



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Itacira Ataíde Silva

**Problema de Apolônio alguns números característicos das
cônicas planas.**

Recife

2012



Itacira Ataíde Silva

Problema de Apolônio alguns números característicos das
cônicas planas.

*Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática da UFPE, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.*

Orientador: André Luiz Meireles Araujo

Recife

2012

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jonas Lucas Vieira, CRB 4-1204

Silva, Itacira Ataíde.

Problema de Apolônio: alguns números característicos das cônicas planas/ Itacira Ataíde Silva. – Recife: O Autor, 2012.

i, 59 p.: fig., tab.

Orientador: André Luiz Meireles Araujo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2012.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Construções geométricas. 2. Modelos geométricos. 3. Geometria algébrica. I. Araujo, André Luiz Meireles (orientador). II. Título.

510

(22. ed.)

MEI 2012

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: _____

André Luiz Meireles Araujo, *UFPE*
Orientador

Jorge Nicolás Caro Montoya, *UFPE*

Fernando Antonio Xavier de Souza *UFPB*

**PROBLEMA DE APOLÔNIO ALGUNS NÚMEROS
CARACTERÍSTICOS DAS CÔNICAS PLANAS**

POR

Itacira Ataíde Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Agosto – 2012

Agradecimentos

- Ao meu mestre e orientador, André Meireles, pela atenção e dedicação com que conduziu minha orientação ao longo da elaboração desta dissertação.
- Ao meu marido, Anderson Murilo, e à minha família pelo apoio e compreensão.
- Aos meus amigos e em especial aos meus companheiros de sala, Wanderson, Fábio, Filipe e Daniel, pelas preocupações e felicidades compartilhadas.
- Ao departamento de matemática e em especial a Tânia Maranhão pela paciência e atenção.

Resumo

Neste trabalho, faremos uma construção geométrica de soluções para o Problema de Apolônio e usaremos algumas ferramentas da Geometria Enumerativa para resolver o Problema de Steiner.

Palavras-Chave: Geometria Enumerativa, Problema de Apolônio, Problema de Steiner, Anel de Chow.

Abstract

In this work we construct geometrical solutions of Apollonius Problem and we use some tools from Enumerative Geometry to solve the Steiner Problem.

Key-Words: Enumerative geometry, Apollonius problem, Steiner Problem, Chow ring.

Sumário

1	Introdução e Motivação	1
1.1	Problema de Steiner	1
1.2	Problema de Apolonio	2
2	Uma construção das soluções do Problema de Apolônio com régua e compasso	11
3	Uma visão algébrica do Problema de Apolônio	31
4	Espaço de parâmetros para cônicas planas	38
4.1	Dualidade em $\mathbb{P}^2$	44
4.2	Veronese, Blow up e Cônicas	47
4.3	O anel de Chow	51
4.4	Problema de Steiner	53
	Apêndice	55
4.5	O Espaço Projetivo	55
4.6	O Anel de Chow	56

Capítulo 1

Introdução e Motivação

1.1 Problema de Steiner

Em 1848, Jacob Steiner, professor de geometria na Universidade de Berlim, colocou o seguinte problema: Dadas cinco cônicas no plano, existem cônicas que são tangentes a todas as cinco? Em caso afirmativo, quantas existem?

A resposta original de Steiner para o seu problema, 7776, estava incorreta. Ele provavelmente cometeu o erro de supor que a intersecção dos cinco subconjuntos correspondentes as cinco cônicas dadas era finita. Na verdade, ela não é finita. A sub-variedade formada pelas cônicas de retas duplas, ou seja, cujas equações é o quadrado de uma equação linear, é o seu componente infinito. Se nós pudermos remover essas, vamos obter um número finito de soluções correspondentes a elipses, hipérboles, parábolas e suas degenerações. O primeiro a remover com êxito as retas duplas e contar as soluções restantes foi o Francês Jonquieres, que em 1859 deu a resposta correta para o problema de Steiner, 3264. Mais tarde, Michel Chasles desenvolveu um método para encontrar a resposta 3264 e resolver outros problemas semelhantes. Na verdade o Problema de Steiner é uma generalização de um outro problema muito mais antigo conhecido como o Problema de Apolônio, que consiste da construção de circunferências tangentes a três circunferências em posição geral, posteriormente surgiram outras questões em relação ao Problema de Apolônio como, quantas soluções existem?

1.2 Problema de Apolonio

Apolônio foi um matemático e astrônomo grego que nasceu em Perga em 262 a.C. e faleceu por volta de 190 a.C., ele ficou conhecido como "O Grande Geómetra", tendo deixado muitas obras, que em muito contribuíram para o desenvolvimento da matemática, apesar de muitos desses trabalhos terem se perdido ao longo dos anos. Ainda jovem, Apolônio deixou Perga em direção a Alexandria, onde estudou sob a orientação dos seguidores de Euclides, tendo mais tarde ensinado na Universidade de Alexandria.

Apesar da produtividade científica, apenas dois dos muitos tratados de Apolônio foram em grande parte preservados (As cônicas e Dividir Segundo uma Razão) as outras obras se perderam ao longo do tempo (Tangências, Inclinações, Lugares Planos, Comparação entre o Dodecaedro e o Icosaedro, entre outras), sendo destes As Cônicas, o mais conhecido. O seu trabalho sobre cônicas foi dividido em oito livros, sendo que apenas os quatro primeiros ainda existem em grego. Sendo os três seguintes traduzidos por um matemático árabe, Thabit ibn Qurra, preservando assim essa versão. E o oitavo e último livro foi perdido.

No primeiro livro Apolônio começa por mostrar que, de um único cone intersectado com um plano, podem ser obtidas os três tipos de secções cônicas bastando para tal variar a inclinação do plano, são estudadas também relações sobre o diâmetro e a tangente. No segundo livro são investigadas as relações entre hipérboles e suas assíntotas, mostrando também como traçar tangentes a uma cônica usando a teoria da divisão harmônica. No terceiro livro Apolônio propõe importantes teoremas que, segundo ele, completariam o que faltava em Os Elementos de Euclides, sobre o estudo dos lugares geométricos com três ou quatro retas. No quarto livro são estudados o número de pontos em que uma secção cônica pode intersectar uma curva. No quinto livro são estudadas as tangentes e normais de uma curva. No sexto livro são estudadas as igualdades e semelhança de cônicas, considerando que duas cônicas são semelhantes se as ordenadas, quando traçadas a distância proporcional do vértice, são respectivamente proporcionais às abscissas correspondentes. No sétimo livro é retomado o estudo dos diâmetros, apresentando muitos resultados novos.

Sua obra foi admirada por muitos matemáticos, tendo em vista a enorme contri-

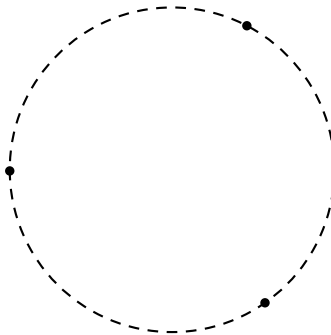
buição dada à Geometria, após Os Elementos de Euclides.

O Problema

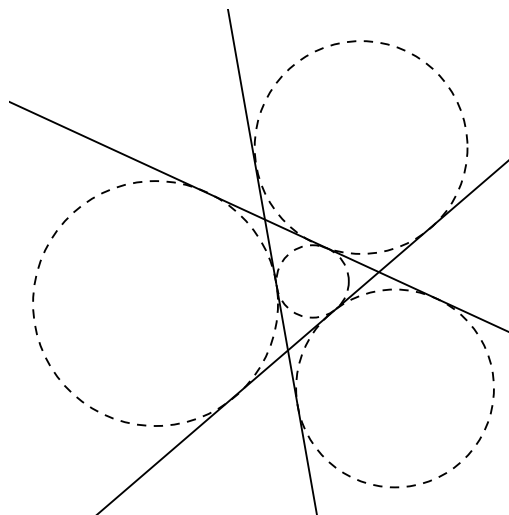
Apolônio apresentou um problema que viria a ser conhecido por seu nome: Dados três objetos, cada um podendo ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar uma circunferência que é tangente a todos esses três objetos, neste caso dizemos que uma circunferência é tangente a um ponto se ela passa por esse ponto. Podemos dividir esse problema em dez casos, desde o mais simples, o caso de três pontos, até o mais complicado, o caso de três circunferências. Este último foi considerado um desafio para os matemáticos dos séculos XVI e XVII, tendo sido resolvido por Adriaan van Roomen no fim do século XVI, usando intersecção de cônicas. Pouco tempo depois, o matemático François Viète resolveu este problema utilizando apenas régua e compasso.

Os dez casos do Problema de Apolônio

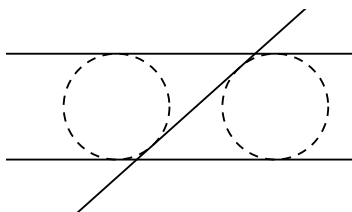
1. **Três pontos distintos:** Podemos visualizar uma única solução nesse caso:



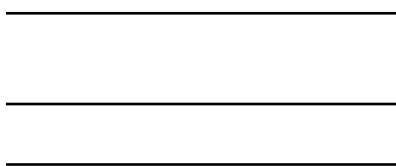
2. **Três retas distintas:** Nesse caso podemos ter quatro situações, ou essas três retas são duas a duas concorrentes, mas não concorrem em um único ponto, nesse caso conseguimos visualizar quatro soluções:



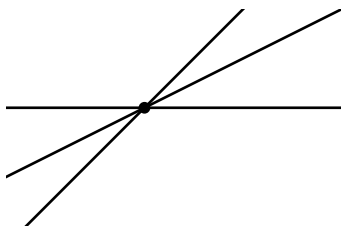
ou duas destas retas são paralelas entre si, mas não são paralelas à terceira reta, nesse caso conseguimos visualizar duas soluções:



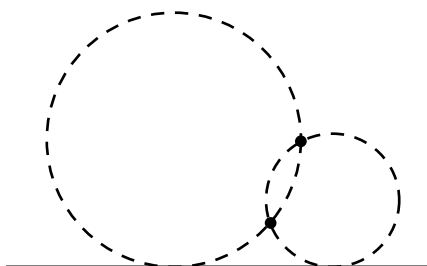
ou as três retas são paralelas, nesse caso não conseguimos visualizar nenhuma solução:



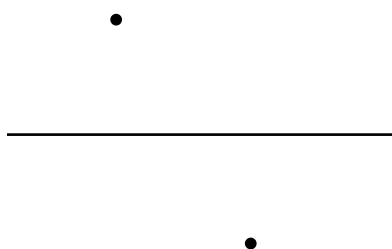
ou essas três retas são concorrentes em um único ponto, nesse caso também não conseguimos visualizar nenhuma solução:



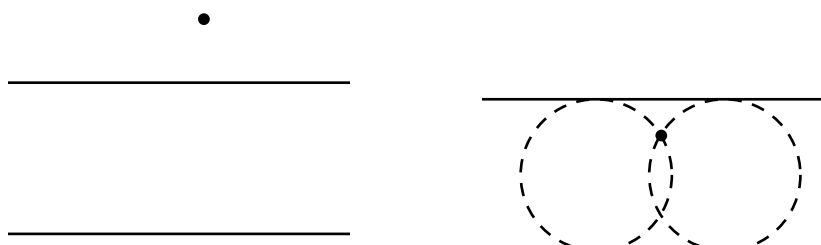
3. **Uma reta e dois pontos não pertencentes a essa reta:** Nesse caso temos duas situações, ou os dois pontos pertencem ao mesmo dos dois semi-plano determinados pela reta, podemos visualizar duas soluções nesse caso:



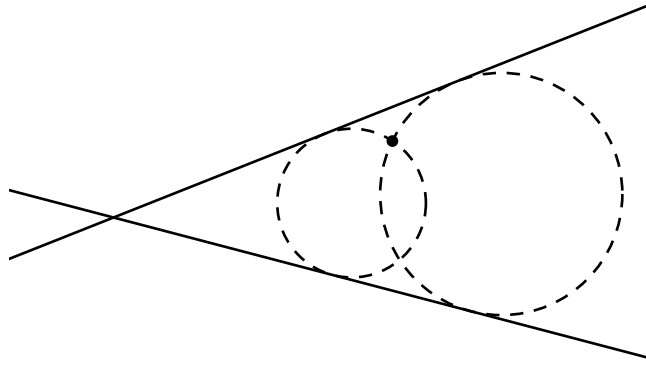
ou os pontos pertencem a semi-planos distintos, nesse caso não conseguimos visualizar nenhuma solução:



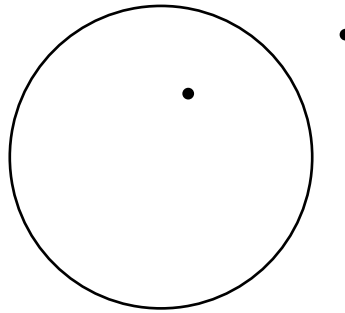
4. **Duas retas e um ponto não pertencente a nenhuma dessas retas:** Nesse caso podemos ter duas situações, ou as retas são paralelas, nesse caso podemos visualizar, dependendo da posição do ponto em relação às retas, uma ou nenhuma solução como ilustrado na figura abaixo::



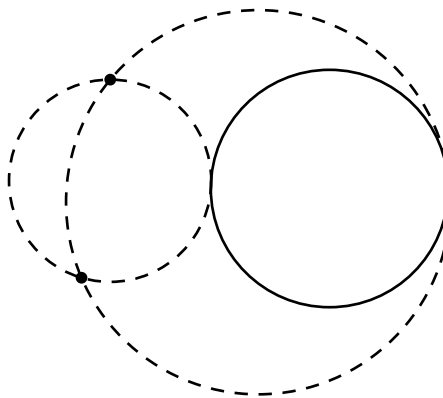
ou as retas são concorrentes, nesse caso podemos visualizar duas soluções:



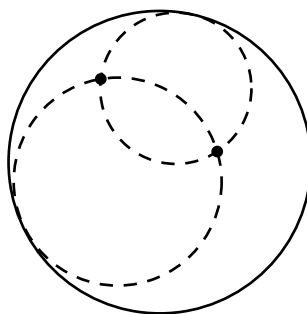
5. **Uma circunferência e dois pontos não pertencentes a essa circunferência:** Nesse caso podemos ter três situações, ou um ponto é interno à circunferência e o outro é externo, nesse caso não conseguimos visualizar nenhuma solução:



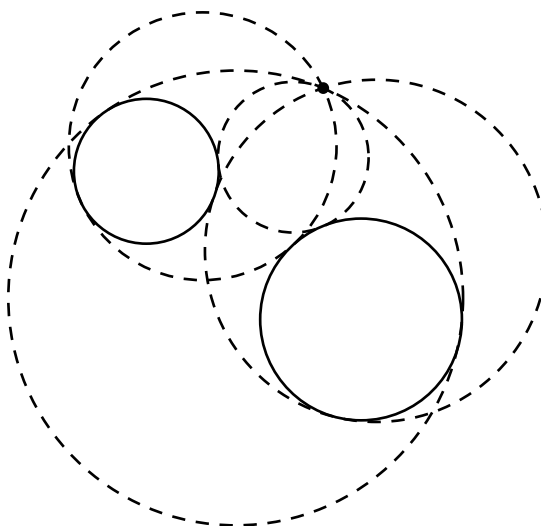
ou os dois pontos são externos à circunferência, nesse caso conseguimos visualizar duas soluções:



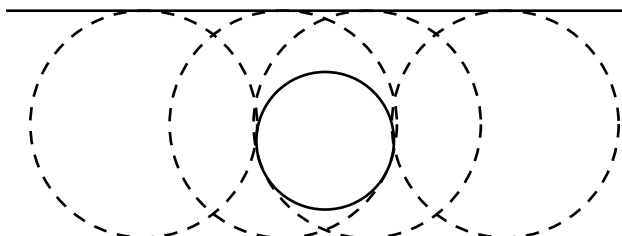
ou os dois pontos são internos à circunferência, nesse caso conseguimos visualizar duas soluções:



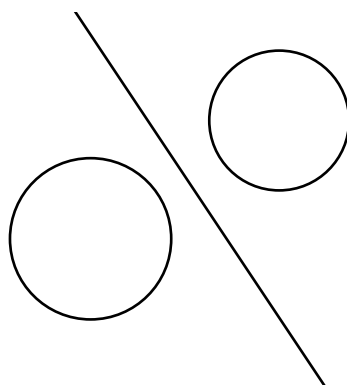
6. **Duas circunferências e um ponto:** Nesse caso temos várias possibilidades, uma delas é a ilustrada abaixo, na qual conseguimos visualizar quatro soluções:



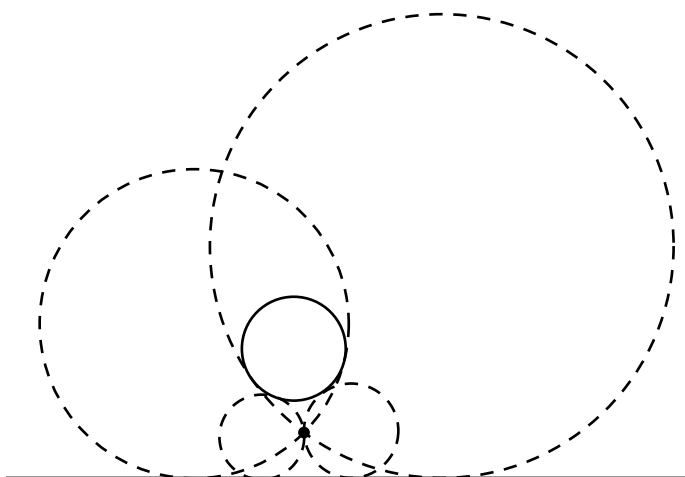
7. **Duas retas e uma circunferência:** Nesse caso temos várias possibilidades, uma delas é a ilustrada abaixo, na qual conseguimos visualizar quatro soluções:



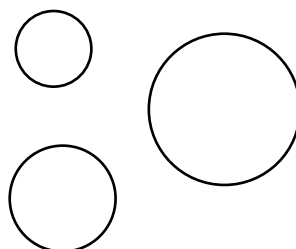
8. **Duas circunferências e uma reta:** Nesse caso temos várias possibilidades, uma delas é a ilustrada abaixo, na qual não conseguimos visualizar nenhuma solução:



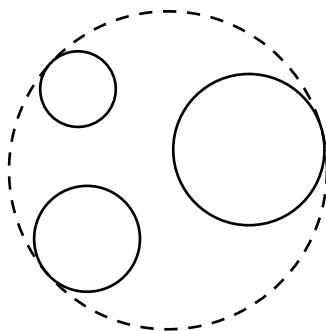
9. **Um ponto, uma reta e uma circunferência:** Nesse caso temos várias possibilidades, uma delas é a ilustrada abaixo, na qual conseguimos visualizar quatro soluções:



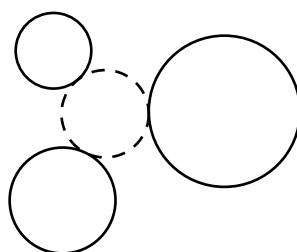
10. **Três circunferências:** Nesse caso temos várias possibilidades, uma delas é a ilustrada abaixo, na qual conseguimos visualizar oito soluções:



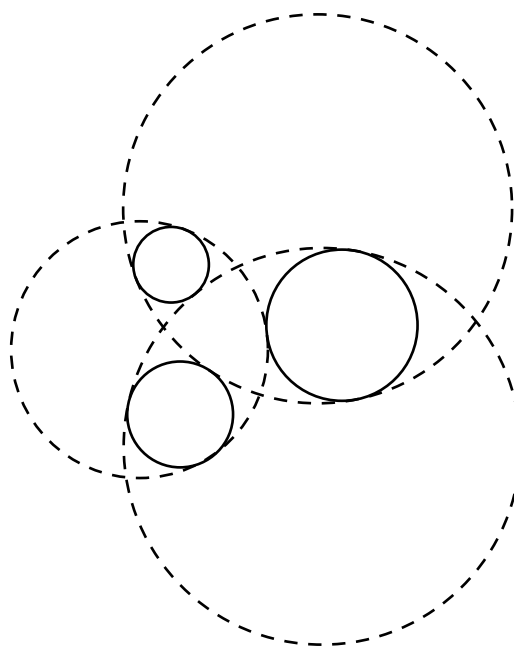
Nesse caso temos, uma circunferência tangente interiormente às três circunferências:



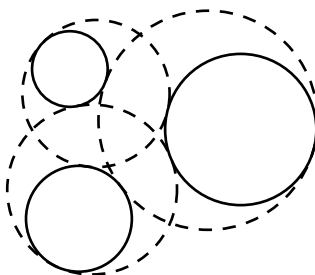
uma circunferência tangente exteriormente às três circunferências:



três circunferências tangentes interiormente a duas e exteriormente a uma das circunferências dadas:



três circunferências tangentes interiormente a uma e exteriormente a duas das circunferências dadas:



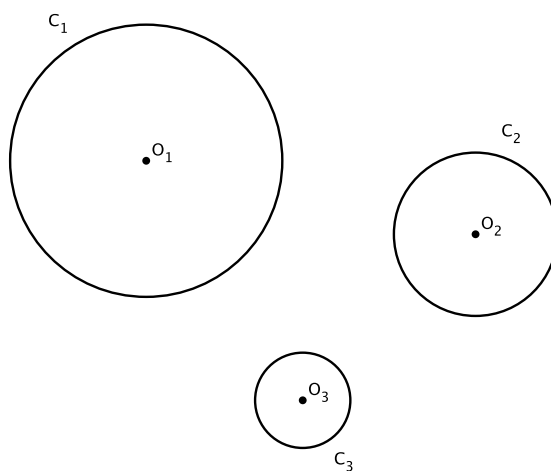
Observe que nos casos acima, a quantidade de soluções que conseguimos visualizar depende da posição relativa entre os objetos. Mas será que se considerarmos também as soluções que não conseguimos visualizar geometricamente, como por exemplo uma circunferência cujo raio seja um número complexo, encontraremos um número fixo de soluções?

Capítulo 2

Uma construção das soluções do Problema de Apolônio com régua e compasso

Neste capítulo iremos apresentar como produzir, de um modo geral, soluções do problema de Apolônio no caso em que os três objetos são circunferências externas entre si e sem pontos em comum, o leitor interessado pode consultar [8] e [9].

Sejam C_1, C_2 e C_3 circunferências, onde cada C_i tem centro no ponto O_i e raio r_i .



Para isso, precisamos definir alguns elementos.

Definição 2.1. Considere uma circunferência $C(O; R)$ e um ponto P qualquer. A potência de P em relação a C é dada por $Pot_C(P)$, onde $|Pot_C(P)| = \|\vec{PA}\| \cdot \|\vec{PB}\|$, onde A e B são os pontos de intersecção de uma reta secante à C que passa por P . No caso em que a reta que passa por P é tangente à circunferência C no ponto T , $Pot_C(P) = \|\vec{PT}\|^2$. Se o ponto P é interno à circunferência C então $Pot_C(P) < 0$. Se o ponto P é externo à circunferência C tomamos $Pot_C(P) > 0$. E se o ponto P pertence à circunferência C então $Pot_C(P) = 0$. Observe as figuras abaixo:

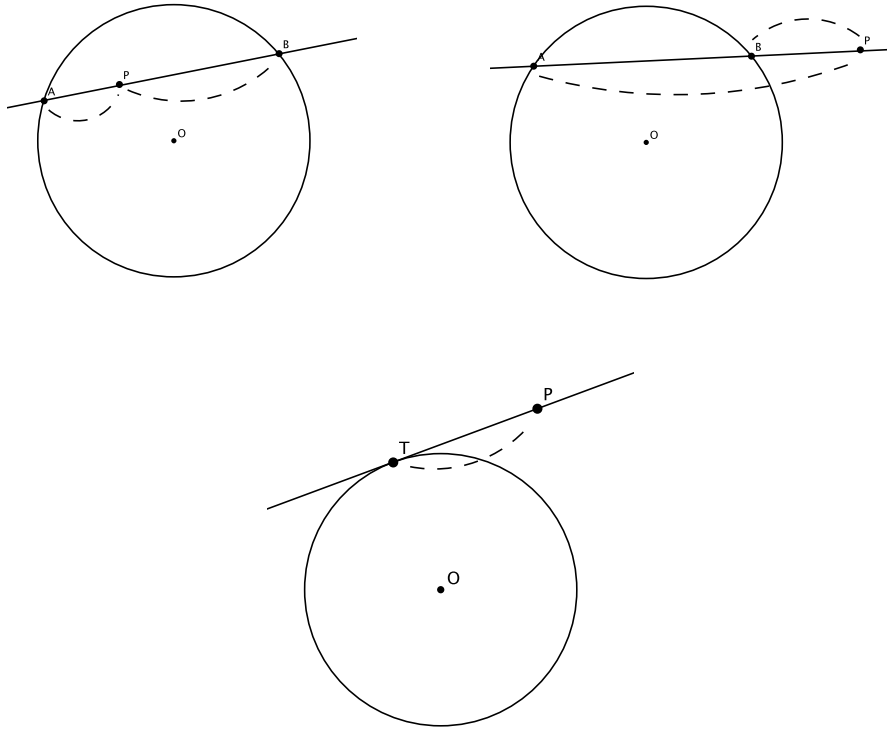


Figura 2.1: Potência de P em relação a C .

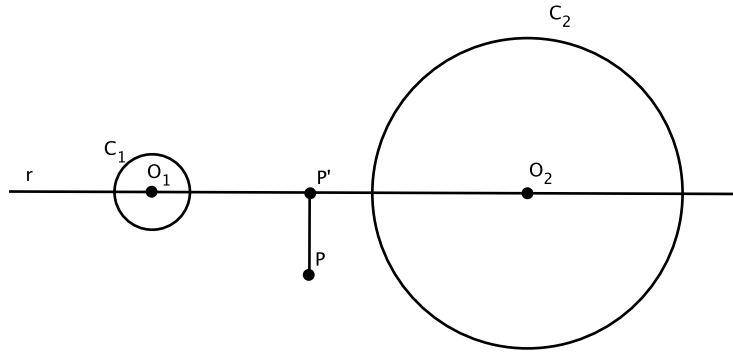
Proposição 2.1. A potência de um ponto em relação a uma circunferência dada está bem definida, ou seja, $Pot_C(P)$ não depende da reta escolhida.

Demonstração. Ver [8]

Definição 2.2. Sejam C_1 e C_2 duas circunferências não concêntricas, chamamos de eixo radical o lugar geométrico dos pontos que têm igual potência em relação a C_1 e C_2

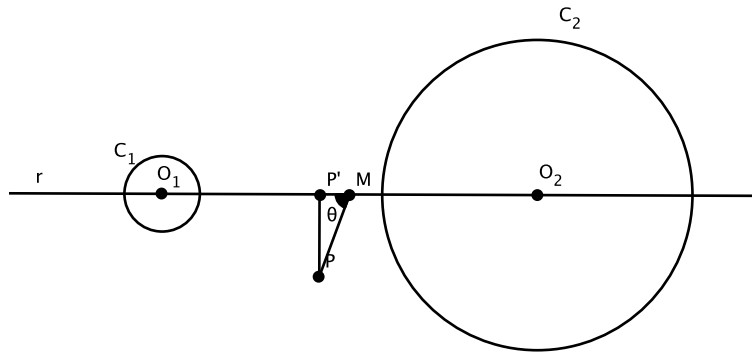
Proposição 2.2. *O eixo radical de duas circunferências fixadas é uma reta perpendicular à reta que passa pelos centros dessas circunferências.*

Demonstração. De fato, sejam $C_1(O_1, R_1)$ e $C_2(O_2, R_2)$ duas circunferências. Seja r a reta que passa por O_1 e O_2 . Seja $P \notin r$ um ponto do eixo radical dessas circunferências, ou seja, $Pot_{C_1}(P) = Pot_{C_2}(P)$. Seja P' a projeção de P sobre r , observe a figura abaixo.



$$\text{Logo, } Pot_{C_1}(P) = Pot_{C_2}(P) \Rightarrow (PO_1 - R_1) \cdot (PO_1 + R_1) = (PO_2 - R_2) \cdot (PO_2 + R_2) \Rightarrow PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$$

Sejam M o ponto médio de O_1O_2 , $PM = m$ e θ o ângulo $\widehat{PMP'}$, como mostra a figura abaixo.



Observando os triângulos PMO_1 e PMO_2 e aplicando a lei dos cossenos, obtemos $PO_1^2 = m^2 + (\frac{O_1O_2}{2})^2 + 2m(\frac{O_1O_2}{2})\cos(\theta)$ e $PO_2^2 = m^2 + (\frac{O_1O_2}{2})^2 - 2m(\frac{O_1O_2}{2})\cos(\theta)$,

dessas equações concluímos que, como: $PO_1^2 - PO_2^2 = 2mO_1O_2 \cos(\theta)$ e $R_1^2 - R_2^2 = 2mO_1O_2 \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2mO_1O_2}$ e $\cos(\theta) = \frac{MP'}{MP} \Rightarrow MP' = \cos(\theta) \cdot MP = (\frac{R_1^2 - R_2^2}{2mO_1O_2})m = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2}$ ou seja: $PO_1^2 - PO_2^2 = 2mO_1O_2 \cos \theta$. Portanto, $MP' = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2}$ é constante, logo o eixo radical de C_1 e C_2 é a reta perpendicular a O_1O_2 passando por P . ■

Observação 2.1. Quando duas circunferências são secantes ou tangentes, encontrar o eixo radical fica trivial, veja a figura abaixo:

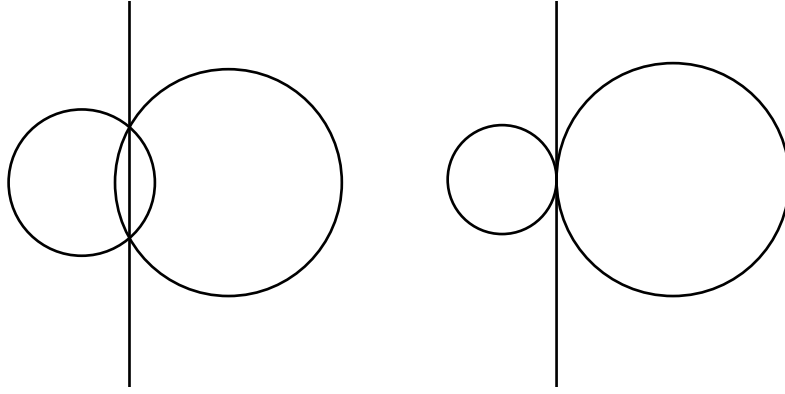


Figura 2.2: Eixo radical de circunferências secantes e tangentes.

Observe que, para construir o eixo radical na demonstração da proposição anterior, precisamos de um ponto P que pertence a esse eixo. Para encontrar esse ponto, considere C' uma circunferência qualquer secante a C_1 e C_2 . Suponha que $P_1, Q_1 \in C' \cap C_1$ e $P_2, Q_2 \in C' \cap C_2$, observe que o eixo radical, r_1 , de C_1 e C' é a reta que passa por P_1 e Q_1 , e que o eixo radical, r_2 , de C_2 e C' é a reta que passa por P_2 e Q_2 . Logo, o ponto $P \in r_1 \cap r_2$ pertence ao eixo radical de C_1 e C_2 .

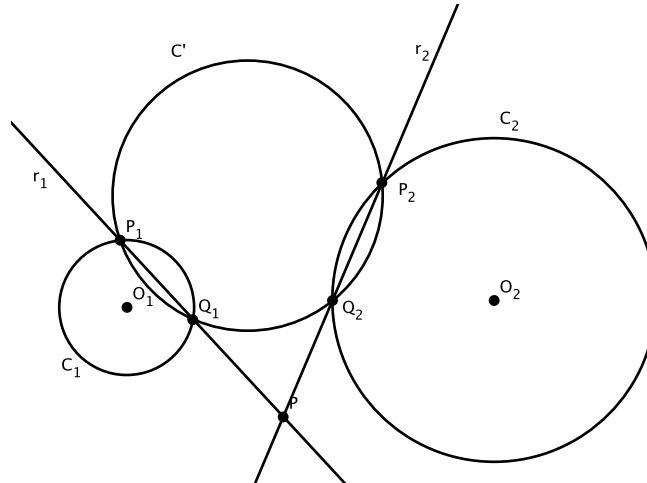


Figura 2.3: Eixos radicais de duas circunferências quaisquer.

Definição 2.3. Sejam C_1, C_2 e C_3 três circunferências não concêntricas. Então os eixos radicais dessas circunferências tomados dois a dois são paralelos ou concorrentes. Quando são concorrentes, a interseção desses eixos é um único ponto P do plano tal que $Pot_{C_1}(P) = Pot_{C_2}(P) = Pot_{C_3}(P)$. Chamamos este ponto P de centro radical das circunferências C_1, C_2 e C_3 .

Observe que, pela Proposição 2.2, se os centros das três circunferências não estão alinhados então o centro radical consiste em um ponto bem definido.

Definição 2.4. Dados um escalar k e dois pontos distintos O e P , chamamos o ponto P' , tal que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, de homotético do ponto P . Fixados um escalar k e um ponto O a transformação geométrica que leva um ponto P no ponto P' é chamada homotetia direta se $k > 0$ e de homotetia inversa se $k < 0$, e o ponto O fixado é dito centro de homotetia.

Definição 2.5. Uma reta que passa por dois centros de homotetia é chamada de eixo de homotetias, se esses dois centros são de homotetia direta chamamos de eixo de homotetias diretas, se são dois centros de homotetia inversa chamamos de eixo de homotetias inversas.

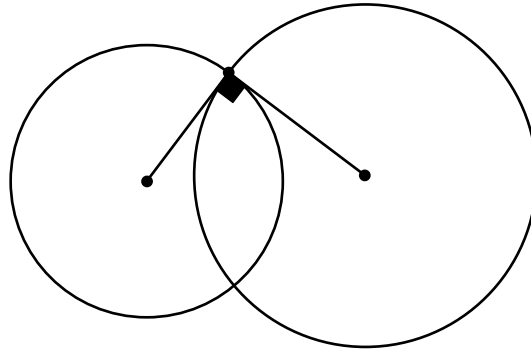
Proposição 2.3. *Uma homotetia transforma uma circunferência em uma circunferência.*

Demonstração. Ver [8].

Definição 2.6. Dizemos que um ponto P é o centro de homotetia de duas circunferências se uma delas é levada na outra por uma homotetia de centro P .

Proposição 2.4. *Duas circunferências C_1 e C_2 com centros e raios distintos possuem dois centros de homotetia.*

Definição 2.7. Dizemos que duas circunferências são ortogonais se seus raios são perpendiculares no ponto de intersecção.



Definição 2.8. Sejam C uma circunferência de centro O e P um ponto externo à C . Seja $\overline{AP}$ um segmento de reta passando por P e tangente a C no ponto A . O ponto obtido pela intersecção da reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ que passa por A é chamado inverso do ponto P , denotaremos esse ponto por P' , veja a figura (2.4) abaixo. Se o ponto P for interno à C , com $P \neq O$, então pegamos um segmento de reta perpendicular à $\overline{OP}$ passando por P que intercepta C em um ponto B . Neste caso P' é o ponto de intersecção da reta tangente a C no ponto B com o segmento $\overline{OP}$, observe a figura (2.5) abaixo. Fixada uma circunferência a transformação geométrica que leva um ponto P no ponto P' é chamada inversão, e a circunferência fixada é dita circunferência de inversão. Se $P \in C$ tomamos $P = P'$.

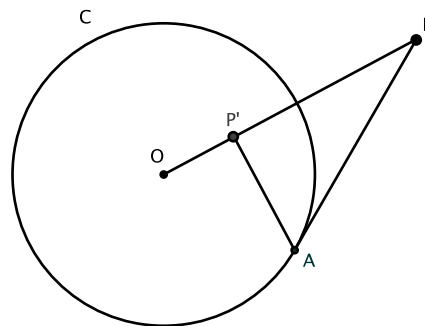


Figura 2.4

de dois eixos radiais. Observe também que a potência do centro radial, P , é positiva, logo ele é centro de uma circunferência $C(O, r)$, ortogonal às circunferências C_1, C_2 e C_3 . Se tomarmos C como circunferência de inversão, então $C' = C, C'_1 = C_1, C'_2 = C_2$ e $C'_3 = C_3$.

Suponha que S seja uma das soluções do Problema de Apolônio envolvendo as circunferências C_1, C_2 e C_3 e considere C como a circunferência de inversão, como foi observado acima a inversão mantém C_1, C_2 e C_3 , logo quatro soluções desse problema são levadas pela inversão nas outras quatro, ou seja, as oito soluções são duas a duas inversas. Como temos três circunferências de centros e raios distintos, então existem seis centros de homotetia, os quais determinam quatro eixos de homotetia. Um deles é um eixo de homotetias diretas e os outros três são eixos de homotetias inversas.

Definição 2.9. Fixadas uma reta r e uma circunferência C , chamamos de feixe de circunferências rC ao conjunto de circunferências que admitem, com C , a reta r como eixo radical.

Lema 2.1. Duas circunferências não concêntricas C_1 e C_2 determinam juntamente com seu eixo radical um feixe de circunferências, o qual denotaremos por C_1C_2 .

Proposição 2.6. Considere três circunferências C_1, C_2 e C . Se C inverte C_1 em C_2 , então C pertence ao feixe de circunferências C_1C_2

Demonstração. Ver [8].

Sejam GH, FG, EH e FI os eixos de homotetia determinados por C_1, C_2 e C , logo pelo resultado acima, temos que C pertence aos quatro feixes de circunferências. Portanto, C e cada um dos quatro eixos determinam um feixe de circunferências, tal que cada feixe contém duas soluções do problema.

Ou seja, os passos para a construção das soluções são:

- Primeiro passo: Encontramos o centro radical de C_1, C_2 e C_3 , vamos chama-lo de P , para isso precisamos de dois dos três eixos radicais de C_1, C_2 e C_3 . Observe as figuras abaixo:

Para as circunferências C_1 e C_2 consideramos o eixo radical r_1 .

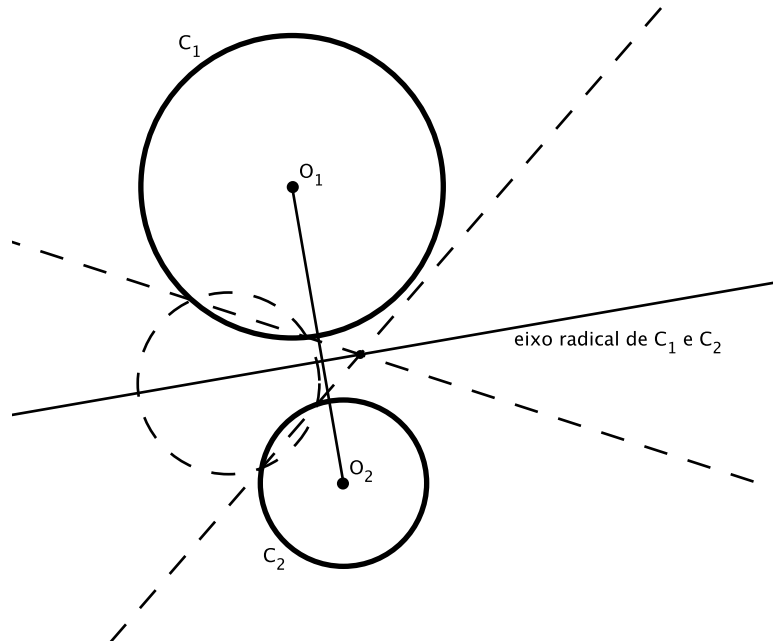
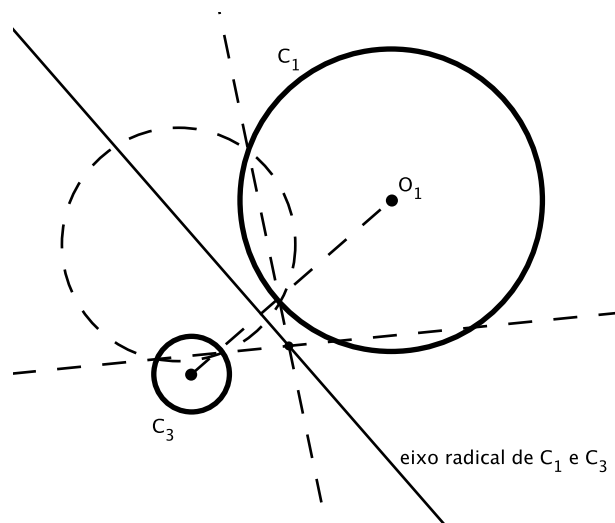


Figura 2.6: Eixo radical de C_1 e C_2 .

Para as circunferências C_1 e C_3 consideramos o eixo radical r_2 .



Eixo radical de C_1 e C_3 .

Então, obtemos o ponto $P = r_1 \cap r_2$

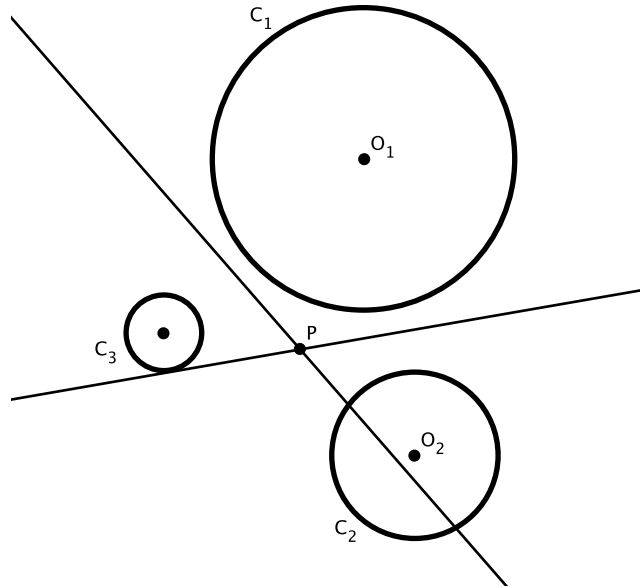


Figura 2.7: Ponto de intersecção entre os eixo radicais.

- Segundo passo: Construimos a circunferência C , ortogonal a C_1, C_2 e C_3 como mostra a figura abaixo:

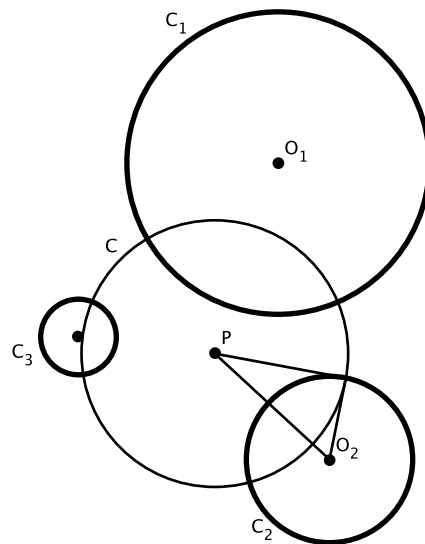


Figura 2.8: Circunferência C ortogonal a C_1, C_2 e C_3 .

- Terceiro passo: Construimos os centros de homotetias como mostra as figuras abaixo:

Primeiramente vamos construir os centros de homotetias de C_1 e C_2 . Começamos construindo a reta, s , que passa por O_1 e O_2 , um raio, s_1 , de C_1 e um raio, s_2 , de C_2 , sendo esses raios paralelos entre si.

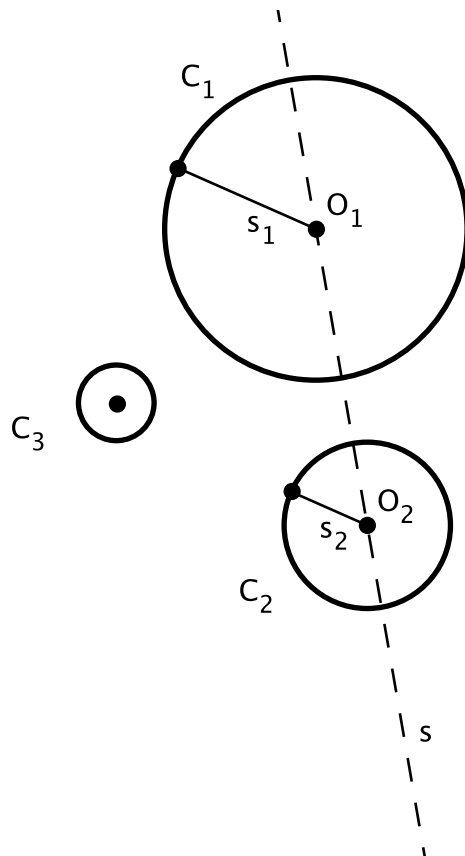


Figura 2.9: Reta passando por O_1 e O_2 e raios s_1 e s_2 .

Depois, contruimos uma reta passando por O_2 e $s_2 \cap C_2 = G_1$, essa reta vai intersectar C_2 em um ponto $G_2 \neq G_1$.

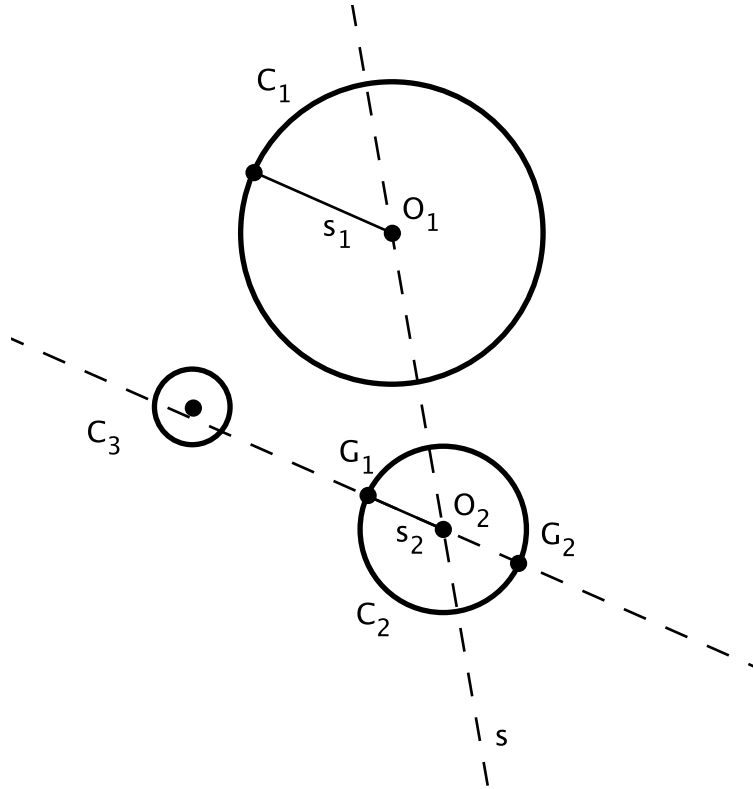


Figura 2.10: Reta passando por O_2 e $s_2 \cap C_2$.

Por fim, construímos as retas m_1 , passando pelos pontos G_1 e $C_1 \cap s_1$, e m_2 , passando pelos pontos G_2 e $C_1 \cap s_1$.

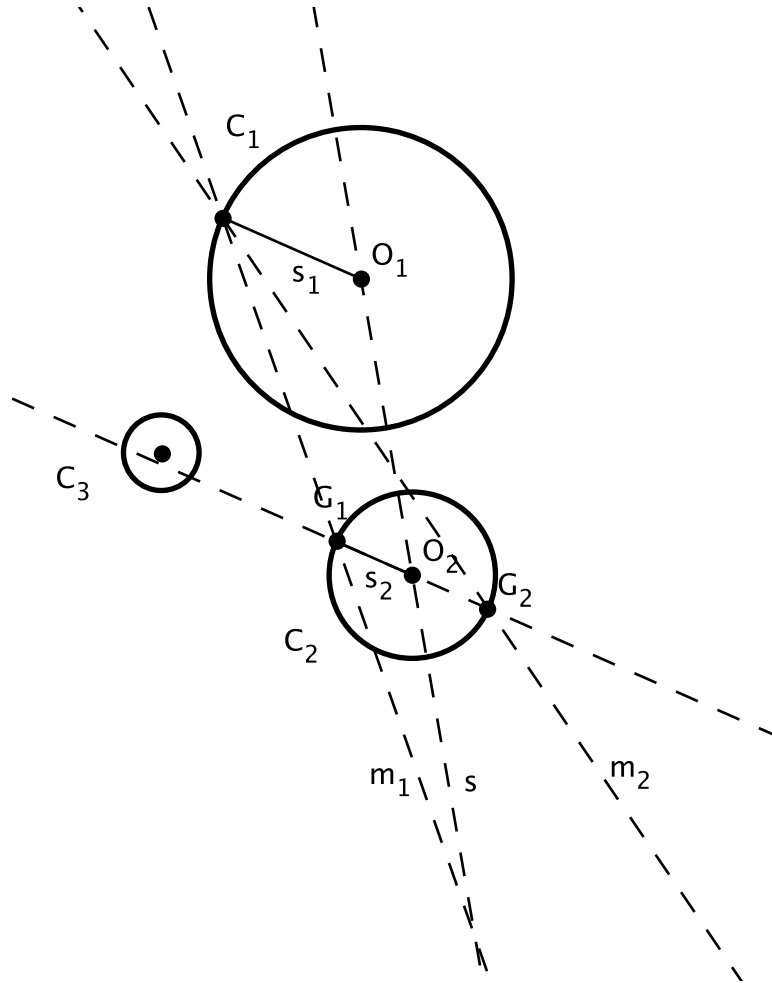


Figura 2.11: Construção das retas m_1 e m_2 .

Os pontos $F = s \cap m_1$ e $E = s \cap m_2$ são os centros de homotetias de C_1 e C_2 .

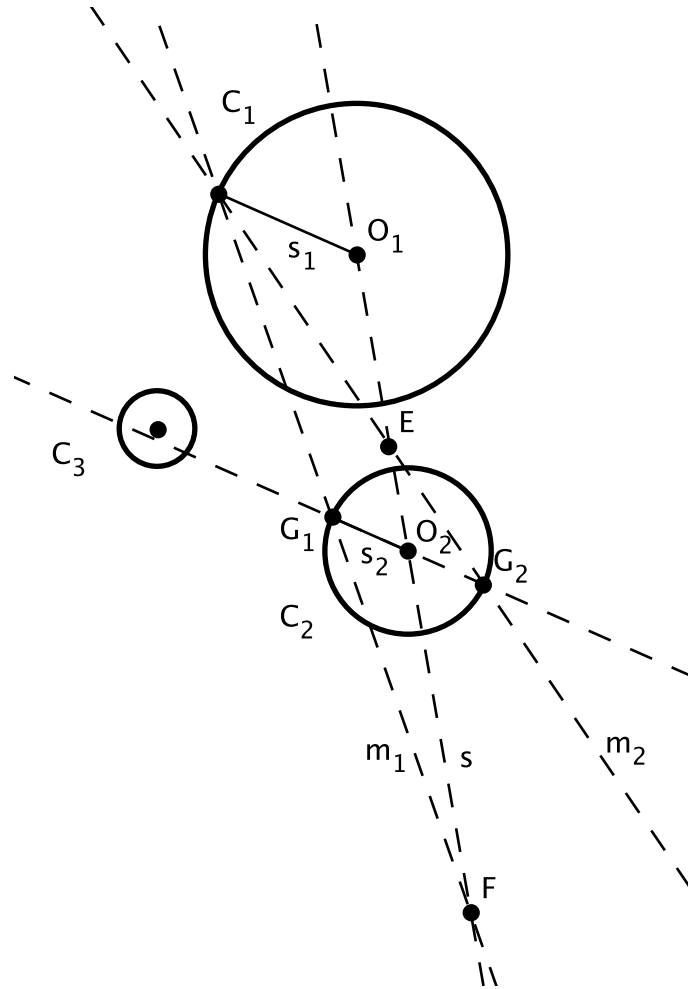


Figura 2.12: Centros de homotetias: F e E .

Analogamente, construimos os centros de homotetias de C_1 e C_3 , pontos G e H .

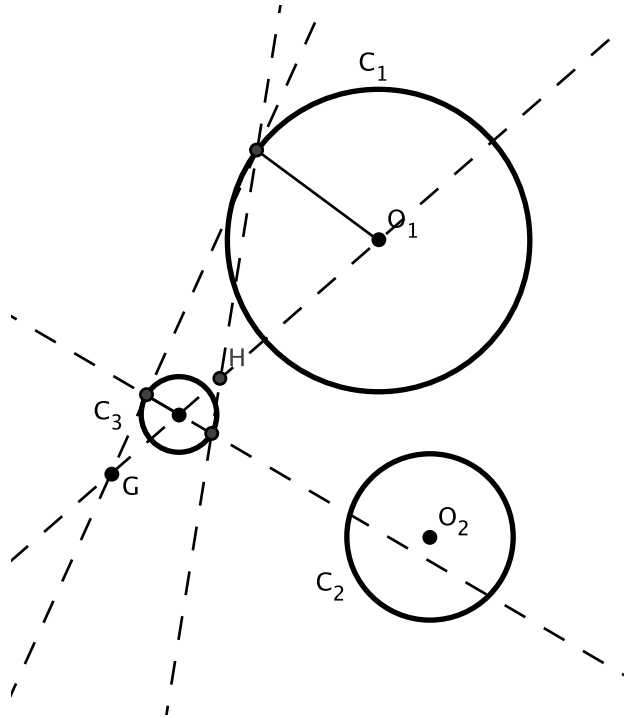


Figura 2.13: Centros de homotetias: H e G .

E os centros de homotetias de C_2 e C_3 , os pontos I e J .

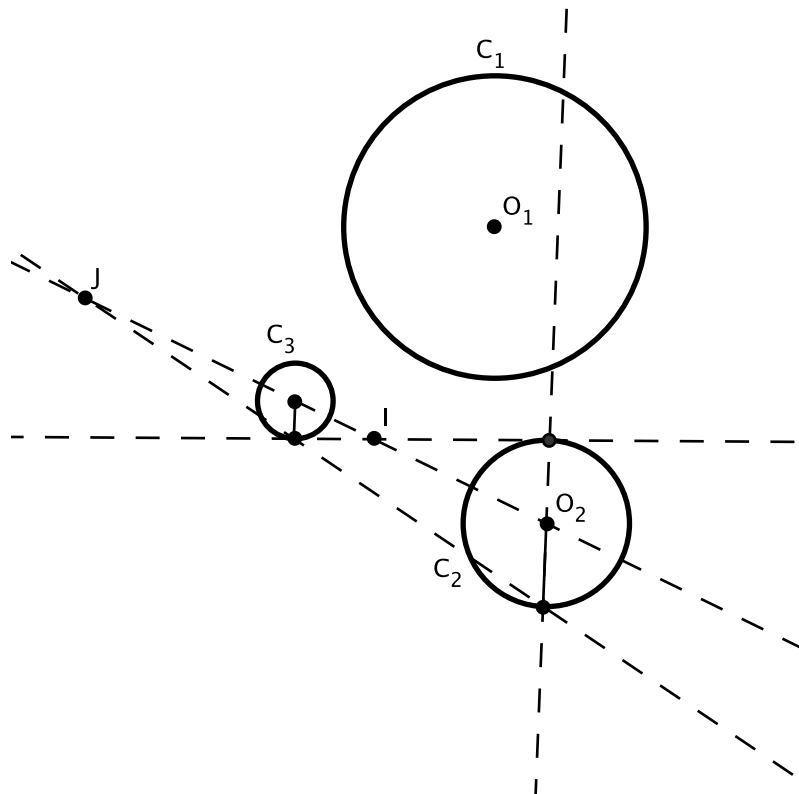


Figura 2.14: Centros de homotetias: I e J .

Assim, obtemos os seis centros de homotetias procurados.

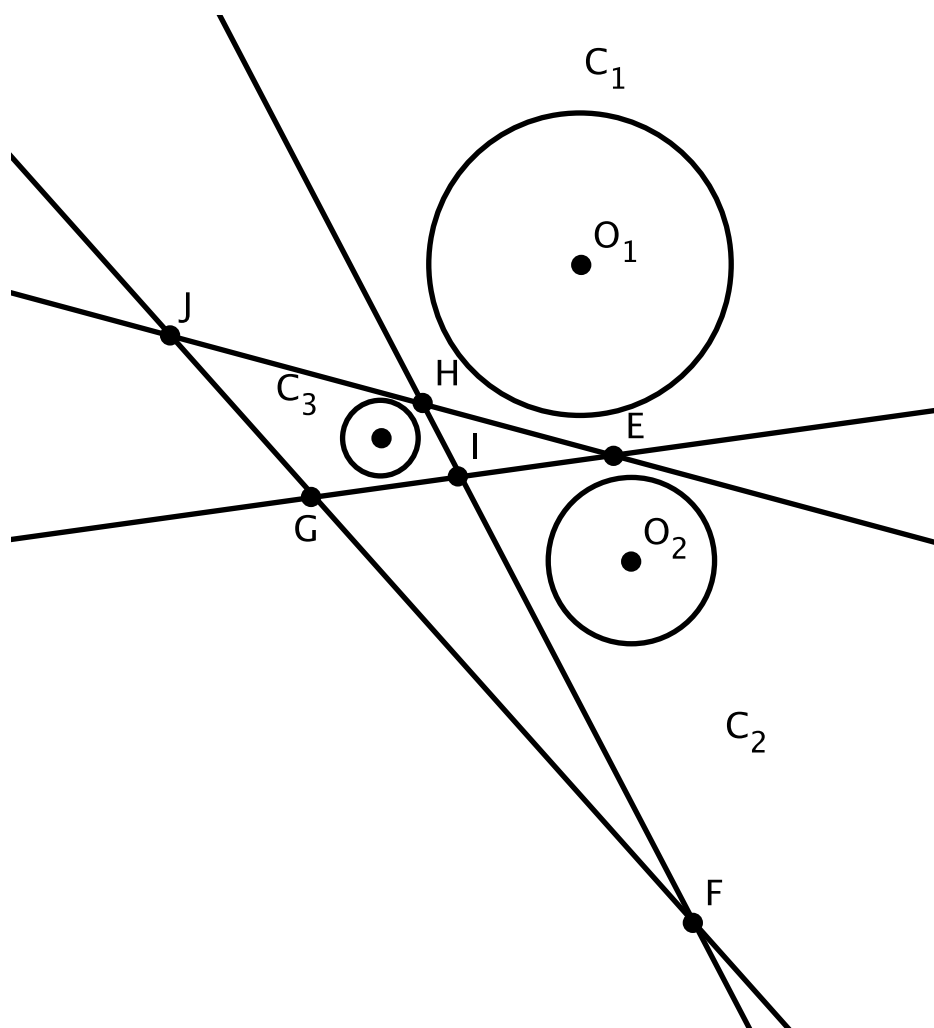


Figura 2.15: Centros de homotetias: E, F, G, H, I e J .

- Quarto passo: Para construir duas das soluções vamos escolher o eixo radical $FH = r$, para construir as outras soluções basta fazer os mesmos passos utilizando outro eixo. Temos que todas as circunferências do feixe rC passam pelos pontos da interseção $r \cap C$, vamos chamar esses pontos de A e B .

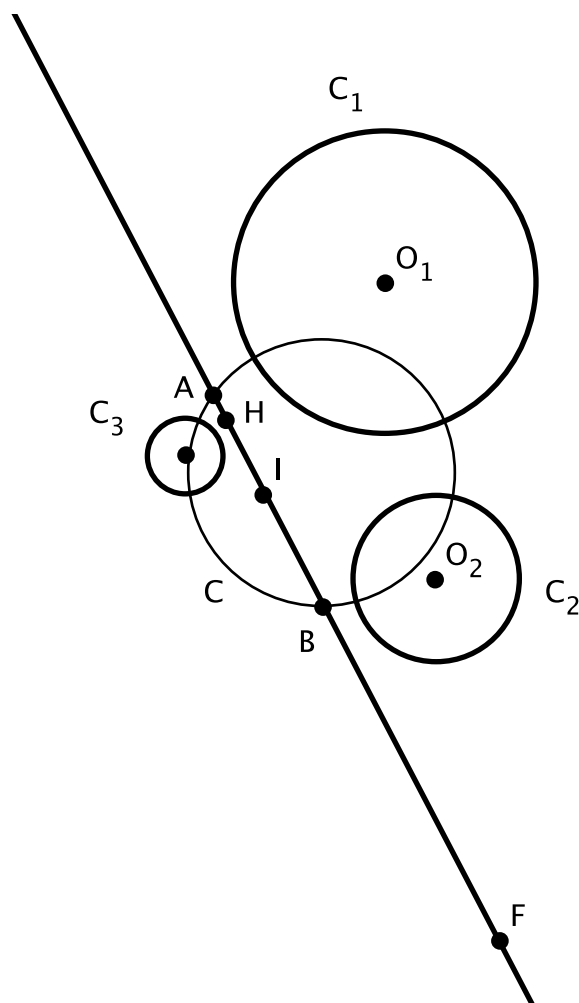


Figura 2.16: Pontos A e B .

Observe que a solução do nosso problema agora se resume a encontrar uma circunferência que passa por A e B e é tangente a uma das três circunferências. Para construir as duas soluções precisamos encontrar pontos que estejam sobre o eixo radical FH e que tenham a mesma potência para C_1, C_2, C_3 e para as circunferências do feixe. Para isso basta escolher uma das cordas ligando os pontos $C_i \cap C$ e prolongá-la para obter um ponto N do eixo radical FH .

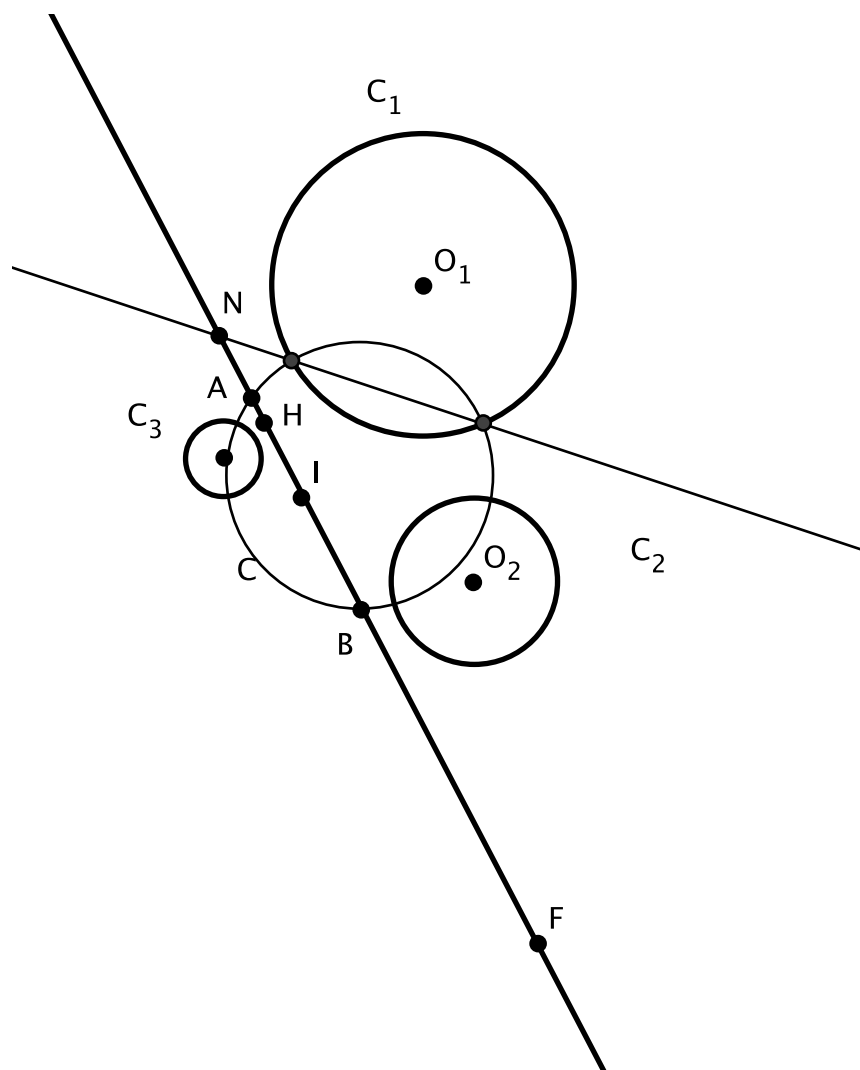


Figura 2.17: Ponto N do eixo radical FH .

Dai usamos uma circunferência auxiliar C' para encontrar os pontos T_1 e T_2 onde as soluções tangenciam C_2 .

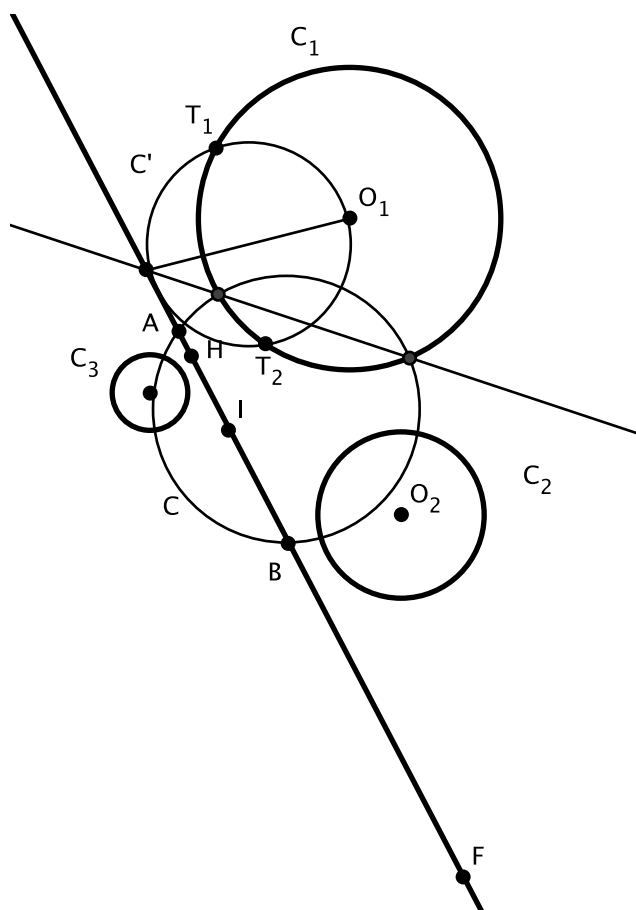


Figura 2.18: Pontos T_1 e T_2 .

Ou seja, encontramos os pontos de tangência na circunferência C_2 , que contém a corda escolhida, e assim podemos construir as duas soluções S_1 e S_2 .

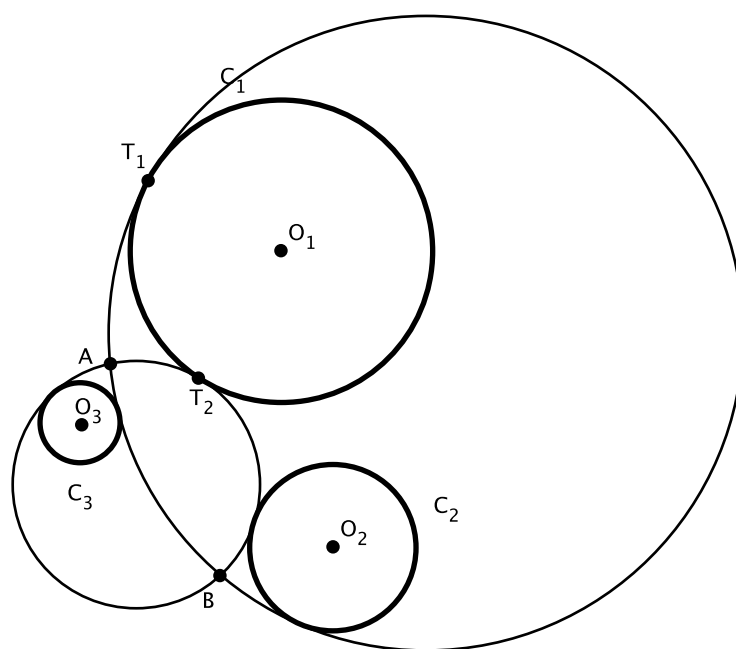


Figura 2.19: As duas soluções encontradas.

Capítulo 3

Uma visão algébrica do Problema de Apolônio

A construção feita no capítulo anterior é de grande utilidade, mas se mostra vaga se estivermos interessados no centro e no raio das soluções. Para encontrar esses elementos, vamos olhar para o problema de forma mais algébrica. Para isso, observe que analiticamente, podemos descrever cada circunferência pela associação

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathcal{C} = \{C \subset \mathbb{C}^2 \mid C \text{ é uma circunferência}\} \\ c_1 = (x_1, y_1, R_1) &\rightarrow C_1 : F_1 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R_1^2\end{aligned}$$

Temos que, ψ pode ser definida também quando $R_1 = 0$ e quando $R_1 < 0$, neste caso teremos uma aplicação em 2 e 1, e estaremos considerando que para $R_1 = 0$ temos uma circunferência degenerada, neste caso, um ponto.

Observe que duas circunferências C_1 e C_2 são tangentes externamente se, e somente se $\|\overrightarrow{O_1O_2}\| = R_1 + R_2$. E são tangentes internamente se, e somente se $\|\overrightarrow{O_1O_2}\| = R_1 - R_2$ ou $\|\overrightarrow{O_1O_2}\| = R_2 - R_1$, onde $O_1 = (x_1, y_1)$ e $O_2 = (x_2, y_2)$.

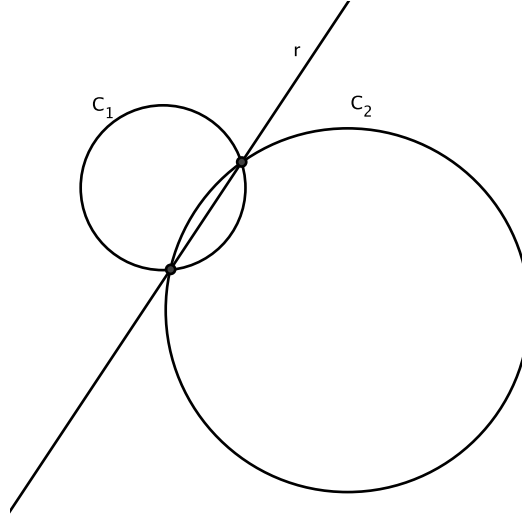
De fato, dadas duas circunferências $C_1 : (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R_1^2$ e $C_2 : (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 = R_2^2$, temos que os pontos em $C_1 \cap C_2$ são dados por:

$$\begin{cases} C_1 : (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R_1^2 \\ C_2 : (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 = R_2^2 \end{cases}$$

ou, equivalentemente:

$$\begin{cases} C_1 : (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R_1^2 \\ r : 2(x_2 - x_1)X + 2(y_2 - y_1)Y + (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) + (R_2^2 - R_1^2) = 0 \end{cases}$$

Geometricamente:



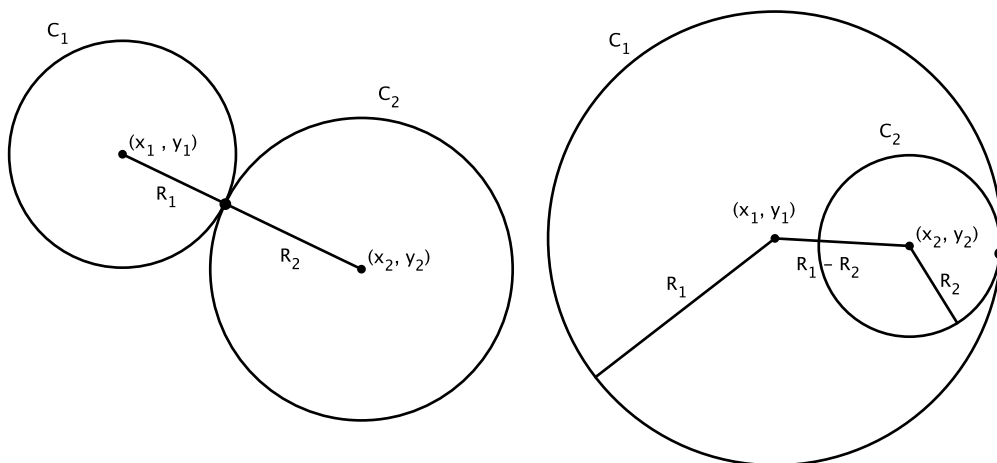
Substituindo a equação de r na equação de C_1 , obtemos uma equação quadrática em uma única variável, cujas soluções produzem os dois pontos de interseção, geralmente distintos, $C_1 \cap C_2 = C_1 \cap r = C_2 \cap r$, os quais co incidem se, e somente se o discriminante da equação quadrática for igual a zero. Temos então que C_1 e C_2 vão ser tangentes se, e somente se, esses pontos coincidirem, ou seja, duas circunferências C_1 e C_2 são tangentes se, e somente se:

$$\|\overrightarrow{O_1 O_2}\|^2 = (R_1 + R_2)^2 \text{ ou } \|\overrightarrow{O_1 O_2}\|^2 = (R_1 - R_2)^2$$

Ou equivalentemente:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (R_1 + R_2)^2 \text{ ou } (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (R_1 - R_2)^2$$

Exemplo 3.1. Vamos calcular as circunferências que são tangentes a C_1 e a C_2 ao mesmo tempo, onde $C_1 : (X + 2)^2 + Y^2 = 1$ e $C_2 : (X - 2)^2 + Y^2 = 1$. Ou seja, temos



que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 : X^2 + Y^2 + 4X + 4 = 1 \\ C_2 : X^2 + Y^2 - 4X + 4 = 1 \end{cases}$$

Sendo C uma circunferência tangente a C_1 e C_2 onde centro de C é (x, y) e seu raio é R , temos que:

Primeiro caso: C_1 e C_2 são externos a C .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 \\ 8x = 0 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} y^2 + 4 = R^2 + 2R + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^2 + 2R - 3 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Como $R > 0$, temos que:

$$\begin{cases} R = \sqrt{y^2 + 4} - 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Segundo caso: C_1 e C_2 são internos a C .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 - 2R + 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 - 2R + 1 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 - 2R + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} y^2 + 4 = R^2 - 2R + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^2 - 2R - 3 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Como $R > 0$, temos que:

$$\begin{cases} R = \sqrt{y^2 + 4} + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Observe que, se considerarmos que R pode ser negativo, podemos considerar estes dois casos como sendo um só, e encontraríamos como solução as triplas (x, y, R) onde:

$$\begin{cases} R^2 + 2R - 3 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Terceiro caso: C_1 é externo e C_2 é interno a C .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 - 2R + 1 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 \\ 8x = 4R \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} \frac{R^2}{4} + y^2 + 2R + 4 = R^2 + 2R + 1 \\ 2x = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3R^2}{4} - 3 - y^2 = 0 \\ x = \frac{R}{2} \end{cases}$$

Como $R > 0$, temos que:

$$\begin{cases} R = \sqrt{\frac{4y^2+12}{3}} + 1 \\ x = \frac{R}{2} \end{cases}$$

Quarto caso: C_1 é interno e C_2 é externo a C .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 - 2R + 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4 = R^2 + 2R + 1 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4 = R^2 - 2R + 1 \\ 2x = -R \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} \frac{R^2}{4} + y^2 - 2R + 4 = R^2 - 2R + 1 \\ 2x = -R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3R^2}{4} - 3 - y^2 = 0 \\ x = -\frac{R}{2} \end{cases}$$

Como $R > 0$, temos que:

$$\begin{cases} R = \sqrt{\frac{4y^2+12}{3}} + 1 \\ x = -\frac{R}{2} \end{cases}$$

Observe que, se considerarmos que R pode ser negativo, podemos considerar os casos três e quatro como sendo um só, e encontraríamos como solução as triplas (x, yR) onde:

$$\begin{cases} \frac{3R^2}{4} - 3 - y^2 = 0 \\ x = \frac{R}{2} \end{cases}$$

Considere agora as circunferências $C_1 : (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = R_1^2$, $C_2 : (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 = R_2^2$ e $C_3 : (X - x_3)^2 + (Y - y_3)^2 = R_3^2$ em posição geral. Temos que uma circunferência $C = (x, y, R)$ é tangente a essas três circunferências se, e somente se, é solução de um dos quatro sistemas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (R + R_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (R + R_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (R + R_3)^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (R - R_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (R + R_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (R + R_3)^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (R + R_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (R - R_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (R + R_3)^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (R + R_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (R + R_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (R - R_3)^2 \end{array} \right.$$

Onde, o sinal do raio solução, R , identifica se as circunferências envolvidas são tangentes interiormente ou exteriormente.

Observe, que se estivermos no caso geral, onde nenhuma das três circunferências são degeneradas e estas estão em posição geral, temos que cada sistema terá duas soluções. Pois cada sistema representa a interseção de uma reta com um cone, como por exemplo no sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (R + R_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (R + R_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (R + R_3)^2 \end{array} \right.$$

Podemos expandir as três equações e obter:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2R_1R + (x_1^2 + y_1^2 - R_1^2) = 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 - 2x_2x - 2y_2y - 2R_2R + (x_2^2 + y_2^2 - R_2^2) = 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 - 2x_3x - 2y_3y - 2R_3R + (x_3^2 + y_3^2 - R_3^2) = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a equação um das equações dois e três, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2R_1R + (x_1^2 + y_1^2 - R_1^2) = 0 \\ 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(R_1 - R_2)R + (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 - R_2^2 + R_1^2) = 0 \\ 2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(R_1 - R_3)R + (x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 - R_3^2 + R_1^2) = 0 \end{cases}$$

onde a primeira equação representa um cone, e as equações restantes representam dois planos, cuja interseção resulta numa reta.

Assim, teremos 8 soluções para o Problema de Apolônio.

Capítulo 4

Espaço de parâmetros para cônicas planas

Nesse capítulo usaremos ferramentas mais avançadas da geometria algébrica como espaço projetivo, espaço projetivo dual e algumas propriedades do anel de Chow. O leitor interessado em outros artigos sobre o assunto, pode consultar [2] e [12].

Uma cônica plana é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ que satisfaz um polinômio de grau dois, $a_0X^2 + b_0Y^2 + c_0XY + d_0X + e_0Y + f_0 = 0$, onde nem todos os coeficientes são nulos. Se o polinômio que representa a cônica for irredutível diremos que a cônica é não degenerada. Caso contrário o polinômio é um produto de polinômios lineares, ou seja, a cônica é a união de duas retas, nesse caso diremos que a cônica é degenerada. Quando essas duas retas coincidem, o polinômio definindo a curva será o quadrado de um polinômio linear, neste caso pensaremos na cônica como uma reta dupla. Chamaremos uma cônica que não é uma reta dupla de cônica reduzida.

Observe que qualquer cônica fica completamente determinada pelos coeficientes $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$, mas não unicamente. Se considerarmos o ponto $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0) \in \mathbb{C}^6$ como representante da cônica $a_0X^2 + b_0Y^2 + c_0XY + d_0X + e_0Y + f_0 = 0$, veremos que para qualquer λ um escalar não nulo, o ponto $(\lambda a_0, \lambda b_0, \lambda c_0, \lambda d_0, \lambda e_0, \lambda f_0)$ representa a mesma curva. Logo, qualquer ponto sobre a reta definida pelo vetor $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0)$ dá origem a mesma reta. Portanto, temos uma correspondência injetora entre as retas pela origem em $\mathbb{C}^6$ e as equações definindo cônicas planas, a menos de um múltiplo

escalar.

Usaremos as coordenadas homogêneas $[a_0 : b_0 : c_0 : d_0 : e_0 : f_0]$ para descrever a reta gerada por $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0)$. Excluiremos o caso em que $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$, pois neste caso teríamos o vetor $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ o qual não gera uma reta, temos também que a equação da cônica associada se reduz a $0 = 0$ a qual não coloca restrições sobre os pontos. O conjunto das retas passando pela origem do $\mathbb{C}^6$ é chamado espaço projetivo de dimensão cinco e é denotado por $\mathbb{P}^5$. Ele serve como o nosso espaço moduli para cônicas, um espaço cujos pontos estão em correspondência injetiva com o conjunto de cônicas.

Cada ponto de $\mathbb{P}^5$ é parte de um conjunto aberto que pode ser identificado com $\mathbb{C}^5$. Dado um ponto em $\mathbb{P}^5$, onde uma de suas coordenadas $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$ é não nula. Suponhamos $f_0 \neq 0$. Então o conjunto $U_f = [a_0 : b_0 : c_0 : d_0 : e_0 : f_0]$ tal que $f_0 \neq 0$ pode ser identificado com $\mathbb{C}^5$ por: $[a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0] = \left[\frac{a_0}{f_0} : \frac{b_0}{f_0} : \frac{c_0}{f_0} : \frac{d_0}{f_0} : \frac{e_0}{f_0} : 1 \right] \sim \left(\frac{a_0}{f_0} : \frac{b_0}{f_0} : \frac{c_0}{f_0} : \frac{d_0}{f_0} : \frac{e_0}{f_0} \right) \in \mathbb{C}^5$. Logo, $\mathbb{P}^5$ é um espaço de dimensão cinco. Observe que os coeficientes da cônica correspondem a coordenadas homogêneas de um espaço projetivo $\mathbb{P}^5$, isto é, temos uma correspondência biunívoca

$$C \subset \mathbb{P}^2 \text{ conica plana} \longleftrightarrow [a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0] \in \mathbb{P}^5$$

Definição 4.1. Dizemos que as hipersuperfícies $Z_1, \dots, Z_r$ se intersectam transversalmente em um ponto $P \in Z_1 \cap \dots \cap Z_r$ quando os seus espaços tangentes em P se intersectam apenas no ponto P , ou seja, $T_P Z_1 \cap \dots \cap T_P Z_r = P$. A interseção $Z_1 \cap \dots \cap Z_r$ é transversal se é transversal em todos os pontos.

Teorema 4.1. (*Teorema de Bézout*) Se $Z_1, \dots, Z_r$ são hipersuperfícies de graus $d_1, \dots, d_r$ no espaço projetivo de dimensão r que se cruzam transversalmente. Então a interseção é constituída por $\prod_{i=1}^r d_i$ pontos.

Podemos generalizar esse resultado e escreve-lo da seguinte forma:

Teorema 4.2. Se $Z_1, \dots, Z_r$ são hipersuperfícies de graus $d_1, \dots, d_r$ no espaço projetivo de dimensão r e a interseção $Z_1 \cap \dots \cap Z_r$ consiste de uma quantidade finita de pontos, então essa interseção é constituída por $\prod_{i=1}^r d_i$ pontos.

Definição 4.2. Uma Curva Projetiva Plana é o conjunto de zeros em $\mathbb{P}^2$ de um polinômio homogêneo, irredutível e não constante.

Definição 4.3. O grau de uma curva projetiva $F = V(f)$ é o grau de f .

Uma Cônica de $\mathbb{P}^2$ é dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2, ou seja, um polinômio da forma: $C : F(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dXY + 2eXZ + 2fYZ = 0$

Questões geométricas sobre cônicas $C \subset \mathbb{P}^2$ correspondem às relações algébricas em coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^5$, i. e., são algumas das subvariedades de $\mathbb{P}^5$.

Exemplo 4.1. Fixado um ponto $P = [x : y : z] \in \mathbb{P}_2$. A condição para que a cônica

$$C : aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dXY + 2eXZ + 2fYZ = 0$$

passa pelo ponto P é linear em seus coeficientes e é dada pela equação

$$\mathcal{H}_P : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

e, portanto, representa um hiperplano no $\mathbb{P}^5$ das cônicas.

Deste modo, obtemos os seguintes resultados:

Lema 4.1. *Dados cinco pontos distintos P_1, P_2, P_3, P_4 e $P_5 \in \mathbb{P}^2$, com quatro desses não colineares, existe uma única cônica passando por eles.*

Demonstração. Como já vimos, a condição de uma cônica passe por um ponto $P[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$ é representada por um hiperplano em $\mathbb{P}^5$. Portanto passar por 5 pontos, dos quais quatro desses são não colineares, corresponde a fazer a interseção de 5 hiperplanos. Pelo teorema de Bézout, a interseção de cinco tais hiperplanos consiste em um ponto apenas, portanto: uma só cônica passa pelos cinco pontos. Observe que o Teorema de Bézout é verdadeiro neste caso, pois o número de pontos na interseção é finito. De fato, a questão não depende de nossa escolha de coordenadas, logo podemos supor:

$$P_1 = [1 : 0 : 0]; P_2 = [0 : 1 : 0]; P_3 = [0 : 0 : 1]; P_4 = [1 : 1 : 1]; P_5 = [1 : \alpha : \beta]$$

Logo, como a cônica Q passa por esses cinco pontos, temos que:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d + e + f = 0 \\ \alpha d + \beta e + \alpha\beta f = 0 \end{cases}$$

Esse sistema tem matriz de coeficientes dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \alpha\beta \end{bmatrix}$$

Os cinco pontos não impõe condições LI's precisamente quando esta matriz não tem posto máximo, ou seja, posto 5. Para verificar que ela não tem posto 5, basta verificar se nenhuma de suas submatrizes 5x5 tem determinante diferente de zero. Neste caso, temos apenas duas condições: $\alpha\beta = 0$ e $\beta = 0$, ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, ou $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$. Não podemos ter $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ e se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$, então P_1, P_2, P_3, P_5 pertenceriam a reta $z = 0$, ou seja, estariam alinhados. ■

Lema 4.2. *Uma cônica $C : aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$ em $\mathbb{P}^2$ é uma circunferência, se e somente se C passa pelos pontos $P_1 = [1, i, 0]$ e $P_2 = [1, -i, 0]$.*

Demonstração. De fato, se C é uma circunferência então $a = b$ e $d = 0$, ou seja, P_1 e P_2 pertencem a C . E se P_1 e P_2 pertencem a C então :

$$\begin{cases} a - b + di = 0 \\ a - b - di = 0 \end{cases}$$

Logo $a = b$ e $d = 0$, ou seja C é uma circunferência. ■

Corolário 4.1. *Existe uma única circunferência passando por três pontos dados no plano.*

Demonstração. Podemos contar o número de soluções para o problema de Apolônio, usando o resultado do problema de Steiner, basta para isso exigir também que a solução passe pelos pontos $P_1 = [1, i, 0]$ e $P_2 = [1, -i, 0]$. Ou seja, estaremos contando o número de cônicas que passam por P_1, P_2 e mais três pontos dados, mas, como essas cônicas passam por P_1, P_2 , elas são circunferências passando pelos três pontos. O resultado segue pelo lema 4.1.

Lema 4.3. *Dados quatro pontos P_1, P_2, P_3 e $P_4 \in \mathbb{P}^2$ distintos e não colineares e uma reta $\ell \in \mathbb{P}^2$ não passando por nenhum desses pontos, então existem duas cônicas passando por esses pontos e tangente a ℓ .*

Demonstração. Uma cônica Q tem equação da forma $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$ e uma reta de $\mathbb{P}^2$ pode ser representada por $AX + BY + CZ = 0$. Supondo $A \neq 0$, temos que $aA^2X^2 + bA^2Y^2 + cA^2Z^2 + dA^2XY + eA^2XZ + fA^2YZ = 0$ também representa Q , um ponto pertencente a reta satisfaz $AX = -BY - CZ$. Logo, substituindo o valor de AX na equação da cônica, obtemos:

$$\begin{aligned} a(-BY - CZ)^2 + bA^2Y^2 + cA^2Z^2 + dA(-BY - CZ)Y + eA(-BY - CZ)Z + fA^2YZ &= 0 \\ aB^2Y^2 + 2aBCYZ + aC^2Z^2 + bA^2Y^2 + cA^2Z^2 - dABY^2 - dACYZ - eABYZ - eACZ^2 + & \\ fA^2YZ &= 0 \\ (aB^2 + bA^2 - dAB)Y^2 + (2aBC - dAC - eAB + fA^2)YZ + (aC^2 + cA^2 - eAC)Z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Para que a reta seja tangente a cônica temos que ter:

$$\begin{aligned} (2aBC - dAC - eAB + fA^2)^2 - 4(aB^2 + bA^2 - dAB) \cdot (aC^2 + cA^2 - eAC) + \\ A^2(4afBC + d^2C^2 + 2dfAC + eB^2 - 2efAB) &= 0 \end{aligned}$$

Como $A \neq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} 4afBC + d^2C^2 + 2dfAC + eB^2 - 2efAB + f^2A^2 - 4acB^2 - 4abC^2 - 4bcA^2 + 4beAC + \\ 4cdAB - 4deBC &= 0 \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} (f^2 - 4bc)A^2 + (e^2 - 4ac)B^2 + (d^2 - 4ab)C^2 + (4cd - 2ef)AB + (4be - 2df)AC + \\ (4af - 2de)BC &= 0 \end{aligned}$$

Nos outros casos, $B \neq 0$ e $C \neq 0$, obtemos o mesmo resultado.

Logo, a condição para que uma reta seja tangente a uma cônica é quadrática em seus coeficientes, ou seja, existem $1^4 \cdot 2 = 2$ cônicas passando pelos quatro pontos e tangente a reta.

Observe que o Teorema de Bézout é verdadeiro neste caso, pois o número de pontos na interseção é finito. De fato, a questão não depende de nossa escolha de coordenadas, logo, podemos supor:

$$\ell : Z = 0 \text{ e } P_1 = [0 : 0 : 1]; P_2 = [1 : 1 : 1]; P_3 = [\alpha : \beta : 1]; P_4 = [\gamma : \delta : 1]$$

Logo, para que a cônica Q passe pelos quatro pontos temos que ter:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c + d + e + f = 0 \\ \beta^2 b + c + \alpha\beta d + \alpha e + \beta f = 0 \\ \gamma^2 b + c + \gamma\delta d + \gamma e + \delta f = 0 \end{cases}$$

e para que ℓ seja tangente a Q , temos que ter $d^2 - 4ab = 0$.

Logo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c + d + e + f = 0 \\ \beta^2 b + c + \alpha\beta d + \alpha e + \beta f = 0 \\ \gamma^2 b + c + \gamma\delta d + \gamma e + \delta f = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Cuja matriz dos coeficientes é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta^2 & 1 & \alpha\beta & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma^2 & 1 & \gamma\delta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que todas submatrizes 5×5 desta matriz têm determinante igual a zero. ■

Corolário 4.2. *Dadas uma reta e dois pontos em posição geral no plano, existem duas circunferências passando por esses pontos e tangentes a reta.*

Lema 4.4. *Dados três pontos $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$ e duas retas $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{P}^2$ em posição geral, existem quatro cônicas passando por esses pontos e tangentes a essas retas.*

Demonstração. De fato, pelo Teorema de Bézout, temos que existem $1^3 \cdot 2^2 = 4$ cônicas passando pelos três pontos dados e tangentes as duas retas dadas. ■

Corolário 4.3. *Dadas duas retas e um ponto em posição geral no plano, existem quatro circunferências tangentes a essas duas retas e passando por esse ponto.*

Tomemos agora um ponto $P_1 \in \mathbb{P}^2$ e quatro retas $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in \mathbb{P}^2$ em posição geral, pelo Teorema de Bézout teríamos que ter $1 \cdot 2^4 = 16$ cônicas passando pelo ponto dados e tangente as retas dadas. Considere a reta L_1 como sendo uma reta qualquer passando por P_1 . Observe que a cônica $L_1 \cdot L_1$ é uma reta dupla que passa pelo ponto dado e é tangente as retas dadas, sendo assim, existem infinitas cônicas (retas duplas) satisfazendo essas condições. Isso acontece porque neste caso as hipersuperfícies não se cruzam transversalmente, e portanto o teorema de Bézout não é válido. No entanto, existem um número finito de cônicas reduzidas que passam por P_1 e são tangentes a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 . Nós gostaríamos de ignorar as soluções de retas duplas e apenas contar o número de cônicas reduzidas que passam por p pontos e são tangentes a $5 - p$ retas. Observe que nos três casos que resolvemos anteriormente todas as cônicas que foram contabilizadas como solução eram reduzidas, pois os pontos não eram colineares.

4.1 Dualidade em $\mathbb{P}^2$

Considere o conjunto de todas as retas em $\mathbb{P}^2$, essas retas são da forma $L : AX + BY + CZ = 0$. Ou seja, essa reta pode ser representada por um ponto $[A:B:C]$ em $\mathbb{P}^2$.

Definição 4.4. O conjunto de retas em $\mathbb{P}^2$ é chamado plano projetivo dual e denotado por $\check{\mathbb{P}}^2$

Por definição, uma reta L em $\mathbb{P}^2$ corresponde a um ponto em $\check{\mathbb{P}}^2$, que denotaremos por $\check{L}$ (L dual). Podemos também definir o dual de um ponto $P \in \mathbb{P}^2$ como o conjunto de retas que passam por P . Se $P = [X_0 : Y_0 : Z_0]$ então este conjunto é $\{[A : B : C] \mid X_0A + Y_0B + Z_0C = 0\}$. Esta é uma equação linear nas variáveis A , B e C , logo o ponto P corresponde a uma reta em $\check{\mathbb{P}}^2$, a qual denotaremos por $\check{P}$. Geometricamente dualidade associa retas em $\check{\mathbb{P}}^2$ com pontos em $\mathbb{P}^2$ e vice-versa.

Lema 4.5. *Sejam P um ponto de $\mathbb{P}^2$ e $L \subset \mathbb{P}^2$ uma reta. Então, a reta $\check{P}$ em $\check{\mathbb{P}}^2$, contém o ponto $\check{L}$ se, e somente se, $P \in L$.*

Demonstração. Sejam $P = [X_0 : Y_0 : Z_0]$ e $L : \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ um ponto e uma reta de $\mathbb{P}^2$, respectivamente, tais que $\alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma Z_0 = 0$, ou seja o ponto P pertence a reta L . Temos que $\check{P} = \{[A : B : C] \mid X_0A + Y_0B + Z_0C = 0\}$ e $\check{L} = [\alpha : \beta : \gamma]$, mas $\alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma Z_0 = 0$, logo $\check{L} \in \check{P}$. ■

Se Q é uma cônica em $\mathbb{P}^2$ então definimos a curva dual $\check{Q}$ em $\check{\mathbb{P}}^2$ como sendo o conjunto de todas as retas tangentes a Q , ou seja, $\check{Q}$ contém um ponto $\check{L}$ se e somente se a reta correspondente $L \in \mathbb{P}^2$ for tangente a Q .

Exemplo 4.2. Considere a cônica Q dada pela equação $X^2 - Y^2 + Z^2 - YZ = 0$. A reta geral $AX + BY + CZ = 0$ corta a cônica em dois pontos. Se $A \neq 0$, podemos encontrar esses dois pontos observando que $(AX)^2 + (AY)^2 + (AZ)^2 - A^2YZ = 0$ na curva e $AX = -(BY + CZ)$ na reta. Logo, substituindo o valor de AX da segunda equação na primeira, obtemos:

$$B^2Y^2 + 2BCYZ + C^2Z^2 - A^2Y^2 + A^2Z^2 - A^2YZ = 0 \implies (B^2 - A^2)Y^2 + (2BC - A^2)YZ + (C^2 + A^2)Z^2 = 0$$

Quando o discriminante desta equação é diferente de zero, a sua solução consiste de dois pontos distintos $[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2$, ou seja, a reta $AX + BY + CZ = 0$ é secante à cônica Q . Por outro lado, quando o discriminante é zero, a reta é tangente à cônica. Ou seja, a reta é tangente à cônica quando:

$$(2BC - A^2)^2 - 4(B^2 - A^2)(C^2 + A^2) = 0 \implies 5A^4 - 4A^2B^2 + 4A^2C^2 - 4A^2BC = 0 \implies A^2 \cdot (5A^2 - 4B^2 + 4C^2 - 4BC) = 0$$

Como $A \neq 0$ temos que $5A^2 - 4B^2 + 4C^2 - 4BC = 0$. Analogamente encontramos

a mesma equação quando $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. Portanto a equação para o dual de Q é $5A^2 - 4B^2 + 4C^2 - 4BC = 0$. Note que $\check{Q}$ é uma cônica em $\check{\mathbb{P}}^2$.

Lema 4.6. *Dada $Q : aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$ uma cônica em $\mathbb{P}^2$, temos que $\check{Q}$ é uma cônica em $\check{\mathbb{P}}^2$ dada por $(f^2 - 4bc)A^2 + (e^2 - 4ac)B^2 + (d^2 - 4ab)C^2 + (4cd - 2ef)AB + (4be - 2df)AC + (4af - 2de)BC = 0$.*

A demonstração desse lema é analoga a demonstração do lema 4.3.

Logo, $\check{Q}$ irá conter um ponto $\check{L}$ se, e somente se, a reta correspondente $L \in \mathbb{P}^2$ for tangente a Q .

Lema 4.7. *$P \in Q$, se e somente se $\check{P}$ é tangente a $\check{Q}$.*

Lema 4.8. *Q é tangente a L , se e somente se $\check{Q}$ passa por $\check{L}$.*

Lema 4.9. *Se Q é uma cônica em $\mathbb{P}^2$ não degenerada então $\check{Q} \in \check{\mathbb{P}}^2$ também é não degenerada.*

Lema 4.10. *Se Q é uma cônica em $\mathbb{P}^2$ que consiste de um par de retas distintas $L_1 \cdot L_2$ então $\check{Q} \in \check{\mathbb{P}}^2$ é a cônica reta dupla passando pelos pontos $\check{L}_1$ e $\check{L}_2$.*

Lema 4.11. *O dual de uma cônica reta dupla é $\mathbb{P}^2$.*

Temos que, se uma reta L_1 é tangente a uma cônica não degenerada Q , então, por definição, $\check{L}_1$ é um ponto em $\check{Q}$. Se P é um ponto em Q então a reta $\check{P}$ é tangente a cônica dual $\check{Q}$, de fato, seja L_1 a reta tangente a Q no ponto P . Então $\check{L}_1$ é um ponto sobre a reta $\check{P}$. A reta $\check{P}$ intersecta $\check{Q}$ em dois pontos, $\check{L}_1$ e $\check{L}_2$. Sabemos que $\check{L}_2 \in \check{Q}$, logo L_2 deve ser uma reta tangente a Q . Mas $\check{L}_2 \in \check{P}$, assim L_2 também passa por P . Então L_2 é uma reta que passa por P e é tangente a cônica Q . Mas, cada reta tangente pode intersectar Q em, no máximo, um lugar, L_2 deve ser tangente a Q em P , ou seja, $L_1 = L_2$. Portanto $\check{L}_1 = \check{L}_2$, logo a reta $\check{P}$ intersecta $\check{Q}$ em um único ponto, ou seja, $\check{P}$ é tangente a $\check{Q}$.

Vamos usar o $\check{\mathbb{P}}^2$ para remover as retas duplas de nossa contagem, pois ela nos permite trocar pontos e retas, e ao mesmo tempo, transforma cônicas em cônicas. Além disto ela respeita as propriedades de interseção e tangência como vimos.

Lema 4.12. *Dados dois pontos $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$ e três retas $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{P}^2$ em posição geral, existem quatro cônicas não degeneradas passando pelos dois pontos dados e tangentes as três retas dadas.*

Demonstração. Qualquer cônica $Q \in \mathbb{P}^2$ não degenerada tangente as três retas dadas e passando pelos dois pontos dados deve ter uma cônica dual $\check{Q} \in \check{\mathbb{P}}^2$ que passa por três pontos duais e é tangente a duas retas duais. Portanto existem quatro cônicas passando por dois pontos dados e tangente a três retas dadas. ■ Analogamente, chegamos aos resultados dos lemas 4.13 e 4.14 abaixo.

Corolário 4.4. *Dadas três retas em posição geral no plano, existem quatro circunferências tangentes a essas três retas.*

Lema 4.13. *Dados um ponto $P_1 \in \mathbb{P}^2$ e quatro retas $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in \mathbb{P}^2$ em posição geral, existem duas cônicas não degeneradas passando pelo ponto dado e tangente as retas dadas.*

Lema 4.14. *Dadas cinco retas $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5 \in \mathbb{P}^2$ em posição geral, existe uma única cônica não degenerada tangente a essas cinco retas.*

4.2 Veronese, Blow up e Cônicas

Definamos a aplicação,

$$\begin{aligned} \nu : \quad \check{\mathbb{P}}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [A : B : C] &\longmapsto [A^2 : B^2 : C^2 : 2AB : 2AC : 2BC], \end{aligned}$$

esta aplicação é um morfismo, cujo domínio é todo o $\check{\mathbb{P}}^2$. A imagem deste morfismo, que é o que chamamos de superfície Veronese e denotamos por $\mathcal{V}$, corresponde as retas duplas. Como uma reta dupla é representada pelo quadrado de um polinômio ela é da forma $(AX + BY + CZ)^2 = A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 + 2ABXY + 2ACXZ + 2BCYZ = 0$. Sabemos que as retas de $\mathbb{P}^2$ são parametrizadas por $\check{\mathbb{P}}^2$, de modo que a veronese é uma superfície bidimensional em $\mathbb{P}^5$, logo esperavamos que podessemos descreve-la com três equações, mas isso é verdade somente localmente, na verdade se quisermos descrever

a veronese completamente precisamos de seis equações. A superfície veronese é um exemplo de uma variedade que não é uma interseção completa. Usando as equações que obtivemos anteriormente para cônica dual, temos que as equações que descrevem a veronese são:

$$\begin{aligned} f^2 - 4bc &= 0 & e^2 - 4ac &= 0 & d^2 - 4ab &= 0 \\ 4cd - 2ef &= 0 & 4be - 2df &= 0 & 4af - 2de &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Considere o mapa δ de $\mathbb{P}^5$ para $\mathbb{P}^5$ o qual leva uma cônica em sua dual, ou seja,

$$\begin{aligned} \delta : \quad \mathbb{P}^5 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [a : b : c : d : e : f] &\longrightarrow [f^2 - 4bc; e^2 - 4ac; d^2 - 4ab; 4cd - 2ef; 4be - 2df; 4af - 2] \end{aligned}$$

Observe que esse mapa não é um morfismo. Mas, observe também que os seis polinômios que definem δ são exatamente os do lado esquerdo das seis equações em (4.1), logo, temos que δ não está definida em um ponto se, e somente se este ponto está sobre a veronese, ou seja, se e somente se o ponto corresponde a uma reta dupla. Portanto esse mapa é racional, pois é definido por polinômios, logo ele pode ser estendido para um morfismo expandindo o seu domínio.

Definição 4.5. O blowup de $\mathbb{P}^5$ ao longo da superfície veronese, $Bl_V \mathbb{P}^5$, é o fecho do gráfico de δ em $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$. O morfismo blowing down $\pi : Bl_V \mathbb{P}^5 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ é dado pela projeção sobre o primeiro fator.

Temos que o gráfico é o conjunto de pontos $([a : b : c : d : e : f], [r : s : t : u : v : w]) \in \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ que devem satisfazer as equações:

$$\begin{aligned} \lambda r &= f^2 - 4bc & \lambda s &= 4cd - 2ef & \lambda t &= e^2 - 4ac \\ \lambda u &= 4be - 2df & \lambda v &= 4af - 2de & \lambda w &= d^2 - 4ab \end{aligned} \quad (4.2)$$

Eliminando λ e igualando aos pares essas equações, obtemos as equações abaixo:

$$\begin{aligned}
r(4cd - 2ef) &= s(f^2 - 4bc) \\
r(e^2 - 4ac) &= t(f^2 - 4bc) \\
r(4be - 2df) &= u(f^2 - 4bc) \\
r(4af - 2de) &= v(f^2 - 4bc) \\
r(d^2 - 4ab) &= w(f^2 - 4bc) \\
s(e^2 - 4ac) &= t(4cd - 2ef) \\
s(4be - 2df) &= u(4cd - 2ef) \\
s(4af - 2de) &= v(4cd - 2ef) \\
s(d^2 - 4ab) &= w(4cd - 2ef) \\
t(4be - 2df) &= u(e^2 - 4ac) \\
t(4af - 2de) &= v(e^2 - 4ac) \\
t(d^2 - 4ab) &= w(e^2 - 4ac) \\
u(4af - 2de) &= v(4be - 2df) \\
u(d^2 - 4ab) &= w(4be - 2df) \\
v(d^2 - 4ab) &= w(4af - 2de)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

O blowup deve satisfazer mais oito equações indicadas abaixo, as quais podem ser obtidas usando um programa computacional:

$$\begin{aligned}
du + 2fw + 2bv &= 0 & dv + 2ew + 2au &= 0 \\
fu + 2dr + 2bs &= 0 & ev + 2dt + 2as &= 0 \\
es + 2ft + 2cv &= 0 & 4ar - 4bt + eu - fv &= 0 \\
fs + 2er + 2cu &= 0 & 2bt - 4cw + ds - eu &= 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Seja $[a : b : c : d : e : f]$ um ponto de $\mathbb{P}^5$ que não pertence a superfície veronese, ou seja, este ponto não representa uma reta dupla. Observe que as equações (4.3) determinam completamente $[r : s : t : u : v : w]$, assim temos que $\pi^{-1}([a : b : c : d : e : f])$ é um ponto. Agora suponha que o ponto $[a : b : c : d : e : f]$ esteja na superfície veronese, neste caso as equações (4.3) se reduzem a $0 = 0$ e as equações de (4.4) nos dizem que este ponto está no blowup.

Exemplo 4.3. Considere a reta dupla $X^2 = 0$, que é representada por $[1 : 0 : 0 : 0 :$

$0 : 0]$ na veronese. Temos que $b = c = d = e = f = 0$, logo as equações (4.4) equivalem a:

$$0 = 0 \quad 2au = 0$$

$$0 = 0 \quad 2as = 0$$

$$0 = 0 \quad 4ar = 0$$

$$0 = 0 \quad 0 = 0$$

Mas $a \neq 0$, logo $u = s = r = 0$ e t, v, w são livres. Assim, os pontos no blowup $Bl_V \mathbb{P}^5$ são mapeados pelo morfismo blowing down para os pontos da forma $([1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0], [0 : 0 : t : 0 : v : w])$. Estes pontos definem um $\mathbb{P}^2$ mergulhado em $\mathbb{P}^5$ dentro do blowup, ou seja, $\pi^{-1}([a : b : c : d : e : f]) \cong \mathbb{P}^2$. Isso ocorre com qualquer reta dupla que escolhermos, ou seja, o ponto correspondente a uma reta dupla na veronese em $\mathbb{P}^5$ é levado em $Bl_V \mathbb{P}^5$ em algo que equivale a um $\mathbb{P}^2$.

Definição 4.6. Seja $X \subset \mathbb{P}^5$, uma superfície não degenerada e que não é um cone. Dizemos que X é projetivamente equivalente a superfície de Veronese se, dados $x, y \in X$ quaisquer então $T_x X \cap T_y X \neq \emptyset$.

Proposição 4.1. *Seja C uma cônica lisa então $\nu(C) \subset \mathbb{P}^5$ é projetivamente equivalente a uma curva normal racional de grau 4 em $\mathbb{P}^5$.*

Definição 4.7. Vamos chamar a curva de grau quatro, a qual se refere a proposição acima, de divisor excepcional do blowup e denotar-la por E .

Seja $Z \in \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície que contém a Veronese. Observe que $\pi^{-1}(Z)$ no blowup conterá E . Por outro lado, $\pi^{-1}(Z \setminus V)$ é isoformo a $Z \setminus V$. Tomando $\overline{\pi^{-1}(Z \setminus V)}$, obtemos uma hipersuperfície no blowup que cruza E , mas que contém E . Chamamos esta nova hipersuperfície de transformada estrita de Z , e vamos denota-la por $\tilde{Y}$.

Para resolver o Problema de Steiner, vamos intersepar as transformações estritas das hipersuperfícies do problema em questão. Pois, fazendo isso, estaremos eliminando os componentes E , ou seja, eliminando o excesso de interseções ao longo da Veronese. Mas para isso, ainda falta mostrarmos, que as transformações adequadas vão se cruzar transversalmente, mostraremos isso posteriormente.

4.3 O anel de Chow

Em $\mathbb{P}^5$, podemos usar o Teorema de Bézout para contar interseção de cônicas, mas esse teorema não é válido no Blowup. Isto acontece porque no Blowup, o grau de hipersuperfície é mais complexo, não é apenas um número. A informação extra é encontrada no Anel de Chow. Em geral, para uma variedade algébrica, o Anel de Chow descreve como as suas subvariedades se interseptam. Elementos do Anel de Chow são classes de subvariedades que tem as mesmas propriedades de interseção. O que acontece em $\mathbb{P}^5$ é que qualquer hipersuperfície de grau d estarão em uma mesma classe, $[H]$. Lembrando que, a operação de adição no Anel de Chow corresponde à união de duas variedades, ou seja:

$$\underbrace{[H] + [H] + \cdots + [H]}_d = d[H]$$

Ou seja, qualquer hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^5$ estará na classe $d[H]$.

Temos que se duas variedades Z_1 e Z_2 se cruzam transversalmente, então $[Z_1] \cdot [Z_2] = [Z_1] \cap [Z_2]$. Em $\mathbb{P}^5$, a interseção de cinco hiperplanos gerais é apenas um ponto, logo $[H]^5$ é a classe de um ponto. Ou seja, em $\mathbb{P}^5$, a interseção de 5 hipersuperfícies, $Z_1, \dots, Z_5$, de graus $d_1, \dots, d_5$, corresponde, no Anel de Chow a multiplicação $d_1[H] \cdot d_2[H] \cdot d_3[H] \cdot d_4[H] \cdot d_5[H] = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 \cdot d_5 [H]^5$, que representa $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 \cdot d_5$ pontos.

Voltando ao Blowup, queremos descrever o Anel de Chow de $Bl_V \mathbb{P}^5$ ao longo da Veronese. Seja H um hiperplano em $\mathbb{P}^5$ que não contém a Veronese. Seja, $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$. Tomaremos a classe de $\tilde{H}$ como sendo um gerador do Anel de Chow em $Bl_V \mathbb{P}^5$. Se Z é uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^5$, então $[\pi^{-1}(Z)] = d[\tilde{H}]$.

O divisor excepcional não se comporta como $d[\tilde{H}]$ para qualquer d , por isso representa uma nova classe $[E]$ no Anel de Chow. Uma vez que $Bl_V \mathbb{P}^5$ e $\mathbb{P}^5$ são isomorficos longe da Veronese, esse é o único novo gerador do Anel de Chow. Assim, qualquer hipersuperfície em $Bl_V \mathbb{P}^5$ será representada por uma classe $m[\tilde{H}] + n[E]$.

Agora seja H uma hipersuprefície geral de grau d em $\mathbb{P}^5$ contendo a Veronese. Logo, $[\pi^{-1}(H)] = [\tilde{H}] + n[E]$ para algum n , ou seja:

$$[\tilde{H}] = d[\tilde{H}] - n[E] \quad (4.5).$$

Gostariamos de calcular o número inteiro n que aparece na equação (4.5).

Definição 4.8. Dizemos que uma função f se anula para a ordem n ao longo de uma subvariedade Z se f e todas as suas derivadas parciais de ordem $< n$ se anulam em todo Z .

Uma vez que Z é uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^5$, que é definida por uma equação polinomial $P_Z = 0$. A sua imagem inversa $\pi^{-1}(Z)$ é definida por $P_Z \circ \pi = 0$. Logo, o inteiro n é a ordem do anulamento do polinômio $P_Z \circ \pi$ ao longo de E . Podemos verificar que esta é igual à ordem de anulamento de P_Z ao longo de $V = \pi(E)$, veja [4] para mais detalhes. Ou seja, n é o maior inteiro tal que P_Z e todas as suas derivadas parciais de ordem $< n$ estão em $\mathbb{I}(V)$, onde $\mathbb{I}(\mathcal{V})$ denota o ideal de funções nulas na Veronese da superfície $\mathcal{V}$, que é gerada pelas seis equações 4.1.

Para resolver nosso problema, precisamos descobrir as transformações estritas. Dado um ponto p , existem varias cônicas de retas duplas que não passam por p , ou seja, o hiperplano $[H_p]$ de cônicas passando por p não contém a Veronese. Logo, $[\tilde{H}_p] = [\tilde{H}]$

Observe que, por uma mudança de coordenadas pode-se supor que a reta é dada por $x = 0$. Então uma cônica com equação $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0$ é tangente a essa reta se, e somente se, a intersecção desta cônica com a reta $bY^2 + cZ^2 + fYZ = 0$ tem um ponto com multiplicidade dois, ou seja, se e somente se o discriminante $c^2 - 2bf$ desta equação quadrática é nulo. Assim, vemos que a condição de tangência é uma equação quadrática nos coeficientes da cônica. Então, $[\tilde{H}_l] = 2 \cdot [\tilde{H}] - [E]$.

Para encontrar $[\tilde{H}_Q]$, temos que usar ferramentas mais avançadas, para detalhes veja [4] e o apêndice desse trabalho. Temos que a hipersuperfície H_Q de cônicas tangentes à cônica Q tem grau 6. A equação da definição para H_Q se anula ao longo de $\mathcal{V}$, suas primeiras derivadas parciais também se anulam ao longo de $\mathcal{V}$, mas suas derivadas segundas não. Assim, a transformação estrita pode ser escrita como $[\tilde{H}_Q] = 6 \cdot [\tilde{H}] - 2 \cdot [E]$.

4.4 Problema de Steiner

Agora, vamos resolver os casos restantes do Problema de Steiner, para isso usaremos um cálculo de interseções no Anel de Chow. Pela interseção das transformações estritas no Blowup, estamos jogando fora todas as soluções extras formadas pelas retas duplas.

Sabemos que :

$$[\tilde{H}_p] = [\tilde{H}], [\tilde{H}_l] = 2 \cdot [\tilde{H}] - [E] \text{ e } [\tilde{H}_Q] = 6 \cdot [\tilde{H}] - 2 \cdot [E] \quad (4.6)$$

E também que:

$$[\tilde{H}_p]^5 = [\tilde{H}_l]^5 = 1, [\tilde{H}_p]^4[\tilde{H}_l] = [\tilde{H}_p][\tilde{H}_l]^4 = 2 \text{ e } [\tilde{H}_p]^3[\tilde{H}_l]^2 = [\tilde{H}_p]^2[\tilde{H}_l]^3 = 4 \quad (4.7).$$

Observe que, nas equações (4.7) estamos omitindo a classe do Anel de Chow de um ponto. De (4.6), temos que:

$$[\tilde{H}_Q] = 6[\tilde{H}] - 2[E] = 2[\tilde{H}_p] + 2[\tilde{H}_l]$$

Assim, conseguimos a resposta dos casos que faltavam:

Dados quatro pontos e uma cônica em posição geral, existem seis cônicas não degeneradas passando pelos quatro pontos e tangentes a reta. De fato: $[\tilde{H}_Q][\tilde{H}_p]^4 = (2[\tilde{H}_p] + 2[\tilde{H}_l]) \cdot [\tilde{H}_p]^4 = 2([\tilde{H}_p]^5 + [\tilde{H}_p]^4[\tilde{H}_l]) = 2(1 + 2) = 6$

Dados dois pontos e três cônica em posição geral, existem 184 cônicas não degeneradas passando pelos dois pontos e tangente as três cônicas. De fato: $[\tilde{H}_p]^2[\tilde{H}_Q]^3 = [\tilde{H}_p]^2(2[\tilde{H}_p] + 2[\tilde{H}_l])^3 = 8([\tilde{H}_p]^2)([\tilde{H}_p]^3 + 3[\tilde{H}_p]^2[\tilde{H}_l] + 3[\tilde{H}_p][\tilde{H}_l]^2 + [\tilde{H}_l]^3) = 8([\tilde{H}_p]^5 + 3[\tilde{H}_p]^4[\tilde{H}_l] + 3[\tilde{H}_p]^3[\tilde{H}_l]^2 + [\tilde{H}_p]^2[\tilde{H}_l]^3) = 8(1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4) = 184$

Dadas cinco cônicas em posição geral, existem 3264 cônicas não degeneradas tangentes a essas cinco cônicas. De fato: $[\tilde{H}_Q]^5 = (2[\tilde{H}_p] + 2[\tilde{H}_l])^5 = 32([\tilde{H}_p]^5 + 5[\tilde{H}_p]^4[\tilde{H}_l] + 10[\tilde{H}_p]^3[\tilde{H}_l]^2 + 10[\tilde{H}_p]^2[\tilde{H}_l]^3 + 5[\tilde{H}_p][\tilde{H}_l]^4 + [\tilde{H}_l]^5) = 32(1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1) = 3264.$

Analogamente, obtemos a resposta para a pergunta: "Quantas cônicas passam por p pontos, são tangentes a l retas e são tangentes a c cônicas em posição geral e tais que $p + l + c = 5$ "A tabela abaixo mostra as respostas para essa pergunta:

	0 pontos	1 ponto	2 pontos	3 pontos	4 pontos	5 pontos
0 retas	3264	816	184	36	6	1
1 reta	816	224	56	12	2	
2 retas	184	56	16	4		
3 retas	36	12	4			
4 retas	6	2				
5 retas	1					

Obs: na tabela acima, exibimos o número de cônicas passando por p pontos, tangente a l retas e tangente a $5 - p - l$ cônicas.

Observe que se resolvermos o Problema de Apolônio envolvendo três circunferências, usando a tabela acima, vamos encontrar que existem 184 circunferências tangentes a três circunferências dadas, isso ocorre por conta das soluções de retas concorrentes, ou seja, das soluções da forma $(dX + eX + fY)Z = 0$.

Para obter informações sobre posições gerais de cônicas, Ver [12].

Apêndice

O leitor pode consultar também [1] e [13].

4.5 O Espaço Projetivo

Definição 4.9. Uma variedade afim é um subconjunto $V \subseteq \mathbb{C}^n$ definido por um sistema de equações polinomiais,

$$V = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in S\}.$$

Se S é um subconjunto do anel $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, então $X = \mathbb{V}(S)$ é a variedade afim definida pelas equações provenientes de S . Quando $S = \{f\}$ para algum $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ escreveremos simplesmente $\mathbb{V}(f)$. Se f é um polinômio não constante, diremos que $\mathbb{V}(f)$ é uma hipersuperfície, no caso em que o grau de f é um, diremos que $\mathbb{V}(f)$ é um hiperplano.

Definição 4.10. Uma curva (algébrica plana afim) é uma classe de equivalência de polinômios não constantes $f \in K[X, Y]$, módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por uma constante.

Teorema 4.3. (*Teorema de Bezout*) *Sejam f e g duas curvas planas de graus n e m , respectivamente. Então, o número de pontos de interseção das duas curvas, contados com suas multiplicidades, é no máximo $m \cdot n$.*

Definição 4.11. O espaço projetivo de dimensão n é a coleção dos subespaços de dimensão um em $\mathbb{C}^{n+1}$, denotamos este espaço por $\mathbb{P}^n$.

Definimos uma topologia em $\mathbb{P}^n$ considerando a aplicação:

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ v = (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longrightarrow [v] = [x_1, \dots, x_{n+1}]\end{aligned}$$

Definição 4.12. Uma curva algébrica projetiva é uma classe de equivalência de polinômios homogêneos não constantes, $F \in K[X, Y, Z]$, módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por uma constante.

Observa que, cada curva afim $f(x, y) = 0$ em $\mathbb{C}^2$ corresponde a uma curva algébrica projetiva $F(x, y, z) = 0$ em $\mathbb{P}^2$. De fato, para passar do polinômio $f(x, y)$ de grau n para um polinômio homogêneo de três variáveis, basta fazer $F(x, y, z) = z^n \cdot f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, este processo é chamado de homogeneização. Para passar do polinômio homogêneo $F(x, y, z)$ para um polinômio de duas variáveis, basta fazer $f(x, y) = F(x, y, 1)$, este processo é chamado de desomogeneização.

Teorema 4.4. *Sejam F e G duas curvas algébricas projetivas de graus n e m respectivamente. Temos que, se o número de pontos de interseção dessas duas curvas é finito então este será exatamente $n \cdot m$, contados com suas multiplicidades.*

4.6 O Anel de Chow

Definição 4.13. Seja K um espaço vetorial. O grassmanniano $G(d, n)$ é o conjunto dos subespaços vetoriais de dimensão d do espaço vetorial K^n .

seja X um esquema e seja $n = \dim(X)$. O grupo dos ciclos de dimensão k de X é o grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades irredutíveis fechadas de dimensão k de X , a qual denotaremos por $Z_k(X)$. O grupo dos ciclos de X é o grupo graduado

$$Z_*(X) := Z_0(X) \oplus Z_1(X) \oplus \dots \oplus Z_k(X)$$

Definição 4.14. Seja X um esquema. O grupo dos k -ciclos racionalmente equivalentes a zero sobre X é definido como o subgrupo $R_k(X)$ de $Z_k(X)$ gerado pelos divisores de funções racionais de subvariedades de X de dimensão $k + 1$. Ou seja, é o grupo graduado

$$R_*(X) := R_0(X) \oplus R_1(X) \oplus \dots \oplus R_k(X).$$

Definição 4.15. O grupo quociente graduado

$$A_*(X) := Z_*(X)/R_*(X)$$

é chamado o grupo de Chow de X .

Definição 4.16. Quando X (no nosso caso, $X = \mathbb{P}^n$) é uma variedade lisa, o grupo de Chow herda um produto de interseção dos grupos de Chow, ou seja, o grupo torna-se um anel.

Proposição 4.2. *O anel de Chow de um fibrado projetivo $\mathbb{P}(E)$ pode ser calculado a partir da base como*

$$A_*(\mathbb{P}(E)) = (A_*(X))[T]/(T^r + c_1T^{r-1} + \cdots + c_r)$$

Proposição 4.3. $A_*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/\langle h^{n+1} \rangle$, onde $h^i = [H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_i]$, h^i = classe de um $n-i$ -plano, h^n = classe de um ponto e $\deg h^n = 1$.

Proposição 4.4. *Sejam $H_1, \dots, H_r$ hiperplanos em $\mathbb{P}^n$, tais que as equações formam uma sequencia regular. Seja d_i o grau H_i , e seja $Z := H_1 \cap \cdots \cap H_r$. Logo $\deg Z = d_1 \cdots d_r$.*

Proposição 4.5. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ então $\deg X = \deg([X] \cap h^{\dim X})$*

Referências Bibliográficas

- [1] *W. Fulton, Introduction to intersection theory in Algebraic Geometry, Regional conference series in mathematics (1983).*
- [2] *Andrew Bashelor, Amy Ksir e Will Traves, Enumerative Algebraic Geometry of Conics, The mathematical association of America (2008).*
- [3] *Felice Ronga, Alberto Tognoli e Thierry Vust, The number of conics tangent to five given conics : the real case, Revista matemática de la Universidad Complutense de Madrid(1997).*
- [4] *Fernando Cukierman, Introducción al Cálculo de Schubert, Notas del curso dictado en el Primer Encuentro Nacional de Algebra (2003).*
- [5] *Andreas Gathmann, Enumerative Geometry, Notes for a class - University of Kaiserslautern (2003/2004).*
- [6] *Boyer, Carl B., A History of Mathematics, New York: John Wiley Sons (1968).*
- [7] *Gomide, Elza, História da Matemática, Edgard Bchuchor (1996)*
- [8] *Rovilson Mafalda, Resolução de Problemas de tangências por inversões e aplicações à Engenharia, Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (2007)*
- [9] *Rovilson Mafalda, Alexandre Kawano, Uma solução para o Problema de Apolônio e sua construção com régua e compasso, Ghaphica (2007)*
- [10] *André L. Meireles Araujo, Israel Vainscher, Teoria da Interseção Equivariante e a Fórmula de Resíduos de Bott, XVI Escola de Álgebra (2000).*

- [11] *Kalásas Vasconcelos de Araújo*, *A Superfície de Veronese*, *Dissertação (Mestrado)*
- *Universidade Federal de Pernambuco* (2002).
- [12] *Bashelor, Andrew Clark*, *Enumerative Algebraic Geometry: Counting Conics*, *Naval Academy Annapolis Md* (2005)
- [13] *Israel Vainshteyn* *Classes características em Geometria Algébrica*, *IMPA* (1985)