



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física

Pós-graduação em Física

**MODELO DE POTTS COM INTERAÇÕES  
ALEATÓRIAS EM REDES FRACTAIS**

Pedro Henrique A. de Andrade

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife  
28 de agosto de 2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELO DE POTTS COM INTERAÇÕES ALEATÓRIAS EM REDES  
FRACTAIS

por

**Pedro Henrique Avelino de Andrade**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Sérgio Galvão Coutinho (Orientador - DF-UFPE)

Prof. Washington de Lima (CAA -UFPE)

Prof. Clécio Clemente de Souza e Silva (DF-UFPE)

Dr. Evaldo Mendonça Fleury Curado (CBPF)

Recife - PE, Brasil  
Agosto - 2012

Catálogo na fonte  
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno, CRB 4-1758

Andrade, Pedro Henrique Avelino de.

Modelo de Potts com interações aleatórias em redes fractais / Pedro Henrique Avelino de Andrade– Recife: O Autor, 2012.

xi; 48 p.: fig.; tab.

Orientador: Sergio Galvão Coutinho

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2012.

Inclui bibliografia

1. Transições de fase (física estatística). 2. Grupo de renormalização. 3. Vidros de Spin. I. Coutinho, Sergio Galvão. (orientador). II. Título.

530.1595

(22. ed.)

FQ 2012-045



**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Departamento de Física – CCEN**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**  
**Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil**  
**Fone ( ++ 55 81 ) 2126-7640/2126-8449 - Fax ( ++ 55 81 ) 3271-0359**  
<http://www.ufpe.br/ppgfisica/> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## **Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado**

---

**Pedro Henrique Avelino de Andrade**

### **MODELO DE POTTS COM INTERAÇÕES ALEATÓRIAS EM REDES FRACTAIS**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Sérgio Galvão Coutinho (Presidente e Orientador), do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Washington de Lima (Co-Orientador), do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, Clécio Clemente de Souza e Silva, do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Dr. Evaldo Mendonça Fleury Curado, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, consideram o candidato:

Aprovado                       Reprovado                       Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e oito de agosto de dois mil e doze.

---

Prof. Sérgio Galvão Coutinho  
Presidente e Orientador

---

Prof. Washington de Lima  
Co-Orientador

---

Prof. Clécio Clemente de Souza e Silva

---

Dr. Evaldo Mendonça Fleury Curado

*Para Dona Mãe, Biel, Dona Vó, Tio Carlos, Tia Aninha e  
Tio Cardinho.*

## AGRADECIMENTOS

A minha família cujo carinho e amor possibilitaram que chegasse até aqui.

A Tatiane Torres, Paulo Guerra e Maelyson Rolim: Obrigado por acreditarem até o final.

A Wendson, por ter se tornado, desde de 2006, um companheiro de jornada.

Aos amigos mais chegados que irmãos Danilo, Fê, Felipe, Hildson e Katarina, Kawai, Ligia, Mario Rocha, Paulo Hertton, RobEli e Suzi: Obrigado por tudo, muito obrigado.

A Marinho, que me ensinou qual era o princípio do conhecimento. Muito obrigado, Mestre.

Ao professor Sergio Coutinho, pelo grande empenho e paciência. Obrigado por sua dedicação exemplar.

A Washington por sua grande disponibilidade em ajudar com as minhas dúvidas. Por ser um exemplo de uma pessoa íntegra e amorosa com a família. Pela co-orientação, principalmente nos primeiros passos, sem a qual não seria possível a realização desse trabalho.

A Gustavo por sua ajuda com os aspectos computacionais dessa Dissertação nas horas mais difíceis.

A Tatiane Torres, por seu carinho e dedicação e por ter sido um incentivo até aqui. Longos anos nos esperam.

Ao verbo, que se fez carne e habitou entre nós. Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas.

## RESUMO

O estudo das interações entre os spins em materiais magnéticos é um tema de grande importância em mecânica estatística. A investigação das grandezas termodinâmicas e estatísticas de modelos de spins, tal como o modelo de Potts, ajudam a entender melhor a dinâmica de sistemas complexos, possibilitando uma grande variedade de aplicações em diversas áreas. No caso do modelo de Potts, por exemplo, suas aplicações vão desde a teoria de grafos em Física Matemática, simulações de formação de guetos étnicos em Sociologia até estudos sobre padrão de crescimento de células malignas e sua influência no crescimento de tumores de câncer.

Nesta dissertação, investiga-se a transição de fase do modelo de Potts com  $q$  estados, definido em uma rede fractal e com interações aleatórias (positivas e negativas) entre spins primeiros vizinhos. Os valores dessas interações são escolhidos randomicamente a partir de uma função de densidade de probabilidades e distribuídas em uma rede hierárquica da família *diamante* com fator de escala 3. Considerou-se as seguintes funções simétricas: gaussiana (normal), delta-bimodal, uniforme e exponencial. Essa família de redes é construída de uma maneira iterativa em um processo que lhe assegura a propriedade de *invariância de escala*, possibilitando assim que a técnica do grupo de renormalização no espaço real de Migdal-Kadanoff seja apropriada para estudar os fenômenos críticos do modelo em tais redes.

As equações de renormalização para os acoplamentos e para suas correspondentes *transmissividades* térmicas foram obtidas de forma analítica exata. Utilizando o método conhecido como *método dos reservatórios* foi possível analisar numericamente a evolução das distribuições dos acoplamentos renormalizados e verificar a existência de uma transição da fase paramagnética de altas temperaturas para a fase condensada em baixas temperaturas, determinando-se os respectivos pontos críticos para os casos particulares com o número de estados de Potts  $q = 3, 4, 5$  e  $6$ , em redes com dimensão fractal  $D_f = 4, 5$  e  $6$ . Para cada modelo específico com número de estados de Potts  $q = 3, 4, 5$  e  $6$ , foi também calculada a correspondente *dimensão crítica inferior*, abaixo da qual a transição de fase não é observada.

**Palavras-chave:** Modelo de Potts, Redes Hierárquicas, Grupo de Renormalização de Migdal-Kadanoff, Método dos Reservatórios, Vidro de Spins.

## ABSTRACT

The study of interactions between the spins in magnetic materials is a topic of great importance in statistical mechanics. The investigation of thermodynamic and statistical properties of spin models, such as the Potts model, helps to better understand the dynamics of complex systems, enabling a wide variety of applications in many areas. In the case of the Potts model, for example, its applications range from graph theory in mathematical physics, simulations of the formation of ethnic ghettos in sociology to studies on the growth pattern of malignant cells and its influence on the growth of cancer tumors. In this dissertation, we investigate the phase transition of the  $q$ -states Potts model, defined on a fractal lattice and with random interactions (positive and negative) between first nearest-neighbor spins. The values of these interactions are chosen randomly from a probability density function and distributed in a *diamond*-hierarchical lattice family with scale factor 3. We considered the following symmetric functions: Gaussian (normal), delta-bimodal, uniform and exponential. This lattice family is built in an iterative manner in a process which ensures the property of *scale invariance*, thus enabling the technique of real-space Migdal-Kadanoff renormalization group be appropriate to study the critical phenomena model in such lattices.

The renormalization equations for the couplings and the corresponding *thermal transmissivity* were obtained analytically and exactly for arbitrary values of  $q$  and the fractal dimension of the lattice. Using a numerical method, known as *pool method*, it was possible to numerically analyze the evolution of the distribution of the renormalized couplings verifying the existence of possible phase transitions. The transition from high-temperature paramagnetic phase to the low-temperature condensed phase has been particularly studied and the associated critical points obtained for the cases with number of Potts states  $q = 3, 4, 5$  and  $6$  in lattices with fractal dimension  $D_f = 4, 5$  and  $6$ . For each specific model with the number of Potts states  $q = 3, 4, 5$  and  $6$ , it was also calculated the corresponding *lower critical dimension* below which the phase transition is not observed.

**Keywords:** Potts model, hierarchical networks, Migdal-Kadanoff renormalization group, pool method, spin glasses.

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
1.1 Modelo de Potts . . . . .	2
1.2 Redes Hierárquicas . . . . .	10
1.3 Grupo de Renormalização de Migdal-Kadanoff . . . . .	13
1.4 Modelo de Potts em Redes Hierárquicas . . . . .	15
<b>Capítulo 2—GRMK para o modelo de Potts</b>	22
2.1 Vidro de Spins de Potts em redes hierárquicas . . . . .	22
2.2 Equação de renormalização de MK para o modelo de Potts . . . . .	25
2.3 Método dos Reservatórios . . . . .	31
2.4 Resultados e discussão . . . . .	34
2.4.1 Temperaturas críticas . . . . .	34
2.4.2 Determinação das dimensões críticas inferiores . . . . .	40
2.5 Conclusões . . . . .	42
<b>Bibliografia</b>	44

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação dos spins por vetores confinados num plano, no modelo proposto por Domb [1]. . . . .	2
1.2	Formação da célula unitária da rede hierárquica <i>tipo diamante</i> . (a) hierarquia de ordem zero, (b) célula unitária com $p$ conexões e $b$ ligações por conexão. . . . .	11
1.3	Processo de formação da rede hierárquica tipo diamante com $p = 2$ e $b = 3$ . (a) hierarquia de ordem zero; (b) célula unitária da rede (ou hierarquia de ordem um); (c) hierarquia de ordem 2. . . . .	12
1.4	Processo de renormalização da rede quadrada. Cada bloco com 9 sítios na rede original, juntamente com suas interações é substituído por um único sítio na nova rede. . . . .	14
1.5	Célula unitária da rede hierárquica tipo diamante com fator de escala $b=3$ , $p$ conexões e acoplamentos homogêneos. . . . .	17
1.6	Renormalização da $i$ -ésima conexão. (a) conexão $i$ antes da renormalização; (b) o processo de renormalização gera uma nova conexão cujo acoplamento $K'_i$ é função dos acoplamentos antigos $K^s$ . . . . .	18
2.1	Célula básica da rede hierárquica tipo diamante com fator de escala $b = 3$ e $p = 3^{D_f-1}$ . . . . .	25
2.2	Representação ilustrativa de como ocorre a renormalização usando o <i>método dos reservatórios</i> . . . . .	31
2.3	Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para $q = 3$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 4$ para valores de temperatura inicial variando entre 0.50 e 0.90. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>uniforme</i> . . . . .	33
2.4	Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para $q = 3$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 4$ para valores de temperatura inicial variando entre 0.30 e 0.50. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>exponencial</i> . . . . .	34
2.5	Histograma da distribuição para $q = 3$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 4$ . Como $T = 0.5 < T_c$ o sistema vai para a fase condensada. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>gaussiana</i> . . . . .	35

2.6	Histograma da distribuição para $q = 3$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 4$ . Como $T = 0.6 > T_c$ o sistema vai para a fase paramagnética. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>gaussiana</i> . . . . .	36
2.9	Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para $q = 5$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 5$ para valores de temperatura inicial variando entre 0.90 e 1.20. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>gaussiana</i> . . . . .	36
2.7	Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para $q = 3$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 4$ para valores de temperatura inicial variando entre 0.40 e 0.80. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>gaussiana</i> . . . . .	37
2.10	Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para $q = 6$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 5$ para valores de temperatura inicial variando entre 1.7 e 1.10. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>gaussiana</i> . . . . .	37
2.8	Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para $q = 4$ estados de Potts e dimensão fractal $D_f = 5$ para valores de temperatura inicial variando entre 1.50 e 1.90. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a <i>gaussiana</i> . . . . .	38
2.11	Temperatura crítica em função do número de estados de Potts quando a distribuição utilizada é a gaussiana. . . . .	39
2.12	Temperatura crítica em função do número de estados de Potts quando a distribuição utilizada é a uniforme. . . . .	40
2.13	Determinação das Dimensões Críticas inferiores. Os pontos $\bullet$ indicam os valores para os quais encontrou-se transição de fase. . . . .	42
2.14	Temperaturas críticas em função das Dimensões fractais para $q = 3$ para cada uma das distribuições. . . . .	42
2.15	Temperaturas críticas em função das Dimensões fractais para $q = 4$ para cada uma das distribuições. . . . .	43

## LISTA DE TABELAS

2.1	Temperaturas críticas para o modelo de Potts com $q = 3, 4, 5$ e $6$ estados, em redes hierárquicas diamante com dimensão fractal $D_F = 4, 5$ e $6$ , com distribuições de interações Delta-bimodal, Gaussiana, Uniforme e Exponencial. . . . .	39
2.2	Dimensões críticas inferiores para o modelo de Potts com $q = 3, 4, 5$ e $6$ estados, em redes hierárquicas diamante com as distribuições de interações Delta-bimodal, Gaussiana, Uniforme e Exponencial. . . . .	41

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, estudamos as transições de fase do modelo de Potts com  $q$  estados e acoplamentos aleatórios entre sítios primeiros vizinhos, definidos em redes hierárquicas da família diamante com dimensão fractal arbitrária e fator de escala 3.

A dissertação foi organizada com o seguinte roteiro: no capítulo 1, seção 1.1, apresentamos uma breve descrição da origem do modelo de Potts, suas primeiras versões e a sua solução na aproximação de campo médio, e damos exemplos de suas possíveis aplicações em outras áreas da Física. Em seguida na seção 1.2, descrevemos as principais características das redes hierárquicas justificando sua escolha para estudar esse problema, a qual permite usar a técnica do grupo de renormalização no espaço real de Migdal-Kadanoff apresentada na seção 1.3. Em seguida, na seção 1.4, apresentamos a solução do modelo estudado nos casos em que as interações entre spins são homogêneas, i.e. são todas constantes positivas ou constantes negativas correspondendo aos casos dos modelos ferromagnético ou antiferromagnético, respectivamente, estudados previamente por outros autores em vários contextos. No capítulo 2, fazemos inicialmente (seção 2.1) uma breve descrição dos estudos realizados acerca do modelo de Potts com interações aleatórias competitivas, o qual recebe a denominação de vidro de spins de Potts, e que foi estudado previamente por vários autores usando diferentes métodos. Focalizamos, porém, nos estudos do modelo na família de redes hierárquicas diamante com fator de escala 2, tendo em vista que os presentes resultados ampliam e complementam tais estudos para o caso das redes com fator de escala 3, uma distinção relevante que ocorre no caso do modelo antiferromagnético. Em seguida, na seção 2.2, apresentamos o cálculo analítico exato da equação de renormalização para os acoplamentos do modelo estudado, realizado nesta dissertação, e na seção seguinte (2.3) descrevemos o método numérico usado para analisar o comportamento do fluxo das distribuições dos acoplamentos renormalizados, o qual permite identificar as transições de fase porventura existentes.

## 1.1 MODELO DE POTTS

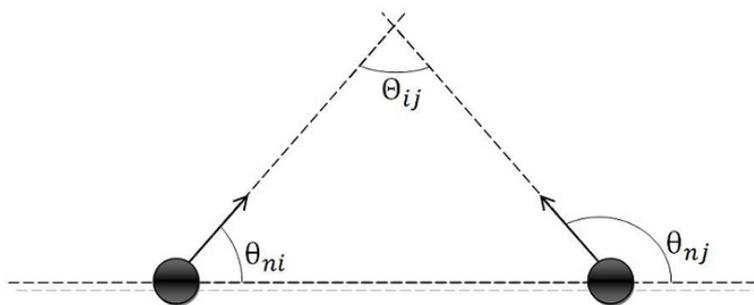
O modelo de Potts descreve a interação entre spins em uma rede (grafo) com variáveis que podem assumir  $q$  estados. Nesse modelo existem dois valores possíveis para a energia de interação entre as variáveis de spin: 0 (zero) quando os valores das variáveis forem diferentes e 1 quando tiverem o mesmo valor. O modelo de Potts com  $q$  estados contém o modelo de Ising como um caso particular quando  $q = 2$ . O estudo do modelo que veio a ficar conhecido como *modelo de Potts* foi proposto por Cyrill Domb [1] como tópico da tese de doutoramento do seu então estudante Renfrey B. Potts. Na realidade o que Domb propôs foi que a transformação estudada por Kramers e Wannier [2] para o modelo de Ising bidimensional poderia ser generalizada para um *modelo vetorial planar* contendo 3 orientações simétricas nos ângulos de  $0$ ,  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$ , sugerindo então obter a temperatura de Curie para esse modelo. Domb acreditava que seria possível obter um modelo vetorial planar com  $q$  orientações simétricas. Uma versão do modelo para 4 estados já havia sido estudada anteriormente por Ashkin e Teller [3].

Após um estudo mais detalhado, Potts percebeu que não era possível generalizar a transformação pelo modelo vetorial planar mas sim por um modelo com  $q$ -estados com duas energias de interações distintas que correspondem ao vizinho mais próximo estar no mesmo estado ou em um estado diferente.

A generalização proposta inicialmente por Domb consiste em um sistema de spins confinados em um plano “apontando” para uma das  $q$  direções simétricas definidas pelos ângulos:

$$\theta_n = \frac{2\pi n}{q}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, (q - 1) \quad (1.1)$$

É razoável considerar que as interações entre os vizinhos mais próximos dependa apenas do ângulo entre essas direções.



**Figura 1.1** Representação dos spins por vetores confinados num plano, no modelo proposto por Domb [1].

Se o ângulo entre os spins dos sítios  $i$  e  $j$ , é

$$\Theta_{ij} = \theta_{nj} - \theta_{ni}, \quad (1.2)$$

o hamiltoniano de interação pode ser definido como:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J(\Theta_{ij}). \quad (1.3)$$

O modelo sugerido por Domb ficou conhecido como *modelo de Potts planar* (Fig. 1.1), com a interação entre pares de spins definida por:

$$J(\Theta_{ij}) = -\epsilon \cos(\theta_{nj} - \theta_{ni}). \quad (1.4)$$

Para esse modelo, Potts conseguiu calcular o ponto crítico de uma transição de fase ferromagnética ( $\epsilon > 0$ ) em uma rede quadrada para  $q = 2, 3, 4$ . Mas não foi possível obter tal resultado para  $q > 4$ . Potts sugeriu então o modelo que ficou conhecido como *modelo de Potts padrão* (ou simplesmente *modelo de Potts*). Definindo

$$J(\Theta_{ij}) = -\epsilon \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (1.5)$$

Onde  $\{\sigma_i\}$  é a variável de spin de Potts do sítio “i” e pode assumir valores  $\sigma_i = 1, 2, \dots, q$  (ou  $\sigma_i = 0, 1, \dots, q - 1$ ). sendo

$$\delta_{\sigma_i, \sigma_j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma_i = \sigma_j. \\ 0, & \text{se } \sigma_i \neq \sigma_j. \end{cases} \quad (1.6)$$

Se considerarmos apenas a interação entre primeiros vizinhos então, na ausência de campo externo aplicado, temos que o hamiltoniano é dado por:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}. \quad (1.7)$$

Através da aproximação de campo médio foi possível obter um resultado qualitativamente satisfatório da transição de fase do modelo de Ising [4]. Na ausência de uma solução exata, é natural que examinemos o modelo de Potts na aproximação de campo médio. Como exemplo, vamos aplicar essa solução e mostrar que esse modelo apresenta transição de fase de primeira ordem para o caso em que as interações entre os spins são homogêneas. Observando a equação (1.7), podemos notar que o modelo de Potts padrão será: ferromagnético se  $J_{ij} = J > 0$  e será antiferromagnético se  $J_{ij} = J < 0$ . O hamiltoniano de interação, como sugerido por F. Y. Wu [4] tem a seguinte expressão:

$$H = - \frac{J\gamma}{2N} \sum_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (1.8)$$

onde  $\gamma$  representa o número de coordenação da rede.

A função de partição canônica é dada por [5]:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta E(\{\sigma\})}. \quad (1.9)$$

Então, podemos escrever:

$$Z = \sum_{\sigma_1=0}^{q-1} \sum_{\sigma_2=0}^{q-1} \dots \sum_{\sigma_N=0}^{q-1} \exp \left[ \frac{J\beta\gamma}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{\sigma_i\sigma_j} \right]. \quad (1.10)$$

Definiremos duas grandezas que simplificarão a notação das próximas equações. A primeira,  $n_{\sigma_i}$  que é o *número de spins no estado  $\sigma_i$*

$$n_{\sigma_i} = \sum_{j=1}^N \delta_{\sigma_i\sigma_j}, \quad (1.11)$$

e  $x_{\sigma_i}$  que nos dará a *fração de spins que está no estado  $\sigma_i$* .

$$x_{\sigma_i} = \frac{n_{\sigma_i}}{N}, \quad \text{onde} \quad \sum_{\sigma_i=0}^{q-1} x_{\sigma_i} = 1 \quad (1.12)$$

Para reescrever a função de partição em termos dessas novas grandezas substituiremos as equações (1.11) e (1.12) em (1.10):

$$Z = \sum_{\sigma_1=0}^{q-1} \dots \sum_{\sigma_N=0}^{q-1} \exp \left[ \frac{J\beta\gamma}{2N} \sum_{i=1}^N n_{\sigma_i} \right], \quad (1.13)$$

logo:

$$Z = \sum_{\sigma_1=0}^{q-1} \dots \sum_{\sigma_N=0}^{q-1} \exp \left[ \frac{J\beta\gamma}{2} \sum_{i=1}^N x_{\sigma_i} \right]. \quad (1.14)$$

Usando as propriedades da exponencial:

$$Z = \sum_{\sigma_1=0}^{q-1} \dots \sum_{\sigma_N=0}^{q-1} \prod_{i=1}^N \exp \left[ \frac{J\beta\gamma}{2} x_{\sigma_i} \right]. \quad (1.15)$$

Sabendo que:

$$Z = \sum_{\sigma_1=0}^{q-1} \dots \sum_{\sigma_N=0}^{q-1} \exp \left( \frac{J\beta\gamma}{2} x_{\sigma_1} \right) \cdot \dots \cdot \exp \left( \frac{J\beta\gamma}{2} x_{\sigma_N} \right) \quad (1.16)$$

$$= \left[ \sum_{\sigma_1} \exp \left( \frac{J\beta\gamma}{2} x_{\sigma_1} \right) \right] \cdot \dots \cdot \left[ \sum_{\sigma_N} \exp \left( \frac{J\beta\gamma}{2} x_{\sigma_N} \right) \right], \quad (1.17)$$

podemos obter a função de partição canônica:

$$Z = \left[ \sum_{\sigma=0}^{q-1} \exp \left( \frac{J\beta\gamma}{2} x_{\sigma} \right) \right]^N. \quad (1.18)$$

Vamos obter agora uma expressão para a energia livre de Helmholtz por spin a partir da seguinte relação:

$$F = U - TS. \quad (1.19)$$

Para o valor de  $U$  podemos considerar:

$$U = E = \langle H \rangle, \quad (1.20)$$

e, pela definição de média termodinâmica, temos que:

$$E = \langle H \rangle \equiv \frac{\sum_{\sigma} H e^{-\beta H}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H}}. \quad (1.21)$$

Substituindo a equação (1.8) na equação acima:

$$E = \frac{\sum_{\sigma} \left( -\frac{J\gamma}{2N} \sum_{ij} \delta_{\sigma_i \sigma_j} \right) e^{-\beta H}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H}}. \quad (1.22)$$

Rearrmando a expressão e usando as definições (1.11) e (1.12), então:

$$E = \frac{\sum_{\sigma} \left( -\frac{J\gamma}{2} \sum_i x_{\sigma_i} \right) e^{-\beta H}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H}}. \quad (1.23)$$

Podemos observar que:

$$\frac{\sum_{\sigma} (\sum_i x_{\sigma_i}) e^{-\beta H}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H}} \equiv \left\langle \sum_i x_{\sigma_i} \right\rangle, \quad (1.24)$$

logo:

$$E = -\frac{J\gamma}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N x_{\sigma_i} \right\rangle = -\frac{J\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \langle x_{\sigma_i} \rangle. \quad (1.25)$$

Considerando que o sistema possui invariância translacional temos:

$$\langle x_{\sigma_i} \rangle = \langle x_{\sigma} \rangle \quad \forall i,$$

e então:

$$E = -\frac{J\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \langle x_{\sigma} \rangle = -\frac{J\gamma}{2} (N \cdot \langle x_{\sigma} \rangle). \quad (1.26)$$

Chegamos, assim, à equação:

$$E = -\frac{NJ\gamma}{2} \langle x_{\sigma} \rangle. \quad (1.27)$$

Por outro lado a fração média de spins no estado  $\sigma$ , pela definição de média, é

$$\langle x_\sigma \rangle = \sum_{\sigma=0}^{q-1} x_\sigma \cdot P(\sigma), \quad (1.28)$$

onde  $P(\sigma)$  é a probabilidade de encontrar spins no estado  $\sigma$ . Mas, até a ordem do termo líder em  $N$ , temos

$$n_\sigma \sim NP(\sigma) \therefore x_\sigma = \frac{n_\sigma}{N} \simeq P(\sigma). \quad (1.29)$$

Finalmente, substituindo (1.29) em (1.28), a expressão para a energia média por spin até a ordem do termo líder em  $N$ , fica, [4]

$$\frac{E}{N} = -\frac{J\gamma}{2} \sum_{i=0}^{q-1} x_\sigma^2. \quad (1.30)$$

Para obter a energia livre (eq. 1.19), precisamos de uma expressão para a entropia por spin que esteja escrita em termos de  $x_{\sigma_i}$ . Para isso usaremos a definição de entropia encontrada no livro do Reif [5]:

$$\frac{S}{N} = k_B [\ln(Z) + \beta \langle H \rangle]. \quad (1.31)$$

Sabemos que:

$$E = \langle H \rangle \equiv \sum_{\sigma} E_\sigma \cdot P(\sigma), \quad (1.32)$$

e ainda que:

$$P(\sigma) = \frac{e^{-\beta E_\sigma}}{Z}. \quad (1.33)$$

Manipulando a equação acima temos, juntamente com a condição de normalização  $\sum_{\sigma=1}^q P(\sigma) = 1$ , uma expressão para a entropia por spin até a ordem do termo líder em  $N$ :

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum_{\sigma=0}^{q-1} x_\sigma \cdot \ln(x_\sigma). \quad (1.34)$$

Reescrevendo a equação (1.19) e dividindo ambos os lados pelo número de spins  $N$ :

$$\frac{F}{N} = \frac{E}{N} - T \cdot \frac{S}{N} \quad (1.35)$$

Substituindo as equações (1.30) e (1.34) na equação acima, obtemos

$$f = -\frac{J\gamma}{2} \sum_{\sigma=0}^{q-1} x_\sigma^2 + k_B T \sum_{\sigma=0}^{q-1} x_\sigma \cdot \ln(x_\sigma), \quad (1.36)$$

e com isso chegamos a uma expressão para a *energia livre por spin* [4]:

$$\beta f = \sum_{\sigma=0}^{q-1} [x_{\sigma} \cdot \ln(x_{\sigma}) - \frac{\gamma K}{2} x_{\sigma}^2], \quad (1.37)$$

onde  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  e  $K = \frac{J}{k_B T}$

Como  $x_{\sigma}$  representa a fração dos sítios que está no estado  $\sigma$  temos que, se todos os sítios estiverem no mesmo estado, ou seja se  $x_{\sigma} = 1$ , o sistema encontra-se na fase condensada (ferromagnética). Se, por outro lado, todos os estados estiverem igualmente populados então a fração de sítios em um determinado estado  $\sigma$  será  $x_{\sigma} = \frac{1}{q}$  correspondendo assim à fase paramagnética. Dessa maneira podemos escolher um parâmetro  $m$  tal que [4]:

$$x_0 = \frac{1}{q}[1 + (q-1)m], \quad \sigma = 0 \quad (1.38)$$

$$x_{\sigma} = \frac{1}{q}(1-m), \quad \sigma = 1, 2, \dots, (q-1), \quad (1.39)$$

onde  $m$  é o parâmetro de ordem e  $0 \leq m \leq 1$ .

Substituindo essas soluções em (1.37):

$$\beta f = x_0 \ln(x_0) - \frac{\gamma K}{2} x_0^2 + \sum_{\sigma=1}^{q-1} [x_{\sigma} \ln(x_{\sigma}) - \frac{\gamma K}{2} x_{\sigma}^2]. \quad (1.40)$$

Como, para qualquer  $\sigma$  desse somatório, a solução para  $x_{\sigma}$  será sempre a mesma, então podemos substituir o somatório por um fator multiplicativo  $(q-1)$ :

$$\beta f = x_0 \ln(x_0) - \frac{\gamma K}{2} x_0^2 + (q-1)[x_{\sigma} \ln(x_{\sigma}) - \frac{\gamma K}{2} x_{\sigma}^2]. \quad (1.41)$$

Substituindo as soluções (1.38) e (1.39) na equação acima e rearrumando as expressões obtemos:

$$\begin{aligned} \beta f &= \frac{1}{q}[1 + (q-1)m] \ln[1 + (q-1)m] \\ &+ \frac{(q-1)(1-m)}{q} \ln(1-m) \\ &- \ln(q) - \frac{\gamma K}{2q}(q-1)m^2 - \frac{\gamma K}{2q}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Agrupando os termos que não dependem do parâmetro de ordem podemos definir:

$$\beta f(0) = -\ln(q) - \frac{\gamma K}{2q} \quad (1.43)$$

Obtemos assim uma expressão para a energia livre por spin:

$$\begin{aligned}\beta[f(m) - f(0)] &= \frac{1}{q}[1 + (q-1)m] \ln[1 + (q-1)m] \\ &+ \frac{(q-1)(1-m)}{q} \ln(1-m) \\ &- \frac{\gamma K}{2q}(q-1)m^2.\end{aligned}\tag{1.44}$$

No limite em que  $m \ll 1$  podemos fazer uma expansão em série da equação acima a fim de verificar o tipo de transição de fase que ocorre. Para isso, faremos uso das seguintes expansões:

$$\begin{aligned}\ln[1 + (q-1)m] &= (q-1)m - \frac{1}{2}(q-1)^2m^2 \\ &+ \frac{1}{3}(q-1)^3m^3 + \dots \\ \ln(1-m) &= -m - \frac{1}{2}m^2 + \dots\end{aligned}\tag{1.45}$$

Substituindo as equações (1.45) na equação (1.44) e em seguida fazendo algumas manipulações obtemos, finalmente, a expressão:

$$\begin{aligned}\beta[f(m) - f(0)] &= \frac{(q-1)}{2q}(q - \gamma K)m^2 - \frac{1}{6}(q-1)(q-2)m^3 \\ &+ \frac{1}{3}(q-1)^2(q-2)m^4 + \dots\end{aligned}\tag{1.46}$$

A existência de um coeficiente negativo no termo cúbico para  $q > 2$  revela a ocorrência de uma transição de fase de 1<sup>a</sup> ordem para o sistema [6].

O modelo de Potts ferromagnético tem sido amplamente estudado em diversos contextos [4]. Observa-se que esse sistema, para  $q \geq 2$ , é paramagnético em altas temperaturas e em baixas temperaturas exibe um comportamento ferromagnético.

Recentemente o modelo de Potts vem se tornando uma ferramenta muito útil, com uma grande variedade de aplicações para diversas áreas além da mecânica estatística de transição de fase tais como Biologia, Sociologia e Física Matemática.

Em Biologia, por exemplo, há uma aplicação bastante promissora do modelo de Potts no estudo de como a quantidade e localização de nutrientes em tecidos saudáveis influencia no padrão de crescimento de células malignas e na formação de câncer [7].

Com uma leve alteração no Hamiltoniano do modelo de Potts padrão, Schulze, C. conseguiu, baseando-se no trabalho sobre segregação do economista Schelling, T. C. (Nobel de Economia em 2005) [8], simular a formação de guetos étnicos bem como a sua prevenção através da análise de uma grandeza definida como *temperatura social*. [9]

Como exemplo de uma aplicação em Física Matemática, podemos citar a relação entre a função de partição do modelo de Potts padrão com os *polinômios de Tutte* que são de grande interesse no estudo da teoria dos grafos [10]. Em particular, no caso em que os

acoplamentos são negativos ( $J < 0$ ), o modelo é dito ser antiferromagnético. Sua função de partição em  $T = 0$  é precisamente o chamado *polinômio de Tutte cromático*  $P(G, q)$  do grafo  $G$ , que conta o número de maneiras de atribuir  $q$  cores aos vértices (sítios) de  $G$ , de tal maneira que nenhum par de vértices conectados possua a mesma cor [11].

Os exemplos citados acima servem para dar um panorama geral de como o estudo desse modelo é rico em possibilidades de aplicação. Mas, é importante salientar que para ser possível desenvolvermos aplicações ainda mais elaboradas precisamos responder questões fundamentais, ainda em aberto, a respeito do modelo de Potts.

Nesta dissertação, nos dedicaremos ao estudo das possíveis transições de fase do modelo de Potts, definido em redes hierárquicas e possuindo interações aleatórias com sinais positivos e negativos.

## 1.2 REDES HIERÁRQUICAS

Ao estudarmos sistemas de spins é importante levarmos em consideração a forma como os spins (ou variáveis de spin) estão distribuídos espacialmente. No estudo dos materiais magnéticos são consideradas diversas formas de organização desses materiais. Muitos dos modelos com interações de intercâmbio estudados são definidos em redes de Bravais, ou seja, redes baseadas em uma célula unitária e com simetria translacional [12]. Para ilustrar isso, podemos citar a famosa solução exata do modelo de Ising bidimensional apresentada por Onsager em 1944 [13], que por um longo tempo manteve-se como o primeiro e o único modelo de spins (matematicamente rigoroso) com solução exata em sistemas com dimensão maior que 1, e que por isso representa um dos marcos na Física teórica [14].

Porém o número de modelos definidos em rede de Bravais que possuem solução exata é muito reduzido. Uma alternativa na busca por soluções exatas para esses modelos é estudar o seu comportamento em redes fractais. Essas redes possuem simetria por transformação de escala. Porém, ao contrário das redes de Bravais, não possuem simetria translacional. Modelos com soluções exatas em redes que não possuem simetria translacional tem contribuído para o desenvolvimento da mecânica estatística da transição de fase [15].

Redes fractais obtidas a partir do processo de iteração de uma célula básica são denominadas *redes hierárquicas*.

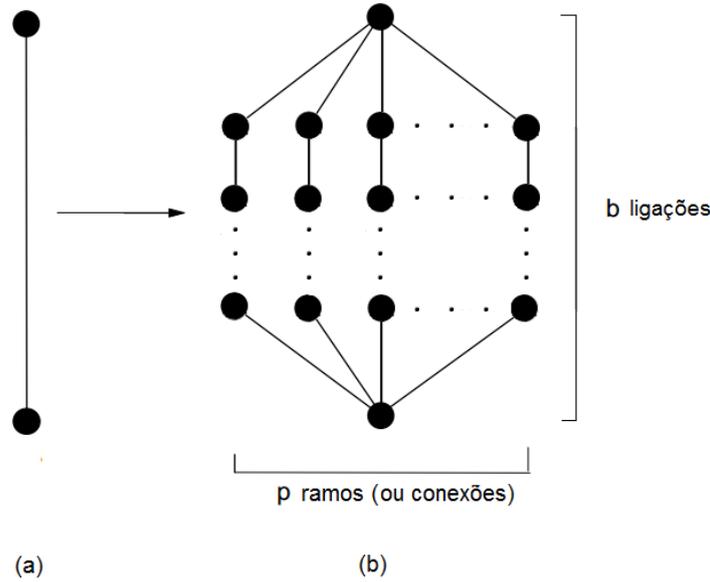
Algo muito interessante nesse tipo de rede é que, em muitas situações, elas podem ser consideradas como um tipo de *aproximação* de alguma rede de Bravais [16]. Isso porque modelos que não possuem solução exata em rede de Bravais, podem possuir solução exata em uma rede hierárquica cuja dimensão fractal é próxima daquela da rede de Bravais de interesse [17]. Devemos tomar cuidado ao tentarmos utilizar resultados obtidos em modelos definidos em redes hierárquicas para descrever o comportamento do modelo em redes de Bravais. Pois embora soluções exatas em redes hierárquicas nos dêem uma descrição *qualitativa* do que acontece em uma rede de Bravais, os resultados numéricos obtidos são, em geral, pouco precisos.

Recentemente redes hierárquicas têm atraído muita atenção no estudo da mecânica estatística das transições de fase, porque modelos clássicos de spin, tais como os modelos de Ising e de Potts, têm solução exata nessas redes [18]. Neste trabalho utilizaremos um exemplo de rede hierárquica conhecida como *rede tipo diamante*.

Como já foi dito anteriormente, a rede hierárquica é gerada de uma maneira iterativa. Parte-se de uma célula denominada de *célula unitária* e em seguida substitui-se cada uma das ligações dessa célula por uma célula idêntica à original.

Para construirmos uma rede hierárquica tipo-diamante, que é o tipo que utilizaremos nessa dissertação, parte-se de dois pontos conectados entre si os quais correspondem à hierarquia de ordem zero, como na figura 1.2 (a); na iteração seguinte a ligação da hierarquia de ordem zero é substituída por  $p$  conexões em paralelo, cada uma contendo  $b$  ligações (conexões) em série como mostra a figura 1.2 (b), a essa hierarquia de ordem 1 dá-se o nome de *célula unitária* (ou célula básica) da rede.

Para obter hierarquias de ordem superior, deve-se substituir sucessivamente cada



**Figura 1.2** Formação da célula unitária da rede hierárquica *tipo diamante*. (a) hierarquia de ordem zero, (b) célula unitária com  $p$  conexões e  $b$  ligações por conexão.

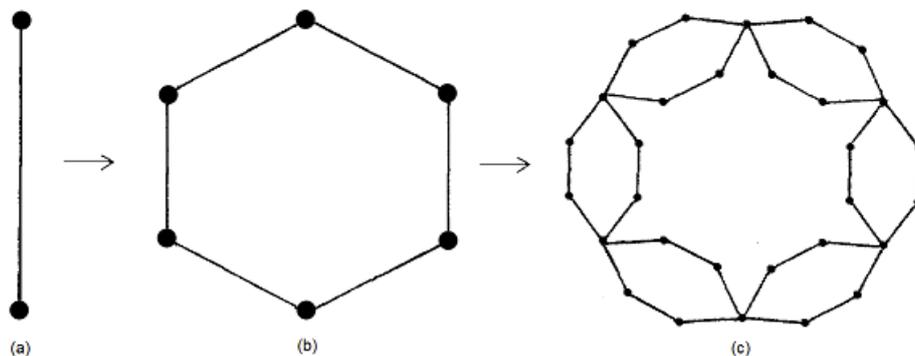
ligação da rede pela célula unitária. Esse processo pode ser repetido até que se tenha uma rede com  $N$  hierarquias (Fig. 1.3) [17, 18, 19]. Nos vértices ou sítios da rede formada são alocadas as variáveis de spin, e com isso podemos estabelecer as ligações como os acoplamentos entre os spins. Se o processo é realizado no sentido inverso ao que foi descrito aqui, este é conhecido como processo de dizimação da rede. Nele se parte das redes de hierarquia maior e vão se reduzindo progressivamente até alcançar a hierarquia de ordem zero.

Como já foi dito, a rede hierárquica tipo-diamante é uma rede fractal e portanto pode apresentar dimensão não inteira. Sendo assim é necessário que utilizemos uma definição apropriada de dimensão fractal para as características geométricas dessa rede. Se  $L$  é o tamanho característico linear da rede, em unidades de ligações, e  $N_b$  está associado ao seu volume (número total de ligações) para determinado tamanho, então define-se a dimensão fractal pelo expoente que governa o crescimento do volume com relação ao tamanho característico, ou seja,  $N_b \propto L^{d_f}$ , sendo  $d_f$  a dimensão fractal definida no limite termodinâmico como [20]:

$$d_f = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_b)}{\ln(L)} \quad (1.47)$$

No caso de uma rede hierárquica tipo-diamante, cuja célula unitária tem  $p$  conexões e fator de escala  $b$ , na  $n$ -ésima hierarquia temos que:  $L = b^n$  e  $N_b = (bp)^n$ . Com isso podemos reescrever a dimensão fractal da rede em termos de  $p$  e  $b$  [19]:

$$d_f = 1 + \frac{\ln(p)}{\ln(b)}. \quad (1.48)$$



**Figura 1.3** Processo de formação da rede hierárquica tipo diamante com  $p = 2$  e  $b = 3$ . (a) hierarquia de ordem zero; (b) célula unitária da rede (ou hierarquia de ordem um); (c) hierarquia de ordem 2.

Para uma rede com  $N$  hierarquias o número total de sítios é:

$$N_s = 2 + \frac{(b-1)p[(bp)^N - 1]}{bp - 1}, \quad (1.49)$$

e o número de ligações,

$$N_b = (bp)^N. \quad (1.50)$$

A propriedade de invariância de escala das redes hierárquicas tipo-diamante faz com que o uso da técnica do *Grupo de Renormalização de Migdal-Kadanoff* (GRMK) seja exata para esse tipo de rede. A técnica do GRMK será melhor discutida na seção seguinte.

### 1.3 GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE MIGDAL-KADANOFF

Até meados da década de 1960, a maior parte dos métodos aproximativos que eram conhecidos para o estudo das transições de fase davam um entendimento apenas qualitativo dos fenômenos críticos inerentes [21].

Os cálculos dos expoentes críticos de modelos de spin eram feitos de três maneiras: por solução exata do modelo, através da análise das propriedades termodinâmicas no regime crítico; por simulação numérica direta; ou por extrapolação de soluções aproximadas [22].

Uma das soluções mais bem sucedidas para o problema da transição de fase foi baseada nos argumentos propostos por Kadanoff em um artigo de 1966 [23]. O ponto principal do argumento apresentado é que quando nos aproximamos do ponto crítico, o comprimento de correlação vai crescendo resultando numa diminuição da sensibilidade do sistema a uma transformação de escala. No ponto crítico, o comprimento de correlação seria tão grande ( $\xi \rightarrow \infty$ ) que o sistema se tornaria *invariante a uma transformação de escala* [24].

A intuição Física apresentada no argumento de Kadanoff carecia de um desenvolvimento mais quantitativo. O problema foi resolvido de maneira definitiva e profunda por Kenneth Wilson (Nobel, 1982) em dois artigos fundamentais no ano de 1971 [25, 26]. Wilson construiu sua teoria aperfeiçoando uma técnica em Física teórica chamada *grupo de renormalização* (GR).

A técnica do GR divide-se em duas classes. Uma relacionada à teoria de campos conhecida como *técnica do espaço- $k$* , que recebe esse nome por tratar de quantidades escritas em termos de transformadas de Fourier. E a outra recebe o nome de *grupo de renormalização no espaço real*. O termo *espaço real* se refere ao fato de essa técnica envolver quantidades que dependem da posição no espaço de coordenadas usual. Nesse trabalho, utilizaremos as técnicas do grupo de renormalização no espaço real que também é conhecido como *Grupo de Renormalização de Migdal-Kadanoff* (GRMK).

O método do GRMK é apropriado para modelos baseados em redes que apresentam simetria de escala discreta. Uma rede tem simetria de escala se ao agruparmos os sítios da rede em blocos e substituírmos esses blocos por um único sítio que representa todos os sítios do bloco (inclusive com suas interações) conseguirmos produzir uma rede semelhante à inicial exceto por um *fator de escala*  $b$  (Ver Fig. 1.4).

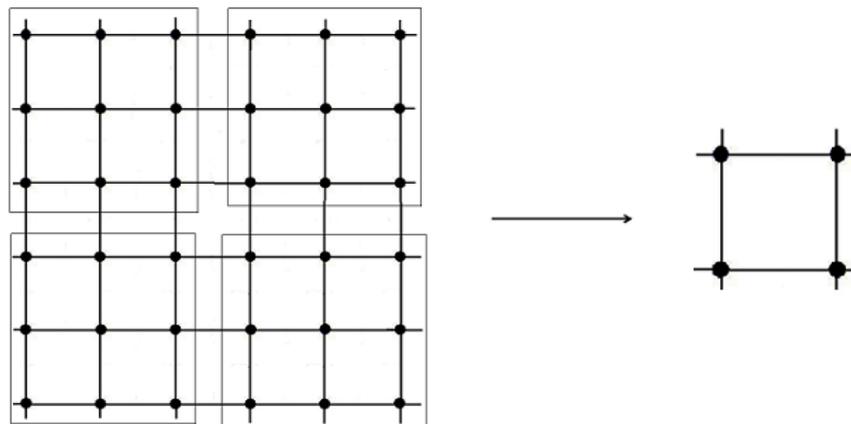
Utilizando esse processo alteramos o comprimento de escala do sistema obtendo assim uma nova rede reduzida com um número menor de sítios e um número menor de interações. A rede inicial descrita pelo Hamiltoniano reduzido,  $\bar{H} \equiv \frac{H}{k_b T}$ , é renormalizada para um novo sistema descrito pelo novo Hamiltoniano reduzido  $\bar{H}'$ :

$$\bar{H}' = R(\bar{H}). \quad (1.51)$$

O operador do grupo de renormalização  $R$  reduz o número de graus de liberdade do sistema preservando suas propriedades de simetria. O fator de escala da transformação é definido por:

$$b^d = \frac{N}{N'}, \quad (1.52)$$

onde  $N$  é o número de spins da rede original,  $N'$  é o número de spins da rede renormalizada e  $d$  é o número de dimensões espaciais [27].



**Figura 1.4** Processo de renormalização da rede quadrada. Cada bloco com 9 sítios na rede original, juntamente com suas interações é substituído por um único sítio na nova rede.

A condição essencial que deve ser satisfeita por qualquer transformação de grupo de renormalização é que a função de partição seja invariante sob a transformação [21]:

$$Z_{N'}(\bar{H}') = Z_N(\bar{H}) \quad (1.53)$$

Como a energia livre é uma grandeza extensiva então, de acordo com a condição descrita acima, a energia livre por spin reduzida,  $\bar{f}' \equiv \frac{f}{k_b T}$  se transforma da seguinte maneira:

$$\bar{f}'(\bar{H}') = b^d \bar{f}'(\bar{H}), \quad (1.54)$$

ou seja, como uma função homogênea.

Utilizamos nessa seção uma rede quadrada genérica a fim de ilustrar a técnica de maneira qualitativa. A seguir, na seção 1.4, aplicaremos o GRMK ao modelo de Potts na rede hierárquica tipo diamante.

## 1.4 MODELO DE POTTS EM REDES HIERÁRQUICAS

Diversos estudos a cerca do modelo de Potts vêm sendo realizados nos últimos anos utilizando várias técnicas diferentes e com as mais diversas finalidades. Como exemplo de um desses estudos podemos citar o atualmente bem entendido caso do ferromagneto de Potts com  $q$ -estados que foi investigado utilizando-se aproximação de campo médio em [4].

A relação entre a função de partição do modelo de Potts padrão com acoplamentos negativos (antiferromagneto de Potts) em  $T = 0$  (“*ground-state*”) e o polinômio de Tutte cromático foi estudada utilizando o processo denominado de inflação de arestas e vértices (“*edge and vertex inflation*”). (ver [11] e referências contidas). O polinômio de Tutte cromático  $P(G, q)$  do grafo  $G$ , conta o número de maneiras de atribuir  $q$  cores aos vértices (sítios) de  $G$ , de tal maneira que nenhum par de vértices conectados possua a mesma cor.

No artigo de F. Shuangli e F. Zhong publicado recentemente, utilizou-se uma sucessiva aplicação do procedimento do grupo de renormalização de Monte Carlo na presença de uma variação linear de temperatura para estudar o modelo de Potts com  $q = 3$  estados em uma rede quadrada [28].

Em redes hierárquicas, podemos citar o artigo de Fernando D. Nobre e Evaldo M. F. Curado que investiga a degenerescência do estado fundamental do antiferromagneto de Potts com  $q$  estados em redes tipo diamante com fator de escala  $b = 2$  e  $b = 3$  [29]. Ainda em redes hierárquicas podemos citar o trabalho de Ladário et al [16] onde os autores estudam as propriedades de criticalidade e multifractalidade da magnetização local e global na ausência de campo externo aplicado para o ferromagneto de Potts com  $q$  estados definido em redes hierárquicas.

Observa-se que para baixas temperaturas o modelo ferromagnético de Potts em  $d$  dimensões, na ausência de campo externo aplicado, apresenta uma transição do estado paramagnético para o estado ordenado ferromagnético para qualquer  $q > 1$  e  $d > 1$  e que para esse sistema os resultados qualitativos são independentes do fator de escala  $b$  [15]. Na presença de um campo magnético intenso, além da transição usual sofrida pelo ferromagneto de Potts, observa-se uma transição de fase tipo-Ising [30].

Enquanto o ferromagneto de Potts não sofre mudança qualitativa ao variarmos sensivelmente o fator de escala da rede utilizada, o modelo de Potts antiferromagnético puro, que foi estudado primeiramente por Berker e Kadanoff [31], apresenta um comportamento notavelmente distinto para redes com  $b = 2$  e  $b = 3$ . Observa-se que o comportamento do modelo para valores pares do fator de escala  $b$  é qualitativamente similar ao caso  $b = 2$  enquanto que para todos os valores ímpares de  $b$  o comportamento assemelha-se ao caso em que  $b = 3$  [32].

No artigo de Y. Quin e Z. R. Yang [19], os autores utilizam o método de GRMK para investigar o antiferromagneto de Potts definido em uma rede hierárquica diamante. Eles dividem os sistemas em dois grupos: as redes com fator de escala ímpar e redes com fator de escala par, encontrando uma relação de recorrência distinta em cada um dos casos.

Em  $b = 3$  o modelo antiferromagnético apresenta, em baixas temperaturas, uma fase que ficou conhecida como fase *Berker-Kadanoff* onde o comprimento de correlação decai algebricamente e a temperatura crítica é diferente de zero [19].

Vamos agora considerar o modelo de Potts com interações homogêneas (ferromagnéticas ou antiferromagnéticas) definido em uma rede hierárquica do tipo diamante com fator de escala  $b = 3$  e aplicar a técnica do GRMK. É importante notar que como vamos tratar, inicialmente, de um sistema de Potts com interações homogêneas, devemos considerar que todas as interações entre os spins têm o mesmo valor ( $J_{ij} = J$ ). Podemos então partir da equação (1.7) e reescrever o Hamiltoniano de interação:

$$H = -qJ \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \quad (1.55)$$

onde multiplicamos a equação (1.7) pelo número de estados  $q$  a fim de normalizar o hamiltoniano [33], com respeito ao número de estados  $q$ .

Nesse ponto é bastante conveniente definir:

$$K = -\frac{J}{k_B T} \quad (1.56)$$

Onde  $K$  é o acoplamento reduzido entre os spins e  $k_B$  é a constante de Boltzmann.

Substituindo a equação (1.56) em (1.55) obtemos o Hamiltoniano reescrito de uma maneira adimensional:

$$\bar{H} = qK \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \quad (1.57)$$

$$\bar{H} = -\beta H \quad (1.58)$$

A função de partição canônica, definida em (1.9), pode ser escrita como:

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left\{ qK \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \right\} \quad (1.59)$$

O Hamiltoniano, da maneira como está escrito até agora, não traz em si nenhuma característica da rede. Para levarmos em consideração que estamos tratando o modelo em uma rede hierárquica tipo diamante é necessário que façamos uma pequena distinção entre os sítios da célula unitária.

Observando com atenção a figura (1.5), podemos reescrever a função de partição:

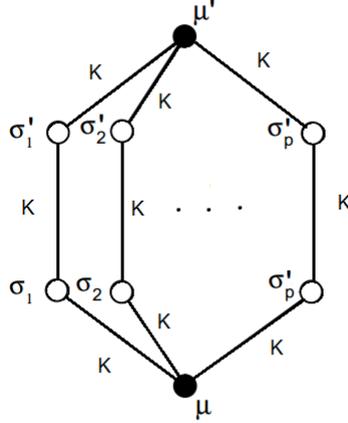
$$Z = \sum_{\mu} \sum_{\sigma} \exp \left\{ qK \left[ \sum_{i=1}^p (\delta_{\sigma_i \mu} + \delta_{\sigma'_i \mu'} + \delta_{\sigma_i \sigma'_i}) \right] \right\} \quad (1.60)$$

Podemos definir a *função de partição restrita* como:

$$Z_{\mu, \mu'} = \sum_{\sigma_i=1}^q \sum_{\sigma'_i=1}^q \exp \left\{ qK \left[ \sum_{i=1}^p (\delta_{\sigma_i \mu} + \delta_{\sigma'_i \mu'} + \delta_{\sigma_i \sigma'_i}) \right] \right\}. \quad (1.61)$$

E, com isso

$$Z = \sum_{\{\mu\}} Z_{\mu, \mu'} \quad (1.62)$$



**Figura 1.5** Célula unitária da rede hierárquica tipo diamante com fator de escala  $b=3$ ,  $p$  conexões e acoplamentos homogêneos.

Como a exponencial de uma soma resulta em um produto de exponenciais

$$Z_{\mu,\mu'} = \sum_{\sigma_i=1}^q \sum_{\sigma'_i=1}^q \prod_{i=1}^p \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma'_i\mu'} + \delta_{\sigma_i\sigma'_i})\} \quad (1.63)$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$Z_{\mu,\mu'} = \prod_{i=1}^p \sum_{\sigma_i,\sigma'_i} \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma'_i\mu'} + \delta_{\sigma_i\sigma'_i})\}. \quad (1.64)$$

Podemos definir uma *função de partição restrita por conexão (ou ramo)* como

$$Z_{\mu,\mu'}^{(i)} = \sum_{\sigma_i,\sigma'_i} \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma'_i\mu'} + \delta_{\sigma_i\sigma'_i})\}, \quad (1.65)$$

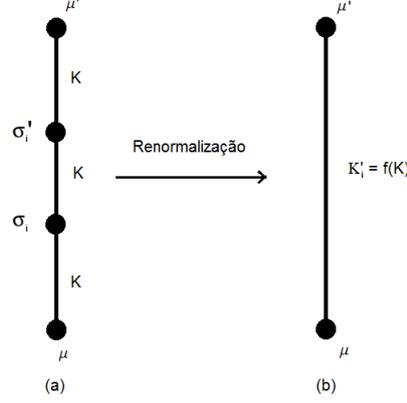
de modo que

$$Z_{\mu,\mu'} = \prod_{i=1}^p Z_{\mu,\mu'}^{(i)} \quad (1.66)$$

Para entender melhor o que seria essa *função de partição restrita por conexão* podemos considerar a célula unitária como sendo um conjunto de cadeias lineares onde cada uma das  $p$  conexões paralelas é composta por  $b$  ligações em série. (ver fig. 1.6)

Para dar prosseguimento na obtenção da função de partição restrita por conexão vamos agora separar o somatório: os termos com sítios internos no mesmo estado ( $\sigma'_i = \sigma_i$ ) e os termos com sítios internos em estados distintos ( $\sigma'_i \neq \sigma_i$ ). Logo:

$$Z_{\mu,\mu'}^{(i)} = \sum_{\sigma_i=\sigma'_i} \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma_i\mu'} + 1)\} + \sum_{\substack{\sigma_i,\sigma'_i \\ \sigma_i \neq \sigma'_i}} \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma'_i\mu'})\} \quad (1.67)$$



**Figura 1.6** Renormalização da  $i$ -ésima conexão. (a) conexão  $i$  antes da renormalização; (b) o processo de renormalização gera uma nova conexão cujo acoplamento  $K_i'$  é função dos acoplamentos antigos  $K^s$ .

Podemos reescrever a equação acima como:

$$Z_{\mu,\mu'}^{(i)} = e^{qK} \cdot \sum_{\sigma_i=\sigma_i'} \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma_i\mu'})\} + \sum_{\substack{\sigma_i,\sigma_i' \\ \sigma_i \neq \sigma_i'}} \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma_i'\mu'})\} \quad (1.68)$$

Vamos considerar as seguintes possibilidades para os sítios raízes: eles podem ter o mesmo estado ( $\mu = \mu'$ ) ou podem ter estados distintos ( $\mu \neq \mu'$ ).

1.  $\mu = \mu'$

$$Z_{\mu,\mu}^{(i)} = Z_{\mu,\mu}^{(i)} = e^{qK} \sum_{\sigma_i'=\sigma_i=1}^q \exp \{2qK\delta_{\sigma_i\mu}\} + \underbrace{\sum_{\sigma_i'=1}^q \sum_{\sigma_i=1}^q \exp \{qK(\delta_{\sigma_i\mu} + \delta_{\sigma_i'\mu})\}}_{\sigma_i \neq \sigma_i'} \quad (1.69)$$

Podemos resolver o somatório para ( $\sigma_i' = \sigma_i$ ) e usar a propriedade das exponenciais novamente para o somatório com ( $\sigma_i' \neq \sigma_i$ ):

$$Z_{\mu,\mu}^{(i)} = e^{qK} [e^{2qK} + (q-1)] + \underbrace{\sum_{\sigma_i'=1}^q \sum_{\sigma_i=1}^q e^{qK\delta_{\sigma_i\mu}} \cdot e^{qK\delta_{\sigma_i'\mu}}}_{\sigma_i \neq \sigma_i'}. \quad (1.70)$$

Resolvendo agora o somatório para ( $\sigma_i' \neq \sigma_i$ ), temos que:

$$Z_{\mu,\mu}^{(i)} = e^{qK} [e^{2qK} + (q-1)] + \{(q-1)e^{qK} + (q-1)e^{qK} + [q(q-1) - 2(q-1)]\}. \quad (1.71)$$

Logo:

$$Z_{\mu,\mu}^{(i)} = e^{3qK} + 3(q-1)e^{qK} + q(q-3) + 2. \quad (1.72)$$

2.  $\mu \neq \mu'$

$$\begin{aligned} Z_{\mu,\mu'}^{(i)} &= e^{qK} [e^{qK} + e^{qK} + (q-2)] \\ &+ \{e^{2qK} + (q-2)e^{qK} + (q-2)e^{qK} + q(q-3) + 3\} \end{aligned} \quad (1.73)$$

Agrupando alguns termos:

$$Z_{\mu,\mu'}^{(i)} = 3e^{2qK} + 3(q-2)e^{qK} + q(q-3) + 3. \quad (1.74)$$

Substituindo os resultados obtidos para  $\mu = \mu'$  e  $\mu \neq \mu'$  na equação 1.66 temos que:  
Para  $\mu = \mu'$

$$Z_{\mu,\mu'} = \prod_{i=1}^p e^{3qK} + 3(q-1)e^{qK} + q(q-3) + 2. \quad (1.75)$$

E para  $\mu \neq \mu'$

$$Z_{\mu,\mu'} = \prod_{i=1}^p 3e^{2qK} + 3(q-2)e^{qK} + q(q-3) + 3. \quad (1.76)$$

Como todos os acoplamentos são iguais, inclusive os que são de conexões distintas, então o produtório em  $i$  representa o produto de  $p$  vezes o mesmo fator. Logo:

Para  $\mu = \mu'$

$$Z_{\mu,\mu'} = [e^{3qK} + 3(q-1)e^{qK} + q(q-3) + 2]^p, \quad (1.77)$$

e para  $\mu \neq \mu'$

$$Z_{\mu,\mu'} = [3e^{2qK} + 3(q-2)e^{qK} + q(q-3) + 3]^p. \quad (1.78)$$

Passaremos de uma hierarquia maior para uma menor tomando como ponto de partida a célula unitária da rede e substituindo todos os acoplamentos por uma única constante  $K'$  que chamamos de *acoplamento da rede renormalizada*. Aplicando o processo de dizimação da rede o Hamiltoniano efetivo após a renormalização é:

$$\bar{H}' = -\beta H' = qK'\delta_{\mu\mu'} + \text{constante}, \quad (1.79)$$

A função de partição da rede renormalizada é obtida através da equação:

$$Z' = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} Z'_{\mu\mu'} = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} e^{-\beta H'} = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} e^{\bar{H}'} \quad (1.80)$$

$$Z' = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \exp(qK'\delta_{\mu\mu'} + C) \quad (1.81)$$

$$Z' = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \underbrace{e^C \cdot \exp qK'\delta_{\mu\mu'}}_{Z'_{\mu\mu'}}, \quad (1.82)$$

$$(1.83)$$

onde  $Z'_{\mu\mu'}$  é a função de partição restrita, dada por:

$$Z'_{\mu\mu'} = A \cdot \exp(qK'\delta_{\mu\mu'}), \quad (1.84)$$

com  $A = e^C$ .

Temos que, quando

(a)  $\mu = \mu'$

$$Z'_{\mu\mu'} = Z'_{\mu\mu} = A \cdot \exp(qK') \quad (1.85)$$

(b)  $\mu \neq \mu'$

$$Z'_{\mu\mu'} = A \quad (1.86)$$

Como foi dito na seção (1.3), para qualquer transformação de Grupo de Renormalização a função de partição é invariante pela transformação, ou seja:

$$Z'(\bar{H}') = Z(\bar{H}) \quad (1.87)$$

Então, para  $\mu = \mu'$ :

$$A \cdot \exp(qK') = [e^{3qK} + 3(q-1)e^{qK} + q(q-3) + 2]^p, \quad (1.88)$$

e, para  $\mu \neq \mu'$ :

$$A = [3e^{2qK} + 3(q-2)e^{qK} + q(q-3) + 3]^p. \quad (1.89)$$

Substituindo a equação (1.89) na equação (1.88):

$$e^{qK'} = \frac{[e^{3qK} + 3(q-1)e^{qK} + q(q-3) + 2]^p}{[3e^{2qK} + 3(q-2)e^{qK} + q(q-3) + 3]^p}, \quad (1.90)$$

logo:

$$K' = \frac{p}{q} \ln \left[ \frac{e^{3qK} + 3(q-1)e^{qK} + q(q-3) + 2}{3e^{2qK} + 3(q-2)e^{qK} + q(q-3) + 3} \right], \quad (1.91)$$

Para estudarmos as possíveis transições de fase do modelo precisamos de um espaço de parâmetros apropriado. Com isso em vista introduziremos a definição de uma variável conhecida como *transmissividade térmica* [33]:

$$t_n = \frac{1 - \exp -qK_n}{1 + (q-1)\exp -qK_n}. \quad (1.92)$$

De uma maneira simplificada, essa grandeza mede a probabilidade de um sítio estar, ou não, interagindo com outro sítio.

Podemos inverter a definição e chegar a seguinte expressão:

$$\exp(qK_n) = \frac{1 + (q-1)t_n}{1 - t_n}. \quad (1.93)$$

Podemos substituir a equação (1.93) em (1.90) e efetuar uma série de manipulações até obtermos:

$$\exp(qK') = \frac{[1 + (q-1)t^3]^p}{[1 - t^3]^p}. \quad (1.94)$$

Usando a equação (1.93) podemos substituir  $\exp(qK')$  na equação acima e obter:

$$\frac{1 + (q-1)t'}{1 - t'} = \frac{[1 + (q-1)t^3]^p}{[1 - t^3]^p}, \quad (1.95)$$

efetuando algumas manipulações podemos escrever uma relação de recorrência para a transmissividade térmica:

$$t' = \frac{[1 + (q-1)t^3]^p - (1 - t^3)^p}{[1 + (q-1)t^3]^p + (q-1)(1 - t^3)^p}. \quad (1.96)$$

Nos pontos fixos teremos  $t' = t = t^*$ . Neste caso, a equação (1.96) se transformará em uma equação polinomial, cujas raízes reais serão os pontos fixos que descreverão as transições de fase do modelo.

Manipulando a equação (1.94) podemos reescrever os acoplamentos renormalizados em função das transmissividades térmicas:

$$K' = \frac{p}{q} \ln \left[ \frac{1 + (q-1)t^3}{1 - t^3} \right]. \quad (1.97)$$

Nessa seção foi visto um exemplo de como aplicar o método do GRMK a uma rede hierárquica e obteve-se algumas relações que serão utilizadas mais adiante, no capítulo 2 dessa dissertação, onde essa mesma técnica será aplicada a uma situação um pouco mais complexa, em que as interações entre os spins da rede não serão mais homogêneas mas sim, aleatórias.

No capítulo seguinte, investigaremos o modelo de Potts com interações aleatórias (*Vidro de Spins de Potts*) definido em uma rede hierárquica da família diamante com fator de escala  $b = 3$ .

# GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE MIGDAL-KADANOFF PARA O MODELO DE POTTS EM REDES HIERÁRQUICAS COM FATOR DE ESCALA 3.

## 2.1 VIDRO DE SPINS DE POTTS EM REDES HIERÁRQUICAS

Vidros de spins são sistemas magnéticos cujas interações entre os momentos magnéticos estão em conflito umas com as outras devido a alguma desordem estrutural [34].

Em sistemas fabricados, colocando-se uma pequena quantidade de impurezas magnéticas distribuídas aleatoriamente na rede de um material não magnético, surgem interações desordenadas, que podem ser interações competitivas.

Ao contrário dos sistemas ferromagnéticos e dos antiferromagnéticos, sistemas como o descrito acima não apresentam estrutura magnética ordenada com simetria de longo alcance. Há dois ingredientes básicos para se ter um sistema tipo vidro de spins: desordem e interações competitivas (frustração) [35].

Ligas magnéticas fracamente diluídas com frustração e desordem, em geral, não conseguem estabelecer comportamento com simetria de longo alcance como no caso ferromagnético e antiferromagnético. No entanto, esses sistemas apresentam uma transição de resfriamento (do inglês, *freezing transition*) para um estado com um novo tipo de ordem em que os spins estão alinhados em direções aleatórias “congeladas” [34].

O nome vidro de spin é atribuído a esse estado por duas razões: a primeira é que os íons, que funcionam como impurezas magnéticas na rede, têm seus momentos magnéticos como que congelados aleatoriamente conforme supracitado; e segundo, em baixas temperaturas o calor específico é linear com a temperatura, como em um vidro convencional. Devido às direções aleatórias em que os spins *congelam*, nesse estado, embora existam domínios magnéticos com magnetização não nula, a magnetização global do sistema é nula.

Ainda é uma questão de debate se o tempo de relaxação e o comprimento de correlação do estado vidro de spins diverge na temperatura de resfriamento, significando uma transição de fase, ou apenas torna-se grande e finito. Com isso surge a pergunta: A transição de resfriamento é uma nova transição de fase ou um fracasso em estabelecer o equilíbrio térmico completo durante o tempo de observação? [34] Considerando que há uma transição de fase podemos definir um novo parâmetro de ordem conhecido como *parâmetro de ordem Edwards-Anderson*:

$$q_{EA} = \overline{\langle S_i \rangle_T^2}, \quad (2.1)$$

onde  $S_i$  é a variável de spin e além disso  $\langle \rangle_T$  representa a média térmica enquanto que a barra superior representa a média configuracional sobre a desordem na distribuição de interações.

O modelo de Edwards-Anderson (EA) [36] e sua versão simplificada, o modelo de Sherrington-Kirkpatrick (SK) [37], estão entre os primeiros que se propuseram a explicar o comportamento de materiais com características de vidro de spins. No modelo de EA a interação de intercâmbio entre os spins da rede é aleatoriamente ferromagnética ou antiferromagnética de acordo com uma função de distribuição de probabilidades simétrica. O modelo de SK considera variáveis de spins de Ising e investiga as interações de longo alcance aplicando a solução de campo médio.

Muitos esforços têm sido feitos em busca de soluções que correspondam a sistemas físicos reais, onde as interações entre os spins tem alcance finito. Nesse contexto são aplicadas as mais variadas técnicas em diversos modelos.

Como exemplo podemos citar o artigo de M. Scheucher e J. D. Reger [38] onde os autores usam simulação Monte Carlo e matriz de transferência para investigar o comportamento crítico do vidro de spins de Potts com  $q = 3$  estados com interações de primeiros vizinhos em uma rede hipercúbica. Em particular, para  $d = 2$ , a degenerescência do estado fundamental é calculada em função do número de estados de Potts para  $q = 3, 4$  e  $5$  e comparada ao estado fundamental do antiferromagneto. Ainda utilizando simulação de Monte Carlo, L. W. Lee *et al.* estudaram o comportamento crítico do vidro de spins de Potts em três e quatro dimensões [39]. Ainda nesse artigo, os autores mostraram que o comprimento de correlação para o modelo de Potts com interações aleatórias e  $q = 10$  em três dimensões permanecia pequeno mesmo em temperaturas muito baixas indicando assim ausência de transição.

Utilizando o método do GRMK em redes hipercúbicas, Benyoussef e Loulidi estudaram o diagrama de fase do vidro de spins de Potts de curto alcance [40]. Esse artigo mostra que o modelo, para  $q > 2$ , “congela-se” em uma fase, que os autores chamam de *vidro de spin de Potts* em uma temperatura diferente de zero, em  $d = 4$ . Ainda nesse artigo podemos ver uma ampliação do método do GRMK onde assume-se que a distribuição de probabilidades permanece invariante durante o processo de renormalização (apenas os seus momentos variam). Essa aproximação pode ser definida para qualquer dimensão e qualquer valor de  $q$ , mas vários problemas foram detectados ao tentar utilizar esse *truque* usando simulação Monte Carlo.

Como mencionamos na seção 1.2, o método do GRMK em redes de Bravais funciona como uma aproximação enquanto que em redes hierárquicas ele pode ser resolvido de maneira exata [17]. Diversos estudos foram feitos a respeito do vidro de spins de Potts em redes hierárquicas utilizando o GRMK. No artigo de F. Iglói e L. Turban [41] podemos ver o modelo, para o limite de valores grandes de  $q$ , sendo estudado em uma rede hierárquica diamante com fator de escala  $b = 2$ , levemente distinta da que é utilizada nesta dissertação ( $b = 3$ ).

Investigando o modelo de Potts com interações aleatórias competitivas definido em uma rede hierárquica diamante com fator de escala  $b = 2$ , Camelo Neto *et al.* observaram a transição do modelo da fase paramagnética para a fase condensada obtendo a temperatura crítica da transição para diversos valores de  $q$  e  $d$  [42]. É importante mencionar

que o comportamento anormal da média da distribuição de acoplamentos renormalizada já havia sido descrito muitos anos antes por J. Banavar e A. J. Bray em [32] como um *vaguear caótico* no caso particular da rede com dimensão 5 e número de estados  $q=3$ . Esse comportamento caótico foi investigado, posteriormente, por Camelo Neto [43] que obteve, inclusive, um *atrator estranho* como “ponto fixo” da fase condensada em um espaço de parâmetros apropriado. O cálculo da magnetização local e dos expoentes críticos para o vidro de spins de Potts foi realizado por Lima, W. em [44]. A dimensão fractal do atrator, obtido por Camelo Neto [43], e o seu expoente de Lyapunov foram então calculados e estudados em [45]. Finalmente os efeitos de *caos* induzido por temperatura na magnetização do sistema foram estudados em [46].

Banavar e Bray haviam observado que esse comportamento caótico ocorria apenas no caso do modelo Potts Glass com  $b=2$  [32]. Por esta razão, tornou-se importante aprofundar a investigação das transições de fase do modelo *Potts Glass* nos casos em que  $b = 3$  (ímpar) em analogia ao que ocorre no modelo AF definidos nas redes hierárquicas diamante [19]. Ou seja, verificar a natureza das transições de fase e a existência (ou inexistência) do *atrator estranho*, objeto de estudo desta dissertação, e determinar as suas propriedades críticas em trabalho futuro.

No que segue, neste capítulo, estudaremos o modelo de Potts com interações aleatórias com  $q$  estados definido na família de redes hierárquicas diamante com fator de escala  $b = 3$ , considerando quatro funções simétricas de densidade de probabilidades para as interações entre spins primeiros vizinhos.

## 2.2 EQUAÇÃO DE RENORMALIZAÇÃO DE MK PARA O MODELO DE POTTS NA REDE HIERÁRQUICA DIAMANTE COM FATOR DE ESCALA 3

Usando o método apresentado anteriormente para o caso com ligações homogêneas (ferro ou antiferromagnéticas), iremos obter a equação de renormalização de MK para o modelo de Potts com ligações aleatórias na rede hierárquica tipo-diamante com fator de escala 3.

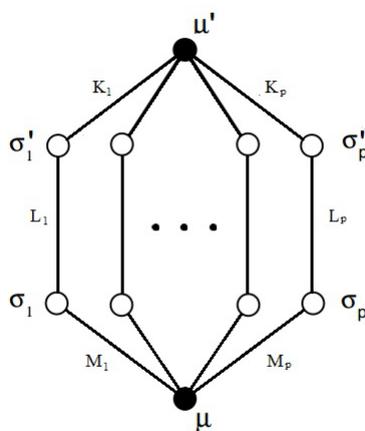
Como já mencionado anteriormente, as redes hierárquicas são autosimilares e por isso faremos uso da técnica do grupo de renormalização no espaço real, que é ideal para essas redes, a fim de encontrarmos a equação

$$K' = f(\{K\}) \quad (2.2)$$

que relaciona os acoplamentos renormalizados  $\{K'\}$  com os acoplamentos iniciais da rede  $\{K\}$ .

Faremos corresponder a cada sítio da rede uma variável de spin de Potts  $\sigma$  que pode assumir os valores  $\sigma = 1, 2, \dots, q$  ou  $(\sigma = 0, 1, \dots, (q - 1))$ . É importante notar que a interação entre as células unitárias só ocorre via sítios raízes.

Para cada célula da rede com  $N$  hierarquias serão fixados os valores das variáveis de spin dos sítios raízes  $\mu$  e  $\mu'$  e feita a dizimação de seus sítios internos. Aplicar o método do GR consiste em dizimar a rede por um fator de escala  $b$ , em seguida encontrar uma relação entre os acoplamentos originais  $K_i, L_i$  e  $M_i$  e os acoplamentos renormalizados e, finalmente, comparar a função de partição inicial com a função de partição da rede renormalizada. (ver figura 2.1)



**Figura 2.1** Célula básica da rede hierárquica tipo diamante com fator de escala  $b = 3$  e  $p = 3^{D_f - 1}$

O Hamiltoniano de interação para uma única célula unitária com  $p$  conexões pode ser escrito como:

$$H = -q \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (2.3)$$

onde  $J_{ij}$  é o acoplamento entre os sítios e  $q$  é colocado a fim de normalizar a energia com respeito ao número de estados. Podemos definir o Hamiltoniano adimensional como:

$$\bar{H} = -\beta \cdot H = q \sum_{\langle i,j \rangle} K_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (2.4)$$

onde  $K_{ij} = J_{ij}/k_B T$  representa o acoplamento reduzido. A função de partição é dada por:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H) = \sum_{\{\sigma\}} \exp \bar{H}, \quad (2.5)$$

logo:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left( q \sum_{\langle i,j \rangle} K_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \right). \quad (2.6)$$

Como cada célula unitária só interage com as demais através dos sítios raízes então podemos fazer o processo de dizimação para uma única célula unitária e em seguida somar sobre todos os sítios raízes, ou seja:

$$Z = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \underbrace{\left\{ \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ q \sum_{i=1}^p (K_i \delta_{\sigma'_i \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i \sigma'_i} + M_i \delta_{\sigma_i \mu}) \right] \right\}}_{\text{função de partição restrita } Z_{\mu\mu'}}, \quad (2.7)$$

logo:

$$Z_{\mu\mu'} = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ q \sum_{i=1}^p (K_i \delta_{\sigma'_i \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i \sigma'_i} + M_i \delta_{\sigma_i \mu}) \right]. \quad (2.8)$$

Como a exponencial da soma é igual ao produto das exponenciais:

$$Z_{\mu\mu'} = \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma'_i} \prod_{i=1}^p \exp [q(K_i \delta_{\sigma'_i \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i \sigma'_i} + M_i \delta_{\sigma_i \mu})] \quad (2.9)$$

Usando propriedades da função exponencial temos que:

$$Z_{\mu\mu'} = \prod_{i=1}^p \underbrace{\left\{ \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma'_i} \exp [q(K_i \delta_{\sigma'_i \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i \sigma'_i} + M_i \delta_{\sigma_i \mu})] \right\}}_{\text{Função de partição restrita por conexão } Z_{\mu\mu'}^{(i)}}, \quad (2.10)$$

onde

$$Z_{\mu\mu'} = \prod_{i=1}^p Z_{\mu\mu'}^{(i)}, \quad (2.11)$$

com

$$Z_{\mu\mu'}^{(i)} = \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma'_i} \exp [q(K_i\delta_{\sigma'_i\mu'} + L_i\delta_{\sigma_i\sigma'_i} + M_i\delta_{\sigma_i\mu})]. \quad (2.12)$$

Para simplificar os cálculos dividiremos o somatório sobre os sítios internos em dois termos. Em um dos termos somaremos as conexões com  $\sigma_i = \sigma'_i$  e no segundo termo estarão as conexões com  $\sigma_i \neq \sigma'_i$ .

Logo:

$$\begin{aligned} Z_{\mu\mu'}^{(i)} &= \sum_{\substack{\sigma_i, \sigma'_i \\ \sigma_i = \sigma'_i}} \exp [q(K_i\delta_{\sigma_i\mu'} + L_i + M_i\delta_{\sigma_i\mu})] \\ &+ \sum_{\substack{\sigma_i, \sigma'_i \\ \sigma_i \neq \sigma'_i}} \exp [q(K_i\delta_{\sigma'_i\mu'} + M_i\delta_{\sigma_i\mu})]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vamos agora fazer uma distinção entre dois possíveis casos:

1.  $\mu = \mu'$

$$\begin{aligned} Z_{\mu\mu}^{(i)} &= Z_{\mu\mu}^{(i)} = \sum_{\sigma_i = \sigma'_i} \exp(qL_i) \cdot \exp[q\delta_{\sigma_i\mu}(K_i + M_i)] \\ &+ \sum_{\sigma_i \neq \sigma'_i} \exp[q(K_i\delta_{\sigma'_i\mu} + M_i\delta_{\sigma_i\mu})]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Lembrando que a função delta de Kronecker é calculada da seguinte maneira:

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

E com isso podemos escrever:

$$\begin{aligned} Z_{\mu\mu}^{(i)} &= [e^{qL_i} \cdot e^{q(K_i+M_i)} + e^{qL_i} \cdot (q-1)] \\ &+ \{(q-1)e^{qK_i} + (q-1)e^{qM_i} + [q(q-1) - 2(q-1)]\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} Z_{\mu\mu}^{(i)} &= e^{qL_i} [(q-1) + e^{q(K_i+M_i)}] + (q-1)(e^{qK_i} + e^{qM_i}) \\ &+ (q-1)(q-2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} Z_{\mu\mu}^{(i)} &= e^{q(K_i+L_i+M_i)} + (q-1)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) \\ &+ q(q-3) + 2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.  $\mu \neq \mu'$

$$\begin{aligned} Z_{\mu\mu'}^{(i)} &= \sum_{\sigma_i = \sigma'_i} \exp(qL_i) \cdot \exp[q(K_i\delta_{\sigma_i\mu'} + M_i\delta_{\sigma_i\mu})] \\ &+ \sum_{\sigma_i \neq \sigma'_i} \exp[q(K_i\delta_{\sigma'_i\mu'} + M_i\delta_{\sigma_i\mu})] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Novamente utilizando a definição da função delta de Kronecker:

$$Z_{\mu\mu'}^{(i)} = e^{qL_i} [e^{qK_i} + e^{qM_i} + (q-2)] + \{e^{q(K_i+M_i)} + (q-2)e^{qK_i} + (q-2)e^{qM_i} + [q(q-1) - 2(q-2) - 1]\} \quad (2.19)$$

$$Z_{\mu\mu'}^{(i)} = [e^{q(K_i+L_i)} + e^{q(L_i+M_i)} + e^{q(K_i+M_i)}] + (q-2)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 3 \quad (2.20)$$

Usando esses resultados para  $\mu = \mu'$  e  $\mu \neq \mu'$  na equação (2.11) temos que:

Para  $\mu = \mu'$

$$Z_{\mu\mu} = \prod_{i=1}^p \{e^{q(K_i+L_i+M_i)} + (q-1)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 2\} \quad (2.21)$$

E para  $\mu \neq \mu'$

$$Z_{\mu\mu'} = \prod_{i=1}^p \{[e^{q(K_i+L_i)} + e^{q(K_i+M_i)} + e^{q(L_i+M_i)}] + (q-2)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 3\} \quad (2.22)$$

Passaremos de uma hierarquia maior para uma menor tomando como ponto de partida a célula unitária da rede e substituindo todos os acoplamentos por uma única constante  $K'$  que chamamos de *acoplamento da rede renormalizada*. Aplicando o processo de dizimação da rede o Hamiltoniano fica:

$$\bar{H}' = -\beta H' = qK'\delta_{\mu\mu'} + C, \quad (2.23)$$

onde  $C$  é uma constante a determinar.

A função de partição da rede renormalizada é obtida através da equação:

$$Z' = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} Z'_{\mu\mu'} = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} e^{-\beta H'} = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} e^{\bar{H}'} \quad (2.24)$$

$$Z' = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \exp(qK'\delta_{\mu\mu'} + C) \quad (2.25)$$

$$Z' = \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \underbrace{e^C \cdot \exp qK'\delta_{\mu\mu'}}_{Z'_{\mu\mu'}}, \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

onde  $Z'_{\mu\mu'}$  é a função de partição restrita, dada por:

$$Z'_{\mu\mu'} = A \cdot \exp(qK'\delta_{\mu\mu'}), \quad (2.28)$$

com  $A = e^C$ .

Temos que, quando

(a)  $\mu = \mu'$

$$Z'_{\mu\mu'} = Z'_{\mu\mu} = A \cdot \exp(qK') \quad (2.29)$$

(b)  $\mu \neq \mu'$

$$Z'_{\mu\mu'} = A \quad (2.30)$$

Como foi dito na seção (1.3), para qualquer transformação de Grupo de Renormalização a função de partição é invariante pela transformação, ou seja:

$$Z'(\bar{H}') = Z(\bar{H}) \quad (2.31)$$

Então, para  $\mu = \mu'$ :

$$A \cdot \exp(qK') = \prod_{i=1}^p \{e^{q(K_i+L_i+M_i)} + (q-1)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 2\} \quad (2.32)$$

e, para  $\mu \neq \mu'$ :

$$A = \prod_{i=1}^p \{[e^{q(K_i+L_i)} + e^{q(K_i+M_i)} + e^{q(L_i+M_i)}] + (q-2)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 3\} \quad (2.33)$$

Substituindo a equação (2.33) na equação (2.32):

$$e^{qK'} = \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{e^{q(K_i+L_i+M_i)} + (q-1)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 2}{[e^{q(K_i+L_i)} + e^{q(K_i+M_i)} + e^{q(L_i+M_i)}] + (q-2)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 3} \right\} \quad (2.34)$$

Logo:

$$K' = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^p \ln \left\{ \frac{e^{q(K_i+L_i+M_i)} + (q-1)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 2}{[e^{q(K_i+L_i)} + e^{q(K_i+M_i)} + e^{q(L_i+M_i)}] + (q-2)(e^{qK_i} + e^{qL_i} + e^{qM_i}) + q(q-3) + 3} \right\} \quad (2.35)$$

Como vimos na equação (2.36), a transmissividade térmica é definida por:

$$t_n = \frac{1 - \exp(-qK_n)}{1 + (q-1)\exp(-qK_n)} \quad (2.36)$$

Com um pouco de manipulação matemática podemos inverter a definição e chegar à seguinte expressão:

$$\exp(qK_n) = \frac{1 + (q-1)t_n}{1 - t_n} \quad (2.37)$$

Logo, fazendo o procedimento de maneira análoga podemos obter:

$$\begin{aligned}\exp(qK_i) &= \frac{1 + (q-1)t_{K_i}}{1 - t_{K_i}} \\ \exp(qL_i) &= \frac{1 + (q-1)t_{L_i}}{1 - t_{L_i}} \\ \exp(qM_i) &= \frac{1 + (q-1)t_{M_i}}{1 - t_{M_i}}\end{aligned}\tag{2.38}$$

Substituindo as equações (2.38) na equação (2.34) podemos obter, com um pouco de álgebra, uma equação que relacione os acoplamentos renormalizados com as transmissividades térmicas renormalizadas:

$$e^{qK'} = \prod_{i=1}^p \frac{1 + (q-1)t_{K_i}t_{L_i}t_{M_i}}{1 - t_{K_i}t_{L_i}t_{M_i}},\tag{2.39}$$

E finalmente chegamos à expressão:

$$K' = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^p \ln \left\{ \frac{1 + (q-1)t_{K_i}t_{L_i}t_{M_i}}{1 - t_{K_i}t_{L_i}t_{M_i}} \right\},\tag{2.40}$$

que é uma expressão equivalente à eq. (2.35).

Como mostraremos na seção seguinte, as equações de renormalização para os acoplamentos e para suas correspondentes transmissividades térmicas obtidas nessa seção serão utilizadas para estudar as possíveis transições de fase do modelo em um espaço de parâmetros apropriado.

## 2.3 MÉTODO DOS RESERVATÓRIOS

As equações (2.36) e (2.40) obtidas na seção anterior de forma analítica exata são as responsáveis pela dinâmica das interações entre os spins da rede. Para determinar as possíveis transições de fase do modelo de Potts com interações aleatórias devemos utilizar um método que atribua às variáveis  $K_i$ ,  $L_i$  e  $M_i$  valores aleatórios que obedecem a uma função de distribuição de probabilidades.

Utilizaremos um método conhecido como *método dos reservatórios* para iterar a equação (2.40) e analisar numericamente a evolução das distribuições e dos acoplamentos renormalizados [47].

Inicialmente devemos escolher uma função de distribuição de probabilidades a partir da qual construiremos um banco de valores para serem atribuídos aos acoplamentos. Em seguida selecionamos, de forma aleatória, valores desse banco para *aplicá-los* na equação (2.36) gerando assim os valores iniciais das transmissividades. Tendo obtido as transmissividades iniciais basta substituí-las em (2.40) e chegamos assim a um novo banco constituído por acoplamentos renormalizados.

O próximo passo é substituir o banco inicial pelo banco dos acoplamentos renormalizados e a partir dele o processo de escolha aleatória dos acoplamentos é efetuado novamente até que se obtenha um novo banco que, no próximo passo da renormalização, servirá de reservatório. (Para uma definição formal do método dos reservatórios ver [48]). A figura (2.2) mostra uma ilustração de como ocorre a troca dos reservatórios.



**Figura 2.2** Representação ilustrativa de como ocorre a renormalização usando o *método dos reservatórios*

Esse processo pode ser repetido quantas vezes for necessário e o fluxo da renormalização pode ser seguido calculando-se os momentos das distribuições de probabilidades em cada passo [49]. Iremos considerar como distribuição inicial para formação dos bancos as quatro distribuições simétricas definidas abaixo:

1. Distribuição Delta-Bimodal

$$P(J_{i,j}) = \frac{1}{2} [\delta(J_{i,j} - 1) + \delta(J_{i,j} + 1)], \quad (2.41)$$

2. Distribuição Exponencial

$$P(J_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2} |J_{i,j}|), \quad (2.42)$$

3. Distribuição Gaussiana

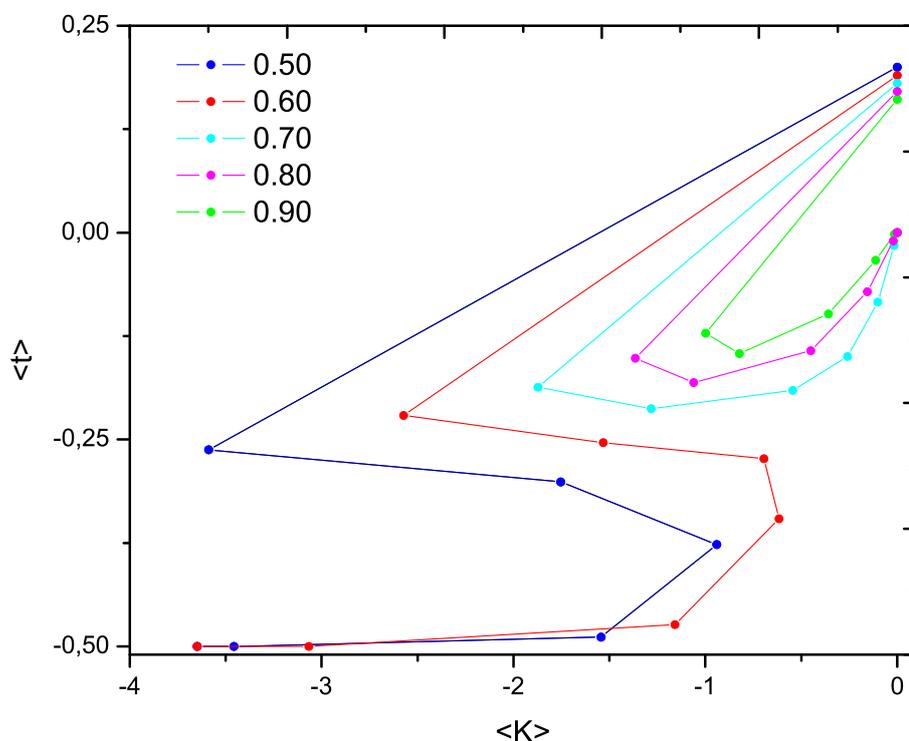
$$P(J_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} J_{i,j}^2\right), \quad (2.43)$$

4. Distribuição Uniforme

$$P(J_{i,j}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & \text{se } -\sqrt{3} \leq J_{i,j} \leq \sqrt{3}. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.44)$$

Podemos definir e construir diferentes diagramas de fluxo com os momentos obtidos da renormalização dos acoplamentos [48, 44]. Nessa dissertação analisaremos o plano formado entre o primeiro momento da distribuição das transmissividades térmicas ( $\langle t \rangle$ ) e o primeiro momento da distribuição dos acoplamentos ( $\langle K \rangle$ ).

Nesse espaço de parâmetros, dependendo do valor da temperatura inicial que escolhermos, o processo de renormalização faz o fluxo se direcionar ou para o ponto fixo correspondente à fase paramagnética ou para aquele da fase condensada.

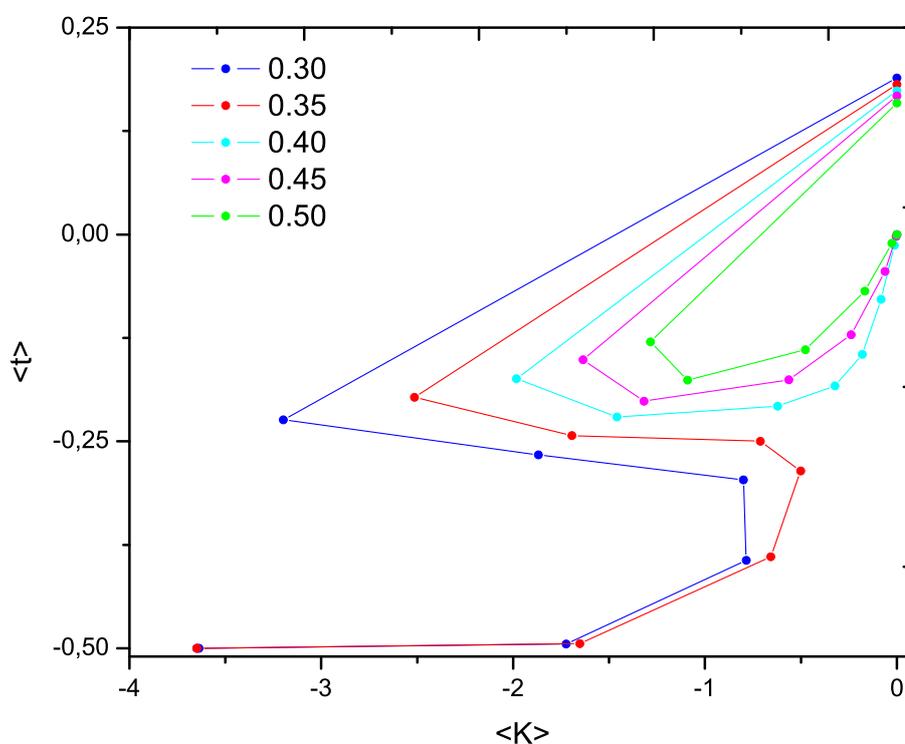


**Figura 2.3** Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para  $q = 3$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 4$  para valores de temperatura inicial variando entre 0.50 e 0.90. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *uniforme*.

No diagrama apresentado na figura 2.3 é possível observar que para os valores de temperatura inicial acima de um certo valor crítico o fluxo permanece na região onde o módulo da média dos acoplamentos é pequeno e em seguida vai para o ponto fixo da fase paramagnética (onde  $\langle K \rangle = 0$  e  $\langle t \rangle = 0$ ). À medida em que as temperaturas iniciais vão se tornando menores, o fluxo da renormalização tende a se deslocar mais para a região onde valor absoluto da média  $\langle K \rangle$  é maior até que após uma temperatura inicial  $T_c$  o fluxo da renormalização vai para o ponto fixo da fase condensada em  $\langle K \rangle < 0$  e  $\langle t \rangle = \frac{-1}{(q-1)}$ .

Dizemos que ocorre transição de fase para o modelo quando observa-se uma divisão do plano de fase  $\langle t \rangle \times \langle K \rangle$  em duas regiões correspondentes às bacias de atração dos respectivos pontos fixos. Como o ponto crítico é um ponto fixo instável é extremamente difícil encontrar numericamente o valor exato dos parâmetros relativos a esse ponto. Contudo, observando a mudança de comportamento do fluxo no diagrama, é possível calcular numericamente uma faixa de valores na qual a temperatura crítica está contida.

Comparando as figuras 2.3 e 2.4, é fácil notar que mesmo para distribuições de probabilidades iniciais distintas o fluxo pode se comportar de maneira qualitativamente seme-



**Figura 2.4** Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para  $q = 3$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 4$  para valores de temperatura inicial variando entre 0.30 e 0.50. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *exponencial*.

lhante. Podemos observar que a distinção entre os diagramas acima é a faixa de valores onde a temperatura crítica está situada. Para o caso que utilizamos a distribuição inicial uniforme  $T_c \sim 0.60 - 0.70$  enquanto que para a distribuição inicial exponencial obtivemos  $T_c \sim 0.35 - 0.40$ .

Na seção seguinte apresentaremos os valores obtidos para as temperaturas críticas para os casos em que  $q = 3, 4, 5$  e  $6$  com dimensão fractal  $D_f = 4, 5$  e  $6$  utilizando as quatro distribuições iniciais simétricas definidas anteriormente.

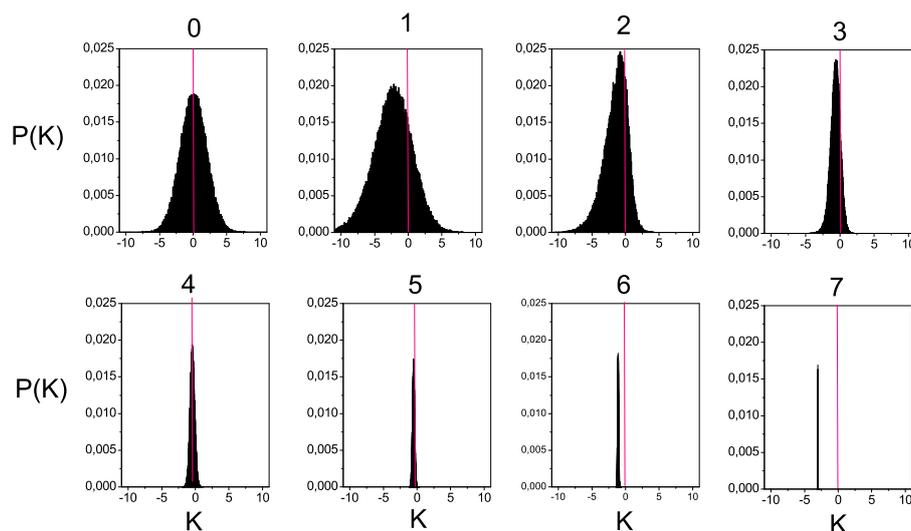
## 2.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 2.4.1 Temperaturas críticas

A fim de investigarmos a transição de fase para o modelo de Potts com  $q$  estados e interações aleatórias, efetuamos o processo de renormalização das equações (2.34) e (2.35) utilizando uma rotina, em linguagem C, a qual incorpora o método do reservatório.

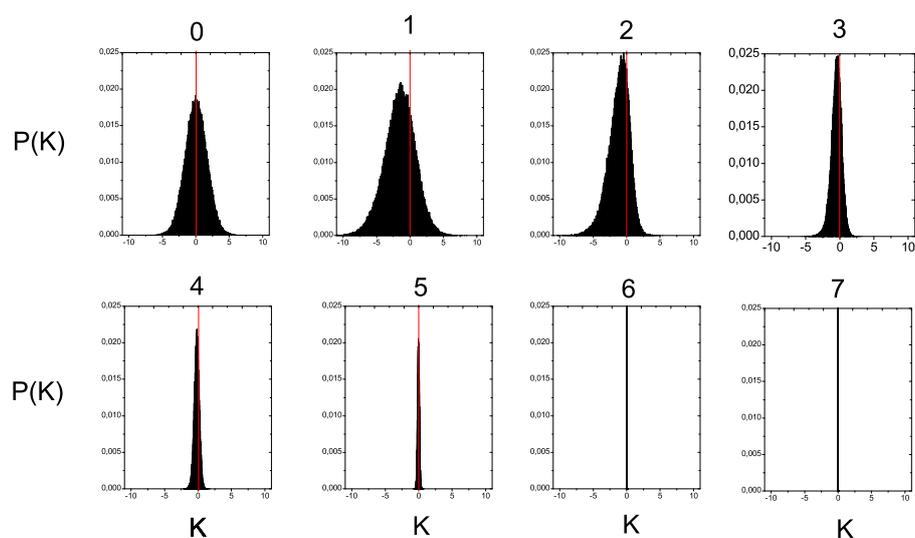
Analisamos numericamente o comportamento do fluxo no diagrama que mostra a evolução do valor médio das transmissividades contra o valor médio das constantes de acoplamentos renormalizadas,  $\langle t \rangle \times \langle K \rangle$ , podemos distinguir entre a fase paramagnética e condensada bem como o intervalo de temperatura em que se encontra a transição de fase. Para estimar o intervalo de valores onde a temperatura crítica ocorre utilizamos processos com no máximo 50 iterações, permitindo determinar intervalos com precisão até a segunda casa decimal.

Além de analisar o fluxo de renormalização, através do diagrama  $\langle t \rangle \times \langle K \rangle$ , pode ser útil observar o histograma da distribuição em cada hierarquia. A figura (2.5) mostra o sistema indo para fase condensada pois, nesse caso, a temperatura inicial da renormalização foi escolhida abaixo da temperatura crítica. No caso com temperatura inicial escolhida acima da temperatura crítica, como na figura (2.6), o sistema vai para a fase paramagnética.

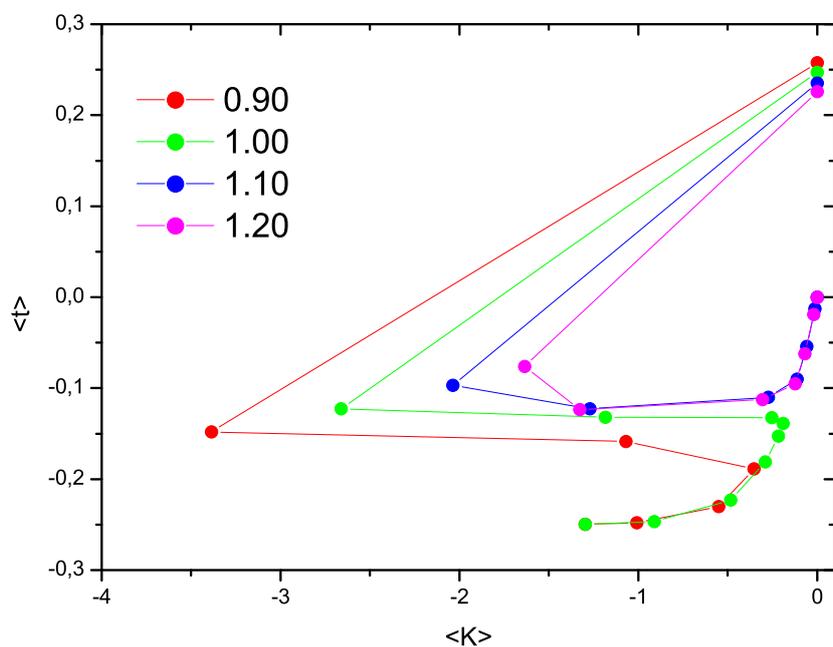


**Figura 2.5** Histograma da distribuição para  $q = 3$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 4$ . Como  $T = 0.5 < T_c$  o sistema vai para a fase condensada. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *gaussiana*.

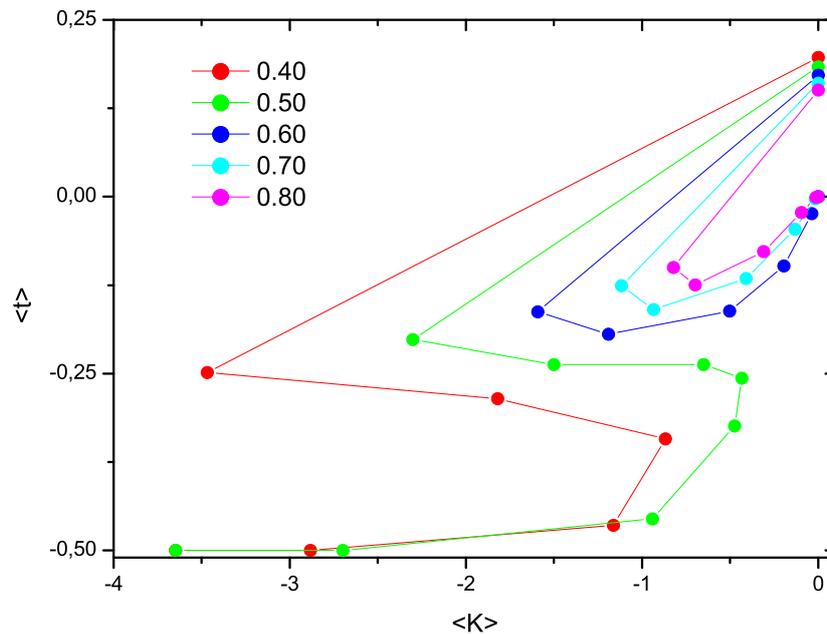
Analisando os diagramas das figuras (2.7) a (2.10), que mostram o fluxo para os casos  $q = 3, 4, 5$  e  $6$ , no caso da distribuição gaussiana, fica evidente, pelo direcionamento do fluxo, a distinção entre as fases condensada e paramagnética. Observando a legenda de cores em cada uma das figuras pode-se obter um intervalo, aproximado, de temperatura em que ocorre a transição de fase.



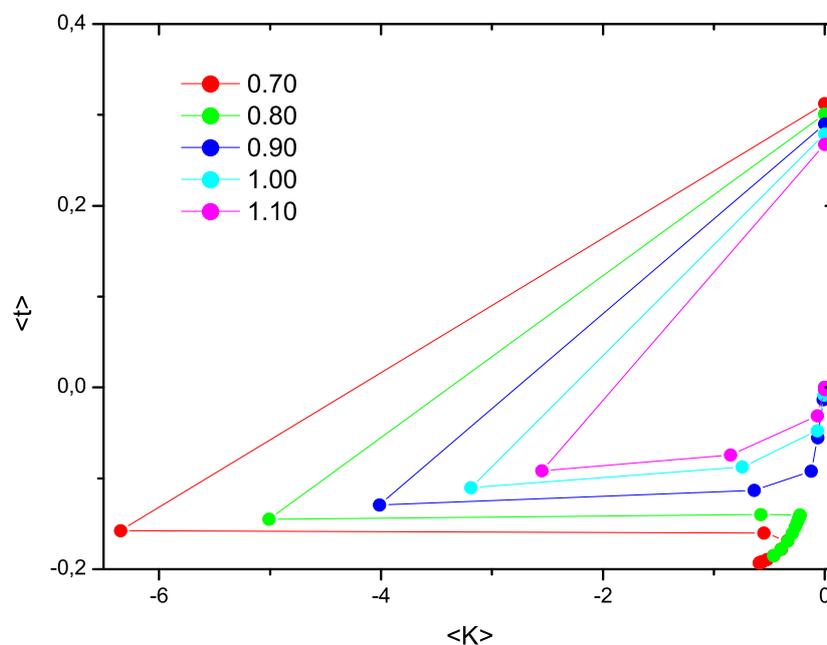
**Figura 2.6** Histograma da distribuição para  $q = 3$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 4$ . Como  $T = 0.6 > T_c$  o sistema vai para a fase paramagnética. A distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *gaussiana*.



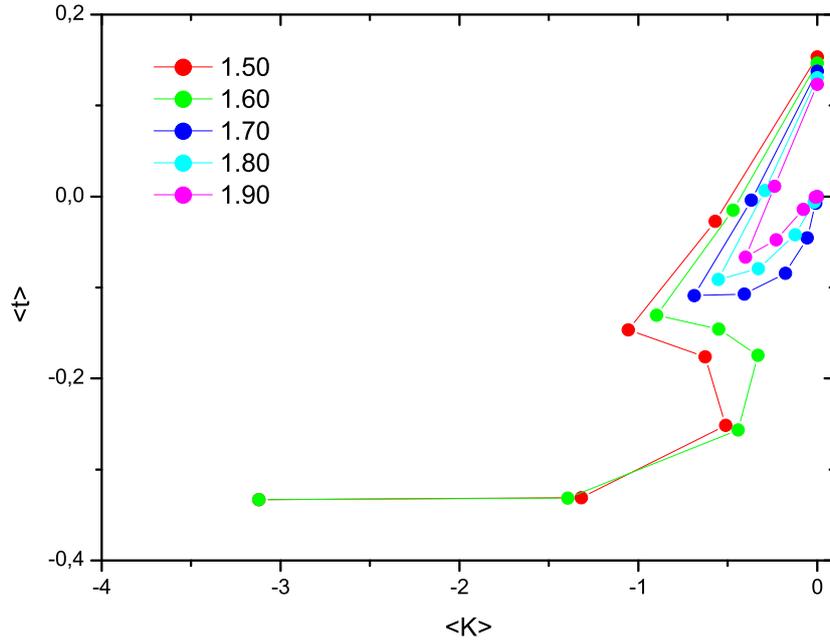
**Figura 2.9** Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para  $q = 5$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 5$  para valores de temperatura inicial variando entre 0.90 e 1.20. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *gaussiana*.



**Figura 2.7** Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para  $q = 3$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 4$  para valores de temperatura inicial variando entre 0.40 e 0.80. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *gaussiana*.



**Figura 2.10** Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para  $q = 6$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 5$  para valores de temperatura inicial variando entre 1.7 e 1.10. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *gaussiana*.



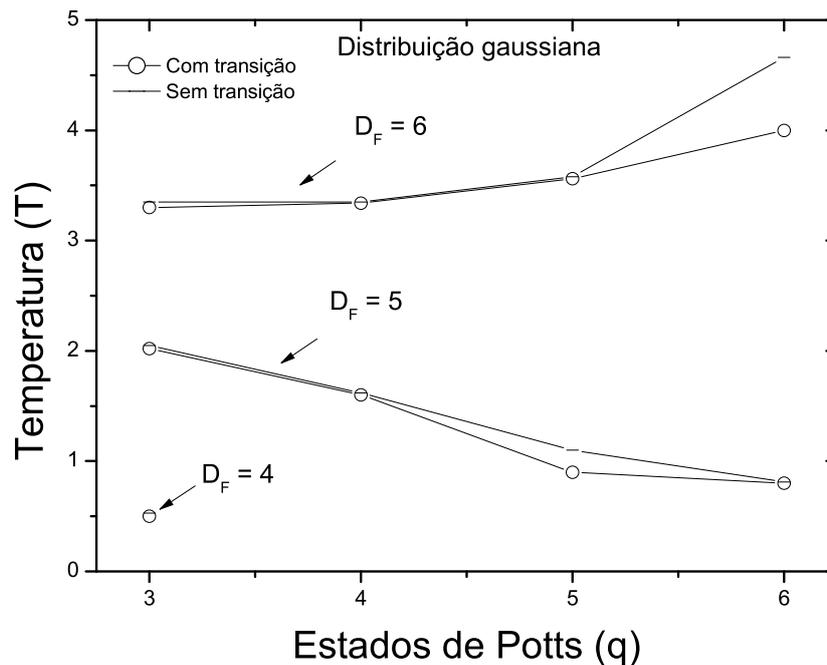
**Figura 2.8** Diagrama de fluxo mostrando a média configuracional da transmissividade térmica em função da média configuracional dos acoplamentos para  $q = 4$  estados de Potts e dimensão fractal  $D_f = 5$  para valores de temperatura inicial variando entre 1.50 e 1.90. Utilizou-se 20 iterações e 100000 amostras e a distribuição de probabilidades utilizada para gerar o banco inicial foi a *gaussiana*.

Na tabela 2.1 apresentamos os intervalos de temperatura que contêm a temperatura crítica da transição de fase (quando houver) para o modelo com  $q = 3, 4, 5$  e 6. Podemos observar nessa tabela que alguns valores estão sinalizados com \*. Eles estão indicando regiões onde encontramos um comportamento atípico do fluxo no diagrama  $\langle t \rangle \times \langle K \rangle$ .

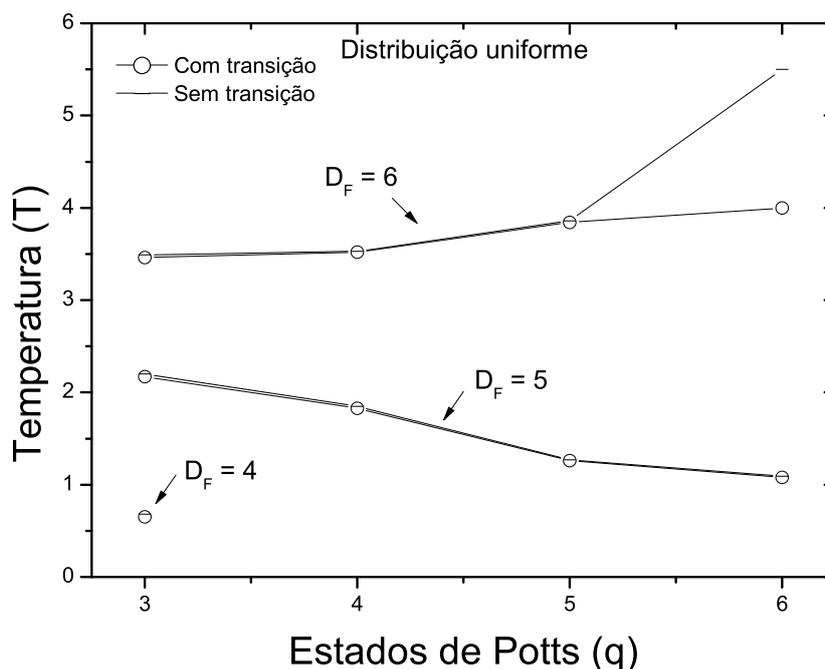
Nessas regiões, ao invés da transição ocorrer da fase paramagnética para a fase condensada, cujo ponto fixo está em  $\langle K \rangle < 0$  e  $\langle t \rangle = -1/(q-1)$  como o que acontece para os outros valores dos parâmetros, nesses intervalos de temperatura observou-se que o fluxo se desloca para um ponto fixo ferromagnético com  $\langle K \rangle \gg 1$  e  $\langle t \rangle = 1$ . Se os resultados estiverem numericamente corretos, esse comportamento do fluxo poderia indicar a existência de uma fase magnética reentrante. Todavia, tendo em vista as altas dimensões das redes, que correspondem a números de ligações da ordem de  $(bp)^N$ , e as limitações computacionais para o tamanho dos reservatórios esta afirmativa permanece inconclusiva.

Temperaturas críticas ( $T_c$ )					
	$D_F$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$
Delta-bimodal	3	–	–	–	–
	4	0.92 – 0.94	0.54 – 0.55	–	–
	5	2.35 – 2.38	2.07 – 2.10	1.50 – 1.55*	1.49 – 1.50
	6	3.55 – 3.58	3.63 – 3.64	4.1 – 4.5*	3.5 – 5.5*
Gaussiana	3	–	–	–	–
	4	0.50 – 0.53	–	–	–
	5	2.02 – 2.05	1.60 – 1.62	1.0 – 1.1*	0.80 – 0.81
	6	3.30 – 3.35	3.34 – 3.35	3.56 – 3.58	4.0 – 4.66*
Uniforme	3	–	–	–	–
	4	0.65 – 0.68	–	–	–
	5	2.17 – 2.20	1.83 – 1.85	1.26 – 1.27	1.08 – 1.09
	6	3.46 – 3.49	3.52 – 3.53	3.84 – 3.86	4.0 – 5.5*
Exponencial	3	–	–	–	–
	4	0.37 – 0.38	–	–	–
	5	1.75 – 1.78	1.36 – 1.39	1.2 – 1.3*	0.52 – 0.53*
	6	3.05 – 3.06	3.06 – 3.07	3.10 – 3.15	3.50 – 3.60

**Tabela 2.1** Temperaturas críticas para o modelo de Potts com  $q = 3, 4, 5$  e  $6$  estados, em redes hierárquicas diamante com dimensão fractal  $D_F = 4, 5$  e  $6$ , com distribuições de interações Delta-bimodal, Gaussiana, Uniforme e Exponencial.



**Figura 2.11** Temperatura crítica em função do número de estados de Potts quando a distribuição utilizada é a gaussiana.



**Figura 2.12** Temperatura crítica em função do número de estados de Potts quando a distribuição utilizada é a uniforme.

Nas figuras (2.11) e (2.12) podemos observar o que acontece se, para uma dada distribuição, deixarmos a dimensão fractal fixa e variarmos o número de estados de Potts. Vimos que para  $D_F = 5$  à medida que o número de estados de Potts aumenta ocorre uma diminuição da temperatura crítica para ambas as distribuições apresentadas. Como em  $D_F = 4$ , o sistema não apresenta transição em  $q = 4, 5$  e  $6$ , ao invés de obtermos uma curva temos apenas dois pontos, um apresentando transição de fase e representado no diagrama por “○” e outro onde não ocorre transição, representado por “—”. Para  $D_F = 6$ , à medida em que se aumenta o número de estados de Potts as temperaturas também vão aumentando porém com um crescimento menos acentuado do que o observado no caso  $D_F = 5$ .

#### 2.4.2 Determinação das dimensões críticas inferiores

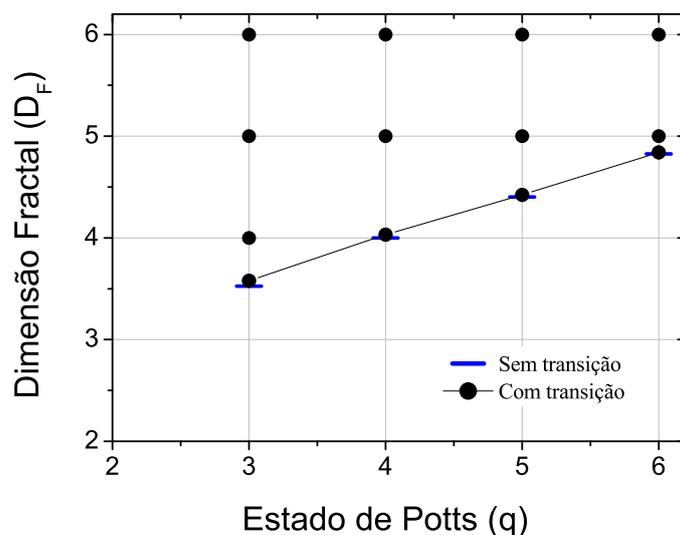
Utilizando a mesma metodologia descrita anteriormente, para a obtenção das temperaturas críticas, podemos analisar o fluxo no diagrama  $\langle t \rangle \times \langle K \rangle$ , e obter os valores das dimensões críticas inferiores. Para  $q = 3, 4, 5$  e  $6$  calculamos numericamente o valor da dimensão fractal abaixo da qual o modelo não apresenta transição para a fase condensada. Os dados obtidos podem ser vistos na tabela 2.2 onde também está descrito em que intervalo de temperatura a transição com mais baixa dimensão possível ocorre. A dimensão crítica inferior propriamente dita não é possível de se calcular exatamente, embora o intervalo no qual ela se encontra seja determinado tendo em vista que o número de conexões da célula unitária é um número inteiro ou seja, para chegarmos ao valor exato

precisaríamos utilizar um número não inteiro de ligações  $p$  da célula unitária da rede, e isso não teria sentido físico.

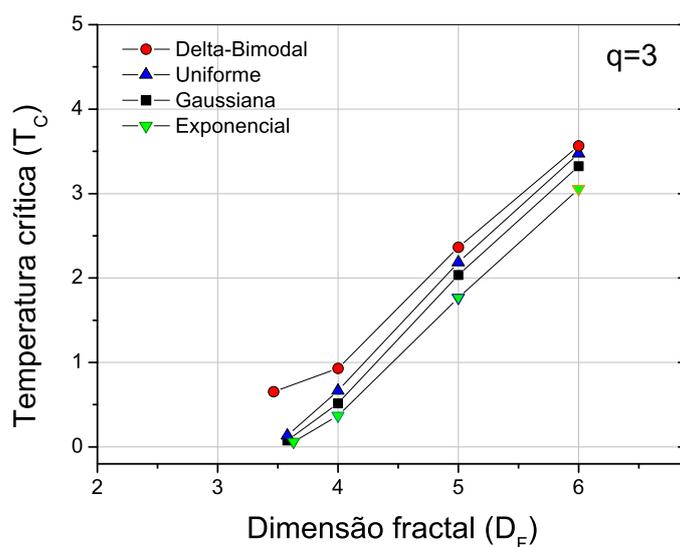
Dimensões críticas inferiores ( $D_c$ )					
	$q$	3	4	5	6
Delta-bimodal	$D_F$	3.40 – 3.46	3.85 – 3.89	4.40 – 4.42	4.84 – 4.85
	$p$	14 – 15	23 – 24	42 – 43	68 – 69
	$T_c$	0.65 – 0.66	0.59 – 0.60	1.24 – 1.25	1.49 – 1.50
Gaussiana	$D_F$	3.52 – 3.58	4.03 – 4.06	4.42 – 4.44	4.84 – 4.85
	$p$	16 – 17	28 – 29	43 – 44	68 – 69
	$T_c$	0.07 – 0.08	0.10 – 0.11	0.13 – 0.14	0.44 – 0.46
Uniforme	$D_F$	3.46 – 3.52	4.00 – 4.03	4.40 – 4.42	4.84 – 4.85
	$p$	15 – 16	27 – 28	42 – 43	68 – 69
	$T_c$	0.03 – 0.04	0.13 – 0.14	0.04 – 0.05	0.05 – 0.09
Exponencial	$D_F$	3.79 – 3.63	4.06 – 4.09	4.44 – 4.46	4.84 – 4.85
	$p$	17 – 18	29 – 30	44 – 45	68 – 69
	$T_c$	0.05 – 0.07	0.02 – 0.03	0.01 – 0.02	0.21 – 0.22

**Tabela 2.2** Dimensões críticas inferiores para o modelo de Potts com  $q = 3, 4, 5$  e  $6$  estados, em redes hierárquicas diamante com as distribuições de interações Delta-bimodal, Gaussiana, Uniforme e Exponencial.

A relação entre a dimensão crítica inferior e o número de estados de Potts pode ser analisada também através da figura 2.13 onde mostramos os valores de  $D_F$  onde se observa a transição para a fase condensada e os valores onde não foi observada a transição, para cada valor de  $q$ . As figuras 2.14 e 2.15 mostram como a temperatura inicial necessária para se observar a transição vai aumentando a medida em que a dimensão da rede aumenta. Podemos observar também que, quando a dimensão fractal da rede vai diminuindo o fluxo das distribuições tende a um valor de temperatura zero, onde o valor zero seria obtido exatamente na dimensão crítica inferior.



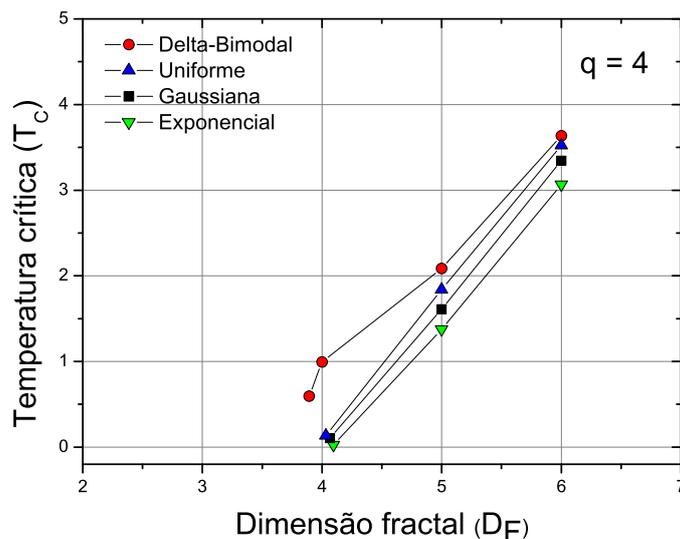
**Figura 2.13** Determinação das Dimensões Críticas inferiores. Os pontos  $\bullet$  indicam os valores para os quais encontrou-se transição de fase.



**Figura 2.14** Temperaturas críticas em função das Dimensões fractais para  $q = 3$  para cada uma das distribuições.

## 2.5 CONCLUSÕES

Nesta dissertação, investigamos o modelo de Potts com interações aleatórias na rede diamante com fator de escala 3 e mostramos que o modelo apresenta uma transição da fase de altas temperaturas para a uma fase condensada de baixas temperaturas para valores do número de estados  $q \geq 3$ , redes com dimensão crítica inferior acima de 3, considerando-se



**Figura 2.15** Temperaturas críticas em função das Dimensões fractais para  $q = 4$  para cada uma das distribuições.

as distribuições de acoplamentos iniciais simétricas: Delta-bimodal, Gaussiana, Uniforme e Exponencial.

O ponto-fixo associado a esta fase condensada é caracterizado por uma distribuição de acoplamentos renormalizada que possui média negativa finita (não nula) e transmitividade média que tende para  $-1/(q - 1)$ , similar ao que acontece ao modelo de Potts antiferromagnético com  $q \geq 3$ , nas respectivas redes hierárquicas. Desta maneira, não foi observada a existência de um *atrator estranho* tal como ocorre no caso do modelo definido em redes com fator de escala  $b = 2$ , indicando que o comportamento crítico do modelo muda substancialmente quando redes com fator de escala  $b = 3$  são consideradas. Esta é a principal conclusão desta dissertação. Espera-se que essas mudanças ocorram, também, quando se comparam os comportamentos críticos de modelos com fator de escala *par* com aqueles com fator de escala *ímpar* maiores que 3, tal como ocorre no modelo de Potts antiferromagnético nesta família de redes, uma *conjectura* ainda a ser verificada em estudos futuros.

Finalmente, a caracterização da natureza da fase condensada associada a esta transição requer estudos mais aprofundados sobre o parâmetro de ordem e a respectiva classe de universalidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] C Domb. Configurational studies of the Potts models. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, 7(11):1335, 1974.
- [2] H. A. Kramers and G. H. Wannier. Statistics of the two-dimensional ferromagnet. part i. *Phys. Rev.*, 60:252–262, 1941.
- [3] J. Ashkin and E. Teller. Statistics of two-dimensional lattices with four components. *Physical Review*, 64(5-6):178–184, September 1943.
- [4] F.Y. Wu. The Potts model. *Reviews of Modern Physics*, 54(1):235, 1982.
- [5] F. Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill book company, 1965.
- [6] A. B. Harris, T. C. Lubensky, W. K. Holcomb, and C. Dasgupta. Renormalization-group approach to percolation problems. *Phys. Rev. Lett.*, 35:327–330, Aug 1975.
- [7] L Sun, Y F Chang, and X Cai. A discrete simulation of tumor growth concerning nutrient influence. *International Journal of Modern Physics B*, 18(17-19):2651–2657, 2004.
- [8] Thomas C. Schelling. Dynamics model of segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, 1:143–186, 1971.
- [9] Christian Schulze. Potts-like model for ghetto formation in multi-cultural societies. *International Journal of Modern Physics C*, 16(3):351–355, 2004.
- [10] D. J. A. Welsh and C. Merino. The Potts model and the Tutte polynomial. *J. Math. Phys.*, 3:1127–1152, 2000.
- [11] Robert Shrock. Exact Results on Potts/Tutte Polynomials for Families of Networks with Edge and Vertex Inflatios. *arXiv:1101.5826v1*, 2011.
- [12] Neil W. Ashcroft and Mermin N. David. *Solid State Physics*. Brooks/Cole, Itacha, 1976.
- [13] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65:117–149, Feb 1944.
- [14] Avinash Bhattacharjee, Somendra M. ; Khare. Fifty years of the exact solution of the two-dimensional Ising model by Onsager. *Current science*, 69(10):816–821, 1995.

- [15] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press, 1982.
- [16] Ladário da Silva, Evaldo Mendonça Fleury Curado, Sérgio Coutinho, and Welles Antônio Martinez Morgado. Criticality and multifractality of the Potts ferromagnetic model on fractal lattices. *Physical Review B*, 53(10):6345–6354, Mar 1996.
- [17] R. B. Griffiths and M. Kaufman. Spin systems on hierarchical lattices. Introduction and thermodynamic limit. *Physical Review B*, 26(9):5022, 1982.
- [18] Z. R. Yang. Family of diamond-type hierarchical lattices. *Phys. Rev. B*, 38:728–731, Jul 1988.
- [19] Yung Qin and Z. R. Yang. Diamond-type hierarchical lattices for the potts antiferromagnet. *Phys. Rev. B*, 43:8576–8582, Apr 1991.
- [20] H. Takayasu. *Fractal in the physical sciences*. Manchester University Press, 1990.
- [21] J. M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford University Press Inc, 1992.
- [22] J. J. Binney M. E. J. Newman, N. J. Dowrick. *The Theory of Critical Phenomena An Introduction to the Renormalization Group*. Clarendon press, Oxford, 1995.
- [23] L. P. Kadanoff. Scaling laws for Ising models near  $T_c$  \*. *Physics*, 2(6), 1966.
- [24] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, second edition, 1996.
- [25] Kenneth G. Wilson. Renormalization group and strong interactions. *Phys. Rev. D*, 3:1818–1846, Apr 1971.
- [26] Kenneth G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture. *Phys. Rev. B*, 4:3174–3183, Nov 1971.
- [27] N. J. Dowrick J. J. Binney M. E. J. Newman. *The Theory of Critical Phenomena An Introduction to the Renormalization Group*. Clarendon press, Oxford, 1995.
- [28] Shuangli Fan and Fan Zhong. Determination of the dynamic and static critical exponents of the two-dimensional three-state Potts model using linearly varying temperature. *Phys. Rev. E*, 76:041141, Oct 2007.
- [29] Fernando D. Nobre and Evaldo M. F. Curado. Ground-state entropies of the Potts antiferromagnet on diamond hierarchical lattices. *Phys. Rev. E*, 66(3):036107, Sep 2002.
- [30] Sérgio Coutinho, Welles A. M. Morgado, Evaldo M. F. Curado, and Ladário da Silva. Ferromagnetic Potts model under an external magnetic field: An exact renormalization group approach. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 74(9):094432, 2006.

- [31] A. N. Berker and Leo P. Kadanoff. Ground-state entropy and algebraic order at low temperatures. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 13:L259, 1980.
- [32] Jayanth R. Banavar and Alan J. Bray. Heisenberg and Potts spin glasses: A renormalization-group study. *Physical Review B*, 38(4):2564, 1988.
- [33] Constantino Tsallis and A. C. N. de Magalhães. Pure and random Potts-like models: Real-space renormalization-group approach. *Physics Reports*, 268:305, 1996.
- [34] K. Binder and A. P. Young. Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions. *Rev. Mod. Phys.*, 58:801–976, Oct 1986.
- [35] J.R.L. De Almeida and S Coutinho. Spin-glass: An unfinished story. *Brazilian Journal of Physics*, 24(4):9, 1994.
- [36] S. F. Edwards and P. W. Anderson. Theory of Spin Glasses. *J. Phys. F.*, 965–974, 1975.
- [37] David Sherrington and Scott Kirkpatrick. Solvable model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 35:1792–1796, Dec 1975.
- [38] M. Scheucher and J. D. Reger. Critical behavior of short range Potts glasses. *Z. Phy. B*, 91(3):383–396, 1993.
- [39] L. W. Lee, H. G. Katzgraber, and A. P. Young. Critical behavior of the three- and ten-state short-range Potts glass: A monte carlo study. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 74(10):104416, 2006.
- [40] A. Benyoussef and M. Loulidi. Short-range Potts spin-glass model: Renormalization-group method. *Physical review. B, Condensed matter*, 53(13):8215–8218, April 1996.
- [41] Iglói, Ferenc and Turban, Loïc. Disordered Potts model on the diamond hierarchical lattice: Numerically exact treatment in the large- $q$  limit. *Phys. Rev. B*, 80:134201, Oct 2009.
- [42] G. Camelo-Neto, Washington de Lima, S. Coutinho, and W. A. M. Morgado. Potts spin glass: a renormalization group approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 342(1-2):83 – 89, 2004. Proceedings of the VIII Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena.
- [43] Gustavo Camelo Neto. *Sistemas Complexos Desordenados: Aspectos Dinâmicos e Termodinâmicos*. Doutorado, UFPE, 2003.
- [44] Washington de Lima. Modelo de Potts com Acoplamentos Aleatórios em Redes Hierárquicas. Mestrado, UFPE, 2004.
- [45] Washington de Lima. *Modelo de Potts com interações Aleatórias Competitiva*. Doutorado, UFPB, 2009.

- [46] Alejandra Isabel Guerrero Duymovic. Efeitos de Caos Induzidos por Temperatura em Vidros de Spins de Potts. Mestrado, UFPE, 2010.
- [47] B W Southern and A P Young. Real space rescaling study of spin glass behaviour in three dimensions. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 10(12):2179, 1977.
- [48] E.M.F. Curado and J.-L. Meunier. Spin-glass in low dimensions and the migdal-kadanoff approximation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 149:164 – 181, 1988.
- [49] E. Nogueira Jr., S. Coutinho, F. D. Nobre, E. M. F. Curado, and J. R. L. de Almeida. Short-range ising spin glass: Multifractal properties. *Phys. Rev. E*, 55:3934–3941, Apr 1997.

