



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Engenharia Mecânica

Um Método de Volumes Finitos Centrado na Célula para a Simulação de
Escoamentos Bifásicos em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e
Anisotrópicos

Fernando Raul Licapa Contreras

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de
Pós-graduação do Departamento de Engenharia Me-
cânica, DEMEC, da Universidade Federal Pernambu-
co como parte dos requisitos necessários à obtenção
do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica Computacional

Orientadores: Darlan Karlo Elisiário de Carvalho (PhD)
Paulo Roberto Maciel Lyra (PhD)

Recife, agosto de 2012

Catálogo na fonte
Bibliotecário Vimário Carvalho da Silva, CRB-4 / 1204

C764m Contreras, Fernando Raul Licapa.
Um Método de volumes finitos centrado na célula para a simulação de escoamentos bifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. - Recife: O Autor, 2012.
xiii, 108 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Profº. PhD Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.
Profº PhD Paulo Roberto Maciel Lyra.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2012.

Inclui Bibliografia, listas de figuras, de tabelas, abreviaturas e de símbolos, além de apêndice.

1. Engenharia Mecânica. 2. Escoamento bifásico. 3. Reservatório. 4. Petróleo. I. Carvalho, Darlan Karlo E. de (orientador). II. Lyra, Paulo R. Maciel (orientador). III. Título.

621 CDD (22. ed.)

UFPE
BCTG/2014-022

“UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS CENTRADO NA CÉLULA PARA A
SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM RESERVATÓRIOS DE
PETRÓLEO HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS”

FERNANDO RAUL LICAPA CONTRERAS
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MECÂNICA COMPUTACIONAL
E PROJETO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA/CTG/EEP/UFPE

Prof. Dr. DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO
ORIENTADOR/PRESIDENTE

Prof. Dr. PAULO ROBERTO MACIEL LYRA
CO-ORIENTADOR

Prof. Dr. JORGE RECARTE HENRÍQUEZ GUERRERO
COORDENADOR DO PROGRAMA

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO (UFPE/DEMEC)

Prof. Dr. FABIO SANTANA MAGNANI (UFPE/DEMEC)

Prof. Dr. RAMIRO BRITO WILLMERSDORF (UFPE/DEMEC)

Prof^a Dr^a LÍCIA MOUTA DA COSTA (UFPE/DECIVIL)

Prof. Dr. ROGÉRIO SOARES DA SILVA (UFPE/CAA)

30 DE JULHO DE 2012.

AGRADECIMENTOS

À Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), a bolsa de estudos concedida durante o período de desenvolvimento do mestrado.

Ao professor (orientador) Darlan Karlo E. Carvalho, o apoio prestado, a confiança depositada, a exigência, que foram fundamentais durante o desenvolvimento do presente trabalho.

Ao professor Paulo M. Lyra, o apoio prestado e as ideias e discussões durante as reuniões de grupo, as quais foram fundamentais durante o desenvolvimento de várias rotinas, e pela amizade.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPE, as condições necessárias para a realização do curso de mestrado e, especialmente, ao Coordenador Prof. Dr. Jorge Recarte e a toda a equipe administrativa.

Aos meus colegas do grupo PADMEC, à Luiz Eduardo que em muitas vezes tirou as dúvidas: obrigado pelo apoio, amigão! E, a Márcio que, muitas vezes, me ajudou a entender os conceitos fundamentais.

Ao colega de iniciação científica, Túlio Cavalcante, o trabalho compartilhado e os momentos de conversa durante o desenvolvimento da pesquisa em equipe.

Ao amigo e orientador, Percy Fernandez (PUCP - Lima), e ao amigo, Miguel Loayza (UFRJ), a colaboração para a minha vinda ao Brasil.

Aos meus pais, Manuela e Cupertino, o carinho e o apoio moral nos momentos de decaimento, e a boa formação para o caminhar na vida.

Aos meus irmãos, Ronal, Doris, Luis Angel, e pessoa especial na minha vida como meu filho Paulo André Licapa Sumiano pela confiança depositada em mim.

Ao meu colega e matemático, Ricardo Castillo (DEMAT-UFPE), e Roberto Navarro a amizade incondicional.

Aos amigos do apartamento, Alcidez, Rafael (pêra), Ricardo (bahiano), Tiago F, Adiles Paulo de Lima, e a todos os amigos de Recife, os momentos de alegria e de amizade.

RESUMO

No presente trabalho apresentamos uma metodologia numérica para a discretização das equações que descrevem o escoamento bifásico de óleo-água em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. Estas equações são resolvidas através da metodologia *IMPES* (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) que é, em particular, um método segregado para tratar escoamento bifásico (água-óleo) descrito por um modelo matemático composto por uma equação elíptica para pressão e uma equação hiperbólica para saturação. A fim de resolver a equação de saturação explicitamente, utilizamos um método clássico do tipo *Upwind* (ponderação amontante) de primeira ordem. Para discretizar a equação de pressão, implementamos o Método de Volumes Finitos Centrados na Célula, *Cell-Centered*, proposto por Zhiming G. and Wu J., e projetado para lidar com meios altamente heterogêneos e anisotrópicos em malhas poligonais em geral. O método que apresentamos no presente trabalho é um tipo de método *Multipoint Flux Approximation Method* (*MPFA*) porque utiliza múltiplos pontos para aproximar o fluxo na interface entre as células. Neste método, as pressões nos vértices (nós) são tratadas como uma combinação linear das pressões centradas nas células vizinhas, reduzindo, completamente, a formulação a um esquema *cell-centered*. A derivação dos pesos explícitos permite que o método se torne mais robusto. Além disso, os pesos explícitos não dependem da descontinuidade nem da topologia da malha. O método tem as seguintes características: satisfaz o critério de linearidade (linear por partes); apresenta a taxa de convergência de segunda ordem para a formulação implícita de pressão e de primeira ordem para o fluxo; e admite um tensor de permeabilidade arbitrário. Os resultados obtidos são promissores, indicando a potencialidade da formulação adotada para a simulação de escoamentos bifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos.

Palavras Chaves: Volumes finitos, aproximação de fluxo por múltiplos pontos, escoamento bifásico em meios porosos.

ABSTRACT

In this work we present a numerical methodology for the discretization of the equations that describe the fluid flow of oil and water in heterogeneous and anisotropic oil reservoirs. These equations are solved using the *IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation)* method that is a segregated method for the simulation two phase flows of oil and water through an elliptic pressure equation and a hyperbolic saturation equation. In order to solve the explicit hyperbolic saturation equation, we use a classical first order upwind type method (*FOUM*). To discretize the pressure equation we implement a linear preserving cell-centered finite volume method designed to handle heterogeneous and anisotropic models in general polygonal meshes which was originally proposed by Zhiming G. and Wu J. (GAO, et al., 2010). This method is a non-classical version of a *MPFA (Multipoint Flux Approximation Method)* with both cell-centered and vertex centered unknowns. The vertex unknowns are rewritten as a linear weighted combination of the surrounding cell-centered unknowns, reducing the formulation to a completely cell centered one. The use of explicit “flux weights” allows for arbitrary permeability tensors that are neither discontinuity dependent nor mesh topology dependent. The method has the following characteristics: it satisfies the linearity-preserving criterion; it has second-order convergence rate and higher than first-order accuracy for the flux on general meshes; and it allows arbitrary permeability tensors. In order to validate the formulation, we solve some benchmark problems. The results obtained are promising, indicating the potential of the formulation for the simulation two-phase and multiphase flows in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs.

Key Words: Finite volume, multipoint flux approximation, two-phase flow in porous media.

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE SÍMBOLOS	vi
LISTA DE ABREVIATURAS.....	ix
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xiii
1. INTRODUÇÃO.....	14
1.1 Motivação.....	14
1.2 Objetivos	19
1.3 Organização do Trabalho	19
2. EQUAÇÕES GOVERNANTES	20
2.1 Introdução.....	20
2.2 Propriedades da Rocha Reservatório e Fluido	20
2.3 Equações Fundamentais	22
2.3.1 Equação de Pressão	23
2.3.2 Equação de Saturação.....	24
2.3.3 Condições Iniciais e Condições de Contorno.....	26
3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....	28
3.1 Introdução.....	28
3.2 Método de Volumes Finitos	29
3.3 Formulação Implícita da Equação de Pressão pelo <i>MPFA-DEW</i>	29
3.3.1 Tratamento dos Fluxos no Contorno.....	35
3.3.2 Interpolação das Pressões nos Vértices.....	35
3.3.3 Derivação de Pesos Explícitos do Tipo 1.....	36
3.3.4 Derivação de Pesos Explícitos do Tipo 2.....	40

3.3.5	Tratamento dos Vértices no Contorno da Malha Computacional	42
3.4	Montagem da Matriz e do Vetor Termo de Fonte.....	45
3.5	Formulação Explícita da Equação de Saturação	48
4.	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	51
4.1	Introdução.....	51
4.2	Erros Numéricos.....	51
4.3	Escoamento Monofásico Unidimensional em um Domínio Heterogêneo e Isotrópico.....	52
4.4	Escoamento Monofásico em um Domínio Homogêneo e Suavemente Anisotrópico	54
4.5	Escoamento Monofásico em um Domínio Heterogêneo e Suavemente Anisotrópico	56
4.6	Escoamento Monofásico em um Domínio Homogêneo e Altamente Anisotrópico	60
4.7	Escoamento Monofásico em um Domínio Altamente Heterogêneo e Anisotrópico	62
4.8	Escoamento Bifásico em $\frac{1}{4}$ de Cinco Poços com uma Região de Baixa Permeabilidade	64
4.9	Escoamento Bifásico em um Reservatório Confinado através de uma Região com Duas Barreiras Paralelas.....	67
4.10	Escoamento Bifásico em $\frac{1}{4}$ Cinco Poços com Razão de Viscosidade Moderadamente Adversa $M=4.0$	70
4.11	Escoamento Bifásico em $\frac{1}{4}$ de Cinco Poços com Razão de Viscosidade Bastante Adversa $M=40.0$	75
5.	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	78
5.1	Conclusão	78
5.2	Trabalhos Futuros.....	79
	APÊNDICE A	81

Familiaridade entre o Método <i>MPFA-DEW</i> e <i>MDF Five-Point</i>	81
APÊNDICE B.....	87
Dedução da Interpolação das Mobilidades	87
APÊNDICE C.....	89
Dedução do Lema 3.1	89
APÊNDICE D	91
Detalhamento de um exemplo da Montagem Matricial utilizando o <i>MPFA-DEW</i> ..	91
BIBLIOGRAFIA.....	102

LISTA DE SÍMBOLOS

$\det X$: Determinante da matriz X .

$D_{IJ}^{(1)}$: Constante que envolve entes geométricos e físicos na superfície de controle da malha computacional.

E_{MAX} : Erro Máximo.

E_{RMS} : Erro RMS (*Root Meansquare*).

E_{vel} : Taxa de convergência da velocidade.

F_i : Vazão ou “*flux density*” do fluido que passa pela face i do elemento.

f_w : Fluxo fracional da fase água.

$f_{w,\hat{L}}$: Fluxo fracional da fase água no elemento à esquerda, a uma face.

$f_{w,\hat{R}}$: Fluxo fracional da fase água no elemento à direita, a uma face.

g : Vetor de aceleração gravitacional.

$h_{IJ}^{\hat{\alpha}}$: Altura relativa à face IJ no elemento $\hat{\alpha}$, onde $\alpha = L$ (elemento à esquerda), R (elemento à direita).

i : Fase $i = \text{óleo (o) ou água (w)}$.

$\underline{I}$: Tensor identidade.

I, J : Vértices genéricos da malha através das quais se definem os volumes de controle.

IJ : Face formada pelos vértices I e J .

$\overrightarrow{IJ}$: Vetor na direção da face, determinado pelos vértices I e J .

$|\overrightarrow{IJ}|$: Comprimento do segmento IJ .

$\underline{K}$: Tensor de permeabilidade genérico.

$\underline{\tilde{K}}$: Tensor de permeabilidade multiplicado pela mobilidade na interface da malha computacional.

$\hat{k}$: Denota o k -ésimo elemento da malha computacional.

$\underline{\tilde{K}}_{\hat{k}}$: Tensor de permeabilidade avaliado no k -ésimo elemento.

k_{ro} : Permeabilidade relativa da fase óleo.

k_{rw} : Permeabilidade relativa da fase água.

$\bar{k}$: Representa o ponto médio de um segmento ou face.

$K_{IJ}^{(n)}$, $K_{IJ}^{(t)}$, $\bar{K}_{\hat{k},r}^{(n)}$, $\bar{K}_{\hat{k},r}^{(t)}$, $\tilde{K}_{\hat{k},r}^{(n)}$ e $\tilde{K}_{\hat{k},r}^{(t)}$: Constantes normais e tangencias no sentido do escoamento associados ao tensor de permeabilidade, as quatro últimas são usadas para derivar os pesos explícitos.

$\hat{L}$: Baricentro do elemento “ L ” á esquerda da face IJ .

$m(J)$: Número de elementos na vizinhança do nó J

$\vec{N}_{IJ}$: Vetor área normal à face IJ .

$\vec{N}_{k,IJ}$: Vetor área normal à face IJ do elemento k .

$n(I)$: Número de elementos na vizinhança do nó I .

p_i : Pressão da fase $i = o$ (óleo), w (água).

p_f : Pressão avaliada no baricentro da célula à direita.

p_r : Pressão avaliada no ponto médio do segmento (conhecida como variável intermediária).

q_i : Termo de fonte da fase $i = o$ (óleo), w (água).

Q_{IJ}^L : Representa o fluxo através da face IJ proveniente do elemento L .

$Q_{IJ}^{k,k-1}$: Representa o fluxo através da face IJ proveniente do elemento k para o elemento $k-1$.

Q_i : Vazão volumétrica da fase i .

Q_T : Vazão volumétrica total.

Q_I : Vazão volumétrica do poço injetor.

Q_p : Vazão volumétrica do poço produtor.

$\hat{R}$: Baricentro do elemento “ R ” à direita da face IJ .

$\Re$: Matriz de rotação.

S_i : Saturação da fase i .

S_{ro} : Saturação residual da fase óleo.

S_{rw} : Saturação residual da fase água.

$\bar{S}_w$: Saturação no conjunto de poços injetores ou saturação do contorno.

$\bar{S}_w^0$: Saturação inicial do reservatório.

$S_{\triangle ABC}$: Área do triângulo A, B, C .

V_T, V_S : Volume total do meio poroso e do sólido.

V_p : Volume poroso.

$\vec{v}$: Velocidade total do fluido $\vec{v} = \vec{v}_T$.

$\vec{v}_i$: Velocidade de Darcy da fase i .

$\vec{x}$: Vetor com componentes $(x, y, z) \in R^3$.

w_k : Pesos explícitos no k -ésimo elemento.

$\vec{\nabla}p$: Gradiente de pressão.

Símbolos Gregos

Δt : Passo de tempo.

λ_i : Mobilidade da fase $i = o$ (óleo), w (água).

λ_T : Mobilidade total.

λ_I : Mobilidade avaliada no nó I .

λ_{IJ} : Mobilidade avaliada na face IJ .

$\partial\Omega_k$: Fronteira da k -ésima célula.

Ω_k : Representa a k -ésima célula.

Γ_D : Contorno de Dirichlet.

Γ_N : Contorno de Neumann.

Γ_I : Poço injetor.

Γ_P : Poço produtor.

$\eta_{k,i}$: Constante geométrica do k -ésimo elemento no sub-volume de controle i ($=1,2$).

ρ_i : Densidade da fase i ($= o$ ou w).

ϕ : Porosidade.

$\theta_{k,i}$, $\varphi_{k,i}$ e $\mathcal{G}_{k,i}$: Ângulos no k -ésimo elemento, para $i = 1, 2$.

μ_i : Viscosidade da fase i ($= o$ ou w).

$\forall_k$: Volume do k -ésimo elemento.

LISTA DE ABREVIATURAS

CFL: Courant-Friedrichs-Lewy Condition

CCFV: Cell-Centered Finite Volume

MVFCC: Método de Volumes Finitos Centrado na Célula

EEM: Explicit Euler Method

MEF: Método de Elementos Finitos

MDF: Método de Diferenças Finitas

NCFV: Node Centered Finite Volume

FOUM: First Order Upwind Method

MVF: Método de Volumes Finitos

IMPES: Implicit Pressure Explicit Saturation

LP: Linear Preserving

MATLAB: Matrix Laboratory

MPFA: Multi-Point Flux Approximation

MPFA-DEW: Multi-Point Flux Approximation type Diamond with Explicit Weight

VC: Volume de Controle

VPI: Volume Poroso Injetado

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Identificação do domínio e dos contornos.	27
Figura 2: Esquema IMPES.	28
Figura 3: Tipos de volume controle: (a) esquema de volume de controle usando o <i>CCFV</i> ; (b) esquema de volume controle usando o <i>NCFV</i> (MORTON, 1996).	29
Figura 4: Diagrama local de uma malha poligonal qualquer, ilustrando o “Diamond Path” (célula diamante).	32
Figura 5: Elementos (pontos azuis), vértices (pontos pretos) e ponto médio (ponto “vazio”) na vizinhança de um vértice <i>I</i>	36
Figura 6: Esboço dos entes geométricos necessários para derivar os pesos explícitos do tipo 1.	37
Figura 7: Esboço dos subvolumes de controle e dos fluxos locais.	38
Figura 8: Representação dos fluxos locais e dos ângulos necessários para calcular os pesos explícitos de segundo tipo 2.	40
Figura 9: Tratamento do vértice <i>I</i> na fronteira da malha computacional tipo 1.	43
Figura 10: Tratamento do vértice <i>I</i> no contorno da malha computacional tipo 2.	44
Figura 11: Representação do volume de controle genérico em um domínio discretizado. .	48
Figura 12: Malha com domínio heterogêneo com 4 elementos.	53
Figura 13: Solução numérica versus solução analítica, em um meio heterogêneo e isotrópico.	53
Figura 14: (a) Representação de uma malha com 32x32 subdivisões e (b) do campo de pressões.	55
Figura 15: Malha triangular estruturada.	57
Figura 16: Campo de pressões, (a) para $\alpha=1$ e (b) para $\alpha=10$, em uma malha de 8192 elementos obtidos pelo <i>MPFA-DEW1</i>	60
Figura 17: Campo de pressões, (a) para $\alpha=100$ e (b) $\alpha=1000$ em uma malha de 8192 elementos obtidos pelo <i>MPFA-DEW1</i>	60
Figura 18: Malha com 8644 elementos.	61
Figura 19: Campo de pressões obtidas pelo método <i>MPFA-DEW2</i> , em uma malha com 8644 elementos.	62
Figura 20: Malha triangular não-estruturada de 9042 elementos.	63
Figura 21: (a) Campo de pressões usando a malha refinada e (b) visualização em 3-D.	64

Figura 22: Geometria do reservatório com baixa permeabilidade na zona 2, (adaptado de CARVALHO et al., 2006).....	65
Figura 23: Malha triangular não estruturada utilizada na discretização espacial do domínio; (a) malha de menor densidade com 592 elementos e (b) de maior densidade com 2540 elementos.....	65
Figura 24: Campo de pressões num domínio com baixa permeabilidade, no instante $t = 400s$ para (a) malha grosseira e (b) malha mais refinada.	66
Figura 25: Contornos de saturação no tempo $t = 400s$ (a) malha grosseira e (b) malha mais refinada.....	66
Figura 26: Contorno de saturação obtido no tempo $t = 1600$ para o problema de baixa permeabilidade (a) malha de menor densidade e (b) malha maior densidade.....	67
Figura 27: Geometria do reservatório para o escoamento confinado através de uma região com duas barreiras de baixa permeabilidade.....	68
Figura 28: Malhas triangulares não estruturadas utilizadas para o problema de escoamento confinado; (a) malha menos refinada com 282 elementos, (b) malha mais refinada com 2124 elementos.....	68
Figura 29: Campo de pressões (a) malha menos refinada e (b) malha mais refinada.	69
Figura 30: Campo de saturações, em $t = 28$, (a-b), para $t = 48$ (c-d) e para $t = 70$ (e-f) para uma malha, (a) menos refinada (a,c,d) e (b) malha mais refinada (b, d, f). ..	70
Figura 31: (a) Malha triangular transversal ao escoamento, (b) malha triangular alinhada ao escoamento com 512 elementos.....	71
Figura 32: Malha triangular (a) estruturada e (b) malha quadrilátera.	72
Figura 33: (a) Campo de pressões em malha triangular transversal ao escoamento e (b) malha quadrilátera, este campo de pressões foram obtidos pelo método <i>MPFA-DEW2</i>	72
Figura 34: Contornos de saturações com razão de viscosidade $M=4.0$, obtidos usando o método <i>MPFA-DEW2</i> , considerando um $VPI = 0.1$ em (a) malha transversal e (b) malha alinhada.....	73
Figura 35: Contornos de saturações num reservatório com razão de viscosidade $M=4.0$ obtidos pelo método <i>MPFA-DEW2</i> , considerando um $t = 0.1VPI$ em (a) malha triangular não-estruturada e (b) malha quadrilátera.	73
Figura 36: Óleo recuperado para o problema $\frac{1}{4}$ de cinco poços com razão entre viscosidades para uma malha com 512 elementos.....	74

Figura 37: Óleo acumulado para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com razão entre as viscosidades $M = 4.0$, para uma malha com 512 elementos.....	75
Figura 38: Óleo recuperado para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com razão de viscosidades bastante adversa, $M = 40.0$, para uma malha com 512 elementos. ..	76
Figura 39: Óleo acumulado para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com razão de viscosidades bastante adversa, $M = 40.0$, para uma malha com 512 elementos. ...	76
Figura 40: Representação dos quatro volumes de controle centrado na célula.	81
Figura 41: Representa a ortogonalidade.	81
Figura 42. Representação das incógnitas a calcular pelo <i>MDF-centrado</i>	85
Figura 43: Triângulo em que p é definido.	90
Figura 44: Domínio discretizado por uma malha de quatro elementos.	91
Figura 45: (a) Esboço da saída da vazão pela face 15 do elemento $\hat{3}$ e (b) da saída da vazão pela face 51 do elemento $\hat{1}$	92
Figura 46: (a) Montagem da matriz global $\tilde{M}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 3 e 1 na primeira iteração.	93
Figura 47: (a) Esboço da saída da vazão pela face 25 do elemento $\hat{1}$ e (b) da saída da vazão pela face 52 do elemento $\hat{4}$	94
Figura 48: (a) Montagem da matriz global $\tilde{M}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 1e 4 na segunda iteração.....	95
Figura 49: (a) Esboço da saída da vazão pela face 35 do elemento $\hat{4}$ e (b) da saída da vazão pela face 53 do elemento $\hat{2}$	96
Figura 50: (a) Montagem da matriz global $\tilde{M}$ e (b) vetor de termos independentes preenchido nas filas 4 e 2 na terceira iteração.....	96
Figura 51: (a) Esboço da saída da vazão pela face 45 do elemento $\hat{2}$ e (b) da saída da vazão pela face 54 do elemento $\hat{3}$	97
Figura 52: (a) Montagem da matriz global $\tilde{M}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 2 e 3 na quarta iteração.....	98
Figura 53: (a) Esboço da saída da vazão pela face do contorno 41 do elemento $\hat{3}$ e (b) da saída da vazão pela face 23 do elemento $\hat{4}$	99
Figura 54: (a) Montagem da matriz global $\tilde{M}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 4 e 3 na segunda e quarta iteração, respectivamente.	99

Figura 55: <i>Spy</i> para uma malha triangular de quatro elementos.....	100
--	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Erros nas pressões máximas e mínimas pelo <i>MPFA-DEW1</i>	53
Tabela 2. Erro da velocidade obtido por <i>MPFA-DEW1</i>	53
Tabela 3. Erros nas pressões máximas e mínimas obtidos pelo método <i>MPFA-DEW2</i>	54
Tabela 4. Erro da velocidade através do método <i>MPFA-DEW2</i>	54
Tabela 5. Resultados obtidos pelo método <i>MPFA-DEW1</i>	54
Tabela 6. Resultados obtidos pelo método <i>MPFA-DEW2</i>	55
Tabela 7. Erros obtidos por Crumpton e Hyman.....	55
Tabela 8. Resultados obtidos pelo <i>MPFA-DEW2</i> , para $\alpha=1$	57
Tabela 9. Resultados obtidos pelo <i>MPFA-DEW2</i> , para $\alpha=10$	57
Tabela 10. Resultados obtidos pelo método <i>MPFA-DEW2</i> , para $\alpha=100$	57
Tabela 11. Resultados obtidos pelo método <i>MPFA-DEW2</i> , para $\alpha=1000$	57
Tabela 12. Taxa de convergência obtida pelo método <i>MPFA-DEW2</i>	58
Tabela 13. Resultados obtidos pelo método <i>MPFA-DEW1</i> , para $\alpha=1$	58
Tabela 14. Resultados obtidos pelo método <i>MPFA-DEW1</i> , para $\alpha=10$	58
Tabela 15. Erro e taxa de convergência da velocidade, obtidas pelo método <i>MPFA-DEW1</i>	58
Tabela 16. Resultados de Hyman et al. (1997), com $\alpha=1$	59
Tabela 17. Resultados de Crumpton et al. (1995) com $\alpha=1$	59
Tabela 18. Resultados de Crumpton et al. (1995) com $\alpha=1000$	59
Tabela 19. A seguinte tabela mostra as pressões máximas e mínimas obtidos pelo <i>MPFA-DEW</i>	61
Tabela 20. Representa as pressões máximas e mínimas.....	63

1.INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

No século XXI, o crescimento econômico de alguns países do mundo está ligado, intimamente, ao aumento do consumo e da exploração de energia, em particular, do petróleo. Atualmente, o petróleo ainda é a principal fonte de energia do mundo e se acentua como peça fundamental para a economia de países emergentes, como o Brasil. A exploração e a produção do petróleo são matérias de estudo em muitos centros de pesquisa e em universidades no mundo inteiro. O objetivo dos pesquisadores da área de produção do petróleo é desenvolver ferramentas que sejam orientadas para uma produção com qualidade, maximizando o lucro. Uma das ferramentas que auxilia a indústria petrolífera é a simulação computacional – particularmente, a simulação de reservatórios. A investigação e o desenvolvimento destas ferramentas constitui-se a área de interesse do presente trabalho, uma vez que o uso destas permite reduzir consideravelmente o custo, o tempo e os recursos consumidos em ensaios e testes experimentais (PEREIRA, 2009).

A simulação de reservatórios é uma das ferramentas para previsão do comportamento do escoamento no interior de rochas reservatórios, com resultados exitosos e promissores desde a década de 1960, tendo grande versatilidade para lidar com configurações complexas (COATS, 1982). Esta ferramenta permite modelar, de maneira detalhada, as geometrias complexas do reservatório, incluindo falhas geológicas, variações de pressão e presença de várias fases e componentes. O objetivo principal da simulação de reservatórios, no presente contexto, é o entendimento dos fenômenos físicos e químicos do comportamento de fluidos no interior do reservatório, bem como a previsão do desempenho futuro e a busca de formas e meios para otimizar a recuperação dos hidrocarbonetos dos reservatórios (EWING, 1983; CHEN, et al., 2006).

As vantagens da simulação de reservatórios na análise da recuperação de óleo, segundo Silva (2008), são: estimar de reservas de óleo; minimizar incertezas; otimizar a drenagem definindo o número de poços produtores e injetores e sua localização; e identificar as técnicas mais eficientes para a produção. Assim, os simuladores de reservatórios de petróleo têm função decisiva na indústria petrolífera e, por isso, têm recebido muita atenção em centros de pesquisa públicos e privados. A recuperação de óleo é simulada computacionalmente de ma-

neira que o engenheiro de petróleo possua elementos para interpretar e auxiliar na previsão adequada do comportamento de fluidos no reservatório quando submetido a diferentes estratégias de produção.

A recuperação de óleo das rochas reservatórios tem sido subdivida em três etapas. A Recuperação Primária refere-se à quantidade de óleo que é recuperada somente pela energia natural do reservatório. À medida que a pressão começa a decrescer, a produção também decresce, e a maior parte do óleo ainda permanece no reservatório. A Recuperação Secundária (*water flooding*) é uma técnica que consiste na injeção de água pelos poços injetores de maneira a manter a pressão do reservatório e deslocar o óleo no sentido dos poços produtores: (ROSA et al., 2006; CARVALHO, 2005; PARIS DE FERRER, 2001). A Recuperação Terciária (*Enhanced Oil Recovery ou Improved Recovery*) ocorre depois da recuperação secundária, utilizando técnicas avançadas – injeção de gases miscíveis, fluidos químicos e energia térmica – para tentar produzir parte do óleo restante, sem alterar suas propriedades abruptamente (FANCHI, 2001).

De maneira geral, o processo de modelagem do escoamento em reservatórios de petróleo envolve modelos matemáticos e certos parâmetros do reservatório, os quais são obtidos a partir de experimentos de laboratórios ou de estudos geológicos e geofísicos. Um modelo matemático no presente contexto é dado por um sistema de equações diferenciais parciais com certas condições que governam o comportamento de escoamentos nos reservatórios (COATS, 1982; CARVALHO, 2005). As soluções analíticas do sistema de equações são obtidas nos casos mais simples e com geometrias muito simples. Os métodos numéricos são utilizados para se obter soluções aproximadas dos modelos matemáticos através do emprego de alguma formulação numérica.

Na área de simulação de reservatórios de petróleo existem diversos métodos numéricos que resolvem as equações que governam o escoamento bifásico em reservatórios de petróleo. A Aproximação de Diferenças Finitas é um método aplicado para obter soluções de equações diferenciais, e sua primeira aplicação foi desenvolvida por Euler em 1768 (HIRSCH, 1994). O Método de Diferenças Finitas (*MDF*) é obtido a partir das expansões em séries de Taylor com um erro de truncamento adequado. Além disso, é caracterizado pela simplicidade, pela facilidade de implementação e robustez em malhas *K*-ortogonais (ERTEKIN, et al., 2001). Segundo Carvalho (2005), o *MDF* é extremamente econômico do ponto de vista computacional, com a desvantagem de não lidar com meios altamente heterogêneos e anisotrópicos e malhas distorcidas. Vale ressaltar que dificulta a utilização de procedimentos de adaptação automáti-

ca de malhas, os quais são naturalmente incorporados aos métodos capazes de lidar com malhas não-estruturadas, como o Método dos Elementos Finitos (*MEF*) e o Método dos Volumes Finitos (*MVF*).

Atualmente, o *MVF* tem tido muito sucesso pelos cientistas no mundo inteiro na área de simulação de escoamento em reservatórios devido ao fato de tratar domínios com geometrias complexas e à conservação de suas propriedades físicas (exemplo: massa, energia e momento) tanto no nível local quanto no nível global (MALISKA, 2004; EYMARD, et al., 2006; EDWARDS, et al., 2010). O Método de Volumes Finitos Centrado na Célula- *MVFCC* é uma variante do *MVF* que tem as mesmas características com a particularidade que armazena os graus de liberdade no interior das células. Este método é bastante popular na área de engenharia e física computacional devido à sua facilidade de implementação, robustez e flexibilidade para lidar com malhas não estruturadas e geometrias complexas (HERBIN, 1996; EYMARD, et al., 2006).

Uma formulação clássica da literatura é o Método dos Elementos Finitos Mistos (*MEFM*), formulado originalmente por Raviart e Thomas. O *MEFM* consiste em resolver o campo de velocidades e o campo pressões de maneira simultânea (GARCIA, 1997) e, posteriormente, este campo de velocidades pode ser usado na equação de saturação, utilizando técnicas Eulerianas ou Lagrangeanas como, *Front Tracking* ou *Level Set Method* (CARVALHO, 2005).

Na atualidade, o *MEFM* surge com a aproximação de fluxo por múltiplos pontos¹. Este método usa múltiplos pontos para aproximar os fluxos nas faces e semi-faces. Segundo Wheller et al. (2006), o pós-processamento das velocidades é feito no nível local. O *MFMFE* se reduz a um *MDF* centrado na célula quando são utilizados sobre malhas quadrilaterais. Os resultados para este método indicam a taxa de convergência de segunda ordem tanto para o campo de pressões quanto para os fluxos nas faces e semi-faces².

Em meados dos anos noventa surgiu uma nova família de métodos: os *Multi-Point Flux Approximation (MPFA)*. Os pioneiros foram Edwards et al. (1998) e Aavatsmark et al. (1996). Inicialmente, as formulações foram feitas utilizando malhas *Corner-Point*. O método *MPFA* é um Método de Volumes Finitos Centrados na Células devido ao fato de suas incógnitas serem armazenadas no interior dos volumes de controle, além de conservar suas propriedades tanto no nível local quanto no nível global.

¹ em inglês *Multipoint Flux Mixed Finite Element-MFMFE*

² Para trabalhos relacionados a este método, procurar em Matringe et al. (2008), Ingram et al. 2010 e Wheller et al. (2012).

O nome dado deixa evidente que os fluxos nas faces são calculados utilizando múltiplos pontos. Este método surgiu em contraste com método *Two Point Flux Approximation (TPFA)*, no qual os fluxos são calculados por meio de dois pontos apenas. Segundo Keilegavlen et al. (2011), o método *TPFA* é simples e robusto, mas não é consistente na descrição dos fluxos, enquanto que a descrição dos fluxos pelo método *MPFA* é consistente em malhas quaisquer. Em contrapartida, a análise de monotonicidade do método *MPFA* começou com Eigestad et al. (2002) que propõe modificar os volumes de controle do *MPFA* a fim de tornar o sistema de equações discretizadas em *M-Matriz* e garantir a monotonicidade. Mais tarde, o método *Enriched Multipoint Flux Approximation (EMPFA)* formulado por Qian-Yong et al. (2008) nasceu como uma alternativa de solução aos problemas de monotonicidade a partir da constatação de que as oscilações espúrias estão associadas com a aproximação pobre do gradiente de pressão nas superfícies de controle. O *EMPFA* produz resultados não oscilatórios para meios fortemente anisotrópicos e heterogêneos. Além disso, podemos procurar na literatura as terminologias *MVF Não Lineares* e *Cell-Centered* que são monótonos em meios heterogêneos e anisotrópicos (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV et al., 2007) . Atualmente, Keilegaven et al. (2011) propõem condições suficientes de monotonicidade para o método *MPFA*. Esta formulação vem sendo amplamente testada em malhas poligonais e distorcidas, em geral. Segundo Carvalho (2005), a ideia do método *MPFA* é dividir o volume de controle em subcélulas e assumir que a variação da pressão é linear em cada sub-célula. Diante disso entendemos que o método *MPFA* é robusto e garante aproximações de segunda ordem mesmo em meios altamente heterogêneos e anisotrópicos, além de ter forte apelo físico, que está relacionado à generalização de metodologias conservativas clássicas utilizadas pela indústria do petróleo.

O método que adotamos foi inicialmente formulado por Gao et al. (2010) simplesmente para problemas de difusão em meios heterogêneos e anisotrópicos. Então, a contribuição do trabalho é utilizar essa formulação para simular o comportamento do escoamento bifásico no interior dos reservatórios de petróleo.

O método implementado no presente trabalho é aqui denominado *Multi-Point Flux Approximation type Diamond with Explicit Weights (MPFA-DEW)*, pois a aproximação das vazões na superfície de controle utiliza múltiplos pontos em uma disposição geométrica que lembra um diamante lapidado, isto é, para derivar as vazões (densidade de fluxo) na interface do volume de controle, se constrói um sub-volume de controle especial tipo um diamante em 3-D, chamado *Diamond-Cell* (STEFANO, et al., 2012). Além disso, são usados pesos explícitos que são derivados respeitando o critério de linearidade a partir das interpolações nos vérti-

ces. A interpolação nodal é feita para que a formulação se torne completamente centrada na célula (*cell-centered*) a partir da combinação linear das soluções nos pontos de colocação das células que concorrem no vértice em questão. Os coeficientes (pesos) desta combinação linear são derivados de forma a tornar o método robusto e capaz de reproduzir soluções lineares exatamente por partes (*linearity-preserving*). Outros autores já propuseram diversas maneiras de calcular os pesos de interpolação, como Wu et al. (2003), Huang & Kappen (1998) e Gx et al. (2008). Vale ressaltar que a maioria delas somente atende às expectativas, em termos de acurácia e convergência, quando o meio é isotrópico. Além disso, dependem da heterogeneidade e do tipo de malha. No presente trabalho os pesos de interpolação utilizados não dependem das heterogeneidades nem da topologia da malha e são resolvidos de maneira explícita. Os pesos neste trabalho foram propostos em vários artigos (WU, 2005; WU et al., 2009; GAO et al., 2010).

A equação elíptica de pressão caracteriza-se pelo tensor de permeabilidade, que geralmente é heterogêneo e anisotrópico, devido às descontinuidades de camadas e falhas geológicas existentes no reservatório. A equação de pressão é discretizada através do método *MPFA-DEW* proposto inicialmente por Gao et al. (2010).

Para discretizar a equação de saturação, foi utilizado o *First Order Upwind Method (FOUM)*, o qual é um método altamente versátil no tratamento das descontinuidades e que produz soluções não oscilatórias perto de regiões de choque (HIRSCH, 1994), sendo um método de 1º ordem no espaço. A discretização temporal é feita pelo *Explicit Euler Method (EEM)*.

As equações que descrevem o escoamento bifásico óleo-água são resolvidas usando a metodologia *Implicit Pressure and Explicit Saturation (IMPES)*. Nesta técnica *IMPES*, as equações de fluxo e de transporte são resolvidas de maneira segregada e sequencial de modo que o campo de pressões é resolvido de maneira implícita a partir de uma saturação inicial. Daí obtemos as vazões ou velocidades nas superfícies de controle e, assim, o campo de saturação é calculado explicitamente. Este procedimento é repetido até o alcance do tempo final de simulação. Os programas acadêmicos foram construídos no ambiente MATLAB, fazendo uso de uma série de vantagens de sua estrutura de dados e na realização de operações algébricas vetorizadas.

A formulação foi apresentada pensando em simular o comportamento de escoamento bifásico imiscível e incompressível em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. O método *MPFA-DEW* foi desenvolvido em 2-D, cujo domínio foi discretizado utilizando

malhas bidimensionais triangulares estruturadas, não-estruturadas e malhas quadrilaterais estruturadas. As constantes geométricas e físicas são avaliadas no ponto médio das faces. Além disso, todos os resultados foram obtidos usando passos de tempo adimensional e pelo Volume Poroso Injetado (VPI). Uma desvantagem da formulação apresentada é a produção de oscilações físicas, além de não fazer um tratamento adequado de efeito de orientação de malha.

1.2 Objetivos

O objetivo principal do trabalho é estudar, formular e implementar um método dos Volumes Finitos tipo *MPFA* que nos permita resolver equações governantes do escoamento bifásico de óleo-água em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. As equações governantes do escoamento bifásico água-óleo foram resolvidas pela metodologia *Implicit Pressure Explicit Saturation (IMPES)*, na qual a equação de pressão é resolvida mediante uma formulação numérica implícita proposta por Gao et al. (2010) e a equação de saturação é resolvida explicitamente utilizando-se um método de ponderação amontante de primeira ordem (CARVALHO, 2005; CHEN et al., 2006; JISHENG et al., 2010)

1.3 Organização do Trabalho

Dividimos o presente trabalho em 5 capítulos, além da bibliografia e de alguns apêndices. No capítulo 1 fizemos uma breve introdução e apresentamos os objetivos e o escopo do trabalho.

No capítulo 2 introduzimos alguns conceitos fundamentais e a formulação matemática de equações que governa o fenômeno de escoamento bifásico óleo e água em reservatórios de petróleo.

Na primeira parte do capítulo 3 desenvolvemos a formulação numérica da equação de pressão de maneira detalhada. Em seguida, discretizamos a equação de saturação pelo método *Upwind* de primeira ordem. Por fim, apresentamos a metodologia *IMPES* para solução da equação de escoamento bifásico.

No capítulo 4, resolvemos alguns problemas modelos, nos quais interpretamos e avaliamos os resultados comparando com aqueles disponíveis na literatura.

No capítulo 5, descrevemos algumas conclusões e tecemos sugestões para trabalhos futuros.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos as equações que governam o escoamento bifásico (água-óleo) imiscível em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos, além de apresentarmos, brevemente, os conceitos fundamentais dos parâmetros relacionados às propriedades da rocha e do fluido. Estas equações são obtidas através da Lei de Conservação de Massa e da Lei de Darcy, considerando as seguintes hipóteses: o meio poroso é rígido; a rocha e os fluidos são isotérmicos, são incompressíveis e não reagem entre si; e os efeitos de gravidade e de capilaridade são desprezados (CARVALHO, 2005; SILVA, 2008; TADA, 2009).

As equações que governam o escoamento em reservatórios de petróleo para o modelo aqui considerado são compostas de uma equação elíptica de pressão e de uma equação quase linear hiperbólica de saturação. Para construir soluções numéricas acuradas, necessitamos de certas informações adicionais chamadas condições iniciais e/ou de contorno. No sentido de reservatórios de petróleo, as condições iniciais e de contorno dependem das características geológicas da vizinhança do reservatório e da existência de poços produtores e injetores, que de grosso modo podem ser tratados como condições de contorno interna (ERTEKIN et al., 2001; CARVALHO, 2005).

2.2 Propriedades da Rocha Reservatório e dos Fluidos

Segundo Rosa et al. (2006), a porosidade é uma propriedade das rochas que está relacionada à capacidade de armazenamento dos fluidos e da fração que o fluido ocupa no volume total da rocha. Assim, a porosidade é definida como a relação entre o volume de poros (espaços vazios) da rocha e o volume total desta, isto é,

$$\phi = \frac{V_p}{V_T} = \frac{V_p}{V_p + V_s} \quad (1)$$

onde V_p , V_T e V_s representam o volume poroso da rocha, o volume total e o volume da parte sólida da rocha, respectivamente.

Em simulação de reservatórios de petróleo se considera que todos os poros são interconectados devido ao fato de que eles governam a possibilidade de recuperação de óleo

(FANCHI, 2001). É natural afirmar que os poros da rocha estejam preenchidos com óleo, água e gás, visto que a variável que representa a fração de uma fase em um volume poroso é definida pela saturação.

Quando o meio poroso é saturado com óleo e água, a quantidade relativa ocupada pela fase em questão é dada pela saturação, i.e.:

$$S_i = \frac{V_i}{V_p}, i = o, w \quad (2)$$

Como consequência da Eq. (2) e do fato do meio ser totalmente saturado, tem-se:

$$S_o + S_w = 1 \quad (3)$$

onde S_o , S_w , V_o e V_w representam as saturações e os volumes ocupados pela fase óleo e água.

A permeabilidade é uma medida da facilidade de transmitir fluidos através dos poros interconectados. Quando o meio é saturado por uma única fase, a permeabilidade é chamada permeabilidade absoluta – ela é uma propriedade intrínseca do meio poroso. Em geral, esta propriedade é representada por um tensor de permeabilidade absoluta, o qual é representado por:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Se os componentes não diagonais do tensor $\underline{K}$ são nulos e os componentes diagonais são idênticos ($k_{xx} = k_{yy}$), então o meio poroso é isotrópico. Caso contrário, o meio poroso é anisotrópico. Segundo Crumpton et al. (1995), o tensor de permeabilidade deve satisfazer a condição de elipticidade, ou seja, $k_{xy}k_{yx} \leq k_{xx}k_{yy}$.

Quando o meio poroso está saturado por duas fases, a permeabilidade depende da saturação de cada fase. Assim, este tipo de permeabilidade é chamado de permeabilidade relativa de cada fase. O produto da permeabilidade relativa pela permeabilidade absoluta resulta na permeabilidade efetiva da fase em questão, ou seja,

$$k_{ri} \underline{K} = k_i \quad (5)$$

onde k_{ri}, k_i é a permeabilidade relativa e efetiva da fase i .

Note que, pela definição, a permeabilidade relativa varia entre $0 \leq k_{ri} \leq 1$.

As permeabilidades relativas das fases óleo (o) e água (w) k_{ro}, k_{rw} dependem da saturação da água para um sistema óleo/água, i.e., $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$ e $k_{ro} = k_{ro}(S_w)$. No presente trabalho, utilizamos o modelo de Brooks e Corey (BEAR, 1972) para calcular as permeabilidades relativas, como

$$k_{rw}(S_w) = \left(\frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{or}} \right)^2 \quad (6)$$

$$k_{ro}(S_w) = \left(\frac{1 - S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{or}} \right)^2 \quad (7)$$

onde S_{wr}, S_{or} são as saturações relativas da fase água (w), óleo (o), respectivamente.

2.3 Equações Fundamentais

Ao realizar o balanço de massa em um volume de controle obtemos a forma diferencial da equação de conservação de massa para escoamentos bifásicos em meios porosos (BEAR, 1972; CHEN et al., 2006) que é dada por:

$$\frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i, i = o, w \quad (8)$$

onde $\vec{v}_i, \rho_i, \phi$ e q_i representam a velocidade superficial de Darcy, a densidade da fase i , a porosidade do meio poroso e o termo de fonte (ou sumidouro), respectivamente.

A Lei de Darcy estabelece uma relação linear empírica entre a velocidade do fluido e o potencial hidráulico (EWING, 1983; CHEN et al., 2006; FANCHI, 2001). A velocidade de Darcy para um escoamento bifásico pode ser expressa como

$$\vec{v}_i = -\frac{k_{ri}}{\mu_i} K \left(\vec{\nabla} p_i - \rho_i g \vec{\nabla} z \right) \quad (9)$$

onde μ_i, ρ_i, p_i e g representam a viscosidade, a massa específica, a pressão para uma fase i e a aceleração gravitacional, respectivamente.

As hipóteses simplificadoras que assumimos no presente trabalho são:

- O meio poroso é totalmente saturado pelas fases líquidas.
- O fluido e a rocha são incompressíveis.
- Escoamento imiscível.
- Escoamento isotérmico.
- A viscosidade é considerada constante.
- Os efeitos de capilaridade e gravidade são desprezados.

Então, a partir das últimas hipóteses, a velocidade de Darcy Eq. (9) pode ser:

$$\vec{v}_i = -\frac{k_{ri}}{\mu_i} K \vec{\nabla} p_i, \quad i = o, w \quad (10)$$

2.3.1 Equação de Pressão

Ao expandir os termos temporais da Eq. (8) e ao utilizar a regra da cadeia na primeira componente da igualdade, temos:

$$\rho_i S_i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho_i \phi \frac{\partial S_i}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i \quad (11)$$

Ao considerar que o meio poroso é rígido, então, a porosidade é constante, ou seja, não é função da pressão. Portanto,

$$\rho_i \phi \frac{\partial S_i}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i \quad (12)$$

ao dividir a Eq. (12) por ρ_i , e ao substituir os valores da fase i chegamos a

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S_o}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_o) + Q_o \\ \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_w) + Q_w \end{aligned} \quad (13)$$

onde $Q_i = q_i / \rho_i$ é a vazão volumétrica específica de cada fase i . Logo, somando as equações em (13), obtemos:

$$\phi \frac{\partial (S_o + S_w)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_o + \vec{v}_w) + Q_T \quad (14)$$

E da equação (3) temos $S_w + S_o = 1$. Portanto a Eq. (14) pode ser escrita como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \quad (15)$$

onde $Q = Q_w + Q_o$ e $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_w$ representam a vazão volumétrica específica total e a velocidade de Darcy total.

Logo, a velocidade total da Eq. (15) pode ser expressa como:

$$\vec{v} = -\lambda_o K \vec{\nabla} p_o - \lambda_w K \vec{\nabla} p_w = -K \vec{\nabla} (\lambda_o p_o + \lambda_w p_w) \quad (16)$$

onde $\lambda_o = k_{ro}/\mu_o$ e $\lambda_w = k_{rw}/\mu_w$ representam as mobilidades da fase óleo e água, respectivamente.

Ao considerar a pressão média como $p_m = p = (p_o + p_w)/2$ e a pressão capilar $p_c = p_o - p_w$, podemos obter: $p_w = p - p_c/2$, $p_o = p + p_c/2$. Estas últimas igualdades, quando substituímos na Eq. (16), obtemos:

$$\vec{v} = -\lambda K \vec{\nabla} p \quad (17)$$

onde $\lambda = \lambda_o + \lambda_w$ mobilidade total do fluido.

A equação (15) é conhecida como a equação de pressão, que é de natureza elíptica (EWING, 1983; CARVALHO, 2005).

No caso, apenas um fluido, saturando o meio poroso, podemos reescrever a equação de pressão como:

$$\vec{\nabla} \cdot (-K \vec{\nabla} p) = Q \quad (18)$$

2.3.2 Equação de Saturação

Usando a Eq. (10) e escrever para as fases óleo (o) e água (w), respectivamente, obtemos as seguintes equações:

$$\vec{v}_o = -K \lambda_o \vec{\nabla} p_o \quad (19)$$

$$\vec{v}_w = -K \lambda_w \vec{\nabla} p_w \quad (20)$$

Logo multiplicando as Eqs. (19) e (20) pelas mobilidades λ_w e λ_o , respectivamente, temos:

$$\lambda_w \vec{v}_o = -K \lambda_w \lambda_o \vec{\nabla} p_o \quad (21)$$

$$\lambda_o \vec{v}_w = -K \lambda_w \lambda_o \vec{\nabla} p_w \quad (22)$$

Subtraindo a Eq. (21) da Eq. (22) e substituir $\vec{v}_o = \vec{v} - \vec{v}_w$ pela Eq. (21), obtemos:

$$\lambda_w \vec{v} - (\lambda_o + \lambda_w) \vec{v}_w = -K \lambda_w \lambda_o (\vec{\nabla} p_o - \vec{\nabla} p_w) \quad (23)$$

Então, associando adequadamente e dividindo a Eq. (23) por λ , temos:

$$\vec{v}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} \vec{v} + K \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda} (\vec{\nabla} p_c) \quad (24)$$

onde $p_c = p_o - p_w$.

Uma vez que a pressão capilar é desprezada no presente trabalho e ao definir o fluxo fracional da fase água como $f_w = \lambda_w / \lambda$, a Eq. (24) podemos reescrever como:

$$\vec{v}_w = f_w \vec{v} \quad (25)$$

Substituindo a Eq. (25) pela Eq. (12) para a fase $i = w$, temos:

$$\rho_w \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_w f_w \vec{v}) + q_w \quad (26)$$

logo dividindo pela densidade da fase água (ρ_w), obtemos a seguinte expressão:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) + Q_w \quad (27)$$

onde $Q_w = q_w / \rho_w$.

A equação (27) é conhecida como a equação de saturação para um escoamento bifásico em meios porosos, sendo de natureza hiperbólica.

Quando a velocidade total da Eq. (27) é considerada constante, obtemos a seguinte equação:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} f_w = Q_w \quad (28)$$

Então, a Eq. (28) é conhecida como “Equação de Buckley-Leverett”, que é um tipo de equação diferencial hiperbólica de transporte de fluidos, onde o termo advectivo é não-linear devido ao fato de o fluxo fracional depender da saturação, *i.e.*, $f_w = f_w(S_w)$.

2.3.3 Condições Iniciais e Condições de Contorno

No contexto de simulação de reservatórios, além de existir condições iniciais e de contorno, existem “condições de contornos internos” que podem ser poços produtores e/ou injetores. A vazão de fluido injetado (Q_I) nos poços injetores é tratada como condição de contorno, da mesma forma que a pressão (p_p) nos poços produtores com a qual os fluidos abandonam o reservatório (HURTADO, 2005; CARVALHO, 2005; TADA, 2009). Quando não se especifica nenhuma condição de contorno nos volumes de controle adjacente aos contornos, se assume que a fronteira é impermeável e, geralmente, se considera condição de fluxo nulo (CARVALHO, 2005; HURTADO, 2005).

Note-se que os nós que compartilham tanto o contorno de Neumann quanto o contorno de Dirichlet, no presente trabalho, assumem como condição de contorno de Dirichlet.

Seja Ω um domínio poligonal em que o contorno é denotado por Γ e é dado como a união disjunta dos diferentes contornos, isto é:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup P_I \cup P_P \quad (29)$$

onde Γ_D , Γ_N , P_I e P_P representam o contorno de Dirichlet, Neumann, os poços injetores e os poços produtores, respectivamente, como podemos ver na Figura 1.

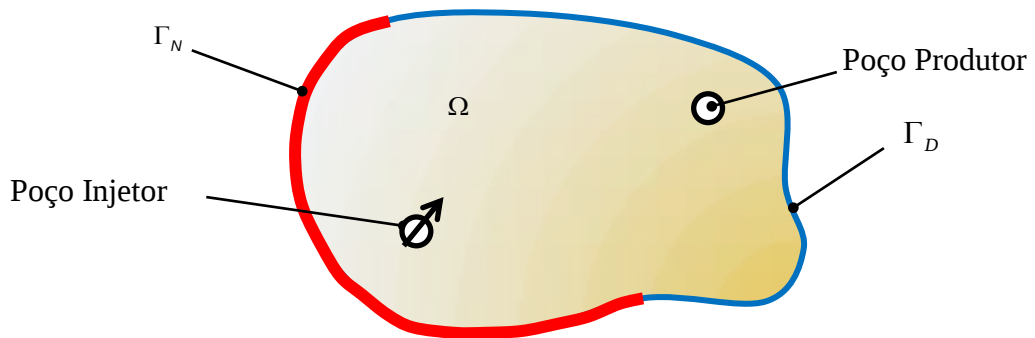


Figura 1: Identificação do domínio e dos contornos.

Ao considerar um reservatório isolado ($\Gamma_D = \emptyset$), ou seja, a entrada e a saída de massa ocorrem somente pelos poços injetores e produtores, respectivamente, as condições de contorno para a equação de pressão são dadas por:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= Q_I \quad \text{ou} \quad p(x, t) = p_I \quad \text{sobre} \quad P_I \times [0, t] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= Q_P \quad \text{ou} \quad p(x, t) = p_P \quad \text{sobre} \quad P_P \times [0, t] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_N, \quad \text{em} \quad \Gamma_N \times [0, t] \end{aligned} \quad (30)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor área normal, Q_I e Q_P são as vazões volumétricas dos poços injetores e produtores, respectivamente, g_N é o fluxo normal prescrito em Γ_N , que é nulo no caso o contorno ser impermeável.

Para esse mesmo reservatório, as condições de contorno para a equação de saturação são dadas por:

$$S_w(\vec{x}, t) = \bar{S}_w \quad \text{em} \quad \Gamma_I \times [0, t] \quad (31)$$

onde $\bar{S}_w$ representa a saturação prescrita em um conjunto de poços produtores.

As condições iniciais podem ser escritas como

$$S_w(\vec{x}, 0) = \bar{S}_w^0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (32)$$

onde $\bar{S}_w^0$ é a distribuição da saturação inicial no reservatório de petróleo.

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

3.1 Introdução

Neste capítulo escrevemos na forma discreta das equações diferenciais que modelam o escoamento bifásico (óleo, água) em reservatórios de petróleo a partir do Método dos Volumes Finitos Centrado na Célula. A formulação do método que implementamos foi originalmente desenvolvida por Gao et al. (2010) para discretizar a equação de difusão em meios heterogêneos e anisotrópicos em malhas poligonais quaisquer. Este método é capaz de reproduzir exatamente soluções lineares por partes a partir da utilização de interpolações com pesos explícitos. O termo temporal da equação de saturação foi discretizado pelo método de Euler Explícito e a discretização espacial foi feita utilizando o método de ponderação à montante.

Utilizamos a metodologia IMPES, que é um método segregado para a solução das equações de escoamento bifásico, bastante popular na indústria de petróleo (COATS, 2001; CARVALHO, 2005). Neste método, dada a distribuição inicial de saturação dos fluidos no reservatório, calculamos o campo de pressão de maneira implícita e, posteriormente, calculamos as velocidades na face de cada volume de controle, o qual utilizamos como dado de entrada para o cálculo do campo de saturações de maneira que as equações de pressão e saturação são acopladas (fracamente) através das velocidades na face do volume de controle. Com a nova distribuição de saturação, retornamos para a equação de pressão, repetindo o processo até o instante de tempo desejado ou um *VPI* adequado. Esquemáticamente, descrevemos o método IMPES conforme Figura 2.

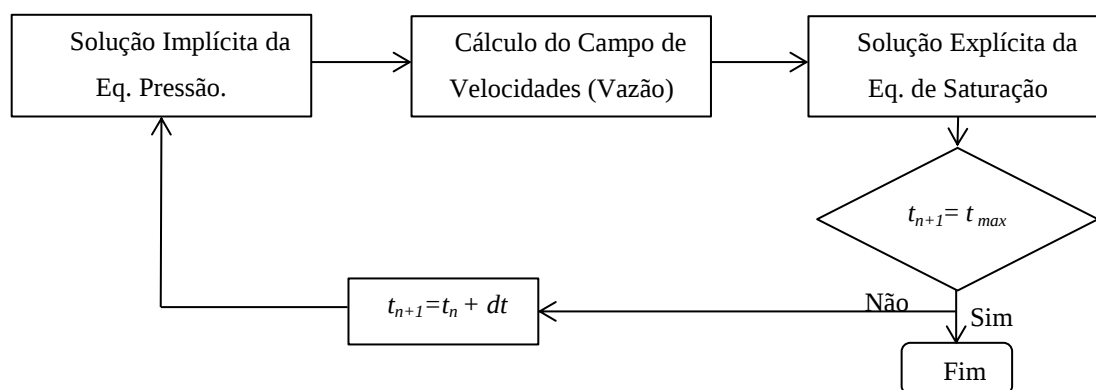


Figura 2: Esquema IMPES.

O método *MPFA-DEW* é uma formulação de volumes finitos centrada na célula (*CCFV*) que retorna os valores da pressão nos centros dos volumes de controle, células (contrariamente a uma formulação *NCFV*, centrada no nó, que retorna os valores da pressão nos nós). Estas duas alternativas estão apresentadas na Figura 3. Esta caracterização como *CCFV* é o ponto de partida para o desenvolvimento da formulação.

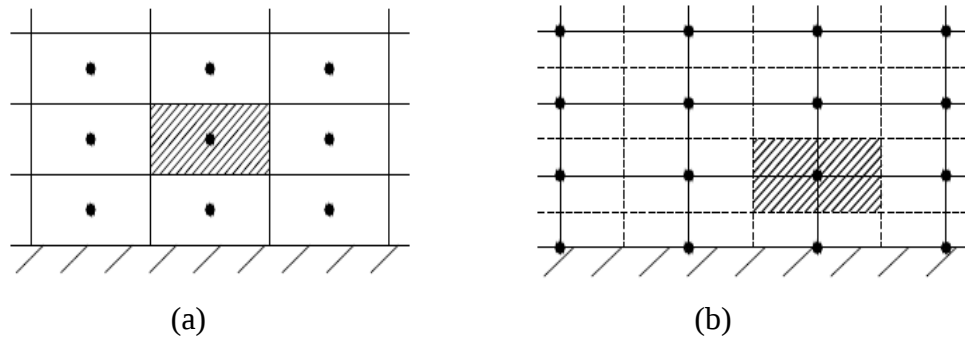


Figura 3: Tipos de volume controle: (a) esquema de volume de controle usando o *CCFV*; (b) esquema de volume controle usando o *NCFV* (MORTON, 1996).

3.2 Método de Volumes Finitos

O Método dos Volumes Finitos (*Finite Volume Method - FVM*) foi introduzido por primeira vez por Mc Donald (1971) e, posteriormente, por MacCormack e Paullay (1972) para a solução bidimensional da equação de Euler e, logo, foi estendido por Rizze e Inouye (1973) para o caso tridimensional (HIRSCH, 1994). A vantagem deste método é o fato de ser local e globalmente conservativo. Além disso, este método pode ser usado sobre geometrias arbitrárias e complexas, produzindo boas aproximações em malhas estruturadas e não estruturadas (EYMARD, et al., 2006).

O *FVM* é uma técnica de discretização para resolver, de maneira aproximada, equações diferenciais que governam certos fenômenos da natureza. A equação a ser resolvida é integrada (forma fraca) em um volume de controle (VC) e, pelo teorema da divergência de Green-Gauss, a integral sobre o VC é transformada em uma integral sobre o contorno do VC. Daí aplicamos alguma formulação numérica para aproximação dos fluxos nas superfícies de controle a fim de obtermos uma aproximação da integral original. Do ponto de vista industrial, o *FVM* pode ser considerado um método robusto e barato (EYMARD, et al., 2006).

3.3 Formulação Implícita da Equação de Pressão pelo *MPFA-DEW*

A discretização da equação de pressão (Eq. (15))

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \text{ com } \vec{v} = -\lambda_T \tilde{K} \vec{\nabla} p \quad (33)$$

é feita utilizando o método *MPFA-DEW* em que $\vec{v} = \vec{v}_T$.

Logo, integrando no domínio contínuo Ω , temos:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} ds = \int_{\Omega} Q dV \quad (34)$$

ao particionar o domínio contínuo em um conjunto finito de subdomínios chamados volumes de controle ($\Omega_k \subset \Omega$). Ao expressar a Eq. (34) em um volume de controle arbitrário Ω_k , temos:

$$\int_{\Omega_k} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} ds = \int_{\Omega_k} Q dV_k \quad (35)$$

Logo utilizando o teorema de divergência de Gauss na Eq. (35), obtemos:

$$\int_{\partial\Omega_k} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \bar{Q} V_k \quad (36)$$

Na Equação (36) $\vec{n}$ é o vetor normal a superfície de controle do volume Ω_k . Logo, ao reutilizar o teorema de valor médio na integral à esquerda da Eq. (36), chegamos à:

$$\int_{\partial\Omega_k} \vec{v} \cdot \vec{n} dA \cong \sum \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (37)$$

onde $\vec{v}_{IJ}$ é a velocidade aproximada na superfície de controle (ou face) formada pelos nós I e J , e $\vec{N}_{IJ}$ é o vetor área, normal a cada face IJ . E a somatória é realizada sobre todas as faces que compõem o volume de controle.

A partir das Eqs. (36) e (37) podemos escrever:

$$\sum \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q} V_k \quad (38)$$

Pela Lei de Darcy, na Eq. (38), a velocidade aproximada $\vec{v}_{IJ}$ varia com o tensor de permeabilidade e a mobilidade total na face. A fim de mantermos uma aproximação de segunda

ordem para a mobilidade, escrevemos a mesma em função das mobilidades nodais, λ_I e λ_J , como:

$$\lambda_{IJ} = \frac{\lambda_I + \lambda_J}{2} \quad (39)$$

Por outro lado, as mobilidades nodais são aproximadas em função dos graus de liberdade originais através de uma média aritmética, ponderada pelos volumes de controle (ELMER, et al., 2002) de modo que

$$\lambda_I = \sum_{k=1}^{n(I)} \lambda_{T(k)} \Omega_k / \sum_{k=1}^{n(I)} \Omega_k \text{ e } \lambda_J = \sum_{k=1}^{n(J)} \lambda_{T(k)} \Omega_k / \sum_{k=1}^{n(J)} \Omega_k \quad (40)$$

onde $\lambda_{T(k)}$ é a mobilidade total no volume de controle “ k ”. E $n(I)$ e $n(J)$ representam o número de elementos que concorrem nos vértices I e J , respectivamente. O volume do k -ésimo elemento é denotado por $\forall_k$. A aproximação foi feita respeitando o critério de linearidade, no qual no apêndice B é provado que a interpolação das mobilidades varia linearmente.

Daqui por diante, o tensor de permeabilidade em produto com a mobilidade na face é denotado como

$$\tilde{\lambda} = \lambda_{IJ} K \quad (41)$$

onde $\tilde{\lambda}$ é o tensor de mobilidade.

A discretização numérica da Eq. (38) é obtida utilizando o método proposto por Gao et al. (2010). Este método garante que as soluções obtidas para o campo de pressões sejam lineares por partes. Para tal, o gradiente aproximado deve satisfazer o seguinte Lema.

LEMA 3.1. Seja p uma função de pressão definida sobre o triângulo $\triangle ABC$ com vértices ordenados em sentido anti-horário, então:

$$\vec{\nabla} p \cong \frac{p_A - p_B}{|AB|} \overrightarrow{AB} + \frac{\Re \overrightarrow{AB}}{|AB|^2} \left[(p_B - p_A) \text{ctg} \angle BCA + (p_C - p_A) \text{ctg} \angle ABC \right] \quad (42)$$

onde

$$\Re = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \text{ com } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

A demonstração do Lema 3.1 está no apêndice C do presente trabalho.

Na Figura 4, estão ilustrados a célula diamante e parâmetros relevantes que são utilizados durante a presente formulação, envolvendo os vértices e os baricentros do volume de controle, além de alguns entes geométricos importantes na construção da formulação.

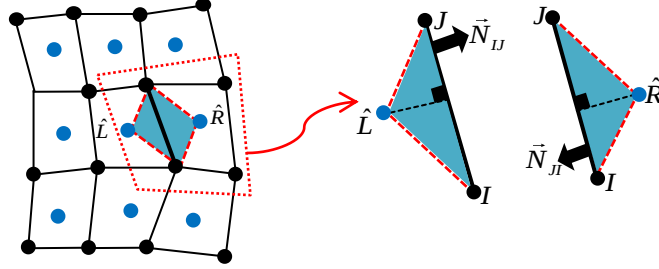


Figura 4: Diagrama local de uma malha poligonal qualquer, ilustrando o “Diamond Path” (célula diamante).

Dada uma face (em 2-D) do volume de controle, adotamos a seguinte notação:

- O elemento à esquerda da face é denotado por $\hat{L}$ e o elemento à direita da face é denotado por $\hat{R}$.
- $\vec{N}_{IJ} = \Re \overrightarrow{IJ}$ e $\vec{N}_{JI} = \Re \overrightarrow{JI}$, tais que $\vec{N}_{JI} = -\vec{N}_{IJ}$ são os vetores áreas, normais as faces $\overrightarrow{IJ}$ e $\overrightarrow{JI}$, respectivamente.
- As alturas dos baricentros, em relação a tal face, são denotadas como $h_{IJ}^{\hat{L}}$, $h_{JI}^{\hat{R}}$ para as células $\hat{L}$, $\hat{R}$, respectivamente.
- $\kappa(\hat{L}) = \kappa_{\hat{L}}$ é a permeabilidade da célula $\hat{L}$.
- $p(\hat{L}) = p_{\hat{L}}$ e $p(\hat{R}) = p_{\hat{R}}$ são as pressões nos baricentros das células $\hat{L}$ e $\hat{R}$, respectivamente.
- $p(I) = p_I$ e $p(J) = p_J$ são as pressões nos vértices I e J .

Dessa forma, podemos reescrever o lema 3.1 da Eq. (42) como

$$\vec{\nabla} p \cong \frac{\vec{N}_{IJ}}{|\overrightarrow{IJ}|} \left((p_I - p_{\hat{L}}) \cot \angle IJ\hat{L} + (p_J - p_{\hat{L}}) \cot \angle \hat{L}IJ \right) + (p_J - p_I) \frac{\overrightarrow{IJ}}{|\overrightarrow{IJ}|} \quad (43)$$

Utilizando a combinação linear descrita a seguir, temos:

$$\vec{K}_{IJ}^T(\vec{N}_{IJ}) = K_{IJ}^{(t)} \vec{IJ} + K_{IJ}^{(n)}(\vec{N}_{IJ}) \quad (44)$$

e pré-multiplicando a Eq. (44) por $\vec{IJ}$ e, após manipulações algébricas, obtemos:

$$K_{IJ}^{(t)} = \frac{(\vec{N}_{IJ})^T \vec{\lambda}_L(\vec{IJ})}{|\vec{IJ}|^2} \quad (45)$$

De maneira análoga, multiplicando a Eq. (44) por $\vec{N}_{IJ}$ após manipulações dos termos, chegamos a:

$$K_{IJ}^{(n)} = \frac{(\vec{N}_{IJ})^T \vec{\lambda}_L(\vec{N}_{IJ})}{|\vec{IJ}|^2} \quad (46)$$

Ao substituir a Eq. (43) pela Eq. (33), multiplicando pelo vetor área $\vec{N}_{IJ}$ e após manipulações algébricas, podemos escrever:

$$\vec{v} \cdot \vec{N}_{IJ} \cong -K_{IJ}^{(n)} \left((p_I - p_{\hat{L}}) \cot \angle IJ\hat{L} + (p_J - p_{\hat{L}}) \cot \angle \hat{L}IJ \right) - K_{IJ}^{(t)} (p_J - p_I) \quad (47)$$

Considerando, ainda, as relações trigonométricas, temos:

$$\cot \angle IJ\hat{L} = \frac{(\vec{J\hat{L}} \cdot \vec{JI})}{|\vec{JI}| h_{IJ}^{\hat{L}}} \quad (48)$$

$$\cot \angle \hat{L}IJ = \frac{(\vec{I\hat{L}} \cdot \vec{IJ})}{|\vec{IJ}| h_{IJ}^{\hat{L}}} \quad (49)$$

Substituindo as Eq. (48) e Eq. (49) na Eq. (47), temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{N}_{IJ} \cong -K_{IJ}^{(n)} \left((p_I - p_{\hat{L}}) \frac{(\vec{J\hat{L}} \cdot \vec{JI})}{|\vec{JI}| h_{IJ}^{\hat{L}}} + (p_J - p_{\hat{L}}) \frac{(\vec{I\hat{L}} \cdot \vec{IJ})}{|\vec{IJ}| h_{IJ}^{\hat{L}}} \right) - K_{IJ}^{(t)} (p_J - p_I) \quad (50)$$

A vazão na face IJ é aproximada a partir do elemento $\hat{L}$, como:

$$\begin{aligned} \frac{h_{IJ}^{\hat{L}}}{K_{IJ}^{(n)}} \int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{N}_{IJ} dA \cong & -\frac{1}{|\vec{IJ}|} \left((p_I - p_{\hat{L}}) \frac{(\vec{J\hat{L}} \cdot \vec{JI})}{|\vec{IJ}|} + (p_J - p_{\hat{L}}) \frac{(\vec{I\hat{L}} \cdot \vec{IJ})}{|\vec{IJ}|} \right) - \\ & (p_J - p_I) \frac{K_{IJ}^{(t)}}{K_{IJ}^{(n)}} h_{IJ}^{\hat{L}} \end{aligned} \quad (51)$$

Analogamente, fazendo as mesmas operações aritméticas para o triângulo $\triangle \hat{R}JI$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{h_{JI}^{\hat{R}}}{K_{JI}^{(n)}} \int_{JI} \vec{v} \cdot \vec{N}_{JI} dA \cong & -\frac{1}{|\vec{JI}|} \left((p_J - p_{\hat{R}}) \frac{(\vec{J\hat{R}} \cdot \vec{JI})}{|\vec{JI}|} + (p_I - p_{\hat{R}}) \frac{(\vec{I\hat{R}} \cdot \vec{IJ})}{|\vec{JI}|} \right) - \\ & (p_I - p_J) \frac{K_{JI}^{(t)}}{K_{JI}^{(n)}} h_{JI}^{\hat{R}} \end{aligned} \quad (52)$$

considerando a continuidade dos fluxos na face IJ , temos:

$$\int_{JI} \vec{v} \cdot \vec{N}_{JI} dA = - \int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{N}_{IJ} dA \quad (53)$$

Pela Eq. (53) e somando as equações (51) e (52), chegamos a:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = -K_{IJ}^{(1)} |\vec{IJ}| \left[p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}} - D_{IJ}^{(1)} (p_J - p_I) \right] \quad (54)$$

onde os parâmetros $K_{IJ}^{(1)}$ e $D_{IJ}^{(1)}$ são, respectivamente, as projeções nas direções normal e tangencial do tensor de permeabilidades. Os referidos componentes são obtidos pela seguinte expressão:

$$K_{IJ}^{(1)} = \frac{K_{IJ}^{(n)} K_{JI}^{(n)}}{K_{IJ}^{(n)} h_{JI}^{\hat{R}} + K_{JI}^{(n)} h_{IJ}^{\hat{L}}} \quad (55)$$

$$D_{IJ}^{(1)} = \frac{\vec{\hat{L}\hat{R}} \cdot \vec{IJ}}{|\vec{IJ}|^2} - \frac{1}{|\vec{IJ}|} \left(\frac{K_{IJ}^{(t)}}{K_{IJ}^{(n)}} h_{IJ}^{\hat{L}} + \frac{K_{JI}^{(t)}}{K_{JI}^{(n)}} h_{JI}^{\hat{R}} \right) \quad (56)$$

É importante observar que a derivação do fluxo discretizado respeita o critério de preservação da linearidade em malhas poligonais em geral (GAO, et al., 2010). Em malhas quadriláteras, a derivação de fluxo torna-se um esquema *nine-point*. Outra observação relevante é que quando o tensor de permeabilidade é isotrópico, i. e. $k_{xy} = k_{yx} = 0$, a parte tangencial (segundo

termo) de $D_{IJ}^{(1)}$ desaparece. É possível afirmar que o esquema *MPFA-DEW* se reduz a uma formulação de diferenças finitas de dois pontos para a aproximação dos fluxos através de uma face (*Two-Point Flux Approximation – TPFA*) quando se considera o tensor isotrópico sobre a malha ortogonal³ até em meios isotrópicos heterogêneos.

3.3.1 Tratamento dos Fluxos no Contorno

Para cada face do contorno, os fluxos devem ser calculados de acordo com o tipo de condição prescrita nesse contorno. O fluxo em uma face que esteja sob uma condição de *Dirichlet* (i. e. pressão prescrita) é obtido usando-se a Eq. (51) da seguinte forma:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{-K_{IJ}^{(n)}}{h_{IJ}^L |\vec{IJ}|} \left(\left(\vec{JL} \cdot \vec{JI} \right) g_D(I) + \left(\vec{IL} \cdot \vec{IJ} \right) g_D(J) - |\vec{IJ}|^2 p_{\hat{I}} \right) - (g_D(J) - g_D(I)) K_{IJ}^{(t)} \quad (57)$$

onde $g_D(J) = p_J$, $g_D(I) = p_I$ são valores prescritos.

De maneira análoga, o fluxo em uma face que esteja no contorno de *Neumann* (i.e. fluxo prescrito) é dado por:

$$g_N = \vec{v}_{IJ} \cdot \frac{\vec{N}_{IJ}}{|\vec{IJ}|} \quad (58)$$

Assim, temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = g_N |\vec{IJ}| \quad (59)$$

3.3.2 Interpolação das Pressões nos Vértices

Nesta seção, mostramos como as pressões nodais (I e J) são escritas como função dos graus de liberdade. Nesse sentido, o nosso intuito é mostrar que o método *MPFA-DEW* é uma formulação completamente centrada na célula. Assim, é preciso que haja a interpolação dos vértices. Na literatura, existem diferentes métodos para derivar os pesos da interpolação, tais como a expansão de Taylor (HUANG, et al., 2003), a interpolação bi linear (WU, 2005), a interpolação bilinear-modificada (BASKO, et al., 2009), o método de ponto finito (GX, et al., 2007). Além disso, estes pesos são susceptíveis às descontinuidades do material e ao tipo de malha. No presente trabalho, utilizamos pesos explícitos propostos por Gao et al. (2010), os

³ Ver Apêndice A

quais não dependem das discontinuidades do material e do tipo de malha. Além disso, tais interpolações são capazes de representar campos lineares exatamente por partes.

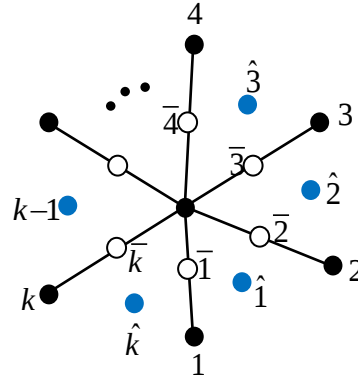


Figura 5: Elementos (pontos azuis), vértices (pontos pretos) e ponto médio (ponto “vazio”) na vizinhança de um vértice I .

No caso mais geral, em que para um vértice I concorrem $n(I)$ elementos, podemos escrever

$$p_I = \sum_{k=1}^{n(I)} w_k p_k \quad (60)$$

onde w_k é o peso atribuído ao elemento k (ou seja, o peso atribuído à p_k) na interpolação da pressão no vértice I , e $n(I)$ é número de elementos na vizinhança do vértice I .

Os pontos dinâmicos⁴ em cada interface do volume de controle são definidos por:

$$\bar{k} = \Phi I + (1 - \Phi) J, \quad 0 \leq \Phi \leq 1 \quad (61)$$

No presente trabalho, assumimos que $\Phi = 1/2$, então $\bar{k}$ é o ponto médio da face IJ .

3.3.3 Derivação de Pesos Explícitos do Tipo 1

Antes de começar a derivar os pesos explícitos do tipo 1, definimos as seguintes constantes geométricas:

$$\eta_{k,1} = \frac{|\bar{Ik}|}{h_{Ik}^k} \quad (62)$$

⁴ Ver Figure 6

onde $t = \alpha + i - 1$, $i=1,2$ e $\alpha = 1, 2, \dots, n(I)$

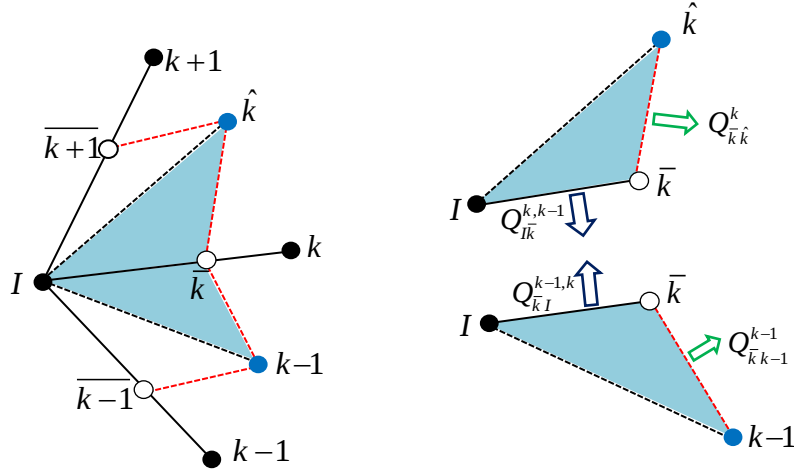


Figura 7: Esboço dos subvolumes de controle e dos fluxos locais.

A partir da equação da continuidade escrita para a face $\bar{I}\bar{k}$, temos:

$$Q_{\bar{k}I}^{k-1,k} + Q_{I\bar{k}}^{k,k-1} = 0 \quad (68)$$

Portanto, substituindo as Eqs. (64) e (65) na Eq.(68), obtemos:

$$p_{\bar{k}} - p_I = \frac{K_{\hat{k},1}^{(n)} \eta_{k,1} (p_{\hat{k}} - p_I) + K_{\hat{k},2}^{(n)} \eta_{k,2} (p_{k-1} - p_I)}{K_{k-1,2}^{(n)} \cot \theta_{k-1,2} + K_{\hat{k},1}^{(n)} \cot \theta_{k,1} - K_{k-1,2}^{(t)} + K_{\hat{k},1}^{(t)}} \quad (69)$$

Utilizando como volume de controle auxiliar, o polígono formado pelos centroides dos elementos que concorrem no nó I , e pelos pontos médios sobre as faces que concorrem no nó I e usando novamente a equação da continuidade, temos:

$$\sum_{\hat{k}=1}^{n(I)} Q_{\bar{k},\hat{k}}^k + Q_{k-1,\bar{k}}^{k-1} = 0 \quad (70)$$

onde $Q_{\bar{k},\hat{k}}^k \cong \vec{v} \cdot \vec{N}_{\bar{k}\hat{k}}$ denota o fluxo pela semi-face $\bar{k}\hat{k}$ no elemento k e $Q_{k-1,\bar{k}}^{k-1} \cong \vec{v} \cdot \vec{N}_{k-1\bar{k}}$ denota o fluxo na semi-face $(k-1)\bar{k}$ no elemento $k-1$.

Analogamente a Eq. (47), derivamos o fluxo na face $\bar{k}\hat{k}$ do triângulo $\triangle I\bar{k}\hat{k}$ a partir do Lema 3.1 da Eq.(42) como:

$$Q_{\bar{k}\hat{k}}^k = (p_{\bar{k}} - p_I) \left[\tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} - \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(n)} \cot \varphi_{k,1} \right] + (p_{\hat{k}} - p_I) \left[\tilde{K}_{\hat{k},1}^{(n)} \cot(\theta_{k,1} + \varphi_{k,1}) - \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} \right] \quad (71)$$

Novamente, de maneira análoga, podemos escrever para face $(k-1)\bar{k}$:

$$Q_{k-1, \bar{k}}^{k-1} = (p_{k-1} - p_I) \left[\tilde{K}_{k-1,2}^{(t)} + \tilde{K}_{k-1,2}^{(n)} \cot(\theta_{k-1,2} + \varphi_{k-1,2}) \right] + (p_{\bar{k}} - p_I) \left[\tilde{K}_{k-1,2}^{(t)} + \tilde{K}_{k-1,2}^{(n)} \cot(\varphi_{k-1,2}) \right] \quad (72)$$

em que, de forma semelhante as Eqs. (66) e (67), podemos escrever:

$$\tilde{K}_{\hat{\alpha},i}^{(t)} = \frac{\left(\vec{N}_{\bar{t}\hat{\alpha}} \right)^T \lambda_{\hat{\alpha}} \left(\bar{t} \hat{\alpha} \right)}{\left| \bar{t} \hat{\alpha} \right|^2} \quad (73)$$

$$\tilde{K}_{\hat{\alpha},i}^{(n)} = \frac{\left(\vec{N}_{\bar{t}\hat{\alpha}} \right)^T \lambda_{\hat{\alpha}} \left(\vec{N}_{\bar{t}\hat{\alpha}} \right)}{\left| \bar{t} \hat{\alpha} \right|^2} \quad (74)$$

onde $t = \alpha + i$, $i=1,2$.

Ao substituir as Eqs. (71) e (72) na Eq.(70), após algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n(I)} \left[\tilde{K}_{k-1,2}^{(n)} \cot \varphi_{k-1,2} + \tilde{K}_{k,1}^{(n)} \cot \varphi_{k,1} + \tilde{K}_{k-1,2}^{(t)} - \tilde{K}_{k,1}^{(t)} \right] (p_{\bar{k}} - p_I) - \left[\sum_{i=1}^2 \tilde{K}_{\hat{k},i}^{(n)} \cot(\theta_{k,i} + \varphi_{k,i}) - \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} + \tilde{K}_{\hat{k},2}^{(t)} \right] (p_{\hat{k}} - p_I) = 0 \quad (75)$$

Substituir a Eq.(69) na Eq.(75), obtemos a seguinte expressão simplificada:

$$\sum_{k=1}^{n(I)} \psi_k (p_{\hat{k}} - p_I) = 0 \quad (76)$$

onde

$$\psi_k = K_{\hat{k},1}^{(n)} \eta_{k,1} \phi_k + K_{\hat{k},2}^{(n)} \eta_{k,2} \phi_{k+1} - \sum_{i=1}^2 \tilde{K}_{\hat{k},i}^{(n)} \cot(\theta_{k,i} + \varphi_{k,i}) + \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} - \tilde{K}_{\hat{k},2}^{(t)} \quad (77)$$

e

$$\phi_k = \frac{\tilde{K}_{k-1,2}^{(n)} \cot \varphi_{k-1,2} + \tilde{K}_{k,1}^{(n)} \cot \varphi_{k,1} + \tilde{K}_{k-1,2}^{(t)} - \tilde{K}_{k,1}^{(t)}}{K_{k-1,2}^{(n)} \cot \theta_{k-1,2} + K_{k,1}^{(n)} \cot \theta_{k,1} - K_{k-1,2}^{(t)} + K_{k,1}^{(t)}} \quad (78)$$

Da Eq.(76), derivamos os pesos explícitos do tipo 1 como:

$$w_k = \frac{\psi_k}{\sum_{k=1}^{n(I)} \psi_k} \quad (79)$$

onde $k = 1, 2, \dots, n(I)$.

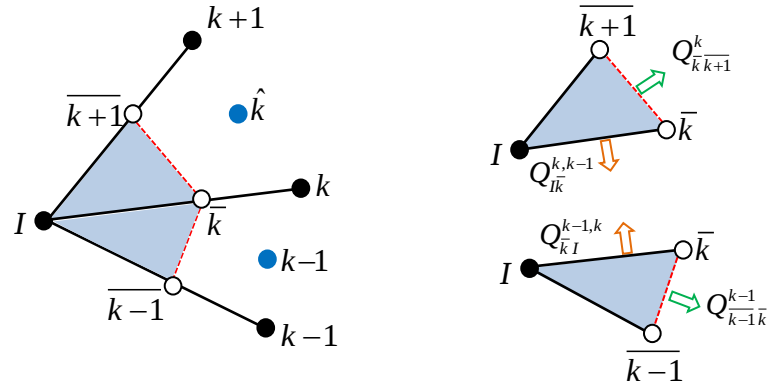


Figura 8: Representação dos fluxos locais e dos ângulos necessários para calcular os pesos explícitos de segundo tipo.

3.3.4 Derivação de Pesos Explícitos do Tipo 2

Agora, escolhemos um contorno diferente, i.e., um volume de controle auxiliar diferente $(I\bar{k}\bar{k}+1)$, como mostrado na Figura 8, para obtermos novos pesos também com expressões explícitas (i.e. que não necessitam da solução de um sistema de equações para serem obtidos).

Novamente, ao realizar o balanço de fluxos (i.e. usando a equação da continuidade) no volume de controle auxiliar formado pelos pontos sobre as faces $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \dots \bar{n(I)}$, temos:

$$\sum_{k=1}^{n(I)} Q_{\bar{k}\bar{k}+1}^k = 0 \quad (80)$$

onde $Q_{\bar{k}\bar{k}+1}^k \cong \vec{v} \cdot \vec{N}_{\bar{k}\bar{k}+1}$ denota o fluxo pela face $\bar{k}\bar{k}+1$ no elemento k .

A derivação do fluxo, $Q_{\bar{k}\bar{k}+1}^k$, é análoga à obtenção da Eq. (71), de modo que:

$$Q_{\bar{k}\bar{k}+1}^k = \left(\bar{K}_{\hat{k}}^{(t)} - \bar{K}_{\hat{k}}^{(n)} \cot \mathcal{G}_{k,2} \right) (p_{\bar{k}} - p_1) - \left(\bar{K}_{\hat{k}}^{(t)} + \bar{K}_{\hat{k}}^{(n)} \cot \mathcal{G}_{k,1} \right) (p_{\bar{k}+1} - p_1) \quad (81)$$

onde as constantes físicas $\bar{K}_{\hat{\alpha}}^{(t)}$ e $\bar{K}_{\hat{\alpha}}^{(n)}$ são dados por:

$$\bar{K}_{\hat{\alpha}}^{(t)} = \frac{\left(\vec{N}_{\bar{\alpha} \bar{\alpha}+1} \right)^T \lambda_{\hat{\alpha}} \left(\overline{(\bar{\alpha}) (\bar{\alpha}+1)} \right)}{\left| \overline{(\bar{\alpha}) (\bar{\alpha}+1)} \right|^2} \quad (82)$$

$$\bar{K}_{\hat{\alpha}}^{(n)} = \frac{\left(\vec{N}_{\bar{\alpha} \bar{\alpha}+1} \right)^T \lambda_{\hat{\alpha}} \left(\vec{N}_{\bar{\alpha} \bar{\alpha}+1} \right)}{\left| \overline{(\bar{\alpha}) (\bar{\alpha}+1)} \right|^2} \quad (83)$$

onde $\alpha = 1, 2, \dots, n(I)$. com $n(I)$ número de elementos na vizinhança do vértice I .

Ao substituir a Eq. (81) na Eq. (80), obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n(I)} \left[\bar{K}_{k-1}^{(t)} - \bar{K}_k^{(t)} + \bar{K}_{k-1}^{(n)} \cot \mathcal{G}_{k-1,1} + \bar{K}_k^{(n)} \cot \mathcal{G}_{k,2} \right] (p_{\bar{k}} - p_1) = 0 \quad (84)$$

onde

$$\bar{\psi}_k = K_{\hat{k},1}^{(n)} \eta_{k,1} \xi_k + \xi_{k+1} K_{\hat{k},2}^{(n)} \eta_{k,2} \quad (85)$$

e

$$\xi_k = \frac{\bar{K}_{k-1}^{(t)} - \bar{K}_k^{(t)} + \bar{K}_{k-1}^{(n)} \cot \mathcal{G}_{k-1,1} + \bar{K}_k^{(n)} \cot \mathcal{G}_{k,2}}{K_{k-1,2}^{(n)} \cot \theta_{k-1,2} + K_{k,1}^{(n)} \cot \theta_{k,1} - K_{k-1,2}^{(t)} + K_{k,1}^{(t)}} \quad (86)$$

Substituindo a Eq. (69) em Eq. (84) e após manipulações algébricas, temos:

$$\sum_{k=1}^{n(I)} \bar{\psi}_k (p_{\hat{k}} - p_1) = 0 \quad (87)$$

Então, definimos os pesos explícitos do tipo 2 como:

$$w_k = \frac{\bar{\psi}_k}{\sum_{k=1}^{n(I)} \bar{\psi}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n(I) \quad (88)$$

Nas seções (3.3.3) e (3.3.4), mostramos como realizar a interpolação de pressões sobre os vértices no interior da malha. Na próxima seção, mostramos como tratar as pressões sobre os vértices situados no contorno da malha.

3.3.5 Tratamento dos Vértices no Contorno da Malha Computacional

O tratamento dos vértices que estão na fronteira é similar ao tratamento dos que estão no interior do domínio. É importante lembrar que se um vértice estiver no contorno de Dirichlet (i.e. pressão prescrita) o seu valor fornecido é utilizado diretamente na aproximação dos fluxos através das faces de modo que, nesta seção apresentamos apenas os casos em que consideramos condições de contorno de Neumann (i.e. fluxo prescrito) dadas por:

$$Q = -\tilde{K} \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} = g_N, \text{ sobre } \Gamma_N \quad (89)$$

Após utilizar o Lema 3.1 da Eq. (42) nos triângulos que contêm as faces $I\bar{1}$ e $\overline{IN+1}$, derivamos os fluxos de maneira análoga à Eq. (69) e obtemos as duas equações a seguir:

$$p_{\bar{1}} - p_I = \frac{K_{1,1}^{(n)} \eta_{1,1} (p_{\bar{1}} - p_I) - \left| \overline{I\bar{1}} \right| g_N (\bar{1})}{K_{1,1}^{(t)} + K_{1,1}^{(n)} \cot \theta_{1,1}} \quad (90)$$

$$p_{\overline{N+1}} - p_I = \frac{K_{\hat{N},2}^{(n)} \eta_{N,2} (p_{\hat{N}} - p_I) - \left| \overline{IN+1} \right| g_N (\overline{N+1})}{K_{\hat{N},2}^{(n)} \cot \theta_{N,2} - K_{\hat{N},2}^{(t)}} \quad (91)$$

Da Figura 9, identificamos os contornos $I \rightarrow \bar{1} \rightarrow \hat{1} \dots \bar{k} \rightarrow \hat{k} \rightarrow \overline{k+1} \dots \hat{N} \rightarrow \overline{N+1} \rightarrow I$ e utilizando a continuidade do fluxo obtemos a somatório de fluxos sobre essas faces como:

$$\sum_{k=1}^N \left[Q_{\bar{k}\hat{k}}^k + Q_{\hat{k}\overline{k+1}}^k \right] + \left(Q_{I\bar{1}}^1 + Q_{\overline{N+1}I}^N \right) = 0 \quad (92)$$

Evidentemente, pelo Lema 3.1 da Eq.(42), os fluxos $Q_{\bar{k}\hat{k}}^k$, $Q_{\hat{k}\overline{k+1}}^k$ nas interfaces $\bar{k}\hat{k}$, $\hat{k}\overline{k+1}$, respectivamente, são calculados de maneira análoga à Eq.(47), obtendo-se:

$$Q_{\bar{k}\hat{k}}^k = (p_{\bar{k}} - p_I) \left[\tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} - \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(n)} \cot \varphi_{k,1} \right] + (p_{\hat{k}} - p_I) \left[\tilde{K}_{\hat{k},1}^{(n)} \cot(\theta_{k,1} + \varphi_{k,1}) - \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} \right] \quad (93)$$

$$Q_{\hat{k}\overline{k+1}}^k = (p_{\overline{k+1}} - p_I) \left[\tilde{K}_{\hat{k},2}^{(t)} - \tilde{K}_{\hat{k},2}^{(n)} \cot \varphi_{k,2} \right] + (p_{\hat{k}} - p_I) \left[\tilde{K}_{\hat{k},2}^{(n)} \cot(\theta_{k,2} + \varphi_{k,2}) - \tilde{K}_{\hat{k},2}^{(t)} \right] \quad (94)$$

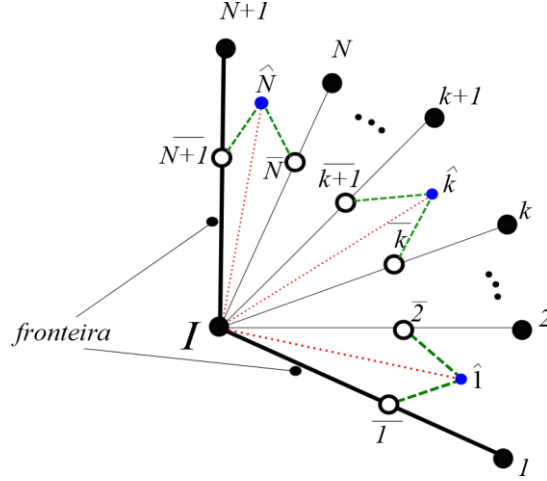


Figura 9: Tratamento do vértice I na fronteira da malha computacional tipo 1.

E, ao lembrar que os fluxos no contorno de Neumann são definidos nas faces $1\bar{k}$, $\overline{N+1I}$ de maneira análoga à Eq. (58), temos:

$$Q_{I\bar{k}}^k = \left| \overrightarrow{I\bar{k}} \right| g_N(\bar{k}) \quad (95)$$

$$Q_{\overline{N+1I}}^N = \left| \overrightarrow{N+1I} \right| g_N(\overline{N+1}) \quad (96)$$

Ao substituir as Eqs. (93)-(96) na Eq. (92) e associando de maneira conveniente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} - \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(n)} \cot \varphi_{k,1} \right] (p_{\bar{k}} - p_I) - \left[\tilde{K}_{\hat{k},2}^{(n)} \cot \varphi_{k,2} + \tilde{K}_{\hat{k},2}^{(t)} \right] (p_{\overline{k+1}} - p_I) \right\} \\ & + \sum_{k=1}^N \left[\tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} \cot(\theta_{k,1} + \varphi_{k,1}) + \tilde{K}_{\hat{k},2}^{(t)} \cot(\theta_{k,2} + \varphi_{k,2}) - \tilde{K}_{\hat{k},1}^{(t)} + \tilde{K}_{\hat{k},2}^{(t)} \right] (p_{\hat{k}} - p_I) + \\ & \left| \overrightarrow{I\hat{1}} \right| g_N(\hat{1}) + \left| \overrightarrow{I\overline{N+1}} \right| g_N(\overline{N+1}) = 0 \end{aligned} \quad (97)$$

Substituindo as Eqs. (69), (90) e (91) na Eq. (97), obtemos a forma simplificada da Eq. (97) como:

$$p_I = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \psi_k} \left\{ \sum_{k=1}^N \psi_k p_{\hat{k}} - \sum_{j=1, N+1} [1 + \phi(j)] \left| \overrightarrow{I\bar{j}} \right| g_N(\bar{j}) \right\} \quad (98)$$

onde ψ_k é definido na Eq. (77) e

$$\phi_k = \begin{cases} \frac{\tilde{K}_{1,1}^{(n)} \cot \varphi_{1,1} - \tilde{K}_{1,1}^{(t)}}{K_{1,1}^{(n)} \cot \theta_{1,1} + K_{1,1}^{(t)}}, & k=1 \\ \frac{\tilde{K}_{k-1,2}^{(n)} \cot \varphi_{k-1,2} + \tilde{K}_{k,1}^{(n)} \cot \varphi_{k,1} + \tilde{K}_{k-1,2}^{(t)} - \tilde{K}_{k,1}^{(t)}}{K_{k-1,2}^{(n)} \cot \theta_{k-1,2} + K_{k,1}^{(n)} \cot \theta_{k,1} - K_{k-1,2}^{(t)} + K_{k,1}^{(t)}}, & 2 \leq k \leq N \\ \frac{\tilde{K}_{N,2}^{(n)} \cot \varphi_{N,2} - \tilde{K}_{N,2}^{(t)}}{K_{N,2}^{(n)} \cot \theta_{N,2} + K_{N,2}^{(t)}}, & k=N+1 \end{cases}$$

A equação (98) é relativa aos pesos explícitos de tipo 1.

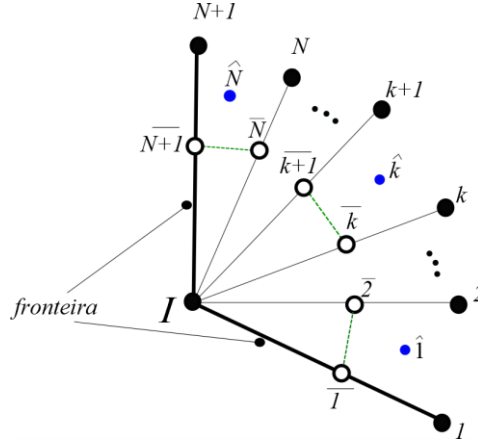


Figura 10: Tratamento do vértice I no contorno da malha computacional tipo 2.

Para interpolar os vértices no contorno de Neumann usando os pesos explícitos do tipo dois, escolhemos os volumes de controle auxiliares dados na Figura 10. O somatório dos fluxos sobre as faces $I \rightarrow \bar{1} \dots \bar{k} \rightarrow \overline{k+1} \dots \bar{N} \rightarrow \overline{N+1} \rightarrow I$ é dado por:

$$\sum_{k=1}^N Q_{\bar{k}\bar{k+1}}^k + (Q_{I\bar{1}}^1 + Q_{\overline{N+1}I}^N) = 0 \quad (99)$$

onde $Q_{\bar{k}\bar{k+1}}^k \cong \vec{v} \cdot \vec{N}_{\bar{k}\bar{k+1}}$, $Q_{\overline{N+1}I}^N \cong \vec{v} \cdot \vec{N}_{\overline{N+1}I}$ e $Q_{I\bar{1}}^1 \cong \vec{v} \cdot \vec{N}_{I\bar{1}}$.

O cálculo destes fluxos é feito de maneira análoga à Eq. (97):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left[(\bar{K}_{\bar{k}}^{(t)} - \bar{K}_{\bar{k}}^{(n)} \cot \vartheta_{k,2}) (p_{\bar{k}} - p_I) - (\bar{K}_{\bar{k}}^{(t)} + \bar{K}_{\bar{k}}^{(n)} \cot \vartheta_{k,1}) (p_{\bar{k+1}} - p_I) \right] \\ & + |\bar{I}\bar{1}| g_N(\bar{1}) + |\bar{I}\overline{N+1}| g_N(\overline{N+1}) = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

Substituindo as Eq. (69), (90) e (91) na Eq. (100) e ao rearranjar os termos, obtemos:

$$p_I = \left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \right)^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k p_{\hat{k}} - \sum_{j=1, N+1} [1 + \xi(j)] |\bar{I}\bar{j}| g_N(\bar{j}) \right] \quad (101)$$

onde $\bar{\psi}_k$ é definido na Eq. (85), e ainda:

$$\xi_k = \frac{\bar{K}_1^{(n)} \cot \vartheta_{1,2} - \bar{K}_1^{(t)}}{K_{1,1}^{(n)} \cot \theta_{1,1} + K_{1,1}^{(t)}}, k=1 \quad (102)$$

$$\xi_k = \frac{\bar{K}_{k-1}^{(t)} - \bar{K}_k^{(t)} + \bar{K}_{k-1}^{(n)} \cot \vartheta_{k-1,1} + \bar{K}_k^{(n)} \cot \vartheta_{k,2}}{K_{k-1,2}^{(n)} \cot \theta_{k-1,2} + K_{k,1}^{(n)} \cot \theta_{k,1} - K_{k-1,2}^{(t)} + K_{k,1}^{(t)}}, 2 \leq k \leq N \quad (103)$$

$$\xi_k = \frac{\bar{K}_N^{(n)} \cot \vartheta_{N,1} - \bar{K}_{\hat{N}}^{(t)}}{K_{\hat{N},1}^{(n)} \cot \theta_{N,2} + K_{\hat{N},1}^{(t)}}, k = N+1 \quad (104)$$

3.4 Montagem da Matriz e do Vetor Termo de Fonte

A determinação do campo de pressões é feita a partir do seguinte princípio: com as expressões de balanço de fluxo (vazão) escritas para todas as células, podemos escrever um sistema linear, cujo número de incógnitas, que são as pressões nos pontos de colocação das células, e o número de equações são iguais ao número de células. A solução deste sistema é o campo de pressões. Tal sistema de equações lineares pode ser expresso como

$$\begin{bmatrix} \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \end{bmatrix} \quad (105)$$

onde $\bar{M}$ é matriz de transmissibilidade, $\bar{p}$ é o vetor de pressão e $\bar{Y}$ é o vetor de termos independentes mas o termo de fonte.

A partir da Eq.(54), a vazão numa certa face interna da malha é dada por

$$Q_{IJ}^{L,R} = K_{IJ}^{(1)} p_{\hat{R}} - K_{IJ}^{(1)} p_{\hat{L}} - K_{IJ}^{(1)} D_{IJ}^{(1)} p_J + K_{IJ}^{(1)} D_{IJ}^{(1)} p_I \quad (106)$$

onde os coeficientes $K_{IJ}^{(1)}$ e $D_{IJ}^{(1)}$ são pré-calculados para todas as faces da malha a partir das eq. (55), (56). Se chamarmos de VJ o conjunto de elementos vizinhos ao nó J e de VI o conjunto de elementos vizinhos ao nó I , podemos escrever:

$$Q_U^{L,R} = K_U^{(1)} p_{\hat{R}} - K_U^{(1)} p_{\hat{L}} - K_U^{(1)} D_U^{(1)} \sum_{k \in VJ} w_k p_k + K_U^{(1)} D_U^{(1)} \sum_{j \in VI} w_j p_j \quad (107)$$

Primeiramente, para a montagem do sistema, efetuamos um laço que percorre todas as faces internas. A cada passo do laço devemos observar as células à esquerda $L(i)$ e à direita $R(i)$ da face que está sendo analisada naquele passo.

```
%-----
%UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
%CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIENCIAS
%PROGRAMA DE POS GRADUACAO EM ENGENHARIA MECÂNICA
%-----
%Subject: Solve numerically the pressure and the saturation equations using
%         a IMPES procedure. The pressure equation is solved using a
%         Multipoint Flux Approximation type Diamond (MPFA-DEW) proposed by
%         Zhiming Gao and Jiming Wu 2010 on polygonal mesh
%         and the saturation equation is solved using by scheme
%         first-order upwind method
%Criate date: 07/07/2013
%Modify data: 07/07/2013
%Adviser: Darlan K. E. Carvalho and Paulo R. M. Lyra
%Programer: Fernando Raul Licapa Contreras with contribution of Tulio Cav-
alcante
%Building the global matrix

M=sparse(size(elem,1),size(elem,1)); % Matriz esparsa
I=sparse(size(elem,1),1); % Vetor esparsa

for i=1:size(inedge,1), %Loop sobre faces interna

    %Contabiliza as contribuições do fluxo numa faces para os elementos %
    %a direita e a esquerda
    M(inedge(i,3), inedge(i,3))=M(inedge(i,3), inedge(i,3))- K_IJ(i);
    M(inedge(i,3), inedge(i,4))=M(inedge(i,3), inedge(i,4))+ K_IJ(i);
    M(inedge(i,4), inedge(i,4))=M(inedge(i,4), inedge(i,4))- K_IJ(i);
    M(inedge(i,4), inedge(i,3))=M(inedge(i,4), inedge(i,3))+ K_IJ(i);

    % Se os nós das faces estiverem sob o contorno de Dirichlet, suas
    % contribuições serão contabilizadas logo abaixo.

    if nflag(inedge(i,1),1)<200
        I(inedge(i,3))=I(inedge(i,3))- K_IJ(i)*D_IJ(i)*nflag(inedge(i,1),2);
        I(inedge(i,4))=I(inedge(i,4))+ K_IJ(i)*D_IJ(i)*nflag(inedge(i,1),2);
    end
    if nflag(inedge(i,2),1)<200
        I(inedge(i,3))=I(inedge(i,3))+ K_IJ(i)*D_IJ(i)*nflag(inedge(i,2),2);
        I(inedge(i,4))=I(inedge(i,4))- K_IJ(i)*D_IJ(i)*nflag(inedge(i,2),2);
    end

    % Contabilização das contribuições dos nós que não estão em
    % fronteiras de Dirichlet.
    if nflag(inedge(i,2),1)>200
        for j=1:(esurn2(inedge(i,2)+1)-esurn2(inedge(i,2)))
            pos_cont1=esurn2(inedge(i,2))+j;
            M(inedge(i,3), esurn1(pos_cont1))=M(inedge(i,3),
            esurn1(pos_cont1))-K_IJ(i)*D_IJ(i)*w(pos_cont1);
            M(inedge(i,4), esurn1(pos_cont1))=M(inedge(i,4),
            esurn1(pos_cont1))+ K_IJ(i)* D_IJ(i)*w(pos_cont1);
```

```

        end
    end
    if nflag(inedge(i,1),1)>200
        for j=1:(esurn2(inedge(i,1)+1)-esurn2(inedge(i,1))),
            pos_cont=esurn2(inedge(i,1))+j;
            M(inedge(i,3),esurn1(pos_cont))=M(inedge(i,3),esurn1(pos_cont))
            +KIJ(i)*DIJ(i)*w(pos_cont);
            M(inedge(i,4),esurn1(pos_cont))=M(inedge(i,4),esurn1(pos_cont))
            -KIJ(i)*DIJ(i)*w(pos_cont);
        end
    end
end

```

Observando a Eq. (57) e ao assumir que a condição de Dirichlet tem preferência sobre os nós em relação à de Neumann, verificamos que a vazão em uma face de Dirichlet pode ser escrita como

$$Q_{IJ}^L = C - Dp_i \quad (108)$$

onde C e D são pre-calculados a partir da Eq. (57). Os fluxos sobre uma face de Neumann são dados e podem ser escritos da seguinte forma:

$$Q_{IJ}^L = N \quad (109)$$

onde N é definido é calculado a partir da Eq. (59).

```

for ibedge=1:size(bedge,1) %Loop de faces de contorno.

    v0=coord(bedge(ibedge,2),:)-coord(bedge(ibedge,1),:);
    if bedge(ibedge,5)<200 % Sobre a face de Dirichlet
        c1=nflag(bedge(ibedge,1),2);
        c2=nflag(bedge(ibedge,2),2);

        A=-Kn(ibedge)/(Hesq(ibedge)*norm(v0));
        M(bedge(i,3),bedge(i,3))=M(bedge(ibedge,3),bedge(ibedge,3))-
        A*(norm(v0)^2);
        C=c(bedge(ibedge,3),:); % Baricentro do elemento a esquerda
        v1=C-coord(bedge(ibedge,1),:);
        v2=C-coord(bedge(ibedge,2),:);
        I(bedge(ibedge,3))=I(bedge(ibedge,3))-(dot(v2,-
        v0)*c1+dot(v1,v0)*c2)*A +(c2-c1)*Kt(ibedge);
    else % Sobre a face de Neumann
        I(bedge(ibedge,3))=I(bedge(ibedge,3)) - norm(v0)*0;
    end
end
=====Fim=====

```

3.5 Formulação Explícita da Equação de Saturação

Considerando o modelo matemático na forma diferencial para escoamento bifásico apresentado na Eq. (27), válido em todo o domínio Ω e contorno Γ , e ao assumir, ainda, que este domínio foi discretizado por um conjunto de elementos poligonais ou volumes de controle Ω_k , com fronteira Γ_k , conforme ilustrado na Figura 11, adicionalmente podemos assumir que o tensor $\underline{K}$ é constante em cada elemento, de modo que descontinuidades ocorrem apenas entre os elementos que constituem a malha poligonal.

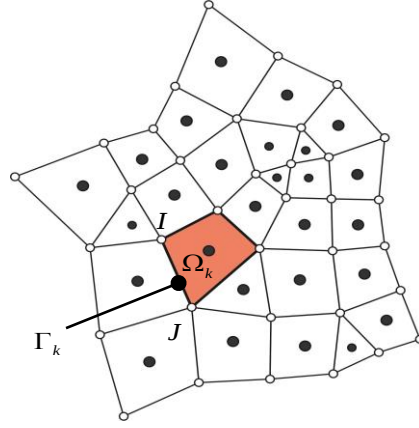


Figura 11: Representação do volume de controle genérico em um domínio discretizado.

Assim, integrando a Eq. (27) no k -ésimo elemento do domínio computacional, temos:

$$\int_{\Omega_k} \phi \frac{\partial S_{w(k)}}{\partial t} \partial \Omega_k + \int_{\Omega_k} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) \partial \Omega_k = \int_{\Omega_k} Q_k \partial \Omega_k \quad (110)$$

Usando o teorema do valor médio e o método de Euler Explícito, podemos escrever a primeira integral do lado esquerdo da Eq. (110) como:

$$\int_{\Omega_k} \phi \frac{\partial S_{w(k)}}{\partial t} \partial \Omega_k = \phi \int_{\Omega_k} \frac{\partial S_{w(k)}}{\partial t} \partial \Omega_k = \phi \frac{S_{w(k)}^{n+1} - S_{w(k)}^n}{\Delta t} V_k \quad (111)$$

O lado direito da Eq. (110) pode ser aproximado como

$$\int_{\Omega_k} Q_k \partial \Omega_k = \bar{Q}_k V_k \quad (112)$$

onde $\bar{Q}_k$ é o valor médio de Q_k no k -ésimo volume de controle.

Aplicando o teorema de divergência de Green-Gauss no segundo termo da Eq. (110), podemos escrever:

$$\int_{\Omega_k} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) \partial \Omega_k = \int_{\Gamma_k} f_w \vec{v} \cdot \vec{n}_k \partial \Gamma_k \quad (113)$$

Assim, utilizando as Eqs. (111), (112) e (113) na Eq. (110), temos:

$$\frac{S_{w(k)}^{n+1} - S_{w(k)}^n}{\Delta t} \nabla_k + \frac{1}{\phi} \int_{\Gamma_k} f_w \vec{v} \cdot \vec{n}_k dA = \frac{1}{\phi} \bar{Q}_k V_k \quad (114)$$

onde Γ_k é o contorno do k -ésimo elemento.

Sabendo que o volume de controle é um polígono (ou um poliedro, em 3D)⁵, a integral sobre Γ_k pode ser escrita como o somatório das integrais sobre cada face do polígono. Assim, temos:

$$S_{w(k)}^{n+1} = S_{w(k)}^n + \frac{\Delta t}{\phi \nabla_k} \left[\bar{Q}_k V_k + \sum_{i=1}^{NL} f_w \vec{v}_{k,i} \cdot \vec{N}_{k,i} \right] \quad (115)$$

onde o termo $\vec{v}_{k,i} \cdot \vec{N}_{k,i}$, dado em produto interno é denotado por F_i , representa a vazão na face i do k -ésimo volume de controle e as saturações no tempo n e $n+1$ são denotados como $S_{w(k)}^{n+1}$, $S_{w(k)}^n$, respectivamente.

A aproximação das constantes do somatório (Eq. (115)) em cada face é aproximada usando o Método Upwind de primeira ordem, que é dado por:

$$f_w F_i = \begin{cases} f_{w,L} F_i, & \text{se } F_i < 0 \\ f_{w,R} F_i, & \text{se } F_i \geq 0 \end{cases} \quad (116)$$

onde $f_{w,L}$ é o fluxo fracional do elemento à esquerda e $f_{w,R}$ é o fluxo fracional do elemento à direita da superfície de controle i .

O Método de Ponderação à Montante (*UPWIND*) de 1ª Ordem foi usado, originalmente, por Courant, Isaccson e Reeves, em 1952, baseado no estudo das curvas características da equação $u_t + au_x = 0$, em que o sinal de “ a ” prevê o sentido da propagação da informação física. Uma característica importante deste método é que ele reproduz soluções não oscilatórias, monótonas, perto das regiões de choque (HIRSCH, 1994).

⁵ Veja Figura 12.

Quando o método *UPWIND* de primeira ordem é adotado na formulação explícita dada pela Eq. (116), a condição de estabilidade é fornecida pela expressão:

$$\frac{|\vec{v}|}{\phi} \left| \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (117)$$

Desse modo, o passo de tempo numérico Δt deve satisfazer a seguinte restrição:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x \phi}{|\vec{v}| \left| \partial f_w / \partial S_w \right|} \quad (118)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade recuperada a partir da vazão numérica, Δx é comprimento de dos bari-centros adjacentes à face em questão, $\partial f_w / \partial S_w$ pode ser aproximado numericamente e o Δt é o passo de tempo.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Introdução

Neste capítulo, são mostrados diversos exemplos de problemas que foram resolvidos empregando a formulação descrita no capítulo 3. Além disso, os resultados obtidos são comparados aos outros já existentes na literatura. Na primeira parte do presente capítulo, introduzimos os conceitos de erros e de taxas de convergência (CRUMPTON et al., 1995; HYMAN et al., 1997). Em seguida, resolvemos um problema unidimensional representando o escoamento monofásico em reservatórios isotrópicos e heterogêneos com a finalidade de confrontar a solução exata e a solução numérica obtida pelo método *MPFA-DEW*.

Posteriormente, consideramos problemas bidimensionais que representam escoamento monofásico em reservatórios com características de heterogeneidade e anisotropia. Finalmente, resolvemos dois problemas para avaliar se o método *MPFA-DEW* respeita o princípio de máximo discreto. O domínio é discretizado por malhas triangulares estruturadas e não-estruturadas com diferentes graus de refinamento. Na segunda parte, resolvemos problemas bidimensionais referentes aos escoamentos bifásicos água e óleo em reservatórios de petróleo. Nestes problemas, consideramos diversas geometrias com a presença de regiões de baixa permeabilidade e barreiras confinadas. Resolvemos, também, o problema clássico de um quarto de cinco poços (DURLOFSKY, 1993) para, finalmente, analisar o efeito da orientação de malha.

4.2 Erros Numéricos

O erro assintótico de truncamento é dado por Hyman et al. (1997):

$$\|E_h\| = ch^R + O(h^{R+1}) \quad (119)$$

Observe que h é o espaçamento da malha, R é a ordem do erro ou a taxa de convergência e c é a constante. A taxa de convergência numérica R é estimada a partir da seguinte expressão:

$$R \approx \log_2 \frac{\|E_h\|}{\|E_{h/2}\|} \quad (120)$$

Para os problemas apresentados, estas taxas de convergência foram calculadas utilizando dois tipos de normas: a norma do erro máximo (E_{MAX}) e a norma *Root Mean-Square* (RMS) (E_{RMS}). E, as taxas de convergência são definidas em função das normas de erros, conforme definido em Crumpton et al. (1995) e Hyman et al. (1997), respectivamente.

Definamos primeiramente p como a solução analítica do problema e $\tilde{p}$ como a correspondente solução numérica. Logo, a norma do erro máximo é definida como:

$$\|E\|_{MAX} = \max |p_i - \tilde{p}_i| \quad (121)$$

Por outro lado, a norma do erro RMS é definida como:

$$\|E\|_{RMS} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{(p_i - \tilde{p}_i)^2}{n} \right)^{0,5} \quad (122)$$

onde n é o número de células da malha.

A norma do erro das velocidades (GAO, et al., 2010), é definida como:

$$\|E\|_{VEL} = \left(\sum_{i=1}^{n_A} (v_i - \tilde{v}_i)^2 V_i / \sum_{i=1}^{n_A} V_i \right)^{0,5} \quad (123)$$

onde v é a velocidade analítica e $\tilde{v}$ é a velocidade calculada numericamente, n_A é o número de faces que existem na malha e V_i é a soma dos volumes das células que compartilham a i -ésima face do domínio.

4.3 Escoamento Monofásico Unidimensional em um Domínio Heterogêneo e Isotrópico

No presente problema, consideramos um escoamento monofásico em um meio isotrópico e heterogêneo cujo domínio é um retangular $[0,2] \times [0,1]$, de forma que na metade direita a permeabilidade é o dobro da permeabilidade na metade esquerda:

$$\tilde{K}_{esq} = \tilde{I}, \quad \tilde{K}_{dir} = 2\tilde{I}$$

onde $\tilde{I}$ é matriz identidade.

Nos contornos horizontais do domínio (superior e inferior) temos a condição de contorno de Neumann, considerando fluxo nulo. Nos dois lados verticais, as condições de contorno são tais que, do lado direito, a pressão prescrita é zero e, do lado esquerdo, a pressão prescrita é

um. Na Figura 12 apresentamos a malha computacional utilizada neste problem. Na Figura 13 mostramos a solução exata e numérica ao longo da linha central que corta o domínio horizontalmente. Quantitativamente, os resultados, os quais foram obtidos tanto para o primeiro quanto para o segundo tipo de interpolação, podem ser observados nas tabelas 1, 2, 3 e 4, conforme consta a seguir.

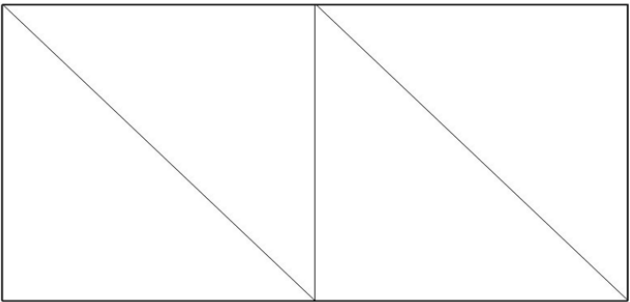


Figura 12: Malha com dominio heterogêneo com 4 elementos.

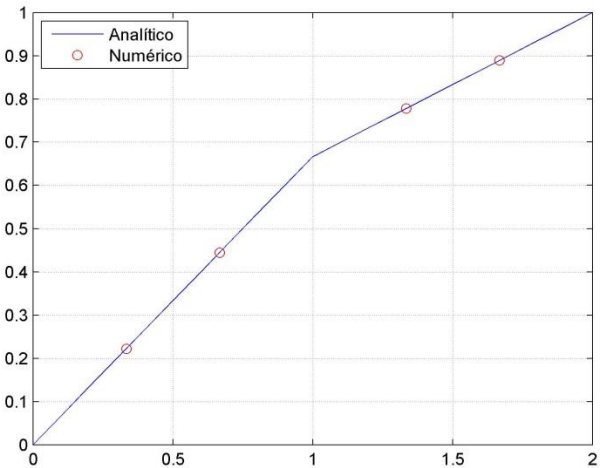


Figura 13: Solução numérica versus solução analítica, em um meio heterogêneo e isotrópico.

Tabela 1. Erros nas pressões máximas e mínimas pelo *MPFA-DEW1*.

Número de Elementos	$E_{MÁX}$	E_{RMS}	p_{min}	p_{max}
4	$2,2204 \times 10^{-16}$	$1,3668 \times 10^{-16}$	0,2222	0,8889

Tabela 2. Erro da velocidade obtido por *MPFA-DEW1*.

Número de Elementos	Erro na Velocidade
4	$7,1665 \times 10^{-17}$

Tabela 3. Erros nas pressões máximas e mínimas obtidos pelo método *MPFA-DEW2*.

Número de Elementos	$E_{MÁX}$	E_{RMS}	p_{min}	p_{max}
4	$2,2204 \times 10^{-16}$	$1,3668 \times 10^{-16}$	0,2222	0,8889

Tabela 4. Erro da velocidade através do método *MPFA-DEW2*.

Número de Elementos	Erro na Velocidade
4	$7,1665 \times 10^{-17}$

Nesse caso, não faz sentido analisar as taxas de convergência dos erros porque todos eles, para fins práticos, já são iguais à zero. Os resultados mostram que o método usado reproduz, numericamente, com exatidão, tanto o campo de pressão quanto as velocidades.

4.4 Escoamento Monofásico em um Domínio Homogêneo e Suavemente Anisotrópico

Consideremos o escoamento monofásico em um domínio quadrado unitário, no qual o meio é homogêneo e suavemente anisotrópico. A solução analítica é dada por $p = e^{xy}$ com condições de contorno dadas pela aplicação da solução analítica. O tensor de permeabilidade é dado por:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De forma que o problema pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot (-\tilde{\mathbf{K}} \nabla p) = -2e^{xy} (1 + y^2 + x^2 + xy) \quad (124)$$

Os erros e taxas de convergência são dados nas seguintes tabelas:

Tabela 5. Resultados obtidos pelo método *MPFA-DEW1*.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}	E_{VEL}	R_{VEL}
8	0.62×10^{-2}	-----	0.26×10^{-2}	-----	0.218×10^{-1}	-----
16	0.14×10^{-2}	2.1468	5.4835×10^{-4}	2.2463	0.66×10^{-2}	1.7237
32	3.7760×10^{-4}	1.8890	1.2640×10^{-4}	2.1162	0.22×10^{-2}	1.5850
64	1.0513×10^{-4}	1.8442	2.9721×10^{-5}	2.0884	8.01×10^{-4}	1.4594

Tabela 6. Resultados obtidos pelo método *MPFA-DEW2*.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}	E_{VEL}	R_{VEL}
8	0.61×10^{-2}	-----	0.26×10^{-2}	-----	0.18×10^{-1}	-----
16	0.14×10^{-2}	2.1234	5.46×10^{-4}	2.2515	0.56×10^{-2}	1.7549
32	3.787×10^{-4}	1.8865	1.25×10^{-4}	2.1270	0.18×10^{-2}	1.6374
64	1.006×10^{-4}	1.9124	3.08×10^{-5}	2.0209	6.58×10^{-4}	1.4651

Nestes resultados, podemos observar taxas de convergência de segunda ordem para a solução obtida pelo *MPFA-DEW*. Segundo a Tabela 6, os resultados obtidos foram bastante semelhantes tanto em relação aos erros quanto em relação às taxas de convergência em comparação com os resultados obtidos por (CRUMPTON et al., 1995; HYMAN et al., 1997)⁶.

Tabela 7. Erros obtidos por Crumpton e Hyman.

$1/h$	(CRUMPTON, et al., 1995)		(HYMAN, et al., 1997)	
	E_{RMS}	R_{RMS}	E_{RMS}	R_{RMS}
8	$1,16 \times 10^{-3}$	-----	$3,74 \times 10^{-3}$	-----
16	$2,89 \times 10^{-4}$	2,0050	$9,66 \times 10^{-4}$	1,9529
32	$7,28 \times 10^{-5}$	1,9891	$2,45 \times 10^{-4}$	1,9792
64	$1,83 \times 10^{-5}$	1,9921	$3,74 \times 10^{-3}$	-----

Na Figura 14 apresenta-se a malha triangular não estruturada.

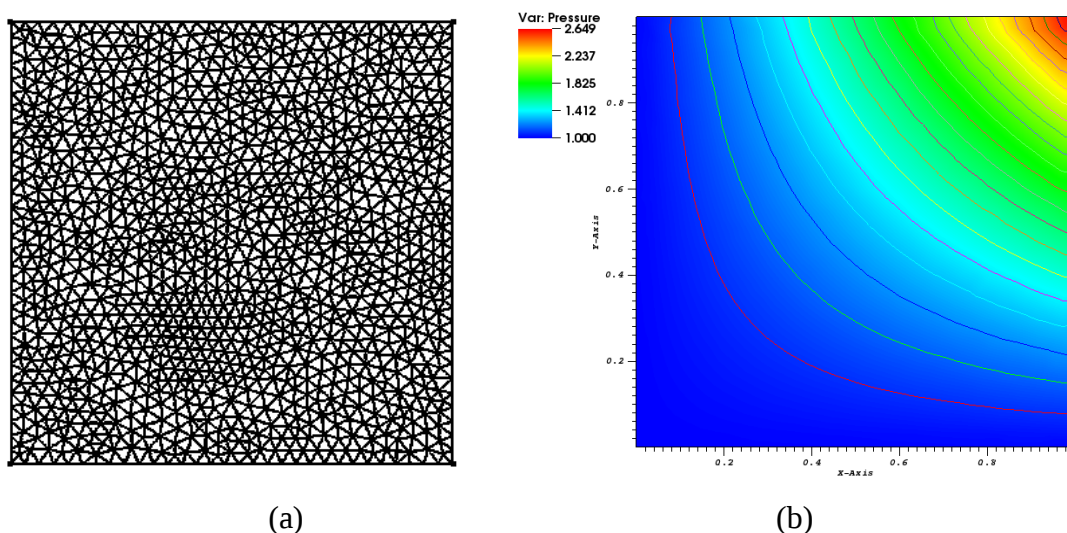


Figura 14: (a) Representação de uma malha com 32x32 subdivisões e (b) do campo de pressões.

⁶ Veja Tabela 7

4.5 Escoamento Monofásico em um Domínio Heterogêneo e Suavemente Anisotrópico

Este problema foi adaptado de Crumpton et al. (1995), Hyman et al. (1997) e Carvalho et al. (2009). Consideremos um escoamento monofásico, cujo domínio é dado por $[-1,1] \times [-1,1]$. Consideremos, também, que o meio é heterogêneo e suavemente anisotrópico com condições de contorno de Dirichlet, dadas pela aplicação da solução analítica nos contornos. A solução analítica é definida como:

$$p = \begin{cases} (2\sin(y) + \cos(y))\alpha x + \sin(y) ; \forall x \leq 0 \\ e^x \sin(y) ; \forall x > 0 \end{cases} \quad (125)$$

O tensor de permeabilidades é dado por:

$$\tilde{K} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{para } x < 0 \\ \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (126)$$

onde α é a intensidade da descontinuidade. Este problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\nabla \cdot (-\tilde{K} \nabla p) = f(x, y) \quad (127)$$

O termo fonte é dado por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (2\sin(y) + \cos(y))\alpha x + \sin(y) ; \forall x \leq 0 \\ -2e^x \alpha \cos(y) ; \forall x > 0 \end{cases} \quad (128)$$

Neste exemplo, o método usado foi o *MPFA-DEW2* para todas as intensidades de descontinuidade, mas os resultados do *MPFA-DEW1* também são mostrados. Na Figura 15, apresentamos a malha com 16x16 divisões.

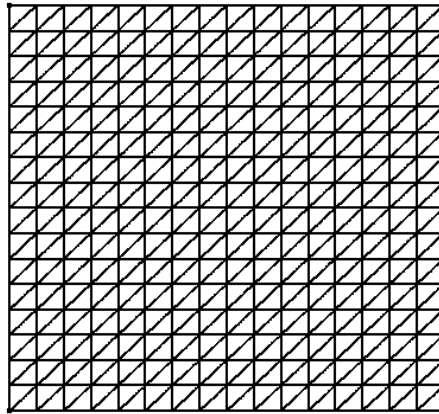


Figura 15: Malha triangular estruturada.

Os resultados em termos de erros e de taxas de convergência na pressão podem ser vistos nas tabelas 8, 9, 10, 11 e 12.

Tabela 8. Resultados obtidos pelo *MPFA-DEW2*, para $\alpha=1$.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	0,0156	-----	0,0062	-----
16	0,0046	1,7618	0,0016	1,9542
32	0,0013	1,8231	$3,95 \times 10^{-4}$	2,0181
64	$3,43 \times 10^{-4}$	1,9222	$9,89 \times 10^{-5}$	1,9978

Tabela 9. Resultados obtidos pelo *MPFA-DEW2*, para $\alpha = 10$.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	0,0756	-----	0,0319	-----
16	0,0215	1,8140	0,0079	2,0136
32	0,0061	1,8175	0,0020	1,9819
64	0,0017	1,8433	$4,95 \times 10^{-4}$	2,0145

Tabela 10. Resultados obtidos pelo método *MPFA-DEW2*, para $\alpha = 100$.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	0,7719	-----	0,3142	-----
16	0,2205	1,8076	0,0782	2,0064
32	0,0630	1,8074	0,0195	2,0037
64	0,0172	1,8729	0,0049	1,9926

Tabela 11. Resultados obtidos pelo método *MPFA-DEW2*, para $\alpha = 1000$.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	7,7347	-----	3,1410	-----
16	2,2107	1,8068	0,7825	2,0051
32	0,6324	1,8056	0,1945	2,0083
64	0,1729	1,8709	0,0488	1,9948

Tabela 12. Taxa de convergência obtida pelo método *MPFA-DEW2*.

$1/h$	$E_{VEL}(\alpha=1)$	$R_{VEL}(\alpha=1)$
8	0.0370	-----
16	0.0126	1.5538
32	4.04×10^{-3}	1.6415
64	1.19×10^{-3}	1.7681

É possível observar taxas de convergência de segunda ordem para pressões, e maior que um para as velocidades, utilizando diferentes intensidades de descontinuidade. Para não deixar de ilustrar, apresentamos alguns resultados obtidos com o *MPFA-DEW1* na próxima tabela:

Tabela 13. Resultados obtidos pelo método *MPFA-DEW1*, para $\alpha = 1$.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	0.0177	-----	0.0093	-----
16	0.0057	1.6347	0.0025	1.8953
32	0.0017	1.7454	6.2997×10^{-4}	1.9886
64	4.635×10^{-4}	1.8749	1.5958×10^{-4}	1.9810

Tabela 14. Resultados obtidos pelo método *MPFA-DEW1*, para $\alpha = 10$.

$1/h$	$E_{MÁX}$	$R_{MÁX}$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	0.1587	-----	0.0656	-----
16	0.0443	1.8409	0.0166	1.9825
32	0.0118	1.9085	0.0042	1.9827
64	0.0030	1.9758	0.0010	2.0704

Tabela 15. Erro e taxa de convergência da velocidade, obtidas pelo método *MPFA-DEW1*.

$1/h$	$E_{VEL}(\alpha=1)$	$R_{VEL}(\alpha=1)$
8	0.0484	-----
16	0.0183	1.4032
32	0.0066	1.4713
64	0.0023	1.5208

Comparemos com resultados obtidos por Hyman et al. (1997) e Crumpton et al. (1995), cujos erros e taxa de convergencia estão dadas nas Tabelas 16 e 17.

Tabela 16. Resultados de Hyman et al. (1997), com $\alpha=1$.

$1/h$	E_{MAX}	R_{MAX}
16	$3,74 \times 10^{-3}$	-----
32	$9,66 \times 10^{-4}$	1,9529
64	$2,45 \times 10^{-4}$	1,9792

Tabela 17. Resultados de Crumpton et al. (1995) com $\alpha=1$.

$1/h$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	$3,33 \times 10^{-3}$	-----
16	$9,37 \times 10^{-4}$	1,8294
32	$2,45 \times 10^{-4}$	1,9353
64	$6,25 \times 10^{-5}$	1,9709

Tabela 18. Resultados de Crumpton et al. (1995) com $\alpha=1000$.

$1/h$	E_{RMS}	R_{RMS}
8	1,83	-----
16	$4,79 \times 10^{-1}$	1,9337
32	$1,22 \times 10^{-1}$	1,9731
64	$3,07 \times 10^{-2}$	1,9906

É possível observar que tanto Crumpton et al. (1995) quanto Hyman et al. (1997) apresentam resultados bastante semelhantes aos obtidos pelo método MPFA-DEW – fato que fica claro quando observamos as ordens de grandeza dos erros e as ordens das taxas de convergência. Nas Figura 16 e Figura 17 apresentamos o campo de pressões obtidas pelo *MPFA-DEW1* para diferentes valores de α . Os contornos do campo de pressões foram comparados visualmente aos resultados obtidos por Carvalho et al. (2009). Todos eles foram obtidos usando uma malha 64x64 subdivisões.

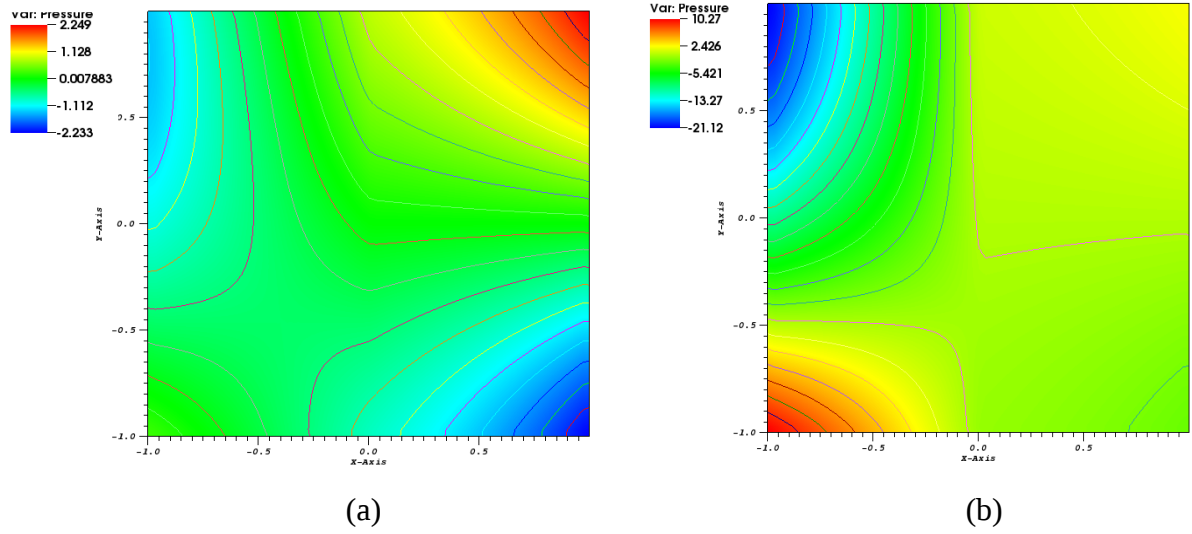


Figura 16: Campo de pressões, (a) para $\alpha=1$ e (b) para $\alpha=10$, em uma malha de 8192 elementos obtidos pelo *MPFA-DEW1*.

Na Figura 17, fica claro que o aumento do coeficiente de descontinuidade α faz com que surja uma barreira que aparece nitidamente a partir de $\alpha=100$ entre as duas regiões com valores de K diferentes.

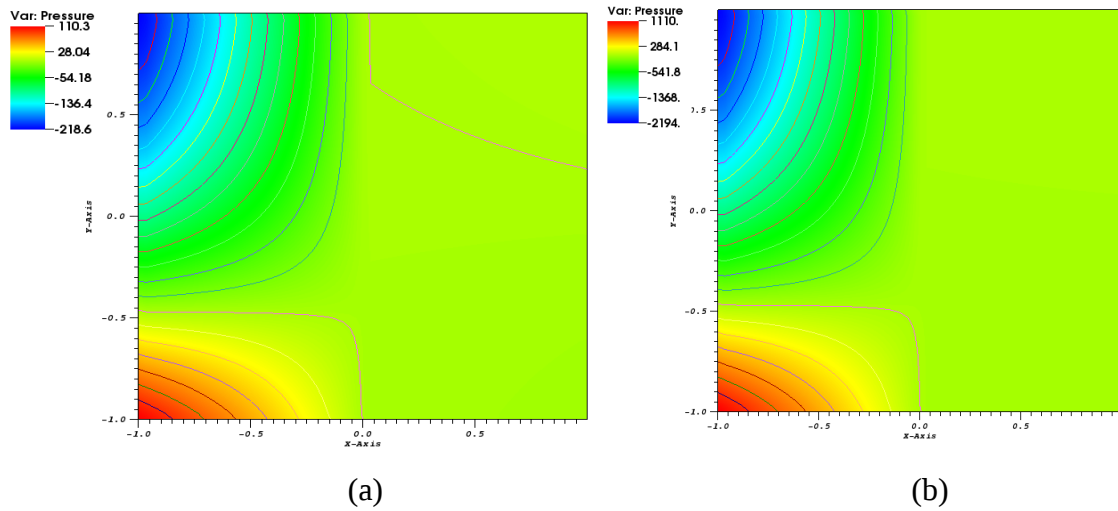


Figura 17: Campo de pressões, (a) para $\alpha=100$ e (b) $\alpha=1000$ em uma malha de 8192 elementos obtidos pelo *MPFA-DEW1*.

4.6 Escoamento Monofásico em um Domínio Homogêneo e Altamente Anisotrópico

Neste exemplo, apresentamos um problema do escoamento monofásico em um meio homogêneo e altamente anisotrópico, cujo domínio é um quadrado $[0,1] \times [0,1]$, com um furo quadrado $[0,4 \ 0,6] \times [0,4 \ 0,6]$, concêntrico. Este problema foi resolvido por Lipniov et al.

(2007) e Le Potier (2005) para verificar que o método proposto por eles respeita o Princípio de Máximo. Consideramos que a pressão prescrita no contorno externo é zero e no contorno interno são dois. O tensor de permeabilidades é dado por:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & \sin(\pi/6) \\ -\sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix}$$

O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular não estruturada de 64x64 subdivisões⁷. Os resultados são mostrados na Tabela 19.

Tabela 19. A seguinte tabela mostra as pressões máximas e mínimas obtidos pelo *MPFA-DEW*.

Número de Elementos	<i>MPFA-DEW1</i>		<i>MPFA-DEW2</i>	
	$p_{\max}$	$p_{\min}$	$p_{\max}$	$p_{\min}$
88	1,6614	-0,8128	1,6493	-0,4978
514	1,9458	-0,1817	1,9480	-0,0715
2076	1,9907	$-2,46 \times 10^{-8}$	1,9650	-0,0015
8644	2,0129	$-1,34 \times 10^{-11}$	1,9861	$-7,63 \times 10^{-8}$

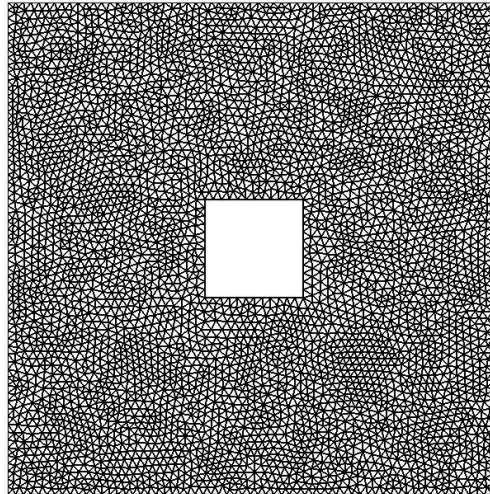


Figura 18: Malha com 8644 elementos.

Como podemos observar quantitativamente os resultados na Tabela 19, os métodos *MPFA-DEW1* e *MPFA-DEW2* não respeitam o Princípio de Máximo Discreto. Apesar disso, a solução numérica obtida é suave, o que nem sempre pode ser obtido por outros métodos

⁷ Veja a Figura 18

clássicos como *MPFA-O* e *EFM* (LIPNIVOK et al., 2007; 2008). O campo de pressões é apresentado na Figura 19.

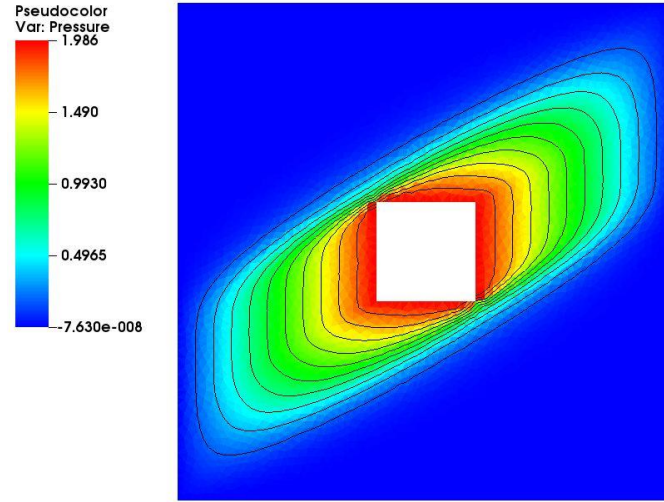


Figura 19: Campo de pressões obtidas pelo método *MPFA-DEW2*, em uma malha com 8644 elementos.

4.7 Escoamento Monofásico em um Domínio Altamente Heterogêneo e Anisotrópico

Consideremos o escoamento monofásico em um meio altamente heterogêneo e anisotrópico, cujo domínio é um quadrado de lado unitário $[0,1] \times [0,1]$. A pressão no contorno do domínio computacional é prescrita e o valor é zero.

O tensor de permeabilidades é dado por:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} y^2 + \varepsilon x^2 & -(1-\varepsilon)xy \\ -(1-\varepsilon)xy & \varepsilon y^2 + x^2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 5 \times 10^{-2} \quad (129)$$

O termo de fonte unitário em um quadrado menor e concêntrico ao domínio maior é dado como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1; & (x, y) \in \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right]^2 \\ 0; & (x, y) \notin \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right]^2 \end{cases} \quad (130)$$

Podemos observar os resultados para o campo de pressões na Tabela 20.

Tabela 20. Representa as pressões máximas e mínimas.

Número de Elementos	<i>MPFA-DEW1</i>		<i>MPFA-DEW2</i>	
	$p_{\max}$	$p_{\min}$	$p_{\max}$	$p_{\min}$
144	0,1227	-0,0049	0,1108	$-2,32 \times 10^{-4}$
544	0,1078	$3,14 \times 10^{-9}$	0,1051	$-4,35 \times 10^{-6}$
2244	0,1072	-0,0018	0,1059	$-2,22 \times 10^{-8}$
9042	0,1059	-0,0017	0,1052	$-1,31 \times 10^{-10}$

Mais uma vez, observamos que os resultados obtidos pelo método *MPFA-DEW* não respeitam o Princípio de Máximo Discreto. Porém, o método é capaz de produzir soluções suaves⁸ em malhas triangulares não estruturadas como mostramos na Figura 20. Lembramos que não tem sentido tratar pressões absolutas negativas. Este problema foi adaptado de Guangwei et al. (2008) e Carvalho et al. (2009) com a finalidade de comparar resultados de métodos que respeitem o Princípio de Máximo Discreto.

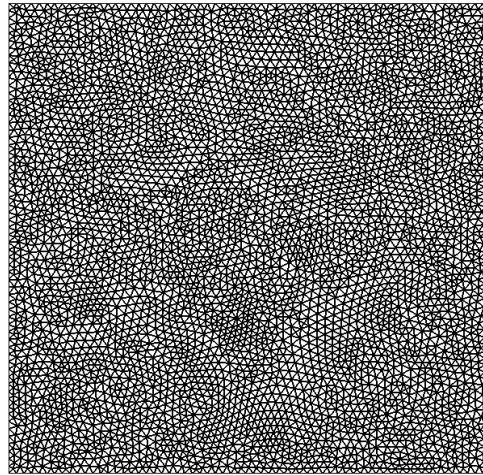


Figura 20: Malha triangular não-estruturada de 9042 elementos.

⁸ Ver Figura 21

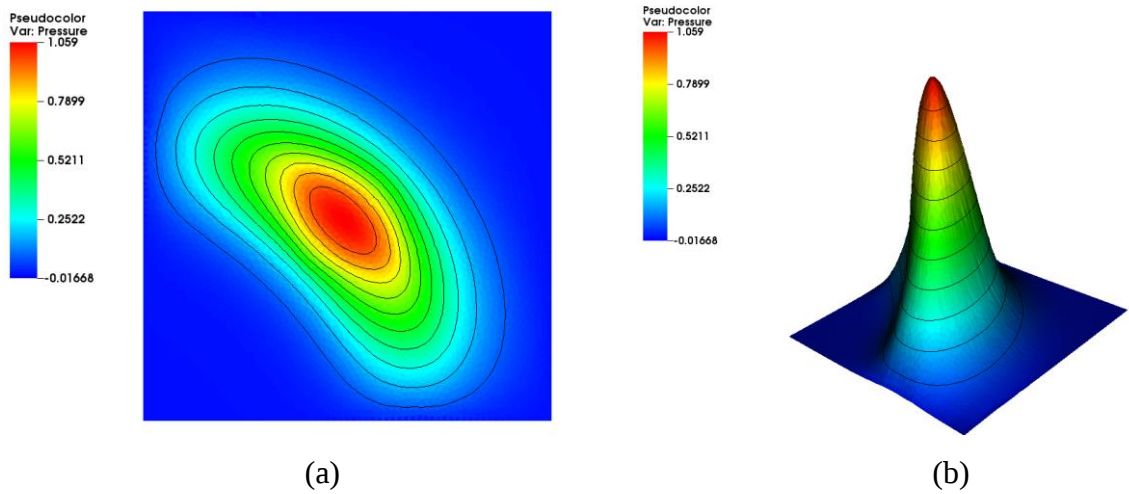


Figura 21: (a) Campo de pressões usando a malha refinada e (b) visualização em 3-D.

4.8 Escoamento Bifásico de 1/4 de Cinco Poços com uma Região de Baixa Permeabilidade

No presente exemplo, consideramos um escoamento bifásico água e óleo – este é o problema clássico de 1/4 de cinco poços, no qual o reservatório de petróleo apresenta uma região quadrilateral de baixa permeabilidade entre o poço injetor e produtor. Este problema foi adaptado de Helmig (1997) e Carvalho (2005). As saturações residuais do óleo e da água são $S_{ro} = S_{rw} = 0$, as propriedades do fluido $\mu_w = 0,4 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$, $\mu_o = 0,1 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ e $\rho_w = \rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Ao considerarmos que a porosidade é constante através do reservatório $\phi = 0,2$ e a razão entre as permeabilidades é $R_{K_1/K_2} = 1000$, com $K_1 = 10^{-7} \text{ I m}^2$ na região de permeabilidade mais alta e $K_2 = 10^{-10} \text{ I m}^2$ na região de baixa permeabilidade. As condições de contorno nos poços injetores e produtores são: $S_{inj} = 1$ e $Q_{inj} = 10,386 \text{ m}^3/\text{d}$ no poço injetor e $p_{pro} = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ no poço produtor, respectivamente. A Figura 22 apresenta a geometria do reservatório indicando a zona de baixa permeabilidade. Para a discretização espacial do domínio utilizamos malhas não estruturadas triangulares com espaçamento de $h_1 = 18,75 \text{ m}$ para a malha menos refinada e $h_2 = 9,375 \text{ m}$ para a malha, mais refinada conforme mostrado na Figura 23. O intervalo de tempo considerado é $\Delta t = 1$.

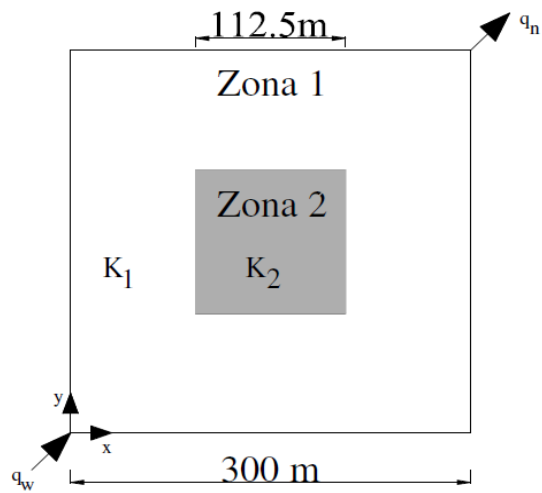


Figura 22: Geometria do reservatório com baixa permeabilidade na zona 2, (adaptado de CARVALHO et al., 2006).

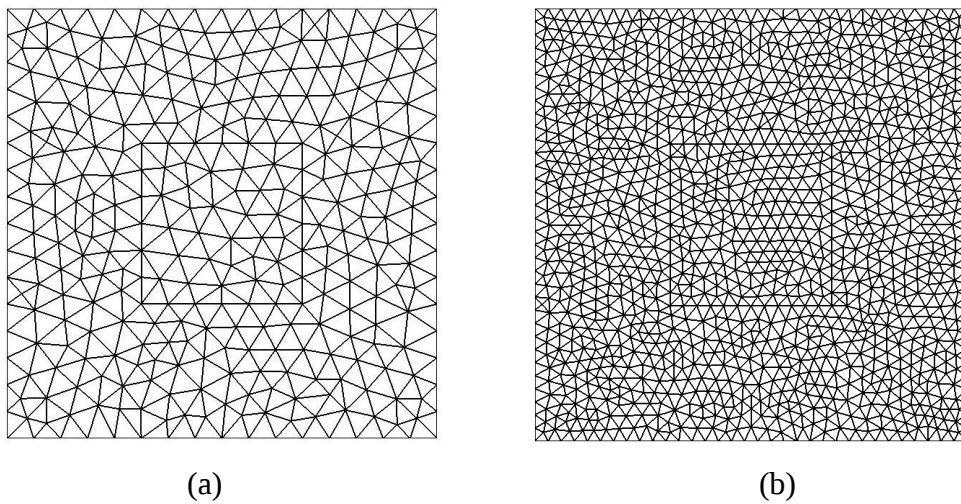


Figura 23: Malha triangular não estruturada utilizada na discretização espacial do domínio; (a) malha de menor densidade com 592 elementos e (b) de maior densidade com 2540 elementos.

Na Figura 24, apresentamos o campo de pressões em $t = 400$ tanto para a malha de menor densidade quanto para a malha de maior densidade e observamos que os campos de pressões possuem o mesmo comportamento.

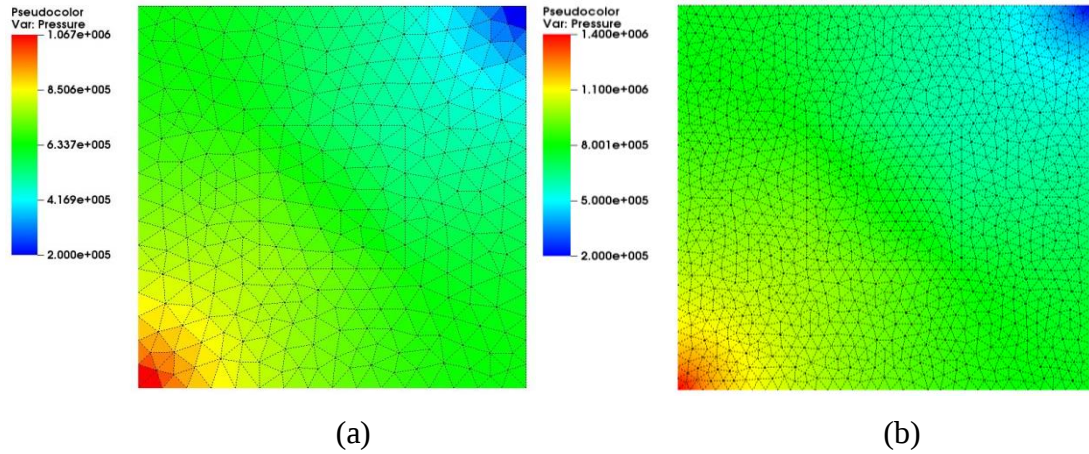


Figura 24: Campo de pressões num domínio com baixa permeabilidade, no instante $t = 400s$ para (a) malha grosseira e (b) malha mais refinada.

Ao fazer uma breve análise, nas Figura 25 e Figura 26, que representam o campo de saturações, é possível verificar que, tanto na malha menos refinada quanto na malha mais refinada, as soluções apresentam o mesmo comportamento, sendo que a representação da frente de saturação na malha mais fina é mais precisa do que na malha mais grossa, apresentando menor espalhamento (difusão numérica) ao longo do domínio.

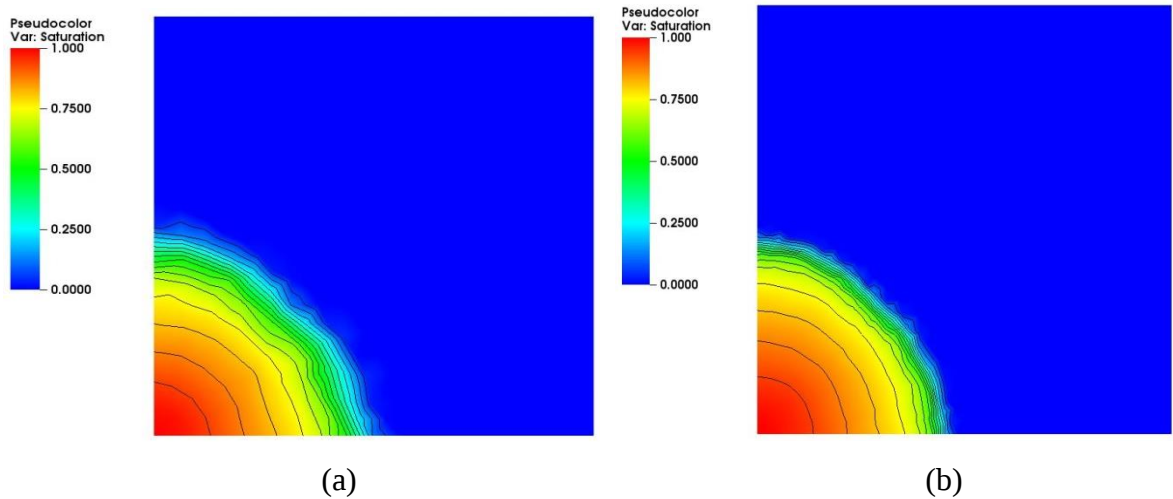


Figura 25: Contornos de saturação no tempo $t = 400s$ (a) malha grosseira e (b) malha mais refinada.

Em ambas as malhas, o *MPFA-DEW* fornece campos de velocidades em que a zona de baixa permeabilidade é devidamente representada, de tal maneira que praticamente nenhum fluido a atravessa, conforme esperado.

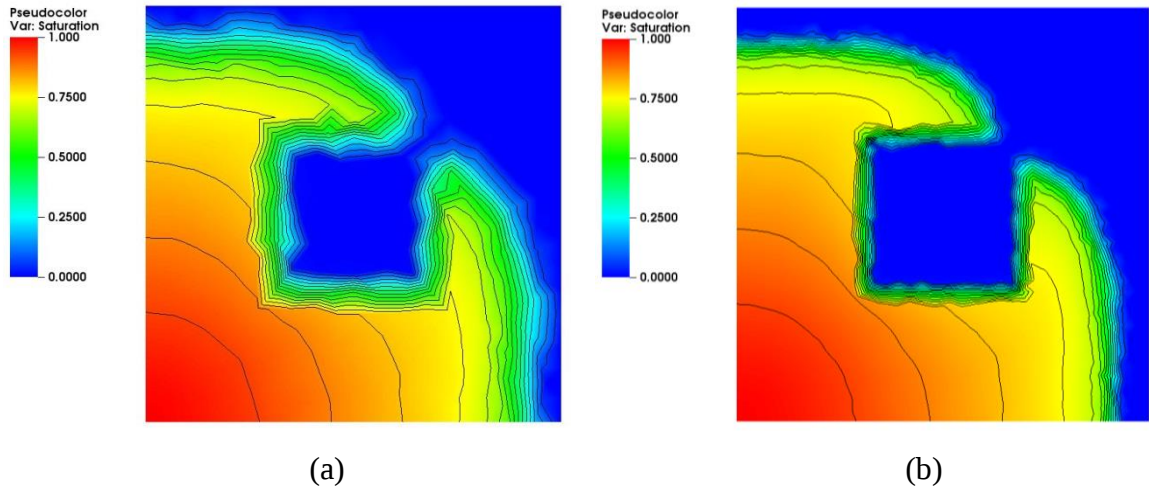


Figura 26: Contorno de saturação obtido no tempo $t = 1600$ para o problema de baixa permeabilidade (a) malha de menor densidade e (b) malha maior densidade.

4.9 Escoamento Bifásico em um Reservatório Confinado através de uma Região com Duas Barreiras Paralelas

Neste problema, consideremos um escoamento bifásico água-óleo em um reservatório confinado através de uma região com duas barreiras perpendiculares, conforme apresentado na Figura 27. Este problema foi adaptado de Garcia (1997) e Carvalho (2005), onde a água é injetada no lado esquerdo do domínio com o objetivo de “varrer” o óleo residente. O escoamento ocorre devido à diferença de pressões entre as paredes esquerda (L) e direita (R) da região confinada que possui duas barreiras perpendiculares, cujas permeabilidades são extremamente baixas quando comparadas com o restante do domínio. As propriedades dos fluidos no reservatório são: $\mu_w = 0.001 \text{ kg/m.s}$, $\mu_o = 0.004 \text{ kg/m.s}$ e $\rho_w = \rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3$. A porosidade nas barreiras é $\phi = 0.2$ e $\phi = 0.35$ no restante do reservatório. A permeabilidade é $K_2 = 10^{-4} \text{ I m}^2$ no reservatório, e $K_1 = 10^{-10} \text{ I m}^2$ no interior das barreiras.

Neste caso, as condições de contorno para as equações de pressão e saturação são, respectivamente, $p_L = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$, $S_L = 1$ na face esquerda, e $p_R = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ na face direita do reservatório. Assim, como no exemplo anterior, utilizamos duas malhas triangulares não-estruturadas, as quais são apresentadas na Figura 28.

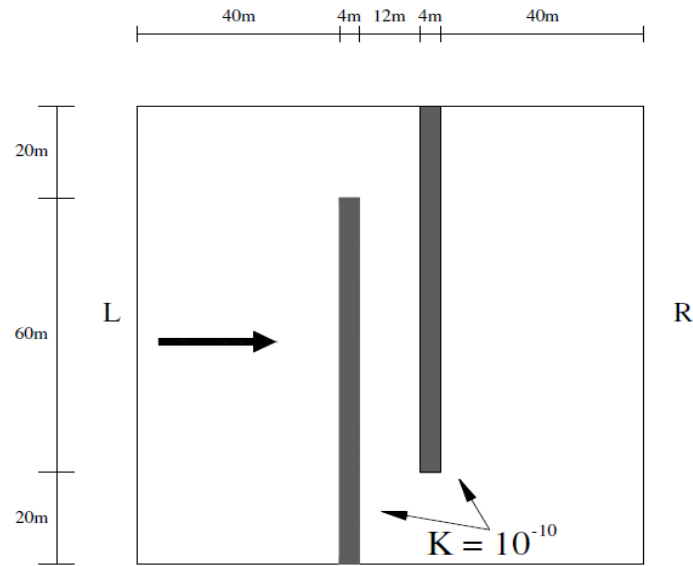


Figura 27: Geometria do reservatório para o escoamento confinado através de uma região com duas barreiras de baixa permeabilidade.

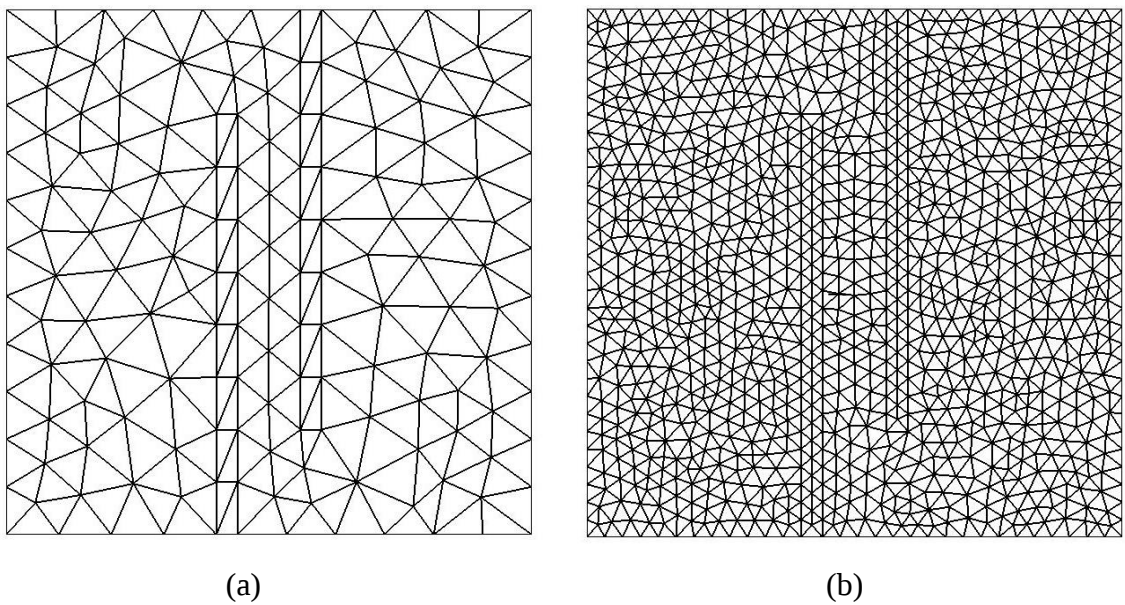
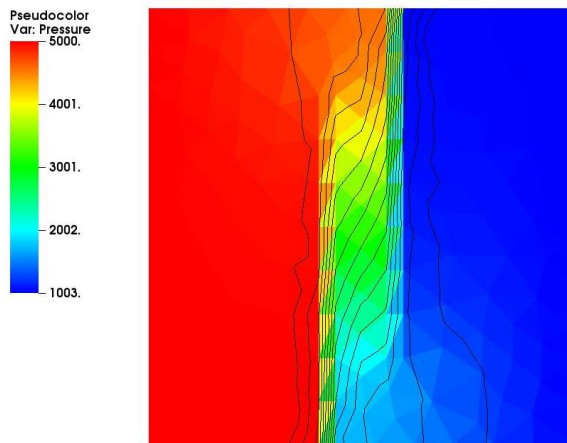
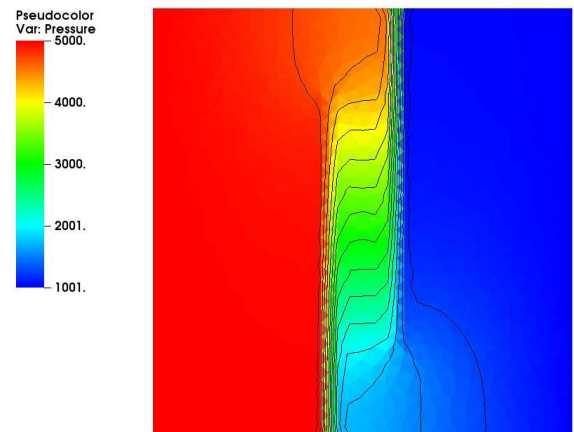


Figura 28: Malhas triangulares não estruturadas utilizadas para o problema de escoamento confinado; (a) malha menos refinada com 282 elementos, (b) malha mais refinada com 2124 elementos.

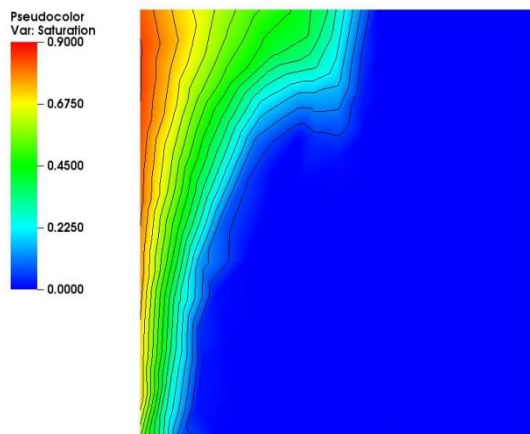


(a)

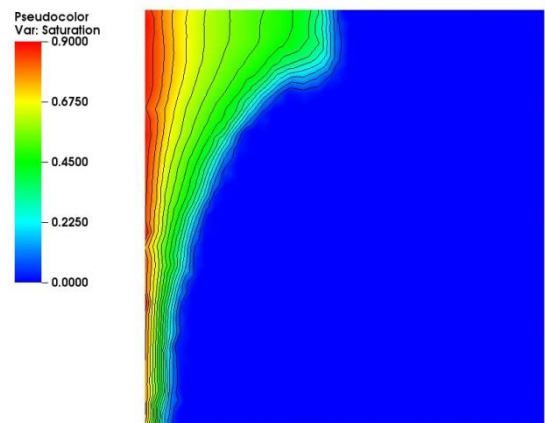


(b)

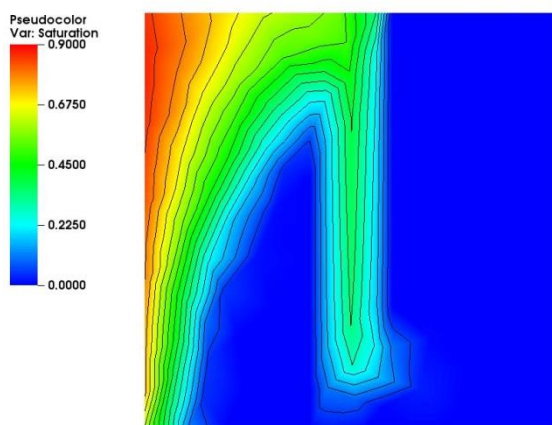
Figura 29: Campo de pressões (a) malha menos refinada e (b) malha mais refinada.



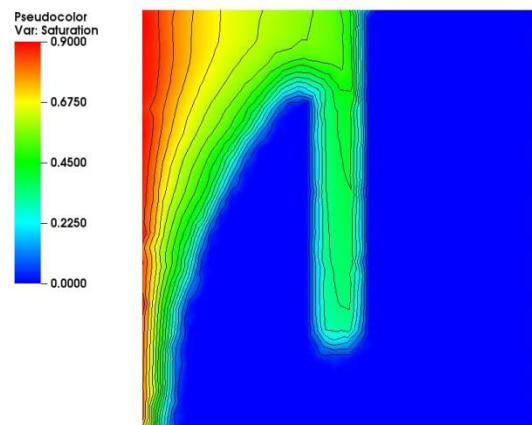
(a)



(b)



(c)



(d)

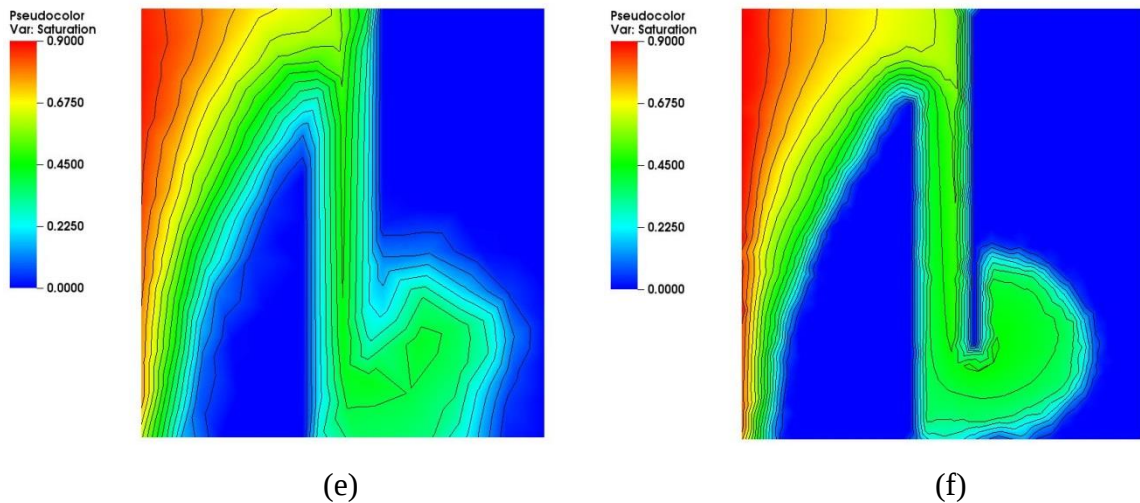


Figura 30: Campo de saturações, em $t = 28$, (a-b), para $t = 48$ (c-d) e para $t = 70$ (e-f) para uma malha, (a) menos refinada (a,c,d) e (b) malha mais refinada (b, d, f).

Na Figura 29, fica claro que o método *MPFA-DEW* é capaz de representar, de maneira acurada, o campo de pressões na região confinada. O declive acentuado representa a queda relativamente brusca de pressões que é formada ao longo do canal devido à presença das barreiras de baixa permeabilidade. Na Figura 30, de fato, podemos observar que, conforme esperado, não existe escoamento através das barreiras de baixa permeabilidade, deixando claro que o campo de velocidades também foi calculado de maneira acurada “respeitando” a brusca variação no campo de permeabilidades existente entre as barreiras e o restante do reservatório.

Ao analisar, ainda, os contornos de saturação das figuras, observamos que o campo de saturações para a malha menos refinada apresenta, novamente, uma solução menos precisa e com mais difusão e maior espalhamento. Nas figuras, observamos que o refinamento da malha produziu soluções bem mais acuradas e com menor difusão numérica, de modo que na malha mais fina o espalhamento do campo de saturações é ainda menor quando comparado com o campo de saturações obtido com a malha mais grosseira.

4.10 Escoamento Bifásico em 1/4 de Cinco Poços com Razão de Viscosidade Moderadamente Adversa $M=4.0$

Este problema é uma versão adimensionalizada do clássico problema de um quarto de cinco poços, no qual um poço injetor de água está rodeado por quatro poços produtores de óleo. Para este caso, que adaptamos de Durlofsky (1993) e Carvalho (2005), as saturações

residuais de água e óleo são $S_{ro} = S_{rw} = 0$ e o meio poroso é considerado homogêneo e isotrópico com $K = I$ através de todo o domínio.

Assumimos, ainda, que a porosidade é constante, sendo que seu valor real não é relevante já que seu valor é utilizado somente para adimensionalizar o tempo. As viscosidades da água e do óleo são, respectivamente, $\mu_w = 1.0$ e $\mu_o = 4.0$, de modo que a razão de viscosidades é $M = \mu_o / \mu_w = 4.0$. A saturação $S_{inj} = 1.0$ e o termo de fonte $Q_I = 1$ no poço injetor e pressões nos cantos superiores esquerdas e inferiores direito $p_{se} = p_{id} = 0$ *pa*. Durlofsky (1993) resolveu este problema que apresenta um efeito de orientação de malhas moderado devido à razão de viscosidade $M > 1.0$, utilizando uma formulação híbrida, em que o problema pressão-velocidade foi resolvido a partir de um método dos elementos finitos mistos e a equação de saturação foi resolvida utilizando um método de volumes finitos de ordem mais alta. Para avaliar o efeito de orientação de malhas, Durlofsky (1993) utilizou duas malhas estruturadas e uniformes com 400 elementos triangulares – uma cujos elementos são orientados segundo a direção do escoamento (malha alinhada) e outra, cujos elementos são orientados transversalmente ao escoamento (malha transversal). No presente trabalho, usamos malhas com quatro configurações diferentes, conforme indicado na Figura 31 e na Figura 32.

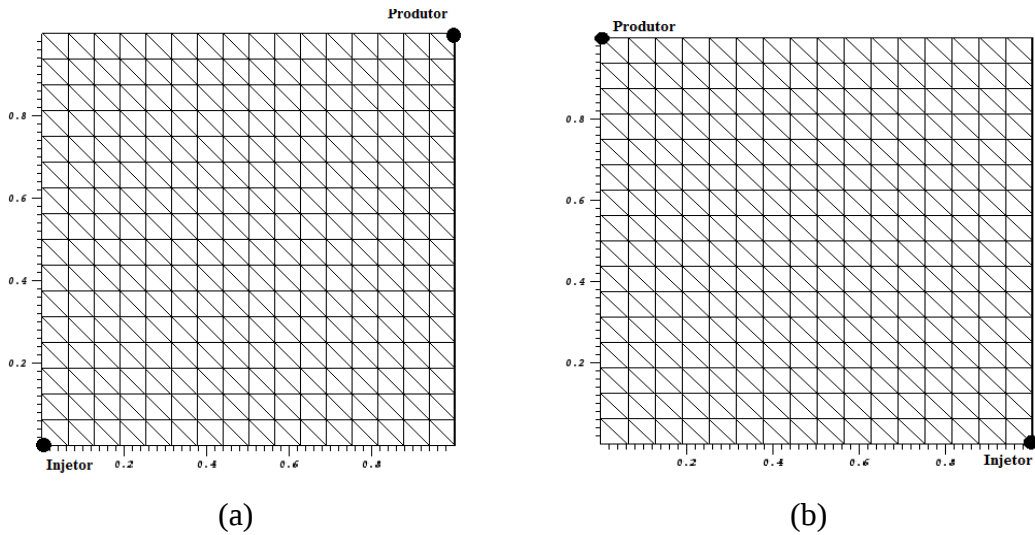


Figura 31: (a) Malha triangular transversal ao escoamento, (b) malha triangular alinhada ao escoamento com 512 elementos.

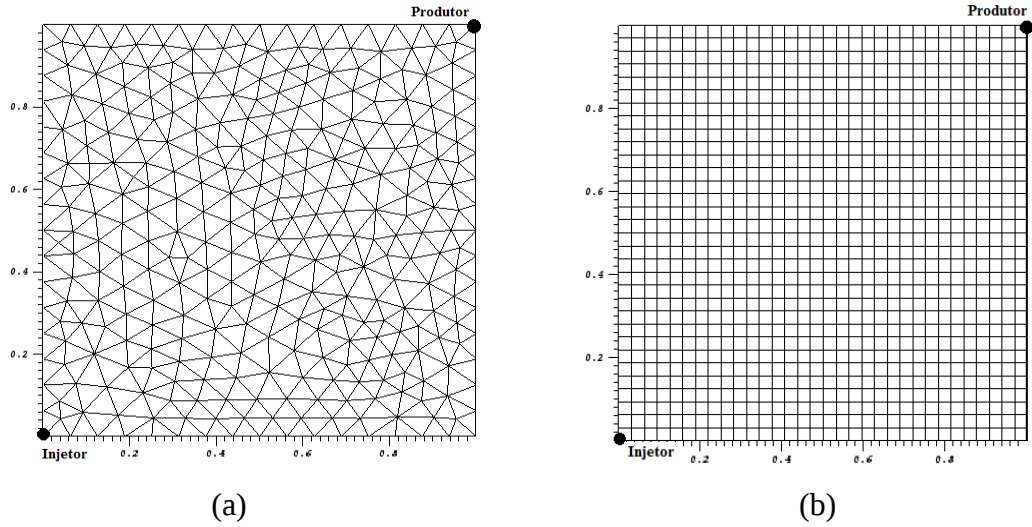


Figura 32: Malha triangular (a) estruturada e (b) malha quadrilateral.

Na Figura 33, podemos observar dois campos de pressões obtidos pelo método *MPFA-DEW2*. O resultado obtido pela malha transversal apresenta maior espalhamento no poço produtor do que o resultado obtido pela malha quadrilateral. Em geral, ambos possuem o mesmo comportamento.

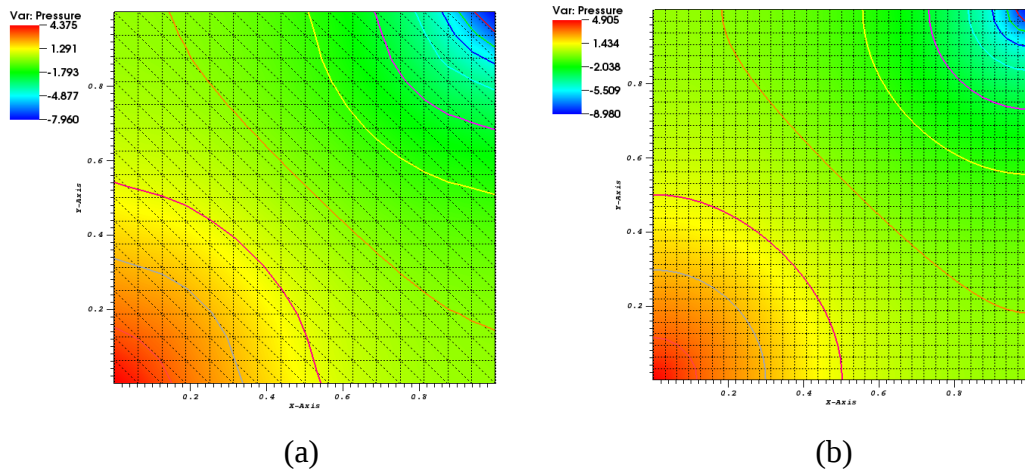


Figura 33: (a) Campo de pressões em malha triangular transversal ao escoamento e (b) malha quadrilátero, este campo de pressões foram obtidos pelo método *MPFA-DEW2*.

Na Figura 34 e Figura 35, apresentamos o campo de saturações para quatro diferentes tipos de malhas para um $VPI=0.1$. Na Figura 34 (a) e na Figura 35 (b), notamos uma pequena diferença de difusividade, embora os contornos da saturação tenham sido representados de maneira adequada. Na Figura 34 (b), os contornos da saturação são afetados pelo efeito de orientação de malha e na Figura 35 (a), o resultado é difusivo. Mas, o resultado, em princípio,

não apresenta efeito de orientação de malha, devido ao fato de o escoamento não ter uma direção preferencial.

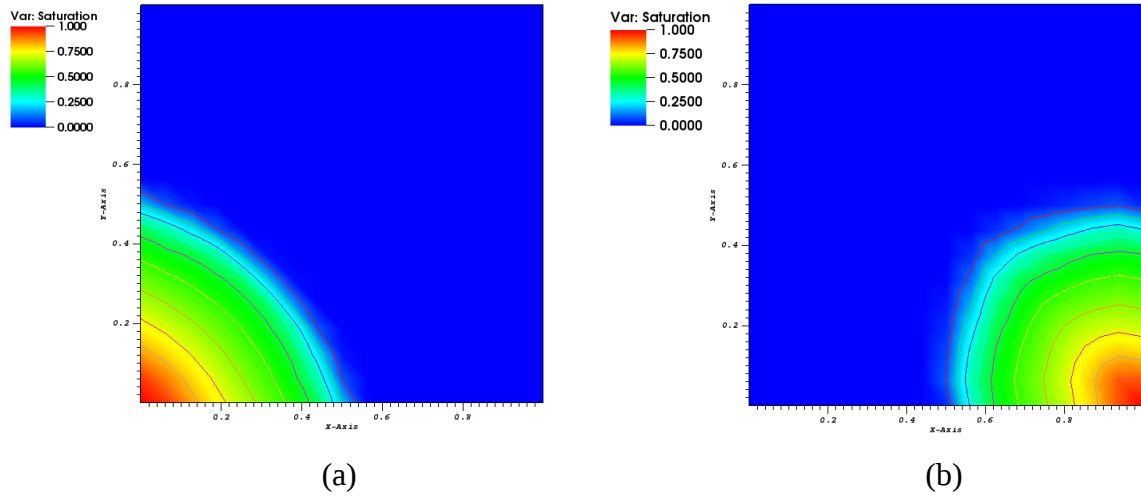


Figura 34: Contornos de saturações com razão de viscosidade $M=4.0$, obtidos usando o método *MPFA-DEW2*, considerando um $VPI = 0.1$ em (a) malha transversal e (b) malha alinhada.

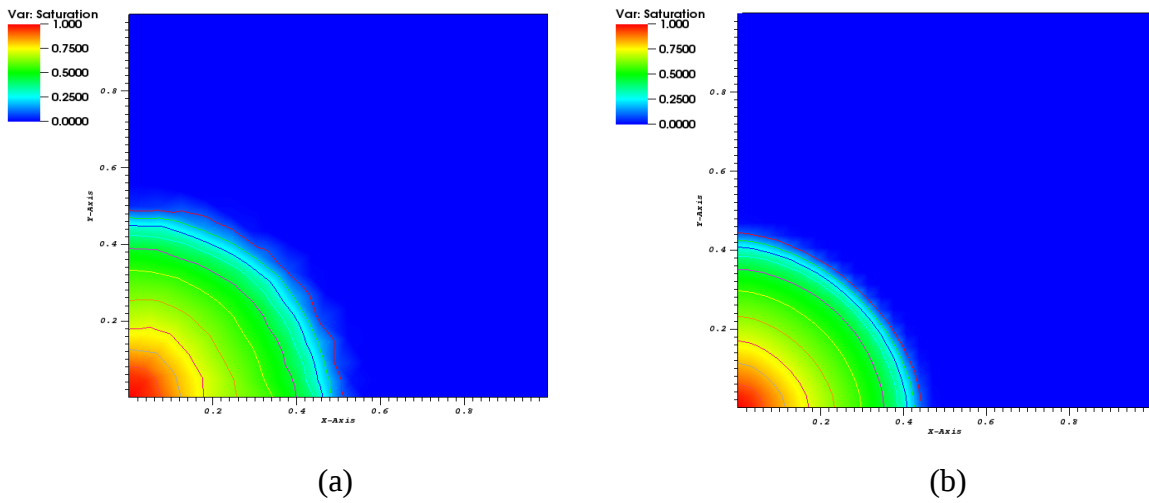


Figura 35: Contornos de saturações num reservatório com razão de viscosidade $M=4.0$ obtidos pelo método *MPFA-DEW2*, considerando um $t = 0.1VPI$ em (a) malha triangular não-estruturada e (b) malha quadrilateral.

Na Figura 36 e na Figura 37, apresentamos o óleo recuperado e o óleo acumulado, respectivamente, obtidos com quatro tipos de malhas, isto é, triangular transversal, alinhada, não-estruturada e quadrilateral. Além disso, apenas para efeito de comparação, em ambos os casos, acrescentamos a solução obtida por Durlofsky (1993) para uma malha transversal com 400 (20x20) triângulos. Conforme apontado por Durlofsky (1993), teoricamente, as soluções deveriam ser as mesmas a despeito da configuração da malha. Porém, como mostram as figu-

ras 34 (a-b) e 35 (b), observamos um efeito moderado de orientação de malhas nos perfis de saturação apresentados. A partir da análise das curvas de óleo recuperado e acumulado, tomando como base os resultados obtidos com a malha não-estruturada, que em princípio não apresenta efeito de orientação de malha, podemos notar que os resultados obtidos com os três tipos de malhas são bastante semelhantes quando comparados entre si e quando comparados com os resultados de Durlofsky (1993).

Na Figura 36, observamos que, para a malha alinhada, o resultado obtido no presente trabalho apresenta um tempo de irrupção de água no poço produtor (Breakthrough) antecipado se comparado com os resultados obtidos com a malha não estruturada. Por outro lado, os resultados obtidos com a malha transversal e quadrilateral, tanto no presente texto quanto no trabalho de Durlofsky (1993), apresentam um atraso para a irrupção de água no poço produtor.

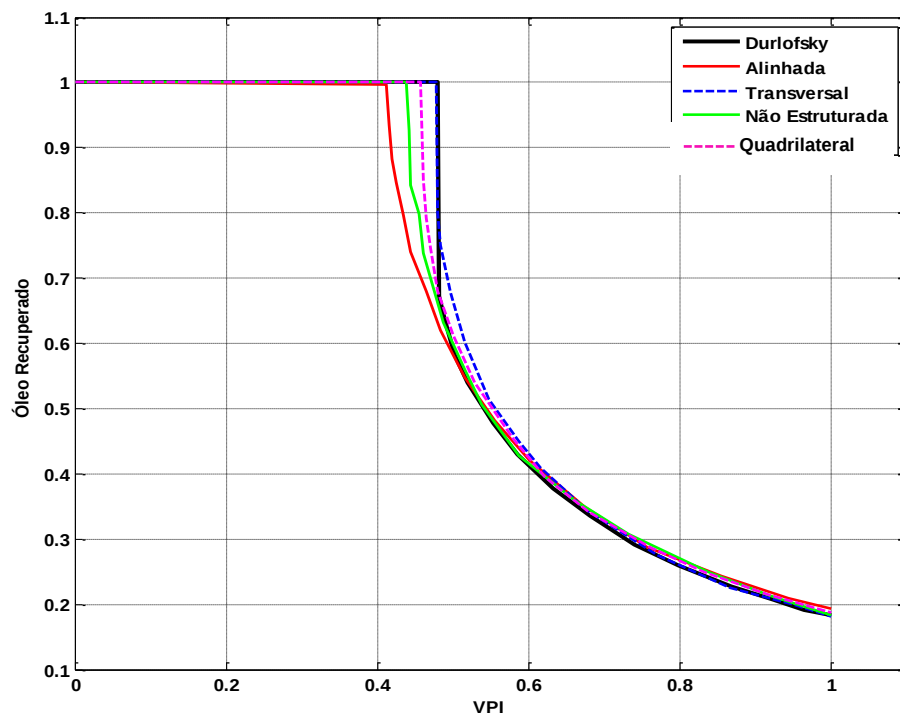


Figura 36: Óleo recuperado para o problema $\frac{1}{4}$ de cinco poços com razão entre viscosidades para uma malha com 512 elementos.

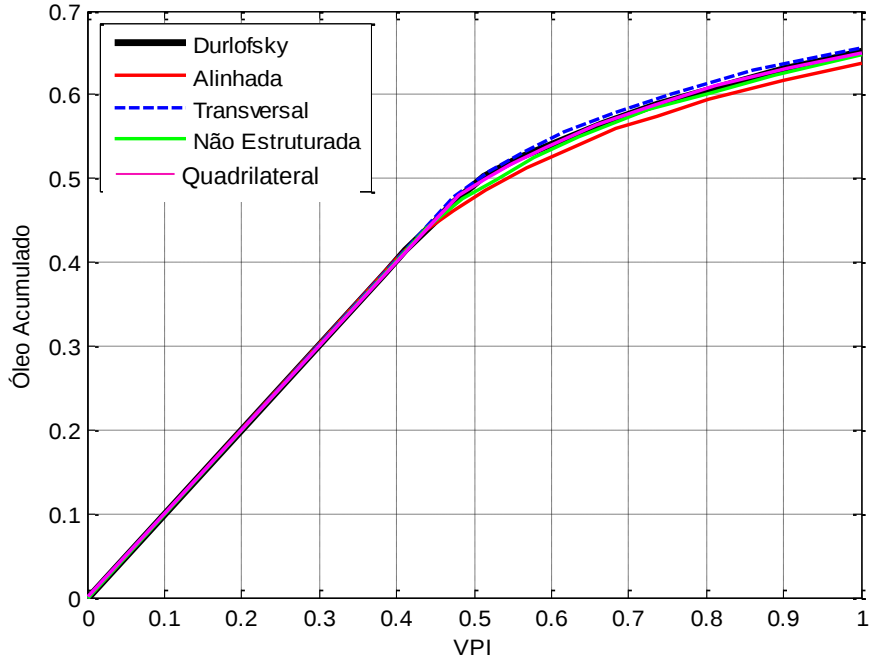


Figura 37: Óleo acumulado para o problema de 1/4 de cinco poços com razão entre as viscosidades $M = 4.0$, para uma malha com 512 elementos.

4.11 Escoamento Bifásico em 1/4 de Cinco Poços com Razão de Viscosidade Bastante Adversa $M=40.0$

Este problema foi adaptado de Carvalho (2005), cujas saturações residuais de água e óleo são $S_{ro} = S_{rw} = 0$ e o meio poroso é considerado homogêneo isotrópico com tensor de permeabilidade unitário ($\underline{K} = \underline{I}$) através de todo o domínio. Assumimos, ainda, que a porosidade é constante, sendo que o seu valor real não é relevante já que é utilizado somente para adimensionalizar o tempo. As viscosidades da água e do óleo são, respectivamente, $\mu_w = 1,0$ e $\mu_o = 40,0$, de modo que a razão de viscosidade é $M = \mu_o / \mu_w = 40,0$. As condições de contorno são $S_{inj} = 1$ no poço injetor e pressão nos cantos diagonal superior esquerdo e inferior direito $p_{se} = p_{id} = 0$.

Na Figura 38 e Figura 39, apresentamos, respectivamente, as curvas de recuperação de óleo e a acumulação de óleo para um $VPI=1$ para os diferentes tipos de malhas descritos no problema 4.10. Mesmo neste caso bem mais severo, com $M = 40.0$, as soluções não divergem muito entre si na malha transversal e na malha não estruturada, sendo visualmente muito similares, tanto do ponto de vista da quantidade de óleo acumulada quanto da fração de óleo recuperada.

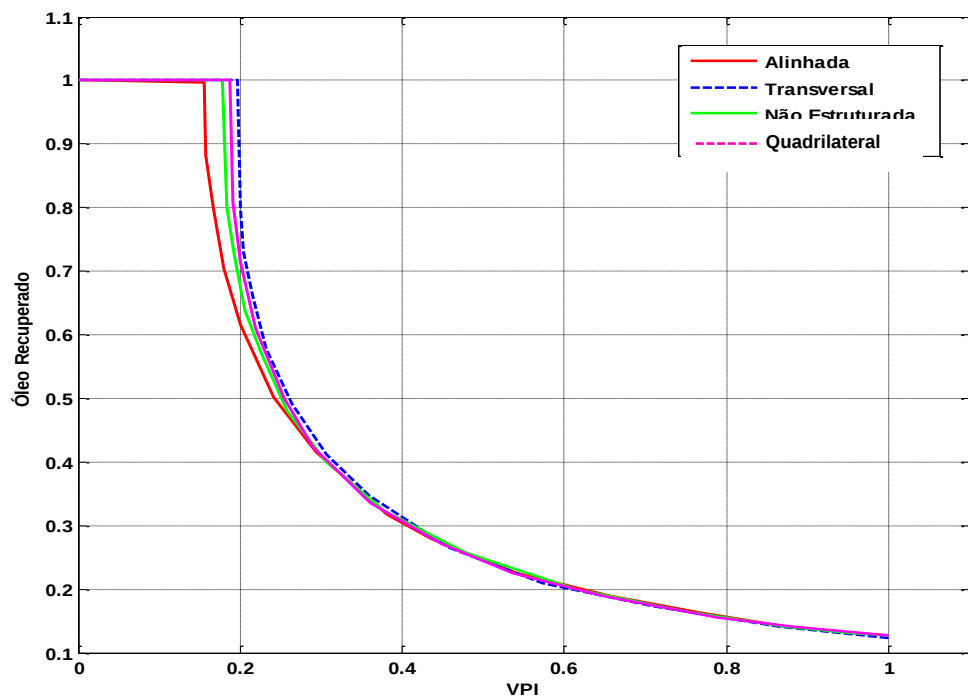


Figura 38: Óleo recuperado para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com razão de viscosidades bastante adversa, $M = 40.0$, para uma malha com 512 elementos.

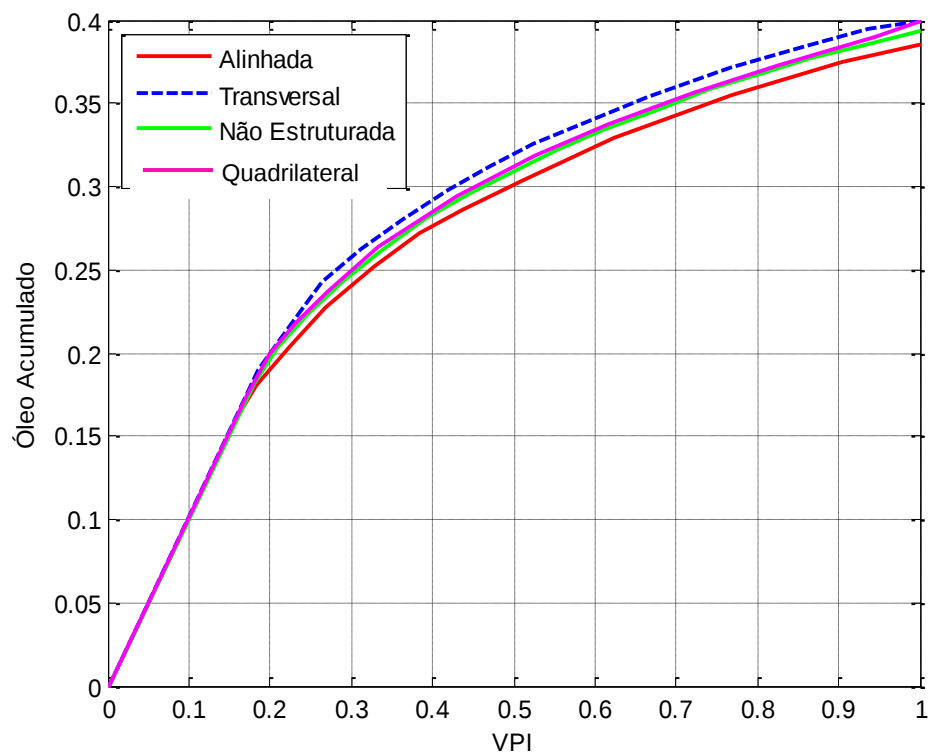


Figura 39: Óleo acumulado para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com razão de viscosidades bastante adversa, $M = 40.0$, para uma malha com 512 elementos.

Por outro lado, na Figura 38, notamos que, na malha alinhada, houve uma antecipação ainda maior para o tempo de irrupção de água no poço produtor (Breakthrough) que no exemplo anterior ($M = 4.0$), indicando que o algoritmo utilizado não está totalmente livre dos efeitos de orientação de malha, particularmente nos casos mais severos com razões de viscosidades muito elevadas.

5 . CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusão

Na presente dissertação estudamos, detalhadamente, uma formulação dos Volumes Finitos Centrado na Célula denominado *MPFA-DEW* – esta formulação numérica foi desenvolvida para simular escoamento bifásico imiscível de óleo-água em reservatórios de petróleo, que são meios porosos rígidos, altamente heterogêneos e anisotrópicos. Para a discretização conservativa das equações de transporte de fluidos em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos, utilizamos uma formulação unificada de volumes finitos, em que os termos de difusão foram calculados em dois laços nos centroides da malha e os termos advectivos foram tratados a partir da utilização de técnicas de primeira ordem.

De forma a mostrar a potencialidade do trabalho, resolvemos problemas, representando escoamento monofásico e escoamento bifásico óleo-água. No problema de escoamento monofásico, resolvemos problemas envolvendo coeficientes de difusão não diagonais e descontínuos com termo de fonte distribuído (CRUMPTON et al., 1995; HYMAN et al., 1997; CARVALHO et al., 2005). A fim de validar os resultados, as soluções numéricas foram obtidas para distintos níveis de refinamento para verificar a convergência do método. Assim, notamos que o *MPFA-DEW*, com as duas interpolações, mostraram acurácia de segunda ordem, mesmo para soluções com anisotropia suave e moderada. Para os casos analisados, o método apresentou, de maneira geral, soluções bastante aceitáveis.

No estudo do escoamento bifásico de óleo-água em meios porosos, utilizamos uma metodologia *IMPES* – tal metodologia requer um pequeno esforço computacional por intervalo de tempo porque a pressão é calculada através de um sistema de equações lineares. A vantagem é que o processo para fazer avançar a saturação é facilmente vetorizada. A principal desvantagem do *IMPES* é que o *CFL* deve ser menor do que a unidade para evitar oscilações espúrias na solução. Ao utilizarmos esta metodologia, estudamos problemas com diferentes níveis de refinamento de malha. Mediante esse tipo de estudos foi possível encontrar evidências de que a solução nas malhas grosseiras apresenta maior difusão numérica – característica do método de primeira ordem *Upwind*. Mesmo assim, conforme esperado, os experimentos deixam claro

que o campo de velocidades foi calculado de maneira acurada, “respeitando” a brusca variação no campo de permeabilidades existente entre as regiões de baixa permeabilidade (HELMIG, 1997; GARCIA, 1997; CARVALHO, 2005).

A análise de efeito de orientação (GOE) de malha foi fundamental no trabalho. Assim, adotamos um problema clássico de *five-spot* (DURLOFSKY, 1993). Os experimentos mostram que o método *MPFA-DEW* é sensível ao fenômeno *GOE* devido aos fluxos que são calculados, utilizando apenas o sinal da diferença de potencial ao longo da face – este fenômeno não desaparece nem com o refinamento da malha. Os experimentos foram apresentados para razão de mobilidade severamente adversa. Assim, percebemos que o *breakthrough* (irrupção de água no poço produtor) varia para cada tipo malha comparado com a solução de referência (em malha não estruturada) que, em princípio, não apresenta o fenômeno *GOE*. Para reduzir este viés ou fenômeno *GOE*, é natural considerar esquemas multidimensionais que também levam em conta o fluxo tangencial para as faces.

5.2 Trabalhos Futuros

Finalmente, os bons resultados obtidos com a presente formulação numérica devem motivar a realização de pesquisas adicionais visando à extensão da formulação para problemas mais gerais. Como extensões imediatas do nosso trabalho, podemos mencionar:

1. Empregar técnicas de aproximação de baixa ordem tipo *upwind* multidimensional. Além disso, método de alta resolução para o cálculo de campo de saturações que sejam verdadeiramente multidimensionais e que, portanto, eliminem ou minimizem efeitos de orientação de malhas.
2. Extensão do simulador para geometrias tridimensionais.
3. Implementação de toda a formulação desenvolvida em computadores paralelos de memória distribuída a fim de simular problemas complexos em geometrias tridimensionais de grande porte.
4. Aperfeiçoamento do modelo físico, introduzindo os termos de gravidade e de capilaridade.
5. Aprofundamento do estudo do efeito da orientação de malhas na modelagem e na simulação de escoamentos bifásicos em meios porosos com a metodologia apresentada no presente trabalho.
6. Implementação das seguintes metodologias:

- 6.1 “Sequencial Implícita”: Formulação segregada em que, assim como a equação de pressão, a equação de saturação também é resolvida de maneira implícita, permitindo a utilização de intervalos de tempo maiores.
- 6.2 “Totalmente implícita”: Formulação em que as equações de transporte são rearranjadas de maneira que a pressão e a saturação são incógnitas simultâneas das mesmas equações, permitindo a utilização de intervalos de tempo que, independente da complexidade física do problema, são limitados apenas pela precisão da aproximação.

APÊNDICE A

Familiaridade entre o Método *MPFA-DEW* e *MDF Five-Point*

Afirmação 1. Considere uma malha ortogonal quadrilateral (Figura 40), com tensor de permeabilidade isotrópico, então $D_{\text{face}}^{(1)} = 0$, o que implica que o *MPFA-DEW* se torna um *MDF-five point*.

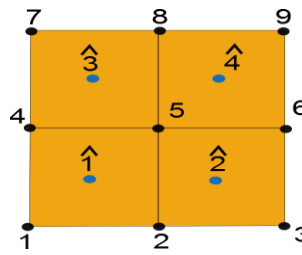


Figura 40: Representação dos quatro volumes de controle centrado na célula.

Prova

Seja pela Eq. (56)

$$D_{IJ}^{(1)} = \underbrace{\frac{\overrightarrow{O_1 O_r} \cdot \overrightarrow{IJ}}{|\overrightarrow{IJ}|^2}}_{\text{termo 1}} - \frac{1}{|\overrightarrow{IJ}|} \underbrace{\left(\frac{K_{IJ}^{(t)}}{K_{IJ}^{(n)}} h_{IJ,\hat{L}} + \frac{K_{JI}^{(t)}}{K_{JI}^{(n)}} h_{JI,\hat{R}} \right)}_{\text{termo 2}}$$

em que o primeiro termo é conhecido como “*termo geométrico*” e o segundo termo como “*termo tangencial*”.

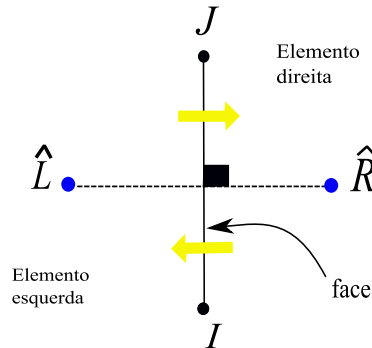


Figura 41: Representa a ortogonalidade.

É importante lembrar que as letras com chapéu indicam o baricentro das células e letras sem chapéu representam os vértices.

Pela ortogonalidade da malha podemos afirmar em geral que $\overrightarrow{\hat{L}\hat{R}} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$. Logo, o termo geométrico de $D_{IJ}^{(1)}$ é zero, ou seja, $\frac{\overrightarrow{\hat{L}\hat{R}} \cdot \overrightarrow{IJ}}{|\overrightarrow{IJ}|^2} = 0$.

Agora, provamos que as $K_{IJ}^{(t)}, K_{JI}^{(t)}$ constantes se anulam quando o tensor de permeabilidade é isotrópico.

Em efeito:

Sejam as constantes tangenciais dadas por:

$$K_{IJ}^{(t)} = \left[\left(\vec{N}_{IJ} \right)^T \underline{K} \left(\overrightarrow{IJ} \right) \right] / |\overrightarrow{IJ}|^2,$$

$$K_{JI}^{(t)} = \left[\left(\vec{N}_{JI} \right)^T \underline{K} \left(\overrightarrow{JI} \right) \right] / |\overrightarrow{JI}|^2$$

Estas constantes são iguais para qualquer tensor $\underline{K}$, em geral fazendo:

$$\vec{N}_{IJ} = -\vec{N}_{JI} \text{ e } \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{JI}.$$

Como hipótese se tem que o tensor de permeabilidade é isotrópico, ou seja, é da forma $\underline{K} = \alpha \underline{I}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{I}$ matriz identidade. Logo, podemos provar que

$$\vec{N}_{IJ}^T \underline{K} = \vec{N}_{IJ}^T (\alpha \underline{I}) = \alpha \vec{N}_{IJ}^T \underline{I} = \alpha \vec{N}_{IJ}^T, \text{ então } K_{IJ}^{(t)} = \frac{\vec{N}_{IJ}^T \underline{K} \overrightarrow{IJ}}{|\overrightarrow{IJ}|^2} = \frac{\alpha \vec{N}_{IJ}^T \overrightarrow{IJ}}{|\overrightarrow{IJ}|^2}.$$

onde $\vec{N}_{IJ} = \Re \overrightarrow{IJ}$ é o vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{IJ}$ devido ao fato de que ele sofre uma rotação de 90° pela matriz de rotação $\Re = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \theta = \frac{\pi}{2}$. Então, é garantido afirmar que

$$\vec{N}_{IJ}^T \cdot \overrightarrow{IJ} = 0, \text{ daí se segue que } K_{IJ}^{(t)} = 0 \text{ e } K_{JI}^{(t)} = 0.$$

Desta última afirmação temos, evidentemente, que a parte tangencial de $D_{IJ}^{(1)}$ é zero, ou seja, $\frac{K_{IJ}^{(t)}}{K_{IJ}^{(n)}} h_{IJ,\hat{L}} + \frac{K_{JI}^{(t)}}{K_{JI}^{(n)}} h_{JI,\hat{R}} = 0$, o que implica $D_{IJ}^{(1)} = 0$.

Com um exemplo mostraremos que o *MPFA-DEW* se torna um *MDF five-point*.

Exemplo: consideremos uma malha quadrilateral ortogonal de quatro elementos. Mostraremos que o método *MPFA-DEW* é similar ao *MDF* de cinco pontos. Para este exemplo consideramos a equação elíptica homogênea com tensor de permeabilidade igual à matriz identidade.

Seja a equação

$$\vec{\nabla} \cdot (-\tilde{K} \vec{\nabla} p) = 0 \quad (131)$$

Consideramos o seguinte domínio discretizado por quatro quadriláteros ortogonais, assumindo que todas as fronteiras são de tipo Neumann, ou seja, fluxo nulo.

Cálculo das vazões em cada face interna da malha de quatro elementos da Figura 40

Cálculo das vazões para o primeiro elemento, utilizando a Eq. (54):

$$\begin{aligned} \vec{v}_{25} \cdot \vec{N}_{25} &= K_{25}^{(1)} (p_2 - p_1 - D_{25}^{(1)} (p_5 - p_2)) = K_{25}^{(1)} (p_2 - p_1) \\ \vec{v}_{54} \cdot \vec{N}_{54} &= K_{54}^{(1)} (p_3 - p_1 - D_{25}^{(1)} (p_4 - p_5)) = K_{54}^{(1)} (p_3 - p_1) \\ \vec{v}_{12} \cdot \vec{N}_{12} &= 0, \quad \vec{v}_{41} \cdot \vec{N}_{41} = 0 \end{aligned}$$

Logo, pelo balanço de massa no elemento um, temos:

$$-(K_{25}^{(1)} + K_{54}^{(1)}) p_1 + K_{25}^{(1)} p_2 + K_{54}^{(1)} p_3 = 0 \quad (132)$$

Cálculo de vazões para o segundo elemento

$$\begin{aligned} \vec{v}_{65} \cdot \vec{N}_{65} &= K_{65}^{(1)} (p_4 - p_2 - D_{65}^{(1)} (p_5 - p_6)) = K_{65}^{(1)} (p_4 - p_2) \\ \vec{v}_{52} \cdot \vec{N}_{52} &= K_{52}^{(1)} (p_1 - p_2 - D_{52}^{(1)} (p_2 - p_5)) = K_{52}^{(1)} (p_1 - p_2) \\ \vec{v}_{36} \cdot \vec{N}_{36} &= 0, \quad \vec{v}_{23} \cdot \vec{N}_{23} = 0 \end{aligned}$$

aplicando o balanço de massa no elemento dois, obtemos:

$$-(K_{65}^{(1)} + K_{52}^{(1)}) p_2 + K_{65}^{(1)} p_4 + K_{52}^{(1)} p_1 = 0 \quad (133)$$

Cálculo das vazões no terceiro elemento

$$\begin{aligned} \vec{v}_{45} \cdot \vec{N}_{45} &= K_{45}^{(1)} (p_1 - p_3 - D_{45}^{(1)} (p_5 - p_4)) = K_{45}^{(1)} (p_1 - p_3) \\ \vec{v}_{58} \cdot \vec{N}_{58} &= K_{58}^{(1)} (p_4 - p_3 - D_{58}^{(1)} (p_8 - p_5)) = K_{58}^{(1)} (p_4 - p_3) \\ \vec{v}_{87} \cdot \vec{N}_{87} &= 0, \quad \vec{v}_{74} \cdot \vec{N}_{74} = 0 \end{aligned}$$

Aplicação do balanço de massa para o terceiro elemento

$$-(K_{45}^{(1)} + K_{58}^{(1)}) p_3 + K_{45}^{(1)} p_1 + K_{58}^{(1)} p_4 = 0 \quad (134)$$

Cálculo das vazões para o quarto elemento

$$\begin{aligned}\vec{v}_{45} \cdot \vec{N}_{45} &= K_{85}^{(1)} (p_3 - p_4 - D_{85}^{(1)} (p_5 - p_8)) = K_{85}^{(1)} (p_3 - p_4) \\ \vec{v}_{56} \cdot \vec{N}_{56} &= K_{56}^{(1)} (p_2 - p_4 - D_{56}^{(1)} (p_6 - p_5)) = K_{56}^{(1)} (p_2 - p_4) \\ \vec{v}_{69} \cdot \vec{N}_{69} &= 0, \quad \vec{v}_{68} \cdot \vec{N}_{68} = 0\end{aligned}$$

Balço de massa para o quarto elemento

$$-(K_{56}^{(1)} + K_{85}^{(1)}) p_4 + K_{85}^{(1)} p_3 + K_{56}^{(1)} p_2 = 0 \quad (135)$$

Das equações (132) - (135), obtemos um sistema de equação

$$\begin{cases} -(K_{25}^{(1)} + K_{54}^{(1)}) p_1 + K_{25}^{(1)} p_2 + K_{54}^{(1)} p_3 = 0 \\ -(K_{65}^{(1)} + K_{52}^{(1)}) p_2 + K_{65}^{(1)} p_4 + K_{52}^{(1)} p_1 = 0 \\ -(K_{48}^{(1)} + K_{58}^{(1)}) p_3 + K_{45}^{(1)} p_1 + K_{58}^{(1)} p_4 = 0 \\ -(K_{56}^{(1)} + K_{85}^{(1)}) p_4 + K_{85}^{(1)} p_3 + K_{56}^{(1)} p_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, do sistema anterior obtemos a seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} -(K_{25}^{(1)} + K_{54}^{(1)}) & K_{25}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & 0 \\ K_{52}^{(1)} & -(K_{65}^{(1)} + K_{52}^{(1)}) & 0 & K_{65}^{(1)} \\ K_{45}^{(1)} & 0 & -(K_{48}^{(1)} + K_{58}^{(1)}) & K_{58}^{(1)} \\ 0 & K_{56}^{(1)} & K_{85}^{(1)} & -(K_{56}^{(1)} + K_{85}^{(1)}) \end{bmatrix}$$

onde M é uma matriz simétrica.

Agora, discretizamos a Eq. (131) pelo *MDF Centrada*, considerando que os $\Delta x = \Delta y$

$$\left(\frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\Delta y^2} \right) = 0, \text{ lembramos que } \tilde{K} \vec{\nabla} = \vec{\nabla}.$$

Logo, obtemos um estêncil de cinco pontos (*MDF-five point*)

$$p_{i-1,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j-1} + p_{i,j+1} - 4p_{i,j} = 0 \quad (136)$$

Da Figura 43 e da Eq. (136), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} p_3 + p_2 - 4p_1 = c_1 \\ p_1 + p_4 - 4p_2 = c_2 \\ p_4 + p_1 - 4p_3 = c_3 \\ p_3 + p_2 - 4p_4 = c_4 \end{cases}$$

Logo, a partir do sistema anterior podemos deduzir a seguinte matriz:

$$M^* = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

onde a matriz M^* é simétrica.

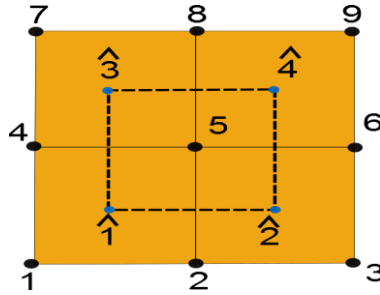


Figura 42. Representação das incógnitas a calcular pelo *MDF-centrado*.

Logo, concluímos que o método *MPFA-DEW* para malhas ortogonais com tensor isotrópico produz uma matriz com características similares ao *MDF “five point”*. Na realidade, o método *MPFA-DEW* se torna um *MDF “five point”*.

Afirmção 2. Caso quando o tensor de permeabilidade seja diferente de um tensor isotrópico (ortotrópico ou anisotrópico). Em geral, as constantes tangenciais de $D_{IJ}^{(1)}$ não se anulam, porém nada garante que o método *MPFA-DEW* se torne um *MDF “five-point”*.

Prova

Ao assumir que o tensor é ortotrópico, ou seja, da forma $\tilde{K} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a \neq b \neq 0$.

Provamos que $D_{IJ}^{(1)}$, em geral, é diferente de zero.

Isso implica provar que as $K_{IJ}^{(t)}$, $K_{JI}^{(t)}$ constantes não se anulam quando o tensor de permeabilidade é ortotrópico.

Em efeito

Sejam as constantes tangenciais dadas por $K_{IJ}^{(t)} = \left[\left(\vec{N}_{IJ} \right)^T \underline{K}(\vec{IJ}) \right] / |\vec{IJ}|^2$, $K_{JI}^{(t)} = \left(\vec{N}_{JI} \right)^T \underline{K}(\vec{JI}) / |\vec{JI}|^2$, com as seguintes condições auxiliares $\vec{IJ} \neq 0$, então $\vec{N}_{IJ} = \Re \vec{IJ} = (m, n)$, $(m, n) \neq 0$, em que $\vec{N}_{IJ}$ é o vetor ortogonal ao vetor $\vec{IJ}$ devido ao fato de que ele sofre uma rotação de 90° pela matriz de rotação $\Re = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Então, $\vec{N}_{IJ} \underline{K} = (m, n) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = (ma, nb)$, em que um dos componentes garante sempre a não nulidade do vetor (ma, nb) devido à suposição que os componentes da diagonal do tensor de permeabilidade são diferentes de zero, então $\vec{N}_{IJ}^T \underline{K} \neq 0$. Assim, o numerador da constante $K_{IJ}^{(t)}$ é diferente de zero. O que implica, em geral, que $K_{IJ}^{(t)}$ é diferente de zero.

Desta última afirmação temos, evidentemente, que a parte tangencial de $D_{IJ}^{(1)}$ é diferente de zero, ou seja, $\frac{K_{IJ}^{(t)}}{K_{IJ}^{(n)}} h_{IJ, \hat{L}} + \frac{K_{JI}^{(t)}}{K_{JI}^{(n)}} h_{JI, \hat{R}} \neq 0$. Logo, $D_{IJ}^{(1)} \neq 0$.

Finalmente, afirmamos que, em malhas quadrilaterais o *MPFA-DEW*, se torna um método *nine-point*. A estas alturas é possível afirmar que o método se torne um *MDF-nine-point* de quarta ordem.

APÊNDICE B

Dedução da Interpolação das Mobilidades

Afirmção 3. Agora, provamos que a interpolação das mobilidades na Eq. (40) preservam a linearidade desde o momento no qual a mobilidade total em cada elemento é linear por partes.

Em efeito:

Como hipótese, temos que a mobilidade total é linear em cada k -ésimo elemento:

$$\lambda_{T(k)}(x, y) = ax + by + c \quad (137)$$

Ao multiplicar a Eq. (137) pelo volume $V_{\hat{k}}$ do k -ésimo elemento e ao dividir pela somatória de volumes $\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}$ na vizinhança de nó I , temos:

$$\frac{V_{\hat{k}} \lambda_{T(\hat{k})}}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} = \left(\frac{V_{\hat{k}} a}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} \right) x + \left(\frac{V_{\hat{k}} b}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} \right) y + \frac{V_{\hat{k}} c}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} \quad (138)$$

onde $n(I)$ é o numero de elementos na vizinhança do nó em questão.

Logo, aplicamos a somatória em termos de k na Eq. (138)

$$\lambda_I = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}} a}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} \right) x + \left(\frac{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}} b}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} \right) y + \frac{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}} c}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} \quad (139)$$

onde $\lambda_I = \sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}} \lambda_{T(\hat{k})} / \sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}$ é mobilidade no nó I .

De maneira análoga, podemos derivar a mobilidade no nó J

$$\lambda_J = \left(\frac{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}} r}{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}}} \right) x + \left(\frac{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}} s}{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}}} \right) y + \frac{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}} u}{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}}} \quad (140)$$

onde $\lambda_J = \sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}} \lambda_{T(\hat{k})} / \sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}}$ é a mobilidade no nó J e $m(J)$ é o número de elementos na vizinhança do nó J .

Podemos observar que nas Eqs. (139) e (140), as interpolações das mobilidades nos nós em I e J , respectivamente, preservam a linearidade.

Agora, calculamos a mobilidade no ponto médio da face IJ pela media aritmética das mobilidades dos nós, ou seja,

$$\lambda_{IJ} = \frac{\lambda_I + \lambda_J}{2} = \frac{A}{2} x + \frac{B}{2} y + \frac{C}{2} \quad (141)$$

onde

$$A = \frac{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}} a}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} + \frac{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}} r}{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}}}$$

$$B = \frac{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}} b}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} + \frac{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}} s}{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}}}$$

$$C = \frac{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}} c}{\sum_{k=1}^{n(I)} V_{\hat{k}}} + \frac{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}} u}{\sum_{k=1}^{m(J)} V_{\hat{k}}}$$

Da Eq. (141) concluímos que a interpolação das mobilidades no ponto médio da face IJ satisfaz o critério de preservar a linearidade. Na próxima afirmação provamos o Lema 3.1 em realidade a Eq. (42).

APÊNDICE C

Dedução do Lema 3.1

Afirmção 4. Seja p a função pressão definida sobre o triângulo $\triangle ABC$ com vértices A, B, C ordenados em sentido anti-horário. Então

$$\vec{\nabla} p = \frac{p_A - p_B}{|AB|} \overrightarrow{AB} + \frac{\Re \overrightarrow{AB}}{|AB|^2} \left[(p_B - p_A) \operatorname{ctg} \angle BCA + (p_C - p_A) \operatorname{ctg} \angle ABC \right] \quad (142)$$

Prova

Como hipótese auxiliar, p é uma função linear no triângulo $\triangle ABC$ de tipo $p(x, y) = ax + by + c$.

Agora, ao avaliar a função p nos vértices do triângulo, obtemos o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} p(A) = p_A = aa_1 + ba_2 + c \\ p(B) = p_B = ab_1 + bb_2 + c \\ p(C) = p_C = ac_1 + bc_2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_B - p_A = (b_1 - a_1)a + (b_2 - a_2)b \\ p_C - p_A = (c_1 - b_1)a + (c_2 - b_2)b \end{cases} \quad (143)$$

Este último sistema de equações (143) pode ser expresso como matriz 2x2:

$$\begin{pmatrix} p_B - p_A \\ p_C - p_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix} \vec{\nabla} p, \text{ escrevendo que } X = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix}$$

Então,

$$X^{-1} = \frac{1}{2S_{\triangle ABC}} \begin{pmatrix} \vec{N}_{AC} & \vec{N}_{BA} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det X} \begin{pmatrix} \vec{N}_{AC} & \vec{N}_{BA} \end{pmatrix} \quad (144)$$

onde $\vec{N}_{AC}$, $\vec{N}_{BA}$ são vetores ortogonais a os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BA}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
X^{-1} \begin{pmatrix} p_B - p_A \\ p_C - p_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{N}_{AC} & \vec{N}_{BA} \\ 2S_{\triangle ABC} & 2S_{\triangle ABC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_B - p_A \\ p_C - p_A \end{pmatrix} = \\
\frac{1}{2S_{\triangle ABC}} \left((p_B - p_A) \vec{N}_{AC} + (p_C - p_A) \vec{N}_{BA} \right) &= \vec{\nabla} p
\end{aligned} \tag{145}$$

Os componentes $\frac{\vec{N}_{AC}}{2S_{\triangle ABC}}$, $\frac{\vec{N}_{BA}}{2S_{\triangle ABC}}$ são obtidos assumindo que $\vec{n}_{CA} + \vec{n}_{AB} + \vec{n}_{BC} = 0$, em que as normais unitárias a cada lado do triângulo (Figura 43) são denotadas como:

$$\vec{n}_{AB} = \frac{\vec{N}_{AB}}{|\vec{AB}|}, \vec{n}_{BC} = \frac{\vec{N}_{BC}}{|\vec{BC}|} \text{ e } \vec{n}_{CA} = \frac{\vec{N}_{CA}}{|\vec{CA}|}.$$

Então,

$$\frac{\vec{N}_{AC}}{2S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{|\vec{BC}|^2} \vec{BC} + \frac{\cot \angle ABC}{|\vec{BC}|^2} \vec{N}_{BC} \tag{146}$$

$$\frac{\vec{N}_{BA}}{2S_{\triangle ABC}} = -\frac{1}{|\vec{BC}|^2} \vec{BC} + \frac{\cot \angle BCA}{|\vec{BC}|^2} \vec{N}_{BC} \tag{147}$$

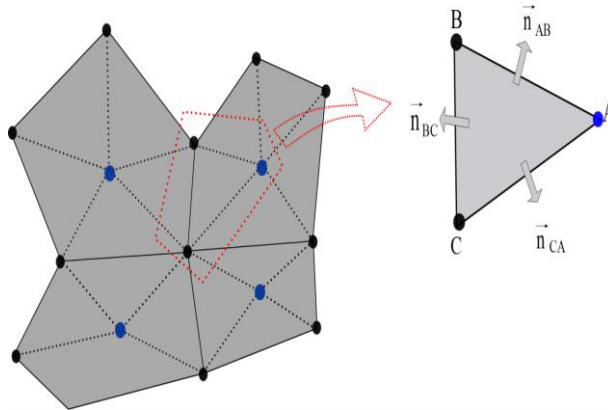


Figura 43: Triângulo em que p é definido.

Ao substituírmos as equações (146) e (147) pela Eq. (145) e associarmos adequadamente provamos o Lema 3.1 ou Eq. (42), *i.e*:

$$\vec{\nabla} p = \frac{p_A - p_B}{|\vec{AB}|} \vec{AB} + \frac{\Re \vec{AB}}{|\vec{AB}|^2} \left[(p_B - p_A) \cot \angle BCA + (p_C - p_A) \cot \angle ABC \right]$$

APÊNDICE D

Detalhamento de um exemplo da Montagem Matricial, utilizando o MPFA-DEW

O detalhamento da montagem da matriz global $\tilde{M}$ e o vetor de termos independentes $\tilde{Y}$ ajuda ao entendimento do leitor de como foram feitas esta montagem da matriz global.

A dimensão da matriz global é $(num.elem.) \times (núm.elem.)$ e do vetor termo de fonte $1 \times (núm.elem.)$. Para facilitar o entendimento, consideramos um domínio com dimensões $[1, 0] \times [1, 0]$, discretizado com quatro triângulos. Além disso, consideramos que não há fluxo nos contornos superior e inferior e que as pressões são prescritas nos contornos laterais do domínio (Figura 44)

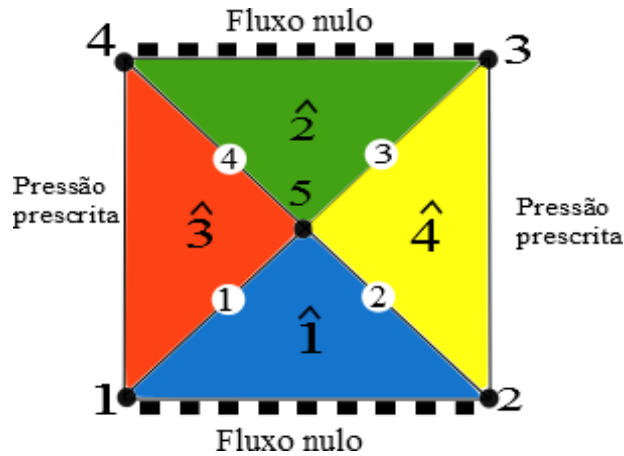


Figura 44: Domínio discretizado por uma malha de quatro elementos.

Neste exemplo, consideremos o tensor de permeabilidade ortotrópico genérico:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad a \neq b \neq 0, \text{ então a constante } D_i^{(1)} \text{ da } i\text{-ésima face é diferente de zero.}$$

Derivamos as vazões em todas as faces tanto internas quanto nos contornos.

- **Primeiro** consideramos a iteração em todas as faces internas da malha e calculamos a vazão em cada face. Logo, adicionamos na matriz global e no vetor, termos independentemente das contribuições de cada elemento.

Face 1.

Cálculo da vazão na face 15 (Figura 46 a), é dada por:

$$\vec{v}_{15} \cdot \vec{N}_{15} = -K_{15}^{(1)} |\overline{15}| \left(p_1 - p_3 - D_{15}^{(1)} (p_5 - p_1) \right) \quad (148)$$

Pela continuidade de fluxo na face em comum, temos a outra da vazão na face 51 (Figura 45 b), é dada por:

$$\vec{v}_{51} \cdot \vec{N}_{51} = -K_{51}^{(1)} |\overline{51}| \left(p_3 - p_1 - D_{51}^{(1)} (p_1 - p_5) \right) \quad (149)$$

onde os $K_{15}^{(1)}$ e $D_{15}^{(1)}$ são calculados de forma análoga à Eq. (55) e Eq. (56) , respectivamente, e pela condição de contorno a pressão no vértice 1 é conhecido, i.e., $p_1 = g_1$

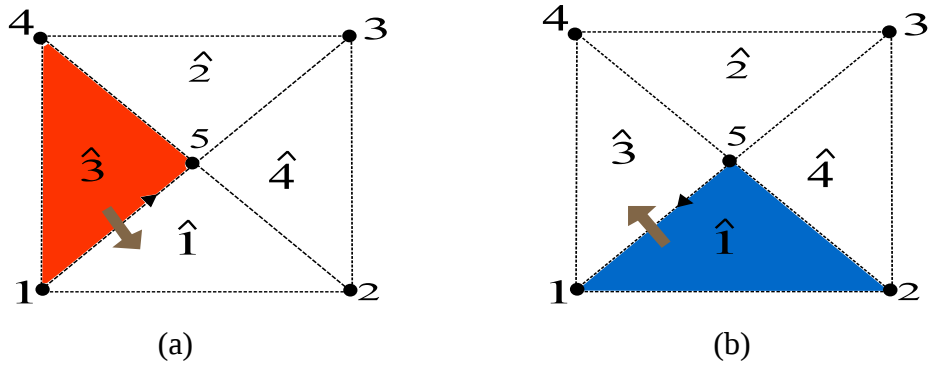


Figura 45: (a) Esboço da saída da vazão pela face 15 do elemento $\hat{3}$ e (b) da saída da vazão pela face 51 do elemento $\hat{1}$.

Além disso, temos que a pressão no vértice 5 é expressa como a combinação linear das pressões centradas nas células vizinhas ao vértice 5, i.e.:

$$p_5 = w_1 p_1 + w_2 p_2 + w_3 p_3 + w_4 p_4 \quad (150)$$

onde w_i são os pesos explícitos do i -ésimo elemento.

Então, substituindo a Eq.(150) nas Eqs. (148), (149) e associando adequadamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{15} \cdot \vec{N}_{15} = & K_{15}^{(1)} |\overline{15}| \left((1 + D_{15}^{(1)} w_1) p_1 + K_{15}^{(1)} D_{15}^{(1)} |\overline{15}| w_2 p_2 + K_{15}^{(1)} |\overline{15}| (1 - D_{15}^{(1)} w_3) p_3 + \right. \\ & \left. K_{15}^{(1)} |\overline{15}| D_{15}^{(1)} w_4 p_4 - K_{15}^{(1)} |\overline{15}| D_{15}^{(1)} g_1 \right) \end{aligned} \quad (151)$$

A equação (151) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{3}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{4}$ e do próprio $\hat{3}$. Estas constantes que multiplicam as pressões são adicionadas na fila 3 da matriz global $\underline{\underline{M}}$ (veja a Figura 46 a). De outra parte, o termo independente da Eq. (151) é adicionado ao vetor termo independente $\underline{\underline{Y}}$ na fila 3 (Figura 47 b).

E

$$\begin{aligned} \vec{v}_{51} \cdot \vec{N}_{51} = & K_{51}^{(1)} |\overline{51}| (1 - D_{51}^{(1)} w_1) p_1 - K_{51}^{(1)} D_{51}^{(1)} |\overline{51}| w_2 p_2 + K_{51}^{(1)} |\overline{51}| (-1 + D_{51}^{(1)} w_3) p_3 - \\ & K_{51}^{(1)} |\overline{51}| D_{51}^{(1)} w_4 p_4 + K_{51}^{(1)} |\overline{51}| D_{51}^{(1)} g_1 \end{aligned} \quad (152)$$

A equação (152) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{1}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{2}$, $\hat{3}$ e $\hat{4}$ e do próprio $\hat{1}$. Estas constantes que multiplicam as pressões são adicionadas na fila 1 da matriz global $\underline{\underline{M}}$. De outra parte, o termo independente da Eq. (152) é adicionado ao vetor termo independente $\underline{\underline{Y}}$ na fila 1 (Figura 46 b).

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \text{blue} & \text{green} & \text{red} & \text{yellow} \\ \square & \square & \square & \square \\ \text{blue} & \text{green} & \text{red} & \text{yellow} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

(a)

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} \text{blue} \\ \square \\ \text{red} \\ \square \end{bmatrix}$$

(b)

Figura 46: (a) Montagem da matriz global $\underline{\underline{M}}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 3 e 1 na primeira iteração.

Face 2.

Cálculo da vazão na face 25 (Figura 47 a) é dado por:

$$\vec{v}_{25} \cdot \vec{N}_{25} = K_{25}^{(1)} |\overline{25}| (p_4 - p_1 - D_{25}^{(1)} (p_5 - p_2)) \quad (153)$$

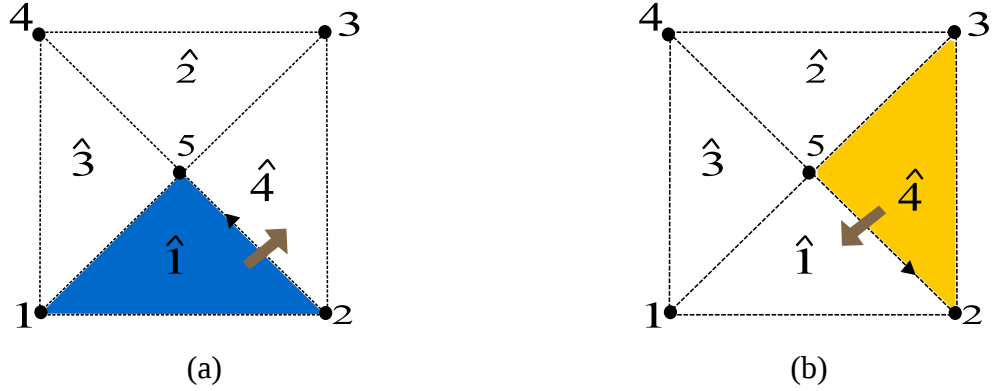


Figura 47: (a) Esboço da saída da vazão pela face 25 do elemento $\hat{1}$ e (b) da saída da vazão pela face 52 do elemento $\hat{4}$.

Pela continuidade de fluxo na face em comum, temos a vazão na face 52 (Figura 47 b) dada por:

$$\vec{v}_{52} \cdot \vec{N}_{52} = -K_{52}^{(1)} |\overline{52}| \left(p_1 - p_4 - D_{52}^{(1)} (p_2 - p_5) \right) \quad (154)$$

onde a pressão no vértice 2 é conhecido $p_2 = g_2$ e p_5 é dado pela Eq. (150)

Então, substituindo a Eq. (150) nas Eqs. (153), (154) e ao associar adequadamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{25} \cdot \vec{N}_{25} = & K_{25}^{(1)} |\overline{25}| \left((1 + D_{25}^{(1)} w_1) p_1 + K_{25}^{(1)} |\overline{25}| D_{25}^{(1)} w_2 p_2 - K_{25}^{(1)} |\overline{25}| D_{25}^{(1)} w_3 p_3 + \right. \\ & \left. K_{25}^{(1)} |\overline{25}| (-1 + D_{25}^{(1)} w_4) p_4 - K_{25}^{(1)} |\overline{25}| D_{25}^{(1)} g_2 \right) \end{aligned} \quad (155)$$

A equação (155) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{1}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ e do próprio $\hat{1}$. Estas constantes que multiplicam as pressões são adicionadas na fila 1 da matriz global $\tilde{M}$ (Figura 48 a). De outra parte, o termo independente da Eq. (155) é adicionado ao vetor termo independente $\tilde{Y}$ na fila 1 (Figura 48 b).

E

$$\begin{aligned} \vec{v}_{52} \cdot \vec{N}_{52} = & -K_{52}^{(1)} |\overline{52}| \left((1 + D_{52}^{(1)} w_1) p_1 - K_{52}^{(1)} |\overline{52}| D_{52}^{(1)} w_2 p_2 + K_{52}^{(1)} |\overline{52}| D_{52}^{(1)} w_3 p_3 + \right. \\ & \left. K_{52}^{(1)} |\overline{52}| (1 - D_{52}^{(1)} w_4) p_4 + K_{52}^{(1)} |\overline{52}| D_{52}^{(1)} g_2 \right) \end{aligned} \quad (156)$$

A equação (156) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{4}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ e do próprio $\hat{4}$. Estas constantes que multiplicam as pressões são adicionadas

à fila 4 da matriz global $\underline{\underline{M}}$. De outra parte, o termo independente da Eq. (156) é adicionado ao vetor termo independente $\underline{Y}$ na fila 4.

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc} \text{blue} + \text{blue} & \text{green} + \text{green} & \text{red} + \text{red} & \text{yellow} + \text{yellow} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \text{blue} & \text{green} & \text{red} & \text{yellow} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \text{blue} & \text{green} & \text{red} & \text{yellow} \end{array} \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc} \text{blue} + \text{blue} & \end{array} \\ \square \\ \text{red} \\ \text{yellow} \end{bmatrix} \quad (b)$$

Figura 48: (a) Montagem da matriz global $\underline{\underline{M}}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 1e 4 na segunda iteração.

Face 3:

Cálculo da vazão na face 35 (Figura 49 a) dado por:

$$\vec{v}_{35} \cdot \vec{N}_{35} = -K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| \left(p_2 - p_4 - D_{35}^{(1)} (p_5 - p_3) \right) \quad (157)$$

Pela continuidade de fluxo na face em comum a vazão na face 53 (Figura 49 b), é dada por:

$$\vec{v}_{35} \cdot \vec{N}_{35} = -K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| \left(p_2 - p_4 - D_{35}^{(1)} (p_5 - p_3) \right) \quad (158)$$

onde a pressão no vértice 3 é conhecida $p_3 = g_3$

Substituímos a Eq. (150) nas Eqs. (157), (158) e obtemos a seguinte expressão;

$$\begin{aligned} \vec{v}_{35} \cdot \vec{N}_{35} &= -K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| \left(p_2 - p_4 - D_{35}^{(1)} (p_5 - p_3) \right) = K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| D_{35}^{(1)} w_1 p_1 + \\ &K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| \left(-1 + D_{35}^{(1)} w_2 \right) p_2 + K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| D_{35}^{(1)} w_3 p_3 + K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| \left(1 + D_{35}^{(1)} w_4 \right) p_4 - K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| D_{35}^{(1)} g_3 \end{aligned} \quad (159)$$

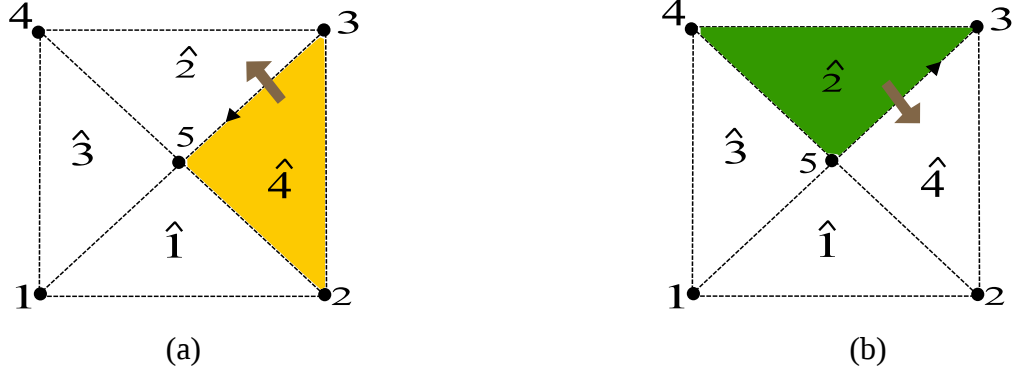


Figura 49: (a) Esboço da saída da vazão pela face 35 do elemento $\hat{4}$ e (b) da saída da vazão pela face 53 do elemento $\hat{2}$.

A equação (159) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{4}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ e do próprio $\hat{4}$. As contribuições que multiplicam as pressões são adicionadas na fila 4 da matriz global $\underline{\underline{M}}$ (veja Figura 50 a). De outra parte, o termo independente da Eq. (159) é adicionado ao vetor termo independente $[\underline{\underline{Y}}]$ na fila 4 (Figura 50 b).

E

$$\begin{aligned} \vec{v}_{53} \cdot \vec{N}_{53} = & -K_{53}^{(1)} |\overline{53}| D_{53}^{(1)} w_1 p_1 + K_{53}^{(1)} |\overline{53}| (1 - D_{53}^{(1)} w_2) p_2 - K_{53}^{(1)} |\overline{53}| D_{53}^{(1)} w_3 p_3 - \\ & K_{53}^{(1)} |\overline{53}| (1 + D_{53}^{(1)} w_4) p_4 + K_{53}^{(1)} |\overline{53}| D_{53}^{(1)} g_3 \end{aligned} \quad (160)$$

A equação (160) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{2}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{1}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ e do próprio $\hat{2}$. As contribuições que multiplicam as pressões são adicionadas na fila 2 da matriz global $\underline{\underline{M}}$. De outra parte, o termo independente da Eq. (160) é adicionado ao vetor termo independente $[\underline{\underline{Y}}]$ na fila 2.

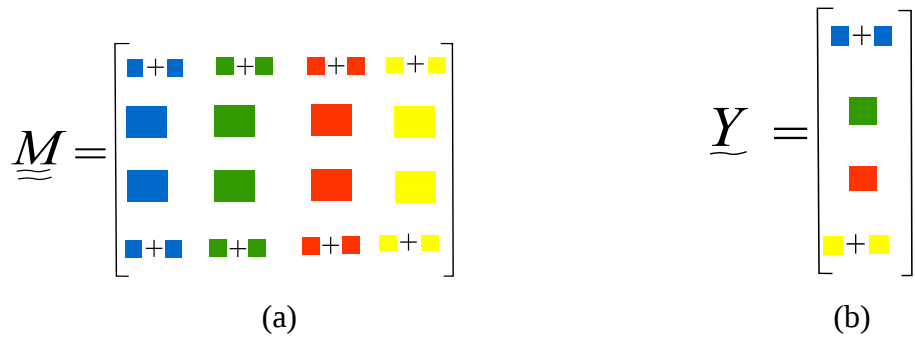


Figura 50: (a) Montagem da matriz global $\underline{\underline{M}}$ e (b) vetor de termos independentes preenchido nas filas 4 e 2 na terceira iteração.

Face 4:

Cálculo da vazão na face 45 (Figura 51 a) é dado por:

$$\vec{v}_{45} \cdot \vec{N}_{45} = -K_{45}^{(1)} \left| \overrightarrow{45} \right| \left(p_3 - p_2 - D_{45}^{(1)} (p_5 - p_4) \right) \quad (161)$$

Pela continuidade de fluxo na face em comum temos a vazão na face 54 (Figura 51 b) da-da por:

$$\vec{v}_{54} \cdot \vec{N}_{54} = -K_{54}^{(1)} \left| \overrightarrow{54} \right| \left(p_2 - p_3 - D_{54}^{(1)} (p_4 - p_5) \right) \quad (162)$$

onde a pressão no vértice 4 é conhecida $p_4 = g_4$.

Substituindo a Eq. (150) nas Eqs. (161), (162), obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{45} \cdot \vec{N}_{45} = & K_{45}^{(1)} \left| \overrightarrow{45} \right| D_{45}^{(1)} w_1 p_1 + K_{45}^{(1)} \left| \overrightarrow{45} \right| \left(1 + D_{45}^{(1)} w_2 \right) p_2 + K_{45}^{(1)} \left| \overrightarrow{45} \right| \left(-1 + D_{45}^{(1)} w_3 \right) p_3 + \\ & K_{45}^{(1)} \left| \overrightarrow{45} \right| D_{45}^{(1)} w_4 p_4 - K_{45}^{(1)} \left| \overrightarrow{45} \right| D_{45}^{(1)} g_4 \end{aligned} \quad (163)$$

A equação (163) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{2}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{1}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ e do próprio $\hat{2}$. As contribuições que multiplicam as pressões são adicionadas na fila 2 da matriz global $\tilde{M}$ (veja Figura 52 a). De outra parte, o termo independente da Eq. (163) é adicionado ao vetor termo independente $\tilde{Y}$ na fila 2 (Figura 52 b).

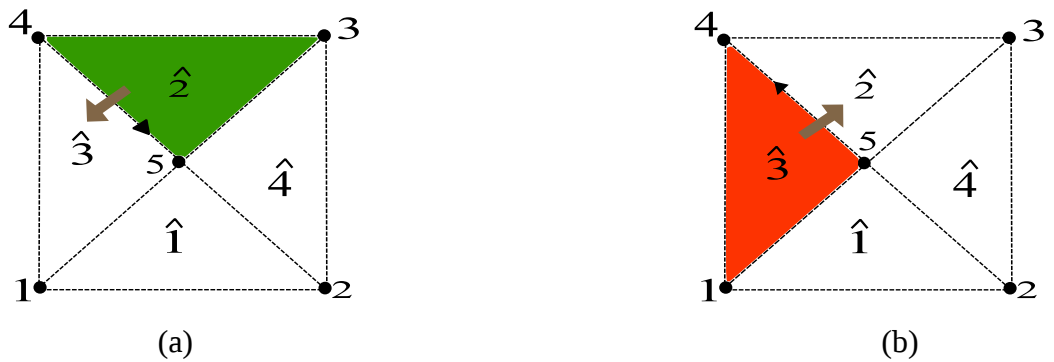


Figura 51: (a) Esboço da saída da vazão pela face 45 do elemento $\hat{2}$ e (b) da saída da vazão pela face 54 do elemento $\hat{3}$.

$$\vec{v}_{54} \cdot \vec{N}_{54} = -K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| D_{54}^{(1)} w_1 p_1 - K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| \left(1 + D_{54}^{(1)} w_2 \right) p_2 + K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| \left(1 - D_{54}^{(1)} w_3 \right) p_3 - K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| D_{54}^{(1)} w_4 p_4 + K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| D_{54}^{(1)} g_4 \quad (164)$$

A equação (164) é a vazão que está saindo do elemento $\hat{3}$, porém recebe as contribuições dos elementos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{4}$ e do próprio $\hat{3}$. As contribuições que multiplicam as pressões são adicionadas na fila 3 da matriz global $\underline{\underline{M}}$. De outra parte, o termo independente da Eq. (164) é adicionado ao vetor termo independente $\underline{\underline{Y}}$ na fila 3.

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \text{blue} + \text{blue} & \text{green} + \text{green} & \text{red} + \text{red} & \text{yellow} + \text{yellow} \\ \text{blue} + \text{blue} & \text{green} + \text{green} & \text{red} + \text{red} & \text{yellow} + \text{yellow} \\ \text{blue} + \text{blue} & \text{green} + \text{green} & \text{red} + \text{red} & \text{yellow} + \text{yellow} \\ \text{blue} + \text{blue} & \text{green} + \text{green} & \text{red} + \text{red} & \text{yellow} + \text{yellow} \end{bmatrix}$$

(a)

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} \text{blue} + \text{blue} \\ \text{green} + \text{green} \\ \text{red} + \text{red} \\ \text{yellow} + \text{yellow} \end{bmatrix}$$

(b)

Figura 52: (a) Montagem da matriz global $\underline{\underline{M}}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 2 e 3 na quarta iteração.

○ **Segundo:** consideramos a iteração em todas as faces do contorno da malha e calculamos a vazão de fluidos que entram ou saem do elemento em questão.

Faces de contorno 1 e 3

Nestas faces não há transferência de massa, então a vazão nestas faces é nula.

$$\vec{v}_{12} \cdot \vec{N}_{12} = 0, \quad \vec{v}_{34} \cdot \vec{N}_{34} = 0$$

Face de contorno 2.

A vazão na face 12 (Figura 53 b) é dada pela seguinte expressão:

$$\vec{v}_{23} \cdot \vec{N}_{23} = -\frac{K_{23}^{(n)}}{h_{23}^4 \left| \overline{23} \right|} \left(\overline{24} \cdot \overline{23} g_3 + \overline{34} \cdot \overline{32} g_2 \right) + \frac{K_{23}^{(n)}}{h_{23}^4 \left| \overline{23} \right|} p_4 - (g_3 - g_2) K_{23}^{(t)} \quad (165)$$

A equação (165) é a vazão pelo contorno adjacente a elemento $\hat{4}$. Ele recebe sua própria contribuição devido ao fato de que as pressões nos vértices 2 e 3 são conhecidas e não necessitam ser interpoladas. Esta contribuição é adicionada à fila 4, coluna 4 da matriz global $\underline{\underline{M}}$

(Figura 54 a). De outra parte, o termo independente da Eq. (165) é adicionado ao vetor termo independente $\underline{Y}$ na fila 4 (Figura 54 b).

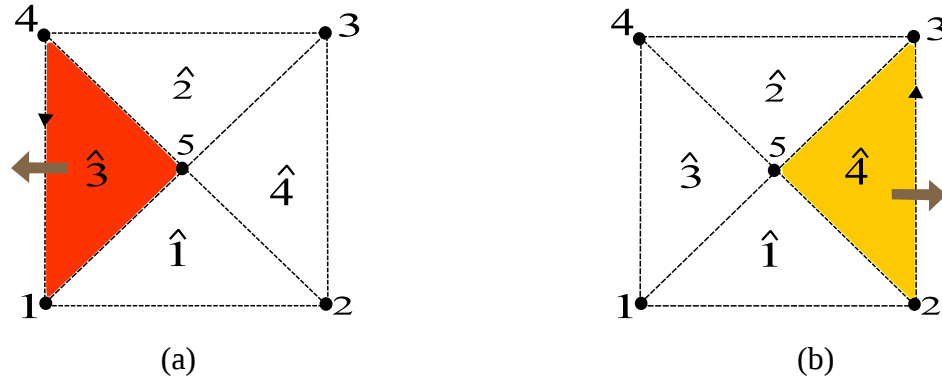


Figura 53: (a) Esboço da saída da vazão pela face do contorno 41 do elemento $\hat{3}$ e (b) da saída da vazão pela face 23 do elemento $\hat{4}$.

Face de contorno 4.

A vazão pela face 41 (veja a Figura 54 a) é dada pela seguinte expressão:

$$\vec{v}_{41} \cdot \vec{N}_{41} = -\frac{K_{41}^{(n)}}{h_{41}^3 |\overline{41}|} \left(\overline{43} \cdot \overline{41} g_1 + \overline{13} \cdot \overline{14} g_4 \right) + \frac{K_{41}^{(n)}}{h_{41}^3} |\overline{41}| p_3 - (g_1 - g_4) K_{41}^{(t)} \quad (166)$$

A equação (166) é a vazão na face 41 adjacente a elemento $\hat{3}$. Ele recebe sua própria contribuição devido ao fato de que as pressões nos vértices 1 e 4 são conhecidas e não necessitam ser interpoladas. Esta contribuição é adicionada à fila 3, coluna 3 da matriz global $\underline{\underline{M}}$ (veja a Figura 55 a). De outra parte, o termo independente da Eq. (166) é adicionado ao vetor de termo independente $\underline{Y}$ na fila 3 (Figura 55 b).

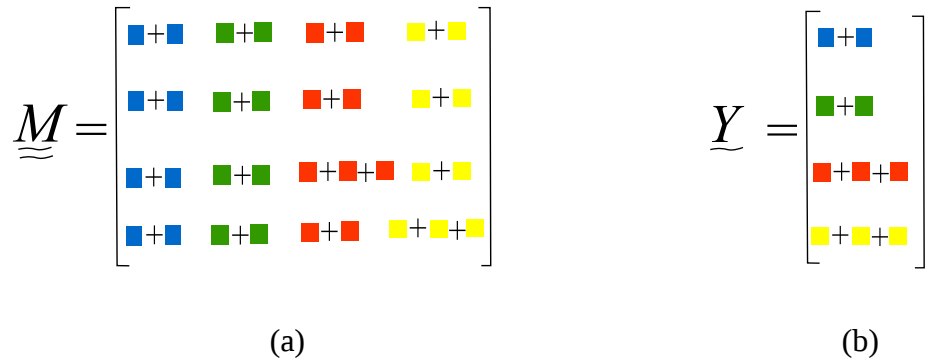


Figura 54: (a) Montagem da matriz global $\underline{\underline{M}}$ e (b) do vetor de termos independentes preenchido nas filas 4 e 3 na segunda e quarta iteração, respectivamente.

Finalmente, obtemos a matriz global depois das especificações da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} K_{51}^{(1)} \left| \overline{51} \right| (1 - D_{51}^{(1)} w_1) + K_{25}^{(1)} \left| \overline{25} \right| (1 + D_{25}^{(1)} w_1) & -K_{51}^{(1)} D_{51}^{(1)} \left| \overline{51} \right| w_2 + K_{25}^{(1)} \left| \overline{25} \right| D_{25}^{(1)} w_2 & \\ -K_{53}^{(1)} \left| \overline{53} \right| D_{53}^{(1)} w_1 + K_{45}^{(1)} \left| \overline{45} \right| D_{45}^{(1)} w_1 & K_{53}^{(1)} \left| \overline{53} \right| (1 - D_{53}^{(1)} w_2) + K_{45}^{(1)} \left| \overline{45} \right| (1 + D_{45}^{(1)} w_2) & \\ K_{15}^{(1)} \left| \overline{15} \right| (-1 + D_{15}^{(1)} w_1) - K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| D_{54}^{(1)} w_1 & K_{15}^{(1)} D_{15}^{(1)} \left| \overline{15} \right| w_2 - K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| (1 + D_{54}^{(1)} w_2) & \\ -K_{52}^{(1)} \left| \overline{52} \right| (1 + D_{52}^{(1)} w_1) + K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| D_{35}^{(1)} w_1 & -K_{52}^{(1)} \left| \overline{52} \right| D_{52}^{(1)} w_2 + K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| (-1 + D_{35}^{(1)} w_2) & \\ \\ -K_{51}^{(1)} \left| \overline{51} \right| (1 + D_{51}^{(1)} w_3) + K_{25}^{(1)} \left| \overline{25} \right| D_{25}^{(1)} w_3 & -K_{51}^{(1)} \left| \overline{51} \right| D_{51}^{(1)} w_4 + K_{25}^{(1)} \left| \overline{25} \right| (-1 + D_{25}^{(1)} w_4) & \\ -K_{53}^{(1)} \left| \overline{53} \right| D_{53}^{(1)} w_3 + K_{45}^{(1)} \left| \overline{45} \right| (-1 + D_{45}^{(1)} w_3) & -K_{53}^{(1)} \left| \overline{53} \right| (1 + D_{53}^{(1)} w_4) + K_{45}^{(1)} \left| \overline{45} \right| D_{45}^{(1)} w_4 & \\ K_{15}^{(1)} \left| \overline{15} \right| (1 + D_{15}^{(1)} w_3) + K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| (1 - D_{54}^{(1)} w_3) + \frac{K_{41}^{(n)}}{h_{41}^3} \left| \overline{41} \right| & K_{15}^{(1)} \left| \overline{15} \right| D_{15}^{(1)} w_4 - K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| D_{54}^{(1)} w_4 & \\ -K_{52}^{(1)} \left| \overline{52} \right| D_{52}^{(1)} w_3 + K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| D_{35}^{(1)} w_3 & K_{52}^{(1)} \left| \overline{52} \right| (1 - D_{52}^{(1)} w_4) + K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| (1 + D_{35}^{(1)} w_4) + \frac{K_{23}^{(n)}}{h_{23}^4} \left| \overline{23} \right| & \end{bmatrix}$$

E o vetor de termos independentes é dado por:

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} -K_{51}^{(1)} \left| \overline{51} \right| D_{51}^{(1)} g_1 + K_{25}^{(1)} \left| \overline{25} \right| D_{25}^{(1)} g_2 \\ -K_{53}^{(1)} \left| \overline{53} \right| D_{53}^{(1)} g_3 + K_{45}^{(1)} \left| \overline{45} \right| D_{45}^{(1)} g_4 \\ K_{15}^{(1)} \left| \overline{15} \right| D_{15}^{(1)} g_1 - K_{54}^{(1)} \left| \overline{54} \right| D_{54}^{(1)} g_4 + \frac{K_{41}^{(n)}}{h_{41}^3} \left(\overline{43} \cdot \overline{41} g_1 + \overline{13} \cdot \overline{14} g_4 \right) + (g_1 - g_4) K_{41}^{(t)} \\ -K_{52}^{(1)} \left| \overline{52} \right| D_{52}^{(1)} g_2 + K_{35}^{(1)} \left| \overline{35} \right| D_{35}^{(1)} g_3 + \frac{K_{23}^{(n)}}{h_{23}^4} \left(\overline{24} \cdot \overline{23} g_3 + \overline{34} \cdot \overline{32} g_2 \right) + (g_3 - g_2) K_{23}^{(t)} \end{bmatrix}$$

Ao utilizar a função *spy* sobre a matriz montada pelo programa MATLAB, obtemos a seguinte figura:

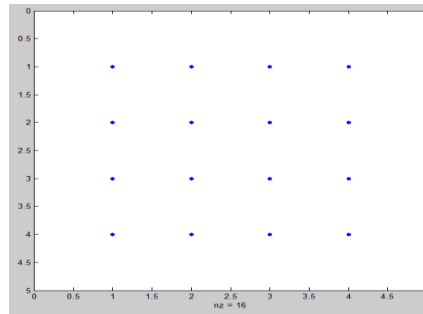


Figura 55: *Spy* para uma malha triangular de quatro elementos.

Como podemos observar na Figura 56, a distribuição de dados é idêntica a distribuição de dados montado a matriz global $\tilde{M}$ a mão. Além disso, as matrizes montadas a mão não garantem a simetria nem são positivamente definidas, porém não garantem ser uma M-Matriz.

BIBLIOGRAFIA

AAVASTSMARK IVAR. An Introduction to Multipoint Flux Approximations for Quadrilateral Grids. Computational Geosciences. - Bergen Norway : May 6, 2002. - Vol. 6. - pp. 405–432.

AAVATSMARK I, T. BARKVE Ø. BøE and MANNSETH T. Discretization on Non-Orthogonal, Quadrilateral Grids for Inhomogeneous, Anisotropic Media. Journal of Computational Physics. - Norway : August 15, 1996. - Vol. 127. - pp. 2-14.

AAVATSMARK I., BARKVE, T., BOE, O. and MANNSETH, T. Discretization on Unstructured Grids For Inhomogeneous, Anisotropic Media, Part I: Derivation of the Methods. SIAM J. Sci. Comput.: Society for Industrial and Applied Mathematics, September 1998(a). - Vol. 19. - pp. 1700-1716.

AAVATSMARK I., BARKVE, T., BOE, O. and MANNSETH, T. Discretization on Unstructured Grids for Inhomogeneous, Anisotropic Media. Part II: Discussion and Numerical Results SIAM J. Sci. Comput. : Society for Industrial and Applied Mathematics, September 1998(b). - Vol. 19. - pp. 1717-1736.

AMAZIANE B. and OSSMANI M. Combined Mixed Finite Element and Finite Volume for Flow and Transport in Porous Media. Monografria del Seminario Matemático García de Galdeano. - 2004. - Vol. 31.

BASKO M., MARUHN J. and TAUSCHWITZ A. An Efficient Cell-Centered Diffusion Scheme for Quadrilateral Grids. Journal of Computational Physics. - 2009. - Vol. 228.

BEAR JACOB Dynamics of Fluids in Porous Media. - New York : Dover Publications, Inc., 1972.

CARVALHO D. K., WILLMERSDORF R. B. and LYRA P. R. M. A Node-Centered Finite Volume Formulation for the Solution of Two-Phase Flows in Non-Homogeneous Porous Media. International Journal for Numerical Methods in Fluids. - Recife : John wiley & Sons, Ltd, March 19, 2006.

CARVALHO, D. K. E. Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de dados por Aresta para a Simulação de Escoamento em Meios Porosos. - Recife, 2005.

CHEN ZHANGXIN The Control Volume Finite Element Methods and their Applications to Multiphase Flow. Networks and Heterogeneous Media. - December 2006. - Vol. 1. - pp. 689-706.

CHEN ZHANGXIN, HUAN GUANREN and MA YUANLE Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia : SIAM, 2006.

CHUNG T. Computational Fluid Dynamics. United States , Cambridge University Press, 2010.

COATS H. K. IMPES Stability: The Stable Step. SPE Reservoir Simulation Symposium, 2001.

COATS K.H. Reservoir Simulation: State of Art. One Petro. Scientific Software-Intercom, 1982.

COURDIERE YVIS, VILA JEAN PAUL and VILLEDIEU PHILIPPE Convergence Rate of a Finite Volume Scheme for a Two Dimensional Convection-Diffusion Problem. Mathematical Modelling and Numerical Analysis. - 1999. - Vol. 33.

CRUMPTON P.I, SHAW G.J. and WARE A.F. Discretisation and Multigrid Solution of Elliptic Equations with Mixed Derivative Terms and Strongly Discontinuous Coefficients. Journal of Computational Physics. - 1995.

DURLOFSKY L. J. A. Triangle Based Mixed Finite Element-Finite Volume Technique for Modeling Two Phase Flow Through Porous Media. Journal of Computational Physics. - 1993. - 252-266 : Vol. 105.

EDWARDS MICHAEL G. Higher-Resolution Hyperbolic-Coupled-Elliptic Flux Continuous CVD Schemes on Structured and Unstructured grids in 2-D. International Journal for Numerical Methods in Fluids. - Swansea : Published online in Wiley InterScience, 2006. - 1059-1077. - Vol. 51.

EDWARDS MICHAEL, ZHENG HONGWEN and LAMINE SADOK Continuous Elliptic and Multi-Dimensional Hyperbolic Darcy-Flux. Computer and Fluids, Swansea : Elsevier, 2010. - Vol. 46.

EDWARDS M. G. and ROGERS C.F. Finite Volume Discretization With Imposed Flux Continuity for the General Tensor Pressure Equation. Computational Geosciences. - USA : [s.n.], 01 01, 1998. - Vol. 2. - pp. 259-292(32).

EIGESTAD G. T. I. AAVASTMARK and ESPEDAL M. Symmetry and M-Matrix Issues for the O-Method Unstructured Grid. Computational Geosciences. - Norway, April 10, 2002. - Vol. 6. - pp. 381-404.

ERTEKIN TRUGAY, ABOU-KASSEM JAMAL H. and KING GREGORY R. Basic Applied Reservoir Simulation. TEXAS : Society of Petroleum Engineers, 2001.

EWING E. RICHARD. The Mathematics of Reservoir Simulation. Philadelphia : SIAM, 1983.

EYMARD R., GALLOUET THIERRY and HERBIN RAPHAËLE. Finite Volume Methods. Paris : Handbook of Numerical Analysis, 2006. - Vol. 7.

FANCHI JHON R. Principles of Applied Reservoir Simulation. Houston, TX : Gulf Professional Publishing, 2001.

FORTUNA ARMANDO de OLIVEIRA. Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos. São Paulo : Universidade de São Paulo, 2000.

GARCIA EDUARDO LÚCIO MENDES. Formulações de Elementos Finitos Bi e Tridimensionais para Simulação em Paralelo de Escoamentos em Reservatórios de Petróleo. Rio de Janeiro, 1997. - Tese de Doutorado em Engenharia Civil - Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

GAO ZHIMING and WU JIMING. A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes. International Journal for Numerical Methods in Fluids. - Beijing : Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, 2010.

GUANGWEI YUAN and ZHIQIANG SHENG. Monotone Finite Volume Schemes for Diffusion Equations. Journal of Computational Physics. Beijing, March 16, 2008. Vol. 227. pp. 6288–6312.

GX LV, LG SHEN and ZJ. SHEN. Numerical Methods for Energy Flux of Diffusion Equation on Unstructured Grids. International journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. Chinese Journal of Computational Physics, 2008. - Vol. 26.

HELMER ANDRÉ FRIIS and EVJE STEINAR. Numerical Treatment of Two-Phase Flow in Capillary Heterogeneous Porous Media by Finite-Volume Approximations. International Journal of Numerical and Modeling. - November 3, 2002. - Vol. 9. - pp. 505–528.

HERBIN RAPHAËLE. Finite Volume Methods for Diffusion Convection Equations on General Meshes. 1996.

HILDEBRAND F. B. Introduction to Analysis Numerical. New York : Dover Publications, INC., 1974.

HIRSCH C. Numerical Computation of Internal and External Flows. Bruselas- Belgium : A Wiley-Interscience Publication, 1994.

HUANG and KAPPEN. A Study of Cell-Centered Finite Volume Methods for Diffusion Equations. Mathematics Research Report. Lawrence, 1998.

HUANG WZ and KAPPEN AM. A Difference Scheme with High Resolution for the Numerical Solution of a Nonlinear. Journal on Numerical Methods and Computer Applications. - 2003. - Vol. 24.

HURTADO VELASCO FERNANDO. Uma Formulação de Volumes Finitos Baseada em Elementos para Simulação do Deslocamento Bifásico Imiscível em Meios Porosos. Florianópolis, 2005.

HYMAN JAMES, SHASHKOV MIKHAIL and STEINBERG STANLY. The Numerical Solution of Diffusion Problems in Strongly Heterogeneous Non-isotropic Materials. Journal of computational physics. New Mexico, 1997. Vol. 132.

INGRAM ROSS and WHEELER MARY F. A Multipoint Flux Mixed Finite Element Method on Hexahedra. SIAM Journal Numerical Analysis. - 2010. - Vol. 48. - pp. 1281-1312.

JIMING WU, ZIHUAN DAI, ZHIMING GAO and YUAN GUANGWEI. Linearity Preserving Nine-Point Schemes for Diffusion Equation on Distorted Quadrilateral Meshes. Journal of Computational Physics. Ed. Elsevier. Beijing, PR China, 15 January 2009. Vol. 229. - pp. 3382-3401.

JISHENG KOU and SHUYU SUN. A New Treatment of Capillarity to Improve the Stability of IMPES. Computer and Fluids. - 2010. - Vol. 39.

KEILEGAVLEN EIRIK and AAVATSMARK IVAR. Monotonicity for MPFA Methods on Triangular Grids. Comput Geosci. Springer Science+Business Media, 2011. - Vol. 15. - pp. 3-16.

KHALID AZIZ and ANTONÍN SETTARI. Petroleum Reservoir Simulation. - Canada : Applied Science Publishers LTD, 1979.

KONSTANTIN BRENNER Hybrid Finite Volume Scheme for Two Phase Flow in Porous Media. Laboratoire de Mathématiques d'Orsay. - 2011. - Vol. version 1.

KOU JISHENG and SUN SHUYU A New Treatment of Capillarity to Improve the Stability of IMPES Two-Phase Flow Formulation. 2010.

KUZMIN and DMITRI Linearity Preserving Flux Correction and Convergence Acceleration for Constrained Galerkin Schemes. 2011.

LARRY C. YOUNG A Finite Element Method for Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers. February 1981. - Vol. 21. - pp. 115-128.

LE POTIER CRISTOPHE Schema volumes finis monotone pour des operateurs de diffusion fortement anisotropies sur des maillages de triangle nonstructures. C. C. Acad. Sci. 2005.

LEVEQUE RANDALL J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. New York, Cambridge University Press, 2004.

LIPNIKOV K., SHASHKOV M., SVYATSKIY D. and VASSILEVSKI YU. Monotone Finite Volume Scheme for Diffusion Equations on Unstructured Triangular and Shape-Regular Polygonal Meshes. Journal of Computational Physics. San Diego, USA : Academia Press Profesional Inc., Novembro 2007. - Vol. 227. - pp. 492-512.

LIPNIKOV K., D. SVYATSKIY and Y. VASSILEVSKI Interpolation-Free Monotone Finite Volume Method for Diffusion Equations on Polygonal Meshes. Journal of Computational Physics. Moscow -Russia, November 1, 2008. - Vol. 228. - pp. 703–716.

LOULA A.F.D, ROCHINHA F. A. and MURAD M. A. Higher Order Gradient Post-Processing for Second Order Elliptic Problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering . - 1995. - Vol. 128. - pp. 361-381.

Lv GX, SHEN LJ and SHEN ZJ Numerical Methods for Energy Flux of Diffusion Equation on Unstructured Grids. Journal of Computational Physics. - 2007. - Vol. 24(4).

MALISKA R. CLOVIS Transferencia De Calor E Mecanica Dos Fluidos. LTC-GRUPO GEN, 2004.

MATRINCE SEBASTIEN F., JUANES RUBEN and TCHELEPI HAMDI A. A New Mixed Finite Element on Hexahedra, its Equivalent Finite Difference Method, and Convergence of Multipoint Flux Approximations in 3D. 8th. World Congress on Computational Mechanics. Venice Italy, July 1-5, 2008. - p. Abstract. - 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.

MORTON K.W. Numerical Solution of Convection Diffusion Problems. London : Champman and Hall, 1996.

NORDBOTTEN J. M. and T. EIGESTAD G. Discretization On Quadrilateral Grids With Improved Monotonicity Properties. Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 203. - pp. 744-760.

OHLBERGER M. Mixed Finite Element - Finite Volume Methods for Two Phase Flow in Porous Media.

PARIS DE FERRER MAGDALENA. Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petroliferas. Maracaibo, Venezuela : Astro Data S.A., 2001. - ISBN 980-296-792-0.

PEREIRA BRABO M. ANDRÉ. Simulações Computacionais em Engenharia. Revista MEMO, 2009. - 6.

QIAN-YONG CHEN, WAN JING, YANG YAHAN and MIFFLIN, RICK T. Enriched Multi-Point Flux Approximation for General. Journal of Computational Physics. January 10, 2008. - Vol. 227. - pp. 1701-1721.

ROSA A. J., CARVALHO R. de SOUZA and XAVIER J. A. Engenharia de Reservatórios de Petróleo. - Rio de Janeiro : Interciencia, 2006.

SHEN JIAN. Mixed Finite Element Methods on Distorted Rectangular Grids. Computer Science Department. - Texas, 1994.

SILVA ROGERIO SOARES DA. Simulação de Escoamentos Bifásico Oleo-Água em Reservatórios de Petróleo Usando Computadores Parellela de Memória Distribuída. Recife, 2008.

STEFANO FERRARIS, IVAN BEVILACQUA, DAVIDE CANONE and PROGNANT DAVIDE. The Finite Volume Formulation for 2-D Second-Order Elliptic Problems with Discontinuous Diffusion/Dispersion Coefficients. Mathematical Problems in Engineering / ed. Wang Moran. - Grugliasco, 2012. - p. 23 pg..

TADA MAURICIO PEREIRA. Análise de Esquemas Numéricos de Cinco e Nove Pontos para Malhas tipo Corner-Point. - Florianópolis, 2009.

TOLEDO ELSON MAGALHÃES. Novas Formulações de Elementos Finitos Mistos. Rio de Janeiro, 1990. - Tese Doutorado Universidade Federal de Rio de Janeiro.

WHEELER MARY F. and YOTOV IVAN. A Multipoint Flux Mixed Finite Element Method. SIAM Journal Numerical Analysis. Austin, April 6, 2006. Vol. 44. - pp. 2082-2106.

WHEELER MARY, XUE GUANGRI and YOTOV IVAN. A Multipoint Flux Mixed Finite Element Method on Distorted Quadrilaterals and Hexahedra. Journal Numerisch Mathematik. - Secaucus, NJ, USA. Springer-Verlag New York, Inc., May 1, 2012. - Vol. 121. - pp. 165-204.

WU JIMING and GAO ZHIMING. A nine-point scheme with explicit weights for diffusion equations on distorted meshes. Applied Numerical Mathematics. - 2011.

WU JM. Linearity Exact Method and the Difference Scheme for Diffusion Equation on Quadrilateral Meshes. Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics. Beijing, China, 2005.

WU JM, FU S. W. and SHEN L. J. A Difference Scheme with High Resolution for the Numerical Solution of a Nonlinear Diffusion Equation. Journal on Numerical Methods and Computer Applications. - 2003. - Vol. 24.