



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Pós-graduação em Física

**Uma investigação sobre o colapso da
função de onda**

Marcos George Magalhães Moreno Filho

Dissertação de Mestrado

Recife
2013

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Marcos George Magalhães Moreno Filho

Uma investigação sobre o colapso da função de onda

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Fernando Roberto de Luna Parisio Filho*

Recife
2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Moreno Filho, Marcos George M.

Uma investigação sobre o colapso da função de onda / Marcos
George M. Moreno Filho. – Recife: O Autor, 2013.

58 f.: fig., gráf.

Orientador: Fernando Roberto de Luna Parísio Filho.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Física, 2013.

Inclui referências e apêndices.

1. Teoria quântica. 2. Teoria das medidas. I. Parísio Filho, Fernando
Roberto de Luna (orientador). II. Título.

530.12

CDD (22. ed.)

FQ 2014-45



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-7640/2126-8449 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.ufpe.br/ppqfisica/> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Marcos George Magalhães Moreno Filho

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE O COLAPSO DA FUNÇÃO DE ONDA

A Banca Examinadora composta pelos Professores Fernando Roberto de Luna Parisio Filho (Presidente e Orientador), Daniel Felinto Pires Barbosa, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Ernesto Fagundes Galvão, do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em dezenove de julho de dois mil e treze.

Prof. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Presidente e Orientador

Prof. Daniel Felinto Pires Barbosa

Prof. Ernesto Fagundes Galvão

Agradecimentos

Agradeço à Capes pelo incentivo financeiro, e a todos aqueles que contribuíram com minha formação, especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho e ao meu professor de Teoria Quântica 1, Prof. Dr. Frederico Borges de Brito.

Resumo

Por muito tempo a Teoria Quântica foi desenvolvida de forma pragmática, certamente devido à existência de diversos aspectos da mesma que, por terem uma aplicação mais direta, chamavam para si a maior parte dos esforços. Além disto, limitações tecnológicas colocavam muitas questões fundamentais da teoria em um campo mais filosófico do que físico. No status atual de desenvolvimento da física, somos capazes de direcionar a merecida atenção a aspectos mais fundamentais da teoria. Neste trabalho, propomos um experimento que seria, em princípio, capaz de distinguir a escala de tempo do colapso de uma função de onda. Usando um par de fótons emaranhados, sugerimos teoricamente que, através de um aparato conceitualmente simples, realizando apenas um par de medidas, uma para cada fóton, é possível, através de várias repetições do processo, distinguir um cenário onde a função de onda apresenta um colapso instantâneo, de um cenário onde o mesmo leva um intervalo de tempo finito para se concretizar.

Palavras-chave: Colapso da função de onda. Teoria da medição. Fundamentos da teoria quântica.

Abstract

For a long time quantum theory was developed pragmatically, certainly due to the existence of many of its aspects that, by having a more direct application, demanded most of the efforts. Besides, technological limitations placed many fundamental questions about the theory in a more philosophical perspective than physical one. In the current status of physics, we are able to give the deserved attention to the most fundamental aspects of the theory. In this dissertation, we propose an experiment that would, in principle, be able to determine the time scale of the collapse of a wave function. By using a pair of entangled photons in a conceptually simple apparatus, carrying on a pair of measurements it is possible through many iterations of the process to distinguish a situation where the wave function has an instantaneous collapse from a scenario where it takes a finite time interval to occur.

Keywords: Collapse of the wave function. Measurement theory. Foundations of quantum theory.

Lista de Figuras

- | | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Padrão obtido por fótons gerados através de conversão paramétrica descendente. Fotografado por M. RECK Apud KWIAT et al[K ⁺ 95], 1995, p 4338 | 24 |
| 2.2 | Procedimento de geração de fótons, KWIAT et al[K ⁺ 95], 1995, p 4339 | 25 |
| 3.1 | A caixa amarela consiste em uma fonte de pares de fótons emaranhados, representados pelos pacotes de onda verde e vermelho, que são separados espacialmente e detetados pelos detetores LD e RD | 37 |
| 3.2 | Os pacotes de onda estão representando cada um dos fótons, em verde o fóton que segue para o detetor da esquerda e em vermelho o fóton que segue para o detetor da direita. A ilustração mostra que eles possuem um atraso entre si natural das limitações experimentais | 38 |
| 3.3 | Existe uma probabilidade não nula de que as duas sondagens ocorram em um intervalo de tempo inferior a δt | 41 |

Sumário

1	Introdução	9
2	Preliminares	12
2.1	Um pouco de variáveis estocásticas	12
2.1.1	Noções básicas	12
2.1.2	Distribuição conjunta	14
2.1.3	Função de variáveis aleatórias	15
2.2	Conversão Paramétrica	16
2.2.1	Campo eletromagnético	16
2.2.2	Tratamento quântico de interações paramétricas	21
2.2.3	Fonte eficiente de fótons emaranhados	23
2.3	Elementos de teoria da medição	25
2.3.1	Colapso como um processo estocástico	30
2.3.2	Medidas fracas	31
3	Investigando o colapso do estado de fótons emaranhados	35
3.1	Hipóteses e considerações	36
3.2	Desenvolvimento	37
3.3	Uma caso específico	45
4	Conclusão	48
	Referências Bibliográficas	49
A	Apêndice	51

Introdução

Apesar do grande sucesso da teoria quântica, que ao lado da teoria da relatividade, constitui um pilar da física contemporânea, o problema da medição permanece consideravelmente obscuro. Várias tentativas de compreender como um processo quântico é observado foram propostas desde o surgimento da teoria até os dias atuais. Conhecemos a dinâmica da função de onda, sabemos que a mesma obedece à equação de Schrödinger, todavia somos incapazes de observar diretamente a função de onda.

Aharonov e Rohrlich em seu livro *Quantum Paradoxes* [AR05] nos contam que nos primeiros anos da teoria, mais precisamente em meados de 1927, a famosa discussão entre Einstein e Bohr sobre o assunto trouxe à tona várias complicações conceituais que a então nova teoria apresentava. Por diversas vezes Bohr foi capaz de solucionar de forma satisfatória vários problemas propostos por Einstein utilizando uma divisão ad hoc do mundo em partes clássica e quântica. No entanto essa divisão não era precisa; de fato nunca ficou claro que procedimento deveríamos adotar para fazê-la.

Uma das divisões mais famosas e consideravelmente bem sucedida consiste em tratar o objeto de estudo como sendo quântico e o aparato utilizado para medi-lo como um sistema clássico. Fazendo isso vários problemas da teoria quântica são ignorados, o que implica que apesar deste modelo servir para diversas aplicações, ao utilizá-lo estamos dando as costas à uma vasta série de fenômenos inusitados que a teoria pode revelar.

Assim surge a necessidade de tratar tanto o aparato quanto o sistema de forma quântica. Sem dúvida pagamos o preço lidando com aspectos consideravelmente mais complicados e com as limitações da teoria. No entanto, tal tratamento nos permite usufruir das propriedades do aparato para realizar medidas de maneiras que classicamente seriam inimagináveis.

O conjunto de técnicas e procedimentos para lidar com este tratamento formam o que hoje pode ser chamado de teoria da medição. Vale ressaltar que nunca houve consenso até mesmo sobre a necessidade de tal teoria. O famoso físico John Bell [Bel04] argumenta que o processo de medida não consiste em um fenômeno fundamental e que deveria surgir da própria teoria. Em poucas palavras: um conhecimento mais aprofundado da teoria principal seria mais plausível do que criar uma teoria auxiliar.

Procedendo com o tratamento quântico também do aparato, um dos problemas que mais se evidenciam é o da redução da função de onda. Sabemos que a evolução temporal na teoria quântica é dada pela equação de Heisenberg. Dado um observável A em um sistema representado pelo hamiltoniano \mathcal{H} , temos:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, A] + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (1.1)$$

que no cenário de Schrödinger nos leva à seguinte evolução temporal de um determinado estado $|\psi(t_0)\rangle$ sujeita ao hamiltoniano \mathcal{H} :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (1.2)$$

sendo $U(t, t_0)$ o operador de evolução temporal, dado por:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathcal{H}}, \quad (1.3)$$

assumindo que \mathcal{H} não depende do tempo.

Note que isso implica que nenhum tipo de interação descrita por um hamiltoniano pode gerar uma projeção. O único tipo de evolução temporal que a equação dinâmica da teoria quântica admite é uma evolução unitária.

Sabemos no entanto, como é ensinado em vários livros [CTDL77][Sak94][Sha94] recomendados desde a graduação, que ao realizarmos uma medida de um determinado observável em um estado quântico, digamos $|\psi\rangle$, obtemos como resposta um dos autovalores do observável e, imediatamente após a medida, verificamos que o estado do sistema evolui para uma projeção normalizada do estado anterior no subespaço relacionado com o autovalor obtido na medida.

De forma mais específica, se temos um sistema descrito pelo o estado $|\psi\rangle$ e em um dado instante medimos o observável A , obtendo como resultado o autovalor a , então no instante seguinte, o sistema se encontra no estado:

$$|\psi'\rangle = \frac{\sum_{i=1}^g |a_i\rangle \langle a_i | \psi \rangle}{\sqrt{\sum_{i=1}^g \langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle}}, \quad (1.4)$$

onde $\{|a_i\rangle\}_{i=0,1,\dots,g}$ representa o conjunto de autovetores ortonormais do observável A com autovalor a , g é a degenerescência do autovalor em questão.

Esse processo, em que ao interagirmos com o estado quântico $|\psi\rangle$ medindo um observável, provocamos uma projeção normalizada, vai diretamente de encontro com a equação de Schrödinger. Porém é através dele que temos sido capazes de fazer uso do formalismo.

Surge então a pergunta: qual a natureza deste processo? Assumindo que a função de onda não possui representação física, isto é, ela não passaria de uma ferramenta matemática para lidar com informações sobre as quais não temos acesso completo, é intuitivo encarar o procedimento acima de forma natural. No entanto, se consideramos a possibilidade da função de onda de fato representar uma grandeza física, a pergunta se torna pertinente e talvez seja a chave para uma compreensão muito mais profunda dos fenômenos que observamos na natureza.

Não vamos propor aqui uma solução geral para esse problema, nos restringindo a um ponto em particular do processo. Vamos focar no tempo que a função de onda leva para colapsar. Se, novamente, adotarmos o ponto de vista de que a mesma não possui realidade física é intuitivo pensar que o fenômeno é instantâneo. Ao passo que adotando o ponto de vista de que estamos falando de algo com o mesmo status de realidade do campo elétrico, por exemplo, então o natural seria que esse processo ocorresse suavemente, ao longo de um determinado intervalo de tempo, possivelmente muito curto.

Neste trabalho encontra-se um estudo sobre alguns processos de medida e sobre o fenômeno de colapso da função de onda. Verificamos que por meio de uma combinação de medidas sobre um par de fótons é possível verificar se o fenômeno de colapso ocorre de forma instantânea ou durante um determinado intervalo de tempo. Os nossos resultados são robustos com respeito a variações na dinâmica do processo de colapso, no sentido de que as conclusões qualitativas a que chegamos não dependem criticamente dos detalhes da dinâmica.

Preliminares

Antes de apresentar o trabalho de pesquisa realizado, vamos munir esta dissertação com alguns conceitos que serão necessários para a abordagem do tema com a explicitação de ferramentas de que faremos uso, a fim de deixar este trabalho tão autocontido quanto possível.

A primeira parte deste capítulo corresponde a algo bastante próximo de uma revisão do tema *variáveis aleatórias*, dando foco aos conceitos de maior interesse. Em seguida abordaremos o fenômeno de conversão paramétrica, o qual propomos como fonte dos nossos pares de fótons emaranhados. A terceira parte será dedicada ao interferômetro de Hong-Ou-Mandel, o qual seria usado para garantir uma boa sincronia na detecção, fator que se mostrou de grande importância para nosso propósito. Por último, e sem dúvida a parte mais importante deste capítulo, faremos uma exposição de alguns elementos da teoria da medição quântica, dando ênfase ao modelo de von Neumann.

2.1 Um pouco de variáveis estocásticas

A natureza estatística da teoria quântica nos leva repetidamente ao uso de conceitos de probabilidade básica e funções de densidade de probabilidade. A menos que o sistema a ser medido já se encontre em um autoestado do observável desejado, não podemos ter certeza do resultado que encontraremos. Tal comportamento nos leva a uma abordagem de ensemble do sistema, a fim de recuperar através de várias medidas as informações sobre a função de onda que chega ao nosso detector. Assim, cabe iniciar esta seção definindo o ponto mais básico do tópico, o de variável estocástica.

2.1.1 Noções básicas

Uma variável estocástica é uma relação que atribui "etiquetas" a eventos de um espaço amostral através de elementos do conjunto dos números reais. Linda E. Reichl[Rei09] nos dá uma definição mais precisa: "A stochastic variable, X , on a space, S , is a function which maps elements of S into the set of real numbers, $\{R\}$, in such a way that the inverse mapping of every interval in $\{R\}$ corresponds to an event in S (in other words, a stochastic variable is a function which assigns a real number to each sample point)" (2011, p. 347).

Por exemplo temos o espaço amostral gerado por um jogo de cara-ou-coroa, de onde podemos criar a variável estocástica X , onde $X = -1$ representa o evento cara e $X = 1$ representa o

evento coroa.

Se a nossa variável aleatória assume apenas valores discretos, como no exemplo anterior, associamos o conceito de probabilidade a ela da seguinte maneira:

$$P(x_i) = p_i. \quad (2.1)$$

Sendo $P(x_i)$ a probabilidade da realização i da nossa variável estocástica e tendo as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} P(x_i) \geq 0 \\ \sum_i P(x_i) = 1 \end{cases}. \quad (2.2)$$

Uma valiosa informação sobre o sistema alvo de estudo é o ponto médio de sua distribuição, ou seja, um determinado valor tal que a probabilidade da variável em questão assumir um valor maior (ou menor) que ele é de 0,5. Chamamos esse valor de *valor médio*, ou ainda de *primeiro momento*, e o definimos pela relação abaixo:

$$\langle X \rangle \equiv \sum_i x_i P(x_i). \quad (2.3)$$

Definimos também o *segundo momento* de X é como:

$$\langle X^2 \rangle \equiv \sum_i x_i^2 P(x_i). \quad (2.4)$$

De um modo geral, definimos um momento de ordem n de forma análoga ao que foi mostrado anteriormente, no entanto as definições já feitas nos bastam.

Uma outra informação importante do sistema, e que complementa a anterior, é saber o quanto ele se dispersa do seu valor médio, isto é, saber o seu desvio da média, o qual pode ser medido através da seguinte equação:

$$\Delta X = X - \langle X \rangle. \quad (2.5)$$

Porém, se olharmos para seu valor médio, como ressalta Sílvia R. A. Salinas[Sal99] em *Introdução à Física Estatística*, não conseguimos extrair nenhuma informação sobre o sistema:

$$\langle \Delta X \rangle = \langle X \rangle - \langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle - \langle X \rangle = 0, \quad (2.6)$$

o que nos leva a procurar nossa informação na média do quadrado do desvio:

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= (X - \langle X \rangle)^2 \\ \langle (\Delta X)^2 \rangle &= \langle X^2 \rangle - 2\langle X \rangle^2 + \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Essa combinação do primeiro e do segundo momento também é chamada de *variância*, e sua raiz quadrada de desvio padrão, $\sigma = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$.

Quando lidamos com funções da nossa variável estocástica $f_X(x_i)$, podemos extrair essas informações de seu momento de ordem n pela equação:

$$\langle f_X^n(x_i) \rangle = \sum_i f_X^n(x_i) P(x_i). \quad (2.8)$$

Considerando agora uma variável estocástica X que pode assumir qualquer valor em um determinado intervalo real, precisamos considerar uma função densidade de probabilidade $p(x)$ tal que $p(x) dx$ nos dá a probabilidade do valor de X estar no intervalo dx . A função densidade de probabilidade em analogia ao caso discreto satisfaz:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

E a probabilidade da variável X assumir algum valor em um dado intervalo (a,b) é:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx. \quad (2.10)$$

A equação 2.10 nos permite definir a seguinte relação entre a probabilidade acumulada $P(-\infty \leq X \leq x)$ e a função densidade de probabilidade $p(x)$, que nos será bastante útil:

$$p(x) = \frac{d}{dx} P(-\infty \leq X \leq x). \quad (2.11)$$

Analogamente às equações 2.3 e 2.4, calculamos o momento de ordem n da nossa variável apenas substituindo o somatório das equações anteriores por uma integral:

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx. \quad (2.12)$$

2.1.2 Distribuição conjunta

Com os conceitos básicos apresentados acima, podemos analisar um sistema descrito por uma variável estocástica. No entanto, neste trabalho deparamos com um problema que depende de duas variáveis estocásticas e então precisamos ir um pouco mais adiante nessa revisão e falar sobre *distribuição conjunta*.

Suponha que se esteja lidando com um problema de mais de uma variável, onde suas n variáveis de interesse, digamos $\{X_i\}$ estão de alguma forma relacionadas em sua distribuição, de modo que somos levados a considerar uma função densidade de probabilidade das n variáveis $f(\{X_i\})$. A função em questão deve obedecer às seguintes relações:

$$\begin{cases} 0 \leq f(\{x_i\}) \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n f(\{x_i\}) = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $\{x_i\}$ é um conjunto particular de resultados associados às variáveis $\{X_i\}$.

É sempre possível recuperar a distribuição isolada de cada uma das variáveis integrando em todas as outras:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{i-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{i+1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n f(\{x_i\}). \quad (2.14)$$

Os momentos individuais são dados por:

$$\langle x_j^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n x_j^k f(\{x_i\}), \quad (2.15)$$

e os momentos conjuntos:

$$\langle x_j^k \dots x_n^l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n x_j^k \dots x_n^l f(\{x_i\}). \quad (2.16)$$

2.1.3 Função de variáveis aleatórias

Quando, por fim, queremos trabalhar com uma nova variável que é função das demais, $Y = G(\{X_i\})$, definimos sua distribuição da seguinte maneira:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \delta(y - G(\{x_i\})) f_{\{X_i\}}(\{x_i\}). \quad (2.17)$$

Como um exemplo, vamos encontrar a função densidade de probabilidade de uma variável Y , que é definida como $Y = |X_1 - X_2|$, onde as distribuições de X_1 e X_2 são:

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta t}, & \text{se } 0 \leq x_i \leq \Delta t \\ 0 & \text{se } \Delta t \leq x_i \end{cases}, \quad (2.18)$$

sendo Δt um parâmetro qualquer. A equação 2.17, nos dá:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \delta(y - |x_1 - x_2|) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_1 - y) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_1 + y), \end{aligned}$$

usando 2.18:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^{\Delta t} dx_1 \frac{1}{\Delta t^2} + \int_0^{\Delta t - y} dx_1 \frac{1}{\Delta t^2} \\ &= 2\frac{1}{\Delta t} - 2\frac{y}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Podemos também calcular $f_Y(y)$, a partir da probabilidade acumulada, como foi visto na seção 2.1.1:

$$P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{x_1 - y}^{x_1} dx_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{x_2 - y}^{x_2} dx_1 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2). \quad (2.20)$$

Integrando 2.20 e usando o fato de que, por simetria, os termos que se somam do lado esquerdo da equação são idênticos, temos:

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= 2 \left[\frac{1}{\Delta t^2} \int_0^y x_1 dx_1 + \frac{1}{\Delta t^2} y \int_y^{\Delta t} dx_1 \right] \\
&= 2 \left[\frac{y^2}{2\Delta t^2} + \frac{y}{\Delta t} - \frac{y^2}{\Delta t^2} \right] \\
&= 2 \frac{y}{\Delta t} - \frac{y^2}{\Delta t^2}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Derivando em relação a y :

$$f_Y(y) = 2 \frac{1}{\Delta t} - 2 \frac{y}{\Delta t^2}. \tag{2.22}$$

Obtemos o mesmo resultado encontrado na equação 2.19, como esperado.

Com esses conceitos básicos de probabilidade, introduzimos todas as ferramentas relacionadas a *variáveis estocásticas* de que faremos uso ao longo desta dissertação.

2.2 Conversão Paramétrica

Como foi dito, nossa proposta de experimento parte de um par de fótons emaranhados, o que naturalmente nos impõe a necessidade de uma boa fonte para os mesmos. Encontramos a solução para esse problema em um trabalho apresentado por Kwiat et al [K⁺95], em 1995, no qual são apresentados dados experimentais que mostram uma possível fonte de fótons emaranhados em polarização, baseada no fenômeno de conversão paramétrica descendente, que consiste na emissão, por um cristal não linear, de dois fótons de determinadas frequências, digamos ω_1 e ω_2 , a partir da absorção de um fóton de frequência $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Porém, antes de introduzir o trabalho supracitado é importante fazer um breve desenvolvimento do fenômeno de conversão paramétrica. Nesta seção, vamos abordar o tópico começando com um tratamento quântico do campo eletromagnético em um ressonador, a partir do qual estaremos aptos a compreender analiticamente o fenômeno.

Em seu livro *Quantum Electronics*, o autor Amnon Yariv [Yar89] faz a abordagem do assunto de forma bastante completa, mostrando a conversão tanto na abordagem clássica quanto na quântica. Sua apresentação é muito esclarecedora e a utilizaremos como base para este tópico. Na primeira parte desta seção faremos algo próximo a uma reprodução dos resultados mostrados nas seções 5.5 e 5.6 do seu livro, que servem de partida para o nosso ponto central encontrado na seção 17.5 do mesmo. Naturalmente, o resultado final que procuramos não pode ser explicitado com uma abordagem clássica, o que nos leva a apresentar apenas o tratamento quântico.

2.2.1 Campo eletromagnético

Uma apresentação simples do tema é suficiente para ilustrar o que temos em mente, por isso vamos analisar o caso do campo eletromagnético em um ressonador isotrópico, sem carga e corrente e homogêneo. As equações de Maxwell ficam:

$$I = 0, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.26)$$

sendo ε a constante dielétrica do meio e μ a permissividade magnética do mesmo e ainda I sendo a corrente elétrica.

Os campos estão em um volume V limitado por uma superfície S que vamos considerar perfeitamente condutora. Nesse caso a componente tangencial do campo elétrico e a componente perpendicular do campo magnético se anulam na superfície.

Antes de quantizar os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} , vamos expandi-los em termos de dois conjuntos de funções ortogonais: \mathbf{E}_l e \mathbf{H}_l , que devem obedecer à seguinte relação:

$$k_l \mathbf{E}_l = \nabla \times \mathbf{H}_l, \quad (2.27)$$

$$k_l \mathbf{H}_l = \nabla \times \mathbf{E}_l. \quad (2.28)$$

onde faremos k_l constante.

Adicionamos a condição da componente tangencial de \mathbf{E}_l se anular em S .

Calculando o rotacional em ambos os lados de 2.27 e 2.28, encontramos duas equações de onda, uma para cada campo:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_l + k_l^2 \mathbf{E}_l = 0, \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_l + k_l^2 \mathbf{H}_l = 0, \quad (2.30)$$

onde usamos a identidade:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.31)$$

Das equações 2.29 e 2.30 e da condição de que a componente tangencial de \mathbf{E}_l se anula na superfície S , é possível mostrar que a componente perpendicular do campo \mathbf{H}_l também se anula. Resumindo, em S :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_l = 0 \\ \mathbf{H}_l \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}. \quad (2.32)$$

No próximo passo, vamos verificar a ortogonalidade das funções \mathbf{E}_l e \mathbf{H}_l . Para fazer isso, vamos aplicar a identidade $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$, aos produtos $\mathbf{E}_m \times \nabla \times \mathbf{E}_l$ e $\mathbf{E}_l \times \nabla \times \mathbf{E}_m$ e subtraímos um do outro:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_m \times \nabla \times \mathbf{E}_l) - \nabla \cdot (\mathbf{E}_l \times \nabla \times \mathbf{E}_m) = \nabla \times \mathbf{E}_l \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_l \quad (2.33)$$

$$- \nabla \times \mathbf{E}_m \cdot \nabla \times \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_l \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_m. \quad (2.34)$$

Usando 2.27 e 2.28:

$$k_l \nabla \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_l) - k_m \nabla \cdot (\mathbf{E}_l \times \mathbf{H}_m) = (k_m^2 - k_l^2) \mathbf{E}_l \cdot \mathbf{E}_m. \quad (2.35)$$

Integrando no volume e usando o teorema de Gauss:

$$\int_S [k_l \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_l) - k_m \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_l \times \mathbf{H}_m)] da = (k_m^2 - k_l^2) \int_V \mathbf{E}_l \cdot \mathbf{E}_m dv. \quad (2.36)$$

Com o auxílio da identidade $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \int_S [k_l \mathbf{H}_l \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_m) - k_m \mathbf{H}_m \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_l)] da &= (k_m^2 - k_l^2) \int_V \mathbf{E}_l \cdot \mathbf{E}_m dv \\ \Rightarrow (k_m^2 - k_l^2) \int_V \mathbf{E}_l \cdot \mathbf{E}_m dv &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para $l \neq m$, temos $\int_V \mathbf{E}_l \cdot \mathbf{E}_m dv = 0$ e para $l = m$, é possível provar que sempre podemos construí-las de forma ortogonal. Analogamente, seguimos os mesmos passos pra \mathbf{H}_l . Com isso, mostramos que:

$$\begin{cases} \int_V \mathbf{E}_l \cdot \mathbf{E}_m dv = \delta_{l,m} \\ \int_V \mathbf{H}_l \cdot \mathbf{H}_m dv = \delta_{l,m} \end{cases} \quad (2.38)$$

É importante notar que a magnitude das funções \mathbf{E}_l e \mathbf{H}_l é arbitrária, de forma que sempre podemos normalizá-las.

Por fim reescrevemos os nossos campos em termos das funções ortogonais definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\sum_l \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} p_l(t) \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_l \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_l q_l(t) \mathbf{H}_l(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $\omega_l = k_l / \sqrt{\mu \epsilon}$.

Usando a relação $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$ e a equação 2.27, encontramos que:

$$p_l = \dot{q}_l, \quad (2.40)$$

e analogamente:

$$\omega_l^2 q_l = -\dot{p}_l, \quad (2.41)$$

eliminando q_l ficamos com:

$$\ddot{p}_l + \omega_l^2 p_l = 0. \quad (2.42)$$

O que identifica ω_l com a frequência do l -ésimo modo da radiação no ressonador.

Utilizando as relações de ortogonalidade das funções \mathbf{E}_l e \mathbf{H}_l , podemos encontrar os coeficientes $p_m(t)$ e $q_m(t)$. Para encontrar $p_m(t)$, multiplicamos a primeira equação de 2.39 por $\mathbf{E}_m(\mathbf{r})$ e integramos no volume, obtendo:

$$p_m(t) = -\sqrt{\epsilon} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) dv. \quad (2.43)$$

E de forma semelhante para $q_m(t)$

$$q_m(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\omega_m} \int_V \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) dv. \quad (2.44)$$

Os campos elétrico e magnético descrevem completamente nosso problema, no entanto podemos analisá-lo através das variáveis $p_l(t)$ e $q_l(t)$. Para fazer isso vamos considerar a hamiltoniana do problema:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dv. \quad (2.45)$$

Substituindo os campos pelas suas respectivas expansões e usando a ortogonalidade das funções \mathbf{E}_l e \mathbf{H}_l ficamos com:

$$\mathcal{H} = \sum_l \frac{1}{2} (p_l^2 + \omega_l^2 q_l^2). \quad (2.46)$$

Podemos verificar que $p_l(t)$ e $q_l(t)$ são canonicamente conjugadas:

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial}{\partial q_l} \mathcal{H} = -\omega_l^2 q_l, \quad (2.47)$$

$$\dot{q}_l = \frac{\partial}{\partial p_l} \mathcal{H} = p_l. \quad (2.48)$$

Quantizamos o sistema inserindo a relação de comutação de p_l e q_l de forma análoga ao que fazemos ao resolver o oscilador harmônico (quantização canônica):

$$[p_l, p_m] = 0, \quad (2.49)$$

$$[q_l, q_m] = 0, \quad (2.50)$$

$$[q_m, p_l] = i\hbar \delta_{l,m}. \quad (2.51)$$

Definimos, também de forma análoga, os operadores de criação de destruição. Note que cada operador de índice l se refere a um modo do campo no ressonador ou ainda a fótons de frequência ω_l .

$$a_l^\dagger(t) = \left(\frac{1}{2\hbar\omega_l} \right)^{\frac{1}{2}} [\omega_l q_l(t) - ip_l(t)], \quad (2.52)$$

$$a_l(t) = \left(\frac{1}{2\hbar\omega_l} \right)^{\frac{1}{2}} [\omega_l q_l(t) + ip_l(t)]. \quad (2.53)$$

Tiramos as relações de comutação de $a_l^\dagger(t)$ e $a_l(t)$ das equações 2.49, obtendo:

$$[a_l, a_m] = 0, \quad (2.54)$$

$$[a_l^\dagger, a_m^\dagger] = 0, \quad (2.55)$$

$$[a_l, a_m^\dagger] = \delta_{l,m}. \quad (2.56)$$

Resolvendo 2.52 e 2.53 para $p_l(t)$ e $q_l(t)$ e substituindo no hamiltoniano, encontramos um resultado semelhante ao de vários osciladores harmônicos, cada um representado em um modo do ressonador:

$$\mathcal{H} = \sum_l \hbar\omega_l \left(a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2} \right). \quad (2.57)$$

Podemos reescrever os campos em termos de $\{a_l(t)^\dagger\}$ e $\{a_l(t)\}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \sum_l \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} i \left(\frac{\hbar\omega_l}{2} \right)^{\frac{1}{2}} [a_l^\dagger(t) - a_l(t)] \mathbf{E}_l(\mathbf{r}), \quad (2.58)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_l \left(\frac{\hbar}{2\omega_l} \right)^{\frac{1}{2}} [a_l^\dagger(t) + a_l(t)] \mathbf{H}_l(\mathbf{r}). \quad (2.59)$$

E assim, como no caso do oscilador harmônico, sendo n_l o número de fótons com frequência ω_l , os operadores de criação de destruição seguem as seguintes propriedades:

$$a_l^\dagger |n_l\rangle = \sqrt{n_l + 1} |n_l + 1\rangle, \quad (2.60)$$

$$a_l |n_l\rangle = \sqrt{n_l} |n_l - 1\rangle, \quad (2.61)$$

$$n_l |n_l\rangle = a_l^\dagger a_l |n_l\rangle = n_l |n_l\rangle. \quad (2.62)$$

Note que cada operador de índice l atua somente no subespaço de índice l , motivo que me levou a explicitar na notação acima apenas o número de fótons de frequência l , quando na verdade o estado total é caracterizado por todos os n_l de cada um dos modos do ressonador.

2.2.2 Tratamento quântico de interações paramétricas

Uma vez que temos o tratamento quântico dos campos elétrico e magnético, podemos verificar como eles interagem em um cristal não linear. Vamos supor que estamos lidando apenas com três campos $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t)$, com frequências respectivas ω_1 , ω_2 e ω_3 sendo:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (2.63)$$

Quando queremos observar o fenômeno de conversão paramétrica, devido à baixa taxa de conversão, incidimos no cristal um campo de magnitude muito alta, o que nos dá a liberdade de tratar o campo incidente, no caso $\mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t)$, classicamente.

A interação entre os campos gerada pela não-linearidade do cristal é descrita em uma aproximação de terceira ordem, pelo seguinte hamiltoniano:

$$\mathcal{H}' = \frac{2d}{3} \int_V E_1 E_2 E_3 dv. \quad (2.64)$$

Sendo d um coeficiente construído a partir de uma determinada combinação dos elementos do tensor d_{ijk} , que caracteriza o cristal, dependendo de sua classe de simetria, de sua orientação e da polarização.

Tratando E_1 e E_2 de forma quântica, usamos a equação 2.58, que nos dá:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \frac{dB_3 \hbar \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{3\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} \int_V E_1(\mathbf{r}) E_2(\mathbf{r}) E_3(\mathbf{r}) dv \cos(\omega_3 t) \left(a_1^\dagger - a_1 \right) \left(a_2^\dagger - a_2 \right), \\ &= s \hbar \cos(\omega_3 t) \left(a_1^\dagger - a_1 \right) \left(a_2^\dagger - a_2 \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde:

$$E_3(\mathbf{r}, t) = B_3 E_3(\mathbf{r}) \cos(\omega_3 t), \quad (2.66)$$

e definimos:

$$s = \frac{dB_3 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{3\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} \int_V E_1(\mathbf{r}) E_2(\mathbf{r}) E_3(\mathbf{r}) dv. \quad (2.67)$$

As funções $E_1(\mathbf{r})$, $E_2(\mathbf{r})$ e $E_3(\mathbf{r})$ são normalizadas de acordo com:

$$\int_V E_i^2 dv = 1. \quad (2.68)$$

Logo, o parâmetro s é proporcional à amplitude B_3 do campo incidente.

A hamiltoniana total do sistema é a soma do sistema não perturbado (os campos não interagem entre si) com a parte perturbada:

$$\sum_{l=1,2} \hbar \omega_l \left(a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2} \right) + 2s\hbar \cos(\omega_3 t) \left(a_1^\dagger - a_1 \right) \left(a_2^\dagger - a_2 \right). \quad (2.69)$$

Usando a equação de Heisenberg, para a_1^\dagger :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_1^\dagger &= -\frac{i}{\hbar} \left[a_1^\dagger, \sum_m \hbar \omega_m \left(a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{i}{\hbar} \left[a_1^\dagger, \mathcal{H}' \right] \\ &= i\frac{i}{\hbar} \left[a_1^\dagger, \hbar \omega_1 a_1^\dagger a_1 \right] - \frac{i}{\hbar} \left[a_1^\dagger, 2s\hbar \cos(\omega_3 t) \left(a_1^\dagger - a_1 \right) \left(a_2^\dagger - a_2 \right) \right] \\ &= i\omega_1 a_1^\dagger - \frac{is}{2} \left(e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_3 t} \right) \left(a_2^\dagger - a_2 \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Note que no limite de s tendendo a zero, teríamos uma solução proporcional à exponencial de $(i\omega_3 t)$, vamos explicitar para a_1^\dagger e a_2 :

$$a_1^\dagger = a_1^\dagger(0) e^{i\omega_1 t}, \quad (2.71)$$

$$a_2 = a_2(0) e^{-i\omega_2 t}. \quad (2.72)$$

Lembrando $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, vemos que do produto de $e^{i\omega_3}$ com $a_2(t)$, deve sair um termo sincronizado com ω_1 . Quando tiramos uma média, o efeito dos termos dessincronizados, que oscilam com frequência $\omega_3 + \omega_2$, cancelam-se, de modo que apenas os termos sincronizados são relevantes para o resultado final. Desprezando os termos dessincronizados, ficamos com:

$$\frac{d}{dt} a_1^\dagger = i\omega_1 a_1^\dagger + isa_2 e^{i\omega_3 t}, \quad (2.73)$$

e analogamente:

$$\frac{d}{dt} a_2 = -i\omega_2 a_2 - isa_1^\dagger e^{-i\omega_3 t}. \quad (2.74)$$

A partir de onde encontramos as seguintes soluções:

$$a_1^\dagger(t) = \left[a_1^\dagger(0) \cosh(st) + ia_2(0) \sinh(st) \right] e^{i\omega_3 t}, \quad (2.75)$$

$$a_2(t) = \left[a_s(0) \cosh(st) - ia_1^\dagger(0) \sinh(st) \right] e^{-i\omega_3 t}. \quad (2.76)$$

Assumindo que o campo incidente possui $n_1^{(0)}$ fótons de frequência ω_1 e $n_2^{(0)}$ fótons de frequência ω_2 , temos da equação 2.62, que o valor esperado dos operadores número são dados por:

$$\langle n_1(t) \rangle = n_1^{(0)} \cosh^2(st) + (1 + n_2^{(0)}) \sinh^2(st), \quad (2.77)$$

$$\langle n_2(t) \rangle = n_2^{(0)} \cosh^2(st) + (1 + n_1^{(0)}) \sinh^2(st). \quad (2.78)$$

Note que temos um termo remanescente mesmo quando $n_1^{(0)}$ e $n_2^{(0)}$ são nulos. Esse termo indica uma absorção de energia do campo incidente, no caso, fótons com frequência ω_3 , e emissão espontânea de fótons com frequência ω_1 e ω_2 , que seria um termo de ruído. Chamamos esse fenômeno de conversão paramétrica descendente, e é nele que estamos interessados.

2.2.3 Fonte eficiente de fótons emaranhados

Nas seções anteriores estudamos, através de um tratamento quântico, o comportamento de radiação eletromagnética em um ressonador e o fenômeno de interação paramétrica. Uma vez que o fenômeno já foi comentado, podemos partir para a sua aplicação ao nosso problema: precisamos de uma boa fonte de fótons emaranhados.

Existem duas maneiras de preparar um cristal para promover o fenômeno de conversão paramétrica desejado, as chamadas correspondência de fase do tipo 1 e correspondência de fase do tipo 2. No primeiro tipo, quando temos emissão espontânea de fótons com frequências degeneradas (dois fótons de mesma frequência) obtemos um par de fótons com mesma polarização; no segundo tipo, o par de fótons de mesma frequência obtido possui polarização perpendicular um ao outro.

Um dos motivos que nos leva a mencionar o fenômeno de conversão paramétrica como fonte é a possibilidade de emaranhamento em polarização, propriedade que pode ser facilmente manipulada em laboratório devido à existência de vários equipamentos de precisão que atuam na polarização de um fóton.

A literatura sobre o tema mostra que durante muito tempo na física experimental se procurou uma boa fonte de fótons com polarização emaranhada. Pela facilidade citada acima, a busca foi principalmente motivada pela tentativa de verificar violações da desigualdade de Bell. No entanto, várias propostas de realização do fenômeno possuíam um nível de aproveitamento do sinal muito pequeno, tornando-as inviáveis.

Uma proposta que supera esses problemas de perda de sinal foi apresentada por Kwiat, Mattle, Weinfurter, Sergienko, Shih e Zeilinger[K⁺95] em uma artigo da *Physical Review Letters* em 1995. E apesar do nosso trabalho ser de cunho teórico, vamos esboçar um resumo do trabalho citado, já que é importante ter ao menos um vislumbre do funcionamento experimental daquilo que viabiliza nossa proposta.

Ao incidirmos um feixe de luz em um cristal não-linear preparado para o tipo dois de correspondência, observamos que os fótons espontaneamente emitidos com frequências degeneradas formam no anteparo o padrão de dois círculos secantes um ao outro, como mostra a figura 2.1 retirada do artigo citado.

Um dos círculos possui fótons polarizados horizontalmente e o outro fótons polarizados verticalmente. A distância entre os centros dos círculos depende do ângulo que o feixe incidente faz com o eixo óptico do cristal. Uma vez encontrada a situação em que os círculos são tangentes

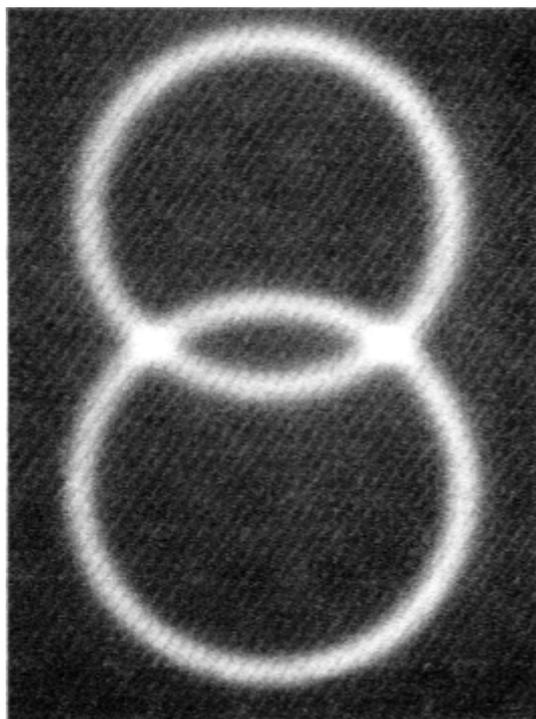


Figura 2.1 Padrão obtido por fótons gerados através de conversão paramétrica descendente. Fotografado por M. RECK Apud KWIAT et al[K⁺95], 1995, p 4338

um ao outro, ao diminuirmos o ângulo, fazemos os círculos se afastarem eliminando o ponto de encontro, no entanto se aumentamos o ângulo fazemos com que seus centros se aproximem criando dois pontos de encontro.

Na região em que os dois círculos se superpõem, podemos descrever o estado encontrado da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = \frac{(|H_1, V_2\rangle + e^{i\alpha} |V_1, H_2\rangle)}{\sqrt{2}}, \quad (2.79)$$

onde H_i representa uma polarização horizontal e V_i uma polarização vertical, e a fase relativa vem da birrefringência do cristal.

Pode-se manipular o valor de α livremente utilizando diversos equipamentos ou até mesmo através de uma rotação do cristal.

Segue abaixo uma imagem (fig. 2.2) esquematizando o método de produzir e selecionar fótons emaranhados, retirada do artigo já referido.

Na imagem vemos primeiramente o feixe incidindo no cristal não linear (no caso foi usado um cristal BBO, Beta Borato de Bário). Os dispositivos C1 e C2 são cristais birrefringente de mesma natureza que o cristal usado para produzir os fótons emaranhados e em conjunto com a lâmina de meia onda, servem para sincronizar os fótons emaranhados. Note que o fato de usarmos um cristal birrefringente implica que o fóton verticalmente polarizado viaja no cristal com velocidade diferente do horizontalmente polarizado gerando uma defasagem δT ;

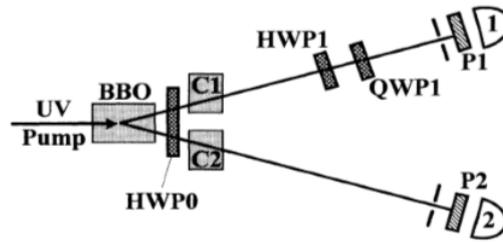


Figura 2.2 Procedimento de geração de fótons, KWIAT et al[K⁺95], 1995, p 4339

se temos $\delta T > \tau_c$, onde τ_c é o tempo de coerência do par de fótons, destruímos o padrão de emaranhamento antes de o medirmos.

Os elementos HWP1 e QWP1 são respectivamente uma lâmina de meia onda e uma lâmina de quarto de onda e é através da colocação adequada deles que conseguimos manipular a fase relativa em 2.79.

Em seu artigo os autores afirmam que este procedimento de gerar fótons emaranhados é de alta eficiência comparado com outras fontes usadas, fornecendo-nos uma taxa de coincidências de $1500s^{-1}$ (para um laser de 150mW de potência), cerca de uma ordem de grandeza maior que outras fontes similares anteriores.

2.3 Elementos de teoria da medição

O livro *Quantum Mechanics, A Modern Development*, de Leslie E. Ballentine[Bal98], expõe que o processo de medida é essencialmente composto por três elementos: um objeto, um aparato e uma interação entre os elementos anteriores que gera uma correlação entre a variável a ser medida do objeto e uma variável indicadora do aparato (responsável por desencadear o fenômeno macroscópico de medida).

Sendo R a variável a ser medida do objeto, o observável relacionado a ela possui um conjunto completo de autoestados $\{|r\rangle\}$:

$$R|r\rangle = r|r\rangle. \quad (2.80)$$

O aparato por sua vez possui uma variável indicadora, digamos A , e seu respectivo conjunto completo de autoestados:

$$A|\alpha, m\rangle = \alpha|\alpha, m\rangle. \quad (2.81)$$

Onde α é o autovalor indicador e o índice m representa todos os outros aspectos do aparato que são necessários para definir o estado do mesmo.

Ajustamos previamente o aparato no estado $|0, m\rangle$ e iniciamos a interação entre o objeto e o aparato. O desejado é que a interação tenha uma natureza tal que gere uma relação de correspondência única entre o autovalor r da variável R e o autovalor α da variável A , de forma

que a cada evento macroscopicamente distinguível possamos associar apenas um autovalor de R .

Em outras palavras, queremos uma interação que nos leve à seguinte evolução:

$$U |r\rangle \otimes |0, m\rangle = |r\rangle \otimes |\alpha, m\rangle. \quad (2.82)$$

Onde U é o operador de evolução temporal que leva do instante anterior ao início da interação ao instante imediatamente posterior ao da medição. Note-se que estamos trabalhando com o processo de medida de um autoestado do observável desejado com foco no processo da medida, sem, em princípio, nos preocuparmos com o colapso do estado.

Procurando por essa interação, von Neumann elaborou um modelo bastante simples que estabelece todas as relações necessárias para a medida de um dado observável R do sistema. Como colocam Aharonov e Rohrlich em *Quantum Paradoxes*[AR05], o modelo proposto por von Neumann assume que o conjunto que compõe o processo de medida (aparato e objeto) possui cinco aspectos.

Em primeiro lugar, assume que a interação entre o objeto e o aparato dura um intervalo de tempo bem definido T , e fora desse intervalo não existe nenhum tipo de interação. O segundo ponto assume que a interação produz uma mudança no sistema que corresponde ao valor do observável medido, no caso R . A terceira condição é que o processo de medida não modifica o observável medido, com exceção dos casos em que a medida destrói o sistema (por exemplo detecção de fótons). A quarta, que o tempo de interação pode ser tão pequeno quanto desejável, sendo controlado através dos parâmetros do aparato. Por último, assume que, sendo a medida um processo, ela é descrita por um operador de evolução temporal, o que implica na existência de um hamiltoniano de interação H_{int} .

Note que a terceira condição implica que se estamos medindo um observável A , através da interação descrita por H_{int} (quinta hipótese), então devemos ter $[A, H_{int}] = 0$. Como era de se esperar, o hamiltoniano de interação deve de alguma forma acoplar a variável a ser medida do objeto com uma variável do aparato, digamos P , a forma mais simples de fazer esse acoplamento, respeitando tudo o que foi dito, é através de um produto RP . No entanto, a primeira condição exige que o objeto e o aparato interajam apenas durante um intervalo de tempo T . Podemos satisfazer essas últimas condições escrevendo o hamiltoniano de interação da seguinte maneira:

$$H_{int} = g(t) RP, \quad (2.83)$$

onde definimos a função $g(t)$ como sendo nula para $t < 0$ e para $t > T$, ou seja: a medida ocorre no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = T$, tendo ainda a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt = g_0, \quad (2.84)$$

lembrando que a quarta condição nos garante que podemos tomar $T \rightarrow 0$, obtendo um processo impulsivo.

Escrevemos então o hamiltoniano do sistema da seguinte maneira:

$$H = H_o + H_a + H_{int}(t), \quad (2.85)$$

sendo H_o o hamiltoniano do objeto livre, H_a o hamiltoniano do aparato livre e $H_{int}(t)$ o hamiltoniano de interação descrito.

Ora, sendo P um operador hermitiano, existe um outro operador (do aparato) canonicamente conjugado a ele, chamaremos este de Q , tal que :

$$[Q, P] = i\hbar. \quad (2.86)$$

Preparamos o sistema em um estado inicial $Q(0)$ e, de acordo com a equação de Heisenberg, temos:

$$\begin{aligned} Q(T) - Q(0) &= \int_0^T dt \frac{d}{dt} Q \\ &= \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H, Q] \\ &= \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H_o, Q] + \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H_a, Q] + \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H_{int}, Q], \end{aligned} \quad (2.87)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é nulo, uma vez que o hamiltoniano do objeto e o operador Q atuam em espaços diferentes. Quanto ao terceiro termo, dada a forma do hamiltoniano de interação que adotamos, temos $[H_{int}, Q] = [g(t)RP, Q] = -i\hbar g(t)R$, o que nos dá:

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H_a, Q] + g_0 R. \quad (2.88)$$

Tomando o limite de uma medida impulsiva, isto é $T \rightarrow 0$, ficamos com:

$$Q(T) - Q(0) = g_0 R. \quad (2.89)$$

Como podemos ver acima, somos capazes de medir o operador R através de um desvio no operador Q e ainda podemos controlar a intensidade desse desvio aumentando o parâmetro de intensidade da interação g_0 . Note que apesar de acoplarmos o objeto ao aparato através do operador P , o operador que vai guardar a informação do sistema é o seu canônico conjugado Q .

Até agora, no entanto, temos evitado o verdadeiro problema da medição. Até aqui o conceito de medida foi aplicado apenas para um autoestado do observável a ser medido e foi apresentado o modelo de acoplamento do aparato com o objeto utilizando o formalismo de Heisenberg, evitando lidar com os estados a serem medidos. Comumente, porém, não estamos interessados em medir um objeto que já se encontra em um autoestado do observável a ser medido.

Vamos considerar um dado observável B com o conjunto de autovalores $\{a_i\}$ e seus respectivos autoestados $\{|a_i\rangle\}$. Relembrando a equação 2.81, onde a partir daqui, por simplicidade, o conjunto extra de índices m será omitido (uma vez que os mesmos se referem a espaços de Hilbert que não interagem com nenhum elemento da formulação aqui exposta). Considerando que o objeto primeiramente se encontra no estado $|\psi\rangle = |b_i\rangle$, então teríamos o processo de medição ocorrendo da seguinte maneira:

$$|b_i, 0\rangle \rightarrow |b_i, \alpha_i\rangle. \quad (2.90)$$

O que implica, pela linearidade da equação de Schrödinger, que se agora estamos medindo um objeto no estado mais geral possível, $|\psi'\rangle = \sum_i \beta_i |b_i\rangle$, sendo o conjunto $\{\beta_i\}$ o conjunto de constantes que normalizam $|\psi'\rangle$, deveríamos ter:

$$|\psi', 0\rangle = \sum_i \beta_i |b_i, 0\rangle \rightarrow \sum_i \beta_i |b_i, \alpha_i\rangle, \quad (2.91)$$

um processo algumas vezes referido como pré-medição.

Note que nesse caso, não teríamos um resultado único no "ponteiro" do nosso aparato. Seríamos incapazes de verificar macroscopicamente o resultado da medida, o que claramente entra em contradição com o que é verificado experimentalmente. Ao realizarmos, por exemplo o experimento de Stern-Gerlach, verificamos que todos os processo acima ocorrem, no entanto o resultado final é macroscopicamente distinguível: ou o átomo sofre um desvio para cima (implicando componente de spin up) ou ele sofre um desvio para baixo (implicando componente de spin down).

Entre as várias tentativas de resolver esse problema encontra-se o conceito de complementariedade de Bohr, já citado anteriormente neste trabalho. A proposta de Bohr consistia em uma divisão *ad hoc* do que deveria receber tratamento clássico para o que deveria receber tratamento quântico. Tradicionalmente o objeto era tido como um sistema quântico enquanto o aparato era visto como um sistema clássico, ignorando todos os processos descritos acima. No entanto, o modelo era demasiadamente arbitrário e se mostrou incapaz de solucionar o problema de Eintein-Podolsky-Rosen (paradoxo EPR).

Voltamos então ao modelo de von Neumann, que não trata somente da preparação da medida, como foi mostrado até agora, nele também é apresentada uma solução para este problema em específico, que recebeu o nome de solução ortodoxa. Von Neumann colocou que ao medirmos um objeto, seguindo o modelo apresentado acima, teríamos primeiramente o processo descrito na equação 2.91, o fim desse processo daria lugar a uma segunda etapa na qual o estado, então emaranhado, do objeto-aparato colapsaria em uma projeção normalizada, tornando-o mais uma vez separável. Ele não especificou a natureza deste processo, apenas assumiu, como era essencial que o fizesse, sua existência.

Por tratar os sistemas quânticos através do operador matriz densidade, von Neumann foi capaz de chegar a uma solução determinística e linear para esse problema. Dado o observável R a ser medido no objeto, representado pelo operador matriz de densidade ρ , ele postulou que o sistema deveria evoluir da seguinte maneira:

$$\rho \rightarrow \sum_i \Pi_i \rho \Pi_i \quad (2.92)$$

Onde Π_i é um operador que projeta no subespaço relacionado com o autovalor r_i do observável R . Note que isso implica que usualmente o ato da medição transforma estados puros em uma mistura estatística (sendo a exceção dada por um autoestado do observável sendo medido).

Porém, como sabemos, utilizando o operador matriz de densidade somos capazes de descrever apenas fenômenos em um dado ensemble. No entanto, como disse N. Gisin[Gis84] em seu artigo *Quantum Measurements and Stochastic Processes*, se nos dispomos a interpretar o estado quântico como uma representação completa de um sistema quântico individual, devemos dar mais atenção ao que ocorre com o estado ψ , ao invés do tratamento de ensemble (operador matriz de densidade).

O que nos leva ao postulado de Lüders [Kir06], que trata do fenômeno de forma individual. Naturalmente paga-se um preço por esse tratamento especial, pois ao contrário do modelo de ensemble de von Neumann o modelo de Lüders não é nem determinístico nem linear. Segundo ele, dado um processo de medida, o estado individual ψ de um sistema quântico deve evoluir da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle \rightarrow \begin{cases} \frac{\Pi_1|\psi\rangle}{|\Pi_1|\psi\rangle|}, \text{ com probabilidade } \langle\psi|\Pi_1|\psi\rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\Pi_n|\psi\rangle}{|\Pi_n|\psi\rangle|}, \text{ com probabilidade } \langle\psi|\Pi_n|\psi\rangle \end{cases} \quad (2.93)$$

onde novamente o operador Π_i projeta no subespaço relacionado com o autovalor r_i .

Como era de se esperar, uma vez que o postulado de Lüders trata de processos individuais ao passo que o postulado de von Neumann trata de um processo de ensemble, quando tomamos um conjunto de vários processos descritos pelo modelo individual, chegamos exatamente no que é previsto pelo modelo de ensemble:

$$\begin{aligned} \rho = |\psi\rangle\langle\psi| &\rightarrow \langle\psi|\Pi_1|\psi\rangle \frac{\Pi_1|\psi\rangle\langle\psi|}{|\Pi_1|\psi\rangle|^2} + \dots + \langle\psi|\Pi_n|\psi\rangle \frac{\Pi_n|\psi\rangle\langle\psi|}{|\Pi_n|\psi\rangle|^2}, \\ &\rightarrow \sum_i \Pi_i \rho \Pi_i \end{aligned} \quad (2.94)$$

em acordo com a equação 2.92.

Com o que foi exposto acima sobre a interação entre o objeto a ser medido e o aparato, e somando a isso os postulados de von Neumann e de Lüders, também expostos acima, somos capazes de aplicar de forma precisa o formalismo quântico em diversas situações. No entanto, como pode ser notado, os dois postulados apresentados acima nada mais são do que uma imposição ad hoc, não tendo portanto uma origem justificada. Somos capazes de verificar o que ocorre, entretanto desconhecemos o seu mecanismo de funcionamento.

Várias tentativas de encontrar mecanismos que gerem os postulados acima foram apresentadas, no entanto nenhuma delas se mostrou completamente compatível com o formalismo quântico, uma vez que davam margens a efeitos indesejados, como a transferência de informação numa velocidade superior a da luz. Finalizaremos esta seção expondo uma excelente representante dessas tentativas, a proposta apresentada pelo físico N. Gisin[Gis84] no artigo, já citado, *Quantum Measurements and Stochastic Processes*, que se destaca por satisfazer ao mesmo tempo os postulados de Neumann e o de Lüders. E ainda falaremos um pouco sobre *Medidas Fracas*, um tema recente que tem se mostrado uma poderosa ferramenta no trato do processo de medidas em sistemas quânticos.

2.3.1 Colapso como um processo estocástico

Em seu trabalho N. Gisin apresentou uma proposta de reproduzir ambos os postulados apresentados acima como uma solução assintótica de um processo estocástico contínuo no tempo. O modelo apresentado tem como ponto de partida o conceito do que seria um banho térmico à temperatura zero, já apresentado em um artigo do mesmo autor [Gis81] anteriormente, dado pela seguinte generalização da equação de Schrödinger:

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}\rangle &= -iH|\psi\rangle - i\frac{ik}{\langle\psi|\psi\rangle} [|\psi\rangle\langle\psi|, H]|\psi\rangle \\ &= -iH|\psi\rangle + k\left(\langle H\rangle_{\psi} - H\right)|\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.95)$$

A partir da qual, em primeiro lugar, o autor considera que, uma vez que a temperatura é não nula, é bastante razoável assumir que o coeficiente k é um processo estocástico. Em seguida o autor coloca que a diferença principal entre o banho térmico e um aparato de medida é que enquanto o banho térmico não sofre mudanças em seu estado ao interagir com o sistema, o aparato de medida deve possuir uma evolução que acopla com o sistema.

Levando tudo isso em consideração, o autor apresenta, para um observável P com autovalores 1 e 0, o seguinte conjunto de equações para gerar as reduções de Lüders e Neumann:

$$\begin{aligned} d\psi_t &= -i\omega P\psi_t dt + (p_t - P)\psi_t \circ dk_t \\ dk_t &= f(k_t, \psi_t) dt + d\alpha_t \\ f(k_t, \psi_t) &= 1 - 2p_t \end{aligned} \quad (2.96)$$

Onde definimos $p_t \equiv \langle\psi_t|P|\psi_t\rangle$, o símbolo \circ representa o produto de Stratonovich [Arn74] e o termo $d\alpha_t$ é o processo de Wiener [GZ04].

Manipulando essas equações, o autor mostra que apesar da média do valor esperado p_t não depender do tempo, ela depende do tempo em cada realização de α_t (característica imposta pelo postulado de Lüders) e com o auxílio da equação de Fokker-Planck [GZ04] associada à equação diferencial estocástica acima, o autor encontra a média sobre o processo de Wiener do operador matriz de densidade como função de p_t , dado por:

$$\rho_t(p_t) = \frac{\lambda_t [\tanh^{-1}(2p_t - 1)]}{2p(1-p)} \quad (2.97)$$

sendo:

$$\lambda_t(z) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{t}{2} - \frac{(z-z_0)}{2t} \right\} \frac{\cosh z}{\cosh z_0} \quad (2.98)$$

Onde temos que $\rho_t(p_t)$ sempre é normalizado e que quando fazemos $t \rightarrow \infty$ verificamos que $\rho_t(p_t) \rightarrow 0$ para todos os valores de p , exceto para $p = 0$ ou 1 . É possível ainda mostrar que os pesos dessas concentrações são respectivamente iguais a $\langle P \rangle_\psi$ e a $\langle 1 - P \rangle_\psi$, em acordo com tudo o que era esperado.

O autor então generaliza seu modelo para um observável com n autovalores. Note, nesse ponto, que a dinâmica obtida tem como base um operador de projeção P e ela faz o sistema colapsar ou no espaço em que P projeta ou no espaço ortogonal ao mesmo. Podemos considerar que um operador com n autovalores possui n operadores de projeção associados a ele, que são compatíveis uns com os outros, isto é $[P_i, P_j] = 0$ para todo i e j . Assim sendo uma extensão quase intuitiva da equação diferencial estocástica, apresentada acima, consiste em adicionar n termos similares ao apresentado na equação 2.96 com n ruídos independentes, chegando a:

$$\begin{aligned} d\psi_t &= \sum_{j=1}^n \left\{ -i\omega_j P_j \psi_t dt + [p_j(t) - P_j] \psi_t \circ dk_j(t) \right\} \\ dk_j(t) &= [1 - 2p_j(t)] dt + d\alpha_j(t) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Que leva novamente a soluções equivalentes às apresentadas para o caso em que consideramos apenas um operador com dois autovalores.

Resumindo, o modelo apresentado possui três características principais: para cada realização, o vetor estado tende assintoticamente para um dos estados reduzidos descritos no postulado de Lüders; a taxa de realizações que levam um vetor estado a um determinado autoestado do operador medido é proporcional ao módulo quadrado da projeção do estado original no mesmo; e por fim a matriz densidade possui uma evolução linear, como prevê o modelo de von Neumann.

2.3.2 Medidas fracas

O conceito de medidas fracas é um tema bastante recente, tendo sido apresentado pela primeira vez em 1989 pelos teóricos Aharonov, Albert e Vaidman[AAV88], no artigo *How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin - $\frac{1}{2}$ Particle Can Turn Out to be 100*, publicado na revista *Physical Review Letters* (1988).

Desde então muitos trabalhos têm sido apresentados sobre o tema, tanto de cunho teórico quanto de cunho experimental. Iremos nos ater aqui a uma proposta específica que sugere que o todos os processos de medida podem ser vistos como uma sequência de medidas fracas. Esse trabalho foi apresentado pelos físicos Oreshkov e Brun[OB05], na revista *Physical Review Letters* (2005), intitulado *Weak Measurements Are Universal*. Nele os autores não apenas mostram que todos os processos de medidas podem ser descritos como um sequência de medições fracas, como também nos dão um construção explícita destas medições.

Ao longo do presente trabalho, tratamos o processo de medidas identificando os possíveis resultados com um conjunto de operadores de projeção ortogonais, os quais estavam associados

a autoespaços de um determinado operador hermitiano, nosso observável. Entretanto, para tratar do tema em questão, precisamos de uma noção mais geral de uma medição, conhecida como POVM's [Par12].

Adotaremos agora o seguinte conceito de medição: dado o sistema representado pelo estado quântico $|\Psi\rangle$, uma vez sujeito a uma medição, o sistema irá sofrer uma transformação aleatória do tipo:

$$|\Psi\rangle \rightarrow \frac{M_j |\Psi\rangle}{\sqrt{p_j}}, \quad (2.100)$$

com duas condições. A primeira nos diz que p_j é a probabilidade do evento j ocorrer, e é dado por:

$$p_j = \langle \Psi | M_j^\dagger M_j | \Psi \rangle. \quad (2.101)$$

A segunda diz que a única restrição sobre o conjunto de operadores $\{M_j\}$ é que:

$$\sum_j M_j^\dagger M_j = I, \quad (2.102)$$

onde I é o operador identidade.

Note-se que no caso em que temos M sendo um projetor, recuperamos o nosso usual conceito de medida.

Assim podemos conceber novas maneiras de realizar uma medida. Como é destacado no artigo anteriormente citado, esse conceito de medida inclui vários fenômenos que passam despercebidos pela projeção unitária, como detecções com eficiência não unitária, medidas que dão informações incompletas e muitos outros casos.

Definimos o processo de uma medida fraca como uma medida em que todos os resultados possíveis de sua realização alteram de forma pequena o estado original. Matematicamente falando, podemos descrever uma medida fraca através do conjunto de operadores $\{M_j\}$ que a representa, basta fazer com que:

$$M_j = q_j (I + \varepsilon), \quad (2.103)$$

onde $0 \leq q_j \leq 1$, e ε é um operador com norma pequena, isto é: $\|\varepsilon\| \ll 1$, onde dado um operador qualquer A , definimos $\|A\| = Tr [A^\dagger A]$

Ressaltamos aqui que existem outras definições de medidas fracas, incluindo a possibilidade de realizar grandes modificações no nosso estado, com uma pequena probabilidade. Entretanto, aqui vamos, assim como fizeram Oreshkov e Brun no artigo citado, nos restringir à definição dada acima.

Uma vez que nossa intenção aqui é apenas apresentar a proposta de um colapso como uma série de medidas fracas, não pretendendo abordar o assunto em toda sua abrangência, vamos

nos limitar a fazer um exemplo de uma medida projetiva de um observável com apenas dois autoespaços distintos. Neste caso, como operadores da medida temos P_1 e P_2 , ortogonais entre si e com a propriedade de completeza $P_1 + P_2 = I$.

Introduzimos então o operador $P(x)$:

$$P(x) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_1 + \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_2. \quad (2.104)$$

Note que o par de operadores $(P(x), P(-x))$ respeita a condição de medida 2.102:

$$\begin{aligned} P^2(x) + P^2(-x) &= \left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_1 + \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_2 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tgh}(-x)}{2}} P_1 + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh}(-x)}{2}} P_2 \right)^2 \\ &= \frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2} P_1 + \frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2} P_2 + \frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2} P_1 + \frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2} P_2 \\ &= P_1 + P_2 \\ &= I. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Então, se fazemos $x = \varepsilon$, onde $|\varepsilon| \ll 1$, os operadores $P(x)$ e $P(-x)$, irão representar uma medida fraca, de acordo com 2.103.

Consideremos o efeito destes operadores em um estado $|\Psi\rangle$. É importante notar que sempre podemos escrever o estado como $|\Psi\rangle = P_1 |\Psi\rangle + P_2 |\Psi\rangle$. Mais explicitamente, podemos definir $|\psi_1\rangle = P_1 |\Psi\rangle$ e $|\psi_2\rangle = P_2 |\Psi\rangle$, de forma que temos $|\Psi\rangle = \sqrt{p_1} |\psi_1\rangle + \sqrt{p_2} |\psi_2\rangle$, onde $p_i = \langle \Psi | P_i | \Psi \rangle$. Então temos:

$$\begin{aligned} P(x) |\Psi\rangle &= \sqrt{p_1} \left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_1 + \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_2 \right) |\psi_1\rangle + \\ &\quad \sqrt{p_2} \left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_1 + \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2}} P_2 \right) |\psi_2\rangle \\ &= \sqrt{p_1} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2}} |\psi_1\rangle + \sqrt{p_2} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2}} |\psi_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.106)$$

E analogamente:

$$P(-x) |\Psi\rangle = \sqrt{p_1} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh}(x)}{2}} |\psi_1\rangle + \sqrt{p_2} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tgh}(x)}{2}} |\psi_2\rangle. \quad (2.107)$$

Como podemos verificar na equação acima ao aplicarmos $P(x)$ no estado $|\Psi\rangle$, geramos um novo estado levemente deslocado do estado anterior, cuja razão dos coeficientes $\sqrt{\frac{p'_2}{p'_1}}$ é ligeiramente maior que a razão dos coeficientes originais $\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$. Isso implica que uma série de aplicações de $P(x)$ pode tornar essa razão tão próxima da unidade quanto for desejado, gerando um processo de colapso.

Aplicando $P(-x)$ obtemos o resultado inverso, de fato podemos inclusive verificar que o operador dado por $P(x)P(-x)$ é proporcional a identidade:

$$\begin{aligned}
 P(x)P(-x) &= \left[\sqrt{\frac{1-\operatorname{tgh}(x)}{2}}P_1 + \sqrt{\frac{1+\operatorname{tgh}(x)}{2}}P_2 \right] \left[\sqrt{\frac{1-\operatorname{tgh}(-x)}{2}}P_1 \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{1+\operatorname{tgh}(-x)}{2}}P_2 \right] \\
 &= \left[\frac{1-\operatorname{tgh}^2(x)}{4} \right]^{\frac{1}{2}} P_1 + \left[\frac{1-\operatorname{tgh}^2(x)}{4} \right]^{\frac{1}{2}} P_2 \\
 &= \left[\frac{1-\operatorname{tgh}^2(x)}{4} \right]^{\frac{1}{2}} I
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

O que nos leva a olhar para uma série de medidas, representadas por estes dois operadores, como um processo idêntico a uma caminhada aleatória, cuja evolução em N passos é bastante conhecida.

Investigando o colapso do estado de fótons emaranhados

Na última seção do capítulo anterior falamos dos processos de medidas e de modelos que simulam o colapso da função de onda. Os trabalhos nesses temas têm grande importância na construção de uma intuição cada vez mais sofisticada sobre o mundo quântico. Estudos como estes nos conduzem a uma reflexão sobre o formalismo empregado, permitindo uma distinção mais precisa entre os seus elementos, uma distinção entre o que não passa de uma ferramenta matemática e uma grandeza que possui uma realidade física. Discussões recentes [PBR12] e [SF12], por exemplo, colocam em questão o que seria um estado quântico, seria ele uma grandeza física ou apenas um instrumento matemático que nos permite encontrar a distribuição estatística dos resultados de uma série de medidas?

Em uma tentativa de enriquecer um pouco mais nossa compreensão sobre o processo de medida, apresentamos neste trabalho, que é uma continuação do trabalho apresentado pelo teórico Fernando Parisio[Par11] na revista *Physical Review A*, intitulado *Estimating the reduction time of quantum states*, uma proposta de verificar experimentalmente se o processo de redução de uma função de onda ocorre de forma instantânea ou em um intervalo de tempo finito. Com essa informação a mais sobre o processo de medida, seríamos capazes de restringir as dinâmicas de colapso que consideramos. De forma mais indireta, seríamos capazes de ter uma melhor noção do que seria o estado quântico, com relação ao que foi referido no parágrafo anterior: se um estado quântico de fato possui um status de realidade, como o campo elétrico, por exemplo, é de se esperar que ele varie de forma suave. Já se ele não passa de uma ferramenta matemática, é de se esperar que o colapso ocorra instantaneamente, dado que o mesmo não passaria de um aumento da quantidade de informação que temos sobre o sistema.

Não faremos aqui restrições sobre a dinâmica que deve governar o fenômeno da redução, tampouco iremos adicionar outros elementos auxiliares ao formalismo, utilizaremos apenas um modelo mais detalhado do processo de medida, como foi feito no artigo supracitado. Na primeira seção deste capítulo, falaremos sobre nossa descrição de medida e as hipóteses a serem consideradas. A seguir desenvolvemos nossa proposta considerando dois possíveis cenários: um em que a função de onda leva um tempo finito para colapsar e outro em que o processo ocorre de forma instantânea.

3.1 Hipóteses e considerações

A interpretação ortodoxa da teoria quântica nos leva a olhar para o fenômeno de medida como um evento instantâneo. Em princípio, um sistema sofreria uma interação, a qual a partir daqui chamaremos de sondagem, em um instante de tempo preciso, digamos t_s , e no mesmo instante a função de onda sofreria uma redução para um dos autoestados do observável medido. Note-se que temos dois eventos completamente distintos acontecendo no instante t_s : a sondagem do sistema pelo aparato e a redução da função de onda.

Vamos agora analisar a situação de forma mais cuidadosa. Como foi colocado na referência citada anteriormente, suponhamos que temos um sistema microscópico a ser medido e considere que a sondagem do sistema irá ocorrer através de um fóton emitido por um átomo externo ao sistema. Tudo o que podemos dizer sobre o instante em que a sondagem acontecerá é que a densidade de probabilidade dela ocorrer no instante t é dada por $p(t) \propto e^{-\frac{t}{t_c}}$, onde t_c é o tempo de decaimento do átomo usado na sondagem. Tudo o que podemos fazer então é manter a via de interação aberta durante uma janela de tempo Δt , dentro da qual a probabilidade da sondagem ocorrer é tão próxima de 1 quanto desejada.

Tendo isso em mente, inferimos que para uma abordagem mais precisa do processo de medida, precisamos reformulá-lo inserindo elementos que representem distintamente o início da medida, ou seja, o momento a partir do qual o fóton pode ser emitido, do momento da sondagem, instante em que o fóton "atinge o sistema", numa linguagem pouco rígida.

Assim, assumiremos aqui que toda medida tem uma duração finita Δt e que, uma vez iniciada no instante t_0 , a sondagem, evento que desencadeia o colapso, pode acontecer em algum instante dentro da janela de tempo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ seguindo uma determinada distribuição de probabilidade $p(t)$, que deverá estar estritamente relacionada com o aparato medidor assim como a duração da medida Δt . Note-se que uma vez que ao evento de sondagem associamos uma função densidade de probabilidade, a única imposição a ser feita é que sua integral entre t_0 e $t_0 + \Delta t$ seja menor ou igual a 1. Isso implica que consideramos casos em que realizamos o procedimento de medida porém não ocorre a sondagem do sistema, ou seja não extraímos nenhuma informação dele. Mais adiante daremos uma forma específica à densidade de probabilidade $p(t)$, e uma relação específica entre o tempo da medida Δt e o aparato que propomos.

Como segundo ponto desta seção, vamos colocar a hipótese a ser considerada: uma vez que o estado quântico inicia o processo de colapso, desencadeado por uma sondagem, ele deve levar um determinado intervalo de tempo δt para concluir o processo. Não faremos nenhuma referência específica à dinâmica que vai governar este processo, consideraremos apenas que durante todo o processo o estado do conjunto sistema-aparato está contido no espaço de Hilbert $\mathcal{E}_T = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}_X$, onde \mathcal{E} é o espaço de Hilbert relacionado com o sistema e \mathcal{E}_X é o espaço relacionado com todos os graus de liberdade que acoplam com ele.

Recordando o tópico de medidas fracas, onde foi apresentada a ideia do colapso como resultado de uma sequência das mesmas, é fácil ver que a abordagem utilizada geraria uma dinâmica de evolução idêntica a de um caminhante aleatório, onde teríamos o processo:

$$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |\psi_f\rangle. \quad (3.1)$$

Onde cada índice indica a realização de uma medida representada pelo par de operadores

$P(x)$ e $P(-x)$, definidos no capítulo anterior. $|\psi(x_0)\rangle$ representa o estado inicial e $|\psi(x_f)\rangle$ representa o estado final, já colapsado.

Nesta dinâmica, podemos identificar nossa proposta de tempo finito de colapso com o tempo necessário para o processo de evolução estocástica atingir o resultado desejado.

Igualmente, temos na proposta apresentada pelo físico Gisin, em seu trabalho citado no capítulo anterior, que o tempo de colapso que propomos pode ser visto como o tempo necessário para a evolução de um processo da função de onda perante a equação diferencial estocástica proposta.

3.2 Desenvolvimento

Vamos considerar agora o seguinte experimento: um par de fótons é criado em um determinado estado emaranhado, os fótons são separados espacialmente e então, de forma simultânea, medimos a polarização em ambos os fótons. Analisaremos esse experimento por dois caminhos, um considerando que o tempo de redução da função de onda é nulo e o outro, seguindo a nossa hipótese, de que o mesmo é finito. Por fim confrontaremos os resultados à procura de possíveis evidências que pesem a favor de um ou de outro cenário. Uma representação bastante simplificada da nossa proposta de experimento está ilustrada na figura 3.1 a seguir.

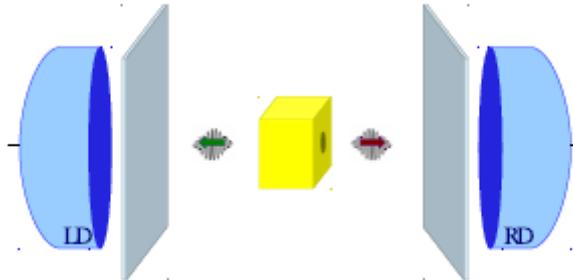


Figura 3.1 A caixa amarela consiste em uma fonte de pares de fótons emaranhados, representados pelos pacotes de onda verde e vermelho, que são separados espacialmente e detetados pelos detectores LD e RD

Por uma questão de simplicidade, vamos nos restringir ao subespaço de estados de polarização com base $|+-\rangle$ e $|-\rangle$, ou seja, a forma mais geral de escrever nosso estado é dada por:

$$|\Psi\rangle = \alpha |+-\rangle + \beta |-\rangle \quad (3.2)$$

onde, por $|\psi\rangle$ ser normalizado, temos a relação $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. E também, vamos sempre considerar α e β não-nulos, caso contrário não teríamos emaranhamento.

Como já foi discutido na segunda seção do capítulo *Preliminares* deste trabalho, uma boa fonte de fótons emaranhados que é perfeitamente aplicável ao nosso propósito é dada pelo fenômeno de conversão paramétrica do tipo descendente. Na mesma seção também colocamos que é possível manipular os coeficientes α e β inserindo diferentes componentes ópticos na trajetória de cada fóton.

A sincronia dos fótons, no referencial do laboratório, pode ser restabelecida com bastante precisão com auxílio do interferômetro de Hong-Ou-Mandel. No entanto, tal sincronia só pode ser restabelecida até o ponto em que os fótons saem do interferômetro. Para ser o mais preciso possível, consideraremos também o atraso τ gerado por uma diferença de percurso dos pacotes de onda $f_D(t)$ e $f_E(t)$ entre a saída do interferômetro e os detetores, como ilustrado na figura abaixo, 3.2:

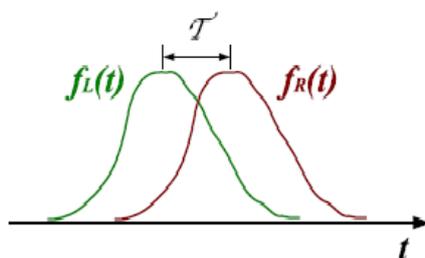


Figura 3.2 Os pacotes de onda estão representando cada um dos fótons, em verde o fóton que segue para o detetor da esquerda e em vermelho o fóton que segue para o detetor da direita. A ilustração mostra que eles possuem um atraso entre si natural das limitações experimentais

Aplicando o conceito de medida apresentado na seção anterior, iremos associar às funções densidade de probabilidade $p_D(t)$ e $p_E(t)$ de cada uma das sondagens ocorrer as funções densidades que representam os pacotes de onda dos fótons, ou seja, faremos $p_{E(D)}(t) = f_{E(D)}(t)$. Tomaremos como o intervalo de tempo em que a medida ocorre o tempo de coerência τ_c dos pacotes de onda.

Analisando o problema em um cenário onde o tempo de colapso é nulo, é importante perceber que a nossa abordagem da medida não modifica o resultado previsto pela interpretação ortodoxa. Temos de imediato o resultado previsto pela mesma, observaremos com uma probabilidade $|\alpha|^2$ o resultado: partícula da esquerda no autoestado + e partícula da direita no autoestado -; e com probabilidade $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$ o resultado: partícula da esquerda no autoestado - e partícula da direita no autoestado +. Neste caso, a segunda medida não desempenha nenhum papel, e também o atraso remanescente τ que consideramos não possui nenhuma relevância.

Para uma estatística de N repetições, o cenário nos levaria a um valor médio do número n_1 de incidências do resultado (esquerda +, direita -) que pode ser obtido aplicando a equação 2.3 ao nosso problema:

$$\begin{aligned}
\langle n_1 \rangle &= \sum_{n_1=0}^N n_1 \frac{N!}{n_1! n_2!} (|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2} \\
&= |\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial |\alpha|^2} \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1! n_2!} (|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2} \\
&= |\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial |\alpha|^2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^N \\
&= |\alpha|^2 N.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

E o quadrado do desvio médio é dado pela equação 2.7:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(n_1) &= \langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2 \\
&= |\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial |\alpha|^2} \left\{ |\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial |\alpha|^2} \left[\sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1! n_2!} (|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2} \right] \right\} - |\alpha|^4 N^2 \\
&= |\alpha|^2 N + |\alpha|^4 N^2 - |\alpha|^4 N - |\alpha|^4 N^2 \\
&= N (|\alpha|^2 - |\alpha|^4).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

De forma análoga, encontramos para o número de incidências n_2 do resultado (esquerda -, direita +):

$$\langle n_2 \rangle = |\beta|^2 N = (1 - |\alpha|^2) N, \tag{3.5}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma^2(n_2) &= N (|\beta|^2 - |\beta|^4) \\
&= N (|\alpha|^2 - |\alpha|^4).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Como podemos ver, o valor médio das ocorrências cresce de forma diretamente proporcional ao número de repetições N , ao passo que o desvio cresce proporcionalmente à raiz do número de repetições.

Até este ponto, nossa análise, quanto aos resultados finais, em nada difere do que é tradicionalmente aceito e experimentalmente verificado.

Vamos agora direcionar nossas atenções ao cenário em que consideramos que o processo de redução da função de onda não ocorre de forma instantânea, isto é, vamos considerar o tempo de colapso finito.

Neste caso, a nossa definição de medida é de importância crucial para uma abordagem precisa do processo. A grande diferença está contida no que a sincronia das medidas representa. Note-se que ao sincronizarmos nossas medidas não estamos sincronizando o início do processo de colapso, sincronizamos apenas as janelas de tempo em que nossos detectores estarão aptos a realizar a sondagem do sistema, que, como um todo, irá iniciar seu processo de colapso no

instante em que a primeira sondagem for realizada, seja ela a do fóton da esquerda ou a do fóton da direita.

Note que uma vez que o processo de redução se inicia, nosso estado pode evoluir de duas maneiras: com probabilidade $|\alpha|^2$ o sistema vai evoluir de acordo com $|\psi_1(t)\rangle$, levando o sistema para o estado final $|+-\rangle$; e com probabilidade $|\beta|^2$ o sistema vai evoluir de acordo com $|\psi_2(t)\rangle$. Tendo os estados citados, $|\psi_1(t)\rangle$ e $|\psi_2(t)\rangle$, a forma:

$$\begin{cases} |\psi_1(t)\rangle = a_1(t; \alpha, \beta) |+-\rangle \otimes \left| \Phi_{+-}^{(1)} \right\rangle + b_1(t; \alpha, \beta) |-+\rangle \otimes \left| \Phi_{-+}^{(1)} \right\rangle, \\ |\psi_2(t)\rangle = a_2(t; \alpha, \beta) |+-\rangle \otimes \left| \Phi_{+-}^{(2)} \right\rangle + b_2(t; \alpha, \beta) |-+\rangle \otimes \left| \Phi_{-+}^{(2)} \right\rangle, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde os estados $\left| \Phi_{+-}^{(1)} \right\rangle$, $\left| \Phi_{-+}^{(1)} \right\rangle$, $\left| \Phi_{+-}^{(2)} \right\rangle$ e $\left| \Phi_{-+}^{(2)} \right\rangle$, são elementos de \mathcal{E}_X , representando todos os graus de liberdade externos que acoplam com o sistema durante o processo de sondagem, seguindo o modelo que já foi apresentado, estando eles relacionados com os ponteiros macroscópicos.

Quanto às funções $a_1(t; \alpha, \beta)$, $b_1(t; \alpha, \beta)$, $a_2(t; \alpha, \beta)$ e $b_2(t; \alpha, \beta)$, faremos algumas considerações. Primeiramente, quanto às dependências das funções. Em princípio, seria mais natural assumir funções que dependessem apenas do tempo, no entanto, se olhamos para uma das condições de contorno que as funções devem obedecer, verificamos uma clara dependência do estado inicial. No instante $t_s^{(1)}$ em que a primeira sondagem ocorre, temos:

$$\begin{cases} a_1(t_s^{(1)}; \alpha, \beta) = a_2(t_s^{(1)}; \alpha, \beta) = \alpha \\ b_1(t_s^{(1)}; \alpha, \beta) = b_2(t_s^{(1)}; \alpha, \beta) = \beta \end{cases} . \quad (3.8)$$

Em segundo lugar, faremos uma hipótese sobre o tempo que é necessário para o sistema evoluir de seu estado original para um dos possíveis estados finais. Argumentamos que o tempo de redução, δt , de um dado estado depende da "rota da redução". É intuitivo pensar que dado o estado inicial $|\Psi\rangle$, se temos a relação $|\alpha|^2 > |\beta|^2$, o estado $|\psi_1\rangle$ levará um tempo δt_1 para atingir seu estado final que deve ser menor que o tempo δt_2 necessário para que o estado $|\psi_2\rangle$ o faça.

Retomando o ponto de vista apresentado na seção *Elementos da teoria da medição* em que é mostrado que o colapso da função de onda pode ser visto como o resultado de uma caminhada aleatória no espaço de Hilbert, vemos que nossa proposta está em acordo com o seria esperado. Uma caminhada aleatória deve atingir o ponto mais próximo em um número de interações menor.

Fica implícito no que foi feito acima a ideia de que durante o processo de colapso, o estado do sistema permanece sempre contido no subespaço dos estados $|+-\rangle$ e $|-+\rangle$. Ressaltamos porém que esta é uma suposição bastante razoável, uma vez que em princípio toda a dinâmica envolvida estaria contida no subespaço citado.

É importante salientar que nenhuma hipótese está sendo colocada quanto à forma com que os coeficientes da equação 3.7 devem evoluir com o tempo. Notaremos que a simples existência da dinâmica de colapso mudará as estatísticas do problema, pois neste caso em particular, a

segunda sondagem pode modificar o estado do sistema, diferentemente do cenário de colapso instantâneo.

Aqui é importante que façamos algumas considerações. Para simplificar o nosso problema, porém sem perda de força do nosso argumento, vamos considerar que ambos os pacotes, o do fóton da esquerda e o do fóton da direita, possuem a mesma forma, diferindo apenas no atraso remanescente τ . Resumindo, vamos considerar que:

$$f_{(D)}(t) = f_{(E)}(t - \tau) \quad (3.9)$$

Então, encontramos um cenário em que temos uma janela de tempo, de largura Δt , na qual nosso sistema inicia seu processo de colapso, de uma determinada duração desconhecida δt , no instante $t_s^{(1)}$ em que a primeira sondagem ocorre. E em algum instante posterior $t_s^{(2)}$, sofre uma nova sondagem. É esperado que com uma grande probabilidade não ocorra nada de diferente daquilo que ocorre no cenário de colapso instantâneo. Porém, existe uma probabilidade não nula de as distâncias temporais entre a primeira e a segunda sondagem sejam inferiores ao tempo de redução da função de onda: $t_s^{(1)} - t_s^{(2)} < \delta t$, como ilustrado abaixo:

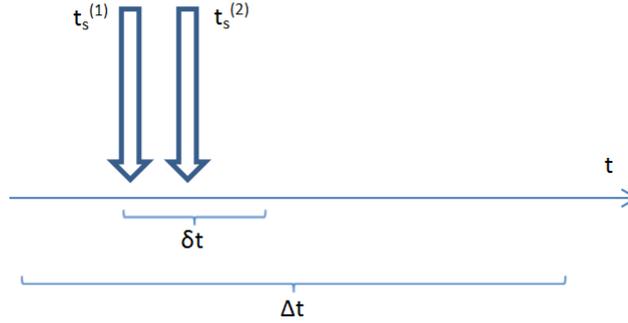


Figura 3.3 Existe uma probabilidade não nula de que as duas sondagens ocorram em um intervalo de tempo inferior a δt

Definindo $P_{<}$ como sendo a probabilidade acumulada do evento acima ocorrer. Relembrando os conceitos apresentados na primeira seção do capítulo 2 temos:

$$\begin{aligned} P_{<} &= |\alpha|^2 P(y \leq \delta t_1) + |\beta|^2 P(y \leq \delta t_2) \\ &= |\alpha|^2 \int_{-\Delta t}^{\Delta t} dt_1 \int_{t_1 - \delta t_1}^{t_1 + \delta t_1} dt_2 f_{(E)}(t_1) f_{(D)}(t_2) \\ &\quad + |\beta|^2 \int_{-\Delta t}^{\Delta t} dt_2 \int_{t_2 - \delta t_2}^{t_2 + \delta t_2} dt_1 f_{(E)}(t_1) f_{(D)}(t_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Onde o primeiro termo do lado direito da equação representa os eventos em que o sistema seguiu para $|\psi_1\rangle$, e o segundo termo vai representar os eventos em que ele seguiu para $|\psi_2\rangle$.

Neste caso, se a segunda sondagem é realizada quando o sistema está colapsando, teremos uma mudança no processo. Se, na primeira sondagem o sistema evoluir de acordo com $|\psi_1(t)\rangle$,

então após a segunda sondagem o sistema possui uma probabilidade $|a_1(t; \alpha, \beta)|^2$ de ser encontrado no estado $|+-\rangle \otimes |\Phi_{+-}^{1f}\rangle$ e uma probabilidade $|b_1(t; \alpha, \beta)|^2$ de ser encontrado no estado $| -+\rangle \otimes |\Phi_{-+}^{1f}\rangle$. Se, por outro lado, o sistema após a primeira sondagem, evoluir para $|\psi_2(t)\rangle$, temos uma probabilidade $|a_2(t; \alpha, \beta)|^2$ de encontrarmos o sistema no estado $|+-\rangle \otimes |\Phi_{+-}^{2f}\rangle$, e uma probabilidade $|b_2(t; \alpha, \beta)|^2$ de encontrarmos o sistema no estado $| -+\rangle \otimes |\Phi_{-+}^{2f}\rangle$. Onde os estados $|\Phi^f\rangle$ representam todos os graus de liberdade que acoplam com o sistema durante a segunda medida, de forma semelhante aos estados $|\Phi\rangle$ empregados em 3.7, estando aqueles associados a um espaço de Hilbert de dimensão maior que o destes.

No cenário em que as duas sondagens ocorreram em dois instantes dentro do intervalo de tempo inferior a δt podemos computar a probabilidade de obtermos como resultado da medida a configuração (esquerda +, direita -) da seguinte maneira:

$$P(|\psi_1\rangle) |a_1(t; \alpha, \beta)|^2 + P(|\psi_2\rangle) |a_2(t; \alpha, \beta)|^2. \quad (3.11)$$

Na equação acima, $P(|\psi_1\rangle)$ e $P(|\psi_2\rangle)$ são as probabilidades do colapso seguir sua trajetória por $|\psi_1\rangle$ e por $|\psi_2\rangle$ respectivamente dados por $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$, em acordo com a regra de Born. Reescrevemos a mesma como:

$$|\alpha|^2 |a_1(t; \alpha, \beta)|^2 + (1 - |\alpha|^2) |a_2(t; \alpha, \beta)|^2. \quad (3.12)$$

De um modo mais geral, podemos encontrar a probabilidade de obtermos o resultado (esquerda +, direita -) multiplicando o resultado obtido acima pela função densidade de probabilidade da variável $y = t_s^{(1)} - t_s^{(2)}$ e integrando no intervalo de tempo em que o evento acontece: $-\delta t \leq y \leq \delta t$. Isso nos dará a probabilidade de obtermos (esquerda+, direita -), se as duas sondagens ocorrem em qualquer instante, desde que a distância temporal entre elas seja inferior a δt :

$$P(+ - | \text{evento não trivial}) = \frac{|\alpha|^2}{P_{<}} \int_{-\delta t_1}^{\delta t_1} dy p(y) |a_1(y; \alpha, \beta)|^2 + \frac{|\beta|^2}{P_{<}} \int_{-\delta t_2}^{\delta t_2} dy p(y) |a_2(y; \alpha, \beta)|^2, \quad (3.13)$$

onde por evento não trivial nos referimos ao caso em que a segunda sondagem ocorre enquanto o processo de redução iniciado pela primeira sondagem ainda está em andamento. O fator $\frac{1}{P_{<}}$ normaliza a probabilidade. Vale lembrar que, como foi visto no capítulo *Preliminares*, podemos obter a função densidade de probabilidade $p(y)$ a partir da função probabilidade acumulada $P(y \leq X)$:

$$p(y) = \frac{d}{dX} P(y \leq X), \quad (3.14)$$

Para simplificar nossos cálculos, vamos definir as grandezas Γ e Λ , da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \Lambda = \int_{-\delta_2}^{\delta_2} |a_2(y; \alpha, \beta)|^2 p(y) dy \\ \Gamma = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} |a_1(y; \alpha, \beta)|^2 p(y) dy - P_{<} \end{cases}, \quad (3.15)$$

obtendo:

$$P(+ - | \text{evento não trivial}) = \frac{|\alpha|^2 (\Gamma + P_{<}) + |\beta|^2 \Lambda}{P_{<}}. \quad (3.16)$$

Assim considerando todos os eventos possíveis no nosso problema, o que inclui a situação mais provável de que a distância entre as sondagens seja maior que δt , escrevemos a probabilidade de obtermos o resultado (esquerda +, direito -), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(+ -) &= (1 - P_{<}) |\alpha|^2 + |\alpha|^2 (\Gamma + P_{<}) + |\beta|^2 \Lambda, \\ &= |\alpha|^2 + |\alpha|^2 \Gamma + |\beta|^2 \Lambda, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Vale ressaltar que eliminamos da nossa estatística a contribuição de termos que não foram medidos, situação que deve ocorrer com probabilidade não nula.

Podemos agora analisar as estatísticas de N realizações neste novo cenário. Vamos obter os valores médios das incidências de cada um dos possíveis resultados, (esquerda +, direita -) e (esquerda -, direita +) representados respectivamente por n_1 e n_2 , e os seus desvios quadráticos médios $\sigma^2(n_1)$ e $\sigma^2(n_2)$. De forma análoga ao que foi feito para o cenário de colapso instantâneo, temos:

$$\begin{cases} \langle n_1 \rangle = \left[|\alpha|^2 + |\alpha|^2 \Gamma + |\beta|^2 \Lambda \right] N \\ \langle n_2 \rangle = \left[1 - |\alpha|^2 - |\alpha|^2 \Gamma - |\beta|^2 \Lambda \right] N \end{cases}, \quad (3.18)$$

e

$$\sigma^2(n_1) = \sigma^2(n_2) = N \left[|\alpha|^2 + |\alpha|^2 \Gamma + |\beta|^2 \Lambda \right] \quad (3.19)$$

$$- \left(|\alpha|^2 + |\alpha|^2 \Gamma + |\beta|^2 \Lambda \right)^2 \Big]. \quad (3.20)$$

Como podemos ver, assim como no cenário de colapso instantâneo, o valor médio das incidências cresce proporcionalmente a N , ao passo que as flutuações crescem proporcionalmente a \sqrt{N} . Se olharmos para o valor médio da diferença entre o número de incidências (esquerda +, direita -) e o número de incidências (esquerda -, direita +), dado por ΔN_{II} para este segundo cenário, temos:

$$\Delta N_{II} = N \left[2|\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 \Gamma + 2|\beta|^2 \Lambda - 1 \right]. \quad (3.21)$$

Ao passo que no primeiro cenário tínhamos:

$$\Delta N_I = N \left(2|\alpha|^2 - 1 \right). \quad (3.22)$$

Dando uma diferença ΔN entre os possíveis resultados em cada um dos cenários:

$$\Delta N = \Delta N_{II} - \Delta N_I = N \left[2|\alpha|^2 \Gamma + 2|\beta|^2 \Lambda \right]. \quad (3.23)$$

De imediato vemos na equação acima que a capacidade de distinção entre ambos os cenários depende diretamente do estado que estamos utilizando. Em específico, no caso em que temos $|\alpha|^2 = |\beta|^2$ verificamos uma incapacidade de perceber a diferença.

Voltando ao problema, fica ainda a questão de quantas repetições do processo precisamos para distinguir com clareza o resultado, tendo em vista as flutuações. Para responder este ponto, vamos considerar o pior cenário possível, isto é o cenário em que os desvios de ΔN_I e ΔN_{II} são máximos. Vamos encontrar esta situação abaixo:

De 3.4 e 3.6 temos,

$$\sigma^2(\Delta N_I) = 2N \left(|\alpha|^2 - |\alpha|^4 \right). \quad (3.24)$$

E de 3.19, temos:

$$\sigma^2(\Delta N_{II}) = 2N \left[|\alpha|^2 + |\alpha|^2 \Gamma + |\beta|^2 \Lambda \right. \quad (3.25)$$

$$\left. - \left(|\alpha|^2 + |\alpha|^2 \Gamma + |\beta|^2 \Lambda \right)^2 \right]. \quad (3.26)$$

Note que podemos reescrever ambos os desvios como uma função do tipo:

$$x + x^2, \quad (3.27)$$

que tem seu ponto máximo para $x = \frac{1}{2}$. Logo, as situações possíveis em que temos o pior cenário possível, no que diz respeito às flutuações, possuem o desvio médio dado por $\sigma(\Delta N_I) = \sigma(\Delta N_{II}) = \sqrt{\frac{N}{2}}$.

Para verificar o número de repetições necessárias para obter uma significância estatística de K , olhamos para a grandeza $\frac{\Delta N}{\sigma(\Delta N)}$, que no pior cenário descrito acima é dada por:

$$\frac{\Delta N}{\sigma(\Delta N)} = \sqrt{2N} \left[2|\alpha|^2 \Gamma + 2|\beta|^2 \Lambda \right]. \quad (3.28)$$

Que nos diz que para obtermos a desejada significância, devemos ter:

$$N > K^2 2 \left[2|\alpha|^2 \Gamma + 2|\beta|^2 \Lambda \right]^{-2}. \quad (3.29)$$

3.3 Uma caso específico

Para uma abordagem mais prática de nossa proposta, vamos considerar uma fonte de luz de um laser pulsado, cujo perfil temporal do pacote de onda é dada pelo quadrado da função $\text{sech}(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\sigma_t} \text{sech}^2\left(\frac{t}{\sigma_t}\right). \quad (3.30)$$

Como foi dito anteriormente, a largura do pulso, dada por σ_t nos dará o tempo de coerência, que será fundamental na definição da janela temporal da medida. Retornando à equação 3.9, vemos que os pacotes de onda devem ser escritos como:

$$\begin{cases} f_{(E)}(t) = \frac{1}{2\sigma_t} \text{sech}^2\left(\frac{t}{\sigma_t}\right) \\ f_{(D)}(t) = \frac{1}{2\sigma_t} \text{sech}^2\left(\frac{t}{\sigma_t} + \frac{\tau}{\sigma_t}\right) \end{cases}. \quad (3.31)$$

Podemos calcular a probabilidade acumulada $P(y \leq \delta t_i)$ a partir da equação 3.10. Nossa probabilidade é dada por:

$$P(y \leq \delta t_i) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} dt_1 \int_{t_1 - \delta t_i}^{t_1 + \delta t_i} dt_2 f_{(E)}(t_1) f_{(D)}(t_2). \quad (3.32)$$

Aplicando 3.31, ficamos com:

$$P(y \leq \delta t_i) = \frac{1}{r\sigma_t^2} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} dt_1 \int_{t_1 - \delta t_i}^{t_1 + \delta t_i} dt_2 \text{sech}^2\left(\frac{t_1}{\sigma_t}\right) \text{sech}^2\left(\frac{t_2}{\sigma_t} + \frac{\tau}{\sigma_t}\right). \quad (3.33)$$

Integrando em t_2 , obtemos:

$$P(y \leq \delta t_i) = \frac{1}{4\sigma_t} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} dt_1 \text{sech}^2\left(\frac{t_1}{\sigma_t}\right) \left[\text{tgh}\left(\frac{t_1}{\sigma_t} + \frac{\tau + \delta t_i}{\sigma_t}\right) - \text{tgh}\left(\frac{t_1}{\sigma_t} + \frac{\tau - \delta t_i}{\sigma_t}\right) \right]. \quad (3.34)$$

Agora, para simplificar, vamos definir: $x \equiv \frac{t_1}{\sigma_t}$ e $A_n^{(i)} \equiv \frac{\tau + (-1)^n \delta t_i}{\sigma_t}$. Substituindo em 3.34, vamos ficar com:

$$P(y \leq \delta t_i) = \frac{1}{4} \sum_{n=0,1} (-1)^n \int_{-\frac{\Delta t}{\sigma_t}}^{\frac{\Delta t}{\sigma_t}} dx \text{sech}^2(x) \text{tgh}\left(x + A_n^{(i)}\right). \quad (3.35)$$

Expressando as funções hiperbólicas em termos de exponenciais, ficamos com:

$$P(y \leq \delta t_i) = \frac{1}{4} \sum_{n=0,1} (-1)^n \int_{-\frac{\Delta t}{\sigma_t}}^{\frac{\Delta t}{\sigma_t}} dx \frac{4e^{-2x}}{1+2e^{-2x}+e^{-4x}} \frac{1-e^{-2x-2A_n^{(i)}}}{1+e^{-2x-2A_n^{(i)}}} \quad (3.36)$$

Fazemos agora uma nova mudança de variáveis para facilitar o cálculo. Vamos definir $y = e^{-2x}$ e $B_n^{(i)} = e^{-2A_n^{(i)}}$, obtendo:

$$P(y \leq \delta t_i) = \sum_{n=0,1} (-1)^n \left\{ -\frac{1}{2} \int dy \frac{(1-B_n^{(i)}y)}{(y+1)^2 (B_n^{(i)}y+1)} \right\}. \quad (3.37)$$

Separando o integrando em frações parciais, temos:

$$P(y \leq \delta t_i) = \sum_{n=0,1} (-1)^n \left\{ \frac{B_n^{(i)}}{(B_n^{(i)}-1)^2} \int dy \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \frac{(1+B_n^{(i)})}{(1-B_n^{(i)})} \int dy \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{B_n^{(i)^2}}{(B_n^{(i)}-1)^2} \int dy \frac{1}{(B_n^{(i)}y+1)} \right\}. \quad (3.38)$$

Voltando para a variável x e integrando, encontramos:

$$P(y \leq \delta t_i) = \sum_{n=0,1} (-1)^n \left\{ \frac{e^{-2A_n^{(i)}}}{(e^{-2A_n^{(i)}}-1)^2} \ln(e^{-2x}+1) \Big|_{-\frac{\Delta t}{\sigma_t}}^{\frac{\Delta t}{\sigma_t}} - \frac{1}{2} \frac{(1+e^{-2A_n^{(i)}})}{(1-e^{-2A_n^{(i)}})} \left(\frac{-1}{1+e^{-2x}} \right) \Big|_{-\frac{\Delta t}{\sigma_t}}^{\frac{\Delta t}{\sigma_t}} - \frac{e^{-2A_n^{(i)}}}{(e^{-2A_n^{(i)}}-1)^2} \ln(e^{-2x-2A_n^{(i)}}+1) \Big|_{-\frac{\Delta t}{\sigma_t}}^{\frac{\Delta t}{\sigma_t}} \right\}. \quad (3.39)$$

Manipulando os termos da equação, podemos chegar em:

$$P(y \leq \delta t_i) = \sum_{n=0,1} (-1)^n \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{csch}^2(A_n^{(i)}) \ln \left[\frac{\cosh\left(A_n^{(i)} + \frac{\Delta t}{\sigma_t}\right)}{\cosh\left(A_n^{(i)} - \frac{\Delta t}{\sigma_t}\right)} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{cotgh}(A_n^{(i)}) \operatorname{tgh}\left(\frac{\Delta t}{\sigma_t}\right) \right\}. \quad (3.40)$$

Se assumimos que o tempo do colapso, δt , e o atraso remanescente entre os dois fótons, τ , são muito menores do que o tempo de coerência σ_t , o primeiro termo do somatório se anula, e ficamos com a expressão simplificada:

$$P(y \leq \delta t_i) \approx \frac{1}{2\sigma_t} \left[\operatorname{tgh} \left(\frac{\tau + \delta t_i}{\sigma_t} \right) - \operatorname{tgh} \left(\frac{\tau - \delta t_i}{\sigma_t} \right) \right]. \quad (3.41)$$

Derivando a equação acima em relação a δt_i , obtemos $p(y)$, a função densidade de probabilidade. Ficamos com:

$$p(y) \approx \frac{1}{2\sigma_t} \operatorname{tgh} \left(\frac{\Delta t}{\sigma_t} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\tau + y}{\sigma_t} \right). \quad (3.42)$$

Para verificar a eficiência de nossa proposta, vamos considerar a taxa de repetição típica de um laser pulsado de 100 MHz e uma perda do sinal da ordem de três ordens de magnitude. Essa perda que assumimos se dá devido ao processo de geração de fótons emaranhados. Assim obtemos uma taxa de repetição média de uma realização a cada 10 μ s.

Vamos considerar também que o atraso remanescente τ entre os dois pacotes de onda é consequência de uma diferença de percurso δL , entre o caminho realizado pelo fóton da esquerda e o fóton da direita. Assim temos que o atraso τ será dado por $\frac{\delta L}{c}$, sendo c a velocidade da luz. Temos uma limitação experimental que nos dá $\delta L = 1 \mu\text{m}$, gerando um atraso $\tau = 3,3 \text{fs}$. E por último, supomos que a forma do pacote não muda durante o percurso, entretanto consideramos um possível alargamento do pacote, assim para um pulso de largura inicial de 200 fs, diremos que ao chegar no detector ele possui uma largura de ≈ 1 ps. Podemos então, tranquilamente, definir a janela da medida como possuindo uma largura de aproximadamente 1 ns.

Supondo, por exemplo, que o tempo de colapso é de cerca de 0,1 fs, a equação 3.41 nos daria um valor de $P(y \leq \delta t)$ da ordem de 10^{-4} , combinado com a nossa taxa de repetição, teríamos uma média de 10 detecções por segundo do nosso evento não trivial de duas sondagens ocorrendo em uma distância temporal inferior ao tempo de colapso δt proposto.

Para apresentar números ainda mais precisos, vamos atribuir uma forma exponencial para a dinâmica do colapso, vamos fazer:

$$\begin{cases} a_2(t; \alpha, \beta) = \alpha \frac{e^{-\frac{t}{\delta t_2} - e}}{1 - e}, \\ a_1(t; \alpha, \beta) = \sqrt{1 - \left[\beta \frac{e^{-\frac{t}{\delta t_1} - e}}{1 - e} \right]^2} \end{cases} \quad (3.43)$$

respeitando as condições de contorno mostradas nas equações 3.8, uma vez que consideramos que o instante da primeira sondagem é $t_s = 0$. Substituindo 3.43 na primeira equação de 3.15, obtemos o Λ e o Γ .

Substituindo nas equações os valores considerados acima, vemos que Λ é da ordem de 10^{-4} . Para um estado inicial dado por $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, usando a equação 3.28, verificamos que para um experimento de 12 horas de duração (cerca de 10^9 realizações), obtemos uma relação $\frac{\Delta N}{\sigma(\Delta N)} \approx 6$, um resultado com força suficiente para ser tomado como evidência.

Conclusão

Neste trabalho, fizemos uma revisão sobre processos de medidas levando em consideração tanto modelos mais antigos, como o apresentado por Bohr, como modelos mais sofisticados, como o apresentado por von Neumann. Falamos sobre as tentativas de introduzir de forma mais natural do que a usada atualmente, o processo de colapso da função de onda perante uma medida, onde, como exemplo, destacamos o modelo apresentado por N. Gisin. Fazemos também uma breve exposição sobre o atual tema de *medidas fracas*, mostrando uma nova forma de olhar para o processo de medida.

Diante de uma clara limitação de conhecimento teórico que temos nesta área, o trabalho apresentado aqui, pode ser uma oportunidade de incrementarmos nosso nível de compreensão do mundo quântico. Em particular dos processos de medidas.

Partindo de uma remodelagem do que chamamos de medida, mostramos de forma teórica que é possível verificar experimentalmente se o processo de redução de uma função de onda ocorre de forma instantânea ou possui uma duração finita. Fizemos isso confrontando resultados previstos em cada um destes cenários para um experimento conceitualmente simples, realizando medidas em pares de fótons emaranhados.

Por não fazermos poucas restrições sobre a dinâmica do processo de colapso, criamos uma situação bastante geral, adaptável a qualquer processo que siga o modelo de von Neumann e respeite a regra de Born.

Fundamentamos a nossa proposta de execução do experimento em dados, obtidos de artigos experimentais, que mostra que ela é factível. A fim de ressaltar ainda mais o valor do experimento proposto, fizemos na última seção uma análise, na qual mostramos que, dadas as condições usualmente encontradas em laboratório, seria possível identificar um tempo de colapso não nulo da ordem de 1 fs, através de um experimento com duração de 12 h.

Acreditamos que é possível, caso seja constatado experimentalmente um tempo de colapso não nulo, aprimorar a proposta de experimento. Através da repetição de medidas onde variaríamos os parâmetros do sistema, tais como α (ou seja, o estado inicial) e τ (o atraso entre os pacotes de onda), seríamos capazes de extrair informações sobre a dinâmica do colapso.

Referências Bibliográficas

- [AAV88] Yakir Aharonov, David Z. Albert, and Lev Vaidman. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. *Physical Review Letters*, 60(14), 1988.
- [AR05] Yakir Aharonov and Daniel Rohrlich. *Quantum Paradoxes*. WILEY-VCH, 2005.
- [Arn74] L. Arnold. *Stochastic differential equations: theory and applications*. Wiley, 1974.
- [Bal98] Leslie E. Ballentine. *Quantum Mechanics*. World Scientific, 1998.
- [Bel04] J. S. Bell. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge, 2004.
- [CTDL77] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics*. WILEY-VCH, 1977.
- [Gis81] N. Gisin. A simple nonlinear dissipative quantum evolution equation. *Journal of Physics A*, 14(2259), 1981.
- [Gis84] N. Gisin. Quantum measurements and stochastic processes. *Physical Review Letters*, 52(19), 1984.
- [GZ04] Crispin Gardiner and Peter Zoller. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer, 2004.
- [HOM87] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photon by interference. *Physical Review Letters*, 59(18), 1987.
- [K⁺95] Paul G. Kwiat et al. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Physical Review Letters*, 75(24), 1995.
- [Kir06] K. A. Kirkpatrick. Translation of g. luders uber die zustandsanderung durch den mepoze. *arXive*, 2006.
- [OB05] Ognjan Oreshkov and Todd A. Brun. Weak measurements are universal. *Physical Review Letters*, 95(110409), 2005.
- [Par11] Fernando Parisio. Estimating the reduction time of quantum states. *Physical Review A*, 84(062108), 2011.

- [Par12] Matteo G A Paris. The modern tools of quantum mechanics a tutorial on quantum states, measurements, and operations. *arxiv*, 2012.
- [PBR12] Matthew F. Pusey, Jonathan Barrett, and Terry Rudolph. On the reality of the quantum state. *Nature Physics*, 8(6), 2012.
- [Rei09] Linda E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. WILEY-VCH, 2009.
- [Sak94] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. San Fu Tuan, 1994.
- [Sal99] Sílvio R. A. Salinas. *Introdução à Física Estatística*. edusp, 1999.
- [SF12] Maximilian Schlosshauer and Arthur Fine. Implications of the pusey-barrett-rudolph quantum no-go theorem. *Physical Review Letters*, 2012.
- [Sha94] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum, 2^o edition, 1994.
- [Yar89] Amnon Yariv. *Quantum Electronics*. JOHN WILEY and SONS, 1989.

*

Apêndice

Investigation of the collapse of quantum states using entangled photons

M. G. M. Moreno and Fernando Parisio*

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901, Recife, Pernambuco, Brazil

We propose a scheme to investigate the time scale of the wave-function collapse by using polarization-entangled photon pairs. The setup is similar to those employed to study quantum correlations, but in the present case, synchronization is essential at all stages. We find that it is possible to discriminate between the scenarios of instantaneous collapse and finite-time reduction via a large number of double measurements of polarization. The quantities to be recorded would present distinct behaviors in each scenario, the deviations being small but distinguishable from pure statistical fluctuations. The connection between the presented formalism and the theory of weak measurements is discussed as well as the possible consequences to experimental tests of non-locality.

PACS numbers: 03.65.Ta, 03.65.Aa, 42.50.Xa

I. INTRODUCTION

The wave function and its collapse remain in controversial positions in the general framework of quantum theory. Nevertheless, for long periods in the development of wave mechanics these issues were put aside by most of users of the quantum formalism as, perhaps, an underlying discomfort. One of the reasons for this is the fact that there were plenty of more direct questions to be coped with regarding, e. g., atomic and particle physics. In the last few decades, however, experiments reached a remarkable sophistication and textbook illustrations became feasible in the laboratory. This allowed for objective discussions on, until then, purely academic matters, as for example in the experimental tests [1] of Bell's inequalities [2].

Since then, part of the focus started to migrate from operational aspects to more foundational ones. This ongoing move is so important that, justifiably, has been termed *the second quantum revolution* [3]. Examples of this process are the debate on the “reality” of quantum states, which received special attention in the last year [4] (see also [5]), and the many facets of the measurement problem, in particular, the collapse of the state vector [6–11]. These two topics are intimately related since there is no collapse problem in the epistemic view, where a state is regarded as the experimenter's information on some aspects of reality. Particularly, in the statistical interpretation [12], where the basic entity is an ensemble (nothing being said about single particles), the decoherence program [8] alone seems to solve the remaining puzzle, namely, the lack of superposition states in the macroscopic world. However, if one admits that the quantum state of a single object has a physical reality, the ontic view, then the collapse problem persists. In such a case it is hard to accept that any kind of instantaneous evolution can happen. In this work we take this observation earnestly, and argue that if the state vector is of ontological nature, then the collapse should

not be instantaneous. In what follows we show that it is possible to check this hypothesis experimentally via a large number of synchronized polarization measurements of two correlated photons.

In a previous work [10] we presented some basic assumptions that we will adopt here, along with a formal example, constituting a proof of principle on how one could investigate the collapse time of quantum states. This example involved a single, completely unspecified, system with a two-dimensional Hilbert space, where two almost simultaneous measurements of *incompatible* observables were required, a conceptual and practical difficulty.

In the present paper we study a specific composite system, two entangled photons, for which the need of incompatible measurements is removed. A description of a feasible experiment to investigate the collapse time is given along with a detailed theoretical analysis, where all calculations and estimates are based on realistic figures, with imperfect synchronization taken into account.

The manuscript is organized as follows: in the next section we state our basic hypothesis, discuss its interpretation in the specific case of photodetection and analyze the possible connections with the theory of weak measurements. In section III, we give a description of the proposed experiment along with the calculation of the quantities to be measured. In section IV we give our conclusions and some final remarks.

Finally, it is worth to mention that non-vanishing collapse times have been considered before in different circumstances, e. g., in the search for stochastic terms which, added to the Schrödinger equation, produce a reduction dynamics consistent with Born's rule [13].

II. FINITE-TIME REDUCTION

In a scenario of non-instantaneous collapse the measurement postulate must be recast in some way. A recent proposal [10] that we will adopt here, with some modifications, reads :

(I) *Measurement duration and “hits”* : We take into account the fact that any actual measurement has a du-

* corresponding author: parisio@df.ufpe.br

ration, that we denote by Δt and, most importantly, we assume that the collapse is a process initiated by a random hit (we borrow this terminology from [6] in a distinct context) occurring at $t^{(h)}$, which is taken as a stochastic variable obeying some probability distribution $f(t)$, defined in the window $[t_0, t_0 + \Delta t]$. For $t < t^{(h)}$, the system remains uncoupled to external degrees of freedom. The exact nature of the distribution and the duration Δt depend on the specific system and measurement method, as will be exemplified later.

(II) *Finite-time collapse*: The quantum state takes a short time δt , starting from $t^{(h)}$, to complete the reduction. We do not make any specific statements about the non-unitary time evolution in the interval $[t^{(h)}, t^{(h)} + \delta t]$. But we do assume that during the reduction the state of the system is still contained in a ket belonging to the enlarged Hilbert space $\mathcal{E}_T = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}_X$, where \mathcal{E} concerns the system of interest and \mathcal{E}_X refer to all relevant degrees of freedom that couple with it. In addition, we assume that δt is a decreasing function of $|\langle \Psi_0 | \Psi_f \rangle|$ (the inner product between the initial and final states in \mathcal{E}), such that, if the states are orthogonal $\delta t \rightarrow \infty$, while $\delta t = 0$ for coincident initial and final states.

Regarding (I) we remark that it is very important to realize that $t^{(h)}$ must not be confused with the moment when the pointer comes to a definite position, that is, when the avalanche photodiode (APD) delivers a macroscopic current, in the case of photodetection. This time scale has been studied in different perspectives [14]. It is an essential part of our hypothesis that this macroscopic phenomenon is preceded by a microscopic event that triggers the collapse of the state ket at $t = t^{(h)}$.

We now give the form of $f(t)$ for the detection of photons. We recall that, according to standard quantum mechanics, the probability density associated to the detection of a photon with a given frequency is proportional to the intensity profile of the corresponding mode of the quantized electromagnetic field. That is, $|\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \propto |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$, where φ is the wave function and \mathbf{E} is the electric field. Since we admit that the macroscopic detection of a photon is an “echo” of a microscopic hit, a one-to-one relation, we must have $f(t) \propto |\mathbf{E}|^2$. In words, *we associate the probability distribution for the occurrence of a hit with the temporal intensity profile of the photon that reach the detector.*

A. Connection with weak measurements

Let us briefly analyze how the previous hypotheses fit in the framework of measurement theory. The general measurement postulate can be written as [15]: let $\{\hat{M}_j\}$ be a set of operators, with $\sum_j \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j = \hat{I}$, and a state $|\psi\rangle$ describing an arbitrary system immediately before measurement. Then, the probability of obtaining a result j is $p(j) = \langle \psi | \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j | \psi \rangle$, and the state of the system after

the measurement satisfies

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{M}_j |\psi\rangle}{\sqrt{p(j)}}. \quad (1)$$

Also in this postulate any discussion on the duration of the partial collapse is missing. If $\hat{M}_j = |u_j\rangle\langle u_j|$, with $\{|u_j\rangle\}$ being an orthonormal basis, one recovers the usual postulate for projective measurements.

An important and non-trivial situation encompassed by the general postulate is that of weak measurements [16–18]. In this case the operators $\{\hat{M}\}$ are not projectors and the state after the measurement changes slightly with respect to $|\psi\rangle$. It has been shown that weak measurements are universal in the sense that any generalized measurement, including projective ones, can be formally seen as a series of infinitesimal partial collapses [19]. This process can be pictorially written as

$$\begin{aligned} |\psi(x_\nu^{(0)})\rangle &\rightarrow |\psi(x_\nu^{(1)})\rangle \rightarrow |\psi(x_\nu^{(2)})\rangle \rightarrow \dots \\ &\rightarrow |\psi(x_\nu^{(n)})\rangle \dots \rightarrow |\psi(x_\nu^{(f)})\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

where variations of the parameters $\{x_\nu\}$ over a specified range make the ket $|\psi(x_\nu)\rangle$ span a particular region in the Hilbert space. For example, in the case of a single qubit one can take $\{x_1, x_2\}$ as the angles defining a state in the Bloch sphere. Each step is assumed to be infinitesimal, $x_\nu^{(n)} - x_\nu^{(n-1)} = dx_\nu^{(n)}$ and it is usual to assume the time evolution of $\{x_\nu\}$ to be a stochastic process.

In this framework it is natural to think of δt as the time taken in going from $|\psi(x_\nu^{(0)})\rangle$ to $|\psi(x_\nu^{(f)})\rangle$. The hit time $t^{(h)}$ would be the moment associated to the first weak measurement. In our model $t^{(h)}$ is a stochastic parameter too, such that, the process itself and moment it starts would be random.

One may ask how, in practice, a single weak measurement can be performed. One possible answer, already experimentally implemented in superconducting qubits [21], is by *not detecting* with some probability. The qubit is prepared in a superposition of the ground state $|0\rangle$ and the excited state $|1\rangle$, say $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. The qubit well potential is such that, in the ground state, the tunneling probability is vanishingly small, while state $|1\rangle$ presents a probability p to tunnel (when the potential height is adiabatically lowered) and reach the detector. Thus, if we get a click, then we have a projective collapse $|\psi\rangle \rightarrow |1\rangle$. However if in a particular realization no detection occurs, then, the state becomes

$$|\psi\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{1+p}{2}}|0\rangle + e^{-i\phi_M} \sqrt{\frac{1-p}{2}}|1\rangle, \quad (3)$$

where ϕ_M is a phase due to the adiabatic change in the potential. This characterizes a partial collapse towards $|0\rangle$. We note that, if one resorts to weak measurements to interpret a finite-time collapse, the above notions must be extended to entangled states. This was recently considered in the context of quantum information theory [20]. Whether or not a complete collapse is physically, and not

only mathematically, a composition of partial collapses is a relevant issue. We believe that the experiment we propose here may shade some light into this question.

III. TWO CORRELATED PHOTONS

The system we address here is composed of two spatially separated photons which are simultaneously generated, and led to the entangled polarization state

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= \alpha|+\rangle_L \otimes |-\rangle_R + \beta|-\rangle_L \otimes |+\rangle_R \\ &\equiv \alpha|+-\rangle + \beta|-+\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

where $\alpha \neq 0$ and $\beta \neq 0$, and the subscripts L and R refer to the photons sent to the “left” and “right” detectors, respectively (Fig. 1). The generation can be achieved with a non-linear crystal via a parametric downconversion process, which, in general, gives synchronization and may also produce entanglement in polarization [22, 23]. Since the photons follow distinct optical paths, a delay between them is likely to be introduced. While this is not critically relevant in evaluating violations of Bell’s inequalities, it may hinder the phenomenon we intend to investigate. Up to this point, the synchronization of the pair can be restored with the help of a Hong-Ou-Mandel (HOM) apparatus [24] and delay lines coupled with translation stages. From this point to the detectors the synchronization is technically non-trivial, but can be handled, in principle. For a recent proposal of a scheme to measure ultra-short delays see [25]. As the photons reach the detectors their polarizations are measured with the filters set in the *same* direction, for which $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ are eigenstates.

To be more realistic, we assume that the two wave packets attain the detectors simultaneously (in the laboratory frame), except by a delay \mathcal{T} that eventually persists (Fig. 2). We stress that our model encompasses the expected situation in which the residual delay is typically much larger than δt . Note carefully that the procedure ensures that the centroids of each wave packet will reach the detectors approximately at the same time, and not that the (unpredictable) hits themselves will be simultaneous. Note also that the spatio-temporal profile to be considered is not that of the generated photons, but rather of the photons just before detection (with the spreading and deformation taken into account). Finally, the quantities we suggest to be measured are subtle statistical deviations, so we need a robust sampling. This demand naturally leads us to consider that a pulsed laser (in our case a Titanium-Sapphire laser) with a high repetition rate is employed as the primary source of photons.

From basic quantum mechanics we immediately infer the statistical distribution resulting from a series of N coincidence polarization measurements on state (4), see table I. Fluctuations with magnitude $\Delta\mathcal{N} \sim \sqrt{N}/2$ naturally show up for any finite number of repetitions. Since in any standard interpretation of quantum mechanics the

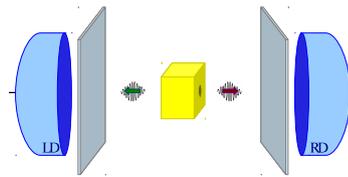


FIG. 1. (color online) Pictorial representation of the experimental setup. The box contains a non-linear crystal that generates pairs of synchronized photons via PDC. The crystal is pumped by a pulsed laser (not shown).

Result	Frequency
Left + , Right -	$ \alpha ^2$
Left - , Right +	$1 - \alpha ^2$

TABLE I. Outputs and relative frequencies of two sequential polarization measurements in the same direction according to quantum mechanics. The second measurement plays no role since, after the first one, the state collapses instantly.

collapse is assumed to be instantaneous, the second measurement of polarization (in the same direction) would not play any role.

Now, we address the same question, this time considering the possibility of non-instantaneous collapse. In this case we must analyze the development of the events more carefully. We start by assuming that the intensity profile of the electromagnetic field associated to the photons is already characterized. We denote the distributions for a hit in the left and right detectors by $f_L(t)$ and $f_R(t)$, respectively, and, for definiteness, we assume the left photon to be delayed with respect to the right one. Apart from this we consider the two packets as having the same shape, that is

$$f_R(t) = f_L(t - \mathcal{T}). \quad (5)$$

In this scenario two distinct situations may happen. If, as we suppose here, δt is smaller than any other time

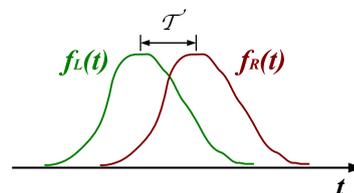


FIG. 2. (color online) Probability densities for the occurrence of a hit at the left and right photons. The residual delay, due to imperfections in the synchronization process is denoted by \mathcal{T} .

scale in the problem, then, with high probability, when the second hit takes place, the reduction due to the first one is already completed. For these realizations we obtain exactly the results shown in Table I. However, in a small number of non-trivial events, according to our hypothesis, the second hit catches the state ket while it is still collapsing. As soon as the first hit happens, no matter in what detector (the two filters are parallel), the state starts to collapse following one of the two kinematic routes

$$|\Psi_1(t)\rangle = a_1(t)|+-\rangle \otimes |\Phi_{+-}^{(1)}\rangle + b_1(t)|-+\rangle \otimes |\Phi_{-+}^{(1)}\rangle, \quad (6)$$

$$|\Psi_2(t)\rangle = a_2(t)|+-\rangle \otimes |\Phi_{+-}^{(2)}\rangle + b_2(t)|-+\rangle \otimes |\Phi_{-+}^{(2)}\rangle, \quad (7)$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} a_1[t^{(h)}] &= \alpha, \quad a_1[t^{(h)} + \delta t^{(1)}] = 1, \\ b_1[t^{(h)}] &= \beta, \quad b_1[t^{(h)} + \delta t^{(1)}] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned} a_2[t^{(h)}] &= \alpha, \quad a_2[t^{(h)} + \delta t^{(2)}] = 0, \\ b_2[t^{(h)}] &= \beta, \quad b_2[t^{(h)} + \delta t^{(2)}] = 1, \end{aligned} \quad (9)$$

where $\delta t^{(1)}$ and $\delta t^{(2)}$ denote the collapse times for routes (6) and (7), respectively. We denote the instant when the first hit happens by $t^{(h)}$. The kets $\{|\Phi^f\rangle\}$, whose time dependence was suppressed, correspond to the microscopic states of the degrees of freedom that couple to the system. To be consistent with Born's rule we assume that route (6) happens with relative frequency $|\alpha|^2$ and the second route, Eq. (7), with relative frequency $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$. We use the terminology "kinematic route" because we are not providing, or trying to provide, the dynamical equations that are satisfied by $a(t)$ and $b(t)$ during the reduction. Instead, we only use the fact that at the end of the process Born's postulate should be verified. We also remark that by excluding terms proportional to $|++\rangle$ and $|--\rangle$ in the intermediate states (6) and (7), with vanishing coefficients for $t = t^{(h)}$ and $t = t^{(h)} + \delta t^{(i)}$, we assume angular momentum conservation during each individual process. Setting $y = t_L^{(h)} - t_R^{(h)}$, where $t_L^{(h)}$ [$t_R^{(h)}$] is the time when a hit occurs in the left (right) detector, the probability $P_<$ for the occurrence of both hits in a time interval shorter than $\delta t^{(i)}$ when the first hit leads to route i is

$$P_< = |\alpha|^2 P_<^{(1)} + |\beta|^2 P_<^{(2)}, \quad (10)$$

where

$$P_<^{(i)} = \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \int_{t''=t'-\delta t^{(i)}}^{t''=t'+\delta t^{(i)}} f_L(t') f_R(t'') dt' dt''. \quad (11)$$

The probability density for the relative variable y for each route is given by $p^{(i)}(y) = dP_<^{(i)}/d(\delta t^{(i)})|_y$. It is clear from the previous relation that $p^{(1)}(y) = p^{(2)}(y) = p(y)$.

Let us then consider the rare event of a second hit happening between t and $t + dt$ with $t^{(h)} < t < t^{(h)} + \delta t^{(i)}$. In this situation, if the state is catch collapsing via route (6), the outcomes after the second reduction is completed are $|+-\rangle|\Phi_{+-}^{1f}\rangle$ with probability $|a_1(t)|^2$ and $|-+\rangle|\Phi_{-+}^{1f}\rangle$ with probability $|b_1(t)|^2$. If the state is collapsing through route (7), the possible results are $|+-\rangle|\Phi_{+-}^{2f}\rangle$ with probability $|a_2(t)|^2$ and $|-+\rangle|\Phi_{-+}^{2f}\rangle$ with probability $|b_2(t)|^2$. The final states $\{|\Phi^f\rangle\}$ need not be macroscopic pointers at this stage. Rather, we assume that they contain the state of the apparatus which, after some extra time, will describe a definite macroscopic pointer position. We, thus, have a composite von Neumann chain. From the previous reasoning, the probability of getting $+-$ between t and $t + dt$ is proportional to

$$[|\alpha|^2 |a_1(t)|^2 + (1 - |\alpha|^2) |a_2(t)|^2] dt. \quad (12)$$

The probability of obtaining $+-$ for any t , satisfying $t^{(h)} < t < t^{(h)} + \delta t^{(1)}$ or $t^{(h)} < t < t^{(h)} + \delta t^{(2)}$, depending on the route, is given by the integral

$$\begin{aligned} P(+ - | \delta t) &= \frac{|\alpha|^2}{P_<} \int_{-\delta t^{(1)}}^{\delta t^{(1)}} |a_1(y)|^2 p(y) dy \\ &+ \frac{|\beta|^2}{P_<} \int_{-\delta t^{(2)}}^{\delta t^{(2)}} |a_2(y)|^2 p(y) dy = \frac{|\alpha|^2(\Gamma + P_<) + |\beta|^2\Lambda}{P_<} \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_{-\delta t^{(2)}}^{\delta t^{(2)}} |a_2(y)|^2 p(y) dy, \\ \Gamma &= \int_{-\delta t^{(1)}}^{\delta t^{(1)}} |a_1(y)|^2 p(y) dy - P_<. \end{aligned} \quad (14)$$

We can write the unconditional probability of getting the result $+-$ as

$$\begin{aligned} P(+ -) &= (1 - P_<)|\alpha|^2 + P_< P(+ - | \delta t) \\ &= |\alpha|^2 + (|\alpha|^2\Gamma + |\beta|^2\Lambda). \end{aligned} \quad (15)$$

Therefore, if the collapse is not instantaneous, within our hypothesis, the outcomes of two well synchronized polarization measurements should be characterized by Table II.

Result	Frequency
Left + , Right -	$ \alpha ^2 + (\alpha ^2\Gamma + \beta ^2\Lambda)$
Left - , Right +	$1 - \alpha ^2 - (\alpha ^2\Gamma + \beta ^2\Lambda)$

TABLE II. Outputs and relative frequencies of two sequential, accurately synchronized, polarization measurements in a scenario of finite-time reduction.

The above table might give the impression that we are suggesting a correction to Born's postulate. This is not the case, since the postulate refers to the likelihood of each possible result of a single measurement.

If collapse is indeed instantaneous, a second measurement of the same observable would be innocuous. What we have just shown is that, if the collapse takes a finite time, then a close consideration of Born's rule leads to the probabilities in table II. Once a sufficiently large number N of repetitions is made, the numeric difference between the results $+-$ and $-+$, according to table I is $\Delta N_I = (2|\alpha|^2 - 1)N$, while the same quantity, according to table II, is $\Delta N_{II} = [2(|\alpha|^2\Gamma + |\beta|^2\Lambda) + 2|\alpha|^2 - 1]N$. Thus, the deviation between the two scenarios is given by

$$\Delta N = \Delta N_{II} - \Delta N_I = 2(|\alpha|^2\Gamma + |\beta|^2\Lambda)N. \quad (16)$$

For a maximally entangled state, with $|\alpha| = 1/\sqrt{2}$, implying $\delta t^{(1)} = \delta t^{(2)}$, it would not be possible to reveal a potentially non-vanishing collapse time, since this would lead to $\Delta N = 0$. This is due to the fact that, in this completely symmetrical case, we must have $|a_1(y)|^2 = |b_2(y)|^2$. Therefore, the initial state (4) have to be unbalanced. As we will see next, Γ and Λ are typically very small numbers and the difference (16) is subtle. The immediate question that arises is, being $\Delta N/N$ small, can we safely distinguish it from pure statistical fluctuations ($\Delta\mathcal{N}$) that surely occur in an actual experiment? Fortunately, the deviation in the worse scenario, where $\Delta\mathcal{N}_I \sim \sqrt{N}/2$ and $\Delta\mathcal{N}_{II} \sim -\sqrt{N}/2$ tend to minimize $|\Delta N|$, is $\Delta\mathcal{N} = \sqrt{N}$, while $\Delta N \sim N$, so that for a sufficiently large number of realizations one can reach a ratio $\Delta N/\Delta\mathcal{N}$ as large as needed. In fact, $\Delta N/\Delta\mathcal{N} = 2(|\alpha|^2\Gamma + |\beta|^2\Lambda)\sqrt{N}$, and the number of realizations must satisfy

$$N > K^2 \times [2(|\alpha|^2\Gamma + |\beta|^2\Lambda)]^{-2}, \quad (17)$$

for a statistical significance of K standard deviations ($\Delta N > K\Delta\mathcal{N}$).

Once the general framework is set, let us go back to our proposed experiment in more specific terms. Suppose the source of light is a pulsed titanium-sapphire laser whose normalized temporal profile of intensity reads

$$f(t) = \frac{1}{2\sigma_t} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\sigma_t}\right), \quad (18)$$

where the pulse width σ_t provides the coherence time. By using (5) and (11) we get

$$P_{<}^{(i)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0,1} (-1)^n \left\{ \operatorname{csch}^2(A_n^{(i)}) \ln \left[\frac{\cosh(A_n^{(i)} + \Delta t/\sigma_t)}{\cosh(A_n^{(i)} - \Delta t/\sigma_t)} \right] - 2 \coth(A_n^{(i)}) \tanh\left(\frac{\Delta t}{\sigma_t}\right) \right\}, \quad (19)$$

with $A_n = [\mathcal{T} + (-1)^{n+1}\delta t^{(i)}]/\sigma_t$. Assuming that $\delta t^{(i)}$ and \mathcal{T} are much smaller than the coherence time, the above result simplifies to

$$P_{<}^{(i)} \approx \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\Delta t}{\sigma_t}\right) \left[\tanh\left(\frac{\mathcal{T} + \delta t^{(i)}}{\sigma_t}\right) - \tanh\left(\frac{\mathcal{T} - \delta t^{(i)}}{\sigma_t}\right) \right] \quad (20)$$

leading to the probability distribution

$$p(y) \approx \frac{1}{2\sigma_t} \tanh\left(\frac{\Delta t}{\sigma_t}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\mathcal{T} + y}{\sigma_t}\right). \quad (21)$$

A typical repetition rate of a pulsed laser is 100 MHz, however, this is not the frequency at which the correlated pairs are detected in coincidence. We assume that this rate is diminished in three orders of magnitude, giving one detection in coincidence per 10 μs , on average. Furthermore, the residual delay is of the order of $\delta L/c$, where δL is the step of the translation stage in the delay line and c is the velocity of light. Usually $\delta L \approx 1 \mu\text{m}$, so $\mathcal{T} \approx 3.3$ fs. The duration Δt of each measurement is set to ensure that the detected photons belong to the same pair. We can safely consider the window of coincidence to be $\Delta t \approx 1$ ns. Finally, for the sake of illustration let us assume that the final shape of the wave packets at detection is still given by Eq. (18), with a relatively large spreading of $\sigma_t \approx 1$ ps (the coherence time soon after the generation is, say, 200 fs).

Consider that we intend to investigate the compatibility of experimental data with a collapse in the range of $\delta t \sim 0.1$ fs, with $\alpha = \sqrt{3}/2$. This would lead to $P_{<} \approx 10^{-4}$, corresponding to 10 non-trivial detections per second. Of course, in order to get numbers we must assume some functional form for $a_1(t)$ and $a_2(t)$ before calculating Γ and Λ . The quantitative results weakly depend on this choice, but the qualitative features remain unchanged. By choosing an exponential dependence for $|a_1(t)|$ and $|a_2(t)|$, satisfying the appropriate boundary conditions, we get $|\alpha|^2\Gamma + |\beta|^2\Lambda \approx 10^{-4}$ [26]. If one adopts the sequential weak measurement view, $a(t)$ should probably be seen as a smoothed version of the actual random walk-type dynamics followed by the coefficients [19].

Suppose that we obtain a reliable statistics characterized by $\Delta N/\Delta\mathcal{N} \sim 6$ (six standard deviations), corresponding to a 12 hour long experiment ($N \approx 10^9$ realizations). This result alone would be a strong evidence for finite-time collapse. Of course, further experimentation would be necessary, varying \mathcal{T} , α , and the orientation of the filters, to investigate the actual time dependence of $a(t)$. It would be especially important to repeat the same procedure with the filters set in orthogonal directions for, in this situation, there should be no measurable difference between the two scenarios for any pair α, β . Conversely, if in the original experiment we obtain $\Delta N/\Delta\mathcal{N} \sim 1$, then 0.1 fs would be an upper bound for an exponential reduction in the system studied. Lastly, the above estimates would not change appreciably for $\mathcal{T} = 0$, showing that the scheme is robust for delays of order of femtoseconds.

IV. CONCLUSIONS

It might be considered insufficient to assert that if the state is ψ -ontic, in the sense adopted in the literature [27],

then the wave function is a real thing [28]. A possibly reasonable extra requirement would be that the microscopic collapse should not be instantaneous. We stress that this has nothing to do with the condition of locality, since the collapse $(|a\rangle|b\rangle - |b\rangle|a\rangle)/\sqrt{2} \xrightarrow{\delta t} |a\rangle|b\rangle$ is, in general, non-local, provided that the subsystems are sufficiently far apart. By employing minimal statements (of kinematic nature) about this finite-time collapse and assuming that Born's rule remains valid during the non-unitary evolution, we claim that it is possible to probe the collapse duration experimentally in the scale of subfemtoseconds. Although decoherence is not a logical necessity of our model, the previous results may not be incompatible with it. In fact, it has been suggested by Schlosshauer [7] that a combination of dynamical localization models and the effects of environment is a promising strategy to approach the collapse problem.

An important point is the lack of covariance of our results, which is not an exception in dealing with entanglement. If we admit that the two hits are not causally related, their ordering may be swapped for some inertial frame. Alternatively, if one assumes that the hits are causally connected it is necessary to admit the existence of an "ether" in which the spatially separated subsystems exchange information via a supraluminal signaling.

A stringent lower bound for the velocity of this signal has been placed [29], $v_{signal} \sim 10^4 c$ for a continuous set of referentials whose relative velocity with respect to earth is as large as $0.1c$. Although a detailed discussion of this point is outside the scope of the present work, we believe that the dynamics of collapse, and its time scale, deserves investigation in either case.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors warmly thank Katuscia Cassemiro, Daniel Felinto, and A. M. S. Macêdo for many relevant discussions on this work. F.P. thanks the comments by the members of the quantum optics and quantum information group at the Universidade Federal Fluminense. Financial support from Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) through the Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia - Informação Quântica (INCT - IQ), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), and Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) (Grant No. APQ-1415-1.05/10) is acknowledged.

-
- [1] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981); W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, *ibid* **81**, 3563 (1998); M. A. Rowe et al, *Nature* **409**, 791 (2001); D. Salart, *ibid* **454**, 861 (2008).
- [2] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964); J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [3] see the introduction of J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in quantum mechanics* (Cambridge University Press, New York, 2004).
- [4] M. F. Pusey, J. Barrett, and T. Rudolph, *Nature Phys.* **8**, 476 (2012); L. Hardy, arXiv:1205.1439v3 [quant-ph] (2012).
- [5] M. Schlosshauer and A. Fine, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 260404 (2012).
- [6] A. Bassi and G. C. Ghirardi, *Phys. Reports* **379**, 257 (2003).
- [7] M. Schlosshauer, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267 (2004).
- [8] W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).
- [9] S. Weinberg, *Phys. Rev. A* **85**, 062116 (2012).
- [10] F. Parisio, *Phys. Rev. A* **84**, 062108 (2011).
- [11] A. Bassi et al, *Rev. Mod. Phys* **85**, 471 (2013).
- [12] L. E. Ballentine, *Rev. Mod. Phys.* **42**, 358 (1970); *Quantum Mechanics: A Modern Development* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [13] N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1657 (1984); A. Bassi and E. Ippoliti, *Phys. Rev. A* **69**, 012105 (2004); D. C. Brody and L. P. Hughston, *J. Math. Phys.* **46**, 082101 (2005).
- [14] E. J. Squires, *Phys. Lett. A* **148**, 381 (1990); D. T. Pegg *ibid* **153**, 263 (1991); W. H. Zurek, arXiv:quant-ph/0302044v1 (2003).
- [15] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [16] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351 (1988); A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2325 (1989); A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2326 (1989); Y. Aharonov and L. Vaidman, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2326 (1989).
- [17] Y. Aharonov and L. Vaidman, *Phys. Rev. A* **41**, 11 (1990).
- [18] N. W. M. Ritchie, J. G. Story, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1107 (1991).
- [19] O. Oreshkov and T. A. Brun, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 110409 (2005).
- [20] Y. W. Cheong and S.-H. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 150402 (2012).
- [21] N. Katz et al, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 200401 (2008).
- [22] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970).
- [23] P. G. Kwiat et al, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337 (1995).
- [24] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [25] G. Strübi and C. Bruder, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 083605 (2013).
- [26] For a drastically distinct time dependence, a linear decay of $a_2(t)$, we get the same order of magnitude.
- [27] The state is ψ -ontic if the support in the space of "hidden" variables λ of an arbitrary state $|\psi\rangle$ does not overlap the support of any other state $|\phi\rangle$. That is, from the distribution of states λ one can unambiguously determine the state ket of the system.
- [28] Of course, we refer to an *operational* definition of a real physical object.

- [29] D. Salart, et al., *Nature* **454**, 861 (2008); N. Gisin, *Science* **326**, 1357 (2009); B. Cocciano, S. Faetti, and L. Fronzoni, *Phys. Lett. A* **375**, 379 (2011).