



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Estatística

Pós-graduação em Estatística

**A classe Harris-G de distribuições de
probabilidade**

Luis Gustavo Bastos Pinho

Dissertação de Mestrado

Recife
fevereiro de 2013

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Estatística

Luis Gustavo Bastos Pinho

A classe Harris-G de distribuições de probabilidade

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística.

Orientador: *Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro*
Co-orientador: *Prof. Dr. Juvêncio Santos Nobre*

Recife
fevereiro de 2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da Silva, CRB4-1217

Pinho, Luis Gustavo Bastos

**A classe Harris-G de distribuições de probabilidade /
Luis Gustavo Bastos Pinho. - Recife: O Autor, 2013.
xii, 55 f.: il., fig., tab.**

Orientador: Gauss Moutinho Cordeiro.

**Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Estatística, 2013.**

Inclui bibliografia.

**1. Probabilidades. 2. Distribuição de probabilidades I.
Cordeiro, Gauss Moutinho (orientador). II. Título.**

519.2

CDD (23. ed.)

MEI2013 – 031

Dedico essa dissertação a todos que ajudaram direta ou indiretamente na produção da mesma.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos aos professores do programa de mestrado em Estatística da UFPE. O nível de dedicação dos professores foi muito alto durante todo o curso. Em especial agradeço ao professor Gauss Cordeiro, que, apesar de muito atarefado, foi extremamente atencioso, leu e revisou linha por linha os artigos que foram submetidos e essa dissertação. Após dez minutos de conversa com o professor Gauss, é comum querer passar as próximas trinta e seis horas trabalhando, tamanho é o seu entusiasmo. Agradeço ao professor Juvêncio que, mesmo vítima da minha teimosia e recorrente falha de memória, continua a depositar confiança em mim. Isso é certamente mais importante que qualquer outra coisa quando o assunto é motivação. Realmente, obrigado. Ao professor João Maurício agradeço pelo enorme entusiasmo com a matéria. Essa é uma marca registrada dos bons professores. Certamente, ele é um dos responsáveis pela opção de mestrado em Estatística. Agradeço também ao Jimmy e Valéria, que são peças fundamentais para manter todo o programa funcionando. Os professores da Atuária também foram lembrados durante o mestrado!

Aos meus companheiros durante o mestrado agradeço pela ajuda. Certamente passamos por alguns apertos! Obrigado também pela paciência de me ouvir falar de dieta, treino, suplementos, origami, etc, durante um ano inteiro. Obrigado por me ouvir reclamando da vida quando o código não compilava ou quando as contas não batiam. Menção honrosa para Deborah e Vitor, claro! Esses dois, quando não estavam brigando (brigavam cerca de 10% do tempo), produziram algumas pérolas que tornaram o mestrado bem mais agradável. Além disso fomos parceiros na maioria dos trabalhos de programação, na hora de resolver as listas, na hora de estudar pelo Barry James, eventualmente na hora de fazer as compras, e durante um período na academia. Graças a esses dois, episódios como o ocorrido em uma das aulas do professor Toom não se repetiram.

Aos meus familiares agradeço pelo apoio. Doutorado é um caminho sem volta. Deve estar sendo difícil para vocês. Conversem com os mais jovens da família sobre o meio acadêmico antes que seja tarde demais *hehehe*. Agradeço também a Nina, cuja contribuição principal para essa dissertação foi deitar no teclado a cada pausa que eu fazia.

Aos meus colegas de apartamento, Ramón, Hélio e Plínio. Obrigado pela paciência. Eu entendo que eu possa ser um pouco desorganizado, mas vocês lidaram muito bem com isso. Obrigado ao Ramón pelas consultas grátis. Aquela kinesio tape deu um jeito no meu punho esquerdo! Ao Hélio por ter me tirado inúmeras dúvidas e por ter me convidado pra dividir o apartamento. Certamente rimos um bocado! O Plínio chegou mais tarde mas sou igualmente agradecido.

Por último, mas nem de longe menos importante, agradeço a Mow por ter suportado o mestrado. Ficar separados por quase um ano completo é **extremamente** difícil em um caso

como o nosso. Fazemos tudo juntos (exceto essa dissertação) e estamos juntos na maior parte do tempo. Eu tenho que agradecer pelos apelidos novos, pelas piadas, pelos “tá bebendo água?” na academia, pela quantidade de horas resolvendo os problemas da faculdade/mestrado, pelos episódios de Friends no sofá, pelos cochilos depois do almoço, pelo número enorme de piadas internas, pela quantidade de apostas que eu perdi (cujos prêmios foram perdoados), por ter aturado todos os frangos ruins que eu preparei, pelas duas ligações de boa noite e por várias outras coisas que não cabem aqui. Se alguém já me viu rindo do nada durante alguma aula, pode ter certeza que eu estava lembrando de algo nosso.

'Cause it's not only music
It's a chosen way of life
Heavy Metal Universe - Gamma Ray

Resumo

Apresentamos resultados novos sobre a classe de distribuições obtidas pela composição de uma distribuição contínua qualquer com a distribuição de Harris, a qual está relacionada a um processo de ramificação. A nova classe, denominada Harris-G, contém todas as famílias obtidas pelo método proposto por Marshall e Olkin em 1997. Entre os resultados obtidos destacamos a decomposição da função densidade de probabilidade das novas famílias em combinação linear de densidades exponencializadas, expressões para momentos, funções geradoras, entropias e caracterização por máxima entropia. Duas novas famílias da classe Harris-G são apresentadas nesse trabalho com exemplos de aplicações práticas para motivar o uso das mesmas.

Palavras-chave: Composição de distribuições, distribuições Harris-G, distribuição Burr XII.

Abstract

We present new results on the class of distributions obtained by composing a generic continuous distribution with the Harris distribution, which is linked to a branching process. The new class, called Harris-G, contains all the families obtained by the method proposed by Mashall and Olkin in 1997. Among the obtained results we highlight the decomposition of the new families' probability density functions as a linear combination of exponentiated densities, expressions for moments, generating functions, entropies and maximum entropy characterization. Two new families of the Harris-G class are introduced in this text, with practical applications examples to motivate their use.

Keywords: Compounding distributions, Harris-G distributions, Burr XII distribution.

Sumário

1	Introdução	1
2	Classes de distribuições obtidas por composição	3
2.1	A Classe Exp-G de distribuições exponencializadas	3
2.1.1	Distribuição exponencial exponencializada (EE)	4
2.1.2	Distribuição Weibull exponencializada (EW)	4
2.1.3	Distribuição gama exponencializada	5
2.1.4	Distribuição Gumbel exponencializada	5
2.1.5	Distribuição Fréchet exponencializada	6
2.2	A classe Beta-G	6
2.2.1	Distribuição beta-exponencial	7
2.2.2	Distribuição beta-Weibull	8
2.2.3	Distribuição beta-Gumbel	8
2.2.4	Distribuição beta-Fréchet	9
2.3	A classe Gama-G	9
3	A Classe Harris-G	11
3.1	Expansões para as funções de densidade e distribuição	12
3.2	Momentos e função geradora	15
3.3	Desvios médios	16
3.4	Entropias	17
3.5	Estatísticas de ordem	20
4	A família Harris-exponencial	22
4.1	A nova distribuição	22
4.2	Momentos e função geradora	26
4.3	Estatísticas de ordem	27
4.4	Entropias	28
4.5	Estimação	29
5	A Família Harris-Burr XII	32
5.1	O novo modelo	32
5.2	Momentos e função geradora	35
5.3	Désvio médio	36
5.4	Estatísticas de ordem	36
5.5	Estimação	37

6	Aplicação	40
6.1	Géiser de Kiama	40
6.2	Géiser de Yellowstone	43
6.3	Modelagem de imagens SAR	48
7	Considerações finais	50

Lista de Figuras

4.1	Algumas formas da fdp de $X \sim \text{HEE}(k, \theta, \lambda)$.	23
4.2	A função de risco de $X \sim \text{HEE}(k, \theta, \lambda)$ pode ser crescente ou decrescente.	24
4.3	Comparação das variâncias de Y (com distribuição Marshall-Olkin exponencial) e de X (com distribuição HEE) em função dos parâmetros das respectivas densidades.	26
5.1	Algumas formas da fdp de $X \sim \text{HEB}(k, \theta, c, \alpha)$.	33
5.2	A taxa de falha de $X \sim \text{HEB}(k, \theta, c, \alpha)$ para valores selecionados dos parâmetros.	33
6.1	Aparente ausência de tendência ou correlação serial para o tempo entre erupções do géiser de Kiama.	41
6.2	Os três melhores ajustes aos dados do géiser de Kiama segundo o AIC.	42
6.3	Gráfico de quantis para o ajuste da distribuição Harris-exponencial ao tempo entre erupções do géiser de Kiama.	43
6.4	Presença de bimodalidade no tempo entre erupções do Old Faithful.	45
6.5	A distribuição proposta é comparável à modelagem tradicional para os dados do Old Faithful	47
6.6	As distribuições HEE, K e G^0 parecem adequadas aos dados de Foulum.	49

Lista de Tabelas

6.1	Tempo entre erupções consecutivas do géiser de Kiama.	40
6.2	Ajustes dos modelos considerados aos dados do géiser de Kiama.	43
6.3	Tempo entre erupções para o géiser Old Faithful	44
6.4	Parâmetros estimados para o tempo entre erupções do Old Faithful	46
6.5	Distribuições ajustadas ao conjunto de dados de Foulum	48

CAPÍTULO 1

Introdução

Distribuições de probabilidade são utilizadas para modelar dados e possibilitar diversas inferências sobre os mesmos. Nas décadas recentes diversas novas distribuições de probabilidade foram propostas, estudadas e aplicadas a conjuntos de dados reais. Parte dos esforços nesse ramo da Estatística é dedicado a estender as distribuições clássicas.

Tais extensões podem ser obtidas de diversas maneiras. Em Lehmann (1953), foi utilizado um método para adição de um parâmetro extra de forma na distribuição Pareto. Esse método de construção pode ser visto novamente em Mudholkar e Srivastava (1993), Mudholkar et al. (1995), Gupta e Kundu (1998, 1999, 2001, 2002), Nadarajah e Kotz (2004) e Nadarajah e Gupta (2007), entre outros. Eugene et al (2002) e Jones (2004) estudaram um método de extensão que inclui dois novos parâmetros a uma distribuição de probabilidade já existente. Os dois parâmetros introduzidos controlam a assimetria e excesso de curtose da distribuição resultante de maneira simples. Exemplos de aplicações do mesmo método são vistos em Nadarajah e Gupta (2004), Famoye et al. (2005), Nadarajah e Kotz (2006a) e Paranaíba et al. (2012). Marshall e Olkin propuseram um método que permite adicionar um parâmetro extra de forma a uma distribuição já existente. No mesmo artigo são obtidas as distribuições Marshall-Olkin-exponencial e Marshall-Olkin-Weibull. Em Ghitany et al. (2007) é apresentada a distribuição Marshall-Olkin-lomax e alguns novos resultados na classe Marshall-Olkin de distribuições. Em Aly e Benkherouf (2011) o mesmo método é utilizado para gerar uma nova classe de distribuições. A nova classe generaliza a classe de Marshall e Olkin.

O objetivo desse trabalho é apresentar novos resultados sobre a classe de distribuições proposta por Aly e Benkherouf (2011) e motivar o uso da mesma. Sugerimos que a nova classe seja denominada Harris-G, por ser a composição da distribuição discreta Harris com uma distribuição contínua genérica. Nos capítulos posteriores discutimos detalhes dessa classe de distribuições e apresentamos duas famílias de distribuições pertencentes à mesma: a distribuição Harris-exponencial e a distribuição Harris-Burr XII. A primeira é uma distribuição simples cujas características são controladas pelos parâmetros de maneira descomplicada. A segunda é uma alternativa para a modelagem de conjuntos de dados bimodais, e inclui uma vasta quantidade de outros modelos como casos particulares, como os modelos de Pareto, Weibull, log-logístico. Para cada nova distribuição sugerida buscamos apresentar propriedades como, por exemplo, expressões para os momentos ordinários, função geradora de momentos, estimação por máxima verossimilhança, desvios-médios e entropias de Shannon e Renyí. Expressões gerais para algumas dessas propriedades na classe Harris-G são fornecidas. Esperamos que as famílias da classe Harris-G sejam úteis em áreas como Engenharia, seguros, Medicina, entre outras.

O texto está dividido da seguinte maneira. No Capítulo 2, mostramos algumas técnicas

que nos permitem gerar novas distribuições a partir de outras já existentes. No Capítulo 3, apresentamos a classe Harris-G e algumas de suas propriedades principais. No Capítulo 4, apresentamos a família Harris-exponencial e suas propriedades. A distribuição Harris-Burr XII é apresentada no Capítulo 5. O Capítulo 6 apresenta três aplicações das famílias propostas. Na primeira aplicação comparamos o ajuste da Harris-exponencial a um conjunto de dados com o ajuste de outras cinco distribuições. A distribuição Harris-Burr XII é aplicada a um conjunto de dados reais tradicionalmente modelado por um modelo de mistura de distribuições normais. Também é apresentada uma aplicação da distribuição Harris-exponencial ao problema de modelagem estatística de imagens SAR. Considerações finais são descritas no Capítulo 7.

Classes de distribuições obtidas por composição

Nesse capítulo, discutiremos algumas técnicas que permitem gerar novas classes de distribuições a partir de distribuições já existentes. Apresentaremos brevemente as classes de distribuições exponencializadas, Gama-G e Beta-G. Adotaremos nesse texto a seguinte convenção: classes de distribuições são indicadas por letra inicial maiúscula, famílias de distribuições são indicadas com letra inicial minúsculas e usaremos letras maiúsculas para o nome da distribuição após $X \sim$. Por classe de distribuições nos referimos a coleções de funções. Uma família de funções é o conjunto das funções do tipo $f(x, \omega)$ obtidas a partir das possíveis valorações do vetor de parâmetros ω . Assim, por exemplo, será visto que a família beta-exponencial é parte da classe Beta-G e escrevemos $X \sim$ Beta-exponencial(a, b, λ). Um membro da família beta-exponencial é a distribuição beta-exponencial(1.5, 2.9, 1).

2.1 A Classe Exp-G de distribuições exponencializadas

Seja $G(x)$ uma função de distribuição acumulada. A distribuição G exponencializada, com parâmetro extra de forma $\alpha > 0$, é definida como $G_\alpha(x) = G(x)^\alpha$. A fdp correspondente é expressa por $g_\alpha(x) = \alpha g(x)G(x)^{\alpha-1}$. Nessa dissertação, usaremos a expressão $X \sim$ Exp-G(α, ϕ) para indicar que uma variável X tem distribuição G exponencializada, em que a fda G depende do vetor de parâmetros ϕ . As únicas exceções serão as famílias exponencial exponencializada e Weibull exponencializada, abreviadas por EE e EW, respectivamente. Alternativamente, podemos gerar distribuições na classe Exp-G fazendo $G_\alpha(x) = 1 - [1 - G(x)]^\alpha$. As duas expressões para $G_\alpha(x)$ correspondem respectivamente às distribuições Lehmann tipo I e Lehmann tipo II, introduzidas em Lehmann (1953).

Entre os trabalhos sobre algumas famílias de distribuições na classe de distribuições exponencializadas citamos: Mudholkar e Srivastava (1993) como o artigo que introduziu a distribuição Weibull exponencializada; Gupta et al. (1998) sobre a distribuição Pareto exponencializada; Gupta e Kundu (1999) sobre a distribuição exponencial exponencializada; Nadarajah e Kotz (2006b) por resultados e discussão sobre as distribuições exponencial, Weibull, Gumbel, gama e Fréchet exponencializadas e Nadarajah e Gupta (2007) por resultados sobre a distribuição gama exponencializada.

2.1.1 Distribuição exponencial exponencializada (EE)

Apresentada por Gupta et al. (1998), a distribuição exponencial exponencializada possui fda dada por

$$F(x) = [1 - \exp(-\lambda x)]^\alpha, \quad \alpha, \lambda, x > 0$$

e fdp correspondente

$$f(x) = \alpha \lambda \exp(-\lambda x) [1 - \exp(-\lambda x)]^{\alpha-1}.$$

Seja $X \sim EE(\alpha, \lambda)$. De Gupta e Kundu (2001), temos

$$\mathbb{E}(X^j) = \frac{\alpha \Gamma(j+1)}{\lambda^j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (\alpha-1)_{(i)}}{(1+i)^{1+j}},$$

em que $x_{(n)} = x(x-1) \cdots (x-n+1)$ representa o fatorial descendente de x ,

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^a \exp(-t) dt$$

representa a função gama e $\mathbb{E}(X)$ representa o valor esperado de X . Ainda no mesmo artigo apresenta-se a forma da função geradora de momentos de X , a saber

$$M(t) = \frac{\Gamma(1+\alpha) \Gamma(1 - \frac{t}{\lambda})}{\Gamma(1+\alpha - \frac{t}{\lambda})},$$

a partir da qual é deduzida a função geradora de cumulantes. Temos, então, que o valor esperado e variância de X pode ser expressas por

$$\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1} [\psi(1+\alpha) - \psi(1)] \text{ e } \text{Var}(X) = \lambda^{-2} [\psi'(1) - \psi'(1+\alpha)],$$

em que ψ representa a função dígamma (ver Abramowitz e Stegun, p. 258, 1972).

A distribuição EE é capaz de acomodar taxas de falha constantes, crescentes ou decrescentes. Detalhes sobre a estimação dos parâmetros podem ser revisados em Gupta e Kundu (1999, 2001, 2002). A função taxa de falha é definida, para variáveis aleatórias contínuas como $h(x) = f(x)[1 - F(x)]^{-1}$. No contexto de análise de sobrevivência, o formato dessa função indica em quais períodos da vida útil de dispositivo é maior a frequência de falhas. Mais informações sobre a função taxa de falha podem ser vistas em, por exemplo, Lawless (2003).

2.1.2 Distribuição Weibull exponencializada (EW)

A distribuição EW, introduzida por Mudholkar e Srivastava (1993), tem a seguinte fda

$$F(x) = \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right] \right\}^\alpha, \quad \alpha, k, \lambda, x > 0,$$

e fdp correspondente dada por

$$f(x) = \frac{k\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{\lambda} \right)^k \right] \right\}^{\alpha-1} \right].$$

Considere a v.a. $X \sim EW(\alpha, k, \lambda)$. A caracterização paramétrica da função taxa de falha de X pode ser vista em Mudholkar et al. (1995). A taxa de falha é unimodal se $k < 1$ e $k\alpha > 1$, decrescente se $k \leq 1$ e $k\alpha \leq 1$, crescente se $k \geq 1$ e $k\alpha \geq 1$ e em forma de banheira se $k > 1$ e $k\alpha < 1$. A distribuição exponencial exponencializada ocorre como caso particular quando $k = 1$.

Mudholkar et al. (1995) obtiveram uma expressão para os momentos ordinários da distribuição EW sob a condição $\alpha \in \mathbb{Z}_+^*$. Tal condição é bastante restritiva, porém Choudhury (2005) conseguiu obter uma expressão para $\mathbb{E}(X^j)$ sem nenhuma restrição. Segundo Choudhury (2005)

$$\mathbb{E}(X^j) = \alpha \lambda^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{k}\right) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (\alpha - 1)_{(i)} \left[(1+i)^{-(1+\frac{j}{k})} \right] \right\}.$$

2.1.3 Distribuição gama exponencializada

Apresentada em Nadarajah e Kotz (2006b), a distribuição gama exponencializada possui fda dada por

$$F(x) = \left[\frac{\gamma(a, x)}{\Gamma(a)} \right]^\alpha, \quad \alpha, a, x > 0$$

em que

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$$

representa a função gama incompleta. A densidade correspondente pode ser expressa como

$$f(x) = \frac{\alpha x^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)} \left[\frac{\gamma(a, x)}{\Gamma(a)} \right]^{\alpha-1}.$$

A caracterização paramétrica dos formatos da densidade e taxa de falha da distribuição gama exponencializada é dada em detalhes pelos autores. Ela será omitida aqui por brevidade, mas engloba as formas crescente, decrescente, constante, inicialmente crescente e depois decrescente, e inicialmente decrescente e depois crescente.

Expressões fechadas para os momentos ordinários e função geradora de momentos de uma v.a. $X \sim \text{Exp-gama}(\alpha, a)$ são, em geral, difíceis de serem encontradas. Alguns casos particulares podem ser vistos em Nadarajah e Gupta (2007).

2.1.4 Distribuição Gumbel exponencializada

Também proposta pelos professores Nadarajah e Kotz em 2006. A distribuição Gumbel, assim como a distribuição Fréchet, possui uma grande variedade de aplicações. Em Kotz e Nadarajah (2001), são listados mais de cinquenta conjuntos de dados para os quais as duas distribuições, Gumbel e Fréchet, são aplicadas. Esses dados estão distribuídos em áreas que alcançam desde magnitude de terremotos a corridas de cavalos. Espera-se que extensões dessas distribuições possuam ainda mais versatilidade.

A fda da variável aleatória $X \sim \text{Exp-Gumbel}(\alpha, \mu, \sigma)$ é definida como uma distribuição Lehmann do tipo II. Define-se

$$F(x) = 1 - \left\{ 1 - \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}^\alpha, \quad -\infty < x < \infty, \alpha > 0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0,$$

para a qual corresponde a fdp

$$f(x) = \frac{\alpha}{\sigma} \left\{ 1 - \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}^{\alpha-1} \exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right].$$

É possível mostrar que a densidade de X possui uma única moda localizada em $x_0 = \mu - \sigma \log(u_0)$, em que u_0 é a solução da equação $1 - u = (1 - \alpha u) \exp(-u)$. A taxa de falha da distribuição Gumbel exponencializada tem apenas a forma crescente, e possui assíntota horizontal em α quando $x \rightarrow \infty$. O j -ésimo momento de X é dado por (Nadarajah e Kotz, 2006b)

$$\mathbb{E}(X^j) = \alpha \mu^j \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l} \Gamma(\alpha) \Gamma(1+k)}{k! l! \Gamma(\alpha-l) \Gamma(1+j-k)} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^k \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \left[(1+l)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \right] \Big|_{\alpha=1}.$$

2.1.5 Distribuição Fréchet exponencializada

Assim como feito com a distribuição Gumbel, a distribuição Fréchet exponencializada é definida como uma distribuição Lehmann do tipo II.

$$F(x) = 1 - \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^\alpha,$$

com fdp expressa por

$$f(x) = \alpha \lambda \sigma^\lambda x^{-1+\lambda} \exp \left[-\left(\frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\frac{\sigma}{x} \right)^\lambda \right] \right\}^{\alpha-1}.$$

É possível mostrar que a fdp e a taxa de falha da distribuição Fréchet exponencializada são unimodais. O j -ésimo momento ordinário foi obtido em Nadarajah e Kotz (2006b) para o caso $\alpha > j/\lambda$ e é dado por

$$\mathbb{E}(X^j) = \frac{\sigma^j}{\lambda} \int_0^\infty \alpha y^{-(1+\frac{j}{\lambda})} [1 - e^{-y}] dy.$$

Não é conhecida ainda alguma forma fechada para o j -ésimo momento da distribuição Fréchet exponencializada.

2.2 A classe Beta-G

Considere $G(x)$ como a fda de uma distribuição contínua com vetor de parâmetros ϕ . Define-se a fda para a família beta-G como

$$F(x) = I_{G(x)}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad a, b > 0,$$

em que $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ representa a função beta e

$$I_x(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt,$$

representa a razão beta incompleta. A densidade correspondente é dada por (Eugene et al., 2002)

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} g(x) [G(x)]^{a-1} [1 - G(x)]^{b-1},$$

a qual depende implicitamente do vetor ϕ de parâmetros de $G(x)$. Se uma variável X é distribuída com fdp $f(x)$, escrevemos $X \sim \text{Beta} - G(a, b, \phi)$. A distribuição beta-normal foi proposta em Eugene et al. (2002), sendo a primeira distribuição dessa classe a ser documentada. Em seguida, Jones (2004) investigou em maiores detalhes essa classe de distribuições, deixando evidente a versatilidade das distribuições Beta-G e a possibilidade de obtermos distribuições de caudas pesadas com assimetria presente.

É possível escrever $f(x)$ como uma combinação linear de fdps de distribuições Exp-G. Isso pode ser visto em, por exemplo, Cordeiro e Nadarajah (2011). Utilizando a expansão binomial temos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i (a+i) g(x) G(x)^{a+i-1},$$

em que

$$w_i = w_i(a, b) = \frac{(-1)^i \binom{b-1}{i}}{(a+i)B(a, b)}.$$

Essa relação permite expressar os momentos ordinários de X como combinação linear de momentos de distribuições exponencializadas. Ressalta-se que o coeficiente binomial utilizado na expressão para w_i é definido para valores reais de b . Em todo o texto é utilizada a versão real (também dita generalizada) do coeficiente binomial. A saber:

$$\binom{m}{n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}.$$

Em Cordeiro e Nadarajah (2011), os momentos de alguns membros da classe Beta-G são expressos por meios de momentos probabilisticamente ponderados (MPP) de $G(x)$. Define-se o MPP de ordem (u, v) de uma variável $Y \sim G(\phi)$ como $\tau_{u,v} = \mathbb{E}\{Y^u [G(Y)]^v\}$. Muitas outras propriedades das distribuições da classe Beta-G são apresentadas em Zografos e Balakrishnan (2009), incluindo um método dos momentos generalizado para estimação e a caracterização da classe pelo princípio da máxima entropia.

2.2.1 Distribuição beta-exponencial

Proposta em Nadarajah e Kotz (2006a), a distribuição beta-exponencial possui fdp dada por

$$f(x) = \frac{\lambda}{B(a, b)} \exp(-b\lambda x) [1 - \exp(-\lambda x)]^{a-1}, \quad a, b, \lambda, x > 0.$$

No artigo, é mostrado que $f(x)$ é monótona decrescente para $a < 1$ e unimodal caso contrário. A taxa de falha associada à distribuição beta-exponencial é monótona crescente se $a > 1$ e monótona decrescente se $a < 1$, em ambos os casos tendendo a $b\lambda$ quando $x \rightarrow \infty$. Várias outras características são discutidas no artigo, incluindo estimação por máxima verossimilhança e método dos momentos.

A função geradora de momentos para a distribuição beta-exponencial é dada por

$$M(t) = \frac{B(b - \frac{t}{\lambda}, a)}{B(a, b)},$$

em que o j -ésimo momento de $X \sim \text{Beta-exponencial}(a, b, \lambda)$ é dado por

$$\mathbb{E}(X^j) = \frac{(-1)^j}{\lambda^j B(a, b)} \frac{\partial^j}{\partial p^j} B(a, 1 + p - a) \Big|_{p=a+b-1}.$$

Uma característica interessante da distribuição beta-exponencial é que apenas um dos seus dois parâmetros de forma (a e b) controla o comportamento da taxa de falha.

2.2.2 Distribuição beta-Weibull

A distribuição beta-Weibull foi proposta por Famoye et al. (2005) e tem fdp dada por

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\beta \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right]\right\}^{a-1},$$

em que x , a , b , k e λ são todos reais positivos. No artigo em que a distribuição foi proposta encontramos uma discussão sobre o viés dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros e sobre a forma da taxa de falha de uma variável com distribuição beta-Weibull. Cordeiro et al. (2012) obtiveram a seguinte expressão para o j -ésimo momento de $X \sim \text{Beta-Weibull}(a, b, k, \lambda)$:

$$\mathbb{E}(X^j) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1 + \frac{j}{k})}{\lambda^j B(a, b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(a-i)i!(b+i)^{1+\frac{j}{k}}}.$$

Para $a = b = 1$ a distribuição beta-Weibull reduz à distribuição Weibull. Nesse caso, a expressão de Cordeiro et al. (2012) para $\mathbb{E}(X^j)$ coincide com a expressão conhecida para os momentos da distribuição Weibull.

2.2.3 Distribuição beta-Gumbel

A distribuição beta-Gumbel foi proposta em Nadarajah e Kotz (2004). A densidade de $X \sim \text{Beta-Gumbel}(a, b, \mu, \sigma)$ é dada por

$$f(x) = \frac{u \exp(-au)[1 - \exp(-u)]^{b-1}}{\sigma B(a, b)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \text{e } \sigma > 0,$$

em que $u = \exp[-(x - \mu)/\sigma]$. Os autores apresentaram a caracterização paramétrica da densidade e taxa de falha da variável X . A fdp $f(x)$ possui uma única moda e $f(-\infty) = f(\infty) = 0$. A função taxa de falha, denotada $h(x)$, é crescente e tal que $h(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$ e $h(x) \rightarrow b$ quando $x \rightarrow \infty$. O j -ésimo momento ordinário de X pode ser escrito como

$$\mathbb{E}(X^j) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(1+j)\mu^j}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}(\sigma/\mu)^k}{k!l!\Gamma(1+j-k)\Gamma(b-1)} \frac{\partial^j}{\partial \alpha^k} [(a+l)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)] \Big|_{\alpha=1}.$$

2.2.4 Distribuição beta-Fréchet

Dizemos que $X \sim \text{Beta-Fréchet}(a, b, \lambda, \sigma)$ se sua fdp pode ser expressa por

$$f(x) = \frac{\lambda \sigma^\lambda \exp[-a(\sigma/x)^\lambda] \left\{ 1 - \exp[-(\sigma/x)^\lambda] \right\}^{b-1}}{x^{1+\lambda} B(a, b)},$$

em que x e os parâmetros a, b, λ, σ são reais positivos. Essa distribuição foi proposta em Nadarajah e Gupta (2004). Os autores mostram que $f(x)$ é unimodal e $f(0) = f(\infty) = 0$. A taxa de falha de X é também unimodal e tende a zero para $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$. Nadarajah e Gupta descrevem o j -ésimo momento ordinário de X como

$$\mathbb{E}(X^j) = \frac{\sigma^{1+j}}{\lambda B(a, b)} \int_0^1 (-\log y)^{-1-(j+1)/\lambda} y^{a-2} (1-y)^{b-1} dy.$$

Não há, até o momento, outra expressão para os momentos ordinários dessa distribuição e infelizmente essa integral converge apenas para $b > n/\lambda$.

2.3 A classe Gama-G

Essa classe foi proposta inicialmente por Zografos e Balakrishnan (2009). Baseando-se em uma fda contínua $G(x)$ com função de sobrevivência denotada por $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$ e densidade $g(x)$, eles definiram a fda da distribuição gama-G como

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{-\log \bar{G}(x)} t^{\delta-1} e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \delta > 0,$$

e respectiva fdp dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} [-\log \bar{G}(x)]^{\delta-1} g(x).$$

Ristić e Balakrishnan (2011) propuseram um gerador ligeiramente diferente para a classe gama-G. A saber, a fda proposta por eles é dada por

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{-\log G(x)} t^{\delta-1} e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \delta > 0,$$

com respectiva fdp dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} [-\log F(x)]^{\delta-1} g(x),$$

Em Pinho et al. (2012), propomos a família gama-Weibull exponencializada e sugerimos nomear a classe apresentada por Ristić e Balakrishnan como classe Gama- \bar{G} . Pinho et al. (2012) também foi desenvolvido durante esse trabalho de dissertação. Nesse artigo, além da nova família, foram apresentados resultados gerais para a classe Gama- \bar{G} .

As classes gama-generalizadas são relativamente recente no momento da produção desse texto e a maioria das distribuições que já foram apresentadas e estudadas até então podem ser vistas em Zografos e Balakrishnan (2009). Até o momento apenas duas famílias da classe Gama- \bar{G} foram apresentadas, a saber: gama-exponencial exponencializada (Ristić e Balakrishnan, 2011) e gama-Weibull exponencializada. Dada uma distribuição $G(x)$, ao construirmos a sua versão gama generalizada, podemos escolher a classe em que as expressões sejam bem comportadas. O estudo da forma das densidades e taxas de falha das famílias Gama-G e Gama- \bar{G} é, em geral, consideravelmente mais complicado. As expressões envolvidas nos cálculos de momentos e entropias são pouco tratáveis analiticamente.

A Classe Harris-G

Apresentamos nesse capítulo o método de composição que gera as distribuições Harris-G e alguns dos resultados gerais obtidos para essa classe de distribuições.

Considere a sequência de variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) Y_1, Y_2, \dots com fda $G(x)$, fdp $g(x)$ e função de risco $h(x)$, definida no Capítulo 2. Seja $X = \min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$, em que N é uma variável aleatória que assume valores inteiros positivos com função geradora de probabilidade (fgp)

$$\varphi(t; \omega) = \mathbb{E}(t^N) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i P(N = i)$$

para um vetor de parâmetros ω . Sabe-se que a função de sobrevivência $\bar{F}(x)$ de X pode ser escrita como

$$\bar{F}(x) = \varphi(\bar{G}(x), \omega). \quad (3.1)$$

Algumas propriedades de (3.1) foram apresentadas em Aly e Benkherouf (2011) e Marshall e Olkin (1997).

A composição de duas distribuições feita dessa maneira permite a inserção de parâmetros em distribuições já existentes e tal método já foi utilizado em vários artigos na literatura. Por exemplo, o caso $\bar{G}(x) = \exp(-\lambda x)$, $\lambda > 0$ quando $\varphi(s, \theta)$ é a fgp de uma distribuição Poisson truncada no zero, a saber $\varphi(s, \theta) = \exp[\theta(s-1)][1 - \exp(-\theta)]^{-1}$, corresponde à distribuição Poisson-exponencial de Kus (2006). Quando $\bar{G}(x) = \exp(-\lambda x)$ e $\bar{G}(x) = \exp[-(\lambda x)^\alpha]$, com $\varphi(s, \theta)$ representando a fgp de uma distribuição em série de potências, obtemos os modelos em Chahkandi e Ganjali (2009) e Morais e Barreto-Souza (2011), respectivamente. Outras propostas relacionadas a esse método podem ser encontradas em Barreto-Souza e Bakouch (2011), Lu e Shi (2011), Ristić e Balakrishnan (2011) e nas referências contidas nesses artigos.

Uma variante de (3.1) foi apresentada por Marshall e Olkin (1997) utilizando a fgp da distribuição geométrica $\varphi(s, \theta) = s\theta(1 - \bar{\theta}s)^{-1}$, em que $\bar{\theta} = 1 - \theta$. No mesmo artigo, foram obtidas as distribuições *Marshall-Olkin extended exponential* (MOEE) e *Marshall-Olkin extended Weibull* (MOEW). Em Aly e Benkherouf (2011) as distribuições tipo Marshall-Olkin são generalizadas usando a fgp da distribuição Harris em Harris (1948). Essa fgp é dada por

$$\varphi(s, k, \theta) = \left(\frac{\theta s^k}{1 - \bar{\theta} s^k} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad k > 0. \quad (3.2)$$

Aly e Benkherouf consideraram $0 < \theta < \infty$ embora Harris (1948) tenha mantido θ restrito ao intervalo $(0, 1)$. Essa restrição vem do fato que a distribuição Harris está associada à variável

aleatória que representa o número de nós em um processo de ramificação em que a cada instante um nó pode dar origem a k novos nós idênticos com probabilidade proporcional a $-\log(\theta)$. Inserindo (3.2) em (3.1) temos

$$\bar{F}(x) = \left\{ \frac{\theta[\bar{G}(x)]^k}{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k} \right\}^{\frac{1}{k}}. \quad (3.3)$$

A Equação (3.3) corresponde ao método que gera as distribuições da classe MO (Marshall-Olkin) quando $k = 1$. A fdp correspondente é

$$f(x) = \frac{\theta^{\frac{1}{k}} g(x)}{\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\}^{1 + \frac{1}{k}}}. \quad (3.4)$$

É importante ressaltar que para $\theta > 1$, $\varphi(s, k, \theta)$ não é uma fgp, pois temos valores negativos para algumas probabilidades, por exemplo $\varphi''(0, 1, \theta)/2! = \theta(1 - \theta) < 0$. No entanto, é fácil conferir a partir de (3.3) que $F(x)$ é uma fda para $\theta > 0$. Claramente

- $F(x)$ é monótona não-decrescente, pois $F'(x) = f(x) > 0, \forall \theta > 0$,
- $F(x)$ é contínua à direita, pois é a composição de uma função contínua e uma função contínua à direita,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Denominamos Harris-G(k, θ, ϕ) a distribuição de uma variável aleatória X com fdp (3.4), em que ϕ representa o vetor de parâmetros de $G(x)$. O caso $\theta = 1$ é trivial ($f(x)$ coincide com $g(x)$) e não será tratado nessa dissertação.

3.1 Expansões para as funções de densidade e distribuição

Mostraremos nessa seção que a fdp de uma distribuição Harris-G pode ser escrita como uma combinação linear de densidades de distribuições G exponencializadas definidas no Capítulo 2.

Teorema 1. Para $0 < \theta < 1$, podemos escrever $f(x)$ em (3.4) como

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i g_i(x),$$

com

$$w_i = (-1)^{i+1} \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \varphi(t, k, \theta)}{\partial t^j} \right|_{t=0}$$

Demonstração. Para $0 < \theta < 1$, $\varphi(s, k, \theta)$ é uma fgp, portanto podemos fazer

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= \varphi(\bar{G}(x), k, \theta) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P(N = j) [\bar{G}(x)]^j \\
&= P(N = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \varphi(t, s, \theta)}{\partial t^j} \right|_{t=0} [\bar{G}(x)]^j \\
&= \varphi(0, k, \theta) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \varphi(t, k, \theta)}{\partial t^j} \right|_{t=0} \left\{ \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} (-1)^i [G(x)]^i \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left\{ \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \varphi(t, k, \theta)}{\partial t^j} \right|_{t=0} \right\} [G(x)]^i
\end{aligned}$$

Tomando derivadas em ambos os membros da equação, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left\{ \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \varphi(t, k, \theta)}{\partial t^j} \right|_{t=0} \right\} i g(x) [G(x)]^{i-1} \\
f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_i g_i(x),
\end{aligned}$$

□

A segunda forma de exibir $f(x)$ como combinação linear de distribuições exponencializadas é obtida por meio de manipulação algébrica e mostrada a seguir.

Teorema 2. Para $\theta \in (0, \infty)$, podemos escrever $f(x)$ em (3.4) como

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i g_{(i+1)}(x),$$

com

$$w_i = \begin{cases} \frac{\theta^k (-1)^i}{i+1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\theta}^j \binom{j+k-1}{j} \binom{kj}{i} \right], & \text{se } 0 < \theta < 1 \\ \frac{\tau (-1)^i}{i+1} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j (-1)^l \bar{\tau}^j \binom{j+k-1}{j} \binom{j}{l} \binom{lk}{i} \right\}, & \text{se } \theta > 1, \end{cases}$$

em que $\tau = \theta^{-1}$ e $\bar{\tau} = 1 - \tau$.

Demonstração. Para o caso $0 < \theta < 1$, considere a expansão da série binomial negativa, válida para $|y| < 1$,

$$(1-y)^{-r} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+r-1}{i} y^i.$$

Aplicando esse resultado ao denominador em (3.4), temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \theta^{\frac{1}{k}} g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k^{-1}}{j} \bar{\theta}^j \bar{G}(x)^{kj} \\
&= \theta^{\frac{1}{k}} g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k^{-1}}{j} \bar{\theta}^j \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{kj}{i} G(x)^i \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^{\frac{1}{k}} \bar{\theta}^j (-1)^i}{i+1} \binom{j+k^{-1}}{j} \binom{kj}{i} (i+1) g(x) G(x)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} w_i g_{(i+1)}(x),
\end{aligned}$$

com

$$w_i = \frac{\theta^{\frac{1}{k}} (-1)^i}{i+1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\theta}^j \binom{j+k^{-1}}{j} \binom{kj}{i} \right].$$

Para o caso $\theta > 1$, faça $\tau = \theta^{-1}$. Podemos reescrever (3.4) como

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau g(x)}{\{\tau - (\tau - 1)[\bar{G}(x)]^k\}^{1+\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{\tau g(x)}{1 - (1 - \tau)\{1 - [\bar{G}(x)]^k\}^{1+\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{\tau g(x)}{\{1 - \bar{\tau}\{1 - [\bar{G}(x)]^k\}\}^{1+\frac{1}{k}}},
\end{aligned}$$

em que $\bar{\tau} = 1 - \tau$. Agora podemos aplicar novamente a expansão binomial negativa no denominador da última expressão para obter

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tau g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k^{-1}}{j} \bar{\tau}^j \{1 - [\bar{G}(x)]^k\}^j \\
&= \tau g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k^{-1}}{j} \bar{\tau}^j \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l [\bar{G}(x)]^{lk} \\
&= \tau g(x) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k^{-1}}{j} \bar{\tau}^j \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} (-1)^l \sum_{i=0}^{\infty} \binom{lk}{i} (-1)^i [G(x)]^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \frac{\tau \bar{\tau} (-1)^{l+i}}{i+1} \binom{j+k^{-1}}{j} \binom{j}{l} \binom{lk}{i} (i+1) g(x) [G(x)]^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} w_i g_{(i+1)}(x),
\end{aligned}$$

com

$$w_i = \frac{\tau (-1)^i}{i+1} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \bar{\tau}^j (-1)^l \binom{j+k^{-1}}{j} \binom{j}{l} \binom{lk}{i} \right\}$$

□

Durante o restante do capítulo, usaremos w_i para denotar os coeficientes presentes no Teorema 2. Escrever a fdp das distribuições Harris estendidas como combinação linear de densidades exponencializadas permite-nos obter muitos resultados na classe Harris-G. Há uma grande quantidade de artigos que listam resultados sobre momentos, funções geradoras de momentos e entropias de distribuições exponencializadas.

Para $0 < \theta < 1$ pode-se escolher entre o Teorema 1 e o Teorema 2. A falta de expressões fechadas para as derivadas da fgp da distribuição Harris faz com que o Teorema 2 seja uma melhor escolha em termos computacionais. Porém, caso prefira-se trabalhar com o Teorema 1 por algum motivo que possa surgir nos casos particulares, é possível aproximar as derivadas necessárias para o Teorema 1 com erro tão pequeno quanto desejado através do método das diferenças finitas, o qual não requer grandes esforços computacionais. Detalhes sobre o método das diferenças finitas podem ser vistos em Nosedal e Wright (2006).

Não obstante esses resultados, é possível escrever algumas densidades de distribuições da classe Harris-G como combinação linear de densidades de distribuições mais simples que as exponencializadas. Em alguns casos podem ser obtidas expressões mais simples que as do Teorema 2.

Por fim, o seguinte resultado pode ser usado para auxiliar na caracterização paramétrica da densidade (3.4).

Teorema 3. *Se $g(x)$ é monótona decrescente em um intervalo aberto D e $0 < \theta < 1$, então $f(x)$ também é monótona decrescente em D . Além disso, se $g(x)$ é monótona crescente em D e $\theta > 1$, então $g(x)$ é monótona crescente em D .*

Demonstração. Derivando $f(x)$, obtemos

$$f'(x) = \frac{\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\}^{\frac{1}{k}} \{g'(x) \{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\} - \bar{\theta}(1+k)g^2(x)[\bar{G}(x)]^{k-1}\}}{\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\}^{2(1+\frac{1}{k})}},$$

como $\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\}^{\frac{1}{k}}$ e o denominador são sempre positivos, temos

$$\text{sgn}[f'(x)] = \text{sgn} \left\{ g'(x) \left\{ 1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k \right\} - \bar{\theta}(1+k)g^2(x)[\bar{G}(x)]^{k-1} \right\},$$

em que $\text{sgn}(x)$ é a função sinal, isto é, $\text{sgn}(x) = 1$ se x é positivo, $\text{sgn}(x) = 0$, se $x = 0$ e $\text{sgn}(x) = -1$ caso contrário. Portanto, se $g'(x) < 0$ para $x \in D$ e $0 < \theta < 1$ é possível ver que $\text{sgn}[f'(x)] = -1$ e que $g'(x) > 0$ para $x \in D$ e $\theta > 1$ implica $\text{sgn}[f'(x)] = 1$. □

3.2 Momentos e função geradora

Até o final desse capítulo, seja X uma variável aleatória distribuída de acordo com (3.4) e Y_i uma variável aleatória com fda dada por $[G(x)]^i$. Utilizando o Teorema 2, podemos escrever a função

geradora de momentos de X como combinação linear de funções geradoras de momentos de distribuições G exponencializadas. Dessa forma, temos

$$M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i M_{Y_i}(t).$$

Para os momentos ordinários de ordem j temos

$$\mu'_j = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \mu_j'^{(i)},$$

em que $\mu_j'^{(i)}$ representa o j -ésimo momento ordinário de Y_i . Momentos centrais, cumulantes e momentos fatoriais podem ser obtidos através das relações

$$\mu_j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \mu_j' \mu_1'^{j-i}, \quad \kappa_j = \mu_j' - \sum_{i=1}^{j-1} \binom{i-1}{k-1} \kappa_i \mu_j'^{j-i},$$

e

$$\mu_{(j)} = \mathbb{E}[X(X-1) \times \cdots \times (X-j+1)] = \sum_{i=0}^j s(j, i) \mu_i',$$

em que $s(r, i) = (i!)^{-1} [d^i x^{(r)} / dx^i]_{x=0}$ representa o número de Stirling do primeiro tipo, e $x^{(n)} = x(x+1) \cdots (x+n-1)$ representa o fatorial ascendente.

Momentos incompletos são úteis em áreas como seguros e credibilidade, além de permitirem a obtenção dos desvios médios em relação à média e mediana. O j -ésimo momento incompleto de X , denotado por $J_j(z) = \int_0^z x^j f(x) dx$, pode também ser obtido através do Teorema 2 como uma combinação linear dos momentos incompletos das variáveis aleatórias Y_i . Denotando por $J_j^{(i)}(z)$ o j -ésimo momento incompleto de Y_i , temos

$$J_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i J_j^{(i)}(z). \quad (3.5)$$

3.3 Desvios médios

A dispersão de X pode ser caracterizada por meio dos desvios-médios em relação à média μ'_1 e à mediana m , definidos respectivamente por $\delta_1 = \int_0^{\infty} |x - \mu'_1| g(x) dx$ e $\delta_2 = \int_0^{\infty} |x - m| g(x) dx$, com m representando a mediana de X . Então, as medidas δ_1 e δ_2 podem ser expressas como

$$\delta_1 = 2\mu'_1 F(\mu'_1) - 2J_1(\mu'_1) \quad \text{e} \quad \delta_2 = \mu'_1 - 2J_1(m), \quad (3.6)$$

e $J_1(y)$ é o primeiro momento incompleto de X . De (3.5), podemos escrever

$$J_1(q) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i J_1^{(i)}(z). \quad (3.7)$$

Logo, os desvios médios δ_1 e δ_2 são facilmente obtidos de (3.7).

Uma aplicação direta dos desvios-médios são as curvas de Bonferroni e Lorenz. Essas curvas possuem aplicação em Economia no estudo de renda e pobreza e em outras áreas como confiabilidade, demografia, seguros e Medicina. Dada uma probabilidade π , as curvas são definidas respectivamente por $B(\pi) = J_1(q)/(\pi\mu'_1)$ e $L(\pi) = J_1(q)/\mu'_1$, em que $q = Q(\pi)$. Usando (3.7), obtemos $B(\pi)$ e $L(\pi)$.

3.4 Entropias

Entropia refere-se à quantidade de incerteza associada a uma variável aleatória. É um conceito importante em muitas áreas de estudo, especialmente em teoria da comunicação (Shannon, 1948), Física (Beck, 2009) e Probabilidade (Jaynes, 1957). Possivelmente a medida de entropia mais popular foi introduzida em Shannon (1948). Para uma distribuição contínua $F(x)$ com densidade $f(x)$, a entropia de Shannon é dada por

$$\mathcal{H}_{Sh}[f(x)] = \mathbb{E}\{-\log[f(X)]\} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \{\log[f(x)]\} f(x) dx.$$

É possível relacionar $\mathcal{H}_{Sh}[f(x)]$ com $\mathcal{H}_{Sh}^{i+1}[g_{(i+1)}(y)]$, $i \in \mathbb{N}$, em que \mathcal{H}_{Sh}^{i+1} representa a medida de entropia com base na distribuição de $Y_{(i+1)}$. Para isso, o seguinte lema será útil.

Lema 1. Para a variável aleatória $Y_{(i+1)}$ distribuída com função de densidade $g_{(i+1)}(y) = (i+1)g(y)[G(y)]^i$, temos

$$\mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[g(Y)]\} = \mathcal{H}_{Sh}^{i+1}[g_{(i+1)}(y)] - \log(i+1) + \frac{1}{i+1}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Sh}^{i+1}[g_{(i+1)}(y)] &= \mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{-\log[g_{(i+1)}(Y)]\} \\ &= -\log(i+1) - \mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[g(Y)]\} - i\mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[G(Y)]\}, \end{aligned}$$

logo

$$\mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[g(Y)]\} = -\mathcal{H}_{Sh}^{i+1}(g_{(i+1)}) - \log(i+1) - i\mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[G(Y)]\}. \quad (3.8)$$

Mas

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[G(Y)]\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{\log[G(y)]\} g_{(i+1)}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{\log[G(y)]\} (i+1)g(y)[G(y)]^i dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} (i+1)g(y)[G(y)]^{i+a} \Big|_{a=0} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (i+1)g(y)[G(y)]^{i+a} dy \right\} \Big|_{a=0} \\ &= -\frac{1}{i+1}. \end{aligned}$$

Substituindo $\mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[G(Y)]\}$ em (3.8), segue o resultado. □

Podemos agora provar o seguinte resultado:

Teorema 4. *A entropia de Shannon para uma distribuição Harris-G pode ser descrita em função de uma combinação linear de entropias de distribuições G exponencializadas através da igualdade*

$$\mathcal{H}_{Sh}[f(x)] = -\frac{1}{k} \log(\theta) + \left(1 + \frac{1}{k}\right) I(k, \theta) + \sum_{i=0}^{\infty} w_i \left\{ \mathcal{H}_{Sh}^{i+1}(g_{(i+1)}(x)) - \log(i+1) + \frac{1}{i+1} \right\},$$

em que

$$I(k, \theta) = \theta^{\frac{1}{k}} \int_0^1 \frac{\log[1 - \bar{\theta}t^k]}{[1 - \bar{\theta}t^k]^{1+\frac{1}{k}}} dt.$$

Demonstração. Partindo da definição de $\mathcal{H}_{Sh}[f(x)]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Sh}[f(x)] &= \mathbb{E}\{-\log[f(X)]\} \\ &= -\frac{1}{k} \log(\theta) - \mathbb{E}\{\log[g(X)]\} + \left(1 + \frac{1}{k}\right) \mathbb{E}\{\log\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\}\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A parcela $\mathbb{E}\{\log[g(X)]\}$ é obtida através do Teorema 2 e Lema 1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\log[g(X)]\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \log[g(x)]f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w_i \int_{-\infty}^{+\infty} \log[g(x)]g_{(i+1)}(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w_i \mathbb{E}_{Y_{(i+1)}}\{\log[g(X)]\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w_i \left\{ \mathcal{H}_{Sh}^{i+1}[g_{(i+1)}(y)] - \log(i+1) + \frac{1}{i+1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para calcular $\mathbb{E}\{\log\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\}\}$, faça $t = G(x)$. Então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\log\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \log\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\} \frac{\theta^{\frac{1}{k}} g(x)}{\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\}^{1+\frac{1}{k}}} dx \\ &= \theta^{\frac{1}{k}} \int_0^1 \frac{\log[1 - \bar{\theta}t^k]}{[1 - \bar{\theta}t^k]^{1+\frac{1}{k}}} dt \\ &= I(k, \theta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.10) e (3.11) em (3.9) conclui a demonstração. \square

Nota-se que $I(k, \theta)$ não depende da escolha de $g(x)$.

A medida de entropia proposta por Shannon também pode ser usada para identificar modelos probabilísticos. Tal abordagem pode ser vista em Jaynes (1957). Considere uma classe de funções densidade de probabilidade dependendo de a um conjunto de restrições

$$\mathcal{F} = \{f(x) | \mathbb{E}[T_i(X)] = a_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Assume-se que todos os valores esperados são finitos. Podemos escolher um membro de \mathcal{F} como fdp de uma variável aleatória X se essa função maximiza a entropia de Shannon. A fdp escolhida é denominada distribuição de entropia máxima. O seguinte resultado fornece a caracterização por máxima entropia para a classe Harris-G de distribuições.

Teorema 5. *Seja $h(x)$ uma função densidade de probabilidade sujeita às seguintes restrições*

- $\mathbb{E}\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\} = I(k, \theta)$,
- $\mathbb{E}\{\log[g(X)]\} = \mathbb{E}_W\{\log\{g[G^{-1}(W)]\}\}$,

em que W é distribuída com densidade $m(w) = \theta^{k-1}\{1 - \bar{\theta}w^k\}^{1+k^{-1}}$. Então, $f(x)$ definida em (3.4) é a única solução do problema de otimização

$$f(x) = \arg \max_h \mathcal{H}_{Sh}[h(x)].$$

Demonstração. Considere a divergência de Kullback-Leibler entre as densidades $f(x)$ e $h(x)$ dada por

$$D(h, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \log \left[\frac{h(x)}{f(x)} \right] dx.$$

A desigualdade de Gibbs garante que $D(h, f) \geq 0$ com igualdade se, e só se, $h(x)$ e $f(x)$ são iguais em todos os pontos exceto em um conjunto de medida nula. Temos então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \log \left[\frac{h(x)}{f(x)} \right] dx. \\ 0 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \log[h(x)] dx - \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \log[f(x)] dx \\ \mathcal{H}_{Sh}[h(x)] &\leq - \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \log[f(x)] dx \\ \mathcal{H}_{Sh}[h(x)] &\leq -\frac{1}{k} \log(\theta) - \mathbb{E}\{\log[g(X)]\} + \mathbb{E}\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\}. \end{aligned}$$

Sob as restrições impostas temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Sh}[h(x)] &\leq -\frac{1}{k} \log(\theta) - \mathbb{E}_W\{\log\{g[G^{-1}(W)]\}\} + I(k, \theta) \\ \mathcal{H}_{Sh}[h(x)] &\leq -\frac{1}{k} \log(\theta) - \int_{-\infty}^{+\infty} \log\{g[G^{-1}(w)]\} \frac{\theta^{\frac{1}{k}}}{\{1 - \bar{\theta}w^k\}^{1+\frac{1}{k}}} dw + I(k, \theta). \end{aligned}$$

Substituindo $w = G(x)$ e $I(k, \theta) = \mathbb{E}_X\{\log\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\}\}$ (ver prova do Teorema anterior), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Sh}[h(x)] &\leq -\frac{1}{k} \log(\theta) - \int_{-\infty}^{+\infty} \log[g(x)] \frac{\theta^{\frac{1}{k}} g(x)}{\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(x)]^k\}^{1+\frac{1}{k}}} dx + \mathbb{E}_X\{\log\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\} \\ \mathcal{H}_{Sh}[h(x)] &\leq -\frac{1}{k} \log(\theta) - \mathbb{E}_X \log[g(X)] + \mathbb{E}_X\{\log\{1 - \bar{\theta}[\bar{G}(X)]^k\} \\ \mathcal{H}_{Sh}[h(x)] &\leq \mathcal{H}_{Sh}[f(x)], \end{aligned}$$

com igualdade se, e só se, $f(x)$ for igual a $h(x)$ em quase todos os pontos. \square

A entropia de Rényi é outra medida bastante popular. Ela é definida para o caso discreto mas pode ser estendida às distribuições contínuas da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_R^\alpha[f(x)] = \frac{1}{1-\alpha} \log \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^\alpha dx \right], \quad \alpha > 0.$$

A entropia de Shannon ocorre como caso especial quando $\alpha \rightarrow 1$. Para essa medida nós enunciamos o seguinte resultado.

Teorema 6. *A entropia de Rényi para a distribuição Harris-G é dada por*

$$\mathcal{H}_R^\alpha[f(x)] = \frac{1}{1-\alpha} \log \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x)]^\alpha [G(x)]^i dx \right],$$

em que

$$a_i = \begin{cases} \theta^{\frac{\alpha}{k}} (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\theta}^j \binom{kj}{i} \binom{j+\alpha+\alpha k^{-1}-1}{j} \right], & \text{se } 0 < \theta < 1 \\ \tau^\alpha (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j (-1)^l \bar{\tau}^j \binom{j}{l} \binom{lk}{i} \binom{j+\alpha+\alpha k^{-1}-1}{j} \right], & \text{se } \theta > 1 \end{cases}$$

com $\tau = \theta^{-1}$.

A prova desse resultado é análoga à prova do Teorema 2 e por isso é omitida.

3.5 Estatísticas de ordem

Nessa seção, nós mostramos que a fdp da j -ésima estatística de ordem nessa classe, denotada por $f_{j:n}(x)$, é uma combinação linear de funções de densidades de distribuições exponencializadas.

Teorema 7. *Seja $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Harris - G(k, θ, ϕ), em que ϕ representa o vetor de parâmetros de G. Se $f_{j:n}(x)$ denota a fdp da j -ésima estatística de ordem, então*

$$f_{j:n}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{s=0}^{n-j} \sum_{i,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (m+1) w_m b_{i,s}}{s+j+i+m} \binom{n-j}{s} g_{(s+j+i+m)}(x),$$

com $b_{i,s}$ obtido pela relação recursiva

$$b_{0,s} = w_0^{s+j-1}, \quad b_{i,s} = (i w_0)^{-1} \sum_{p=1}^i [(p+1)(s+j) - i] w_i b_{i-p},$$

em que os coeficientes w_i são dados pelo Teorema 2.

Demonstração. Sabe-se que

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} [\bar{F}(x)]^{n-j} [1 - \bar{F}(x)]^{j-1}.$$

Utilizando a expansão binomial, temos

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n-j}{s} [F(x)]^{s+j-1}.$$

Pelo Teorema 2, temos $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i [G(x)]^{i+1}$. Então

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n-j}{s} [G(x)]^{s+j-1} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i [G(x)]^i \right\}^{s+j-1}.$$

O Teorema 1 de Nevin (1969) afirma que para uma série de potências convergente $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, existe outra série de potências convergente $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ tal que $AB = 1$ se, e só se, $a_0 \neq 0$. Além disso, $a_0 = b_0$ e $b_j = (a_0)^{-1} \sum_{i=1}^j a_i b_{j-i}$. Usando esse resultado, temos

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n-j}{s} \sum_{i=0}^{\infty} b_{i,s} [G(x)]^{s+j+i-1}.$$

Mas, novamente pelo Teorema 2, temos

$$f_{j:n}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{m=0}^{\infty} w_m g_m(x) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n-j}{s} \sum_{i=0}^{\infty} b_{i,s} [G(x)]^{s+j+i-1}.$$

Finalmente, após uma manipulação simples, chegamos ao resultado desejado:

$$f_{j:n}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{s=0}^{n-j} \sum_{i,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (m+1) w_m b_{i,s}}{s+j+i+m} \binom{n-j}{s} g_{(s+j+i+m)}(x).$$

□

Momentos de estatísticas de ordem podem ser utilizados para obtermos os momentos-L, os quais são robustos em relação a pontos discrepantes e apresentam reduzido viés em pequenas amostras, sendo úteis para estimação de parâmetros. Sillitto (1969) e Hosking (1990) definem o r -ésimo momento-L como

$$l_r = r^{-1} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} \mathbb{E}[X_{r-i:r}].$$

O resultado enunciado garante que, na classe Harris-G, os momentos-L são então obtidos como combinação linear de momentos de distribuições exponencializadas.

A família Harris-exponencial

Nesse capítulo, consideramos a distribuição Harris-exponencial, denotada por HEE (*Harris extended exponential*) para manter a notação coerente com aquela usada nas publicações. Essa distribuição é obtida quando inserimos $\bar{G}(x) = \exp(-\lambda x)$, $\lambda > 0$ na equação (3.3). A distribuição HEE estende a distribuição exponencial estendida de Marshall-Olkin (MOEE) e o parâmetro adicional k permite maior flexibilidade na forma da função de densidade. Quando k é inteiro positivo e $0 < \theta < 1$, a distribuição HEE é aquela de uma variável aleatória que representa o tempo até a falha de um dispositivo formado por N componentes seriais com taxa de falha constante, em que N é uma variável aleatória que segue um processo de ramificação como o descrito na Seção 8 de Harris (1948). Os resultados dessa seção são inéditos e estão compilados em um artigo que estava em processo de revisão no momento em que a dissertação foi escrita.

4.1 A nova distribuição

Inserindo $\bar{G}(x) = \exp(-\lambda x)$ em (3.3) obtém-se a função de sobrevivência da distribuição HEE, a saber

$$\bar{F}(x) = \left\{ \frac{\theta \exp(-k\lambda x)}{1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)} \right\}^{\frac{1}{k}}, \text{ em que } x, \lambda, k, \theta > 0.$$

A função densidade correspondente é

$$f(x) = \frac{\lambda \theta^{\frac{1}{k}} \exp(-\lambda x)}{[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]^{1 + \frac{1}{k}}}. \quad (4.1)$$

Ao longo desse capítulo, indicaremos por X uma variável aleatória com fdp (4.1), sendo denotada por $X \sim \text{HEE}(k, \theta, \lambda)$. A função de risco de X é dada por

$$H(x) = \frac{\lambda}{[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]}.$$

O seguinte resultado descreve a caracterização paramétrica da forma de $f(x)$. Exemplos das possíveis formas de $f(x)$ são mostrados na Figura 4.1.

Teorema 8. *A fdp de X é decrescente se $0 < \theta < 1 + 1/k$ e unimodal caso contrário.*

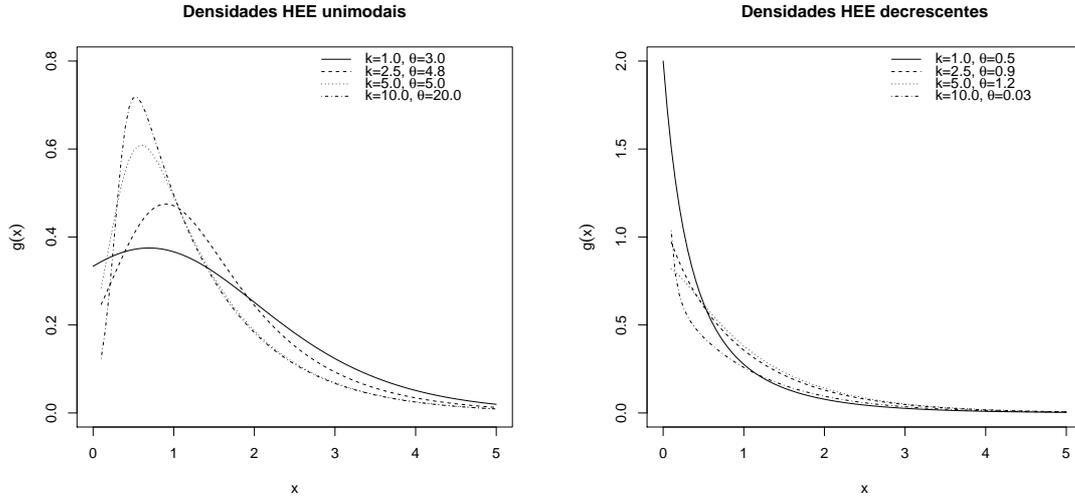


Figura 4.1 Algumas formas da fdp de $X \sim \text{HEE}(k, \theta, \lambda)$.

Demonstração. A derivada de primeira ordem de $g(x)$ em x é dada por

$$f'(x) = -\frac{\lambda \theta^{\frac{1}{k}} \exp(-\lambda x)}{[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]^{2+\frac{1}{k}}} [1 + k\bar{\theta} \exp(-k\lambda x)].$$

Essa derivada pode ter no máximo uma raiz real já que $\lambda \theta^{\frac{1}{k}} \exp(-\lambda x)$ é sempre positivo e $[1 + k\bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]$ é monótona em x . Mas a única raiz real possível de $f'(x)$ é $x = (k\lambda)^{-1} \log(-k\bar{\theta})$. Como $x > 0$, temos $1 < -k\bar{\theta}$ que implica $\theta > 1 + 1/k$. Além disso, se $\theta > 1 + 1/k$, a raiz certamente existe.

Se $f'(x)$ não possui raiz real, então o sinal da derivada não muda. Como $f'(x)$ é contínua, seu sinal deve ser o mesmo que o de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Porém,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\lambda \theta^{-2} (1 + k\bar{\theta}),$$

o qual é negativo para $0 < \theta < 1 + 1/k$. Logo, $f(x)$ é decrescente. \square

A caracterização da função taxa de falha de X é mostrada no resultado a seguir e exemplificada na Figura 4.2.

Teorema 9. Para $\theta < 1$, tem-se função de risco decrescente, caso contrário a função de risco é crescente.

Demonstração. A derivada de primeira ordem de $H(x)$ é dada por

$$H'(x) = \frac{k\bar{\theta}\lambda^2 \exp(k\lambda x)}{[\exp(k\lambda x) - \bar{\theta}]^2},$$

a qual tem o mesmo sinal de $\bar{\theta}$. Logo, segue o resultado. \square

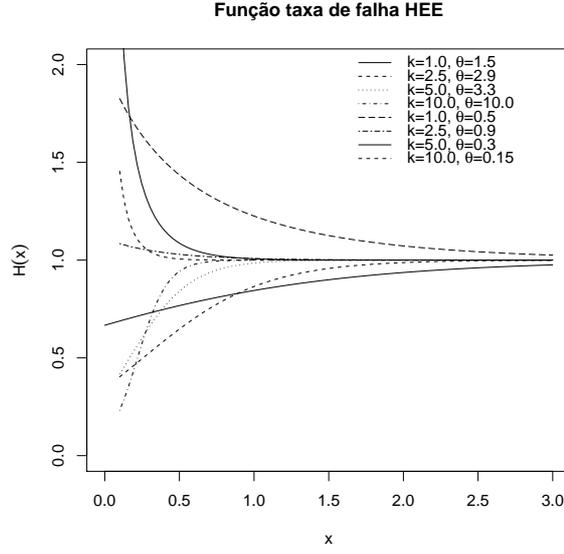


Figura 4.2 A função de risco de $X \sim \text{HEE}(k, \theta, \lambda)$ pode ser crescente ou decrescente.

Teorema 10. A fdp de X pode ser expressa como uma combinação linear de densidades exponenciais, a saber

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i g_{(1+ik)\lambda}(x), \quad (4.2)$$

em que

$$w_i = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{k}} \bar{\theta}^i}{1+ik} \binom{i+k^{-1}}{i}, & \text{para } \theta < 1 \\ \frac{\tau(-1)^i}{1+ik} \left[\sum_{j=i}^{\infty} \bar{\tau}^j \binom{j}{i} \binom{j+k^{-1}}{j} \right], & \text{para } \theta \geq 1 \end{cases}$$

$\theta = \tau^{-1}$ e $g_{(1+ik)\lambda}(x)$ denota a fdp exponencial de parâmetro $(1+ik)\lambda$.

Demonstração. Se $\theta < 1$, o denominador de (4.1) pode ser expandido pela série de potências binomial negativa, o que implica

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \theta^{\frac{1}{k}} \exp(-\lambda x) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k^{-1}}{i} \bar{\theta}^i \exp[-ik\lambda x], \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{\frac{1}{k}} \bar{\theta}^i}{1+ik} \binom{i+k^{-1}}{i} \lambda (1+ki) \exp[-\lambda(1+ki)x]. \end{aligned}$$

Baseado nessa expressão, os coeficientes (para $0 < \theta < 1$) são

$$w_i = \frac{\theta^{\frac{1}{k}} \bar{\theta}^i}{1+ik} \binom{i+k^{-1}}{i}.$$

Para o caso $\theta \geq 1$, seja $\theta = \tau^{-1}$ tal que $0 < \tau \leq 1$. Para simplificar a notação, seja $y = \exp(-\lambda x)$. Após alguma manipulação, a equação (4.1) pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{\tau \lambda y}{[1 - \bar{\tau}(1 - y^k)]^{1 + \frac{1}{k}}},$$

em que $\bar{\tau} = 1 - \tau$. Como o denominador está no intervalo $(0, 1)$, podemos usar a expansão binomial negativa. Temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \tau \lambda y \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\tau}^j (1 - y^k)^j \binom{j + k^{-1}}{j}, \\ &= \tau \lambda y \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j (-1)^i \bar{\tau}^j y^{ki} \binom{j}{i} \binom{j + k^{-1}}{j}. \end{aligned}$$

Trocando a ordem dos somatórios e substituindo y , obtemos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{\tau(-1)^i}{1 + ik} \left[\sum_{j=i}^{\infty} \bar{\tau}^j \binom{j}{i} \binom{j + k^{-1}}{j} \right] \right\} \lambda(1 + ik) \exp[-(1 + ik)\lambda x].$$

Então, os coeficientes são

$$w_i = \frac{\tau(-1)^i}{1 + ik} \left[\sum_{j=i}^{\infty} \bar{\tau}^j \binom{j}{i} \binom{j + k^{-1}}{j} \right], \text{ para } \theta \geq 1.$$

□

A Equação (4.2) pode ser usada para descrever várias propriedades estruturais da distribuição HEE. Essa equação generaliza a expansão dada por Marshall e Olkin para a distribuição MOEE (Marshall e Olkin, 1997), a qual era válida apenas para $\theta < 1$.

Analisaremos agora, brevemente, uma função do parâmetro k . Reproduzimos na Figura 4.3(a) um gráfico de Marshall e Olkin (1997) da variância de Y como função de θ , em que Y segue uma distribuição MOEE com parâmetro de escala $\lambda = 1$ e parâmetro de forma θ . A figura sugere que a variância cresce com θ . Para $\theta = 2$, ponto no qual a densidade da distribuição MOEE troca de decrescente para unimodal, temos $\text{Var}(Y) \approx 1.3680$. Se a fdp de Y é decrescente, obrigatoriamente temos $\text{Var}(Y) < 1.3680$. A Figura 4.3(b) mostra $\text{Var}(X)$ como uma função de $(k, \theta) \in (0, 5]^2$ e $\lambda = 1$ e sugere que, para valores pequenos de k , $\text{Var}(X)$ cresce com θ mais rápido que $\text{Var}(Y)$. Quando k decresce, o intervalo $(0, 1 + k^{-1})$ em que θ assume valores para densidades decrescentes torna-se mais amplo, indicando que a distribuição HEE pode ter densidades decrescentes com variâncias maiores que as possíveis no modelo MOEE. A Figura 4.3(b) sugere ainda que o contrário, também, é verdadeiro. Quando k cresce, a distribuição HEE com densidade unimodal pode modelar variâncias menores que as possíveis no modelo MOEE.

A função quantílica da distribuição HEE, denotada por $x = Q(u)$, pode ser obtida invertendo $G(x)$. Temos

$$Q(u) = (k\lambda)^{-1} \log[\bar{\theta} + \theta(1 - u)^{-k}], \quad 0 < u < 1.$$

Se $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, então $X = Q(U)$ tem distribuição HEE. Dessa maneira é trivial simularmos ocorrências de variáveis aleatórias com distribuição HEE.

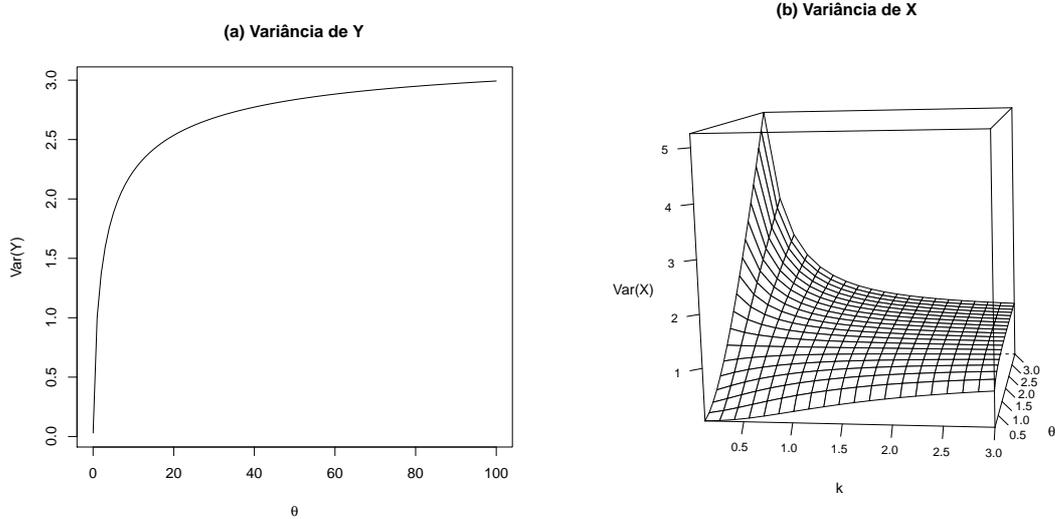


Figura 4.3 Comparação das variâncias de Y (com distribuição Marshall-Olkin exponencial) e de X (com distribuição HEE) em função dos parâmetros das respectivas densidades.

4.2 Momentos e função geradora

Desenvolvemos aqui a função geradora de momentos $M(t)$ de X . Usando $M(t)$ podemos escrever os momentos ordinários μ'_j de X . Esses podem ser usados para obtermos os momentos centrais (μ_j), cumulantes (κ_j) e momentos fatoriais ($\mu_{(j)}$). Momentos incompletos, também, são investigados.

A partir da Equação (4.2), $M(t)$ pode ser expresso como

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i M_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \left(1 - \frac{t}{\lambda(1+ki)} \right)^{-1},$$

em que $M_i(t) = [1 - \lambda^{-1}(1+ik)^{-1}t]^{-1}$ é a fgm de uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda(1+ik)$. Logo, o j -ésimo momento ordinário de X é dado por

$$\mu'_j = \mathbb{E}(X^j) = \frac{d^j}{dt^j} M(t) \Big|_{t=0} = \frac{\Gamma(j+1)}{\lambda^j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{(1+ki)^j}.$$

As expressões apresentadas para $M(t)$ e μ'_j são consistentes com aquelas dadas por Marshall e Olkin para a distribuição MOEE. Para $k=1$ e $\theta < 1$, as expressões de $M(t)$ e μ'_j são reduzidas àquelas da Equação (3.6) de Marshall e Olkin (1997). No entanto, estendemos o resultado de Marshall e Olkin incluindo o caso $\theta \geq 1$ para a distribuição MOEE.

O j -ésimo momento incompleto de X , dado por $J_j(y) = \int_0^y x^j f(x) dx$, pode ser obtido pela Equação (4.2). Sabendo que o j -ésimo momento incompleto correspondente à distribuição exponencial de parâmetro $(1+ik)\lambda$ é igual a $[\lambda(1+ik)]^{-j} \gamma[(1+ik)y\lambda, j+1]$, em que $\gamma(x, \delta) =$

$\int_0^x t^{\delta-1} e^{-t} dt$ denota a função gama incompleta, temos

$$J_j(y) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i [(1+ik)\lambda]^{-j} \gamma[(1+ik)\lambda y, j+1].$$

Assim, obtemos os desvios médios δ_1 e δ_2 , definidos em (3.6), e as curvas de Bonferroni e Lorenz definidas na Seção 3.3.

4.3 Estatísticas de ordem

Nessa seção investigamos a densidade e os momentos das estatísticas de ordem da distribuição HEE e as usamos para obter os momentos-L. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{HEE}(k, \theta, \lambda)$. Nós mostramos que a fdp da j -ésima estatística de ordem, digamos $X_{j:n}$, denotada por $f_{j:n}(x)$, é uma combinação linear de densidades HEE. Sabe-se que

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} [\bar{F}(x)]^{n-j} [1 - \bar{F}(x)]^{j-1}.$$

Usando a expansão binomial, temos

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j-1}{i} [\bar{F}(x)]^{n+i-j}. \quad (4.3)$$

Depois de alguma manipulação, $f_{j:n}(x)$ reduz a

$$\begin{aligned} f_{j:n}(x) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \frac{(-1)^i}{n+i-j+1} \\ &\times \frac{(n+i-j+1)\lambda \theta^{\frac{n+i-j+1}{k}} \exp(-(n+i-j+1)\lambda x)}{[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]^{\frac{n+i-j+1}{k}}} \\ &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \frac{(-1)^i}{n+i-j+1} f_{n,i,j}(x), \end{aligned}$$

em que $f_{n,i,j}(x)$ representa a densidade HEE com parâmetros $k(n+i-j+1)^{-1}$, θ e $(n+i-j+1)\lambda$. Partindo dessa equação, os momentos das estatísticas de ordem podem ser expressos como combinação linear de momentos HEE. Os momentos $\mathbb{E}(X_{j:n})$ são úteis em áreas como controle de qualidade, confiabilidade e seguros, para predição de tempo até falhas futuras a partir de um conjunto de observações passadas. Claramente, os momentos-L são obtidos como combinação linear de momentos HEE.

Consideramos agora a distribuição assintótica do mínimo e máximo amostral. Segue de (4.3) que

$$f_{1:n}(x) = 1 - \frac{n\lambda \theta^{\frac{n}{k}} \exp(-n\lambda x)}{[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]^{1+\frac{n}{k}}},$$

a qual representa a fdp de uma distribuição HEE($\theta, kn^{-1}, n\lambda$) A fda correspondente é

$$F_{1:n}(x) = 1 - \left\{ \left[\frac{\theta \exp(-k\lambda x)}{1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)} \right]^{\frac{1}{k}} \right\}^n.$$

Dado que a expressão entre chaves é uma função de sobrevivência, ela assume valores entre zero e um, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{1:n}(x) = 1$ e $F_{1:n}(x)$ é do tipo Weibull.

A distribuição do máximo pode ser obtida através do Teorema 8.3.3 de Arnold et al. (1992). Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xH(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\lambda}{1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)} = \infty,$$

segue que $F_{n:n}(x)$ não é do tipo Fréchet. Além disso, $Q(1) = \infty$ implica $F_{n:n}(x)$ não é do tipo Weibull. Por fim, é fácil mostrar que essa distribuição é do tipo Gumbel. Temos claramente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d[H(x)]^{-1}}{dx} = 0.$$

4.4 Entropias

Mostramos inicialmente a entropia de Shannon para a distribuição HEE. Segue diretamente de (4.1) que

$$\mathcal{H}_{Sh}[f(x)] = \log(\lambda) + k^{-1} \log(\theta) - \lambda \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\{\log[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda X)]\}.$$

A quantidade $A = \mathbb{E}\{\log[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda X)]\}$ pode ser calculada de (4.2) como

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} \{\log[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]\} \sum_{i=0}^{\infty} w_i \lambda (1 + ik) \exp[-(1 + ik)\lambda x] dx, \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w_i (1 + ik) \lambda \int_0^{\infty} \{\log[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x)]\} \exp[-(1 + ik)\lambda x] dx. \end{aligned}$$

Fazendo $y = \exp(-k\lambda x)$, obtemos

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} w_i (1 + ik) \lambda \int_0^1 y^j [\log(1 - \bar{\theta} y)] dy.$$

Essa integral pode ser obtida usando integração por partes e pode ser encontrada na Equação (2.729.1) em Gradshteyn e Ryzhik (2007). Temos

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} w_i (1 + ik) \lambda \left\{ \left[1 + \frac{(-1)^i}{\bar{\theta}^{i+1}} \right] \log(\theta) + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{(i-j+2)(-\bar{\theta}^{j-1})} \right\}.$$

Calculamos agora a entropia de Rényi para a distribuição HEE. Partindo de

$$I_R(v) = (1 - v)^{-1} \log \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^v dx \right],$$

e fazendo $y = \exp(-\lambda x)$, a integral acima reduz a

$$I = \theta^{\frac{v}{k}} \lambda^v \int_0^1 \frac{y^{v-1}}{(1 - \bar{\theta} y^k)^{v + \frac{v}{k}}} dy. \quad (4.4)$$

O denominador no integrando pode ser escrito como $(1 - \bar{\theta} y^k)^{v + \frac{v}{k}} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i y^{ki}$ pelo mesmo método usado na Seção 4.1 onde foi definido w_i (ver Equação (4.2)).

Usando novamente o Teorema 1 de Nevin (1969) sobre séries de potências elevadas a expoentes inteiros, expressamos (4.4) como

$$I = \theta^{\frac{v}{k}} \lambda^v \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} q_i y^{v+ki-1} dy,$$

$$I = \theta^{\frac{v}{k}} \lambda^v \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i}{v + ki},$$

em que $q_0 = p_0$ e $q_i = (p_0)^{-1} \sum_{j=1}^i p_j q_{i-j}$. Então, a entropia de Rényi para a distribuição HEE é dada por

$$I_R(v) = (1 - v)^{-1} \log \left[\theta^{\frac{v}{k}} \lambda^v \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i}{v + ik} \right].$$

4.5 Estimação

Discutimos agora a estimação dos parâmetros da distribuição HEE(k, θ, λ) usando o método da máxima verossimilhança. O logaritmo da função de verossimilhança, abreviado função de log-verossimilhança, $L(k, \theta, \lambda)$, para os parâmetros em (4.1) dada uma amostra de tamanho n é

$$L = L(k, \theta, \lambda) = n[k^{-1} \log(\theta) + \log(\lambda) - \lambda \bar{x}] - \sum_{i=1}^n (1 + k^{-1}) \log[1 - \bar{\theta} \exp(-k\lambda x_i)].$$

Para maximizar L , devemos resolver simultaneamente as seguintes equações

$$\frac{\partial L}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

As soluções para o sistema de equações são os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) para k , θ e λ , a saber \hat{k} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\lambda}$.

Em geral, esse sistema não possui solução fechada e um método de otimização, tal como Newton-Raphson ou BFGS, pode ser utilizado. Para o método de Newton-Raphson, as derivadas de primeira e segunda ordem da função de log-verossimilhança são necessárias. As derivadas

parciais de primeira ordem de L são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial k} &= -nk^{-2} - k^{-2} \sum_{i=1}^n \{\log[1 - \bar{\theta}\exp(-k\lambda x_i)]\} \\ &\quad + \lambda \bar{\theta}(1+k^{-1}) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)} \right\}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= n(k\theta)^{-1} + (1+k^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)}, \text{ e} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= n\lambda^{-1} - \sum_{i=1}^n x_i + k\bar{\theta}(1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)}.\end{aligned}$$

As derivadas parciais de segunda ordem não possuem expressão tão resumidas quanto as acima e são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial k^2} &= 2nk^{-3} + 2k^{-3} \sum_{i=1}^n \log[1 - \bar{\theta}\exp(-k\lambda x_i)] + \bar{\theta}k^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)} \\ &\quad - \lambda \bar{\theta}k^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)} + \bar{\theta}\lambda^2(1+k^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \exp(k\lambda x_i)}{[\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)]^2}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} &= -nk^{-1}\theta^{-2} + (1+k^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{1}{[\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)]^2}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} &= -n\lambda^{-2} + \bar{\theta}k^2(1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \exp(k\lambda x_i)}{[\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)]^2}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \theta} &= k^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)} - \lambda(1+k^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)} \\ &\quad + \lambda \bar{\theta}(1+k^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{[\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)]^2}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \lambda} &= \bar{\theta}k^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)} + \bar{\theta}(1+k^{-1}) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)} \\ &\quad + \lambda \bar{\theta}(1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 \exp(k\lambda x_i)}{[\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)]^2}, \text{ and} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \lambda} &= (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{\theta} - \exp(k\lambda x_i)}.\end{aligned}$$

Testes de hipóteses sobre os parâmetros podem ser obtidos utilizando a distribuição assintótica de $\hat{\phi} = (\hat{k}, \hat{\theta}, \hat{\lambda})$. Sob condições de regularidade (Casella e Berger, 2001), podemos considerar

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \approx N_4(0, K^{-1}), \quad (4.5)$$

em que K denota o valor esperado da matriz de informação de Fisher. Para valores altos de n ,

temos we have $K \approx n^{-1}J_n$, em que

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \theta} & \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial k} & \frac{\partial L}{\partial \theta^2} & \frac{\partial L}{\partial \theta \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial k} & \frac{\partial L}{\partial \lambda \partial \theta} & \frac{\partial L}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}.$$

Como K em (4.5) é normalmente desconhecido, podemos utilizar $\hat{K} = n^{-1}\hat{J}_n$ calculado no EMV $\hat{\phi}$ como uma estimativa de K . Isso possibilita a construção de intervalos de confiança para os parâmetros.

No Capítulo 6 são mostradas duas aplicações da distribuição Harris-exponencial a conjuntos de dados reais.

A Família Harris-Burr XII

Nesse capítulo, apresentamos a distribuição Harris-Burr XII, denotada por HEB (*Harris extended Burr*) seguindo a notação usada nas publicações. A função de sobrevivência da nova família é obtida inserindo $\tilde{G}(x) = 1 - (1 + x^c)^{-\alpha}$, $\alpha, c > 0$ na equação (3.3). O principal atrativo dessa nova distribuição é a grande quantidade de subcasos providos pela distribuição Burr XII. Para $c = 1$ temos a distribuição Pareto tipo II, para $k = 1$ temos a distribuição log-logística e $\alpha \rightarrow \infty$ nos fornece a distribuição Weibull. Assim, ao discutirmos a distribuição Harris-Burr XII estamos na verdade discutindo vários outros novos modelos. Como no capítulo anterior, os resultados obtidos aqui são inéditos na data em que a dissertação foi escrita.

5.1 O novo modelo

A função de sobrevivência da família HEB é dada por

$$\bar{F}(x) = \left\{ \frac{\theta(1+x^c)^{-k\alpha}}{1 - \bar{\theta}(1+x^c)^{-k\alpha}} \right\}^{\frac{1}{k}}, \text{ em que } x, \lambda, k, \theta > 0. \quad (5.1)$$

A densidade correspondente é

$$f(x) = \frac{c\alpha\theta^{\frac{1}{k}}x^{c-1}}{(1+x^c)^{1+\alpha} [1 - \bar{\theta}(1+x^c)^{-k\alpha}]^{1+1/k}}. \quad (5.2)$$

Ao longo desse capítulo, indicaremos por X uma variável aleatória com fdp (5.2), e escreveremos $X \sim \text{HEB}(k, \theta, c, \alpha)$. A função de risco de X é dada por

$$H(x) = \frac{c\alpha x^{c-1}}{(1+x^c)^{1-\alpha(k-1)} [1 - \bar{\theta}(1+x^c)^{-k\alpha}]}$$

A caracterização paramétrica da distribuição de X é difícil de detalhar e a fdp respectiva pode inclusive ter aspecto bimodal. Igualando a primeira derivada de $f(x)$ a zero, obtemos a equação

$$\alpha ck\bar{\theta} \left(1 + \frac{1}{k}\right) u^{-1-k\alpha} + \bar{\theta}(1-\alpha)u^{-k\alpha} + (1-c)(u-1)^{\frac{1-c}{c}} = 1 - \alpha,$$

com $u = 1 + x^c$. A fdp de X tem tantas modas quanto a equação acima tem raízes. Em particular, observa-se que a fdp de X é decrescente se (a) $c \leq 1$ e $0 < \theta < 1$ ou (b) $c \leq 1$, $\theta > 1$ e $\alpha > 1$

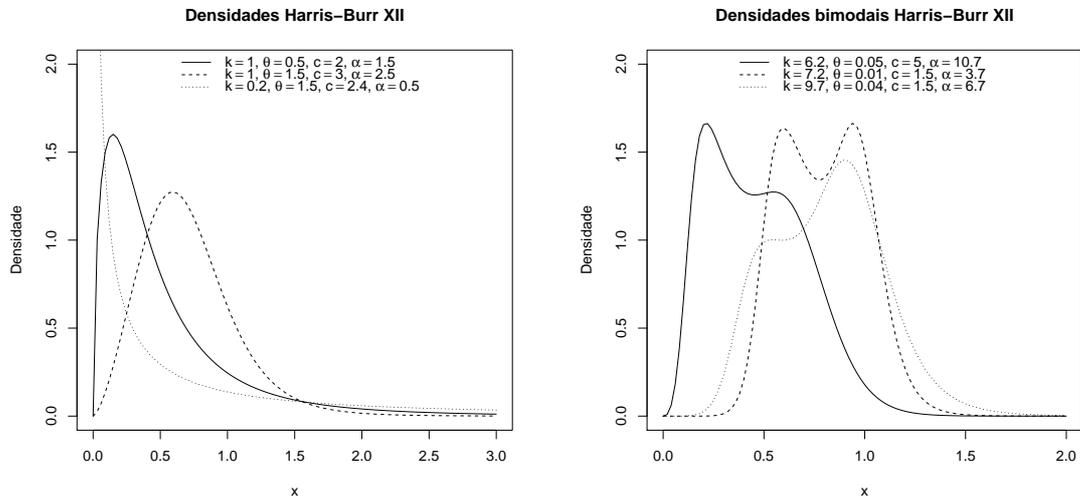


Figura 5.1 Algumas formas da fdp de $X \sim \text{HEB}(k, \theta, c, \alpha)$.

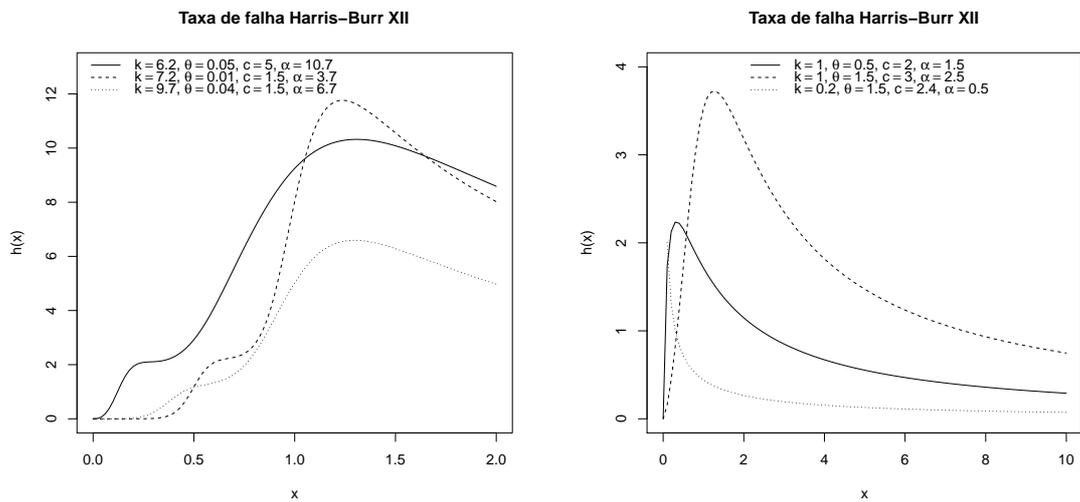


Figura 5.2 A taxa de falha de $X \sim \text{HEB}(k, \theta, c, \alpha)$ para valores selecionados dos parâmetros.

ou (c) $c > 1$, $\theta > 1$ e $\alpha < 1$, pois nesses casos os dois membros da equação possuem sinais opostos. Nas Figuras 5.1 e 5.2 mostramos algumas formas da função densidade e função de risco de X .

Podemos escrever a densidade $f(x)$ de X como combinação linear de densidades Burr XII. Esse resultado gera uma expressão mais simples que o resultado obtido usando o Teorema 2.

Teorema 11. *A fdp de X pode ser expressa como uma combinação linear de densidades Burr XII, a saber*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i g_{(1+ik),c}(x), \quad (5.3)$$

em que

$$w_i = \begin{cases} \theta^{\frac{1}{k}} \bar{\theta}^i \binom{i+k^{-1}-1}{i}, & \text{para } \theta < 1, \\ \tau \bar{\tau}^i \binom{i+k^{-1}-1}{i}, & \text{para } \theta \geq 1, \end{cases}$$

$\theta = \tau^{-1}$ e $g_{(1+ik),c}(x)$ denota a fdp Burr XII de parâmetros $(1+ik)$ e c .

Demonstração. Para $0 < \theta < 1$ obtemos w_i imediatamente após usar a expansão binomial negativa no denominador de $\bar{F}(x)$. Para $\theta > 1$, fazemos a substituição $\theta = \tau^{-1}$. Escrevemos

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \frac{\tau^{-\frac{1}{k}}(1+x^c)^{-\alpha}}{\left\{1 - \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)(1+x^c)^{-\alpha k}\right\}^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{\tau(1+x^c)^{-\alpha}}{\left\{\tau - (\tau-1)(1+x^c)^{-\alpha k}\right\}^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{\tau(1+x^c)^{-\alpha}}{\left\{1 - \bar{\tau}(1+x^c)^{-k\alpha}\right\}^{\frac{1}{k}}}. \end{aligned}$$

Usando a expansão binomial negativa no denominador da última fração obtemos

$$\bar{F}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau \bar{\tau}^i \binom{i+k^{-1}-1}{i} (1+x^c)^{-\alpha(1+ki)}.$$

□

O Teorema 11 pode ser utilizado para descrever várias propriedades estruturais da distribuição HEB, assim como feito para a distribuição HEE.

A função quantílica da distribuição HEB, denotada por $x = Q(u)$, pode ser obtida invertendo $\bar{F}(x)$. Depois de alguma manipulação algébrica, temos

$$Q(u) = \left\{ -1 + \left[1 - \theta \left(1 - \frac{1}{(1-u)^k} \right) \right]^{\frac{1}{k\alpha}} - 1 \right\}^{\frac{1}{c}}, \quad 0 < u < 1.$$

Se $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, então $X = Q(U)$ tem distribuição HEB. Essa é possivelmente a maneira mais simples de simularmos ocorrências de variáveis aleatórias com distribuição HEB.

5.2 Momentos e função geradora

Desenvolvemos agora a função geradora de momentos $M(t)$ de X . Como feito para a distribuição HEE, usamos $M(t)$ para escrever os momentos ordinários (μ'_j) de X e a partir das relações comentadas anteriormente podemos obter os momentos centrais (μ_j), cumulantes (κ_j) e momentos fatoriais ($\mu_{(j)}$). Momentos incompletos são, também, facilmente obtidos a partir da decomposição da fdp de X .

A partir do Teorema 11, $M(t)$ pode ser expresso como

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i M_i(t),$$

em que $M_i(t)$ é a fgm de uma distribuição Burr XII de parâmetros $1 + ik$ e c . Em Paranaíba et al. (2011) é fornecida uma expressão para M_i utilizando a função G de Meijer e um resultado de Prudnikov et al. (1990, p. 21). Eles mostraram que a fgm da distribuição BurrXII($1 + ki, c$) é dada por

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \frac{km}{n} \int_0^{\infty} \exp(ty) y^{c-1} (1+y^c)^{-(k+1)} dy \\ &= \frac{kn^k m^{\frac{m}{n} + \frac{3}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(k+1) (-t)^{\frac{m}{n}}} \times G_{m+n, n}^{\left[\frac{m^m}{(-t)^m} \middle| \begin{array}{l} \Delta(m, 1 - \frac{m}{n}), \Delta(n, -k) \\ \Delta(n, 0) \end{array} \right]}, \end{aligned}$$

para $t < 0$, em que $\Delta(a, b) = \frac{b}{a}, \frac{b+1}{a}, \dots, \frac{b+a}{a}$ e c é aproximado pelo racional m/n (m e n inteiros positivos). Essa aproximação não causa problemas uma vez que qualquer número real pode ser aproximado por um racional com o erro tão pequeno quanto desejado.

O j -ésimo momento ordinário de X também pode ser obtido pelo Teorema 11, a saber

$$\begin{aligned} \mu'_j &= \mathbb{E}(X^j) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \mathbb{E}(Y_{1+ki}^j), \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} w_i \alpha(1+ki) B\left(1 + \frac{j}{c}, \alpha(1+ki) - \frac{j}{c}\right), \end{aligned}$$

em que Y_{1+ki} tem distribuição BurrXII($\alpha(1+ki), c$). Como a função beta tem parâmetros positivos, devemos ter $j < c\alpha(1+ki)$, para $i = 0, 1, 2, \dots$. Portanto só podemos obter o j -ésimo momento de X usando a expressão acima se $j < c\alpha$.

O j -ésimo momento incompleto de X , dado por $J_j(y) = \int_0^y x^j f(x) dx$, pode ser obtido também pelo Teorema 11. Sabendo que o j -ésimo momento incompleto para a variável Y_{1+ki} é dado por $\alpha(1+ki) B_y(1 + jc^{-1}, \alpha(1+ki) - jc^{-1})$, em que $B_y(a, b) = \int_0^y t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ denota a função beta incompleta, temos

$$J_j(y) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \alpha(1+ki) B_y\left(\frac{j}{c} + 1, \alpha(1+ki) - \frac{j}{c}\right). \quad (5.4)$$

Essa última expressão pode ser usada apenas para $j < c\alpha$.

5.3 D esvio m edio

Os desvios m edios δ_1 e δ_2 , definidos em (3.6), podem ser obtidos para a variável X utilizando a expressão para os momentos incompletos mostrada na se o anterior. De (5.4), podemos escrever

$$J_1(q) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \alpha(1+ki) B_q \left(\frac{j}{c} + 1, \alpha(1+ki) - \frac{j}{c} \right). \quad (5.5)$$

Logo, os desvios m edios δ_1 e δ_2 são facilmente obtidos de (5.5). Esses desvios podem ser utilizados para construir as curvas de Bonferroni e Lorenz para a variável X da mesma forma como explicado na Se o 3.3.

5.4 Estatísticas de ordem

O principal resultado dessa se o mostra que as estatísticas de ordem de uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{HEB}(k, \theta, c, \alpha)$   uma combina o linear de distribui es HEB. Como no capítulo anterior, partimos de

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} [\bar{F}(x)]^{n-j} [1 - \bar{F}(x)]^{j-1}.$$

Usando a expansão binomial, temos

$$f_{j:n}(x) = \frac{n! f(x)}{(j-1)!(n-j)!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j-1}{i} [\bar{F}(x)]^{n+i-j}.$$

Substituindo $\bar{F}(x)$ pela expressão em (5.1) e multiplicando os fatores comuns, $f_{j:n}(x)$ reduz a

$$\begin{aligned} f_{j:n}(x) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{(-i)^i}{n+i-j+1} \binom{j-1}{i} \frac{c\alpha(n+i-j+1)\theta^{\frac{n+i-j+1}{k}} x^{c-1}}{(1+x^c)^{\alpha(n+i-j+1)+1} [1 - \bar{\theta}(1+x^c)^{-k\alpha}]^{1+\frac{n+i-j+1}{k}}} \\ &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{(-i)^i}{n+i-j+1} \binom{j-1}{i} f_{\alpha(n+i-j+1, \frac{k}{n+i-j+1}}(x) \end{aligned}$$

em que $f_{\alpha(n+i-j+1, \frac{k}{n+i-j+1}}(x)$ representa a densidade HEB com parâmetros $k(n+i-j+1)^{-1}$, θ , $\alpha(n+i-j+1)$ e c . Partindo dessa equa o, os momentos das estatísticas de ordem podem ser expressos como combina o linear de momentos HEB de modo similar ao que foi feito no capítulo anterior. Claramente, os momentos-L são obtidos como combina o linear de momentos HEB.

Consideramos agora a distribui o assintótica do mínimo e máximo amostral.

Teorema 12. *A distribui o de $X_{1:n}$, para $n \rightarrow \infty$   do tipo Weibull.*

Demonstra o. O Teorema 2 de Aly e Benkherouf (2011) garante que se

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(tx)}{F(x)} = t^r \text{ para algum } r > 0,$$

e $F(0) = 0$, então a distribuição de $X_{1:n}$ é do tipo Weibull. Para $F(x) = 1 - (1 + x^c)^{-\alpha}$, $F(0) = 0$ e usando a regra de l' Hôpital temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(tx)}{F(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1 + t^c x^c)^{-\alpha}}{1 - (1 + x^c)^{-\alpha}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c\alpha t^c x^{c-1} (1 + t^c x^c)^{-\alpha-1}}{c\alpha x^{c-1} (1 + x^c)^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} t^c \frac{(1 + t^c x^c)^{-\alpha-1}}{(1 + x^c)^{-\alpha-1}} = t^c,\end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Teorema 13. A distribuição de $X_{n:n}$, para $n \rightarrow \infty$ é do tipo Fréchet.

Demonstração. O Teorema 3 de Aly e Benkherouf (2011) garante que se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-r} \text{ para algum } r > 0,$$

$F(0) = 0$ e $Q(1) = \infty$, então a distribuição de $X_{1:n}$ é do tipo Fréchet. Para $F(x) = 1 - (1 + x^c)^{-\alpha}$, temos $F(0) = 0$ e $Q(1) = \infty$. Além disso

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + t^c x^c)^{-\alpha}}{(1 + x^c)^{-\alpha}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{x^c} + t^c}{\frac{1}{x^c} + 1} \right)^{-\alpha} \\ &= t^{-c\alpha},\end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

5.5 Estimação

Assim como feito para a distribuição HEE, podemos utilizar o método de Newton-Raphson ou algum outro método de otimização numérica para obter estimativas dos parâmetros da distribuição HEB a partir de uma amostra. Para o método de Newton-Raphson, as derivadas de primeira e segunda ordem da função de log-verossimilhança são necessárias. Em métodos do tipo quasi-Newton, como o BFGS por exemplo, a matriz de derivadas de segunda ordem é aproximada numericamente. Ao utilizar métodos quasi-Newton, devemos observar que se a convergência ocorre rapidamente, a matriz hessiana numérica pode não ser confiável. As expressões para a matriz hessiana envolvem cálculos tediosos, mas nem por isso são menos úteis.

As derivadas parciais de primeira ordem de L , função de log-verossimilhança para a densidade (5.2) e uma amostra de tamanho n , são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial k} &= -\frac{n \log(\theta)}{k^2} + \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^n \log \left[1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha} \right] - \alpha \bar{\theta} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha} \log(1 + x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{n}{k\theta} - \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sum_{i=0}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha}}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}}, \\ \frac{\partial L}{\partial c} &= \frac{n}{c} + \sum_{i=0}^n \log(x_i) - (1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c \log(x_i)}{1 + x_i^c} - k\alpha \bar{\theta} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha} \log(1 + x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}}, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i^c) - k\bar{\theta} \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha} \log(1 + x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}}.\end{aligned}$$

As derivadas parciais de segunda ordem são apresentadas a seguir

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial k^2} &= \frac{2n \log(\theta)}{k^3} - \frac{2}{k^3} \sum_{i=1}^n \left[1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha} \right] + \frac{2\alpha \bar{\theta}}{k^2} \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha} \log(1 + x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}} \\ &\quad + \bar{\theta} \alpha^2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha} [\log(1 + x_i^c)]^2}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}} \\ &\quad + \alpha^2 \bar{\theta}^2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-2k\alpha} [\log(1 + x_i^c)]^2}{[1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}]^2}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} &= -\frac{n}{k\theta^2} + \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha}}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}} \right], \\ \frac{\partial^2 L}{\partial c^2} &= -\frac{n}{c^2} + (1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i^c \log(x_i^c)}{1 + x_i^c} \right]^2 - (1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c [\log(x_i)]^2}{1 + x_i^c} \\ &\quad - \alpha \bar{\theta} (1 + k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1 + x_i^c)^{-1-k\alpha} [\log(x_i)]^2}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}} + k\alpha^2 \bar{\theta}^2 (1 + k) \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i^c (1 + x_i^c)^{-1-k\alpha} \log(x_i)}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}} \right]^2, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} &= -\frac{n}{\alpha^2} + k\bar{\theta} (1 + k) \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha} [\log(1 + x_i^c)]^2}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \theta} &= -\frac{n}{k^2 \theta} + \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha}}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}} + \alpha \left(1 + \frac{1}{k} \right) \frac{(1 + x_i^c)^{-k\alpha} \log(1 + x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}} \\ &\quad + \alpha \bar{\theta} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i^c)^{-2k\alpha}}{1 - \bar{\theta} (1 + x_i^c)^{-k\alpha}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial k \partial c} &= -\alpha \bar{\theta} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1+x_i^c)^{-1-k\alpha} \log(x_i)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}} + \bar{\theta} \alpha^2 (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{(1+x_i^c)^{-1-2k\alpha} \log(x_i) \log(1+x_i^c)}{[1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}]^2} \\
&\quad + \bar{\theta} \alpha^2 (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1+x_i^c)^{-1-k\alpha} \log(x_i) \log(1+x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}}, \\
\frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \alpha} &= -\bar{\theta} \sum_{i=1}^n \frac{(1+x_i^c)^{-k\alpha} \log(1+x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}} + \alpha \bar{\theta} (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{(1+x_i^c)^{-k\alpha} [\log(1+x_i^c)]^2}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}}, \\
&\quad + \alpha \bar{\theta}^2 (1+k) \sum_{i=1}^n \left[\frac{(1+x_i^c)^{-k\alpha} \log(1+x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}} \right]^2, \\
\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial c} &= \alpha (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1+x_i^c)^{-1-k\alpha} \log(x_i)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}} + \alpha \bar{\theta} (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1+x_i^c)^{-1-2k\alpha} \log(x_i)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}}, \\
\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \alpha} &= (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{(1+x_i^c)^{-k\alpha} \log(1+x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}} + \bar{\theta} (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{(1+x_i^c)^{-2k\alpha} \log(1+x_i^c)}{[1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}]^2}, \\
\frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \alpha} &= -\sum_{i=1}^n \frac{x_i^c \log(x_i)}{1+x_i^c} - \bar{\theta} (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1+x_i^c)^{-1-k\alpha} \log(x_i)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}} \\
&\quad + k\alpha \bar{\theta} (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1+x_i^c)^{-1-k\alpha} \log(x_i) \log(1+x_i^c)}{1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}} \\
&\quad + k\alpha \bar{\theta}^2 (1+k) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^c (1+x_i^c)^{-1-2k\alpha} \log(x_i) \log(1+x_i^c)}{[1 - \bar{\theta} (1+x_i^c)^{-k\alpha}]^2}.
\end{aligned}$$

Testes de hipóteses sobre os parâmetros podem ser obtidos utilizando a distribuição assintótica de $\hat{\phi} = (\hat{k}, \hat{\theta}, \hat{\lambda})$. Sob as mesmas condições de regularidade citadas no capítulo anterior, temos

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \approx N_4(0, K^{-1}), \quad (5.6)$$

em que K denota o valor esperado da matriz de informação de Fisher. Assim como para a distribuição HEE, para valores altos de n , temos $K \approx n^{-1} J_n$, em que

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \theta} & \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial c} & \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial k} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial c} & \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial c \partial k} & \frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \theta} & \frac{\partial^2 L}{\partial c^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial c \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial k} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \theta} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial c} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \end{bmatrix}.$$

Como K em (5.6) é normalmente desconhecido, podemos utilizar $\hat{K} = n^{-1} \hat{J}_n$ calculado no EMV $\hat{\phi}$ como uma estimativa de K . Isso possibilita a construção de intervalos de confiança para os parâmetros da distribuição Harris-Burr XII.

CAPÍTULO 6

Aplicação

Nesse capítulo apresentamos aplicações das família Harris-exponencial e Harris-Burr XII a conjuntos de dados reais.

6.1 Géiser de Kiama

O conjunto de dados apresentado na Tabela 6.1 contém 64 observações do tempo, em segundos, entre erupções consecutivas do géiser de Kiama (*Kiama Blowhole*). O géiser de Kiama é uma atração turística localizada aproximadamente a 120km ao sul de Sydney. A elevação da maré causa a erupção através de uma abertura, frequentemente molhando todos os que estão próximos das barreiras de contenção. Os valores foram observados no dia 12 de julho de 1998 com o auxílio de um relógio digital pelo professor Jim Irish (*University of Technology, Sydney*). A Figura 6.1 sugere que não há tendência ou correlação serial de primeira ordem presente na amostra. Os dados foram obtidos no sítio eletrônico StatsSci.org (Smyth, 2012).

Tabela 6.1 Tempo entre erupções consecutivas do géiser de Kiama.

83	51	87	60	28	95	8	27	15	10	18	16	29	54	91	8
17	55	10	35	47	77	36	17	21	36	18	40	10	7	34	27
28	56	8	25	68	146	89	18	73	69	9	37	10	82	29	8
60	61	61	18	169	25	8	26	11	83	11	42	17	14	9	12

Esse conjunto de dados pode ser usado para ilustrar os modelos de Poisson e exponencial em cursos introdutórios. A pergunta principal é se a ocorrência de erupções segue ou não um processo de Poisson. Em caso afirmativo, o tempo de espera entre erupções deve ser exponencialmente distribuído. Então, espera-se que a variância dos dados (1139.10) seja aproximadamente o quadrado da média amostral (39.82), mas isso não ocorre. Na ausência de um modelo com fundamentação nas leis da Física envolvidas na erupção, podemos recorrer a distribuições de probabilidade conhecidas que permitam modelar bem os dados. Observamos inicialmente que a variável aleatória nesse conjunto de dados é contínua e positiva, o que nos sugere descartar distribuições como a normal, t de Student, normal-assimétrica, logística, Gumbel, ou qualquer outra com suporte em toda a reta real.

Para esse conjunto de dados, comparamos o ajuste da distribuição Harris-exponencial aos ajustes de outras cinco distribuições alternativas, a saber:

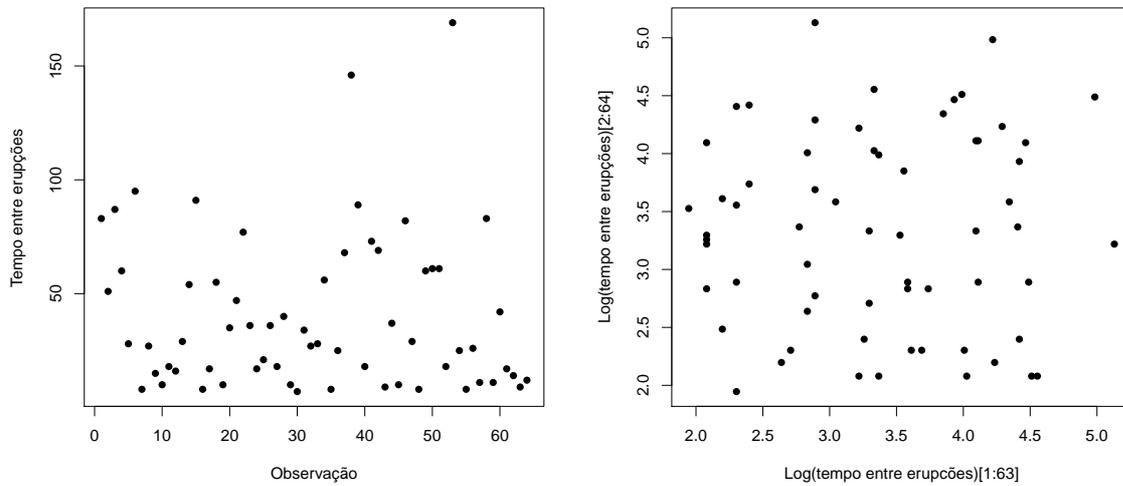


Figura 6.1 Aparente ausência de tendência ou correlação serial para o tempo entre erupções do géiser de Kiama.

- distribuição Weibull, com fda $F(x) = 1 - \exp[-(x/\lambda)^k]$;
- distribuição gama, com função densidade de probabilidade (fdp) $f(x) = [\beta^\alpha \Gamma(\alpha)]^{-1} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta)$;
- distribuição Weibull exponencializada (*EW distribution*) (Mudholkar e Srivastava, 1993), com fda $F(x) = \{1 - \exp[-(x/\lambda)^k]\}^\alpha$;
- distribuição exponencial estendida de Marshall e Olkin (*MOEE distribution*) (Marshall e Olkin, 1997), com fda $F(x) = \theta \exp(-\lambda x) [1 - (1 - \theta) \exp(-\lambda x)]^{-1}$;
- distribuição exponencial exponencializada (*EE distribution*) (Gupta and Kundu, 1999), com fda $F(x) = [1 - \exp(-x/\lambda)]^\alpha$;

em que os parâmetros das distribuições utilizadas são reais estritamente positivos.

Os ajustes das distribuições EE e EW são frequentemente usados como referencial de qualidade para diversas novas distribuições propostas. As estimativas para os parâmetros das distribuições citadas foram obtidas através da rotina `fitdistr()` do pacote MASS do R. A Tabela 6.2 apresenta o logaritmo da função de verossimilhança maximizada (LVM), critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação bayesiano (BIC) e a estatística de Cramér-von-Mises (CvM) para os seis ajustes. A estatística de Cramér-von-Mises é utilizada para testes de adequação e é definida, para uma amostra em ordem crescente (x_1, x_2, \dots, x_n) e uma fda $F(x)$, como

$$\text{CvM} = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right]^2.$$

Em geral, não rejeitamos a hipótese de $F(x)$ modelar bem os dados se o valor de CvM for baixo. Perceba que CvM não é menor que $(12n)^{-1}$. Para mais informações veja Chen e Balakrishnan (1995).

A distribuição Harris-exponencial teve a melhor performance nos critérios AIC, BIC e CvM superando as distribuições EW e EE. Isso sugere que a nova distribuição, apresentada nesse trabalho, é potencialmente útil. O histograma na Figura 6.2 apresenta as densidades das três distribuições mais apropriadas para os dados entre as seis baseado nos valores de AIC. Essa figura sugere que os dados são bem modelados pelas distribuições. Testes de Kolmogorov-Smirnoff e Anderson-Darling para a adequação do ajuste da distribuição Harris-exponencial apresentam níveis descritivos, respectivamente, iguais a 0.9412 e 0.5759. Logo, não rejeitam a hipótese dos dados serem distribuídos de acordo com a nova densidade. Por fim, a Figura 6.3 mostra um gráfico de quantis com envelopes simulados por bootstrap que, também, sugere a adequação da distribuição aos dados.

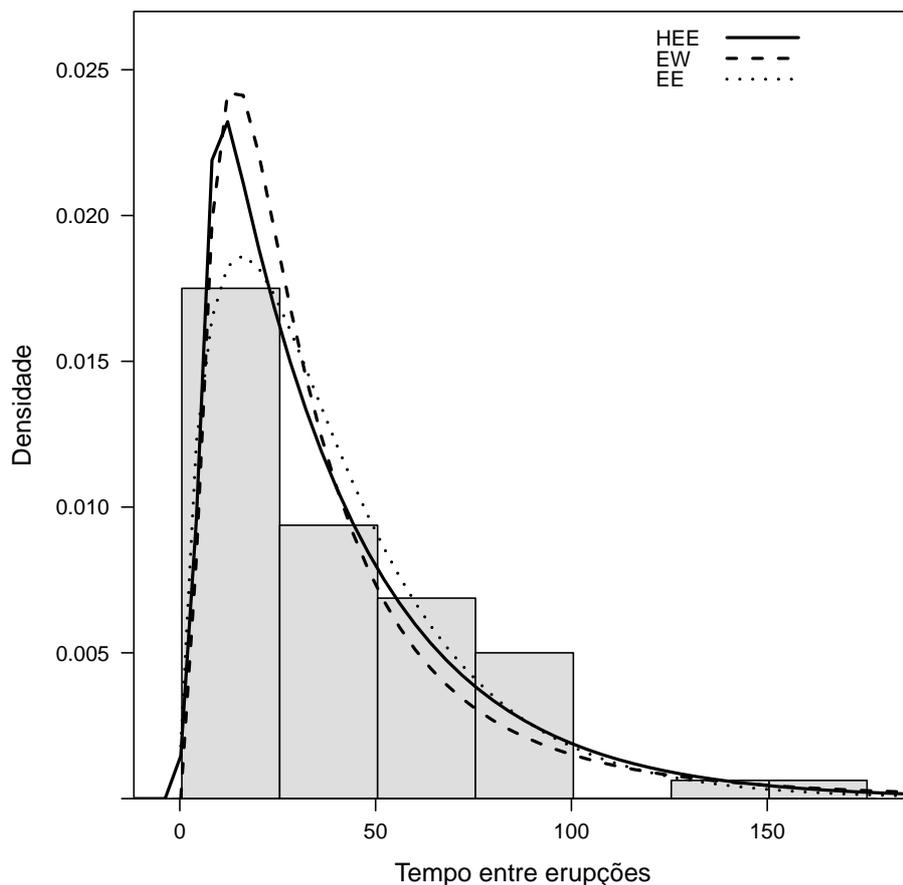


Figura 6.2 Os três melhores ajustes aos dados do géiser de Kiama segundo o AIC.

Tabela 6.2 Ajustes dos modelos considerados aos dados do géiser de Kiama.

	ϕ	$\hat{\phi}$	LVM	AIC	BIC	CvM
HEE	(k, θ, λ)	(19.64, 22.39, 0.03)	-292.47	590.93	597.41	0.0691
EW	(α, k, λ)	(18.80, 0.41, 1.45)	-293.97	593.95	600.42	0.1125
MOEE	(θ, λ)	(2.07, 0.04)	-298.33	600.66	604.97	0.1163
EE	(α, λ)	(1.73, 28.53)	-295.67	595.33	599.65	0.1430
Weibull	(k, λ)	(1.27, 43.21)	-296.90	597.80	602.12	0.1269
Gama	(α, β)	(1.62, 0.04)	-295.90	595.80	600.12	0.1410

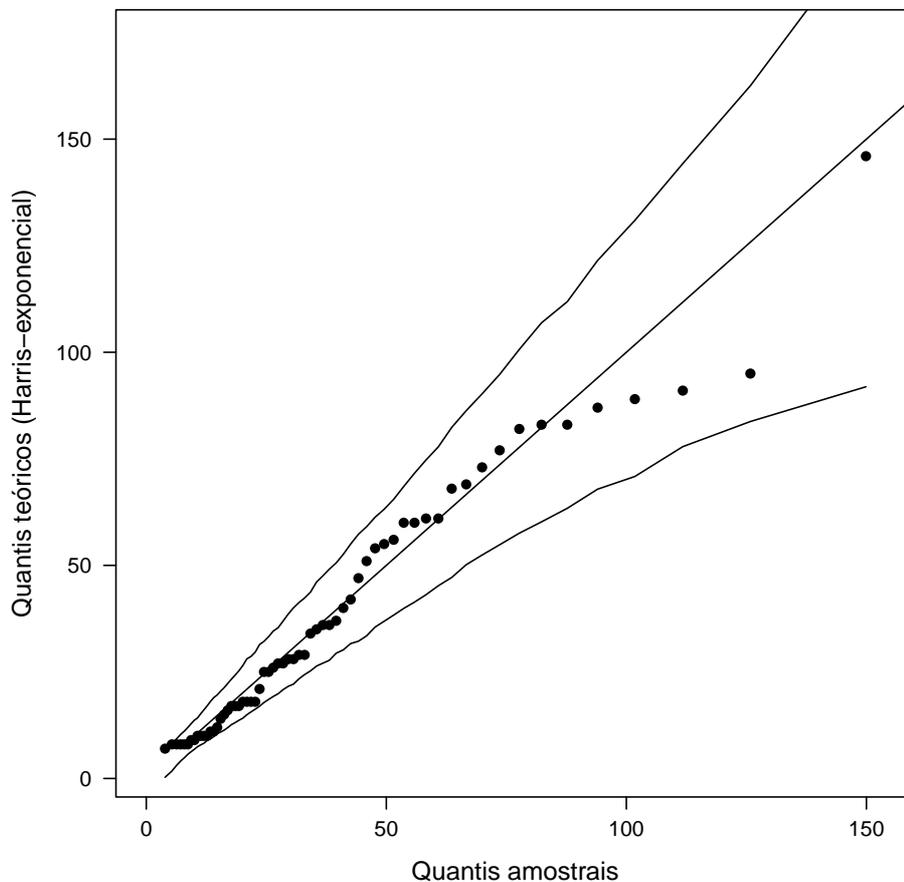


Figura 6.3 Gráfico de quantis para o ajuste da distribuição Harris-exponencial ao tempo entre erupções do géiser de Kiama.

6.2 Géiser de Yellowstone

Bimodalidade é uma característica de poucas famílias de densidades e merece ser explorada. Considere o conjunto de dados denominado `faithful` do pacote `datasets` normalmente presente na instalação padrão do R. Esse conjunto de dados contém observações de duas var-

íaveis aleatórias e é tradicionalmente utilizado para ilustrar o ajuste de misturas de distribuições normais.

A primeira variável aleatória utilizada aqui corresponde à segunda coluna do conjunto de dados e representa o tempo de espera entre a ocorrência de duas erupções consecutivas do Old Faithful, um géiser localizado no parque de Yellowstone. Os dados estão apresentados na Tabela 6.3. A Figura 6.4 mostra o histograma para o conjunto de dados da Tabela 6.3. Como

Tabela 6.3 Tempo entre erupções para o géiser Old Faithful

79	54	74	62	85	55	88	85	51	85	54	84	78	47
83	52	62	84	52	79	51	47	78	69	74	83	55	76
78	79	73	77	66	80	74	52	48	80	59	90	80	58
84	58	73	83	64	53	82	59	75	90	54	80	54	83
71	64	77	81	59	84	48	82	60	92	78	78	65	73
82	56	79	71	62	76	60	78	76	83	75	82	70	65
73	88	76	80	48	86	60	90	50	78	63	72	84	75
51	82	62	88	49	83	81	47	84	52	86	81	75	59
89	79	59	81	50	85	59	87	53	69	77	56	88	81
45	82	55	90	45	83	56	89	46	82	51	86	53	79
81	60	82	77	76	59	80	49	96	53	77	77	65	81
71	70	81	93	53	89	45	86	58	78	66	76	63	88
52	93	49	57	77	68	81	81	73	50	85	74	55	77
83	83	51	78	84	46	83	55	81	57	76	84	77	81
87	77	51	78	60	82	91	53	78	46	77	84	49	83
71	80	49	75	64	76	53	94	55	76	50	82	54	75
78	79	78	78	70	79	70	54	86	50	90	54	54	77
79	64	75	47	86	63	85	82	57	82	67	74	54	83
73	73	88	80	71	83	56	79	78	84	58	83	43	60
75	81	46	90	46	74								

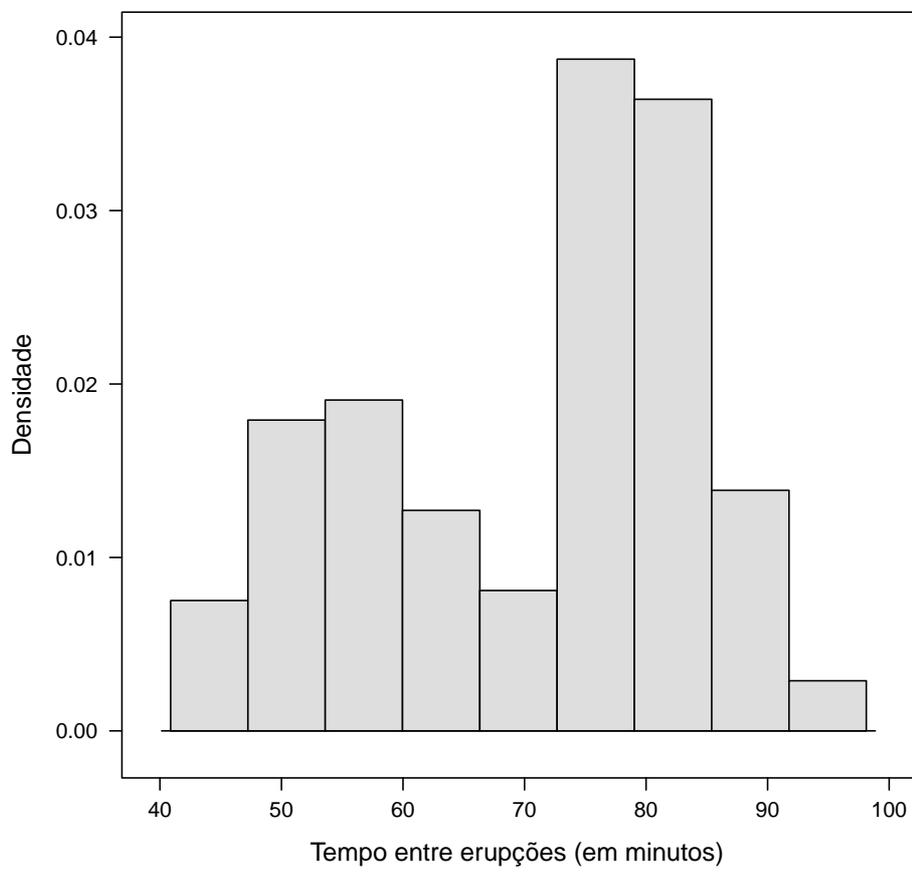
podemos perceber, há presença de bimodalidade.

A esse conjunto de dados foi ajustado uma distribuição Harris-Burr XII com parâmetros adicionais de escala e localização com densidade dada por

$$f(x, k, \theta, c, \alpha, \sigma, \mu) = \frac{c\alpha\theta^{\frac{1}{k}}u^{c-1}}{(1+u^c)^{1+\alpha} [1 - \bar{\theta}(1+u^c)^{-k\alpha}]^{1+1/k}},$$

em que $u = \sigma^{-1}(x - \mu)$ e $\mu, \sigma > 0$. Os parâmetros foram ajustados através da função `fitdistr()` do pacote MASS, com valores iniciais providos por arrefecimento simulado através da função

Figura 6.4 Presença de bimodalidade no tempo entre erupções do Old Faithful.
Histograma para o tempo entre erupções



GenSA() do pacote GenSA em R. Uma mistura de densidades normais representada por

$$h(x) = \lambda \sigma_1^{-1} \phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) + (1 - \lambda) \sigma_2^{-1} \phi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right),$$

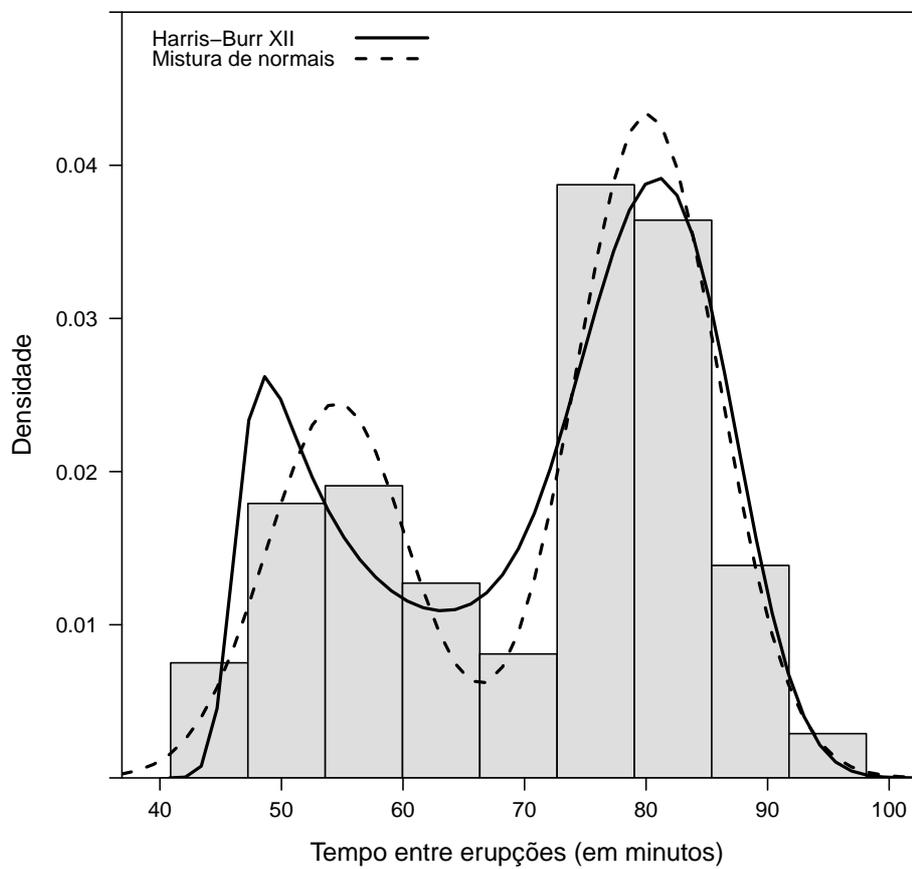
com $0 < \lambda < 1$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ e $\phi(\cdot)$ representando a função Gaussiana padrão, foi ajustada usando a função `nomalmixEM()` do pacote `mixtools` em R. Os dois ajustes podem ser encontrados na Tabela 6.4 com medidas relativas de qualidade de ajuste. O logaritmo da função de verossimilhança maximizada para ambos os ajustes foram próximos, sendo -1034.03 para a mistura de normais e -1038.44 para o modelo Harris-Burr XII. As duas densidades estimadas estão sobrepostas ao histograma dos dados na Figura 6.5.

Tabela 6.4 Parâmetros estimados para o tempo entre erupções do Old Faithful

Modelo	Parâmetro	EMV	Erro-padrão	AIC	BIC	CvM
Harris-Burr XII	k	22.3062	2.0982×10^{-2}	2080.89	2102.53	30.87
	θ	0.0001	8.5370×10^{-5}			
	c	48.7521	7.3411×10^{-2}			
	α	6.6527	4.5274×10^{-4}			
	σ	75.2536	1.9180×10^{-4}			
	μ	40.0204	2.7802×10^{-1}			
	λ	0.3609	0.0322			
Mistura de normais	μ_1	54.6149	0.7047	2078.00	2096.03	31.37
	σ_1	5.8712	0.5448			
	μ_2	80.0911	0.4980			
	σ_2	5.8677	0.3909			

A mistura de distribuições normais possui um forte atrativo para a maioria das boas propriedades matemáticas da distribuição normal. No entanto, quando utilizada para modelagem de dados estritamente positivos com a intenção de obtermos previsões, o modelo de mistura de normais pode conduzir a valores negativos, e portanto, fora do espaço amostral. Tal “armadilha” é consideravelmente mais grave quando observada no contexto de modelos de regressão, pois um ponto em regiões remotas do espaço das covariáveis pode levar mais facilmente a valores estranhos das variáveis preditas. Fora do espaço amostral os valores preditos não fazem sentido algum. Por essa razão, defendemos nesse texto que os modelos devem respeitar ao máximo as características naturais dos dados, especialmente quando utilizados para previsões. Sob esse ponto de vista, o modelo Harris-Burr deve ser preferido por assumir que o tempo entre erupções é de fato positivo, embora tenha um parâmetro a mais para um ajuste apenas comparável ao da mistura de normais.

Figura 6.5 A distribuição proposta é comparável à modelagem tradicional para os dados do Old Faithful
Histograma para o tempo entre erupções



6.3 Modelagem de imagens SAR

A seguir, mostramos uma aplicação da distribuição Harris-exponencial na modelagem de imagens SAR (*synthetic aperture radar*). Imagens SAR são usada em sensoriamento remoto e mapeamento de superfícies, dentro e fora de nosso planeta. O tratamento estatístico de imagens SAR permite detectar alvos, identificar bordas e reduzir o ruído presente nas mesmas, por exemplo.

O conjunto de dados consiste de aproximadamente trinta e dois mil pontos representando o valor da intensidade dos pixels de uma área homogênea de uma imagem da região de Foulum na Dinamarca. O conjunto de dados e os detalhes do mesmo podem ser solicitados por email (lgbpinho@gmail.com). Outras regiões desse conjunto de dados foram utilizadas em Cintra et al. (2012) com o auxílio da distribuição beta-normal generalizada, obtida através do método apresentado no Capítulo 2 e da distribuição normal generalizada proposta em Nadarajah (2005). No contexto de modelagem de imagens SAR, duas distribuições são muito populares: a distribuição K e a distribuição G^0 . Para mais detalhes sobre essas duas distribuições e outras informações sobre o assunto, veja, por exemplo, Frery et al. (1997). As distribuições foram ajustadas aos dados utilizando a função `fitdistr()` em R. A Tabela 6.5 mostra o sumário dos três ajustes. Novamente, foi considerado o logaritmo da função de verossimilhança maximizada, AIC, BIC e estatística do teste de Cramér-von-Mises como medidas de qualidade de ajuste e seleção de modelos. A distribuição Harris-exponencial superou as distribuições K e G^0 em todos os critérios considerados. A Figura 6.6 mostra as três densidades ajustadas sobrepostas ao histograma dos dados.

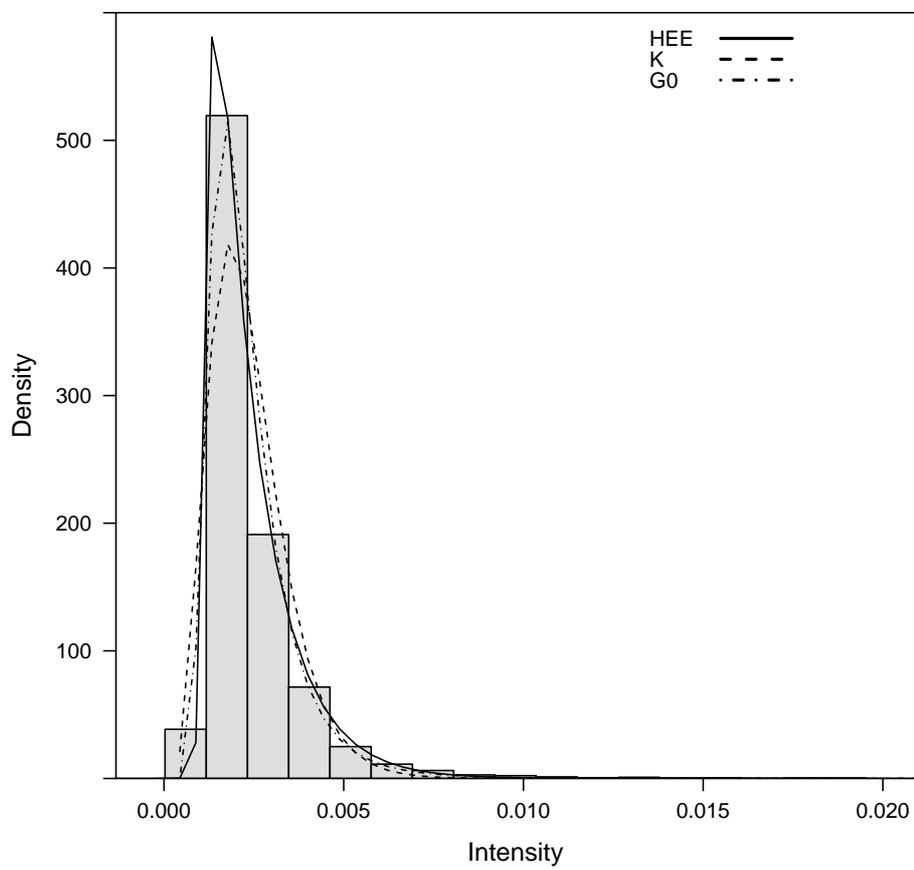
Tabela 6.5 Distribuições ajustadas ao conjunto de dados de Foulum

	Estimativas dos parâmetros			AIC	BIC	CVM
HEE	1.26×10	3.19×10^5	8.34×10^2	-62615.05	-62595.16	2.23
K	2.37×10^{-3}	5.76	3.40×10	-61218.88	-61199.00	19.65
G^0	7.82×10	-6.23	2.47×10^{-2}	-62413.62	-62393.74	962.31

No entanto, a distribuição Harris-exponencial mostrou-se menos adequada que as demais para a modelagem de áreas heterogêneas ou muito heterogêneas, como áreas reflorestadas e urbanas respectivamente. Embora as distribuições K e G^0 tenham fornecido ajustes comparáveis ao da distribuição Harris-exponencial, a última apresenta propriedades muito mais simples. O processo de estimação para as distribuições K e G^0 é bastante complicado se comparado à estimação na família Harris-exponencial.

Outros conjuntos de dados foram investigados. A distribuição Harris-Weibull mostrou um ajuste superior ao da distribuição EW para o conjunto de dados em Suprawhardana e Prayoto (1999) de observações do tempo entre falhas de duas bombas hidráulicas em um reator nuclear. O conjunto de observações de tempo até a falha de dispositivos com taxa de risco em forma de banheira em Aarset (1987) foi bem modelado pela distribuição Harris-Burr XII de seis parâmetros, no entanto não conseguiu superar a distribuição beta-XTG apresentada em Cordeiro et al. (2012).

Figura 6.6 As distribuições HEE, K e G^0 parecem adequadas aos dados de Foulum.
Foulum dataset



Considerações finais

Nesse trabalho de dissertação apresentamos algumas propriedades inéditas da classe de distribuições generalizadas Harris-G, a qual foi apresentada pela primeira vez em Aly e Benkheouf (2011). Obtivemos métodos para decomposição da fdp do caso geral Harris-G como combinação linear de densidades exponencializadas. Esse resultado foi útil na obtenção de alguns outros resultados gerais. Alguns resultados de Marshall e Olkin (1997) foram generalizados.

Duas famílias integrantes da classe Harris-G foram apresentadas e estudadas. No momento em que o texto foi produzido, tais distribuições não eram ainda utilizadas. A distribuição Harris-exponencial generaliza o modelo exponencial de Marshall e Olkin e mostra-se como uma distribuição simples, porém útil para a modelagem de dados positivos e assimétricos. Comparada à distribuição MOEE, a Harris-exponencial mostrou-se capaz de modelar densidades decrescentes de maior variabilidade e densidades unimodais de menor variabilidade. A distribuição Harris-Burr XII possui como maiores atrativos sua grande flexibilidade e a quantidade de casos particulares decorrentes da distribuição Burr XII. Essa família pode apresentar bimodalidade e é uma alternativa à misturas de normais para dados positivos, especialmente quando previsão é o foco da análise.

Enfatizamos, por fim, que as expansões apresentadas ao longo do texto são de grande valor para os aspectos computacionais de aplicações das distribuições Harris-G. Embora pareça mais simples e conveniente utilizar as rotinas de integração numérica de linguagens como C, R e Ox, a chance de obtermos erros não deve ser desconsiderada. Erros em tais rotinas aparecem em inúmeras situações e o tratamento dos mesmos pode elevar o custo computacional, sendo esse problema mais severo em simulações com grande quantidade de iterações. Recomenda-se, então, utilizar as expansões para obter as quantidades apresentadas nessa dissertação (momentos, entropias, entre outras). Para implementar os somatórios infinitos deve-se utilizar algum critério de parada. A configuração dos parâmetros das densidades apresentadas pode causar variação na quantidade de termos utilizados nos somatórios até que se alcance a convergência de acordo com o critério de parada escolhido. Os módulos dos coeficientes apresentados no caso $\theta > 1$ do Teorema 2 crescem indefinidamente, porém as parcelas decrescem devido aos fatores envolvendo as densidades exponencializadas. Dessa forma o critério de parada escolhido deve ser baseado no valor das parcelas do somatório, e não nos módulos dos coeficientes.

Os trabalhos futuros nessa classe envolvem o desenvolvimento de novas distribuições e a aplicação das mesmas em problemas gerais de regressão. Entre as distribuições candidatas a serem desenvolvidas na classe Harris-G, chamamos a atenção para a Harris-Gumbel e Harris-Fréchet, devido à grande aplicabilidade de ambas distribuições base; a Harris-Weibull por ter sido capaz de modelar alguns conjuntos de dados durante a produção desse texto e por generalizar a Harris-exponencial; a Harris-Makeham e Harris-Gompertz por sua aplicabilidade em

demografia e Atuária, especialmente porque os parâmetros k e θ podem ter alguma interpretação interessante nesse contexto; e por fim, a Harris-normal e Harris-Wishart são potencialmente úteis no tratamento de imagens SAR.

Referências Bibliográficas

- [1] Aarset, M. V. (1987). How to identify bathtub hazard rate. *IEEE Transactions Reliability*, 36:106–108.
- [2] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications: New York.
- [3] Aly, E. and Benkherouf, L. (2011). A new family of distributions based on probability generating functions. *Sankhya B - Applied and Interdisciplinary Statistics*, 73(1):70–80.
- [4] Arnold, B. C., Balakrishnan, N., and Nagaraja, H. N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. Wiley-Interscience, 1st edition.
- [5] Barreto-Souza, W. and Bakouch, H. S. (2011). A new lifetime model with decreasing failure rate. *Statistics*.
- [6] Beck, C. (2009). Generalized information and entropy measures in Physics. arXiv:0902.1235v2 [cond-mat.stat-mech].
- [7] Casella, G. and Berger, R. L. (2001). Duxbury Press, 2nd edition. *Statistical Inference*.
- [8] Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009). On some lifetime distributions with decreasing failure rate. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(12):4433–4330.
- [9] Chen, G. and Balakrishnan, N. (1995). A general purpose approximate goodness-of-fit test. *Journal of Quality Technology*, 27:154–161.
- [10] Choudhury, A. (2005). A simple derivation of moments of the exponentiated Weibull distribution. *Metrika*, 62:17–22.
- [11] Cintra, R. J., Rêgo, L. C., Cordeiro, G. M. and Nascimento, A. D. C. (2012). Beta generalized normal distribution with an application for SAR image processing. *Statistics*. DOI: 10.1080/02331888.2012.748776.
- [12] Cordeiro, G. M. and Nadarajah, S. (2011). Closed form expressions for moments of a class of beta generalized distributions. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 25:14–33.
- [13] Cordeiro, G. M., Ortega, E., and Silva, G. (2012). The beta extended Weibull family. *Journal of Probability and Statistical Science*, 10:15–40.

- [14] Eugene, N., Lee, C., and Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Communication in Statistics: Theory and Methods*, 31:497–512.
- [15] Famoye, F., Lee, C., and Olumolade, O. (2005). The beta–Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 4:121–136.
- [16] Frery, A. C., Muller, H. J., Yanasse, C. C. F. e Sant’Anna, S. J. S. (1997). A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 35:648–659.
- [17] Ghitany, M. E., Al-Awadhi, F. A. and Alkhalfan, L. A. (2007). Marshall-Olkin extended lomax distribution and its application to censored data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 36:1855–1866.
- [18] Gradshteyn, I. and Ryzhik, I. (2007). *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, San Diego, 7th edition.
- [19] Gupta, R. C., Gupta, R. D., and Gupta, P. L. (1998). Modeling failure time data by Lehmann alternatives. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 27:887–904.
- [20] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999). Generalized exponential distributions. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 41:173–188.
- [21] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential distribution: an alternative to gamma and Weibull distributions. *Biometrical Journal*, 43:117–130.
- [22] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2002). Generalized exponential distribution: Statistical inferences. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 1:101–118.
- [23] Harris, T. E. (1948). Branching processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19(4):474–494.
- [24] Hosking, J. R. M. (1990). L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of ordered statistics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 52:105–124.
- [25] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106:620–630.
- [26] Jones, M. C. (2004). Families of distributions arising from distributions of order statistics. *Test*, 13:1–43.
- [27] Kotz, S. and Nadarajah, S. (2001). *Extreme Value Distributions: Theory and Applications*. Wiley, 1st edition.
- [28] Kus, C. (2006). A new lifetime distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(9):4497–4509.

- [29] Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley and Sons, 2nd edition.
- [30] Lehmann, E. L. (1953). The power of rank tests. *Annals of Mathematical Statistics*, 24:23–43.
- [31] Lu, W. and Shi, D. (2012). A new compounding life distribution: the Weibull–Poisson distribution. *Journal of Applied Statistics*, 39(1):21–38.
- [32] Nocedal, J. and Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer, 2nd edition.
- [33] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84(3):641–652.
- [34] Morais, A. L. and Barreto-Souza, W. (2011). A compound class of Weibull and power series distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(3):1410–1425.
- [35] Mudholkar, G. and Srivastava, D. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-real data. *IEEE Transaction on Reliability*, 42:299–302.
- [36] Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K., and Freimer, M. (1995). The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, 37:436–445.
- [37] Nadarajah S. (2005). A generalized normal distribution. *Journal of Applied Statistics*, 32:685–694.
- [38] Nadarajah, S. and Gupta, A. K. (2004). The beta Fréchet distribution. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 14:15–24.
- [39] Nadarajah, S. and Gupta, A. K. (2007). The exponentiated gamma distribution with application to drought data. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 59:29–54.
- [40] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2004). The beta Gumbel distribution. *Mathematical Problems in engineering*, 4:323–332.
- [41] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006a). The beta exponential distribution. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(6):689–697.
- [42] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006b). The exponentiated type distributions. *Acta Applicandae Mathematicae*, 92:97–111.
- [43] Niven, I. (1969). Formal power series. *The American Mathematical Monthly*, 76(8):871–889.
- [44] Paranaíba, P. F., Ortega, E. M. M., Cordeiro, G. M., and Pescim, R. R. (2011). The beta Burr XII distribution with application to lifetime data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55:1118–1136.

- [45] Pinho, G., Cordeiro, G. M., and Nobre, J. S. (2013). The gamma–exponentiated Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Application* – (aceito).
- [46] Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., and Marichev, O. I. (1990). *Integrals and series, volume 3: more special functions*. Gordon and Breach Science Publishers: Amsterdam, 1 edition.
- [47] Ristić, M. M. and Balakrishnan, N. (2011). The gamma–exponentiated exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*.
- [48] Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–432.
- [49] Sillitto, G. P. (1969). Derivation of approximants to the inverse distribution function of a continuous univariate population from the order statistics of a sample. *Biometrika*, 56(3):641–650.
- [50] Smyth, G. K. (2012). Kiama blowhole eruptions. Obtido em <http://www.statsci.org/data/oz/kiama.html>, 10 de agosto.
- [51] Suprawhardana, M. S. and Prayoto, S. (1999). Total time on test plot analysis for mechanical components of the rsg-gas reactor. *Atom Indones*, 25.
- [52] Zografos, K. and Balakrishnan, N. (2009). On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology*, 6:344–362.