



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Frederico Gomes Elihimas

O Índice de Maslov de Curvas de Subespaços Lagrangeanos

Recife

2013



Frederico Gomes Elihimas

O Índice de Maslov de Curvas de Subespaços Lagrangeanos

*Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática da UFPE, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.*

Orientador: Prof. PhD. Hildeberto Eulálio Cabral

Recife

2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da Silva, CRB4-1217

Elihimas, Frederico Gomes

O índice de Maslov de curvas de subespaços Lagrangeanos / Frederico Gomes Elihimas. - Recife: O Autor, 2013.

56 f.: il., fig.

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Geometria. 2. Variedades diferenciáveis. 3. Geometria simplética. 4. Índice de Maslov I. Cabral, Hildeberto Eulálio (orientador). II. Título.

516

CDD (23. ed.)

MEI2013 – 035

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: _____
Hildeberto Eulálio Cabral, *UFPE*
Orientador

Henrique de Barros Correia Vitória, *UFPE*

Giovani Lopes Vasconcelos, *UFPE*

**O ÍNDICE DE MASLOV DE CURVAS
DE SUBESPAÇOS LAGRANGEANOS**

Por
Frederico Gomes Elihimas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Janeiro – 2013

Dedicatória

A minha mãe
Penha Elihimas.

Agradecimentos

- A Deus, pelo dom da vida e por mais uma realização de um sonho;
- Aos meus pais (Orlando “In Memoriam” e Penha), e a toda minha família que sempre me deu apoio;
- Ao professor Hildeberto Eulálio Cabral e ao Professor Henrique de Barros Correia Vitório pelas orientações, bem como dedicação, incentivo e pelos esforços dedicados de ambos;
- Aos professores da UNICAP: Cleto Bezerra de França e Vicente Francisco de Sousa Neto pelo incentivo;
- Ao Professor Claudio Vidal pelo incentivo e por ter me iniciado na área de sistemas Hamiltonianos;
- A todos os professores (e ex-professores) do DMAT-UFPE. Em especial aos que contribuíram para minha formação;
- Aos amigos e colegas do DMAT-UFPE, Em especial, aos seguintes: Felipe Wergete, Binho (Gleybson), Filipe Andrade, Ricardo Castilho, Marcílio, Paulo Roberto, José Francisco, Gabriel Carvalho e o Guedes, Thiago Mendonça, Thamires, Renato Teixeira e Leandro Inácio.
- Aos funcionários do DMAT e CCEN pelos serviços prestados.
- À Universidade Federal de Pernambuco, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática e à funcionária Tânia Maria M. Maranhão.
- Ao CNPq e a Capes pelo apoio financeiro;

Resumo

Este trabalho faz, preliminarmente, um estudo da Álgebra Linear Simplética. Este estudo é crucial para uma introdução à estrutura da Grassmanniana Lagrangeana para então ser definido o Índice de Maslov para curvas nesta variedade.

Palavras-Chave: Espaços Vetoriais Simpléticos; Grassmanniana Lagrangeana; Índice de Maslov.

Abstract

This work makes preliminarily a study of Symplectic Linear Algebra. This study is crucial for an introduction to the structure of the Lagrangian Grassmannian to be used later in the definition of the Maslov Index of curves in this manifold.

Key-Words: Symplectic Vector Spaces; Grassmannian Lagrangian; Maslov Index.

Sumário

1	Espaços Vetoriais Simpléticos	10
2	A Grassmanniana Lagrangeana	23
2.1	Atlas para a Grassmanniana Lagrangeana	23
2.2	Um Estudo sobre as Subvariedades $\Lambda_k(L)$ de Λ	27
2.3	O Espaço Tangente $T_{L_0}\Lambda$	31
2.4	Ciclo de Maslov e Focalidade	34
3	O Índice de Maslov	37
3.1	Propriedades do Índice de Maslov	37
3.2	Construção do Índice de Maslov	48
3.2.1	O Grupo Fundamental de $U(n)/O(n)$	48
3.2.2	O Grupo Fundamental de Λ	49
3.2.3	Construção do Índice de Maslov	50

Introdução

Esta dissertação aborda alguns tópicos de Espaços Vetoriais Simpléticos necessários para o conceito de Variedade Grassmanniana Lagrangeana da Geometria Simplética que será utilizado na definição do índice de Maslov.

Uma transformação simplética leva um subespaço Lagrangeano noutro, portanto o fluxo de um sistema Hamiltoniano sendo uma transformação simplética em cada instante, resulta que um subespaço Lagrangeano fixo dá origem a uma curva de subespaços Lagrangeanos ao longo de uma dada solução do sistema Hamiltoniano. Informações qualitativas desta solução, tais como estabilidade e propriedades minimizantes, encontram-se codificadas num inteiro associado a esta curva de subespaços Lagrangeanos, chamado o Índice de Maslov. Tal índice constitui um ingrediente básico para a construção de poderosos invariantes da topologia simplética que, por sua vez, tem possibilitado a resolução de importantes problemas da dinâmica conservativa. Também em teoria da relatividade, o estudo deste índice fornece informações sobre o acúmulo de raios de luz, isto é, sobre o fenômeno das lentes gravitacionais. Vê-se assim o interesse do estudo de tal índice na dinâmica conservativa e na teoria da relatividade.

No Capítulo 1 estudamos várias propriedades dos espaços vetoriais simpléticos relevantes para o nosso estudo, como existência de bases simpléticas, simplectomorfismos, subespaços Lagrangeanos, transitividade da ação do grupo unitário sobre o conjunto dos subespaços Lagrangeanos. Fazemos a identificação deste conjunto com o quociente do grupo unitário pelo grupo ortogonal, introduzimos a noção de decomposição Lagrangeana de um espaço simplético, e concluímos mostrando que toda base de uma das componentes pode ser estendida para uma base simplética com uma base da outra componente.

No Capítulo 2 mostramos que o conjunto Λ dos subespaços Lagrangeanos de um espaço simplético é uma variedade diferenciável. Fazemos um estudo sobre as subvariedades $\Lambda_k(L)$ dos subespaços Lagrangeanos cuja interseção com um subespaço Lagrangeano fixo L tem dimensão k e mostramos que esta subvariedade tem codimensão em Λ igual a $k(k+1)/2$. Em seguida identificamos o espaço tangente $T_{L_0}\Lambda$ com o espaço das formas bilineares simétricas sobre L_0 e finalmente introduzimos o conceito de ciclo de Maslov e a noção de Focalidade.

O Capítulo 3 trata do tema principal desta dissertação que é o índice de Maslov de curvas contínuas na Grassmanniana Lagrangeana. Começamos o capítulo enunciando um resultado que estabelece a existência e unicidade, para cada subespaço Lagrangeano L_0 , da função índice de Maslov μ_{L_0} com respeito a L_0 . Ao invés de demonstrarmos de imediato este resultado, optamos em primeiro mostrar algumas consequências da função μ_{L_0} , em particular, estabelecemos a igualdade desta com o índice focal para o caso de curvas que satisfazem certas condições de transversalidade ao ciclo de Maslov. Em seguida fazemos um estudo da topologia da Grassmanniana Lagrangeana usando a identificação desta com o quociente $U(n)/O(n)$ para concluir que o grupo fundamental de Λ é isomorfo aos inteiros $\mathbb{Z}$. Este resultado é utilizado para dar uma construção explícita do índice de Maslov.

A base para preparação deste trabalho, principalmente do capítulo 3 é o livro de [Piccione-Tausk].

Para os dois primeiros capítulos uma outra referência foi [McDuff-Salamon].

Capítulo 1

Espaços Vetoriais Simpléticos

Os resultados aqui apresentados são válidos para espaços vetoriais sobre um corpo arbitrário K , contudo estaremos principalmente interessados no caso em que $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ num espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K , o qual a menos que seja dito o contrário será tomado como sendo $\mathbb{R}$

Notação 1.1. *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais. Denotaremos por $\text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ e por $B(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ respectivamente, o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, o espaço vetorial de todas as aplicações bilineares, também chamadas formas bilineares, $B : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ e o espaço vetorial de todas as formas bilineares simétricas em L denotaremos por $\text{Sym}(L)$; chamaremos de dual de V o espaço $\mathbb{V}^* = \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{R})$. Quando $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, $\text{Lin}(\mathbb{V}) = \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ e $B(\mathbb{V}) = B(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.*

Definição 1.1. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita. Uma forma simplética sobre $\mathbb{V}$ é uma forma bilinear alternada (antissimétrica) e não-degenerada, isto é, $\omega : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega(au + bv, w) = a\omega(u, w) + b\omega(v, w), & \forall u, v, w \in \mathbb{V} \text{ e } \forall a, b \in \mathbb{R} & \omega \text{ é bilinear} \\ \omega(u, v) = -\omega(v, u), & \forall u, v \in \mathbb{V} & \omega \text{ é antissimétrica.} \\ \text{Ker}\omega = \{u \in \mathbb{V} : \omega(u, v) = 0, \forall v \in \mathbb{V}\} = \{0\} & & \omega \text{ é não-degenerada.} \end{array} \right.$$

Dizemos que o par $(\mathbb{V}, \omega)$ ou que $\mathbb{V}$ é um *espaço vetorial simplético*.

Note que o fato de ω ser não-degenerada significa que o mapa

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}^* \\ v &\longmapsto \omega(v, \cdot)\end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Observação 1.1. Neste texto, $\mathbb{V}$ é sempre um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$. (veja Teorema 1.1), e ω daqui por diante será sempre uma forma simplética.

Exemplo 1.1. Em $\mathbb{R}^{2n}$ coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, considere ω_0 definida por

$$\omega_0 := \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j. \quad (1.1)$$

Não é difícil mostrar que ω_0 é uma forma simplética em $\mathbb{R}^{2n}$, chamada forma simplética padrão ou canônica. Note que $\omega_0(z, w)$ pode ser reescrita como $z^T \mathbf{J} w$,

$$\omega_0(z, w) = z^T \mathbf{J} w, \quad (1.2)$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Definição 1.2. Uma *base simplética* (ou base de Darboux) de $(\mathbb{V}, \omega)$ é uma base

$$\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\},$$

que satisfaz:

$$\begin{cases} \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} & \text{e} \\ \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0. \end{cases}$$

Teorema 1.1. *Todo espaço vetorial simplético $(\mathbb{V}, \omega)$ é de dimensão par e admite uma base simplética.*

Antes da demonstração deste teorema observemos que dado um produto interno qualquer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{V}$ de dimensão m sempre existirá um operador $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ anti-autoadjunto, com respeito a este produto interno tal que

$$\omega(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

Demonstração: A demonstração seguirá após demonstrarmos a seguinte Proposição:

Proposição 1.2. *Se A é um operador linear anti-autoadjunto em $\mathbb{R}^m$ munido de produto interno, então existe uma base β ortonormal para este espaço tal que*

$$[A]_{\beta}^{\beta} = \text{col}[K_1, \dots, K_r, 0, \dots, 0]_{m \times m},$$

onde

$$K_i = \begin{bmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } a_i > 0.$$

Demonstração:

(1) Vamos supor que a hipótese de indução vale para todo inteiro positivo $l < m$.

Inicialmente suponha que o operador anti-autoadjunto A tem autovalor real λ (de fato, qualquer autovalor real λ é igual a zero por A ser anti-autoadjunto). Se v é autovetor de A então podemos restringir o operador ao autoespaço de v obter o seguinte operador autoadjunto:

$$A|_{\text{span}[v]}: \text{Span}[v] \longrightarrow \text{Span}[v]$$

também por A ser anti-autoadjunto,

$$A|_{\text{span}[v]^{\perp}}: \text{Span}[v]^{\perp} \longrightarrow \text{Span}[v]^{\perp}.$$

Como $\dim \text{span}[v]^{\perp} = m-1$ e $A|_{\text{span}[v]^{\perp}}$ é anti-autoadjunto temos pela hipótese de indução que existe uma base ortonormal de $\text{span}[v]^{\perp} \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Segue que existe uma base ortonormal $\beta' = \beta \cup \{\frac{v}{\|v\|}\}$ tal que

$$[A]_{\beta'}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & & & & \\ b_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -b_k & \\ & & & b_k & 0 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

- (2) Se $\text{Ker} A = 0$, isto é, que A não tem autovalor real. Neste caso, dado um autovalor complexo, a ele está associado um subespaço bidimensional A -invariante $\mathbb{U}$. Isto conclui a demonstração do teorema pois basta completarmos este subespaço $\mathbb{U}$ com $\mathbb{U}^\perp$, onde tal que $\dim \mathbb{U}^\perp = m - 2$, com um argumento análogo ao item (1) pela hipótese de indução completamos a base ortonormal de $\text{span}[u, v]$ (que existe porque u, v são linearmente independentes) com a base ortonormal de $\text{span}[u, v]^\perp$, logo tomemos como a base de $\mathbb{R}^m$ a união dessas bases. ■

Da Proposição 1.2 exibimos uma base ortonormal $\beta = \{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r, w_1, \dots, w_{m-2r}\}$ tal que

$$[A]_\beta^\beta = \text{col}[K_1, \dots, K_r, 0, \dots, 0]_{m \times m}, \text{ onde } K_i = \begin{bmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } a_i > 0. \quad (1.4)$$

Note que como ω é não-degenerada então $\text{Ker} A = \{0\}$, daí $m = 2r$, ou seja, $\dim \mathbb{V}$ é par.

$$\text{Da equação acima } \begin{cases} Au_i = a_i v_i \\ Av_i = -a_i u_i, \text{ onde } i \in 1, \dots, r \text{ e } j \in r, \dots, m-2r. \\ Aw_j = 0 \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\omega(u_i, v_i) = \langle Au_i, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle = a_i \text{ e } \omega(v_i, u_i) = \langle -a_i u_i, u_i \rangle = -a_i$$

$$\text{e } \begin{cases} \omega(u_i, u_i) = 0; \\ \omega(v_i, v_i) = 0; \\ \omega(u_i, w_j) = 0; \\ \omega(v_i, w_j) = 0. \end{cases} \text{ Logo, } \exists \beta' = \{u_1/\sqrt{a_1}, v_1/\sqrt{a_1}, \dots, u_r/\sqrt{a_r}, v_r/\sqrt{a_r}, w_1, \dots, w_{m-2r}\},$$

$$\text{donde } [\omega]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{J}_2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Rearranjando esta base obtemos uma nova base

$$\beta'' = \{u_1/\sqrt{a_1}, u_2/\sqrt{a_2}, \dots, u_n/\sqrt{a_n}, v_1/\sqrt{a_1}, v_2/\sqrt{a_2}, \dots, v_n/\sqrt{a_n}\},$$

donde $[\omega]_{\beta''}^{\beta''} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix}$, isso prova a existência de uma base simplética. ■

Proposição 1.3. *Se $\mathcal{B}$ é base simplética, então*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ v = \sum x_i e_i + y_i f_i &\longmapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

é um isomorfismo tal que $\omega_0(\varphi(v), \varphi(w)) = \omega(v, w)$. Daí mediante escolha de base simplética, **poderemos supor (sempre que for conveniente)** que $(\mathbb{V}, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Definição 1.3. Seja $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

O subespaço ω -ortogonal de $\mathbb{W}$ é definido como:

$$\mathbb{W}^\perp := \{v \in \mathbb{V} : \omega(v, u) = 0, \forall u \in \mathbb{W}\}.$$

Proposição 1.4. *Por ser ω não-degenerada Vale que:*

$$\begin{cases} \dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim(\mathbb{V}) \\ (\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}. \end{cases}$$

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{W}^\perp &\longrightarrow [\mathbb{V}/\mathbb{W}]^* \\ v &\longmapsto \bar{f}_v \end{aligned}$$

$v \in \mathbb{W}^\perp$ se e só se $f_v := \omega(v, \cdot) \in \mathbb{V}^*$ se anula em $\mathbb{W}$, logo f_v induz um funcional linear $\bar{f}_v \in [\mathbb{V}/\mathbb{W}]^*$, onde $(\bar{f}_v([u]) := f_v(u))$

[a] ψ é injetiva.

Demonstração: $\psi(v) = 0$ se e só se $\bar{f}_v([u]) = 0, \forall u \in \mathbb{V}$. Logo $\omega(v, u) = \bar{f}_v([u]) = 0 \implies v \in \text{Ker}(\omega) = 0$ (pois ω é não-degenerada) ■

[b] ψ é sobrejetiva. Dada $\bar{g} \in [\mathbb{V}/\mathbb{W}]^*$, seja $g \in \mathbb{V}^*$ definida por $g(v) = \bar{g}([v])$.

nesta definição temos que se $w \in \mathbb{W}$ então $g(w) = \bar{g}([w]) = \bar{g}([0]) = 0$.

Se $w \in \mathbb{W}$ então $g(w) = \bar{g}(\underbrace{[w]}_0) = 0$. Seja $v \in \mathbb{V}$ tal que $g(\cdot) = \omega(v, \cdot) = f_v$.

Como $g(\mathbb{W}) = 0$ então $v \in \mathbb{W}^\perp$. Agora temos $\psi(v) = \bar{f}_v = \bar{g}$. Portanto ψ também é sobre, logo $\dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim([\mathbb{V}/\mathbb{W}]^*)$ donde $\dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim([\mathbb{V}/\mathbb{W}]) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W})$ e provamos a primeira afirmação da proposição. ■

Para verificar que $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$, observemos inclusão óbvia: $\mathbb{W} \subseteq (\mathbb{W}^\perp)^\perp$ usando o resultado anterior temos que $\dim(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim(\mathbb{V}) - (\dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W})) = \dim(\mathbb{W})$. ■

Definição 1.4. Seja $\mathbb{W}$ subespaço de $\mathbb{V}$ e ω uma forma simplética. Então:

- (1) $\mathbb{W}$ é *isotrópico* (com respeito à ω) se $\mathbb{W} \subset \mathbb{W}^\perp$ (isto é $\omega|_{\mathbb{W} \times \mathbb{W}} = 0$).
- (2) $\mathbb{W}$ é *coisotrópico* (com respeito à ω) se $\mathbb{W}^\perp \subset \mathbb{W}$.
- (3) $\mathbb{W}$ é *Lagrangeano* ou *plano lagrangeano* (com respeito à ω) se $\mathbb{W}$ satisfizer a (1) e (2), isto é, $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$.

Quando um subespaço vetorial $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ é isotrópico, tem-se $\dim(\mathbb{W}) \leq n$. De fato, basta observarmos que

$$\dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W}^\perp) \leq \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W}) = 2n - \dim(\mathbb{W}).$$

Proposição 1.5. Um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ é Lagrangeano $\Leftrightarrow \mathbb{W}$ for isotrópico e $\dim(\mathbb{W}) = n$

Demonstração. Se $\mathbb{W}$ é Lagrangeano ($\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$) então $\dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W})$, logo $\dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{V})/2 = n$ e como $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$ então $\mathbb{W} \subset \mathbb{W}^\perp$. Por outro lado se $\mathbb{W}$ for isotrópico ($\mathbb{W} \subset \mathbb{W}^\perp$) e $\dim(\mathbb{W}) = n$ então resta provar que $\mathbb{W}^\perp \subset \mathbb{W}$, isto é, que $\mathbb{W}$ é coisotrópico. Como $\dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W}) = 2n - n = n$, Logo $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{W}$. ■

Exemplos 1.1. $L = \{0\}^n \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \times \{0\}^n$, $\{(0, x_2, \dots, x_n, y_1, 0, \dots, 0) : x_2, \dots, x_n, y_1 \in \mathbb{R}\}$ são subespaços Lagrangeanos de $\mathbb{R}^{2n}$. ($\dim L = n$ e $L^\perp = L$)

Definição 1.5. Sejam $(\mathbb{V}_1, \omega_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \omega_2)$ espaços simpléticos; uma transformação linear $T : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ é uma transformação simplética se $\omega_2(T(u), T(v)) = \omega_1(u, v)$

Dizemos que T é um symplectomorfismo linear se T é um isomorfismo e uma transformação simplética.

Não é difícil ver que um symplectomorfismo linear leva base simplética em base simplética; reciprocamente, se uma transformação linear $T : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ leva alguma base simplética de $\mathbb{V}_1$ em alguma base simplética de $\mathbb{V}_2$, então T é um symplectomorfismo linear.

Definição 1.6. Seja $(\mathbb{V}; \omega)$ um espaço simplético; o grupo linear simplético de $(\mathbb{V}; \omega)$ é o grupo de todos symplectomorfismos lineares de $(\mathbb{V}; \omega)$, denotado por $Sp(\mathbb{V}; \omega)$. Denotaremos por $Sp(2n) := Sp(2n, \mathbb{R}) = \{T \in Lin(\mathbb{R}^{2n}) : \omega_0(Tu, Tv) = \omega_0(u, v), \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}\}$, isto é, o grupo linear simplético de $\mathbb{R}^{2n}$ munido da forma simplética canônica ω_0 .

No caso em que $(\mathbb{V}, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, como $\omega_0(z, w) = z^T J w$, temos que $M \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é um symplectomorfismo linear se e somente se

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{2n \times 2n} . \quad (1.5)$$

é tal que

$$A^T D - C^T B = \mathbf{I}_n \quad (1.6)$$

$$A^T C \text{ e } B^T D \quad \text{são simétricas} \quad (1.7)$$

Veremos agora que é possível fazer uma identificação canônica do espaço $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\leftrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (z_1, \dots, z_n) &\leftrightarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde $z_j = x_j + iy_j$. Vamos mostrar que, via esta identificação, o operador $\mathbf{J} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ao qual anteriormente mostramos sua matriz $\mathbf{J}$ corresponde à multiplicação por $-i$: Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\mathbf{J}} & \mathbb{R}^{2n} \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{J}}} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Neste diagrama a função φ é tal que $\varphi(z) = \varphi(x + iy) = (x, y)$ e $\mathbf{J}$ é visto como operador em $\mathbb{R}^{2n}$, deste modo $\tilde{\mathbf{J}}(z) = \varphi^{-1}\mathbf{J}(\varphi(z)) = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = (y_1 - ix_1, \dots, y_n - ix_n) = -i(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = -iz$

Proposição 1.6. *Considerando a identificação $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ teremos que se $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é $\mathbb{R}$ -linear, então T é $\mathbb{C}$ -linear $\iff T \circ J = J \circ T$.*

Demonstração: Se T é $\mathbb{C}$ -linear então $T(J(v)) = T(-iv) = -iT(v) = J(T(v))$. Portanto $T \circ J = J \circ T$,

Reciprocamente, sabendo que J corresponde a multiplicação por $-i$ como foi mostrado acima, suponha que $T \circ J = J \circ T$ e que $\lambda \in \mathbb{R}$, então $T(J(-\lambda v)) = T(i\lambda v) = \lambda T(iv) = J(T(-\lambda v)) = -iT(-\lambda v) = \lambda iT(v)$, segue da comparação direta do segundo termo da igualdade com o último que $T(\lambda iv) = \lambda iT(v)$ e como T é $\mathbb{R}$ -linear segue que $T((a + bi)v) = aT(v) + biT(v) = (a + bi)T(v)$,

$\therefore T$ é $\mathbb{C}$ -linear. ■

Lema 1.1. (a) *Seja $M \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$. Então $M : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é $\mathbb{C}$ -linear se e só se é da forma*

$$M = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix}, \quad X, Y \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

(b) *Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $A = X + iY$ ($X, Y \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$), então o operador $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ corresponde a $\begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Este novo operador do $\mathbb{R}^{2n}$ daremos o nome de "realificação da matriz A ":*

$$\begin{aligned} A : M_{n \times n}(\mathbb{C}) &\hookrightarrow M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) \\ A = X + iY &\longmapsto \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Demonstração: (a) Pela Proposição 1.6, M é $\mathbb{C}$ -linear se e só se $M \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ M$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Y & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Z \\ Y & W \end{bmatrix}$$

consequentemente, $Z = -Y$ e $W = X$, donde

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Y & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

(b) Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^{2n} \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Notemos pelo diagrama que $A = \varphi^{-1}T\varphi \therefore T = \varphi A\varphi^{-1}$, agora tome uma base canônica para o $\mathbb{R}^{2n}$; $E_j = (e_j, 0)$ e $E_{n+j} = (0, e_j)$, onde $j \in \{1, \dots, n\}$

$$TE_j = \varphi(X + iY)\varphi^{-1}(e_j, 0) = \varphi(X + iY)(e_j + i0) = \varphi(Xe_j + iYe_j) = (Xe_j, Ye_j) = (X^j, Y^j).$$

$$TE_{n+j} = \varphi(X + iY)\varphi^{-1}(0, e_j) = \varphi(X + iY)(0 + ie_j) = \varphi(-Ye_j + iXe_j) = (-Ye_j, Xe_j) = (-Y^j, X^j), \text{ Logo}$$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

■

Definição 1.7. Considere os vetores z, w em $\mathbb{C}^n$. O produto Hermitiano canônico neste espaço é definido como:

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle := \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$$

e dados $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$ o produto interno Euclideano canônico é :

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &:= \langle (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \tilde{x}_i + y_i \tilde{y}_i) \quad (1.9) \end{aligned}$$

Considerando a identificação canônica de $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$, podemos expressar o produto Hermitiano em termos do produto interno canônico e a forma simplética padrão do $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle = \langle z, w \rangle - i\omega_0(z, w).$$

De fato, $\langle\langle z, w \rangle\rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j)(\tilde{x}_j + i\tilde{y}_j) =$

$$\sum_{j=1}^n (x_j \tilde{x}_j + y_j \tilde{y}_j) - i(x_j \tilde{y}_j - y_j \tilde{x}_j) = \langle z, w \rangle - i \begin{bmatrix} x_j & y_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_j \end{bmatrix}$$

Definição 1.8. Denotaremos o grupo unitário por

$$U(n) := \{U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : \langle U(z), U(w) \rangle = \langle z, w \rangle, \forall z, w \in \mathbb{C}^n\} \\ = \{U \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : UU^* = I_n, \text{ onde } U^* = \overline{U}^t\}.$$

Proposição 1.7. Temos

$$U(n) = O(2n) \cap Sp(2n).$$

Demonstração: $\langle U(z), U(w) \rangle = -i\omega_0(U(z), U(w)) = \langle U(z), U(w) \rangle = \langle z, w \rangle = \langle z, w \rangle = -i\omega_0(z, w)$. Comparando agora parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária concluímos que $U(n) = O(2n) \cap Sp(2n)$, em particular $U(n) \subset Sp(2n)$. ■

Definição 1.9. Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético. Denotaremos por $\Lambda := \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$ o conjunto de todos os subespaços Lagrangeanos de $\mathbb{V}$. Em particular $\Lambda(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ será denotado por Λ_{2n}

Se $T \in Sp(2n)$ e $L \in \Lambda_{2n}$ é Lagrangeano então $T(L)$ também é Lagrangeano. Daí temos uma ação:

$$Sp(2n) \times \Lambda_{2n} \longrightarrow \Lambda_{2n} \\ (T, L) \longmapsto T(L)$$

Podemos restringir esta ação a $U(n) \subset Sp(2n)$.

$$U(n) \times \Lambda_{2n} \longrightarrow \Lambda_{2n}.$$

Para provarmos o resultado a seguir, será conveniente mostrarmos como exibir um subespaço em termos matriciais. Seja $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ subespaço qualquer de dimensão n . e seja $\eta_1, \dots, \eta_n$ base para L .

$$L = \text{span} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{2n \times n} := \text{span col} \begin{bmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_n \end{bmatrix}, \\ \text{Logo } L = \text{span} \underbrace{[\eta_1 \dots \eta_n]}_{\text{colunas}} = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} u : u \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Proposição 1.8. A ação $U(n) \times \Lambda_{2n} \longrightarrow \Lambda_{2n}$ é transitiva: Dados $L_1, L_2 \in \Lambda_{2n}$, existe $T \in U(n)$ tal que $T(L_1) = L_2$.

Lema 1.2. Considere um subespaço $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ de dimensão n em termos matriciais X, Y . Então $L \in \Lambda_{2n} \iff X^T Y - Y^T X = 0_{n \times n}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \omega_0\left(\begin{bmatrix} Xu \\ Yu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Xu' \\ Yu' \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} Xu \\ Yu \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xu' \\ Yu' \end{bmatrix} = \\ &= u^T \left(\begin{bmatrix} X^T & Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) u' = \\ &= u^T (X^T Y - Y^T X) u'. \end{aligned}$$

Segue-se que $L \in \Lambda_{2n} \iff u^T (X^T Y - Y^T X) u' = 0, \quad \forall u, u' \in \mathbb{R}^n \iff X^T Y - Y^T X = 0_{n \times n}$. ■

Demonstração: Da Proposição 1.8:

Dado $L \in \Lambda_{2n}$, escolha um referencial ortonormal $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ para L . Então, pelo Lema anterior, $X^T Y - Y^T X = 0$. Além disso as colunas são ortonormais, isto é, $X^T X + Y^T Y = I$. Agora, para $U = X + iY$ temos $U^* U = (X^T - iY^T)(X + iY) = X^T X + Y Y^T + i(Y X^T - X Y^T)$.

Segue-se que $L \in \Lambda_{2n} \iff U^* U = I$. Considere agora L_0 subespaço Lagrangeano fixo $L_0 = (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Então $U \cdot L_0 = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{R}^n \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = L$ Agora é simples: Sejam $L_1, L_2 \in \Lambda_{2n}$, então $U_1 \cdot L_0 = L_1$ e $U_2 \cdot L_0 = L_2$, então

$$U_1^{-1} \cdot L_1 = U_2^{-1} \cdot L_2,$$

donde $L_1 = U_1 \cdot U_2^{-1} \cdot L_2$, portanto $\exists T = U_1^{-1} \cdot U_2 \in U(n) \subset Sp(2n)$ que manda L_1 em L_2 . ■

Lembremos aqui que se $G \times X \longrightarrow X$ é uma ação transitiva, e G_{x_0} denota o subgrupo de isotropia de x_0 , $G_{x_0} = \{g \in G : g \cdot x_0 = x_0\}$, então a ação induz uma bijeção;

$$G/G_{x_0} \longrightarrow X \tag{1.10}$$

Lema 1.3. O grupo de isotropia de $L_0 = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ relativo a $U(n) \times \Lambda_{2n} \longrightarrow \Lambda_{2n}$ é :

$$G_{L_0} = O(n) \subset U(n).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
& \text{O grupo de isotropia de } L_0 \text{ é } G_{L_0} = \{U \in U(n) : U(L_0) = L_0\} \\
& = \{X + iY \in U(n) : \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = (\mathbb{R}^n \times \{0\})\} \\
& = \{X + iY \in U(n) : \text{span} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = (\mathbb{R}^n \times \{0\})\} \\
& = \{X + iY \in U(n) : Y = 0_{n \times n}\}
\end{aligned}$$

Daí, como $X^T X + Y^T Y = I$, temos $X \in O(n)$. Portanto,

$$G_{L_0} = O(n) \subset U(n).$$

■

Teorema 1.9. A ação $U(n) \times \Lambda_{2n} \longrightarrow \Lambda_{2n}$ induz uma bijeção:

$$\begin{aligned}
U(n)/O(n) & \longrightarrow \Lambda_{2n} \\
\bar{U} & \longmapsto U \cdot (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = U \cdot L_0
\end{aligned}$$

Demonstração: Segue da Proposição 1.8, da ação 1.10 e do Lema anterior. ■

Considerando $U(n)$ com a topologia natural (induzida de $M_{2n \times 2n}$), obtemos que Λ_{2n} herda a topologia quociente de $U(n)/O(n)$.

Teorema 1.10. Dados $L_0, L_1 \in \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$, com $\dim(L_0 \cap L_1) = \dim(L'_0 \cap L'_1)$, então existe $T \in Sp(\mathbb{V}, \omega)$ tal que $T(L_0) = L'_0$ e $T(L_1) = L'_1$. Além do mais, no caso em que $L'_0 = L_0$, uma tal T pode ser escolhida de modo que $\det(T|_{L_0}) > 0$

Note que, sob o ponto de vista da ação diagonal de $Sp(2n)$ em $\Lambda \times \Lambda$,

$$\begin{aligned}
Sp(2n) \times (\Lambda \times \Lambda) & \longrightarrow \Lambda \times \Lambda \\
(T, (L_0, L_1)) & \longmapsto (T(L_0), T(L_1)) = (L'_0, L'_1).
\end{aligned}$$

O teorema acima diz que a dimensão da interseção é a única obstrução à transitividade dessa ação.

Definição 1.10. Uma decomposição Lagrangeana de $\mathbb{V}$ é um par $(L_0, L_1) \in \Lambda \times \Lambda$ tal que $\mathbb{V} = L_0 \oplus L_1$.

Proposição 1.11. *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de $\mathbb{V}$, então o mapa linear*

$$\begin{aligned} \rho_{L_0, L_1} : L_1 &\longrightarrow L_0^* \\ v &\longmapsto \omega(v, \cdot)|_{L_0} \end{aligned} \quad (1.11)$$

é um isomorfismo.

Demonstração: $\text{Ker}(\rho_{L_0, L_1}) = \{v \in L_1 : \omega(v, u) = 0, \forall u \in L_0\} = L_0^\perp = L_0$. Como $\text{Ker}(\rho_{L_0, L_1}) \subset L_1$, temos $\text{Ker}(\rho_{L_0, L_1}) = \{0\}$. Portanto, sabendo que ρ_{L_0, L_1} é injetiva. Sabendo também que $\dim(L_0^*) = \dim(L_0) = n = \dim(L_1)$, então ρ_{L_0, L_1} é um isomorfismo. ■

Proposição 1.12. (a) *Para cada subespaço Lagrangeano $L_0 \in \Lambda$, existe um subespaço Lagrangeano complementar $L_1 \in \Lambda$.*

(b) *Dada uma decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) e uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para L_0 , existe uma base $\{f_1, \dots, f_n\}$ para L_1 , donde $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é uma base simplética para $\mathbb{V}$.*

Demonstração: (a) Podemos supor que $(\mathbb{V}, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, $L_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$. Sabendo que $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, temos $J(L_0) \cap L_0 = J \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cap L_0 = \{0\}$. Sejam $u, v \in L_0$, logo $\langle v, J(u) \rangle = v^T(Ju) = \omega_0(v, u) = 0$ pois L_0 é Lagrangeano, logo $J(L_0) \perp L_0$ (em relação ao produto $\langle, \rangle$), logo $J(L_0) \cap L_0 = \{0\}$. Tome então, $L_1 = J(L_0)$. Resta agora mostrar que $L_1 = J(L_0)$ é Lagrangeano. Sejam $u, v \in L_0$, $\omega_0(J(u), J(v)) = u^T J^T J J v = u^T I J v = u^T J v = \omega_0(u, v) = 0$, pois L_0 é Lagrangeano.

(b) Considere a base $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ de L_1^* dada por $\phi_i := \rho_{L_1, L_0}(e_i)$, onde ρ_{L_0, L_1} foi definido na Proposição 1.11. Tome a base $\{f_1, \dots, f_n\}$ para L_1 , cuja base dual é $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Então:

$$\delta_{ij} = \phi_i(f_j) = \rho_{L_1, L_0}(e_i)(f_j) = \omega(e_i, f_j)$$

Como L_0 e L_1 são Lagrangeanos temos $\omega(e_i, e_j) = 0$ e $\omega(f_i, f_j) = 0$. Portanto, a base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é uma base simplética para $\mathbb{V}$.

Capítulo 2

A Grassmanniana Lagrangeana

2.1 Atlas para a Grassmanniana Lagrangeana

Nesta seção construiremos um atlas diferenciável $\{(\mathcal{U}_{L_0, L_1}, \phi_{L_0, L_1})\}$ para $\Lambda(\mathbb{V}, \omega)$, onde os pares (L_0, L_1) variam entre todas as decomposições Lagrangeanas de $\mathbb{V}$.

Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de $\mathbb{V}$. Denotaremos por $\mathcal{U}_{L_0, L_1}$ o conjunto de todos subespaços Lagrangeanos de $\mathbb{V}$ transversais a L_1 , isto é,

$$\mathcal{U}_{L_0, L_1} := \{L \in \Lambda : L \cap L_1 = \{0\}\}. \quad (2.1)$$

Note que $\mathcal{U}_{L_0, L_1}$ não depende de L_0 , mas $L_0 \in \mathcal{U}_{L_0, L_1}$.

Lema 2.1. *Vale a igualdade:*

$$\bigcup_{(L_0, L_1)} \mathcal{U}_{L_0, L_1} = \Lambda,$$

onde (L_0, L_1) varia entre as decomposições Lagrangeanas de $\mathbb{V}$.

Demonstração: A inclusão é óbvia pois qualquer elemento de $\mathcal{U}_{L_0, L_1}$ é subespaço Lagrangeano. Suponha agora que $L \in \Lambda$, logo pela Proposição 1.12, existe $L_1 \in \Lambda$ complementar a L , daí $L \in \mathcal{U}_{L_0, L_1}$. ■

Definição 2.1. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ subespaços complementares do espaço vetorial $\mathbb{E}$, isto é, $\mathbb{E} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Dada uma $T : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_2$ linear, o **gráfico** de T é o subespaço definido por $\text{graf}(T) = \{w + Tw : w \in \mathbb{W}_1\}$.

Note que $\dim \text{graf}(T) = \dim \mathbb{W}_1$ e, pela definição de gráfico, $\text{graf}(T) \cap \mathbb{W}_2 = \{0\}$.

Proposição 2.1. *Seja $\mathbb{E} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Dada uma $T : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_2$ linear, temos $\mathbb{E} = \text{graf}(T) \oplus \mathbb{W}_2$. Reciprocamente, qualquer subespaço de $\mathbb{E}$ complementar a $\mathbb{W}_2$ é da forma $\text{graf}(T)$, onde $T : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_2$ é uma transformação linear.*

De fato, para a implicação direta, basta notar que $\mathbb{E} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$, $\text{graf}(T) + \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{E}$ e que o subespaço $\text{graf}(T) \cap \mathbb{W}_2 = \{0\}$, após isto aplicamos a definição de soma de subespaços em $\text{graf}(T) + \mathbb{W}_2$, segue a primeira afirmação.

Se W é tal que $W \oplus \mathbb{W}_2 = \mathbb{E}$, então $\exists T : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_2$ linear tal que $W = \text{graf}(T)$.

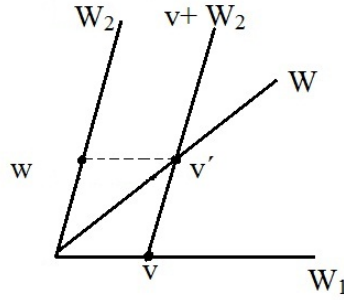


Figura 2.1: Subespaços W_1 , W_2 e W

Para provar a recíproca, notemos antes que para cada $v \in \mathbb{W}_1$ a interseção $(v + \mathbb{W}_2) \cap W$ é não vazia, pois como $v \in \mathbb{E} = W \oplus \mathbb{W}_2$, v se escreve de maneira única $v = w + w_2$, onde w e w_2 estão em W e $\mathbb{W}_2$ respectivamente, donde $w = v - w_2 \in (v + \mathbb{W}_2) \cap W$. Agora existe um único v' na interseção $(v + \mathbb{W}_2) \cap W$ (ver Figura 2.1), pois caso exista $v'' \in (v + \mathbb{W}_2) \cap W$, então existirão únicos w'_2 e w''_2 em $\mathbb{W}_2$ tais que $v' = v + w'_2$ e $v'' = v + w''_2$, segue que $v' - v'' = w'_2 - w''_2 \in W \cap \mathbb{W}_2 = \{0\}$, donde $v' = v''$. Agora temos que para cada $v \in \mathbb{W}_1$, $(v + \mathbb{W}_2) \cap W = \{v'\}$. Então existe um único $w \in \mathbb{W}_2$ tal que $v' = v + w$. Defina $w := Tv$. Isto define uma função $T : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_2$ que é claramente linear pela definição de soma direta. É claro que $\text{graf}(T) \subset W$, pois $v' = v + T(v) \in W$ para todo $v \in \mathbb{W}_1$, e vale a igualdade $W = \text{graf}(T)$, pois

$$\dim(\text{graf}(T)) = \dim(W_1) = \dim(W). \quad \blacksquare$$

Segue desta proposição que para uma decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) de $\mathbb{V}$ o mapa

$$\begin{aligned} \text{Lin}(L_0, L_1) &\longrightarrow \{L \text{ subespaço de } \mathbb{V} : L \oplus L_1 = \mathbb{V}\} \\ T &\longmapsto \text{graf}(T) \end{aligned}$$

está bem definido e é uma sobrejeção. Na verdade, esta aplicação é uma bijeção. De fato, se $\text{graf}(T) = \text{graf}(S)$, então para dado v em $\mathbb{W}_1$ arbitrário, existe u em $\mathbb{W}_1$ tal que $v + Tv = u + Su$, daí $v - u = Su - Tv \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0\}$, portanto $u = v$, logo $Tv = Sv$. Como v é arbitrário, $T = S$. $\blacksquare$

Seja $T : L_0 \rightarrow L_1$ linear. Consideremos a seguinte forma bilinear em L_0 :

$$\beta_T(u, v) := \rho_{L_0, L_1}(T(u)) \cdot v = \omega(T(u), v), \quad (2.2)$$

onde ρ_{L_0, L_1} foi definido na Proposição 1.11. Como ρ_{L_0, L_1} é uma bijeção, então o mapa

$$\begin{aligned} \text{Lin}(L_0, L_1) &\longrightarrow B(L_0) \\ T &\longmapsto \beta_T \end{aligned}$$

é uma bijeção. De fato, se $\beta_T = \beta_S$, então $\rho_{L_0, L_1}(T(u)) = \rho_{L_0, L_1}(S(u))$, para todo u , logo $Tu = Su$, donde $T = S$.

Proposição 2.2. *O mapa*

$$\begin{aligned} B(L_0) &\longrightarrow \{L \text{ subespaço de } \mathbb{V} : L \oplus L_1 = \mathbb{V}\} \\ \beta &\longmapsto \text{graf}(T) \end{aligned}$$

tal que $\beta = \beta_T$ é uma bijeção

Demonstração: Esta segue da composição dos dois mapas acima. $\blacksquare$

Lema 2.2. *Seja $T \in \text{Lin}(L_0, L_1)$, então $\text{graf}(T) \in \Lambda$ se, e somente se, $\beta_T \in \text{Sym}(L_0)$.*

Demonstração: Para $u, v \in L_0$ temos

$$\begin{aligned} \omega(u + T(u), v + T(v)) &= \omega(u, v) + \omega(T(u), T(v)) + \omega(T(u), v) + \omega(u, T(v)) \\ &= 0 + 0 + \beta_T(u, v) - \beta_T(v, u). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega(u + T(u), v + T(v)) = 0 \iff \beta_T(u, v) = \beta_T(v, u).$$

$\blacksquare$

Corolário 2.1. *Tem-se a bijeção:*

$$\begin{aligned} \text{Sym}(L_0) &\longrightarrow \mathcal{U}_{L_0, L_1} \\ \beta &\longmapsto \text{graf}(T), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde T é tal que $\beta = \beta_T$.

A inversa da aplicação (2.3) é denotada por ϕ_{L_0, L_1} . Portanto,

$$\phi_{L_0, L_1} : \mathcal{U}_{L_0, L_1} \longrightarrow \text{Sym}(L_0) \quad (2.4)$$

$$\text{graf}(T : L_0 \rightarrow L_1) \longmapsto \beta, \quad (2.5)$$

onde T é tal que $\beta(u, v) = \beta_T(u, v) = \omega(T(u), v)$. (Como na equação 2.2)

Definição 2.2. Seja M um conjunto não vazio. Uma carta em M é uma bijeção

$$\phi : U \longrightarrow \tilde{U},$$

onde $U \subset M$ e $\tilde{U}$ é um aberto de algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Por (2.4), cada $\phi_{L_0, L_1} : \mathcal{U}_{L_0, L_1} \rightarrow \text{Sym}(L_0)$ é uma carta em $\Lambda = \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$ se identificamos $\text{Sym}(L_0) \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.

Teorema 2.3. *Sejam $U = \mathcal{U}_{L_0, L_1}$, $V = \mathcal{U}_{L'_0, L'_1}$, $\tilde{U} = \text{Sym}(L_0)$ e $\tilde{V} = \text{Sym}(L'_0)$. Então, a aplicação $\psi_{L_0, L_1, L'_0, L'_1} = \phi_{L'_0, L'_1} \circ \phi_{L_0, L_1}^{-1}$ é um difeomorfismo.*

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{U}_{L_0, L_1} \cap \mathcal{U}_{L'_0, L'_1} & \\ \swarrow \phi_{L_0, L_1} & & \searrow \phi_{L'_0, L'_1} \\ \phi_{L_0, L_1}(\mathcal{U}_{L_0, L_1} \cap \mathcal{U}_{L'_0, L'_1}) & \xrightarrow{\psi = \phi_{L'_0, L'_1} \circ \phi_{L_0, L_1}^{-1}} & \phi_{L'_0, L'_1}(\mathcal{U}_{L_0, L_1} \cap \mathcal{U}_{L'_0, L'_1}) \end{array}$$

Demonstração: Veja no capítulo 2 de [Piccione-Tausk] ou também em [Valeriano2010] Págs. 37 a 42. ■

Daí, temos que o conjunto $\Lambda = \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$ é uma variedade diferenciável, chamada a Grassmanniana Lagrangeana de $\mathbb{V}$, com o atlas maximal gerado pelas cartas

$$\{(\mathcal{U}_{L_0, L_1}, \phi_{L_0, L_1}) : (L_0, L_1) \text{ é decomposição Lagrangeana}\}.$$

Note que a dimensão de $\Lambda = \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$ é $\frac{n(n+1)}{2}$, pois esta é a dimensão do $\text{Sym}(L_0)$.

Definição 2.3. Os abertos que caracterizam a topologia em Λ são definidos assim: $A \subset \Lambda$ é aberto se e só se $\phi_{L_0, L_1}(A \cap \mathcal{U}_{L_0, L_1})$ é aberto para toda decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) .

Uma curva $\gamma : I \rightarrow \Lambda$ é diferenciável se, e somente se, $\phi_{L_0, L_1} \circ \gamma : I' \subset I \rightarrow \text{Sym}(L_0)$ é diferenciável, para decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) .

2.2 Um Estudo sobre as Subvariedades $\Lambda_k(L)$ de Λ

Introduziremos certos subconjuntos $\Lambda_k(L)$ de Λ que mostraremos serem subvariedades.

Definição 2.4. Dados $L \in \Lambda$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\Lambda_k(L) := \{L' \in \Lambda : \dim(L' \cap L) = k\}.$$

Observe que $\mathcal{U}_{L_0, L_1} = \Lambda_0(L_1)$.

Nesta seção iremos assumir que $\mathbb{E}$ é um espaço vetorial n -dimensional e usaremos também seu espaço dual $\mathbb{E}^*$. Usaremos $\mathbb{V} := \mathbb{E} \times \mathbb{E}^*$ com a seguinte estrutura simplética canônica:

$$\omega_{can}((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) := \phi_2(v_1) - \phi_1(v_2).$$

Verifica-se que ω_{can} acima é anti-simétrica e não-degenerada. A anti-simetria vem da definição da forma. Ela é não-degenerada pois, se $\omega_{can}((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) = 0, \forall (v_2, \phi_2)$, então, $\phi_2(v_1) = \phi_1(v_2), \forall (v_2, \phi_2)$, logo, tomando $\phi_2 = id$ e $v_2 = 0$, obtemos $v_1 = 0$, donde $\phi_1(v_2) = 0, \forall v_2$. Portanto $\phi_1 = 0$.

Exemplo 2.1. Como $\mathbb{V} = \mathbb{E} \times \mathbb{E}^* = (\mathbb{E} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{E}^*)$, fazendo $L_0 = \mathbb{E} \times \{0\}$ e $L_1 = \{0\} \times \mathbb{E}^*$, obtemos uma decomposição Lagrangeana de $\mathbb{V} = L_0 \oplus L_1$ relativamente à forma simplética canônica, ω_{can} , pois $\dim(L_0) = n = \dim(L_1)$ e $\omega_{can}|_{L_0} = 0 = \omega_{can}|_{L_1}$.

Note que com as identificações $L_1 \cong \mathbb{E}^*$ e $L_0^* \cong \mathbb{E}^*$, o mapa $\rho_{L_0, L_1} : L_1 \rightarrow L_0^*$ é simplesmente $\mathbb{E}^* \xrightarrow{-id} \mathbb{E}^*$.

De fato,

$$\rho_{L_0, L_1}(0, \varphi)(v, 0) = \omega_{can}((0, \varphi), (v, 0)) = -\varphi(v)$$

e $(0, \varphi) \cong \varphi$, $(v, 0) \cong v$. Daí $\rho_{L_0, L_1} = -id$. Assim, usando o isomorfismo $\psi_T : Lin(\mathbb{E}, \mathbb{E}^*) \rightarrow B(E)$ definido por $\psi_T(u, v) = T(u) \cdot (v)$, para fazer a identificação $\psi_T = T$, usamos a composição $\beta_T(u, v) = \rho_{L_0, L_1}(T(u)) \cdot (v)$, mas daí $\beta_T = -\psi_T = -T$. Portanto, obtemos o mapa

$$\begin{aligned} Sym(E) &\longrightarrow \mathcal{U}_{L_0, L_1} \\ \beta &\longmapsto graf(-\beta : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^*) = \{(v, -\beta(v, \cdot)) : v \in \mathbb{E}\}. \end{aligned}$$

Definição 2.5. Usando a identificação $(\mathbb{V}, \omega) = (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^*, \omega_{can})$ definimos uma “parametrização” para $\Lambda = \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$

$$\begin{aligned} \Psi : \{(S, b) : S \subset \mathbb{E} \text{ e } b \in Sym(S)\} &\longrightarrow \Lambda \\ (S, b) &\longmapsto L := \{(v, \phi) \in \mathbb{V} : v \in S, \\ &\text{e } \phi|_S + b(v, \cdot) \equiv 0 \in S^*\} \end{aligned}$$

Observe que um dado L nas condições acima e usando a identificação anterior é tal que $L \subseteq \mathbb{V} = \mathbb{E} \times \mathbb{E}^*$

Lema 2.3. L definido acima é um subespaço Lagrangeano.

Demonstração: Basta provar que: (1) $L \subset L^\perp$ e (2) $\dim(L) = \dim(E)$.

- (1) Se $(v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2) \in L$, então $v_1, v_2 \in S$ e $\phi_i(u) + b(v_i, u) = 0$, $\forall u \in S$ quando $i = 1, 2$. Fazendo $u = v_1$ e $u = v_2$;
- $$\phi_2(v_1) = -b(v_2, v_1) = -b(v_1, v_2) = \phi_1(v_2), \text{ logo } \phi_2(v_1) = \phi_1(v_2)$$
- , logo, $\omega_{can}((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) := \phi_2(v_1) - \phi_1(v_2) = 0$. Portanto $L \subset L^\perp$.

- (2) Provaremos antes que $\dim(L) \leq \dim(E)$. Sabemos que, para qualquer um subespaço $S \subset \mathbb{E}$, temos $\mathbb{E}^* \subset S^*$, donde $\dim(E^*) \leq \dim(S^*)$, e como $L \subset S \times \mathbb{E}^*$,

$$\begin{aligned} \dim(L) &\leq \dim(S) + \dim(E^*) \leq \dim(S) + \dim(S^*) \\ &= \dim(S) + \dim(E) - \dim(S) = \dim(E). \end{aligned}$$

para prova da desigualdade oposta, considere a função:

$$F : L \longrightarrow E, \quad (v, \varphi) \longmapsto v.$$

É facil ver que a mesma F é linear e é sobrejetiva, logo $\dim(L) \geq \dim(E)$. ■

Proposição 2.4. (1) Dada uma carta $(\mathcal{U}_{L_0, L_1}, \phi_{L_0, L_1})$; em $\Lambda = \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$ temos que $\phi_{L_0, L_1}(\Lambda_k(L) \cap \mathcal{U}_{L_0, L_1}) \subset \text{Sym}(L_0)$ é uma subvariedade de codimensão $k(k+1)/2$.

(2) Para $k = 0$, $\Lambda_0(L) \cap \mathcal{U}_{L_0, L_1}$ é aberto e denso em Λ .

Demonstração: Primeiro observamos que podemos fazer a demonstração apenas no contexto em que $\mathbb{V} = \mathbb{E} \times \mathbb{E}^*$, $\omega = \omega_{can}$, $L_0 = \mathbb{E} \times \{0\}$ e $L_1 = \{0\} \times \mathbb{E}^*$

Lema 2.4. Podemos supor que $(\mathbb{V}, \omega) = (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^*, \omega_{can})$ e $L_0 = \mathbb{E} \times \{0\}$ e $L_1 = \{0\} \times \mathbb{E}^*$.

Demonstração: (do Lema) Para ver isto, considere o isomorfismo

$$\begin{aligned} T : \mathbb{V} = L_0 \oplus L_1 &\longrightarrow L_0 \times L_0^* \\ v_0 + v_1 &\longmapsto (v_0, -\rho_{L_0, L_1}(v_1)) = (v_0, \omega(\cdot, v_1)) \end{aligned}$$

e notemos que $T(L_0) = L_0 \times \{0\}$, $T(L_1) = \{0\} \times L_0^*$ e, para $u = u_0 + u_1$, $v = v_0 + v_1 \in L_0 \oplus L_1$, temos $\omega_{can}(T(u), T(v)) = \omega_{can}((u_0, \omega(\cdot, u_1)|_{L_0}), (v_0, \omega(\cdot, v_1)|_{L_0}))$
 $= \omega(u_0, v_1) - \omega(v_0, u_1) = \omega(u_0, v_1) + \omega(u_1, v_0)$, e como L_0, L_1 são Lagrangeanos, obtemos $\omega_{can}(T(u), T(v)) = \omega(u, v)$.

Então, podemos supor que $(V, \omega) = (\mathbb{E} \times \mathbb{E}^*, \omega_{can})$ e $L_0 = \mathbb{E}$, $L_1 = \mathbb{E}^*$. ■

Seja $L = \psi(S, b) = \{(v, \phi) : v \in S, \text{ e } \phi|_S + b(v, \cdot) \equiv 0\}$. como na Definição 2.5 Dado $L' \in \Lambda_k(L) \cap \mathcal{U}_{L_0, L_1}$, seja $\beta \in \text{Sym}(\mathbb{E})$ tal que

$$L' = \text{graf}(-\beta : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^*) = \{(v, -\beta(v, \cdot)) : v \in \mathbb{E}\}.$$

Então

$$L \cap L' = \{(v, -\beta(v, \cdot)) : v \in S \text{ e } \beta(v, \cdot)|_S = b(v, \cdot)\} = \{(v, -\beta(v, \cdot)) : v \in \text{Ker}(\beta|_S - b)\},$$

Portanto, $\dim(L \cap L') = \dim \text{Ker}(\beta|_S - b)$, consequentemente,

$$\phi_{L_0, L_1}(\Lambda_k(L) \cap \mathcal{U}_{L_0, L_1}) = \{\beta \in \text{Sym}(\mathbb{E}) : \dim \text{Ker}(\beta|_S - b) = k\} \subset \text{Sym}(\mathbb{E}).$$

Seja agora $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{E}$ tal que $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ é base de S . Então,

$$\text{Sym}(\mathbb{E}) \approx \text{Sym}_n(\mathbb{R})^1, \quad b \approx N \in \text{Sym}_\ell(\mathbb{R}).$$

¹ $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ denota a classe de todas as matrizes simétricas de ordem n com entradas reais.

$$\{\beta \in \text{Sym}(\mathbb{R}) : \dim \text{Ker}(\beta|_{S-b}) = k\} \approx \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) : A-N \text{ tem posto } \ell-k \right\}$$

$$\begin{aligned} &\approx M_{\ell \times (n-\ell)}(\mathbb{R}) \times \text{Sym}_{n-\ell}(\mathbb{R}) \times \{A \in \text{Sym}_\ell(\mathbb{R}) : \text{posto}(A) = \ell - k\} \\ &= M_{\ell \times (n-\ell)}(\mathbb{R}) \times \text{Sym}_{n-\ell}(\mathbb{R}) \times \{A \in \text{Sym}_\ell(\mathbb{R}) : \text{posto}(A - N) = \ell - k\}. \end{aligned}$$

Seguem daí os resultados desejados. ■

Lema 2.5. $\Sigma_k := \{A \in \text{Sym}_\ell(\mathbb{R}) : \text{posto}(A) = \ell - k\} \subset \text{Sym}_\ell(\mathbb{R})$

é subvariedade de dimensão $(\ell - k)(\ell - k + 1)/2 + k(\ell - k)$.

Demonstração: O conjunto aberto de $M_\ell(\mathbb{R})$,

$$\Omega = \left\{ A = \begin{bmatrix} X & Y \\ U & Z \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}); X \in \text{GL}_{\ell-k}(\mathbb{R}) \right\}.$$

é aberto, pois $f(A) = \det X$ é contínua e $\Omega = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. A identidade

$$\begin{bmatrix} I_{\ell-k} & O \\ UX^{-1} & -I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ U & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ O & UX^{-1}Y - Z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

mostra que

$$\Sigma_k = \{A \in \Omega; \text{posto}(A) = \ell - k\} = \varphi^{-1}(O),$$

onde

$$\varphi : \Omega \rightarrow M_k(\mathbb{R}), \quad A \mapsto UX^{-1}Y - Z.$$

A aplicação φ é C^∞ e sua derivada em $\xi = \begin{bmatrix} H & K \\ L & M \end{bmatrix}$ é dada por

$$D\varphi(A) \cdot \xi = LX^{-1}Y - UX^{-1}HX^{-1}Y + UX^{-1}K - M,$$

logo é sobrejetiva, pois para todo $S \in M_k(\mathbb{R})$ $D\varphi(A) \cdot \begin{bmatrix} O & O \\ O & -S \end{bmatrix} = S$. Portanto, O é um valor regular de φ e, por conseguinte, Σ_k é uma subvariedade de classe C^∞ de Ω de dimensão igual a $\ell^2 - k^2$.

O mesmo argumento funciona para a restrição de φ ,

$$\varphi : \text{Sym}_\ell(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_k(\mathbb{R}),$$

pois, neste caso, $U = Y^T$ e X e Z são simétricas, logo $\varphi(A)$ é simétrica.

Concluimos que Σ_k^s é uma subvariedade de $Sym_\ell(\mathbb{R})$ de classe C^∞ e dimensão

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(\ell-k)(\ell-k+1)}{2} + k(\ell-k).$$

Se $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ tem posto k , então $B_0 = EA_0E^T \in \Omega$, para alguma matriz de permutação E . Uma carta local em B_0 dá uma carta local em A_0 , logo, concluimos os resultados para matrizes de posto k em geral. ■

Obs. O espaço tangente a Σ_k no ponto A é o núcleo de $D\varphi(A)$.

Corolário 2.2. $\Lambda_k(L)$ é subvariedade de Λ de codimensão $k(k+1)/2$.

Para $k = 0$, $\Lambda_0(L)$ é um aberto denso de Λ .

2.3 O Espaço Tangente $T_{L_0}\Lambda$

Nesta seção iremos fazer uma identificação entre o espaço tangente $T_{L_0}(\Lambda)$ da Grassmanniana Lagrangeana de $\mathbb{V}$ por um dado L_0 Lagrangeano e o espaço das formas bilineares simétricas $Sym(L_0)$, bem como conceituar o ciclo de Maslov.

Consideremos uma curva diferenciável $\ell : I \rightarrow \Lambda$ definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A terminologia utilizada na construção a seguir é retirada de [Álvarez-Durán].

Definição 2.6. : Dado $t_0 \in I$, o Wronskiano de ℓ em t_0 é a forma $W(t_0) \in Sym(\ell(t_0))$ definida assim :

dados $u_0, v_0 \in \ell(t_0)$, escolhemos $u, v : I \rightarrow \mathbb{V}$ diferenciáveis tais que $u(t), v(t) \in \ell(t)$, $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, e tomamos:

$$W(t_0)(u_0, v_0) := \omega(\dot{u}(t_0), v(t_0)).$$

Lema 2.6. (1) $W(t_0)(u_0, v_0)$ não depende da particular escolha das extensões $u(t)$, $v(t)$ de u_0, v_0 ;

(2) $W(t_0)(\cdot, \cdot) \in Sym(\ell(t_0))$.

Demonstração:

- (1) Dadas as extensões $u(t), v(t) \in \ell(t)$, como $\ell(t)$ é subespaço Lagrangeano temos $\omega(u(t), v(t)) \equiv 0$, logo

$$0 = \frac{d}{dt}\omega(u(t), v(t)) = \omega(\dot{u}(t), v(t)) + \omega(u(t), \dot{v}(t)),$$

donde,

$$\omega(\dot{u}(t), v(t)) = -\omega(u(t), \dot{v}(t)) = \omega(\dot{v}(t), u(t)) \quad (2.7)$$

Portanto, se $\tilde{u}(t_0) = u(t_0)$, então $\omega(\dot{\tilde{u}}(t_0), v_0) = \omega(\dot{v}(t_0), u_0) = \omega(\dot{u}(t_0), v_0)$, o que prova (1)

- (2) Se $u(t), \tilde{u}(t) \in \ell(t)$ são extensões de u_0 , então $u(t) + \tilde{u}(t) \in \ell(t)$ e $u(t) + \tilde{u}(t)$ é extensão de $u_0 + \tilde{u}_0$, logo

$$\begin{aligned} W(t_0)(u_0 + \tilde{u}_0, v_0) &= \omega((u + \tilde{u})(t_0), v_0) \\ &= \omega(\dot{u}(t_0), v_0) + \omega(\dot{\tilde{u}}(t_0), v_0) = W(t_0)(u_0, v_0) + W(t_0)(\tilde{u}_0, v_0); \end{aligned}$$

analogamente mostra-se a homogeneidade, $W(t_0)(\lambda u_0, v_0) = \lambda W(t_0)(u_0, v_0)$. Na Equação 2.7 vimos que $\omega(\dot{u}(t), v(t)) = \omega(\dot{v}(t), u(t))$, do que decorre $W(t_0)(u_0, v_0) = W(t_0)(v_0, u_0)$. Isto mostra que $W(t_0)$ é simétrica, logo, a linearidade na segunda variável também vale, portanto

$$W(t_0) \in \text{Sym}(\ell(t_0)).$$

■

Seja

$$\begin{aligned} \ell : I &\longrightarrow \Lambda \\ t &\longmapsto W(t), \text{ com } \ell(t_0) = L_0 \end{aligned}$$

Por ser o conjunto $\mathcal{U}_{L_0, L_1}$ o domínio de uma carta em Λ , existe $\varepsilon > 0$ tal que $\ell(t) \in \mathcal{U}_{L_0, L_1}$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Vamos utilizar as seguintes notações; onde $T(t) : L_0 \rightarrow L_1$ é linear,

$$\ell(t) = \text{graf}(T(t)) \longmapsto \text{ e } \beta(t) = \phi_{L_0, L_1}(\ell(t)).$$

Defina $u(t) := u_0 + T(t)u_0 \in \ell(t)$.

Lema 2.7. $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\phi_{L_0,L_1}(\ell(t)) = W(t_0) \in \text{Sym}(\ell(t_0))$

Demonstração: Seja $T(t) : L_0 \rightarrow L_1$, $\ell(t) = \text{graf}(T(t) : L_0 \rightarrow L_1)$ e $\beta(t) = \phi_{L_0,L_1}(\ell(t))$. Como $\beta(t) = \phi_{L_0,L_1}(\ell(t)) = \phi_{L_0,L_1}(\text{graf}(T(t))) = \beta_{T(t)}$ e lembrando da Equação 2.2 temos,

$$\beta(t)(u, v) = \omega(T(t)u, v), \quad \text{para } u, v \in L_0$$

Daí, temos $\dot{\beta}(t_0)(u_0, v_0) = \omega(\dot{T}(t_0)u_0, v_0)$. Como $L_0 = \ell(t_0) = \{u + T(t_0)u : u \in L_0\}$, segue-se que $T(t_0) = 0$, logo, a curva $u(t) = u_0 + T(t)u_0 \in \ell(t)$ é uma extensão de u_0 . Portanto,

$$W(t_0)(u_0, v_0) = \omega(\dot{u}(t_0), v_0) = \omega(\dot{T}(t_0)u_0, v_0) = \dot{\beta}(t_0)(u_0, v_0).$$

■

Note agora que pelo Lema 2.7 e a aplicação 2.4 podemos fazer a identificação canônica

$$T_{L_0}\Lambda \cong \text{Sym}(L_0) \tag{2.8}$$

$$\dot{\ell}(t_0) = v \longmapsto \frac{d}{dt}|_{t=t_0} \beta(t) = W(t_0) \tag{2.9}$$

Para futura referência, encerraremos esta seção com o seguinte resultado:

Lema 2.8. Se $\ell : I \rightarrow \Lambda$ é uma curva C^1 e $T \in \text{Sp}(\mathbb{V}, \omega)$, então os Wronskianos $W(t)$ e $\widetilde{W}(t)$ de $\ell(t)$ e $\tilde{\ell}(t) := T(\ell(t))$ estão T -relacionados, isto é:

$$W(t)(u, v) = \widetilde{W}(t)(T(u), T(v)). \tag{2.10}$$

Para todos $u, v \in \ell(t)$.

Demonstração: Se $u(t)$ é uma extensão C^1 de u_0 com $u(t) \in \ell(t)$ para todo t , então $T(u(t))$ é uma extensão de $\tilde{u}_0 := T(u_0)$ com $\tilde{u}(t) \in \tilde{\ell}(t)$ para todo t . Daí,

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(t_0)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) &= \omega(\dot{\tilde{u}}(t_0), \tilde{v}_0) \\ &= \omega(T(\dot{u}(t_0)), T(v_0)) \\ &= \omega(\dot{u}(t_0), v_0) \\ &= W(t_0)(u_0, v_0). \end{aligned}$$

■

2.4 Ciclo de Maslov e Focalidade

Nsta seção, fixaremos um $L_0 \in \Lambda$ e definiremos o ciclo de Maslov e o cone tangente a este, seguido por um Lema que envolve espaço tangente. Ainda introduziremos focalidade e instantes L_0 -focais, seguido por uma proposição sobre estes últimos, terminando com a definição de índice focal para curvas com certas propriedades na Grassmanniana Lagrangeana

Definição 2.7. O ciclo de Maslov associado a L_0 é:

$$\Sigma(L_0) = \{L \in \Lambda : L \cap L_0 \neq \{0\}\} = \bigcup_{k \geq 1} \Lambda_k(L_0).$$

Pode-se mostrar que $\Sigma(L_0)$ é uma subvariedade de Λ de codimensão 1 com singularidades, cuja parte suave é $\Lambda_1(L_0)$. Para cada $L \in \Sigma(L_0)$, o *cone tangente* a $\Sigma(L_0)$ em L é definido por

$$C_L \Sigma(L_0) := \{\dot{\ell}(0) \mid \ell : (-\varepsilon, 0] \longrightarrow \Sigma(L_0) \subset \Lambda \text{ tal que } \ell(0) = L\} \subset T_L \Lambda$$

Lema 2.9. (1) $C_L \Sigma(L_0) = \{b \in \text{Sym}(L) : b|_{L \cap L_0} \text{ é degenerada} \}$

(2) Se $L \in \Lambda_1(L_0)$, então:

$$C_L \Sigma(L_0) = T_L \Lambda_1(L_0) = \{b \in \text{Sym}(L) : b|_{L \cap L_0} \equiv 0\}$$

Não provaremos este Lema, porém uma demonstração faz uso de :

Lema 2.10. Considere um subespaço lagrangeano $L \in \Lambda_k(L_0)$, então

$$T_L \Lambda_k(L_0) = \{b \in \text{Sym}(L) : b|_{L \cap L_0} \equiv 0\}$$

onde $T_L \Lambda_k(L_0) \subset T_L \Lambda = \text{Sym}(L)$.

Demonstração: Considere uma curva suave:

$$\ell : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Lambda_k(L_0), \ell(0) = L, \quad (2.11)$$

como $\ell(t) \in \Lambda_k(L_0)$, para todo t , $\ell(t) \cap L_0$ tem dimensão constante k . Podemos, portanto encontrar um referencial suave $v_1, \dots, v_k : I \rightarrow \mathbb{V}$ para $\ell(t) \cap L_0$, isto é, cada

$v_i : I \rightarrow \mathbb{V}$ é suave e $\ell(t) \cap L_0 = \text{span}[v_1(t), \dots, v_k(t)]$, $\forall t$. Considere $A = \{b \in \text{Sym}(L) : b|_{L \cap L_0} \equiv 0\}$. Temos que provar $\dot{\ell}(0) \in A$ e que dados $u_0, v_0 \in L \cap L_0$ então $W(0)(u_0, v_0) = 0$. Por hipótese $\dim(\ell(t) \cap L_0) = k$, $\forall t$, então $\exists$ extensão de classe C^1 $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $u(t) \in \ell(t) \cap L_0$, onde $u(0) = u_0 \in L_0$, consequentemente, percebemos que $\dot{u}(t) \in L_0$, $\forall t$. Daí, $W(0)(u_0, v_0) = \omega(\dot{u}_0, v_0) = 0$, pois $L_0 \in \Lambda$, logo $\dot{\ell}(0) \in A$. Como $A \subset \text{Sym}(L_0)$ tem codimensão $\frac{k(k+1)}{2}$, então $A = T_L \Lambda_K(L_0)$. ■

Definição 2.8. Seja $\ell : I \rightarrow \Lambda$ curva diferenciável;

- (1) t_0 é L_0 -focal para ℓ , se $\ell(t_0) \cap L_0 \neq \{0\}$ (isto é, $\ell(t_0) \in \Sigma(L_0)$)
- (2) Um instante t_0 , L_0 -focal, é não-degenerado se, e só se $W(t_0)|_{\ell(t_0) \cap L_0}$ for não-degenerado.

Veja a figura 2.2 abaixo

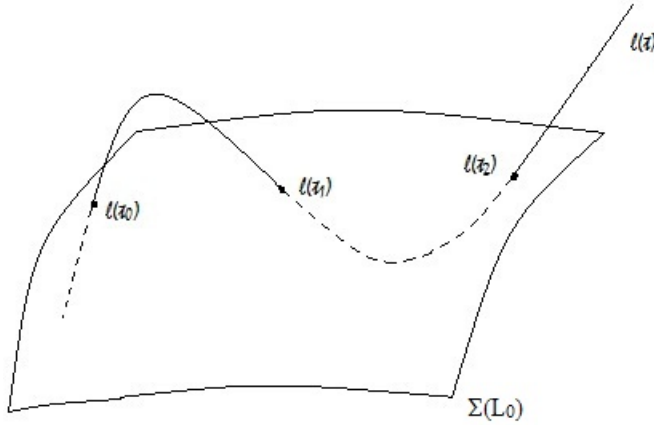


Figura 2.2: A figura ilustra uma curva que fura o ciclo de Maslov em 3 instantes L_0 -focais.

Em termos de uma carta $(\mathcal{U}_{L_0, L_1}, \phi_{L_0, L_1})$: suponha que a curva ℓ tem traço em $\mathcal{U}_{L_0, L_1}$ e seja $\beta(t) = \phi_{L_0, L_1}(\ell(t))$ a curva de formas bilineares simétricas em L_0 correspondente. Afirmamos que, para todo t

$$\ell(t) \cap L_0 = \text{Ker}(\beta(t)) \quad (2.12)$$

$$W(t) \mid_{\ell(t) \cap L_0} = \dot{\beta}(t) \mid_{Ker(\beta(t))} \quad (2.13)$$

e em consequência, um instante t é L_0 -focal se, e só se $\beta(t)$ é degenerada, e é não-degenerado se, e só se, $\dot{\beta} \mid_{Ker(\beta(t))}$ é não-degenerada. Para mostrarmos (2.12), escrevendo $\ell(t) = graf(T(t) : L_0 \rightarrow L_1)$, então $\beta(t) = \beta_{T(t)} = \omega(T(t)\cdot, \cdot)$. Daí, $Ker(\beta(t)) = Ker(T(t))$ e este último é $\ell(t) \cap L_0$.

Proposição 2.5. *Se t_0 é L_0 -focal não-degenerado então $\exists \varepsilon > 0$ tal que ℓ não possui outros instantes L_0 -focais em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Daí, em cada intervalo compacto $[a, b] \subset I$, teremos que ℓ terá uma quantidade finita de instantes L_0 -focais não-degenerados.*

Demonstração: Sera consequência do Lema 3.2 do próximo capítulo.

Segue desta proposição que, para curvas contendo apenas instantes L_0 -focais não-degenerados, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 2.9. Seja ℓ uma curva suave de $[a, b]$ para Λ cujos instantes L_0 -focais são todos não-degenerados. Definimos o seu índice focal por :

$$i_{focal}(\ell, L_0) := \sum_{t \in [a, b]} sgn(W(t) \mid_{\ell(t) \cap L_0}). \quad (2.14)$$

Aqui, estamos utilizando a seguinte notação: se β é uma forma bilinear simétrica num espaço vetorial de dimensão finita, $sgn(\beta)$ representa a sua assinatura, isto é, o coíndice de β menos o índice de β .

Este conceito será utilizado no próximo capítulo, o mesmo é de muita importância, pois é um invariante topológico por deformações contínuas, bem como o índice de Maslov que será posteriormente relacionado com ele.

Capítulo 3

O Índice de Maslov

Iniciamos este capítulo enunciando um importante Teorema sobre a existência do índice de Maslov. Mostraremos como as propriedades do índice de Maslov implicam numa relação deste com o índice focal definido na Definição 2.9.

Na segunda parte discorreremos sobre o grupo fundamental $\pi_1(\Lambda, L)$ da Grassmanniana Lagrangeana e logo em seguida mostraremos como usá-lo para fazer uma construção do índice de Maslov.

3.1 Propriedades do Índice de Maslov

O teorema abaixo caracteriza a função índice de Maslov. Não o demonstraremos aqui, mas o utilizamos para deduzir outras propriedades do índice de Maslov.

Teorema 3.1. *Para cada subespaço Lagrangeano $L_0 \subset \mathbb{V}$, existe uma única função*

$$\mu_{L_0} : \{\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda \mid a, b \in \mathbb{R}, \ell \text{ é contínua e } \ell(a), \ell(b) \in \Lambda_0(L_0)\} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

tal que

(I) *Se $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Lambda$ é uma homotopia entre $\ell_0(t) = H_0(t)$ e $\ell_1(t) = H_1(t)$ tal que $H_s(a), H_s(b) \in \Lambda_0(L_0) \forall s$, então $\mu_{L_0}(\ell_0) = \mu_{L_0}(\ell_1)$.*

(II) *Se $\ell \equiv \text{cte}$, então $\mu_{L_0}(\ell) = 0$.*

(III) Se a curva $\ell_1 * \ell_2$ estiver definida então $\mu_{L_0}(\ell_1 * \ell_2) = \mu_{L_0}(\ell_1) + \mu_{L_0}(\ell_2)$

(IV) Se $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ é C^1 e é tal que $\ell(t_0) \in \Lambda_1(L_0)$ e $W(t_0) |_{(\ell(t_0) \cap L_0)} > 0$ (positivo definida) e tivermos $\ell(t) \notin \Sigma(L_0)$ se $t \neq t_0$, então $\mu_{L_0}(\ell) = 1$

Na verdade, duas curvas que satisfazem as hipóteses (IV) do Teorema 3.1 são necessariamente homotópicas. Mais precisamente, provaremos no final desta seção que:

Proposição 3.2. Se $\ell_0, \ell_1 : [a, b] \rightarrow \Lambda$ satisfazem as hipóteses de (IV), então existe uma homotopia H_s entre ℓ_0 e ℓ_1 tal que $H_s(a), H_s(b) \in \Lambda_0(L_0) \forall s \in [0, 1]$

O objetivo desta seção é o de estabelecer a seguinte relação entre os índices de Maslov e o índice Focal:

Teorema 3.3. Se $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ é uma curva C^1 , cujos instantes L_0 -focais são todos não-degenerados e, além disso, os extremos $\ell(a)$ e $\ell(b)$ estão em $\Lambda_0(L_0)$, ou seja, fora do ciclo de Maslov, então :

$$\begin{aligned} \mu_{L_0}(\ell) &= i_{focal}(\ell, L_0) \\ &= \sum_{t \in (a, b)} \text{sgn}(W(t) |_{\ell(t) \cap L_0}) \end{aligned}$$

As demonstrações da Proposição 3.2 e do Teorema 3.1 serão consequência de uma série de resultados. Começamos estabelecendo algumas notações: se β é uma forma bilinear simétrica num espaço vetorial V , representaremos por $n_+(\beta)$ e $n_-(\beta)$ seus coíndice e índice, respectivamente :

$$\begin{aligned} n_+(\beta) &= \sup\{\dim W : W \subset V \text{ é subespaço e } \beta|_W > 0\} \\ n_-(\beta) &= \sup\{\dim W : W \subset V \text{ é subespaço e } \beta|_W < 0\} \end{aligned}$$

Lema 3.1. Sejam $\ell_1, \ell_2 : [a, b] \rightarrow \Lambda$ contínuas, com extremos em $\Lambda_0(L_0)$, e suponha que elas estão contidas em $\mathcal{U}_{L_0, L_1}$. Sejam $\beta_i(t) = \phi_{L_0, L_1}(\ell_i(t))$ para $i = 1, 2$.

Se $n_+(\beta_1(t)) = n_+(\beta_2(t))$ para $t = a$ e $t = b$, então ℓ_1 e ℓ_2 são homotópicas por uma homotopia tal que $H_s(a), H_s(b)^1 \in \Lambda_0(L_0)$ para todo $s \in [0, 1]$.

¹sempre que tivermos uma homotopia H , o índice s pertencerá ao intervalo fechado $[0, 1]$

Demonstração: Precisaremos da seguinte afirmação:

Afirmção 3.1. *Seja $Sym_{k,\ell}(\mathbb{R}^n) = \{B \in Sym(\mathbb{R}^n) : n_+(B) = k \text{ e } \dim Ker(B) = \ell\}$. Então $Sym_{k,\ell}(\mathbb{R}^n)$ é conexo por caminhos.*

Demonstração: Denote por $M_{k,\ell}$ a matriz

$$\begin{bmatrix} I_k & & \\ & O_\ell & \\ & & -I_{n-k-\ell} \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema da Inércia de Sylvester, a aplicação

$$\begin{aligned} Gl_+(n) &\longrightarrow Sym_{k,\ell}(\mathbb{R}^n) \\ Q &\longmapsto Q^T M_{k,\ell} Q, \end{aligned}$$

onde $Gl_+(n) = \{Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(Q) > 0\}$, é sobrejetiva. Como também é contínua e $Gl_+(n)$ é conexo por caminhos, segue o resultado. ■

Demonstração: (do Lema 3.1). Precisamos construir uma homotopia $H_s(t)$ entre β_1 e β_2 tal que para todo s :

$$H_s(a), H_s(b) \in \phi_{L_0, L_1}(\mathcal{U}_{L_0, L_1} \cap \Lambda_0(L_0)) = \{\beta \in Sym(L_0) : Ker \beta = \{0\}\},$$

e denotemos este último por $Sym_0(L_0)$. Observe que $\tilde{H}_s(t) := (1-s)\beta_1(t) + s\beta_2(t)$ é uma homotopia entre β_1 e β_2 mas pode acontecer de $\tilde{H}_s(a), \tilde{H}_s(b) \notin Sym_0(L_0)$. Para contornar isso, pela hipótese do Lema e pela Afirmção, podemos escolher caminhos contínuos $m_1, m_2 : [0, 1] \rightarrow Sym_0(L_0)$ tais que $m_1(0) = \beta_1(a)$, $m_1(1) = \beta_2(a)$, $m_2(0) = \beta_1(b)$, $m_2(1) = \beta_2(b)$.

Sejam $f(s) = -s(s-1)$, e $\eta_s : [a+f(s), b-f(s)] \rightarrow [a, b]$ a reparametrização linear tal que $\eta_s(a+f(s)) = a$ e $\eta_s(b-f(s)) = b$. A homotopia procurada será:

$$H_s(t) = \begin{cases} \frac{-t+a+f(s)}{f(s)}m_1(s) + \frac{t-a}{f(s)}[(1-s)\beta_1(a) + s\beta_2(a)], & \text{se } t \in [a, a+f(s)] \\ (1-s)\beta_1(\eta_s(t)) + s\beta_2(\eta_s(t)), & \text{se } t \in [a+f(s), b-f(s)] \\ \frac{-t+b}{f(s)}[(1-s)\beta_1(b) + s\beta_2(b)] + \frac{t-b+f(s)}{f(s)}m_2(s), & \text{se } t \in [b-f(s), b]. \end{cases}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} H_s(a) &= m_1(s) \in Sym_0(L_0) \\ H_s(b) &= m_2(s) \in Sym_0(L_0). \end{aligned}$$

■

O lema a seguir é o coração desta seção. Ele descreve como muda o coíndice de uma curva de formas bilineares simétricas ao passarmos por um instante de degenerescência.

Lema 3.2. *Seja $\beta : [t_0, t_1) \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ de classe C^1 tal que $\dot{\beta} \mid_{\text{Ker}(\beta(t_0))}$ é não-degenerada. Então existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\beta(t)$ é não-degenerada se*

$t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$ e vale que:

$$n_+(\beta(t)) = n_+(\beta(t_0)) + n_+(\dot{\beta}(t_0) \mid_{\text{Ker}(\beta(t_0))}).$$

Daí se β é C^1 numa vizinhança de t_0 , então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno vale:

$$n_+(\beta(t_0 + \varepsilon)) = n_+(\beta(t_0 - \varepsilon)) + \text{sgn}(\dot{\beta} \mid_{\text{Ker}(\beta(t_0))}).$$

Antes de demonstrarmos este lema, faremos alguns preliminares sobre formas bilineares. Lembremos da definição de $n_+(\beta)$ na página 31. Fixada uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ podemos definir a norma de $\beta \in \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$, como

$$\|\beta\| := \sup_{\|u\|=1, \|v\|=1} |\beta(u, v)| < \infty \quad (3.2)$$

Se para um intervalo I tivermos que $I \ni t \mapsto \beta(t)$ é uma curva contínua em $\text{Sym}(\mathbb{R}^n)$, então as funções $n_+(\beta(t))$ e $n_-(\beta(t))$ não decrescem numa vizinhança de cada t_0 : dado $t_0 \in I$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} n_+(\beta(t)) &\geq n_+(\beta(t_0)) \\ n_-(\beta(t)) &\geq n_-(\beta(t_0)). \end{aligned} \quad \text{se } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \quad (3.3)$$

Em particular, se $\beta(t)$ for não-degenerado para todo t , então $n_+(\beta(t))$ e $n_-(\beta(t))$ permanecem constantes.

Para mostrarmos (3.3), seja $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^n$ com subespaço com dimensão $n_+(\beta(t_0))$ tal que $\beta(t_0) \mid_{\mathbb{W}} > 0$. e $S(\mathbb{W})$ a esfera unitária de $\mathbb{W}$. Como a função $S(\mathbb{W}) \ni v \mapsto \beta(t_0)(v, v)$ é contínua e positiva, e $S(\mathbb{W})$ é compacto, existe $c > 0$ tal que

$$\beta(t_0)(v, v) \geq c \quad \text{para todo } v \in S(\mathbb{W}). \quad (3.4)$$

Da continuidade de $t \mapsto \beta(t)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\beta(t) - \beta(t_0)\| < \frac{c}{2}$, se $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Lembrando de (3.2) e (3.4), obtemos que

$$\beta(t)(v, v) \geq \frac{c}{2} > 0 \quad \text{para todo } v \in S(\mathbb{W}), \quad (3.5)$$

daí $\beta(t) \mid_{\mathbb{W}} > 0$ e portanto $n_+(\beta(t)) \geq n_+(\beta(t_0))$. A desigualdade $n_-(\beta(t)) \geq n_+(\beta(t_0))$ é análoga.

O Lema 3.2 será consequência do seguinte caso particular:

Lema 3.3. *Se $\beta : [t_0, t_1) \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$ é C^1 e $\beta(t) \geq 0$ e $\dot{\beta} \mid_{\text{Ker}(\beta(t_0))} > 0$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta(t) > 0$ se $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$.*

Demonstração: Como antes, fixemos uma norma em $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathbb{W}$ um complemento para $\text{Ker}(\beta(t_0))$, e denotemos por $S(W)$ e $S(\text{Ker}(\beta(t_0)))$ as esferas unitária de $\mathbb{W}$ e de $\text{Ker}(\beta(t_0))$. De $\beta(t_0) \geq 0$ e $\mathbb{W} \cap \text{Ker}(\beta(t_0)) = \{0\}$, segue que $\beta(t_0) \mid_{\mathbb{W}} > 0$. Como em (3.4), existem $c_0 > 0$ e $c_1 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \beta(t_0)(w, w) &\geq c_0 && \text{para todo } w \in S(\mathbb{W}) \\ \dot{\beta}(t_0)(u, u) &\geq c_1 && \text{para todo } u \in S(\text{Ker}(\beta(t_0))). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da mesma forma que (3.5), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\beta(t)(w, w) \geq \frac{c_0}{2} \quad \text{para todo } w \in S(\mathbb{W}) \text{ se } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon). \quad (3.7)$$

Escrevamos

$$\beta(t) = \beta(t_0) + (t - t_0)\dot{\beta}(t_0) + r(t), \quad (3.8)$$

com $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t)}{t - t_0} = 0$. Diminuindo ε , se necessário, podemos supor que

$$\|r(t)\| \leq \frac{c_1}{2}(t - t_0), \text{ se } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon). \quad (3.9)$$

Até o final da demonstração, suporemos $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$.

De (3.9) segue que $r(t)(u, u) \geq -\frac{c_1}{2}(t - t_0)$ para todo $u \in S(\text{Ker}(\beta(t_0)))$. Voltando para (3.8) e usando (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} \beta(t)(u, u) &\geq (t - t_0)c_1 - \frac{c_1}{2}(t - t_0) \\ &= \frac{c_1}{2}(t - t_0), \text{ para todou } u \in S(\text{Ker}\beta(t_0)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dados $u \in \text{Ker}(\beta(t_0))$ e $w \in \mathbb{W}$, de (3.8) e (3.9) temos:

$$\begin{aligned} |\beta(t)(u, w)| &= |(t - t_0)\dot{\beta}(t_0)(u, w) + r(t)(u, w)| \\ &\leq (t - t_0) \|\dot{\beta}(t_0)\| + \frac{c_1}{2}(t - t_0) = (t - t_0)c_2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $c_2 := \|\dot{\beta}(t_0)\| + \frac{c_1}{2}$. Diminuindo $\varepsilon > 0$, podemos garantir que

$$(t - t_0)c_2 < \sqrt{\frac{c_0c_1}{4}}(t - t_0)$$

se $t \neq t_0$, pois segue da garantia de existência de algum $\varepsilon > 0$ tal que $(t - t_0)^2 c_2^2 < \frac{c_0c_1}{4}(t - t_0)$ se $t \neq t_0$. Donde, $|\beta(t)(u, w)| < \sqrt{\frac{c_0c_1}{4}}(t - t_0)$, logo

$$|\beta(t)(u, w)| < \sqrt{|\beta(t)(u, u)|} \sqrt{|\beta(t)(w, w)|} \quad (3.12)$$

se $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$. Portanto

$$\begin{aligned} \beta(t)(u + w, u + w) &= \beta(t)(u, u) + \beta(t)(w, w) + 2\beta(t)(u, w) \\ &> \beta(t)(u, u) + \beta(t)(w, w) - 2\sqrt{\beta(t)(u, u)}\sqrt{\beta(t)(w, w)} \quad (3.13) \\ &= (\sqrt{\beta(t)(u, u)} - \sqrt{\beta(t)(w, w)})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\beta > 0$ se $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ ■

A seguinte proposição mostra como calcular explicitamente o índice de Maslov μ_{L_0} de curvas contidas num domínio $\mathcal{U}_{L_0, L_1}$. Em particular, segue dela a unicidade mencionada no Teorema 3.1 (para o caso geral de uma curva não contida num domínio de uma carta podemos particioná-la em pedaços contidos em domínios de cartas e usamos a aditividade do índice de Maslov.)

Proposição 3.4. *Se uma curva contínua $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ é tal que $\ell([a, b]) \subset \mathcal{U}_{L_0, L_1}$ (para algum L_1) e $\ell(a), \ell(b) \in \Lambda_0(L_0)$, então*

$$\mu_{L_0}(\ell) = n_+(\beta(b)) - n_+(\beta(a)),$$

onde $\beta(t) = \phi_{L_0, L_1}(\ell(t))$.

Demonstração: Segue do Lema 3.1 e de (I) do Teorema 3.1 que basta encontrarmos, para cada $i, j = 0, 1, \dots, n$, uma curva $\ell_{i,j} : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}_{L_0, L_1}$ tal que:

$$\begin{aligned} \ell_{i,j}(a), \ell_{i,j}(b) &\in \Lambda_0(L_0). \\ n_+(\beta_{i,j}(a)) &= i, \quad n_+(\beta_{i,j}(b)) = j \\ \mu_{L_0}(\ell_{i,j}) &= j - i. \end{aligned}$$

onde $\beta_{i,j}(t) = \phi_{L_0, L_1}(\ell_{i,j}(t))$. Vamos dividir em quatro partes a demonstração, segundo a variação de i e j ;

- (1) $j = i$. Tomamos $\beta_{i,i}(t) \equiv B$, onde $n_+(B) = i$ e $Ker(B) = \{0\}$. De *II* do Teorema 3.1,

$$\mu_{L_0}(\ell_{i,i}) = 0 = i - i.$$

- (2) $j = i + 1$. Fixe uma base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de L_0 . Com respeito às coordenadas induzidas por essa base, defina

$$\beta_{i,i+1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & t - \frac{a+b}{2} & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Então, $n_+(\beta_{i,i+1}(b)) = i + 1$, $Ker(\beta_{i,i+1}(a)) = \{0\} = Ker(\beta_{i,i+1}(b))$. Mostremos que $\ell_{i,i+1}$ satisfaz (IV) do Teorema 3.1 e, portanto, que $\mu_{L_0}(\ell_{i,i+1}) = 1 = (i + 1) - i$:

$$\ell_{i,i+1}(t) \cap L_0 = Ker(\beta_{i,i+1}(t)) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } t \neq \frac{a+b}{2} \\ Span[f_{i+1}], & \text{se } t = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Também, denotando por $t_0 = \frac{a+b}{2}$, e por $W_{i,i+1}(t)$ o Wronskiano de $\ell_{i,i+1}(t)$, de (2.13) temos:

$$W_{i,i+1}(t_0) \mid_{\ell_{i,i+1}(t_0) \cap L_0} = \dot{\beta}_{i,i+1} \mid_{Ker(\beta_{i,i+1}(t_0))} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \mid_{Span[f_{i+1}]} > 0.$$

- (3) $j > i + 1$. Para cada $i = 0, \dots, n$, fixe $B_i \in Sym(L_0)$ tal que $n_+(B_i)$ e $Ker(B_i) = \{0\}$, e escolha curvas contínuas $\tilde{\beta}_{i,i+1} : [a, b] \rightarrow Sym(L_0)$ tais que $\tilde{\beta}_{i,i+1}(a) = B_i$ e

$\tilde{\beta}_{i,i+1}(b) = B_{i+1}$. Sendo $\tilde{\ell}_{i,i+1}(t) = (\phi_{L_0, L_1})^{-1}(\tilde{\beta}_{i,i+1}(t))$, então, pelo item anterior a este, $\mu_{L_0}(\ell_{i,i+1}) = 1$. Defina então $\ell_{i,j}$ pela **concatenação**

$$\ell_{i,j} = \tilde{\ell}_{i,i+1} * \tilde{\ell}_{i+1,i+2} * \dots * \tilde{\ell}_{j-1,j}.$$

Segue que $n_+(\phi_{L_0, L_1}(\ell_{i,j}(b))) = n_+(B_j) = j$, $n_+(\phi_{L_0, L_1}(\ell_{i,j}(b))) = n_+(B_j) = j$,

$$\mu_{L_0}(\ell_{i,j}) = \mu_{L_0}(\tilde{\ell}_{i,i+1}) + \dots + \mu_{L_0}(\tilde{\ell}_{j-1,j}) = j - i. \quad (3.15)$$

- (4) $j < i$. Segue dos casos anteriores, usando que o índice de Maslov muda de sinal quando tomamos a parametrização reversa de ℓ . (Para tal basta lembrar o item (III) do Teorema 3.1).

■

Podemos agora demonstrar o Teorema 3.3. Para tal, consideremos uma partição $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1} = b$ de $[a, b]$ tal que cada $\ell_i = \ell|_{[t_i, t_{i+1}]}$ satisfaz:

- (I) $\ell_i([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}_{L_0, L_i}$, para algum L_i
- (II) Para cada i , ou ℓ_i está contida em $\Lambda_0(L_0)$ ou existe um único $t_i^* \in (t_i, t_{i+1})$ tal que $\ell(t_i^*) \in \Sigma(L_0)$.

Como existe a concatenação $\ell = \ell_1 * \ell_2 * \dots * \ell_k$, então

$$\mu_{L_0}(\ell) = \mu_{L_0}(\ell_1) + \dots + \mu_{L_0}(\ell_k) \quad (3.16)$$

Seja, para cada i , $\beta_i(t) = \phi_{L_0, L_1}(\ell_i(t))$. Pela Proposição 3.4,

$$\mu_{L_0}(\ell_i) = n_+(\beta_i(t_{i+1})) - n_+(\beta_i(t_i)) \quad (3.17)$$

Para cada i tal que exista t_i^* , como temos que $\dot{\beta}_i(t_i^*)|_{\text{Ker}(\beta_i(t_i^*))}$ é não-degenerada (pois esta é igual a $W_i(t_i^*)|_{\ell_i(t_i^*) \cap L_0}$ que, por hipótese, é não-degenerada), segue do Lema (3.2) que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$n_+(\beta_i(t_i^* + \varepsilon)) - n_+(\beta_i(t_i^* - \varepsilon)) = \text{sgn}(\dot{\beta}_i(t_i^*)|_{\text{Ker}(\beta_i(t_i^*))}) = \text{sgn}(W(t_i^*)|_{\ell(t_i^*) \cap L_0}).$$

De (3.3) e do fato de que ℓ_i não tem instantes L_0 -focais em $[t_i, t_i^* - \varepsilon]$ e em $[t_i^* + \varepsilon, t_{i+1}]$, segue $n_+(\beta_i(t_i^* + \varepsilon)) = n_+(\beta_i(t_{i+1}))$ e $n_+(\beta_i(t_i^* - \varepsilon)) = n_+(\beta_i(t_i))$ e, portanto,

$$\mu_{L_0}(\ell) = \text{sgn}(W(t_i^*)|_{\ell(t_i^*) \cap L_0}). \quad (3.18)$$

Para cada i tal que $\ell_i([t_i, t_{i+1}) \subset \Lambda_0(L_0)$, sabe-se que $n_+(\beta_i(t))$ fica constante, e portanto, de (3.17), $\mu_{L_0}(\ell_i) = 0$. O resultado segue agora de (3.16) $\blacksquare$

Nosso próximo objetivo será a demonstração da Proposição (3.2). Começamos introduzindo, para cada $L_0 \in \Lambda$, o seguinte subgrupo de $Sp(\mathbb{V}, \omega)$:

$$Sp^+(\mathbb{V}, \omega, L_0) := \{T \in Sp(\mathbb{V}, \omega) : T(L_0) = L_0 \text{ e } \det(T|_{L_0}) > 0\}. \quad (3.19)$$

Lema 3.4. *O grupo $Sp^+(\mathbb{V}, \omega, L_0)$ é conexo por caminhos.*

Demonstração: Podemos supor que $(\mathbb{V}, \omega, L_0) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, \mathbb{R}^n \times \{0\})$. Dada

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

segue de (1.6) que $T \in Sp^+(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, \mathbb{R}^n \times \{0\})$, se, e somente se $C = 0$, $\det(A) > 0$, $D = A^{-T}$ e $B^T D$ é simétrica. Como $Gl_+(n)$ é conexo por caminhos, existe caminho $t \mapsto A_t \in Gl_+(n)$, com $A_0 = I_n$ e $A_1 = A$. Defina $D_t := (A_t)^{-T}$ e $B_t := [t \cdot B^T D (D_t)^{-1}]^T$. Então,

$$t \mapsto \begin{bmatrix} A_t & B_t \\ 0 & D_t \end{bmatrix}$$

é uma curva em $Sp^+(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, \mathbb{R}^n \times \{0\})$ começando em I_{2n} e terminando em T . $\blacksquare$

Lema 3.5. *Se a curva $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ satisfaz as hipóteses de (IV) do Teorema 3.1, e se $T \in Sp^+(\mathbb{V}, \omega, L_0)$, então existe homotopia $H_s(t)$ entre $\ell(t)$ e $\tilde{\ell}(t) := T(\ell(t))$ tal que, para todo s , a curva $t \mapsto H_s(t)$ satisfaz as hipóteses de (IV).*

Demonstração: Pelo Lema anterior, existe caminho $s \mapsto T_s \in Sp^+(\mathbb{V}, \omega, L_0)$ com $T_0 = I_{\mathbb{V}}$ e $T_1 = T$. Defina então $H_s(t) := T_s(\ell(t))$. Resta mostrar que cada curva $\ell_s(t) := H_s(t)$ satisfaz as hipóteses de (IV) : De $T_s(L_0) = L_0$, temos que

$$\ell_s(t) \cap L_0 = T_s(\ell(t)) \cap T_s(L_0) = T_s(\ell(t) \cap L_0), \quad (3.20)$$

daí cada $\ell_s(t)$ intersecta $\Sigma(L_0)$ num único instante t_0 e $\dim(\ell_s(t_0) \cap L_0) = 1$. Falta mostrarmos que se $0 \neq \tilde{v}_0 \in \ell_s(t_0) \cap L_0$ então $W_s(t_0)(\tilde{v}_0, \tilde{v}_0) > 0$, onde $W_s(t)$ é o Wronskiano de $\ell_s(t)$. Com efeito, por (3.20) temos $\tilde{v}_0 = T_s(v_0)$ para algum $v_0 \in \ell(t_0) \cap L_0$. Aplicando o Lema (2.8), obtemos $\widetilde{W}_s(t_0)(\tilde{v}_0, \tilde{v}_0) = W(t_0)(v_0, v_0)$ e este último é positivo pois $\ell(t)$ satisfaz as hipóteses de (IV) ■

Demonstração: (da Proposição 3.2);

Sejam $t_0, t_1 \in (a, b)$ os instantes tais que $\ell_0(t_0) \cap L_1 \neq \{0\}$ e $\ell_1(t_1) \cap L_1 \neq \{0\}$. Reparametrizando ℓ_1 , podemos supor que $t_0 = t_1 = t^*$. Também, como $\dim(\ell_0(t^*) \cap L_0) = 1 = \dim(\ell_1(t^*) \cap L_0)$, pelo Teorema 1.10 existe $T \in Sp^+(\mathbb{V}, \omega, L_0)$ tal que $T(\ell_0(t^*)) = \ell_1(t^*)$. Pelo Lema 3.5, a curva $\tilde{\ell}_0 := T(\ell_0(t))$ é homotópica a $\ell_0(t)$ por curvas que satisfazem as hipóteses de (IV) do Teorema 3.1. Daí, podemos supor que $\ell_0(t^*) = \ell_1(t^*)$. Sejam L_1 subespaço Lagrangeano complementar a L_0 e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\ell_0([t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]) \subset \mathcal{U}_{L_0, L_1} \text{ e} \quad (3.21)$$

$$\ell_1([t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]) \subset \mathcal{U}_{L_0, L_1} \quad (3.22)$$

e denotemos por $\beta_i(t) = \phi_{L_0, L_1}(\ell_i(t))$ quando $i = 0, 1$. Para prosseguir precisamos da seguinte afirmação;

Afirmação 3.2. *Temos que*

$$n_+(\beta_0(t^* - \varepsilon)) = n_+(\beta_1(t^* - \varepsilon)) \quad (3.23)$$

$$n_+(\beta_0(t^* + \varepsilon)) = n_+(\beta_1(t^* + \varepsilon)) \quad (3.24)$$

Demonstração: Por hipótese, $\text{Ker}(W_i(t^*)|_{\ell_i(t^*) \cap L_0}) = \{0\}$, $n_+(W_i(t^*)|_{\ell_i(t^*) \cap L_0}) = 1$ e $n_-(W_i(t^*)|_{\ell_i(t^*) \cap L_0}) = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\dot{\beta}_i(t_i^*)|_{\text{Ker}(\beta_i(t_i^*))}) &= \{0\}, \quad n_+(\dot{\beta}_i(t_i^*)|_{\text{Ker}(\beta_i(t_i^*))}) = 1 \\ n_-(\dot{\beta}_i(t_i^*)|_{\text{Ker}(\beta_i(t_i^*))}) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.2;

$$\begin{aligned} n_+(\beta_i(t^* + \varepsilon)) &= n_+(\beta_i)(t^*) + 1 \\ n_+(\beta_i(t^* - \varepsilon)) &= n_+(\beta_i)(t^*) + n_-(\dot{\beta}_i(t^*)|_{\text{Ker}\beta_i(t^*)}) \\ &= n_+(\beta_i(t^*)) \end{aligned}$$

O resultado segue agora de $\beta_0(t^*) = \beta_1(t^*)$ (pois $\ell_0(t^*) = \ell_1(t^*)$). ■

Segue desta afirmação que podemos aplicar o Lema 3.1 para concluir que as curvas $\ell_0|_{[t^*-\varepsilon, t^*+\varepsilon]}$ e $\ell_1|_{[t^*-\varepsilon, t^*+\varepsilon]}$ são homotópicas através de curvas com extremos em $\Lambda_0(L_0)$.

Como $\Lambda \setminus \Sigma(L_0)$ é contrátil, esta homotopia pode ser estendida a uma entre ℓ_0 e ℓ_1 . ■

3.2 Construção do Índice de Maslov

Começaremos esta seção descrevendo um gerador para o grupo fundamental de Λ partindo da identificação $U(n)/O(n) \longrightarrow \Lambda_{2n}$ construída no Capítulo 1 e de um resultado sobre o grupo fundamental de $U(n)/O(n)$. Em seguida, usaremos estes resultados para dar uma construção das funções μ_{L_0} .

3.2.1 O Grupo Fundamental de $U(n)/O(n)$.

A função determinante ao quadrado $det^2 : U(n) \rightarrow S^1$ é constante e igual a 1 em $O(n)$, daí ela induz uma função contínua

$$\begin{aligned} \overline{det^2} : U(n)/O(n) &\longrightarrow S^1 \\ \overline{A} &\longmapsto det^2(A). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Precisaremos do seguinte resultado, cuja demonstração será omitida (veja, por exemplo, [Piccione-Tausk])

Teorema 3.5. *O homomorfismo induzido*

$$\begin{aligned} (\overline{det^2})_* : \pi_1(U(n)/O(n), \overline{I_n}) &\longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \\ \overline{A} &\longmapsto det^2(A) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Lembremos que $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$, e que um gerador para este grupo é a classe de

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{-2\pi ti}. \end{aligned}$$

Daí, o Teorema acima implica que $\pi_1(U(n)/O(n), \overline{I_n}) \simeq \mathbb{Z}$ e que um gerador para este grupo é a classe de

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow U(n)/O(n) \\ \gamma(t) &= \overline{A(t)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde

$$A(t) = \begin{bmatrix} e^{-\pi it} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2.2 O Grupo Fundamental de Λ

Começamos lembrando a identificação entre Λ e $U(n)/O(n)$ estabelecida no Capítulo 1.

Dados $L \in \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$ e uma base simplética $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de $\mathbb{V}$ tal que $L = \text{Span}[e_1, \dots, e_n]$, obtemos um homeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{B}} : U(n)/O(n) &\longrightarrow \Lambda \\ \overline{X + iY} &\longmapsto \text{Span}\left[\sum_{k=1}^n (x_{k1}e_k + y_{k1}f_k), \dots, \sum_{k=1}^n (x_{kn}e_k + y_{kn}f_k)\right] \end{aligned}$$

tal que $\psi_{\mathcal{B}}(\overline{I_n}) = L$, onde $X = [x_{ij}]$ e $Y = [y_{ij}]$. Daí, o homomorfismo induzido $(\psi_{\mathcal{B}})_* : \pi_1(U(n)/O(n), \overline{I_n}) \rightarrow \pi_1(\Lambda, L)$ é um isomorfismo. Portanto, os grupos abaixo são isomorfos

$$\pi_1(\Lambda, L) \approx \mathbb{Z},$$

e compondo $\psi_{\mathcal{B}}$ com o mapa γ descrito em 3.26 obtemos que um gerador deste grupo é dado pela classe de

$$\ell_{\mathcal{B}} : [0, 1] \longrightarrow \Lambda \tag{3.27}$$

$$\ell_{\mathcal{B}}(t) := \psi_{\mathcal{B}}(\overline{A(t)}) \tag{3.28}$$

$$= \text{span}[\cos(\pi t)e_1 - \sin(\pi t)f_1, e_2, \dots, e_n]. \tag{3.29}$$

Para referência futura, representemos por

$$i_{\mathcal{B}} : \pi(\Lambda, L) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

o isomorfismo que envia tal gerador em 1.

3.2.3 Construção do Índice de Maslov

Será conveniente introduzirmos a seguinte construção associada a um espaço topológico X : no conjunto formado por todas funções contínuas $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$ com $\gamma(0) = \gamma(1)$, consideramos a relação de equivalência que diz que $\gamma \sim \gamma'$ se, e somente se, existe homotopia $H_s(t)$ entre γ e γ' tal que $H_s(0) = H_s(1)$ para todo s . Denotaremos por $[[\gamma]]$ a classe de equivalência de γ e por $\Omega^1(x) = \{[[\gamma]] : \gamma : I \rightarrow X \text{ é contínua e } \gamma(0) = \gamma(1) = x\}$. Fixando um ponto base $x_0 \in X$ e denotando por $[\gamma]_{x_0}$ a classe em $\pi_1(X, x_0)$ de $\gamma : I \rightarrow X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, temos uma aplicação canônica

$$\begin{aligned} \eta_{x_0} : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \Omega^1(X) \\ [\gamma]_{x_0} &\longmapsto [[\gamma]] \end{aligned}$$

Proposição 3.6. *Se $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, então η_{x_0} é uma bijeção.*

Demonstração: Veja, por exemplo [Hatcher]. ■

Voltando ao caso $X = \Lambda(\mathbb{V}, \omega)$, vimos em subseção anterior que, fixando uma base simplética $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de $\mathbb{V}$, obtemos um isomorfismo

$$i_{\mathcal{B}} : \pi_1(\Lambda, L) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (3.30)$$

onde $L = \text{Span}[e_1, \dots, e_n]$. Composto este isomorfismo com a inversa da bijeção

$$\eta_L : \pi_1(\Lambda, L) \longrightarrow \Omega^1(\Lambda),$$

obtemos uma bijeção

$$\mu := i_{\mathcal{B}} \circ (\eta_L)^{-1} : \Omega^1(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Lema 3.6. *O mapa μ não depende da escolha de $\mathcal{B}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n, f'_1, \dots, f'_n\}$ outra base simplética. Nossa tese equivale a provar que $[[\ell_{\mathcal{B}}]] = [[\ell_{\mathcal{B}'}]]$. Para tal, seja $T \in Sp(\mathbb{V}, \omega)$ a única transformação tal que $T(e_1) = e'_1, \dots, T(e_n) = e'_n, T(f_1) = f'_1, \dots, T(f_n) = f'_n$. da definição de $\ell_{\mathcal{B}}$ e $\ell_{\mathcal{B}'}$ segue direto que

$$T(\ell_{\mathcal{B}}(t)) = \ell_{\mathcal{B}'}(t).$$

Como $Sp(\mathbb{V}, \omega)$ é conexo por caminhos (veja, por exemplo a Proposição 4.4.4 do [Meyer2009]), existe caminho $s \mapsto T_s \in Sp(\mathbb{V}, \omega)$ com $T_0 = I_{\mathbb{V}}$ e $T_1 = T$. Portanto,

$$H_s(t) := T_s(\ell_{\mathcal{B}}(t))$$

é uma homotopia entre $\ell_{\mathcal{B}}$ e $\ell_{\mathcal{B}'}$, através de laços, donde $[[\ell_{\mathcal{B}}]] = [[\ell_{\mathcal{B}'}]]$ ■

Fixado $L_0 \in \Lambda$ procederemos agora à construção do índice de Maslov, com respeito a L_0 ,

$$\mu_{L_0} : \{ \ell : [a, b] \rightarrow \Lambda \mid a, b \in \mathbb{R}, \ell \text{ é contínua}, \ell(a), \ell(b) \in \Lambda_0(L_0) \} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Dada $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ com $\ell(a), \ell(b) \in \Lambda_0(L_0)$, escolha um caminho $\alpha : [a, b] \rightarrow \Lambda_0(L_0)$ com $\alpha(a) = \ell(a)$ e $\alpha(b) = \ell(b)$ e um homeomorfismo $r : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ com $r(0) = a$, $r(1) = b$. Defina

$$\mu_{L_0}(\ell) := \mu([\ell * \bar{\alpha} \circ r]), \quad (3.31)$$

onde $\bar{\alpha}$ é o caminho inverso de α , isto é $\bar{\alpha}(t) = \alpha(a + b - t)$

Lema 3.7. *O inteiro $\mu_{L_0}(\ell)$ não depende das escolhas de α e r .*

Demonstração:

- (1) Independe de r : Seja $r' : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ outro tal homeomorfismo. Como $(\ell * \bar{\alpha}) \circ r = ((\ell * \bar{\alpha}) \circ r') \circ ((r')^{-1} \circ r)$, e esta última é homotópica a $(\ell * \bar{\alpha}) \circ r'$ através da homotopia

$$H_s(t) = ((\ell * \bar{\alpha}) \circ r') \circ (s(r')^{-1}(r(t)) + (1 - s)t) \quad (3.32)$$

que fixa extremos, obtemos que

$$[[\ell * \bar{\alpha} \circ r]] = [[\ell * \bar{\alpha} \circ r']], \quad (3.33)$$

e portanto μ_{L_0} independe de r .

- (2) Independe de α . Se $\alpha' : [a, b] \rightarrow \Lambda_0(L_0)$ é outro tal caminho, como $\Lambda_0(L_0)$ é contrátil existe uma homotopia $H_s(t)$ com $H_0(t) = \alpha(t)$, $H_1(t) = \alpha'(t)$, $H_s(a) = \ell(a)$, $H_s(b) = \ell(b)$, $\forall s$. Definindo $\tilde{H}_s(t)$ por $\tilde{H}_s(t) = (\ell * \overline{H_s(\cdot)})(t)$, $H_s(\cdot)$ fixa

extremos. Temos que $\tilde{H}_s(t)$ é uma homotopia entre $\ell * \bar{\alpha}$ e $\ell * \bar{\alpha}'$ através de laços. Segue disto e de (3.33) que

$$[[(\ell * \bar{\alpha}) \circ r]] = [[(\ell * \bar{\alpha}') \circ r']]$$

■

Procederemos agora à verificação de que μ_{L_0} satisfaz as propriedades de (I) a (IV) do Teorema 3.1

(I) Seja $H_s(t)$ uma homotopia entre $\ell_0(t)$ e $\ell_1(t)$, com $H_s(a), H_s(b) \in \Lambda_0(L_0)$ para todo s . Como $\Lambda_0(L_0)$ é contrátil, existe uma homotopia $G_t(s)$ entre as curvas $s \mapsto H_s(a)$ e $s \mapsto H_s(b)$ com $G_t(s) \in \Lambda_0(L_0) \forall t, s$. Sendo $r : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo com $r(0) = a, r(1) = b$, temos que

$$\begin{aligned}\mu_{L_0}(\ell_0) &= \mu([[\ell_0 * \overline{G_{(\cdot)}(0)}] \circ r]) \\ \mu_{L_0}(\ell_1) &= \mu([[\ell_1 * \overline{G_{(\cdot)}(1)}] \circ r])\end{aligned}$$

Note que $\Gamma_s(t) := (H_s(\cdot) * \overline{G_{(\cdot)}(s)}) \circ r$ é uma homotopia, através de laços, entre $(\ell_0 * \overline{G_{(\cdot)}(0)}) \circ r$ e $(\ell_1 * \overline{G_{(\cdot)}(1)}) \circ r$, portanto $[[\ell_0 * \overline{G_{(\cdot)}(0)}] \circ r] = [[\ell_1 * \overline{G_{(\cdot)}(1)}] \circ r]$. Isto mostra que

$$\mu_{L_0}(\ell_0) = \mu_{L_0}(\ell_1)$$

(II) Se $\ell(t) = L, \forall t$ podemos tomar $\alpha(t) = L, \forall t$, daí $((\ell * \bar{\alpha}) \circ r)(t) = L, \forall t$, logo

$$(\eta_L)^{-1}([[(\ell * \bar{\alpha}) \circ r]]) = e,$$

onde e é o elemento neutro de $\pi_1(\Lambda, L)$, e portanto

$$\mu_{L_0}(\ell) = i_{\mathcal{B}}(e) = 0, \tag{3.34}$$

pois $i_{\mathcal{B}}$ é um homomorfismo de grupos. ■

(III) Para provar (III), será necessário fazermos a seguinte observação: Se $\gamma : I \rightarrow X$ é um laço num espaço topológico X , isto é γ é contínua e $\gamma(0) = \gamma(1)$, e se $t_0 \in (0, 1)$, denotamos por $\gamma_{t_0} : I \rightarrow X$ o laço que começa em $\gamma(t_0)$, isto é,

$$\gamma_{t_0}(t) = \begin{cases} \gamma(2(1-t_0)t + t_0) & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t_0t - t_0) & , \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Afirmamos que

$$[[\gamma_{t_0}]] = [[\gamma]]. \quad (3.35)$$

De fato, é claro que $[[\gamma_{t_0=0}]] = [[\gamma]]$ é uma homotopia através de laços entre γ_{t_0} e $\gamma_{t_0=0}$ é obtida substituindo t_0 por $s.t_0$ no segundo membro de 3.2.3 Voltemos agora a demonstração de (III). Dadas $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \Lambda$ com $\gamma_1(0), \gamma_1(1), \gamma_2(0), \gamma_2(1) \in \Lambda_0(L_0)$, sejam $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \Lambda_0(L_0)$ com $\alpha_1(0) = \ell_1(1)$, $\alpha_1(1) = \ell_1(0)$, $\alpha_2(0) = \ell_2(1)$, $\alpha_2(1) = \ell_2(0)$. Para o cálculo de $\mu_{L_0}(\ell_1 * \ell_2)$ podemos utilizar $\alpha_2 * \alpha_1$, de modo que

$$\mu_{L_0}(\ell_1 * \ell_2) = \mu([[\ell_1 * \ell_2 * \alpha_2 * \alpha_1]]). \quad (3.36)$$

Afirmção 3.3. *Temos que*

$$[[\ell_1 * \ell_2 * \alpha_2 * \alpha_1]] = [[\ell_2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \ell_1]] \quad (3.37)$$

Demonstração: Seja $\gamma(t) := (\ell_1 * \ell_2 * \alpha_2 * \alpha_1)(t)$. Por definição,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \ell_1(4t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \ell_2(4t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \alpha_2(4t - 2), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \alpha_1(4t - 3), & \text{se } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Aplicando (3.35) ao laço γ e $t_0 = \frac{1}{4}$, obtemos que γ é homotópica, através de laços, ao laço:

$$\gamma_{\frac{1}{4}}(t) = \begin{cases} \ell_2(6t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{6}] \\ \alpha_2(6t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \\ \alpha_1(6t - 2), & \text{se } t \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \\ \ell_1(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Para concluir, uma homotopia, através de laços, entre $\gamma_{\frac{1}{4}}$ e o laço

$$(\ell_2 * \alpha_2 * \alpha_1 * \ell_1)(t) = \begin{cases} \ell_2(4t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \alpha_2(4t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \alpha_1(4t - 2), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \ell_1(4t - 3), & \text{se } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

é dada por

$$H_s(t) = \begin{cases} \ell_2((-2s+6)t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{(-2s+6)}] \\ \alpha_2((-2s+6)t-1), & \text{se } t \in [\frac{1}{(-2s+6)}, \frac{2}{(-2s+6)}] \\ \alpha_1((-2s+6)t-2), & \text{se } t \in [\frac{2}{(-2s+6)}, \frac{3}{(-2s+6)}] \\ \ell_1((2s+2)t-2s-1), & \text{se } t \in [\frac{s+2}{4}, 1] \end{cases}$$

■

Sejam $\gamma_1 := \alpha_1 * \ell_1$ e $\gamma_2 := \ell_2 * \alpha_2$. Da Afirmação, e de (3.37), segue que

$$\mu_{L_0}(\ell_1 * \ell_2) = \mu([\gamma_2 * \gamma_1]). \quad (3.38)$$

Como os laços γ_1 e γ_2 são baseados em $L := \ell_1(1)$, eles definem classes $[\gamma_1]_L, [\gamma_2]_L \in \pi(\Lambda, L)$ e temos $[\gamma_1 * \gamma_2]_L = [\gamma_1]_L \cdot [\gamma_2]_L$. Segue disto e de (3.38), que

$$\begin{aligned} \mu_{L_0}(\ell_1 * \ell_2) &= i_{\mathcal{B}}([\gamma_1]_L \cdot [\gamma_2]_L) \\ &= i_{\mathcal{B}}([\gamma_1]_L) + i_{\mathcal{B}}([\gamma_2]_L). \end{aligned}$$

Por um lado, é claro que $\mu_{L_0}(\ell_2) = i_{\mathcal{B}}([\gamma_2]_L)$. Por outro lado, analogamente à Afirmação, mostra-se que $[[\alpha_1 * \ell_1]] = [[\ell_1 * \alpha_1]]$, e portanto $i_{\mathcal{B}}([\gamma_1]_L) = \mu([\alpha_1 * \ell_1]) = \mu([\ell_1 * \alpha_1]) = \mu_{L_0}(\ell_1)$. Isto conclui a demonstração de (III). ■

(IV) De acordo com a Proposição 3.2 e devido à propriedade (I) do Teorema 3.1 já estabelecida, basta exibirmos uma curva particular que cumpra (IV). Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ uma base simplética tal que $L_0 = \text{Span}[f_1, \dots, f_n]$. Sendo $\ell_{\mathcal{B}}$ o laço em Λ definido em (3.27), temos $\ell_{\mathcal{B}}(0) = \ell_{\mathcal{B}}(1) = L := \text{Span}[e_1, \dots, e_n]$. Como $i_{\mathcal{B}}([\ell_{\mathcal{B}}]_L) = 1$, segue que

$$\mu_{L_0}(\ell_{\mathcal{B}}) = 1. \quad (3.39)$$

Da definição de $\ell_{\mathcal{B}}$,

$$\ell_{\mathcal{B}}(t) \cap L_0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } t \neq \frac{1}{2} \\ \text{Span}[f_1], & \text{se } t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e sendo $v(t) := -\cos(\pi t)e_1 + \sin(\pi t)f_1$, temos que $v(t) \in \ell_{\mathcal{B}}(t), \forall t$ e $\ell_{\mathcal{B}}(\frac{1}{2}) \cap L_0 = \text{Span}[v(\frac{1}{2})]$ e

$$W(\frac{1}{2})(v(\frac{1}{2}), v(\frac{1}{2})) = \omega(\dot{v}(\frac{1}{2}), v(\frac{1}{2})) \quad (3.40)$$

$$= \omega(\pi e_1, f_1) = \pi > 0 \quad (3.41)$$

isto conclui que $W(\frac{1}{2})|_{\ell_{\mathcal{B}}(1/2) \cap L_0} > 0$.

■

Referências Bibliográficas

- [Piccione-Tausk] P. Piccione, D. V. Tausk, A Student's Guide to Symplectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index, Publicações Matemáticas - IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2006.
- [McDuff-Salamon] D. McDuff and D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Clarendon Press. Oxford, 1998.
- [Álvarez-Durán] J. C. Álvarez Paiva, C. E. Durán, Geometric invariants of fanning curves, Adv. in Appl. Math. 42 (2009), no 3, 290-312.
- [Hatcher] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2001.
- [Meyer2009] K. Meyer, G. Hall, D. Offin, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, Second edition, Springer, 2009.
- [Valeriano2010] L. R. Valeriano, A GEOMETRIA DA GRASSMANNIANA LAGRANGEANA E O ÍNDICE DE MASLOV, Tese de Mestrado, Dmat, UFPE, Recife-PE, 2010.
- [Duistermaat] J.J. Duistermaat, On the Morse index in variational calculus, Advances in Mathematics 21 (1976), 173-195.
- [Arnold] V. I. Arnol'd, Characteristic Class Entering in Quantization Conditions, Funct. Anal. Appl. 1 (1967), 1-13.