



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

**Maria Isabelle Silva**

**Matróides Com Poucas Bases Não-Comuns**

Recife

Maio 2012



Maria Isabelle Silva

## Matróides Com Poucas Bases Não-Comuns

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional da Universidade Federal de Pernambuco, como um dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Matemática Computacional.*

**Orientador: Prof. Manoel Lemos**

Recife

Maiο 2012

Catálogo na fonte  
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno, CRB 4-1758

Silva, Maria Isabelle.

Matróides com poucas bases não-comuns / Maria  
Isabelle Silva – Recife: O Autor, 2012.

101 p.: fig.

Orientador: Manoel José Machado Soares Lemos  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Matróides. I. Lemos, Manoel José Machado  
Soares (orientador). II. Título.

511.6

(22. ed.)

MEI 2012



UFPE 60 ANOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DOUTORADO EM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO**

**MARIA ISABELLE SILVA**

*“MATRÓIDES COM POUCAS BASES NÃO-COMUNS”*

A Banca Examinadora composta pelos Professores MANOEL JOSÉ MACHADO SOARES LEMOS (PRESIDENTE), SÓSTENES LUIZ SOARES LINS e SÍLVIO DE BARROS MELO E GAUSS MOUTINHO CORDEIRO todos da Universidade Federal de Pernambuco; EMERSON ALEXANDRE DE OLIVEIRA LIMA, da Escola Politécnica da Universidade de Pernambuco, considera a candidata:

APROVADA   ( ) EM EXIGÊNCIA   ( ) REPROVADA

Secretaria do Programa de Doutorado em Matemática Computacional do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, aos 30 dias do mês de maio de 2012,

## Resumo

Nesta tese caracterizamos pares de matr ides  $(M_1; M_2)$  que possuem poucas bases n o-comuns, isto  ,  $|B(M_1) \Delta B(M_2)| \leq n$ , para um natural  $n \geq 3$ , desde que  $M_1$  e  $M_2$  n o possuam circuitos e cocircuitos pequenos, mais precisamente com cardinalidade inferior a  $n$ . Para o caso em que  $n = 3$ , fazemos o estudo tamb m para as matr ides possuindo circuitos e cocircuitos de qualquer tamanho, inclusive tamanhos um e dois.

Palavras-chave: Matr ides, Bases, Circuitos-Hiperplanos

## Abstract

In this thesis we characterize pairs of matroids  $(M_1; M_2)$  which have few non-common bases, ie,  $|B(M_1) \Delta B(M_2)| \leq n$ , for a natural  $n \geq 3$ , provided that  $M_1$  and  $M_2$  small have not circuits and cocircuits, that is, with cardinality less than  $n$ . For the case where  $n = 3$ , we study matroids having cocircuits and circuits of any size, including sizes one and two.

Keywords: Matroid, Basis, Circuit-hyperplane

## Agradecimentos

Agradeço:

- Inicialmente a uma força superior, que embora tenha várias denominações, eu prefiro chamar de Deus. Ele que sempre esteve presente em todos os momentos da minha vida, e muito fortemente nesse doutorado.
- Ao meu estimado orientador Manoel Lemos, pela oportunidade cedida, dedicação ao nosso trabalho científico, aos valorosos ensinamentos, as brilhantes discussões matemáticas, as maravilhosas aulas e a sua disponibilidade sempre em ajudar a tornar esse trabalho um sonho realizado.
- Ao meu querido amigo Ives, pela atenção, amizade, dignidade, apoio nos momentos difíceis, dedicação e incentivo durante todo desenvolvimento deste trabalho. Seu companheirismo foi de fundamental importância para que eu conquistasse esta vitória.
- Ao meu amigo Davis, por toda trajetória profissional que desenvolvemos juntos, desde da graduação, passando pelo mestrado até o doutorado.
- Ao professor Braúlio Maia Junior, que tanto me incentivou a fazer o doutorado aqui em Recife e me colocou em contato com o professor Manoel Lemos.
- Aos queridos professores Katia Guimarães, Klaus Vasconcellos, Marcilia Andrade, Ruy Queiroz, Silvio Melo, Tsang Ing ren e em especial ao professor sóstenes Lins, todos contribuíram muito para minha formação através das disciplinas ministradas.
- Ao professor e amigo Francisco Cribari, por todo o apoio e força dados em momentos difíceis, bem como por todas as palavras de incentivo proferidas por muitas vezes.

- Ao amigo Aron Simis, pelas conversas enriquecedoras que tantas vezes tivemos.
- Aos funcionários Carlos e Esaú do Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional; Tânia e Cláudia do Departamento de Matemática e Valeria da Pós-Graduação em Estatística pela disponibilidade em ajudar.
- A minha instituição de origem UEPB, pela disponibilidade na minha liberação.
- As minhas irmãs Mary, Célia, Zeneide, Zuleide e Darizy, cada uma desenvolveu um papel diferente nesses quatro anos, dividindo comigo minha carga pessoal para que pudesse realizar este trabalho.
- Aos meus pais Assis e Guia por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida.
- Aos meus primos Israel Aires e Flavio Carvalho, por me acolherem em sua casa no primeiro ano de doutorado.
- Ao meu companheiro Luiz Carlos Yanes Junior, por toda força, carinho, dedicação, paciência e amor nesses últimos anos.

Dedico este trabalho a minha família, em especial ao meu filho Luís Eduardo.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>16</b>
2.1	Definições e Exemplos . . . . .	16
2.2	Dualidade . . . . .	20
2.3	Menores . . . . .	21
2.4	Conectividade . . . . .	22
<b>3</b>	<b>No Máximo <math>n</math> Bases Não-Comuns</b>	<b>25</b>
3.1	Lema de Preparação . . . . .	27
3.2	Relaxando um Circuito-Hiperlinha . . . . .	38
3.3	Relaxando Linha de Tutte-Hiperplano e Circuito-Hiperplano . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Determinando os 3-Pares Exatos</b>	<b>56</b>
4.1	Matróides Especiais . . . . .	56

4.2	Os 3-Pares Exatos Cujas Matr6ides Possuem o Mesmo Posto . . . . .	72
4.3	Matr6ides CL-Livre . . . . .	91

# Capítulo 1

## Introdução

Nesta tese construiremos pares de matróides  $(M_1, M_2)$  que possuem poucas bases não-comuns, dando continuidade ao estudo iniciado por Truemper [6] e posteriormente tratado por Mills [4] e também por Lemos [1, 2, 3].

Neste capítulo introdutório assumiremos que o leitor tenha familiaridade com os conceitos básicos da teoria das matróides que, por completude, serão apresentados no Capítulo 2, estando os mesmos de acordo com a referência padrão para a área, que é o livro de Oxley [5].

Para matróides  $M_1$  e  $M_2$  definidas sobre um mesmo conjunto  $E$ , diremos que  $(M_1, M_2)$  é um *n-par* quando

$$|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n \tag{1.1}$$

Em outras palavras,  $M_1$  e  $M_2$  possuem no máximo  $n$  bases não-comuns, e, para um  $n$  fixo, podemos considerar que estas matróides têm "poucas" bases não-comuns. Quando ocorre a igualdade em (1.1), o n-par  $(M_1, M_2)$  é dito *exato*.

Salientamos que o problema tratado é invariante por dualidade, pois quando tivermos  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n$ , também teremos  $|\mathcal{B}(M_1^*) \Delta \mathcal{B}(M_2^*)| \leq n$ . Isto é,  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par se e somente se  $(M_1^*, M_2^*)$  é um  $n$ -par.

A *cintura* de uma matróide  $M$ , denotada por  $g(M)$ , que é o tamanho do menor circuito desta matróide, será um conceito fundamental neste trabalho.

Aqui melhoramos um limite estabelecido em [1]. Nesse artigo, Lemos caracterizou matróides  $M_1$  e  $M_2$  tais que  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par, com  $n \geq 3$ , desde que

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1)\} \geq n + 1.$$

Sob estas hipóteses, Lemos [1] mostrou que também se tem

$$\min\{g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n + 1.$$

No nosso caso, fazemos caracterização similar com a diferença que a condição usada foi

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1), g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n, \text{ para } i \in \{1, 2\}$$

isto é, diminuimos o limite inferior para a cintura das matróides envolvidas. Além disso, caracterizamos um 3-par exato  $(M_1, M_2)$ , com  $M_1$  e  $M_2$  podendo possuir circuitos de tamanho um ou dois.

Quando  $C$  é um circuito-hiperplano de uma matróide  $M$ , o conjunto  $\mathcal{B}(M) \cup \{C\}$  é a família de bases de uma matróide, denotada por  $M_C$ . Diremos que  $M_C$  foi obtida a partir de  $M$  após o *relaxamento* do circuito-hiperplano  $C$ . Note que

$$\mathcal{B}(M) \Delta \mathcal{B}(M_C) = \mathcal{B}(M_C) - \mathcal{B}(M) = \{C\};$$

isto é  $(M, M_C)$  é um 1-par. Esta operação de relaxamento de circuito-hiperplano será bastante utilizada nesta tese, juntamente com duas outras operações, a saber, relaxamento

de circuito-hiperlinha e relaxamento de linha de Tutte-hiperplano, que serão apresentadas posteriormente por serem de caráter bastante técnico.

Em [6], Trumper descreveu quando duas matróides  $M_1$  e  $M_2$ , definidas sobre o mesmo conjunto, possuem exatamente uma base não-comum, ou seja, quando  $(M_1, M_2)$  é um 1-par. Neste caso,  $\mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_2)$  ou  $\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ . Sem perda de generalidade, enunciamos o seu resultado assumindo que  $\mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_2)$ .

**Teorema 1.1.** *Suponha que  $M_1$  e  $M_2$  são matróides definidas sobre  $E$  tais que  $\mathcal{B}(M_2) = \mathcal{B}(M_1) \cup \{X\}$ . Se*

$$T = \{e \in E : e \text{ é um laço de } M_1 \text{ e } M_2 \text{ ou é um colaço de } M_1 \text{ e } M_2\}$$

*então  $M_2 \setminus T$  é obtida a partir de  $M_1 \setminus T$  relaxando o circuito hiperplano  $X$  de  $M_1 \setminus T$ .*

Observe que o resultado de Truemper garante que esta extensão de um elemento que é laço ou colaço comum as duas matróides não altera a propriedade de ser 1-par. Além disso, a maneira de se construir os 1-pares é unicamente via relaxamento de circuito-hiperplano.

Aqui denominaremos de *buquê* uma matróide  $M$  que só possui laços e colaços. Assim, se  $M$  possui  $n$  elementos e posto  $r$ , temos  $M \cong U_{r,r} \oplus U_{0,n-r}$ . Observe que no Teorema 1.1,  $M = M_1|T = M_2|T$  é um buquê comum as duas matróides, isto é,

$$M_1 = M_1 \setminus T \oplus M \text{ e } M_2 = M_2 \setminus T \oplus M$$

e sua remoção não modifica o fato de  $(M_1, M_2)$  ser um 1-par.

De maneira geral, para um  $n$ -par exato  $(M_1, M_2)$  definido sobre  $E$  e um buquê  $N$ , tal que  $E(N) \cap E = \emptyset$ , podemos definir um novo  $n$ -par exato, que é,  $(M_1 \oplus N, M_2 \oplus N)$ . Diremos que este  $n$ -par exato é *soma direta* de  $(M_1, M_2)$  com  $N$  e denotamos por

$(M_1, M_2) \oplus N$ . Diremos ainda que  $(M_1, M_2)$  foi obtido a partir de  $(M_1, M_2) \oplus N$  pela remoção do buquê  $N$ . Um  $n$ -par exato é *irredutível* quando não for possível fatorar um buquê não trivial deste. Desta forma, após fatorar o maior buquê do 1-par, podemos reescrever o resultado de Truemper da seguinte forma:

**Teorema 1.2.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matróides definidas sobre um conjunto  $E$ . Se  $\mathcal{B}(M_2) = \mathcal{B}(M_1) \cup \{X\}$ , então  $M_2$  é obtida de  $M_1$  relaxando o circuito hiperplano  $X$  de  $M_1$ .*

Em [4], Mills provou um resultado semelhante ao de Truemper para 2-pares, a saber:  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 2$ , que gerou o seguinte:

**Teorema 1.3.** *Suponha que  $M_1$  e  $M_2$  são matróides conexas sobre um mesmo conjunto  $E$  tais que  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 2$ . Então*

- i)  $M_1$  ou  $M_2$  é um relaxamento duplo da outra, ou*
- ii)  $M_1$  e  $M_2$  relaxam a mesma matróide, ou*
- iii) Existe um subconjunto  $\{e, f\}$  de  $E$  que é um cocircuito de  $M_1$  e  $M_2$  tal que  $M_1 \setminus \{e, f\}$  e  $M_2 \setminus \{e, f\}$  é um relaxamento uma da outra, ou*
- iv) Existe um subconjunto  $\{e, f\}$  de  $E$  que é um circuito de  $M_1$  e  $M_2$  tal que  $M_1 / \{e, f\}$  e  $M_2 / \{e, f\}$  é um relaxamento uma da outra, ou*
- v)  $\{M_1, M_2\} = \{U_{0,1}, U_{1,1}\}$*

Nesse mesmo artigo Mills propôs a seguinte conjectura:

**Conjectura 1.4.** *Seja  $n$  um inteiro positivo. Suponha que  $M_1$  e  $M_2$  são matróides  $n+1$ -conexas sobre um conjunto  $E$ , onde  $|E| \geq 2$ . Se  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = n$ , então existe um*

inteiro  $j \in [0, n]$  e uma matr oide  $N$  sobre  $E$  que   obtida de  $M_1$  e  $M_2$  relaxando  $j$  e  $n - j$  circuitos-hiperplanos, respectivamente.

Anos mais tarde Lemos [1] provou o seguinte teorema, resolvendo assim a conjectura deixada por Mills:

**Teorema 1.5.** *Seja  $n$  um inteiro positivo. Se  $(M_1, M_2)$    um  $n$ -par e  $\min\{g(M_1), g(M_1^*)\} \geq n + 1$ , ent o existe uma matr oide  $N$  que   obtida de  $M_1$  e  $M_2$  relaxando  $n_1$  e  $n_2$  circuitos-hiperplanos, respectivamente, onde  $n_1$  e  $n_2$  s o inteiros n o-negativos tais que  $n_1 + n_2 = |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n$ .*

Observe que Lemos, trocou a hip tese de  $(n + 1)$ -conectividade da conjectura por  $\min\{g(M_1), g(M_1^*)\} \geq n + 1$ , o que n o altera em nada o problema visto que as matr oides  $(n + 1)$ -conexas possuem todos os circuitos e cocircuitos de tamanho pelo menos  $n + 1$ , desde que n o sejam pequenas.

Nesta tese, melhoramos o resultado de Lemos, ao enfraquecermos a hip tese sobre a cintura e cocintura das matr oides, mais precisamente, substituindo a hip tese  $\min\{g(M_1), g(M_1^*)\} \geq n + 1$ , por  $\min\{g(M_1), g(M_1^*), g(M_2), g(M_2^*)\} \geq n$ . Em [1], Lemos utilizou fortemente a opera o de relaxamento de circuito-hiperplano. No nosso caso, com essa troca de hip teses duas novas opera es surgiram: relaxamento de circuito-hiperlinha e relaxamento de linha de Tutte-hiperplano, que ser o tratadas posteriormente.

A organiza o deste trabalho deu-se da seguinte forma: No Cap tulo 1 descrevemos uma introdu o do problema. No Cap tulo 2, fizemos uma breve revis o da Teoria de Matr oides, focando especialmente em defini es e resultados que foram fortemente utilizados para o desenvolvimento desta tese.

No Capítulo 3, melhoramos os resultados obtidos por Lemos em [1], diminuindo em 1 o limite da hipótese  $\min\{g(M_1), g(M_1^*)\} \geq n + 1$ . Para isso foi necessário a introdução de dois novos tipos de relaxamento. O relaxamento de circuito-hiperlinha e o relaxamento de uma linha de Tutte-hiperplano. Essas duas operações foram de fundamental importância para obtenção dos nossos resultados.

Por fim, no Capítulo 4, descrevemos alguns tipos especiais de matróides, a saber, matróides com no máximo três bases, e ainda, matróides com no máximo três bases contendo um dado elemento  $e$ . Em seguida, caracterizamos 3-pares quando suas matróides possuem postos diferentes. Mais adiante, fazemos essa caracterização quando essas matróides possuem mesmo posto. Neste caso fizemos todo o estudo com essas matróides possuindo laços e colaços. Em seguida com elas possuindo menor circuito de tamanho 2. Visto que quando o menor circuito e cocircuito possuir tamanho pelo menos 3 segue dos resultados obtidos no Capítulo 3.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo, adotamos as definições e notações padrão que foram consideradas por Oxley[5]. Aqui fazemos uma breve revisão da Teoria das Matróides utilizada nos capítulos subsequentes.

### 2.1 Definições e Exemplos

**Definição 2.1.** *Seja  $E$  um conjunto finito e  $\mathcal{I}$  uma coleção de subconjuntos de  $E$ . Uma matróide  $M$  é um par ordenado  $(E, \mathcal{I})$  satisfazendo*

(I1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ,

(I2) Se  $I \in \mathcal{I}$  e  $I' \subseteq I$ , então  $I' \in \mathcal{I}$ ,

(I3) Se  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$  e  $|I_1| < |I_2|$ , então existe um elemento  $e \in I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$ .

Neste caso  $M$  é chamada uma matróide sobre  $E$ . Os membros de  $\mathcal{I}$  são chamados de *conjuntos independentes* da matróide  $M$ . Os independentes maximais são chamados de *bases* de  $M$ . Denotamos o conjunto das bases de uma matróide  $M$  por  $\mathcal{B}(M)$ .

As bases de uma matróide satisfazem as seguintes propriedades contidas nos dois próximos resultados:

**Proposição 2.2.** *Se  $B_1$  e  $B_2$  são bases de uma matróide  $M$ , então  $|B_1| = |B_2|$ .*

**Proposição 2.3.** *Seja  $\mathcal{B}$  uma família de subconjuntos de um conjunto  $E$ . Então  $\mathcal{B}$  é a coleção de bases de uma matróide  $M$  definida sobre  $E$  se, e somente se  $\mathcal{B}$  satisfaz*

(B1)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) *Se  $B_1$  e  $B_2$  são membros de  $\mathcal{B}$  e  $x \in B_1 - B_2$ , então existe um elemento  $y \in B_2 - B_1$  tal que  $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$*

Um subconjunto de  $E$  que não pertence a  $\mathcal{I}$  é dito *dependente*. Denotaremos a família de dependentes da matróide  $M$ , por  $\mathcal{D}(M)$ . Um conjunto dependente minimal de uma matróide  $M$  é chamado de *circuito* de  $M$ . O conjunto de todos os circuitos de  $M$  será denotado por  $\mathcal{C}(M)$ .

**Proposição 2.4.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma família de subconjuntos de um conjunto  $E$ . Então  $\mathcal{C}$  é a coleção de circuitos de uma matróide se, e somente se  $\mathcal{C}$  satisfaz as condições*

(C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ ,

(C2) *Se  $C_1$  e  $C_2$  são membros de  $\mathcal{C}$  e  $C_1 \subseteq C_2$  então  $C_1 = C_2$ ,*

**(C3)** Se  $C_1$  e  $C_2$  são membros diferentes de  $\mathcal{C}$  e  $e \in C_1 \cap C_2$ , então existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$

**Proposição 2.5.** *Suponha  $I$  um conjunto independente em uma matróide  $M$  e que  $e$  seja um elemento de  $M$  tal que  $I \cup e$  é um dependente. Então  $M$  tem um único circuito contido em  $I \cup e$  e este circuito contém  $e$ .*

Sejam  $M$  uma matróide  $(E, \mathcal{I})$  e  $X \subseteq E$ . Considere ainda  $\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}(M)\}$ . É fácil provar que o par  $(X, \mathcal{I}|X)$  é uma matróide. Chamamos esta matróide da *restrição* de  $M$  a  $X$ , sendo denotada por  $M|X$ . Como  $M|X$  é uma matróide, temos pelo Teorema 2.2 que todas as bases são equicardinais, temos a seguinte definição:

**Definição 2.6.** *Definimos o posto de um conjunto  $X \subseteq E$  na matróide  $M$ , denotado por  $r(X)$ , como sendo o tamanho de uma base de  $M|X$ .*

O posto de quaisquer conjuntos  $X, Y \subseteq E$  satisfaz as seguintes propriedades:

**(R1)** Se  $X \subseteq E$ , então  $0 \leq r(X) \leq |X|$

**(R2)** Se  $X \subseteq Y \subseteq E$ , então  $r(X) \leq r(Y)$

**(R3)** Se  $X, Y \subseteq E$ , então  $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ .

Além disso, usaremos a notação  $r(M)$  representando  $r(E(M))$ .

**Exemplo 2.7.** *Sejam  $m$  e  $n$  inteiros não-negativos tais que  $m \leq n$ . Sejam  $E$  um conjunto com  $n$  elementos e  $\mathcal{B}$  a coleção dos subconjuntos de  $E$  com  $m$  elementos. É fácil ver que  $\mathcal{B}$  é a coleção de bases de uma matróide sobre  $E$ , a qual é denotada por  $U_{m,n}$  e denominada de matróide uniforme de posto  $m$ . Claramente*

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E : |X| \leq m\} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } m = n \\ \{X \subseteq E : |X| = m + 1\}, & \text{se } m < n \end{cases}$$

**Proposição 2.8.** *Sejam  $M$  uma matróide com função posto  $r$  e  $X \subseteq E(M)$ . Então*

- (i)  $X$  é independente se e somente se  $|X| = r(X)$ ;
- (ii)  $X$  é base se e somente se  $|X| = r(X) = r(M)$ ;
- (iii)  $X$  é circuito se e somente se  $X$  é não-vazio e, para todo  $x$  em  $X$ ,  $r(X - x) = |X| - 1 = r(X)$ .

**Definição 2.9.** *Seja  $M$  uma matróide sobre  $E$  e  $r$  sua função posto. Seja  $cl$  uma função de  $2^E$  em  $2^E$ , definida para todo  $X \subseteq E$ , por*

$$cl(X) = \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}.$$

Esta função é chamada de *função fecho* de  $M$  e satisfaz as seguintes propriedades:

- (CL1) Se  $X \subseteq E$ , então  $X \subseteq cl(X)$ ,
- (CL2) Se  $X \subseteq Y \subseteq E$ , então  $cl(X) \subseteq cl(Y)$ ,
- (CL3) Se  $X \subseteq E$ , então  $cl(cl(X)) = cl(X)$ ,
- (CL4) Se  $X \subseteq E$ ,  $x \in E$ , e  $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ , então  $x \in cl(X \cup y)$

Se  $X = cl(X)$ , dizemos que  $X$  é um *fechado* de  $M$ . Se além de  $X$  ser fechado,  $r(X) = r(M) - 1$ , então dizemos que  $X$  é um *hiperplano* de  $M$ . Dizemos ainda que  $X$  é um *conjunto gerador* de  $M$  se  $cl(X) = E(M)$ .

Seja  $M$  uma matróide e  $X \subseteq E(M)$ . Se  $X$  é circuito e hiperplano de  $M$ , diremos que  $X$  é um *circuito-hiperplano*. A família de todos os circuitos-hiperplanos de  $M$  será denotada por  $\mathcal{CH}(M)$ .

**Proposição 2.10.** *Sejam  $M$  uma matróide e  $X \in \mathcal{CH}(M)$ . Se  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(M) \cup \{X\}$ , então  $\mathcal{B}'$  é o conjunto de bases de uma matróide  $M'$  sobre  $E(M)$ . Além disso,*

$$\mathcal{C}(M') = (\mathcal{C}(M) - X) \cup \{X \cup e : e \in E(M) - X\}$$

Neste caso, dizemos que  $M'$  é obtida de  $M$  relaxando-se o circuito-hiperplano  $X$ . Esta operação de *relaxamento de circuito-hiperplano* será bastante utilizada em nosso trabalho.

## 2.2 Dualidade

**Teorema 2.11.** *Se  $M$  uma matróide sobre  $E$  e  $\mathcal{B}^*(M) = \{E - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$ , então  $\mathcal{B}^*(M)$  é o conjunto de bases de uma matróide sobre  $E$ .*

A matróide cuja a existência é garantida pelo teorema acima, tendo o conjunto de bases  $\mathcal{B}^*(M)$ , é chamada matróide *dual* de  $M$  e é denotada por  $M^*$ . Conseqüentemente,  $\mathcal{B}(M^*) = \mathcal{B}^*(M)$ . Além disso  $(M^*)^* = M$ .

As bases de  $M^*$  são chamadas de *cobases* de  $M$ , assim como os circuitos, independentes, hiperplanos e geradores de  $M^*$ , são chamados de *cocircuitos*, *coindependentes*, *cohiperplanos* e *cogeradores* de  $M$ , respectivamente.

**Proposição 2.12.** *Se  $M$  uma matróide sobre  $E$  e suponha que  $X \subseteq E$ , então*

- (i)  *$X$  é independente se e somente se  $E - X$  é cogerador;*
- (ii)  *$X$  é gerador se e somente se  $E - X$  é coindependente;*
- (iii)  *$X$  é hiperplano se e somente se  $E - X$  é cocircuito;*
- (iv)  *$X$  é circuito se e somente se  $E - X$  é cohiperplano.*

**Proposição 2.13.** *Se  $M$  uma matróide sobre  $E$  e  $X \subseteq E$ , então*

- (i)  $r(M) + r^*(M) = |E(M)|$
- (ii)  $r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X)$

## 2.3 Menores

Seja  $M$  uma matróide sobre  $E$  e  $T$  um subconjunto de  $E$ . Observe que

$$\mathcal{I}' = \{I \subseteq E(M) - T : I \in \mathcal{I}(M)\}$$

é o conjunto de independentes de uma matróide sobre  $E - T$ . Essa matróide  $(E - T, \mathcal{I}')$  que diremos ter sido obtida de  $M$  *deletando-se(ou removendo-se)*  $T$ , será denotada por  $M \setminus T$ . Definimos ainda a contração de um conjunto  $T$  de uma matróide  $M$  por

$$M/T = (M^* \setminus T)^*$$

**Proposição 2.14.** *Se  $M$  é uma matróide sobre  $E$  e  $T \subseteq E$ , então para todo  $X \subseteq E - T$  temos*

(i)  $r_{M \setminus T}(X) = r_M(X)$

(ii)  $r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T)$ .

A próxima proposição caracteriza o conjunto de independentes, circuitos, bases e o fecho de uma determinada matróide  $M \setminus T$ .

**Proposição 2.15.** *Para todo  $X \subseteq E(M) - T$  temos*

1.  $\mathcal{I}(M \setminus T) = \{I \subseteq E - T : I \in \mathcal{I}(M)\}$

2.  $\mathcal{C}(M \setminus T) = \{C \subseteq E - T : C \in \mathcal{C}(M)\}$

3.  $\mathcal{B}(M \setminus T) = \max\{B - T : B \in \mathcal{B}(M)\}$

4.  $cl_{M \setminus T}(X) = cl_M(X) - T$

## 2.4 Conectividade

**Definição 2.16.** *A função conectividade de uma matróide  $M$  é definida por*

$$\xi_M(X) = r_M(X) + r_M(E(M) - X) - r(M) + 1$$

para todo  $X \subseteq E(M)$ .

Esta função satisfaz as seguintes propriedades para todo  $X$  e  $Y$  contidos em  $E(M)$ :

**P1)**  $\xi_M(X) = \xi_M(E(M) - X)$

**P2)**  $\xi_M(X) \geq 1$

$$\mathbf{P3)} \quad \xi_M(X) = \xi_{M^*}(X)$$

$$\mathbf{P4)} \quad \xi_M(X) = r_M(X) + r_{M^*}(X) - |X| + 1$$

$$\mathbf{P5)} \quad \xi_M(X) + \xi_M(Y) \geq \xi_M(X \cup Y) + \xi_M(X \cap Y)$$

$$\mathbf{P6)} \quad \xi_{M/e}(X) = \begin{cases} \xi_M(X), & \text{se } e \notin cl_M(X) \\ \xi_M(X) - 1, & \text{se } e \in cl_M(X) \end{cases}, \text{ quando } e \in E(M) - X.$$

Diremos que  $S \subseteq E(M)$  é um conjunto *separador* de uma matróide  $M$  quando

$$\xi_M(S) = 1$$

Observe que  $\emptyset$  e  $E(M)$  são conjuntos separadores de  $M$ . Quando esses são os únicos separadores, dizemos que  $M$  é *conexa*.

Para toda matróide  $M$ , existe uma partição  $\{S_1, \dots, S_n\}$  de  $E(M)$ , onde  $S_i$  é minimal com respeito a ser não-vazio e separador, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Considere  $M_i = M|S_i$ , diremos que  $M_1, M_2, \dots, M_n$  são as componentes conexas de  $M$ .

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matróides tais que  $E(M_1) \cap E(M_2) = \emptyset$ . Considere a seguinte família de subconjuntos de  $E(M_1) \cup E(M_2)$ :

$$\mathcal{B} = \{B_1 \cup B_2 : B_i \in \mathcal{B}(M_i), i \in \{1, 2\}\}.$$

$\mathcal{B}$  é a família de bases de uma matróide que será denotada por  $M_1 \oplus M_2$  e dita *a soma direta* ou *1-soma* de  $M_1$  e  $M_2$ . Observe que  $E(M_1)$  e  $E(M_2)$  são conjuntos separadores de  $M_1 \oplus M_2$ .

Como a soma direta é comutativa e associativa, pode-se fazer a soma direta de qualquer número de matróides, desde que seus conjuntos de elementos sejam disjuntos. Caso  $M_1, M_2, \dots, M_n$  sejam as componentes conexas de uma matróide, então

$$M = M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_n.$$

O próximo teorema, de autoria de Tutte, é muito usado em argumentação por indução será de grande valia no capítulo 4.

**Teorema 2.17.** *Seja  $e$  um elemento de uma matróide conexa  $M$ . Então  $M \setminus e$  ou  $M/e$  é conexa.*

# Capítulo 3

## No Máximo $n$ Bases Não-Comuns

Neste Capítulo, melhoramos um limite estabelecido por Lemos [1], nesse artigo, Lemos descreve os pares de matróides  $M_1$  e  $M_2$ , tais que  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n$ , desde que

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1)\} \geq n + 1.$$

Antes de enunciarmos nosso resultado principal (**Teorema 3.4**), faremos duas definições bastante importantes para um melhor entendimento deste.

**Definição 3.1.** Dizemos que um par de matróides  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par, para um inteiro não negativo  $n$ , quando  $M_1$  e  $M_2$  estão definidas sobre um mesmo conjunto  $E$  e  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n$ . Dizemos ainda que  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par exato se  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = n$ .

**Definição 3.2.** Seja  $M$  uma matróide definida sobre  $E$ . A cintura de  $M$ , denotada por  $g(M)$ , é a cardinalidade do menor circuito de  $M$ , se esta matróide possui algum circuito, caso contrário dizemos que  $g(M) = 0$ .

O resultado de Lemos é o seguinte:

**Teorema 3.3.** *Seja  $n$  um inteiro positivo. Se  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par e*

$$\min\{g(M_1), g(M_1^*)\} \geq n + 1,$$

*então existe uma matróide  $N$  que é obtida de  $M_1$  e  $M_2$  relaxando  $n_1$  e  $n_2$  circuitos-hiperplanos, respectivamente, onde  $n_1$  e  $n_2$  são inteiros não-negativos tais que*

$$n_1 + n_2 = |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n.$$

Aqui usamos a seguinte hipótese

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1), g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n.$$

Com isso duas novas operações surgiram, a saber relaxamento de circuito-hiperlinha e relaxamento de linha de Tutte-hiperplano. E o resultado que obtido foi:

**Teorema 3.4.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matróides sobre um mesmo conjunto  $E$  tais que,*

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1), g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n \geq 3.$$

*São equivalentes:*

- i)  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par;*
- ii) a) Para algum  $i \in \{1, 2\}$ ,  $M_i$  é obtida de  $M_{3-i}$  relaxando-se um circuito hiperlinha, preservando um cocircuito com  $n$  elementos, ou*
- b) Para algum  $i \in \{1, 2\}$ ,  $M_i$  é obtida de  $M_{3-i}$  relaxando-se uma linha de Tutte-hiperplano, preservando um circuito com  $n$  elementos, ou*

c) *Existe uma matr oide  $N$  que   obtida de  $M_1$  e  $M_2$ , relaxando  $n_1$  e  $n_2$  circuitos hiperplanos, respectivamente. Tais que  $n_1 + n_2 = |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)|$ .*

Observe que o Teorema 3.3   obtido do resultado anterior pois a) e b) n o ocorrem quando  $\min\{g(M_1), g(M_1^*)g(M_2), g(M_2^*)\} \geq n + 1$ .

O Teorema 3.4   mostrado ao longo deste cap tulo. Dividimos sua demonstra o em tr s outros resultados que s o os Teoremas de 3.11, 3.15 e 3.16. O Teorema 3.11, refere-se ao caso em que existe um independente n o maximal de uma das matr oides que   circuito da outra, onde fizemos uso da opera o de relaxamento de circuito-hiperlinha. No Teorema 3.15, fazemos o caso em que  $\mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ , mas  $\mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2) \not\subseteq \mathcal{CH}(M_2)$ , a opera o utilizada neste caso foi a de relaxamento de linha de Tutte-hiperplano. Por fim, no Teorema 3.16, trabalhamos  $\mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2) \subseteq \mathcal{CH}(M_2)$ , onde a opera o foi a de relaxamento de circuito-hiperplano.

Note que os resultados que provamos s o invariantes por dualidade, isto  , se  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n$ , tamb m temos que  $|\mathcal{B}(M_1^*) \Delta \mathcal{B}(M_2^*)| \leq n$ . Da mesma forma, nas hip teses, n o importa se estamos trabalhando com  $g(M_i)$  ou  $g(M_i^*)$ , pois podemos dualizar nossas matr oides sempre que necess rio, sem que isso altere nosso resultado final.

### 3.1 Lema de Preparac o

Nesta se o mostramos que o par de matr oides  $M_1$  e  $M_2$  que caracterizamos possuem o mesmo posto sob determinadas condi es. Al m disso, fazemos um Lema de prepara o para o caso em que  $C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ , com  $C \notin \mathcal{B}(M_1)$ .

**Teorema 3.5.** *Seja  $n$  um inteiro positivo. Se  $(M_1, M_2)$    um  $n$ -par e  $\max\{g(M_1), g^*(M_1)\} \geq$*

$n$ , então  $r(M_1) = r(M_2)$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade podemos supor que  $g(M_1) \geq n$ , já que as hipóteses e conclusões deste resultado são invariantes por dualidade. Argumentaremos por contradição. Suponha que  $r(M_1) \neq r(M_2)$ . Neste caso

$$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \emptyset. \quad (3.1)$$

Escolha  $C \in \mathcal{C}(M_1)$ . Para todo  $e \in C$ ,  $C - e$  pode ser completado a uma base de  $M_1$ , a qual denotaremos por  $B_e$ . Note que

$$B_e \neq B_f,$$

quando  $\{e, f\}$  é um 2-subconjunto de  $C$ , do contrário

$$C \subseteq B_e = B_f.$$

Logo,

$$\{B_e : e \in C\} \subseteq \mathcal{B}(M_1) = \mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2), \quad (3.2)$$

onde a última igualdade segue de (3.1). Tomando a cardinalidade em (3.2), temos

$$|C| = |\{B_e : e \in C\}| \leq |\mathcal{B}(M_1)| = |\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)|. \quad (3.3)$$

Além disso,

$$n \leq g(M_1) \leq |C| \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4), temos que

$$n \leq |C| \leq |\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)| \leq |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n;$$

a última desigualdade segue do fato de  $(M_1, M_2)$  ser um  $n$ -par. Logo, ocorrem as igualdades nas equações anteriores. Desta forma temos que

$$\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1).$$

Uma contradição pois assumimos que  $r(M_1) \neq r(M_2)$ . E assim  $r(M_1) = r(M_2)$ .  $\square$

A partir de agora podemos supor que as matróides  $M_1$  e  $M_2$  que estamos caracterizando estão definidas sobre um mesmo conjunto  $E$  e possuem mesmo posto.

Antes do próximo lema, faremos uma definição que será bastante utilizada nas nossas demonstrações.

**Definição 3.6.** *Para uma matróide  $M$ , um subconjunto  $L$  de  $E(M)$  é dito uma linha de Tutte, quando  $M|L$  tem coposto dois e não possui colaços.*

Em [7], Tutte mostrou que  $L$  tem uma partição,

$$\{P_1, P_2, \dots, P_m\} \text{ para algum } m \geq 2,$$

que é chamada de partição canônica de  $L$  em  $M$ , tal que

$$\mathcal{C}(M|L) = \{L - P_1, L - P_2, \dots, L - P_m\}.$$

**Lema 3.7.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um  $n$ -par, com  $n \geq 3$ , tal que*

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1), g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n.$$

*Considere*

$$C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2) \text{ com } C \notin \mathcal{B}(M_1). \quad (3.5)$$

*As seguintes afirmações são satisfeitas:*

- i) Para todo  $D^* \in \mathcal{C}^*(M_1)$  tal que  $D^* \cap C = \emptyset$  temos que  $|D^*| = n$ ;
- ii)  $\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ ;
- iii)  $r_{M_1}(C) = r(M_1) - 1$  (ou equivalentemente  $r_{M_2}(C) = r(M_2) - 2$ );
- iv) Existe um único  $D^* \in \mathcal{C}^*(M_1)$  tal que  $D^* \cap C = \emptyset$ ;
- v)  $\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) = \{C \cup d : d \in D^*\}$ ;
- vi) Se  $e \in cl_{M_1}(C) - C$  então  $e \notin cl_{M_2}(C)$ ;
- vii)  $C$  é fechado em  $M_2$ , isto é  $cl_{M_2}(C) = C$ ;
- viii) Se  $e \in cl_{M_1}(C) - C$  então  $C \cup e \in \mathcal{C}(M_1)$ ;
- ix)  $D^* \in \mathcal{C}^*(M_2)$ ;
- x) Se  $e, f \in cl_{M_1}(C) - C$  então  $f \in cl_{M_2}(C \cup e)$ ;
- xi) Se  $\alpha, \beta \in D^*$  então  $\alpha, \beta$  são colaços de  $M_2|(C \cup \{\alpha, \beta\})$ ;
- xii) Quando  $\{\alpha, \beta\}$  é um 2-subconjunto de  $D^*$ , então  $C \cup \{\alpha, \beta\} \in \mathcal{C}(M_1)$ .

*Demonstração.* Por hipótese,  $C$  não gera  $M_1$ . Logo existe um cocircuito  $D^* \in \mathcal{C}^*(M_1)$  tal que

$$C \cap D^* = \emptyset$$

Assim,  $D^*$  também é cocircuito de  $M_1/C$ . Logo para todo  $d \in D^*$ , existe uma base  $B_d$  de  $M_1/C$  tal que

$$B_d \cap D^* = \{d\}$$

Desta forma, para cada  $d \in D^*$ ,

$$B_d \cup C \in \mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2)$$

consequentemente

$$\{B_d \cup C : d \in D^*\} \subseteq \{B \cup C : B \in \mathcal{B}(M_1/C)\} \subseteq \mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2),$$

donde segue que

$$\begin{aligned} n &\leq |D^*| = |\{B_d \cup C : d \in D^*\}| \\ &\leq |\{B \cup C : B \in \mathcal{B}(M_1/C)\}| \\ &\leq |\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)| \\ &\leq |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \\ &\leq n \end{aligned}$$

A primeira desigualdade ocorre pois  $g(M_1^*) \geq n$  e a última porque  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par.

Logo

$$n = |D^*| = |\mathcal{B}(M_1/C)| = |\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)| = |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \quad (3.6)$$

Donde concluímos que

$$\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$$

e

$$|D^*| = n;$$

e *i)* e *ii)* seguem.

*iii)* Por (3.5), temos que  $C \in \mathcal{I}(M_1) - \mathcal{B}(M_1)$ . Desta forma, existe  $B \in \mathcal{B}(M_1)$  tal que  $C \subsetneq B$ , em particular  $|B - C| \geq 1$ . Se  $|B - C| = 1$ , então *iii)* segue. Vamos assumir que  $|B - C| \geq 2$ . Escolha um par de elementos  $d, e \in B - C$ .

Seja  $L = M_1 / cl_{M_1}(B - \{d, e\})$ . Note que

$$r(L) = 2,$$

pois  $\{d, e\} \in \mathcal{B}(L)$ . Mais ainda, por *i)* todo cocircuito de  $L$  tem  $n$  elementos, pois não intercepta  $C$ . Observe que  $L$  não possui laços, pois é obtida a partir de  $M_1$  pela a contração de um conjunto fechado. Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_m$  as classes em paralelo de  $L$ .

A representação geométrica de  $L$  é



Note que os cocircuitos desta matrízide são:

$$\{E(L) - P_1, \dots, E(L) - P_m\}.$$

Desta forma,  $|E(L) - P_i| \geq n$ , isto é

$$|E(L)| - |P_i| \geq n. \tag{3.7}$$

Por outro lado, o conjunto das bases de  $L$  é dado por

$$\mathcal{B}(L) = \{\{a, b\} : a \in P_i \text{ e } b \in P_j; \text{ com } 1 \leq i < j \leq m\}$$

Ou seja,

$$|\mathcal{B}(L)| = \frac{\sum_i |P_i| (|E(L)| - |P_i|)}{2}.$$

Desta forma,

$$\frac{n}{2} \sum_i |P_i| = \frac{\sum_i |P_i| n}{2} \leq \frac{\sum_i |P_i| (|E(L)| - |P_i|)}{2} = |\mathcal{B}(L)| \leq |\mathcal{B}(M_1/C)| = n.$$

A primeira desigualdade decorre de (3.7) e a última de (3.6). E como  $\sum_i |P_i| = |E(L)|$ , temos

$$\frac{n}{2} |E(L)| \leq n,$$

isto é  $|E(L)| \leq 2$ . Logo  $E(L) = \{d, e\}$ . De (3.7) concluímos que  $n = 1$ ; uma contradição pois por hipótese  $n \geq 3$ . E *iii*) segue.

Agora observe que

$$r_{M_2}(C) = |C| - 1 = r_{M_1}(C) - 1 = [r(M_1) - 1] - 1 = r(M_2) - 2$$

A primeira e segunda igualdade vem do fato de  $C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ . Na penúltima usamos *iii*) e na última o fato de que  $r(M_1) = r(M_2)$ .

*iv*) Note que, por *iii*),  $cl_{M_1}(C) \in \mathcal{H}(M_1)$ . Consequentemente  $D^* = E(M_1) - cl_{M_1}(C)$  é o único cocircuito de  $M_1$  tal que  $D^* \cap C = \emptyset$ .

$$v) \mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) = \{C \cup d : d \in D^*\}.$$

Vamos mostrar que  $C \cup d$  é base de  $M_1$ , para todo  $d \in D^*$ . Para isso vamos concluir primeiro que  $C \cup d \in \mathcal{I}(M_1)$ . Suponha que  $C \cup d \in \mathcal{D}(M_1)$ . Como  $C \in \mathcal{I}(M_1)$ , temos que

existe um único  $C' \in \mathcal{C}(M_1)$  tal que

$$C' \subseteq C \cup d, \text{ com } d \in C'.$$

Logo  $C' \cap D^* = \{d\}$ , uma contradição por ortogonalidade. Portanto  $C \cup d \in \mathcal{I}(M_1)$ .

Por outro lado,

$$r_{M_1}(C \cup d) = |C \cup d| = |C| + 1 = r_{M_1}(C) + 1 = r(M_1).$$

A penúltima igualdade ocorre pois  $C \in \mathcal{I}(M_1)$  e a última vem do item *iii*). Desta forma  $C \cup d \in \mathcal{B}(M_1)$ , para todo  $d \in D^*$ . Além disso,  $C \cup d \notin \mathcal{B}(M_2)$ , pois  $C \in \mathcal{C}(M_2)$ .

Desta forma, concluímos que  $\{C \cup d : d \in D^*\} \subseteq \mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)$ .

Note ainda que,

$$n = |\{C \cup d : d \in D^*\}| \leq |\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)| \leq |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n.$$

A primeira igualdade ocorre pelo item *i*). E a última desigualdade pelo fato de  $(M_1, M_2)$  ser um  $n$ -par. E o resultado segue.

*vi*) Suponha que  $e \in cl_{M_2}(C)$ . Logo  $C \cup e$  é linha de Tutte de  $M_2$ . Assim existe uma partição

$$\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$$

de  $C \cup e$  tal que

$$C_i = (C \cup e) - P_i \in \mathcal{C}(M_2) \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Podemos assumir que  $C_1 = C$  e daí  $P_1 = \{e\}$ .

Para todo  $i \geq 2$ , mostraremos que  $C_i \in \mathcal{D}(M_1)$ . Se  $C_i \in \mathcal{I}(M_1)$ , então existe  $B \in \mathcal{B}(M_1)$  tal que  $C_i \subseteq B$ , com  $B \notin \mathcal{B}(M_2)$ . Por *v*),  $C \subseteq B$ . Logo  $C \cup C_i = C \cup e \subseteq B$ , um absurdo pois  $C$  gera  $e$  em  $M_1$ . Assim segue que  $C_i \in \mathcal{D}(M_1)$ .

Portanto, como  $C$  é independente em  $M_1$  e gera  $e$  em  $M_1$ , existe um único circuito  $D$  de  $M_1$  tal que

$$D \subseteq C \cup e.$$

Desta forma,

$$D \subseteq C_i, \text{ para todo } i \in \{2, 3, \dots, m\}$$

ou seja,  $D \cap P_i = \emptyset$ , para todo  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ . Donde concluímos que  $D = \{e\}$ ; uma contradição pois  $g(M_1) \geq n \geq 3$ . Logo  $e \notin cl_{M_2}(C)$ .

*vii)* Suponha que existe  $e \in cl_{M_2}(C) - C$ . Portanto  $C \cup e$  é linha de Tutte de  $M_2$ . Considere a partição canônica

$$\{P_1, P_2, \dots, P_m\}, \text{ com } m \geq 2$$

de  $C \cup e$ . Logo

$$C_i = (C \cup e) - P_i \in \mathcal{C}(M_2).$$

Tome  $C_1 = C$ , isto é,  $P_1 = \{e\}$ . Vamos mostrar que, para  $i \geq 2$ ,  $C_i \in \mathcal{I}(M_1)$ . De fato, suponha que  $C_i \in \mathcal{D}(M_1)$ , então  $C \cup C_i = C \cup e \in \mathcal{D}(M_1)$ , mas  $C \in \mathcal{I}(M_1)$  e daí  $e \in cl_{M_1}(C)$ ; uma contradição com *vi*). Logo  $C_i \in \mathcal{I}(M_1)$ . Desta forma, existe  $B \in \mathcal{B}(M_1)$  tal que

$$C_i \subseteq B;$$

Note que  $B \notin \mathcal{B}(M_2)$ . Pelo item *v*),  $C \subseteq B$ . Isto é,

$$C_i \cup C = C \cup e \subseteq B;$$

uma contradição, pois, por *v*),  $B = C \cup d$ , para algum  $d \in D^*$ . Consequentemente,  $C$  é fechado em  $M_2$ .

viii) Seja  $e \in cl_{M_1}(C) - C$ . Temos que existe  $D \in \mathcal{C}(M_1)$  tal que  $e \in D \subseteq C \cup e$ . Logo, por ii),  $D \in \mathcal{D}(M_2)$ . Desta forma, existe  $D' \in \mathcal{C}(M_2)$  tal que  $D' \subseteq D \subseteq C \cup e$ . Consequentemente, por vi),  $e \notin D'$ , assim  $D' \subseteq C$ , isto é,  $D' = C$ , ou seja  $D = C \cup e$ .

ix) Suponha que

$$D^* \notin \mathcal{C}^*(M_2). \quad (3.8)$$

Vamos mostrar que  $D^* \in \mathcal{I}^*(M_2)$ . Se  $D^* \in \mathcal{D}^*(M_2)$ , então existe  $C^* \in \mathcal{C}^*(M_2)$  tal que  $C^* \subseteq D^*$ . Por (3.8),  $C^* \subsetneq D^*$ . Logo  $|C^*| < |D^*| = n$ ; uma contradição pois  $g^*(M_2) \geq n$ . Assim,  $D^* \in \mathcal{I}^*(M_2)$ . Consequentemente, existe  $B^* \in \mathcal{B}^*(M_2)$ , tal que

$$D^* \subseteq B^* \in \mathcal{B}^*(M_2) \setminus \mathcal{B}^*(M_1),$$

isto é

$$E - B^* \in \mathcal{B}(M_2) \setminus \mathcal{B}(M_1);$$

um contradição a ii). Logo  $D^* \in \mathcal{C}^*(M_2)$ .

x) O resultado segue trivialmente se  $e = f$ . Assuma que  $e \neq f$ . Por viii), temos que  $C \cup e$  e  $C \cup f$  são circuitos de  $M_1$ . Logo,  $L = C \cup \{e, f\}$  é linha de Tutte de  $M_1$ . Considere  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  a partição canônica de  $L$ , com, digamos  $P_1 = \{e\}$  e  $P_2 = \{f\}$ . Note que  $m \geq 4$ , pois se  $m = 3$ , teríamos  $L - P_3 = \{e, f\} \in \mathcal{C}(M_1)$ , mas  $g(M_1) \geq 3$ . Assim,  $C_i = L - P_i \subseteq C \cup \{e, f\}$ , para  $i \notin \{1, 2\}$ , é circuito de  $M_1$ , com  $C_i \neq C \cup e$  e  $C_i \neq C \cup f$ . Observe que  $\{e, f\} \subseteq C_i$

Por ii),  $C_i \in \mathcal{D}(M_2)$ . Assim existe  $C' \in \mathcal{C}(M_2)$ , tal que  $C' \subseteq C_i$ . Por vi),  $C$  é o único circuito de  $M_2$  contido em  $C \cup e$  e  $C \cup f$ .

Se  $\{e, f\} \not\subseteq C'$ , então  $C' = C$ . Logo  $C \cup \{e, f\} \subseteq C_i$ , absurdo. Consequentemente  $\{e, f\} \subseteq C'$ , isto é,  $f \in cl_{M_2}(C \cup e)$ .

*xi)* Sejam  $\alpha, \beta \in D^*$  e suponha que  $\alpha$  e  $\beta$  não são colaços em  $M_2|(C \cup \{\alpha, \beta\})$ , então  $L = C \cup \{\alpha, \beta\}$  é linha de Tutte de  $M_2$ . Considere a partição canônica

$$\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$$

de  $L$ . Por definição,  $C_i = L - P_i$  é circuito de  $M_2$ . Podemos assumir que  $P_1 = \{\alpha, \beta\}$ , pois  $\{\alpha, \beta\}$  é o complemento de  $C$  nesta linha  $L$ . Observe que  $m \geq 3$ , do contrário  $L - P_2 = \{\alpha, \beta\}$  seria circuito de  $M_2$ , mas  $g(M_2) \geq 3$ .

Vamos mostrar que  $C_i \in \mathcal{D}(M_1)$ , quando  $i \neq 1$ . Se  $C_i \in \mathcal{I}(M_1)$ , então existe base  $B$  de  $M_1$ , tal que  $C_i \subseteq B$ . Note que  $B \notin \mathcal{B}(M_2)$ . Além disso  $\{\alpha, \beta\} \subseteq B$ . Mas, por *v)*, as bases de  $\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)$  só interceptam  $D^*$  em um único elemento; uma contradição.

Consequentemente  $C_i \in \mathcal{D}(M_1)$ . Logo, existe  $C' \in \mathcal{C}(M_1)$  tal que  $C' \subseteq C_i$ . Por *ii)*  $C' \in \mathcal{D}(M_2)$ , isto é

$$C' = C_i.$$

Portanto, para  $i \geq 2$ ,  $C_i \in \mathcal{C}(M_1)$ .

Vamos provar que  $C \cup \{\alpha, \beta\} = C_2 \cup C_3$  é linha de Tutte de  $M_1$ . De fato, por *ii)*, temos

$$r_{M_1}(C \cup \{\alpha, \beta\}) \geq r_{M_2}(C \cup \{\alpha, \beta\}) = |C|. \quad (3.9)$$

Por outro lado, como  $C_2$  e  $C_3$  são circuitos diferentes de  $M_1$  contidos em  $L$ , temos que

$$r_{M_1}(C \cup \{\alpha, \beta\}) = r_{M_1}(C \cup \{\alpha, \beta\} - \{a_2, a_3\}) \leq |C|, \quad (3.10)$$

com  $a_2 \in C_2 - C_3$  e  $a_3 \in C_3 - C_2$ . De (3.9) e (3.10), concluímos que

$$r_{M_1}(C \cup \{\alpha, \beta\}) = |C|,$$

isto é,  $r^*(M_1|(C \cup \{\alpha, \beta\})) = 2$ . E assim  $L$  também é linha de Tutte em  $M_1$ . Mais ainda  $P_2, P_3, \dots, P_m$  estão na partição canônica de  $L$  em  $M_1$ , porque  $C_i$  é circuito de  $M_1$  para todo  $i \geq 2$ .

Como  $C = L - P_1$  não é circuito de  $M_1$ , temos que  $P_1$  não pertence à partição canônica de  $L$  em  $M_1$ . Mas  $P_1 = \{\alpha, \beta\}$  é a união de conjuntos desta partição e conseqüentemente  $\{\alpha\}$  e  $\{\beta\}$  são tais conjuntos. Assim  $C \cup \alpha \in \mathcal{C}(M_1)$ . Mas  $(C \cup \alpha) \cap D^* = \{\alpha\}$ ; uma contradição por ortogonalidade. Logo,  $\alpha$  e  $\beta$  são colaços em  $M_2|(C \cup \{\alpha, \beta\})$ .

*xii)* Por *v)*, temos que

$$C \cup \alpha \in \mathcal{B}(M_1) \text{ e } C \cup \beta \in \mathcal{B}(M_1). \quad (3.11)$$

Logo  $C \cup \{\alpha, \beta\} \in \mathcal{D}(M_1)$ , isto é, existe um circuito  $C' \in \mathcal{C}(M_1)$  tal que

$$C' \subseteq C \cup \{\alpha, \beta\}.$$

Por *ii)*, temos que  $C' \in \mathcal{D}(M_2)$ . Assim existe circuito  $C'' \in \mathcal{C}(M_2)$ , tal que

$$C'' \subseteq C' \subseteq C \cup \{\alpha, \beta\}. \quad (3.12)$$

Mas, por *xi)*,  $\{\alpha, \beta\} \not\subseteq C''$ . Conseqüentemente  $C'' \subseteq C$ . E como  $C$  é circuito de  $M_2$ , temos  $C'' = C$ . Observe que por (3.11), temos que  $\{\alpha, \beta\} \in C'$ . Donde concluímos por (3.12) que  $C' = C \cup \{\alpha, \beta\}$ , ou seja,  $C \cup \{\alpha, \beta\}$  é circuito de  $M_1$ .  $\square$

## 3.2 Relaxando um Circuito-Hiperlinha

Na seção anterior obtivemos propriedades de um  $n$ -par  $(M_1, M_2)$ , para o qual uma das matrôides, digamos  $M_1$ , possui um independente não maximal  $C$  que é um dependente

em  $M_2$ . A presença de tal  $C$  num par de matróides permite definir uma nova operação, a qual chamamos de relaxamento de circuito-hiperlinha.

Nesta seção descrevemos esse processo de relaxamento de circuito-hiperlinha. Que será a base da obtenção de uma matróide  $M_1$  via outra  $M_2$ .

**Definição 3.8.** *Para uma matróide  $M$ , diremos que  $X \subseteq E(M)$  é uma hiperlinha de  $M$  quando*

i)  $X$  é fechado;

ii)  $r(X) = r(M) - 2$ .

**Definição 3.9.** *Para uma matróide  $M$ , diremos que  $D^*$  é um cocircuito associado a uma hiperlinha  $X$  de  $M$ , quando  $D^*$  evita  $X$  e não contém elementos em paralelo de  $M/X$ .*

Quando uma hiperlinha  $X$  de uma matróide  $M$  possui um cocircuito associado  $D^*$ , todas as classes em paralelo de  $M/X$ , com a possível exceção de  $X - D^*$ , são triviais, isto é, possuem um único elemento.

**Proposição 3.10.** *Seja  $C$  um circuito-hiperlinha de uma matróide  $M$ . Se existe cocircuito  $D^*$  de  $M$  associado a  $C$ , então*

$$C = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

*é uma família de circuitos de uma matróide  $N$ , onde*

$$\mathcal{C}_1 = \{D \in \mathcal{C}(M) : D \neq C\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{C \cup e : e \in E(M) - (C \cup D^*)\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{C \cup \{\alpha, \beta\} : \{\alpha, \beta\} \subsetneq D^*\}.$$

*Mais ainda,*

i)  $D^*$  é cocircuito de  $N$ ;

ii)  $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{B}(N)$  e  $\mathcal{B}(N) - \mathcal{B}(M) = \{C \cup \alpha : \alpha \in D^*\}$ .

Neste caso, diremos que  $N$  foi obtida a partir de  $M$ , relaxando-se o circuito-hiperlinha  $C$  com a preservação do cocircuito associado  $D^*$ . Note que  $(N, M)$  é um  $|D^*|$ -par.

*Demonstração.* Temos que provar que  $\mathcal{C}$  satisfaz **(C1)**, **(C2)** e **(C3)** da Proposição 2.4.

Note que para cada  $D \in \mathcal{C}$ , existe único  $D' \in \mathcal{C}(M)$  tal que  $D' \subseteq D$ . Mais precisamente,

$$D' = \begin{cases} D, & \text{quando } D \in \mathcal{C}_1 \\ C, & \text{quando } D \in \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \end{cases}$$

Em particular,  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}(M)$ . Portanto  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  pois  $\emptyset \notin \mathcal{C}(M)$  e **(C1)** segue.

Vamos verificar que  $\mathcal{C}$  satisfaz **(C2)**. Sejam  $D_1, D_2 \in \mathcal{C}$ . Suponha que  $D_1 \subsetneq D_2$ . Existem  $D'_1, D'_2 \in \mathcal{C}(M)$  tal que  $D'_1 \subseteq D_1$  e  $D'_2 \subseteq D_2$ . Como  $D'_1 \subsetneq D_2$ , temos que  $D'_1 = D'_2$  e  $D'_2 = C$ . Logo  $D_1, D_2 \in \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ . Portanto  $|D_1| < |D_2|$ , isto é,  $D_1 \in \mathcal{C}_2$  e  $D_2 \in \mathcal{C}_3$ . Desta forma,  $C_1 = C \cup e$  e  $C_2 = C \cup \{\alpha, \beta\}$ . E assim,  $e \in \{\alpha, \beta\}$ , uma contradição, pois  $e \in E(M) - (C \cup D^*)$ . Consequentemente  $\mathcal{C}$  satisfaz **(C2)**.

Suponha agora que  $\mathcal{C}$  não satisfaz **(C3)**, isto é, existem  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ , com  $C_1 \neq C_2$  e  $x \in C_1 \cap C_2$ , tal que  $(C_1 \cup C_2) - x$  não contém elemento de  $\mathcal{C}$ . Considere que  $D_1 \subseteq C_1$  e  $D_2 \subseteq C_2$ , com  $D_1, D_2 \in \mathcal{C}(M)$ .

**Caso 1:** Quando  $C_1$  ou  $C_2$  está em  $\mathcal{C}_1$ , digamos  $C_1 \in \mathcal{C}_1$ .

Logo  $D_1 \neq D_2$ . Portanto,  $r(D_1 \cup D_2) \leq |D_1 \cup D_2| - 2$ . Consequentemente  $(D_1 \cup D_2) - x$

contém um único circuito que é  $C$ , pois se  $(D_1 \cup D_2) - x$  contivesse um circuito diferente  $D \neq C$ , teríamos  $D \subseteq (D_1 \cup D_2) - x \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$ , contradizendo nossa hipótese. Desta forma,  $L = D_1 \cup D_2$  é linha de Tutte de  $M$  tal que  $x \in L$ . Considere a partição canônica

$$\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$$

de  $L$ . Assumiremos que  $x \in P_m$ . Note que  $|P_m| \geq 2$ , pois  $C = L - P_m$  é fechado.

Agora vamos provar que  $P_m - x \subseteq D^*$ . Se existe  $y \in (P_m - x) - D^*$ , então

$$C \cup y \subseteq (C_1 \cup C_2) - x;$$

uma contradição com nossa hipótese porque  $C \cup y \in \mathcal{C}_2$ . Assim,  $P_m - x \subseteq D^*$ .

Por outro lado  $|P_m| = 2$ , pois se  $|P_m| \geq 3$ , então para  $y$  e  $z$  diferentes em  $P_m - x$ , teríamos

$$C \cup \{y, z\} \subseteq (C_1 \cup C_2) - x,$$

e mais uma vez uma contradição com nossa hipótese, porque  $C \cup \{y, z\} \in \mathcal{C}_3$ . Logo  $|P_m| = 2$ . Por ortogonalidade,  $x \in D^*$ ; um absurdo pois  $x$  e  $y$  não são colaços em  $M|(C \cup \{x, y\})$  e daí  $\{x, y\}$  é circuito de  $M/C$ . E a proposição segue neste caso.

**Caso 2:** Quando  $C_1, C_2 \notin \mathcal{C}_1$ , isto é,  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ .

**Caso 2.1:**  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_2$ .

Assim teremos  $C_1 = C \cup e$  e  $C_2 = C \cup f$ , com  $e \neq f$ . Note que

$$L = C_1 \cup C_2 = C \cup \{e, f\}$$

é linha de Tutte de  $M$ , pois  $r_M(C \cup \{e, f\}) = |C|$ .

Considere a partição canônica

$$P_1, P_2, \dots, P_m \text{ com } m \geq 2$$

de  $L$ . Assuma que  $x \in P_1$ . Conseqüentemente  $D_1 = C \cup \{e, f\} - P_1$  é circuito de  $M$ , tal que

$$D_1 \subseteq (C \cup \{e, f\}) - x = (C_1 \cup C_2) - x$$

uma contradição, pois estamos supondo que  $(C_1 \cup C_2) - x$  não contém elemento de  $\mathcal{C}$  e  $D_1 \in \mathcal{C}_1$ .

**Caso 2.2:**  $C_1 \in \mathcal{C}_2$  e  $C_2 \in \mathcal{C}_3$ .

Desta forma,  $C_1 = C \cup e$  e  $C_2 = C \cup \{\alpha, \beta\}$ . Vamos mostrar que

$$C_1 \cup C_2 = C \cup \{e, \alpha, \beta\}$$

é linha de Tutte de  $M$ . Para tanto, será suficiente estabelecer que  $r(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cup C_2| - 2$ .

Note que

$$r_{M/C}(\{e, \alpha, \beta\}) = r_M(C \cup \{e, \alpha, \beta\}) - r_M(C) \quad (3.13)$$

Mas  $r_{M/C}(\{e, \alpha, \beta\}) = 2$  e  $r_M(C) = |C| - 1$ . Fazendo as devidas substituições em (3.13), temos

$$r_M(C \cup \{e, \alpha, \beta\}) = |C| + 1.$$

Portanto,  $C_1 \cup C_2$  é linha de Tutte de  $M$ . Conseqüentemente,

$$C \cup \{e, \alpha, \beta\}$$

contém um circuito de  $M$  que é diferente de  $C$  e não contém  $x \in C$ , logo pertence a  $\mathcal{C}$ , uma contradição.

**Caso 2.3:**  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_3$ .

Neste caso,  $C_1 = C \cup \{\alpha, \beta\}$  e  $C_2 = C \cup \{\gamma, \delta\}$ . Temos duas possibilidades para  $x$ .  $x \notin C$  ou  $x \in C$ . Quando  $x \notin C$ , podemos assumir que  $x = \alpha = \gamma$  e assim

$$C \cup \{\beta, \delta\} = C_1 \cup C_2 - x;$$

uma contradição pois  $C \cup \{\alpha, \beta\} \in \mathcal{C}$ . Se  $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$ , segue que  $C_1 \cup C_2 - x$  contém um elemento de  $\mathcal{C}_3$ , uma contradição pois estamos supondo que  $C_1 \cup C_2 - x$  não contém elemento de  $\mathcal{C}$ . Caso  $x \in C$ , e considere  $X$  um 3-subconjunto de  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ , temos  $C \cup X$  contém uma linha de Tutte  $L$  de  $M$  contendo  $C$ . Logo  $L - x$  contém um circuito de  $M$  diferente de  $C$ . Contradição pois  $L - x \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$ . E segue que  $\mathcal{C}$  satisfaz **(C3)**.

Agora vamos mostrar os itens **i)** e **ii)**. Primeiro vamos estabelecer que  $r(N) = r(M)$ . Para isso, note que para todo  $\alpha \in D^*$ , temos que  $C \cup \alpha \in \mathcal{B}(N)$ . de fato,  $C \cup \alpha \in \mathcal{I}(N)$ , caso contrário, existe  $D \in \mathcal{C}(N)$  tal que  $D \subseteq C \cup \alpha$ , isto é  $D \in \mathcal{C}_1$ , ou  $D \in \mathcal{C}_2$  ou  $D \in \mathcal{C}_3$ , o que gera uma contradição. Além disso,  $cl_N(C \cup \alpha) = E(N)$ . Assim,

$$C \cup \alpha \in \mathcal{B}(N).$$

consequentemente,

$$r_N(C \cup \alpha) = r(N) \tag{3.14}$$

Por outro lado,

$$r_N(C \cup \alpha) = |C \cup \alpha| = |C| + 1 = r(M). \tag{3.15}$$

A última igualdade ocorre pois  $C$  é circuito hiperlinha de  $M$ . De (3.14) e (3.15), temos

$$r(N) = r(M).$$

Agora observe que para todo  $D \in \mathcal{C}(N) - \mathcal{C}(M)$ , temos  $C \subseteq D$ , donde concluímos que

$$\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{B}(N).$$

Por outro lado, seja  $B \in \mathcal{B}(N) - \mathcal{B}(M)$ , temos que  $B \in \mathcal{D}(M)$ , pois  $r(N) = r(M)$ . Logo, existe circuito de  $M$  contido em  $B$ , e este não pode ser circuito de  $N$ , logo este circuito só pode ser  $C$ . Assim concluímos que para toda base  $B \in \mathcal{B}(N) - \mathcal{B}(M)$ , temos que  $C \subseteq B$ .

Desta forma,

$$\mathcal{B}(N) - \mathcal{B}(M) = \{C \cup \alpha : \alpha \in D^*\}$$

e **ii)** segue.

Além disso, como  $cl_N(C) = E(N) - D^*$  e  $r_N(C) = r(N) - 1$ , temos que  $D^*$  é cocircuito de  $N$  e **i)** ocorre. □

O próximo Teorema caracteriza pares de matróides  $M_1$  e  $M_2$  onde existe independente não maximal de uma das matróides, digamos  $M_1$ , que é circuito em  $M_2$ . A operação utilizada para obter  $M_1$  a partir de  $M_2$  é o relaxamento de circuito-hiperlinha.

**Teorema 3.11.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um  $n$ -par com  $n \geq 3$ , tal que*

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1), g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n.$$

*Se  $C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ , com  $C \notin \mathcal{B}(M_1)$ , então  $C$  é circuito hiperlinha de  $M_2$  possuindo um cocircuito associado  $D^*$  tal que,  $M_1$  é obtida a partir de  $M_2$  relaxando  $C$  com a preservação de  $D^*$ .*

Ao relaxarmos o circuito-hiperlinha  $C$  de  $M_2$  com a preservação de  $D^*$ , Temos que  $\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$  e  $\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) = \{C \cup d : d \in D^*\}$ . Em particular  $|D^*| = n$ . Observe que se estivéssemos com a hipótese utilizada por Lemos [1], isto é,  $\min\{g(M_1), g^*(M_1)\} \geq n + 1$ , o relaxamento do circuito hiperlinha não poderia ser realizado para originar um  $n$ -par, já que  $D^*$  seria cocircuito de  $M_1$ . Daí a diferença da operação usada por ele em

[1], que foi relaxamento de circuito hiperplano e da operação usada neste trabalho, que é relaxamento de circuito hiperlinha.

*Demonstração.* Pelos itens **iii)** e **vii)** do Lema 3.7, temos que  $C$  é fechado em  $M_2$  e  $r_{M_2}(C) = r(M_2) - 2$ . Desta forma  $C$  é um circuito hiperlinha de  $M_2$ . Pelos itens **i)** e **iv)** do Lema 3.7, existe um único cocircuito  $D^*$  de  $M_1$  tal que  $D^* \cap C = \emptyset$  e pelo item **ix)** do mesmo Lema,  $D^* \in \mathcal{C}^*(M_2)$ .

Agora vamos mostrar que  $D^*$  é cocircuito associado a  $C$  em  $M_2$ . Para isso, falta apenas verificar que  $D^*$  não possui elementos em paralelo em  $M_2/C$ . Suponha que existam  $\alpha, \beta \in D^*$  tais que  $\alpha$  e  $\beta$  estão em paralelo em  $M_2/C$ . Logo existe  $D \in \mathcal{C}(M_2)$  tal que,

$$\{\alpha, \beta\} \subseteq D \subseteq C \cup \{\alpha, \beta\};$$

uma contradição pois pelo item **xi)** do Lema 3.7,  $\alpha$  e  $\beta$  são colaços em  $M_2|(C \cup \{\alpha, \beta\})$ .

Pelo itens **ii)** e **v)** do Lema 3.7,  $\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$  e

$$\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) = \{C \cup d : d \in D^*\}.$$

Portanto, pelo item **ii)** da Proposição 3.10,  $M_1$  foi obtida de  $M_2$  relaxando o circuito hiperlinha  $C$ . □

### 3.3 Relaxando Linha de Tutte-Hiperplano e Circuito-Hiperplano

Nesta seção, descreveremos o processo de relaxamento de linha de Tutte-hiperplano, bem como o de relaxamento de circuito-hiperplano, esse último já bastante conhecido na literatura. Ambos serão usados para obter uma matróide  $M_1$  via outra matróide  $M_2$  de tal

modo que  $(M_1, M_2)$  seja um  $n$ -par. Aqui vamos considerar os  $n$ -pares  $(M_1, M_2)$ , para um natural  $n \geq 3$ , para os quais todo independente em uma de suas matróides, digamos  $M_1$ , que é dependente em  $M_2$  é uma base de  $M_1$  e, necessariamente um circuito em  $M_2$ . Dividimos esse caso em dois outros: O primeiro que trata quando esse circuito não é hiperplano de  $M_2$ , neste caso a operação associada é o relaxamento de linha de Tutte-hiperplano e o segundo quando esse circuito é um hiperplano de  $M_2$ , a operação utilizada passa a ser relaxamento de circuito-hiperplano.

Quando  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par com tais características, temos

$$\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{LC}(M_2) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(M_2) - \mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{LC}(M_1), \quad (3.16)$$

onde  $\mathcal{LC}(M)$  denota o conjunto de circuito largos de uma matróide  $M$ . (Um circuito  $C$  de uma matróide  $M$  é dito *largo* quando  $|C| = r(M)$ ). Podemos transformar 3.16 nas igualdades

$$\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) = \mathcal{LC}(M_2) - \mathcal{LC}(M_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(M_2) - \mathcal{B}(M_1) = \mathcal{LC}(M_1) - \mathcal{LC}(M_2).$$

Ainda nesta seção, descreveremos operações que podem ser aplicadas a  $M_1$  e  $M_2$  para transformar, respectivamente, apenas os elementos dos conjuntos  $\mathcal{LC}(M_1) - \mathcal{LC}(M_2)$  e  $\mathcal{LC}(M_2) - \mathcal{LC}(M_1)$  em bases de novas matróides  $N_1$  e  $N_2$ , respectivamente. Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(N_1) &= \mathcal{B}(M_1) \cup (\mathcal{LC}(M_1) - \mathcal{LC}(M_2)) \\ &= \mathcal{B}(M_2) \cup (\mathcal{LC}(M_2) - \mathcal{LC}(M_1)) \\ &= \mathcal{B}(N_2). \end{aligned}$$

Em outras palavras, após realizar estas operações chegamos a mesma matróide começando de qualquer uma das duas do  $n$ -par, alterando o mínimo cada uma delas bem no espírito da conjectura 1.4 de Mills.

Antes de enunciarmos o próximo Teorema falaremos um pouco de uma operação que utilizaremos fortemente nesse resultado. Essa operação será chamada de relaxamento de linha de Tutte-hiperplano.

Seja  $H$  uma linha de Tutte de uma matróide  $M$ , com  $H$  fechado em  $M$ , tal que  $|H| = r(M) + 1$ . Se a partição canônica  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  de  $H$  satisfaz  $|P_1| = |P_2| = \dots = |P_m| = 1$  então

$$\mathcal{B}(M) \cup \{H - P_i : i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}\}$$

é o conjunto de bases de uma nova matróide  $N$ .

Esta operação é um caso particular de uma que já foi descrita anteriormente na Seção 3 de [2], onde Lemos fez as seguintes definições:

**Definição 3.12.** *Diremos que  $Z$  é um ninho de uma matróide  $M$ , quando  $Z = cl_M(C)$ , para algum  $C \in \mathcal{LC}(M)$ , onde*

$$\mathcal{LC}(M) = \{C \in \mathcal{C}(M) : r(M) = |C|\},$$

*denota a família de circuitos largos de  $M$ .*

Na próxima definição faremos uso da notação  $\mathcal{TL}(M)$ , que denota o conjunto das linhas de Tutte de uma matróide  $M$ . Para relembrar sobre linha de Tutte ver Definição 3.6.

**Definição 3.13.** Diremos que um conjunto  $\mathcal{L}$  de circuitos de uma matróide  $M$  é uma subclasse linear de  $M$  quando  $\mathcal{C}(M|L) \subseteq \mathcal{L}$ , para todo  $L \in \mathcal{TL}(M)$  tal que  $|\mathcal{C}(M|L) \cap \mathcal{L}| \geq 2$ .

**Definição 3.14.** Para um ninho  $Z$  de uma matróide  $M$ , dizemos que  $\mathcal{L}$  é uma subclasse linear admissível de  $M|Z$  quando satisfaz

- i)  $\mathcal{L} \neq \mathcal{C}(M|Z)$  e
- ii)  $\mathcal{C}(M|Z) - \mathcal{HAM}(M|Z) \subseteq \mathcal{L}$ , onde  $\mathcal{HAM}(M|Z)$  denota o conjunto de circuitos Hamiltonianos (circuitos geradores) de  $M|Z$ .

Ainda em [2], Lemos provou que, quando  $Z$  é um ninho de uma matróide  $M$  tendo  $\mathcal{L}$  como subclasse linear admissível,

$$\mathcal{B}(M) \cup (\mathcal{C}(M|Z) - \mathcal{L})$$

é o conjunto de bases de uma matróide a qual ele denotou por  $M_{Z,\mathcal{L}}$ .

A operação foi intitulada de *relaxamento do ninho  $Z$  ao longo da subclasse linear admissível  $\mathcal{L}$  de  $M|Z$* .

Observe que esta operação pode ser perfeitamente aplicada aqui, já que  $H$  é um ninho de  $M$  e  $\mathcal{L} = \{H - P_m\}$  é uma subclasse linear admissível de  $M|H$ .

Vale ressaltar que esta operação de relaxamento de um ninho ao longo da subclasse admissível utilizada por Lemos [2] será denominada na nossa tese de *relaxamento de linha de Tutte-hiperplano*, visto que aqui estamos com um caso particular em que o ninho  $H$  é uma linha de Tutte que também é hiperplano.

**Teorema 3.15.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um  $n$ -par com*

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1), g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n. \quad (3.17)$$

*Se  $\mathcal{I}(M_i) \cap \mathcal{C}(M_{3-i}) \subseteq \mathcal{B}(M_i)$ , mas  $\mathcal{I}(M_i) \cap \mathcal{C}(M_{3-i}) \not\subseteq \mathcal{CH}(M_{3-i})$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ , então as seguintes afirmações são satisfeitas:*

- i) *Existe um hiperplano  $H$  que é linha de Tutte de  $M_2$  contendo um circuito  $C_0$  tal que  $|C_0| = n$ . Mais ainda, todo circuito de  $M_2$  diferente de  $C_0$  e contido em  $H$  tem  $r(M_1)$  elementos.*
- ii)  *$\mathcal{B}(M_1) = \mathcal{B}(M_2) \cup \{C_j : j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ , onde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  são os circuitos de  $M|H$  diferentes de  $C_0$ .*

*Demonstração.* Se existe  $C \in [\mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)] - \mathcal{CH}(M_2)$ , temos que  $C \in \mathcal{B}(M_1)$  (pois se  $C \notin \mathcal{B}(M_1)$  recairíamos no Teorema 3.11). Como  $C \notin \mathcal{H}(M_2)$  e  $r_{M_2}(C) = r(M_2) - 1$  temos que  $cl_{M_2}(C) \neq C$ , isto é existe  $a \in cl_{M_2}(C) - C$ . Assim  $C \cup a$  é linha de Tutte de  $M_2$ . Considere a partição canônica

$$\{P_1, P_2, \dots, P_m\}, \quad m \geq 2$$

de  $C \cup a$ . Temos que

$$C_i = (C \cup a) \setminus P_i \in \mathcal{C}(M_2), \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Por outro lado, como  $C \in \mathcal{B}(M_1)$ , temos que  $C \cup a \in \mathcal{D}(M_1)$ . Logo existe um único circuito  $C_0$  de  $M_1$  tal que

$$C_0 \subseteq C \cup a.$$

Agora considere o conjunto

$$\mathcal{B}' = \{C_i \in \mathcal{C}(M_2) : C_0 \not\subseteq C_i\}.$$

Vamos mostrar que  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ . Suponha que existe  $C_i \in \mathcal{B}'$  tal que  $C_i \in \mathcal{D}(M_1)$ . Logo existe  $C' \in \mathcal{C}(M_1)$ , tal que  $C' \subseteq C_i \subseteq C \cup a$ ; uma contradição pois  $C_0$  é único. Consequentemente  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$  e por hipótese  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ . Assim,

$$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2).$$

Como  $(M_1, M_2)$  é um  $n$ -par, temos que  $|\mathcal{B}'| \leq n$ . Reordenando os índices, caso necessário, podemos assumir que

$$\mathcal{B}' = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}, \text{ com } l \leq n. \quad (3.18)$$

Além disso,

$$|C_i| = |C| = r(M_1), \text{ para todo } C_i \in \mathcal{B}'.$$

Segue que  $P_i = \{a_i\}$  para algum  $a_i \in E(M_2)$ . Logo

$$\{a_1, a_2, \dots, a_l\} \subseteq C_0.$$

Se  $j \geq l$  então  $C_0 \subseteq C_j$ . Portanto  $C_0 \cap P_j = \emptyset$ . Consequentemente

$$\{a_1, a_2, \dots, a_l\} = C_0$$

Por (3.17) e (3.18), temos

$$n \geq l = |C_0| \geq n$$

ou seja,  $|C_0| = n = l$ . Donde concluímos que  $\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ , isto é

$$\mathcal{B}(M_1) = \mathcal{B}(M_2) \cup \{C_1, C_2, \dots, C_n\}.$$

Vamos provar que  $C_0$  é circuito de  $M_2$ . Suponha que  $C_0$  não é circuito de  $M_2$ . Logo  $C_0 \in \mathcal{I}(M_2)$ . Assim  $C_0 \in \mathcal{I}(M_2) \cap \mathcal{C}(M_1)$ , mas por hipótese  $\mathcal{I}(M_2) \cap \mathcal{C}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_2)$ , conseqüentemente  $|C_0| = r(M_2)$ , portanto  $|C_j| = r(M_2) + 1$  para todo  $j > l$ , um absurdo. Desta forma  $C_0$  é circuito de  $M_2$ . **ii)** segue.

Para concluirmos a demonstração, vamos provar que

$$|cl_{M_2}(C) - C| = 1 \quad (3.19)$$

De fato, suponha que existe  $b \in cl_{M_2}(C) - C$ , com  $b \neq a$ . Logo  $C \cup b$  também seria linha de Tutte de  $M_2$  e teríamos, pela mesma construção anterior,  $n$  bases de  $M_1$  que não seriam bases de  $M_2$  contendo  $b$  e que não contém  $a$ . Desta forma  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \geq 2n$ , uma contradição. Portanto, (3.19) segue.

Neste caso,  $H = C \cup a$  é hiperplano de  $M_2$ , pois

$$cl_{M_2}(H) = cl_{M_2}(C \cup a) = cl_{M_2}(C) = C \cup a$$

a última igualdade é consequência de (3.19). E

$$r_{M_2}(H) = r_{M_2}(C \cup a) = r_{M_2}(C) = |C| - 1 = r(M_1) - 1 = r(M_2) - 1$$

e obtemos **i)**. □

No próximo Teorema, passamos a analisar o segundo caso desta seção. O caso em que  $\mathcal{I}(M_i) \cap \mathcal{C}(M_{3-i}) = \mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{CH}(M_{3-i})$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ . Aqui a operação utilizada para se obter uma matróide via outra é a de relaxamento de circuito-hiperplano. Essa operação foi tratada na Proposição 2.10. Também pode ser vista com maior detalhe em [5].

**Teorema 3.16.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um  $n$ -par tal que*

$$\min\{g(M_1), g^*(M_1), g(M_2), g^*(M_2)\} \geq n \geq 3.$$

*Se*

$$\mathcal{I}(M_i) \cap \mathcal{C}(M_{3-i}) = \mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{CH}(M_{3-i}) \text{ para todo } i \in \{1, 2\}, \quad (3.20)$$

*então existe uma matróide  $N$  que é obtida de  $M_1$  e  $M_2$  relaxando  $n_1$  e  $n_2$  circuitos hiperplanos, respectivamente, onde  $n_1$  e  $n_2$  são inteiros não negativos tais que*

$$n_1 + n_2 = |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n$$

*Demonstração.* Vamos mostrar primeiro que

$$\mathcal{B}(M_i) \setminus \mathcal{B}(M_{3-i}) = \mathcal{CH}(M_{3-i}) \setminus \mathcal{CH}(M_i) \text{ para todo } i \in \{1, 2\}.$$

Sem perda de generalidade podemos fazer a demonstração para o caso  $i = 1$ .

Seja  $B \in \mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)$ . Pelo Teorema 3.5,  $r(M_1) = r(M_2)$ . Logo, temos que  $B \in \mathcal{D}(M_2)$ , isto é, existe um circuito  $C \in \mathcal{C}(M_2)$  tal que  $C \subseteq B$ . Assim,

$$C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$$

Consequentemente por, (3.20), para  $i = 1$ ,

$$C \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{CH}(M_2);$$

isto implica que  $C = B$  e concluímos que  $B \in \mathcal{CH}(M_2) \setminus \mathcal{CH}(M_1)$ . Portanto,

$$\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{CH}(M_2) \setminus \mathcal{CH}(M_1) \quad (3.21)$$

Agora seja  $C \in \mathcal{CH}(M_2) \setminus \mathcal{CH}(M_1)$ .

**Afirmação:**  $C \in \mathcal{I}(M_1)$ .

De fato, suponha que  $C \in D(M_1)$ . Logo existe  $C' \in \mathcal{C}(M_1)$  tal que  $C' \subseteq C$ .

Vamos mostrar que  $C' \in D(M_2)$ . Suponha que  $C' \in \mathcal{I}(M_2)$ . Assim, temos que,

$$C' \in \mathcal{I}(M_2) \cap \mathcal{C}(M_1);$$

por (3.20), para  $i = 2$ , temos

$$C' \in \mathcal{B}(M_2) \cap \mathcal{CH}(M_1)$$

uma contradição, pois  $C' \subseteq C$  e  $C \in \mathcal{CH}(M_2) \setminus \mathcal{CH}(M_1)$ . E concluimos que  $C' \in D(M_2)$ .

Consequentemente  $C' = C$ , isto é  $C \in \mathcal{C}(M_1)$ . Observe que,

$$r_{M_1}(C) = |C| - 1 = r_{M_2}(C) = r(M_2) - 1 = r(M_1) - 1.$$

As três primeiras igualdades ocorrem pois  $C \in \mathcal{C}(M_1) \cap \mathcal{CH}(M_2)$ . E a última pelo Teorema 3.5. Como  $C \notin \mathcal{H}(M_1)$ , temos que  $C$  não é fechado em  $M_1$ . Assim, existe  $e \in cl_{M_1}(C) - C$ , donde concluimos que  $C \cup e$  é linha de Tutte de  $M_1$ .

Considere a partição canônica

$$\{P_1, P_2, \dots, P_m\}, \text{ com } m \geq 2$$

de  $C \cup e$ . Assim,

$$C_i = (C \cup e) - P_i \in \mathcal{C}(M_2) \text{ com } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Tome  $C_1 = C$ , assim  $P_1 = \{e\}$ . Vamos mostrar que para  $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ ,  $C_i \in \mathcal{I}(M_2)$ . Suponha que  $C_i \in \mathcal{D}(M_2)$ . Logo existe  $C' \in \mathcal{C}(M_2)$  tal que

$$C' \subseteq C_i \subseteq C \cup e.$$

Como  $C_i \neq C$  e  $C \in \mathcal{C}(M_2)$ , temos que  $e \in C'$ . Portanto,

$$e \in C' \subseteq C \cup e;$$

e assim  $e \in cl_{M_2}(C)$ , um absurdo pois  $C$  é fechado em  $M_2$ . Logo

$$C_i \in \mathcal{I}(M_2) \cap \mathcal{C}(M_1) \quad \text{com} \quad i \in \{2, 3, \dots, m\},$$

isto é

$$C_i \in \mathcal{B}(M_2) \cap \mathcal{CH}(M_1) \quad \text{com} \quad i \in \{2, 3, \dots, m\}.$$

Assim,  $|C_i| = |C|$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Em particular,  $|P_i| = 1$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Mas  $C_i \notin \mathcal{CH}(M_1)$ , pois  $C_i \cup e = C \cup e$  e  $cl_{M_1}(C_i) \supseteq C \cup e$ , uma contradição. Desta forma concluímos que  $C \in \mathcal{I}(M_1)$  e a afirmação segue.

Neste caso,  $C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ . Por (3.20), para  $i = 1$ , temos  $C \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{CH}(M_2)$ . Assim  $C \in \mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)$ . Consequentemente,

$$\mathcal{CH}(M_2) \setminus \mathcal{CH}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2). \quad (3.22)$$

De (3.21) e (3.22), temos

$$\mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2) = \mathcal{CH}(M_2) \setminus \mathcal{CH}(M_1). \quad (3.23)$$

Agora seja  $N_i$  a matróide obtida de  $M_i$  relaxando os circuitos hiperplanos  $\mathcal{CH}(M_i) \setminus \mathcal{CH}(M_{3-i})$ , por (3.23) temos  $N_1 = N_2 = N$ . E seja

$$n_i = |\mathcal{CH}(M_i) \setminus \mathcal{CH}(M_{3-i})|,$$

obtemos

$$n_1 + n_2 = |\mathcal{CH}(M_1) \Delta \mathcal{CH}(M_2)| = |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq n.$$



# Capítulo 4

## Determinando os 3-Pares Exatos

Neste capítulo caracterizamos pares de matróides  $M_1$  e  $M_2$  tais que

$$|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 3.$$

Anteriormente construímos essas matróides quando  $\min\{g(M_1), g(M_2)\} \geq 3$ . Necessitamos lidar apenas com o caso em que  $\min\{g(M_1), g(M_2)\} \leq 2$ .

### 4.1 Matróides Especiais

Nesta seção tratamos de algumas famílias particulares de matróides, a saber, matróides com no máximo três bases e também matróides com no máximo três bases contendo um determinado elemento. Aqui usaremos a notação  $\mathcal{L}(M)$  para o conjunto de laços de uma matróide  $M$ , bem como  $\mathcal{L}^*(M)$  para o conjunto de colaços de  $M$ .

**Lema 4.1.** *Se  $e$  é um elemento de uma matróide  $M$  com  $e \notin \mathcal{L}(M) \cup \mathcal{L}^*(M)$ , então*

$$|\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M \setminus e)| + |\mathcal{B}(M/e)|.$$

*Demonstração.* Seja  $e$  um elemento qualquer de  $M$ , podemos particionar o conjunto das bases de  $M$  da seguinte forma

$$\mathcal{B}(M) = \{B \in \mathcal{B}(M) : e \in B\} \cup \{B \in \mathcal{B}(M) : e \notin B\}.$$

Em particular,

$$|\mathcal{B}(M)| = |\{B \in \mathcal{B}(M) : e \in B\}| + |\{B \in \mathcal{B}(M) : e \notin B\}|.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{B}(M \setminus e) = \{B \in \mathcal{B}(M) : e \notin B\}$$

e

$$\mathcal{B}(M/e) = \{B - e : e \in B \in \mathcal{B}(M)\}.$$

Assim,

$$|\mathcal{B}(M \setminus e)| = |\{B \in \mathcal{B}(M) : e \notin B\}|$$

e

$$|\mathcal{B}(M/e)| = |\{B \in \mathcal{B}(M) : e \in B\}|.$$

E o lema segue. □

**Lema 4.2.** *Se  $M = M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_n$ , então*

$$|\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M_1)| \cdot |\mathcal{B}(M_2)| \cdots |\mathcal{B}(M_n)|.$$

*Demonstração.* Faremos a prova por indução sobre o número de componentes da soma direta  $M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_n$ .

Se  $n = 2$ , isto é  $M = M_1 \oplus M_2$ . Por definição

$$\mathcal{B}(M) = \{B_1 \cup B_2 : B_1 \in \mathcal{B}(M_1), B_2 \in \mathcal{B}(M_2)\}.$$

Desta forma, segue que

$$|\mathcal{B}(M)| = |\{B_1 \cup B_2 : B_1 \in \mathcal{B}(M_1), B_2 \in \mathcal{B}(M_2)\}| = |\mathcal{B}(M_1)| \cdot |\mathcal{B}(M_2)|.$$

Agora suponha que o resultado vale para  $n - 1$ . Provaremos que o resultado também é válido para  $n$ .

Como

$$M = (M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_{n-1}) \oplus M_n,$$

pelo passo anterior, temos que

$$|\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_{n-1})| \cdot |\mathcal{B}(M_n)|.$$

Pela hipótese de indução, concluímos que

$$|\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_{n-1})| = |\mathcal{B}(M_1)| \cdot |\mathcal{B}(M_2)| \cdots |\mathcal{B}(M_{n-1})|.$$

Desta forma,

$$|\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M_1)| \cdot |\mathcal{B}(M_2)| \cdots |\mathcal{B}(M_n)|.$$

□

**Lema 4.3.** *Se  $M$  é uma matróide conexa não-vazia, então  $|\mathcal{B}(M)| \geq |E(M)|$ .*

*Demonstração.* Mostraremos o resultado utilizando indução sobre  $|E(M)|$ .

Se  $|E(M)| = 1$  então a matróide resumi-se a um laço ou colaço. Em ambos os casos  $|\mathcal{B}(M)| = 1$ .

Suponha que o resultado vale para  $|E(M)| = n - 1$ . Provaremos que também vale para  $|E(M)| = n$ . Pelo Teorema 2.17 temos que  $M \setminus e$  ou  $M/e$  é conexa para todo  $e$  em  $E(M)$ . Assim vale a hipótese de indução em  $M \setminus e$  ou  $M/e$ .

Se  $M/e$  é conexa, temos que  $|\mathcal{B}(M/e)| \geq |E(M/e)| = n - 1$ . E teremos pelo menos  $n - 1$  bases de  $M$  contendo  $e$ , que são  $B' \cup e$ , com  $B' \in \mathcal{B}(M/e)$ . Mas tem que existir pelo menos uma base de  $M$  que não contém  $e$ , caso contrário  $e$  seria colaço de  $M$ , o que contradiz o fato de  $M$  ser conexa. Logo  $M$  tem pelo menos  $n$  bases.

Da mesma forma, se  $M \setminus e$  é conexa, então  $|\mathcal{B}(M \setminus e)| \geq |E(M \setminus e)| = n - 1$ . Logo  $M$  tem pelo menos  $n - 1$  bases que não contém  $e$ . Mas tem que existir pelo menos uma base de  $M$  contendo  $e$ , caso contrário  $e$  seria laço de  $M$ . E o Lema segue.  $\square$

**Teorema 4.4.** *Seja  $M$  uma matróide com  $n$  elementos e posto  $r$ . Se  $|\mathcal{B}(M)| = k \leq 3$ , então*

- i)  $M \cong U_{r,r} \oplus U_{0,n-r}$  (quando  $k = 1$ )
- ii)  $M \cong U_{1,2} \oplus U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(r+1)}$  (quando  $k = 2$ )
- iii)  $M \cong U_{1,3} \oplus U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(r+2)}$  ou  $M \cong U_{2,3} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+1)}$  (quando  $k = 3$ )

*Demonstração.* Podemos escrever  $M$  como segue

$$M = M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_k$$

onde  $M_1, M_2, \dots, M_k$  são componentes conexas de  $M$ . Desta forma, pelo Lema 4.2, temos que

$$|\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M_1)| \cdot |\mathcal{B}(M_2)| \cdots |\mathcal{B}(M_k)|.$$

Para que  $k = 1$ , temos que as componentes conexas tem no máximo uma base. E pelo Lema 4.3, podemos concluir que as componentes conexas tem apenas um elemento cada. Neste caso, as componentes conexas são formadas apenas por um laço ou um colaço (ver [5] (Tabela 1.1)), ou seja, são isomorfas a  $U_{0,1}$  ou  $U_{1,1}$ , respectivamente. Neste caso

$$M \cong \underbrace{U_{1,1} \oplus \dots \oplus U_{1,1}}_{r \text{ vezes}} \oplus \underbrace{U_{0,1} \oplus \dots \oplus U_{0,1}}_{n-r \text{ vezes}}.$$

Para simplificar a notação usaremos  $U_{r,r} \cong U_{1,1} \oplus \dots \oplus U_{1,1}$  ( $r$  vezes) e  $U_{0,n-r} \cong U_{0,1} \oplus \dots \oplus U_{0,1}$  ( $n - r$  vezes). Desta forma

$$M \cong U_{r,r} \oplus U_{0,n-r}.$$

Para  $k = 2$ , ainda pelos Lemas 4.3 e 4.2, podemos escrever  $M$  como soma direta de matróides conexas, onde uma delas tem 2 bases e as demais apenas uma base. sendo assim, teremos  $M$  como soma direta de matróides com no máximo dois elementos. Por [5] (Tabela 1.1), temos  $U_{1,2}$  como única conexa com dois elementos. Neste caso

$$M \cong U_{1,2} \oplus U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(r+1)}$$

.

Por fim, para o caso em que  $k = 3$ , temos duas possibilidades para matróides conexas com 3 elementos, a saber  $U_{1,3}$  ou  $U_{2,3}$ . Desta forma

$$M \cong U_{1,3} \oplus U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(r+2)}$$

ou

$$M \cong U_{2,3} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+1)}.$$

□

**Corolário 4.5.** *Seja  $M$  uma matróide conexa, com  $|E(M)| = n$ .  $|\mathcal{B}(M)| = |E(M)|$  se, e somente se  $M \cong U_{1,n}$  ou  $M \cong U_{n-1,n}$ .*

*Demonstração.* Suponha primeiro que  $|\mathcal{B}(M)| = |E(M)|$ . Como  $M$  é conexa, pelo Teorema 2.17  $M \setminus e$  ou  $M/e$  é conexa. Já que as hipótese e conclusões deste resultado são invariantes por dualidade, podemos assumir que  $M \setminus e$  é conexa. Pelo Lema 4.3

$$|\mathcal{B}(M \setminus e)| \geq |E(M \setminus e)| = n - 1.$$

Mas

$$n = |\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M \setminus e)| + |\mathcal{B}(M/e)| \geq n - 1 + |\mathcal{B}(M/e)|$$

ou seja,

$$|\mathcal{B}(M/e)| \leq 1$$

Pelo Teorema 4.4

$$M/e \cong U_{0,n-1},$$

pois  $M/e$  não possui colaços, já que  $M$  é conexa. E assim

$$M \cong U_{1,n}.$$

□

No próximo Teorema, usaremos a notação  $\mathcal{B}_{\cap X}(M)$  para designar o conjunto de bases de  $M$  que interceptam um dado conjunto  $X$ .

**Teorema 4.6.** *Seja  $M$  uma matróide. Se  $X \subseteq E(M)$  e  $X$  não contém laços nem colaços de  $M$ , então*

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |X|.$$

*Demonstração.* O resultado segue trivialmente quando  $X = \emptyset$ . Vamos assumir que  $X \neq \emptyset$ . Dividiremos a demonstração em dois casos:

**Caso 1:**  $X = E(M)$ . Logo  $M$  não tem laços nem colaços. Observe que aqui  $\mathcal{B}_{\cap X}(M) = \mathcal{B}(M)$ .

Se  $M$  for conexa, pelo Lema 4.3, temos que

$$|\mathcal{B}(M)| \geq |X|.$$

Assim  $|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |X|$ .

Se  $M$  não é conexa, então

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Onde  $M_1, M_2, \dots, M_n$  são as componentes conexas de  $M$ . Usaremos indução sobre  $n$  para provar que  $|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |X|$ .

Se  $n = 2$ , isto é  $M = M_1 \oplus M_2$ , então pelo Lema 4.2,

$$|\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M_1)||\mathcal{B}(M_2)|.$$

Tome  $|X| = x$  e  $|E(M_1)| = a$ . Logo

$$|\mathcal{B}(M)| \geq a(x - a).$$

Queremos provar que  $a(x - a) \geq x$ . Suponha que  $a(x - a) < x$ . Portanto,

$$x < \frac{a^2}{a - 1},$$

isto é,

$$x < (a + 1) + \frac{1}{a - 1}.$$

Por outro lado, como a matróide não possui laços nem colaços, cada componente conexa tem pelo menos dois elementos, desta forma  $x \geq a + 2$ . Ou seja,

$$a + 2 \leq x < (a + 1) + \frac{1}{a - 1}$$

O que é uma contradição. Desta forma

$$|\mathcal{B}(M)| \geq a(x - a) \geq x = |X|.$$

Agora suponha que o resultado vale para  $n - 1$ . Vamos provar que vale para  $n$ .

Como

$$M = (M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{n-1}) \oplus M_n,$$

temos que

$$|\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_{n-1})| |\mathcal{B}(M_n)| \geq |E(M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1})| |E(M_n)|.$$

Tomando  $|E(M_n)| = a$ , temos que

$$|\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2 \cdots \oplus M_{n-1})| |\mathcal{B}(M_n)| \geq |E(M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1})| |E(M_n)| \geq (x - a)a.$$

Pelo mesmo argumento utilizado para o caso  $n = 2$ , temos que

$$|\mathcal{B}(M)| \geq x.$$

E como neste caso  $\mathcal{B}_{\cap X}(M) = \mathcal{B}(M)$ , temos

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |X|.$$

**Caso 2:**  $X \subsetneq E(M)$ .

Faremos a prova por indução sobre  $|E(M)| = n$ .

Se  $|E(M)|=2$ , temos que  $M$  será ou um par de laços, ou um par de colaços, ou um laço e um colaço ou dois elementos em paralelo. Desta forma, para que  $X$  não contenha laços nem colaços, só nos resta a possibilidade de  $M$  ser um par de elementos em paralelo. Neste caso, teremos apenas uma base contendo  $X$ . mas  $|X| = 1$  e o resultado segue.

Vamos mostrar que o resultado vale para  $|E(M)| = n$ , tendo como hipótese que vale pra  $n - 1$ .

Seja  $e \in E(M) - X$ , pelo Lema 4.1 temos

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| = |\mathcal{B}_{\cap X}(M \setminus e)| + |\mathcal{B}_{\cap X}(M/e)| \quad (4.1)$$

Se  $X$  não contém laços nem colaços de  $M \setminus e$  ou  $M/e$ . Suponha primeiro que não os possui em  $M \setminus e$ . Temos, pela hipótese de indução,

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M \setminus e)| \geq |X| \quad (4.2)$$

Desta forma, utilizando (4.1) e (4.2), temos

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |X| + |\mathcal{B}_{\cap X}(M/e)| \geq |X|.$$

Se  $X$  não contém laços nem colaços de  $M/e$ , temos ainda pela hipótese de indução que

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M/e)| \geq |X| \quad (4.3)$$

Utilizando (4.1) e (4.3), temos

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |\mathcal{B}_{\cap X}(M \setminus e)| + |X| \geq |X|$$

Podemos agora supor que  $X$  contém laços ou colaços de  $M \setminus e$  e  $M/e$ . Note que  $X$  não contém laços em  $M \setminus e$ , caso contrário esses laços também seriam de  $M$ . Logo  $X$  contém colaço de  $M \setminus e$ , digamos  $x$ . Desta forma  $x$  está em série com  $e$  em  $M$ . Por outro lado,  $X$  não contém colaço de  $M/e$ , senão esse também seria colaço de  $M$ . Ou seja,  $X$  contém laço em  $M/e$ , digamos  $y$ . E assim  $y$  está em paralelo com  $e$  em  $M$ .

Como  $\{e, y\}$  e  $\{e, x\}$ , são respectivamente circuito e cocircuito de  $M$ , por ortogonalidade,  $x = y$ . Logo  $\{e, x\}$  é circuito e cocircuito de  $M$ , assim  $M \cong U_{1,2} \oplus M \setminus \{e, x\}$ . Note que se  $X - x$  contém laço ou colaço em  $M \setminus \{e, x\}$  então  $X$  também conterá em  $M$ . Desta forma

$$|\mathcal{B}_{\cap X-x}(M \setminus \{e, x\})| \geq |X - x| = |X| - 1.$$

Logo

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |X|$$

□

Observe que o Lema 4.3 é um caso particular do Teorema anterior quando  $X = E(M)$  e  $M$  é conexa.

O próximo resultado caracteriza as matróides quando a igualdade do Teorema 4.6 ocorre.

**Proposição 4.7.** *Seja  $M$  uma matróide, com  $X \subseteq E(M)$ , em que  $X$  não contém laços e colaços de  $M$ . Se  $|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| = |X|$ , então*

i)  $M \cong U_{1,2} \oplus U_{1,2}$ , ou

ii)  $M \cong U_{1,n}$ , ou

iii)  $M \cong U_{|X|-1,|X|}$ .

*Demonstração.* Primeiro vamos supor que  $X = E(M)$ . Logo

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M)| = |\mathcal{B}(M)| = |X| = |E(M)|.$$

Se  $M$  é conexa, então pelo Corolário 4.5, temos

$$M \cong U_{1,|X|} \text{ ou } M \cong U_{|X|-1,|X|}.$$

e ii) ou iii) ocorre.

Se  $M$  não é conexa, podemos escrever  $M$  como soma de duas matróides, então

$$M \cong M_1 \oplus M_2,$$

para matróides  $M_1$  e  $M_2$ . Assim, quando  $E(M_i) = X_i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , temos

$$|X_1| + |X_2| = |X| = |\mathcal{B}(M)| = |\mathcal{B}(M_1)||\mathcal{B}(M_2)| \geq |X_1||X_2|,$$

isto é,

$$|X_1| + |X_2| \geq |X_1||X_2|.$$

Para que a desigualdade acima seja satisfeita temos que  $\max\{|X_1|, |X_2|\} \leq 2$ . Note que como  $X$  não contém laços nem colaços  $|X_i| \geq 2$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . Logo

$$M_i \cong U_{1,2},$$

isto é,

$$M \cong U_{1,2} \oplus U_{1,2}.$$

Neste caso **i)** ocorre.

Agora suponha que  $X \subsetneq E(M)$  e seja  $e \in E(M) - X$ , assim

$$|X| = |\mathcal{B}_{\cap X}(M)| = |\mathcal{B}_{\cap X}(M \setminus e)| + |\mathcal{B}_{\cap X}(M/e)|.$$

Observe que  $X$  não pode conter laço em  $M \setminus e$ , só pode conter colaço. Da mesma forma  $X$  não pode conter colaço de  $M/e$ , apenas laço.

Se  $X$  não contém colaço em  $M \setminus e$ , então pelo Teorema 4.6, temos  $|\mathcal{B}_{\cap X}(M \setminus e)| \geq |X|$ .

Logo

$$|X| \geq |X| + |\mathcal{B}_{\cap X}(M/e)|.$$

Desta forma,

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M/e)| = 0$$

ou seja,  $X$  é um conjunto de laços de  $M/e$ . Logo  $e$  está em paralelo com todos os elementos de  $X$  em  $M$ . Caso  $P$  seja a classe em paralelo de  $M$  contendo  $e$ , temos que  $|\mathcal{B}(M/e)| = 1$  porque  $\{X \cup B : x \in X \text{ e } B \in \mathcal{B}(M/e)\} \subseteq \mathcal{B}_{\cap X}(M)$ . E assim,

$$M \cong U_{1,n}.$$

Logo **ii)** ocorre.

Se  $X$  não contém laço de  $M/e$ , então  $|\mathcal{B}_{\cap X}(M/e)| \geq |X|$ . Logo

$$|\mathcal{B}_{\cap X}(M \setminus e)| = 0$$

ou seja  $X$  é um conjunto de laços em  $M \setminus e$ , uma contradição pois se assim fosse  $X$  também seria conjunto de laços em  $M$ .

Agora suponha que  $X$  contém colaço de  $M \setminus e$  e laço em  $M/e$ . Neste caso existem  $x, y \in X$  com  $x$  em série com  $e$  e  $y$  em paralelo com  $e$ . Logo  $\{e, y\}$  e  $\{e, x\}$  são respectivamente, cocircuito e circuito de  $M$ . Por ortogonalidade  $x = y$ . E desta forma,

$$M \cong U_{1,2} \oplus M \setminus \{e, x\}.$$

Fazendo esse procedimento para todo  $e \in E - X$ , temos

$$M \cong \underbrace{U_{1,2} \oplus \dots \oplus U_{1,2}}_{|E-X| \text{ vezes}} \oplus M \setminus \{x_1, \dots, x_{|E-X|}\}.$$

Digamos  $X = \{x_1, \dots, x_{|E-X|}, x_{|E-X|+1}, \dots, x_n\}$  e considere  $X' = X - \{x_1, \dots, x_{|E-X|}\}$ . Se  $X' \neq \emptyset$ , então

$$|X| = |\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq |X'| \cdot 2^{|X|-|X'|} > |X|$$

uma contradição. Agora se  $X' = \emptyset$ , temos que  $|X| = |E - X|$  e

$$|X| = |\mathcal{B}_{\cap X}(M)| \geq 2^{|X|} - 1 > |X|$$

□

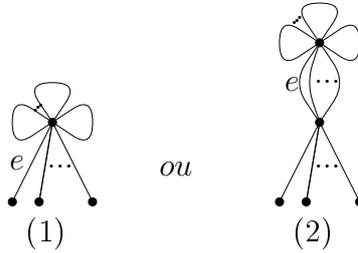
No próximo teorema caracterizamos matróides que possuem no máximo três bases contendo um elemento  $e$ . Ao longo da demonstração faremos algumas figuras que deixará claro onde está o elemento  $e$ .

**Teorema 4.8.** *Seja  $M$  uma matróide sobre  $E$  com  $n$  elementos e posto  $r$ . Se  $e \in E$  é um elemento de  $M$ ,  $k$  o número de elementos da classe em paralelo contendo  $e$  e  $|\mathcal{B}(M/e)| \leq 3$  então as seguintes afirmações ocorrem:*

i) *Se  $e$  não pertence a nenhuma base de  $M$ , então  $e$  é laço;*

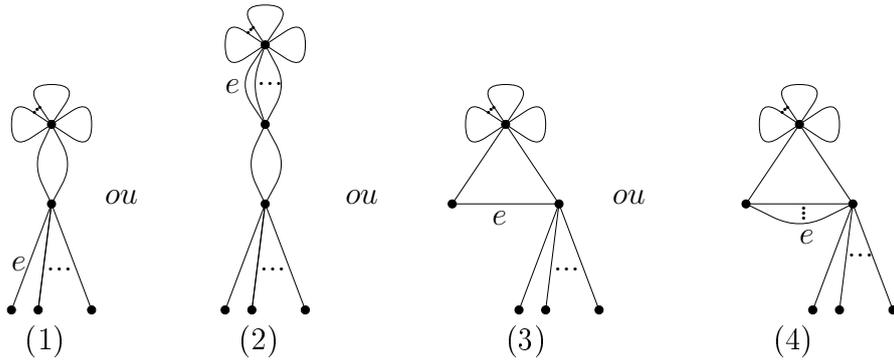
- ii) Se  $e$  pertence a apenas uma base de  $M$ , então  $M \cong U_{1,k} \oplus U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(k+r-1)}$ ;
- iii) Se  $e$  pertence a duas bases de  $M$ , então  $M \cong U_{1,2} \oplus U_{1,k} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(k+r)}$  ou  $M \cong P(U_{2,3}, U_{1,k}) \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(k+r)}$ ;
- iv) Se  $e$  pertence a três bases de  $M$ , então  $M \cong P(U_{2,4}, U_{1,k}) \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+2)}$  ou  $M \cong U_{1,3} \oplus U_{1,k} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+k+1)}$  ou  $M \cong P(U_{3,4}, U_{1,k}) \oplus U_{r-3,r-3} \oplus U_{0,n-(k+r)}$  ou  $M \cong U_{2,3} \oplus U_{1,k} \oplus U_{r-3,r-3} \oplus U_{0,n-(r+k)}$  ou  $M \cong P(P(U_{1,k}, U_{2,3}), U_{1,2}) \oplus U_{r-3,r-3} \oplus U_{0,n-(r+k)}$ .

*Demonstração.* Se  $e$  não pertence a nenhuma bases, claramente  $e$  é um laço e (i) segue. No caso de  $e$  pertencer a apenas uma base temos que  $|\mathcal{B}(M/e)| = 1$ , assim pelo Teorema 4.4(i) temos que  $M/e \cong U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-r}$ . Desta forma,  $M \cong U_{1,k} \oplus U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(k+r-1)}$ , isto é,  $M$  é isomorfa a matróide associada ao grafo



Note que (1) é um caso particular de (2) quando  $k = 1$ . Temos ii).

Se  $e$  pertence a duas bases de  $M$ , temos que  $|\mathcal{B}(M/e)| = 2$ . Logo pelo Teorema 4.4 (ii), temos que  $M/e \cong U_{1,2} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+1)}$ , ou seja  $M \cong U_{1,2} \oplus U_{1,k} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(k+r)}$  ou  $M \cong P(U_{2,3}, U_{1,k}) \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(k+r)}$ . Isto é,  $M$  é isomorfa a matróide associada ao grafo



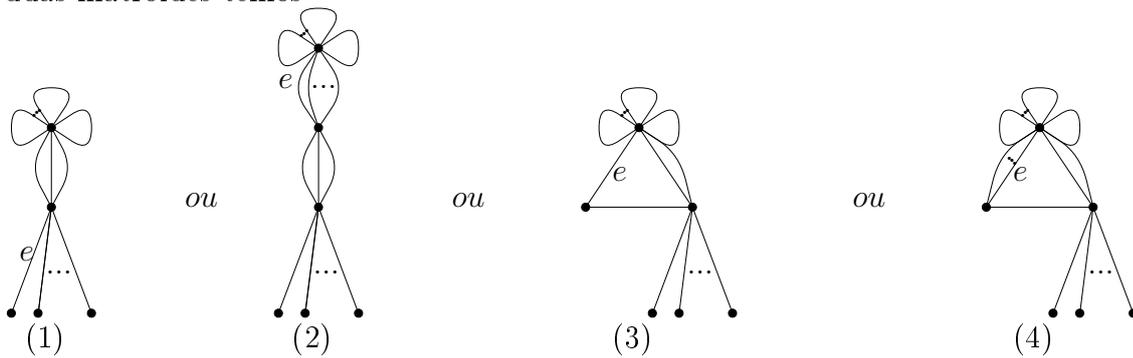
Observe que (1) e (3) são casos particulares de (2) e (4), quando  $k = 1$ , respectivamente. E temos **iii**).

Por fim, se  $e$  pertence a três bases, temos que  $|\mathcal{B}(M/e)| = 3$ . Ainda pelo Teorema 4.4 concluímos

a)  $M/e \cong U_{1,3} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+2)}$

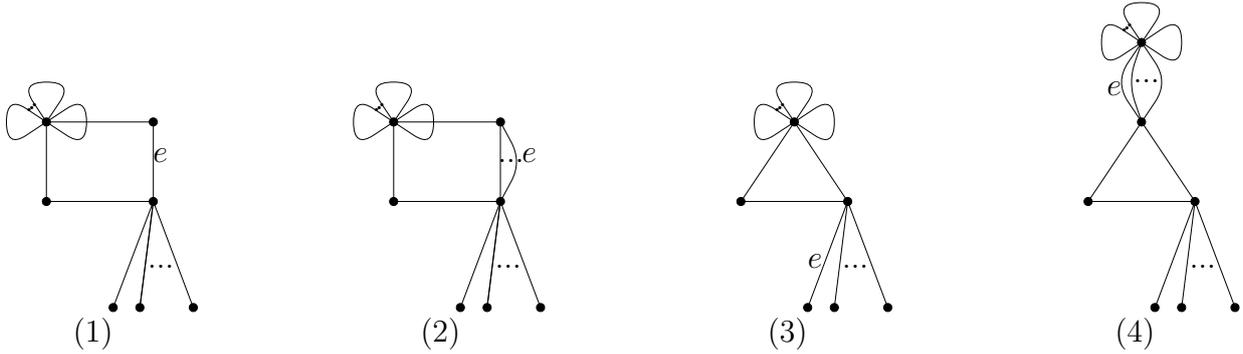
b)  $M/e \cong U_{2,3} \oplus U_{r-3,r-3} \oplus U_{0,n-(r+1)}$

De **a**), obtemos  $M \cong P(U_{2,4}, U_{1,k}) \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+2)}$  ou  $M \cong U_{1,3} \oplus U_{1,k} \oplus U_{r-2,r-2} \oplus U_{0,n-(r+k+1)}$  ou  $M \cong P(P(U_{1,k}, U_{2,3}), U_{1,2}) \oplus U_{r-3,r-3} \oplus U_{0,n-(r+k)}$ . No caso das últimas duas matrôides temos



Observe que (1) e (3) são casos particulares de (2) e (4) quando  $k = 1$ , respectivamente.

Agora analisando **b)**, temos que  $M \cong P(U_{3,4}, U_{1,k}) \oplus U_{r-3,r-3} \oplus U_{0,n-(k+r)}$  ou  $M \cong U_{2,3} \oplus U_{1,k} \oplus U_{r-3,r-3} \oplus U_{0,n-(k+r)}$ . Isto é,



Note que (1) e (3) são casos particulares de (2) e (4), respectivamente quando  $k = 1$ . □

No próximo teorema caracterizamos pares de matróides  $M_1$  e  $M_2$  tais que  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato com  $M_1$  e  $M_2$  com postos diferentes.

**Teorema 4.9.** *Se  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato, com  $r(M_i) = r_i$ , para todo  $i \in \{1, 2\}$  e  $r_1 \neq r_2$ , então existe  $i \in \{1, 2\}$  tal que*

$$M_i \cong U_{r_1, r_1} \oplus U_{0, n-r_1}$$

e

$$M_{3-i} \cong U_{1,2} \oplus U_{r_2-1, r_2-1} \oplus U_{0, n-(r_2+1)}$$

*Demonstração.* De fato, quando  $r(M_1) \neq r(M_2)$ , temos que

$$|\mathcal{B}(M_1) \triangle \mathcal{B}(M_2)| = |\mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)| = |\mathcal{B}(M_1)| + |\mathcal{B}(M_2)| = 3$$

Desta forma, existe  $i \in \{1, 2\}$  tal que

$$|\mathcal{B}(M_i)| = 1 \quad \text{e} \quad |\mathcal{B}(M_{3-i})| = 2.$$

Pelo Teorema 4.4, temos que

$$M_i \cong U_{r_1, r_1} \oplus U_{0, n-r_1}$$

e

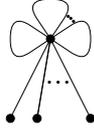
$$M_{3-i} \cong U_{1,2} \oplus U_{r_2-1, r_2-1} \oplus U_{0, n-(r_2+1)}$$

e o lema segue. □

## 4.2 Os 3-Pares Exatos Cujas Matróides Possuem o Mesmo Posto

Nesta seção consideramos os 3-pares exatos cujas matróides possuem mesmo posto, pois, no último resultado, descrevemos todos os 3-pares exatos cujas matróides possuem postos diferentes.

**Definição 4.10.** *Seja  $N$  uma matróide definida sobre um conjunto  $F$  com  $n$  elementos e posto  $r$ . Dizemos que  $N$  é um buquê quando  $N \cong U_{r,r} \oplus U_{0, n-r}$ , isto é,  $N$  é a matróide associada ao grafo*



Observe que o buquê possui apenas uma base que é o conjunto de colaços.

**Proposição 4.11.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um par de matróides definidas sobre um mesmo conjunto  $E$  e  $N$  um buquê sobre  $F$  tal que  $E \cap F = \emptyset$ , então*

$$|\mathcal{B}(M_i) - \mathcal{B}(M_{3-i})| = |\mathcal{B}(M_i \oplus N) - \mathcal{B}(M_{3-i} \oplus N)| \text{ com } i \in \{1, 2\}$$

*Demonstração.* Seja  $B_n$  a única base do buquê  $N$ . Por definição, para  $i \in \{1, 2\}$

$$\mathcal{B}(M_i \oplus N) = \{B \cup B_n : B \in \mathcal{B}(M_i)\}$$

Portanto,

$$\mathcal{B}(M_i \oplus N) - \mathcal{B}(M_{3-i} \oplus N) = \{B \cup B_n : B \in \mathcal{B}(M_i) - \mathcal{B}(M_{3-i})\}$$

e o resultado segue. □

Seja  $X$  um conjunto maximal em  $M_1$  e  $M_2$  tal que  $M_1|X = M_2|X = N$  é um Buquê.

Note que

$$M_1 = M_1|X \oplus M_1 \setminus X$$

e

$$M_2 = M_2|X \oplus M_2 \setminus X$$

Conseqüentemente  $(M_1, M_2) = (M_1 \setminus X, M_2 \setminus X) \oplus N$ . Pela Proposição 4.11,  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato se e somente se  $(M_1 \setminus X, M_2 \setminus X)$  é um 3-par exato.

**Definição 4.12.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides definidas sobre um mesmo conjunto  $E$ . Dizemos que o par  $(M_1, M_2)$  é irredutível se  $r(M_1) = r(M_2)$  e  $M_1$  e  $M_2$  não possuem laços nem colaços comuns.*

Seja  $(M_1, M_2)$  um par de matrôides definidas sobre  $E$ . Note que se  $e$  é um colaço de  $M_1$  que é laço de  $M_2$ , então as bases de  $M_1$  que contém  $e$  não são bases de  $M_2$ . Neste caso estamos interessados em estudar quando  $|\mathcal{B}(M_1/e)| \leq 3$ .

**Teorema 4.13.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  matrôides de posto  $r$  definidas sobre um conjunto  $E$  de cardinalidade  $n$ . Se  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato irredutível com  $\mathcal{L}^*(M_i) \cap \mathcal{L}(M_{3-i}) \neq \emptyset$ , para algum  $i \in \{1, 2\}$ . Então  $n - 2r \in \{-1, 0, 1\}$  e existe buquê  $K$  tal que*

$$M_i = [M_i \setminus E(K)] \oplus K \quad e \quad M_{3-i} = [M_{3-i} \setminus E(K)] \oplus K^*$$

onde,

$$M_i \setminus E(K) \cong U_{1,2}$$

e

$$M_{3-i} \setminus E(K) \cong \begin{cases} U_{0,2}, & \text{quando } n - 2r = 1 \\ U_{0,1}, & \text{quando } n - 2r = 0 \\ U_{2,2}, & \text{quando } n - 2r = -1 \end{cases}$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $i = 1$ . Escolha  $a_1 \in \mathcal{L}^*(M_1) \cap \mathcal{L}(M_2)$ . Conseqüentemente, toda base de  $M_1$  contém  $a_1$  e nenhuma base de  $M_2$

contém  $a_1$ . Em particular,  $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \emptyset$  e daí  $\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$ .

Logo  $\{|\mathcal{B}(M_1)|, |\mathcal{B}(M_2)|\} = \{1, 2\}$ . E pelo Teorema 4.4, temos que

$$M_i \cong U_{1,2} \oplus U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(r+1)} \quad \text{e} \quad M_{3-i} \cong U_{r,r} \oplus U_{0,n-r},$$

para  $i \in \{0, 1\}$ .

Tomando

$$K = U_{r-1,r-1} \oplus U_{0,n-(r+1)},$$

temos que

$$M_i \cong U_{1,2} \oplus K.$$

Note agora que uma das 3 coisas poderá acontecer:

- $U_{1,2}$  de  $M_i$  se transformará em  $U_{0,2}$  de  $M_{3-i}$ , e todos os laços de  $M_i$  se transformam em colaços de  $M_{3-i}$  e vice-versa, neste caso

$$M_{3-i} \cong U_{0,2} \oplus K^*,$$

ou

- $U_{1,2}$  de  $M_i$  se transformará em  $U_{0,1} \oplus U_{1,1}$  de  $M_{3-i}$ , e todos os laços de  $M_i$  se transformam em colaços de  $M_{3-i}$  e vice-versa, neste caso

$$M_{3-i} \cong U_{0,1} \oplus U_{1,1} \oplus K^*,$$

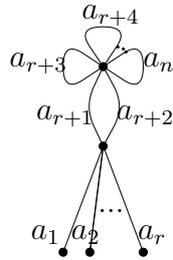
ou

- $U_{1,2}$  de  $M_i$  se transformará em  $U_{2,2}$  de  $M_{3-i}$ , e todos os laços de  $M_i$  se transformam em colaços de  $M_{3-i}$  e vice-versa, neste caso

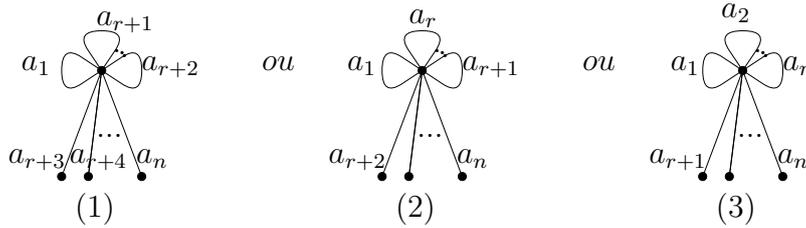
$$M_{3-i} \cong U_{2,2} \oplus K^*.$$

Graficamente temos,

$M_i$  isomorfa a



e  $M_{3-i}$  é isomorfa a



Observe que em (1) dois elementos que estavam em paralelo em  $M_i$  viraram laços em  $M_{3-i}$  e os demais laços de  $M_i$  permutaram com os colaços de  $M_{3-i}$ , Desta forma  $n = 2r + 1$ . Em (2) os elementos em paralelo de  $M_i$  se transformaram em um laço e um colaço cada em  $M_{3-i}$  e os demais laços de  $M_i$  permutaram com os colaços de  $M_{3-i}$ , assim  $n = 2r$ . Por fim, em (3) os elementos em paralelo de  $M_i$  passaram a colaços de  $M_{3-i}$  e os demais laços de  $M_i$  permutaram com os colaços de  $M_{3-i}$ , logo  $n = 2r - 2$ .  $\square$

Observe que com o teorema anterior encerramos o caso em que uma das matróides possui laço que é colaço na outra. Agora trataremos de casos em que as matróides  $M_1$  e  $M_2$  não possuem nem laços nem colaços comuns e não possuem laços de uma que é

colaços na outra e vice-versa.

**Definição 4.14.** *Um par de matróides  $(M_1, M_2)$  definidas sobre um mesmo conjunto  $E$  é super-irredutível se é irredutível e não existe laço de  $M_1$  que seja colaço de  $M_2$  e vice-versa.*

**Teorema 4.15.** *Se  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato super irredutível, então*

$$|\mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}(M_2)| \leq 3.$$

*Demonstração.* Seja  $X \subseteq \mathcal{L}(M_1)$ . Logo  $X$  não contém laços nem colaços de  $M_2$  pois  $(M_1, M_2)$  é super-irredutível. Pelo Teorema 4.6, existe pelo menos  $|X|$  bases de  $M_2$  interceptando  $X$ , isto é,

$$|X| \leq |\mathcal{B}_{\cap X}(M_2)|.$$

Da mesma forma se  $Y \subseteq \mathcal{L}(M_2)$ , então

$$|Y| \leq |\mathcal{B}_{\cap Y}(M_1)|.$$

Note que  $X \cap Y = \emptyset$ , pois  $M_1$  e  $M_2$  não possui laços comuns. Logo

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| \leq |\mathcal{B}_{\cap X}(M_2)| + |\mathcal{B}_{\cap Y}(M_1)|$$

Por outro lado

$$\mathcal{B}_{\cap X}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_2) - \mathcal{B}(M_1)$$

$$\mathcal{B}_{\cap Y}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2)$$

Desta forma,

$$|X \cup Y| \leq |\mathcal{B}_{\cap X}(M_2)| + |\mathcal{B}_{\cap Y}(M_1)| \leq |\mathcal{B}(M_2) - \mathcal{B}(M_1)| + |\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2)| = |\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \leq 3.$$

E o Teorema segue. □

Observe que o Teorema acima também é invariante por dualidade. Assim podemos dualizar qualquer um dos conjuntos  $\mathcal{L}(M_1)$  e/ou  $\mathcal{L}(M_2)$  e o resultado continua valendo.

Como o Teorema anterior nos dá um limite para o número de laços e colaços, podemos estudar agora os casos particulares em que  $M_1$  e  $M_2$  possuem juntas no máximo 3 laços ou colaços. Sem perda de generalidades podemos supor para os próximos cinco teoremas que  $|\mathcal{L}(M_1)| \geq |\mathcal{L}(M_2)|$ . Também ficará claro ao longo das demonstrações desses teoremas como rotular os elementos.

**Teorema 4.16.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato super irredutível. Se  $M_1$  possui apenas um laço e  $M_2$  não possui laços, então*

- i)  $M_1 \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$  e  $M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1}$ , ou
- ii)  $M_1 \cong P(U_{2,3}, U_{1,2}) \oplus U_{0,1}$  e  $M_2 \cong U_{1,4} \oplus U_{1,1}$ , ou
- iii)  $M_1 \cong U_{3,4} \oplus U_{0,1}$  e  $M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{2,2}$ , ou
- iv)  $M_1 \cong U_{3,4} \oplus U_{0,1}$  e  $M_2 \cong P(U_{2,3}, U_{1,2}) \oplus U_{1,1}$ , ou
- v)  $M_1 \cong P(U_{2,3}, U_{1,k-1}) \oplus U_{0,1}$  e  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{1,2}$ , ou
- vi)  $M_1 \cong U_{1,k-1} \oplus U_{1,2} \oplus U_{0,1}$  e  $M_2 \cong P(U_{2,3} \oplus U_{1,k})$ , ou
- vii)  $M_1 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,k-1} \oplus U_{0,1}$  e  $M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,k}$ , ou



pertence a toda base de  $M_2$ , temos que ter no máximo duas bases de  $M_1$  que evitam  $c$ , isto é,  $|\mathcal{B}(M_1^*/c)| \leq 2$ . Considere primeiro  $|\mathcal{B}(M_1^*/c)| = 1$ . Como  $r(M_1^*) = 2$  e  $r(M_2) = 2$ , então  $|E(M_1)| = 4$ . Isto é,  $M_1^* \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1^* \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1}$ . Desta forma,  $M_1 \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1 \cong U_{2,3} \oplus U_{0,1}$ . Observe ainda que como  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato, então teremos

$$M_1 \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$$

e

$$M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1}$$

e *i)* segue.

Se  $|\mathcal{B}(M_1^*/c)| = 2$ , temos  $M_1^* \cong U_{1,2} \oplus U_{1,k_1} \oplus U_{1,1}$  ou  $M_1^* \cong P(U_{2,3}, U_{1,k_1}) \oplus U_{1,1}$ , onde  $k_1$  é a classe em paralelo de  $M_1^*$  que contém  $c$ . Como  $r(M_1^*) = 3$ , temos que  $|E(M_1)| = 5$ . Assim, teremos

$$M_1 \cong P(U_{2,3}, U_{1,2}) \oplus U_{0,1}$$

e

$$M_2 \cong U_{1,4} \oplus U_{0,1}$$

e temos *ii)*.

**Caso 1.3:**  $c_2 = 2$ . Neste caso  $r(M_2) = 3$ . Seja  $X = \{c, d\}$  o conjunto de colaços de

$M_2$ , temos que ter no máximo duas bases de  $M_1$  que evitam  $X$ , isto é  $|\mathcal{B}(M_1^*/X)| \leq 2$ . Mas se  $|\mathcal{B}(M_1^*/X)| = 1$ , teríamos  $X = \{c_1, c_2\}$  uma base de  $M_1^*$ , desta forma  $X$  seria um conjunto de colaços de  $M_1^*$ , o que não pode ocorrer já que  $(M_1, M_2)$  é super irreduzível. Desta forma,  $|\mathcal{B}(M_1^*/X)| = 2$ . Logo  $c$  e  $d$  estão em paralelo, pois caso contrário existiria pelo menos três bases interceptando  $X$ . Logo  $M_1^* \cong U_{1,k_1} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,n-(k_1+1)}$ . Segue que  $|E(M_1)| = 5$ . Assim,  $M_1^* \cong U_{1,4} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1^* \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1^* \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,2}$ . Como  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato, segue que

$$M_1 \cong U_{3,4} \oplus U_{0,1}$$

e

$$M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{2,2}.$$

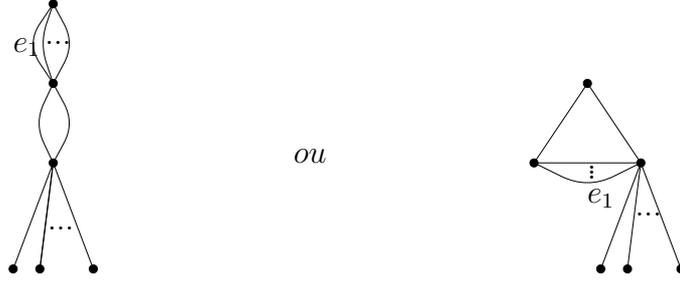
E *iii*) ocorre.

Observe que o caso  $c_2 = 3$  não precisa ser estudado visto que pelo Teorema 4.15, temos que

$$|\mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}^*(M_2)| \leq 3.$$

**Caso 2:**  $|\mathcal{B}(M_2/e_1)| = 2$ .

Neste caso pelo Teorema 4.8, temos que  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{1,2} \oplus U_{0,n-(k+2)}$  ou  $M_2 \cong P(U_{2,3}, U_{1,k}) \oplus U_{0,n-(k+2)}$ . Onde  $k$  é cardinalidade da classe em paralelo de  $M_2$  que contém  $e_1$ . Graficamente temos  $M_2$  isomorfa a umas das duas matrôides abaixo:



ou

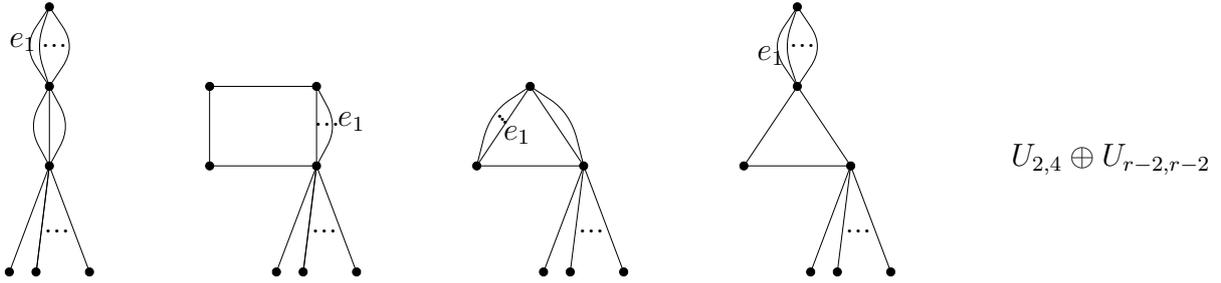
**Caso 2.1:**  $c_2 = 0$ . Note que neste caso  $r(M_2) = 2$  e conseqüentemente  $r(M_1) = 2$ . Desta forma quando  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{1,2}$ , temos  $M_1 \cong P(U_{2,3}, U_{1,k-1}) \oplus U_{0,1}$  e quando  $M_2 \cong P(U_{2,3}, U_{1,k})$ , temos  $M_1 \cong U_{1,k-1} \oplus U_{1,2} \oplus U_{0,1}$ . E temos *iv*) e *v*).

**Caso 2.2:**  $c_2 = 1$ . Logo,  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{1,2} \oplus U_{1,1}$  ou  $M_2 \cong P(U_{1,k}, U_{2,3}) \oplus U_{1,1}$ , com  $k$  a cardinalidade da classe em paralelo de  $M_2$  que contém  $e_1$ . Seja  $c$  o colaço de  $M_2$ , temos que  $M_1$  tem uma base que evite  $c$ . Ou seja,  $M_1^*$  tem apenas uma base contendo  $c$ . Assim,  $r(M_1^*) = 2$ . Logo, como  $r(M_2) = 3$  e  $r(M_1^*) = 2$  segue que  $|E(M)| = 5$ , ou seja,  $M_1^* \cong U_{1,4} \oplus U_{1,1}$  ou  $M_1^* \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1^* \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,2}$ . Desta forma  $M_1 \cong U_{3,4} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1 \cong U_{2,3} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1 \cong U_{1,2} \oplus U_{2,2} \oplus U_{0,1}$ . E temos *vi*).

Observe que não precisamos analisar o caso em que  $M_2$  possui dois ou três colaços pois nesse caso teríamos que ter  $M_1$  com apenas uma base interceptando esses colaços, mas isso é impossível visto que pelo Teorema 4.6, temos pelo menos  $|X|$  bases interceptando  $X$ .

**Caso 3:**  $|\mathcal{B}(M_2/e_1)| = 3$ .

Neste caso temos  $M_2$  é isomorfa a uma das seguintes matrôides:



Observe que neste caso  $\mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_2)$ , pois  $M_2$  já possui três bases que não são bases de  $M_1$ . Além disso,  $M_2$  não possui colaços pois esses também seriam colaços de  $M_1$ , mas  $(M_1, M_2)$  é super irredutível. Logo pelo Teorema 4.8iv), temos que  $M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,k}$  ou  $M_2 \cong P(U_{3,4}, U_{1,k})$  ou  $M_2 \cong U_{2,3} \oplus U_{1,k}$  ou  $M_2 \cong P(P(U_{2,3}, U_{1,k}), U_{1,2})$  ou  $M_2 \cong U_{2,4}$ . Logo as bases de  $M_2$  que não contém  $e_1$  são bases de  $M_1$ , isto é

$$\mathcal{B}(M_1) = \mathcal{B}(M \setminus e_1).$$

Desta forma, quando  $M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,k}$ , com  $k$  o número de elementos da classe em paralelo que contém  $e_1$  e  $k \geq 2$ , temos que  $M_1 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,k-1} \oplus U_{0,1}$ . e vii) ocorre.

Quando  $M_2 \cong P(U_{3,4}, U_{1,k})$ , temos  $M_1 \cong P(U_{3,4}, U_{1,k-1}) \oplus U_{0,1}$ . Se  $M_2 \cong U_{2,3} \oplus U_{1,k}$ , temos que  $M_1 \cong U_{2,3} \oplus U_{1,k-1} \oplus U_{0,1}$ . Se  $M_2 \cong P(P(U_{2,3}, U_{1,k}), U_{1,2})$  temos que  $M_1 \cong P(P(U_{2,3}, U_{1,k-1}), U_{1,2}) \oplus U_{0,1}$ . Por fim se  $M_2 \cong U_{2,4}$ , temos  $M_1 \cong U_{2,3} \oplus U_{0,1}$ . E viii), ix), x) e xi) ocorrem.  $\square$

**Teorema 4.17.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato super irredutível. Se  $M_1$  possui dois laços e  $M_2$  não possui laços, então*

$$M_1 \cong U_{2,3} \oplus U_{0,2}$$

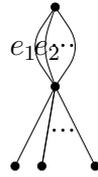
$e$

$$M_2 \cong U_{1,4} \oplus U_{1,1}$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{e_1, e_2\}$  laços de  $M_1$ , como  $X \notin \mathcal{L}(M_2) \cup \mathcal{L}^*(M_2)$ , temos, pelo Teorema 4.6, que existem pelo menos duas bases de  $M_2$  que interceptam  $X$ . Desta forma queremos que  $2 \leq |\mathcal{B}_{\cap X}(M_2)| \leq 3$ , pois estas são bases de  $M_2$  e não são de  $M_1$ .

**Caso 1:** Se  $|\mathcal{B}_{\cap X}(M_2)| = 2$

Neste caso temos que  $\{e_1, e_2\}$  é um circuito, pois se fosse um independente existiria uma base  $B \in \mathcal{B}(M_2)$  tal que  $X \subseteq B$ , além disso teríamos que  $B \cup x$  um dependente para todo  $x \in E(M_2) - B$ , desta forma  $B \cup x \subseteq C$  para algum  $C \in \mathcal{C}(M_2)$ , com  $|C| \geq 4$ , logo teríamos mais de duas bases interceptando  $e_1$  e  $e_2$ . Logo  $|\mathcal{B}(M_2/e_i)| = 1$ , com  $i \in \{1, 2\}$ , ou seja  $M_2$  isomorfa a



Isto é  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{c_2,c_2}$ , onde  $k$  é o número de elementos da classe em paralelo contendo  $e_1$  e  $e_2$ , e  $c_2$  é o número de colaços de  $M_2$ .

**Caso 1.1:**  $c_2 = 0$

Neste caso  $M_2 \cong U_{1,k}$  e  $M_1 \cong U_{1,k-2} \oplus U_{0,2}$ , mas isso resultada  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 2$ , o que é uma contradição, já que  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato.

**Caso 1.2:**  $c_2 = 1$

Neste caso  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{1,1}$ . Seja  $c$  o único colaço de  $M_2$ , temos que como toda base de  $M_2$  contém  $c$ , logo  $M_1$  tem que possuir uma base que evita  $c$ , ou seja  $M_1^*$  possui exatamente uma base contendo  $c$ , pelo Teorema 4.8, temos que  $M_1^* \cong U_{1,k-2} \oplus U_{2,2} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1^* \cong U_{1,k-1} \oplus U_{2,2}$ , neste caso  $r(M_1^*) = 3$  e  $r(M_2) = 2$ , logo  $E(M_1) = 5$ , e assim  $M_1^* \cong U_{1,2} \oplus U_{2,2} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1^* \cong U_{1,3} \oplus U_{2,2}$ . E assim  $M_1 \cong U_{1,2} \oplus U_{2,2} \oplus U_{0,1}$  ou  $M_1 \cong U_{2,3} \oplus U_{0,2}$  e  $M_2 \cong U_{1,4} \oplus U_{1,1}$ . Note que para que  $(M_1, M_2)$  seja um 3-par exato temos que ter

$$M_1 \cong U_{2,3} \oplus U_{0,2}$$

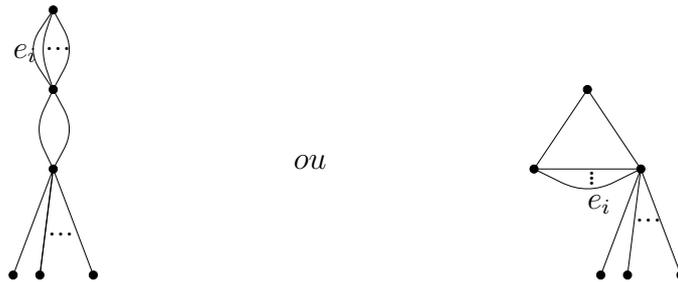
e

$$M_2 \cong U_{1,4} \oplus U_{1,1}.$$

como  $M_1$  tem dois laços então pelo Teorema 4.15, temos que  $M_2$  tem no máximo um laço.

**Caso 2:** Se  $|\mathcal{B}_{\cap X}(M_2)| = 3$

Neste caso temos que pelo menos um dos  $e_i$  pertence a duas dessas três bases, assim  $|M_2/e_i| = 2$  e pelo Teorema 4.8 temos  $M_2$  isomorfa a uma das duas matrôides:



Em ambos os casos  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \geq 4$ .

□

**Teorema 4.18.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato super irredutível. Se  $M_1$  possui três laços e  $M_2$  não possui laços, então*

$$M_1 \cong U_{1,k-3} \oplus U_{0,3}$$

e

$$M_2 \cong U_{1,k}$$

*Demonstração.* Seja  $X = \{e_1, e_2, e_3\}$  o conjunto de laços de  $M_1$ , logo  $X$  não possui laços nem colaços em  $M_2$ , desta forma pelo Teorema 4.6, temos que existe pelo menos 3 bases em  $M_2$  interceptando  $X$ , como  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato, então temos que ter exatamente 3 bases de  $M_2$  interceptando  $X$ . Pelo Corolário 4.7 temos que  $M_2 \cong U_{1,k}$  ou  $M_2 \cong U_{2,3}$ . Observe que o caso em que  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato super irredutível é exatamente quando  $M_2 \cong U_{1,k}$  e consequentemente  $M_1 \cong U_{1,k-3} \oplus U_{0,3}$ , e o Teorema segue. □

**Teorema 4.19.** *Sejam  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato super irredutível e  $M_1$  e  $M_2$  possuindo apenas um laço cada uma. Então*

$$M_1 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$$

e

$$M_2 \cong U_{1,2} \oplus U_{1,2} \oplus U_{0,1}$$

*Demonstração.* Sejam  $e_1$  laço de  $M_1$  e  $e_2$  laço de  $M_2$ , como  $(M_1, M_2)$  é super irredutível, temos pelo Teorema 4.6 que  $|\mathcal{B}_{\cap e_2}(M_1)| \geq 1$  e  $|\mathcal{B}_{\cap e_1}(M_2)| \geq 1$ . Como  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato, temos

$$|\mathcal{B}_{\cap e_2}(M_1)| + |\mathcal{B}_{\cap e_1}(M_2)| \leq 3.$$

Desta forma,

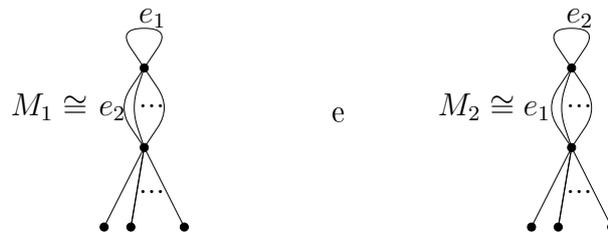
$$|\mathcal{B}_{\cap e_2}(M_1)| = |\mathcal{B}_{\cap e_1}(M_2)| = 1$$

ou sem perda de generalidade,

$$|\mathcal{B}_{\cap e_2}(M_1)| = 1 \quad \text{e} \quad |\mathcal{B}_{\cap e_1}(M_2)| = 2$$

**Caso 1:**  $|\mathcal{B}_{\cap e_2}(M_1)| = |\mathcal{B}_{\cap e_1}(M_2)| = 1$

Neste caso pelo Teorema 4.8, temos



Note que este caso não serve visto que  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 2q$ , com  $q$  um inteiro positivo.

**Caso 2:**  $|\mathcal{B}_{\cap e_2}(M_1)| = 1 \quad \text{e} \quad |\mathcal{B}_{\cap e_1}(M_2)| = 2$

Neste caso teremos,



Note que de imediato já temos uma base de  $M_1$  que contém  $e_2$  que não é base de  $M_2$ , assim como temos duas bases de  $M_2$  que contém  $e_1$  que não é base de  $M_1$ . Desta forma,

$$k_1 - 1 = 2k_2 - 2,$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são o número de elementos da classe em paralelo que contém  $e_2$  e  $e_1$ , respectivamente. Além disso se  $e = |E(M_1)| = |E(M_2)|$  e  $c_1$  e  $c_2$  o número de colaços de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, então

$$e = 1 + k_1 + c_1 = 1 + k_2 + 2 + c_2,$$

isto é,

$$e = 6 + c_2 - c_1 \quad (*)$$

Além disso,

$$c_1 + 1 = r(M_1) = r(M_2) = c_2 + 1$$

ou seja

$$c_1 = c_2 + 1.$$

Por outro lado, pelo Teorema 4.15, podemos concluir que

**caso 2.1:**  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 2$ , ou

**caso 2.2:**  $c_2 = 1$  e  $c_1 = 2$ .

No primeiro caso, substituindo os valores de  $c_1$  e  $c_2$  em (\*), temos  $e = 5$ , isto é,



Para o segundo caso, ficamos com  $e = 6$ , mas neste caso  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 5, 7$ .

□

**Teorema 4.20.** *Seja  $(M_1, M_2)$  é um 3-par super irredutível . Se  $M_1$  possui dois laços e  $M_2$  apenas um laço, então*

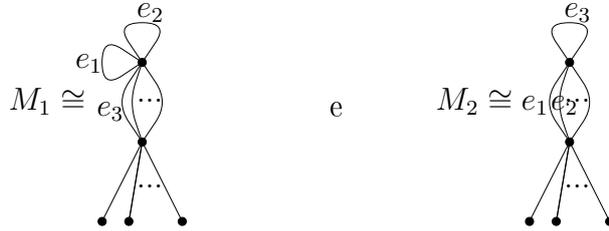
i)  $M_1 \cong U_{1,k-1} \oplus U_{0,2}$  e  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{0,1}$ , ou

ii)  $M_1 \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,2}$  e  $M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{L}(M_1)$  e  $\{e_3\} \in \mathcal{L}(M_2)$ , logo  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{e_3\}$  não possui laço nem colaço em  $M_2$  e  $M_1$  respectivamente, visto que  $(M_1, M_2)$  é super irredutível. Pelo Teorema 4.6, temos  $|\mathcal{B}_{\cap e_3}(M_1)| \geq 1$  e  $|\mathcal{B}_{\cap\{e_1, e_2\}}(M_2)| \geq 2$ . Como  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato, temos

$$|\mathcal{B}_{\cap e_3}(M_1)| = 1 \quad \text{e} \quad |\mathcal{B}_{\cap\{e_1, e_2\}}(M_2)| = 2.$$

Desta forma, pelo corolário 4.7, temos



Além disso, o número de colaços de ambas as matróides tem que ser igual por causa do posto das matróides, e pelo Teorema 4.15, temos que como  $M_1$  tem dois laços então  $M_2$  terá no máximo um colaço.

**Caso 1:**  $M_1$  e  $M_2$  não possuem colaços

Neste caso,  $M_1 \cong U_{1,k-1} \oplus U_{0,2}$  e  $M_2 \cong U_{1,k} \oplus U_{0,1}$ , e o item **i)** segue.

**Caso 2:**  $M_1$  e  $M_2$  possuem um colaço cada uma

Sejam  $c_1$  e  $c_2$  os colaços de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Como toda base de  $M_2$  contém  $c_2$ , e  $M_2$  já possuem duas bases quem não são de  $M_1$ , então  $M_1$  tem que conter exatamente uma base que evita  $c_2$ , isto é,  $M_1^*$  tem exatamente uma base contendo  $c_2$ , desta forma  $r(M_1^*) = 3$  e como  $r(M_1) = 2$ , temos que  $|E(M_1)| = 5$ . Isto é,  $M_1 \cong U_{1,2} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,2}$  e  $M_2 \cong U_{1,3} \oplus U_{1,1} \oplus U_{0,1}$ , e o item **ii)** ocorre.

□

Com isto encerramos o caso em que  $M_1$  e  $M_2$  possuem laços, e pela invariância por dualidade do problema, também concluímos os casos em que as matróides possuem colaços.

### 4.3 Matróides CL-Livre

Nesta seção tratamos de matróides  $M_1$  e  $M_2$  sobre um mesmo conjunto  $E$  que não possuem laços nem colaços.  $M_1$  e  $M_2$  com mesmo posto e cuja a cintura é dois.

**Definição 4.21.** Dizemos que uma matróide  $M$  é CL-livre se não possuem laços nem colaços. Dizemos ainda que o par  $(M_1, M_2)$  é CL-livre se ambas as matróides não possuem laços nem colaços.

O próximo Lema caracteriza matróides que possuem no máximo 3 bases contendo um par de elementos  $\{a, b\} \subseteq E(M)$  através do seu posto.

**Lema 4.22.** Seja  $M$  uma matróide CL-Livre. Se  $X = \{a, b\} \subset E(M)$  é um independente, então

- (i) Se  $|\mathcal{B}(M/X)| = 1$ , temos que  $r(M) = 2$
- (ii) Se  $|\mathcal{B}(M/X)| = 2$ , temos que  $r(M) = 3$
- (iii) Se  $|\mathcal{B}(M/X)| = 3$ , temos que  $r(M) = 3$  ou 4

*Demonstração.* De fato, se  $|\mathcal{B}(M/X)| = 1$  temos pelo Teorema 4.4, desta forma  $M/X$  é isomorfa a



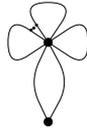
logo como  $M$  é CL-livre então temos que se  $x \in L = \mathcal{C}(M/X)$ ,  $x \in cl_M(X)$ . Assim

$$0 = r(M/X) = r(M) - r(X) = r(M) - 2$$

isto é,

$$r(M) = 2.$$

Se  $|\mathcal{B}(M/X)| = 2$ , ainda pelo 4.4(ii), temos que  $M/X$  é isomorfa a



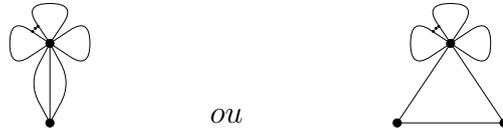
Neste caso,

$$1 = r(M/X) = r(M) - r(X) = r(M) - 2$$

isto é,

$$r(M) = 3.$$

Por fim, se  $|\mathcal{B}(M/X)| = 3$ , pelo 4.4(iii) temos que  $M/X$  é isomorfa a



ou seja  $r(M/X) = 1$  ou  $r(M/X) = 2$ . Desta forma

$$1 = r(M/X) = r(M) - r(X) = r(M) - 2$$

isto é,

$$r(M) = 3.$$

ou

$$2 = r(M/X) = r(M) - r(X) = r(M) - 2$$

isto é,

$$r(M) = 4.$$

□

No próximo Teorema trataremos o caso em que  $M_1$  e  $M_2$  possuem um circuito  $\{a, b\}$  em comum.

**Teorema 4.23.** *Seja  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato CL-livre. Se  $\{a, b\} \in \mathcal{C}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ , então*

- i)  $M_1 \setminus \{a, b\}$  é obtida de  $M_2 \setminus \{a, b\}$  relaxando um circuito hiperplano; ou
- ii)  $M_1 \setminus a$  e  $M_2 \setminus a$  relaxam a mesma matróide; ou
- iii)  $N$  relaxa as matróides  $M_1 \setminus a$  e  $M_2 \setminus a$  e essas relaxam a mesma matróide. Onde  $N$  é uma matróide tal que  $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ ; ou
- iv)  $M_1 \setminus a$  ou  $M_2 \setminus a$  é um relaxamento da outra; ou
- v) Existe  $\{e, f\} \in \mathcal{C}^*(M_1 \setminus a) \cap \mathcal{C}^*(M_2 \setminus a)$  tal que  $M_1 \setminus \{a, e, f\}$  ou  $M_2 \setminus \{a, e, f\}$  é um relaxamento da outra; ou
- vi) Existe  $\{e, f\} \in \mathcal{C}(M_1 \setminus a) \cap \mathcal{C}(M_2 \setminus a)$  tal que  $M_1 \setminus a / \{e, f\}$  ou  $M_2 \setminus a / \{e, f\}$  é um relaxamento da outra.

*Demonstração.* Sejam  $\{B_1, B_2, B_3\} \in \mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)$  e  $P_1, P_2, \dots, P_k$  as classes em paralelo comuns as duas matróides. Se  $P_i = \{a, b\} \cap \{B_1, B_2, B_3\} = \emptyset$  então  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = |\mathcal{B}(M_1 \setminus a) \Delta \mathcal{B}(M_2 \setminus a)|$ .

Agora suponha  $P_i \cap \{B_1, B_2, B_3\} \neq \emptyset$ .

Se  $P_i = \{a, b, c\}$ , podemos considerar sem perda de generalidade que

$$a \in B_1$$

$$B_2 = (B_1 - a) \cup b$$

$$B_3 = (B_1 - a) \cup c.$$

Note que  $|P_i|$  não pode conter 4 ou mais elementos, caso contrário teríamos  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \geq 4$ .

Observe ainda que se  $P_i \cap \{B_1, B_2, B_3\} \neq \emptyset$  então  $P_j \cap \{B_1, B_2, B_3\} = \emptyset, \forall j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k\}$ , caso contrário ainda teríamos  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \geq 4$ .

Note que  $(M_1 \setminus \{a, b\}, M_1 \setminus \{a, b\})$  é um 1-par exato e usando o resultado de Truemper concluímos **i**).

Agora se  $|P_i| = 2$ , digamos  $P_i = \{a, b\}$ . Então temos que  $a \in B_1, b \in B_2$  e  $B_3$  não intercepta nenhuma classe em paralelo, caso contrário teríamos  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| \geq 4$ . Neste caso temos que  $(M_1 \setminus a, M_2 \setminus a)$  é um 2-par exato, desta forma usando o resultado do resultado de Mills obtemos **ii**) a **vi**). e o Teorema segue.  $\square$

Agora trataremos do caso em que os circuitos de tamanho dois de uma das matróides são independente na outra matróide.

**Teorema 4.24.** *Sejam  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato CL – livre,  $C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$  com  $|C| = 2$  e  $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$  uma partição de  $E(M_1)$ . Se  $|\mathcal{B}(M_1/C)| = 1$ , então*

- i)**  $\{M_1|X_i; M_2|X_i\} = \{U_{2,2}; U_{1,2}\}$  para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ ; ou
- ii)** *Existe classe em paralelo  $P$  de  $M_i$ , para algum  $i \in \{1, 2\}$ , tal que cada elemento de  $P$  é classe em paralelo de  $M_3 - i$  e  $M_1 \setminus P = M_2 \setminus P$ ; ou*
- iii)**  $\{M_1|X_i; M_2|X_i\} = \{U_{1,3}; U_{1,2} \oplus U_{1,1}\}$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 4.22, temos que  $r(M_2) = r(M_1) = 2$ . Note que cada  $X_i$  é união de classes em paralelo de  $M_l$  para algum  $l \in \{1, 2\}$ .

Agora suponha que  $|X_1| = |X_2| = |X_3| = 2$ . Logo cada  $X_i$  é da forma

$$X_i = P_m \cup P_n \text{ ou } X_i = P_k.$$

Onde  $P_m, P_n, P_k$  são classes em paralelo de  $M_l$  para algum  $l \in \{1, 2\}$  e  $|P_m| = |P_n| = 1$  e  $|P_k| = 2$ . Assim,

$$M_l|X_i \cong U_{2,2} \text{ se } X_i = P_m \cup P_n$$

ou

$$M_l|X_i \cong U_{1,2} \text{ se } X_i = P_k;$$

e como  $(M_1, M_2)$  é um 3-par exato segue que

$$M_{3-l}|X_i \cong U_{1,2}$$

ou

$$M_{3-l}|X_i \cong U_{2,2}.$$

E assim

$$\{M_1|X_i; M_2|X_i\} = \{U_{1,2}, U_{2,2}\}.$$

E **i)** segue. Além disso, observe que  $M_1|X_0 = M_2|X_0$ .

Agora suponha que existe uma classe com 3 elementos. Sem perda de generalidade podemos supor que  $|X_1| = 3$ . Se  $X_1 = P$ , para alguma classe em paralelo  $P$  de  $M_l$ . Como  $(M_1, M - 2)$  é um 3-par exato, temos que cada elemento de  $P$  é classe em paralelo de  $M_3 - l$ . Desta forma,  $M_1 \setminus P = M_2 \setminus P$ . Se  $X_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ . Onde  $P_1, P_2, P_3$  é classe

em paralelo unitária de  $M_l$ , temos que  $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$  é classe em paralelo de  $M_3 - l$ . Desta forma  $M_1 \setminus P = M_2 \setminus P$  e ii) segue.

Por fim, se  $X_1 = P_1 \cup P_2$ , com  $P_1, P_2$  classes em paralelo de  $M_l$  e  $|P_1| = 2$  e  $|P_2| = 1$ , temos que  $\{M_1|X_1; M_2|X_1\} = \{U_{1,3}; U_{1,2} \oplus U_{1,1}\}$ .

□

**Teorema 4.25.** *Sejam  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato CL-livre e  $C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ , com  $|C| = 2$ . Se  $|\mathcal{B}(M_1/C)| = 2$ , então  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 2k$ , para algum  $k$  inteiro positivo.*

*Demonstração.* Seja  $C = \{a, b\}$ , como por hipótese  $|\mathcal{B}(M_1/\{a, b\})| = 2$ , temos pelo Lema 4.22 que  $r(M_1) = 3$ . Sejam  $B_1$  e  $B_2$  as bases de  $M_1$  que contém  $\{a, b\}$ , digamos  $B_1 = \{a, b, \alpha\}$  e  $B_2 = \{a, b, \beta\}$ . Note que  $L = E(M_1) - \{\alpha, \beta\}$  é uma linha em  $M_1$ , caso contrário, ao tomarmos  $B = \{a, b, \gamma\}$ , com  $\gamma \neq \{\alpha, \beta\}$ , teríamos  $B$  base de  $M_1$ , mas só existem 2 bases de  $M_1$  contendo  $\{a, b\}$  que são  $B_1$  e  $B_2$ . Logo  $r(M_1|L) = 2$ .

**Afirmção 1:**  $r(M_2|L) \leq 2$ .

De fato, suponha que  $r(M_2|L) > 2$ , digamos  $r(M_2|L) = 3$ . Note que todas as bases de  $M_2$  sempre contém  $\alpha$  ou  $\beta$ , desta forma como  $\{\alpha, \beta\} \not\subseteq L$ , temos

$$\mathcal{B}(M_2|L) \subseteq \mathcal{B}(M_2) \setminus \mathcal{B}(M_1)$$

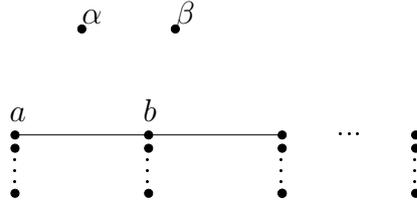
logo  $|\mathcal{B}(M_2|L)| = 1$ , assim pelo Teorema 4.4, temos que  $M_2|L \cong U_{|L|,|L|}$ , já que  $M_2|L$  não tem laços, visto que  $M_2$  é CL-livre. Como  $r(M_2|L) = 3$ , temos  $M_2|L \cong U_{3,3}$ . desta forma  $L \in \mathcal{B}(M_2)$ , contradição pois  $\{a, b\} \in \mathcal{C}(M_2)$ .

Se  $r(M_2|L) = 1$ , temos  $M_2|L \cong U_{1,1}$ . Assim  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 2$ . E o Teorema segue. Desta forma, trabalharemos com  $r(M_2|L) = 2$ .

**Afirmação 2:**  $E(M_2)$  não é uma linha de  $M_2$ .

De fato, se  $\alpha$  e  $\beta$  estão numa linha então  $r(M_2) = 2$ , contradição pois  $r(M_2) = r(M_1) = 3$ . Além disso, se apenas um dos elementos de  $\{\alpha, \beta\}$  está em uma linha, digamos  $\alpha$ , então  $\beta$  seria colaço, mas  $M_2$  é CL-livre.

Agora vamos analisar as classes de  $M_1$  que contém  $a$  e  $b$ , respectivamente. Se as classes de  $a$  e de  $b$  em  $M_2$  não contém mais nem um outro elemento, teremos em  $M_2$  duas bases a menos que eram as que continham  $\{a, b\}$ , e qualquer modificação feita nas demais classes resulta em bases geradas ou perdidas aos pares. Se umas das classes de  $a$  ou de  $b$  contiver mais um elemento pelo menos, também teremos  $|\mathcal{B}(M_1) \Delta \mathcal{B}(M_2)| = 2k$ . geometricamente temos



□

**Teorema 4.26.** *Sejam  $(M_1, M_2)$  um 3-par exato CL-livre e  $C \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ , com  $|C| = 2$ . Se  $|\mathcal{B}(M_1/C)| = 3$ , então  $M_1 \setminus C = M_2 \setminus C$ .*

*Demonstração.* Seja  $C = \{a, b\} \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{C}(M_2)$ . Se  $|\mathcal{B}(M_1/C)| = 3$ , pelo Lema 4.22, temos  $r(M_1) = 3$  ou  $r(M_1) = 4$ .

**Caso 1:**  $r(M_1) = 3$ .

Neste caso, seja  $B_1 = \{a, b, \alpha\}$ ,  $B_2 = \{a, b, \beta\}$  e  $B_3 = \{a, b, \gamma\}$  as bases de  $M_1$  contendo  $C$ . Note que  $L = E(M_1) - \{\alpha, \beta, \gamma\}$  é uma linha em  $M_1$ , caso contrário teríamos a base  $B = \{a, b, \delta\}$ , com  $\delta \neq \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , mas só existem três bases contendo  $\{a, b\}$ .

**Afirmção 1:**  $r(M_2|L) = 2$ .

Note que  $\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ , isto é  $\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) = \{B_1, B_2, B_3\}$ . Se  $r(M_2|L) = 3$ , teríamos que as bases em  $M_2$  não contém nem  $\alpha$ , nem  $\beta$ , nem  $\gamma$ , contradição pois as bases de  $M_1$  contém  $\alpha$ ,  $\beta$ , ou  $\gamma$ .

E segue que  $M_1 \setminus C = M_2 \setminus C$ .

**Caso 2:**  $r(M_1) = 4$ .

Sejam  $B_1 = \{a, b, \alpha, \beta\}$ ,  $B_2 = \{a, b, \alpha, \gamma\}$  e  $B_3 = \{a, b, \beta, \gamma\}$  as bases de  $M_1$  contendo  $C$ . Neste caso também temos  $\mathcal{B}(M_2) \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ , isto é  $\mathcal{B}(M_1) - \mathcal{B}(M_2) = \{B_1, B_2, B_3\}$ . Usando a mesma justificativa do **Caso 1**, temos que  $L = E(M_1) - \{\alpha, \beta, \gamma\}$  é linha de  $M_1$ .

Além disso, vamos provar que  $L$  também é linha de  $M_2$ . Suponha que  $r(M|L) \geq 3$ . Logo as bases de  $M_2$  contém apenas um dos elementos  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  ou não contém nenhum dos três, uma contradição pois as bases de  $M_1$  contém pelo menos dois elementos de  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

Desta forma  $M_1 \setminus C = M_2 \setminus C$ .

□

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Lemos, *On Mills's conjecture on matroids with many common bases*, Discrete Math. 240 (2001), 271-276.
- [2] M. Lemos, *Matroids with many common bases*, Discrete Math. 270 (2003), 193-205.
- [3] M. Lemos, *Matroids with few non-common bases*, Discrete Math. 306 (2006), 680-687.
- [4] A. D. Mills, *On matroids with many common bases*, Discrete Math. 203 (1999), 195-205.
- [5] J.G. Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [6] K. Truemper, *Alpha-balanced graphs and matroids*, J. Combin. Theory Ser. B 32 (1982), 112-139.
- [7] W.T. Tutte, *Introduction to the Theory of Matroid*, Elsevier, New York, 1971.