UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

JOGOS BLOTTO SEQUENCIAIS COM INFORMAÇÃO IMPERFEITA

GIANNINI ITALINO ALVES VIEIRA

RECIFE

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

JOGOS BLOTTO SEQUENCIAIS COM INFORMAÇÃO IMPERFEITA

GIANNINI ITALINO ALVES VIEIRA

Orientador: Prof. Dr. LEANDRO CHAVES RÊGO

Área de concentração: Estatística Aplicada

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, 26 de fevereiro de 2014

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Vieira, Giannini Italino Alves
Jogos Blotto sequenciais com informação imperfeita / Giannini Italino Alves Vieira. - Recife: O Autor, 2014.
128 f.: il., fig., tab.

Orientador: Leandro Chaves Rêgo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, 2014.

Inclui referências e apêndices.

1. Teoria dos jogos. 2. Jogos Blotto. 3. Equilíbrio de Nash. 4. Equilíbrio de subjogo perfeito. I. Rêgo, Leandro Chaves (orientador). II. Título.

519.3 CDD (23. ed.) MEI2014 – 028

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

26 de fevereiro de 2014

Nós recomendamos que a Dissertação de Mestrado de autoria de

Giannini Italino Alves Vieira

Intitulada:

"Jogos Blotto Sequenciais com Informação Imperfeita"

Seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

____
Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Leandro Chaves Rêgo — Orientador/UFPE

José Heleno Faro — INSPER

Isis Didier Lins — UFPE-CTG

Este documento será anexado à versão final da tese.

A Deus, por ser o meu guia em tudo que faço e por seu amor incondicional.

A minha mãe, por ter me transformado no homem que sou hoje.

A Verinalda Benício, por todo o seu amor e dedicação.

Tudo depende só de mim

Hoje levantei cedo pensando no que eu tenho a fazer antes que o relógio marque meia-noite. É minha função escolher que tipo de dia vou ter hoje.

Posso reclamar porque está chovendo ou agradecer às águas por lavarem a poluição.

Posso ficar triste por não ter dinheiro ou me sentir encorajado para administrar minhas finanças, evitando desperdício.

Posso reclamar sobre minha saúde ou dar graças por estar vivo.

Posso me queixar dos meus pais por não terem me dado tudo o que eu queria ou posso ser grato por ter nascido.

Posso reclamar por ter que ir trabalhar ou agradecer por ter trabalho.

Posso sentir tédio com as tarefas da casa ou agradecer a Deus por ter um teto para morar.

Posso lamentar decepções com amigos ou me entusiasmar com a possibilidade de fazer novas amizades.

Se as coisas não saíram como planejei, posso ficar feliz por ter hoje para recomeçar.

O dia está na minha frente, esperando para ser o que eu quiser.

E aqui estou eu, o escultor que pode dar forma.

Charles Chaplin.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me dado o dom da vida e por todo o seu amor. Por sempre guiar os meus passos e me dar forças para seguir adiante.
A minha mãe, Maria do Socorro, por seu amor, carinho, por todos os ensinamentos de vida e por suavizar a minha caminhada. Agradeço de coração tudo que você tem feito por mim.
A meu amor, Verinalda Benício, por ter aceitado compartilhar a sua vida comigo, por ser minha parte forte e por prever, com exatidão, tudo que irá acontecer comigo. Você é a minha alegria e esperança de uma vida melhor.
A minhas irmãs, Sidely Gil, Silveny Meiga e Gildeanni Iasmim, e a meu cunhado Luiz Gonzaga pela força, torcida, incentivo e pelos bons momentos de descontrações nos meus raros períodos de férias.
Ao professor Leandro Rêgo, por ter participado diretamente da minha formação acadêmica na pós-graduação, por todas as conversas motivacionais, pela orientação primorosa, por ter acreditado no meu potencial e por toda a dedicação e empenho que teve para me conduzir neste trabalho.
Aos professores José Faro e Isis Lins pelas valiosas sugestões dadas na minha defesa.
A Filipe Souza por toda a torcida e por ter lido e dado sugestões importantes na dissertação.
Aos colegas de mestrado Cláudio Tablada, Cleber Xavier, Cristiany Barros, Danielle Brito, Fernando Peña, Jéssica Rivas, Maria Priscila, Raabe Marques e Renilma Pereira pelos bons momentos de estudo. Agradeço em especial a Cláudio Tablada, pelo apoio nos momentos mais difíceis do mestrado, e por sempre tentar me tranquilizar com a frase: "Calma Giannini, falta pouco!".
A todos os anjos que já não se encontram aqui nesse plano, mas que sempre iluminam minha caminhada e me acolhem nos momentos de maior aflição.
À Valéria Bittencourt e a Jymmy Barreto, pelas boas conversas, simpatia e confiança.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Jogos Blotto são jogos nos quais os jogadores devem decidir como alocar seus recursos privados em um número finito de prêmios. Na maioria dos trabalhos desenvolvidos sobre Jogos Blotto, assume-se que os jogadores avaliam os prêmios da mesma forma, que estes tomam as decisões de alocação de forma simultânea, que o jogador que mais investir recurso em um particular prêmio sempre o ganha e que os jogadores possuem informação perfeita a respeito dos recursos privados dos seus oponentes.

Nesta dissertação, modelamos Jogos Blotto sequenciais em que suprimimos a suposição de informação perfeita, por parte do jogador que se move primeiro, acerca dos recursos orçamentários de seu oponente. Mais especificamente, supomos que o jogador que se move primeiro sabe apenas que os recursos de seu oponente são distribuídos de acordo com uma dada função de distribuição acumulada, enquanto que o oponente, que se move depois, tem informação perfeita sobre toda a estrutura do jogo, inclusive sobre a alocação escolhida pelo primeiro jogador. Para cada modelo estudado, apresentamos as estratégias de equilíbrio de jogo.

Adicionalmente, apresentamos um modelo de Jogo Blotto sequencial com informação imperfeita no qual assumimos a hipótese de que o jogador que mais alocar recursos em um determinado prêmio não o ganha com probabilidade um, mas apenas possui maior probabilidade de ganhá-lo, sendo que esta probabilidade é igual a proporção de recursos alocados pelo jogador para o determinado prêmio em relação à soma das alocações de todos os jogadores neste prêmio.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Jogos Blotto Sequenciais. Informação Imperfeita. Equilíbrio de Nash. Equilíbrio de Subjogo Perfeito.

Abstract

Blotto games are games in which players must decide how to allocate their private resources in a finite number of prizes. In the majority of Blotto games' works, it is assumed that players evaluate the prizes in the same way, that they make allocation decisions simultaneously, that the player who invest more resource in a particular prize always win it and that players have perfect information about the private resources of their opponents.

In this Master Thesis, we model sequential Blotto games that suppress the assumption of perfect information, on the part of the player who moves first, about the budgetary resources of his opponent. More specifically, we assume that the player who moves first knows only that the resources of his opponent are distributed according to a given cumulative distribution function, while the opponent, that moves after, have perfect information about the whole structure of the game, including the allocation chosen by the first player. For each model studied, we present the equilibrium strategies of the game.

Additionally, we present a model of sequential Blotto game with imperfect information in which we assume the hypothesis that the player who allocate more resources in a given prize does not win it with probability one, but only has a higher probability of winning it, and this probability is equal to the proportion of resources allocated by the player for the particular prize over the sum of the allocations of all players in this prize.

Keywords: Game Theory. Sequential Blotto Games. Imperfect Information. Nash Equilibrium. Subgame Perfect Equilibrium.

Lista de notações matemáticas

c	Natureza ou chance
N	Conjunto de jogadores
C_i	Conjunto de estratégias puras do jogador i
C	Conjunto de perfis de estratégias puras
σ	Perfil de estratégias puras
σ_i	Estratégia pura do jogador i em um jogo da forma normal
δ_i	Estratégia mista do jogador i
ϕ_i	Estratégia comportamental do jogador i
s_i	Estratégia pura do jogador i em um jogo da forma extensiva
$\Delta(C_i)$	Conjunto de distribuições de probabilidade com suporte em C_i
u_i	Função utilidades do jogador i
M	Conjunto cujos elementos são os movimentos
H	Conjunto de histórias em um jogo na forma extensiva
P	Função que associa cada história não terminal a um elemento de $N \cup \{c\}$
h	Elemento do conjunto H, isto é, uma história
Z	Conjunto de histórias completas ou terminais
Z^{-1}	Conjunto de histórias antecessoras imediatas de histórias terminais em um jogo na forma extensiva
z	História completa ou terminal
M_h	Conjunto de ações que podem ser tomadas após a história h
H_i	Conjunto de histórias após as quais o jogador i se move

Pr	Probabilidade
f_c	Função que determina as probabilidades dos movimentos do jogador chance
Γ	Jogo na forma normal
Ψ	Jogo na forma Extensiva
G	Subjogo
H^G	Conjunto de histórias do subjogo G
$\mathcal{I}_i$	Partição do conjunto H_i
I	Conjunto de informação, isto é, um elemento de $\mathcal{I}_i$
W_i^n	Avaliação do prêmio i feita pelo jogador n
X^n	Orçamento privado do jogador n
x^n	Realização orçamentária do jogador n
F	Função de distribuição acumulada
K	Número de campos de batalha (ou prêmios)
$\boldsymbol{\psi^n}$	Estratégia do jogador n
ψ_i^n	Alocação feita pelo jogador n ao prêmio i
U_n	Utilidade esperada do jogador n

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos começou a ser formalmente desenvolvida a partir de 1920 com os trabalhos publicados por Emile Borel (1921) (que abordava problemas de guerra ou especulações financeiras e econômicas que dependiam não somente da sorte dos agentes envolvidos, mas também da habilidade dos mesmos), John von Neumann (1928) (onde foi proposto o conceito matemático de estratégia para jogos de azar), e John von Neumann (1940) (que propôs um conceito de solução para jogos de soma zero utilizando técnicas matemáticas). Após a publicação do livro *The Theory of Games and Economic Behavior* (Neumann & Morgenstern (1944)), essa teoria invadiu os estudos econômicos e a matemática aplicada. Essa invasão se deve, em grande parte, à linguagem e às técnicas matemáticas utilizadas, as quais permitem maior formalismo dos conceitos e novas formas para analisar situações que envolvem interações estratégicas entre múltiplos agentes (ou jogadores).

Na década de 1950 John Nash publicou quatro trabalhos, a saber: *Equilibrium Points in n-Person Games* (Nash (1950b), *Non-cooperative Games* (Nash (1951)), *The Bargaining Problem* (Nash (1950a)) e *Two Person Cooperative Games* (Nash (1953)), que foram de grande importância para a área de teoria dos jogos. Myerson (2007), destaca que foi a partir desses trabalhos que a teoria dos jogos ampliou o seu alcance, pois Nash introduziu um conceito de solução para jogos (o popular conceito de equilíbrio de Nash), que generalizava o Teorema do Minimax de von Neumann, ao provar que todo jogo finito (no conjunto de jogadores e no conjunto de estratégias de cada um deles), não necessariamente de soma constante, possui pelo menos um perfil de estratégias mistas que é equilíbrio do jogo. Assim, inúmeras aplicações econômicas passaram a fazer uso do conceito de equilíbrio de Nash, o qual, pela sua relevância, também passou a ser alvo constante de análises teóricas e experimentais.

Com o passar dos anos, a teoria dos jogos deixou de ser alvo apenas de aplicações matemáticas e econômicas, ganhando o interesse de pesquisadores das mais diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, na biologia, teoria dos jogos é aplicada para prever a sobrevivência de determinada espécie (Maynard Smith & Price (1973) e Maynard Smith (1976)), na política, para saber até que ponto uma determinada aliança de partidos é estável (Ordeshook (1986) e Aliprantis & Chakrabarti (2000)), na Sociologia, para identificar situações de conflito entre o indivíduo e o coletivo (Souza (2003)), no direito, para interpretar e aplicar algumas leis (Chung & Fortnow (2007)), dentre inúmeras outras.

A teoria dos jogos pode ser definida como um conjunto de ferramentas matemáticas desenvolvidas para ajudar a análise da interação de um grupo de agentes (ou jogadores) racionais.[1] Na linguagem desta teoria, um jogo é qualquer situação social que envolve dois ou mais agentes em que cada um possui um conjunto de decisões (estratégias disponíveis) passíveis de serem tomadas. A tomada de decisão baseia-se nas preferências de cada um dos agentes e na sua expectativa sobre as ações dos outros agentes. O conjunto de estratégias adotadas por cada um dos jogadores envolvidos no jogo determina o resultado do jogo. Os jogadores por sua vez possuem preferências sobre os possíveis resultados do jogo, que são representadas por funções utilidades associadas às possíveis combinações de estratégias dos agentes que determinam este resultado.

1.2 Objetivo

Em (1921) o matemático Emile Borel publicou o artigo *La Theorie de Jeu et les Equations Integrales a Noyan Symetrique*, um dos que seriam os primeiros trabalhos na área de teoria dos

[1] Os agentes são racionais se eles tomam decisões de forma consistente em busca de maximizar o valor esperado de sua própria utilidade (Myerson (2007)).

jogos nos moldes atuais. Neste trabalho foi proposto um jogo de soma zero, denominado Jogo Coronel Blotto, num cenário de guerra, em que dois jogadores batalham por uma quantidade finita de campos de batalhas independentes que possuem uma valorização atrelada. Borel supõe que cada um dos jogadores possui uma quantidade finita de recursos que deve ser destinada, por cada um deles, de forma simultânea a todos os campos de batalhas. A valorização de cada campo de batalha impacta como os jogadores escolhem por distribuir seus recursos, e cada jogador faz a sua distribuição sobre os prêmios sem saber como o seu oponente a faz. O jogador que distribuir mais recursos em um particular campo de batalha ganha esse campo, e a recompensa de um jogador no jogo é a soma de suas recompensas em todos os campos de batalha.

Ao longo dos anos, a literatura referente ao trabalho de Borel foi aumentando de forma substancial e atualmente existem diversas extensões e versões deste trabalho (ver alguns exemplos na Seção 2.6). A maior parte desses trabalhos leva em consideração a hipótese inicial de que os jogadores alocam os seus recursos de forma simultânea e que estes são perfeitamente informados sobre toda a estrutura do jogo, isto é, que o jogo é com informação completa. Em 2009, Adamo & Matros publicaram o artigo *A Blotto Game with Incomplete Information* em que eles propuseram uma versão do jogo Blotto na qual assume-se informação imperfeita acerca dos recursos orçamentários dos jogadores, isto é, os jogadores apenas sabem que seus recursos e os recursos de seus oponentes são independentes e identicamente distribuídos de acordo com uma função de distribuição côncava.

Motivados com o trabalho de Adamo & Matros (2009) e com a falta de trabalhos que tratem, ao mesmo tempo, o problema de jogo Blotto no cenário sequencial e com informação imperfeita, o primeiro objetivo desta dissertação foi introduzir informação imperfeita em uma versão sequencial do jogo Blotto, isto é, nosso principal interesse é construir um modelo de alocação de recursos contra um adversário estratégico, levando em conta que o jogo se desenvolve em duas etapas, sendo que o jogador que se move primeiro possui informação imperfeita sobre os recursos do seu oponente que se move posteriormente, este, por sua vez, tem informação perfeita a respeito dos recursos disponíveis e da alocação escolhida pelo primeiro jogador. A nossa motivação para essa proposta do modelo é que em alguns problemas reais, como por exemplo, na guerra, um país defensor normalmente têm de dividir os seus recursos defensivos em todos as regiões antes de um país atacante, que consegue saber o nível de segurança de cada região, decidir onde irá atacar.

O segundo objetivo foi propor um modelo que não contenha a hipótese de que o jogador que alocar mais recurso em um particular campo de batalha (ou prêmio) sempre o ganha com probabilidade 1, isto é, propomos um modelo no qual assumimos a hipótese de que o jogador que mais alocar recursos em um determinado prêmio possui apenas maior probabilidade de ganhá-lo, sendo que esta probabilidade é igual a proporção de recursos alocados pelo jogador para o determinado prêmio em relação à soma das alocações de todos os jogadores neste prêmio.

1.3 Organização da Dissertação

A presente dissertação está dividida em 4 capítulos, contando com este capítulo introdutório. No Capítulo 2, tratamos de fazer uma breve revisão sobre as duas formas mais usuais de se representar jogos, a forma normal e extensiva, apresentamos também os conceitos de solução de jogos usados nesta dissertação, o conceito de equilíbrio de Nash e o conceito de equilíbrio de subjogo perfeito, e por fim apresentamos também a formulação do jogo Blotto e algumas principais extensões. No Capítulo 3 desta dissertação propomos uma versão sequencial com informação imperfeita do jogo Coronel Blotto. Nesta versão admitimos que existem dois jogadores, jogador A e jogador B, sendo que o jogador A inicia o jogo apenas sabendo que os recursos orçamentários do jogador B são distribuídos de acordo com uma função de distribuição F e, por outro lado, este último, que se move após o jogador A, consegue ver com perfeição toda a estrutura do jogo. Tratamos os casos em que existem dois e três campos de batalhas (ou prêmios). No caso de dois prêmios, supusemos que os recursos dos jogadores podem ser gerados tanto de funções de distribuições côncavas quanto de convexas e derivamos um equilíbrio de subjogo perfeito para a versão do jogo de soma constante (em que os jogadores possuem mesma preferência pelos prêmios) e para a versão do jogo os jogadores possuem preferências opostas sobre os prêmios. No caso de três prêmios, consideramos que os recursos são gerados de uma função de distribuição côncava, sendo que em alguns momentos, por simplificação, particularizamos esta função. Para este segundo caso, objetivando simplificar a exposição, apresentamos um equilíbrio de Nash em estratégias puras para os casos de soma constante, de preferências opostas e onde o jogador B prefere um prêmio que tem valorização intermediária por parte do jogador A. No Capítulo 4 apresentamos também um modelo de jogo Blotto sequencial no qual suprimimos uma hipótese comum de que quem investe mais em um campo sempre o ganha com probabilidade 1. Esta hipótese foi substituída pela hipótese de que o jogador que mais alocar recursos em um determinado prêmio possui apenas maior probabilidade de ganhá-lo, sendo que esta probabilidade é igual a proporção de recursos alocados pelo jogador para o determinado prêmio em relação a soma das alocações de todos os jogadores neste prêmio. Neste capítulo, discutimos apenas o caso de dois campos de batalha e descrevemos o equilíbrio de Nash para o caso do jogo de soma constante.

1.4 Suporte Computacional

O sistema tipográfico usado neste trabalho foi, integralmente, o LaTeX[2], o qual consiste em um conjunto de macros para o processador de textos TeX, desenvolvido por Donald Knuth, em 1986. Sua principal utilização é na produção de textos matemáticos e científicos, devido à alta qualidade tipográfica. Adotou-se o software MikTeX: uma implementação do LaTeX para a utilização em ambiente Windows. Adicionalmente, para reduzir alguns cálculos usamos o software *wolframalpha*[3] e para plotar os gráficos usamos o sistema algébrico *Maple*[4], o qual é um sistema algébrico computacional comercial que constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões.

[2]Para mais informações e detalhes sobre o sistema de tipografia LaTeX ver De Castro (2003) ou acesse o site http://www.tex.ac.uk/CTAN/latex.

[3]Para mais informações acesse http://www.wolframalpha.com/

[4]Para mais detalhes veja o site: http://www.maplesoft.com/products/Maple/features/index.aspx

CAPÍTULO 2

Referencial Teórico

2.1 Introdução

Para fazermos uma análise de qualquer jogo ou situação estratégica é fundamental começarmos com a especificação de um modelo que descreve o jogo. Essa especificação deve ser feita de tal forma que a estrutura do modelo não fique tão simples, a ponto de descartarmos aspectos relevantes do jogo, e não muito complexa, pois podemos obscurecer questões fundamentais, ou ainda tornar a análise do modelo inviável. Atualmente existem, na literatura, diversas formas de se representar um jogo e, neste capítulo, apresentaremos duas importantes formas, a saber: *forma normal (ou estratégica)* e *forma extensiva*.

2.2 Forma Normal

A forma normal (ou estratégica) é uma maneira bastante elementar de se representar um jogo. Para representarmos um jogo na forma normal, precisamos especificar apenas o conjunto de jogadores no jogo, o conjunto de estratégias disponíveis para cada jogador e a forma como essas estratégias se relacionam com as recompensas dos jogadores.

A definição rigorosa de um jogo na forma normal é a seguinte (Myerson, 2007):

Definição 2.2.1. *Um jogo em forma normal é uma tripla* $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$*, onde*

- N *é um conjunto, não vazio, de jogadores;*

- C_i *é um conjunto, não vazio, de estratégias puras (ou ações) disponíveis para o jogador* $i \in N$. *Uma combinação de estratégias escolhidas pelos* N *jogadores é denominada perfil de estratégias;*

- u_i *é uma função, denominada por função utilidade esperada ou recompensa do jogador* i, *que associa cada possível perfil de estratégia* $\sigma \in C = \times_{i \in N} C_i$ *a um numero real* $u_i(\sigma)$.

Um jogo em forma normal Γ é dito ser finito se o conjunto de jogadores N e todos os conjuntos de estratégias C_i forem finitos.

Jogos em forma normal são jogos estáticos, no sentido de que os jogadores se movem simultaneamente e uma única vez, isto é, cada jogador escolhe a estratégia que irá usar durante todo o jogo sem ter nenhuma informação a respeito das escolhas de qualquer outro jogador antes da sua escolha. Também assume-se que os jogadores fazem suas escolhas de modo independente, isto é, os jogadores não podem escolher estratégias que dependem das escolhas dos outros jogadores.

2.2.1 Estratégias

Em um jogo em forma normal as estratégias utilizadas pelos jogadores podem ser do tipo *pura*, ou *mista*. A seguir, apresentaremos as definições de ambos os tipos de estratégias.

Estratégia Pura

Definição 2.2.2 (Estratégia Pura). *Uma estratégia pura para o jogador* i *em um jogo de forma normal* $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ *é qualquer estratégia no conjunto de estratégias puras, isto é, qualquer* $\sigma_i \in C_i$.

Estratégia mista

Definição 2.2.3 (Estratégia Mista). *Em um jogo de forma normal* $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, *uma estratégia mista (ou randomizada) para o jogador* i *é uma distribuição de probabilidade* δ_i *sobre o conjunto* C_i, *ou seja, é um elemento do conjunto* $\Delta(C_i)$, *em que este último denota o conjunto de todas as distribuições de probabilidade que tem suporte contido em* C_i.

Tipicamente, um jogo em forma normal com apenas dois jogadores é convenientemente representado por meio de uma matriz, na qual os jogadores, as estratégias e os ganhos de cada jogador são apresentados. Nesta matriz, as estratégias do primeiro jogador se encontram listadas nas linhas e as estratégias do segundo jogador são listadas nas colunas. Cada célula da matriz possui um par ordenado, que representa a utilidade esperada para ambos os jogadores, sendo que a primeira e a segunda coordenada referem-se, respectivamente, a utilidade esperada do primeiro e segundo jogador quando o perfil de estratégias representado pela linha e pela coluna que deu origem àquela célula é escolhido pelos jogadores.

Exemplo 2.2.1. (Dilema do Prisioneiro) *A fim de ilustrar a ideia básica de um jogo em forma normal, consideremos o exemplo do dilema do prisioneiro (Tucker,* 1950*) que é, provavelmente, um dos exemplos mais conhecidos na teoria dos jogos. A formulação desse problema é a seguinte: dois prisioneiros,* P_1 *e* P_2*, são interrogados em salas separadas e a cada prisioneiro é dada a opção de delatar o companheiro de crime ou negar o crime. Se os dois prisioneiros delatarem um ao outro, então ambos pegarão uma pena de* 4 *anos de cadeia. Se ambos negarem o crime, então cada um receberá uma pena de* 1 *ano de prisão. No entanto, se um dos prisioneiros negar e o outro delatar o crime, então aquele que negar será condenado a* 10 *anos, e o delator sai livre. Esta situação pode ser representada por um jogo em forma normal* Γ*, em que,*

- $N = \{P_1, P_2\}$;
- $C_{P_1} = \{delatar, negar\}$, $C_{P_2} = \{delatar, negar\}$;

		P_2	
		delatar	negar
P_1	delatar	(-4, -4)	(0,-10)
	negar	(-10,0)	(-1, -1)

Figura 2.1: Dilema do Prisioneiro

As funções utilidades $u_{P_1} : C \rightarrow I\!R$ *e* $u_{P_2} : C \rightarrow I\!R$ *são descritas pela matriz de recompensas apresentada na Figura 2.1. Notemos, nesta matriz de recompensas, que o melhor perfil* *de estratégias puras, considerando o critério de soma de utilidade, para os jogadores é o perfil* $(negar, negar)$*, pois ambos pegariam uma pena de apenas* 1 *ano. Por outro lado, adotando o critério de melhor escolha que um prisioneiro pode fazer independente da escolha de estratégia do companheiro de crime, o melhor perfil de estratégias puras é* $(delatar, delatar)$*. Cada perfil de estratégias puras pode ser identificado com um perfil de estratégias mistas, como, por exemplo, o perfil* $(delatar, delatar)$ *corresponde ao perfil de estratégias mistas* $(1,0;1,0)$.

Existem vários exemplos práticos onde o dilema do prisioneiro pode surgir, a seguir apresentaremos um exemplo que é conhecido como *Escudo Antimíssil* (Poundstone, 1993).

- *Escudo Antimíssil.* O País 1 pode construir ou não um sistema de defesa antimíssil. O País 2 pode tanto construir mais mísseis como não construir. Se o País 1 não construir o sistema antimíssil, e o País 2 não construir mais mísseis, então ambos os países estão razoavelmente bem. Se o País 2 construir mais mísseis e o País 1 não tiver o sistema antimíssil, então o País 1 se sentirá muito inseguro. Se o País 1 construir um escudo antimíssil, e o País 2 não construir mísseis, então o País 1 ficará feliz, mas o País 2 se sentirá inseguro. Se os País 1 construir o sistema antimíssil e o País 2 construir mais mísseis, então eles estarão com o mesmo grau de insegurança que no caso em que ambos não constroem e, ambos terão menos recursos para investir em outra áreas.

2.3 Forma Extensiva

Em algumas situações estratégicas (como, por exemplo, na política, economia, jogos de xadrez, pôquer, e em jogos de guerra) os jogadores escolhem suas estratégias de forma sequencial, podendo observar a ação que os outros jogadores realizaram anteriormente. Embora seja possível modelar essas situações como um jogo na forma normal, muitas vezes é mais fácil e adequado usar a forma extensiva, que trata explicitamente o fator tempo no desdobramento do jogo. A forma extensiva de um jogo especifica o conjunto de jogadores, a ordem de quem se move e quais suas opções, quando estes se movem, com qual informação, a recompensa de cada jogador para cada possível desdobramento do jogo e o que os jogadores sabem quando se movem em cada situação do jogo. Admite-se também a possibilidade de fenômenos aleatórios (como, por exemplo, o resultado do lançamento de uma moeda, ou de um dado), usualmente denominado *chance* ou *natureza*, influenciarem na realização do jogo. Esses fenômenos são representados por um jogador que não possui preferências sobre os possíveis resultados do jogo.

Um jogo na forma extensiva pode ser representado por uma árvore de jogo, composta por um conjunto de *ramos* e *nós*. Intuitivamente, cada nó representa uma etapa do jogo em que um jogador tem de tomar uma decisão. Partindo de um nó, cada ramo representa uma escolha possível que este jogador pode tomar neste nó, isto é, um ramo é uma ação do conjunto de ações disponíveis em um dado nó. A árvore de jogo se inicia num único nó chamado de *raiz*, o qual não tem predecessor, e todos os outros nós devem ser precedidos apenas por um outro nó. Se um dado nó não tiver um sucessor, este é chamado de nó terminal do jogo. Um nó terminal da árvore descreve uma possível maneira de como o jogo pode se desdobrar ao longo do tempo, e a cada nó terminal associa-se uma recompensa de jogo para cada jogador.

É apresentado, na Figura 2.2, um exemplo de um jogo em forma extensiva representado por meio de uma árvore de jogo.

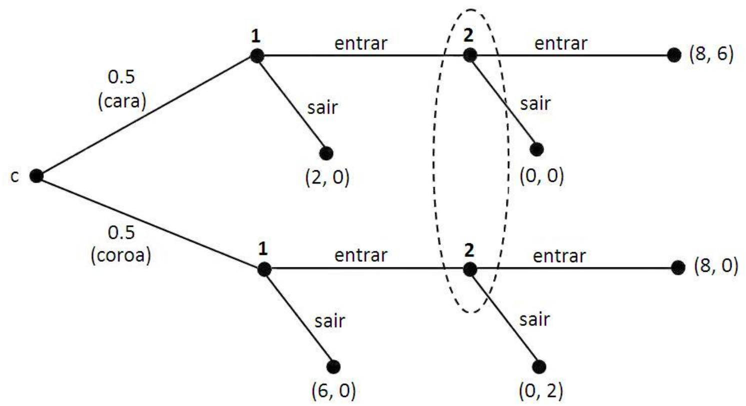

Figura 2.2: Representação em forma de árvore de um jogo na forma extensiva

Na arvore representada na Figura 2.2 temos que a natureza (representada por “c”) se move primeiro com probabilidade 0.5 de dar cara e 0.5 de dar coroa. Após a natureza se mover, temos que o jogador 1 entra no jogo tendo duas possibilidades de movimentação (entrar ou sair). Se o jogador 1 escolher entrar, então o jogador 2 move-se no jogo com as mesmas possibilidades de movimentação do jogador 1. A elipse tracejada significa que o jogador 2 tem informação imperfeita a respeito da movimentação da natureza.

A seguir, apresentaremos a definição formal da representação de um jogo em forma extensiva descrito em (Osborne & Rubinstein, 1994).

2.3.1 Jogos em Forma Extensiva com Informação Perfeita

Definição 2.3.1. *Um jogo em forma extensiva com informação perfeita é um vetor* $\Psi = (N, M, H, P, f_c, \{u_i : i \in N\})$, *em que*

- N *representa um conjunto de jogadores no jogo.*
- M *é um conjunto cujos elementos são os movimentos (ou ações) disponíveis para os jogadores (ou para a chance) durante o jogo.*
- H *é um conjunto das sequências de movimentos (elementos de M), que é fechado a prefixos*[1], *ou seja, se* $h \in H$ *e* h' *é um prefixo de* h, *então* $h' \in H$. *Além disso, se uma sequência infinita* $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ *satisfaz* $(x^n)_{n=1}^{k} \in H$, *para qualquer inteiro finito* k, *então* $(x^n)_{n=1}^{\infty} \in H$. *Cada membro de* H *é uma história. Histórias em* H, *podem ser identificadas com nós em uma árvore de jogo, isto é, cada nó é caracterizado por uma sequência de ações necessárias para alcançá-lo. Defina* Z *o conjunto de trajetórias completas*[2] *de* H. *Considere* $M_h = \{m \in M : h \cdot \langle m \rangle \in H\}$, *onde* $\cdot$ *denota a concatenação de sequências, o conjunto de ações que podem ser tomadas após a história* h.
- $P : (H - Z) \rightarrow N \cup \{c\}$ *é uma função que relaciona cada história não terminal* h *a um elemento de* $N \cup \{c\}$, *onde* c *representa o jogador chance (ou natureza). Temos que* $P(h)$ *representa o jogador que se move após a história* h, *isto é, se* $P(h) = i$ *então o jogador* i *se move após a história* h *e se tivermos* $P(h) = c$, *então o jogador chance é quem se move após essa história. O conjunto de histórias após as quais o jogador* i *se move é representado por* $H_i = \{h : P(h) = i\}$.

[1] Um prefixo de uma sequência $(x^n)_{n=1,\dots,k}$ é qualquer subsequência de $(x^n)_{n=1,\dots,l}$ que consiste dos primeiros $l \leq k$ termos de $(x^n)_{n=1,\dots,k}$. Temos que h é um prefixo de si mesma, e no caso em que um prefixo de h não for ela própria dizemos que este prefixo é estrito.

[2] Uma trajetória (ou história) completa em H é uma história que não é prefixo estrito de nenhuma história em H, ou seja, é uma história terminal.

- f_c *é uma função que associa a cada história em que* $P(h) = c$ *uma medida de probabilidade* $f_c(\cdot \mid h)$ *em* M_h. *Intuitivamente,* $f_c(\cdot \mid h)$ *determina uma distribuição de probabilidade sobre as ações disponíveis para a chance uma vez que a história* h *é atingida.*

- $u_i : Z \to I\!R$ *é uma função utilidade para o jogador* i, *que associa um número real* $u_i(z)$ *para cada trajetória completa* z *do jogo. O número real* $u_i(z)$ *representa o valor esperado da função de utilidade de Von Neumann & Morgenstern (Campello de Souza,* 2007*) que o jogador* i *tem sobre as consequências induzidas se a história completa* z *fosse a sequência de ações implementadas pelos jogadores. Usualmente, se* z *é uma história completa, então* $u_i(z)$ *é tratado como um pagamento associado a* z.

Quando os conjuntos N, M e H forem finitos dizemos que o jogo em forma extensiva é *finito*.

Em jogos extensivos com informação perfeita um jogador, ao tomar sua decisão após alguma história do jogo, tem informação perfeita sobre todas as ações que já foram tomadas no jogo, isto é, quando este se move, ele sabe tudo o que cada jogador fez e sabia em cada nó de decisão passado.

2.3.2 Estratégias

A estratégia de um jogador em um jogo extensivo com informação perfeita é um plano que especifica as ações que esse jogador tomará em cada possível situação que possa aparecer no jogo. Apresentaremos, a seguir, três tipos de estratégias.

Estratégia Pura

Definição 2.3.2. *Uma estratégia pura para o jogador* i, *em um jogo em forma extensiva com informação perfeita, é uma função* s_i *que relaciona a cada história* $h \in H_i$ *um elemento de* M_h. *Assim como na forma normal denotaremos o conjunto de estratégias puras para o jogar i por* C_i.

Estratégia Mista

Definição 2.3.3. *Uma estratégia mista (ou randomizada) para o jogador* i, *em um jogo em forma extensiva com informação perfeita, é uma distribuição de probabilidade* δ_i *sobre o conjunto* C_i.

Estratégia Comportamental

Definição 2.3.4. *Uma estratégia comportamental para o jogador i, em um jogo em forma extensiva com informação perfeita, é uma função ϕ_i que relaciona a cada história $h \in H_i$ uma distribuição de probabilidade sobre M_h.*

Na seção a seguir, trataremos de jogos na forma extensiva com informação imperfeita. Estes jogos englobam várias situações em que jogadores têm apenas informações parciais sobre ações que ocorreram durante o curso do jogo. No nosso trabalho, esta representação será de suma importância.

2.3.3 Jogos em Forma Extensiva com Informação Imperfeita

Em alguns jogos extensivos os jogadores, ao tomarem uma decisão, podem ter informações parciais sobre as ações tomadas no jogo (como, por exemplo situações em que, durante o desdobramento do jogo, um jogador esquece-se de uma ação que ele escolheu, ou situações em que um jogador é incerto sobre se seu adversário realizou uma dada ação). Esses jogos são conhecidos, na literatura, como jogos extensivos com informação imperfeita. A definição formal de um jogo em forma extensiva com informação imperfeita é a seguinte:

Definição 2.3.5. *Um jogo em forma extensiva com informação imperfeita é um vetor $\Psi = (N, M, H, P, f_c, \{u_i : i \in N\}, \{\mathcal{I}_i : i \in N\})$, em que*

- *$\Psi = (N, M, H, P, f_c, \{u_i : i \in N\})$ é um jogo em forma extensiva com informação perfeita.*

- *$\mathcal{I}_i$ é uma partição de $H_i = \{h : P(h) = i\}$, isto é, é uma partição do conjunto de histórias onde o jogador i se move. Essa partição tem a propriedade de que se as histórias $h, h^{'}$ estão em uma mesma célula $I \in \mathcal{I}_i$, então as ações disponíveis em h e $h^{'}$ devem ser as mesmas, isto é, se $I \in \mathcal{I}_i$ e h e $h^{'} \in I_i$, então $M_h = M_{h^{'}}$. Uma célula $I \in \mathcal{I}_i$ de histórias onde o jogador i se move é chamado de um conjunto de informação do jogador i. Intuitivamente, se h e $h^{'}$ estão no mesmo conjunto de informação $I \in \mathcal{I}_i$, então h e $h^{'}$ são indistinguíveis do ponto de vista do jogador i, isto é, o jogador i considera a história $h^{'}$ possível se a verdadeira história for h, e vice versa.*

Assim como no jogo em forma extensiva com informação perfeita, um jogo em forma extensiva com informação imperfeita é finito quando os conjuntos N, M e H forem finitos.

Exemplo 2.3.1. *Baseado na Figura 2.2, temos*

- $N = \{1, 2\}$
- $M = \{cara, coroa, entrar, sair\}$
- $H = \{\langle\rangle, \langle cara\rangle, \langle coroa\rangle, \langle cara, entrar\rangle, \langle cara, sair\rangle, \langle coroa, entrar\rangle, \langle coroa, sair\rangle$
  $\langle cara, entrar, entrar\rangle, \langle cara, entrar, sair\rangle, \langle coroa, entrar, entrar\rangle, \langle coroa, entrar, sair\rangle\}$
- $P(\langle\rangle) = chance, \quad P(\langle cara\rangle) = P(\langle coroa\rangle) = 1,$
  $P(\langle cara, entrar\rangle) = P(\langle coroa, entrar\rangle) = 2$
- $f_c(cara|\langle\rangle) = f_c(coroa|\langle\rangle) = \frac{1}{2}$
- $u_1(\langle cara, sair\rangle) = u_2(\langle coroa, entrar, sair\rangle) = 2$
  $u_1(\langle cara, entrar, entrar\rangle) = u_1(\langle coroa, entrar, entrar\rangle) = 8$
  $u_2(\langle cara, sair\rangle) = u_1(\langle cara, entrar, sair\rangle) = u_2(\langle cara, entrar, sair\rangle) = u_2(\langle coroa, sair\rangle) =$
  $u_2(\langle coroa, entar, entrar\rangle) = u_1(\langle coroa, entrar, sair\rangle) = 0$
  $u_2(\langle cara, entrar, entrar\rangle) = u_1(\langle coroa, sair\rangle) = 6$
- $\mathcal{I}_1 = \{\{cara\}, \{coroa\}\}, \quad \mathcal{I}_2 = \{\langle cara, entrar\rangle, \langle coroa, entrar\rangle\}$

2.3.4 Estratégias

De forma análoga ao caso de jogos com informação perfeita, podemos definir estratégias *puras*, *mistas* e *comportamentais* em jogos extensivos com informação imperfeita. A única diferença é que as definições das estratégias garantem que os jogadores só podem tomar a mesma decisão em histórias que eles não conseguem distinguir.

Estratégia Pura

Definição 2.3.6. *Uma estratégia pura para o jogador i em um jogo em forma extensiva com informação imperfeita é uma função s_i que relaciona a cada conjunto de informação I do jogador* *i um elemento de M_I, isto é, uma ação disponível para i quando este se move no conjunto de informação I.*

Estratégia Mista

Definição 2.3.7. *Uma estratégia mista (ou randomizada) para o jogador i em um jogo em forma extensiva com informação imperfeita é uma distribuição de probabilidade δ_i sobre C_i, onde C_i é o conjunto de estratégias puras para o jogador i.*

Estratégia Comportamental

Definição 2.3.8. *Uma estratégia comportamental para o jogador i em um jogo em forma extensiva com informação imperfeita é uma função ϕ_i que associa a cada conjunto de informação I do jogador i uma distribuição de probabilidade sobre M_I.*

2.4 Equilíbrio de Nash

O conceito de solução mais comumente usado na teoria dos jogos é o de equilíbrio de Nash (Nash, 1950). Intuitivamente, um perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash se mesmo que qualquer um dos jogadores saiba as estratégias que estão sendo usadas pelos demais jogadores, ele não se sente motivado a mudar sua estratégia, isto é, a sua estratégia é uma melhor resposta possível para as estratégias de equilíbrio dos demais jogadores.

Usaremos a notação (σ_{-i}, τ_i) para representar um perfil de estratégias onde todos os jogadores exceto o jogador i, escolhem estratégias que estão no perfil $\sigma \in C$ e somente o jogador i escolhe a estratégia $\tau_i \in C_i$, que pode ser diferente de σ_i. A definição a seguir estabelece formalmente o conceito de equilíbrio de Nash.

Definição 2.4.1. *Um perfil de estratégia $\sigma \in C$ é um equilíbrio de Nash em estratégias puras (mistas ou comportamentais) de um jogo[3] se, e somente se, $u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau_i)$ para todo jogador $i \in N$ e toda estratégia pura (mista ou comportamental) $\tau_i \in C_i$.*

A fim de ilustrar, considere o jogo apresentado na Figura 2.1 temos apenas um único equilíbrio de Nash onde ambos os jogadores escolhem delatar com probabilidade 1. É fácil checar que

[3] Essa definição é a mesma para jogos nas formas normal e extensiva.

pelo menos um jogador tem incentivo a mudar de qualquer outro perfil de estratégias. Por exemplo, ambos os jogadores escolherem negar com probabilidade 1 não pode ser um equilíbrio de Nash, pois ambos jogadores ganhariam se mudassem para estratégia que escolhe delatar com probabilidade 1.

2.5 Equilíbrio de Subjogo Perfeito

Em geral, quando analisamos equilíbrios de Nash de jogos na forma extensiva, estes podem conter muitos equilíbrios sendo que alguns desses podem parecer não razoáveis pois podem ser baseados em ameaças não-críveis (ou vazias). Uma noção de equilíbrio que não permite ameaças não-críveis, e portanto é um refinamento de equilíbrio de Nash, é a de equilíbrio de subjogo perfeito. A seguir, definiremos a estrutura de subjogo e também o equilíbrio de subjogo perfeito.

Definição 2.5.1. *Um subjogo G de um jogo em forma extensiva $\Psi = (N, M, H, P, f_c, \{u_i : i \in N\})$ é um outro jogo em forma extensiva que satisfaz:*

1. *O conjunto de histórias H^G em G consiste de uma única história em H e todos as histórias subsequentes a h;*

2. *A distribuição de probabilidade sobre as ações da natureza em G são as mesmas das correspondentes ações em Ψ;*

3. *As utilidades de trajetórias completas em G são as mesmas utilidades das correspondentes trajetórias completas em Ψ.*

Dada a definição de subjogo, define-se equilíbrio de subjogo perfeito da seguinte forma.

Definição 2.5.2. *Um perfil de estratégias puras (mistas ou comportamentais) σ é um equilíbrio de subjogo perfeito em estratégias puras (mistas, ou comportamentais) de Ψ se ele especifica um equilíbrio de Nash em estratégias puras (mistas, ou comportamentais) em qualquer subjogo de Ψ.*

A técnica mais comum para encontrar os equilíbrios de subjogo perfeito de um jogo finito Ψ é conhecida como indução reversa. Intuitivamente, temos que a técnica sugere que se comece pelo final do jogo e vá resolvendo até chegar ao começo do jogo.

Indução Reversa

Formalmente esta técnica baseia-se nos seguintes passos:

1. Seja $k = 1$ e $\Psi(k) = \Psi$;

2. Seja Z^{-1} o conjunto de todas as histórias que são antecessoras imediatas das histórias terminais do jogo $\Psi(k)$. Para todo $i \in N$ e $h \in Z^{-1} \cap H_i$, o jogador i enfrenta um problema de decisão após história h, e portanto deve escolher a ação que maximiza sua utilidade esperada. Se houver mais de uma ação que produza a mesma utilidade esperada, existirá um equilíbrio de subjogo perfeito contendo cada uma dessas ações. Escolha uma delas para ser a ação escolhida por i segundo a estratégia s, isto é, faça $\sigma_i(h) = a \in argmax_{b \in M_h} u_i(h \cdot \langle b \rangle)$. Passe ao passo seguinte;

3. Defina o jogo $\Psi(k+1)$ da seguinte maneira:

   (a) Para todo $h \in Z^{-1} \cap (\cup_{i \in N} H_i)$, substitua as ações em M_h do jogo $\Psi(k)$, pelo vetor de utilidades que corresponde a história terminal atingida pela ação escolhida no passo anterior. Passe ao passo seguinte;

   (b) Para todo $h \in Z^{-1} \cap (\cup_{i \in N} H_i)^c$, isto é uma história imediatamente antecessora a uma história terminal do jogo $\Psi(k)$ em que chance se move, substitua as ações em M_h, pelo vetor de utilidades que corresponde a utilidade esperada dos jogadores de acordo com a distribuição de probabilidade que descreve as probabilidades do jogador chance escolher cada uma das ações em M_h. Passe ao passo seguinte;

4. Se o conjunto de todas as histórias de $\Psi(k+1)$ em que algum jogador $i \in N$ se move for vazio. Pare a iteração e temos que σ é um equilíbrio de subjogo perfeito em estratégias puras de Ψ. Caso contrário, passe ao passo seguinte;

5. Faça $k = k + 1$. Volte ao passo 2.

A fim de ilustrar os conceitos descritos acima, considere o seguinte exemplo da Figura 2.3. Note, primeiramente, que temos dois subjogos. O primeiro subjogo é o próprio jogo, pois ele é um subjogo degenerado de si mesmo e o segundo é o subjogo que inicia-se no nó de decisão do jogador B. É fácil ver que os perfis de estratégias (entrar, sair) e (sair, entrar) são equilíbrios de Nash em estratégias puras. Este último perfil é baseado em uma ameaça não-crível, pois a ameaça do jogador B de entrar no jogo faz com que o jogador A decida sair, pois sair dará maior utilidade para este jogador. Neste equilíbrio note que após o jogador A sair, o jogador B não tem opção de se mover e, mesmo que tivesse, ele não cumpriria sua ameaça pois sair do jogo dá maior utilidade para esse jogador. Usando a técnica de indução reversa podemos ver no subjogo que começa no nó de decisão para o jogador B que a melhor estratégia para esse jogador é sair. Fixada essa estratégia do jogador B, temos que a melhor estratégia para o jogador A é entrar. Assim, o único equilíbrio de subjogo perfeito em estratégias puras desse jogo é o perfil (entrar, sair).

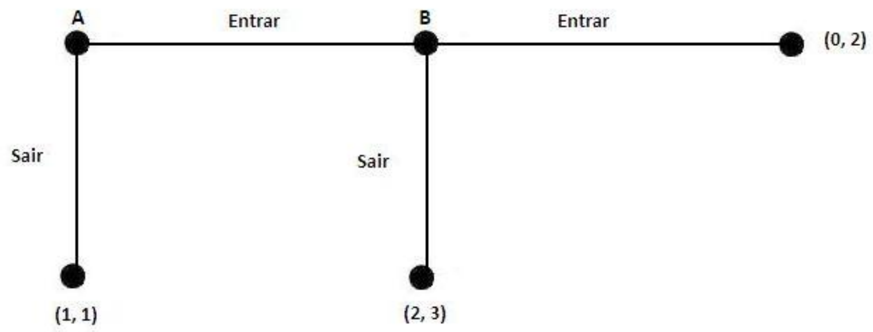

Figura 2.3: Jogo na forma extensiva

2.6 Jogo Coronel Blotto

Alocação de recursos contra um adversário estratégico é um problema bastante antigo na teoria dos jogos e tem sido estudado na contexto dos jogos Coronel Blotto (ver por exemplo, Borel (1921), Tukey (1949), Blackett (1958), Shubik & Weber (1981)). A formulação clássica do jogo Coronel Blotto, proposta por Borel (1921), é um jogo de soma zero com informação perfeita envolvendo dois jogadores, A e B, e K campos de batalhas (ou prêmios) independentes. Cada jogador possui uma quantidade finita de recursos privado X^n, $n \in \{A, B\}$. Cada jogador deve alocar simultaneamente seus recursos, sobre todos os campos de batalha, sem saber a distribuição feita por seu oponente. Cada campo de batalha tem a sua própria valorização e essa, por sua vez, impacta como os jogadores escolhem distribuir seus recursos. O jogador que distribuir mais recursos em um particular campo de batalha ganha esse campo, e a recompensa de um jogador no jogo é a soma de suas recompensas em todos os campos de batalha. Um equilíbrio deste jogo é um par de distribuições K-variada e as primeiras soluções aparecem em Borel & Ville (1938), que resolvem o problema para o caso em que $K = 3$, e a extensão para qualquer $K \geq 3$ finito foi feita em Gross & Wagner (1950), mas, em ambos os trabalhos, exigem-se que $X^A = X^B$.

Ao longo dos anos, as variantes deste jogo foram examinadas por proeminentes estudiosos através de uma ampla gama de áreas. O interesse pelo jogo é derivado de seu grande potencial para aplicações, incluindo desde problemas militares e sistemas de defesa (Blackett (1958), Shubik & Weber (1981), Clark & Kay (2006), Powell (2007), Hausken (2008), e Kovenock & Roberson (2009)), alocação de recursos para campanha política (Snyder (1989), Klumpp & Polborn (2006) e Strömberg (2008)) e da política de redistribuição (Laslier (2002), Laslier e Picard (2002) e Roberson (2008)).

Na literatura sobre jogos Blotto, pode-se encontrar algumas extensões do modelo proposto por Borel que abordam os cenários de soma não zero e informação imperfeita. Entre essas extensões, podemos destacar a versão de jogo Blotto com informação imperfeita (Adamo & Matros, 2009), o modelo de jogos Blotto sequenciais de soma não zero (Powell, 2009), o modelo de jogo Blotto com informação incompleta multidimensional (Kovenock & Roberson, 2010) e o modelo de jogo Blotto sequencial com uma rede de sensores (Fuchs & Khargonekar, 2012).

A seguir, daremos uma breve ideia sobre cada uma dessas extensões e seus principais resultados.

2.6.1 Blotto sequencial de soma não-zero: alocação de recursos defensivos antes de um ataque (Powell, 2009)

Neste trabalho é proposto um modelo de jogo Blotto sequencial defensivo para dois jogadores, um defensor e um atacante, em que o jogador de defesa aloca seus recursos para proteger múltiplos alvos. O atacante recebe informação perfeita sobre a exata distribuição desses recursos e após observar a alocação do defensor, este decide onde irá atacar. Quanto mais o defensor alocar recursos defensivos a um local, mais difícil esse local se torna e é menos provável que um ataque seja bem sucedido. O defensor e o atacante podem valorizar os locais de forma diferente, o que implica que o jogo pode não ser, em geral, de soma zero.

A estratégia do defensor no jogo é um vetor de alocações $r = (r_1, r_2, \ldots, r_K)$, em que $r_j \geq 0 \, \forall j \in \{1, 2, \ldots, K\}$, $\sum_{j=1}^{K} r_j \leq R$ e R é a quantidade de recursos disponíveis para o defensor. Uma estratégia pura para o atacante é uma estratégia que especifica qual campo de batalha ele irá atacar após observar qualquer vetor de alocações r. No equilíbrio, o defensor adota a estratégia minimax. Esta estratégia, por sua vez, normalmente deixa o atacante indiferente em atacar qualquer um dos vários campos de batalha, ou seja, o atacante tem várias melhores respostas puras. Mesmo assim, no equilíbrio o atacante ataca um local entre suas melhores respostas de tal forma a minimizar as perdas do defensor. Além disso, os autores conseguem mostrar que o conjunto de locais que minimiza as perdas do defensor é genericamente unitário. Assim, no único caminho de equilíbrio de subjogo perfeito, o defensor minimax o atacante e o atacante atinge o local (genericamente único) entre as suas melhores respostas que minimiza as perdas do defensor.

2.6.2 Um jogo Blotto com informação incompleta multidimensional (Kovenock & Roberson, 2010)

Neste trabalho, é investigada uma versão do jogo Blotto com informação incompleta em que dois jogadores dispõem de uma quantidade fixa de recursos igual a 1 para alocar em K campos de batalha. Os jogadores possuem informação incompleta com respeito ao valor dos K campos de batalha, pois assume-se que tal valoração é advinda de uma mesma distribuição K-variada de forma independente para ambos os jogadores.

Os resultado obtidos são apenas para os casos em que K é um múltiplo de 3. Para o caso particular em que $K = 3$ e a distribuição corresponde a uma uniforme na superfície da esfera centrada na origem e de raio igual a 1, os autores mostram que se a valorização do campo de batalha i é v_i, então a estratégia de alocar v_i^2 unidades de recursos a esse campo constitui um equilíbrio Bayesiano simétrico em estratégias puras.

2.6.3 Um jogo Coronel Blotto sequencial com uma rede de sensores (Fuchs & Khargonekar, 2012)

Neste trabalho os autores propõem uma versão de jogo Blotto sequencial para dois jogadores, jogador A e jogador B, em que esses devem alocar seus recursos privados entre K regiões. Uma característica fundamental dessa formulação é a introdução de uma rede de sensores empregada pelo jogador B, cuja existência e propriedades são de conhecimento comum, para ganhar uma vantagem informacional sobre o jogador A. Estes sensores são baseados em um sistema de alerta precoce que tem por objetivo notificar o jogador B sobre uma possível violação do perímetro por parte do jogador A.

Nessa modelagem o jogador n, $n \in \{A, B\}$, possui recurso privado igual a $X^n \in \mathbb{R}_+$. O jogador A aloca seus recursos primeiro e, em seguida, o jogador B recebe um valor de sensor para cada região de atribuição indicando se o jogador A está acima ou abaixo de um limite especificado. Usando essa informação de alerta precoce, o jogador B pode alocar seus recursos de forma mais eficaz. Uma alocação de um jogador no jogo é simplesmente um vetor K-dimensional $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_K^n)$, em que $x_i^n \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, K\}$, é a quantidade de recurso orçamentário que o jogador n destina ao local i.

Os autores focam em estratégias mistas e as definem como sendo uma função densidade de probabilidade conjunta K-variada $P_n : \mathbb{R}^K \to [0, 1]$. As funções utilidades de cada jogador são definidas e como cada jogador objetiva maximizar o número esperado de regiões ganhas, procura maximizar a sua respectiva função de utilidade. Os autores também apresentam as condições necessárias para as estratégias de equilíbrio e exibem numericamente essas condições para vários cenários.

2.6.4 Um jogo Blotto com informação imperfeita (Adamo & Matros, 2009)

Neste trabalho, os autores propõem um jogo Blotto com informação imperfeita para N jogadores, cada um seu recurso privado X^n, $\forall n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, e K prêmios. A informação imperfeita reside no fato de que os jogadores apenas sabem que os recursos de seus oponentes são independentes e identicamente distribuídos de acordo com uma função de distribuição acumulada F que assume-se ser côncava e de conhecimento comum entre todos os jogadores.

Nesta modelagem, com o objetivo de encontrar um equilíbrio bayesiano [4] em estratégias puras simétricas monotônica, assume-se que as estratégias de alocação adotadas pelos jogadores são lineares, isto é, supõe-se que uma estratégia para um jogador n é uma função:

$$\beta^n = (\beta_1^n, \beta_2^n, \ldots, \beta_K^n) : [0,1] \to [0,1]^K,$$

onde $\beta_i^n = \alpha_i X^n \geq 0$ é a alocação orçamentária destinada pelo jogador n ao prêmio i, $\forall n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, K\}$ e $\alpha_i \in [0,1]$ tal que $\sum_{i=1}^{K} \alpha_i = 1$. Considerando as estratégias dos demais jogadores fixas de acordo com β^n, a melhor resposta para o jogador 1 pode ser obtida da solução do seguinte problema de maximização:

$$\max_{x_1^1, x_2^1, \ldots, x_K^1} \quad W_1 Pr\{x_1^1 > \alpha_1 X^2, \ldots, x_1^1 > \alpha_1 X^N\} + \ldots + W_K Pr\{x_K^1 > \alpha_1 X^2, \ldots, x_K^1 > \alpha_1 X^N\}, \tag{2.1}$$

$$\text{tal que} \quad \sum_{i=1}^{K} x_i^1 = x^1,$$

onde x^1 é o orçamento privado recebido pelo jogador 1, W_i é a avaliação do prêmio i, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, K\}$ para todos os jogadores e $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_K^1)$ é a alocação orçamentária feita pelo jogador 1.

A solução do problema expresso em (2.1) constitui um equilíbrio bayesiano em estratégias puras simétricas monotônica em que $\alpha_i = \frac{W_i}{W_1 + W_2 + \ldots + W_K}$. Adicionalmente, os autores derivam algumas propriedades do equilíbrio encontrado. Essas propriedades são:

- Os jogadores competem por todos os prêmios no equilíbrio;
- Cada um dos jogadores investe mais recursos no prêmio que for mais valioso;
- O jogador que possuir o maior recurso ganhará todos os prêmios.

Detalhamos um pouco mais o artigo de Adamos & Matros (2009) pelo fato deste ser de fundamental importância nos capítulos subsequentes. Essa importância é derivada do fato de que a modelagem que propomos possui uma estrutura bastante similar à modelagem proposta por esses autores. No capítulo a seguir, propomos um jogo Blotto na versão sequencial onde assumimos

[4] Para detalhes sobre a noção de equilíbrio bayesiano ver Myerson (2007).

informação imperfeita, nos moldes do artigo de Adamos & Matros (2009), por parte do jogador que se move primeiro. A diferença entre nossa proposta e a proposta desses autores é que, além do cenário de sequencialidade, assumimos que o jogador que se move por segundo observa com perfeição toda a estrutura do jogo, incluindo a estratégia de alocação orçamentária adotada pelo jogador que inicia o jogo.

Também usamos a estrutura da modelagem destes autores no Capítulo 4, adotando também a suposição de que apenas o jogador que se move primeiro possui informação imperfeita e, por outro lado, o jogador que se move por segundo observa com perfeição toda a estrutura do jogo. No entanto, excluímos a hipótese de quem mais investir recursos em um particular prêmio sempre o ganhará e adotamos o critério de que o jogador que mais destinar recursos a um prêmio somente possui maior probabilidade de ganhá-lo.

CAPÍTULO 3

Jogo Blotto Sequencial com Informação Imperfeita

"Quem é o Rei da glória? O Senhor forte e valente, o Senhor valente nas guerras. "

Salmos 24:8

3.1 Introdução

Como destacamos no capítulo anterior, a maioria das formulações de jogos Blotto que existem na atualidade assumem a hipótese de que os jogadores alocam seus recursos de forma simultânea, além de serem analisadas no contexto de informação perfeita, em que todos os jogadores possuem conhecimento perfeito sobre toda a estrutura do jogo incluindo os recursos orçamentários de seus oponentes. No entanto, alguns problemas de alocação são sequenciais, como por exemplo, no caso onde defensores têm de alocar parte ou a totalidade dos seus recursos finitos antes de um atacante decidir onde atacar (Powell (2009)) ou no caso onde defensores são forçados a alocar todos os seus recursos buscando proteger constantemente todo o sistema antes de atacantes procurar o ponto mais fraco (Deck & Sheremeta (2012)).

O problema de alocação sequencial tem sido abordado em alguns trabalhos recentes, entre eles Powell (2009), Yumiko (2012) e Zachariah & Pramod (2012). Em todos esses, admite-se que cada jogador possui informação perfeita sobre os recursos orçamentários de seus oponentes. Motivados na falta de trabalhos que tratem, ao mesmo tempo, o problema sequencial e com informação imperfeita, propomos neste capítulo uma versão de jogo Blotto que abordam esses dois fatos.

Tomando como base a modelagem proposta no trabalho publicado por Adamo & Matros (2009), propusemos uma versão sequencial com informação imperfeita do jogo Coronel Blotto. Admitimos, assim como o jogo Blotto proposto por Borel (1921), apenas dois jogadores (jogador A e jogador B) e modelamos o jogo no qual o jogador A enfrenta o problema de alocação de todos os seus recursos limitados, sobre $K \in \{2,3\}$ campos de batalhas, antes do jogador B decidir como alocar todos os seus recursos sobre os campos de batalhas. Nesta versão, assumimos informação imperfeita, por parte apenas do jogador que se move primeiro, jogador A, acerca dos recursos orçamentários de seu oponente, jogador B, isto é, supomos que o jogador que se move primeiro sabe apenas que os recursos de seu oponente são distribuídos de acordo com uma dada função de distribuição acumulada, enquanto que o oponente, que se move depois, tem informação perfeita sobre toda a estrutura do jogo, inclusive sobre a alocação escolhida pelo primeiro jogador.

Salientamos que a suposição de que apenas o jogador que se move primeiro possui informação imperfeita a respeito dos recursos do jogador que se move na sequencia está muito próximo à fatos reais, pois em problemas militares, por exemplo, um país defensor normalmente aloca seus recursos defensivos sem saber qual o recurso que o país atacante têm disponível. A situação em que o defensor possui informação perfeita a respeito dos recursos do atacante e o atacante possui informação imperfeita a respeito dos recursos do defensor não é muito realística e não encontramos motivação para aborda-la. Embora não seja realística, a análise dessa situação pode ser identificada com a análise feita no trabalho de Adamo & Matros (2009), mas supondo que apenas um dos agentes (no caso o atacante) possui informação imperfeita a respeito dos recursos orçamentários de seu oponente.

Neste capítulo, iremos considerar três versões do modelo: uma em que a ordem de preferência dos jogadores pelos campos de batalha é a mesma, outra em que a ordem das preferências é oposta e uma terceira versão em que as preferências não são nem idênticas nem opostas. Para os casos em que os jogadores estão disputando $K = 2$ prêmios apresentamos um equilíbrio de subjogo perfeito em estratégias puras e para os casos em que os jogadores estão disputando $K = 3$ prêmios apresentamos um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

3.2 O Modelo

Existem dois jogadores, jogador A e jogador B. Cada jogador tem seu orçamento privado X^n, $n \in \{A, B\}$, que é independente e identicamente distribuído no intervalo $(0, 1]$ de acordo com uma função de distribuição F. [1] Assumimos que F é contínua e tem derivada positiva em $(0, 1)$. Existem K prêmios e o valor do prêmio i para o jogador n é $W_i^n > 0$. Os jogadores estão competindo sequencialmente por todos os prêmios e cada jogador tem de alocar seu orçamento privado X^n sobre todos os prêmios.

O jogo sequencial é da seguinte forma:

(i) Após observar o seu recurso x^A, o jogador A aloca seus recursos orçamentários, de forma a maximizar a sua utilidade esperada, sabendo apenas que os recursos do jogador B são distribuídos de acordo com F;

(ii) Após observar o seu recurso x^B e a estratégia de alocação escolhida pelo jogador A, o jogador B escolhe a estratégia que maximiza a sua utilidade esperada.

Assumimos que o jogador A ganha o prêmio i, $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$, se ele aloca mais recurso orçamentário do que o jogador B, caso contrário, o jogador B é quem ganha o prêmio. No caso em que ambos os jogadores alocam a mesma quantidade de recursos para o mesmo prêmio eles somente possuem mesma probabilidade[2] de ganhar o prêmio.

Nossas principais suposições são:

- Cada jogador n tem seu orçamento privado X^n, ou seja, o valor para alocar sobre os prêmios. Os jogadores não possuem utilidade para sobra de recursos.

[1] Como será visto adiante, a hipótese de que os recursos de ambos jogadores segue a mesma distribuição não é importante para o cálculo do equilíbrio e poderia ser removida. Optou-se fazer essa suposição para tornar a apresentação do modelo mais simples, mas tal hipótese pode ser removida sem alterar significativamente os resultados.

[2] Assim como na formulação original do jogo Blotto, assumiremos que o critério de desempate quando mais de um jogador aloca o mesmo recurso em um particular prêmio é escolher aleatoriamente um desses jogadores para ganhar o prêmio em questão.

- Cada orçamento privado X^n é independente e identicamente distribuído no intervalo $(0,1]$, de acordo com a função de distribuição F.
- O jogador n conhece a realização x^n de X^n, $n \in \{A, B\}$.
- Os valor do prêmio i para o jogador n é W_i^n. Ambos buscam maximizar os seus retornos esperados.
- A função de distribuição F é de conhecimento comum, é contínua e possui derivada positiva no intervalo $(0,1)$.
- Os jogadores submetem suas alocações orçamentárias sequencialmente.
- Assumimos que o jogador A aloca seus recursos orçamentários primeiro. O jogador B observa perfeitamente a alocação do jogador A e portanto conhece a realização x^A ao tomar sua decisão. Por outro lado, o jogador A apenas sabe que os recursos do jogador B são distribuídos de acordo com a função de distribuição F.

3.3 Estratégias

Nesta seção, definiremos as estratégias do jogo para ambos os jogadores e apresentaremos as utilidades esperadas do jogo para cada jogador.

Estratégia do Jogador A

Uma estratégia para o jogador A é uma função

$$\boldsymbol{\psi^A} = (\psi_1^A, \psi_2^A, \dots, \psi_K^A) : (0,1] \longrightarrow [0,1]^K, \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^{K} \psi_i^A(x^A) = x^A,$$

que determina a alocação orçamentária para cada possível realização x^A do jogador A.

Estratégia do Jogador B

Uma estratégia para o jogador B é uma função

$$\boldsymbol{\psi^B} = (\psi_1^B, \psi_2^B, \dots, \omega_K^B) : \mathtt{D} \times (0,1] \longrightarrow [0,1]^K, \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^{K} \psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), (x^B)) = x^B,$$

em que $\mathtt{D} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_K) \in [0,1]^K : \sum_{i=1}^{K} x_i \leq 1\}$, que determina a alocação orçamentária para cada possível realização x^B do jogador B e alocação orçamentária $\boldsymbol{\psi^A}(x^A)$ do jogador A.

Note que os termos $\sum_{i=1}^{K} \psi_i^A(x^A) = x^A$ e $\sum_{i=1}^{K} \psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), (x^B)) = x^B$ nas estratégias dos jogadores A e B, respectivamente, impõem que os jogadores invistam todos os seus recursos sobre os prêmios, mesmo que estes tenham certeza de não ganhar nenhum dos prêmios. Essa suposição é derivada da formulação clássica do jogo Blotto, onde supõe-se que nenhum dos jogadores tem utilidade para possíveis sobras de recursos.

3.3.1 Utilidades

A utilidade de um jogador no jogo é a soma das utilidades dos prêmios (ou campos de batalha) ganhos. Por exemplo, se há disputa por dois prêmios e o jogador A aloca mais recursos que o jogador B em ambos os prêmios, então a utilidade do jogador A é a soma das utilidades dos dois prêmios. Formalmente, temos:

A utilidade do jogador A no jogo é:

$$\mathrm{I}_1^A W_1^A + \mathrm{I}_2^A W_2^A + \ldots + \mathrm{I}_K^A W_K^A, \tag{3.1}$$

para $i \in \{1, 2, \ldots K\}$, em que:

$$\mathrm{I}_i^A = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \psi_i^A(x^A) > \psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), (x^B)), \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad \psi_i^A(x^A) = \psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), (x^B)), \\ 0, & \text{se} \quad \psi_i^A(x^A) < \psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), (x^B)). \end{cases}$$

E a utilidade do jogador B é

$$\mathrm{I}_1^B W_1^B + \mathrm{I}_2^B W_2^B + \ldots + \mathrm{I}_K^B W_K^B, \tag{3.2}$$

para $i \in \{1, 2, \ldots K\}$, em que:

$$\mathrm{I}_i^B = 1 - I_i^A.$$

3.4 A Análise do Equilíbrio no Caso de Soma Constante

Analisamos, a seguir, a situação em que temos $K = 2$ e $K = 3$ prêmios e os jogadores valorizam-nos da mesma maneira, isto é, consideramos que a avaliação do prêmio i é W_i para ambos os jogadores. Nesse caso, a soma das utilidades dos jogadores A e B é sempre igual a soma dos valores de todos os prêmios em disputa, isto é, o jogador que ganhar um particular prêmio provoca uma perda de igual utilidade no seu oponente, logo o jogo é de soma constante.

Inicialmente, abordamos o caso em que $K = 2$, onde nosso objetivo é determinar um equilíbrio de subjogo perfeito em estratégia pura para esse tipo de jogo. Após o estudo do caso em que os jogadores estão disputando $K = 2$ prêmios, abordamos o caso em que $K = 3$ no qual, por simplicidade, determinamos um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

3.4.1 O caso K=2

Assuma, sem perda de generalidade, que $W_1 \geq W_2$. Dadas as suposições anteriores, no caso em a quantidade de recursos do jogador B for maior do que a quantidade recebida pelo jogador A, então a melhor estratégia do jogador B é escolher alocar uma quantia de recursos maior do que o valor alocado pelo jogador A em ambos os prêmios, pois, desse modo, o jogador B ganha os dois prêmios. Se o jogador B recebe uma quantidade de recursos menor ou igual a do jogador A e, mesmo assim, esse valor é maior do que a quantia que o jogador A destina ao campo de batalha mais valioso (W_1), então uma melhor estratégia do jogador B é alocar todos os seus recursos no campo W_1. Além disso, se o jogador B receber uma quantidade de recursos exatamente igual ao que o jogador A investiu no prêmio W_1, temos duas situações: (a) se A investiu em W_1 uma quantidade de recursos menor ou igual ao que investiu em W_2, B deve investir tudo no prêmio W_1; (b) se A investiu em W_1 uma quantidade de recursos maior ao que investiu em W_2, então B deverá investir tudo em W_1 se $W_1 \geq 2W_2$ e investir tudo em W_2 no caso contrário. Se o jogador B possuir menos recursos do que o jogador A e se esses recursos forem suficientes apenas para ganhar apenas o prêmio menos valioso (W_2), então uma melhor estratégia do jogador B é alocar todos os recursos em W_2. Finalmente, se o jogador B recebe uma quantidade de recursos tal que $x^B < \min(\psi_1^A(x^A), \psi_2^A(x^A))$, então qualquer estratégia de alocação orçamentária $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), (x^B))$ será ótima, pois neste caso o jogador B não ganhará nenhum dos prêmios.

Portanto, uma estratégia de alocação ótima para o jogador B no jogo é

$$\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B) = \begin{cases} (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A), & \text{se } \ x^B > x^A, \\ (x^B, 0), & \text{se } \ \psi_1^A < x^B \leq x^A \ \text{ ou } \ x^B = \psi_1^A \leq \psi_2^A, \\ & \quad \text{ou } \quad \psi_2^A < x^B = \psi_1^A \ \text{ e } \ W_1 \geq 2W_2, \\ (0, x^B), & \text{se } \ \psi_2^A \leq x^B < \psi_1^A \ \text{ ou } \quad \psi_2^A < x^B = \psi_1^A \ \text{ e } \ W_1 < 2W_2, \\ \left(\psi_1^B, \psi_2^B\right), & \text{se } \ x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A). \end{cases}$$

Na estratégia de alocação ótima do jogador B usamos as notações abreviadas ψ_i^A e ψ_i^B, $i \in \{1, 2\}$, para denotar, respectivamente, $\psi_i^A(x^A)$ e $\psi_i^B(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B)$. Esta notação será usada em todo o texto que se segue ao longo deste capítulo, onde não causar confusão ao leitor.

Problema de otimização do Jogador A

Admitindo que o jogador A recebe um orçamento privado igual a $X^A = x^A$ para alocar, o problema do jogador A é, sabendo da estratégia de melhor resposta do jogador B, isto é, $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B)$, determinar a estratégia de alocação ótima $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A)$, de tal forma a maximizar a sua utilidade esperada. Para isso, observando que como F é contínua o evento $X^B \in \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A\}$ tem probabilidade nula, o jogador A tem o seguinte problema de maximização a solucionar:

$$\max_{\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}} \quad U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)), \tag{3.3}$$

em que,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) &= (W_1 + W_2) Pr(X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A)) \\ &+ W_1 Pr(\psi_2^A \leq X^B < \psi_1^A) \\ &+ W_2 Pr(\psi_1^A < X^B \leq x^A). \end{aligned}$$

Note que a função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ indica a utilidade esperada do jogador A, pois no caso em que os recursos orçamentários do jogador B forem menores que a alocação do jogador A, para ambos os prêmios, o jogador A ganha os dois prêmios. Se o jogador B tem menos recursos que o jogador A, mas tem o suficiente apenas para ganhar o prêmio menos valioso, então o jogador A ganhará o prêmio mais valioso. E, finalmente, se o jogador B tem menos recursos que o jogador A, mas tem o suficiente para ganhar o prêmio mais valioso, então o jogador A ganha o prêmio menos valioso.

Objetivando determinar a estratégia de alocação ótima do jogador A, dividimos a nossa análise nos dois casos abaixo para podermos saber o mínimo entre ψ_1^A e ψ_2^A, que aparece na função utilidade deste jogador.

Caso I: $\psi_1^A \leq \psi_2^A$.

Se $\psi_1^A \leq \psi_2^A$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A) = \psi_1^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$(W_1 + W_2)F(\psi_1^A) + W_2(F(x^A) - F(\psi_1^A))$$

ou seja,

$$W_1 F(\psi_1^A) + W_2 F(x^A). \tag{3.4}$$

Note que o termo $W_2F(x^A)$, da expressão (3.4), é uma constante, então essa expressão é maximizada quando o valor de $W_1F(\psi_1^A)$ for máximo. Como F é crescente, então o máximo ocorre quando o valor de ψ_1^A for o maior possível, isto é, quando $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{2}$. Este resultado é bastante intuitivo pois, como o jogador A valoriza o primeiro prêmio pelo menos tanto quanto o segundo prêmio, era de se esperar que este jogador não alocasse menos da metade de seus recursos no primeiro prêmio. Note ainda que como este ponto de ótimo pertence também à região do Caso II, para encontrar o máximo global, sem perda de generalidade, basta considerar o Caso II.

Caso II: $\psi_1^A \geq \psi_2^A$.

Se $\psi_1^A \geq \psi_2^A$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A) = \psi_2^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$(W_1 + W_2)F(\psi_2^A) + W_1(F(\psi_1^A) - F(\psi_2^A)) + W_2(F(x^A) - F(\psi_1^A)).$$

Substituindo $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A$, temos que o problema de maximização se reduz a

$$\max_{\psi_1^A} \quad T(\psi_1^A) \tag{3.5}$$

em que,

$$T(\psi_1^A) = W_2F(x^A - \psi_1^A) + (W_1 - W_2)F(\psi_1^A) + W_2F(x^A).$$

Temos que as duas primeiras derivadas de $T(\psi_1^A)$ em relação a ψ_1^A são:

$$\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} = -W_2F^{'}(x^A - \psi_1^A) + (W_1 - W_2)F^{'}(\psi_1^A),$$

e

$$\frac{\partial^2 T(\psi_1^A)}{\partial (\psi_1^A)^2} = W_2F^{''}(x^A - \psi_1^A) + (W_1 - W_2)F^{''}(\psi_1^A).$$

Note que o sinal da segunda derivada de $T(\psi_1^A)$ é igual ao sinal da segunda derivada da função de distribuição F. Assim, vamos considerar os seguintes casos:

(a) $F^{''} > 0, \ \forall x \in (0, 1)$;

(b) $F^{''} < 0, \ \forall x \in (0, 1)$.

Consideremos, primeiro, o caso (a). Então como $\frac{\partial^2 T(\psi_1^A)}{\partial (\psi_1^A)^2} > 0$, temos que a função $T(\psi_1^A)$ é convexa para $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{2}, x^A]$. Assim, o ponto que maximiza $T(\psi_1^A)$ se encontra nos extremos do intervalo de variação de ψ_1^A, ou seja, quando $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$ ou $\psi_1^A = x^A$. Assim, dessa análise, decorrem duas situações:

(1) Se $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, temos que a utilidade do jogador A será de $T\left(\frac{x^A}{2}\right) = W_1F\left(\frac{x^A}{2}\right) + W_2F(x^A)$,

(2) Se $\psi_1^A = x^A$, temos que a utilidade do jogador A será de $T(x^A) = W_1F(x^A)$.

Se $T\left(\frac{x^A}{2}\right) < T(x^A)$, isto é, $W_1F\left(\frac{x^A}{2}\right) + W_2F(x^A) < W_1F(x^A)$, então o valor que maximiza $T(\psi_1^A)$ é $\psi_1^A = x^A$. Caso contrário, se $W_1F\left(\frac{x^A}{2}\right) + W_2F(x^A) > W_1F(x^A)$, então $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$ é o valor que maximiza essa função. Finalmente, se $W_1F\left(\frac{x^A}{2}\right) + W_2F(x^A) = W_1F(x^A)$, temos que $\psi_1^A = x^A$ e $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$ são os valores que maximizam $T(\psi_1^A)$. Logo, $\psi_1^A = x^A$ é uma melhor resposta, para o jogador A, se, e somente se,

$$\frac{W_1}{W_2} \geq \frac{F(x^A)}{F(x^A) - F\left(\frac{x^A}{2}\right)}. \tag{3.6}$$

Como estamos admitindo que a função de distribuição F é convexa, isto é, $F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ $\forall x, y$ no suporte de F e $0 \leq \lambda \leq 1$ e, pelo fato de $F(0) = 0$, decorre que $F\left(\frac{x^A}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(x^A)$. Portanto, o lado direito da Equação (3.6) é no máximo igual a 2. Logo, temos que se $W_1 > 2W_2$, então $\psi_1^A = x^A$ é a única melhor resposta do jogador A.

Considerando agora o caso (b), é fácil ver que para $W_1 = W_2$ o valor que maximiza a utilidade esperada do jogador A é $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, pois $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} < 0$. Para $W_1 > W_2$, então por meio da condição de primeira ordem obtemos

$$\frac{F'(\psi_1^A)}{F'(x^A - \psi_1^A)} = \frac{W_2}{W_1 - W_2}. \tag{3.7}$$

Como $F'' < 0$, temos que F' é decrescente e, por esse fato, a razão $\frac{F'(\psi_1^A)}{F'(x^A - \psi_1^A)} \leq 1$. Então se tivermos $\frac{W_2}{W_1 - W_2} > 1$, isto é, $W_2 < W_1 < 2W_2$, decorre que não existe máximo no intervalo $(\frac{x^A}{2}, x^A]$. Assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, visto que $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} < 0$ na região $(\frac{x^A}{2}, x^A]$. Se tivermos $W_1 = 2W_2$, é fácil ver que o ótimo será em $\psi_1 = \frac{x^A}{2}$, pois $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} < 0$ na região $(\frac{x^A}{2}, x^A]$. E, em jogos em que $W_1 > 2W_2$, temos que o lado direito da Equação (3.7) é menor que 1 e que o lado esquerdo desta equação é decrescente em ψ_1^A. Desta forma, se $\frac{F'(x^A - \epsilon)}{F'(\epsilon)} > \frac{W_2}{W_1 - W_2}$, $\forall \epsilon > 0$, então $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} > 0$ na região $(\frac{x^A}{2}, x^A)$ e, como a função $T(\psi_1^A)$ é contínua, o máximo ocorrerá no ponto $\psi_1^A = x^A$. Por outro lado, se existir $\epsilon > 0$ tal que $\frac{F'(x^A - \epsilon)}{F'(\epsilon)} \leq \frac{W_2}{W_1 - W_2}$, então o máximo ocorrerá no ponto que for solução da Equação (3.7). A exibição de tal ponto depende da função de distribuição adotada em cada jogo e por esse fato deixamos a solução na forma implícita. Na Seção 3.5, apresentaremos exemplos para algumas distribuições de probabilidade côncavas e convexas e um caso particular para a distribuição beta, que em geral não é côncava nem convexa.

3.4.2 O caso K=3

Suponha agora que os jogadores estão competindo por $K = 3$ prêmios. Assumiremos, nesta subseção, que os recursos dos jogadores são distribuídos de acordo com uma função de distribuição $U(0, 1]$ e que os jogadores A e B avaliam os prêmios da forma $W_1 > W_2 \geq W_3$, e, além disso, $W_1 \geq W_2 + W_3$.

De forma similar a ideia usada no caso $K = 2$, temos que uma estratégia de equilíbrio para o jogador B é dada por

$$\boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), x^B) = \begin{cases} (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } x^B > x^A, \\ (x^B, 0, 0), \text{ se } \psi_1^A < x^B < \min(\psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A), \\ (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, 0), \text{ se } \psi_1^A + \psi_2^A < x^B < x^A, \\ (\psi_1^B > \psi_1^A, 0, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } \psi_1^A + \psi_3^A < x^B < \psi_1^A + \psi_2^A, \\ (0, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } \psi_2^A + \psi_3^A < x^B < \psi_1^A, \\ (0, x^B, 0), \text{ se } \psi_2^A < x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A + \psi_3^A), \\ (0, 0, x^B), \text{ se } \psi_3^A < x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A), \\ (\psi_1^B, \psi_2^B, \psi_3^B), \text{ se } x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A), \text{ ou } x^B \in \mathrm{S}, \end{cases}$$

em que $\mathrm{S} = \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A\}$.

Problema de otimização do jogador A

Suponha que o jogador A recebe um orçamento privado igual a $X^A = x^A$ para alocar. O problema do jogador A é, sabendo da estratégia de melhor resposta do jogador B, determinar a estratégia de alocação ótima $\boldsymbol{\psi^{A*}}$, de modo que esta maximize sua utilidade esperada.

Assim, o jogador A tem o seguinte problema de maximização a solucionar:

$$\max_{\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A} \quad U_A(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), X^B)), \tag{3.8}$$

em que,

$$\begin{aligned} & U_A(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), X^B)) \\ = \; & (W_1 + W_2 + W_3) Pr(X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A)) \\ + \; & (W_2 + W_3) Pr(\psi_1^A < X^B < \min(\psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A)) \\ + \; & W_3 Pr(\psi_1^A + \psi_2^A < X^B < x^A) + W_2 Pr(\psi_1^A + \psi_3^A < X^B < \psi_1^A + \psi_2^A) \\ + \; & W_1 Pr(\psi_2^A + \psi_3^A < X^B < \psi_1^A) + (W_1 + W_3) Pr(\psi_2^A < X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A + \psi_3^A)) \\ + \; & (W_1 + W_2) Pr(\psi_3^A < X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A)). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, em todos os casos a seguir, assumiremos $W_3 = 1$. Dividiremos nossa análise nos seguintes casos, onde os detalhes de cada caso podem ser encontrados no Apêndice A.1:

Caso I: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A$. Neste caso, temos que o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso II: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A$. Neste caso, temos que o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A$. Neste caso,

- se $W_1 > 4W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{2}$;
- se $W_1 < 4W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1 = \psi_3 = \frac{x^A}{3}$;
- se $W_1 = 4W_2$ o máximo ocorre em quaisquer pontos tais que $\psi_1 = \psi_3 \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Caso IV: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A$. Neste caso,

- se $W_1 > 6 - 2W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{2}$;
- se $W_1 < 6 - 2W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{3}$;
- se $W_1 = 6 - 2W_2$ o máximo ocorre em quaisquer pontos tais que $\psi_1^A = \psi_2^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Caso V: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A \leq \psi_1^A$. Neste caso,

- se $W_1 > W_2 + 2$ o máximo ocorre em $\psi_1 = x^A$;
- se $W_1 < W_2 + 2$ o máximo ocorre em $\psi_2 = \psi_3 = \frac{x^A}{4}$;
- se $W_1 = W_2 + 2$ o máximo ocorre em quaisquer pontos tais que $\psi_2 = \psi_3 \in [0, \frac{x^A}{4}]$.

Caso VI: $\psi_3^A \leq \psi_2^A$ e $\psi_2^A + \psi_3^A \leq \psi_1^A$.

- se $W_1 > 2W_2$ e $W_1 \geq 4$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = x^A$;
- Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 > 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{2}$;
- Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 = 2$, então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;

- se $W_1 \geq 2W_2$ e $W_1 < 4$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = x^A$ se $W_1 > 2 + W_2$, se $W_1 < W_2 + 2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$,$\psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$, e se $W_1 = 2 + W_2$ então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(x^A, 0, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;
- se $2W_2 > W_1$ e $W_2 < 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, $\psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$;
- se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 > 4$, então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(x^A, 0, 0)$;
- se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 = 4$, então o máximo ocorre em qualquer ponto viável.

Caso VII: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A$. Neste caso, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, $\psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$

Caso VIII: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A$. Neste caso,

- se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$ e $W_2 > 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{2}$;
- se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$ e $W_2 = 2$, então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;
- se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$, $W_2 < 2$ e $W_1 \geq 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1 = \frac{x^A}{2}$, $\psi_2 = \psi_3 = \frac{x^A}{4}$;
- se $W_1 - 2 < 2W_2 - 4$ e $W_1 \geq 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{2}$;
- se $W_1 - 2 = 2W_2 - 4$ e $W_1 > 2$, então o ótimo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{2}$.

Comparando os máximos dos diversos casos, levando em consideração as condições sobre as avaliações dos prêmios, temos a estratégia de alocação ótima do jogador A ilustrada na Figura 3.1.

A partir da análise da Figura 3.1 temos:

1. Se $W_1 > 2W_2$ e $W_1 \geq 4$ então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (x^A, 0, 0)$;
2. Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 > 2$ então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$;
3. Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 = 2$ então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;

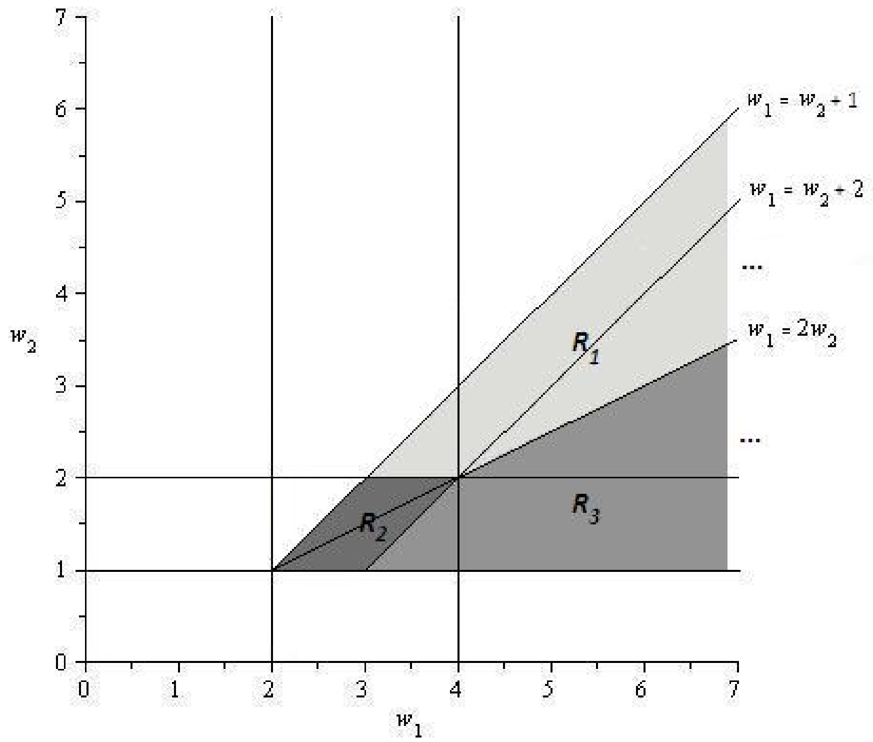

Figura 3.1: Estratégia de alocação ótima do jogador A. As Regiões R_1, R_2 e R_3 representam os valores de W_1 e W_2 para os quais a estratégia de alocação ótima do jogador A é, respectivamente, igual a $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}\right)$ e $\left(x^A, 0, 0\right)$.

4. Se $W_1 \geq 2W_2$ e $W_1 < 4$ então:
   - Se $W_1 > W_2 + 2$, então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (x^A, 0, 0)$;
   - Se $W_1 < W_2 + 2$, então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;
   - Se $W_1 = W_2 + 2$, então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(x^A, 0, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$.
5. Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 < 2$ então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;
6. Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 > 4$ então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos$(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(x^A, 0, 0)$;
7. Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 = 4$, então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$, $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ e $(x^A, 0, 0)$.

Assim, na Figura 3.1, os máximos nas regiões R_1, R_2 e R_3 são, respectivamente, $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}\right)$ e $\left(x^A, 0, 0\right)$. Para os valores de W_1 e W_2 que ficam sobre as retas que dividem estas regiões, o máximo é dado por qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos de máximo das regiões adjacentes.

3.5 Exemplos

3.5.1 Função de distribuição côncava

Suponha agora que a função de distribuição F é definida da seguinte forma

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^\lambda, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Admita, primeiramente, o caso em que $0 < \lambda < 1$, isto é, F côncava. Se $W_2 \leq W_1 \leq 2W_2$, como já vimos, independente da distribuição o valor $\psi_1^A(x^A) = \frac{x^A}{2}$ é a melhor resposta do jogador A. No caso em que $W_1 > 2W_2$, temos que $\psi_1^A(x^A) = \frac{x^A}{(\frac{W_1 - W_2}{W_2})^{\frac{1}{\lambda-1}} + 1} > \frac{x^A}{2}$ é a solução da Equação (3.7), sendo portanto a estratégia de equilíbrio do jogador A.

3.5.2 Função de distribuição convexa

Se tivermos $\lambda \geq 1$, isto é, F convexa, então a condição (3.6) é

$$\frac{F(x^A)}{F(\frac{x^A}{2})} = \frac{(x^A)^\lambda}{\left(\frac{x^A}{2}\right)^\lambda} = 2^\lambda > \frac{W_1}{W_1 - W_2},$$

isto é, se $2^\lambda > \frac{W_1}{W_1 - W_2}$ então a solução de equilíbrio do jogador A é $\psi_1^A = x^A$. Se $2^\lambda < \frac{W_1}{W_1 - W_2}$ então a solução de equilíbrio do jogador A é $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, e se $2^\lambda = \frac{W_1}{W_1 - W_2}$ então a solução de equilíbrio deste jogador é $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$ ou $\psi_1^A = x^A$.

3.5.3 Função de distribuição Beta

Vamos agora resolver o problema descrito em (3.3), considerando que $X^n \sim \beta(p, q)$, $\forall n \in \{A, B\}$. Neste caso, temos que a densidade de X^n é dada por

$$f(x, p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad \text{em que} \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Neste caso, temos que a derivada de $T(\psi_1^A)$ em relação a ψ_1^A é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}[-W_2(x^A-\psi_1^A)^{p-1}(1-x^A+\psi_1^A)^{q-1} + \\ &\quad (W_1-W_2)(\psi_1^A)^{p-1}(1-\psi_1^A)^{q-1}].\end{aligned}$$

Portanto, se $W_1 = W_2$, temos que $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} < 0$ e a alocação ótima é $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$.

Suponha agora que $W_1 > W_2$. Considerando, inicialmente, o caso da distribuição uniforme, em que $p = q = 1$, a derivada acima se reduz a

$$\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} = W_1 - 2W_2.$$

Portanto, se $W_1 < 2W_2$, a estratégia ótima é $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, se $W_1 > 2W_2$, a estratégia ótima é $\psi_1^A = x^A$ e se $W_1 = 2W_2$, então qualquer alocação ψ_1^A em $[\frac{x^A}{2}, x^A]$ é ótima.

Vamos agora considerar o caso em que $0 < p = q \neq 1$. Se $W_1 = 2W_2$ e $x^A < 1$, $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} > 0$ para todo $\psi_1^A > \frac{x^A}{2}$. Logo, a alocação ótima é $\psi_1^A = x^A$. Se $W_1 = 2W_2$ e $x^A = 1$, temos que $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} = 0$, logo qualquer alocação ψ_1^A em $[\frac{x^A}{2}, x^A]$ é ótima.

Consideremos agora que $W_1 \neq 2W_2$. Temos que a condição de primeira ordem, $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A} = 0$, é equivalente a solução da seguinte equação do segundo grau:

$$(\psi_1^A)^2(1-t) + \psi_1^A\left((2x^A-1)t-1\right) + \left(x^A(1-x^A)t\right) = 0, \tag{3.9}$$

em que $t = \left(\frac{W_2}{W_1-W_2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Resolvendo esta equação, temos

$$\begin{aligned}(\psi_1^A)^*_+ &= \frac{1-(2x^A-1)t+\sqrt{((2x^A-1)t-1)^2-4(1-t)x^A(1-x^A)t}}{2(1-t)}, \\ (\psi_1^A)^*_- &= \frac{1-(2x^A-1)t-\sqrt{((2x^A-1)t-1)^2-4(1-t)x^A(1-x^A)t}}{2(1-t)}.\end{aligned}$$

É fácil ver que se $0 < p < 1$ o sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ é igual ao sinal da expressão quadrática em (3.9) e contrário se $p > 1$. Dividiremos nossa análise em quatro casos:

Caso I: $0 < p < 1$ e $0 < t < 1$

Neste caso, o sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ é negativo entre as raízes. Além disso, como temos que $\frac{x^A}{2} > (\psi_1^A)^*_-$ e $x^A \leq (\psi_1^A)^*_+$,[3], segue que $T(\psi_1^A)$ é decrescente no intervalo $(\frac{x^A}{2}, x^A]$, implicando que essa função assume seu valor máximo no ponto $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$.

[3] Wolframalpha

A Figura 3.2 ilustrar o sinal $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ para o Caso I.

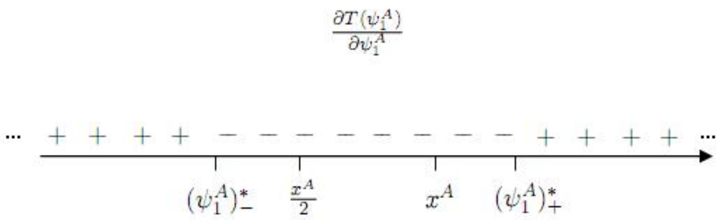

Figura 3.2: Ilustração do sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ no Caso I.

Caso II: $p > 1$ e $0 < t < 1$

Neste caso, o sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ é positivos entre as raízes. Além disso, como no Caso I, temos que $\frac{x^A}{2} > (\psi_1^A)^*_+$ e $x^A \leq (\psi_1^A)^*_+$,[4]. o que implica que a função $T(\psi_1^A)$ é crescente no intervalo $[\frac{x^A}{2}, x^A]$. Portanto, essa função assume seu valor máximo no ponto $\psi_1^A = x^A$.

A Figura 3.3 ilustrar o sinal $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ para o Caso II.

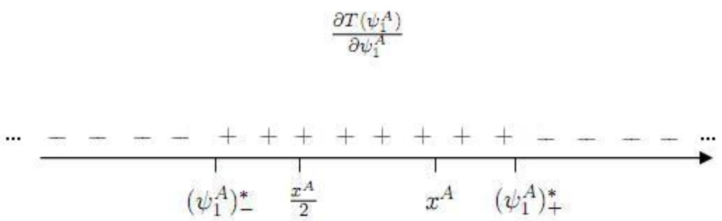

Figura 3.3: Ilustração do sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ no Caso II.

Caso III: $0 < p < 1$ e $t > 1$

Neste caso, o sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ é positivo entre as raízes. Além disso, temos que $\frac{x^A}{2} > (\psi_1^A)^*_+$ e $x^A \geq (\psi_1^A)^*_-$.[5] o que implica que a função $T(\psi_1^A)$ cresce no intervalo $[\frac{x^A}{2}, (\psi_1^A)^*_-]$. Portanto $\psi_1^A = (\psi_1^A)^*_-$ é o ponto de máximo no intervalo $[\frac{x^A}{2}, x^A]$.

A Figura 3.4 ilustrar o sinal $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ para o Caso III.

[4] Wolframalpha
[5] Wolframalpha

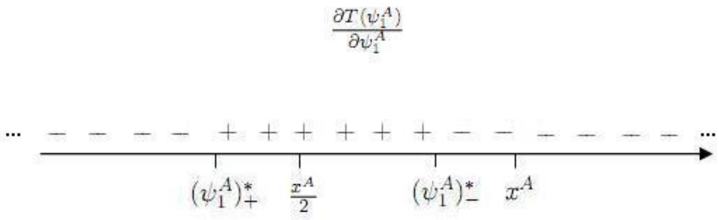

Figura 3.4: Ilustração do sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ no Caso III.

Caso IV: $p > 1$ e $t > 1$

Neste caso, o sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ é negativo entre as raízes. Além disso, como no Caso III, temos que $\frac{x^A}{2} > (\psi_1^A)^*_+$ e $x^A \geq (\psi_1^A)^*_-$.[6] Assim a função $T(\psi_1^A)$ é decrescente no intervalo $[\frac{x^A}{2}, (\psi_1^A)^*_-]$ e crescente no intervalo $[(\psi_1^A)^*_-, x^A]$. Portanto, $T(\psi_1^A)$ assume valor máximo em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, se a condição $\frac{W_1}{W_2} < \frac{F(x^A)}{F(x^A)-F(\frac{x^A}{2})}$ for satisfeita ou em x^A caso contrário.

A Figura 3.5 ilustrar o sinal $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ para o Caso IV.

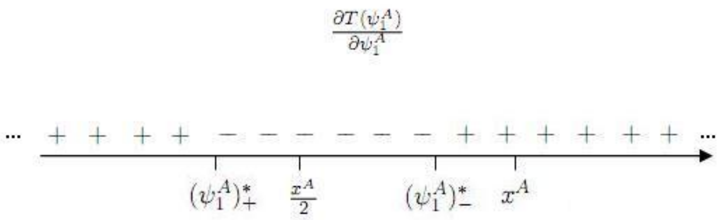

Figura 3.5: Ilustração do sinal de $\frac{\partial T(\psi_1^A)}{\partial \psi_1^A}$ no Caso IV.

3.6 A Análise do Equilíbrio no Caso de Preferências Opostas

Em algumas situações reais (como, por exemplo, um país defensor que valoriza a vida de todos os seus cidadãos de forma igualitária enquanto que um país atacante prefere um determinado grupo étnico ou religioso) os jogadores podem valorizar os prêmios de forma distinta, isto é, a utilidade que um jogador obtém ao ganhar um determinado prêmio pode não ser diretamente proporcional à perda que os demais jogadores sofrem. Nesta seção, estudamos o modelo

[6] Wolframalpha

apresentado na Seção 3.2, com $K = 2$ e $K = 3$ prêmios, adotando a hipótese de que a ordem de preferência dos prêmios é oposta, no sentido de que os jogadores estão em situações de extrema oposição quanto às avaliações dos prêmios, isto é, o prêmio que é mais valorizado pelo jogador A é menos valorizado pelo jogador B e vice-versa. Consideramos aqui que a avaliação do prêmio i para o jogador n, $n \in \{A, B\}$, é W_i^n. Apresentaremos primeiramente o caso em que $K = 2$ e em seguida abordamos o caso onde temos $K = 3$ prêmios. Assim como na seção anterior, para o modelo com $K = 2$ prêmios obtemos um equilíbrio de subjogo perfeito, e para o modelo com $K = 3$ prêmios apresentamos, por simplicidade, um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

3.6.1 O caso K=2

Suponha, sem perda de generalidade, o caso em que o jogador A prefere o primeiro prêmio ao segundo, isto é, $W_1^A > W_2^A$, e o jogador B prefere o segundo prêmio ao primeiro, isto é, $W_2^B > W_1^B$, então com um argumento similar ao que foi dado na estratégia de alocação ótima do jogador B apresentada na seção anterior, temos que uma estratégia de equilíbrio de subjogo perfeito para o jogador B é dada por:

$$\boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), x^B) = \begin{cases} (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A), \quad \text{se} \quad x^B > x^A, \\ (0, x^B), \quad \text{se} \quad \psi_2^A < x^B \leq x^A \quad \text{ou} \quad x^B = \psi_2^A \leq \psi_1^A, \\ \qquad\qquad \text{ou} \quad \psi_1^A < x^B = \psi_2^A \quad \text{e} \quad W_2^B \geq 2W_1^B, \\ (x^B, 0), \quad \text{se} \quad \psi_1^A \leq x^B < \psi_2^A \quad \text{ou} \quad \psi_1^A < x^B = \psi_2^A \quad \text{e} \quad W_2^B < 2W_1^B, \\ \left(\psi_1^B, \psi_2^B\right), \quad \text{se} \quad x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A). \end{cases}$$

Problema de otimização do jogador A

Sabendo da estratégia de alocação ótima do jogador B, isto é, $\boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), x^B)$, o jogador A deve determinar a estratégia de alocação ótima $\boldsymbol{\psi^{A^*}}(x^A)$, de tal forma a maximizar a sua utilidade esperada. Para isso, observando que como F é contínua o evento $X^B \in \{x^A, \psi_1^A(x^A), \psi_2^A(x^A)\}$ tem probabilidade nula, o jogador A tem o seguinte problema de maximização a solucionar:

$$\max_{\boldsymbol{\psi^A}} \quad U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)), \tag{3.10}$$

em que,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= (W_1^A + W_2^A)Pr(X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A)) \\ &+ W_2^A Pr(\psi_1^A \leq X^B < \psi_2^A) \\ &+ W_1^A Pr(\psi_2^A < X^B \leq x^A). \end{aligned}$$

A fim de determinar a estratégia de alocação ótima do jogador A consideremos os dois casos a seguir:

Caso I: $\psi_1^A \geq \psi_2^A$

Neste caso, temos que o min $(\psi_1^A, \psi_2^A) = \psi_2^A$. Logo, $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$W_2^A F(\psi_2^A) + W_1^A F(x^A).$$

Note que esta função é maximizada quando ψ_2^A for máximo, isto é, quando $\psi_2^A = \frac{x^A}{2}$. Note que como este ponto de ótimo pertence também a região do Caso II, para encontrar o máximo global, sem perda de generalidade, basta considerar o Caso II.

Caso II: $\psi_1^A \leq \psi_2^A$

Neste caso, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A) = \psi_1^A$, logo $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$W_1^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A) F(\psi_2^A) + W_1^A F(x^A),$$

Substituindo $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A$, em $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\omega}^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$, temos que o problema de maximização (3.10) se reduz a

$$\max_{\psi_1^A} \quad T(\psi_1^A) \tag{3.11}$$

em que,

$$T(\psi_1^A) = W_1^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A) F(x^A - \psi_1^A) + W_1^A F(x^A).$$

Note que o termo $W_1^A F(x^A)$ é uma constante, logo $T(\psi_1^A)$ é maximizada quando os termos $W_1^A F(\psi_1^A)$ e $(W_2^A - W_1^A) F(x^A - \psi_1^A)$ forem máximos. No entanto, como $W_2^A - W_1^A < 0$, temos que o termo $(W_2^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A)$ é máximo quando ψ_1^A for máximo, isto é, $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$. Mas o valor de $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$ é também o que maximiza o termo $W_1^A F(\psi_1^A)$. Assim, temos que a função $T(\psi_1^A)$ é maximizada quando $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{2}$.

Nesta versão do jogo, temos que se os jogadores estão em extrema oposição com relação as avaliações dos prêmios, então a estratégia de equilíbrio do jogador A é dividir seus recursos igualmente entre os prêmios, independente da distribuição de probabilidade F que descreve sua incerteza sobre os recursos do oponente.

3.6.2 O caso K=3

Consideramos, nesta subseção, jogos que envolvem três prêmios. Tratamos, inicialmente, a classe de jogos em que o jogador A avalia os prêmios da forma $W_1^A \geq W_2^A \geq W_3^A$ e, por outro lado, o jogador B avalia da forma $W_3^B \geq W_2^B \geq W_1^B$. A fim de estabelecer a estratégia de alocação ótima do jogador B, dividimos nossa análise em duas etapas, isto é, consideramos primeiramente que $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$ e, em seguida, que $W_3^B < W_1^B + W_2^B$. Em ambos as etapas, assumiremos apenas o caso em que F é côncava.

Considerando o caso em que $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$

Como o jogador B move-se após observar a alocação feita por A, e pelo fato do desse jogador considerar $W_1^B \leq W_2^B \leq W_3^B$ e $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$, uma estratégia de equilíbrio de Nash do jogador B é dada por:

$$\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B) = \begin{cases} (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } x^B > x^A, \\ (0, 0, x^B), \text{ se } \psi_3^A < x^B < \min(\psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A), \\ (0, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } \psi_2^A + \psi_3^A < x^B < x^A, \\ (\psi_1^B > \psi_1^A, 0, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } \psi_1^A + \psi_3^A < x^B < \psi_2^A + \psi_3^A, \\ (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, 0), \text{ se } \psi_2^A + \psi_1^A < x^B < \psi_3^A, \\ (0, x^B, 0), \text{ se } \psi_2^A < x^B < \min(\psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A), \\ (x^B, 0, 0), \text{ se } \psi_1^A < x^B < \min(\psi_2^A, \psi_3^A), \\ (\psi_1^B, \psi_2^B, \psi_3^B), \text{ se } x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A), \text{ ou } x^B \in \text{S}, \end{cases}$$

em que S $= \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A\}$.

Note, na estratégia do jogador B descrita acima, que como a função F é contínua o evento $X^B \in \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A\}$ tem probabilidade nula. Portanto, neste caso, como estamos considerando o conceito de equilíbrio de Nash, não importa como o jogador B aloca os seus recursos, pois isso não influenciará na sua utilidade esperada. Por esse fato, dividir igualmente seus recursos entre os três prêmios é uma estratégia de equilíbrio de Nash para esse jogador.

A ideia que existe por trás da notação matemática empregada na estratégia de alocação de equilíbrio de Nash do jogador B é a seguinte: se esse jogador possuir recursos para ganhar os três prêmios, então ele investe um pouco mais do que a quantia investida pelo jogador A para cada um dos três prêmios. Se o jogador B tem recursos apenas para ganhar o prêmio mais valioso, então uma estratégia de equilíbrio é alocar todo o seu recurso para este prêmio. Se o jogador B tem recursos para ganhar apenas os dois prêmios mais valiosos (ou apenas os dois menos valiosos) então ele divide os seus recursos de forma a ganhar esses dois prêmios. Se o jogador B possuir recursos apenas para ganhar o prêmio intermediário (ou o menos valioso) então ele aloca tudo neste prêmio. E se este jogador não possuir recursos suficientes para ganhar qualquer um dos prêmios, então não importa a forma como este distribua os seu recursos sobre os prêmios, pois isso não influenciará sua utilidade esperada pelo fato dele nunca conseguir ganhar nenhum dos prêmios.

Problema de otimização do jogador A

Suponha que o jogador A recebe um orçamento privado igual a $X^A = x^A$ para alocar. O problema do jogador A é, sabendo da estratégia de melhor resposta do jogador B, determinar a estratégia de alocação ótima $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}$, de tal forma a maximizar a sua utilidade esperada. Assim, o jogador A tem o seguinte problema de maximização a solucionar

$$\max_{\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}} \quad U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)), \tag{3.12}$$

em que,

$$
\begin{aligned}
& U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) \\
= \ & (W_1^A + W_2^A + W_3^A) Pr(X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A)) \\
+ \ & (W_1^A + W_2^A) Pr(\psi_3^A < X^B < \min(\psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A)) \\
+ \ & W_1^A Pr(\psi_2^A + \psi_3^A < X^B < x^A) + W_2^A Pr(\psi_1^A + \psi_3^A < X^B < \psi_2^A + \psi_3^A) \\
+ \ & W_3^A Pr(\psi_1^A + \psi_2^A < X^B < \psi_3^A) + (W_2^A + W_3^A) Pr(\psi_1^A < X^B < \min(\psi_2^A, \psi_3^A)) \\
+ \ & (W_1^A + W_3^A) Pr(\psi_2^A < X^B < \min(\psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A)).
\end{aligned}
$$

A fim de determinar a estratégia de alocação ótima do jogador A, consideramos os seguintes casos:

Caso I: $\psi_1^A \leq \psi_2^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Caso II: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Caso IV: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$.

Caso V: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A$.

Caso VI: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A$.

Caso VII: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A$.

Caso VIII: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A$.

Como pode-se ver no Apêndice A.2, o ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$ é máximo nos Casos II, IV, V, VI, VII e VIII, enquanto nos Casos I e III, o ponto de ótimo é $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}\right)$. Como o nosso objetivo é encontrar a estratégia de alocação orçamentária ótima do jogador A, temos que comparar o resultado da função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ nesses dois pontos. Para tal, considere o lema a seguir:

Lema 3.6.1. *Se uma função de distribuição F é côncava e se $x^A > 0$ então* $F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + F\left(\frac{x^A}{3}\right) > F\left(\frac{x^A}{4}\right) + F\left(\frac{3x^A}{4}\right)$.

Demonstração. Considere a equação da reta que liga os pontos $\left(\frac{x^A}{4}, F\left(\frac{x^A}{4}\right)\right)$ e $\left(\frac{3x^A}{4}, F\left(\frac{3x^A}{4}\right)\right)$, isto é,

$$r_1 : y = \frac{2\left[F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - F\left(\frac{x^A}{4}\right)\right]\left(x - \frac{x^A}{4}\right)}{x^A} + F\left(\frac{x^A}{4}\right),$$

e a equação da reta que passa pelos pontos $\left(\frac{x^A}{3}, F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right)$ e $\left(\frac{2x^A}{3}, F\left(\frac{2x^A}{3}\right)\right)$, ou seja,

$$r_2 : y = \frac{3\left[F\left(\frac{2x^A}{3}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right]\left(x - \frac{x^A}{3}\right)}{x^A} + F\left(\frac{x^A}{3}\right).$$

Pelo fato de F ser côncava e como $x^A > 0$, temos que a imagem do ponto $x = \frac{x^A}{2}$ por meio da reta r_1 é menor que a imagem obtida usando a reta r_2. Assim, decorre que

$$\frac{2\left[F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - F\left(\frac{x^A}{4}\right)\right]\left(\frac{x^A}{4}\right)}{x^A} + F\left(\frac{x^A}{4}\right) < \frac{3\left[F\left(\frac{2x^A}{3}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right]\left(\frac{x^A}{6}\right)}{x^A} + F\left(\frac{x^A}{3}\right), \quad (3.13)$$

e, simplificando a desigualdade (3.13), obtemos que

$$F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + F\left(\frac{x^A}{3}\right) > F\left(\frac{x^A}{4}\right) + F\left(\frac{3x^A}{4}\right),$$

o que finaliza a demonstração. □

Teorema 3.6.1. *A estratégia de alocação orçamentária de equilíbrio para o jogador A é* $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*} = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*}) = \left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$.

Demonstração. Os retornos da função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ avaliada nos pontos $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$ e $\left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}\right)$ são, respectivamente,

$$W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + W_3^A F\left(\frac{x^A}{3}\right),$$

e

$$W_1^A F(x^A) + W_2^A \left[F\left(\frac{x^A}{4}\right) + F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - F\left(\frac{x^A}{2}\right)\right] + W_3^A F\left(\frac{x^A}{2}\right).$$

Pelo Lema 3.6.1 decorre que:

$$F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + F\left(\frac{x^A}{3}\right) > F\left(\frac{x^A}{4}\right) + F\left(\frac{3x^A}{4}\right), \quad (3.14)$$

assim, somando $F\left(\frac{x^A}{2}\right)$ a ambos os membros da desigualdade (3.14), temos

$$F\left(\frac{2x^A}{3}\right) - F\left(\frac{x^A}{4}\right) - F\left(\frac{3x^A}{4}\right) + F\left(\frac{x^A}{2}\right) > F\left(\frac{x^A}{2}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right). \tag{3.15}$$

Multiplicando ambos os termos da desigualdade (3.15) por W_2^A e usando o fato de $W_2^A \geq W_3^A$, isto é, $W_2^A\left[F\left(\frac{x^A}{2}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right] \geq W_3^A\left[F\left(\frac{x^A}{2}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right]$ obtemos a seguinte desigualdade:

$$W_2^A\left[F\left(\frac{2x^A}{3}\right) - F\left(\frac{x^A}{4}\right) - F\left(\frac{3x^A}{4}\right) + F\left(\frac{x^A}{2}\right)\right] > W_3^A\left[F\left(\frac{x^A}{2}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right],$$

isto é,

$$W_2^A F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + W_3^A F\left(\frac{x^A}{3}\right) > W_2^A\left[F\left(\frac{x^A}{4}\right) + F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - F\left(\frac{x^A}{2}\right)\right] + W_3^A F\left(\frac{x^A}{2}\right) \tag{3.16}$$

Assim, somando o termo $W_1^A F(x^A)$ a ambos os membros da desigualdade (3.16) obtemos o resultado desejado. $\square$

Considerando o caso em que $W_3^B < W_1^B + W_2^B$

Usando o fato de que o jogador B tem a preferência $W_3^B > W_2^B \geq W_1^B$, então se $W_3^B < W_1^B + W_2^B$ podemos usar um argumento similar ao que usamos no caso em que $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$ para montar a estratégia de alocação ótima do jogador B. Assim, temos que uma estratégia de equilíbrio do jogador B é dada por:

$$\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B) = \begin{cases} (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } \ x^B > x^A, \\ (0, 0, x^B), \text{ se } \psi_3^A < x^B < \min(\psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A), \\ (\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, 0), \text{ se } \psi_1^A + \psi_2^A < x^B < \min(\psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A), \\ (0, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } \psi_2^A + \psi_3^A < x^B < x^A, \\ (\psi_1^B > \psi_1^A, 0, \psi_3^B > \psi_3^A), \text{ se } \psi_1^A + \psi_3^A < x^B < \psi_2^A + \psi_3^A, \\ (0, x^B, 0), \text{ se } \psi_2^A < x^B < \min(\psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A), \\ (x^B, 0, 0), \text{ se } \psi_1^A < x^B < \min(\psi_2^A, \psi_3^A), \\ (\psi_1^B, \psi_2^B, \psi_3^B), \text{ se } x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A), \text{ ou } \ x^B \in \mathrm{S}, \end{cases}$$

em que $\mathrm{S} = \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A\}$. Note, na estratégia do jogador B, que como F é contínua, então com um argumento idêntico ao aplicado na estratégia desse jogador no caso onde $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$ temos que o evento $X^B \in \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A\}$ tem probabilidade nula.

Problema de otimização do jogador A

Suponha que o jogador A recebe um orçamento privado igual a $X^A = x^A$ para alocar. O problema do jogador A é, sabendo da estratégia de melhor resposta do jogador B, determinar a estratégia de alocação ótima $\boldsymbol{\psi^{A}}^*(x^A)$, de tal forma a maximizar a sua utilidade esperada. Para isso, o jogador A tem o seguinte problema de maximização a solucionar

$$\max_{\boldsymbol{\psi}^A} \quad U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B}}^*(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \tag{3.17}$$

em que,

$$\begin{aligned}
& U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B}}^*(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \\
= \; & (W_1^A + W_2^A + W_3^A) Pr(X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A)) \\
+ \; & (W_1^A + W_2^A) Pr(\psi_3^A < X^B < \min(\psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A)) \\
+ \; & W_3^A Pr(\psi_1^A + \psi_2^A < X^B < \min(\psi_2^A + \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_3^A)) \\
+ \; & (W_1^A + W_3^A) Pr(\psi_2^A < X^B < \min(\psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A)) \\
+ \; & (W_2^A + W_3^A) Pr(\psi_1^A < X^B < \min(\psi_2^A, \psi_3^A)) \\
+ \; & W_1^A Pr(\psi_2^A + \psi_3^A < X^B < x^A) + W_2^A Pr(\psi_1^A + \psi_3^A < X^B < \psi_2^A + \psi_3^A).
\end{aligned}$$

A fim de determinar a estratégia de alocação ótima do jogador A, consideramos os seguintes casos:

Caso I : $\psi_1^A \leq \psi_2^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Caso II: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Caso VI: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$

Caso V: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A$.

Caso VI: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A$.

Caso VII: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A$.

Caso VIII: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A$.

Como pode-se ver no Apêndice A.3, o ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$ é máximo nos Casos II, IV, V, VI, VII e VIII, enquanto no Caso I, o ponto de ótimo é $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}\right)$ e no Caso III o máximo é limitado por $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$. Como o nosso objetivo é encontrar a estratégia de alocação orçamentária ótima do jogador A, temos que comparar o resultado da função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ nesses dois pontos. Para tal, considere o teorema a seguir:

Teorema 3.6.2. *A estratégia de alocação orçamentária de equilíbrio para o jogador A é* $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*} = (\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = \left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$.

Demonstração. Os retornos da função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ avaliada nos pontos $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$ e $\left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}\right)$ são, respectivamente,

$$W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + W_3^A F\left(\frac{x^A}{3}\right),$$

e

$$W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{x^A}{4}\right) + W_3^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - W_1^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right) + W_1^A F\left(\frac{x^A}{2}\right).$$

Note que como F é crescente, então o termo $-W_1^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right) + W_1^A F\left(\frac{x^A}{2}\right) < 0$. Portanto, decorre a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{x^A}{4}\right) + W_3^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - W_1^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right) + W_1^A F\left(\frac{x^A}{2}\right) \\ < \; & W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{x^A}{4}\right) + W_3^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right). \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.6.1 e o fato de que $W_2^A \geq W_3^A$, temos que

$$W_2^A \left(F\left(\frac{2x^A}{3}\right) - F\left(\frac{x^A}{4}\right)\right) > W_3^A \left(F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right).$$

Portanto, temos que

$$
\begin{aligned}
& W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{x^A}{4}\right) + W_3^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right) \\
< \quad & W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + W_3^A F\left(\frac{x^A}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Logo, o ponto $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$ é a estratégia ótima para o jogador A neste caso. □

3.7 Um Caso Intermediário $K = 3$

Nesta seção estudamos um caso em que o prêmio mais valorizado pelo jogador B tem valorização intermediária por parte do jogador A, isto é, considere que o jogador A contínua a avaliar os prêmios da forma $W_1^A \geq W_2^A \geq W_3^A$ e que o jogador B avalia os prêmios da forma $W_2^B > W_3^B \geq W_1^B$ com $W_2^B \geq W_1^B + W_3^B$. Aqui, por simplificação, assumimos que os recursos de ambos os jogadores são gerados de uma distribuição uniforme, isto é, supomos que $X^n \sim U(0,1], \forall n \in \{A, B\}$.

Com uma ideia análoga ao que foi feito nas outras versões do jogo Blotto sequencial, uma estratégia de alocação ótima para o jogador B neste jogo é dada por

$$
\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B) = \begin{cases}
(\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), & \text{se } \ x^B > x^A, \\[2ex]
(0, x^B, 0), & \text{se } \ \psi_2^A < x^B < \min(\psi_1^A + \psi_2^A, \psi_2^A + \psi_3^A), \\[2ex]
(0, \psi_2^B > \psi_2^A, \psi_3^B > \psi_3^A), & \text{se } \ \psi_2^A + \psi_3^A < x^B < x^A, \\[2ex]
(\psi_1^B > \psi_1^A, \psi_2^B > \psi_2^A, 0), & \text{se } \ \psi_1^A + \psi_2^A < x^B < \psi_2^A + \psi_3^A, \\[2ex]
(\psi_1^B > \psi_1^A, 0, \psi_3^B > \psi_3^A), & \text{se } \ \psi_1^A + \psi_3^A < x^B < \psi_2^A, \\[2ex]
(0, 0, x^B), & \text{se } \ \psi_3^A < x^B < \min(\psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A), \\[2ex]
(x^B, 0, 0), & \text{se } \ \psi_1^A < x^B < \min(\psi_2^A, \psi_3^A), \\[2ex]
(\psi_1^B, \psi_2^B, \psi_3^B) & \text{se } \ x^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A), \text{ou } \ x^B \in \mathrm{S},
\end{cases}
$$

em que $\mathrm{S} = \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A\}$. Note, na estratégia do jogador B, que como F é contínua, o evento $X^B \in \{x^A, \psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A, \psi_1^A + \psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A, \psi_2^A + \psi_3^A\}$ tem probabilidade nula, então neste caso não importa como o jogador B aloca os seus recursos, pois não influenciará sua utilidade esperada.

Problema de otimização do jogador A

Suponha que o jogador A recebe um orçamento privado igual a $X^A = x^A$ para alocar. O problema do jogador A é, sabendo da estratégia de melhor resposta do jogador B, determinar a estratégia de alocação ótima $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}$ de forma a maximizar a sua utilidade esperada. Para isso, o jogador A tem o seguinte problema de maximização a solucionar

$$\max_{\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}} \quad U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)), \tag{3.19}$$

em que,

$$\begin{aligned}
& U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) \\
= \; & (W_1^A + W_2^A + W_3^A) Pr(X^B < \min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A)) \\
+ \; & (W_1^A + W_3^A) Pr(\psi_2^A < X^B < \min(\psi_1^A + \psi_2^A, \psi_2^A + \psi_3^A)) \\
+ \; & W_1^A Pr(\psi_2^A + \psi_3^A < X^B < x^A) + W_3^A Pr(\psi_1^A + \psi_2^A < X^B < \psi_2^A + \psi_3^A) \\
+ \; & W_2^A Pr(\psi_1^A + \psi_3^A < X^B < \psi_2^A) + (W_1^A + W_2^A) Pr(\psi_3^A < X^B < \min(\psi_2^A, \psi_1^A + \psi_3^A)) \\
+ \; & (W_2^A + W_3^A) Pr(\psi_1^A < X^B < \min(\psi_2^A, \psi_3^A)).
\end{aligned}$$

A fim de determinar a estratégia de alocação ótima do jogador A, consideramos os seguintes casos. Os detalhes dos cálculos dos pontos de máximo em cada caso estão no Apêndice A.4:

Caso I: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A$. Neste caso, o ótimo ocorre no ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

Caso II: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A$. Neste caso,

- se $W_2^A > 4W_3^A$ o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$;
- se $W_2^A < 4W_3^A$ o ótimo ocorre no ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$;
- se $W_2^A = 4W_3^A$ então o ótimo ocorre em qualquer ponto tal que $\psi_1^A = \psi_2^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A$. Neste caso, o ótimo ocorre no ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

Caso IV: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A$. Neste caso, o ótimo ocorre no ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

Caso V: $\psi_1^A \leq \psi_3^A$ e $\psi_1^A + \psi_3^A \leq \psi_2^A$. Neste caso, o ótimo ocorre no ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4})$.

Caso VI: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A + \psi_3^A$. Neste caso,

- se $W_2^A > W_3^A$ o máximo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$;
- se $W_2^A = W_3^A$ o máximo ocorre em qualquer ponto $\psi_1^A = \psi_3^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$.

Caso VII: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_1^A + \psi_3^A \leq \psi_2^A$. Neste caso, o ótimo ocorre no ponto $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4})$.

Caso VIII: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A + \psi_3^A$. Neste caso,

- se $W_2^A > W_3^A$ o máximo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$;
- se $W_2^A = W_3^A$ o máximo ocorre em qualquer ponto $\psi_1^A = \psi_3^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$.

Para encontrar a estratégia de equilíbrio do jogador A, precisamos calcular o valor da $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ nos 3 pontos de máximo encontrados nos subcasos acima: $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$, $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}\right)$. O resultado desta comparação encontra-se no Teorema 3.7.1.

Teorema 3.7.1. *A estratégia de alocação ótima do jogador A é dada por* $\boldsymbol{\psi^{A^*}}(x^A) = (\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4})$ *se* $W_2^A > W_3^A$ *e se* $W_2^A = W_3^A$ *então qualquer ponto que satisfaça* $\psi_1^{A^*} = \psi_3^{A^*} \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$ *será ótimo.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $W_2^A > W_3^A$. Como foi descrito acima, temos que comparar os valores da utilidade do jogador A aplicada nos pontos $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$, $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}\right)$.

Então temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ calculada nos pontos $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$, $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}\right)$ são, respectivamente

$$W_1^A x^A + \frac{W_2^A x^A}{3} + \frac{2W_3^A x^A}{3},$$

$$W_1^A x^A + \frac{W_2^A x^A}{2}$$

e

$$W_1^A x^A + \frac{W_2^A x^A}{2} + \frac{W_3^A x^A}{2}.$$

Claramente, o jogador A possui uma utilidade maior pelo ponto $\left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}\right)$ que pelo ponto $\left(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0\right)$, pois $\frac{W_3^A x^A}{2} > 0$.

Além disso, se $W_2^A > W_3^A$, note que o jogador A possui uma utilidade maior pelo ponto $\left(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}\right)$ que pelo ponto $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$, pois $\frac{W_2^A x^A}{6} > \frac{W_3^A x^A}{6}$. Por outro lado, se $W_2^A = W_3^A$, conforme descrito no Caso VI, qualquer ponto tal que $\psi_1^A = \psi_3^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$ é ótimo. $\square$

3.8 Conclusões

Neste capítulo propusemos um modelo de jogo Blotto sequencial com informação imperfeita para $K = 2$ e $K = 3$ campos de batalhas. Consideramos tanto a classe de jogos com soma constante quanto a classe de jogos em que os jogadores possuem preferências opostas com relação a valorização dos prêmios. Adicionalmente também apresentamos um caso (para $K = 3$ prêmios) intermediário deste jogo, no sentido de que o prêmio que é mais valorizado pelo jogador B pode ter valorização intermediária por parte do jogador A. No jogo de soma constante para $K = 2$ prêmios, obtivemos um equilíbrio de subjogo perfeito considerando que os recursos podem ser obtidos tanto de funções de distribuições côncavas ou convexas. No jogo de soma constante para $K = 3$ e no caso intermediário fizemos, por simplificação, uma particularização sobre a função de distribuição, isto é, assumimos que os recursos são derivados de uma função de distribuição uniforme e obtivemos um equilíbrio de Nash em estratégias puras. Para o caso em que a ordem de preferências é oposta, consideramos qualquer função de distribuição côncava e obtivemos um equilíbrio de subjogo perfeito para o caso $K = 2$ e um equilíbrio de Nash em estratégias puras para o caso $K = 3$.

Na Tabela 3.1 apresentaremos a estratégia de alocação de equilíbrio do jogador A para todos os casos analisados acima. A primeira coluna desta tabela é referente ao número de prêmios dos tipos de jogo apresentados. A segunda coluna refere-se à suposição sobre a função que os recursos seguem. A terceira coluna refere-se às restrições impostas sobre os prêmios. Por fim, na última coluna consta a estratégia de alocação ótima do jogador A.

Conforme pode ser visto, ao aumentarmos o número de prêmios em disputa, a complexidade algébrica para encontrar a estratégia ótima de alocação do jogador A cresce de forma substancial.

Tabela 3.1: Estratégia de Alocação Ótima para o Jogador A

K	F	Restrições sobre W_i's	$\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A)$
2	Convexa	$W_1 \geq W_2$ $\frac{W_1}{W_2} \geq \frac{F(x^A)}{F(x^A)-F(\frac{x^A}{2})}$	$(x^A, 0)$
2	Convexa	$W_1 \geq W_2$ $\frac{W_1}{W_2} \leq \frac{F(x^A)}{F(x^A)-F(\frac{x^A}{2})}$	$(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2})$
2	Côncava	$W_2 \leq W_1 \leq 2W_2$	$(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2})$
2	Côncava	$W_1 > 2W_2$ $\frac{F'(x^A-\epsilon)}{F'(\epsilon)} > \frac{W_2}{W_1-W_2}, \forall\epsilon > 0$	$(x^A, 0)$
2	Côncava	$W_1 > 2W_2$ $\exists\epsilon > 0$ tal que $\frac{F'(x^A-\epsilon)}{F'(\epsilon)} \leq \frac{W_2}{W_1-W_2}$	Solução da equação $\frac{F'(\psi_1^A)}{F'(x^A-\psi_1)} = \frac{W_2}{W_1-W_2}$
2	Côncava	${W_1}^A > {W_2}^A$ e ${W_1}^B < {W_2}^B$	$(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2})$
3	U(0, 1]	$1 \leq W_2 \leq 2$, $W_2 + 2 \geq W_1 \geq W_2 + 1$ e $W_3 = 1$	$(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$
3	U(0, 1]	$W_2 \geq 2$, $2W_2 \geq W_1 \geq W_2 + 1$ e $W_3 = 1$	$(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$
3	U(0, 1]	$W_2 + 2 \leq W_1$, $W_2 \geq 1$, $W_1 \geq 2W_2$, e $W_3 = 1$	$(x^A, 0, 0)$
3	Côncava	${W_1}^A \geq {W_2}^A \geq {W_3}^A$, $W_3^B > W_2^B \geq W_1^B$ e $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$	$(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$
3	Côncava	${W_1}^A \geq {W_2}^A \geq {W_3}^A$, $W_3^B > W_2^B \geq W_1^B$ e $W_3^B < W_1^B + W_2^B$	$(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$
3	U(0, 1]	${W_1}^A \geq {W_2}^A \geq {W_3}^A$, $W_2^A > W_3$, $W_2^B \geq W_3^B \geq W_1^B$ e $W_2^B \geq W_1^B + W_3^B$	$(\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4})$
3	U(0, 1]	${W_1}^A \geq {W_2}^A \geq {W_3}^A$, $W_2^A = W_3^A$ $W_2^B \geq W_3^B \geq W_1^B$ e $W_2^B \geq W_1^B + W_3^B$	Qualquer ponto que satisfaça $\psi_1^{A*} = \psi_3^{A*} = [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$

CAPÍTULO 4

Um Jogo Blotto Sequencial com Informação Imperfeita Reformulado

> "Ou qual é o rei que, indo entrar em guerra contra outro rei, não se senta primeiro a consultar se com dez mil pode sair ao encontro do que vem contra ele com vinte mil?"
>
> Lucas 14:31

4.1 Introdução

Como destacamos na Seção 2.6, uma suposição que sempre é levada em consideração, em jogos Coronel Blotto, é a de que o jogador que mais investe recursos em um particular prêmio sempre ganha esse prêmio com probabilidade 1. No entanto, em alguns problemas, que analisam a interação estratégica entre um defensor e um atacante (ver por exemplo, Levitin & Hausken (2010) e Lins et al. (2013)), adota-se que a probabilidade de uma defesa (ou ataque) de um determinado prêmio ser bem sucedida é proporcional aos investimentos relativos destinado por o atacante e o defensor para esse particular prêmio.

Usando uma ideia similar a adotada por esses autores, propomos neste capítulo um jogo Blotto sequencial com informação imperfeita reformulado, em que esta reformulação refere-se a não supor que o jogador que mais investir recurso em um particular prêmio sempre o ganhará, isto é, enfraquecemos esta hipótese e adotamos o critério de que o jogador que investir mais recurso em um determinado prêmio possui apenas maior probabilidade de ganhar o prêmio.

Apresentamos, nas seções seguintes, o modelo do jogo proposto e um equilíbrio de Nash em estratégias puras para o jogo. Um fato que merece destaque, e que pode ser notado abaixo, é que mesmo que esta reformulação que propomos seja totalmente distinta da formulação feita por Adamo & Matros (2009), ainda assim a solução desta reformulação do jogo Blotto coincide com a solução do jogo proposto por tais autores.

4.2 O Modelo

Assumiremos a existência de dois jogadores, jogador A e jogador B, disputando $K = 2$ prêmios, que podem ter valores distintos, mas cada um dos jogadores avalia o prêmio i por $W_i > 0$ e também assumimos, sem perda de generalidade, que $W_1 \geq W_2$. O desenrolar do jogo é o mesmo do jogo Blotto sequencial com informação imperfeita descrito no capítulo anterior, ou seja, um dos jogadores se move primeiro com informação imperfeita sobre os recursos disponíveis ao adversário, que se move posteriormente observando qual a alocação escolhida pelo primeiro jogador. Assume-se que os recursos disponíveis ao segundo jogador são gerados a partir de uma função de distribuição acumulada F absolutamente contínua, com suporte em $(0, 1]$. Mais detalhadamente, temos:

(i) Após observar o seu recurso disponível x^A, o jogador A começa o jogo escolhendo uma estratégia de alocação do seu recurso entre os prêmios disponíveis;

(ii) Após observar a estratégia de alocação adotada pelo jogador A e o seu recurso disponível x^B, o jogador B decide como irá distribuir os seus recursos.

4.3 Estratégias

Uma estratégia do jogador A é uma função

$$\boldsymbol{\psi^A} = (\psi_1^A, \psi_2^A) : (0, 1] \longrightarrow [0, 1]^2$$

tal que $\psi_1^A(x^A) + \psi_2^A(x^A) = x^A$, em que x^A é o recurso disponível para o jogador A e $\psi_i^A(x^A)$ é o recurso alocado pelo jogador A no prêmio i quando possui recurso igual a x^A. Deste modo, estamos assumindo que o jogador A sempre aloca todos os recursos disponíveis entre os prêmios, não possuindo qualquer utilidade para uma possível sobra de recursos.

Uma estratégia do jogador B é uma função

$$\boldsymbol{\psi}^B = (\psi_1^B, \psi_2^B) : \mathtt{D} \times (0,1] \longrightarrow [0,1]^2, \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^{2} \psi_i^B(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B) = x^B,$$

em que $\mathtt{D} = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 : \sum_{i=1}^{2} x_i \leq 1\}$, que determina a alocação orçamentária para cada possível realização x^B, do jogador B, e alocação orçamentária $\boldsymbol{\psi}^A$ do jogador A. Também assume-se que o jogador B sempre aloca todos os recursos disponíveis entre os prêmios, não possuindo qualquer utilidade para uma possível sobra de recursos.

Conforme mencionamos na Seção 4.1, assumiremos agora que se o jogador A alocar $\psi_i^A(x^A)$ no prêmio i e o jogador B alocar $\psi_i^B(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), (x^B))$, então a probabilidade do jogador A ganhar o prêmio i (ideia análoga vale para a probabilidade do jogador B ganhar o prêmio) é dada por:

$$\frac{\psi_i^A(x^A)}{\psi_i^A(x^A) + \psi_i^B(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B)},$$

ou seja, a probabilidade de ganhar um prêmio é igual à proporção de recursos alocados para este prêmio pelo jogador em relação ao total de recursos alocados para o prêmio por ambos jogadores. Se nenhum jogador alocar recursos em um dado prêmio, eles terão chances iguais de ganhar o prêmio.

4.4 A Análise do Equilíbrio

Primeiro, observe que se $\psi_i^A(x^A) = 0$ para algum prêmio i, então o jogador B irá obter uma utilidade maior tanto menor quanto seja o recurso que ele alocar em i, desde que seja positivo. Assim, não existirá uma melhor resposta para o jogador B e não haverá equilíbrios neste caso. A intuição para que não exista equilíbrio caso o jogador A aloque zero em um determinado prêmio vai de encontro com a idia proposta no trabalho de Lins et al. (2013), pois pensando que o jogador A seja o defensor e o jogador B o atacante, então o defensor se sentirá muito inseguro em não alocar recursos em um particular prêmio, pois esse premio terá muita vulnerabilidade. Por outro lado, como o atacante consegue ver que o jogador A não alocou nada para esse prêmio, então ele sabe que qualquer alocação positiva que adotar ele ganhará o prêmio com probabilidade 1.

Portanto, de agora em diante, vamos apenas tratar o caso em que $\psi_i^A(x^A) \neq 0$. No que se segue, simplificaremos um pouco a notação e utilizaremos ψ_i^A para denotar $\psi_i^A(x^A)$, ψ_i^B para denotar $\psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), x^B)$ e $\boldsymbol{\psi^B}(x^B)$ para denotar $\boldsymbol{\psi^B}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), x^B)$.

Temos que as utilidades esperadas para o perfil de estratégias $(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^B}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), x^B))$ dos jogadores A e B são, respectivamente, dadas por:

$$U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi}^B(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), X^B)) = \int_0^1 \left[W_1\left(\frac{\psi_1^A}{\psi_1^A + \psi_1^B}\right) + W_2\left(\frac{\psi_2^A}{\psi_2^A + \psi_2^B}\right)\right] F'(x^B)dx^B$$

e

$$U_B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi}^B(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), x^B)) = W_1\left(\frac{\psi_1^B}{\psi_1^B + \psi_1^A}\right) + W_2\left(\frac{\psi_2^B}{\psi_2^B + \psi_2^A}\right).$$

Dado uma estratégia do jogador A, $\boldsymbol{\psi^A}(x^A)$, como estamos considerando apenas o caso em que $\psi_i^A > 0$, $i \in \{1, 2\}$ e como $\psi_1^B + \psi_2^B = x^B$, temos que a estratégia de alocação ótima do jogador B pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^B}(x^B))}{\partial \psi_1^B} &= W_1\left(\frac{\psi_1^B + \psi_1^A - \psi_1^B}{(\psi_1^B + \psi_1^A)^2}\right) \\ &+ W_2\left(\frac{(-1)(x^B - \psi_1^B + \psi_2^A) - (x^B - \psi_1^B)(-1)}{(x^B - \psi_1^B + \psi_2^A)^2}\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial U_B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^B}(x^B))}{\partial \psi_1^B} = W_1\left(\frac{\psi_1^A}{(\psi_1^B + \psi_1^A)^2}\right) + W_2\left(\frac{-\psi_2^A}{(x^B - \psi_1^B + \psi_2^A)^2}\right).$$

É fácil ver que $\frac{\partial^2 U_B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^B}(x^B))}{\partial(\psi_1^B)^2} < 0$. Assim, temos que o máximo global, sem considerarmos a restrição de que $0 \leq \psi_1^B \leq x^B$, é obtido por meio da equação

$$W_1\left(\frac{\psi_1^A}{(\psi_1^B + \psi_1^A)^2}\right) + W_2\left(\frac{-\psi_2^A}{(x^B - \psi_1^B + \psi_2^A)^2}\right) = 0,$$

isto é, quando

$$\psi_1^B = k = \frac{(x^B + \psi_2^A)\left(\frac{W_1\psi_1^A}{W_2\psi_2^A}\right)^{\frac{1}{2}} - \psi_1^A}{1 + \left(\frac{W_1\psi_1^A}{W_2\psi_2^A}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.1}$$

Assim, para $\psi_i^A \neq 0$, a estratégia de alocação ótima do jogador B é dada por

$$\boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), x^B) = \begin{cases} (0, x^B), & \text{se} \quad k \leq 0, \\ (k, x^B - k), & \text{se} \quad 0 \leq k \leq x^B, \\ (x^B, 0), & \text{se} \quad k \geq x^B. \end{cases}$$

Note que a utilidade do jogador A depende da estratégia do jogador B. Portanto, para avaliar a melhor resposta jogador A à estratégia $\boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^{A}}(x^A), x^B)$, precisamos avaliar para que valores de x^B teremos os casos $k \leq 0$, $0 \leq k \leq x^B$ e $k \geq x^B$. Para tanto, pode-se facilmente verificar que:

- Se $x^B \leq y_1$, em que $y_1 = (\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^A - (\psi_1^A)^2)^{\frac{1}{2}} - x^A + \psi_1^A$, então temos que $k \leq 0$;
- Se $x^B \geq y_2$, em que $y_2 = (\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^A - (\psi_1^A)^2)^{\frac{1}{2}} - \psi_1^A$, então temos que $k \leq x^B$;
- Se $\psi_1^A < \frac{x^A W_1}{W_1 + W_2}$, então $y_1 < 0 < y_2$;
- Se $\psi_1^A > \frac{x^A W_1}{W_1 + W_2}$, então $y_2 < 0 < y_1$; e
- Se $\psi_1^A = \frac{x^A W_1}{W_1 + W_2}$, então $y_1 = y_2 = 0$.

Usando o fato de $W_1 \geq W_2$ prova-se, facilmente, que $y_1 < 1$. Assim, para montarmos a função utilidade do jogador A, temos que nos restringir somente aos casos em que $y_1 < 0 < y_2 \leq 1$, $y_1 < 0$ e $y_2 > 1$ e o caso em que $y_2 < 0 < y_1 < 1$.

Portanto, a melhor resposta do jogador A é a que maximiza a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{B*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), X^B)) &= \int_{\min(0,y_1)}^{y_1} [W_1 + W_2\left(\frac{\psi_2^A}{\psi_2^A + x^B}\right)]F'(x^B)dx^B \\ &+ \int_{\max(y_1,y_2)}^{\max(1,y_2)} [W_1\left(\frac{\psi_1^A}{\psi_1^A + k}\right) + W_2\left(\frac{\psi_2^A}{\psi_2^A + x^B - k}\right)]F'(x^B)dx^B \\ &+ \int_0^{\max(0,\min(1,y_2))} [W_1\left(\frac{\psi_1^A}{\psi_1^A + x^B}\right) + W_2]F'(x^B)dx^B \end{aligned}$$

A depender da distribuição F, o máximo de $U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{B*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), X^B))$ só pode ser encontrado numericamente. Para prosseguirmos com a solução analítica, iremos supor agora que

F é a distribuição de uma variável aleatória uniforme no intervalo $(0,1]$. Pode-se agora resolver cada uma das integrais que aparecem na expressão de U_A.

Assim, temos que a primeira integral é dada por:

$$\begin{aligned}\int_{\min(0,y_1)}^{y_1}[W_1 + W_2\left(\frac{\psi_2^A}{\psi_2^A + x^B}\right)]F^{'}(x^B)dx^B &= W_1(y_1 - \min(0,y_1)) \\ &+ W_2\psi_2^A \ln\left(\frac{\psi_2^A + y_1}{\psi_2^A + \min(0,y_1)}\right).\end{aligned}$$

Para resolver a segunda integral, deve-se levar em conta que k depende de x^B. Dessa forma, separando este caso em duas integrais, temos que a primeira parte da integral é dada por:

$$\int_{\max(y_1,y_2)}^{\max(1,y_2)} W_1\left(\frac{\psi_1^A}{\psi_1^A + k}\right)dx^B = ((W_1W_2)^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^A - (\psi_1^A)^2)^{\frac{1}{2}} + W_1\psi_1^A)\ln\left(\frac{x^A + \max(1,y_2)}{x^A + \max(y_1,y_2)}\right).$$

Por outro lado, a segunda parte da segunda integral é dada por:

$$\begin{aligned}\int_{\max(y_1,y_2)}^{\max(1,y_2)} W_2\left(\frac{\psi_2^A}{\psi_2^A + x^B - k}\right)dx^B &= ((W_1W_2)^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^A - (\psi_1^A)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &+ W_2(x^A - \psi_1^A))\ln\left(\frac{x^A + \max(1,y_2)}{x^A + \max(y_1,y_2)}\right).\end{aligned}$$

Por fim, a terceira integral é dada por:

$$\begin{aligned}\int_0^{\max(0,\min(1,y_2))}[W_1\left(\frac{\psi_1^A}{\psi_1^A + x^B}\right) + W_2]F^{'}(x^B)dx^B &= W_2(\max(0,\min(1,y_2))) \\ &+ W_1\psi_1^A \ln\left(\frac{\psi_1^A + \max(0,\min(1,y_2))}{\psi_1^A}\right).\end{aligned}$$

Assim, a utilidade esperada do jogador A é dada por

$$\begin{aligned}&U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{B*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), X^B)) = \\ =\ & W_1(y_1 - \min(0,y_1)) + W_2(x^A - \psi_1^A)\ln\left(\frac{x^A - \psi_1^A + y_1}{x^A - \psi_1^A + \min(0,y_1)}\right) \\ +\ & [2(W_1W_2)^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^A - (\psi_1^A)^2)^{\frac{1}{2}} + W_1\psi_1^A + W_2(x^A - \psi_1^A)]\ln\left(\frac{x^A + \max(1,y_2)}{x^A + \max(y_1,y_2)}\right) \\ +\ & W_2(\max(0,\min(1,y_2))) + W_1\psi_1^A\ln\left(\frac{\psi_1^A + \max(0,\min(1,y_2))}{\psi_1^A}\right).\end{aligned}$$

No teorema a seguir usaremos a notação U_A para abreviar a função utilidade do jogador A, isto é, $U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{B*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), X^B))$.

Teorema 4.4.1. *O ponto* $\boldsymbol{\psi}^{A*} = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}) = (\frac{x^A W_1}{W_1+W_2}, \frac{x^A W_2}{W_1+W_2})$ *é ponto crítico da função* U_A.

Demonstração. A fim de demonstrar esse teorema, considere a expressão da utilidade à esquerda e à direita de $\psi_1^{A*} = \frac{x^A W_1}{W_1+W_2}$, isto é, U_A^+ é obtida considerando $\psi_1^{A+} = \psi_1^{A*} + \epsilon_1$, em que $\epsilon_1 \geq 0$, ao invés de ψ_1^A e U_A^- é obtida considerando $\psi_1^{A-} = \psi_1^{A*} - \epsilon_2$, em que $\epsilon_2 \geq 0$, ao invés de ψ_1^A. Assim, utilizando os fatos que $y_1 < 0 < y_2$ quando $\psi_1^A < \psi_1^{A*}$, que $y_2 < 0 < y_1$ quando $\psi_1^A > \psi_1^{A*}$ e que as funções y_1 e y_2 são contínuas em ψ_1^A, temos que $0 < y_1 < 1$ e $y_2 < 0$ para $\psi_1^{A+} = \psi_1^{A*} + \epsilon_1$ e $y_1 < 0$ e $0 < y_2 < 1$ para $\psi_1^{A-} = \psi_1^{A*} - \epsilon_2$. Portanto, temos que as equações da utilidade à direita e à esquerda são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned}
U_A^+ &= W_1[(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A+} - (\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}} - x^A + \psi_1^{A+}] \\
&+ W_2(x^A - \psi_1^{A+})\ln\left(\frac{(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A+} - (\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}}{x^A - \psi_1^{A+}}\right) \\
&+ [2(W_1W_2)^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A+} - (\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}} + W_1\psi_1^{A+} \\
&+ W_2(x^A - \psi_1^{A+})]\ln\left(\frac{x^A + 1}{(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A+} - (\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}} + \psi_1^{A+}}\right),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
U_A^- &= [2(W_1W_2)^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A-} - (\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}} + W_1\psi_1^{A-} \\
&+ W_2(x^A - \psi_1^{A-})]\ln\left(\frac{x^A + 1}{x^A + (\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A-} - (\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}} - \psi_1^{A-}}\right) \\
&+ W_2[(\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A-} - (\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}} - \psi_1^{A-}] \\
&+ (W_1\psi_1^{A-})\ln\left(\frac{(\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A-} - (\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}}}{\psi_1^{A-}}\right).
\end{aligned}$$

As derivadas das utilidades acima com respeito a ψ_1^{A+} e ψ_1^{A-} são, respectivamente, dadas por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_A^+}{\partial \psi_1^{A+}} &= W_1\left(\frac{(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}(x^A-2\psi_1^{A+})}{2(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}}+1\right)+\frac{W_2x^A}{2\psi_1^{A+}}-\ln\left(\frac{\psi_1^{A+}(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}}{(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&+\left(\frac{(x^A-2\psi_1^{A+})(W_1W_2)^{\frac{1}{2}}}{(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}}+W_1-W_2\right)\ln\left(\frac{x^A+1}{\psi_1^{A+}+(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&-\frac{\left(\frac{(x^A-2\psi_1^{A+})(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}}{2(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}}+1\right)(2(W_1W_2)^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}+W_1\psi_1^{A+})}{(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}+\psi_1^{A+}}\\
&-\frac{W_2(x^A-\psi_1^{A+})}{(x^A\psi_1^{A+}-(\psi_1^{A+})^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{W_2}{W_1})^{\frac{1}{2}}+\psi_1^{A+}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_A^-}{\partial \psi_1^{A-}} &= \left(\frac{(x^A-2\psi_1^{A-})(W_1W_2)^{\frac{1}{2}}}{(x^A\psi_1^{A-}-(\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}}}+W_1-W_2\right)\ln\left(\frac{x^A+1}{x^A-\psi_1^{A-}+(\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A-}-(\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&+\frac{W_1\left(2(x^A-\psi_1^{A-})\ln\left(\frac{(x^A\psi_1^{A-}-(\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}}{\psi_1^{A-}}\right)-x^A\right)}{2(x^A-\psi_1^{A-})}\\
&-\frac{\left((W_1W_2)^{\frac{1}{2}}(x^A\psi_1^{A-}-(\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}}+W_1\psi_1^{A-}\right)\left(\frac{(x^A-2\psi_1^{A-})(\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}}{2(x^A\psi_1^{A-}-(\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}}}-1\right)}{(x^A\psi_1^{A-}-(\psi_1^{A-})^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{W_1}{W_2})^{\frac{1}{2}}+x^A-\psi_1^{A-}}.
\end{aligned}
$$

Com um pouco de manipulação matemática, obtém-se que

$$\lim_{\epsilon_1\to 0}\frac{\partial U_A^+}{\partial \psi_1^{A+}}=\lim_{\epsilon_2\to 0}\frac{\partial U_A^-}{\partial \psi_1^{A-}}=0,$$

o que conclui a demonstração. □

Para demonstrarmos que $\boldsymbol{\psi}^{A^*}$ é a estratégia de melhor resposta do jogador A, seria suficiente mostrar que $U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A),\boldsymbol{\psi}^{B^*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A),X^B))$ é uma função côncava na variável ψ_1^A. Apesar de não termos conseguido demonstrar analiticamente este fato, através de simulações computacionais, observamos que este fato foi verdadeiro em todos os casos simulados, a saber:

Caso (I): $W_2=0.5$ e $x^A\in\{0.1,0.2,\ldots,1\}$;

Caso (II): $W_2=0.1$ e $x^A\in\{0.1,0.2,\ldots,1\}$;

Caso (III): $W_2=0.95$ e $x^A\in\{0.1,0.2,\ldots,1\}$;

Caso (IV): $x^A = 0.1$ e $W_2 \in \{0.1, 0.2, \dots, 1\}$;

Caso (V): $x^A = 0.4$ e $W_2 \in \{0.1, 0.2, \dots, 1\}$;

Caso (VI): $x^A = 0.9$ e $W_2 \in \{0.1, 0.2, \dots, 1\}$.

Em todos os casos consideramos, sem perda de generalidade, que $W_1 = 1$. As representações gráficas para cada um dos seis casos citados acima estão exibidas nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6. Nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, a ordem das curvas é dada pelo valor de x^A, sendo que a curva mais interior refere-se a $x^A = 0.1$, a segunda mais interior refere-se a $x^A = 0.2$ e assim por diante. Nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6, a ideia é similar ao que foi comentado acima, a diferença é que curva mais interior refere-se a $W_2 = 0.1$, a segunda mais interior refere-se a $W_2 = 0.2$ e assim por diante.

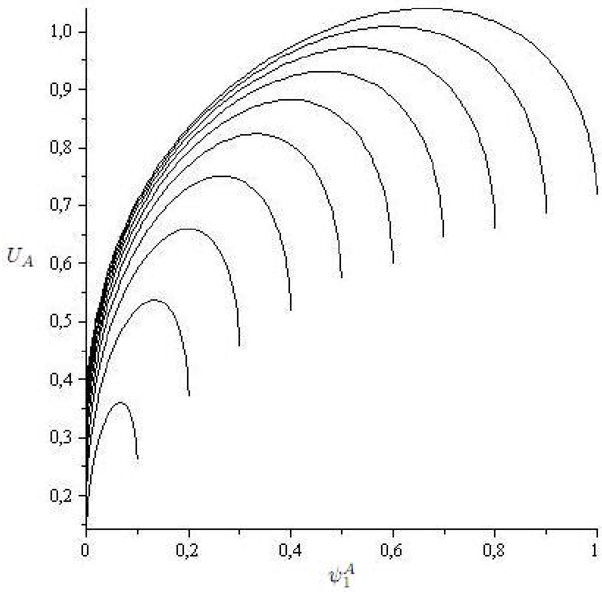

Figura 4.1: Caso (I)

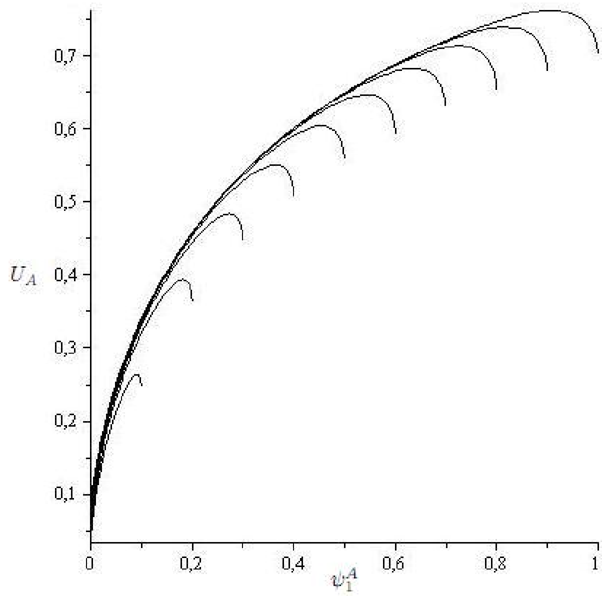

Figura 4.2: Caso (II)

Portanto o ponto crítico apresentado no Teorema 4.3.1, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}) = (\frac{x^A W_1}{W_1+W_2}, \frac{x^A W_2}{W_1+W_2})$ é a estratégia de alocação de equilíbrio do jogador A em todos os casos simulados. Substituindo o valor de $\psi_1^{A^*}$ na Equação (4.1), encontramos a alocação de equilíbrio do jogador B, ou seja, $(\psi_1^{B^*}, \psi_2^{B^*}) = (\frac{x^B W_1}{W_1+W_2}, \frac{x^B W_2}{W_1+W_2})$.

Finalmente, substituindo $\boldsymbol{\psi}^{A^*}$ e $\boldsymbol{\psi}^{B^*}$ nas expressões $U_A(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), \boldsymbol{\psi}^{B^*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), X^B))$ e $U_B(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A),$

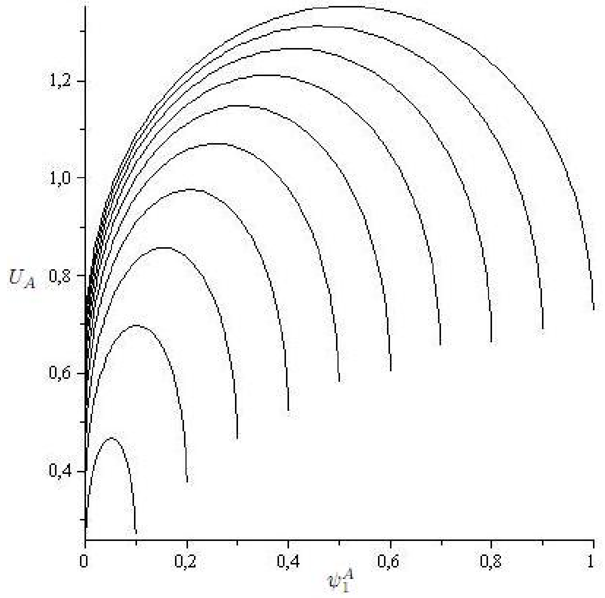

Figura 4.3: Caso (III)

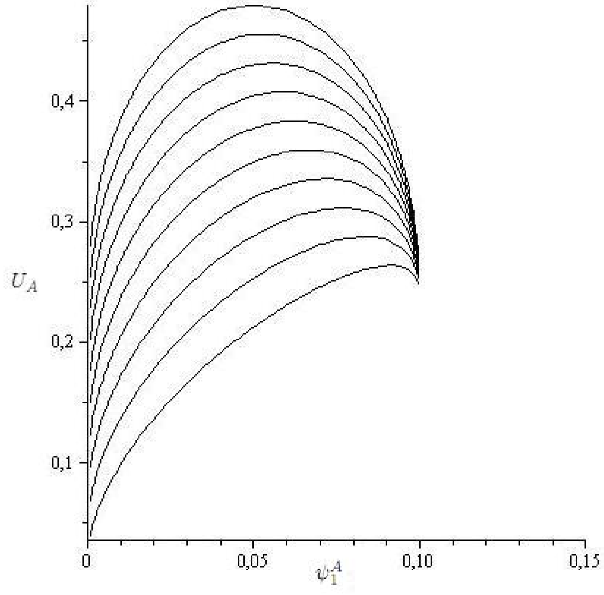

Figura 4.4: Caso (IV)

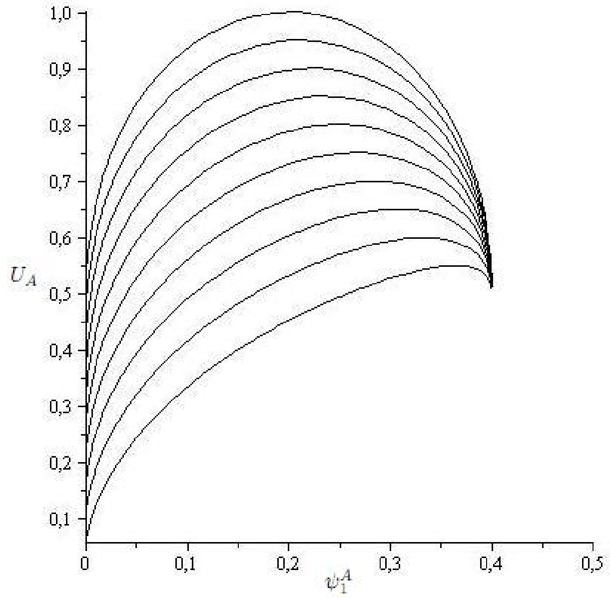

Figura 4.5: Caso (V)

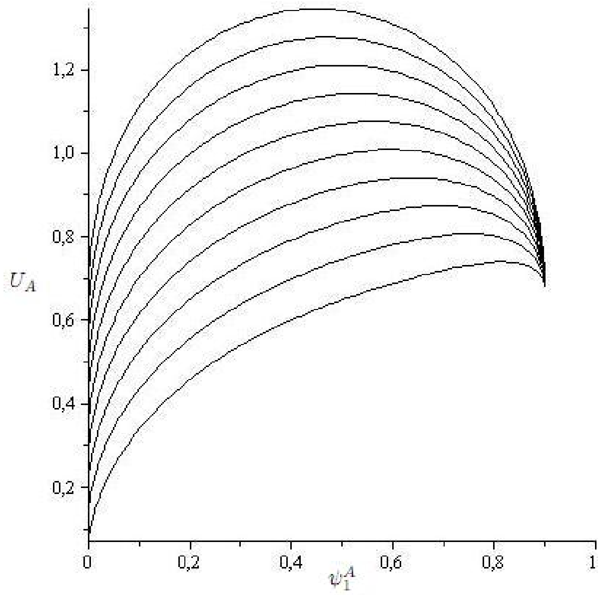

Figura 4.6: Caso (VI)

$\boldsymbol{\psi}^B(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), x^B))$, obtemos, respectivamente:

$$U_A(\boldsymbol{\psi}^{A^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{B^*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), x^B)) = (W_1 + W_2)x^A \ln\left(\frac{x^A + 1}{x^A}\right)$$

e

$$U_B(\boldsymbol{\psi}^{A^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{B^*}(\boldsymbol{\psi}^A(x^A), x^B)) = \frac{(W_1 + W_2)x^B}{x^A + x^B}.$$

Observe que se considerarmos o instante antes do jogador A tomar conhecimento sobre a sua quantidade de recursos disponível, que esta segue uma distribuição independente e identicamente distribuída segundo a distribuição uniforme, temos que as utilidades esperadas que os jogadores A e B participarem deste jogo, antes de saberem os seus próprios recursos são dadas, respectivamente, por

$$EU_A = (W_1 + W_2) \int_0^1 x^A \ln\left(\frac{x^A + 1}{x^A}\right) dx^A = \frac{W_1 + W_2}{2},$$

e

$$EU_B = (W_1 + W_2) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^B}{x^A + x^B} dx^A dx^B = \frac{W_1 + W_2}{2}.$$

Portanto, antes de saberem qual o valor de recurso disponível não existe nenhuma vantagem *a priori* em se mover primeiro ou depois neste jogo, mesmo o segundo jogador ao se mover tendo informação perfeita sobre a decisão tomada pelo primeiro jogador no início do jogo.

4.5 Conclusões

Neste capítulo propusemos um modelo de jogo Blotto sequencial com informação imperfeita para $K = 2$ campos de batalhas, em que a probabilidade de um jogador ganhar um prêmio em particular é proporcional à quantidade de recurso investido pelo mesmo neste prêmio em relação ao total investido por ambos jogadores. Consideramos apenas a classe de jogos com soma constante, assumindo que a distribuição de recursos seguia uma distribuição uniforme. Chegou-se à conclusão de que a estratégia ótima para o jogador A é investir seus recursos na mesma proporção com que ele valora os prêmios, sendo a ação de equilíbrio do jogador B também da mesma forma alocar proporcionalmente a sua valoração. Desta forma, provamos que *a priori*, ambos os jogadores possuem a mesma utilidade esperada que é igual à média aritmética dos valores dos prêmios e, portanto, não existe nenhuma vantagem neste jogo em se mover primeiro.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Direções para trabalhos futuros

5.1 Conclusões

Nesta dissertação propomos modelagens do jogo Coronel Blotto que abordam tanto o problema sequencial quanto o de informação imperfeita. Nosso primeiro objetivo foi propor um modelo no qual o jogador que se move primeiro (jogador A) tem informação imperfeita acerca dos recursos orçamentários do jogador que se move na sequencia (jogador B). Analisamos os casos onde os jogadores disputam $K = 2$ e $K = 3$ prêmios. Para o caso em que $K = 2$ apresentamos um equilíbrio de subjogo perfeito em estratégias puras e, para o caso em que $K = 3$, apresentamos um equilíbrio de Nash em estratégias puras como solução de cada uma das modelagens que propusemos.

Adicionalmente, propomos uma extensão do modelo do jogo Coronel Blotto. Nesta extensão adotamos que os jogadores se movem de forma sequencial onde assumimos informação imperfeita da mesma forma da modelagem descrita acima. Suprimimos a hipótese tradicional de que o jogador que mais investir recursos em um determinado prêmio sempre ganha esse prêmio com probabilidade 1 e adotamos o critério de que o jogador que mais investir recursos em determinado prêmio somente possui maior probabilidade de ganhá-lo. Para essa modelagem apresentamos um equilíbrio de Nash em estratégias puras como solução do jogo.

5.2 Direções para trabalhos futuros

Com relação a primeira modelagem, em futuras pesquisas, trataremos de estudar:

- Algebricamente e computacionalmente os casos onde os jogadores estão disputando uma quantidade maior de prêmios;
- Nos casos em que particularizamos a distribuição de recursos do jogador B, isto é, onde supomos F uma distribuição uniforme, iremos investigar o que acontece quando utilizamos outras distribuições.

Com relação a segunda modelagem que propomos, diversos trabalhos podem ser feitos para estender os resultados apresentados, tais como:

- Estudar outras distribuições para os recursos;
- Aumentar o número de prêmios envolvidos e investigar o caso onde os jogadores possuem preferências diferentes;
- Obter uma prova analítica sobre a estratégia de alocação de equilíbrio do jogador A.
- Uma outra forma de generalizar os resultados apresentados neste capítulo, utilizando uma ideia dos trabalhos de Levitin & Hausken (2010) e Lins et al. (2013), é introduzir um parâmetro $m > 0$ (conhecido como intensidade da disputa) de tal forma que se o jogador A alocar $\psi_i^A(x^A)$ no prêmio i e o jogador B alocar $\psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), (x^B))$, então a probabilidade do jogador A ganhar o prêmio i (ideia análoga vale para a probabilidade do jogador B ganhar o prêmio) é dada por:
$$\frac{(\psi_i^A(x^A))^m}{(\psi_i^A(x^A))^m + (\psi_i^B(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), x^B))^m}.$$
Observe que se $m = 1$, então temos o caso apresentado neste capítulo, enquanto se $m = \infty$, temos o caso apresentado no capítulo anterior.
- Estudar o trabalho de Adamo & Matros (2009) adotando o critério que usamos na nossa modelagem, isto é, supondo que quem mais investir em um campo somente possui maior probabilidade de ganhá-lo.

Referências

[1] ADAMO, T.; MATROS, A. A Blotto game with incomplete information. *Economic Letters*, USA, v. 105, p. 100-102, 2009.

[2] ALIPRANTIS, C.; CHAKRABARTI, S. *Games and Decision Making*. Inglaterra: Oxford University Press, 2000. 319 p.

[3] BLACKETT, D. Pure strategy solutions to Blotto games. *Naval Res. Logist. Quart.*, USA, v. 5, p. 107-109, 1958.

[4] BOREL, E. La Theorie de Jeu et les Equations Integrales a Noyan Symetrique. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, França, v. 173, p. 1304-1308, 1921.

[5] BOREL, E.; VILLE, J. Application de la théorie des probabilitiés aux jeux de hasard. *Gauthi-er-Villars*, Paris, v.12, p. 97-100, 1938.

[6] CAMPELLO DE SOUZA, F. M. *Decisões Racionais em Situações de Incerteza*. Recife, Editora Universitária, 2007. 568 p.

[7] CHUNG, K.; FORTNOW, L. Loopholes. *Working Paper*, Minneapolis MN, 2007.

[8] CLARK, D. J.; KAI A. K. Asymmetric conflict: Weakest link against best shot. *mimeo*, USA, 2006.

[9] DE CASTRO, R. *El universo Latex*. Colombia: Universidade Nacional da Colombia, 2003. 470 p.

[10] DEDK, C.; SHERETA, R.M. Fight or Flight? Defending Against Sequential Attacks in the Game of Siege. *Journal of Conflict Resolution*, USA, v. 56, p. 1069-1088, (2012).

[11] FUCHS, Z. E.; KHARGONEKAR, P. P. A Sequential Colonel Blotto Game with a Sensor Network. *American Control Conference Fairmont Queen Elizabeth*, p. 1851-1857, 2012.

[12] HAUSKEN, K. Strategic defense and attack for reliability systems. *Reliability Engineering and System Safety*, USA, v. 93, p. 1740-1750, 2008.

[13] KLUMPP, T.; POLBORN, M. K. Primaries and the New Hampshire efect. *Journal of Public Economics (forthcoming)*, USA, v. 90, p. 1073-1114, 2006.

[14] KOVENOCK, D.; ROBERSON, B. Coalitional Colonel Blotto games with application to the economics of alliances. *mimeo*, USA, 2009.

[15] KOVENOCK, D.; ROBERSON, B. A Blotto Game with Multi-Dimensional Incomplete Information. *Institute for Research in the Behavioral, Economic, and Management Sciences*, USA, p. 1-6, 2010.

[16] LASLIER, J.F. How Tho-Party Competition Treats Minorities. Review of Economic Design, USA, v. 7, p. 297-307, 2002.

[17] LASLIER, J.F.; PICARD, N. Distributive Politics and Electoral Competition. *Journal of Economic Theory*, USA, v. 113, p. 106-130, 2002.

[18] LEVITIN, G.; HAUSKEN, K. Separation in homogeneous systems with independent identical elements. *European Journal of Operational Research*, França, v. 203, p. 625-634, 2010.

[19] LINS, I. D.; RÊGO, L. C.; MOURA, M. C.; DROGUETT, E. A. L. Selection of security system design via games of imperfect information and multi-objective genetic algorithm. *Reliability Engineering & Systems Safety*, USA, v. 112, p. 59-66, 2013.

[20] MAYNARD SMITH, J. Evolution and the theory of games. *American Scientist*, USA, v. 121, p. 41-45, 1976.

[21] MAYNARD SMITH, J.; PRICE, G. The logic of animal conflict. *Nature*, Reino Unido, v. 146, p. 15-18, 1973.

[22] MYERSON, R. B. *Game Theory: Analysis of Conflit*. Pensilvania: Havard University Press, 2007. 600 p.

[23] NASH, J. F. The bargaining problem. *Econometrica*, Ohio, v. 18, p. 155-162, 1950a.

[24] NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, USA, v.38, p. 48-49, 1950b.

[25] NASH, J. F. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, Princeton, v. 54, p. 286-295, 1951.

[26] NASH, J. F. Two-person cooperative games. Econometrica, Ohio, v. 21, p. 128-140, 1953.

[27] NEUMANN, J.V. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, França, v. 100, p. 295-320, 1928.

[28] NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton: University Press, 1944. 776 p.

[29] ORDESHOOK, P. *Game Theory and Political Theory*. Inglaterra: Cambridge University Press, 1986. 511 p.

[30] OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. *A Course in Game Theory*. Inglaterra: MIT Press, 1994. 368 p.

[31] POUNDSTONE, W. *Prisoner's Dilemma*. New York: Anchor, 1993. 156 p.

[32] POWELL, R. Sequential, nonzero-sum Blotto: Allocating defensive resources prior to attack. *Games and Economic Behavior*, USA, v. 67, p. 611-615, 2009.

[33] POWELL, R. Allocating Defensive Resources with Private Information About Vulnerability. *American Political Science Review*, Inglaterra v. 33, p. 799-809, 2007.

[34] ROBERSON, B. Pork-Barrel Politics, Targetable Policies, and Fiscal Federalism. *Journal of the European Economic Association*, EUA, v. 17 pp. 819-844, 2008.

[35] SNYDER, J. Election goals and the allocation of campaign resources. *Econometrica*, Ohio, v. 57, p. 637-660, 1989.

[36] SHUBIK, M.; WEBER, R. Systems defense games: Colonel Blotto, command and control. *Naval Res. Logist. Quart.*, USA, v. 28, p. 281-287, 1981.

[37] STROMBERG, D. How the Electoral College Influences Campaigns and Policy: The Probability of Being Florida. *American Economic Review*, Florida, v. 98, p. 769-807, 2008.

[38] SOUZA, A. A. *A teoria dos jogos e as ciências sociais.* 2003. 173f. Dissertação (Mestrado em Ciências Sociais) - Departamento de Ciências Sociais, Universidade Estadual Paulista, 2003.

[39] TUCKER, A. A two-person dilemma. *mimeo*, Stanford University, p.17-32, 1950.

[40] TUKEY, J. A problem of strategy. *Econometrica*, Ohio, v. 17, p. 73-88, 1949.

[41] YUMIKO B. A Note on a Comparison of Simultaneous and Sequential Colonel Blotto Games. *Peace Economics, Peace Science and Public Policy*, USA, v. 18, p. 112-128, 2012.

APÊNDICE A

Demonstrações

A.1 Caso de Soma Constante $K = 3$

Nesta seção, iremos detalhar os cálculos dos pontos de máximo do caso do jogo Blotto sequencial de soma constante com $K = 3$ prêmios.

Caso I: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Se $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_1^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1 + W_2 + 1)F(\psi_1^A) + (W_2 + 1)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_1^A)) \\ + \quad & (F(x^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \quad = \quad W_1 F(\psi_1^A) + W_2 F(\psi_1^A + \psi_2^A) + F(x^A).$$

Lema A.1.1. *Na função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$, devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_2^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi^{A*}} = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo e que $\psi_1^{A*} < \psi_2^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_2^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_2^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso e considerando $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}} = (\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_2^{A^*} - \epsilon, \psi_3^{A^*})$ decorre que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = W_1(F(\psi_1^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.1.1 e o fato de que $X^n \sim U(0,1]$, $\forall n \in \{A, B\}$ o problema fica equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = (W_1 + 2W_2)\psi_1^A + x^A,$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$.

É fácil ver que $H(\psi_1^A)$ é crescente em ψ_1^A. Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso II: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A$.

Se $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_1^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1 + W_2 + 1)F(\psi_1^A) + (W_2 + 1)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A)) \\ + \quad & (F(x^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) + W_2(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) &= W_1F(\psi_1^A) + (W_2 - 1)F(\psi_1^A + \psi_2^A) \\ &+ F(\psi_1^A + \psi_3^A) + F(x^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$ e usando o fato de que $X^n \sim U(0,1]$ temos que o problema de maximização acima é equivalente a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_3^A) = W_1\psi_1^A + W_2(x^A - \psi_3^A) + \psi_1^A.$$

Lema A.1.2. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$, devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e que $\psi_1^{A^*} < \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos

$\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso $T(\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_3^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_1(\psi_1^{A^*} + \epsilon - \psi_1^{A^*}) + W_2(x^A - \psi_3^{A^*} + \epsilon - \psi_3^{A^*}) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.1.2, temos o seguinte problema de maximização equivalente

$$H(\psi_1^A) = (W_1 - W_2)\psi_1^A + W_2 x^A + \psi_1^A,$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$.

É fácil ver que $H(\psi_1^A)$ é crescente em ψ_1^A. Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A$.

Se $\psi_2 \leq \psi_1 \leq \psi_3$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_2^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1 + W_2 + 1)F(\psi_2) + (W_2 + 1)(F(\psi_1 + \psi_2) - F(\psi_1)) \\ + \quad & F(x^A) - F(\psi_1 + \psi_2) + (W_1 + 1)(F(\psi_1) - F(\psi_2)) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= (W_1 - W_2)F(\psi_1^A) + W_2 F(\psi_2^A) \\ &+ W_2 F(\psi_1^A + \psi_2^A) + F(x^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$ e usando o fato de que $X^n \sim U(0, 1]$ temos que o problema de maximização acima é equivalente a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_3^A) = W_1 \psi_1^A + 2W_2(x^A - \psi_1^A - \psi_3^A) + x^A.$$

Lema A.1.3. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$, devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e que $\psi_1^{A^*} < \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso $T(\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_3^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_1(\psi_1^{A^*} + \epsilon - \psi_1^{A^*}) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.1.3, temos o seguinte problema de maximização equivalente

$$H(\psi_1^A) = W_1\psi_1^A + 2W_2x^A - 4W_2\psi_1^A + x^A,$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Mas note que

$$H^{'}(\psi_1^A) = W_1 - 4W_2,$$

então decorrem os seguintes fatos:

- Se $W_1 > 4W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{2}$;
- Se $W_1 < 4W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1 = \psi_3 = \frac{x^A}{3}$;
- Se $W_1 = 4W_2$ o máximo ocorre em quaisquer pontos tais que $\psi_1 = \psi_3 \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Caso IV: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A$.

Se $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_3^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1 + W_2 + 1)F(\psi_3^A) + (W_2 + 1)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A)) \\ + \quad & (F(x^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) + W_2(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)) \\ + \quad & (W_1 + W_2)(F(\psi_1^A) - F(\psi_3^A)) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \quad = \quad & (W_1 - 1)F(\psi_1^A) + (W_2 - 1)F(\psi_1^A + \psi_2^A) \\ + \quad & F(\psi_3^A) + F(\psi_1^A + \psi_3^A) + F(x^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$ e usando o fato de que $X^n \sim U(0, 1]$ temos que o problema de maximização acima é equivalente a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_2^A) \quad = \quad W_1\psi_1^A + (W_2 - 1)(\psi_1^A + \psi_2^A) - 2(\psi_1^A + \psi_2^A) + 3x^A$$

Lema A.1.4. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$, devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_2^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ seja ótimo e que $\psi_1^{A^*} < \psi_2^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_2^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*}+\epsilon \leq \psi_2^{A^*}-\epsilon$. Fazendo isso $T(\psi_1^{A^*}+\epsilon, \psi_2^{A^*}-\epsilon)-T(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}) = W_1(\psi_1^{A^*}+\epsilon-\psi_1^{A^*}) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.1.4, temos o seguinte problema de maximização equivalente

$$H(\psi_1^A) = W_1\psi_1^A + 2W_2\psi_1^A - 6\psi_1^A + 3x^A,$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Mas note que

$$H^{'}(\psi_1^A) = W_1 - 6 + 2W_2,$$

então decorrem os seguintes fatos:

- Se $W_1 > 6 - 2W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{2}$;
- Se $W_1 < 6 - 2W_2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{3}$;
- Se $W_1 = 6 - 2W_2$ o máximo ocorre em quaisquer pontos tais que $\psi_1^A = \psi_2^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Caso V: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A \leq \psi_1^A$.

Se $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A+\psi_3^A \leq \psi_1^A$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_2^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}$ $(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned}
& (W_1 + W_2 + 1)F(\psi_2) + (W_2 + 1)(F(\psi_1 + \psi_2) - F(\psi_1)) \\
+ \quad & (F(x^A) - F(\psi_1 + \psi_2)) + W_1(F(\psi_1) - F(\psi_2 + \psi_3)) \\
+ \quad & (W_1 + 1)(F(\psi_2 + \psi_3) - F(\psi_2))
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= (W_1 - W_2 - 1)F(\psi_1) + W_2F(\psi_2) \\
&+ W_2F(\psi_1 + \psi_2) + F(\psi_2 + \psi_3) + F(x^A)
\end{aligned}$$

Substituindo $\psi_1^A = x^A - \psi_2^A - \psi_3^A$ e usando o fato de que $X^n \sim U(0,1]$ temos que o problema de maximização acima é equivalente a maximizar

$$\begin{aligned} T(\psi_2^A, \psi_3^A) &= (W_1 - W_2 - 1)(x^A - \psi_2^A - \psi_3^A) + W_2\psi_2 \\ &+ W_2(x^A - \psi_3^A) + \psi_2^A + \psi_3^A + x^A \end{aligned}$$

Lema A.1.5. *Na função objetivo $T(\psi_2^A, \psi_3^A)$, devemos ter $\psi_2^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e que $\psi_2^{A^*} < \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_2^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_2^{A^*} + \epsilon \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso $T(\psi_2^{A^*} + \epsilon, \psi_3^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_2(\psi_2^{A^*} + \epsilon - \psi_2^{A^*}) + W_2(x^A - \psi_3^A + \epsilon - x^A + \psi_3^A) > 0$, isto é, $(\psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando Lema A.1.5, temos o seguinte problema de maximização equivalente

$$H(\psi_2^A) = W_1 x^A - 2W_1\psi_2^A + 2W_2\psi_2^A + 4\psi_2^A,$$

sujeito a restrição $\psi_2 \in [0, \frac{x^A}{4}]$.

Note que $H^{'}(\psi_2^A) = -2W_1 + 2W_2 + 4$, então decorrem as seguintes situações:

- Se $W_1 > W_2 + 2$ o máximo ocorre em $\psi_1 = x^A$;
- Se $W_1 < W_2 + 2$ o máximo ocorre em $\psi_2 = \psi_3 = \frac{x^A}{4}$;
- Se $W_1 = W_2 + 2$ o máximo ocorre em quaisquer pontos tais que $\psi_2 = \psi_3 \in [0, \frac{x^A}{4}]$.

Caso VI: $\psi_3 \leq \psi_2 \leq \psi_2 + \psi_3 \leq \psi_1$.

Se $\psi_3 \leq \psi_2 \leq \psi_2 + \psi_3 \leq \psi_1$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_3^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1 + W_2 + 1)F(\psi_3^A) + (W_2 + 1)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A)) \\ + \; & (F(x^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) + W_2(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)) \\ + \; & W_1(F(\psi_1^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + (W_1 + 1)(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_2^A)) \\ + \; & (W_1 + W_2)(F(\psi_2^A) - F(\psi_3^A)) \end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
& U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \\
= \quad & (W_1 - W_2 - 1)F(\psi_1^A) + (W_2 - 1)F(\psi_1^A + \psi_2^A) + (W_2 - 1)F(\psi_2^A) + F(\psi_1^A + \psi_3^A) \\
+ \quad & F(\psi_2^A + \psi_3^A) + F(\psi_3^A) + F(x^A).
\end{aligned}
$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$ e usando o fato de que $X^n \sim U(0,1]$ temos que o problema de maximização acima é equivalente a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_2^A) = W_1\psi_1^A - 4\psi_1^A + 2W_2\psi_2^A - 4\psi_2^A + 4x^A. \tag{A.1}$$

Fazendo uma análise sobre os coeficientes de W_1 e W_2 na função objetivo (A.1), temos os seguintes casos:

- Se $W_1 > 2W_2$ e $W_1 \geq 4$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = x^A$;
- Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 > 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{2}$;
- Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 = 2$, então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;
- Se $W_1 \geq 2W_2$ e $W_1 < 4$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = x^A$ se $W_1 > 2 + W_2$, se $W_1 < W_2 + 2$ o máximo ocorre em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$,$\psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$, e se $W_1 = 2 + W_2$ então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(x^A, 0, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;
- Se $2W_2 > W_1$ e $W_2 < 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, $\psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$;
- Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 > 4$, então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(x^A, 0, 0)$;
- Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 = 4$, então o máximo ocorre em qualquer ponto tal que $\psi_3 \leq \psi_2 \leq \psi_2 + \psi_3 \leq \psi_1$.

Caso VII: $\psi_2 \leq \psi_3 \leq \psi_1 \leq \psi_2 + \psi_3$.

Se $\psi_2 \leq \psi_3 \leq \psi_1 \leq \psi_2 + \psi_3$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_2^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}$ $(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1 + W_2 + 1)F(\psi_2^A) + (W_2 + 1)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_1^A)) \\ + \quad & (F(x^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) + (W_1 + 1)(F(\psi_1^A) - F(\psi_2^A)) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \\ = \quad & (W_1 - W_2)F(\psi_1^A) + W_2F(\psi_2^A) + W_2F(\psi_1^A + \psi_2^A) + F(x^A) \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_1^A = x^A - \psi_2^A - \psi_3^A$ e usando o fato de que $X^n \sim U(0, 1]$ temos que o problema de maximização acima é equivalente a maximizar

$$T(\psi_2^A, \psi_3^A) = (W_1 - W_2)(x^A - \psi_2^A - \psi_3^A) + W_2\psi_2^A + W_2(x^A - \psi_3^A) + x^A. \tag{A.2}$$

Lema A.1.6. *Na função objetivo $T(\psi_2^A, \psi_3^A)$, devemos ter $\psi_2^{A*} = \psi_3^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo e que $\psi_2^{A*} < \psi_3^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_3^{A*} e adicionar a ψ_2^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_2^{A*} + \epsilon \leq \psi_3^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso $T(\psi_2^{A*} + \epsilon, \psi_3^{A*} - \epsilon) - T(\psi_2^{A*}, \psi_3^{A*}) = W_2(\psi_2^{A*} + \epsilon - \psi_2^{A*}) + W_2(x^A - \psi_3^A + \epsilon - x^A + \psi_3^A) > 0$, isto é, $(\psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.1.6, temos o seguinte problema de maximização equivalente

$$H(\psi_2^A) = (W_1 + 1)x^A - 2W_1\psi_2^A + 2W_2\psi_2^A, \tag{A.3}$$

sujeito a restrição $\psi_2 \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$.

Como

$$G'(\psi_2) = -2W_1 + 2W_2 < 0,$$

decorre que o máximo ocorre em $\psi_1^A = \frac{x^A}{2}$, $\psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$.

Caso VIII: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A$.

Se $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A$, temos que o $\min(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = \psi_3^A$, então $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}$ $(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & W_1 + W_2 + 1)F(\psi_3) + (W_2 + 1)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A)) \\ + \quad & (F(x^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) + W_2(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)) \\ + \quad & (W_1 + 1)(F(\psi_1^A) - F(\psi_2^A)) + (W_1 + W_2)(F(\psi_2^A) - F(\psi_3^A)) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \\ = \quad & (W_1 - W_2)F(\psi_1^A) + (W_2 - 1)F(\psi_1^A + \psi_2^A) + (W_2 - 1)F(\psi_2^A) \\ + \quad & F(\psi_3^A) + F(\psi_1^A + \psi_3^A) + F(x^A) \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$ e usando o fato de que $X^n \sim U(0, 1]$ temos que o problema de maximização acima é equivalente a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_2^A) = (W_1 - 2)\psi_1^A + (2W_2 - 4)\psi_2^A + 3x^A. \tag{A.4}$$

Fazendo uma análise sobre os coeficientes de W_1 e W_2 na função objetivo (A.4), temos os seguintes casos:

- Se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$ e $W_2 > 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{2}$;
- Se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$ e $W_2 = 2$, então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;
- Se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$, $W_2 < 2$ e $W_1 \geq 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1 = \frac{x^A}{2}$, $\psi_2 = \psi_3 = \frac{x^A}{4}$;
- Se $W_1 - 2 < 2W_2 - 4$ e $W_1 \geq 2$, então o máximo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{2}$;
- Se $W_1 - 2 = 2W_2 - 4$ e $W_1 > 2$, então o ótimo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{2}$;

Note que dos máximos que aparecem em todos os outros casos, apenas os pontos $(\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ e $(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$ não são viáveis no caso VI. Assim, vamos comparar a utilidade do jogador A para estes pontos com os máximos obtidos em cada um dos subcasos do Caso VI:

1. Se $W_1 > 2W_2$ e $W_1 \geq 4$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

   Mas temos que
$$U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = W_1 x^A,$$
$$U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = \frac{W_1 x^A}{2} + x^A,$$
   e
$$U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = \frac{W_1 x^A}{3} + \frac{2W_2 x^A}{3} + x^A.$$

   Assim, $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $2x^A(W_1 - W_2) > 3x^A$.

   E ainda, $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_1 x^A}{2} > x^A$.

   Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$.

2. Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 > 2$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$

   Mas
$$U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = \frac{W_1 x^A}{2} + W_2 x^A,$$
   e $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ são dadas no item acima.

   Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{(W_1+2W_2)x^A}{6} > x^A$.

   E ainda $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2 x^A > x^A$.

   Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$.

3. Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 = 2$, então escolhendo o ponto arbitrário $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$, temos que comparar os mesmos pontos do caso anterior. Portanto, pelo resultado do caso anterior

temos que, neste caso, o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$.

4. Se $W_1 \geq 2W_2$ e $W_1 < 4$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$, com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{****}}(x^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

   Mas
$$U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = \frac{W_1 x^A}{2} + \frac{W_2 x^A}{2} + x^A,$$
   e os valores de $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{****}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ são dadas nos itens acima.

   - Se tivermos $W_1 > W_2 + 2$ então decorre que:
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_1 > W_2 + 2$.

     Temos também que
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{****}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $2(W_1 - W_2)x^A > 3x^A$.

     E ainda que
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_1 x^A}{2} > x^A$.

     Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$.

   - Se tivermos $W_1 < W_2 + 2$ então decorre que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$.

     Temos também que
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{****}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_1 x^A}{6} > \frac{W_2 x^A}{6}$.

     E ainda que
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_2 x^A}{2} > 0$.

Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$.

- Se tivermos $W_1 = W_2 + 2$ então qualquer ponto que seja uma combinação convexa entre os pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ e $(x^A, 0, 0)$ é uma melhor resposta para o jogador A, pois é fácil ver que $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$ é constante e, além disso, todos os pontos de ótimo que aparecem nos demais casos, pelos subitens anteriores possuem utilidade menor para o jogador A.

5. Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 < 2$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

   Mas, temos que

   $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_1 x^A}{6} > \frac{W_2 x^A}{6}$.

   E ainda que

   $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_2 x^A}{2} > 0$.

   Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$.

6. Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 > 4$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ (escolhido arbitrariamente dentre os pontos que são combinações convexas de $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(x^A, 0, 0)$), com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

   Assim, temos que

   $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{x^A(W_1+2W_2)}{6} > x^A$.

   E ainda temos que

   $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), x^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^{*}}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2 x^A > x^A$.

   Portanto, neste caso, o ótimo é qualquer ponto que seja uma combinação convexa de $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(x^A, 0, 0)$.

7. Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 = 4$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{*}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ (escolhido de tal forma que $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A \leq \psi_1^A$), com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ e

com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A) = (\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3})$.

Assim, temos que

$U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{x^A(W_1+2W_2)}{6} > x^A$.

E ainda

$U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2x^A > x^A$.

Portanto, neste caso, o ótimo é qualquer ponto tal que $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_2^A + \psi_3^A \leq \psi_1^A$. Observe que qualquer ponto satisfazendo essa restrição pode ser obtido pela combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$, $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ e $(x^A, 0, 0)$.

Note que dos máximos que aparecem em todos os outros casos, apenas os pontos $(x^A, 0, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$ não são viáveis no caso $VIII$. Assim, vamos comparar a utilidade do jogador A para estes pontos com os máximos obtidos em cada um dos subcasos do Caso $VIII$:

1. Se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$ e $W_2 > 2$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$.

   - Se $2W_2 > W_1$ então temos que

     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2x^A > \frac{W_1x^A}{2}$.

     E ainda,

     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), (x^B)))) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2x^A > x^A$.

   - Se $2W_2 < W_1$, então temos

     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2x^A < \frac{W_1x^A}{2}$.

     E ainda,

     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_1x^A}{2} > x^A$.

- Se $W_1 = 2W_2$ então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa entre $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(x^A, 0, 0)$.

2. Se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$ e $W_2 = 2$, então escolhendo arbitrariamente o ponto $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$, temos que comparar os mesmos pontos do caso anterior. Portanto, neste caso,

   - Se $2W_2 > W_1$ então temos que
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois
     $W_2 x^A > \frac{W_1 x^A}{2}$.

     E ainda,
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), (x^B)))) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois
     $W_2 x^A > x^A$. Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$.

   - Se $2W_2 < W_1$, então temos
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois
     $W_2 x^A < \frac{W_1 x^A}{2}$.

     E ainda,
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois
     $\frac{W_1 x^A}{2} > x^A$.

   - Se $W_1 = 2W_2$ então o máximo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$, $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ e $(x^A, 0, 0)$.

3. Se $W_1 - 2 > 2W_2 - 4$ e $W_2 < 2$ e $W_1 \geq 2$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$.

   Mas note que

   - Se $W_1 < W_2 + 2$ então temos que
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_1 - W_2 < 2$.

     E ainda temos que
     $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{**}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}^{***}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}^*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$.

- Se $W_1 > W_2 + 2$, então temos que
  $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_1 - W_2 > 2$.

  E ainda
  $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $\frac{W_1 x^A}{2} > x^A$.

- Se tivermos $W_1 = W_2 + 2$ então qualquer ponto que seja uma combinação convexa entre $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ e $(x^A, 0, 0)$ é uma melhor resposta para o jogador A.

4. Se $W_1 - 2 < 2W_2 - 4$ e $W_1 \geq 2$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$.

   Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $2W_2 > W_1$.

   E, além disso, $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2 x^A > x^A$.

   Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$.

5. Se $W_1 - 2 = 2W_2 - 4$ e $W_1 > 2$, então temos que comparar os pontos $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (x^A, 0, 0)$ com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e com $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, 0, \frac{x^A}{2})$.

   Temos que
   $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2 x^A > \frac{W_1 x^A}{2}$.

   E ainda temos
   $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) > U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}***}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$, pois $W_2 x^A > x^A$.

   Portanto, neste caso, o ótimo ocorre em $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$.

Assim, temos que:

- Se $W_1 > 2W_2$ e $W_1 \geq 4$ então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (x^A, 0, 0)$;
- Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 > 2$ então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$;

- Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 = 2$ então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;

- Se $W_1 \geq 2W_2$ e $W_1 < 4$ então:

$$\begin{cases} \text{Se } W_1 > W_2 + 2 \text{ então o ótimo ocorre em } (\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (x^A, 0, 0); \\ \text{Se } W_1 < W_2 + 2 \text{ então o ótimo ocorre em } (\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}); \\ \text{Se } W_1 = W_2 + 2 \text{ então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação} \\ \text{convexa dos pontos } (x^A, 0, 0) \text{ e } (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4}). \end{cases}$$

- Se $W_1 < 2W_2$ e $W_2 < 2$ então o ótimo ocorre em $(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A) = (\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$;

- Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 > 4$ então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos$(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$ e $(x^A, 0, 0)$;

- Se $W_1 = 2W_2$ e $W_1 = 4$, então o ótimo ocorre em qualquer ponto que seja uma combinação convexa dos pontos $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{2}, 0)$, $(\frac{x^A}{2}, \frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{4})$ e $(x^A, 0, 0)$.

A.2 Caso de Preferências Opostas e $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$

Nesta seção, iremos detalhar os cálculos dos pontos de máximo do caso do jogo Blotto sequencial onde os jogadores possuem preferências opostas sobre os prêmios e $W_3^B \geq W_1^B + W_2^B$.

Caso I: $\psi_1^A \leq \psi_2^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} &(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] + \\ &W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + W_2^A[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)] + \\ &W_3^A[F(\psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)] + (W_1^A + W_3^A)[F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)] + \\ &(W_2^A + W_3^A)[F(\psi_2^A) - F(\psi_1^A)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A[F(\psi_1^A) + F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A) \\ &+ F(x^A) + F(\psi_2^A + \psi_1^A) - F(\psi_2^A)] + W_3^A F(\psi_3^A) \\ &+ W_2^A[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A) + F(\psi_2^A)]. \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$, temos que

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_2^A) &= W_1^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A) + (W_2^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) \\ &+ W_1^A F(x^A) + W_1^A F(x^A - \psi_2^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_2^A) \\ &+ (W_3^A - W_1^A - W_2^A)F(x^A - \psi_1^A - \psi_2^A). \end{aligned}$$

Lema A.2.1. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$, devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_2^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ seja ótimo e que $\psi_1^{A*} < \psi_2^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_2^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon \leq \psi_2^{A*} - \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_1^{A*} + \epsilon, \psi_2^{A*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}) = W_1^A(F(\psi_1^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(\psi_2^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(x^A - (\psi_1^{A*} + \epsilon)) - F(x^A - \psi_1^{A*})) + W_1^A(F(x^A - (\psi_2^{A*} - \epsilon)) - F(x^A - \psi_2^{A*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.2.1, o problema fica equivalente a maximizar

$$\begin{aligned} H(\psi_1^A) &= W_2^A F(\psi_1^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A) + W_1^A F(2\psi_1^A) + W_1^A F(x^A) \\ &+ (W_3^A - W_1^A - W_2^A)F(x^A - 2\psi_1^A), \end{aligned}$$

sujeito às restrições $0 \leq \psi_1^A$ e $2\psi_1^A \leq x^A - 2\psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$. Note que $H(\psi_1^A)$ é crescente no intervalo $[0, \frac{x^A}{4}]$, pois,

$$\begin{aligned} H^{'}(\psi_1^A) &= W_2^A F^{'}(\psi_1^A) - W_2^A F^{'}(x^A - \psi_1^A) + 2W_1^A F^{'}(2\psi_1^A) \\ &+ 2(W_1^A + W_2^A - W_3^A)F^{'}(x^A - 2\psi_1^A) > 0, \end{aligned}$$

pelo fato de $F^{'}(\psi_1^A) > F^{'}(x^A - \psi_1^A)$ para $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$. Portanto, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{4}$ e $\psi_3 = \frac{x^A}{2}$.

Caso II: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] +$$
$$W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + W_2^A[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A + \psi_1^A)] +$$
$$(W_1^A + W_3^A)[F(\psi_3^A) - F(\psi_2^A)] + (W_2^A + W_3^A)[F(\psi_2^A) - F(\psi_1^A)],$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A[F(\psi_1^A) + F(\psi_1^A + \psi_3^A) + F(x^A) \\ &- F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_2^A)] + W_3^A F(\psi_3^A) \\ &+ W_2^A[F(\psi_2^A + \psi_3^A) + F(\psi_2^A) - F(\psi_3^A)]. \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$ temos que

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_2^A) &= W_1^A F(x^A - \psi_2^A) + (W_2^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A) \\ &+ (W_3^A - W_2^A)F(x^A - \psi_1^A - \psi_2^A) + W_1^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(x^A). \end{aligned}$$

Lema A.2.2. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$, devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_2^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ seja ótimo e que $\psi_1^{A*} < \psi_2^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_2^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon \leq \psi_2^{A*} - \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_1^{A*} + \epsilon, \psi_2^{A*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}) = W_1^A(F(x^A - (\psi_2^{A*} - \epsilon)) - F(x^A - \psi_2^{A*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(x^A - (\psi_1^{A*} + \epsilon)) - F(x^A - \psi_1^{A*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(\psi_2^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*})) + W_1^A(F(\psi_1^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ não seria ótimo. $\square$

Usando o Lema A.2.2, temos que o problema fica equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_2^A F(x^A - \psi_1^A) + W_2^A F(\psi_1^A) + (W_3^A - W_2^A)F(x^A - 2\psi_1^A) + W_1^A F(x^A),$$

sujeito às restrições $\psi_1^A \leq x^A - 2\psi_1^A \leq 2\psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$. Temos que $H(\psi_1^A)$ é crescente no intervalo $[\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$, pois,

$$H'(\psi_1^A) = W_2^A F'(\psi_1^A) - W_2^A F'(x^A - \psi_1^A) + 2(W_2^A - W_3^A)F'(x^A - 2\psi_1^A) > 0,$$

pelo fato de $F'(\psi_1^A) > F'(x^A - \psi_1^A)$ para $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$. Assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
&(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] + \\
&W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + W_3^A[F(\psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)] + \\
&(W_1^A + W_3^A)[F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A[F(x^A) - F(\psi_3^A) + F(\psi_1^A + \psi_2^A)] + W_3^A F(\psi_3^A) \\
&+ W_2^A[F(\psi_2^A) + F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)].
\end{aligned}
$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1 - \psi_2$ temos que

$$
\begin{aligned}
T(\psi_1^A, \psi_2^A) &= W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A - W_2^A)F(x^A - \psi_1^A - \psi_2^A) \\
&+ W_1^A F(\psi_1^A + \psi_2^A) + W_2^A F(\psi_2^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A),
\end{aligned}
$$

Lema A.2.3. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$, devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_2^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} > \psi_2^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_1^{A^*}$ e adicionar a $\psi_2^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} - \epsilon \geq \psi_2^{A^*} + \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_1^{A^*} - \epsilon, \psi_2^{A^*} + \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}) = W_2^A(F(\psi_2^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_2^{A^*})) + W_2^A(F(x^A - (\psi_1^{A^*} - \epsilon)) - F(x^A - \psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.2.3, temos que o problema acima é equivalente a maximizar

$$
\begin{aligned}
H(\psi_1^A) &= W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A - W_2^A)F(x^A - 2\psi_1^A) \\
&+ W_1^A F(2\psi_1^A) + W_2^A F(\psi_1^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A),
\end{aligned}
$$

sujeito às condições $0 \leq \psi_1^A$ e $2\psi_1^A \leq x^A - 2\psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$. Temos que $H(\psi_1^A)$ é crescente, pois,

$$\begin{aligned} H^{'}(\psi_1^A) &= 2(W_1^A + W_2^A - W_3^A)F^{'}(x^A - 2\psi_1^A) + 2W_1^A F^{'}(2\psi_1^A) \\ &+ W_2^A F^{'}(\psi_1^A) - W_2^A F^{'}(x^A - \psi_1^A) > 0, \end{aligned}$$

pelo fato de $F^{'}(x^A) > F^{'}(x^A - \psi_1^A)$ para $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$. Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2 = \frac{x^A}{4}$ e $\psi_3 = \frac{x^A}{2}$.

Caso IV: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} &(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] + \\ &W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + (W_1^A + W_3^A)[F(\psi_3^A) - F(\psi_2^A)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(x^A) + W_2^A[F(\psi_2^A) + F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] \\ &+ W_3^A F(\psi_3^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1 - \psi_2$ temos que

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_2^A) &= W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_2^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1) \\ &+ (W_3^A - W_2^A)F(x^A - \psi_1 - \psi_2). \end{aligned}$$

Lema A.2.4. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$, devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_2^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A*} > \psi_2^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_1^{A*} e adicionar a ψ_2^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} - \epsilon \geq \psi_2^{A*} + \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_1^{A*} - \epsilon, \psi_2^{A*} + \epsilon) - T(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}) = W_2^A(F(\psi_2^{A*} + \epsilon) - F(\psi_2^{A*})) + W_3^A(F(x^A - (\psi_1^{A*} - \epsilon)) - F(x^A - \psi_1^{A*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ não seria ótimo. $\square$

Usando o Lema A.2.4 o problema acima se torna equivalente a maximizar

$$\begin{aligned} H(\psi_1^A) &= W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_1^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1) \\ &+ (W_3^A - W_2^A) F(x^A - 2\psi_1), \end{aligned}$$

sujeito às restrições $\psi_1^A \leq x^A - 2\psi_1^A \leq 2\psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$. Temos que $H(\psi_1^A)$ é crescente, pois,

$$H^{'}(\psi_1^A) = W_2^A F^{'}(\psi_1^A) - W_2^A F^{'}(x^A - \psi_1^A) + 2(W_2^A - W_3^A) F(x^A - 2\psi_1^A) > 0,$$

pelo fato de $F^{'}(x^A) > F^{'}(x^A - \psi_1^A)$ para $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$. Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso V: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} &(W_1^A + W_2^A + W_3^A) F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] + \\ &W_1^A [F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + W_2^A [F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)] + \\ &(W_2^A + W_3^A)[F(\psi_3^A) - F(\psi_1^A)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A [F(\psi_1^A) + F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A) + F(x^A) \\ &- F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + W_2^A F(\psi_2^A + \psi_3^A) + W_3^A F(\psi_3^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$, temos que

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_3^A) &= W_1^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_3^A) + (W_3^A - W_1^A) F(\psi_3^A) \\ &+ (W_2^A - W_1^A) F(x^A - \psi_1^A) + W_1^A F(x^A). \end{aligned}$$

Lema A.2.5. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_1^A = \psi_3^A$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} < \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos

$\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_3^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_1^A(F(\psi_1^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A^*})) + (W_3^A - W_1^A)(F(\psi_3^{A^*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A^*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(x^A - (\psi_1^{A^*} + \epsilon)) - F(x^A - \psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. $\square$

Assim, usando o Lema A.2.5, o problema é equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_1^A F(2\psi_1^A) + W_3^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A) F(x^A - \psi_1^A) + W_1^A F(x^A),$$

sujeito às restrições $0 \leq \psi_1^A$ e $\psi_1^A \leq x^A - 2\psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$. Temos que $H(\psi_1^A)$ é crescente em $[0, \frac{x^A}{3}]$, pois,

$$H'(\psi_1^A) = 2W_1^A F'(2\psi_1^A) + W_3^A F'(\psi_1^A) + (W_1^A - W_2^A) F'(x^A - \psi_1^A) > 0,$$

nesse intervalo. Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso VI: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_3^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] +$$
$$W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + W_2^A[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)],$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A[F(\psi_1^A + \psi_3^A) + F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] \\ &+ W_2^A F(\psi_2^A + \psi_3^A) + W_3^A F(\psi_3^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$, temos que

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_2^A) &= W_1^A F(x^A - \psi_2^A) + W_1^A F(x^A) + (W_2^A - W_1^A) F(x^A - \psi_1^A) \\ &+ W_3^A F(x^A - \psi_1^A - \psi_2^A). \end{aligned}$$

Lema A.2.6. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$ devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_2^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} < \psi_2^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_2^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos

$\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_2^{A^*} - \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_2^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}) = W_1^A(F(x^A - (\psi_2^{A^*} - \epsilon)) - F(x^A - \psi_2^{A^*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(x^A - (\psi_1^{A^*} + \epsilon)) - F(x^A - \psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ não seria ótimo. □

Usando o Lema A.2.6, temos que o problema acima é equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_1^A F(x^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A) + W_3^A F(x^A - 2\psi_1^A)$$

sujeito às restrições $0 \leq x^A - 2\psi_1^A$ e $x^A - 2\psi_1^A \leq \psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$. Temos que $H(\psi_1^A)$ é decrescente no intervalo $[\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$, pois,

$$H^{'}(\psi_1^A) = -W_2^A F^{'}(x^A - \psi_1^A) - 2W_3^A F^{'}(x^A - 2\psi_1^A) < 0,$$

assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso VII: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned}
&(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_3^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] + \\
&W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \quad = \quad W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_2^A + \psi_3^A) + W_3^A F(\psi_3^A).$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$, temos que

$$T(\psi_1^A, \psi_2^A) \quad = \quad W_1^A F(x^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A) + W_3^A F(x^A - \psi_1^A - \psi_2^A).$$

Lema A.2.7. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$, devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_2^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} > \psi_2^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_1^{A^*}$ e adicionar a $\psi_2^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} - \epsilon \geq \psi_2^{A^*} + \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_1^{A^*} - \epsilon, \psi_2^{A^*} + \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}) = W_2^A(F(x^A - (\psi_1^{A^*} - \epsilon)) - F(x^A - \psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ não seria ótimo. □

Usando o Lema A.2.7 o problema acima se torna equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) \quad = \quad W_1^A F(x^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A) + W_3^A F(x^A - 2\psi_1^A),$$

sujeito a restrição $0 \leq x^A - 2\psi_1 \leq \psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$. Temos que $H(\psi_1^A)$ é decrescente no intervalo $[\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$, pois,

$$H^{'}(\psi_1^A) \quad = \quad -W_2^A F^{'}(x^A - \psi_1^A) - 2W_3^A F^{'}(x^A - 2\psi_1^A) < 0,$$

assim, o máximo ocorre quando $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso VIII: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + (W_1^A + W_2^A)[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)] \\ + \quad & W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + (W_1^A + W_3^A)[F(\psi_3^A) - F(\psi_2^A)] \end{aligned}$$

Note que a função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ depende apenas de ψ_2^A e ψ_3^A, então adotando a notação $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ para designar essa função, temos que:

$$T(\psi_2^A, \psi_3^A) \quad = \quad W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_2^A) + W_2^A F(\psi_2^A + \psi_3^A) + (W_3^A - W_2^A) F(\psi_3^A).$$

Lema A.2.8. *Na função objetivo $T(\psi_2^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_2^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_2^{A^*} < \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_2^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_2^{A^*} + \epsilon \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Assim, decorre que $T(\psi_2^{A^*} + \epsilon, \psi_3^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_2^A(F(\psi_2^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_2^{A^*})) + (W_3^A - W_2^A)(F(\psi_3^{A^*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.2.8, o problema acima se torna equivalente a maximizar

$$H(\psi_2^A) \quad = \quad W_2^A F(2\psi_2^A) + W_3^A F(\psi_2^A) + W_1^A F(x^A),$$

sujeito a restrição $0 \leq \psi_2^A \leq x^A - 2\psi_2^A$, isto é, $\psi_2^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$. Temos que $H(\psi_2^A)$ é crescente nesse intervalo, pois,

$$H^{'}(\psi_2^A) = 2W_2^A F^{'}(2\psi_2^A) + W_3^A F^{'}(\psi_2^A) > 0,$$

assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

A.3 Caso de Preferências Opostas e $W_3^B < W_1^B + W_2^B$

Nesta seção, iremos detalhar os cálculos dos pontos de máximo do caso do jogo Blotto sequencial onde os jogadores possuem preferências opostas sobre os prêmios e $W_3^B < W_1^B + W_2^B$.

Caso I : $\psi_1^A \leq \psi_2^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned}
&(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_1^A) + W_3^A[F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)] + \\
&W_1^A[F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)] + (W_1^A + W_3^A)[F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)] + \\
&(W_2^A + W_3^A)[F(\psi_2^A) - F(\psi_1^A)] + W_2^A[F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A) \\
&+ (W_3^A - W_2^A)F(\psi_1^A + \psi_3^A) + (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A) \\
&+ W_1^A F(\psi_1^A + \psi_2^A) + W_1^A F(x^A).
\end{aligned}$$

Lema A.3.1. *Na função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_2^{A*}$ ou $\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*} = \psi_3^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Admita, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi^{A*}}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo. Então se $\psi_1^{A*} < \psi_2^{A*}$ e $\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*} < \psi_3^{A*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de ψ_3^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon \leq \psi_2^{A*}$ e $\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*} \leq \psi_3^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi^{A**}}(x^A) = (\psi_1^{A*} + \epsilon, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*} - \epsilon)$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^{A**}}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi^{A*}}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) = W_1(F(\psi_1^{A*} + \epsilon) -$

$F(\psi_1^{A*})) + (W_2 - W_1)(F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*})) + (W_2 - W_1)(F(\psi_2^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*})) + W_1(F(\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria máximo. □

Por meio do Lema A.3.1, temos que comparar o retorno da função $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), (x^B)))$ nos casos em que $\psi_1^A = \psi_2^A$ e $\psi_3^A = \psi_1^A + \psi_2^A$.

- Se $\psi_1^A = \psi_2^A$ então fazendo a substituição $\psi_3^A = x^A - 2\psi_1^A$ o problema acima se reduz a maximizar

$$H(\psi_1^A) = (W_3^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) + W_2^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(2\psi_1^A) + W_1^A F(x^A),$$

  sujeito às restrições $0 \leq \psi_1^A$ e $2\psi_1^A \leq x^A - 2\psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$. Mas $H(\psi_1^A)$ é crescente nesse intervalo pois

$$H'(\psi_1^A) = (W_1^A - W_3^A)F'(x^A - \psi_1^A) + W_2^A F'(\psi_1^A) + 2W_1^A F'(2\psi_1^A) > 0.$$

  Assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{4}$ e $\psi_3^A = \frac{x^A}{2}$.

- Se $\psi_1^A + \psi_2^A = \psi_3^A$ então fazendo a substituição $\psi_2^A = \frac{x^A}{2} - \psi_1^A$ o problema acima se reduz a maximizar

$$\begin{aligned} H(\psi_1^A) &= W_1^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) + (W_3^A - W_2^A)F(\frac{x^A}{2} + \psi_1^A) \\ &+ (W_2^A - W_1^A)F(\frac{x^A}{2} - \psi_1^A) + W_1^A F(\frac{x^A}{2}) + W_1^A F(x^A), \end{aligned}$$

  sujeito a restrição $0 \leq \psi_1^A \leq \frac{x^A}{2} - \psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$. Como F é côncava, decorre que $H(\psi_1^A)$ é crescente, pois,

$$\begin{aligned} H'(\psi_1^A) &= W_1^A F'(\psi_1^A) + (W_1^A - W_2^A)F'(x^A - \psi_1^A) + (W_3^A - W_2^A)F'(\frac{x^A}{2} + \psi_1^A) \\ &+ (W_1^A - W_2^A)F'(\frac{x^A}{2} - \psi_1^A) > 0, \end{aligned}$$

  assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{4}$ e $\psi_3^A = \frac{x^A}{2}$.

Assim, neste caso o ótimo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \frac{x^A}{4}$ e $\psi_3^A = \frac{x^A}{2}$.

Caso II: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned}
& (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_3^A)) \\
+ \quad & W_3^A(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) + W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) \\
+ \quad & W_2^A(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A + \psi_1^A)) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_3^A) - F(\psi_2^A)) \\
+ \quad & (W_2^A + W_3^A)(F(\psi_2^A) - F(\psi_1^A))
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \\
= \quad & W_1^A F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_2^A - W_3^A)F(\psi_1^A + \psi_2^A) + W_1^A F(x^A) \\
+ \quad & (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A) + (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A) \\
+ \quad & (W_3^A - W_2^A)F(\psi_3^A) + (W_3^A - W_2^A)F(\psi_1^A + \psi_3^A).
\end{aligned}$$

Lema A.3.2. *Na função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_2^{A^*}$ ou $\psi_2^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi^{A^*}}(x^A) = (\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo. Então se $\psi_1^{A^*} < \psi_2^{A^*}$ e $\psi_2^{A^*} < \psi_3^{A^*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_2^{A^*}$ e $\psi_2^{A^*} \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi^{A^{**}}}(x^A) = (\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*} - \epsilon)$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^{A^{**}}}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi^{A^*}}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) = W_1(F(\psi_1^{A^*}+\epsilon) - F(\psi_1^{A^*})) + (W_1 + W_2 - W_3)(F(\psi_1^{A^*} + \psi_2^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A^*} + \psi_2^{A^*})) + (W_2 - W_1)(F(\psi_2^{A^*} + \psi_3^{A^*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A^*} + \psi_3^{A^*})) + (W_3 - W_2)(F(\psi_3^{A^*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A^*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi^{A^*}}(x^A) = (\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria máximo. □

Por meio do Lema A.3.2, temos que comparar o retorno da função $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ nos casos em que $\psi_1^A = \psi_2^A$ e $\psi_2^A = \psi_3^A$.

- Se $\psi_1^A = \psi_2^A$ e após a substituição $\psi_3^A = x^A - 2\psi_1^A$, o problema acima se reduz a maximizar

$$\begin{aligned} H(\psi_1^A) &= (W_1^A + W_2^A - W_3^A)F(2\psi_1^A) + W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) \\ &+ W_2^A F(\psi_1^A) + (W_3^A - W_2^A)F(x^A - 2\psi_1^A), \end{aligned}$$

sujeito às restrições $\psi_1^A \leq x^A - 2\psi_1^A \leq 2\psi_1^A$, isto é, $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$. Más $H(\psi_1^A)$ é crescente nesse intervalo pois

$$\begin{aligned} H'(\psi_1^A) &= 2(W_1^A + W_2^A - W_3^A)F'(2\psi_1^A) + (W_1^A - W_3^A)F'(x^A - \psi_1^A) \\ &+ W_2^A F'(\psi_1^A) + 2(W_2^A - W_3^A)F'(x^A - 2\psi_1^A) > 0 \end{aligned}$$

Assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

- Se $\psi_2^A = \psi_3^A$ então fazendo a substituição $\psi_1^A = x^A - 2\psi_2^A$ o problema acima se reduz a maximizar

$$\begin{aligned} H(\psi_2^A) &= W_1^A F(x^A - 2\psi_2^A) + W_1^A F(x^A - \psi_2^A) + W_1^A F(x^A) \\ &+ (W_2^A - W_1^A)F(2\psi_2^A) + (W_3^A - W_1^A)F(\psi_2^A), \end{aligned}$$

sujeito a restrição $x^A - 2\psi_2^A \leq \psi_2^A \leq x^A - \psi_2^A$, isto é, $\psi_2^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$. Como F é côncava, decorre que $H(\psi_2^A)$ é decrescente, pois,

$$\begin{aligned} H'(\psi_2^A) &= -2W_1^A F'(x^A - 2\psi_2^A) - W_1^A F'(x^A - \psi_2^A) + 2(W_2^A - W_1^A)F'(2\psi_2^A) \\ &+ 2(W_3^A - W_1^A)F'(\psi_2^A) < 0, \end{aligned}$$

assim, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Portanto, neste caso temos que o ótimo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A$ e $\psi_1^A + \psi_2^A \leq \psi_3^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} &(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + W_3^A(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) \\ +\ &W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A) F(\psi_2 + \psi_3) \\
&+ W_1^A F(\psi_1 + \psi_2) + W_2^A F(\psi_2)
\end{aligned}
$$

Lema A.3.3. *Na função objetivo* $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ *devemos ter* $\psi_3^{A*} = \psi_1^{A*} + \psi_2^{A*}$ *no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo. Então se $\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*} < \psi_3^{A*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de ψ_3^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon + \psi_2^{A*} \leq \psi_3^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\psi_1^{A*} + \epsilon, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*} - \epsilon)$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = W_1(F(\psi_1^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*})) + (W_3 - W_1)(F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*})) + W_1(F(\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria máximo. □

Assim, por meio do Lema A.3.3, temos que o problema é equivalente a maximizar

$$
T(\psi_1, \psi_2) = W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A) F(2\psi_2 + \psi_1) + W_1^A F(\psi_1 + \psi_2) + W_2^A F(\psi_2),
$$

Substituindo $\psi_1 = \frac{x^A}{2} - \psi_2$, temos que

$$
H(\psi_2) = W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A) F\left(\frac{x^A}{2} + \psi_2\right) + W_1^A F\left(\frac{x^A}{2}\right) + W_2^A F(\psi_2),
$$

restrito à condição de $\psi_2 \in [0, \frac{x^A}{4}]$.

Note agora que, como $\psi_2 \in [0, \frac{x^A}{4}]$, então decorre a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
H(\psi_2) &= W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A) F\left(\frac{x^A}{2} + \psi_2\right) + W_1^A F\left(\frac{x^A}{2}\right) + W_2^A F(\psi_2) \\
&\leq W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_2^A) + W_3^A F\left(\frac{x^A}{2} + \psi_2^A\right).
\end{aligned}
$$

Como a função $W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_2^A) + W_3^A F(\frac{x^A}{2} + \psi_2^A)$ é crescente em ψ_2^A, pois F é crescente, temos que o maior valor que essa função pode assumir é

$$
W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{x^A}{4}\right) + W_3^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right).
$$

É fácil ver que a utilidade do jogador A no jogo para a estratégia de alocação $\left(\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{3}\right)$ é dada por

$$W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + W_3^A F\left(\frac{x^A}{3}\right).$$

Agora note que neste caso o ótimo do jogador A é limitado por o ótimo que aparece no Caso II acima, pois foi provado no Lema 3.6.1 que vale a seguinte desigualdade:

$$W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{x^A}{4}\right) + W_3^A F\left(\frac{3x^A}{4}\right) < W_1^A F(x^A) + W_2^A F\left(\frac{2x^A}{3}\right) + W_3^A F\left(\frac{x^A}{3}\right),$$

isto é,

$$W_2^A \left(F\left(\frac{2x^A}{3}\right) - F\left(\frac{x^A}{4}\right)\right) > W_3^A \left(F\left(\frac{3x^A}{4}\right) - F\left(\frac{x^A}{3}\right)\right),$$

Assim, neste caso, concluímos que a estratégia de alocação ótima do jogador A é limitada pela estratégia que aparece no Caso II, isto é, esta será no máximo $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso IV: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A + \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned}
& (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_3^A)) \\
+ \quad & W_3^A(F(\psi_2 + \psi_3) - F(\psi_1 + \psi_2)) + W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) \\
+ \quad & (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_3^A) - F(\psi_2^A)),
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= (W_1^A + W_2^A - W_3^A)F(\psi_1^A + \psi_2^A) + W_1^A F(x^A) \\
&+ (W_3^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A) + (W_3^A - W_2^A)F(\psi_3) \\
&+ W_2^A F(\psi_2^A).
\end{aligned}$$

Lema A.3.4. *Na função objetivo* $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ *devemos ter* $\psi_3^{A^*} = \psi_1^{A^*}$ *no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo. Então se $\psi_1^{A*} < \psi_3^{A*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de ψ_3^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon \leq \psi_3^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\psi_1^{A*}+\epsilon, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*}-\epsilon)$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = (W_1^A + W_2^A - W_3^A)(F(\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*} + \psi_2^{A*})) + (W_3^A - W_1^A)(F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*})) + (W_3^A - W_2^A)(F(\psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria máximo. $\square$

Assim, usando o Lema A.3 temos que o problema de maximização do jogador A se reduz a

$$T(\psi_1^A, \psi_2^A) = W_2^A F(\psi_1^A + \psi_2^A) + W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_2^A) F(\psi_1) + W_2^A F(\psi_2^A).$$

Substituindo $\psi_1^A = \frac{x^A - \psi_2^A}{2}$ temos outro problema equivalente

$$H(\psi_2^A) = W_2^A F\left(\frac{x^A + \psi_2}{2}\right) + W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_2^A) F\left(\frac{x^A - \psi_2}{2}\right) + W_2^A F(\psi_2^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_2^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$. No entanto, temos que $H(\psi_2^A)$ é crescente em ψ_2^A, pois

$$H'(\psi_2^A) = \frac{W_2^A}{2} F'\left(\frac{x^A + \psi_2}{2}\right) + \frac{W_2^A - W_3^A}{2} F'\left(\frac{x^A - \psi_2}{2}\right) + W_2^A F'(\psi_2^A) > 0.$$

Portanto, o máximo o ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso V: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A) F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)) \\ + \; & W_1^A (F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + W_2^A (F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)) \\ + \; & (W_2^A + W_3^A)(F(\psi_3^A) - F(\psi_1^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_3^A) + W_1^A F(x^A) \\ &+ (W_3^A - W_1^A) F(\psi_3^A) + (W_2^A - W_1^A) F(\psi_2^A + \psi_3^A) \end{aligned}$$

Lema A.3.5. *Na função objetivo* $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ *devemos ter* $\psi_3^{A*} = \psi_1^{A*}$ *no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo. Então se $\psi_1^{A*} < \psi_3^{A*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de ψ_3^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon \leq \psi_3^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\psi_1^{A*}+\epsilon, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*}-\epsilon)$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = W_1^A(F(\psi_1^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*})) + (W_3^A - W_1^A)(F(\psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*} + \psi_3^{A*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria máximo. □

Assim, usando o Lema A.3.5, temos que o problema de maximização do jogador A é equivalente a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_2^A) = W_1^A F(2\psi_1^A) + W_3^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_1^A) + W_1^A F(x^A).$$

Substituindo $\psi_2^A = x^A - 2\psi_1^A$ temos um outro problema equivalente

$$H(\psi_1^A) = W_1^A F(2\psi_1^A) + W_3^A F(\psi_1^A) + (W_2^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) + W_1^A F(x^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$. Note que G é crescente nesse intervalo, pois

$$H'(\psi_1^A) = 2W_1^A F'(2\psi_1^A) + W_3^A F'(\psi_1^A) + (W_1^A - W_2^A)F'(x^A - \psi_1^A) > 0.$$

Portanto o máximo, neste caso, ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso VI: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_3^A) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)) \\ + \;& W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + W_2^A(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) &= W_3^A F(\psi_3^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_3^A) \\ &+ W_1^A F(x^A) + (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A) \end{aligned}$$

Lema A.3.6. *Na função objetivo $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B}}^*(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ devemos ter $\psi_2^{A^*} = \psi_1^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi^A}^*(x^A) = (\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo. Então se $\psi_1^{A^*} < \psi_2^{A^*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de $\psi_2^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_2^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi^A}^{**}(x^A) = (\psi_1^{A^*}+\epsilon, \psi_2^{A^*}-\epsilon, \psi_3^{A^*})$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}^{**}(x^A), \boldsymbol{\psi^B}^*(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi^A}^*(x^A), \boldsymbol{\psi^B}^*(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) = W_1^A(F(\psi_1^{A^*} + \epsilon + \psi_3^{A^*}) - F(\psi_1^{A^*} + \psi_3^{A^*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(\psi_2^{A^*} - \epsilon + \psi_3^{A^*}) - F(\psi_2^{A^*} + \psi_3^{A^*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi^A}^*(x^A) = (\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria máximo. □

Assim, usando o Lema A.3.6, temos que o problema de maximização do jogador A se reduz a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_3^A) = W_3^A F(\psi_3^A) + W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_1^A + \psi_3^A).$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - 2\psi_1^A$ temos outro problema equivalente

$$H(\psi_1^A) = W_3^A F(x^A - 2\psi_1^A) + W_1^A F(x^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$. Mas $H(\psi_1^A)$ é decrescente nesse intervalo, pois

$$H^{'}(\psi_1^A) = -2W_3^A F^{'}(x^A - 2\psi_1^A) - W_2^A F^{'}(x^A - \psi_1^A) < 0.$$

Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso VII: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^B}^*(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_3^A) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)) \\ + \; & W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^B}^*(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) = W_3^A F(\psi_3^A) + W_2^A F(\psi_2^A + \psi_3^A) + W_1^A F(x^A)$$

Lema A.3.7. *Na função objetivo* $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ *devemos ter* $\psi_2^{A*} = \psi_3^{A*}$ *no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo. Então se $\psi_3^{A*} < \psi_2^{A*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de ψ_2^{A*} e adicionar a ψ_3^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_3^{A*} + \epsilon \leq \psi_2^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\psi_1^{A*}+\epsilon, \psi_2^{A*}-\epsilon, \psi_3^{A*})$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = W_3^A(F(\psi_3^{A*} + \epsilon) - F(\psi_3^{A*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria máximo. □

Assim, usando o Lema A.3.7, temos que o problema de maximização do jogador A se reduz a maximizar

$$T(\psi_1^A, \psi_3^A) = W_3^A F(\psi_3^A) + W_2^A F(2\psi_3^A) + W_1^A F(x^A).$$

Note que as restrições são $\psi_3^A \leq \psi_1^A$, isto é, $\psi_3^A \leq x^A - 2\psi_3^A$, se e somente se, $\psi_3^A \leq \frac{x^A}{3}$. Logo queremos maximizar $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ com a restrição de $\psi_3^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$. Mas como F é crescente temos que $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ é crescente nesse interval. Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso VIII: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A$.

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)) \\ + \quad & W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_3^A) - F(\psi_2^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) &= W_2^A F(\psi_2^A) + W_2^A F(\psi_2^A + \psi_3^A) \\ &+ (W_3^A - W_2^A)F(\psi_3^A) + W_1^A F(x^A) \end{aligned}$$

Lema A.3.8. *Na função objetivo* $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ *devemos ter* $\psi_2^{A*} = \psi_3^{A*}$ *no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo. Então se $\psi_2^{A*} < \psi_3^{A*}$ temos que existe um $\epsilon > 0$ que podemos extrair de ψ_3^{A*} e adicionar a ψ_2^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_2^{A*} + \epsilon \leq \psi_3^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso, considerando $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A) = (\psi_1^{A*}+\epsilon, \psi_2^{A*}-\epsilon, \psi_3^{A*})$, temos que $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}**}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) - U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) = W_2^A(F(\psi_2^{A*} + \epsilon) - F(\psi_2^{A*})) + (W_3 - W_2)(F(\psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A*})) > 0$, assim $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}*}(x^A) = (\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria máximo. □

Assim, por meio do Lema A.3.8, temos que o problema de maximização do jogador A se reduz a

$$T(\psi_1^A, \psi_2^A) \quad = \quad W_2^A F(2\psi_2^A) + W_3^A F(\psi_2^A) + W_1^A F(x^A)$$

Note que este problema está sujeito às restrições $\psi_2^A \leq \psi_1^A$, isto é, $\psi_2^A \leq x^A - 2\psi_2^A$, se e somente se, $\psi_2^A \leq \frac{x^A}{3}$. Logo queremos maximizar $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$ com $\psi_2^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$. Mas como F é crescente então $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$ é crescente em ψ_2. Portanto o máximo ocorre em $\psi_1 = \psi_2^A = \psi_2 = \frac{x^A}{3}$.

A.4 Caso de Preferências Intermediárias $K = 3$

Nesta seção, iremos detalhar os cálculos dos pontos de máximo do caso do jogo Blotto sequencial com preferência Intermediária para $K = 3$.

Caso I: $\psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_3^A$

Temos que o $U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)) \\ + \quad & W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + W_3^A(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) \\ + \quad & (W_2^A + W_3^A)(F(\psi_2^A) - F(\psi_1^A)), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), \boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{B}*}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{A}}(x^A), X^B)) \quad = \quad & W_1^A F(\psi_1^A) + W_1 F(\psi_1^A + \psi_2^A) \\ + \quad & (W_2^A - W_1^A)F(\psi_2^A) + W_1^A F(x^A) \\ + \quad & (W_3^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$, temos o problema equivalente

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_2^A) &= W_1^A F(\psi_1^A) + W_1 F(\psi_1^A + \psi_2^A) + (W_2^A - W_1^A) F(\psi_2^A) \\ &+ W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A) F(x^A - \psi_1^A). \end{aligned}$$

Lema A.4.1. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$ devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_2^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A*} < \psi_2^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_2^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon \leq \psi_2^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso, temos que $T(\psi_1^{A*} + \epsilon, \psi_2^{A*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*}) = W_1^A(F(\psi_1^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*})) + (W_2^A - W_1^A)(F(\psi_2^{A*} - \epsilon) - F(\psi_2^{A*})) + (W_3^A - W_2^A)(F(x^A - \psi_1^{A*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.4.1 e o fato de que $X^A \sim U(0,1]$, o problema acima fica equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = 2W_1\psi_1^A + W_2^A\psi_1^A + W_1^A x^A + (W_3^A - W_1^A)(x^A - \psi_1^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{3}]$. Note que $H(\psi_1^A)$ é crescente no intervalo $[0, \frac{x^A}{3}]$, pois,

$$H'(\psi_1^A) = 2W_1 + W_2^A + (W_1^A - W_3^A) > 0,$$

Portanto, o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso II: $\psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A$

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por

$$\begin{aligned} &(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_3^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_2^A)) \\ +\ &W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_2^A) - F(\psi_3^A)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(x^A) + (W_2^A - W_3^A) F(\psi_2^A) \\ &+ W_3^A F(\psi_3^A) + W_3^A F(\psi_2^A + \psi_3^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_3^A = x^A - \psi_1^A - \psi_2^A$, temos

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_2^A) &= W_1^A F(x^A) + (W_2^A - W_3^A) F(\psi_2^A) \\ &+ W_3^A F(x^A - \psi_1^A - \psi_2^A) + W_3^A F(x^A - \psi_1^A). \end{aligned}$$

Lema A.4.2. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_2^A)$ devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_2^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} > \psi_2^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_1^{A^*}$ e adicionar a $\psi_2^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_2^{A^*} + \epsilon \leq \psi_1^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso temos que $T(\psi_1^{A^*} - \epsilon, \psi_2^{A^*} + \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*}) = (W_2^A - W_3^A)(F(\psi_2^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_2^{A^*})) + W_3^A(F(x^A - \psi_1^{A^*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ não seria ótimo. $\square$

Portanto, usando o Lema A.4.2 e o fato de que $X^A \sim U(0, 1]$, temos que o problema de otimização do jogador A é equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_1^A x^A + (W_2^A - W_3^A)\psi_1^A + W_3^A(x^A - 2\psi_1^A) + W_3^A(x^A - \psi_1^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Temos que

$$\begin{aligned} H'(\psi_1^A) &= W_2^A - W_3^A - 2W_3^A - W_3^A \\ &= W_2^A - 4W_3^A. \end{aligned}$$

Portanto, decorre três situações:

- Se $W_2^A > 4W_3^A$ o ótimo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{2}$;
- Se $W_2^A < 4W_3^A$ o ótimo ocorre em $\psi_1 = \psi_2 = \frac{x^A}{3}$;
- Se $W_2^A = 4W_3^A$ então $H(\psi_1^A)$ é constante, assim o ótimo ocorre em qualquer ponto tal que $\psi_1^A = \psi_2^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Caso III: $\psi_2^A \leq \psi_1^A \leq \psi_3^A$

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)) \\ + & \; W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + W_3^A(F(\psi_2^A + \psi_3) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(\psi_1^A + \psi_2^A) + W_1^A F(x^A) \\ &+ (W_3^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A) + W_2^A F(\psi_2^A). \end{aligned}$$

Fazendo a substituindo $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$, temos o seguinte problema equivalente

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_3^A) &= W_1^A F(x^A - \psi_3^A) + W_1^A F(x^A) \\ &+ (W_3^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1^A - \psi_3^A). \end{aligned}$$

Lema A.4.3. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Admita, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} < \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso temos que $T(\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_3^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_1^A(F(x^A - \psi_3^{A^*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_3^{A^*})) + (W_3^A - W_1^A)(F(x^A - \psi_1^{A^*} - \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_2^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.4.3 e o fato de $X^A \sim U(0, 1]$, temos que o problema de otimização do jogador A é equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_1^A x^A + W_3^A(x^A - \psi_1^A) + W_2^A(x^A - 2\psi_1^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Mas note que $H(\psi_1^A)$ é decrescente, pois,

$$H'(\psi_1^A) = -W_3^A - 2W_2^A < 0.$$

Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso IV: $\psi_2^A \leq \psi_3^A \leq \psi_1^A$

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_2^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_2^A)) \\ + \quad & W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(x^A) + W_2^A F(\psi_2^A) \\ &+ W_3^A F(\psi_2^A + \psi_3^A). \end{aligned}$$

Substituindo $\psi_2^A = x^A - \psi_1 - \psi_3$ temos o problema equivalente

$$T(\psi_1^A, \psi_3^A) = W_1^A F(x^A) + W_2^A F(x^A - \psi_1 - \psi_3) + W_3^A F(x^A - \psi_1).$$

Lema A.4.4. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_3^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Admita, por absurdo, que $(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A*} > \psi_3^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_1^{A*} e adicionar a ψ_3^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} - \epsilon \geq \psi_3^{A*} + \epsilon$. Fazendo isso temos que $T(\psi_1^{A*} - \epsilon, \psi_3^{A*} + \epsilon) - T(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*}) = W_1^A(F(x^A - \psi_3^{A*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_3^{A*})) + (W_3^A - W_1^A)(F(x^A - \psi_1^{A*} - \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A*}, \psi_2^{A*})$ não seria ótimo. □

Usando o Lema A.4.4 e o fato de que $X^A \sim U(0, 1]$, temos que o problema acima é equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_1^A x^A + W_2^A(x^A - 2\psi_1) + W_3^A(x^A - \psi_1),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{3}, \frac{x^A}{2}]$.

Note que $H(\psi_1^A)$ é decrescente, pois,

$$H^{'}(\psi_1^A) = -2W_2^A - W_3^A < 0.$$

Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_2^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$.

Caso V: $\psi_1^A \leq \psi_3^A$ e $\psi_1^A + \psi_3^A \leq \psi_2^A$

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)) \\ + \ & W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + W_3^A(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) \\ + \ & W_2^A(F(\psi_2^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)) \\ + \ & (W_2^A + W_3^A)(F(\psi_3^A) - F(\psi_1^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) \\ = \ & W_1^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_2^A) + (W_2^A - W_3^A - W_1^A)F(\psi_2^A) + W_1^A F(x^A) \\ + \ & (W_3^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_3^A) + (W_3^A - W_1^A)F(\psi_3^A) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$, temos que

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_3^A) \ = \ & W_1^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(x^A - \psi_3^A) + (W_2^A - W_3^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A - \psi_3^A) \\ + \ & W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_3^A) \\ + \ & (W_3^A - W_1^A)F(\psi_3^A) \end{aligned}$$

Lema A.4.5. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} < \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_3^{A^*}$ e adicionar a $\psi_1^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} + \epsilon \leq \psi_3^{A^*} - \epsilon$. Fazendo isso temos que $T(\psi_1^{A^*} + \epsilon, \psi_3^{A^*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_1^A(F(\psi_1^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A^*})) + W_1^A(F(x^A - \psi_3^{A^*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_3^{A^*})) + (W_3^A - W_1^A)(F(x^A - \psi_1^{A^*} - \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A^*}) + (W_3^A - W_1^A)(F(\psi_3^{A^*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. □

Assim, usando o Lema A.4.5 e o fato de que $X^A \sim U(0, 1]$, o problema é equivalente a maximizar

$$\begin{aligned} H(\psi_1^A) &= (W_2^A - W_3^A - W_1^A)(x^A - 2\psi_1^A) + W_1^A x^A \\ &+ W_3^A(x^A - \psi_1^A) + 2W_1^A\psi_1^A + W_3^A(\psi_1^A), \end{aligned}$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$.

Temos que $H(\psi_1^A)$ é crescente em $[0, \frac{x^A}{4}]$, pois,

$$H^{'}(\psi_1^A) = 2(W_1^A + W_3^A - W_2^A) + 2W_1^A > 0$$

Portanto o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$ e $\psi_2^A = \frac{x^A}{2}$.

Caso VI: $\psi_1^A \leq \psi_3^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A + \psi_3^A$

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por

$$\begin{aligned} &(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_1^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_1^A + \psi_2^A) - F(\psi_2^A)) \\ + \;& W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + W_3^A(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_1^A + \psi_2^A)) \\ + \;& (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_2^A) - F(\psi_3^A)) + (W_2^A + W_3^A)(F(\psi_3^A) - F(\psi_1^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_2^A) \\ &+ W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A)F(\psi_2^A + \psi_3^A) \\ &+ (W_3^A - W_1^A)F(\psi_3^A) + (W_2^A - W_3^A)F(\psi_2^A) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$, temos que o problema acima fica equivalente a maximizar

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_3^A) &= W_1^A F(\psi_1^A) + W_1^A F(x^A - \psi_3^A) + W_1^A F(x^A) + (W_3^A - W_1^A)F(x^A - \psi_1^A) \\ &+ (W_3^A - W_1^A)F(\psi_3^A) + (W_2^A - W_3^A)F(x^A - \psi_1^A - \psi_3^A). \end{aligned}$$

Lema A.4.6. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A*} < \psi_3^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_3^{A*} e adicionar a ψ_1^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} + \epsilon \leq \psi_3^{A*} - \epsilon$. Fazendo isso temos que $T(\psi_1^{A*} + \epsilon, \psi_3^{A*} - \epsilon) - T(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*}) = W_1^A(F(\psi_1^{A*} + \epsilon) - F(\psi_1^{A*})) + W_1^A(F(x^A - \psi_3^{A*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_3^{A*})) + (W_3^A - W_1^A)(F(x^A - \psi_1^{A*} - \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A*}) + (W_3^A - W_1^A)(F(\psi_3^{A*} - \epsilon) - F(\psi_3^{A*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria ótimo. $\square$

Assim usando o Lema A.4.6 e o fato de que $X^A \sim U(0, 1]$, temos que o problema acima é equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_1^A x^A + W_3^A(x^A - \psi_1^A) + W_3^A \psi_1^A + (W_2^A - W_3^A)(x^A - 2\psi_1^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$. Note que $H^{'}(\psi_1^A)$ é dada por

$$H^{'}(\psi_1^A) = -2(W_2^A - W_3^A) \leq 0.$$

Portanto, decorrem duas situações:

- Se $W_2^A > W_3^A$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$, pois $H^{'}(\psi_1^A)$ será crescente;
- Se $W_2^A = W_3^A$, então o ótimo ocorre em qualquer ponto tal que $\psi_1^A = \psi_3^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$.

Caso VII: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_1^A + \psi_3^A \leq \psi_2^A$

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} & (W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_3^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_2^A)) \\ + \; & W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + W_2^A(F(\psi_2^A) - F(\psi_1^A + \psi_3^A)) \\ + \; & (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_1^A + \psi_3^A) - F(\psi_3^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= (W_2^A - W_1^A - W_3^A)F(\psi_2^A) + W_1^A F(x^A) \\ &+ W_3^A F(\psi_3^A) + W_3^A F(\psi_2^A + \psi_3^A) \\ &+ W_1^A F(\psi_1^A + \psi_3^A) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$, temos o seguinte problema de maximização equivalente

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_3^A) &= (W_2^A - W_1^A - W_3^A)F(x^A - \psi_1^A - \psi_3^A) + W_1^A F(x^A) + W_1^A F(\psi_1^A + \psi_3^A) \\ &+ W_3^A F(\psi_3^A) + W_3^A F(x^A - \psi_1^A). \end{aligned}$$

Lema A.4.7. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_1^{A^*} = \psi_3^{A^*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A^*} > \psi_3^{A^*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de $\psi_1^{A^*}$ e adicionar a $\psi_3^{A^*}$ de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A^*} - \epsilon \geq \psi_3^{A^*} + \epsilon$. Fazendo isso temos que $T(\psi_1^{A^*} - \epsilon, \psi_3^{A^*} + \epsilon) - T(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*}) = W_3^A(F(\psi_3^{A^*} + \epsilon) - F(\psi_3^{A^*})) + W_3^A(F(x^A - \psi_1^{A^*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A^*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A^*}, \psi_3^{A^*})$ não seria ótimo. □

Dessa forma, usando o Lema A.4.7 e o fato de que $X^A \sim U(0, 1]$, temos que o problema acima se torna equivalente a maximizar

$$\begin{aligned} H(\psi_1^A) &= (W_2^A - W_1^A - W_3^A)(x^A - 2\psi_1^A) + W_1^A x^A + 2W_1^A \psi_1^A \\ &+ W_3^A \psi_1^A + W_3^A (x^A - \psi_1^A), \end{aligned}$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [0, \frac{x^A}{4}]$.

No entanto, note que $H(\psi_1^A)$ é crescente no intervalo $[0, \frac{x^A}{4}]$, pois,

$$H^{'}(\psi_1^A) = 2(W_1^A + W_3^A - W_2^A) + 2W_1^A > 0,$$

assim, o máximo ocorre quando $\psi_1^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{4}$ e $\psi_2^A = \frac{x^A}{2}$.

Caso VIII: $\psi_3^A \leq \psi_1^A \leq \psi_2^A \leq \psi_1^A + \psi_3^A$

Temos que $U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B^*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B))$ é dada por:

$$\begin{aligned} &(W_1^A + W_2^A + W_3^A)F(\psi_3^A) + (W_1^A + W_3^A)(F(\psi_2^A + \psi_3^A) - F(\psi_2^A)) \\ +\ &W_1^A(F(x^A) - F(\psi_2^A + \psi_3^A)) + (W_1^A + W_2^A)(F(\psi_2^A) - F(\psi_3^A)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U_A(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), \boldsymbol{\psi^{B*}}(\boldsymbol{\psi^A}(x^A), X^B)) &= W_1^A F(x^A) + (W_2^A - W_3^A) F(\psi_2^A) \\ &+ W_3^A F(\psi_3^A) + W_3^A F(\psi_2^A + \psi_3^A). \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\psi_2^A = x^A - \psi_1^A - \psi_3^A$, temos o seguinte problema de maximização equivalente

$$\begin{aligned} T(\psi_1^A, \psi_3^A) &= W_1^A F(x^A) + (W_2^A - W_3^A) F(x^A - \psi_1^A - \psi_3^A) + W_3^A F(\psi_3^A) \\ &+ W_3^A F(x^A - \psi_1^A). \end{aligned}$$

Lema A.4.8. *Na função objetivo $T(\psi_1^A, \psi_3^A)$ devemos ter $\psi_1^{A*} = \psi_3^{A*}$ no ponto ótimo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*})$ seja ótimo e $\psi_1^{A*} > \psi_3^{A*}$, então existe $\epsilon > 0$ que podemos retirar de ψ_1^{A*} e adicionar a ψ_3^{A*} de tal forma que ainda tenhamos $\psi_1^{A*} - \epsilon \geq \psi_3^{A*} + \epsilon$. Fazendo isso temos que $T(\psi_1^{A*} - \epsilon, \psi_3^{A*} + \epsilon) - T(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*}) = W_3^A(F(\psi_3^{A*} + \epsilon) - F(\psi_3^{A*})) + W_3^A(F(x^A - \psi_1^{A*} + \epsilon) - F(x^A - \psi_1^{A*})) > 0$, isto é, $(\psi_1^{A*}, \psi_3^{A*})$ não seria ótimo. □

Assim, por meio do Lema A.4.8 e usando o fato de que $X^A \sim U(0, 1]$, o problema acima se torna equivalente a maximizar

$$H(\psi_1^A) = W_1^A x^A + (W_2^A - W_3^A)(x^A - 2\psi_1^A) + W_3^A \psi_1^A + W_3^A (x^A - \psi_1^A),$$

sujeito a restrição de $\psi_1^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{x^A}{3}]$.

Note que esse problema de maximização é o mesmo que aparece no final do Caso VI, assim temos que:

- Se $W_2^A > W_3^A$, então o máximo ocorre em $\psi_1^A = \psi_3^A = \frac{x^A}{3}$, pois $H'(\psi_1^A)$ será crescente;
- Se $W_2^A = W_3^A$, então o ótimo ocorre em qualquer ponto tal que $\psi_1^A = \psi_3^A \in [\frac{x^A}{4}, \frac{A}{3}]$.