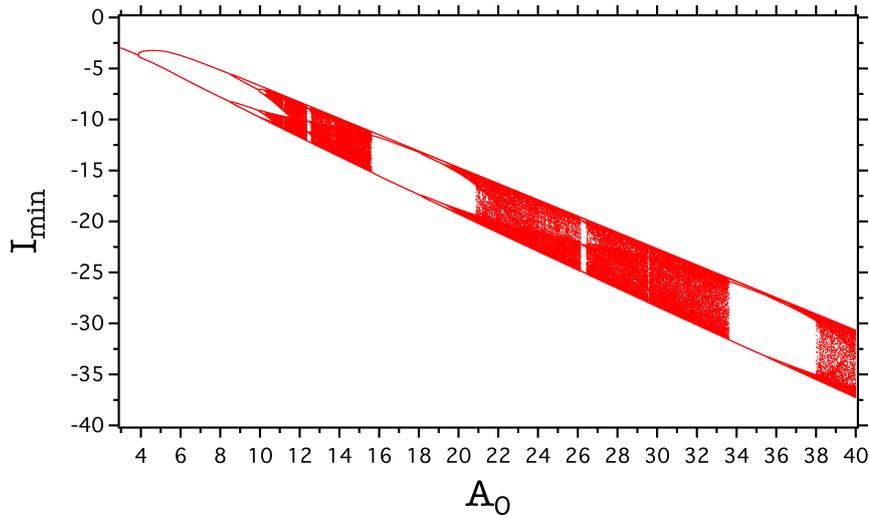


Figura 4.5 Diagrama de Bifurcação obtido com mínimos da corrente total I usando como parâmetro a amplitude na tensão A_0 com amortecimento de $a=0,75$.

Nos diagramas de bifurcação para a carga Q é possível observar de forma mais clara a dinâmica desse sistema que apresenta cascata de dobramento de período e que as maiores janelas periódicas surgem com adição de período. Também é possível observar o aparecimento de crises, que são mudanças repentinas no atrator com a variação do parâmetro que são causadas pela colisão do atrator caótico com uma órbita periódica instável.

Em $A_0 \simeq 15.613268$ existe uma janela de período 3 (Figura 4.6). Para um A_0 próximo ao ponto crítico, mas ainda na região caótica, construímos um gráfico de terceira iterada² dos máximos da carga (Figura 4.6) no qual é possível observar que ocorre uma bifurcação tangente.

²O gráfico de terceira iterada dos máximos da carga é construído relacionado um máximo com o terceiro máximo após ele. No eixo x do gráfico temos o máximo n e no eixo y o máximo $n+3$. Essa construção pode ser generalizada para o gráfico de i -ésima iterada: ele é construído relacionado um máximo com o i -ésimo máximo após ele.

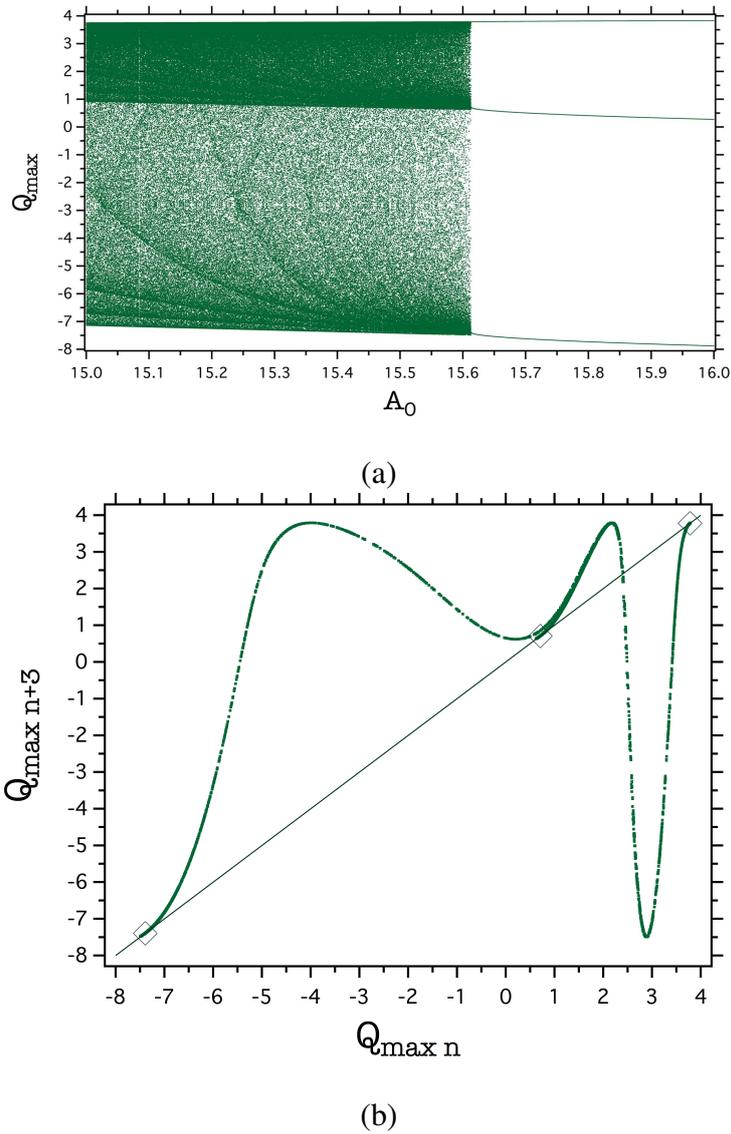


Figura 4.6 (a) Diagrama de bifurcação dos máximos da carga Q próximo à janela de período 3 utilizando como parâmetro de controle a amplitude da tensão de entrada A_0 com amortecimento $a = 0,75$. (b) Mapa de retorno do terceiro máximo da carga Q .

Ainda nesse mesma região, observamos o comportamento da média de Q_{max} e com os dados obtidos fizemos um ajuste com a expressão:

$$f(x) = \alpha \{1 - \exp[-\beta (A_c - x)^\gamma]\} + \rho (A_c - x) + Q_0 \quad (4.2)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ são constante, A_c é a amplitude da tensão de entrada no momento em que o sistema passa a ser periódico e Q_0 é o valor da carga no momento em que o sistema passa a ser periódico. É importante perceber que na figura 4.7 o resultado dos coeficientes do ajuste fornecidos pelo programa apresenta um “excesso” de números. A leitura desse resultado deve ser feita considerando que o erro associado possui apenas um algarismo significativo diferente de zero e o valor do coeficiente dever ter o mesmo número de casas decimais que o erro associado. Essa observação é válida para todos os gráficos aqui apresentados que contém ajuste.

Para o cálculo das médias foram utilizados em torno de 35000 pontos de máximo da carga Q para cada valor do parâmetro e, em seguida foi feita a média entre as 20 médias vizinhas.

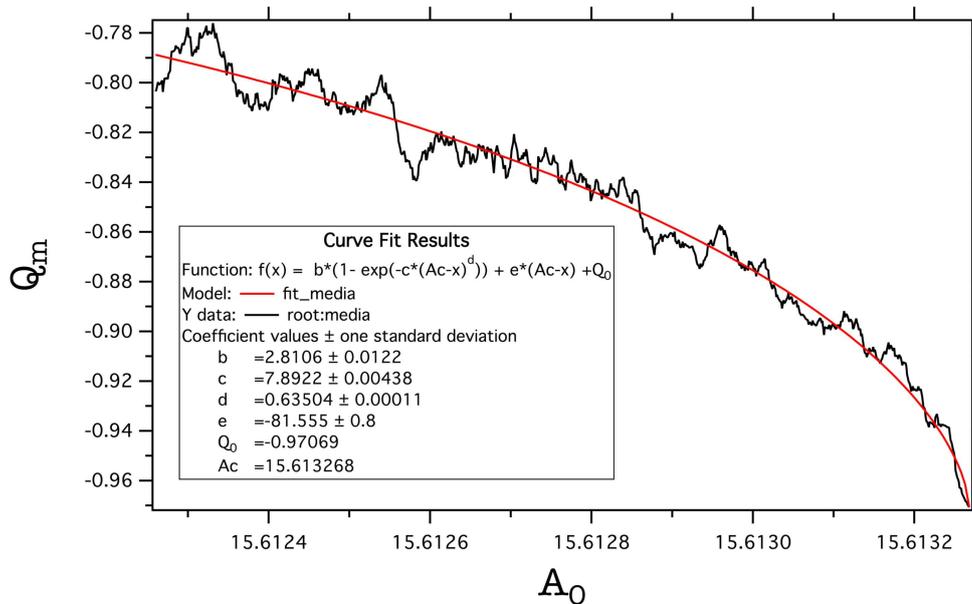


Figura 4.7 Média calculada com aproximadamente 35000 máximos da carga Q próximo à janela periódica 3 utilizando como parâmetro a amplitude da tensão de entrada A_0 . Em vermelho, o ajuste feito utilizando a equação. 4.2

Utilizando a simplificação nas equações do circuito RLD não observamos as oscilações na média da variável dinâmica que estão presentes no mapa logístico. Passaremos agora a tratar o circuito com as equações não simplificadas.

4.2 Circuito RLD - Equações Não Simplificadas

Para análise utilizando as equações não simplificadas as equações ficam³:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{V_g - RI - V_d}{L} \\ \frac{dV_d}{dt} = \frac{I + I_d}{C} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases} \quad (4.3)$$

onde,

$$I_d = I_s (e^{-V_d/nV_t} - 1)$$

$$C = C_j + C_d$$

$$C_j = C_{j0} \left(1 + \frac{V_d}{V_j}\right)^{-1/2}$$

$$C_d = C_{d0} e^{-V_d/nV_t}$$

Para esse conjunto de equações, construímos diagramas de bifurcação utilizando os máximos da tensão no diodo (V_{dmax}), os mínimos da corrente total (I_{min}) e também fizemos gráficos com cortes estroboscópicos nos quais selecionamos os valores da corrente total e da tensão no diodo no instante em que a tensão de entrada $V_g = 0$ e crescente (I_{VgZERO} e $V_{dVgZERO}$) e no instante em que V_g fosse máxima (I_{VgMAX} e V_{dVgMAX}) como mostrado nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10:

³Adotamos como base para formulação das equações o circuito com o diodo invertido com relação ao descrito até o presente momento. Essa mudança foi feita motivada apenas por conforto pessoal

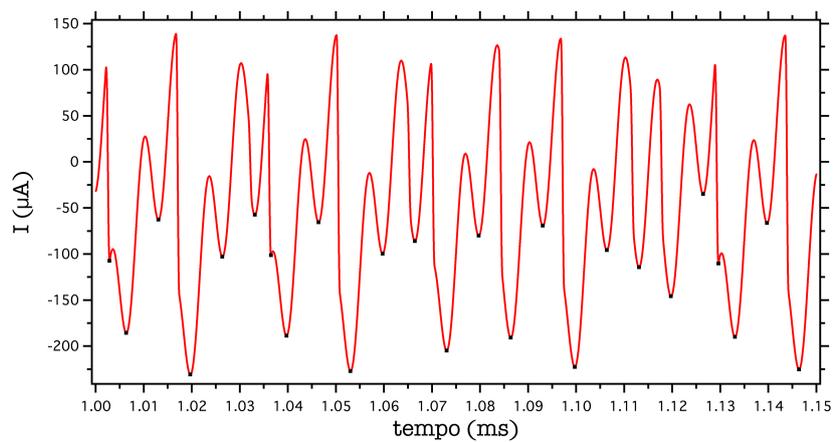


Figura 4.8 Série temporal ilustrando a seleção dos mínimos da corrente I para a construção do diagrama de bifurcação.

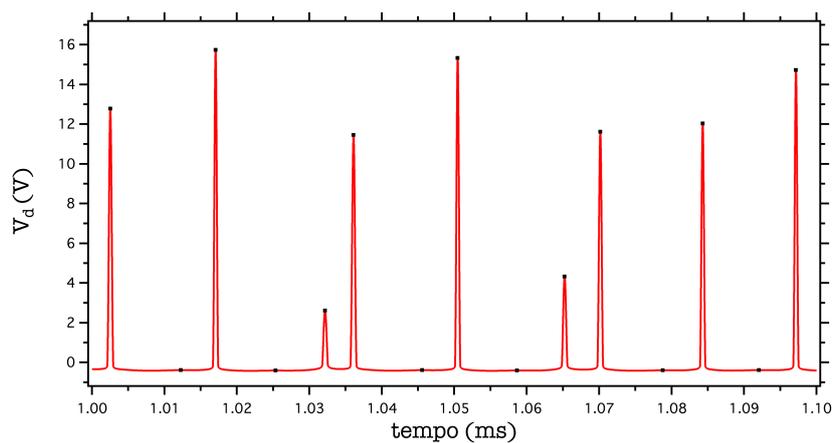


Figura 4.9 Série temporal ilustrando a aquisição dos máximos da tensão no diodo V_d para a construção do diagrama de bifurcação.

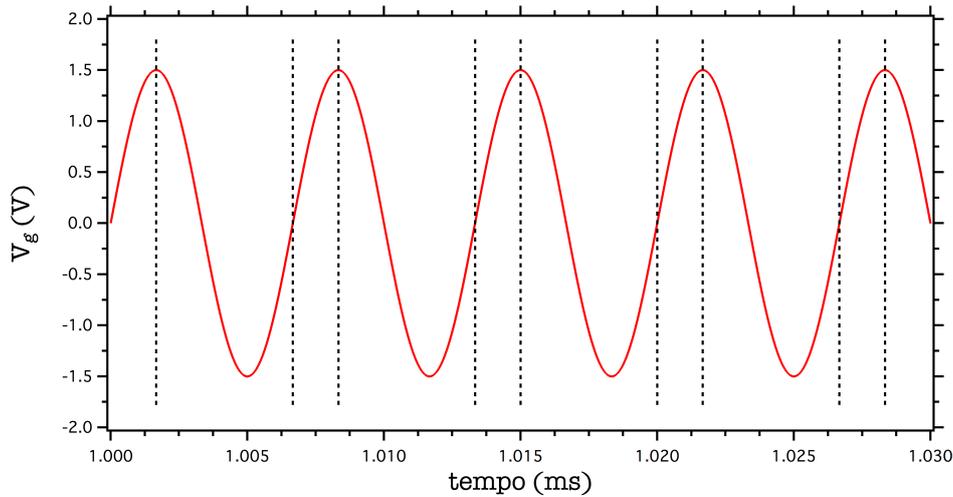


Figura 4.10 Série temporal da tensão de entrada V_g ilustrando os cortes estroboscópicos para a seleção dos pontos e construção dos diagramas de bifurcação. Os pontos selecionados foram: o valor da corrente total e da tensão no diodo quando a tensão de entrada era máxima (I_{VgMAX} e V_{dVgMAX}) e quando a tensão de entrada era zero e crescente (I_{VgZERO} e $V_{dVgZERO}$).

Os diagramas obtidos das figuras 4.11 a 4.16 foram construídos utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro. Para as simulações, utilizamos os seguintes valores: $R=100 \Omega$, $L=22 \text{ mH}$, $I_s=4.8 \text{ nA}$, $nV_t=42 \text{ mV}$, $C_{j0}=6 \text{ pF}$, $V_j=0.75 \text{ V}$, $C_{d0}=0.6 \text{ pF}$ e $f=150 \text{ kHz}$. Assim como no modelo simplificado, os diagramas apresentam dobramento de período, crise e janelas periódicas com adição de período (em alguns casos é necessário aumentar a escala para perceber a adição de período).

Os cortes estroboscópicos foram feitos para determinar qual seria a melhor escolha para a realização das medidas experimentais. Os máximos da tensão no diodo possuem altas amplitudes de tensão que tornam a medida experimental mais fácil, mas provavelmente não seria possível medir a região inferior para identificar qual janela periódica estaríamos observando. As medidas feitas utilizando a corrente possuem uma amplitude de escala que permite identificar a janela periódica, mas possui baixa amplitude na tensão. A melhor escolha é utilizar medidas na corrente para identificar a região de interesse e utilizar medidas na tensão no diodo

para o cálculo das médias e será dessa forma que faremos o tratamento numérico.

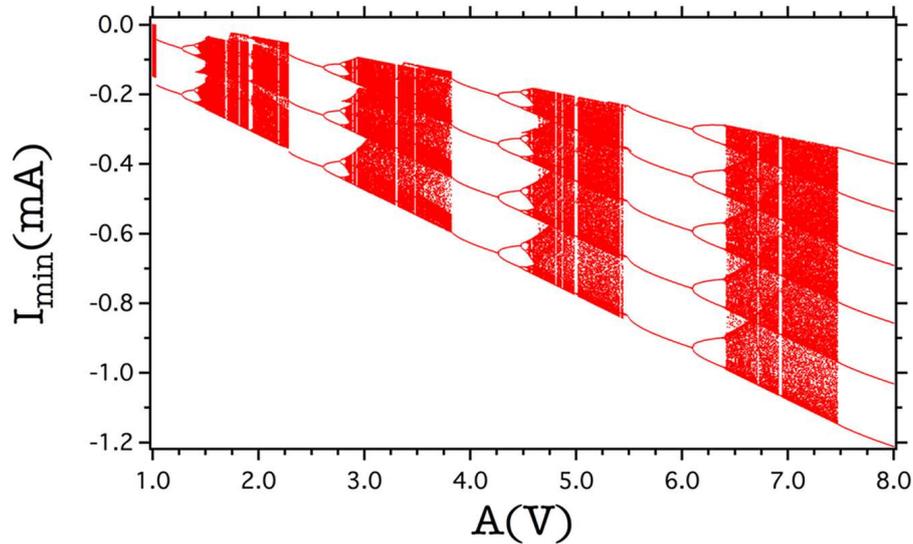


Figura 4.11 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e seleccionando os mínimos da corrente total do circuito. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nVt = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$.

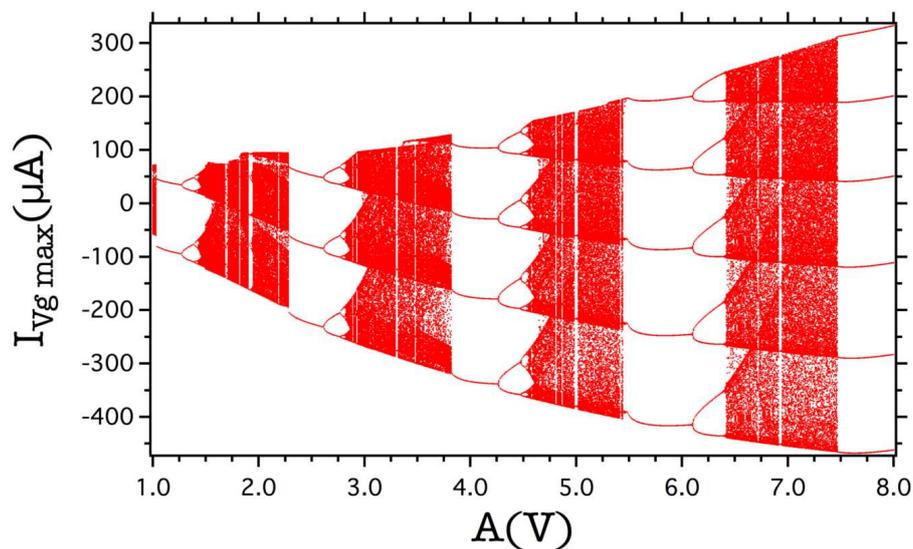


Figura 4.12 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e seleccionando os pontos da corrente total do circuito no momento em que a tensão de entrada era máxima. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nVt = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$.

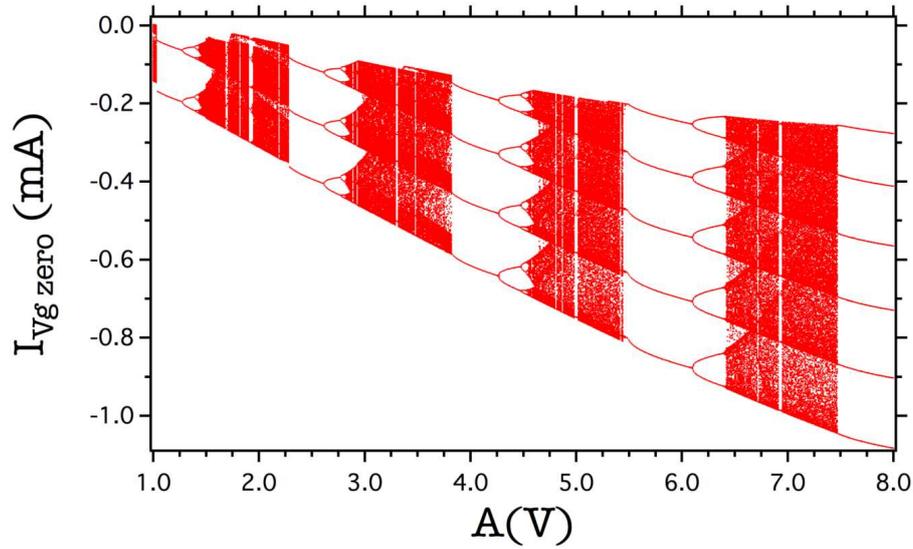


Figura 4.13 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os pontos da corrente total do circuito no momento em que a tensão de entrada era zero e crescente. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$.

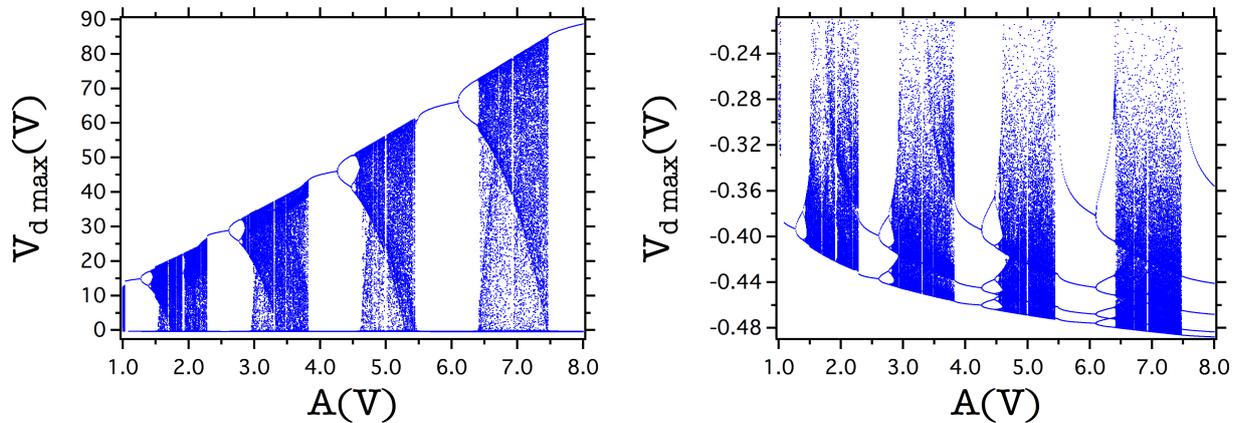


Figura 4.14 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e selecionando os máximos da tensão no diodo. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$.

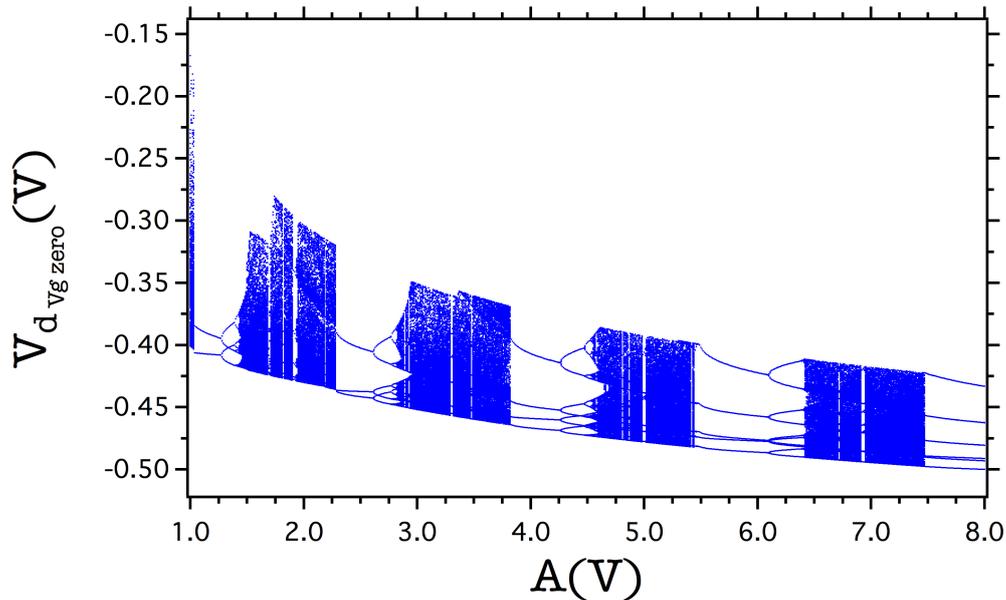


Figura 4.15 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e seleccionando os pontos da tensão no diodo no momento em que a tensão de entrada era zero e crescente. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$.

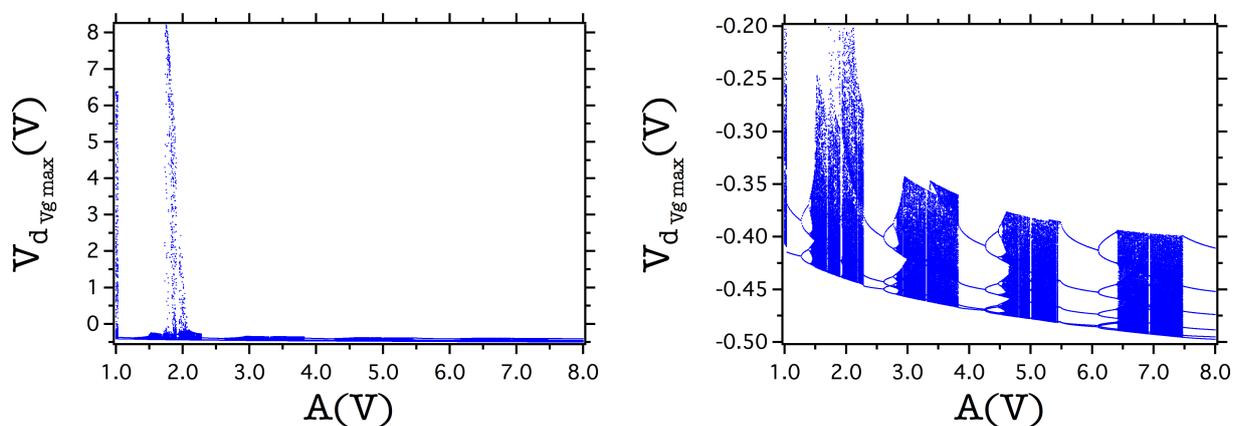


Figura 4.16 Diagrama de bifurcação utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro e seleccionando os pontos da tensão no diodo no momento em que a tensão de entrada era máxima. Cálculo feito utilizando $R = 100 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $I_s = 4.8 \text{ nA}$, $nV_t = 42 \text{ mV}$, $C_{j0} = 6 \text{ pF}$, $V_j = 0.75 \text{ V}$, $C_{d0} = 0.6 \text{ pF}$ e $f = 150 \text{ kHz}$.

Os gráficos com as médias nas janelas 4, 5, e 6 estão representados nas figuras 4.17, 4.18 e 4.19 respectivamente. Para o cálculo das médias foram utilizados em torno de 7500 pontos de

máximo da tensão no diodo para cada valor do parâmetro e, em seguida foi feita a média entre as 20 médias vizinhas. Os gráficos são traçados utilizando no eixo y $V_{dmc} - V_{dm}$, onde V_{dm} é a média dos máximos da tensão no diodo e V_{dmc} é a média dos máximos da tensão no diodo no ponto em que o sistema passa a ser periódico. O ajuste foi feito utilizando uma equação baseada na equação utilizada no ajuste feito para o mapa logístico[6]:

$$f(x) = \alpha \left\{ 1 - \exp \left[-\beta (A_c - x)^\gamma \right] \right\} * \left\{ 1 + \rho * \cos \left[\phi + \kappa (A_c - x)^\xi \right] \right\} \quad (4.4)$$

onde A_c é a amplitude da tensão de entrada no momento em que o sistema passa a ser periódico, $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \phi, \kappa, \xi$ são constantes. O primeiro termo dessa equação é responsável pelo decaimento exponencial e o segundo termo pela oscilação. Queremos observar se esse sistema apresenta em sua transição caos periódico um expoente crítico característico como o encontrado no mapa logístico e se o decaimento é acompanhado por oscilações.

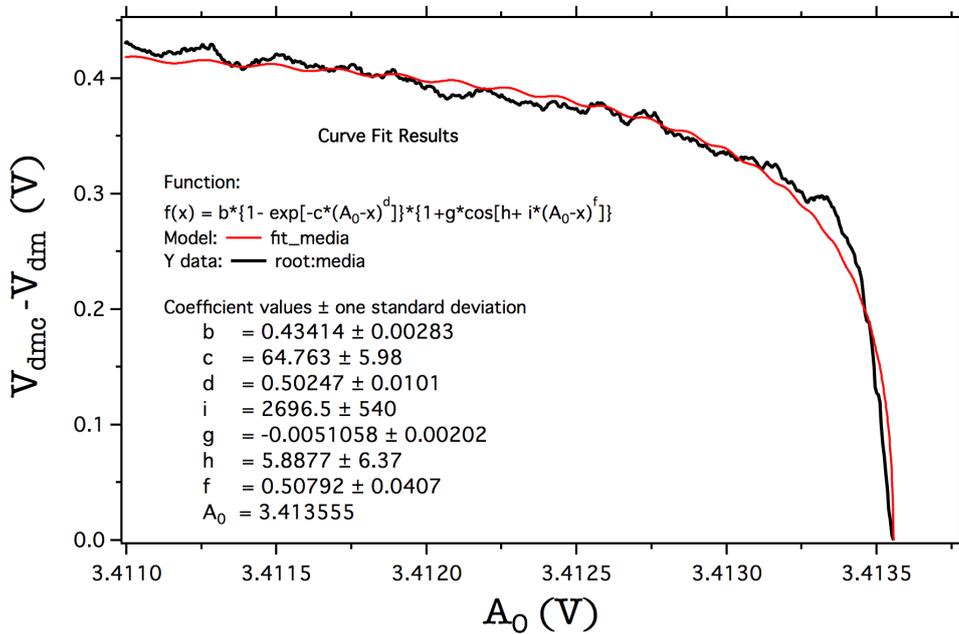


Figura 4.17 Média calculada com aproximadamente 7500 máximos da tensão no diodo utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle na região de transição caos-periódica próximo à janela de período 4. Em vermelho está representado o ajuste segundo da equação 4.4.

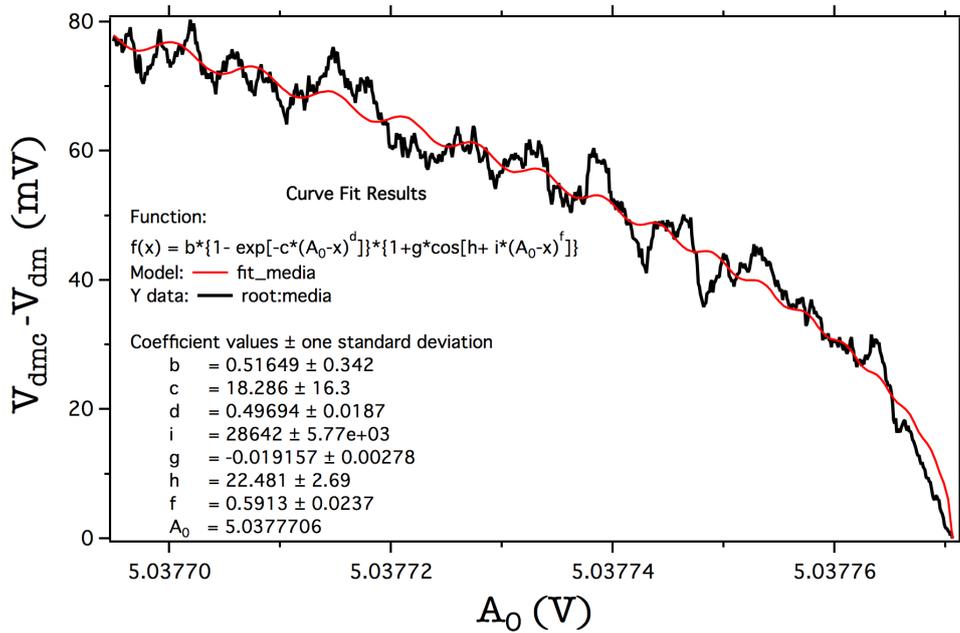


Figura 4.18 Média calculada com aproximadamente 7500 máximos da tensão no diodo utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle na região de transição caos-periódica próximo à janela de período 5. Em vermelho está representado o ajuste segundo da equação 4.4.

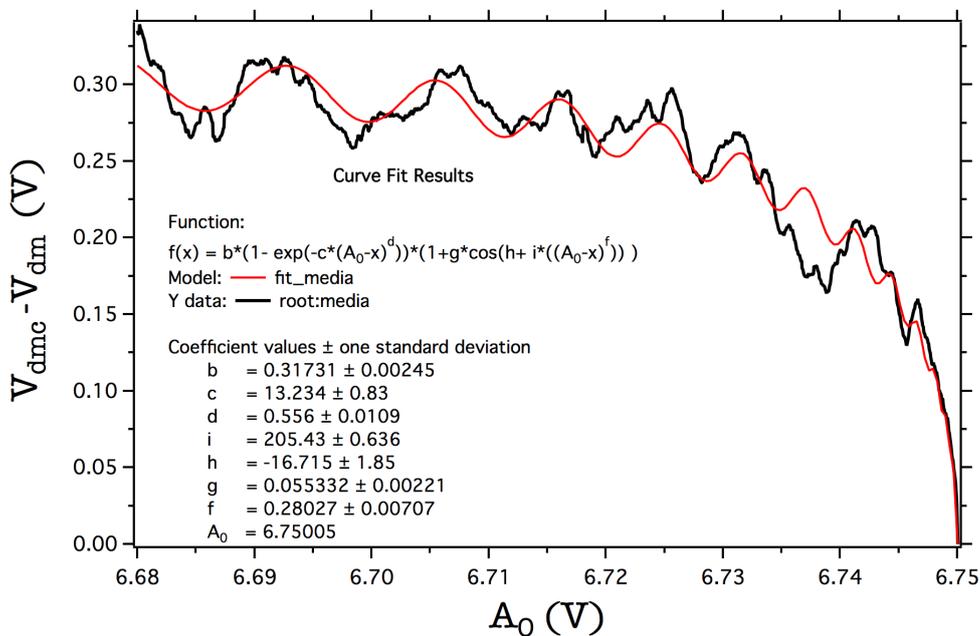


Figura 4.19 Média calculada com aproximadamente 7500 máximos da tensão no diodo utilizando a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle na região de transição caos-periódica próximo à janela de período 6. Em vermelho está representado o ajuste segundo da equação 4.4.

Nas regiões de transição caos-periódica próximas às janelas 4, 5 e 6 as oscilações não aparecem de forma clara como as encontradas no mapa logístico, mas o valor do expoente crítico γ variou entre 0.56 e 0.5, valores muito próximos aos encontrados no mapa logístico. Observando os gráficos das médias da tensão no diodo, é possível perceber que o passo necessário para variar a amplitude da tensão de entrada nessas regiões era muito pequeno o que dificulta a realização experimental. Por isso passamos a utilizar a frequência como parâmetro de controle para observar se essa opção seria experimentalmente mais viável.

Utilizando a frequência como parâmetro, construímos o diagrama de bifurcação (Figura 4.20) com os máximos da tensão no diodo para buscar as regiões de janelas periódicas e observar o comportamento da média (Figura 4.21), contudo, também não foram observadas oscilações nas janelas periódicas estudadas utilizando a frequência como parâmetro.

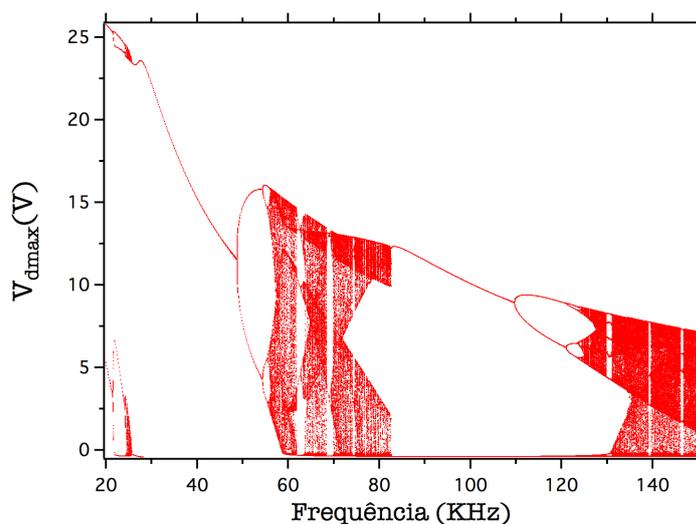
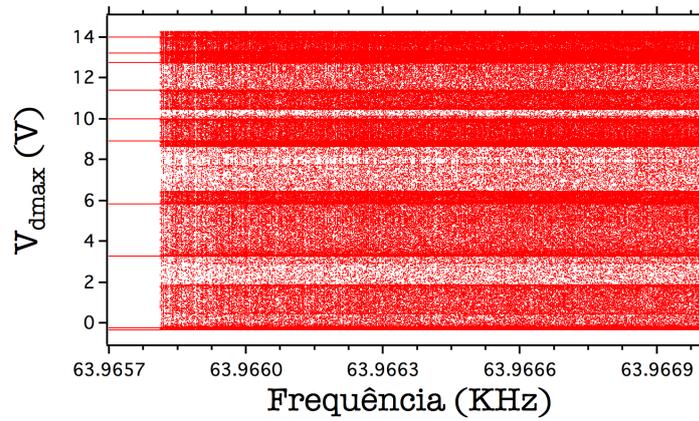
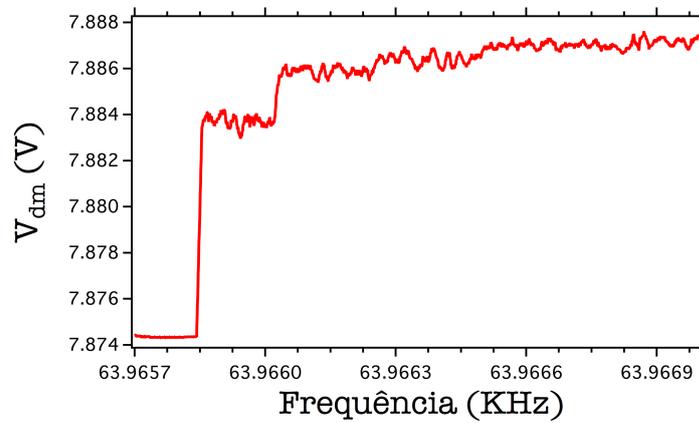


Figura 4.20 Diagrama de bifurcação utilizando a frequência como parâmetro.



(a)



(b)

Figura 4.21 (a) Diagrama de bifurcação utilizando a frequência como parâmetro. (b) Média na janela de período 10 utilizando a frequência como parâmetro

CAPÍTULO 5

Resultados Experimentais

Após a realização do tratamento numérico do circuito RLD, montamos um sistema para controle, aquisição e tratamento dos dados experimentais. A montagem experimental do circuito está na figura 5.1.

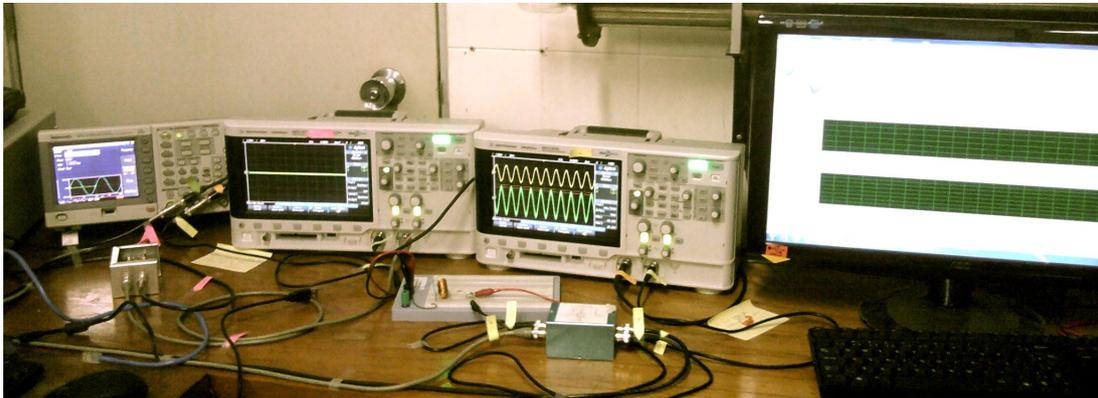


Figura 5.1 Foto da montagem experimental do circuito RLD.

Os resultados experimentais foram obtidos utilizando um resistor com $R=4.7\Omega$, um indutor com $L=8.3\text{mH}$, um diodo IN4007 e um amplificador operacional LF351N de uma montagem já existente no laboratório. O circuito era alimentado pelo gerador de sinal Tektronix AFG 3102 e o sinal foi medido por um osciloscópio Agilent DSO-X-2012A que media a tensão do diodo e a tensão de entrada V_{in} . O controle do experimento (geração de sinal, aquisição e análise de dados) foi feito por programas criados em LabView 7.5. A idéia inicial era fazer medidas em dois circuitos, em um mediríamos a tensão no diodo e no outro a tensão no resistor, e por isso a montagem no laboratório utiliza um gerador de sinal com dois canais e dois osciloscópios, onde cada osciloscópio faria a medida em um circuito: em um é medido a tensão de entrada do circuito e a tensão no diodo e no outro circuito é medido a tensão de entrada e a tensão

no resistor. Mas, apesar do sistema já estar pronto para a realização de medidas simultâneas, realizamos medidas usando apenas um circuito. Os programas criados permitem o controle simultâneo desses equipamentos e o computador utilizado possui acesso remoto¹. O programa para aquisição dos dados permite que o usuário escolha a forma da onda do sinal de entrada, a frequência, a amplitude, o offset e a fase inicial, o tempo de espera para o início das medidas, o intervalo de varredura do parâmetro de controle (que poderia ser frequência ou amplitude da tensão de entrada), o número de passos no qual deveria ser feito a varredura do parâmetro e o número de aquisições do osciloscópio. O sinal obtido pelo osciloscópio era formado por “fotos” da tela e entre as “fotos” existe uma janela no qual não são feitas medições. O que chamamos de “foto” da tela do osciloscópio trata-se de uma tabela de pontos cujos valores correspondem à série temporal observada em uma captura do osciloscópio. O que obtemos portanto são pontos da série temporal referente à uma janela de captura e entre as janelas de captura existem intervalos nos quais não são efetuadas medidas. Essas janelas na qual não ocorrem medida é devido ao tempo que o osciloscópio leva para digitalizar e enviar os dados para o computador. Essa forma de captura do sinal está ilustrado na figura 5.2, onde os retângulos tracejados representam os dados obtidos pelo osciloscópio.

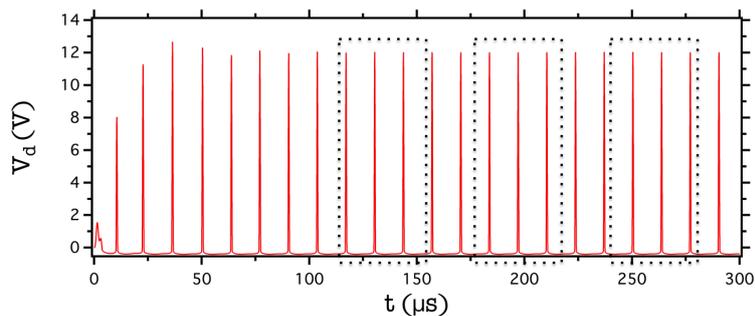


Figura 5.2 Ilustração da forma como o osciloscópio captura as séries temporais. Os retângulos tracejados correspondem às janelas de captura.

A distância entre esses retângulos varia de acordo com a quantidade de pontos escolhidos

¹O programa utilizado para o controle remoto foi o TeamViewer.

para representar o sinal dentro de cada janela de captura. Para cada série temporal obtida (as várias fotos juntas) para um valor do parâmetro é gerado um arquivo que contém o horário em que cada janela de captura foi adquirida e com isso é possível saber o intervalo entre as aquisições. Além disso o programa salva as séries temporais medidas da tensão de entrada e da tensão no diodo em um arquivo com os parâmetros escolhidos². A obtenção dos máximos/mínimos foi feita por um bloco do Labview.

Para baixos valores da amplitude da tensão de entrada o circuito pode ser considerado aproximadamente linear e o diodo comporta-se como um capacitor e com isso o circuito pode ser tratado como um circuito RLC. Podemos então, variando a frequência, construir um gráfico e observar a frequência de ressonância. A figura 5.3 mostra os máximos da tensão no diodo para diferentes valores da frequência, onde é possível observar o deslocamento do pico da ressonância com o aumento da tensão no diodo. Esse deslocamento mostra que, com o aumento da amplitude da tensão de entrada, o valor da capacitância do diodo aumenta até começar a operar no regime não linear.

Construímos o diagrama de bifurcação utilizando a tensão como parâmetro e obtivemos uma boa concordância com o resultado obtido numericamente. Como previsto, não conseguimos observar as janelas que numericamente apareceram na região inferior. Isso pode ter ocorrido porque na digitalização do sinal pode não fornecer resolução suficiente para separar as janelas e, além disso elas podem ter ficado abaixo do limiar estabelecido para a busca dos máximos, que foi de 0.002V.

²Cada série temporal para um determinado valor do parâmetro é salva em um arquivo. Portanto, se tivermos o parâmetro variando em 900 passos, teremos 900 arquivos da série temporal da tensão de entrada, 900 arquivos da série temporal da tensão no diodo, 900 arquivos com os horários das fotos de cada série temporal e um arquivo de dados contendo os parâmetros escolhidos.

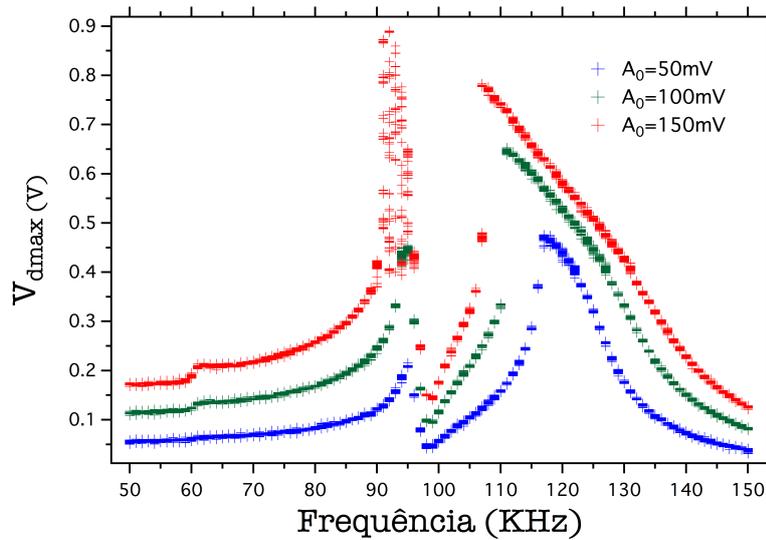


Figura 5.3 Ressonância no circuito RLD para baixas amplitudes da tensão de entrada.

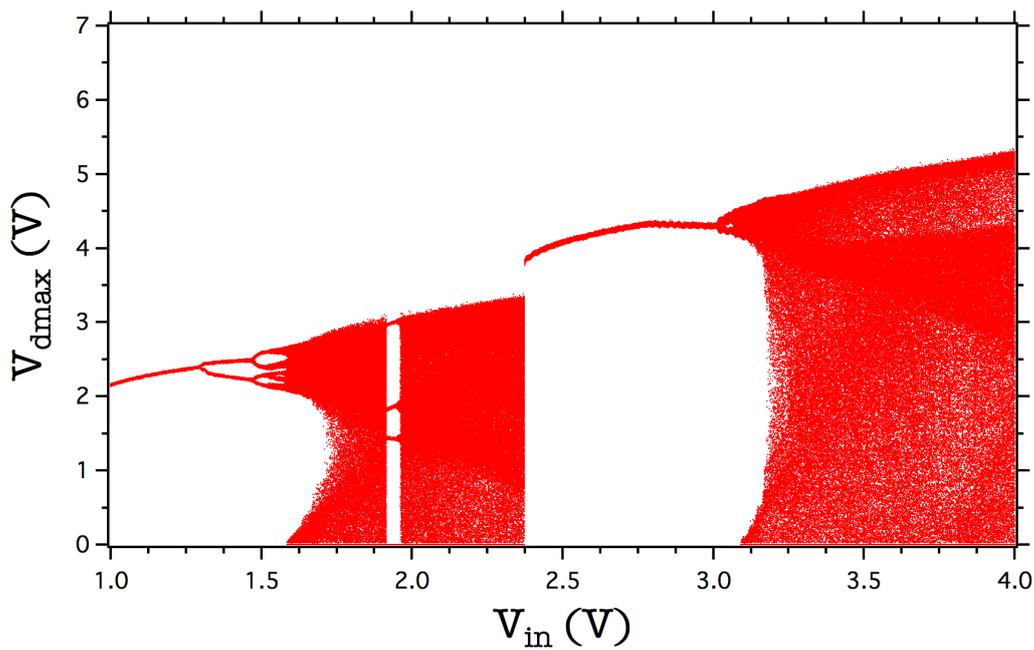


Figura 5.4 Diagrama de bifurcação dos máximos da tensão no diodo com a amplitude da tensão de entrada como parâmetro de controle com $f=120\text{KHz}$. O passo utilizado foi de 0.001V e a aquisição dos dados ocorreu durante 30 horas.

Utilizando a frequência como parâmetro de controle, construímos diagramas de bifurcação nos máximos da tensão no diodo ($V_{d_{max}}$) mostrado na figura 5.5:

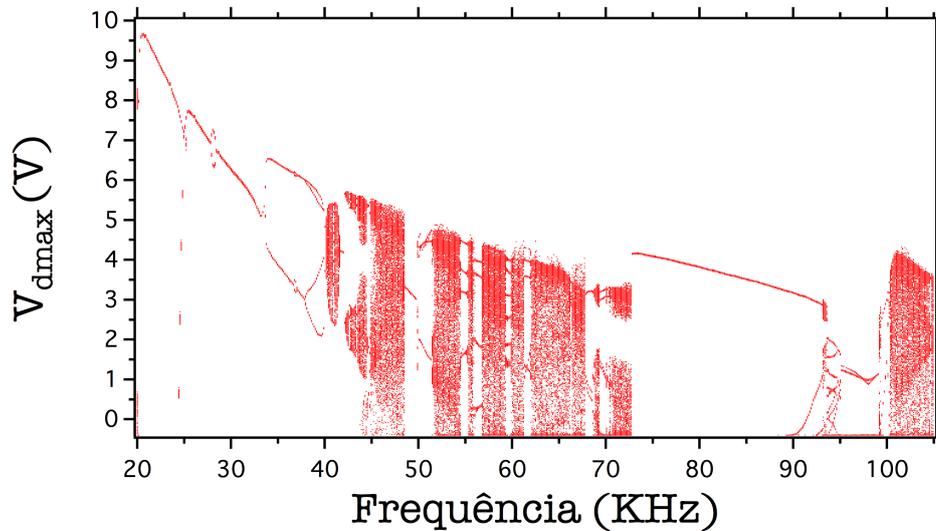


Figura 5.5 Diagrama de bifurcação com os máximos da tensão no diodo e utilizando como parâmetro a frequência. A amplitude da tensão de entrada foi 1,5V e o passo da variação da frequência foi 130 Hz.

Fazendo a varredura do parâmetro de forma crescente e depois decrescente foi possível observar histerese, como mostrado na figura 5.6, onde os pontos pretos foram obtidos com o parâmetro crescente e os pontos vermelhos foram obtidos com o parâmetro decrescente.

Além da histerese o sistema também apresentou grande sensibilidade ao passo escolhido para varredura do parâmetro. Na figura 5.7 temos um gráfico que ilustra isso, onde, para mesmas condições iniciais, o sistema pode apresentar ou não comportamento caótico dependendo do passo escolhido como observado na região entre 51 kHz a 60 kHz. A alta sensibilidade mostrada nesses diagramas dificultou a escolha de uma região para realização do estudo da média e por isso este estudo ainda não foi feito experimentalmente.

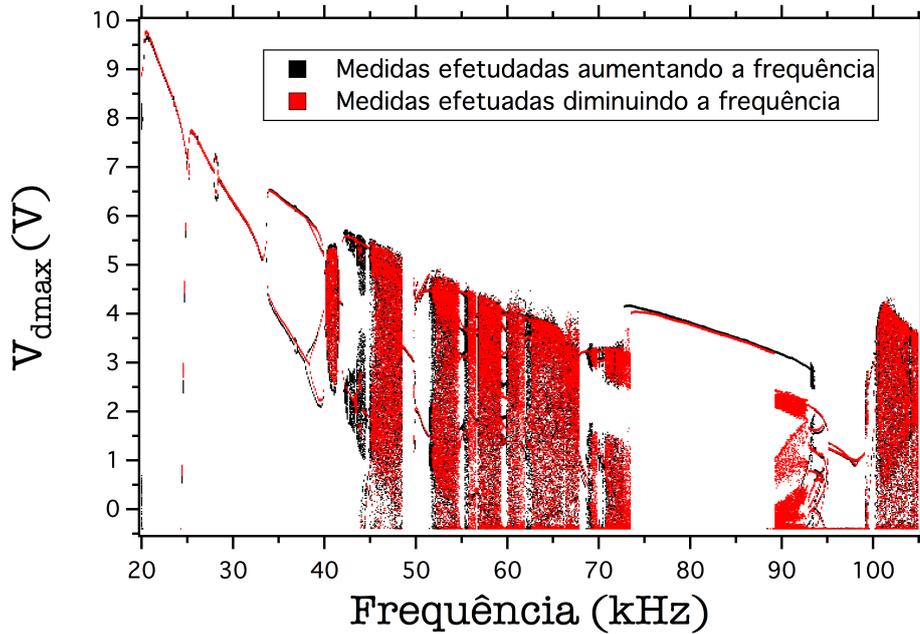


Figura 5.6 Diagrama de bifurcação com histerese obtida com os máximos da tensão no diodo utilizando como parâmetro a frequência.

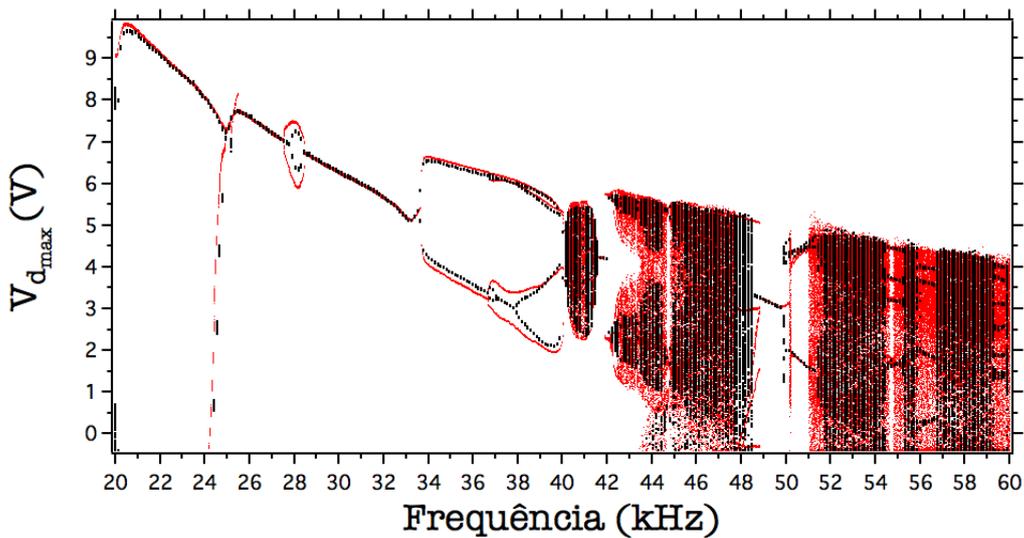


Figura 5.7 Diagrama de bifurcação mostrando a sensibilidade ao passo escolhido para a varredura do parâmetro. Em preto, o diagrama foi obtido com o passo de variação da frequência de 130 Hz e em vermelho o passo foi de 40 Hz. Os dois gráficos possuíam a mesma frequência inicial e a mesma amplitude da tensão de entrada que foi 1,5 V.

Conclusões e Perspectivas

Realizamos o estudo numérico e experimental do circuito RLD. No estudo numérico, construímos diagramas de bifurcações com a amplitude da tensão de entrada e frequência como parâmetros e com diferentes cortes estroboscópicos. Percebemos que diagramas construídos utilizando a corrente total são bons para escolha da região de interesse e que os construídos com os máximos da tensão no diodo, por apresentarem maiores valores de tensão, eram bons para o estudo do comportamento da média. Observamos o comportamento da média na transição caos-periódica nas janelas 4, 5 e 6 nas quais não foram observadas oscilações conforme as existentes no mapa logístico. Um possível motivo pelo qual não observamos as oscilações é que a quantidade de pontos (máximos) utilizados para o cálculo da média, que foi em torno de 7500 pontos, é bem menor comparado à quantidade utilizada para o cálculo da média no mapa logístico, que foi de 10^7 pontos. Não realizamos cálculos com maiores quantidades de máximos porque o tempo que o programa necessitaria para isso era muito grande. Contudo, recentemente o nosso laboratório adquiriu um computador que irá possibilitar o aumento do número de pontos no cálculo das médias.

Construímos um sistema para aquisição e processamento de dados experimentais em Labview com possibilidade de realização de dois experimentos simultaneamente. Obtivemos um diagrama de bifurcação utilizando a tensão como parâmetro que possui boa concordância com o numérico. O experimento apresenta grande sensibilidade e por isso não foi possível identificar uma região de interesse para o cálculo da média. Estudos feitos anteriormente em nosso laboratório observaram sensibilidade térmica, portanto um próximo passo seria a melhoria da montagem do circuito e utilização de isolamento térmico. Estamos também trabalhando na

melhoria da aquisição e tornando o processamento dos dados mais eficiente.

Referências Bibliográficas

- [1] FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. P. C. *Caos uma introdução*. Editora Edgar Blücher LTDA, 1994.
- [2] MONTEIRO, L. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [3] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Westview, 2000.
- [4] SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. e-papers, 2006.
- [5] TESTA, J.; PEREZ, J.; JEFFRIES, C. Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator. *Physical Review Letters*, New York, v. 48, p. 714–717, 1982.
- [6] DE S. CAVALCANTE, H. L. D.; VASCONCELOS, G. L.; LEITE, J. R. R. Power law periodicity in the tangent bifurcations of the logistic map. *Physica A*, Amsterdam, v. 295, p. 291–296, 2001.
- [7] LINSAY, P. S. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator. *Physical Review Letters*, New York, v. 47, p. 1349 – 1352, 1981.
- [8] JEFFRIES, C.; PEREZ, J. Direct observation of crises of the chaotic attractor in a nonlinear oscillator. *Physical Review A*, New York, v. 27, p. 601–603, 1983.
- [9] KIM, C.-M.; YIM, G.-S.; KIM, Y. S.; KIM, J.-M.; LEE, H. W. Experimental evidence of characteristic relations of type-i intermittency in an electronic circuit. *Physical Review E*, v. 56, p. 2573–2577, 1997.

- [10] JEFFRIES, C.; PEREZ, J. Observation of a pomeau-manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator. *Physical Review A*, New York, v. 26, p. 2117–2122, 1982.
- [11] HUNT, E. R. Comment on a driven nonlinear oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, p. 1054, Oct 1982.
- [12] ROLLINS, R. W.; HUNT, E. R. Exactly solvable model of a physical system exhibiting universal chaotic behavior. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, p. 1295–1298, Nov 1982.
- [13] SU, Z.; ROLLINS, R. W.; HUNT, E. R. Simulation and characterization of strange attractors in driven diode resonator systems. *Physical Review A*, Woodbury, v. 40, p. 2698–2705, 1989.
- [14] MATSUMOTO, T.; CHUA, L. O.; TANAKA, S. Simplest chaotic nonautonomous circuit. *Physical Review A*, Woodbury, v. 30, p. 1155–1157, 1984.
- [15] BRORSON, S. D.; DEWEY, D.; LINSAY, P. S. Self-replicating attractor of a driven semiconductor oscillator. *Physical Review A*, New York, v. 28, p. 1201–1203, 1983.
- [16] PEREZ, J. M. Mechanism for global features of chaos in a driven nonlinear oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 32, p. 2513–2516, Oct 1985.
- [17] VAN BUSKIRK, R.; JEFFRIES, C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. A*, v. 31, p. 3332–3357, May 1985.
- [18] DOS SANTOS, F. O. *Dinâmica caótica em um circuito eletrônico*. 2007. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Pernambuco, 2007.
- [19] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [20] HOROWITZ, P. *The art of electronics*. Cambridge University Press, 1980.
- [21] DE QUEIROZ ORSINI, L. *Circuitos eletrônicos*. Edgard Blucher.

- [22] REZENDE, M. S. *A física de materiais e dispositivos eletrônicos*. Editora Universitária da UFPE, 1996.
- [23] DE SIQUEIRA, E. M. *Caos intermitente em circuitos eletrônicos*. 2005. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Pernambuco, 2005.
- [24] DE SOUZA CAVALCANTE, H. L. D. *Bifurcações com intermitência e sincronismo de sistemas caóticos: Circuitos eletrônicos e lasers*. 2003. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de Pernambuco, 2003.

