

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Estatística

Ana Hermínia Andrade e Silva

**Testes escore para transformação de dados em regressões
lineares**

*Trabalho apresentado ao Programa de Programa de Pós-
Graduação em Estatística do Departamento de Estatística
da Universidade Federal de Pernambuco como requisito
parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística.*

Orientador: *Prof. Dr. Francisco Cribari Neto*

Recife
Fevereiro de 2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Silva, Ana Hermínia Andrade e
Testes escore para transformação de dados em
regressões lineares. / Ana Hermínia Andrade e Silva. -
Recife: O Autor, 2013.
xiv, 93 folhas: fig., tab.

Orientador: Francisco Cribari Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN, Estatística, 2013.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Análise de regressão. 2. Teste de hipóteses estatístico. 3.
Simulação de Monte Carlo. 4. Bootstrap. I. Cribari Neto, Francisco
(orientador). II. Título.

519.536

CDD (23. ed.)

MEI2013 – 043

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

Recife, 22 de fevereiro de 2013.

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Ana Hermínia Andrade e Silva

Intitulada

“Testes Escore para Transformação de Dados em Regressões Lineares”

Seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Francisco Cribari Neto

Orientador / UFPE

Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros

UFPE

Silvia Lopes de Paula Ferrari

USP

Este documento será anexado à versão final da tese.

Ao meus pais João e Graça, dedico.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por todas as graças a mim concedidas.

Aos meus pais, João e Graça, por serem meus exemplos de perseverança e dedicação.

Aos meus irmãos, Anna Karlla e Christiano.

Ao meu noivo Tiago, por me apoiar em todos os momentos deste mestrado.

A minha segunda família, Sandra e Lucas.

A Lula e Glaucia, por todo o apoio dado a mim durante minha estadia em Recife.

Ao meu orientador, Francisco Cribari, por todos os ensinamentos e paciência.

A Sadraque, pelo companheirismo em todos os momentos desde a graduação.

Aos meus colegas de mestrado, em especial aos integrantes do grupo de estudos *Unidos Passaremos*: Heloisa, Thiago, Diêgo e Sadraque.

Aos os meus amigos, que compreenderam a minha ausência e me deram força.

Aos professores do departamento de Estatística da UFPE, em particular aos professores que ministraram as disciplinas que cursei, por me transmitirem conhecimentos tão ricos e me darem conselhos tão bons.

Aos professores do departamento de Estatística da UFPB, que sempre me incentivaram a seguir em frente.

A Valéria, por toda a ajuda, carinho e dedicação em todos os momentos que necessitei.

Aos membros da Banca Examinadora, pela atenção e dedicação no exame desta dissertação.

A Capes, pelo auxílio financeiro.

A todos que contribuíram de alguma forma com esta dissertação.

Sob tortura, os números confessam tudo que quisermos

—ZUERNIR VENTURA

Resumo

O modelo de regressão linear é uma técnica largamente utilizada em várias áreas do conhecimento, porém, nem sempre podemos aplicá-la devido a violações de seus pressupostos. Uma alternativa é transformar as variáveis do modelo para minimizar desvios de suposições relevantes. O objetivo dessa dissertação é desenvolver testes score para testar o parâmetro da transformação de Manly nas variáveis dependente e resposta no modelo de regressão linear. Uma vantagem da transformação de Manly sobre a de Box-Cox é que ela não requer que as variáveis sejam positivas. Os desempenhos dos testes score, denominados T_s e T_s^0 , e de suas versões bootstrap, foram avaliados utilizando simulações de Monte Carlo. Além disso, foram utilizadas duas bases de dados reais para aplicar a teoria desenvolvida.

Palavras-chave: Bootstrap; Simulação de Monte Carlo; Teste score; Transformação de Box-Cox; Transformação de Manly.

Abstract

The linear regression model is commonly used in empirical applications in many different fields. In many cases, however, some of the relevant assumptions are violated. A possible solution is to transform the variables. Yang & Abeysinghe (2003) proposed score tests to determine the value of the parameter that indexes the Box-Cox transformation. Such a transformation, however, cannot be used when the variables assume negative values. In this thesis, we propose two score tests that be used to determine the value of the parameter of the data transformation proposed by Manly (1976). We report Monte Carlo simulation results on the tests and also on their bootstrap versions. Two empirical applications are proposed and discussed.

Keywords: Bootstrap; Box-Cox transformation; Manly transformation; Monte Carlo simulation; Score test.

Lista de Figuras

2.1	Transformações de Box-Cox com $\lambda = 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1$ e -1.5 e -2 , da linha mais alta à mais baixa, respectivamente.	11
2.2	Transformações de Manly com $\lambda = 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1, -1.5$ e -2 , da mais linha alta à mais baixa, respectivamente.	13
3.1	Função de log-verossimilhança e o teste da razão de verossimilhanças.	17
3.2	Função de log-verossimilhança e o teste escore.	19
3.3	Função de log-verossimilhança e o teste Wald.	20
4.1	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.	38
4.2	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.	39
4.3	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.	40
4.4	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.	41
4.5	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.	42
4.6	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.	43
4.7	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.	44

LISTA DE FIGURAS

4.8	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.	45
4.9	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.	46
4.10	<i>QQ</i> -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.	47
4.11	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.	48
4.12	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.	48
4.13	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.	49
4.14	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.	49
4.15	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.	50
4.16	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.	50
4.17	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.	51
4.18	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.	51
4.19	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.	52
4.20	Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.	52
4.21	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.	53
4.22	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.	54
4.23	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.	54
4.24	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.	55
4.25	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.	55
4.26	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.	56
4.27	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.	56
4.28	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.	57
4.29	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.	57
4.30	Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.	58

LISTA DE FIGURAS

5.1	Distância de frenagem e velocidade.	63
5.2	Box-plots e histogramas das variáveis velocidade e distância de frenagem.	63
5.3	Gráficos QQ -plot com envelope dos modelos da aplicação 1: sem transformação (painel esquerdo), Box-Cox (centro) e Manly (painel direito).	65
5.4	Comportamento dos resíduos do modelo sem transformação na aplicação 1.	66
5.5	Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Box-Cox na aplicação 1.	67
5.6	Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Manly na aplicação 1.	67
5.7	Gasto per capita em educação pública versus renda per capita.	69
5.8	Box-plots e histogramas das variáveis renda e gasto com educação.	70
5.9	Gráficos QQ -plot com envelope dos modelos da aplicação 2: sem transformação (painel esquerdo), Box-Cox (centro) e Manly (painel direito).	71
5.10	Comportamento dos resíduos do modelo sem transformação na aplicação 2.	72
5.11	Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Box-Cox na aplicação 2.	72
5.12	Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Manly na aplicação 2.	73

Lista de Tabelas

4.1	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.	32
4.2	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.	33
4.3	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.	33
4.4	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.	34
4.5	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.	34
4.6	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.	35
4.7	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.	35
4.8	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.	36
4.9	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.	36
4.10	Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.	37
4.11	Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ para transformação de Box-Cox.	59
4.12	Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ para transformação de Manly.	60
4.13	Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ a 5% para transformação de Box-Cox.	60
4.14	Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ a 5% para transformação de Manly.	61
5.1	Principais medidas descritivas das variáveis velocidade e distância de frenagem.	62
5.2	Modelos lineares da aplicação 1.	64
5.3	Teste de homoscedasticidade e normalidade dos erros para os modelos da aplicação 1.	65
5.4	Principais medidas descritivas das variáveis renda e gasto em escolas públicas.	68

LISTA DE TABELAS

5.5	Modelos lineares da aplicação 2.	70
5.6	Testes de homoscedasticidade e normalidade dos erros para os modelos da aplicação 2.	71

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Suporte computacional	3
2	Modelo de Regressão Linear	4
2.1	Estimação dos parâmetros do modelo	6
2.1.1	Método dos mínimos quadrados ordinários	6
2.1.2	Estimador de máxima verossimilhança	8
2.2	Transformações	9
3	Testes Sobre Transformação de Dados	15
3.1	Testes aproximados	15
3.2	Teste escore para λ	21
3.3	Teste de hipóteses bootstrap	28
4	Resultados de Simulação	30
4.1	Tamanhos dos testes	31
4.2	Poderes dos testes	58
5	Aplicações	62
5.1	Aplicação 1	62
5.2	Aplicação 2	68
6	Conclusões	74
	Referências Bibliográficas	75

SUMÁRIO

A	Códigos em Ox	78
A.1	Testes escore para transformação de Box-Cox	78
A.2	Testes escore para transformação de Manly	83
B	Códigos em R	88

Introdução

A análise de regressão é de extrema importância no estudo da dependência de variáveis em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, física, economia, química, ciências biológicas, dentre outras. Embora o modelo linear clássico seja comumente aplicado, os pressupostos do modelo não são válidos para grande parte das aplicações práticas. Nessas situações é comum a ocorrência de violações de pressupostos básicos, por exemplo, desvios de normalidade, de homoscedasticidade e multicolinearidade (Montgomery et al. 2006).

Para resolver os problemas supracitados, uma prática comum consiste em utilizar outras classes de modelos, como, por exemplo modelos lineares generalizados ou modelos não lineares, ou ainda fazer uso de transformações das variáveis de interesse. Segundo Box & Tidwell (1962) transformações de variáveis independentes podem ser aplicadas sem afetar a distribuição normal e a variância constante dos erros do modelo. A transformação mais popular é a transformação de Box-Cox (Box & Cox 1964), pois abrange a transformação logarítmica e o caso em que os dados não necessitam de transformação. A transformação, todavia, possui uma pronunciada limitação: requer que as variáveis assumam apenas valores positivos. Uma alternativa é fazer uso de outras transformações disponíveis na literatura, como, por exemplo, a transformação de Manly (Manly 1976) e a de Bickel e Doksum (Bickel & Doksum 1981).

A determinação do parâmetro que indexa a transformação geralmente é feita por máxima verossimilhança. Yang & Abeysinghe (2003) propuseram dois testes score (Rao 1948) para testar o parâmetro da transformação de Box-Cox nas variáveis independente e resposta do

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

modelo de regressão linear. Neste âmbito, com o intuito de suprir a principal limitação da transformação de Box-Cox, o objetivo dessa dissertação reside em propor testes score para testar o parâmetro que indexa a transformação de Manly nas variáveis independente e resposta do modelo de regressão linear.

Esta dissertação é formada por mais cinco capítulos. No segundo capítulo é introduzida a teoria do modelo linear clássico, ressaltando o método de máxima verossimilhança e o método dos mínimos quadrados como técnicas de estimação dos parâmetros do modelo. Adicionalmente, são apresentadas as transformações de Box-Cox e Manly. No terceiro capítulo são introduzidos três testes aproximados baseados na função de máxima verossimilhança, o teste da razão de verossimilhanças, o teste score e o teste Wald. Em seguida são apresentados os testes score para o modelo utilizando a transformação de Box-Cox e para o modelo utilizando a transformação de Manly.

No quarto capítulo são apresentados os resultados e análises de simulações numéricas obtidas via Monte Carlo, com o intuito de avaliar os desempenhos em pequenos tamanhos de amostras dos testes score e suas versões bootstrap utilizados para avaliação dos parâmetros que indexam as transformações de Box-Cox e Manly. No quinto capítulo são realizadas duas aplicações a dados reais dos testes propostos no Capítulo 4, sendo considerados três cenários: o modelo sem transformação, o modelo com transformação de Box-Cox e o modelo com transformação de Manly. Para comparar o desempenho de tais modelos foi aplicada a análise residual. Por último, no sexto capítulo, são apresentadas as principais conclusões desta dissertação.

1.1 Suporte computacional

Esta dissertação foi escrita utilizando o sistema de processamentos de texto \LaTeX , que se baseia em uma linguagem de marcação, favorecendo assim ao escritor concentrar-se exclusivamente na estrutura e no conteúdo do texto a despeito da sua formação física (Lamport 1986). Particularmente, este trabalho foi tipografado utilizando a classe UFPETHesis (Fonseca 2005), disponível em <http://www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis/>.

As avaliações numéricas foram realizadas utilizando a linguagem de programação Ox, por meio do OxEdit versão 6.20 para sistema operacional Windows disponível gratuitamente para uso acadêmico em <http://www.doornik.com>. A linguagem Ox é uma linguagem matricial de programação com orientação a objetos e que possui ampla biblioteca numérica (Doornik & Ooms 2006).

Os gráficos apresentados nessa dissertação assim como as análises de regressão e diagnóstico referentes às aplicações, foram procedidos no *software* R versão 2.13.2 para Windows (R Development Core Team 2011). O *software* R é um *software* livre, largamente utilizado pela comunidade estatística e encontra-se disponível em <http://www.R-project.org>.

Modelo de Regressão Linear

A análise de regressão é utilizada para modelar a relação existente entre as variáveis em quase todas as áreas do conhecimento, como engenharia, física, economia, química, ciências biológicas, dentre outras. Na análise de regressão o que é estudado é a dependência entre as variáveis, se uma dada variável influencia ou não o comportamento de outra, como e com qual intensidade se dá tal influência. As variáveis que supostamente influenciam o comportamento de outra variável são chamadas de regressores ao passo que a variável que tem seu comportamento afetado é chamada de variável resposta ou dependente. Tal variável pode ser contínua, de contagem, binária, etc. O modelo proposto deve levar em conta o tipo da variável resposta. Existem várias classes de modelos de regressão, como, por exemplo, a dos modelos lineares generalizados, que abrange variáveis com distribuição normal, Poisson, binomial, multinomial, gama, entre outras (McCullagh & Nelder 1989). Existe também a classe de modelos não-lineares. Neste trabalho consideramos o modelo linear de regressão (Montgomery et al. 2006).

Sejam y_1, \dots, y_T variáveis aleatórias independentes. O modelo é dado por

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \dots + \beta_p x_{tp} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.1)$$

em que

- y_t é a t -ésima resposta;
- x_{t2}, \dots, x_{tp} são os $p - 1$ ($p < T$) regressores que influenciam a média da variável resposta;
 $\mu_t = \mathbb{E}(y_t)$;
- β_1, \dots, β_p são os parâmetros desconhecidos do modelo;

CAPÍTULO 2 MODELO DE REGRESSÃO LINEAR

- ϵ_t é o t -ésimo erro aleatório.

Matricialmente, podemos escrever o modelo como

$$y = X\beta + \epsilon,$$

em que

- y é um vetor $T \times 1$ de respostas;
- β é um vetor $p \times 1$ de parâmetros;
- X é uma matriz $T \times p$ ($p < T$) de regressores (posto $(X) = p$);
- ϵ é um vetor $T \times 1$ de erros aleatórios.

Algumas suposições são comumente feitas:

[S0] O modelo estimado é o modelo correto;

[S1] $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0 \quad \forall t$;

[S2](homoscedasticidade) $\text{var}(\epsilon_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \sigma^2 (0 < \sigma^2 < \infty) \quad \forall t$;

[S3](não-autocorrelação) $\text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_s) = 0 \quad \forall t \neq s$;

[S4] Os únicos valores de c_1, c_2, \dots, c_p tais que $c_1 + c_2 x_{t2} + \dots + c_p x_{tp} = 0 \quad \forall t$ são $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, ou seja, as colunas da matriz X são linearmente independentes, i.e., X tem posto completo: $\text{posto}(X) = p (< T)$;

[S5] (normalidade) $\epsilon_t \sim \text{Normal} \quad \forall t$. Como a relação entre ϵ_t e y_t é linear, por conseguinte $y_t \sim \text{Normal}$. Essa suposição é muitas vezes utilizada para estimação intervalar e testes de hipóteses.

Os parâmetros são interpretáveis em função da média da variável resposta,

$$\mu_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_p x_{tp}.$$

2.1 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

Por exemplo, β_1 é igual à média de y_t quando todos os regressores são iguais a zero. Adicionalmente, β_j ($j = 2, \dots, p$) mede a variação na média de y_t quando x_{tj} aumenta em uma unidade e todos os demais regressores são mantidos constantes.

2.1 Estimação dos parâmetros do modelo

2.1.1 Método dos mínimos quadrados ordinários

Para o modelo

$$y_t = \beta_1 + \sum_{j=2}^p \beta_j x_{tj} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

a soma dos quadrados dos erros é dada por

$$S \equiv S(\beta_1, \dots, \beta_p) = \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2 = \sum_{t=1}^T \left(y_t - \beta_1 - \sum_{j=2}^p \beta_j x_{tj} \right)^2.$$

Os estimadores de mínimos quadrados ordinários de β_1, \dots, β_p são obtidos por meio da minimização de S com relação aos parâmetros de regressão (McCulloch & Searle 1987). As condições de primeira ordem são

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - \beta_1 - \sum_{j=2}^p \beta_j x_{tj} \right) = 0$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{t=1}^T \left(y_t - \beta_1 - \sum_{j=2}^p \beta_j x_{tj} \right) x_{tj} = 0, \quad j = 2, \dots, p.$$

Temos assim, o seguinte sistema de equações normais:

2.1 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

$$\begin{aligned}
 T\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum_{t=1}^T x_{t2} + \hat{\beta}_3 \sum_{t=1}^T x_{t3} + \cdots + \hat{\beta}_p \sum_{t=1}^T x_{tp} &= \sum_{t=1}^T y_t \\
 \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^T x_{t2} + \hat{\beta}_2 \sum_{t=1}^T x_{t2}^2 + \hat{\beta}_3 \sum_{t=1}^T x_{t2}x_{t3} + \cdots + \hat{\beta}_p \sum_{t=1}^T x_{t2}x_{tp} &= \sum_{t=1}^T x_{t2}y_t \\
 \vdots & \\
 \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^T x_{tp} + \hat{\beta}_2 \sum_{t=1}^T x_{tp}x_{t2} + \hat{\beta}_3 \sum_{t=1}^T x_{tp}x_{t3} + \cdots + \hat{\beta}_p \sum_{t=1}^T x_{tp}^2 &= \sum_{t=1}^T x_{tp}y_t
 \end{aligned}$$

em que $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$ são os estimadores de mínimos quadrados ordinários de β_1, \dots, β_p . Podemos escrever o sistema acima em forma matricial:

$$-2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0,$$

em que $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)'$ é o vetor de estimadores de mínimos quadrados ordinários de β .

A condição de segunda ordem é satisfeita na medida em que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'} = 2X'X$$

é positiva definida.

Por fim, o estimador de mínimos quadrados da variância do erro é dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2}{T-p} = \frac{\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}}{T-p},$$

em que $\hat{\epsilon}_t$ é o t -ésimo resíduo e $\hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_T)$, ou seja, $\hat{\epsilon}_t = y_t - x_t'\hat{\beta}$, em que x_t é a t -ésima linha

2.1 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

de X .

Definição 2.1. (Searle 1982) Seja A uma matriz de dimensão $m \times m$ e z um vetor de dimensão $m \times 1$. Dizemos que A é uma matriz positiva definida se $z'Az \geq 0 \forall z \neq 0$ ($\in \mathbb{R}^m$). Adicionalmente, A é uma matriz negativa definida se $z'Az < 0 \forall z \neq 0$, A é uma matriz positiva semi-definida se $z'Az \geq 0 \forall z$ e A é uma matriz negativa semi-definida se $z'Az \leq 0 \forall z$.

Um resultado importante é o Teorema de Gauss-Markov, que estabelece a otimalidade de β (McCulloch & Searle 1987).

Teorema 2.1 (Teorema de Gauss-Markov). *No modelo linear de regressão com suposições [S0], [S1], [S2], [S3] e [S4] ([S4] para que $X'X$ seja não-singular), temos que o estimador de mínimos quadrados ordinários $\hat{\beta}$ é o melhor estimador linear não-viesado de β .*

2.1.2 Estimador de máxima verossimilhança

Utilizando a suposição [S5] de que y_t é normalmente distribuído e as suposições [S0], [S1], [S2] e [S3] temos que o vetor de erros ϵ tem distribuição $N(0, \sigma^2 I)$, em que I é a matriz identidade de ordem T . Dado que $\mathbb{E}(y) = X\beta$, então temos que y tem distribuição $N(X\beta, \sigma^2 I)$ (Montgomery et al. 2006).

A função de verossimilhança é dada por

$$L(\beta, \sigma^2 | y, X) = (2\pi\sigma^2)^{T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta) \right\}$$

e a função de log-verossimilhança é

$$\ell = \log(L(\beta, \sigma^2 | y, X)) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta).$$

2.2 TRANSFORMAÇÕES

Para obter o estimador de máxima verossimilhança de β derivamos a função de log-verossimilhança em relação a β e σ^2 e igualamos tais derivadas a zero, encontrando

$$\hat{\beta}_{MV} = (X'X)^{-1}X'y$$

e

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}}{T}.$$

Observe que, sob normalidade, o estimador de mínimos quadrados e o estimador de máxima verossimilhança de β coincidem. Vale salientar ainda que os estimadores de máxima verossimilhança de β e de σ^2 são independentes. O mesmo vale para os estimadores de mínimos quadrados ordinários.

2.2 Transformações

Comumente algumas suposições do modelo de regressão não são respeitadas, como, por exemplo, quando há multicolinearidade e a suposição [S4] é violada. Este problema ocorre quando $\text{posto}(X) < p$. Dizemos que há multicolinearidade exata se $\exists c = (c_1, \dots, c_p)' \neq 0$ tal que

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p = 0, \tag{2.2}$$

em que x_j é a j -ésima coluna da matriz X , $j = 1, \dots, p$.

Dizemos que há multicolinearidade quase exata quando a Equação (2.2) vale de forma aproximada. Sob multicolinearidade exata a matriz $X'X$ se torna singular, logo não podemos obter o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\beta}_{MV}$ de forma única. Adicionalmente, é impossível

2.2 TRANSFORMAÇÕES

estimar os efeitos individuais dos regressores sobre a resposta média, pois não podemos variar um regressor e manter os outros constantes. Já sob multicolinearidade quase exata conseguimos estimar esses efeitos, mas as estimativas são imprecisas e têm alta variância, pois $X'X$ está próxima da singularidade.

Outras suposições frequentemente violadas são as suposições [S0] e [S5], de linearidade e normalidade, respectivamente. Em muitos casos, tanto transformações na variável resposta quanto nos regressores podem ser desejáveis (Box & Cox 1964). Segundo Box & Tidwell (1962), transformações de variáveis independentes podem ser aplicadas sem afetar a distribuição normal e variância constante dos erros.

A mais conhecida das transformações de dados é a transformação de Box-Cox (Box & Cox 1964). Tal transformação é dada por

$$y_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda} & , \text{ se } \lambda \neq 0, \\ \log y_t & , \text{ se } \lambda = 0 \end{cases} .$$

Pela regra de l'Hôpital, $\log(y)$ é o limite de $(y^\lambda - 1)/\lambda$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Na prática, λ geralmente assume um valor entre -2 e 2 .

A popularidade desta transformação deve-se ao fato dela abranger tanto o caso em que não é necessário aplicar a transformação ($\lambda = 1$) quanto o caso em que a transformação ideal é logarítmica ($\lambda = 0$) como casos particulares. Além disso, esta transformação muitas vezes reduz desvios de normalidade e heteroscedasticidade e é fácil de ser utilizada. Podemos observar na Figura 2.1 que à medida em que o valor de λ se distancia de um a curvatura da transformação aumenta (Davidson & MacKinnon 1993).

2.2 TRANSFORMAÇÕES

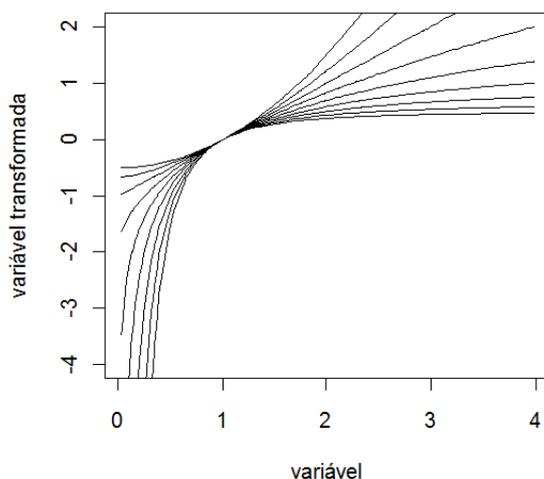


Figura 2.1 Transformações de Box-Cox com $\lambda = 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1$ e -2 , da linha mais alta à mais baixa, respectivamente.

O maior ponto negativo da transformação de Box-Cox é que ela só pode ser aplicada a dados positivos. Outro ponto negativo é o fato de ser limitada (exceto para $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$). Ao aplicarmos a transformação de Box-Cox na variável resposta da Equação (2.1) temos:

$$y_t(\lambda) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.3)$$

Desta forma, o lado esquerdo da igualdade é limitado enquanto o lado direito é ilimitado. Quando $\lambda > 0$, $y_t(\lambda)$ não pode ser menor que $-1/\lambda$ e quando $\lambda < 0$, $y_t(\lambda)$ não pode ser maior que $-1/\lambda$.

Adicionalmente, outro ponto negativo é que as inferências realizadas posteriormente à transformação da variável são condicionais ao valor de λ selecionado (estimado) e negligenciam a incerteza envolvida na estimação de λ , tipicamente estimado pelo método de máxima verossimilhança.

2.2 TRANSFORMAÇÕES

Por fim, um ponto negativo adicional é que ao usar a variável transformada na regressão, os parâmetros do modelo $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ passam a ser interpretáveis em função da média de $y(\lambda)$ e não da média de y , que é a variável de interesse. Segue da Equação (2.3) que β_2 é a variação em $\mathbb{E}(y(\lambda))$ quando x_{t2} aumenta em uma unidade, $j = 2, \dots, p$ e todos os demais regressores sendo mantidos constantes.

Desigualdade de Jensen: Seja Z uma variável aleatória tal que $\mathbb{E}(Z)$ existe. Se g for uma função convexa então

$$\mathbb{E}(g(Z)) \geq g(\mathbb{E}(Z))$$

e se g for côncava, então

$$\mathbb{E}(g(Z)) \leq g(\mathbb{E}(Z)),$$

a igualdade ocorrendo sob linearidade.

Segue, assim, da Desigualdade de Jensen que os parâmetros da regressão de $y(\lambda)$ sobre x_2, \dots, x_p não podem ser interpretados em função da média de y .

Para sanar o maior ponto negativo da transformação de Box-Cox, Davidson & MacKinnon (1993) sugerem assumir que os dados são observados apenas quando y_t assumir valores positivos. Uma alternativa útil para sanar tal ponto negativo, que é a impossibilidade de aplicá-la a variáveis que assumem valores negativos, é a transformação de Manly (Manly 1976). Observou-se que esta transformação é bastante eficaz em transformar distribuições unimodais com assimetria em distribuições quase simétricas (Manly 1976). Tal transformação é dada por

$$y_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda y_t} - 1}{\lambda} & , \text{ se } \lambda \neq 0, \\ y_t & , \text{ se } \lambda = 0. \end{cases} .$$

2.2 TRANSFORMAÇÕES

Da mesma forma que na transformação de Box-Cox, ao aplicarmos a transformação na resposta e utilizarmos a variável transformada na Equação (2.1), esta terá o lado esquerdo limitado e o lado direito ilimitado. Quando λ for positivo, então $y(\lambda)$ assumirá valores de $-1/\lambda$ a $+\infty$. Já quando λ assumir valores negativos, então $y(\lambda)$ assumirá valores de $-\infty$ a $-1/\lambda$. Portanto, a variável transformada pode não seguir uma distribuição exatamente normal, exceto quando $\lambda = 0$. Draper & Cox (1969) salientaram que se λ , o parâmetro da transformação, for escolhido de forma a maximizar a função de verossimilhança em amostras em que se pressupõe normalidade, a transformação tende a minimizar desvios desta pressuposição, mesmo essa hipótese não sendo verdadeira. A respeito da relação entre o valor de λ escolhido e o comportamento dos dados transformados, podemos observar na Figura 2.2 que à medida em que o valor de λ se distância de zero a curvatura da transformação diminui. Adicionalmente, observamos que para valores de $\lambda < 0$ a curva não é estritamente crescente quando $y > 0$.

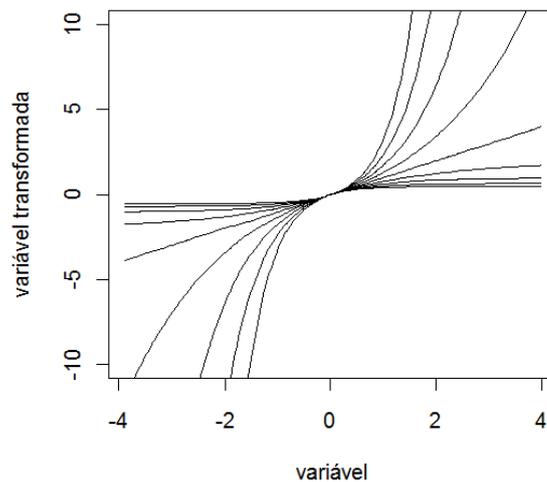


Figura 2.2 Transformações de Manly com $\lambda = 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1, -1.5$ e -2 , da mais linha alta à mais baixa, respectivamente.

Assim como na transformação de Box-Cox, um ponto negativo da transformação de Manly é que as inferências realizadas posteriormente à transformação da variável são condicionais ao

2.2 TRANSFORMAÇÕES

valor de λ selecionado e negligenciam a incerteza envolvida na estimação de λ . Outro ponto negativo que as duas transformações compartilham reside no fato de que ao usar a variável transformada na regressão, os parâmetros do modelo $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ passam a ser interpretáveis em função da média de $y(\lambda)$ e não da média de y , que é a variável de interesse.

Testes Sobre Transformação de Dados

Como visto no capítulo anterior, muitas vezes nos deparamos com a necessidade de transformar dados. As transformações usadas são tipicamente determinadas por um parâmetro escalar. A estimação do parâmetro que indexa a transformação é comumente feita por máxima verossimilhança. Adicionalmente, temos a opção de testar se o valor do parâmetro selecionado é igual a um dado valor. Neste capítulo abordaremos testes sobre o valor do parâmetro que determina a transformação.

3.1 Testes aproximados

Para testar uma hipótese acerca de um parâmetro em um modelo linear de regressão geralmente recorreremos a testes aproximados baseados na função de verossimilhança. Seja θ um vetor de parâmetros de dimensão $p \times 1$ pertencente ao espaço paramétrico Θ e sejam y_1, \dots, y_T variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. A função de verossimilhança é dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^T f(y_i; \theta),$$

em que y_i é a i -ésima realização da variável aleatória y caracterizada pela função densidade de probabilidade $f(y; \theta)$. Usualmente utiliza-se a função de log-verossimilhança que é definida por $\ell(\theta) = \log(L(\theta))$. Para proceder o teste de hipóteses acerca do parâmetro, usamos o resultado de que se a função de log-verossimilhança apresentar forma quadrática, então algumas estatísticas de teste convergem em distribuição, sob H_0 , para χ_q^2 , em que q é o número de restrições

3.1 TESTES APROXIMADOS

impostas pela hipótese nula (Buse 1982).

Consideraremos a seguinte partição de $\theta = (\theta_1', \theta_2')'$, em que θ_1 tem dimensão $q \times 1$ e θ_2 tem dimensão $(p - q) \times 1$. Suponha que desejamos testar $H_0 : \theta_1 = \theta_1^{(0)}$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^{(0)}$, em que $\theta_1^{(0)}$ é um dado vetor de dimensão $q \times 1$. Neste caso, θ_1 é o vetor de parâmetros de interesse e θ_2 é o vetor de parâmetros de perturbação. Seja $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1', \hat{\theta}_2')'$ o estimador de máxima verossimilhança irrestrito de θ e $\tilde{\theta} = (\theta_1^{(0)'}', \tilde{\theta}_2')'$ o estimador de máxima verossimilhança restrito de θ , em que $\tilde{\theta}_2$ é obtido pela maximização da função de log-verossimilhança impondo que $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$.

O teste da razão de verossimilhanças é o mais conhecido dentre os testes aproximados e se baseia na diferença entre os valores da função de log-verossimilhança avaliada em $\hat{\theta}$ e em $\tilde{\theta}$. A estatística de teste é

$$RV = 2(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\tilde{\theta})).$$

Um caso particular ocorre quando não há parâmetros de perturbação em θ . Testamos então $H_0 : \theta = \theta^{(0)}$ versus $H_1 : \theta \neq \theta^{(0)}$, em que $\theta^{(0)}$ é um dado vetor de dimensão $p \times 1$. Neste caso, a estatística da razão de verossimilhanças é dada por

$$RV = 2(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\theta^{(0)})).$$

Um caso mais particular ainda ocorre quando θ é escalar. Temos então $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$, em que θ_0 é um dado escalar. A estatística do teste da razão de verossimilhanças é dada por

$$RV = 2(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\theta_0)).$$

No caso geral em que testamos q restrições e sob H_0 ,

3.1 TESTES APROXIMADOS

$$RV \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_q^2,$$

em que $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denota convergência em distribuição. Rejeita-se H_0 se $RV > \chi_{(1-\alpha),q}^2$, em que $\chi_{(1-\alpha),q}^2$ é o quantil $1 - \alpha$ da distribuição χ_q^2 .

A Figura 3.1 apresenta graficamente a função de verossimilhança no caso em que θ é escalar. Observe que, para uma dada distância $\hat{\theta} - \theta_0$, quanto maior a curvatura da função maior será a distância $(1/2)RV$.

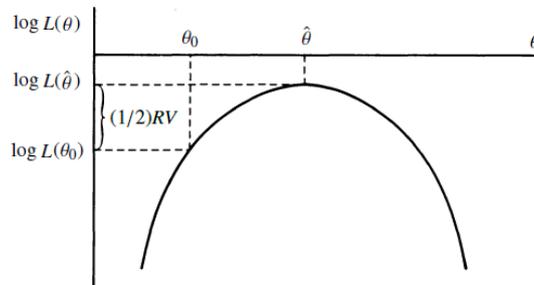


Figura 3.1 Função de log-verossimilhança e o teste da razão de verossimilhanças.

Outro teste comumente utilizado para testar hipóteses sobre θ é o teste escore ou teste do multiplicador de Lagrange (Rao 1948). Seja $S(\theta)$ o vetor escore, ou seja,

$$S(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta}.$$

A matriz de informação de Fisher é dada por

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left(\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta'} \right).$$

Sob certas condições de regularidade (Cordeiro 1999), temos que

3.1 TESTES APROXIMADOS

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left(- \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right).$$

Segundo a partição de θ , podemos particionar a informação de Fisher da seguinte forma:

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} K_{\theta_1\theta_1} & K_{\theta_1\theta_2} \\ K_{\theta_2\theta_1} & K_{\theta_2\theta_2} \end{bmatrix},$$

em que $K_{\theta_i\theta_j} = \mathbb{E} \left(- \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)$, para $i = j = 1, 2$. A inversa da matriz de informação de Fisher é denotada como

$$I(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} K^{\theta_1\theta_1} & K^{\theta_1\theta_2} \\ K^{\theta_2\theta_1} & K^{\theta_2\theta_2} \end{bmatrix}.$$

Aqui, $K^{\theta_1\theta_1}$ é a matriz $q \times q$ formada pelas q primeiras linhas e as q primeiras colunas da matriz $I(\theta)^{-1}$. Utilizando o fato que $I(\theta) = \text{var}(S(\theta))$ e o Teorema Central do Limite, temos que quando o tamanho da amostra é grande, $\hat{\theta} \sim N(\theta, I(\theta)^{-1})$, de forma aproximada. No caso geral, em que se deseja testar $H_0 : \theta_1 = \theta_1^{(0)}$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^{(0)}$, denotemos por $S(\theta_1)$ os q primeiros elementos do vetor escore. A estatística escore pode ser escrita como

$$S_r = \tilde{S}(\theta_1)' \tilde{K}^{\theta_1\theta_1} \tilde{S}(\theta_1),$$

em que til indica que as quantidades são avaliadas em $\tilde{\theta}$. No caso em que não há parâmetros de perturbação, ou seja, quando testamos $H_0 : \theta = \theta^{(0)}$ versus $H_1 : \theta \neq \theta^{(0)}$, a estatística escore é dada por

$$S_r = S(\theta^{(0)})' I(\theta^{(0)})^{-1} S(\theta^{(0)}).$$

Quando θ é escalar, supondo que desejamos testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$, a estatística escore é dada por

3.1 TESTES APROXIMADOS

$$S_r = \frac{S(\theta_0)^2}{I(\theta_0)}.$$

Para o caso mais geral em que testamos q restrições e sob H_0 , temos que

$$S_r \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_q^2.$$

Rejeita-se H_0 se $S_r > \chi_{(1-\alpha),q}^2$.

A Figura 3.2 apresenta graficamente a função escore no caso em que θ é escalar. Observe que o teste escore baseia-se na inclinação da função de log-verossimilhança avaliada em θ_0 .

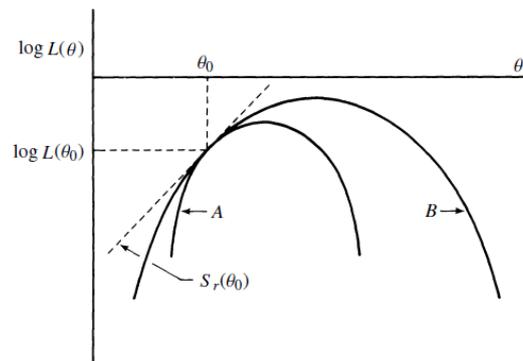


Figura 3.2 Função de log-verossimilhança e o teste escore.

Por último temos a estatística Wald, que se baseia na diferença entre $\hat{\theta}_1$ e $\theta_1^{(0)}$ (Wald 1943). No caso mais geral, em que se testa $H_0 : \theta_1 = \theta_1^{(0)}$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_1^{(0)}$, a estatística Wald é dada por

$$W = (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})' \hat{K}_{\theta_1 \theta_1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}),$$

em que $\hat{K}_{\theta_1 \theta_1}$ é a matriz formada pelas q primeiras linhas e pelas q primeiras colunas da matriz de informação de Fisher avaliada em $\hat{\theta}$. Quando não há parâmetros de perturbação, ou seja,

3.1 TESTES APROXIMADOS

quando queremos testar $H_0 : \theta = \theta^{(0)}$ versus $H_1 : \theta \neq \theta^{(0)}$ a estatística Wald é dada por

$$W = (\hat{\theta} - \theta^{(0)})' I(\hat{\theta}) (\hat{\theta} - \theta^{(0)}).$$

No caso ainda mais particular, em que θ é escalar, ou seja, quando desejamos testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$, a estatística Wald é dada por

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 I(\hat{\theta}).$$

No caso geral em que testamos q restrições e sob H_0 ,

$$W \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2_q.$$

Rejeita-se H_0 se $W > \chi^2_{(1-\alpha),q}$.

A Figura 3.3 apresenta graficamente a função de log-verossimilhança no caso em que θ é escalar. Observe que a estatística Wald baseia-se na diferença horizontal entre $\hat{\theta}$ e θ_0 .

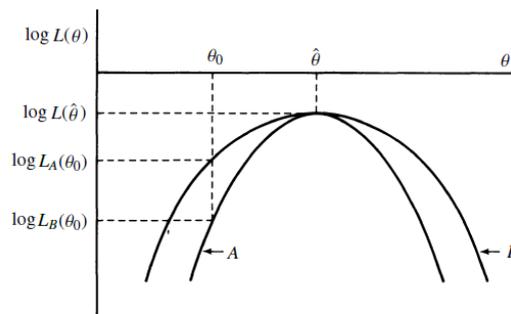


Figura 3.3 Função de log-verossimilhança e o teste Wald.

O teste escore é geralmente o mais conveniente, uma vez que só requer a estimação do modelo restrito.

3.2 Teste escore para λ

No modelo de regressão em que os regressores e/ou a variável resposta são submetidos a uma transformação de parâmetro λ desconhecido existe a necessidade de testar tal parâmetro. Yang & Abeysinghe (2003) propuseram testes escore para a transformação de Box-Cox. Considere o seguinte modelo de regressão:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.1)$$

A forma matricial do modelo é

$$y = X\beta + \epsilon, \quad (3.2)$$

em que y é a variável resposta, sendo um vetor de dimensão $T \times 1$, ϵ é o vetor de erros aleatórios de dimensão $T \times 1$ e X é a matriz de regressores de dimensão $T \times p$.

A transformação de Box-Cox do j -ésimo regressor é dada por

$$x_{tj}(\lambda) = \begin{cases} \frac{x_{tj}^\lambda - 1}{\lambda} & , \quad \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(x_{tj}) & , \quad \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

em que $j = 2, \dots, p$. Similarmente, a transformação de Box-Cox da variável resposta é dada por

$$y_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda} & , \quad \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(y_t) & , \quad \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Ao utilizarmos tal transformação temos o seguinte modelo:

$$y_t(\lambda) = \beta_1 + \sum_{j=2}^p \beta_j x_{tj}(\lambda) + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

3.2 TESTE ESCORE PARA λ

em que $y_t(\lambda)$ é a variável resposta transformada e $x_{tj}(\lambda)$ é o j -ésimo regressor transformado, pertencente à matriz X transformada, denotada por $X(\lambda)$. Assumindo normalidade e independência dos erros, a função de log-verossimilhança é

$$\ell(\beta, \sigma^2, \lambda) \propto -\frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \left\{ y_t(\lambda) - \sum_{j=0}^p \beta_j x_{tj}(\lambda) \right\}^2 + \log J(\lambda),$$

em que σ^2 é a variância do erro e $J(\lambda)$ é o jacobiano da transformação de Box-Cox, dado por

$$J(\lambda) = \prod_{t=1}^T \frac{\partial y_t(\lambda)}{\partial y_t} = \prod_{t=1}^T y_t^{(\lambda-1)}.$$

Para um dado λ , os estimadores de máxima verossimilhança de β e σ^2 são, respectivamente,

$$\hat{\beta}(\lambda) = [X(\lambda)'X(\lambda)]^{-1} X(\lambda)'y(\lambda)$$

e

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{\|M(\lambda)y(\lambda)\|^2}{T},$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana e $M(\lambda) = I_T - X(\lambda)[X(\lambda)'X(\lambda)]^{-1}X(\lambda)'$.

A função de log-verossimilhança perfilada para λ é

$$\ell_p(\lambda) = \ell[\hat{\beta}(\lambda), \hat{\sigma}^2(\lambda), \lambda] \propto -\frac{T}{2} \log \hat{\sigma}^2(\lambda) + \log J(\lambda). \quad (3.3)$$

Logo, a função escore para λ é

$$S_p(\lambda) = \frac{\partial \ell_p(\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{T y(\lambda)' M(\lambda) [\dot{y}(\lambda) - \dot{X}(\lambda) \hat{\beta}(\lambda)]}{\|M(\lambda)y(\lambda)\|^2} + \sum_{t=1}^T \log y_t,$$

em que $\dot{y}(\lambda) = \partial y(\lambda) / \partial \lambda$, dado por

3.2 TESTE ESCORE PARA λ

$$\dot{y}_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}[1 + \lambda y_t(\lambda)] \log y_t - \frac{1}{\lambda} y_t(\lambda) & , \text{ se } \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{2}(\log y_t^2) & , \text{ se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

A matriz $\dot{X}(\lambda)$ é obtida de forma similar. Obtemos a estimativa de máxima verossimilhança de λ maximizando $\ell(\lambda)$.

A estatística do teste escore perfilado para testar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ é dada por

$$T_s(\lambda_0) = \frac{S_p(\lambda_0)}{\varpi[\hat{\beta}(\lambda_0), \hat{\sigma}^2(\lambda_0), \lambda_0]},$$

em que $\varpi[\hat{\beta}(\lambda), \hat{\sigma}^2(\lambda), \lambda] = I_{\lambda\lambda} - I_{\lambda\psi} I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi\lambda}$ é a variância assintótica de $S(\lambda)$, $\psi = (\beta', \sigma^2)'$. Por simplicidade, no restante da dissertação nos referiremos ao teste escore perfilado simplesmente como teste escore.

As I -quantidades são os elementos da matriz de informação esperada:

$$I_{\beta\beta} = \frac{1}{\sigma^2} X(\lambda)' X(\lambda),$$

$$I_{\sigma^2\sigma^2} = \frac{T}{2\sigma^4},$$

$$I_{\lambda\lambda} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}[\dot{e}(\lambda, \beta)' \dot{e}(\lambda, \beta) + e(\beta, \lambda)' \ddot{e}(\lambda, \beta)],$$

$$I_{\beta\lambda} = -\frac{1}{\sigma^2} [X'(\lambda) \mathbb{E}[\dot{e}(\lambda, \beta)]],$$

$$I_{\beta\sigma^2} = 0,$$

3.2 TESTE ESCORE PARA λ

$$I_{\sigma^2\lambda} = -\frac{1}{2\sigma^4} \mathbb{E}[e(\lambda, \beta)' \dot{e}(\lambda, \beta)],$$

em que $e = e(\lambda, \beta) = y(\lambda) - X(\lambda)\beta$, $\dot{e} = (\partial/\partial\lambda)e(\lambda, \beta)$ e $\ddot{e} = (\partial^2/\partial\lambda^2)e(\lambda, \beta)$.

Dado que em geral é não é trivial obter os elementos da matriz de informação esperada, costuma-se substituí-los pelas correspondentes quantidades observadas. Os elementos da matriz de informação observada, denominados por J -quantidades, são dados por

$$J_{\beta\beta} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial\beta\partial\beta'} = \frac{1}{\sigma^2} X(\lambda)' X(\lambda),$$

$$J_{\sigma^2\sigma^2} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial(\sigma^2)^2} = -\frac{T}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} e(\lambda, \beta)' e(\lambda, \beta),$$

$$J_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ell}{\partial(\lambda^2)} = -\frac{1}{\sigma^2} [\dot{e}(\lambda, \beta)' \dot{e}(\lambda, \beta) + e(\lambda, \beta)' \ddot{e}(\lambda, \beta)],$$

$$J_{\beta\sigma^2} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial\beta\partial\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} X(\lambda)' e(\lambda, \beta),$$

$$J_{\beta\lambda} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial\beta\partial\lambda} = -\frac{1}{\sigma^2} [X(\lambda)' \dot{e}(\lambda, \beta) + \dot{X}(\lambda) e(\lambda, \beta)],$$

$$J_{\sigma^2\lambda} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma^2\partial\lambda} = -\frac{1}{\sigma^4} e(\lambda, \beta)' \dot{e}(\lambda, \beta).$$

Yang & Abeyasinghe (2002) obtiveram uma fórmula aproximada para a variância assintótica do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}$. Utilizando o resultado de que $\text{var}[S(\lambda)] = 1/\text{var}(\hat{\lambda})$, em amostras de tamanho grande, a variância assintótica de $S(\lambda)$ pode ser aproximada por

3.2 TESTE ESCORE PARA λ

$$\varpi[\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2, \lambda] \approx \frac{1}{\sigma^2} \|M(\lambda)\delta\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left[2\|\phi - \bar{\phi}\|^2 - 4(\phi - \bar{\phi})'(\theta^2 - \bar{\theta}^2) + \frac{3}{2}\|\theta\|^2 \right], \quad (3.4)$$

em que $\mu(\lambda) = X(\lambda)\beta$, $\phi = \log(1 + \lambda\mu(\lambda))$, $\theta = \frac{\lambda\sigma}{1 + \lambda\mu(\lambda)}$ e $\delta = \frac{1}{\lambda^2(1 + \lambda\mu(\lambda))\#} + (\sigma/2\lambda)\theta - \dot{X}(\lambda)\beta$. Aqui, \bar{a} denota a média dos elementos do vetor a e $a\#b$ denota o produto direto entre os vetores a e b (ambos de mesma dimensão).

Quando $\lambda = 0$, a variância assintótica de $S_p(\lambda)$ pode ser aproximada por

$$\varpi[\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2, 0] \approx \frac{1}{\sigma^2} \|M(0)\delta\|^2 + 2\|\mu(0) - \bar{\mu}(0)\|^2 + \frac{3}{2}T\sigma^2, \quad (3.5)$$

em que $\delta = 1/2[\mu^2(0) + \sigma^2] - \dot{X}(0)\beta$.

Podemos alternativamente utilizar a matriz de informação observada. Aqui, substituímos $I_{\lambda\lambda} - I_{\lambda\psi}I_{\psi\psi}^{-1}I_{\psi\lambda}$ por $J_{\lambda\lambda} - J_{\lambda\psi}J_{\psi\psi}^{-1}J_{\psi\lambda}$. Neste caso, note que $J_{\beta\sigma^2} = 0$. Logo, a variância assintótica é equivalente a $J_{\lambda\lambda} - J_{\sigma^2\beta}J_{\beta\beta}^{-1}J_{\beta\sigma^2} - J_{\lambda\sigma^2}J_{\sigma^2\sigma^2}^{-1}J_{\sigma^2\lambda}$. Dessa forma, a variância assintótica de $S_p(\lambda)$ é dada por

$$\kappa[\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2, \lambda] = J_{\lambda\lambda} - J_{\sigma^2\beta}J_{\beta\beta}^{-1}J_{\beta\sigma^2} - J_{\lambda\sigma^2}J_{\sigma^2\sigma^2}^{-1}J_{\sigma^2\lambda} \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \left[e'e + e'M(\lambda)\dot{e} - e'A(\lambda)e - 2\dot{e}B(\lambda)e - \frac{(e'\dot{e})^2}{e'e - \sigma^2 T/2} \right], \quad (3.7)$$

em que $A(\lambda) = \dot{X}(\lambda)[X(\lambda)'X(\lambda)]^{-1}\dot{X}(\lambda)'$ e $B(\lambda) = X(\lambda)[X(\lambda)'X(\lambda)]^{-1}\dot{X}(\lambda)'$.

Adicionalmente, $\ddot{y}(\lambda)$ é dado por

$$\ddot{y}_t(\lambda) = \begin{cases} \dot{y}_t(\lambda) \left(\log y_t - \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda^2} [\log y_t - y_t(\lambda)] & , \text{ se } \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{3}(\log y_t)^3 & , \text{ se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

A matriz $\ddot{X}(\lambda)$ é obtida de forma similar. A estatística escore que utiliza a informação observada é dada por

3.2 TESTE ESCORE PARA λ

$$T_s^0(\lambda_0) = \frac{S_p(\lambda_0)}{\kappa[\hat{\beta}(\lambda_0), \hat{\sigma}^2(\lambda_0), \lambda_0]}.$$

A variância de $S_p(\lambda)$ obtida com a matriz de informação observada não tem positividade garantida.

Temos, assim, dois testes escore para o parâmetro que define a transformação de Box-Cox. Convém lembrar que a principal limitação dessa transformação é o fato de que os dados devem ser positivos.

Com o objetivo de superar tal limitação da transformação de Box-Cox desenvolveremos testes escore para testar o parâmetro que indexa a transformação de Manly. Consideraremos o modelo dado na Equação (3.1) e sua forma matricial dada na Equação (3.2). A transformação de Manly aplicada ao j -ésimo regressor é

$$x_{tj}(\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{x_{tj}\lambda} - 1}{\lambda} & , \text{ se } \lambda \neq 0 \\ x_{tj} & , \text{ se } \lambda = 0 \end{cases},$$

em que $j = 2, \dots, p$. Quando aplicamos tais transformações à variável resposta obtemos

$$y_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{y_t\lambda} - 1}{\lambda} & , \text{ se } \lambda \neq 0 \\ y_t & , \text{ se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Consideraremos o modelo dado na Equação (3.1). Supondo normalidade e independência dos termos que

$$\ell(\beta, \sigma^2, \lambda) \propto -\frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \left\{ y_t(\lambda) - \sum_{j=0}^p \beta_j x_{tj}(\lambda) \right\}^2 + \log J(\lambda),$$

em que σ^2 é a variância do erro e $J(\lambda)$ é o jacobiano da transformação de Manly:

3.2 TESTE ESCORE PARA λ

$$J(\lambda) = \prod_{t=1}^T e^{\lambda y_t}.$$

A função escore para λ é

$$S_p(\lambda) = \frac{\partial \ell_p(\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{T y(\lambda)' M(\lambda) [\dot{y}(\lambda) - \dot{X}(\lambda) \hat{\beta}(\lambda)]}{\|M(\lambda) y(\lambda)\|^2} + \sum_{t=1}^T y_t,$$

em que $\ell_p(\lambda)$ é a função de log-verossimilhança perfilada definida pela Equação (3.3). Calculando a primeira e segunda derivadas da transformação em relação a λ obtemos

$$\dot{y}_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda y_t} (\lambda y_t - 1) + 1}{\lambda^2}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \frac{y_t^2}{2}, & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

$$\ddot{y}_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda y_t} (\lambda^2 y_t^2 - 2\lambda y_t + 2) - 2}{\lambda^3}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \frac{y_t^3}{3}, & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Adicionalmente, $\dot{x}_{tj}(\lambda)$ e $\ddot{x}_{tj}(\lambda)$ são obtidos de forma similar. Podemos então calcular $T_s(\lambda_0)$ e $T_s^0(\lambda_0)$ utilizando a transformação de Manly, em que x_{tj} ($j = 2, \dots, p$) e y_t podem assumir qualquer valor real. Nosso interesse reside em testar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Temos então as seguintes estatísticas de teste, baseadas, respectivamente, nas informações esperadas e observadas:

$$T_s(\lambda_0) = \frac{S_p(\lambda_0)}{\varpi[\hat{\beta}(\lambda_0), \hat{\sigma}^2(\lambda_0), \lambda_0]}$$

e

$$T_s^0(\lambda_0) = \frac{S_p(\lambda_0)}{\kappa[\hat{\beta}(\lambda_0), \hat{\sigma}^2(\lambda_0), \lambda_0]},$$

em que a variância assintótica esperada $\varpi[\hat{\beta}(\lambda), \hat{\sigma}^2(\lambda), \lambda]$ está expressa nas Equações (3.4) e (3.5), quando $\lambda_0 \neq 0$ e $\lambda_0 = 0$, respectivamente, enquanto a variância assintótica observada

$\kappa[\hat{\beta}(\lambda_0), \hat{\sigma}^2(\lambda_0), \lambda_0]$ está definida na Equação (3.6).

3.3 Teste de hipóteses bootstrap

Nosso interesse reside em testar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. A distribuição nula da estatística escore converge para χ_1^2 quando $T \rightarrow \infty$. Usamos assim valores críticos aproximados obtidos da distribuição χ_1^2 para realizar o teste. Uma abordagem alternativa à comparação de tal estatística com o quantil da distribuição qui-quadrado é a aplicação do teste bootstrap. A ideia do método bootstrap é tomar a amostra inicial como se ela fosse a população e gerar B amostras artificiais a partir da amostra inicial (Efron 1979). De acordo com a geração de tais dados o bootstrap pode ser classificado como paramétrico ou não paramétrico. O bootstrap paramétrico é utilizado quando se conhece a distribuição dos dados. Já o caso não paramétrico é utilizado quando não se conhece tal distribuição. Aqui, consideraremos o bootstrap paramétrico. Para utilizar este método, com o intuito de testar a hipótese definida anteriormente, devemos impor a hipótese nula ao gerar os dados. O teste bootstrap é realizado da seguinte forma (utilizamos a estatística T_s como exemplo):

- Considere um conjunto de dados observados, em que temos observações sobre a resposta y e sobre os regressores x_2, \dots, x_p ;
- Transforme y e X , em que X é a matriz de regressores e obtenha $y(\lambda_0)$ e $X(\lambda_0)$;
- Estime a regressão $y(\lambda_0)$ sobre $X(\lambda_0)$, obtenha os resíduos do modelo, $\hat{\beta}(\lambda_0)$ e $\hat{\sigma}^2(\lambda_0)$ e calcule $T_s(\lambda_0)$;
- Gere B amostras artificiais da seguinte forma: $y_t(\lambda_0)^* = X(\lambda_0)' \hat{\beta}(\lambda_0) + \hat{\sigma}^2(\lambda_0) \epsilon_t^*$, em que $\epsilon_t^* \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ e $x_t(\lambda_0)'$ é a t -ésima linha da matriz $X(\lambda_0)$;

3.3 TESTE DE HIPÓTESES BOOTSTRAP

- Para cada amostra artificial regresse $y_i(\lambda_0)^*$ em $X(\lambda_0)$, obtenha $\hat{\beta}^*(\lambda_0)$ e $\hat{\sigma}^{2*}(\lambda_0)$ e calcule $T_s^*(\lambda_0)$;
- Obtenha o valor crítico estimado ($VCE_{1-\alpha}$) de nível α como sendo o quantil $1 - \alpha$ de $T_{s1}^*(\lambda_0), \dots, T_{sB}^*(\lambda_0)$;
- Rejeite H_0 se $T_s(\lambda_0) > VCE_{(1-\alpha)}$.

Resultados de Simulação

O desempenho dos testes escore para transformações de variáveis no modelo linear foi avaliado utilizando simulações de Monte Carlo. Consideramos duas transformações: Box-Cox (Box & Cox 1964) e Manly (Manly 1976). Yang & Abeysinghe (2003) avaliaram tais testes para a transformação de Box-Cox, porém, como notado anteriormente, esta transformação só pode ser aplicada a dados positivos.

Nosso objetivo reside em testar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$, em que λ é o parâmetro que indexa a transformação. Para tanto, foram utilizadas 10.000 réplicas de Monte Carlo com tamanhos de amostra $T = 20, 40, 60, 80$ e 100 . O modelo considerado é

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.1)$$

em que

- y_t é a t -ésima resposta;
- x_t é o regressor que influencia a média da variável resposta;
- β_1 e β_2 são os parâmetros da regressão;
- ϵ_t é o t -ésimo erro aleatório.

Os valores do regressor foram gerados aleatoriamente da distribuição $U(1,6)$. Os valores da covariada foram mantidos constantes ao longo da simulação. No esquema de Monte Carlo, os erros foram gerados, de forma aleatória, da distribuição normal com média zero e variância

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

um. Os valores de λ_0 utilizados foram $\lambda_0 = -1, -0.5, 0, 0.5$ e 1 para a transformação de Box-Cox e $\lambda_0 = 0, 0.5, 1, 1.5$ e 2 para a transformação de Manly. Quando λ_0 é negativo, o verdadeiro valor de β considerado foi $\beta = (-8.0; -1.25)$, já quando λ_0 é não negativo o verdadeiro valor de β considerado foi $\beta = (8.0; 1.25)$. Ao transformar o regressor obteve-se a variável dependente transformada por meio da Equação (4.1), calculando também a variável dependente original por meio da transformação inversa.

4.1 Tamanhos dos testes

Para cada tamanho de amostra foram calculadas as taxas de rejeição do teste sob a hipótese nula, $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$, considerando os níveis nominais de 1%, 5% e 10% utilizando valores críticos aproximados obtidos da distribuição χ_1^2 . A geração dos dados foi feita usando $\lambda = \lambda_0$, ou seja, estimamos os tamanhos dos testes via simulação. Além disso, simulamos as taxas de rejeição da hipótese nula utilizando bootstrap paramétrico. Para tanto foram geradas 500 réplicas bootstrap. De acordo com os resultados obtidos pode-se observar que, para ambas as transformações, à medida que o tamanho da amostra aumenta as taxas de rejeição aproximam-se dos níveis nominais fixados; por exemplo, na Tabela 4.1, em que o valor da taxa de rejeição do teste T_s para a transformação de Box-Cox é de 0.0301 quando $T = 20$ e 0.0482 quando $T = 100$, para o nível nominal de 5%. Para ambas as transformações, os desempenhos das versões bootstrap dos testes são superiores às dos testes assintóticos; por exemplo, na Tabela 4.6, para $T = 20$ e nível nominal de 5%, a taxa de rejeição do teste assintótico T_s foi de 0.0378, enquanto a taxa de rejeição da versão bootstrap foi de 0.0500. Tais taxas de rejeição tendem a se aproximar à medida que o tamanho da amostra aumenta; por exemplo, na Tabela 4.6, em que a taxa de rejeição do teste ao nível nominal de 10% com base em valores críticos assintóticos da distribuição χ_1^2 foi 0.1001, enquanto a taxa de rejeição do teste bootstrap foi

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

0.0987.

Comparando os dois testes, T_s e T_s^0 observa-se que, para ambas as transformações e para ambas as versões, assintótica e bootstrap, em geral, o teste T_s tende a ser conservador enquanto o teste T_s^0 tende a ser liberal. Por exemplo, na Tabela 4.5 vemos que as taxas de rejeição da hipótese nula dos testes T_s e T_s^0 assintóticos, para $T = 20$ e ao nível nominal de 10%, foram de 0.0898 e 0.1715, respectivamente. As alterações de tamanho diminuem quando utilizamos bootstrap paramétrico e também à medida que o tamanho da amostra aumenta. Em geral, analisando as taxas de rejeição de todos os testes, os resultados obtidos pelo teste T_s são sutilmente superiores aos resultados obtidos pelo teste T_s^0 .

Tabela 4.1 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Box-Cox	Box-Cox bootstrap	Box-Cox	Box-Cox bootstrap
20	0.01	0.0067	0.0119	0.0224	0.0120
	0.05	0.0301	0.0476	0.0659	0.0476
	0.10	0.0613	0.0937	0.1102	0.0937
40	0.01	0.0104	0.0130	0.0168	0.0131
	0.05	0.0416	0.0513	0.0573	0.0499
	0.10	0.0836	0.1034	0.1081	0.1023
60	0.01	0.0112	0.0122	0.0129	0.0119
	0.05	0.0481	0.0550	0.0569	0.0550
	0.10	0.0920	0.1069	0.1047	0.1030
80	0.01	0.0117	0.0131	0.0116	0.0132
	0.05	0.0430	0.0500	0.0516	0.0497
	0.10	0.0887	0.0989	0.0990	0.0973
100	0.01	0.0106	0.0115	0.0104	0.0116
	0.05	0.0482	0.0526	0.0529	0.0527
	0.10	0.0970	0.1069	0.1011	0.1020

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

Tabela 4.2 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Box-Cox	Box-Cox bootstrap	Box-Cox	Box-Cox bootstrap
20	0.01	0.0058	0.0109	0.0094	0.0109
	0.05	0.0278	0.0485	0.0448	0.0493
	0.10	0.0602	0.0974	0.0892	0.0973
40	0.01	0.0107	0.0127	0.0108	0.0128
	0.05	0.0416	0.0532	0.0474	0.0516
	0.10	0.0826	0.1034	0.0974	0.1024
60	0.01	0.0104	0.0121	0.0081	0.0122
	0.05	0.0464	0.0543	0.0489	0.0553
	0.10	0.0087	0.1059	0.0960	0.1043
80	0.01	0.0119	0.0131	0.0086	0.0132
	0.05	0.0435	0.0493	0.0449	0.0496
	0.10	0.0866	0.0992	0.0932	0.0988
100	0.01	0.0104	0.0112	0.0085	0.0113
	0.05	0.0480	0.0532	0.0470	0.0537
	0.10	0.0938	0.1043	0.0970	0.1035

Tabela 4.3 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Box-Cox	Box-Cox bootstrap	Box-Cox	Box-Cox bootstrap
20	0.01	0.0075	0.0115	0.0060	0.0116
	0.05	0.0306	0.0502	0.0378	0.0488
	0.10	0.0631	0.0972	0.0823	0.0974
40	0.01	0.0100	0.0116	0.0087	0.0117
	0.05	0.0442	0.0548	0.0470	0.0548
	0.10	0.0839	0.1036	0.0933	0.1025
60	0.01	0.0105	0.0118	0.0067	0.0119
	0.05	0.0451	0.0536	0.0451	0.0532
	0.10	0.0871	0.1039	0.0939	0.1033
80	0.01	0.0091	0.0095	0.0069	0.0096
	0.05	0.0453	0.0509	0.0443	0.0506
	0.10	0.0881	0.0989	0.0946	0.1040
100	0.01	0.0104	0.0120	0.0069	0.0121
	0.05	0.0483	0.0542	0.0477	0.0543
	0.10	0.0950	0.1056	0.0979	0.1043

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

Tabela 4.4 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Box-Cox	Box-Cox bootstrap	Box-Cox	Box-Cox bootstrap
20	0.01	0.0058	0.0109	0.0094	0.0109
	0.05	0.0278	0.0485	0.0448	0.0493
	0.10	0.0602	0.0974	0.0892	0.0973
40	0.01	0.0107	0.0127	0.0108	0.0128
	0.05	0.0416	0.0532	0.0474	0.0516
	0.10	0.0826	0.1034	0.0974	0.1024
60	0.01	0.0104	0.0121	0.0081	0.0122
	0.05	0.0464	0.0543	0.0489	0.0553
	0.10	0.0887	0.1059	0.0960	0.1043
80	0.01	0.0119	0.0131	0.0086	0.0132
	0.05	0.0435	0.0493	0.0449	0.0496
	0.10	0.0866	0.0992	0.0932	0.0988
100	0.01	0.0104	0.0112	0.0085	0.0113
	0.05	0.0480	0.0532	0.0470	0.0537
	0.10	0.0938	0.1043	0.0970	0.1035

Tabela 4.5 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Box-Cox	Box-Cox bootstrap	Box-Cox	Box-Cox bootstrap
20	0.01	0.0054	0.0111	0.0567	0.0111
	0.05	0.0412	0.0463	0.1175	0.0510
	0.10	0.0898	0.0923	0.1715	0.0998
40	0.01	0.0080	0.0109	0.0300	0.0110
	0.05	0.0460	0.0492	0.0785	0.0499
	0.10	0.0938	0.0972	0.1323	0.0975
60	0.01	0.0093	0.0128	0.0238	0.0129
	0.05	0.0523	0.0552	0.0752	0.0568
	0.10	0.1047	0.1056	0.1292	0.1049
80	0.01	0.0092	0.0112	0.0206	0.0113
	0.05	0.0525	0.0542	0.0701	0.0533
	0.10	0.1032	0.1043	0.1233	0.1034
100	0.01	0.0086	0.0114	0.0146	0.0115
	0.05	0.0476	0.0490	0.0605	0.0488
	0.10	0.1009	0.1026	0.1142	0.0997

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

Tabela 4.6 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	0.01	0.0073	0.0109	0.0177	0.0110
	0.05	0.0378	0.0500	0.0641	0.0514
	0.10	0.0778	0.0996	0.1168	0.0985
40	0.01	0.0897	0.0115	0.0129	0.0116
	0.05	0.0449	0.0521	0.0579	0.0523
	0.10	0.0897	0.0984	0.1092	0.1007
60	0.01	0.0107	0.0120	0.0112	0.0121
	0.05	0.0465	0.0522	0.0533	0.0524
	0.10	0.0931	0.1018	0.1042	0.1035
80	0.01	0.0075	0.0098	0.0089	0.0099
	0.05	0.0423	0.0467	0.0479	0.0460
	0.10	0.0948	0.1014	0.1025	0.1001
100	0.01	0.0092	0.0123	0.0110	0.0124
	0.05	0.0468	0.0505	0.0507	0.0497
	0.10	0.0935	0.0981	0.1001	0.0987

Tabela 4.7 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	0.01	0.0075	0.0108	0.0476	0.0109
	0.05	0.0494	0.0493	0.1078	0.0493
	0.10	0.1057	0.0980	0.1687	0.0980
40	0.01	0.0082	0.0097	0.0227	0.0098
	0.05	0.0472	0.0486	0.0748	0.0472
	0.10	0.1004	0.0979	0.1251	0.0978
60	0.01	0.0103	0.0136	0.0212	0.0137
	0.05	0.0543	0.0535	0.0715	0.0561
	0.10	0.1075	0.1064	0.1269	0.1056
80	0.01	0.0094	0.0129	0.0162	0.0128
	0.05	0.0515	0.0542	0.0637	0.0523
	0.10	0.1017	0.1023	0.1159	0.1017
100	0.01	0.0101	0.0122	0.0143	0.0123
	0.05	0.0496	0.0505	0.0583	0.0490
	0.10	0.0985	0.0977	0.1107	0.0995

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

Tabela 4.8 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	0.01	0.0077	0.0110	0.0491	0.0111
	0.05	0.0546	0.0490	0.1089	0.0490
	0.10	0.1133	0.0978	0.1656	0.0944
40	0.01	0.0099	0.0120	0.0261	0.0121
	0.05	0.0522	0.0522	0.1273	0.0527
	0.10	0.1049	0.1004	0.1251	0.0979
60	0.01	0.0104	0.0120	0.0205	0.0121
	0.05	0.0544	0.0536	0.0698	0.0536
	0.10	0.1060	0.1017	0.1233	0.1032
80	0.01	0.0087	0.0106	0.0153	0.0106
	0.05	0.0497	0.0511	0.0635	0.0510
	0.10	0.1043	0.1012	0.1162	0.1026
100	0.01	0.0109	0.0124	0.0154	0.0125
	0.05	0.0513	0.0520	0.0597	0.0513
	0.10	0.1015	0.0993	0.1103	0.0986

Tabela 4.9 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	0.01	0.0075	0.0103	0.0501	0.0103
	0.05	0.0555	0.0493	0.1080	0.0481
	0.10	0.1155	0.0970	0.1665	0.0940
40	0.01	0.0107	0.0139	0.0297	0.0140
	0.05	0.0551	0.0525	0.0770	0.0531
	0.10	0.1078	0.1002	0.1311	0.1003
60	0.01	0.0100	0.0120	0.0203	0.0121
	0.05	0.0546	0.0534	0.0692	0.0522
	0.10	0.1036	0.0981	0.1214	0.0994
80	0.01	0.0086	0.0098	0.0148	0.0099
	0.05	0.0503	0.0499	0.0631	0.0499
	0.10	0.1031	0.1005	0.1144	0.1005
100	0.01	0.0112	0.0136	0.0173	0.0137
	0.05	0.0516	0.0509	0.0612	0.0503
	0.10	0.1028	0.1026	0.1129	0.1023

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

Tabela 4.10 Taxas de rejeição do teste escore para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	0.01	0.0074	0.0108	0.0508	0.0109
	0.05	0.0564	0.0503	0.1088	0.0502
	0.10	0.1145	0.0978	0.1668	0.0961
40	0.01	0.0103	0.0145	0.0297	0.0145
	0.05	0.0552	0.0531	0.0784	0.0529
	0.10	0.1086	0.1016	0.1336	0.1010
60	0.01	0.0095	0.0113	0.0210	0.0114
	0.05	0.0549	0.0543	0.0712	0.0537
	0.10	0.1024	0.0985	0.1190	0.0983
80	0.01	0.0081	0.0099	0.0156	0.0100
	0.05	0.0502	0.0511	0.0623	0.0509
	0.10	0.1019	0.0990	0.1133	0.0987
100	0.01	0.0115	0.0129	0.0172	0.0130
	0.05	0.0534	0.0524	0.0618	0.0524
	0.10	0.1024	0.1029	0.1108	0.1026

Podemos comparar melhor os comportamentos dos testes observando os gráficos QQ -plot disponíveis nas Figuras 4.1 a 4.10 a seguir. Observamos que, em alguns gráficos, para ambas as transformações, a reta que corresponde à estatística T_s está mais distante da reta de 45° nos gráficos QQ -plot do que a reta referente à estatística T_s^0 ; por exemplo, na Figura 4.2. Observa-se ainda que à medida que o tamanho da amostra aumenta, as retas referentes às duas estatísticas de teste se aproximam mais da reta de 45° ; por exemplo, na Figura 4.2.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

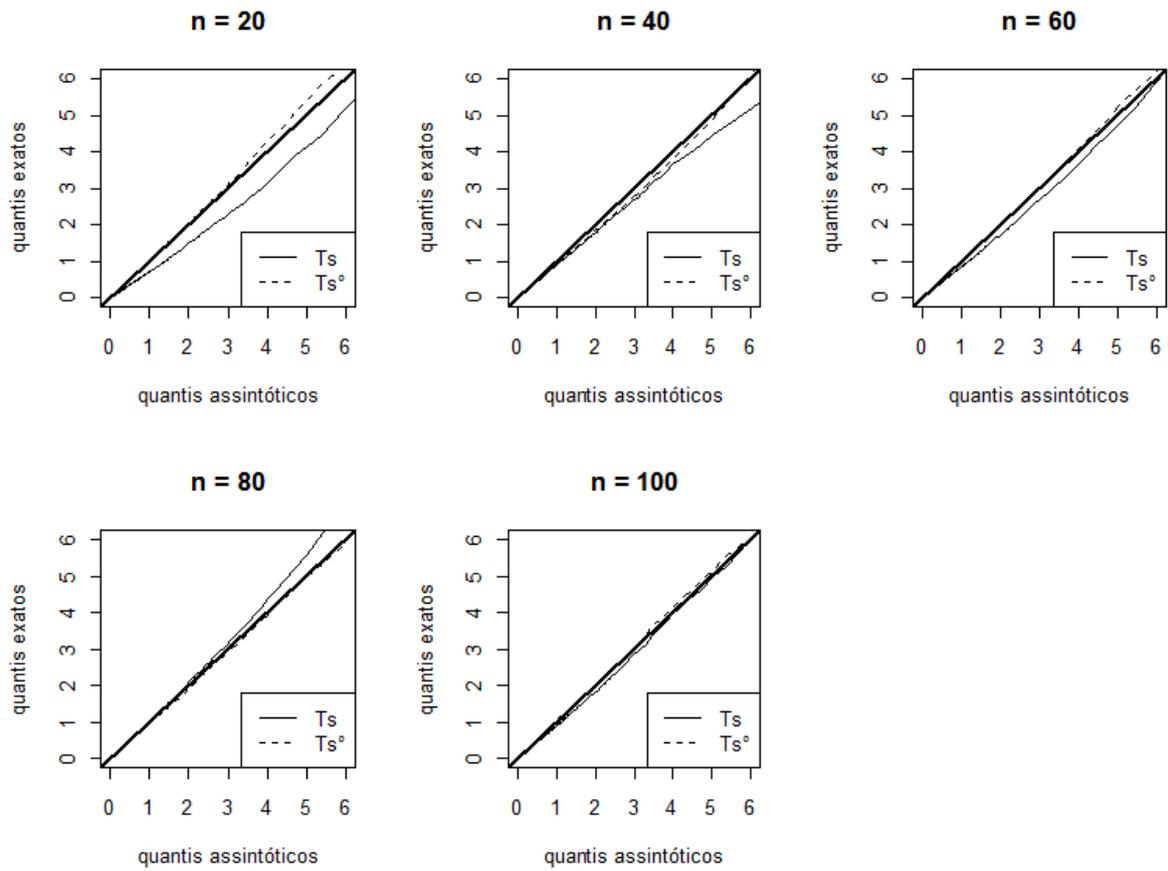


Figura 4.1 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

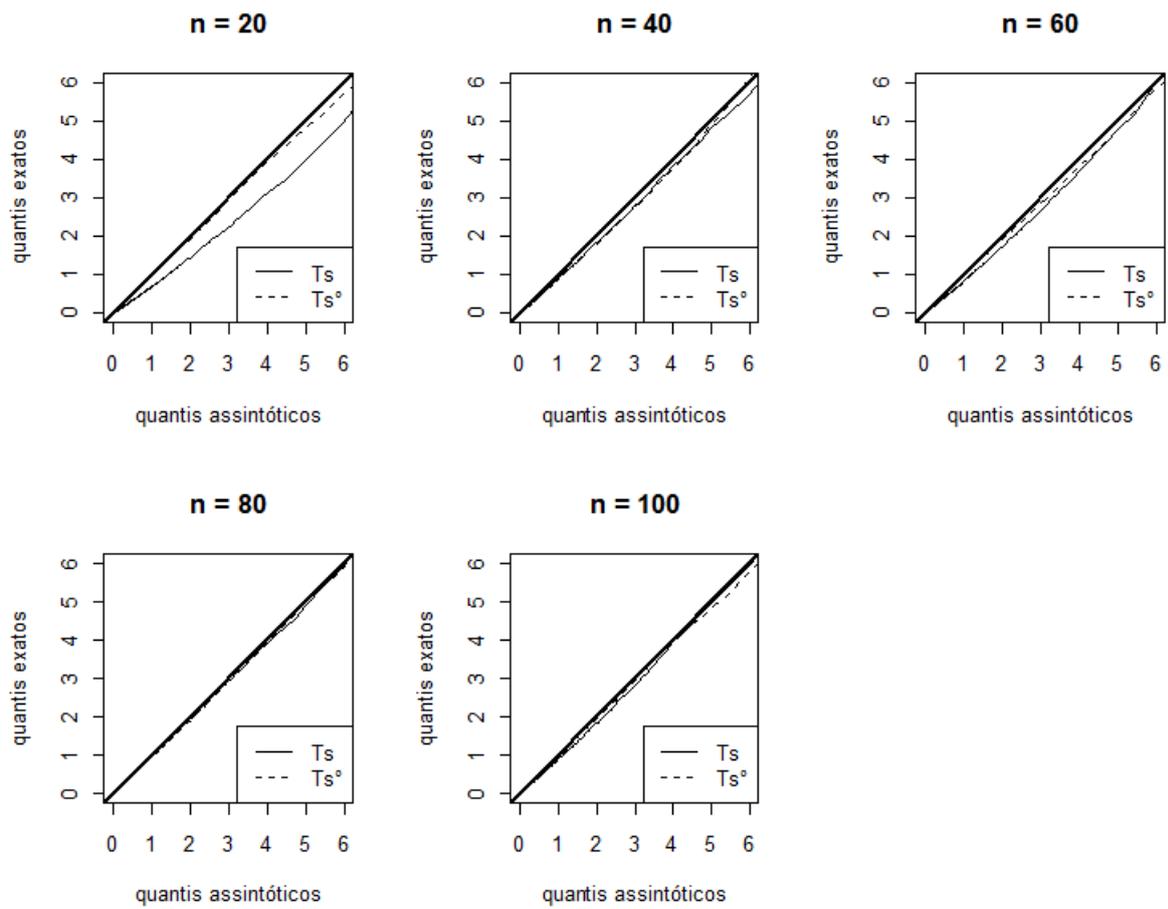


Figura 4.2 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_S e T_S^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

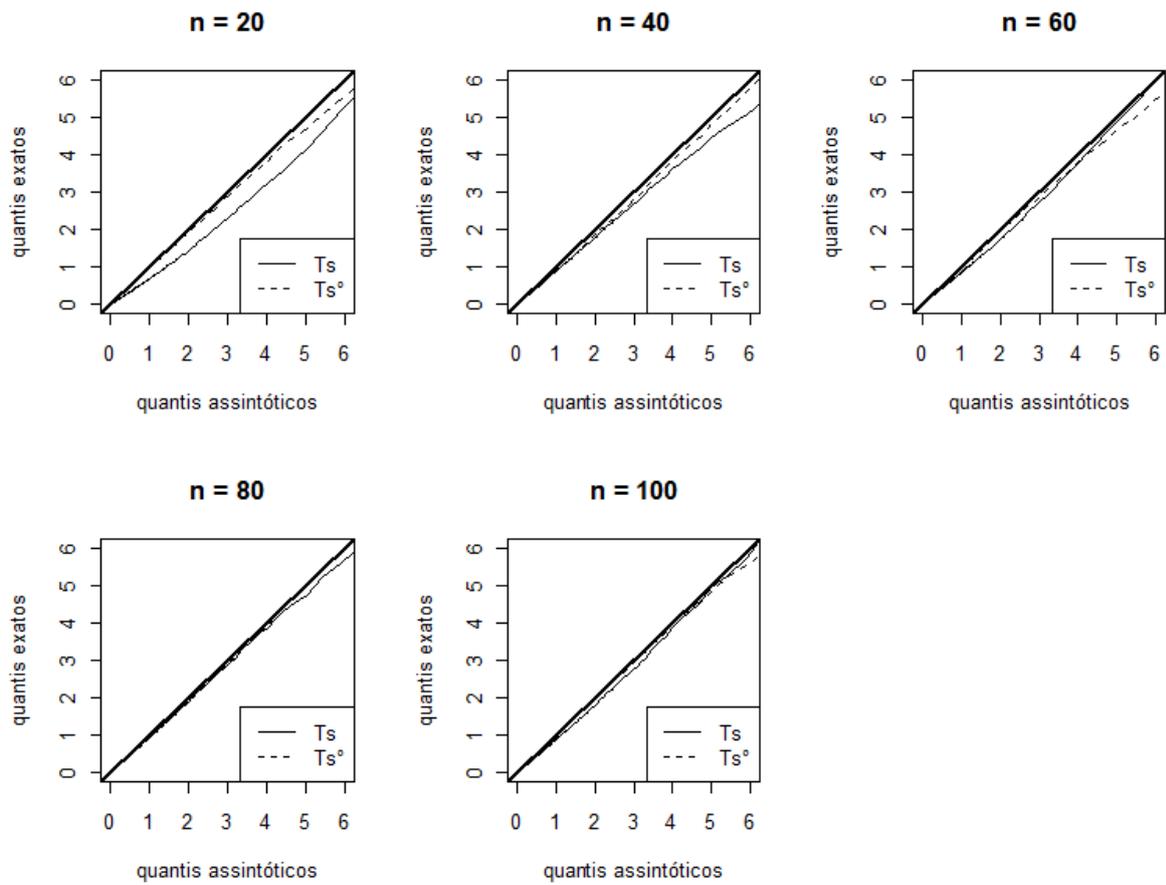


Figura 4.3 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

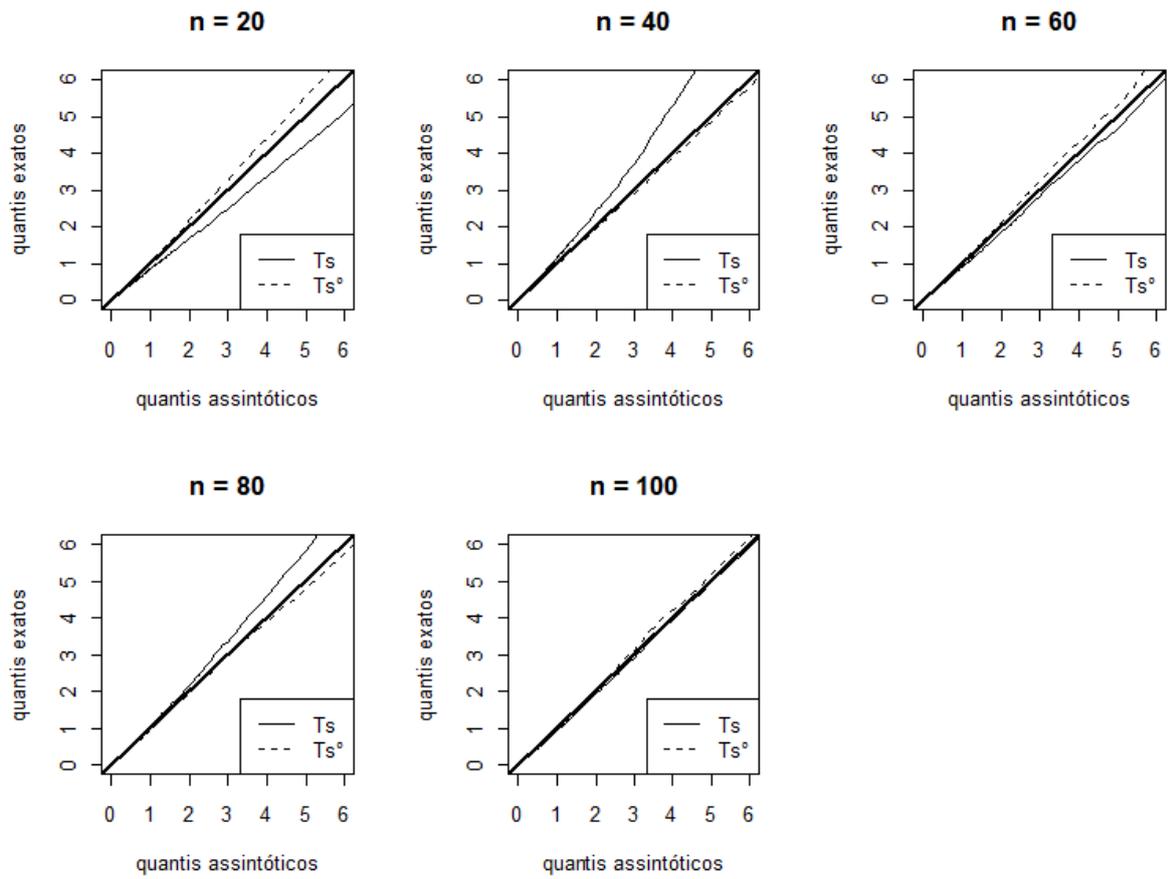


Figura 4.4 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

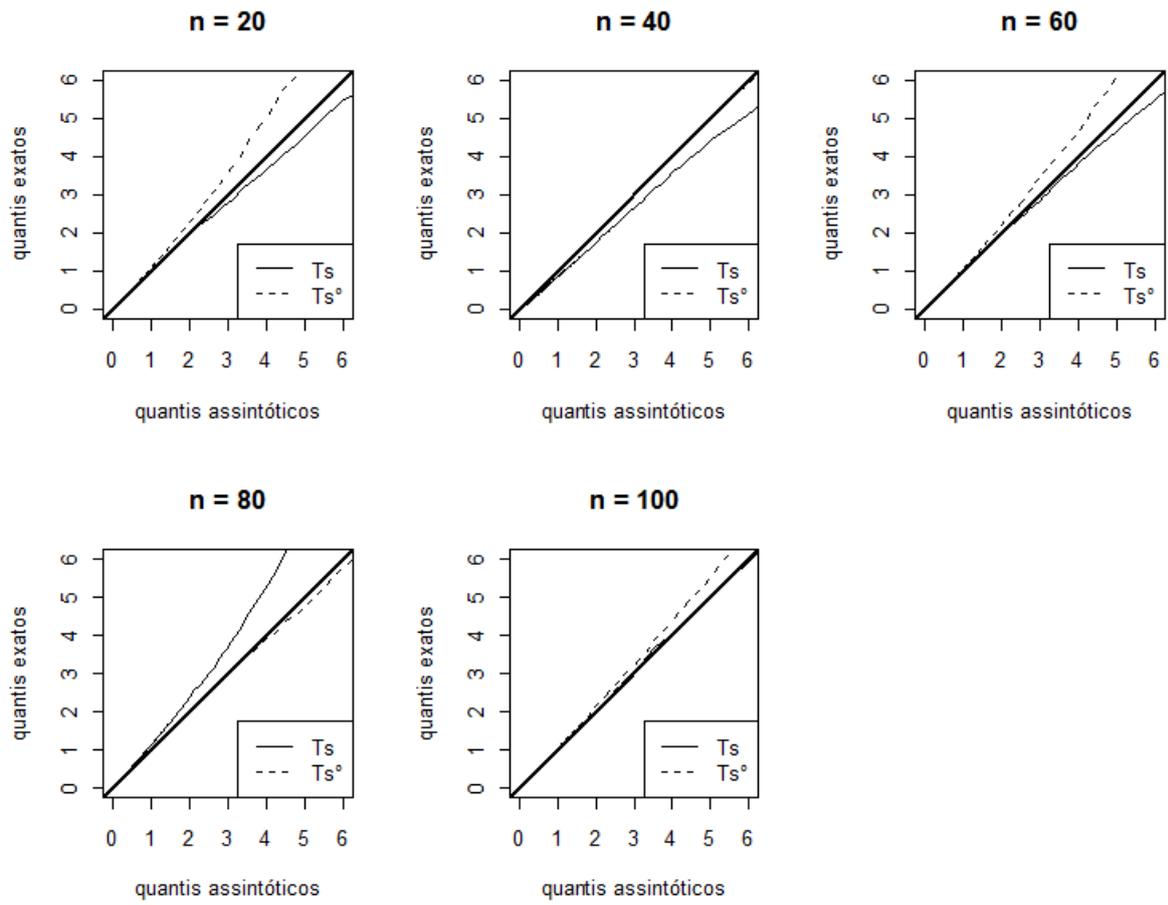


Figura 4.5 *QQ*-plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_S e T_S^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

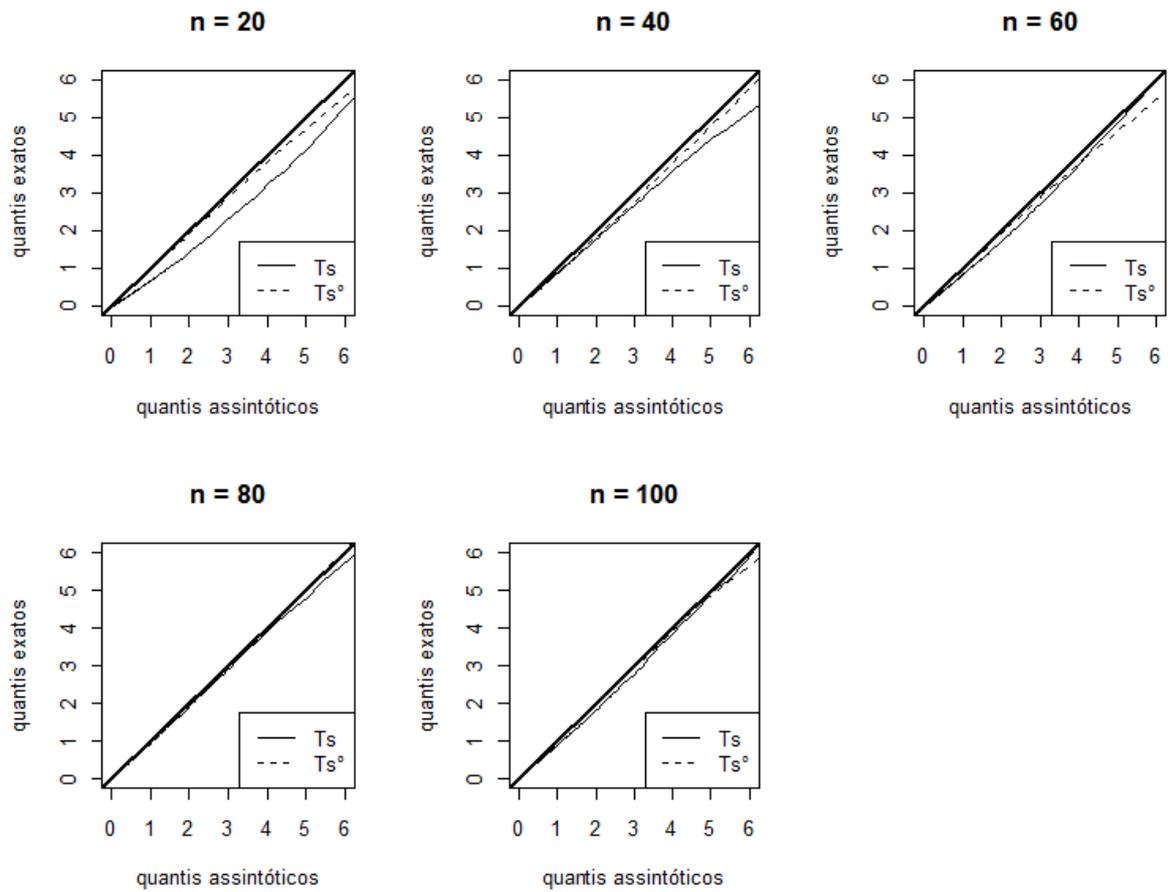


Figura 4.6 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

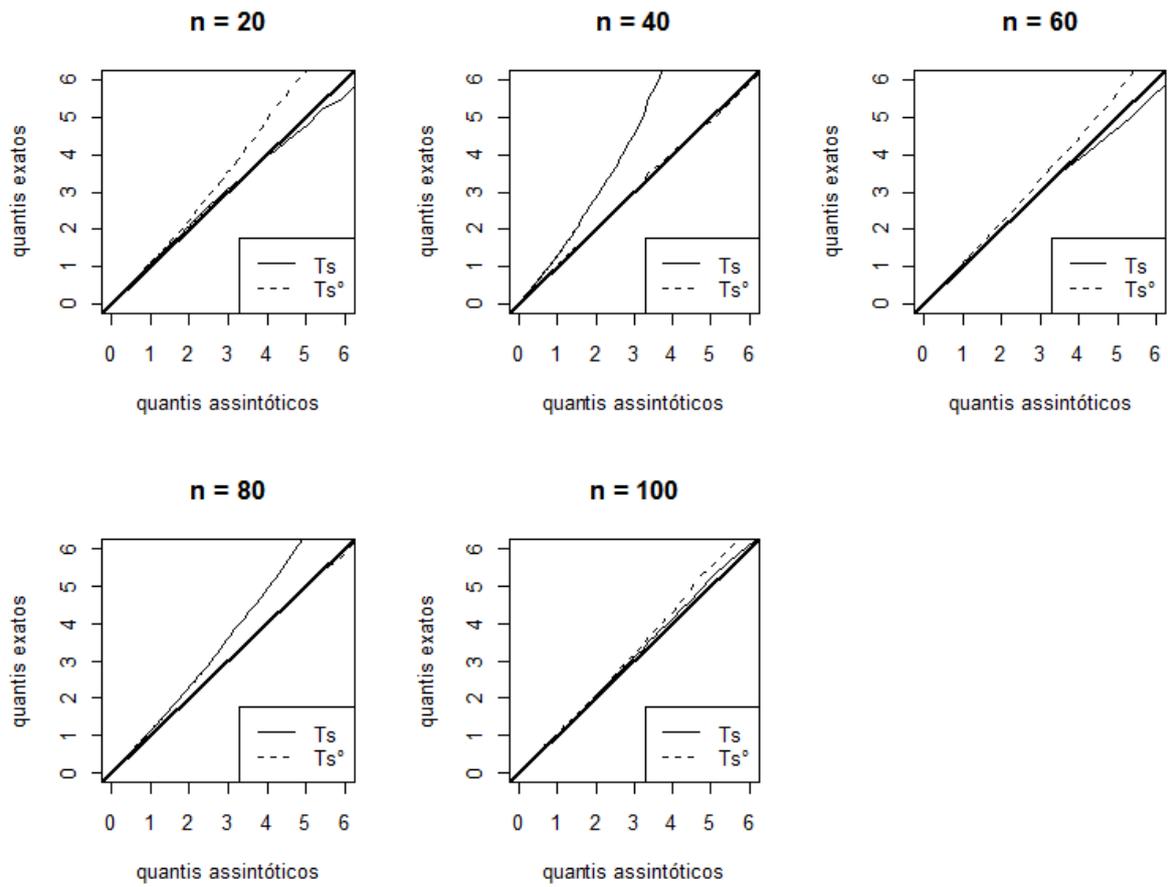


Figura 4.7 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

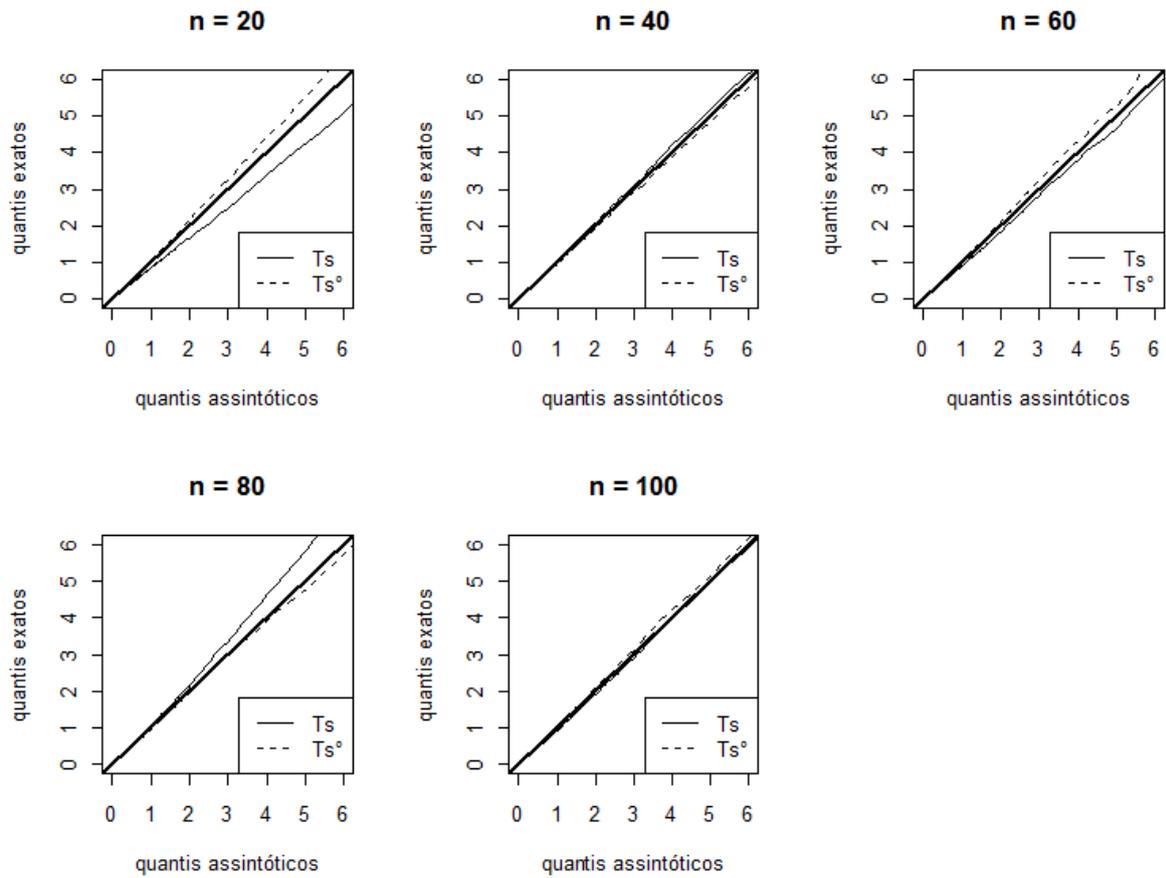


Figura 4.8 QQ -plos dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_S e T_S^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

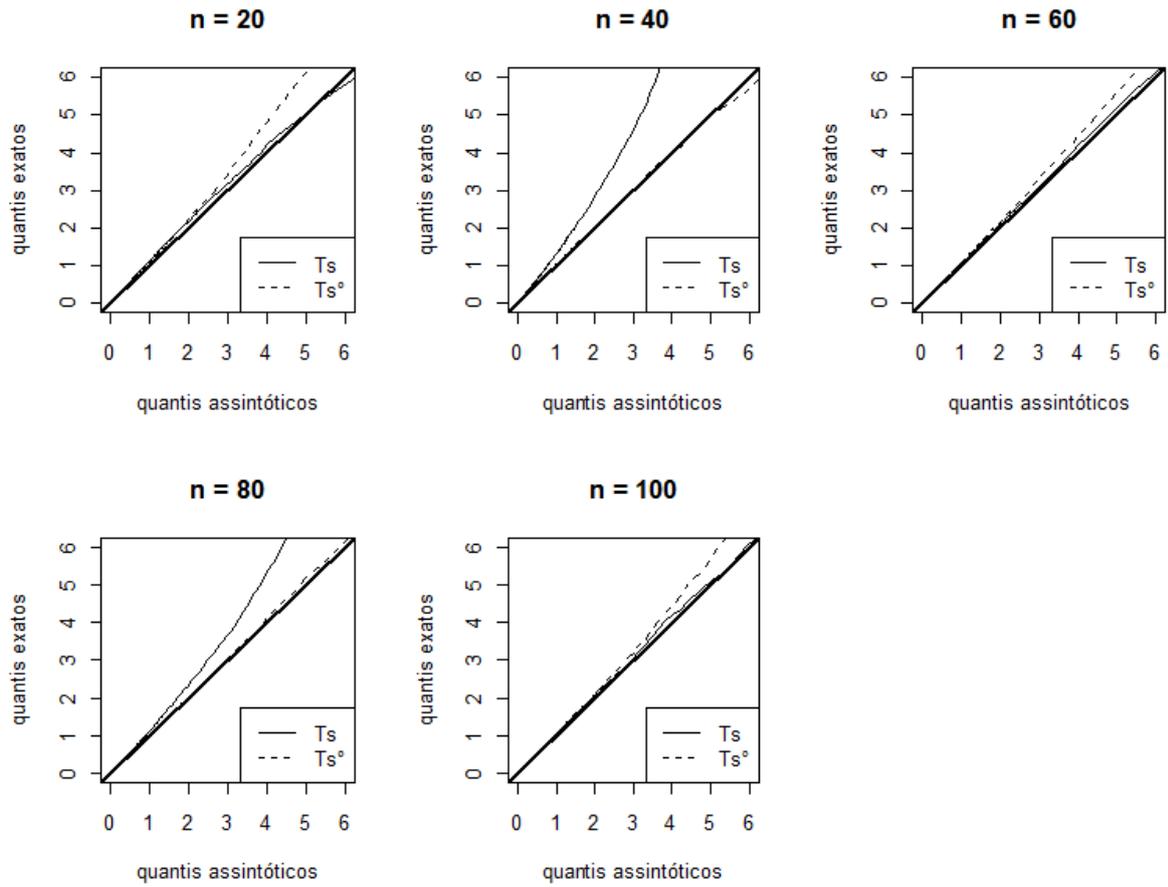


Figura 4.9 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

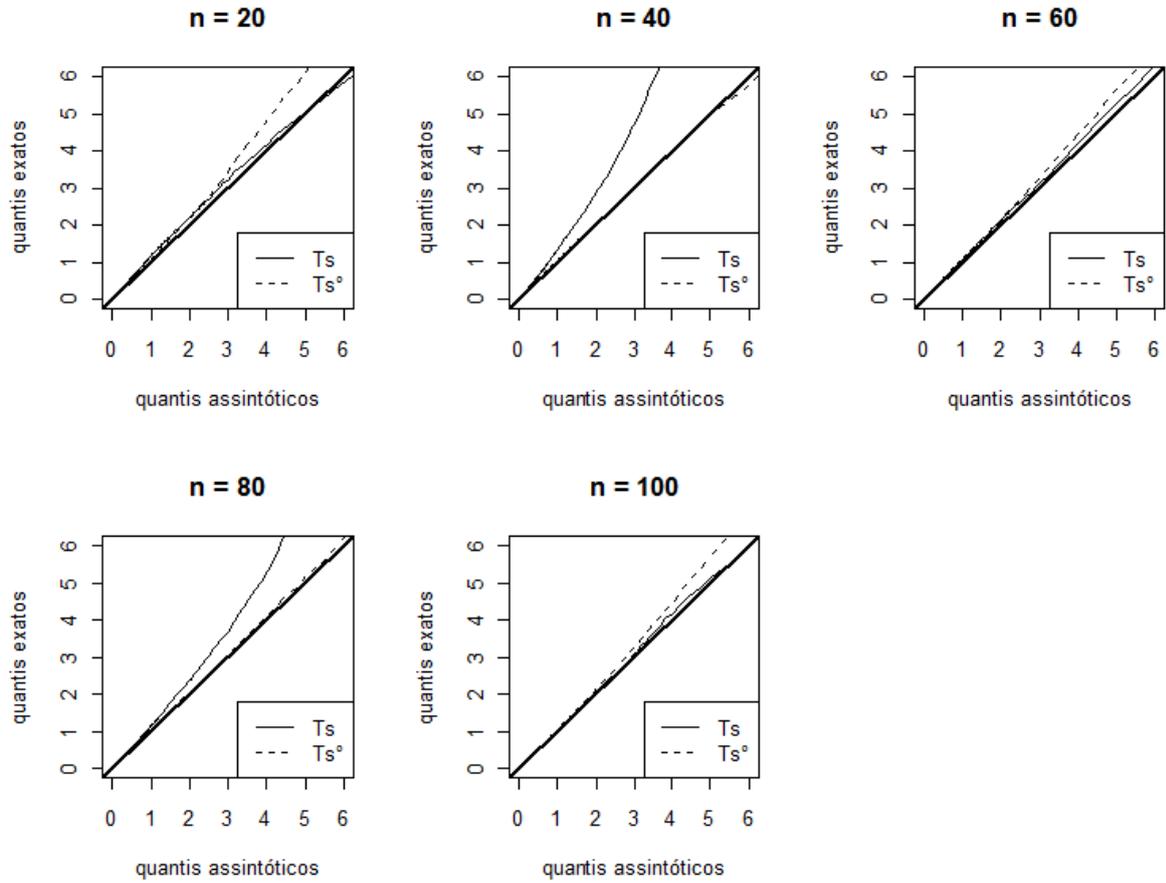


Figura 4.10 QQ -plots dos quantis exatos e assintóticos das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.

Para melhor visualização dos comportamentos dos testes T_s e T_s^0 foram gerados gráficos box-plot e histogramas. Podemos observar que as distribuições das estatísticas de teste são assimétricas com a presença de alguns pontos extremos como, por exemplo, na Figura 4.13.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

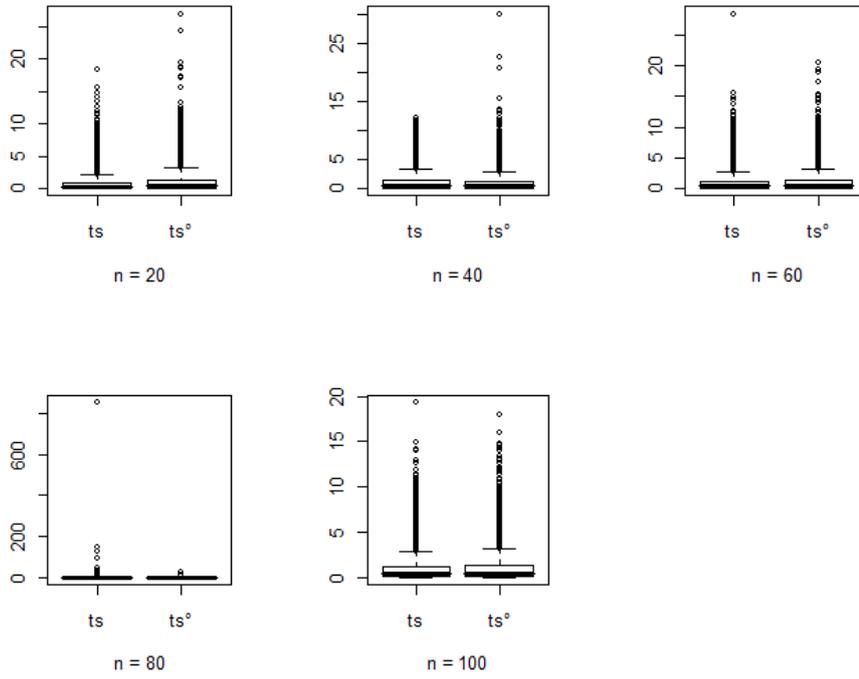


Figura 4.11 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.

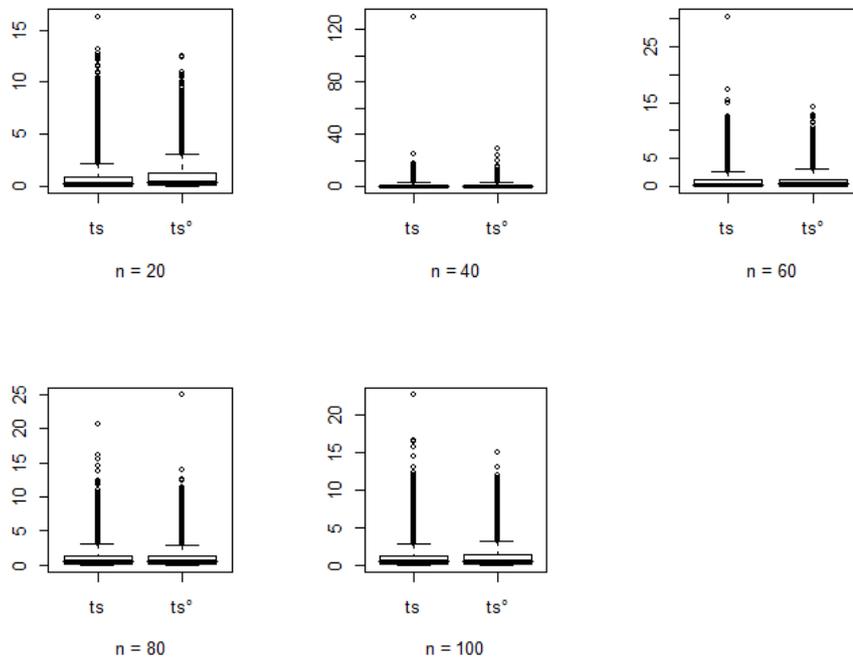


Figura 4.12 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

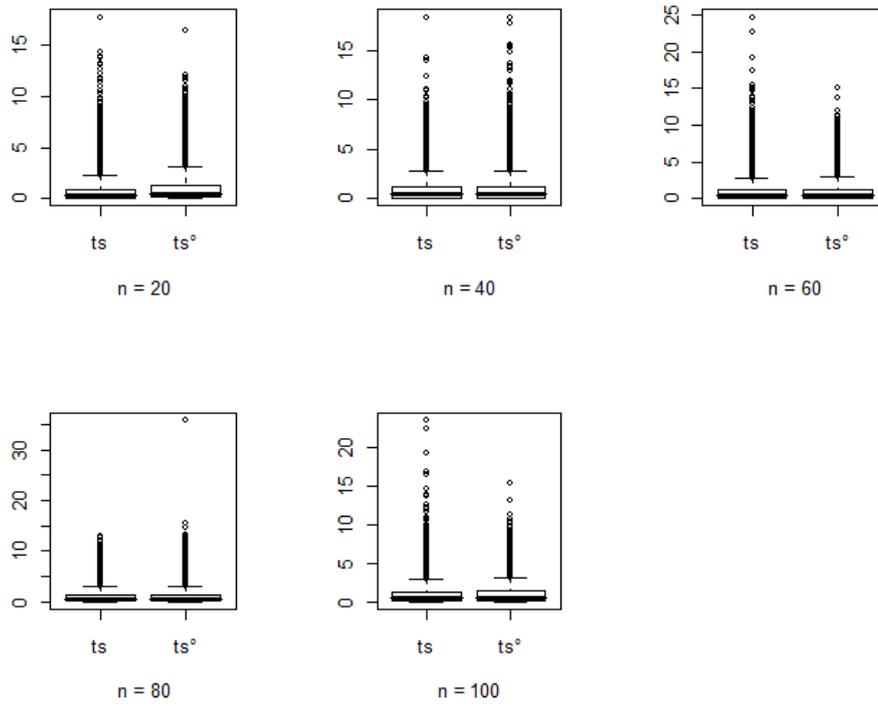


Figura 4.13 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.

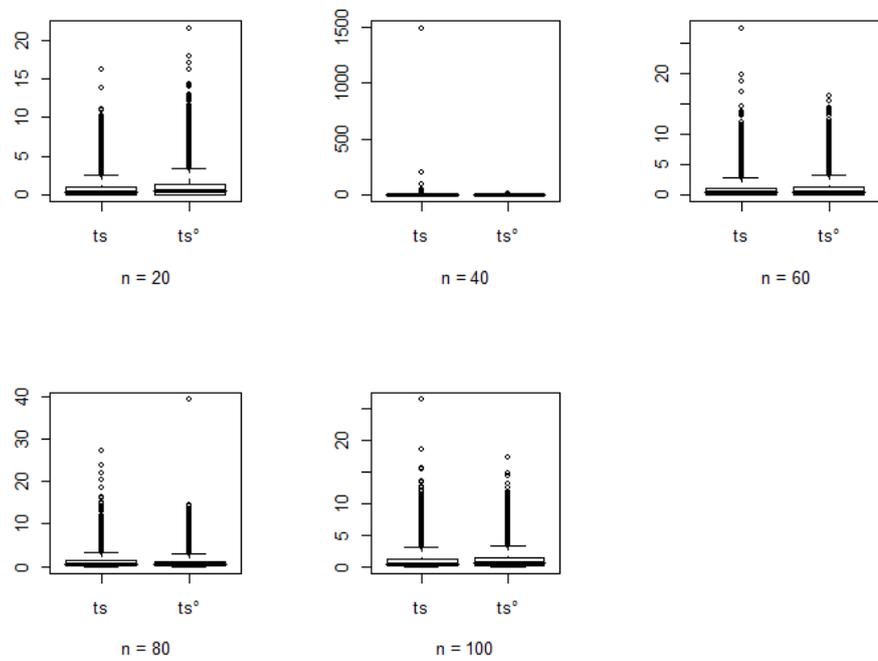


Figura 4.14 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

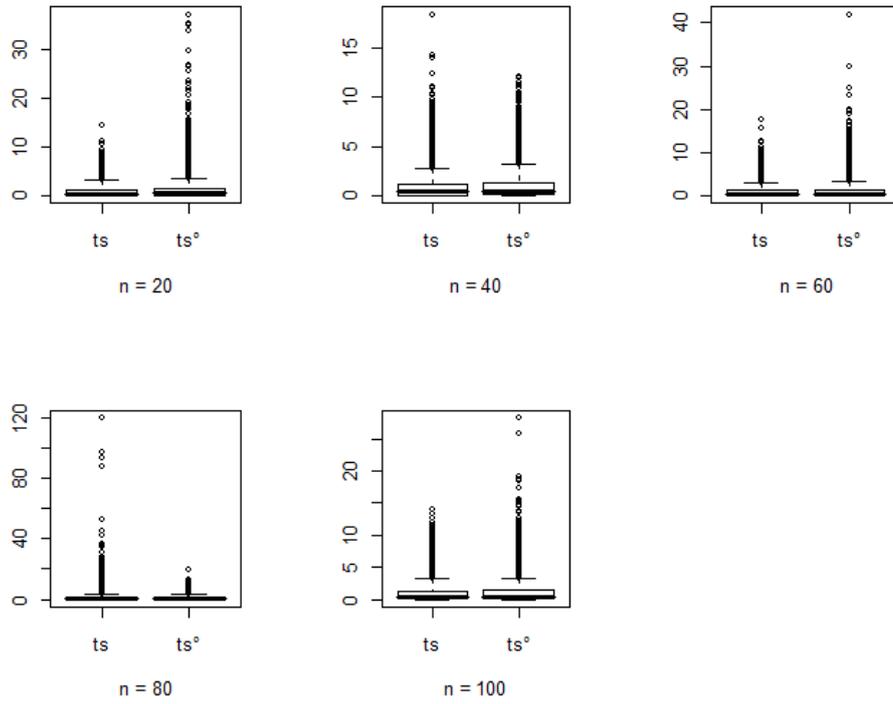


Figura 4.15 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.

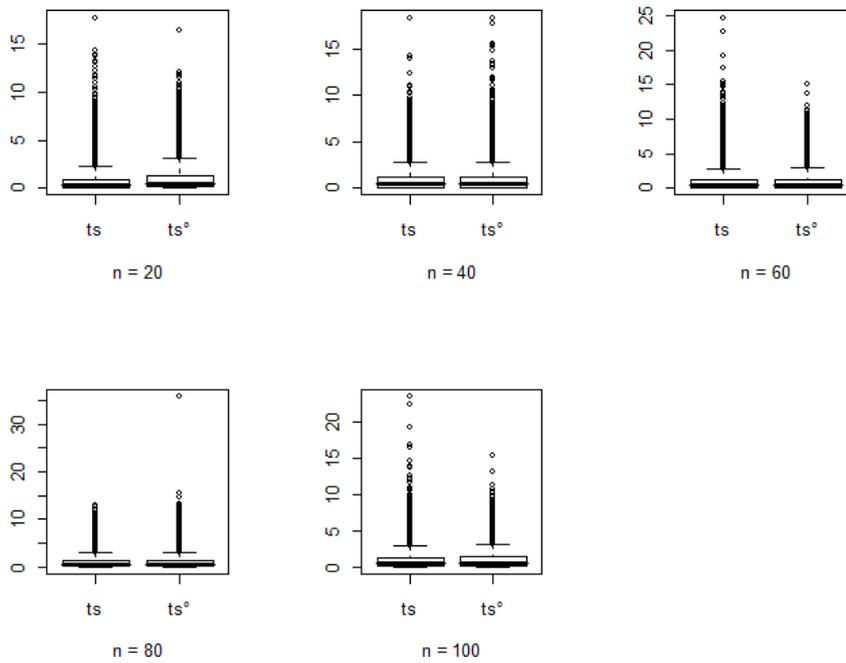


Figura 4.16 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

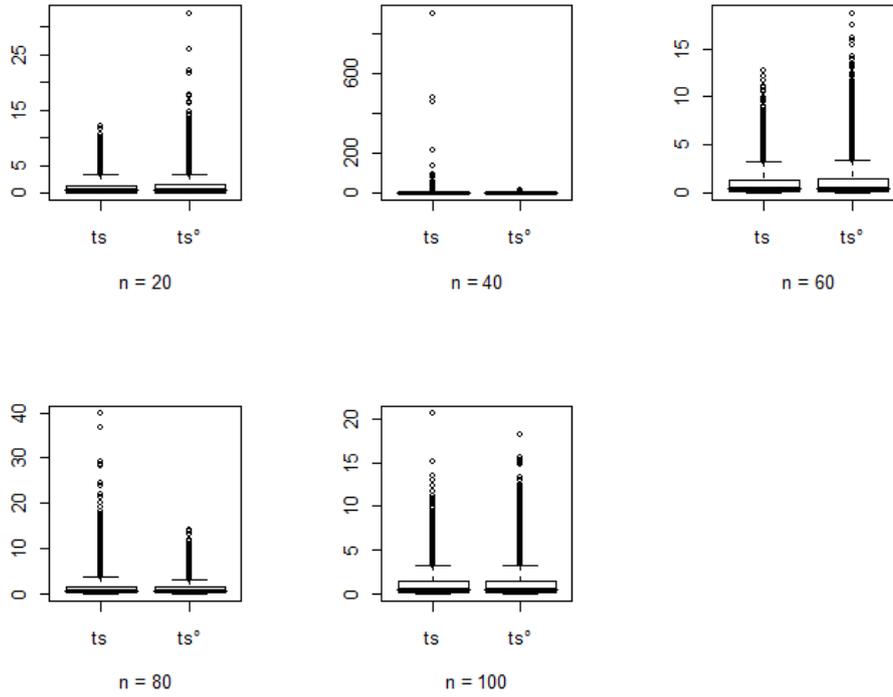


Figura 4.17 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.

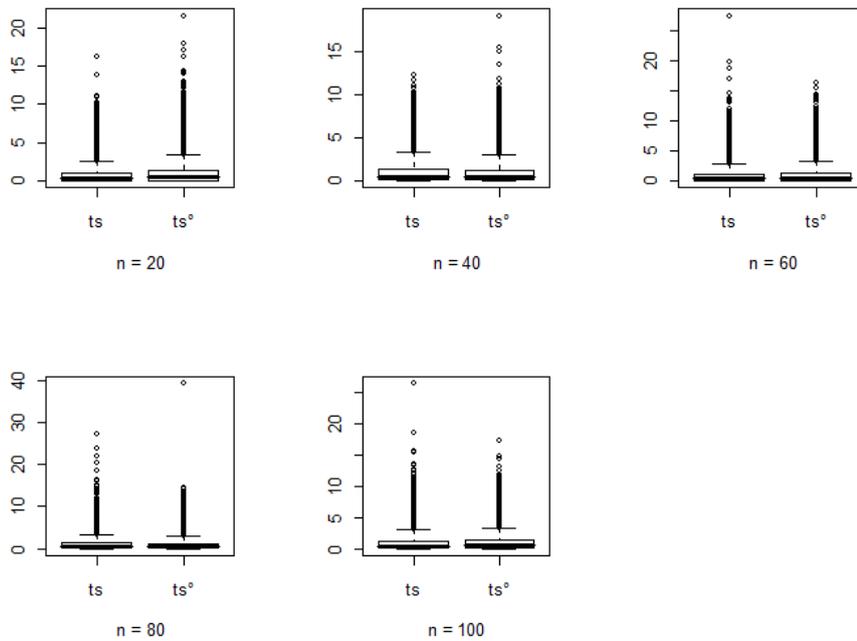


Figura 4.18 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

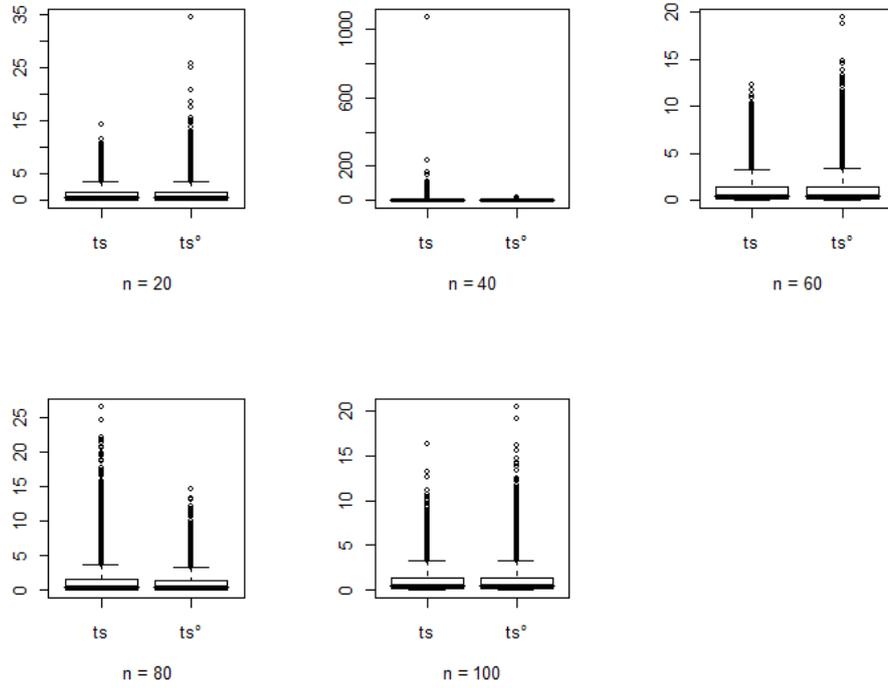


Figura 4.19 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.

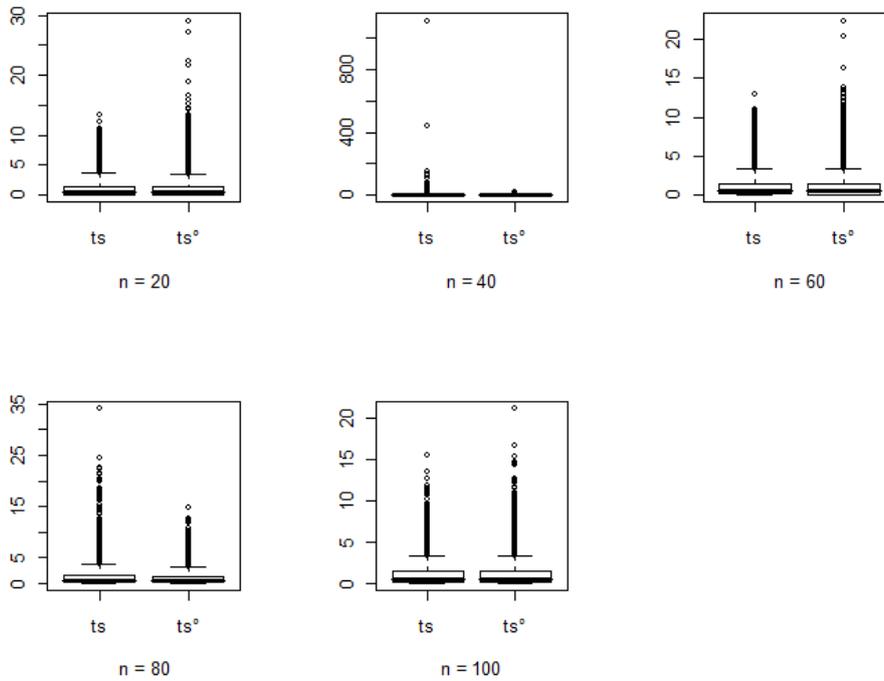


Figura 4.20 Box-plots das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

Observa-se nas Figuras 4.21 a 4.30 a seguir que as distribuições nulas das estatísticas T_s e T_s^0 têm assimetria à direita, sendo semelhantes à distribuição χ_1^2 , como, por exemplo, na Figura 4.23.

Em geral, observamos que os comportamentos das estatísticas T_s e T_s^0 são semelhantes, tanto para a transformação de Box-Cox como para a de Manly. As taxas de rejeição da hipótese nula diferem para pequenos tamanhos de amostra, em que o desempenho do teste T_s^0 é levemente superior ao do teste T_s , porém as discrepâncias diminuem quando o tamanho da amostra aumenta, para ambas as transformações.

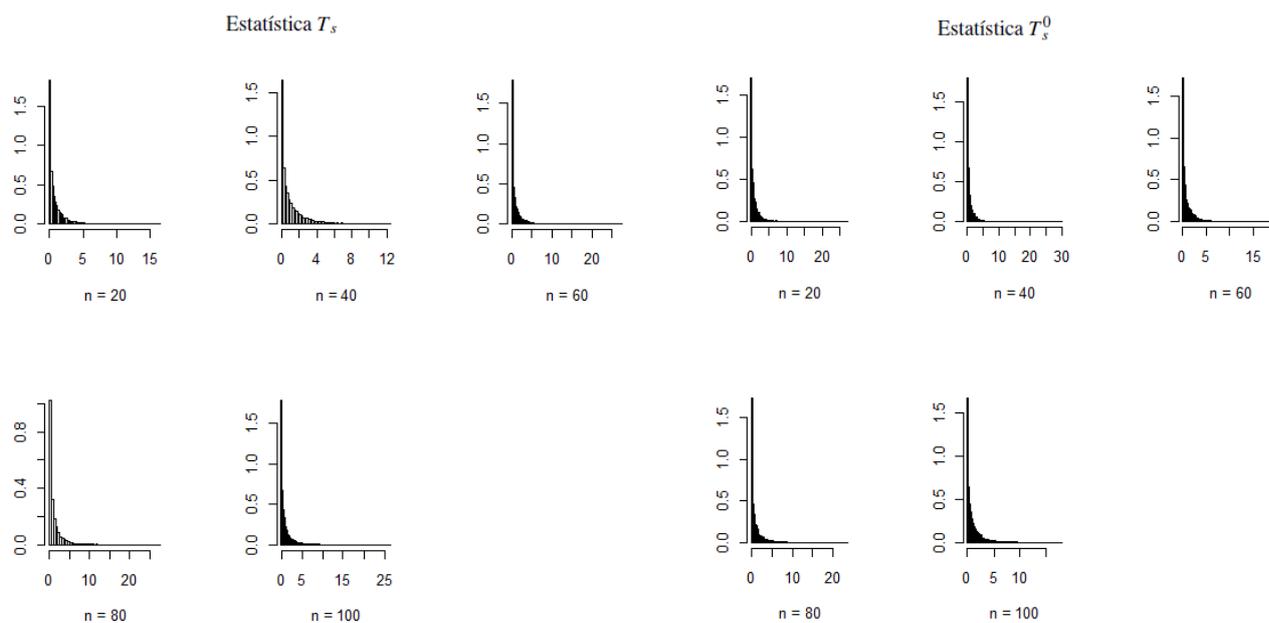


Figura 4.21 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -1$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

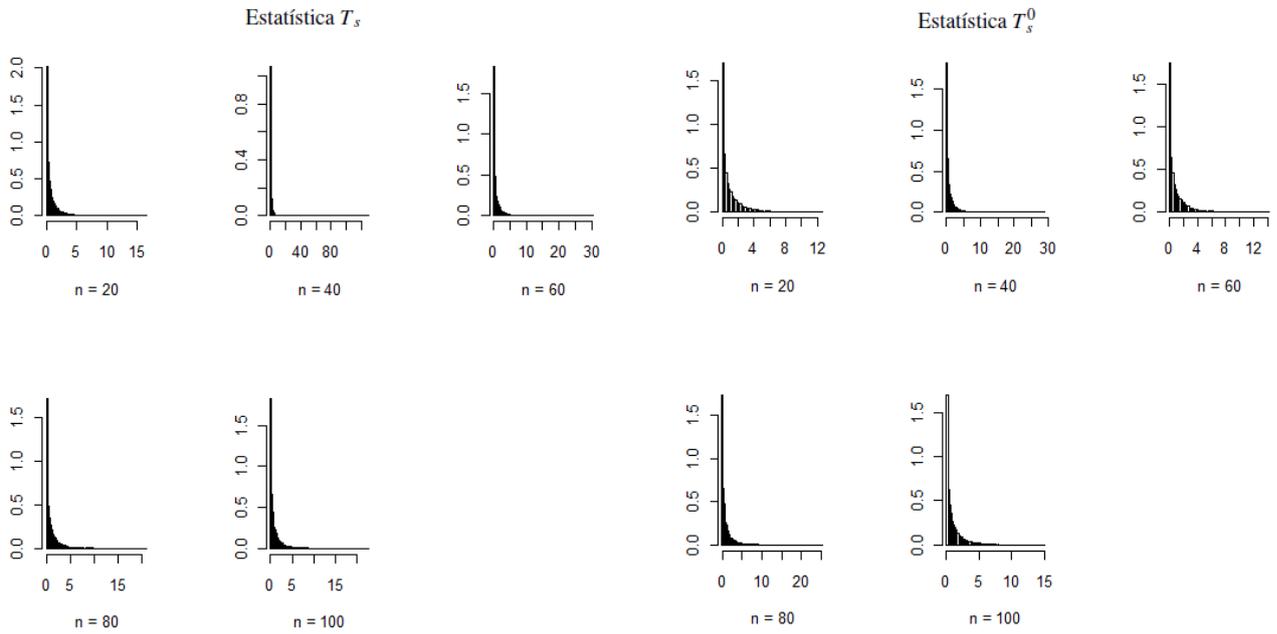


Figura 4.22 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = -0.5$.

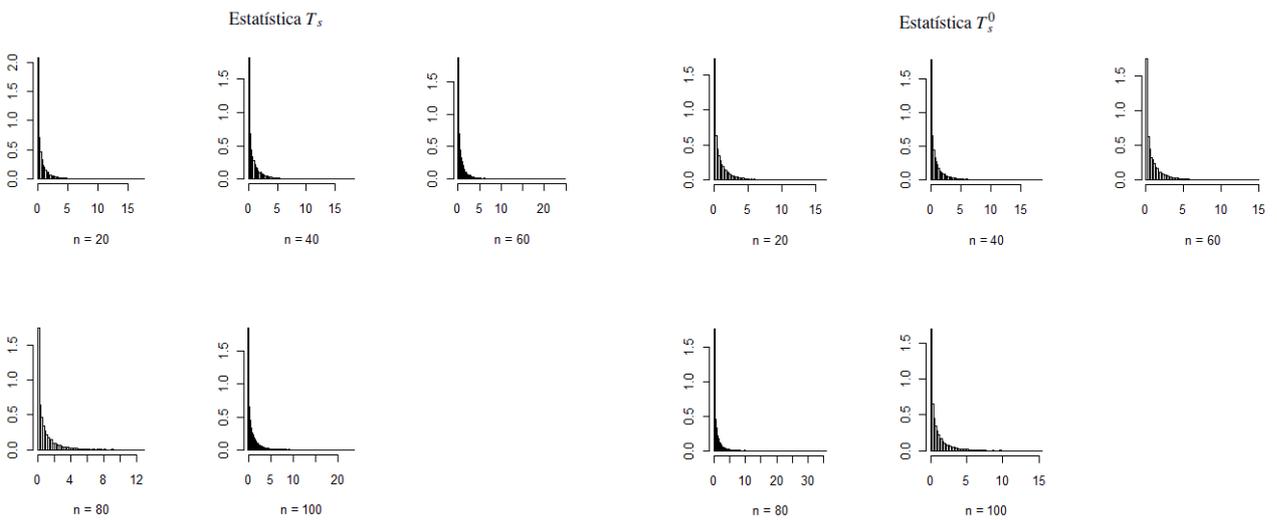


Figura 4.23 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

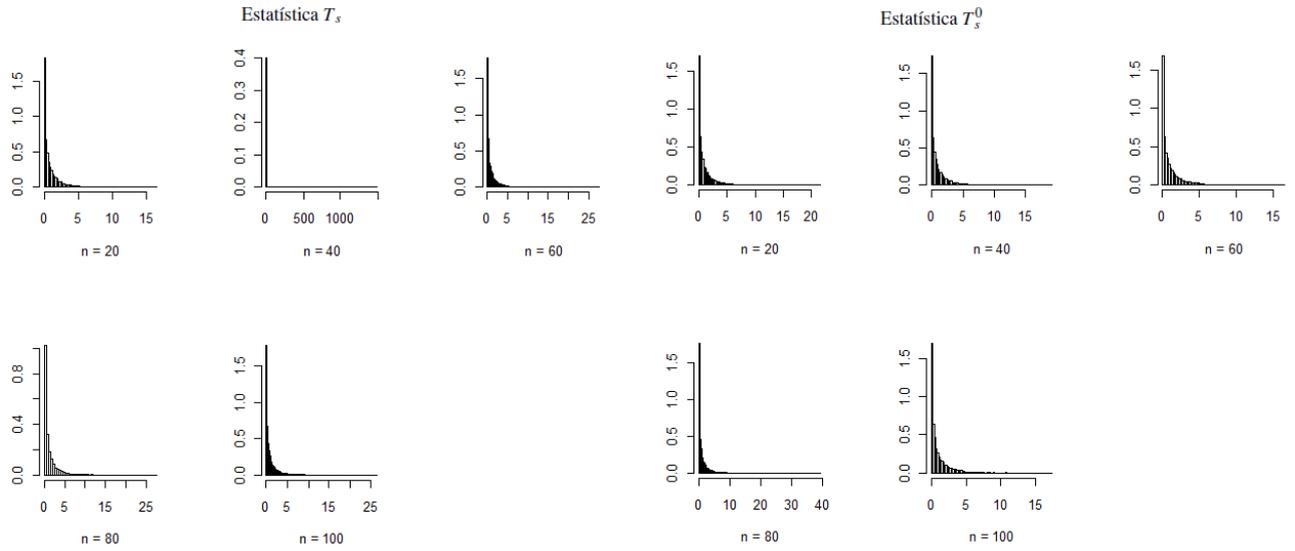


Figura 4.24 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 0.5$.

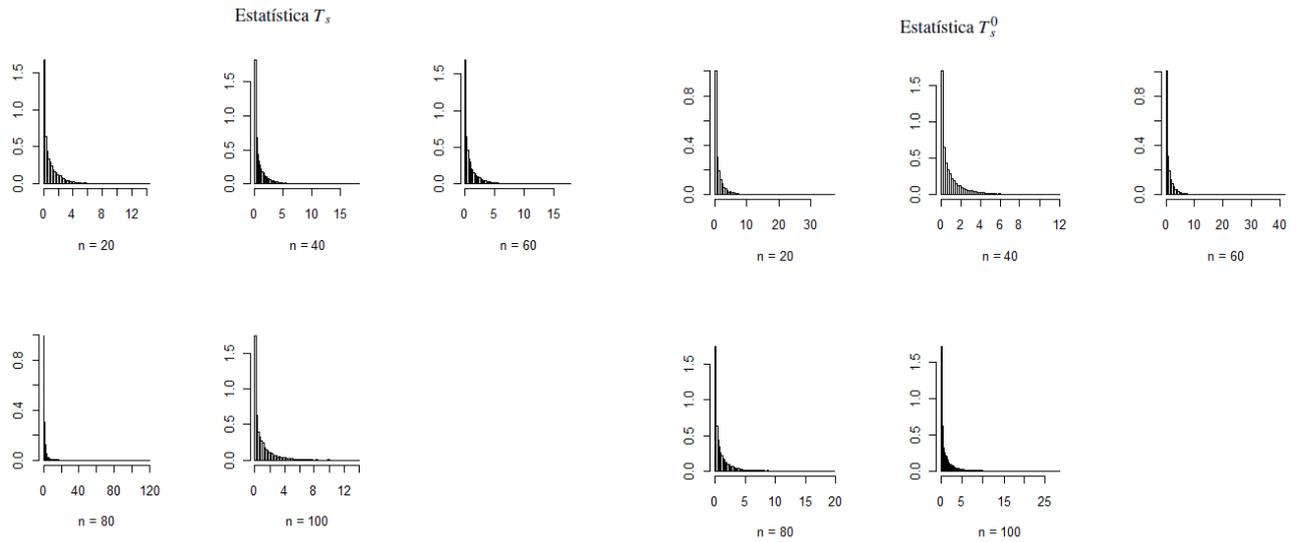


Figura 4.25 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Box-Cox e $\lambda = 1$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

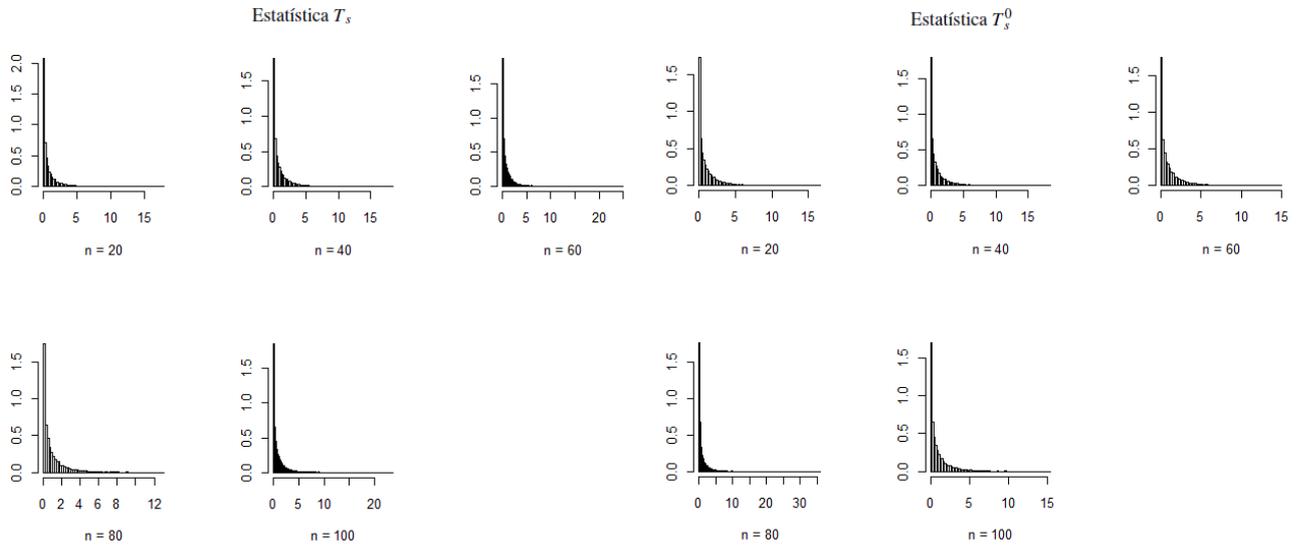


Figura 4.26 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0$.

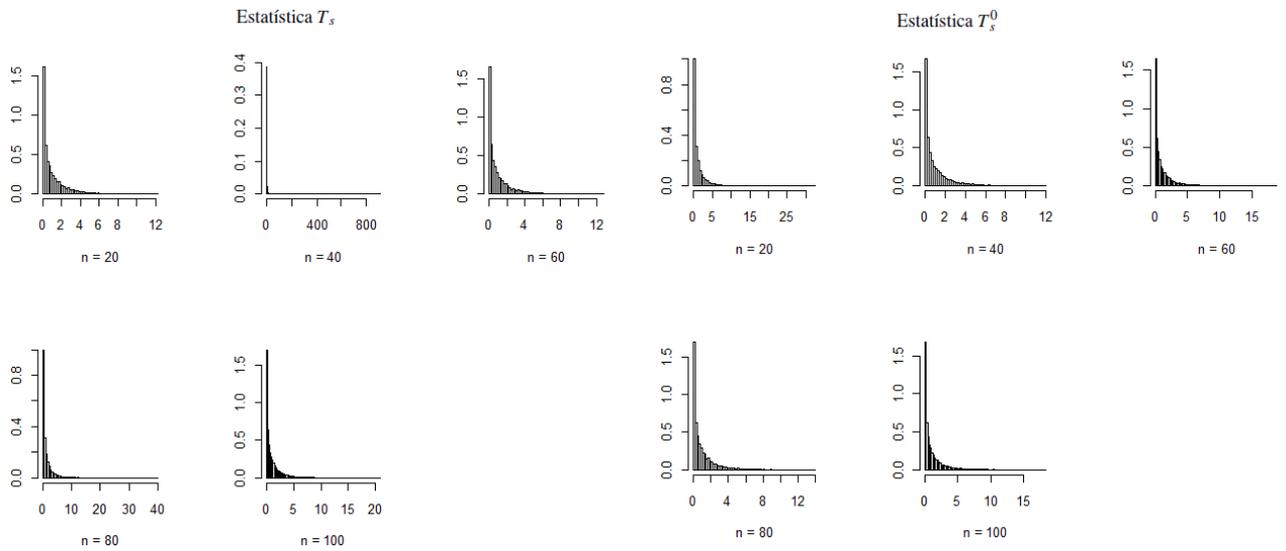


Figura 4.27 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 0.5$.

4.1 TAMANHOS DOS TESTES

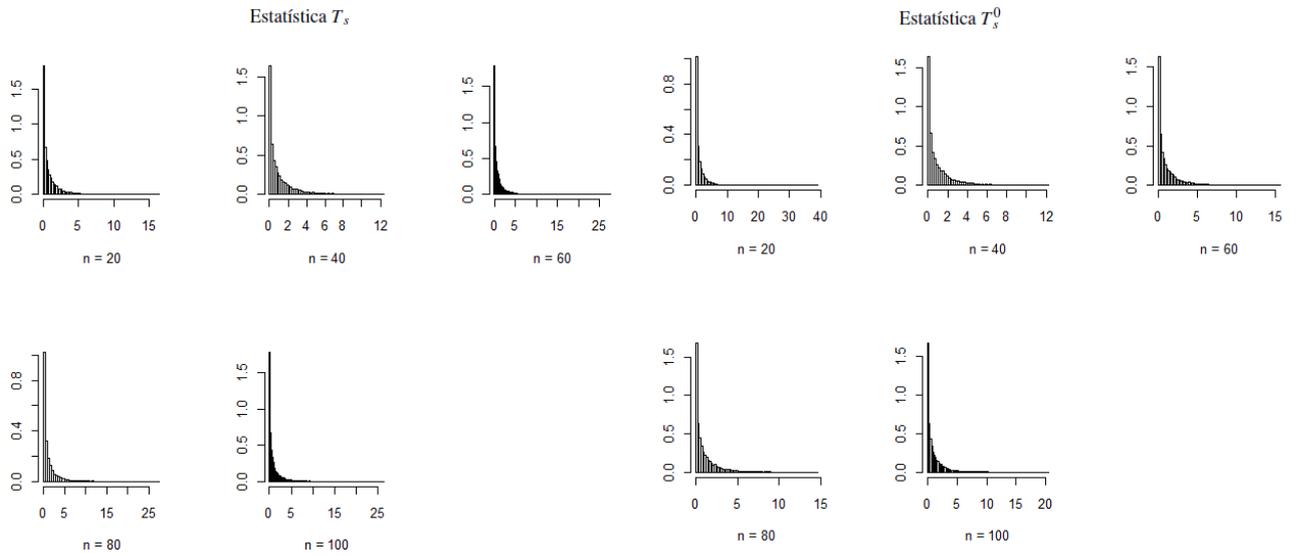


Figura 4.28 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1$.

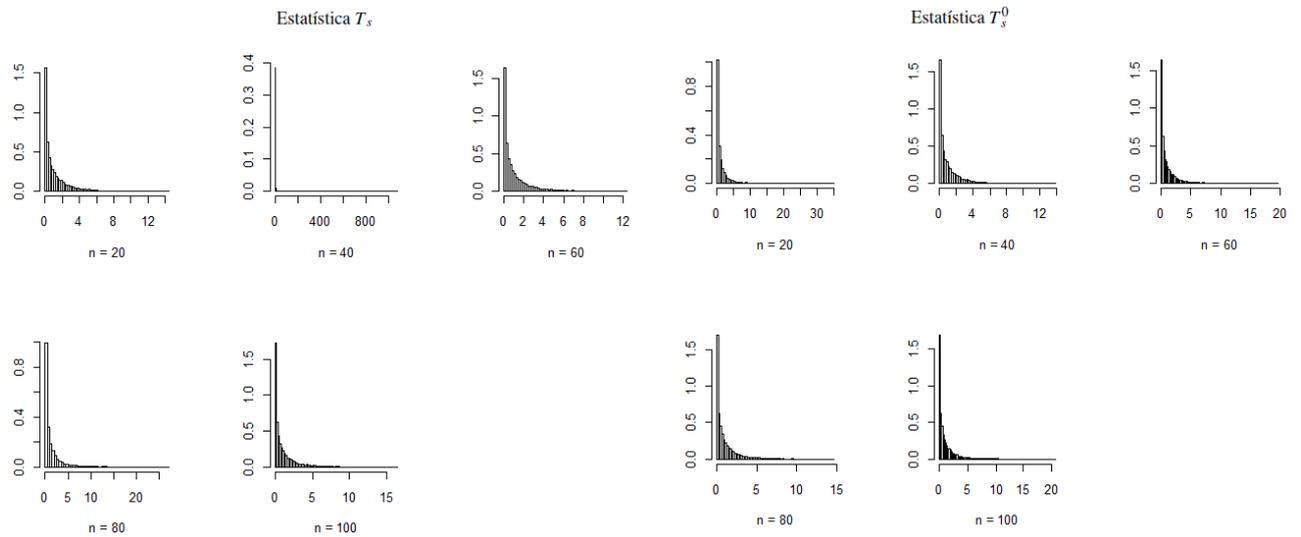


Figura 4.29 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 1.5$.

4.2 PODERES DOS TESTES

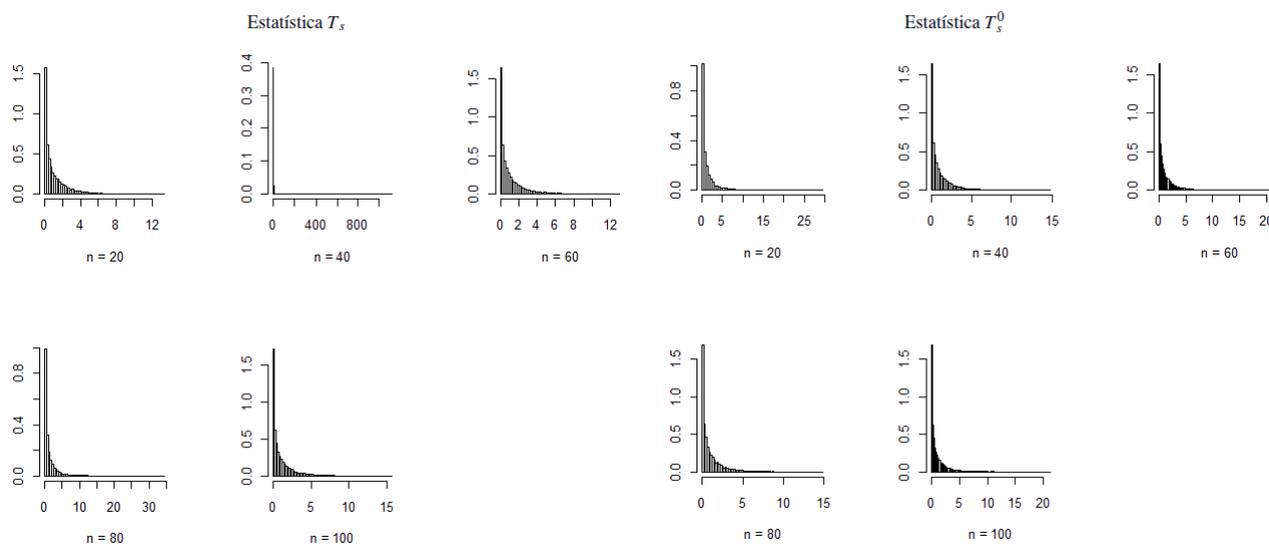


Figura 4.30 Histogramas das estatísticas T_s e T_s^0 para a transformação de Manly e $\lambda = 2$.

4.2 Poderes dos testes

Após as simulações de tamanho foram realizadas simulações para verificar os poderes dos testes escore e escore bootstrap. O poder do teste é a probabilidade do teste rejeitar a hipótese nula quando esta é falsa. Testamos $H_0 : \lambda = 1$ versus $H_1 : \lambda \neq 1$ e os dados foram gerados usando $\lambda = 1.5$. No caso da transformação de Box-Cox, observamos na Tabela 4.11 que o poder do teste escore T_s é superior ao do teste escore T_s^0 ; por exemplo, ao nível nominal de 5% e $T = 20$ os poderes dos testes T_s e T_s^0 são 0.9795 e 0.3359, respectivamente. Na transformação de Box-Cox os poderes dos testes escore T_s são semelhantes aos dos testes escore bootstrap; por exemplo, na Tabela 4.11 os poderes dos testes para $T = 40$ e nível nominal de 5% dos testes escore e escore bootstrap foram, respectivamente, 0.9992 e 0.9994. Já para os testes T_s^0 os testes comparados com valores assintóticos foram superiores aos testes bootstrap, por exemplo; para nível nominal de 10% e $T = 20$ os poderes dos testes assintóticos e bootstrap foram, respectivamente, 0.6082 e 0.2395, no entanto os poderes se aproximam à medida que

4.2 PODERES DOS TESTES

o tamanho da amostra aumenta. Adicionalmente, a partir de $T = 60$, os testes T_s se tornam equivalentes e com 100% de poder.

Tabela 4.11 Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ para transformação de Box-Cox.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Box-Cox	Box-Cox bootstrap	Box-Cox	Box-Cox bootstrap
20	0.05	0.9795	0.9811	0.3359	0.0335
	0.10	0.9930	0.9933	0.6082	0.2395
40	0.05	0.9992	0.9994	0.8344	0.6168
	0.10	0.9998	0.9998	0.9871	0.8900
60	0.05	1.0000	1.0000	0.9988	0.9625
	0.10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9961
80	0.05	1.0000	1.0000	0.9989	0.9953
	0.10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
100	0.05	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	0.10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

No caso dos testes escore para transformação de Manly observamos na Tabela 4.12 que o teste escore T_s é mais poderoso do que o teste T_s^0 , em ambas versões; por exemplo, na Tabela 4.12, ao nível nominal de 5% e $T = 20$, os poderes dos testes foram 1.0000 e 0.8140, respectivamente. Os testes escore bootstrap se mostraram igualmente poderosos aos testes escore que usam valores assintóticos: por exemplo, o poder do teste T_s na Tabela 4.13 para $T = 100$ e nível nominal de 10% foi 1.0000 em ambos os casos. Observamos ainda que os testes são mais poderosos para tamanhos de amostras maiores.

Para avaliar melhor os poderes dos testes escore foi fixado o valor nominal de 5% e variamos os tamanhos de amostra: $T = 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140$ e 150. Podemos ver nas Tabelas 4.13 e 4.14 que o poder aumenta quando o tamanho da amostra aumenta. Além disso, os testes T_s são mais poderosos que os testes T_s^0 para ambas as transformações, como já foi observado anteriormente. Observamos também que para tamanhos de amostras maiores os desempenhos dos testes são semelhantes.

4.2 PODERES DOS TESTES

Tabela 4.12 Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ para transformação de Manly.

Tamanho da amostra	α	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
		Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	0.05	1.0000	1.0000	0.8140	0.8140
	0.10	1.0000	1.0000	0.8140	0.8140
40	0.05	1.0000	1.0000	0.9230	0.9230
	0.10	1.0000	1.0000	0.9230	0.9230
60	0.05	1.0000	1.0000	0.9710	0.9710
	0.10	1.0000	1.0000	0.9710	0.9710
80	0.05	1.0000	1.0000	0.9800	0.9800
	0.10	1.0000	1.0000	0.9800	0.9800
100	0.05	1.0000	1.0000	0.9870	0.9870
	0.10	1.0000	1.0000	0.9870	0.9870

Tabela 4.13 Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ a 5% para transformação de Box-Cox.

Tamanho da amostra	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
	Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	0.8970	0.8971	0.3174	0.0333
30	0.9762	0.9769	0.5965	0.3010
40	0.9998	0.9999	0.8621	0.5789
50	0.9998	0.9998	0.9316	0.8202
60	0.9999	0.9999	0.9606	0.9156
70	1.0000	1.0000	0.9914	0.9759
80	1.0000	1.0000	0.9989	0.9968
90	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988
100	1.0000	1.0000	0.9998	0.9997
110	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
120	1.0000	1.0000	0.9870	0.9999
130	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
140	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
150	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

4.2 PODERES DOS TESTES

Tabela 4.14 Poderes dos testes escore quando $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 1.5$ a 5% para transformação de Manly.

Tamanho da amostra	Estatística T_s		Estatística T_s^0	
	Manly	Manly bootstrap	Manly	Manly bootstrap
20	1.0000	1.0000	0.8287	0.8287
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.8122
40	1.0000	1.0000	0.9433	0.9433
50	1.0000	1.0000	0.9316	0.8202
60	1.0000	1.0000	0.9732	0.9732
70	1.0000	1.0000	0.9683	0.9683
80	1.0000	1.0000	0.9879	0.9879
90	1.0000	1.0000	0.9901	0.9901
100	1.0000	1.0000	0.9964	0.9964
110	1.0000	1.0000	0.9963	0.9963
120	1.0000	1.0000	0.9902	0.9902
130	1.0000	1.0000	0.9986	0.9986
140	1.0000	1.0000	0.9965	0.9965
150	1.0000	1.0000	0.9977	0.9977

CAPÍTULO 5

Aplicações

Neste capítulo apresentamos duas aplicações a dados reais da metodologia descrita nos Capítulos 2 e 3 desta dissertação.

5.1 Aplicação 1

A primeira base de dados é formada por 50 observações acerca da velocidade dos carros mensurada em milhas por hora e da distância de frenagem mensurada em pés (Ezekiel 1930). Na Tabela 5.1 podemos observar as principais medidas descritivas das variáveis velocidade e distância de frenagem. Podemos observar na Figura 5.1 que existe uma relação diretamente proporcional entre a distância de frenagem e a velocidade do veículo. Adicionalmente, a Figura 5.2 mostra que a variável velocidade apresenta simetria enquanto a variável distância de frenagem apresenta uma assimetria a direita.

Tabela 5.1 Principais medidas descritivas das variáveis velocidade e distância de frenagem.

Medidas Descritivas	Velocidade	Distância de frenagem
Mínimo	4.00	2.00
1° quartil	12.00	26.00
Mediana	15.00	36.00
Média	15.40	42.00
3° quartil	19.00	56.00
Máximo	25.00	120.00
Desvio-padrão	5.29	25.77

5.1 APLICAÇÃO 1

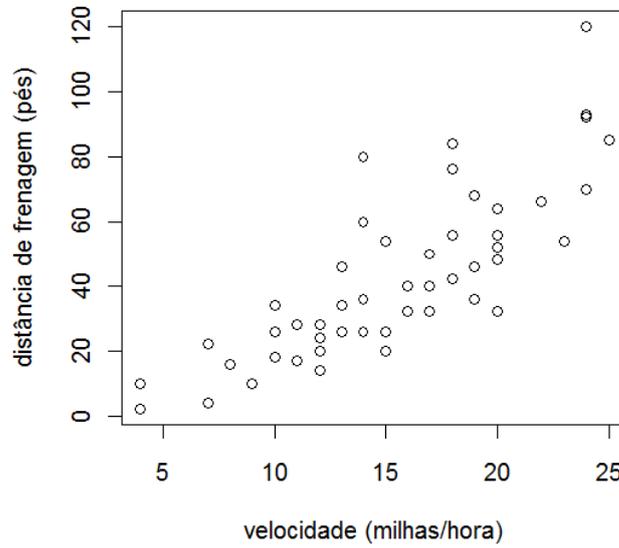


Figura 5.1 Distância de frenagem e velocidade.

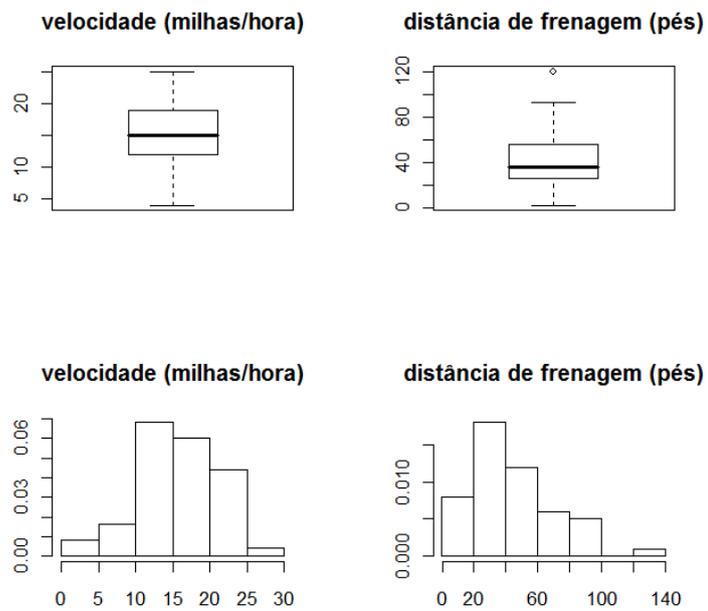


Figura 5.2 Box-plots e histogramas das variáveis velocidade e distância de frenagem.

5.1 APLICAÇÃO 1

Após a análise descritiva, foram comparados três cenários para a aplicação do modelo normal linear. Primeiramente, foi considerado o cenário em que não é aplicada transformação nos dados. O segundo cenário corresponde à aplicação da transformação de Box-Cox tanto na variável resposta quanto no regressor. Por fim, o terceiro cenário é referente à aplicação da transformação de Manly, também em ambas as variáveis.

O modelo proposto é $distância\ de\ frenagem = \beta_1 + \beta_2\ velocidade + erro$. Para tanto, foram aplicados os testes escore descritos no Capítulo 3 desta dissertação com o intuito de determinar o valor do parâmetro para cada uma das transformações. Testamos $H_0 : \lambda = 0.5$ versus $H_1 : \lambda \neq 0.5$. As estatísticas de teste escore, T_s e T_s^0 , para a transformação de Box-Cox foram 0.3483 e 0.4971, respectivamente, ou seja, não se rejeita a hipótese nula aos níveis usuais de significância. Para a avaliação do parâmetro da transformação de Manly, as estatísticas de teste, T_s e T_s^0 , obtidas foram, respectivamente, 8.0172 e 13.693. Assim, se rejeita a hipótese nula. Foram considerados outros valores para λ_0 , porém todos os testes escore rejeitaram a hipótese nula. Conclui-se então que a transformação de Manly não é adequada para essa base de dados. A Tabela 5.2 contém as estimativas de β_1 e β_2 nas três situações propostas. O valor de λ utilizado nas transformações foi de $\lambda = 0.5$. Em todos os três modelos o teste t de $H_0 : \beta_2 = 0$ versus $H_1 : \beta_2 \neq 0$ rejeitou a hipótese nula (p -valor < 0.05). Observamos que o modelo com a transformação de Box-Cox apresenta R^2 um pouco mais elevado que o modelo sem transformação.

Tabela 5.2 Modelos lineares da aplicação 1.

Cenário	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	p -valor (teste F)	R^2
Sem transformação	-17.5791	3.9324	1.49×10^{-12}	0.6511
Transformação de Box-Cox	-3.0438	2.3657	2.48×10^{-14}	0.7053
Transformação de Manly	-0.0018	3.9390	1.52×10^{-12}	0.6508

Com o intuito de comparar os desempenhos dos três modelos foram analisados os resíduos. Para verificar a homoscedasticidade dos resíduos dos modelos foi utilizado o teste de Koenker

5.1 APLICAÇÃO 1

(Koenker 1981) em que a hipótese nula é a de homoscedasticidade. Já para testar a normalidade dos resíduos foi utilizado o teste de Bera-Jarque (Thadewald & Büning 2004) em que a hipótese nula é a de normalidade. Observamos na Tabela 5.3 que a transformação de Box-Cox foi capaz de reduzir significativamente desvios de normalidade e homoscedasticidade em relação ao modelo sem transformação. Já a transformação de Manly não foi capaz de reduzir tais desvios, o que já era esperado, pois segundo os testes *score* essa transformação não se adequa aos dados. Observamos graficamente a melhora no desvio de normalidade dos resíduos com a transformação de Box-Cox na Figura 5.3 em que estão apresentados os gráficos *QQ*-plot com envelope da distribuição normal (Paula 2004).

Tabela 5.3 Teste de homoscedasticidade e normalidade dos erros para os modelos da aplicação 1.

Cenário	<i>p</i> -valor teste de Koenker	<i>p</i> -valor teste de Bera-Jarque
Sem transformação	0.0729	0.0167
Transformação de Box-Cox	0.7597	0.3207
Transformação de Manly	0.0723	0.0162

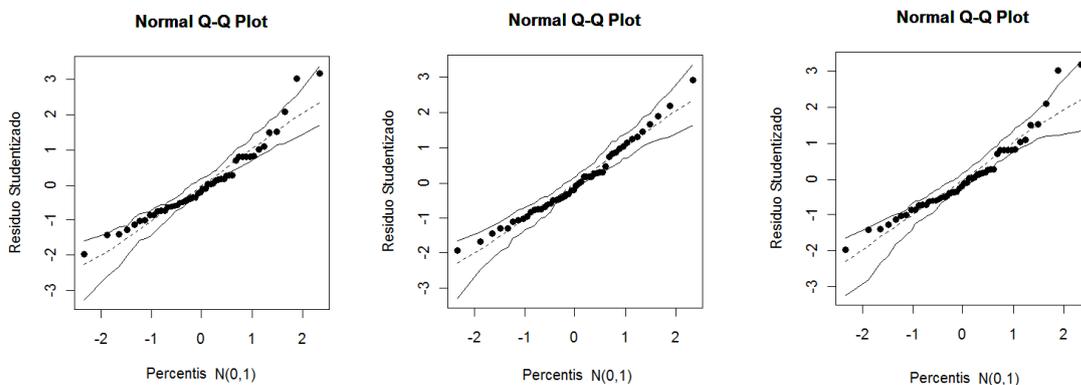


Figura 5.3 Gráficos *QQ*-plot com envelope dos modelos da aplicação 1: sem transformação (painel esquerdo), Box-Cox (centro) e Manly (painel direito).

Nas Figuras 5.4 e 5.5 podemos observar a melhora no desvio de homoscedasticidade no modelo com transformação de Box-Cox em relação ao modelo sem transformação. Ainda sobre a relação destes dois modelos, sem transformação e com transformação de Box-Cox, observa-se

5.1 APLICAÇÃO 1

uma pequena diminuição nos valores das distâncias de Cook dos pontos influentes no modelo sem transformação, assim como uma diminuição dos valores dos resíduos studentizados dos outliers no modelo sem transformação.

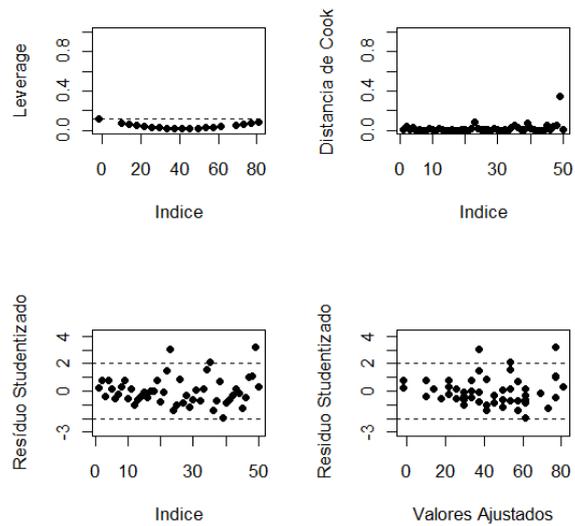


Figura 5.4 Comportamento dos resíduos do modelo sem transformação na aplicação 1.

5.1 APLICAÇÃO 1

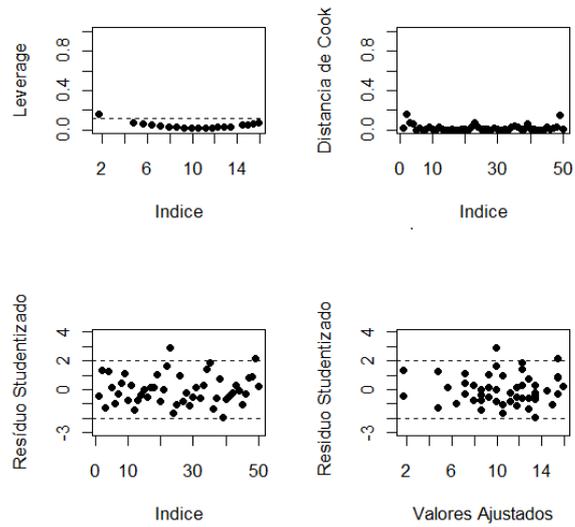


Figura 5.5 Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Box-Cox na aplicação 1.

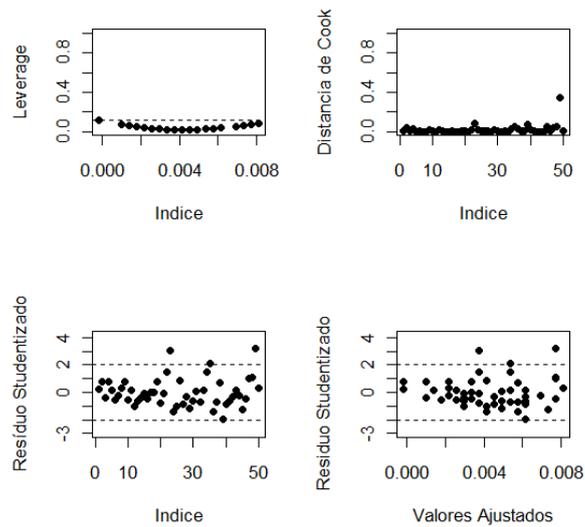


Figura 5.6 Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Manly na aplicação 1.

5.2 Aplicação 2

A segunda base de dados utilizada é referente à renda per capita e ao valor gasto em escolas públicas per capita nos Estados Unidos, em dólares na escala de 10^{-4} , no ano de 1979 (Greene 1997). O estado de Wisconsin foi excluído por não constar a informação da renda anual, restando assim 50 observações. A Tabela 5.4 contém as principais medidas descritivas das variáveis renda e gasto em escolas públicas. Podemos observar na Figura 5.7 que existe uma relação crescente entre gasto com escolas públicas e renda. Adicionalmente, observa-se um ponto destoante dos demais, que é referente ao estado do Alaska, cujo valor da renda per capita foi de 10851 dólares enquanto o gasto per capita com educação foi de 821 dólares. Em relação ao comportamento das variáveis podemos observar na Figura 5.7 que ambas as variáveis são assimétricas à direita e contêm pontos destoantes.

Tabela 5.4 Principais medidas descritivas das variáveis renda e gasto em escolas públicas.

Medidas Descritivas	Renda	Gasto com educação
Mínimo	5736.00	259.00
1° quartil	6655.00	315.20
Mediana	7575.00	354.00
Média	7609.00	373.30
3° quartil	8296.00	426.20
Máximo	10851.00	821.00
Desvio-padrão	1050.64	94.55

5.2 APLICAÇÃO 2

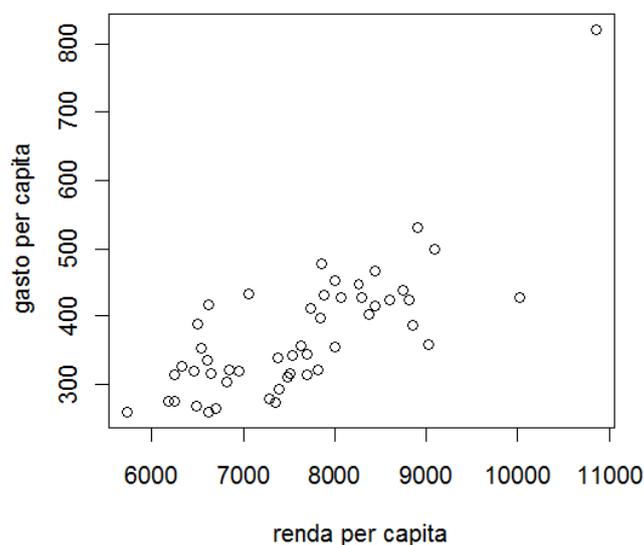


Figura 5.7 Gasto per capita em educação pública versus renda per capita.

Após a análise descritiva, nesta aplicação foram comparados três cenários distintos. Primeiramente, foi considerado o cenário em que não foi aplicada transformação nos dados. O segundo cenário é referente à aplicação da transformação de Box-Cox tanto na variável resposta quanto no regressor e o terceiro cenário é referente à aplicação da transformação de Manly, também em ambas as variáveis. O modelo proposto foi *gasto em escolas públicas* = $\beta_1 + \beta_2 \text{renda} + \text{erro}$. Foram aplicados os testes score para a avaliação do valor do parâmetro que indexa cada uma das transformações. Na transformação de Box-Cox testamos $H_0 : \lambda = -1$ versus $H_1 : \lambda \neq -1$. As estatísticas score, T_s e T_s^0 , foram, respectivamente, 0.2166 e 0.0285. Ou seja, não se rejeita a hipótese nula aos níveis usuais de significância. Para a avaliação do valor do parâmetro da transformação de Manly, testamos $H_0 : \lambda = 5$ versus $H_1 : \lambda \neq 5$. As estatísticas de teste, T_s e T_s^0 , foram, respectivamente, 0.0211 e 0.0315. Ou seja, não se rejeita a hipótese nula. A Tabela 5.5 contém as estimativas de β_1 e β_2 . Em todos os três modelos o teste t de $H_0 : \beta_2 = 0$ versus $H_1 : \beta_2 \neq 0$ foi significativo (p -valor < 0.05).

5.2 APLICAÇÃO 2

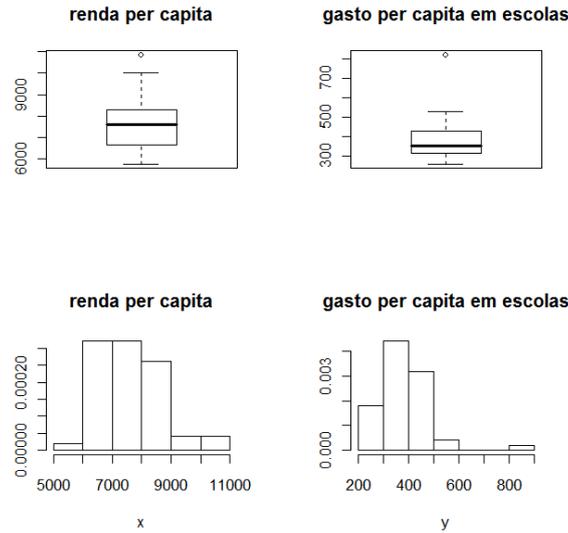


Figura 5.8 Box-plots e histogramas das variáveis renda e gasto com educação.

Observamos que o modelo com a transformação de Manly apresentou melhora no valor do R^2 em relação ao modelo sem transformação, enquanto o modelo com a transformação de Box-Cox não apresentou tal melhora.

Tabela 5.5 Modelos lineares da aplicação 2.

Cenário	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	p -valor (teste F)	R^2
Sem transformação	-151.2651	0.0689	9.05×10^{-11}	0.5868
Transformação de Box-Cox	-23.6360	24.6360	3.80×10^{-10}	0.5617
Transformação de Manly	0.0269	0.0014	9.48×10^{-14}	0.6886

Por fim, foi procedida a análise residual para comparar os desempenhos dos três modelos. Para verificar a homoscedasticidade dos erros foi utilizado o teste de Koenker em que a hipótese nula é a de homoscedasticidade. Já para testar a normalidade dos resíduos foi utilizado o teste de Bera-Jarque. Observamos na Tabela 5.6 que a transformação de Box-Cox foi capaz de diminuir os desvios de normalidade e homoscedasticidade enquanto a transformação de Manly foi

5.2 APLICAÇÃO 2

capaz apenas de diminuir desvios de homoscedasticidade, segundo os testes aplicados. Porém, observando os gráficos QQ -plot com envelopes, dos três cenários (Figura 5.9), percebe-se que no modelo sem transformação não há grandes desvios de normalidade. O resultado do teste de Bera-Jarque pode estar sendo afetado pelos valores do ponto destoante referente ao estado do Alaska.

Tabela 5.6 Testes de homoscedasticidade e normalidade dos erros para os modelos da aplicação 2.

Cenário	p -valor teste de Koenker	p -valor teste de Bera-Jarque
Sem transformação	0.0006	0.0001
Transformação de Box-Cox	0.4236	0.6766
Transformação de Manly	0.0006	0.4563

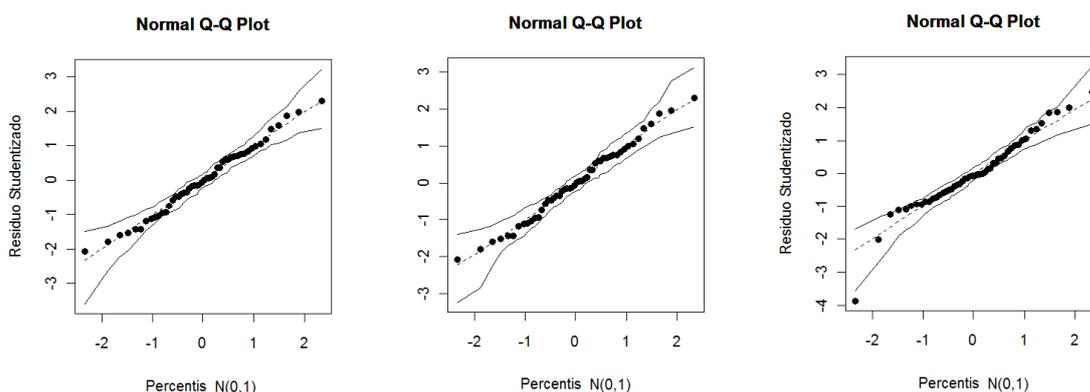


Figura 5.9 Gráficos QQ -plot com envelope dos modelos da aplicação 2: sem transformação (painel esquerdo), Box-Cox (centro) e Manly (painel direito).

Nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 podemos observar a melhora no desvio de homoscedasticidade nos modelos com transformação de Box-Cox e Manly em relação ao modelo sem transformação. Todavia no modelo com a transformação de Manly observa-se ainda a presença de dois valores destoantes dos demais, referentes aos estados do Alaska e Washington.

5.2 APLICAÇÃO 2

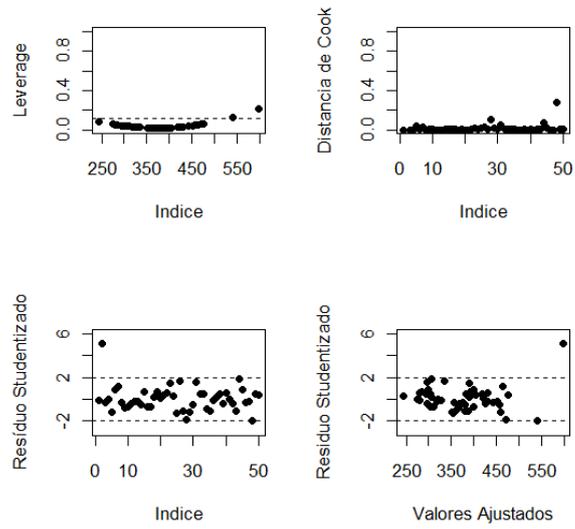


Figura 5.10 Comportamento dos resíduos do modelo sem transformação na aplicação 2.

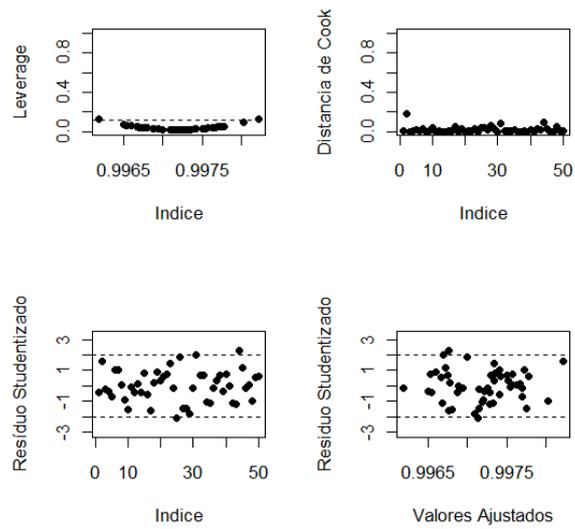


Figura 5.11 Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Box-Cox na aplicação 2.

5.2 APLICAÇÃO 2

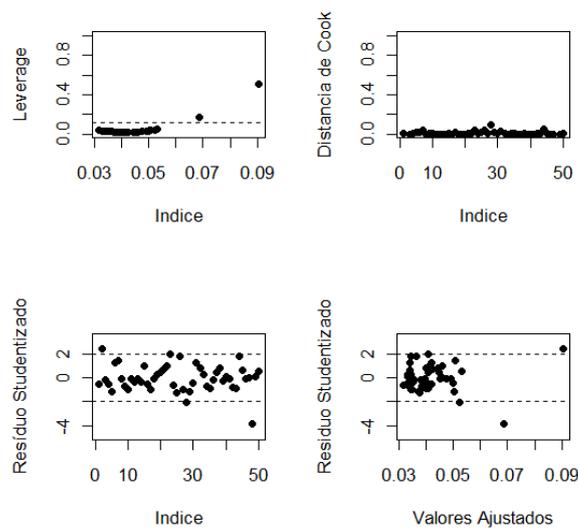


Figura 5.12 Comportamento dos resíduos do modelo com transformação de Manly na aplicação 2.

Observa-se ainda que tanto no modelo com transformação de Box-Cox como no modelo com transformação de Manly os valores dos resíduos studentizados da observação do estado do Alaska, classificada como outlier, diminuíram. Consequentemente, tal observação não mais foi classificada como outlier em tais modelos. Em relação à distância de Cook observamos que o modelo com a transformação de Manly não apresentou nenhum valor destoante dos demais, o que não ocorreu no modelo sem transformação ou no modelo com transformação de Box-Cox.

Conclusões

Nesta dissertação consideramos transformações nas variáveis resposta e regressor do modelo linear de regressão. Yang & Abeysinghe (2003) desenvolveram testes escore para testar o valor do parâmetro que indexa a transformação de Box-Cox. Tal transformação, todavia, possui uma pronunciada limitação: requer que as variáveis assumam valores positivos. Para superar tal limitação, nós consideramos a transformação de Manly, que permite que as variáveis transformadas assumam valores negativos. Propusemos dois testes escore para testar o parâmetro que indexa tal transformação. A diferença entre os dois testes é que um utiliza a informação observada ao passo que o outro utiliza a informação esperada.

Nós realizamos várias simulações de Monte Carlo com o objetivo de avaliar os desempenhos em amostras de tamanho finito dos testes escores para avaliar os parâmetros das transformações de Box-Cox e Manly. Foram consideradas também versões bootstrap de tais testes. Notamos que o teste T_s apresenta melhor desempenho em relação ao teste T_s^0 , tanto em tamanho como em poder. Nas simulações de tamanho as versões bootstrap dos testes tiveram melhor desempenho que os testes assintóticos. Os testes assintóticos são, em geral, mais poderosos que suas versões bootstrap. Observamos ainda que quando o tamanho da amostra aumenta os desempenhos dos testes tornam-se semelhantes.

Por fim, realizamos duas aplicações dos testes propostos a dados reais (não simulados). Notamos que o uso das transformações consideradas reduz desvios das suposições relevantes do modelo linear de regressão. Em geral, concluímos que a transformação de Manly é uma boa alternativa quando há valores negativos nos regressores e/ou na variável resposta.

Referências Bibliográficas

- Bickel, J. & Doksum, K. A. (1981), 'An analysis of transformation revised', *Journal of the American Statistical Association* **76**, 296–311.
- Box, G. E. P. & Cox, D. R. (1964), 'An analysis of transformations', *Journal of the Royal Statistical Society* **26**, 211–252.
- Box, G. E. P. & Tidwell, P. W. (1962), 'Transformation of the independent variables', *Technometrics* **4**, 531–550.
- Buse, A. (1982), 'The likelihood ratio, wald, and lagrange multiplier tests: an expository note', *The American Statistician* **36**, 153–157.
- Cordeiro, G. M. (1999), *Introdução à Teoria Assintótica*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
- Davidson, R. & MacKinnon, J. G. (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Cambridge University.
- Doornik, J. A. & Ooms, M. (2006), *Introduction to Ox*, London: Timberlake Consultants Press.
- Draper, N. R. & Cox, D. R. (1969), 'On distributions and their transformations to normality', *Journal of Royal Statistical Society* **31**, 472–476.
- Efron, B. (1979), 'Bootstrap methods: another look at the jackknife', *The Annals of Statistics* **7**, 1–26.
- Ezekiel, M. (1930), *Methods of Correlation Analysis*, Wiley.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Fonseca, P. G. S. (2005), *Tipografando Teses e Dissertações em LATEX na UFPE com a UFPEThesis versão 0.9*, PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco.
- Greene, W. H. (1997), *Econometric Analysis*, 3^a edn, Prentice-Hall.
- Koenker, R. (1981), 'A note on studentizing a test for heteroscedasticity', *Journal of Econometrics* **17**, 107–112.
- Lamport, L. (1986), *TEX: A Document Preparation System*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Manly, B. (1976), 'Exponential data transformations', *Journal of Royal Statistical Society* **25**, 37–42.
- McCullagh, P. & Nelder, J. A. (1989), *Generalized Linear Models*, 2 edn, Chapman & Hall.
- McCulloch, C. E. & Searle, S. R. (1987), *Generalized, Linear and Mixed Models*, Wiley.
- Montgomery, D. C., Peck, E. & Vining, G. (2006), *Introduction to Regression Analysis*, Wiley.
- Paula, G. A. (2004), *Modelos de Regressão com Apoio Computacional*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- R Development Core Team (2011), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Viena, Áustria. ISBN 3-900051-07-0.
- Rao, C. R. (1948), 'Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems estimation', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **44**, 50–57.
- Searle, S. R. (1982), *Matrix Algebra Useful for Statistics*, Wiley.
- Thadewald, T. & Büning, H. (2004), *Jarque-bera test and its competitors for testing normality - a power comparison*, Fachbereich Wirtschaftswiss.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Wald, A. (1943), 'Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large', *Transactions of the American Mathematical Society* **54**, 426–482.
- Yang, Z. & Abeysinghe, T. (2002), 'An explicit variance formula for the Box-Cox functional form estimator', *Economics Letters* **76**, 259–265.
- Yang, Z. & Abeysinghe, T. (2003), 'A score test for Box-Cox functional form', *Economics Letters* **79**, 107–115.

APÊNDICE A

Códigos em Ox

Neste anexo são apresentados os códigos em Ox utilizados para as avaliações numéricas do Capítulo 4.

A.1 Testes escore para transformação de Box-Cox

```
/******
Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Mestrado em Estatística
Dissertação
Orientada:
Ana Herminia Andrade e Silva
Orientador:
Francisco Cribari Neto
Descrição: Neste programa está implementada a estatística escore no caso
em que os dados foram transformados utilizando a transformação
de Box-Cox tanto da variável explicativa quanto na resposta.
Além disso foi implementado o teste de hipóteses bootstrap
paramétrico.
Programa 1 - Versão 1.7
Data: 19/09/2012
*****/

/* Arquivos cabeçalho */
#include <oxstd.h> /* Biblioteca padrão do OX */
#include <oxprob.h> /* Necessário para gerar ocorrências beta */

main()
{

/*parâmetros da simulação*/
decl lambda= 2; /*parâmetro lambda sob H0*/
decl lambda_1 = 1/lambda;
decl lambda2 = lambda^2;
decl lambda_2 = 1/lambda2;
decl lambda3 = lambda^3;
decl beta=<8.0;1.25>; /*parâmetros beta*/
decl nobs=<20;40;60;80;100>;
decl nrep=10000; /*Número de réplicas de Monte Carlo*/
decl nboot=500; /*Número de réplicas bootstrap*/
decl i,j,n,exectime;
decl x,X,residuo,x_bc,X_bc,y_bc,y,m,y_bc_d,X_bc_d,x_bc_d,y_bc_d2,X_bc_d2,x_bc_d2,beta_bc,sigma2,sigma;
decl sp,mu,fi,teta,delta,w2,e,e1,e2,a,b,k2;
```

A.1 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE BOX-COX

```

decl ts0_bc = zeros(1,nrep);
decl ts_bc = zeros(1,nrep);
decl rej_ts_1 = 0, rej_ts_5 = 0, rej_ts_10 = 0;
decl rej_ts0_1 = 0, rej_ts0_5 = 0, rej_ts0_10 = 0;
decl dados = zeros(nrep,10);
decl c = 0;

/*parâmetros teste de hipóteses bootstrap*/
decl y_bc_boot, y_boot, y_bc_boot_d, y_bc_boot_d2, beta_bc_boot, sp_boot, w2_boot, k2_boot;
decl ts_bc_boot = zeros(1,nboot);
decl ts0_bc_boot = zeros(1,nboot);
decl rej_ts_1_boot = 0, rej_ts_5_boot = 0, rej_ts_10_boot = 0;
decl rej_ts0_1_boot = 0, rej_ts0_5_boot = 0, rej_ts0_10_boot = 0;

ranseed("MWC_52"); /*gerador*/
ranseed(878678); /*semente*/

exectime = timer(); /*começo da contagem do tempo*/

/*tamanho da amostra*/
for(n=0;n<5;n++){

rej_ts_1_boot = rej_ts_5_boot = rej_ts_10_boot = 0;
rej_ts0_1_boot = rej_ts0_5_boot = rej_ts0_10_boot = 0;

x = (ranu(nobs[n],1))*5 + 1; /*variável explicativa original com distribuição uniforme(1,6]*/

/*laço de monte carlo*/
for(i=0; i<nrep; i++){

X = (1~x); /*matriz X*/
residuo = rann(nobs[n],1); /*residuo do modelo com distribuição normal[0,1]*/

/*laço para lambda diferente de zero*/
if(lambda != 0){
x_bc = ((x.^lambda)-1)/lambda; /*variável explicativa transformada (box-cox)*/
X_bc = (1~x_bc); /*matriz X transformada*/
y_bc = beta[0] + beta[1]*x_bc + residuo; /*variável resposta transformada (box-cox)*/
y = (y_bc*lambda + 1).^lambda_1; /*variável resposta original*/
m = unit(nobs[n]) - X_bc*((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc';
y_bc_d = lambda_1*(1+lambda*y_bc).*log(y) - lambda_1*y_bc; /*primeira derivada do y transformado*/
x_bc_d = lambda_1*(1+lambda*x_bc).*log(x) - lambda_1*x_bc; /*primeira derivada do x transformado*/
X_bc_d = (1~x_bc_d); /*primeira derivada da matriz X transformada*/
y_bc_d2 = y_bc_d.*(log(y) - lambda_1) - lambda_2.*(log(y)-y_bc); /*segunda derivada do y transformado*/
x_bc_d2 = x_bc_d.*(log(x) - lambda_1) - lambda_2.*(log(x)-x_bc); /*segunda derivada do x transformado*/
X_bc_d2 = (1~x_bc_d2); /*segunda derivada da matriz X transformada*/
beta_bc = ((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc'*y_bc; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
sigma2 = sumsqrc(m*y_bc)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança para a variância*/;
sigma = sigma2^0.5;
sp = -1*(nobs[n]*y_bc'*m*(y_bc_d - X_bc_d*beta_bc)/(sumsqrc(m*y_bc))) + sumc(log(y)); /*função escore perfilada*/
mu = X_bc*beta_bc;
fi = log(1+lambda*mu);
teta = (lambda*sigma)./(1 + lambda*mu);
delta = lambda_2*(1+lambda*mu).*fi + (sigma/(2*lambda))*teta - X_bc_d*beta_bc;
w2 = (1/sigma2)*(sumsqrc(m*delta) + lambda_2*(2*sumsqrc(fi-meanc(fi))
-4*(fi-meanc(fi))'(teta.^2-meanc(teta.^2)) + 1.5*sumsqrc(teta))); /*variância assintótica "observada"*/
e = y_bc - X_bc*beta_bc;
e1 = y_bc_d - X_bc_d*beta_bc; /*primeira derivada de e*/
e2 = y_bc_d2 - X_bc_d2*beta_bc; /*segunda derivada de e*/
a = X_bc_d*((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
b = X_bc*((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
k2 = (1/sigma2)*(e'e2 + e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e1).^2/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2)));
/*variância assintótica "esperada"*/
ts_bc[i] = sp^2/w2; /*primeira estatística escore*/
ts0_bc[i] = sp^2/k2; /*segunda estatística escore*/
}
}

```

A.1 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE BOX-COX

```

/*laço do teste de hipóteses bootstrap*/
for(j=0;j<nboot;j++){
  residuo = rann(nobs[n],1); /*residuo do modelo com distribuição normal[0,1]*/
  y_bc_boot = beta_bc[0] + beta_bc[1]*x_bc + residuo; /*variável resposta bootstrap transformada*/
  y_boot = (y_bc_boot*lambda + 1).^lambda_1; /*variável resposta bootstrap original*/
  y_bc_boot_d = lambda_1*(1+lambda*y_bc_boot).*log(y_boot) - lambda_1*y_bc_boot;
  /*primeira derivada do y transformado*/
  y_bc_boot_d2 = y_bc_boot_d.*(log(y_boot) - lambda_1) - lambda_2.*(log(y_boot)-y_bc_boot);
  /*segunda derivada do y transformado*/
  beta_bc_boot = ((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc'*y_bc_boot; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
  sigma2 = sumsqrc(m*y_bc_boot)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança para a variância*/
  sigma = sigma2^0.5;
  sp_boot = -1*(nobs[n]*y_bc_boot'*m*(y_bc_boot_d - X_bc_d*beta_bc_boot)/(sumsqrc(m*y_bc_boot))) + sumc(log(y_boot));
  /*função escore perfilada*/
  mu = X_bc*beta_bc_boot;
  fi = log(1+lambda*mu);
  teta = (lambda*sigma)/(1 + lambda*mu);
  delta = lambda_2*(1+lambda*mu).*fi + (sigma/(2*lambda))*teta - X_bc_d*beta_bc_boot;
  w2_boot = (1/sigma2)*(sumsqrc(m*delta) + lambda_2*(2*sumsqrc(fi-meanc(fi))
  -4*(fi-meanc(fi))'(teta.^2-meanc(teta.^2)) + 1.5*sumsqrc(teta)));
  /*variância assintótica "observada"*/
  e = y_bc_boot - X_bc*beta_bc_boot;
  e1 = y_bc_boot_d - X_bc_d*beta_bc_boot; /*primeira derivada de e*/
  e2 = y_bc_boot_d2 - X_bc_d2*beta_bc_boot; /*segunda derivada de e*/
  a = X_bc_d*(X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
  b = X_bc*(X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
  k2_boot = (1/sigma2)*(e'e2 + e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e).^2)/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2));
  /*variância assintótica "esperada"*/

  ts_bc_boot[j] = sp_boot^2/w2_boot; /*primeira estatística escore*/
  ts0_bc_boot[j] = sp_boot^2/k2_boot; /*segunda estatística escore*/

} /*fim do laço do teste de hipóteses bootstrap*/

/*cálculo das taxas de rejeição*/
if(ts_bc[i] > quantiler(ts_bc_boot,0.99)){
  rej_ts_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
if(ts_bc[i] > quantiler(ts_bc_boot,0.95)){
  rej_ts_5_boot = (rej_ts_5_boot + 1);
}
if(ts_bc[i] > quantiler(ts_bc_boot,0.90)){
  rej_ts_10_boot = (rej_ts_10_boot + 1);
}
if(ts0_bc[i] > quantiler(ts0_bc_boot,0.99)){
  rej_ts0_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
if(ts0_bc[i] > quantiler(ts0_bc_boot,0.95)){
  rej_ts0_5_boot = (rej_ts0_5_boot + 1);
}
if(ts0_bc[i] > quantiler(ts0_bc_boot,0.90)){
  rej_ts0_10_boot = (rej_ts0_10_boot + 1);
}

} /*fim do laço para lambda diferente de zero*/

/*laço para lambda igual a zero*/
else{
  x_bc = log(x); /*variável explicativa transformada (box-cox)*/
  X_bc = (1~x_bc); /*matriz X_bc*/
  y_bc = beta[0] + beta[1]*x_bc + residuo; /*variável resposta transformada (box-cox)*/
  y = exp(y_bc); /*variável resposta original*/
  m = unit(nobs[n]) - X_bc*(X_bc'X_bc)^-1)*X_bc';
  y_bc_d = 0.5*(log(y)).^2; /*primeira derivada do y transformado*/
  x_bc_d = 0.5*(log(x)).^2; /*primeira derivada do x transformado*/
  X_bc_d = (1~x_bc_d); /*primeira derivada da matriz x transformada*/

```

A.1 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE BOX-COX

```

y_bc_d2 = 1/3*(log(y)).^3; /*segunda derivada do y transformado*/
x_bc_d2 = 1/3*(log(x)).^3; /*segunda derivada do x transformado*/
X_bc_d2 = (1-x_bc_d2); /*segunda derivada da matriz x transformada*/
beta_bc = ((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc'*y_bc; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
sigma2 = sumsqrc(m*y_bc)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança para a variância*/
sigma = sigma2^0.5;
sp = -1*(nobs[n]*y_bc'*m*(y_bc_d - X_bc_d*beta_bc)/(sumsqrc(m*y_bc))) + sumc(log(y));
/*função escore perfilada*/
mu = X_bc*beta_bc;
delta = 0.5*(mu.^2 + sigma2) - X_bc_d*beta_bc;
w2 = (1/sigma2)*sumsqrc(m*delta) + 2*sumsqrc(mu - meanc(mu)) + 1.5*nobs[n]*sigma2;
/*variância assintótica observada*/
e = y_bc - X_bc*beta_bc;
e1 = y_bc_d - X_bc_d*beta_bc; /*primeira derivada de e*/
e2 = y_bc_d2 - X_bc_d2*beta_bc; /*segunda derivada de e*/
a = X_bc_d*((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
b = X_bc*((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
k2 = (1/sigma2)*(e'e2 +e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e1).^2)/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2));
/*variância assintótica esperada*/

ts_bc[i] = sp^2/w2; /*primeira estatística escore*/
ts0_bc[i] = sp^2/k2; /*segunda estatística escore*/

/*laço do teste de hipóteses bootstrap*/
for(j=0;j<nboot;j++){
residuo = rann(nobs[n],1); /*residuo do modelo com distribuição normal[0,1]*/
y_bc_boot = beta_bc[0] + beta_bc[1]*x_bc + residuo; /*variável resposta bootstrap transformada*/
y_boot = exp(y_bc_boot); /*variável resposta bootstrap original*/
y_bc_boot_d = 0.5*(log(y_boot)).^2; /*primeira derivada do y transformado*/
y_bc_boot_d2 = 1/3*(log(y_boot)).^3; /*segunda derivada do y transformado*/
beta_bc_boot = ((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc'*y_bc_boot; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
sigma2 = sumsqrc(m*y_bc_boot)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança para a variância*/
sigma = sigma2^0.5;
sp_boot = -1*(nobs[n]*y_bc_boot'*m*(y_bc_boot_d - X_bc_d*beta_bc_boot)/(sumsqrc(m*y_bc_boot))) + sumc(log(y_boot));
/*função escore perfilada*/
mu = X_bc*beta_bc_boot;
delta = 0.5*(mu.^2 + sigma2) - X_bc_d*beta_bc_boot;
w2_boot = (1/sigma2)*sumsqrc(m*delta) + 2*sumsqrc(mu - meanc(mu)) + 1.5*nobs[n]*sigma2;
/*variância assintótica "observada"*/
e = y_bc_boot - X_bc*beta_bc_boot;
e1 = y_bc_boot_d - X_bc_d*beta_bc_boot; /*primeira derivada de e*/
e2 = y_bc_boot_d2 - X_bc_d2*beta_bc_boot; /*segunda derivada de e*/
a = X_bc_d*((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
b = X_bc*((X_bc'X_bc)^-1)*X_bc_d';
k2_boot = (1/sigma2)*(e'e2 +e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e1).^2)/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2));
/*variância assintótica "esperada"*/

ts_bc_boot[j] = sp_boot^2/w2_boot; /*primeira estatística escore*/
ts0_bc_boot[j] = sp_boot^2/k2_boot; /*segunda estatística escore*/

} /*laço do teste de hipóteses bootstrap*/

/*cálculo das taxas de rejeição*/
if(ts_bc[i] > quantiler(ts_bc_boot,0.99)){
rej_ts_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
if(ts_bc[i] > quantiler(ts_bc_boot,0.95)){
rej_ts_5_boot = (rej_ts_5_boot + 1);
}
if(ts_bc[i] > quantiler(ts_bc_boot,0.90)){
rej_ts_10_boot = (rej_ts_10_boot + 1);
}
if(ts0_bc[i] > quantiler(ts0_bc_boot,0.99)){
rej_ts0_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
}

```

A.1 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE BOX-COX

```

if(ts0_bc[i] > quantiler(ts0_bc_boot,0.95)){
rej_ts0_5_boot = (rej_ts0_5_boot + 1);
}
if(ts0_bc[i] > quantiler(ts0_bc_boot,0.90)){
rej_ts0_10_boot = (rej_ts0_10_boot + 1);
}
} /*laço para lambda igual a zero*/

} /*fim do laço de monte carlo*/

/*salvando os valores das estatísticas*/

for(i=0;i<nrep;i++){
dados[i][0+c] = ts_bc[i];
dados[i][1+c] = ts0_bc[i];
}
c = c+2;

/*cálculo das taxas de rejeição*/
rej_ts_1 = sumr(ts_bc .> quanchi(0.99,1))/nrep;
rej_ts_5 = sumr(ts_bc .> quanchi(0.95,1))/nrep;
rej_ts_10 = sumr(ts_bc .> quanchi(0.90,1))/nrep;
rej_ts0_1 = sumr(ts0_bc .> quanchi(0.99,1))/nrep;
rej_ts0_5 = sumr(ts0_bc .> quanchi(0.95,1))/nrep;
rej_ts0_10 = sumr(ts0_bc .> quanchi(0.90,1))/nrep;

/*Impressão de resultados*/
println("Programa OX: ", oxfilename(0));
println("Versao OX: ", oxversion());
println("Estatística escore com transformação de Box-Cox");
println("H0: lambda = ", lambda);
println("Tamanho da amostra: ",nobs[n]);
println("Numero de réplicas de Monte Carlo:",nrep);
println("Numero de replicas bootstrap:",nboot);
println("valores verdadeiros de beta_0 e beta_1:",beta);
println("estimadores de maxima verossimilhanca de beta_0 e beta_1:",beta_bc);
println("\n");
println("-----");
println("*****estatística ts:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts_1);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts_5);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts_10);
println("tamanho da amostra e os 4 primeiros momentos:",moments(ts_bc'));
println("quantis de 90%, 95% e 99%:",quantiler(ts_bc,0.90),quantiler(ts_bc,0.95),quantiler(ts_bc,0.99));
println("\n");
println("*****estatística ts0:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts0_1);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts0_5);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts0_10);
println("tamanho da amostra e os 4 primeiros momentos:",moments(ts0_bc'));
println("quantis de 90%, 95% e 99%:",quantiler(ts0_bc,0.90),quantiler(ts0_bc,0.95),quantiler(ts0_bc,0.99));
println("\n");
println("-----");
println("Teste de hipoteses bootstrap");
println("\n");
println("*****estatística ts:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts_1_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts_5_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts_10_boot/nrep);
println("\n");
println("*****estatística ts0:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts0_1_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts0_5_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts0_10_boot/nrep);
println("\n");

```

A.2 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE MANLY

```
}/*fim do laço do tamanho da amostra*/  
println("Tempo de execucao: ", timespan(exectime));  
}
```

A.2 Testes score para transformação de Manly

```
/******  
Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Mestrado em Estatística  
Dissertação  
Orientada:  
Ana Hermínia Andrade e Silva  
Orientador:  
Francisco Cribari Neto  
Descrição: Neste programa está implementada a estatística score no caso  
em que os dados foram transformados utilizando a transformação  
de Manly tanto da variável explicativa quanto na resposta.  
Além disso foi implementado o teste de hipóteses bootstrap  
paramétrico.  
Programa 2 - Versão 1.9  
Data: 10/10/2012  
*****/  
  
/* Arquivos cabeçalho */  
#include <oxstd.h> /* Biblioteca padrão do OX */  
#include <oxprob.h> /* Necessário para gerar ocorrências beta */  
  
main()  
{  
  
/*parâmetros da simulação*/  
decl lambda= 0; /*parâmetro lambda sob H0*/  
decl lambda_1 = 1/lambda;  
decl lambda2 = lambda^2;  
decl lambda_2 = 1/lambda2;  
decl lambda3 = lambda^3;  
decl beta=<8.0;1.25> /*parâmetros beta*/  
decl nobs=<20;40;60;80;100>;  
decl nrep=10000; /*Número de réplicas de Monte Carlo*/  
decl nboot = 500; /*Número de réplicas bootstrap*/  
decl i, j, n, exectime;  
decl x, X, residuo, x_m, X_m, y_m, y, m, y_m_d, X_m_d, x_m_d2, y_m_d2, X_m_d2, beta_m, sigma2, sigma;  
decl sp, mu, fi, teta, delta, w2, e, e1, e2, a, b, k2;  
decl ts0_m = zeros(1, nrep);  
decl ts_m = zeros(1, nrep);  
decl rej_ts_1 = 0, rej_ts_5 = 0, rej_ts_10 = 0;  
decl rej_ts0_1 = 0, rej_ts0_5 = 0, rej_ts0_10 = 0;  
decl dados = zeros(nrep, 10);  
decl c = 0;  
  
/*parâmetros teste de hipóteses bootstrap*/  
decl y_m_boot, y_boot, y_m_boot_d, y_m_boot_d2, beta_m_boot, sp_boot, w2_boot, k2_boot;  
decl ts_m_boot = zeros(1, nboot);  
decl ts0_m_boot = zeros(1, nboot);  
decl rej_ts_1_boot = 0, rej_ts_5_boot = 0, rej_ts_10_boot = 0;  
decl rej_ts0_1_boot = 0, rej_ts0_5_boot = 0, rej_ts0_10_boot = 0;  
  
ranseed("MWC_52"); /*gerador*/  
ranseed(878678); /*semente*/
```

A.2 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE MANLY

```

exectime = timer(); /*começo da contagem do tempo*/

/*tamanho da amostra*/
for(n=0;n<5;n++){

rej_ts_1_boot = rej_ts_5_boot = rej_ts_10_boot = 0;
rej_ts0_1_boot = rej_ts0_5_boot = rej_ts0_10_boot = 0;

x = (ranu(nobs[n],1)*5 + 1); /*variável explicativa original com distribuição uniforme(1,6)*/

/*laço de monte carlo*/
for(i=0; i<nrep; i++){

    X = (1~x); /*matriz X*/
    residuo = rann(nobs[n],1); /*residuo do modelo com distribuição normal[0,1]*/

/*laço para lambda diferente de zero*/
if(lambda != 0){
    x_m = (exp(x*lambda) - 1)/lambda; /*variável explicativa transformada (manly)*/
    X_m = (1~x_m); /*matriz X transformada*/
    y_m = beta[0] + beta[1]*x_m + residuo; /*variável resposta transformada (manly)*/
    y = log(lambda*y_m+1)/lambda; /*variável resposta original*/
    m = unit(nobs[n]) - X_m*(X_m'X_m)^-1*X_m';
    y_m_d = (exp(lambda*y_m).*(lambda*y_m-1)+1)/lambda^2; /*primeira derivada do y transformado*/
    x_m_d = (exp(lambda*x_m).*(lambda*x_m-1)+1)/lambda^2; /*primeira derivada do x transformado*/
    X_m_d = (1~x_m_d); /*primeira derivada da matriz X transformada*/
    y_m_d2 = (exp(lambda*y_m).*(lambda^2*y_m.^2-2*lambda*y_m + 2) - 2)/lambda^3; /*segunda derivada do y transformado*/
    x_m_d2 = (exp(lambda*x_m).*(lambda^2*x_m.^2-2*lambda*x_m + 2) - 2)/lambda^3; /*segunda derivada do x transformado*/
    X_m_d2 = (1~x_m_d2); /*primeira derivada da matriz X transformada*/
    beta_m = ((X_m'X_m)^-1)*X_m'*y_m; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
    sigma2 = sumsqrc(m*y_m)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança para a variância*/
    sigma = sigma2^0.5;
    sp = -1*(nobs[n]*y_m'*m*(y_m_d - X_m_d*beta_m)/(sumsqrc(m*y_m))) + sumc(y); /*função escore perfilada*/
    mu = X_m*beta_m;
    fi = log(1+lambda*mu);
    teta = (lambda*sigma)/(1 + lambda*mu);
    delta = lambda_2*(1+lambda*mu).*fi + (sigma/(2*lambda))*teta - X_m_d*beta_m;
    w2 = (1/sigma2)*(sumsqrc(m*delta)) + lambda_2*(2*sumsqrc(fi-meanc(fi))
    -4*(fi-meanc(fi))'*(teta.^2-meanc(teta.^2)) + 1.5*sumsqrc(teta));
    /*variância assintótica "observada"*/
    e = y_m - X_m*beta_m;
    e1 = y_m_d - (X_m_d)*beta_m; /*primeira derivada de e*/
    e2 = y_m_d2 - (X_m_d2)*beta_m; /*segunda derivada de e*/
    a = X_m_d*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';
    b = X_m*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';
    k2 = (1/sigma2)*(e'e2 + e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e1)^2/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2)));
    /*variância assintótica "estimada"*/
    ts_m[i] = sp^2/w2; /*primeira estatística escore*/
    ts0_m[i] = sp^2/k2; /*segunda estatística escore*/

/*laço do teste de hipóteses bootstrap*/
for(j=0;j<nboot;j++){
    residuo = rann(1,nobs[n]); /*residuo do modelo com distribuição normal[0,1]*/
    y_m_boot = beta_m[0] + beta_m[1]*x_m + residuo; /*variável resposta bootstrap transformada*/
    y_boot = log(lambda*y_m_boot+1)/lambda; /*variável resposta bootstrap original*/
    y_m_boot_d = (exp(lambda*y_m_boot).*(lambda*y_m_boot-1)+1)/lambda^2; /*primeira derivada do y transformado*/
    y_m_boot_d2 = (exp(lambda*y_m_boot).*(lambda^2*y_m_boot.^2-2*lambda*y_m_boot + 2) - 2)/lambda^3;
    /*segunda derivada do y transformado*/
    beta_m_boot = ((X_m'X_m)^-1)*X_m'*y_m_boot; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
    sigma2 = sumsqrc(m*y_m_boot)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança para a variância*/
    sigma = sigma2^0.5;
    sp_boot = -1*(nobs[n]*y_m_boot'*m*(y_m_boot_d - X_m_d*beta_m_boot)/(sumsqrc(m*y_m_boot))) + sumc(y_boot);
    /*função escore perfilada*/
    mu = X_m*beta_m_boot;
    fi = log(1+lambda*mu);
    teta = (lambda*sigma)/(1 + lambda*mu);

```

A.2 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE MANLY

```

delta = lambda_2*(1+lambda*mu).*fi + (sigma/(2*lambda))*teta - X_m_d*beta_m_boot;
w2_boot = (1/sigma2)*(sumsqrc(m*delta)) + lambda_2*(2*sumsqrc(fi-meanc(fi))
-4*(fi-meanc(fi))'(teta.^2-meanc(teta.^2)) + 1.5*sumsqrc(teta));
/*variância assintótica "observada"*/
e = y_m_boot - X_m*beta_m_boot;
e1 = y_m_boot_d - X_m_d*beta_m_boot; /*primeira derivada de e*/
e2 = y_m_boot_d2 - X_m_d2*beta_m_boot; /*segunda derivada de e*/
a = X_m_d*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';
b = X_m*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';
k2_boot = (1/sigma2)*(e'e2 + e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e1).^2)/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2));
/*variância assintótica "esperada"*/

ts_m_boot[j] = sp_boot^2/w2_boot; /*primeira estatística escore*/
ts0_m_boot[j] = sp_boot^2/k2_boot; /*segunda estatística escore*/

} /*fim do laço do teste de hipóteses bootstrap*/

/*cálculo das taxas de rejeição*/
if(ts_m[i] > quantilec(ts_m_boot',0.99)){
rej_ts_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
if(ts_m[i] > quantilec(ts_m_boot',0.95)){
rej_ts_5_boot = (rej_ts_5_boot + 1);
}
if(ts_m[i] > quantilec(ts_m_boot',0.90)){
rej_ts_10_boot = (rej_ts_10_boot + 1);
}
if(ts0_m[i] > quantilec(ts0_m_boot',0.99)){
rej_ts0_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
if(ts0_m[i] > quantilec(ts0_m_boot',0.95)){
rej_ts0_5_boot = (rej_ts0_5_boot + 1);
}
if(ts0_m[i] > quantilec(ts0_m_boot',0.90)){
rej_ts0_10_boot = (rej_ts0_10_boot + 1);
}

} /*fim do laço para lambda diferente de zero*/

/*laço para lambda igual a zero*/
elseif
x_m = x; /*variável explicativa transformada (manly)*/
X_m = (1~x_m); /*matriz X*/
y_m = beta[0] + beta[1]*x_m + residuo; /*variável resposta transformada (manly)*/
y = y_m; /*variável resposta original*/
m = unit(nobs[n]) - X_m*((X_m'X_m)^-1)*X_m';
y_m_d = y.^2/2; /*primeira derivada do vetor y transformado*/
x_m_d = x.^2/2; /*primeira derivada do vetor x transformado*/
X_m_d = (1~x_m_d); /*primeira derivada da matriz X transformada*/
y_m_d2 = y.^3/3; /*segunda derivada do vetor y transformado*/
x_m_d2 = x.^3/3; /*segunda derivada do vetor x transformado*/
X_m_d2 = (1~x_m_d2); /*segunda derivada da matriz X transformada*/
beta_m = ((X_m'X_m)^-1)*X_m'*y_m; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
sigma2 = sumsqrc(m*y_m)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança a variância*/
sigma = sigma2^0.5;
sp = -1*(nobs[n]*y_m'*m*(y_m_d - X_m_d*beta_m)./(sumsqrc(m*y_m))) + sumc(y);
/*função escore perfilada*/
mu = X_m*beta_m;
delta = 0.5*(mu.^2 + sigma2) - X_m_d*beta_m;
w2 = (1/sigma2)*sumsqrc(m*delta) + 2*sumsqrc(mu - meanc(mu)) + 1.5*nobs[n]*sigma2;
/*variância assintótica "observada"*/
e = y_m - X_m*beta_m;
e1 = y_m_d - (X_m_d)*beta_m;
e2 = y_m_d2 - (X_m_d2)*beta_m;
a = X_m_d*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';
b = X_m*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';

```

A.2 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE MANLY

```

k2 = (1/sigma2)*(e'e2 +e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e1).^2)/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2));

ts_m[i] = sp^2/w2; /*primeira estatística escore*/
ts0_m[i] = sp^2/k2; /*segunda estatística escore*/

/*laço do teste de hipóteses bootstrap*/
for(j=0;j<nboot;j++){
    residuo = rann(1,nobs[n]); /*residuo do modelo com distribuição normal[0,1]*/
    y_m_boot = beta_m[0] + beta_m[1]*x_m + residuo; /*variável resposta bootstrap transformada*/
    y_boot = y_m_boot; /*variável resposta bootstrap original*/
    y_m_boot_d = y_boot.^2/2; /*primeira derivada do y transformado*/
    y_m_boot_d2 = y_boot.^3/3; /*segunda derivada do y transformado*/
    beta_m_boot = ((X_m'X_m)^-1)*X_m'*y_m_boot; /*estimador de máxima verossimilhança para beta*/
    sigma2 = sumsqrc(m*y_m_boot)/nobs[n]; /*estimador de máxima verossimilhança para a variância*/
    sigma = sigma2^0.5;
    sp_boot = -1*(nobs[n]*y_m_boot'*m*(y_m_boot_d - X_m_d*beta_m_boot)/(sumsqrc(m*y_m_boot))) + sumc(y_boot);
    /*função escore perfilada*/
    mu = X_m*beta_m_boot;
    delta = 0.5*(mu.^2 + sigma2) - X_m_d*beta_m_boot;
    w2_boot = (1/sigma2)*sumsqrc(m*delta) + 2*sumsqrc(mu - meanc(mu)) + 1.5*nobs[n]*sigma2;
    /*variância assintótica "observada"*/
    e = y_m_boot - X_m*beta_m_boot;
    e1 = y_m_boot_d - X_m_d*beta_m_boot; /*primeira derivada de e*/
    e2 = y_m_boot_d2 - X_m_d2*beta_m_boot; /*segunda derivada de e*/
    a = X_m_d*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';
    b = X_m*((X_m'X_m)^-1)*X_m_d';
    k2_boot = (1/sigma2)*(e'e2 +e1'm*e1 - e'a*e - 2*(e1'b*e) - (e'e1).^2)/(e'e-sigma2*(nobs[n]/2));
    /*variância assintótica "esperada"*/

ts_m_boot[j] = sp_boot^2/w2_boot; /*primeira estatística escore*/
ts0_m_boot[j] = sp_boot^2/k2_boot; /*segunda estatística escore*/

} /*fim laço do teste de hipóteses bootstrap*/

/*cálculo das taxas de rejeição*/
if(ts_m[i] > quantilec(ts_m_boot',0.99)){
    rej_ts_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
if(ts_m[i] > quantilec(ts_m_boot',0.95)){
    rej_ts_5_boot = (rej_ts_5_boot + 1);
}
if(ts_m[i] > quantilec(ts_m_boot',0.90)){
    rej_ts_10_boot = (rej_ts_10_boot + 1);
}
if(ts0_m[i] > quantilec(ts0_m_boot',0.99)){
    rej_ts0_1_boot = (rej_ts_1_boot + 1);
}
    if(ts0_m[i] > quantilec(ts0_m_boot',0.95)){
    rej_ts0_5_boot = (rej_ts0_5_boot + 1);
}
}
if(ts0_m[i] > quantilec(ts0_m_boot',0.90)){
    rej_ts0_10_boot = (rej_ts0_10_boot + 1);
}
}

}/*laço para lambda igual a zero*/

} /*fim do laço de monte carlo*/

/*salvando os valores das estatísticas*/
for(i=0;i<nrep;i++){
    dados[i][0+c] = ts_m[i];
    dados[i][1+c] = ts0_m[i];
}
c = c+2;

```

A.2 TESTES ESCORE PARA TRANSFORMAÇÃO DE MANLY

```

savemat("est_m.mat",dados);

/*cálculo das taxas de rejeição*/
rej_ts_1 = sumr(ts_m .> quanchi(0.99,1))/nrep;
rej_ts_5 = sumr(ts_m .> quanchi(0.95,1))/nrep;
rej_ts_10 = sumr(ts_m .> quanchi(0.90,1))/nrep;
rej_ts0_1 = sumr(ts0_m .> quanchi(0.99,1))/nrep;
rej_ts0_5 = sumr(ts0_m .> quanchi(0.95,1))/nrep;
rej_ts0_10 = sumr(ts0_m .> quanchi(0.90,1))/nrep;

/*Impressão de resultados */
println("Programa OX: ", oxfilename(0));
println("Versao OX: ", oxversion());
println("Estatística escore com transformação de Manly");
println("H0: lambda = ", lambda);
println("Tamanho da amostra: ",nobs[n]);
println("Numero de replicas de Monte Carlo:",nrep);
println("Numero de replicas bootstrap:",nboot);
println("valores verdadeiros de beta_0 e beta_1:",beta);
println("estimadores de maxima verossimilhanca de beta_0 e beta_1:",beta_m);
println("\n");
println("-----");
println("*****estatistica ts:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts_1);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts_5);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts_10);
println("tamanho da amostra e os 4 primeiros momentos:",moments(ts_m'));
println("quantis de 90%, 95% e 99%:",quantiler(ts_m,0.90),quantiler(ts_m,0.95),quantiler(ts_m,0.99));
println("\n");
println("*****estatistica ts0:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts0_1);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts0_5);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts0_10);
println("tamanho da amostra e os 4 primeiros momentos:",moments(ts0_m'));
println("quantis de 90%, 95% e 99%:",quantiler(ts0_m,0.90),quantiler(ts0_m,0.95),quantiler(ts0_m,0.99));
println("\n");
println("-----");
println("Teste de hipoteses bootstrap");
println("\n");
println("*****estatistica ts:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts_1_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts_5_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts_10_boot/nrep);
println("\n");
println("*****estatistica ts0:*****");
println("taxa de rejeicao a 1%:",rej_ts0_1_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 5%:",rej_ts0_5_boot/nrep);
println("taxa de rejeicao a 10%:",rej_ts0_10_boot/nrep);
println("\n");
}
println("Tempo de execucao: ", timespan(exectime));
}

```

APÊNDICE B

Códigos em R

Neste anexo são apresentados os códigos em R utilizados para as aplicações do Capítulo 5.

```
#####aplicações#####

#####banco de dados 1

##descrição: Os dados são de 1920, em relação a velocidade
##dos carros em milhas e a distância de frenagem em pés

#bibliotecas necessárias
library(MASS)
library(tseries)
library(lmtest)

#dados
attach(cars)
x = speed
y = dist

#análise descritiva dos dados

plot(x,y,xlab = "velocidade (milhas/hora)",ylab = "distância de frenagem (pés)")

par(mfrow=c(2,2))
boxplot(x,main = "velocidade (milhas/hora)")
boxplot(y,main = "distância de frenagem (pés)")
truehist(x,col = "white",main = "velocidade (milhas/hora)")
truehist(y,col = "white",main = "distância de frenagem (pés)")

summary(x)
sd(x)
summary(y)
sd(y)
jarque.bera.test(y)
jarque.bera.test(x)

#####ajuste do modelo sem transformações

ajuste1 = lm(y~x)
summary(ajuste1)
modelo = ajuste1

#####ajuste do modelo com transformação de box-cox com lambda = 0.5

lambda = 0.5
x = (x^lambda - 1)/lambda
y = (y^lambda - 1)/lambda

ajuste2 = lm(y~x)
summary(ajuste2)
modelo = ajuste2
```

APÊNDICE B CÓDIGOS EM R

```
jarque.bera.test(y)
jarque.bera.test(x)

#####ajuste do modelo com transformação de manly com lambda = 0.5

x = speed/10000
y = dist/10000

lambda = 0.5
x = (exp(x*lambda) - 1)/lambda
y = (exp(y*lambda) - 1)/lambda

ajuste3 = lm(y~x)
summary(ajuste3)
modelo = ajuste3

# Teste de heteroscedasticidade - teste de Koenker
#H0: homoscedasticidade
bptest(modelo)

#teste de normalidade
#H0: normalidade
jarque.bera.test(modelo$resid)

#####análise de diagnóstico#####

# Teste de especificidade do modelo
# H0: o modelo está corretamente especificado
resettest(modelo)

#gráfico de homoscedasticidade, outliers, pontos influentes e de alavanca

##### FUNÇÃO DIAG #####
fit.model = modelo
lms = summary(fit.model)
X = model.matrix(fit.model)
n = nrow(X)
p = ncol(X)
H = X%*%solve(t(X)%*%X)%*%t(X)
h = diag(H)
lms = summary(fit.model)
s = lms$sigma
r = resid(lms)
ts = r/(s*sqrt(1-h))
di = (1/p)*(h/(1-h))*(ts^2)
si = lm.influence(fit.model)$sigma
tsi = r/(si*sqrt(1-h))
a = max(tsi)
b = min(tsi)
par(mfrow=c(2,2))
#PONTOS DE ALAVANCA
plot(fitted(fit.model),h,xlab="Indice", ylab="Leverage", pch=16,
main="Pontos de Alavanca", ylim=c(0,1))
cut = 3*p/n
abline(cut,0,lty=2)
#identify(fitted(fit.model),h, n=2)
#PONTOS INFLUENTES
plot(di,xlab="Indice", ylab="Distancia de Cook", pch=16,
main="Pontos Influentes", ylim=c(0,1))
#identify(di, n=2)
#OUTLIERS
plot(tsi,xlab="Indice", ylab="Resíduo Studentizado",
ylim=c(b-1,a+1), pch=16, main="Outliers")
abline(2,0,lty=2)
```

APÊNDICE B CÓDIGOS EM R

```

abline(-2,0,lty=2)
#identify(tsi, n=3)
#par(mfrow=c(1,1))
#Homoscedasticidade
plot(fitted(fit.model),tsi,xlab="Valores Ajustados",
ylab="Residuo Studentizado", ylim=c(b-1,a+1), pch=16,
main="Homoscedasticidade")
abline(2,0,lty=2)
abline(-2,0,lty=2)
#identify(fitted(fit.model),tsi, n=3)

#qq-plot com envelope

##### ENVELOPE DA NORMAL #####
par(mfrow=c(1,1))
X = model.matrix(fit.model)
n = nrow(X)
p = ncol(X)
H = X%*%solve(t(X)%*%X)%*%t(X)
h = diag(H)
si = lm.influence(fit.model)$sigma
r = resid(fit.model)
tsi = r/(si*sqrt(1-h))
#
ident = diag(n)
epsilon = matrix(0,n,100)
e = matrix(0,n,100)
e1 = numeric(n)
e2 = numeric(n)
#
for(i in 1:100){
  epsilon[,i] = rnorm(n,0,1)
  e[,i] = (ident - H)%*%epsilon[,i]
  u = diag(ident - H)
  e[,i] = e[,i]/sqrt(u)
  e[,i] = sort(e[,i]) }
#
for(i in 1:n){
  eo = sort(e[i,])
  e1[i] = (eo[2]+eo[3])/2
  e2[i] = (eo[97]+eo[98])/2 }
#
med = apply(e,1,mean)
faixa = range(tsi,e1,e2)
#
par(pty="s")
qqnorm(tsi,xlab="Percentis da N(0,1)",
ylab="Residuo Studentizado", ylim=faixa, pch=16)
par(new=T)
qqnorm(e1,axes=F,xlab="",ylab="", type="l",ylim=faixa,lty=1)
par(new=T)
qqnorm(e2,axes=F,xlab="",ylab="", type="l",ylim=faixa,lty=1)
par(new=T)
qqnorm(med,axes=F,xlab="",ylab="", type="l",ylim=faixa,lty=2)

#####aplicações#####

#####banco de dados 2

##descrição: Os dados são de 1979, referentes à renda per capita
## e valor gasto em escolas públicas percapita nos Estados Unidos.

#dados
dados = read.table("dados.txt",header = TRUE)
attach(dados)
x = Income

```

APÊNDICE B CÓDIGOS EM R

```
y = Expenditure

#análise descritiva dos dados

plot(x,y,xlab = "renda per capita",ylab = "gasto per capita em escolas")

par(mfrow=c(2,2))
boxplot(x,main = "renda per capita")
boxplot(y,main = "gasto per capita em escolas")
truehist(x,col = "white",main = "renda per capita")
truehist(y,col = "white",main = "gasto per capita em escolas")
summary(x)
sd(x)
summary(y)
sd(y)
jarque.bera.test(y)
jarque.bera.test(x)

#####ajuste do modelo sem transformações

ajuste1 = lm(y~x)
summary(ajuste1)
modelo = ajuste1

#####ajuste do modelo com transformação de box-cox com lambda = -1

lambda = -1
x = (x^lambda - 1)/lambda
y = (y^lambda - 1)/lambda

ajuste2 = lm(y~x)
summary(ajuste2)
modelo = ajuste2

#####ajuste do modelo com transformação de manly com lambda = 0.5

x = Income
y = Expenditure

lambda = 5
x = x/10000
y = y/10000
x = (exp(x*lambda) - 1)/lambda
y = (exp(y*lambda) - 1)/lambda

ajuste3 = lm(y~x)
summary(ajuste3)
modelo = ajuste3

# Teste de heteroscedasticidade - teste de Koenker
#H0: homoscedasticidade
bptest(modelo)

#teste de normalidade
#H0: normalidade
jarque.bera.test(modelo$resid)

#####análise de diagnóstico#####

# Teste de especificidade do modelo
# H0: o modelo está corretamente especificado
resettest(modelo)

#gráfico de homoscedasticidade, outliers, pontos influentes e de alavanca
```

APÊNDICE B CÓDIGOS EM R

```
##### FUNÇÃO DIAG #####
fit.model = modelo
lms = summary(fit.model)
X = model.matrix(fit.model)
n = nrow(X)
p = ncol(X)
H = X%*%solve(t(X)%*%X)%*%t(X)
h = diag(H)
lms = summary(fit.model)
s = lms$sigma
r = resid(lms)
ts = r/(s*sqrt(1-h))
di = (1/p)*(h/(1-h))*(ts^2)
si = lm.influence(fit.model)$sigma
tsi = r/(si*sqrt(1-h))
a = max(tsi)
b = min(tsi)
par(mfrow=c(2,2))
#PONTOS DE ALAVANCA
plot(fitted(fit.model),h,xlab="Indice", ylab="Leverage", pch=16,
main="Pontos de Alavanca", ylim=c(0,1))
cut = 3*p/n
abline(cut,0,lty=2)
#identify(fitted(fit.model),h, n=2)
#PONTOS INFLUENTES
plot(di,xlab="Indice", ylab="Distancia de Cook", pch=16,
main="Pontos Influentes", ylim=c(0,1))
#identify(di, n=2)
#OUTLIERS
plot(tsi,xlab="Indice", ylab="Residuo Studentizado",
ylim=c(b-1,a+1), pch=16, main="Outliers")
abline(2,0,lty=2)
abline(-2,0,lty=2)
#identify(tsi, n=3)
#par(mfrow=c(1,1))
#Homoscedasticidade
plot(fitted(fit.model),tsi,xlab="Valores Ajustados",
ylab="Residuo Studentizado", ylim=c(b-1,a+1), pch=16,
main="Homoscedasticidade")
abline(2,0,lty=2)
abline(-2,0,lty=2)
#identify(fitted(fit.model),tsi, n=3)

#qq-plot com envelope

##### ENVELOPE DA NORMAL #####
par(mfrow=c(1,1))
X = model.matrix(fit.model)
n = nrow(X)
p = ncol(X)
H = X%*%solve(t(X)%*%X)%*%t(X)
h = diag(H)
si = lm.influence(fit.model)$sigma
r = resid(fit.model)
tsi = r/(si*sqrt(1-h))
#
ident = diag(n)
epsilon = matrix(0,n,100)
e = matrix(0,n,100)
e1 = numeric(n)
e2 = numeric(n)
#
for(i in 1:100){
  epsilon[,i] = rnorm(n,0,1)
  e[,i] = (ident - H)%*%epsilon[,i]
  u = diag(ident - H)
```

APÊNDICE B CÓDIGOS EM R

```
e[,i] = e[,i]/sqrt(u)
e[,i] = sort(e[,i]) }
#
for(i in 1:n){
  eo = sort(e[,i])
  e1[i] = (eo[2]+eo[3])/2
  e2[i] = (eo[97]+eo[98])/2 }
#
med = apply(e,1,mean)
faixa = range(tsi,e1,e2)
#
par(pty="s")
qqnorm(tsi,xlab="Percentis da N(0,1)",
ylab="Residuo Studentizado", ylim=faixa, pch=16)
par(new=T)
qqnorm(e1,axes=F,xlab="",ylab="",type="l",ylim=faixa,lty=1)
par(new=T)
qqnorm(e2,axes=F,xlab="",ylab="",type="l",ylim=faixa,lty=1)
par(new=T)
qqnorm(med,axes=F,xlab="",ylab="",type="l",ylim=faixa,lty=2)
```