Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

Equações Para as Leis de Conservação Parabólicas e Equações de Navier-Stokes: Análise do Decaimento de Soluções

Lorena Brizza Soares Freitas

Dissertação de Mestrado

Recife

Fevereiro de 2014

Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Lorena Brizza Soares Freitas

Equações Para as Leis de Conservação Parabólicas e Equações de Navier-Stokes: Análise do Decaimento de Soluções

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Pablo Braz e Silva*

Recife

Fevereiro de 2014

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Freitas, Lorena Brizza Soares
Equações para as leis de conservação parabólicas e equações de Navier-Stokes: análise do decaimento de soluções / Lorena Brizza Soares Freitas. - Recife: O Autor, 2014.
42 f.

Orientador: Pablo Braz e Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2014.

Inclui referências.

1. Análise (matemática). 2. Equações Diferenciais Parciais. I. Braz e Silva, Pablo (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) MEI2014 – 037

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ____

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, *UFPE*

Orientador

____

Miguel Fidencio Loayza Lozano, *UFPE*

____

Daniel Cordeiro de Morais Filho, UFCG

EQUAÇÕES PARA AS LEIS DE CONSERVAÇÃO PARABÓLICAS E EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES:
UMA ANÁLISE DO DECAIMENTO DE SOLUÇÕES

Por

Lorena Brizza Soares Freitas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL
14 de Fevereiro – 2014

À minha mãe Lourdes, minhas tias Solange e Edna e

minha irmã Larisse.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus.

À minha mãe Lourdes por ter aguentado essa distância, pelas ligações diárias que sempre nos manteve perto e por tudo que ela fez por mim e minha irmã.

À minha irmã Larisse, pelas visitas e pela alegria que ela sempre passa para mim.

Agradeço as minhas tias Solange e Edna, ao meu tio Hermógenes e meus primos Layo e Lavyk, pelo interesse na minha nova vida e por vibrarem com cada vitória minha.

Agradeço em especial aos meus avós José e Maria, a quem tenho muito amor e saudade, pelos dias sublimes que me concederam durante esses dois anos.

Através do nome do meu pai Francisco Sales, agradeço aos meus irmãos e avós paternos pela preocupação.

Agradeço a Ranielly, Brauna e Renata pelo amor e por mostrarem que amizades verdadeiras resistem a distância. Agradeço também a Melqui, Mike e Jéssica.

Através dos nomes de Juarez Brito, Marcella e Michel Barros agradeço a todos os meus amigos do PET-Matemática e da UFCG por terem acompanhado essa caminhada desde o início.

Aos irmãos e irmãs que encontrei aqui em Recife, Thiago Tanaka, Gilson Simões, Jaime, Cláudia Nunes, Eudes Mendes, Renato Teixeira, Laura Alves, José Alan, Kamilla, Kelly, Luciana Filgueira, Renata Barbosa, Shayane Moura e Crislene Paixão. Vocês fizeram os dias em Recife muito melhores e os fins de semana menos saudosos.

A Edgar Amorim, Nilza Maria e Gabriela Amorim por ter sido minha família aqui. Obrigada por cada dia, cada almoço, cada conversa, cada programa de tv assistido, enfim, agradeço por todo apoio e carinho dedicados a mim nesses anos.

Agradeço a todos os professores do DMAT-UFPE, em especial a Hamid, Antônio Souza e Miguel Loayza.

Ao professor Pablo Braz e Silva pela orientação, cuidado e atenção.

Agradeço ao meu orientador da graduação Daniel Cordeiro por ter aceitado o convite para minha defesa e também por todos os ensinamentos. Cada conselho seu me ajudou no mestrado.

Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço à Recife, às minhas escolhas e a todos que mesmo sem serem citados sabem que foram importantes durante esses dois anos.

E se eu fosse o primeiro a voltar

Pra mudar o que eu fiz

Quem então agora eu seria?

—LOS HERMANOS (O velho e o moço)

Resumo

Neste trabalho, analisaremos o decaimento das soluções u de dois problemas do Cauchy. O primeiro, para leis de conservação parabólicas e o segundo para equações de Navier-Stokes. Tal análise será feita para normas L^2 e L^∞ de u e de suas derivadas utilizando a Transformada de Fourier e a solução da equação do calor.

Palavras-chave: Decaimento. Leis de conservação parabólicas. Equações de Navier-Stokes.

Abstract

In this work, we analyze the decay of the solutions u of two Cauchy's problems. The first, to parabolic conservation laws and the second to Navier-Stokes equations. Such analysis will be done to the norms L^2 and L^∞ of u and its derivatives applying the Fourier Transform and the solution of the heat equation.

Keywords: Decay. Parabolic conservation laws. Navier-Stokes equations.

Sumário

Introdução

O estudo de equações para leis de conservação e equações de Navier-Stokes tem se tornado cada vez mais atraente, já que estas surgem naturalmente em diversas áreas da física, da química, da biologia, da engenharia, etc. Por exemplo, as equações de Navier-Stokes modelam diversos fênomenos envolvendo fluidos em movimento, tais como, circulação sanguínea, correntes de ar e marítimas, etc. Para compreender esses fênomenos é interessante fazer uma análise do comportamento das soluções das equações que os modelam. Por isso, neste trabalho, baseado em dois artigos de Maria Schonbek, vamos estabelecer o decaimento de soluções para o problema de Cauchy para leis de conservação parabólicas em espaços n dimensionais na forma

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f^j(u) = \varepsilon \Delta u \tag{0.1}$$

com $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $f^j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^\infty$, bem como o decaimento das soluções do problema de Cauchy para Equações de Navier-Stokes em espaços n dimensionais, com $n \geq 3$, dado por:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

com $f = (f^1, \ldots, f^n)$ decaindo quando $t \to \infty$. No capítulo 1, assumindo que o leitor possui conhecimento prévio de alguns conceitos de medida, faremos uma breve revisão sobre Espaços L^p, Espaços de Sobolev, Equação do Calor e Transformada de Fourier. No capítulo 2 iremos analisar a equação (0.1) e estabelecer razões para o decaimento da solução u e de suas derivadas em L^2. No capítulo 3 vamos obter o decaimento para solução de (0.1), desta vez em L^∞. Por fim, no capítulo 4, nos baseando nas demonstrações feitas nos capítulos 2 e 3 iremos analisar o decaimento das soluções das equações de Navier-Stokes.

CAPÍTULO 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados que serão utilizados ao longo desse trabalho. Assumiremos que o leitor possui conhecimento prévio sobre medida, conjuntos mensuráveis, funções integráveis, etc. Inicialmente, vamos definir espaços L^p e espaços de Sobolev, bem como, demonstrar algumas de suas propriedades. Depois, determinaremos as soluções da equação do Calor homogênea e não-homogênea e, por fim, vamos definir a Transformada de Fourier e demonstrar o teorema de Plancherel.

1.1 Espaços L^p

Ao longo deste capítulo consideraremos $u : U \to \mathbb{R}$ com U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Primeiramente vamos abordar o caso em que $1 \leq p < \infty$, depois o caso $p = \infty$.

Definição 1.1.1. Se u é uma função mensurável em U e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$L^p(U) = \{u : U \to \mathbb{R}; \text{u é mensurável e } \|u\|_p < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_p = \left[\int_U |u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Vejamos algumas propriedades da norma $\|u\|_p$.

1.1.1 Propriedades Básicas

Lema 1.1.1. Se $a, b \geq 0$ e $0 < \lambda < 1$, então

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Demonstração. Para $b = 0$ o resultado é óbvio. Suponha então que $b \neq 0$ daí, dividindo $[a^{\lambda}b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b]$ por b e considerando $t = a/b \geq 0$ obtemos,

$$t^{\lambda} \leq \lambda t + (1-\lambda).$$

Logo é suficiente mostrar a desigualdade acima. Para isto, defina a função f por $f(t) = t^{\lambda} - \lambda t$. Observe que,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lambda t^{\lambda-1} - \lambda \\ &= \lambda(t^{\lambda-1} - 1). \end{aligned}$$

Além disso, $f'(t) = 0$ se, e somente se $t = 1$ e, para $t = 1$

$$f''(1) = \lambda(\lambda - 1) < 0.$$

Consequentemente, $f(t) \leq f(1) = (1-\lambda)$. Portanto, para todo $t \geq 0$

$$t^{\lambda} - \lambda t \leq (1-\lambda)$$

isto é,

$$t^{\lambda} \leq \lambda t + (1-\lambda).$$

□

Teorema 1.1.1. (Desigualdade de Hölder) Sejam $1 < p < \infty$ e q definido por $q = p/(p-1)$. Se $u \in L^p(U)$ e $v \in L^q(U)$, então $uv \in L^1(U)$ e

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração. Se $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_q = 0$ o resultado é imediato, pois

$$\begin{aligned} \|u\|_p = 0 \quad \text{ou} \quad \|v\|_q = 0 \quad &\Rightarrow \quad u = 0 \quad \text{ou} \quad v = 0 \quad \text{quase sempre} \\ &\Rightarrow \quad uv = 0 \quad \text{quase sempre} \\ &\Rightarrow \quad \|uv\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Suponha então que $\|u\|_p \neq 0$ e $\|v\|_q \neq 0$. Sendo $a = |u|^p$, $b = |v|^q$ e $\lambda = 1/p$ segue do lema anterior que

$$|u||v| \leq \frac{1}{p}|u|^p + \frac{1}{q}|v|^q. \tag{1.1}$$

Integrando a desigualdade (1.1) sobre U, obtemos

$$\int_U |uv|dx \leq \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|v\|_q^q. \tag{1.2}$$

Considere agora, $\alpha = \|u\|_p^{-1}\|v\|_q^{q/p}$. Substituindo u por αu na desigualdade (1.2), temos

$$\begin{aligned}
\int_U |\alpha uv|dx &\leq \frac{1}{p}\|\alpha u\|_p^p + \frac{1}{q}\|v\|_q^q \Rightarrow \\
\alpha\int_U |uv|dx &\leq \frac{\alpha^p}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|u\|_q^q \Rightarrow \\
\int_U |uv|dx &\leq \frac{\alpha^{p-1}}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{\alpha q}\|u\|_q^q.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_U |uv|dx \leq \frac{1}{p}\|u\|_p\|v\|_q + \frac{1}{q}\|u\|_p\|v\|_q.$$

Portanto,

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p\|v\|_q.$$

□

Teorema 1.1.2. (Desigualdade de Minkowski) Se $1 \leq p < \infty$ e $u, v \in L^p$ então

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Demonstração. Para $p = 1$, pela desigualdade triangular temos

$$|u+v| \leq |u| + |v|.$$

Integrando sobre U,

$$\|u+v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Além disso, se $u+v = 0$ quase sempre, o resultado também é imediato. Pois

$$0 = \|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Observe agora que, se $1 < p < \infty$ e $u+v \neq 0$, então

$$|u+v|^p \leq (|u|+|v|)|u+v|^{p-1}.$$

Daí, usando a Desigualdade de Hölder e relembrando que $(p-1)q = p$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_U |u+v|^p dx &\leq \|u\|_p \left\| |u+v|^{p-1} \right\|_q + \|v\|_p \left\| |u+v|^{p-1} \right\|_q \\ &= (\|u\|_p + \|v\|_p) \left(\int_U |u+v|^p dx \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p .$$

□

Usando a Desigualdade de Minkowski é possível mostrar que o espaço L^p, $p \geq 1$, é um espaço normado, com norma $\|u\|_p$.

Podemos ainda definir o espaço L^p para $p = \infty$, da seguinte forma:

Definição 1.1.2. Definimos

$$\|u\|_\infty = ess\sup_{x\in U} |u(x)| = \inf\{M : |u(x)| < M, \quad \text{em quase todo ponto} \quad x \in U\}.$$

Assim,

$$L^\infty = L^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : \text{u é mensurável e } \|u\|_\infty < \infty\}.$$

Neste caso, vale também a desigualdade de Minkowski. A partir dos espaços L^p e de um novo conceito de derivada vamos definir na próxima seção novos espaços, conhecidos como espaços de Sobolev.

1.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção iremos definir os espaços $W^{m,p}(U)$, conhecidos com Espaços de Sobolev, onde $m \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. As propriedades destes espaços são muito utilizadas para aplicações na teoria de equações diferenciais parciais. Aqui, C_c^∞ denota o espaço das funções $\phi : U \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em U e infinitamente diferenciáveis.

1.2.1 Derivada Fraca

Seja $u \in C^1(U)$. Se $\phi \in C_c^\infty(U)$ podemos ver, através de integração por partes, que

$$\int_U u\phi_{x_j} dx = -\int_U u_{x_j}\phi dx. \tag{1.3}$$

com $j = 1, \ldots, n$. Os termos de fronteira são nulos na integração por partes pois se ϕ possui suporte compacto em U, então ϕ é zero em ∂U.

Diante desta motivação, temos

Definição 1.2.1. Sejam e α um multi-índice e $u, v \in L^1_{loc}(U)$ onde

$$L^1_{loc}(U) = \{u : U \to \mathbb{R}; u \in L^1(V) \quad \text{para todo} \quad V \subset U \quad \text{com} \quad \bar{V}. \quad \text{compacto}\}$$

Dizemos que v é a derivada parcial fraca de ordem α de u e denotamos por:

$$D^\alpha u = v,$$

onde

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}$$

se, para todo $\phi \in C_c^\infty$,vale

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx. \tag{1.4}$$

A partir do conceito de derivada fraca vamos, na próxima seção, definir os espaços de Sobolev. Tais espaços têm bastante aplicação na teoria de Equações Diferenciais Parciais.

1.2.2 Definição dos Espaços de Sobolev

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e m um inteiro não negativo.

Definição 1.2.2. O Espaço de Sobolev $W^{m,p}(U)$ consiste de todas as funções $u \in L^1_{loc}(U)$ com $u : U \to \mathbb{R}$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ existe no sentido de derivada fraca e pertence a $L^p(U)$. Se $u \in W^{m,p}(U)$, definimos a norma de u por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} & \text{para} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq m} ess \sup_U |D^\alpha u| & \text{para} \quad p = \infty. \end{cases}$$

É possível mostrar que o espaço de Sobolev $W^{m,p}(U)$ é um espaço de Banach. O caso $p = 2$, em particular, é bastante utilizado nas aplicações em equações diferenciais parciais. Neste caso o espaço de Sobolev $W^{m,p}(U)$ é representado por $H^m(U)$. O espaço $H^m(U)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido para $u,v \in H^m(U)$, por

$$\langle u,v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(U)}.$$

Na próxima seção determinaremos a solução da equação do calor.

1.3 A Equação do Calor

Na matemática, o estudo das soluções de equações na forma

$$u_t - \varepsilon\Delta u = 0$$

começou no início do século XIX e perdura até hoje. Tal equação, conhecida como equação do calor, está associada a processos de dissipação de calor.

Nesta seção faremos inicialmente um estudo sobre a equação do calor com $\varepsilon = 1$

$$u_t - \Delta u = 0. \tag{1.5}$$

Aqui consideraremos $t > 0$ e $x \in U$ com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Estudaremos também a equação do calor não homogênea, dada por

$$u_t - \Delta u = f \tag{1.6}$$

onde f é uma função conhecida que, na física, representa uma fonte de calor no sistema.

Nosso objetivo, então, é encontrar soluções para equação do calor. Para isto, vamos começar supondo que suas soluções possuem uma forma específica com o intuito de reduzir a equação (1.5) a uma equação diferencial ordinária separável. Primeiramente, observe que se u é solução de (1.5) então dado $\lambda \in \mathbb{R}$, para $u(\lambda x, \lambda^2 t)$, temos

$$\begin{aligned} \lambda^2 u_t(x,t) - \lambda^2 \Delta u(x,t) &= \lambda^2 (u_t(x,t) - \Delta u(x,t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução da equação (1.5). Isto indica que a razão r^2/t $(r = |x|)$ é importante para equação do calor e sugere que, para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x,t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right),$$

para alguma função v que será convenientemente determinada. Suponha que a solução $u(x,t)$ pode ser escrita na forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \tag{1.7}$$

onde α, β são constantes e a função $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para obter a identidade (1.7) basta observar que a equação (1.5) satisfaz para todo $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$ a seguinte igualdade:

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t).$$

Considerando $\lambda = t^{-1}$ e definindo $v(y) := u(y,1)$, temos

$$\begin{aligned} v(y) &= \lambda^\alpha u(\lambda^\beta y, \lambda) \\ &= \left(\frac{1}{t^\alpha}\right) u\left(\frac{y}{t^\beta}, \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Substituindo a expressão (1.7) na equação (1.5), obtemos

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + \beta t^{-(\alpha+1)} \frac{x}{t^\beta} \cdot Dv\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = 0. \tag{1.8}$$

Tome $\beta = 1/2$ na equação anterior. Daí

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0,$$

onde $y := t^{-\beta} x = t^{-1/2} x$. Agora, escreva v na forma $v(y) = w(|y|)$ para algum $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

com $r = |y|$ e onde $'$ denota $\frac{d}{dr}$. Sendo $\alpha = n/2$ segue

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' &= 0 \\ \frac{n}{2} r^{n-1} w + \frac{1}{2} r^n w' + r^{n-1} w'' + (n-1) r^{n-2} w' &= 0 \\ (r^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (r^n w)' &= 0 \\ r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a, & \end{aligned}$$

para alguma constante a. Assumindo que $\lim_{r\to\infty} w = w' = 0$, segue que $a = 0$, logo

$$w' = -\frac{1}{2}rw.$$

Então, para alguma constante b

$$w = be^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Concluímos então que

$$u(x,t) = \frac{b}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

é solução da equação (1.5).

Da discussão feita anteriormente temos a seguinte definição.

Definição 1.3.1. A função

$$\phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0 \end{cases}$$

é chamada de solução fundamental da Equação do Calor.

1.3.1 Problema de Valor Inicial

Agora vamos usar a solução fundamental ϕ para encontrar uma solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Para isto, note primeiramente que para $(x,t) \neq (0,0)$ a função $u(x,t) = \phi(x,t)$ é solução da equação do calor. Além disso, para $y \in \mathbb{R}^n$ fixo, $u(x,t) = \phi(x-y,t)$ também é solução da equação (1.5). Consequentemente,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t)g(y)dy \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy \tag{1.11}$$

é uma solução para o problema de Cauchy. Vejamos agora como determinar a solução para o problema de Cauchy não-homogêneo (1.6).

1.3.2 Problema Não-Homogêneo

Considere o seguinte problema de Cauchy não-homogêneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Observe primeiramente que dado $y \in \mathbb{R}^n$ e $0 < s < t$, $\phi(x-y,t-s)$ é uma solução para a equação do calor. Além disso, fixado s, a função

$$u = u(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t-s) f(y,s) dy$$

é solução de

$$\begin{cases} u_t(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,s) = f(\cdot;s) & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=s\}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Note que o problema de Cauchy (1.13) é um problema de Cauchy da forma (1.9) com $t=0$ substituido por $t=s$. Logo, $u(\cdot;s)$ não pode ser solução do problema (1.12).

Porém, o Princípio de Duhamel diz que podemos construir uma solução para o problema (1.12) integrando as soluções de (1.13) em relação a s. Por conta disso, vamos considerar

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{t/2}^{t} u(x,t;s) ds \\ &= \int_{t/2}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t-s) dy ds \\ &= \int_{t/2}^{t} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s) dy ds, \end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. Para garantir que a fórmula funciona, assumimos que $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ e que f tem suporte compacto.

A solução do problema de Cauchy não-homogêneo será utilizada no capítulo 3. Na próxima seção definiremos a Transformada de Fourier, uma importante ferramenta utilizada nos capítulos 2, 3 e 4.

1.4 Transformada de Fourier

Definição 1.4.1. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a Transformada de Fourier de u, denotada por $\hat{u}$ como sendo

$$\hat{u}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} u(x)dx$$

onde $y \in \mathbb{R}^n$, i é o número imaginário e $x \cdot y$ denota o produto interno entre x e y.

Como $\left|e^{\pm ix\cdot y}\right| = 1$ e $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y}u(x)dx$ existe para cada $y \in \mathbb{R}^n$.

Agora vamos estender a definição da Transformada de Fourier para $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Para isto, vejamos o teorema a seguir:

Teorema 1.4.1. (Teorema de Plancherel) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que se $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entao $\hat{v}, \hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, usando o Teorema de Fubini, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\hat{w}(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} v(x)w(y)dydx \tag{1.14}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(y)w(y)dy. \tag{1.15}$$

Usando a solução da equação do calor não homogênea é possível mostrar que para $t > 0$(vide [2] pg 186).

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}.$$

Consequentemente, se $\varepsilon > 0$ e $v_\varepsilon(x) := e^{-\varepsilon|x|^2}$, pela igualdade anterior segue que

$$\hat{v}_\varepsilon(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}}{(2\varepsilon)^{n/2}}.$$

Daí, pela identidade (1.14) temos para cada $\varepsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y)v_\varepsilon(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\hat{v}_\varepsilon(x)dx \tag{1.16}$$

$$= \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} dx. \tag{1.17}$$

Considere $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e defina $v(x) := \bar{u}(-x)$, onde $\bar{u}$ é o complexo conjugado de u. Agora, tome $w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ como sendo a convolução de u e v, isto é

$$w(y) = (u * v)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy.$$

Note que, usando novamente o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\hat{w}(y) &= \widehat{(u*v)}(y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} u(z)v(x-z)dzdx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z\cdot y} u(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z)\cdot y} v(x-z)dx \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z\cdot y} u(z)\hat{v}(y)dz \\
&= (2\pi)^{n/2}\hat{u}(y)\hat{v}(y).
\end{aligned}$$

Onde,

$$\hat{v}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y}\bar{u}(-x)dx = \bar{\hat{u}}(y).$$

e assim, $\hat{w} = (2\pi)^{n/2}|\hat{u}|^2$.

Como w contínua, $\hat{w} = (2\pi)^{n/2}|\hat{u}|^2 \geq 0$ e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x)e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} dx = (2\pi)^{n/2}w(0),$$

deduzimos então que fazendo $\varepsilon \to 0^+$ na identidade (1.16), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y)dy = (2\pi)^{n/2}w(0).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2\, dy = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\, dx.$$

Como queríamos demonstrar. □

Definição 1.4.2. (Transformada de Fourier em L^2) Sabendo que

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2},$$

podemos estender a definição da Transformada de Fourier para $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pois se $u \in L^2$ o Teorema de Plancherel garante que $\hat{u} \in L^2$.

Vamos ver agora uma propriedade importante da Transformada de Fourier que usaremos nos próximos capítulos.

Teorema 1.4.2. Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se u é suave e tem suporte compacto então para cada multi-índice α com $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\widehat{D^\alpha u} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{(\mathbb{R}^n)} e^{-ix\cdot y} D^\alpha u(x)dx \\
&= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{(\mathbb{R}^n)} D_x^\alpha (e^{-ix\cdot y}) u(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{(\mathbb{R}^n)} e^{-ix\cdot y} (iy)^\alpha u(x)dx \\
&= (iy)^\alpha \hat{u}(y).
\end{aligned}$$

□

Com essa demonstração encerramos este capítulo. Vejamos a partir de agora os resultados principais deste trabalho. Note, ao longo dos próximos capítulos, a importância da Transformada de Fourier e do teorema anterior na análise do decaimento de soluções.

CAPÍTULO 2

Decaimento para leis de conservação parabólicas em L^2

Com o intuito de investigar o comportamento das soluções do problema de Cauchy da forma

$$\frac{\partial}{\partial t}u+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}f^j(u)=\varepsilon\Delta u, \tag{2.1}$$

iremos analisar neste capítulo o decaimento das soluções do problema acima, para $f^j\in C^m(\mathbb{R}^n)$ e valor inicial $u_0=u(x,0)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^m(\mathbb{R}^n)\cap C_0^m(\mathbb{R}^n)$, onde,

$$C_0^m(\mathbb{R}^n)=\{u\in C^m : \lim_{|x|\to\infty} D^\alpha u=0, |\alpha|\leq m\}.$$

Tal análise, baseada no artigo [4], será feita inicialmente para norma L^2 da solução da equação (2.1) e depois para norma L^2 de suas derivadas. Vejamos o primeiro teorema,

Teorema 2.0.3. Se $f^j\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^1(\mathbb{R}^n)\cap C_0^m(\mathbb{R}^n)$ e u é uma solução para o problema de Cauchy (2.1) com valor inicial u_0, então

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^2dx\leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}}$$

onde C é uma constante que depende de ε, n e u_0.

Demonstração. Suponha que o problema de Cauchy (2.1) possui solução suave. Multiplicando a equação (2.1) por u e integrando, temos:

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial}{\partial t}u+\sum_{j=1}^{n}u\frac{\partial}{\partial x_j}f^j(u) &= \varepsilon u\Delta u\Rightarrow && (2.2)\\
\frac{d}{dt}\frac{u^2}{2}+\sum_{j=1}^{n}u\frac{\partial}{\partial x_j}f^j(u) &= \varepsilon u\Delta u\Rightarrow && (2.3)\\
\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{dt}\frac{u^2}{2}dx+\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}u\frac{\partial}{\partial x_j}f^j(u)dx &= \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u\Delta u dx. && (2.4)
\end{aligned}$$

Agora, observe que para cada $1 \leq j \leq n$ fixo, temos

$$u\frac{\partial}{\partial x_j}f^j(u) = uf_j'(u)u_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}F_j(u),$$

onde

$$F_j(u) = \int_0^u vf_j'dv.$$

Assim, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\frac{\partial}{\partial x_j}f^j(u)dx_j = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_j}F_j(u)dx_j = 0,$$

já que $u\frac{\partial}{\partial x_j}f^j(u)$ é uma derivada pura com respeito a x_j e $u \in C_0^m$. Além disso, note que

$$u\Delta u = u\sum_j^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Logo, para cada $1 \leq j \leq n$ fixo, integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}dx &= -\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx,\end{aligned}$$

pois $u \in C_1^m$ e, consequentemente, para x suficientemente grande não aparecerão termos de fronteira na integração por partes. Assim,

$$\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta u dx = -\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx,$$

e então podemos reescrever 2.2 da seguinte forma,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2 dx = -2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx.$$

Além disso, pelo teorema de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2 dx \\ &= -2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx \\ &= -2\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{\nabla u}\right|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 1.4.2

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 \, d\xi = -2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \, |\hat{u}|^2 \, d\xi. \tag{2.5}$$

Vamos agora estimar a norma de ξ e, consequentemente, estimar a norma de u em L^2. Para isto, defina o subconjunto $A(t)$ de $\mathbb{R}^n$ do seguinte modo:

$$A(t) = \left\{ \xi : |\xi| > \left(\frac{n}{2\varepsilon(t+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Note primeiramente que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \, |\hat{u}|^2 \, d\xi \geq \int_{A(t)} |\xi|^2 \, |\hat{u}|^2 d\xi.$$

Logo,

$$-2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \, |\hat{u}|^2 \, d\xi \leq -2\varepsilon \int_{A(t)} |\xi|^2 \, |\hat{u}|^2 d\xi.$$

Assim segue de 2.5 e da desigualdade anterior que,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 \, d\xi \leq -2\varepsilon \int_{A(t)} |\xi|^2 \, |\hat{u}|^2 d\xi.$$

Como $-|\xi| < -\left(\frac{n}{2\varepsilon(t+1)}\right)^{1/2}$, temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi \leq \frac{-n}{t+1}\int_{A(t)} |\hat{u}|^2 d\xi = \frac{-n}{t+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{n}{t+1}\int_{A^c(t)} |\hat{u}|^2 d\xi.$$

Multiplicando a desigualdade anterior pelo fator integrante $(t+1)^n$

$$(t+1)^n \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi + n(t+1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi \quad \leq \quad n(t+1)^{n-1}\int_{A^C(t)} \hat{u}^2 d\xi \Rightarrow \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi \right] \quad \leq \quad n(t+1)^{n-1}\int_{A^c(t)} |\hat{u}|^2 d\xi. \tag{2.7}$$

Como $u_0 \in L^1$, pelo princípio do máximo, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)| \, dx.$$

Em particular,

$$||\hat{u}(\cdot,t)||_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)| \, .$$

Assim, de 2.6 temos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi\right] &\leq n(t+1)^{n-1}\int_{A^c(t)}|\hat{u}|^2 d\xi\\ &\leq n(t+1)^{n-1}\int_{A^c(t)}|u(x,0)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}\int_{A^c(t)}|u(x,0)|^2 d\xi &= \|u_0\|_1^2\int_{A^c(t)}d\xi\\ &= \|u_0\|_1^2 r^n\omega_n dr\end{aligned}$$

onde ω_n é o volume da esfera unitária n-dimensional e $r=\left(\frac{n}{2\varepsilon(t+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Daí,

$$\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi\right]\leq \|u_0\|_1^2 n(t+1)^{n-1}\omega_n\left[\frac{2\varepsilon(t+1)}{n}\right]^{-n/2}.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t obtemos o resultado desejado. □

Agora vamos obter uma estimativa similar na norma L^2 para as derivadas de u. Para isto, precisamos dos seguintes resultados preliminares:

Lema 2.0.1. Suponha que $f\in C^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $f(0)=0$ e $u\in H^m(\mathbb{R}^n)$. Se $1\leq s\leq m$, então

$$\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha f(u(x))|^2 dx\leq C\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(x)|^2 dx$$

onde a constante C depende somente de n, s, f e a norma L^∞ de u.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}|D^\alpha f(u(x))|^2 &= |D^\alpha f(u)D^\alpha u|^2\\ &= |D^\alpha f(u)|^2|D^\alpha u|^2.\end{aligned}$$

Como $f\in C^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, temos que

$$|D^\alpha f(u)-D^\alpha f(0)|\leq C|D^\alpha u(t)|.$$

Logo,

$$|D^\alpha f(u(x))|^2\leq C|D^\alpha u|^2.$$

Portanto,

$$\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha f(u(x))|^2dx \le C\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(x)|^2dx.$$

□

Lema 2.0.2. Se $f^j \in C^{m+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^m(\mathbb{R}^n)\cap C_1^m(\mathbb{R}^n)$ e u é uma solução de (2.1) com dado inicial u_0 então existem constantes positivas k_r que dependem r, s, ε, f^j e $\|u\|_\infty$, tais que a norma

$$\|u(t)\|_s = \left[\sum_{r=0}^{s}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(x,t)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_s^2 \le -c\sum_{r=1}^{s+1}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx. \tag{2.8}$$

Demonstração. Mostraremos a desigualdade (2.8) por indução. Se $|\alpha|=0$ então a desigualdade (2.8) se reduz ao resultado obtido no teorema 2.0.3. Suponha agora, que a desigualdade (2.8) vale para $0\le|\alpha|<s$. Diferenciando a equação (2.1) obtemos

$$D^\alpha u_t = -D^\alpha \mathrm{div} f + \varepsilon D^\alpha \Delta u,$$

com $f=(f^1,\dots,f^n)$. Multiplicando a identidade anterior por $D^\alpha u$, temos

$$D^\alpha u D^\alpha u_t = -D^\alpha u D^\alpha \mathrm{div} f + \varepsilon D^\alpha u D^\alpha \Delta u.$$

Integrando,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|D^\alpha u|^2}{2}dx = -\int_{\mathbb{R}^n}D^\alpha u D^\alpha \mathrm{div} f dx + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}D^\alpha u D^\alpha \Delta u dx. \tag{2.9}$$

Em relação a base canônica $\{e_j\}$ do $\mathbb{R}^n$, podemos reescrever $D^\alpha \mathrm{div} f$ e $D^\alpha \Delta u$ da seguinte forma:

$$D^\alpha \mathrm{div} f = \sum_{j=1}^{n} D^{\alpha+e_j}f^j,$$

$$D^\alpha \Delta u = \sum_{j=1}^{n} D^{\alpha+2e_j}u.$$

Consequentemente, reescrevemos a equação (2.9) como

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx = -2\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}D^\alpha D^{\alpha+e_j}f^jdx + 2\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}|D^{\alpha+2e_j}u|^2dx.$$

Observe agora que, fixando $1 \leq l \leq j$ e integrando por partes, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx = 2\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha+e_j} u D^\alpha f^j dx - 2\varepsilon \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+2e_j} u|^2 dx.$$

Usando a desigualdade $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$, segue,

$$2\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha+e_j} u D^\alpha f^j dx \leq 2\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon}{2}|D^{\alpha+e_j}u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|D^\alpha f^j|^2 dx\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+e_j}u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f^j|^2 dx - 2\varepsilon \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+e_j}u|^2 dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f^j|^2 dx - \varepsilon \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+e_j}u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Pelo lema 2.0.1,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx \leq \frac{C}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx - \varepsilon \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+e_j}u|^2 dx.$$

Logo, para todo α com $|\alpha| = s$, temos

$$\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx \leq c_s\left(\frac{C}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx - \varepsilon \sum_{|\alpha|=s+1}\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+e_j}u|^2 dx\right),$$

onde c_s é uma constante que depende de s. Multiplicando agora a desigualdade anterior por uma constante positiva δ tal que

$$\frac{\delta c_s}{\varepsilon} = \frac{k_s}{2}$$

e

$$\frac{\delta c_s \varepsilon}{C} = \frac{k_{s+1}}{2},$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx \leq c_s\left(\frac{C}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx - \varepsilon \sum_{|\alpha|=s+1}\int_{\mathbb{R}^n} |D^{\alpha+e_j}u|^2 dx\right). \tag{2.10}$$

Pela hipótese de indução,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{s-1}^2 \leq -C\sum_{r=1}^{s} k_r \sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2\, dx.$$

Somando a desigualdade anterior com a desigualdade (2.10) concluímos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\|_s^2 &\leq -C\sum_{r=1}^{s}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2\,dx + c_s\left(\frac{C}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx - \varepsilon\sum_{|\alpha|=s+1}\int_{\mathbb{R}^n}|D^{\alpha+e_j}u|^2dx\right)\\
&= -C\sum_{r=1}^{s}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2\,dx + \frac{Ck_s}{2}\sum_{|\alpha|=s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx - \frac{Ck_{s+1}}{2}\sum_{|\alpha|=s+1}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx\\
&= -C\sum_{r=1}^{s}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2\,dx + \frac{C}{2}\sum_{r=1}^{s}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx - \frac{C}{2}\sum_{r=1}^{s+1}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx\\
&\leq -\frac{C}{2}\sum_{r=1}^{s+1}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx\\
&\leq -C\sum_{r=1}^{s+1}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_s^2 \leq -C\sum_{r=1}^{s+1}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx.$$

□

Com esses dois resultados em mãos, podemos agora demonstrar o teorema desejado

Teorema 2.0.4. Se $f^j \in C^{m+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap H^m(\mathbb{R}^n)\cap C_1^m(\mathbb{R}^n)$ e u é uma solução de (2.1) com dado inicial u_0, então

$$\sum_{|\alpha|\leq s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(x,t)|^2dx \leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

Além disso, se $m > [\frac{n}{2}]$ então

$$\sum_{|\alpha|<m-[\frac{n}{2}]}\|D^\alpha u(\cdot,t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}}.$$

Demonstração. Assumindo a existência de solução suave, podemos supor, sem perda de generalidade, $f^j(0) = 0$. De fato, caso $f^j(0)$ seja diferente de zero, basta trocar na equação (2.1) $f^j(u)$ por $\tilde{f}^j(u) = f^j(u) - f^j(0)$. Novamente, vamos usar indução com o intuito de estimar o decaimento para $\|D^\alpha u\|_{H^m}$.

Para $|\alpha| = 0$ o resultado segue diretamente do teorema 2.0.3. Suponha então que o decaimento foi obtido para todo α com $0 \leq |\alpha| < s$. Daí, para α tal que $|\alpha| = s$, pelo lema anterior,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_s^2 \leq -C\sum_{r=1}^{s+1}k_r\sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u|^2dx. \tag{2.11}$$

Derivando a desigualdade (2.11) e usando o teorema de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\hat{u}\|_s^2 &= \frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{s} k_r \sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha u}|^2 d\xi \\ &\leq -C\sum_{r=1}^{s+1} k_r \sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha u}|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Integrando por Partes,

$$\frac{d}{dt}\|\hat{u}\|_s^2 \leq -C\sum_{r=1}^{s+1} k_r \sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi.$$

Definindo

$$A^c(t) = \left\{\xi : |\xi| \leq \left(\frac{n}{2\varepsilon(t+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

e usando os mesmos argumentos utilizados na demonstração do teorema 2.0.3, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n \sum_{r=1}^{s+1} k_r \sum_{|\alpha|=r}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha u}|^2 d\xi\right] \leq C(t+1)^{n-1}\sum_{r=1}^{s+1} k_r \sum_{|\alpha|=r}\int_{A^c(t)} |\widehat{D^\alpha u}|^2 d\xi.$$

Note que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n\|\hat{u}\|_s^2\right] &\leq C(t+1)^{n-1}\sum_{r=0}^{s} k_r \int_{A^C(t)} |\hat{u}|^2 d\xi \\ &\leq C(t+1)^{n-1}\int_{A^C(t)} |\hat{u}|^2 d\xi \\ &\leq C(t+1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi,\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=r}\int_{A^c(t)} |\widehat{D^\alpha u}|^2 d\xi &= \sum_{|\alpha|=r}\int_{A^C(t)} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi \\ &\leq C\int_{A^c(t)} |\hat{u}|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Da hipótese de indução e do teorema de Plancharel, segue

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \\ &\leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n \|\hat{u}\|_s^2\right] &\leq C(t+1)^{n-1}(t+1)^{-\frac{n}{2}}\\ &= C(t+1)^{\frac{n}{2}-1},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n \|u\|_s^2\right] \leq C(t+1)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 a t, obtemos

$$(t+1)^n \|u\|_s^2 \leq C(t+1)^{\frac{n}{2}} + \|u_0\|_s^2.$$

Logo,

$$\sum_{r=0}^{s} k_r \sum_{|\alpha|=s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx = \|u\|_s^2 \leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

Lembrando que, por hipótese de indução, para $0 \leq |\alpha| < s$ temos

$$\sum_{|\alpha|<s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx \leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

Logo, para todo α tal que $0 \leq |\alpha| \leq s$, concluímos

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx \leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

Para demonstrar a segunda desigualdade basta agora estimar $\sum_{|\alpha|<j} \|D^\alpha u\|_\infty$. Supondo que $j < m - [n/2]$, segue do teorema de Imersão de Sobolev

$$\sum_{|\alpha|<j} \|D^\alpha u\|_\infty \leq C \|u\|_{H^m}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|<j} \|D^\alpha u\|_\infty &\leq C\left(\sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 dx\right)^{1/2}\\ &\leq C(t+1)^{-\frac{n}{4}}.\end{aligned}$$

Portanto, para $j < m - [n/2]$,

$$\sum_{|\alpha|<j} \|D^\alpha u\|_\infty \leq C(t+1)^{-\frac{n}{4}}.$$

$\square$

Obtidas as estimativas da norma L^2 de u e de suas derivadas, vamos, no próximo capítulo, fazer uma análise do decaimento de u na norma L^∞ sob certas condições. Para fazer tal análise iremos utilizar bastante as desigualdades obtidas no teorema 2.0.4.

CAPÍTULO 3

Decaimento para Leis de Conservação Parabólicas em L^∞

Neste capítulo, analisaremos o decaimento da solução do problema de Cauchy 2.1 na norma L^∞ sob uma das seguintes condições de crescimento sobre f^j:

$$\left|\frac{d}{du}f^j(u)\right| \leq C|u|^p \quad \text{com} \quad p \geq 1+\frac{4}{n} \quad \text{para} \quad |u| \leq 1, \tag{3.1}$$

ou

$$\left|f^j(u)\right| \leq C|u|^q \quad \text{com} \quad q \geq 2\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{para} \quad |u| \leq 1, \tag{3.2}$$

onde C é uma constante. Além de uma dessas condições, usaremos também os resultados obtidos no teorema 2.0.4 do capítulo anterior.

Teorema 3.0.5. Se além das hipóteses do teorema 2.0.4 supusermos que f^j satisfaz (3.1) **ou** (3.2), então a solução u da equação (2.1) satisfaz

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}},$$

onde C é uma constante que depende de ε, n, m, f^j e u_0.

Demonstração. Utilizando a solução da equação do calor não homogênea obtida na seção 1.3 do capítulo 1, temos que a solução $u(x,t)$ da equação (2.1) é dada por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(z-x,t)u(z,t/2)dz + \int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} K(z-x,t-s)\mathrm{div} f dz ds, \tag{3.3}$$

onde

$$K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Agora, observe que a primeira integral da equação (3.3) pode ser estimada da seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(t,z-x)u(t/2,z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}} u(t/2,z)dz.$$

Como $e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}$ é decrescente pois $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} K(z-x,t)u(z,t/2)dz &\leq Ct^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(z,t/2)dz \\ &= Ct^{-\frac{n}{2}} ||u(z,t/2)||_1 \\ &\leq Ct^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Então, basta agora analisar o decaimento da segunda integral da equação (3.3). Para isto vamos supor inicialmente que a condição (3.1) vale. Note que,

$$\left| \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,z-x) \mathrm{div} f \, dzds \right| \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} |K(t-s,z-x)\mathrm{div} f| \, dzds.$$

Escrevendo o divergente de f na forma:

$$\mathrm{div} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{df^j}{du}(u(s,z)) \frac{\partial u}{\partial z_j}(s,z),$$

temos,

$$\left| \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} K(z-x,t-s) \mathrm{div} f \, dzds \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} \left| K(z-x,t-s) \frac{df^j}{du}(u(s,z)) \frac{\partial u}{\partial z_j}(s,z) \right| dzds.$$

Pelo teorema 2.0.4, podemos escolher t suficientemente grande com $t/2 \leq s$ de sorte que $\|u(s)\|_\infty \leq 1$. Daí, sob a condição (3.1), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} K(z-x,t-s) \mathrm{div} f \, dzds \right| &\leq C \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} |K(z-x,t-s)| \, |u|^p \left| \frac{\partial u}{\partial z_j}(s,z) \right| dzds \\ &= C \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \|u(s)\|_\infty^p \left\| \frac{\partial u}{\partial z_j}(s) \right\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} K(z-x,t-s) dzds. \end{aligned}$$

Pelo o teorema 2.0.4, temos que $\|u(s)\|_\infty^p \leq C(1+s)^{-n/4}$, logo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{t}{2}}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} K(z-x,t-s) \mathrm{div} f \, dzds \right| &\leq C \int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{1}{(1+s)^{\frac{np}{4}}} \frac{1}{(1+s)^{\frac{n}{4}}} ds \\ &\leq C \left[\left(\frac{1+t}{2} \right)^{1-\frac{n}{4(p+1)}} - (1+t)^{1-\frac{n}{4(p+1)}} \right] \\ &\leq C(1+t)^{1-\frac{n}{4(p+1)}} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Pois $p \geq 1+\frac{n}{4}$ implica $1-\dfrac{n}{4(p+1)} \geq \dfrac{n}{2}$.

Vamos obter agora o decaimento de u sob a condição (3.2). Novamente basta mostrar que a integral dupla de (3.3) decai com velocidade de $(1+t)^{-\frac{n}{2}}$, pois a primeira integral satisfaz,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(t,z-x)u(t/2,z)dz \leq Ct^{-\frac{n}{2}}.$$

Primeiramente, escrevemos o divergente de f da seguinte forma:

$$\mathrm{div} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} f^j(u).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,z-x)\mathrm{div} f dzds\right| &\leq \int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} |K(t-s,z-x)\mathrm{div} f|\, dzds \Rightarrow \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \left|K(t-s,z-x)\frac{\partial}{\partial z_j} f^j(u)\right| dzds.
\end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\left|\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,z-x)\mathrm{div} f dzds\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial z_j} K(t-s,z-x) f^j(u)\right| dzds.$$

Como,

$$K(t-s,z-x) = [4\pi(t-s)]^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{(z-x)^2}{4(t-s)}},$$

então

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_j} K(t-s,z-x)\right| = \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{\frac{n}{2}}}\frac{|z_j-x|}{4(t-s)} e^{-\frac{|z-x|^2}{4(t-s)}}.$$

Assim, do teorema 2.0.4, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,z-x)\mathrm{div} f dzds\right| &\leq \sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{[4\pi(t-s)]^{\frac{n}{2}}}\frac{|z_j-x|}{4(t-s)} e^{-\frac{|z-x|^2}{4(t-s)}} \left|f^j(u)\right| dzds \\
&\leq C\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,\frac{(z-x)}{2}) \left|f^j(u)\right| dzds,
\end{aligned}$$

pois

$$|z|\, e^{(-z^2)} \leq Ce^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Agora, da condição (3.2), temos

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,z-x)\mathrm{div}f dzds\right| &\leq C\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,\frac{(z-x)}{2})\,|u|^q dzds\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\,\|u\|_\infty^q\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,\frac{(z-x)}{2})dzds.
\end{aligned}
$$

Segue do teorema 2.0.4 que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,z-x)\mathrm{div}f dzds\right| &\leq C\int_{\frac{t}{2}}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1+s)^{\frac{nq}{4}}}\int_{\mathbb{R}^n} K(t-s,\frac{(z-x)}{2})dzds\\
&\leq C\int_{\frac{t}{2}}^{t}\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{nq}{4}}}ds\\
&\leq \frac{C}{(1+\frac{t}{2})^{\frac{nq}{4}}}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\frac{ds}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{C\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}}{(1+\frac{t}{2})^{\frac{nq}{4}}}\\
&\leq C(1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{nq}{4}}\\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}},
\end{aligned}
$$

pois $q \geq 2+\frac{2}{n}$. Portanto, sob uma das condições (3.1) ou (3.2) concluímos que

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq C(t+1)^{-n/2}.$$

□

Finalizamos então a análise de decaimento para soluções do problema de Cauchy para leis de conservação parabólicas. No próximo capítulo, iremos fazer a análise do decaimento para soluções das equações de Navier Stokes. Para isto, usaremos algumas ferramentas desenvolvidas nos capítulos 2 e 3.

CAPÍTULO 4

Decaimento em L^2 para Equação de Navier-Stokes

Neste capítulo, baseado em [5], iremos estabelecer o decaimento em L^2 para as soluções $u = u(x,t)$ das Equações de Navier Stokes com $n \geq 3$

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $u \cdot \nabla u$ denota o operador adverctivo dado por

$$u \cdot \nabla u = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$

Δu é o laplaciano de u, ∇p é o vetor gradiente de p e $\nabla \cdot u$ é o divergente de u. Aqui vamos considerar $f = (f^1, \ldots, f^n)$ decaindo em L^2 numa velocidade apropriada. Para chegarmos em nosso objetivo nos baseamos nas demonstrações dos teoremas feitos nos capítulos 2 e 3, como podemos ver na demonstração do teorema a seguir.

Teorema 4.0.6. Sejam $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, funções suaves, com u se anulando no infinito. Suponha que u satisfaz

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

com $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx \leq C(t+1)^{-n/2+1}$$

onde C é uma constante positiva dependendo apenas de $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ e n.

Demonstração. Multiplicando $u_t + u\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla p = 0$ por u e integrando sobre $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (uu_t + u(u\cdot\nabla u) - u\Delta u + u\nabla p)\,dx = 0.$$

Analogamente ao que foi feito no Teorema 2.0.3 temos que,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\,dx = -2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

Logo, pelo Teorema de Plancherel,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2\,d\xi = -2\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi.$$

Considerando

$$S(t) = \left\{\xi : |\xi| \leq \left(\frac{n}{2(t+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi = -2\int_{S(t)^c} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi - 2\int_{S(t)} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi &\leq -\frac{n}{t+1}\int_{S(t)^c} |\hat{u}|^2 d\xi - 2\int_{S(t)} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi \\ &= -\frac{n}{t+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi + \int_{S(t)} \left(\frac{n}{t+1} - 2|\xi|^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{n}{t+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi \leq \frac{n}{t+1}\int_{S(t)} |\hat{u}|^2 d\xi.$$

Vamos assumir que a afirmação abaixo é válida, mais a frente a demonstraremos

Afirmação 1. Sob as mesmas hipóteses do teorema, u satisfaz a desigualdade

$$|\hat{u}(\xi,t)| \leq C|\xi|^{-1} \quad \text{se} \quad \xi \in S(t) \tag{4.2}$$

para C constante dependendo apenas da norma de u_0 em L^1 e L^2.

Pela Afirmação 1, temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{n}{t+1}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 d\xi \leq \frac{C}{t+1}\int_{S(t)} |\xi|^{-2} d\xi.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $(t+1)^n$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi\right] \leq C(t+1)^{n-1}\int_{S(t)}|\xi|^{-2}d\xi.$$

Observe que o lado direito desta desigualdade pode ser escrito como

$$c\omega_0(t+1)^{n-1}\int_0^{r(t)} r^{n-1}r^{-2}dr,$$

com ω_0 o volume da esfera unitária n-dimensional e $r=(n/2(t+1))^{1/2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[(t+1)^n\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi\right] &\leq \frac{C\omega_0}{n-2}(t+1)^{n-1}\left[\frac{n}{2(t+1)}\right]^{n/2-1}\\ &\leq C(t+1)^{n/2}.\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade anterior em relação ao tempo t, obtemos

$$(t+1)^n\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi,0)|^2 d\xi + C\left[(t+1)^{n/2+1}-1\right].$$

Como $u_0\in L^2$ e pelo Teorema de Plancherel concluímos,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2 d\xi \leq c(t+1)^{-n/2+1}$$

Para completar a demonstração, vamos agora provar a desigualdade (4.2). Para isto, apliquemos a Transformada de Fourier na equação (4.1) para obter

$$\widehat{u_t} = -\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p} + \widehat{\Delta u}.$$

Observe que integrando por partes

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta u} &= \frac{1}{(2\pi)^{-n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\Delta u dx\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{-n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}dx\\ &= i\xi\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{-n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx.\end{aligned}$$

Como $\nabla\cdot u=0$ então $\widehat{\Delta u}=0$. Logo,

$$\widehat{u_t} = -\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p}.$$

Multiplicando a igualdade anterior por $e^{|\xi|^2 t}$, temos

$$\begin{aligned} e^{|\xi|^2 t}\widehat{u_t} &= e^{|\xi|^2 t}(-\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p}) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(e^{|\xi|^2 t}\widehat{u}) &= e^{|\xi|^2 t}(-\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p}). \end{aligned}$$

Integrando a identidade anterior de 0 a t, obtemos

$$e^{|\xi|^2 t}\widehat{u} = \widehat{u_0} + \int_0^t e^{|\xi|^2 s}(\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p})ds.$$

Logo,

$$|\widehat{u}(\xi,t)| \leq e^{-|\xi|^2 t}|\widehat{u_0(\xi)}| + \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)}|(-\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p})|ds.$$

Afirmação 2. Supondo as mesmas hipóteses do teorema 4.0.6, temos que

$$|-\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p}| \leq C|\xi|. \tag{4.3}$$

Segue da afirmação 2 que

$$|\widehat{u}(\xi,t)| \leq e^{-|\xi|^2 t}|\widehat{u_0}(\xi)| + c\int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)}|\xi|ds. \tag{4.4}$$

Como $u_0 \in L^1$, a Transformada de Fourier de u pertence a L^∞, isto é, para todo ξ, existe c tal que

$$|\widehat{u_0}(\xi)| \leq C.$$

Daí, calculando a integral do lado direito da desigualdade (4.4), obtemos

$$|\widehat{u}(\xi,t)| \leq Ce^{-|\xi|^2 t} + \frac{C}{|\xi|}(1 - e^{-|\xi|^2 t}).$$

Segue que, para $\xi \in S(t)$ vale

$$|\hat{u}(\xi,t)| \leq C|\xi|^{-1}.$$

Para finalizar a demonstração basta demonstrar a afirmação 2. Com esse objetivo, vamos analisar cada termo de $(-\widehat{u\nabla u} - \widehat{\nabla p})$. Observe que,

$$\begin{aligned} |\widehat{u\cdot\nabla u}| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^{-n/2}}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}u\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{-n/2}}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-i\xi\cdot x}u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando o fato de u ir para zero no infinito,

$$|\widehat{u\cdot\nabla u}| \leq \sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n}|u^j u^i||\xi_j|dx.$$

Pela desigualdade de Hölder e o princípio do máximo, temos

$$\begin{aligned}\left\|u^j u^i(\cdot,t)\right\|_1 &\leq \left\|u^j(\cdot,t)\right\|_2\left\|u^i(\cdot,t)\right\|_2\\ &\leq \|u_0\|_2^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$|\widehat{u\cdot\nabla u}| \leq c|\xi|.$$

Uma estimativa correspondente para p é obtida através da equação

$$\Delta p = -\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(u^i u^j).$$

De fato, aplicando a transformada de Fourier na igualdade anterior e usando integração por partes segue que

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta p} &= -\sum_{i,j}\frac{1}{(2\pi)^{-n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\cdot x}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(u^i u^j)dx\\ &= \sum_{i,j}\frac{\xi^i\xi^j}{(2\pi)^{-n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\cdot x}u^i u^j dx\\ &= \sum_{i,j}\xi^i\xi^j\widehat{u^i u^j}.\end{aligned}$$

Como $\Delta p = |\xi|^2\hat{p}$ e $u^i u^j \in L^\infty$, temos

$$|\widehat{u\cdot\nabla u} - \widehat{\Delta p}| \leq c|\xi|.$$

o que conclui a demonstração. □

É possível mostrar uma estimativa semelhante para o problema de Cauchy com f diferente de 0. Basta supor que a norma de f decai numa velocidade apropriada e repetir os passos da demonstração anterior.

Referências

[1] H. Brézis. *Analísis Fuctional,teoría y aplicaciones*. Alianza, Madrid, 1984.

[2] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.

[3] Gerald B. Folland. *Real Analysis - Modern Techniques and Their Aplications*. Wiley Interscience, 1999.

[4] M. Schonbek. Decay of solutions to parabolic conservation laws. *Communications in Partial Differential Equations*, (7), 1980.

[5] M. Schonbek. l^2 decay for weak solutions of the navier-stokes equations. *Archive of Rational Mechanics*, (88), 1985.