



Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Estatística

Pós-Graduação em Estatística

**Aplicações de Modelos de Grafos na
Análise de Conflitos e de Redes Sociais**

Andréa Maria dos Santos

Tese de Doutorado

Recife-PE

Fevereiro de 2014

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Estatística

Andréa Maria dos Santos

**Aplicações de Modelos de Grafos na Análise de Conflitos
e de Redes Sociais**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Estatística do Departamento de Estatística da Universidade
Federal de Pernambuco como requisito parcial para obten-
ção do grau de Doutor em Estatística.*

Orientador: *Dr. Leandro Chaves Rêgo*

Recife-PE

Fevereiro de 2014

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno, CRB 4-1758

Santos, Andréa Maria dos.

Aplicações de modelos de grafos na análise de conflitos e de redes sociais./ Andréa Maria dos Santos. – Recife: O Autor, 2014.

xiv, 162f. : fig., tab.

Orientador: Leandro Chaves Rêgo.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Estatística , 2014.

Inclui referências e apêndice.

1. Teoria dos jogos . 2. Modelos de grafos. 3. Redes sociais I. Rêgo, Leandro Chaves. (orientador). II. Título.

310 (22. ed.)

MEI 2014-51

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Estatística

26 de fevereiro de 2014

Nós recomendamos que a Tese de Doutorado de autoria de

Andréa Maria dos Santos

Intitulada:

“Aplicações de Modelos de Grafos na Análise de Conflitos e de Redes Sociais”

Seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Doutora em Estatística.

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

Leandro Chaves Rêgo Orientador/UFPE

José Heleno Faro INSUPER

Kátia Silva Guimarães UFPE-CIn

Raydonal Ospina Martínez UFPE

Renato José de Sobral Cintra UFPE

Este documento será anexado à versão final da tese.

*Dedico esta tese a meus pais por seu esforço pela minha
educação e especialmente a meu pai por me ensinar o que
realmente importa.*

Agradecimentos

Aos meus pais, José Alberto e Jacira, por terem sempre me incentivado a ler e estudar com dedicação mesmo diante de dificuldades.

À minha família, pelo carinho e apoio em todos os momentos. À minha irmã, Adriana, pelo cuidado em todo o tempo.

A Victor, pelo carinho, apoio, paciência, compreensão e por me fazer rir.

Aos meus amigos de toda a vida acadêmica desde os amigos de graduação e mestrado até os do doutorado. A Manoel Wallace, amigo de toda minha vida acadêmica, com quem dividi preocupações, sonhos e boas risadas. A Tales, Juscelino, Ronaldo, Wilton, Isabel, Juliana, Luz, Rodrigo e todos os outros pela ajuda nos momentos difíceis e por terem tornado mais divertidos todos os anos que passei nesta universidade.

Às minhas amigas por estarem sempre comigo mesmo quando estávamos distantes devido à correria da vida acadêmica.

À Valéria Bittencourt, pela eficiência, presteza e disponibilidade em facilitar nossa vida acadêmica.

Aos professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco pelos conhecimentos transmitidos desde o mestrado e contribuição para a minha formação acadêmica.

Ao professor Leandro Chaves Rêgo, pela ilimitada paciência, atenção e disponibilidade e por sempre transmitir tranquilidade e segurança necessárias para o desenvolvimento da tese.

Resumo

Muitos modelos têm sido criados em Teoria dos Jogos para representar diferentes interações sociais. As ferramentas utilizadas em cada modelo visam representar de maneira mais adequada as particularidades de cada situação do mundo real. Existem algumas formas básicas de se representar um jogo, porém, dada a complexidade de modelar algumas situações é interessante obter novas formas de representação de jogos e de análise de comportamento dos envolvidos em um jogo. Esta tese pode ser dividida em duas partes independentes. Na primeira, apresentamos generalizações do modelo de grafos para resolução de conflitos, introduzindo a possibilidade de indivíduos tomadores de decisões expressarem suas preferências com incerteza usando preferências probabilísticas. Neste cenário, propomos definições de estabilidade para o conflito envolvendo dois ou mais tomadores de decisão e mostramos aplicações do modelo generalizado. Na segunda parte, analisamos redes sociais com pesos nas ligações, propondo uma nova definição de utilidade para rede de coautores e apresentando resultados sobre eficiência e estabilidade de tais redes.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, Conflito, Modelos de Grafos, Noções de Estabilidade, Preferências Probabilísticas, Redes sociais, Estabilidade Par a Par, Redes Eficientes, Ligações com peso.

Abstract

Many models have been created in game theory to represent different social interactions. The tools used in each model intend to represent more appropriately the peculiarities of each real-world situation. There are some basic ways to represent a game, however, given the complexity of modeling some situations it is interesting to obtain new forms of representing games and of analyzing behavior of those involved in a game. This thesis can be divided into two independent parts. In the first one, we present generalizations of the graph model for conflict resolution, introducing the possibility of individual decision-makers expressing their preferences with uncertainty using probabilistic preferences. In this scenario we propose stability definitions for the conflict involving two or more decision makers and present some applications of these generalized models. In the second part, we analyze social networks with weights on links, proposing a new definition of utility in a model of co-authorship network and presenting results on efficiency and stability of such networks.

Keywords: Game Theory, Conflict, Graph Model, Stability Notions, Probabilistic Preferences, Social Networks, Pairwise Stability, Efficiency, Weighted Links.

Lista de Figuras

2.1	Modelo de grafo para o conflito de desenvolvimento sustentável	17
2.2	Grafo para O Modelo do Conflito de Gisborne	46
A.1	Linha	153

Lista de Tabelas

2.1	Estados Atingíveis	18
2.2	Preferências Probabilísticas Precisas para DM E	18
2.3	Preferências Probabilísticas para DM D	19
2.4	Conjuntos $\varphi_i^{+\gamma}$	40
2.5	Conjuntos $R_i^{+\gamma}$	40
2.6	Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (R, S)	41
2.7	Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (R, U)	41
2.8	Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (P, S)	41
2.9	Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (P, U)	42
2.10	DMs e suas opções no Modelo de Conflito de Gisborne	45
2.11	Possíveis estados no Modelo de Conflito de Gisborne	45
2.12	Preferências Probabilísticas Precisas para o DM GF no Modelo do Conflito de Gisborne	46
2.13	Preferências Probabilísticas Precisas para o DM S no Modelo do Conflito de Gisborne	47
2.14	Preferências Probabilísticas Precisas para o DM GP no Modelo do Conflito de Gisborne	47
2.15	Estados Atingíveis	48
2.16	Conjuntos $R_H^{+\gamma}$	49
2.17	Conjuntos $\varphi_H^{+\gamma}$	50
2.18	γ -Melhoramento Coalizional	51

2.19	α -Nash estabilidade	52
2.20	(α, β) -GMR estabilidade	53
2.21	(α, β) -SMR Estabilidade	54
2.22	(α, β, γ) -SEQ Estabilidade	55
2.23	α -Nash Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs	56
2.24	(α, β) -GMR Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs	57
2.25	(α, β) -SMR Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs	58
2.26	(α, β) -SEQ Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs	59
2.27	α -Nash Estabilidade Coalizional para DMs	60
2.28	(α, β) -GMR Estabilidade Coalizional para DMs	61
2.29	(α, β) -SMR Estabilidade Coalizional para DMs	62
2.30	(α, β, γ) -SEQ Estabilidade Coalizional para DMs	63
3.1	Preferências Probabilísticas Imprecisas para o DM E	90
3.2	Preferências Probabilísticas Imprecisas para o DM D	90
3.3	Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (R, S)	91
3.4	Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (R, U)	92
3.5	Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (P, S)	93
3.6	Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (P, U)	94
3.7	Preferências Probabilísticas Imprecisas para DM GP no Modelo do Conflito de Gisborne	96
3.8	Conjuntos $RL_H^{+\gamma}$	97
3.9	Conjuntos $\phi L_H^{+\gamma}$	98
3.10	γ -Melhoramento Coalizional Cauteloso	99
3.11	α -Nash Estabilidade Cautelosa	100
3.12	(α, β) -GMR Estabilidade Cautelosa	101

3.13	(α, β) -SMR Estabilidade Cautelosa	102
3.14	(α, β, γ) -SEQ Estabilidade Cautelosa	103
3.15	α -Nash Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs	104
3.16	(α, β) -GMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs	105
3.17	(α, β) -SMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs	106
3.18	(α, β) -SEQ Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs	107
3.19	α -Nash Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs	108
3.20	(α, β) -GMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs	109
3.21	(α, β) -SMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs	110
3.22	(α, β, γ) -SEQ Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs	111

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos com Preferências Probabilísticas Precisas	6
2.1	Introdução	6
2.2	Revisão da Literatura	12
2.3	GMCR com Preferências Probabilísticas Precisas	15
2.4	Noções de Estabilidade em GMCR com Preferências Probabilísticas Precisas	20
2.4.1	Definições de Estabilidade para Conflitos com Dois DMs	20
2.4.1.1	α -Nash Estabilidade	21
2.4.1.2	(α, β) -Metaracionalidade	22
2.4.1.3	(α, β) -Metaracionalidade Simétrica	23
2.4.1.4	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial	25
2.4.2	Relações Entre Diferentes Noções de Estabilidade	26
2.4.3	Análise de Estabilidade para GMCR com Mais de Dois DMs	30
2.4.3.1	(α, β) -Metaracionalidade	32
2.4.3.2	(α, β) -Metaracionalidade Simétrica	32
2.4.3.3	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial	33
2.4.4	Análise de Estabilidade Coalizional	35
2.4.4.1	α -Nash Estabilidade Coalizional	36

2.4.4.2	(α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional	37
2.4.4.3	(α, β) -Estabilidade Metaracional Simétrica Coalizional	37
2.4.4.4	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional	38
2.5	Aplicações	39
2.5.1	Um Modelo com 2 DMs e Preferências Probabilísticas Precisas	39
2.5.2	Um Modelo 3-DM de Conflito com Preferências Probabilísticas e Precisas	43
2.6	Discussão	64
2.6.1	Comparação com o GMCR com Preferências <i>Fuzzy</i>	64
2.6.2	Robustez	65
2.7	Conclusão	66
3	Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos com Preferências Probabilísticas Imprecisas	68
3.1	Introdução	68
3.2	Revisão de literatura	69
3.3	GMCR com Preferências Probabilísticas Imprecisas	71
3.4	Análise de Estabilidade para GMCR com Preferências Probabilísticas Imprecisas	73
3.4.1	Definições de Estabilidade para o GMCR com 2 DMs	73
3.4.1.1	α -Nash Estabilidade Cautelosa	75
3.4.1.2	α -Nash Estabilidade Arriscada	75
3.4.1.3	(α, β) -Metaracionalidade Cautelosa	76
3.4.1.4	(α, β) -Metaracionalidade Arriscada	76
3.4.1.5	(α, β) -Metaracionalidade Simétrica Cautelosa	76
3.4.1.6	(α, β) -Metaracionalidade Simétrica Arriscada	76

3.4.1.7	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Cautelosa	77
3.4.1.8	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Arriscada	77
3.4.2	Relações entre as Definições e Outros Resultados	78
3.4.3	Definições de Estabilidade para GMCR com Mais de Dois DMs	80
3.4.3.1	(α, β) -Metaracionalidade Cautelosa	80
3.4.3.2	(α, β) -Metaracionalidade Arriscada	81
3.4.3.3	(α, β) -Metaracionalidade Simétrica Cautelosa	81
3.4.3.4	(α, β) -Metaracionalidade Simétrica Arriscada	81
3.4.3.5	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Cautelosa	82
3.4.3.6	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Arriscada	83
3.4.4	Análise de Estabilidade Coalizional	83
3.4.4.1	α -Nash Estabilidade Coalizional	84
3.4.4.2	(α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional	85
3.4.4.3	(α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional Simétrica	86
3.4.4.4	(α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional	87
3.5	Aplicações	89
3.6	Conclusões e Trabalhos Futuros	112
4	Modelo de Co-Autores com Pesos nas Ligações	113
4.1	Introdução	113
4.2	Grafos e o Modelo de Co-autores	115
4.2.1	Grafos e Redes	115
4.2.2	O Modelo de Co-autores	119
4.3	O Modelo de Co-autores com Pesos nas Ligações	121
4.4	Resultados	122
4.5	Conclusão e Trabalhos Futuros	132

5	Ligações com Pesos	134
5.1	Introdução	134
5.2	O Modelo	136
5.2.1	Eficiência e Estabilidade	140
5.3	Resultados	143
5.3.1	Estabilidade e Eficiência	144
5.3.1.1	O Caso ϕ Linear	144
5.3.1.2	O Caso ϕ Não-Linear	146
5.4	Conclusão e Trabalhos Futuros	148
	Apêndice	149
	A Provas	150
	Referências Bibliográficas	157

Introdução

Decisões são tomadas a todo momento em nossa sociedade. Por exemplo, em um encontro de negócios, em um júri, em negociações de cessar fogo ou ainda na busca por alimento, indivíduos, países ou animais precisam decidir qual ação tomar analisando o contexto, inclusive considerando as ações dos outros, isto é, usando estratégias. A Teoria dos Jogos estuda então um conjunto de ferramentas que nos ajuda a entender o fenômeno observado quando tomadores de decisão interagem estrategicamente [1].

Muitos modelos têm sido criados para representar diferentes situações de interação: por exemplo, modelos de conflito ([2], [3], [4], [5]), indivíduos decidindo com quais ou quantas pessoas é vantajoso se relacionar ([6], [7], [8]) ou quanto investir em seus relacionamentos ([9], [10]). As ferramentas utilizadas em cada modelo visam representar de maneira adequada as particularidades de cada situação do mundo real. Dada a complexidade para modelagem de muitas situações estratégicas, diversos pesquisadores passaram a buscar novas formas de representação de interações estratégicas e de análise do comportamento dos indivíduos no jogo.

Este trabalho na área de Teoria dos Jogos e Análise de Conflitos visa obter novos modelos com o auxílio da Teoria dos Grafos. Acreditamos que estes novos modelos são capazes de representar situações da realidade não captadas pelos modelos já citados, como por exemplo, a incerteza na preferência dos indivíduos em conflito sendo expressa através de probabilidades, ou, indivíduos em uma rede de co-autorias, na qual é permitido aos indivíduos não apenas se ligarem, mas determinarem quantas vezes vão colaborar com seus pares. Neste trabalho, nós usamos ferramentas de Teoria dos Grafos para representar

tais contextos: indivíduos em situações de conflito e em redes.

A tese consiste em quatro capítulos independentes: os dois primeiros tratam de modelos de conflito com incerteza sobre as preferências. O terceiro capítulo trata da generalização de um modelo de co-autores e o quarto capítulo discorre sobre um problema existente na literatura sobre ligações com pesos em um grafo e apresenta alguns resultados. A seguir, descreveremos mais detalhadamente o conteúdo destes capítulos.

O primeiro cenário no qual a Teoria dos Grafos será útil como ferramenta de representação é a resolução de conflitos. Muitos modelos têm sido criados para representar e propor soluções para situações em que dois ou mais indivíduos estão em conflito acerca de alguma questão e tentando chegar a um acordo. Os dois primeiros Capítulos deste trabalho usam um destes modelos para fazer generalizações sobre as preferências dos indivíduos: o Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR) [3]. O GMCR fornece uma metodologia para modelar e analisar conflitos estratégicos, isto é, situações nas quais dois ou mais tomadores de decisões (DMs) independentes fazem escolhas que juntas determinam como o conflito se desenvolve. Tais indivíduos interagem estrategicamente de acordo com suas preferências sobre os possíveis estados, que são determinados pelas ações dos DMs. O GMCR é uma ferramenta fácil e fornece um bom entendimento de como os DMs deveriam escolher o que fazer [4].

Como dito, análise de indivíduos agindo em uma interação estratégica é do que trata a Teoria dos Jogos. Usualmente, em modelos de Teoria dos Jogos, assume-se que os indivíduos são considerados “racionais” no sentido de que são conscientes das alternativas disponíveis a eles, têm preferências claras que podem ser representadas por uma função utilidade e agem de forma a maximizar suas utilidades esperadas [11].

No entanto, nem sempre os indivíduos têm certeza do que querem ou nem sempre suas preferências são claras. Por exemplo, existe na literatura a representação de situações nas

quais as preferências dos indivíduos são expressas através de uma distribuição de probabilidade como no modelo de Luce [12]. É nesse contexto que faremos generalizações do Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos.

No segundo capítulo deste trabalho, nós apresentamos esta técnica de análise da solução de conflitos e a generalizamos, considerando agora que as preferências de um indivíduo são expressas através de probabilidades. Apresentamos formas de determinar possíveis soluções de um conflito nesse contexto e aplicações exemplificando a obtenção de soluções.

No terceiro Capítulo, nós continuamos analisando situações nas quais as preferências são incertas, mas abrimos mão da restrição de que haja uma distribuição de probabilidades precisa que represente a preferência dos indivíduos. Usando a Teoria da Probabilidade Inferior e Superior [13], nós apresentamos a modelagem do conflito e a análise de suas possíveis soluções. Também apresentamos aplicações que ilustram a utilidade da generalização.

Continuando o trabalho, nós aplicamos a teoria dos grafos a redes sociais. Algumas questões relevantes estão presentes de alguma forma na análise de redes sociais. Por exemplo, indivíduos têm o interesse de ajustar suas relações ao longo do tempo (adicionar novas e romper com antigas)? Quando será interessante fazer mudanças em suas relações? Que estruturas de relações trazem mais benefícios para todos e para cada indivíduo? Para analisar tais situações, são usados conceitos importantes de Teoria dos Jogos e da Teoria dos Grafos como eficiência e estabilidade. Estes conceitos são importantes na análise sobre o que é bom para a rede no sentido de maximizar os benefícios recebidos por todos e o que leva um indivíduo a romper ligações antigas e estabelecer novas, gerando assim novas redes. Indivíduos tomam decisões como estas levando em conta o que os outros indivíduos farão e então a idéia é modelar as interações como um jogo. A teoria dos grafos

será fundamental para o modelo como ferramenta de representação, pois cada rede em si será vista como um grafo e a idéia é então analisar quais estruturas de grafos surgirão.

O Capítulo 4 trata de redes de co-autorias. Muitas vezes a produção de um trabalho intelectual (artigo, música, etc) não é feita de maneira isolada, mas o indivíduo trabalha em conjunto com seus pares. Uma rede específica que tem sido constantemente estudada é a rede de colaborações científicas [6, 8, 7]. Indivíduos de uma determinada área (comunidade acadêmica, universidade, comunidade de músicos, etc) formam uma rede de colaboração e esta rede é representada por um grafo. No nosso modelo de co-autores apresentado no capítulo 4, indivíduos podem trabalhar mais de uma vez com um mesmo parceiro e isto se mostra ser decisivo na análise sobre seus comportamentos. Tal modelo é uma generalização do apresentado por Jackson e Wolinsky [6] e nós apresentamos resultados sobre quais redes de co-autores são eficientes, isto é, geram maior benefício total para o conjunto de indivíduos na rede e também sobre a estabilidade de algumas estruturas de rede.

Ainda sobre redes, a última parte do trabalho (Capítulo 5) é dedicada a análise de formação de redes nas quais as ligações entre os participantes da rede têm peso. É razoável supor que em algumas redes, as relações entre os participantes tenham diferentes intensidades. Em uma rede de amizades, por exemplo, indivíduos tendem a ser mais amigos de um que de outro. Países em uma determinada organização mundial podem ter relações mais estreitas com um país do que com outro. Vários modelos têm sido usados para representar tal situação [10, 9, 14]. Alguns desses modelos consideram que a força dessa ligação dependa do investimento que indivíduos fazem em determinada ligação. Esse investimento pode ser de tempo ou de algum outro recurso. A partir dos investimentos, as relações são estabelecidas, configurando uma rede. Uma análise possível é investigar quais redes resultam em um maior benefício total, considerando a soma dos ganhos ob-

tidos por cada um dos envolvidos. Outra análise diz respeito à procura por equilíbrios, isto é, quais estruturas de rede são estáveis. É o que é feito por Bloch e Dutta em [10]. Nosso objetivo neste trabalho é apontar um problema em tal trabalho. De fato, nós apresentando um contra-exemplo para um passo importante da prova de um teorema de Bloch e Dutta [10] e, além disso, apresentamos alguns resultados alternativos sobre eficiência e estabilidade de redes neste modelo.

Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos com Preferências Probabilísticas Precisas

2.1 Introdução

Tomadas de decisão e negociações em situações de conflito são inerentes às relações humanas e institucionais. Estão presentes desde dois indivíduos decidindo quanto cada um deve pagar em uma conta até uma negociação de cessar-fogo entre países em conflito. Além disso, existem situações envolvendo sistemas de informação, projetos de engenharia, avaliação de programas, marketing, condutas terapêuticas, etc, que envolvem problemas complexos de escolha [15]. Considerando os custos que podem resultar de um conflito não resolvido, encontrar soluções ou conceitos de equilíbrio é fundamental. Desenvolver ferramentas que permitam modelar e encontrar tais soluções é então um importante desafio.

Um modelo de análise de conflitos tenta capturar suas características importantes, como as opções de ações disponíveis aos envolvidos no conflito e as possíveis interações estratégicas entre eles. Constituído o modelo, o próximo passo é a análise de estabilidades para indicar possíveis equilíbrios. Muitas técnicas, baseadas em conceitos importantes de teoria dos jogos, têm sido usadas para modelar situações de conflitos. Em 1950, Nash introduziu o importante conceito de estabilidade, conhecido como equilíbrio de Nash [16, 17]. Desde então, várias situações de conflitos têm sido estudadas em Teoria dos jogos usando tal conceito. Para se aproximar mais de situações de conflitos do mundo real foi

apresentado por Kilgour et al. [3] o modelo de Grafos para resolução de conflitos (GMCR) que é baseado em conceitos clássicos de Teoria dos jogos [18] e é um aprimoramento da análise de conflitos de Fraser e Hipel [2] e da análise de metajogos [19]. Neste modelo, os indivíduos envolvidos no conflito, os DMs, têm diferentes preferências sobre possíveis estados.¹ Estados são cenários que podem acontecer durante a evolução do conflito [20]. Por exemplo, em um conflito onde indivíduos estão decidindo sobre quanto investir em um determinado negócio no qual são sócios. Um possível cenário é quando ambos escolhem não investir nada, outro é quando um decide investir todo seu recurso disponível e o outro nada e assim vários cenários podem surgir. No modelo dos grafos para a resolução dos conflitos, cada grafo representa os possíveis movimentos de cada envolvido no conflito e esta coleção de grafos modela o conflito.

A análise dos possíveis movimentos controlados pelos DMs no desenvolvimento do conflito e o cálculo das prováveis resoluções do conflito é o papel da análise de estabilidade. Quando um determinado estado é estável para todos os DMs, esse estado é apresentado como uma solução do conflito ou equilíbrio. Aqui neste trabalho nos basearemos nos seguintes conceitos para indicar os estados estáveis: Nash estabilidade [16, 17], metaracionalidade geral(GMR) [19], metaracionalidade simétrica(SMR) [19], estabilidade sequencial(SEQ) [2] e estabilidade coalizional [5]. Tais definições são comumente usadas em trabalhos baseados no GMCR ([5], [21, 22], [23], [24]).

As diferentes definições de estabilidade consideram possibilidades de comportamento de um DM em uma estratégia de conflito. Por exemplo, o conceito de Nash estabilidade considera que para um estado ser considerado estável para um DM é necessário não haver estado melhor (preferido ao estado atual) para o qual o DM possa mudar. Já a metaraci-

¹Formalmente, os indivíduos possuem preferências sobre as consequências geradas pelo conflito terminar em um determinado estado, mas a literatura simplifica a terminologia assumindo que as preferências são sobre os próprios estados.

onalidade geral considera que um estado é considerado estável para um DM, se há para cada estado que um DM prefira ao estado considerado, uma resposta possível por parte de seus oponentes tal que o DM não prefira essa resposta ao estado considerado. A metaracionalidade simétrica considera que para ser estável, além das condições da metaracionalidade geral, o DM não pode ter uma resposta para o movimento de seus oponentes que seja preferida por ele ao estado considerado. Por fim, a estabilidade sequencial difere da GMR considerando que a resposta dos oponentes é uma resposta preferida por eles. Para obter soluções do conflito considera-se quais estados são estáveis de acordo com cada um dos conceitos.

Existem situações de conflito nas quais há mais de dois DMs. Então, são definidos no GMCR, conceitos de estabilidade para o caso apenas com dois DMs, outros para os conflitos com mais de dois DMs e outros conceitos quando se considera a possibilidade de formação de coalizões entre os DMs. Uma coalizão é um conjunto de DMs que agem juntos para atingir resultados que sejam desejáveis por todos no conjunto. Isto é, indivíduos podem agir em um conflito visando atingir suas próprias metas, mas é razoável considerar que pode ocorrer uma associação entre eles a fim de atingir benefícios mútuos [5].

A análise de estabilidade no modelo GMCR pode ser aplicada em muitos contextos. Tais ferramentas podem ser úteis aos participantes do conflito, que podem com a ajuda dos grafos compreender melhor qual seu papel no conflito e fazer avaliações do processo enquanto o conflito se desenvolve. Também é útil para um mediador, pois a técnica permite identificar quais são as opções que são boas para todos. Um analista que deseja estudar o conflito para diversos fins, por exemplo, pode usar tal modelo para entender como preferências individuais levam o conflito a uma determinada resolução ou analisar como o conflito afeta o comportamento humano e daí desenvolver melhores formas de gerenciar conflitos no futuro [20].

A análise de estabilidade é baseada fundamentalmente no estudo das preferências dos jogadores. As informações sobre qual estado um DM prefere a outro revelam sobre suas possibilidades de fazer a transição de um estado para outro. Existem recentes trabalhos baseados no GMCR que tentam captar diferentes características que as preferências podem assumir, como apresentamos a seguir.

Ao modelar um conflito, normalmente assume-se que os componentes da situação são todos conhecidos, i.e., todos os tomadores de decisão, as ações disponíveis a cada um deles, incluindo as preferências de cada um deles sobre estas ações. No entanto, nem sempre as preferências, por exemplo, são claras ou precisas. Várias generalizações do GMCR tentam capturar estas características que podem representar melhor situações do mundo real.

Li et al. [21, 22] introduzem uma nova estrutura de preferências ao GMCR para um modelo 2-DM de conflito e multi-DM GMCR, respectivamente. Esta estrutura pode modelar preferência estrita de um estado ou cenário sobre outro, indiferença entre dois estados, e também permite aos DMs terem preferências incertas ou desconhecidas quando têm que escolher entre dois estados. As quatro definições de estabilidade, originalmente propostas no GMCR, são estendidas para incorporar esta nova estrutura.

Ben-Haim e Hipel [25] desenvolve um modelo que também busca descrever incerteza na preferência dos DMs. Eles apresentam dois modelos para representar tal incerteza usando vetores de preferências e definem vários conceitos de robustez² dos equilíbrios.

Outra abordagem no que diz respeito à incerteza é o uso de preferências *fuzzy*. Al-Mutairi et al. [23], usando preferências *fuzzy*, definem um conjunto de soluções do conflito. Na verdade, são apresentadas definições de estabilidade forte e fraca a partir dos

²Encontrar o equilíbrio mais robusto é determinar, qual o equilíbrio é mais estável, ou mais provável, isto é, o que tem mais chances de ser realmente atingido [26].

quatro conceitos de estabilidade mencionados anteriormente, Nash estabilidade, metaracionalidade Geral, metaracionalidade simétrica e estabilidade sequencial. Esta abordagem referente à força da preferência é outra forma de representar uma variedade de situações que a definição usual de preferência não captura. Hamouda, Kilgour e Hipel [27], além de identificar um ranking entre os estados, modelam também o grau ou intensidade da preferência do DM, i.e., um DM pode preferir fortemente um estado sobre outro ou preferir um estado ao outro no sentido usual de preferência, sendo esta denotada por \succ e detalhada mais à frente. Esta nova estrutura de preferência implica novas definições de estabilidade na análise do conflito.

Outra abordagem para modelar preferências incertas é usar preferências probabilísticas. Em problemas de decisão do mundo real, é comum haver uma grande variedade no comportamento nas escolhas dos indivíduos ou grupos envolvidos. Uma alternativa para representar a preferência em meio a tal inconstância nas escolhas é modelar o comportamento como um fenômeno probabilístico [28].

Como descrito anteriormente, uma das etapas do Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos é a identificação das preferências dos decisores envolvidos no conflito. Tais preferências podem conter elementos de incerteza, devido, por exemplo, à dificuldade de obter informações precisas sobre preferências em problemas práticos [29].

Nós propomos aqui o uso de preferências probabilísticas no GMCR. Então, tomadores de decisão não preferem simplesmente um estado a outro, mas o fazem de acordo com uma certa probabilidade. Portanto, quando se vê tendo que escolher entre dois cenários ou estados diferentes, nossos decisores podem não ter um comportamento determinístico e a preferência probabilística pode ajudar a capturar qual a chance de cada um desses cenários ser escolhido. Preferências probabilísticas podem também ser usadas quando apesar dos indivíduos terem preferências determinísticas, não se sabe quem será o repre-

sentante de um determinado tomador de decisão. Por exemplo, considere a análise de um possível conflito de guerra envolvendo EUA e Síria. É amplamente conhecido que Republicanos preferem o cenário onde os EUA atacam a Síria e que Democratas preferem o cenário que não envolva guerra. Suponha que o conflito esteja sendo analisado antes das eleições presidenciais ocorrerem e que pelas pesquisas nós conhecemos a probabilidade de cada candidato ser o escolhido. Então, pode se considerar os EUA como um tomador de decisão neste momento como tendo preferências probabilísticas sobre os dois cenários determinadas pelas probabilidades de Democratas ou Republicanos vencerem as eleições.

Nosso objetivo aqui é desenvolver um modelo de grafos para resolução de conflito utilizando o conceito de preferência probabilística e definir novas definições de estabilidade para conflitos a partir desse conceito. O uso de tal modelo permite uma modelagem mais fiel à realidade de resolução de conflitos e traz informações mais detalhadas sobre a estabilidade de possíveis cenários de conflito. Na Seção 2.2, nós revisamos o modelo GMCR, a estrutura de preferências probabilísticas que aplicamos no GMCR. Na Seção 2.3, nós propomos o GMCR com preferências probabilísticas e, na Seção 2.4, nós fornecemos novas definições de estabilidade para o modelo. Nós começamos com o caso de conflitos envolvendo dois DMs, apresentando resultados sobre as relações entre as definições. Então, depois nós propomos definições de estabilidade para o GMCR com mais de dois DMs. Finalmente, nós apresentamos também uma análise de estabilidade para coalizões. Na Seção 2.5, nós apresentamos duas aplicações do modelo proposto: uma envolvendo dois DMs e outra três DMs. Na Seção 2.6, nós discutimos a relação entre o modelo proposto e as preferências *fuzzy* e também damos um critério para comparar robustez de equilíbrio no GMCR com preferências probabilísticas e, na Seção 2.7, apresentamos nossa conclusão.

2.2 Revisão da Literatura

Nesta seção, nós revisamos formalmente o GMCR, modelo introduzido por Kilgour et al [3].

Em um GMCR, a representação do conflito é baseada em como e porque os tomadores de decisão mudam de um estado para outro. Tais estados são determinados pelas possíveis ações que podem ser tomadas pelos DMs envolvidos no conflito; cada estado determina exatamente uma ação para cada DM no conflito. Portanto, mudando suas próprias ações um DM pode mudar entre alguns dos estados. No modelo GMCR, existe uma coleção de grafos, um para cada DM, em que todos os grafos têm o mesmo conjunto de vértices ou nós representando os possíveis estados do conflito. Os arcos de um grafo em particular representam as possíveis transições que um certo DM pode fazer. O GMCR é então a junção de grafos com um conjunto de preferências sobre o conjunto de estados; uma relação de preferência para cada DM.

Algumas definições relevantes do GMCR são apresentadas a seguir:

- **Tomadores de Decisão, DMs.** O Conjunto dos DMs é denotado por $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- **Conjunto dos Estados.** O conjunto dos possíveis estados ou cenários do conflito é denotado por $S = \{1, 2, \dots, s\}$.
- **Coleção de Arcos A_i .** Se um DM i puder se mover de um estado $s \in S$ para um estado $t \in S$, então existe um arco um arco com orientação de s_p para s_q no grafo do DM i .
- **Estados atingíveis.** Todos os estados disponíveis em um único passo para um específico DM i de um estado s são elementos de um conjunto $R_i(s)$, isto é, $R_i(s) = \{t \in S : (s, t) \in A_i\}$. Então, $R_i(s)$ é o conjunto dos estados atingíveis para DM i

quando o estado atual é s . Como um DM i em um estado s pode sempre escolher não mudar sua ação, é sempre verdade que $s \in R_i(s), \forall i \in N$ e $\forall s \in S$.

- **Coleção de grafos.** Uma coleção de grafos dirigidos $D_i = (S, A_i), i \in N$, é usada para modelar o conflito em curso. Os vértices de cada um desses grafos, como já dito, são os possíveis estados dos conflitos e portanto, S , é comum a todos os grafos. [20].

GMCR e a maior parte dos modelos em teoria dos jogos consideram como parte do modelo uma relação de preferência, denotada por \succ , a qual é uma relação binária em um determinado conjunto de objetos O que é assimétrica e negativamente transitiva.

- $x \succ y$, se o objeto x é estritamente preferido ao objeto y para um particular DM.³

Desta relação de preferência, duas outras relações binárias podem ser derivadas (ver [30]):

a relação de preferência não estrita:

- $x \succeq y \Leftrightarrow y \not\succeq x$,

e a relação de indiferença:

- $x \sim y \Leftrightarrow x \not\succeq y$ e $y \not\succeq x$.

Recentemente, alguns modelos têm estendido tal noção de preferência para melhor representar conflitos do mundo real. Por exemplo, Hamouda, Kilgour e Hipel [27] propuseram um modelo no qual os DMs podem ter preferência com dois diferentes níveis de

³Usaremos também a notação $x \succ_i y$ para indicar que o DM i , em particular, prefere estritamente o objeto x ao y . E ainda, a notação $x_1 \succ_i x_2 \succ_i \dots x_{m-1} \succ_i x_m$, indica a ordem de preferências de i e significa que i prefere o objeto x_1 a todos os outros $m - 1$ objetos, que o objeto x_2 é preferido por i a todos os outros $m - 2$ objetos que vêm após x_2 na sequência e assim em diante.

intensidade, i.e., um DM pode preferir fortemente um estado a outro ou simplesmente preferir um a outro. Permitindo esta flexibilidade extra, os autores definem novos conceitos de solução. ⁴

Aqui, nós estendemos a noção de preferência usual do GMCR pelo uso de preferências probabilísticas. Modelos probabilísticos de preferências têm uma longa história. Em [12], Luce propôs um modelo de utilidade probabilística para capturar a intuição de que quando é oferecido a um DM um par de objetos em algum conjunto S ele deve escolher a alternativa que ele julga superior de acordo com uma escolha probabilística que é dependente de um contexto empírico em particular. Então, $P(a, b)$ representa a probabilidade com a qual o DM prefere a alternativa a a b quando solicitado a escolher uma delas. Por exemplo, quando solicitado a escolher entre um sorvete de chocolate ou de baunilha, o DM pode dizer que prefere o primeiro com probabilidade 0.8. Então, tal DM escolhe muito frequentemente o sorvete de chocolate, mas aproximadamente 20% das vezes escolhe o sorvete de baunilha. Os critérios e os mecanismos usados pelo DM para escolher entre as duas opções são muito complexos para modelar explicitamente, mas assume-se que ele exibe alguma regularidade, no sentido de frequência de escolha, que torna tal preferência capaz de ser modelada por uma distribuição de probabilidade. Tal probabilidade, cujo domínio é $S \times S$, deve satisfazer:

1. $P(a, b) \geq 0$ para cada $a, b \in S$,
2. $P(a, b) + P(b, a) \leq 1$ para cada $a, b \in S$,

Nosso objetivo aqui é propor uma extensão do GMCR modelo permitindo aos DMs ter tal preferência probabilísticas sobre os estados. Tal preferência probabilística pode modelar uma situação na qual um único DM hesita quando tem que escolher entre estados

⁴A nova estrutura de preferência é uma tripla $\{>>, >, \sim\}$, em que $a > b$ implica que a é preferido a b e $a >> b$ implica que a é fortemente preferido a b .

ou pode ser usada para representar uma parte em um conflito que pode ter mais de uma possibilidade de representante. Por exemplo, um país pode ser representado por diferentes diplomatas, cada um deles tendo possivelmente diferentes ranking de preferência sobre os estados. Na próxima seção, nós formalmente apresentamos o GMCR com preferências probabilísticas.

Neste capítulo, nós assumiremos que as probabilidades podem ser determinadas com precisão. No Capítulo 3, nós consideraremos situações de conflito nas quais haverá imprecisão em tais probabilidades. Então, chamaremos as preferências considerando probabilidades precisas apresentadas a seguir neste capítulo de *preferências probabilísticas precisas* e chamaremos as preferências probabilísticas nas quais há imprecisão nas probabilidades de *preferências probabilísticas imprecisas*. O GMCR apresentado na seção a seguir considera as preferências probabilísticas como no primeiro caso e será então chamado de *GMCR com Preferências Probabilísticas Precisas*.

2.3 GMCR com Preferências Probabilísticas Precisas

O GMCR com preferências probabilísticas precisas envolve exatamente as mesmas características do GMCR já descritas com a exceção de que agora consideramos que cada DM em um conflito deve ser capaz de indicar com precisão a probabilidade $P(a, b)$ com que prefere o estado a ao estado b . Então, diremos que os DMs tem preferências probabilísticas precisas sobre os estados. Uma intuição desta idéia é que indivíduos podem usar dados empíricos para elaborar uma distribuição de probabilidade sobre os estados. Ou ainda, em algumas situações de conflito, os tomadores de decisão, que podem ser pessoas, mas também, instituições ou países podem ter mais de um representante e cada

representante tem a possibilidade de ser eleito o representante do tomador de decisão com uma certa probabilidade. Considerando que cada um dos representantes podem ter uma ordem de preferência sobre os estados no sentido usual, antes do real representante do DM ser escolhido não podemos expressar a relação de preferência usual do DM, mas podemos usar uma relação de preferência probabilística definindo a probabilidade com a qual o DM prefere o estado a ao estado b como a soma das probabilidades dos representantes para os quais nas suas ordens de preferência preferem a a b .

O modelo GMCR contém um conjunto de DMs, N . Cada DM tem um conjunto de ações disponíveis a ele. Deste conjunto, cada DM pode escolher uma ação e esta ação pode afetar o atual estado do conflito. Vamos considerar agora que os DMs participando do conflito preferem um estado a outro de acordo com uma distribuição de probabilidade, de forma que dados quaisquer dois estados s_p e s_q , qualquer DM i tem uma probabilidade que expressa a chance com a qual ele prefere estado s_p a s_q que é denotada por $P_i(s_p, s_q)$. Considere o seguinte exemplo que ilustra esta situação.

Exemplo 2.3.1. *Nós apresentamos uma versão modificada de um conflito hipotético proposto por Hipel [31] que ilustra a utilidade do modelo GMCR com preferências probabilísticas precisas. Neste conflito existem dois DMs: Ambientalistas E e Desenvolvedores D . Ambientalistas podem escolher serem proativos P em promover responsabilidade ambiental ou não, neste caso eles são chamados reativos R . Desenvolvedores podem escolher entre serem sustentáveis S ou não, o que é representado por U . Como há apenas duas opções para cada DM, existem $2^2 = 4$ possíveis combinações: (P, S) , (P, U) , (R, U) e (R, S) , os quais são os possíveis estados do conflito. Estes estados são os nós mostrados na Figura 2.1, que representa o modelo de grafos para o conflito de desenvolvimento sustentável descrito acima.*

A Tabela 2.1 mostra os estados atingíveis para cada DM.

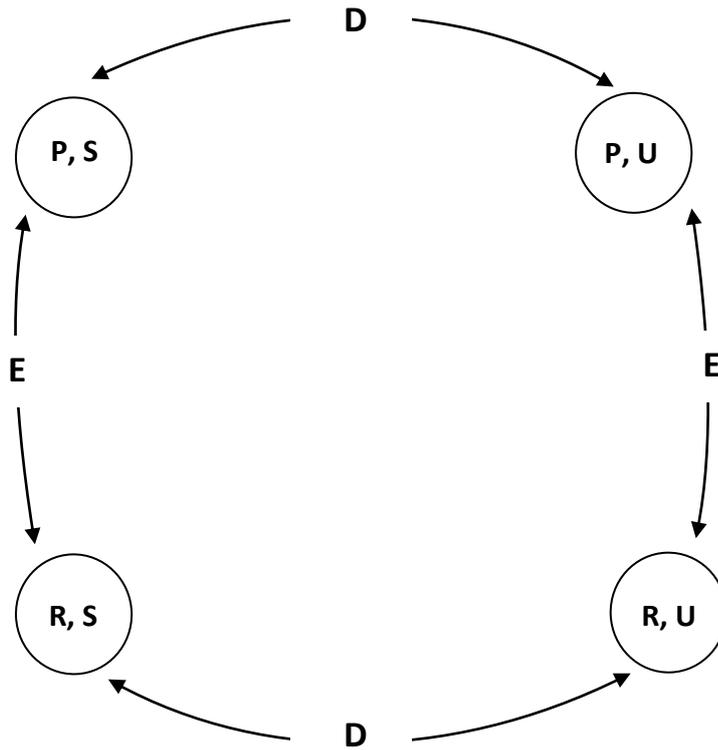


Figura 2.1 Modelo de grafo para o gonflito de desenvolvimento sustentável

Se DM E , por exemplo, está no estado (P, S) , como as opções disponíveis a ele são P (Proativo) e R (Reativo), ele pode escolher permanecer em (P, S) ou mudar para (R, S) . Assim, o conjunto $R_E(s)$, considerando $s = (P, S)$ é composto pelos estados (P, S) e (R, S) . O DM D , no mesmo estado, pode ficar em (P, S) ou mudar para (P, U) . Então, $R_D(s)$ considerando $s = (P, S)$ é composto pelos estados (P, S) e (P, U) . Os outros conjuntos atingíveis são obtidos de maneira semelhante. O conflito é modelado como tendo um estado inicial e seu desenvolvimento depende de os DMs mudarem ações e portanto de estados.

O exemplo original assume que preferências são determinísticas e que as preferências de E são tais que $(P, S) \succ_E (R, S) \succ_E (P, U) \succ_E (R, U)$ e considera que existem dois tipos de DM D : um que dá baixa prioridade ao ambientalismo, D_U e outro D_S que é mais responsável que o primeiro. As preferências de D_U e D_S são $(R, U) \succ_{D_U} (P, U) \succ_{D_U}$

Tabela 2.1 Estados Atingíveis

Estado	$R_E(s)$	$R_D(s)$
(P, S)	(P, S) e (R, S)	(P, S) e (P, U)
(R, S)	(R, S) e (P, S)	(R, S) e (R, U)
(P, U)	(P, U) e (R, U)	(P, U) e (P, S)
(R, U)	(R, U) e (P, U)	(R, U) e (R, S)

$(R, S) \succ_{D_U} (P, S)$ e $(R, S) \succ_{D_S} (P, S) \succ_{D_S} (R, U) \succ_{D_S} (P, U)$, respectivamente.

Nós modificamos o exemplo original considerando que se um DM i prefere deterministicamente um estado s_p a outro s_q , então nós dizemos que $P_i(s_p, s_q) = 1$. Caso contrário, nós dizemos que a probabilidade é zero. De acordo com esta definição, as preferências probabilísticas com as quais E prefere um estado a outro são mostrados na Tabela 2.2. Cada célula expressa a probabilidade que DM E prefere o estado da linha ao estado da coluna.

Tabela 2.2 Preferências Probabilísticas Precisas para DM E

E	(P, S)	(R, S)	(P, U)	(R, U)
(P, S)	0.0	1.0	1.0	1.0
(R, S)	0.0	0.0	1.0	1.0
(P, U)	0.0	0.0	0.0	1.0
(R, U)	0.0	0.0	0.0	0.0

Considere agora que o DM j pode ser de tipos diferentes e cada tipo pode ter uma ordem de preferência diferente. Vamos assumir também que existe uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto dos tipos que representam o DM j no conflito. Neste caso, nós dizemos que o DM j tem uma preferência probabilística pelo estado s_p ao estado s_q que é dada pela soma das probabilidades dos tipos de DM j que preferem s_p a s_q .

Então, por exemplo, considere a distribuição de probabilidade na qual $P(D = D_S) = 0.3$ e $P(D = D_U) = 0.7$. Então, as preferências probabilísticas do DM D são como mostradas na Tabela 2.3, onde cada célula indica a probabilidade com que DM D prefere o estado da linha ao estado da coluna. Por exemplo, $P_D((R,S), (P,S)) = 0.3 + 0.7 = 1$, dado que os dois possíveis tipos de DM D preferem (R,S) a (P,S) , enquanto $P_D((P,U), (P,S)) = 0.7$, porque a probabilidade do tipo do DM D que prefere (P,U) a (P,S) é 0.7 , i.e., a probabilidade do tipo ser D_U é 0.7 .

Tabela 2.3 Preferências Probabilísticas para DM D

D	(P,S)	(R,S)	(P,U)	(R,U)
(P,S)	0.0	0.0	0.3	0.3
(R,S)	1.0	0.0	0.3	0.3
(P,U)	0.7	0.7	0.0	0.0
(R,U)	0.7	0.7	1.0	0.0

Na Seção 2.5.1, nós voltaremos a abordar este conflito para analisar a estabilidade de cada estado de acordo com as definições de estabilidade apresentadas a seguir.

Considerando a nova estrutura de preferência que permite a cada tomador de decisão DM i ter uma preferência probabilística precisa em vez de determinística, podemos definir novos conceitos de estabilidade. Nós propomos então na próxima seção noções de estabilidade baseadas nos conceitos padrão de estabilidade: Nash estabilidade, Metaracionalidade, Metaracionalidade Simétrica e Estabilidade Sequencial.

2.4 Noções de Estabilidade em GMCR com Preferências

Probabilísticas Precisas

Esta seção está dividida nas seguintes partes. Primeiro, nós daremos as definições de estabilidade para os casos nos quais o conflito envolve apenas dois DMs. Segundo, nós apresentamos algumas relações entre estas definições. Terceiro, nós fornecemos as definições de estabilidade para conflitos envolvendo mais de dois DMs e, finalmente, nós apresentamos as definições de estabilidade considerando a análise coalizional, isto é, a possibilidade dos DMs formarem coalizões para obterem melhores resultados.

2.4.1 Definições de Estabilidade para Conflitos com Dois DMs

Nesta seção, nós consideraremos os parâmetros α , β e γ pertencentes ao intervalo $[0, 1]$. Nós definimos alguns conjuntos relevantes para as definições, a saber, o conjunto γ -melhoramento para DM i de um dado estado s como $R_i^{+\gamma}(s) = \{t \in R_i(s) : P_i(t, s) > \gamma\}$.

O conjunto $R_i^{+\gamma}(s)$ indica quais estados o DM i prefere com probabilidade maior que γ e é importante para análise de estabilidade, pois esta se baseia nas considerações se “vale a pena” para o DM i mudar de um estado para outro. Assim, se um estado pertence ao $R_i^{+0.9}(s)$, diremos que tal estado é um 0.9-melhoramento para i de s e podemos considerar que a chance de i mudar do estado s é alta. Por outro lado, se $R_i^{+\gamma}(s)$ é vazio para todo γ , então podemos afirmar que não há nenhum estado que i prefira a s com probabilidade positiva e, portanto, a chance de i mudar do estado s pode ser considerada igual a zero.

Ao analisar a estabilidade dos estados para o DM i , como já dito, iremos considerar as chances de i mudar de um estado para outro. Três dos quatro conceitos de estabilidade já mencionados, e que serão generalizados a seguir, consideram também a preferên-

cia de i por estados que seus oponentes podem atingir. Então, precisamos saber qual a preferência probabilística de i , comparando ao estado em que ele está, por estados não necessariamente atingíveis por ele nesse estado. Então, definimos também $\varphi_i^{+\gamma}(s)$ como o conjunto de todos estados que o DM i prefere a s com probabilidade maior que γ , isto é, $\varphi_i^{+\gamma}(s) = \{t \in S : P_i(t, s) > \gamma\}$. Note que $R_i^{+\gamma}(s) = \varphi_i^{+\gamma}(s) \cap R_i(s)$.

2.4.1.1 α -Nash Estabilidade

No GMCR original, um estado ser Nash estável significa que nenhum dos DMs poderia se mover para um estado que é melhor do que o do equilíbrio. No modelo com preferências probabilísticas imprecisas, nós queremos ter uma definição de estabilidade que capture a intuição que nenhum DM pode se mover para um estado que é preferido ao estado do equilíbrio com probabilidade suficientemente alta. A seguinte definição formaliza esta ideia:

Definição 2.4.1: Um estado $s \in S$ é α -Nash estável para DM i , se $R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

Então, um estado s é α -Nash Estável para DM i se entre os estados atingíveis para i quando ele está em s , não há nenhum estado que i prefira a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$. Por exemplo, um estado s que seja 0.9-Nash estável para o DM i é tal que dos estados disponíveis para este DM em s , não há nenhum que i prefira a s com probabilidade maior que 0.10. Já um estado 1-Nash estável para o DM i é tal que dos estados disponíveis para i em s , não há nenhum que i prefira a s com probabilidade maior que zero. Como nós mostraremos na próxima seção, o conjunto de estados α -Nash estáveis decresce monotonicamente quando α cresce. Então, para cada estado existe um intervalo de valores de α para os quais tal estado satisfaz α -Nash estabilidade. O supremo de tal intervalo caracteriza a intensidade da Nash estabilidade do estado correspondente. A fim

de garantir que cada estado pode ser associado com tal número, deve existir ao menos um α tal que o estado satisfaça α -Nash estabilidade. Esta é a razão pela qual nós permitimos que α seja igual a zero, uma vez que todo estado é obviamente 0-Nash estável.

2.4.1.2 (α, β) -Metaracionalidade

No GMCR original, um estado ser metaracional estável significa que mesmo se um DM puder se mover para um estado preferido ao do equilíbrio deve haver um movimento de resposta do outro DM que levaria o conflito para um estado pior do que o do equilíbrio para o primeiro DM. Aqui no modelo de preferências probabilísticas precisas, apresentaremos uma definição de estabilidade que captura a intuição que mesmo se um DM puder se mover para um estado preferido ao do equilíbrio com uma probabilidade suficientemente alta, deve haver um movimento de resposta do outro DM que leve o conflito a um estado que não é preferido ao estado do equilíbrio com uma probabilidade “alta demais”.

A seguinte definição formaliza esta ideia:

Definição 2.4.2.: Um estado $s \in S$ é (α, β) -Metaracional para DM i se para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β) -Metaracional estável para o DM i se para cada estado s_1 que i pode atingir de s e que este prefira com probabilidade maior que $1 - \alpha$, então existe um movimento em resposta para um estado s_2 que o outro DM j , pode fazer e é tal que i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$. Por exemplo, um estado s , que é $(0.9, 0.7)$ -Metaracional estável para o DM i é tal que para cada estado s_1 disponível em s que i prefira a s com probabilidade maior que 0.10, existe um movimento de resposta para um estado s_2 que o DM j pode fazer tal que i **não** prefere s_2 a s com probabilidade maior que 0.3. Como outro exemplo, um estado $(1, 1)$ -Metaracional estável para o DM

i é tal que para cada estado s_1 disponível em s que i prefira a s com probabilidade maior que zero, existe um movimento de resposta do DM j para um estado s_2 e i **não** prefere s_2 a s com probabilidade maior que zero.

Como nós mostraremos na próxima seção, o conjunto dos estados (α, β) -Metaracionais estáveis decresce monotonicamente quando crescem ou α ou β . Então, para cada estado existe uma região de valores (α, β) para os quais o estado satisfaz (α, β) -Metaracional estabilidade. Tal região caracteriza a intensidade da estabilidade Metaracional do estado correspondente.

Em alguns contextos, pode fazer sentido considerar $\alpha = \beta$, mas desde que nós não vemos nenhuma razão que nos leve a fazer isso em geral, não adicionamos tal restrição aqui por acreditar que isso confere mais flexibilidade à definição de estabilidade. Também podemos interpretar que o parâmetro α está relacionado a avaliação do DM sobre seus próprios movimentos e β define está relacionada à análise do mesmo sobre o movimento de resposta do outro DM.

2.4.1.3 (α, β) -Metaracionalidade Simétrica

No GMCR original, um estado sendo metaracional simétrico estável significa que mesmo se um DM puder se mover para um estado preferido ao do equilíbrio deve haver um movimento de resposta do outro DM que leva o conflito para um estado pior do que o do equilíbrio para o primeiro DM e, mais ainda, o primeiro DM não consegue se mover deste último estado para outro que seja preferido ao do equilíbrio. Aqui, no modelo com preferências probabilísticas precisas nós queremos ter uma definição de estabilidade que capture a intuição que mesmo se um DM puder se mover para um estado preferido ao estado de equilíbrio com probabilidade suficientemente alta, deve haver um movimento

em resposta do outro DM levando a um estado que não é preferido pelo primeiro DM com probabilidade “alta demais” e, mais ainda, o primeiro DM não pode se mover deste último estado para outro que seja preferido ao estado de equilíbrio com probabilidade suficientemente alta. A seguinte definição formaliza esta ideia:

Definição 2.4.3: Um estado $s \in S$ é (α, β) -Metaracional Simétrico para o DM i se para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+1-\alpha}(s) = \emptyset$.

Então, um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico para o DM i é tal que para todo estado s_1 para o qual i possa ir de s e que este prefira com probabilidade maior ou igual a $1 - \alpha$, existe uma resposta por parte do outro DM, j , que se move para um estado s_2 e i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$ e mais ainda, não existe uma contra-resposta de i levando-o a um estado s_3 tal que i prefira s_3 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$. Por exemplo, um estado s , $(0.9, 0.7)$ -Metaracional Simétrico para i , é um estado tal que para todo estado s_1 disponível em s que i prefira a s com probabilidade maior que 0.10, existe uma resposta s_2 disponível ao DM j tal que i **não** prefere este estado s_2 a s com probabilidade maior que 0.3 e mais ainda, não existe uma contra-resposta disponível a i que o leve desse estado s_2 a um estado s_3 tal que i prefira s_3 a s com probabilidade maior que 0.10. Como outro exemplo, um estado $(1, 1)$ -Metaracional simétrico estável para DM i é tal que para todo estado que i possa atingir estando em s que i prefira a s com probabilidade maior que zero, existe uma resposta possível para o outro DM, j , se movendo para um estado s_2 tal que i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que zero e mais ainda, não existe contra-resposta que i possa dar a esta transição para s_2 que o leve a um estado s_3 tal que i prefira s_3 a s com probabilidade maior que zero.

Como mostraremos na próxima seção, o conjunto de estados (α, β) -Metaracionais Simétricos estáveis decresce monotonicamente quando crescem α ou β . Então, como no caso de metaracionalidade, para cada estado existe uma região de (α, β) valores para os

quais cada estado satisfaz a estabilidade (α, β) -Metaracional Simétrica. Tal região caracteriza a intensidade da estabilidade metaracional simétrica do estado correspondente. Nós também não vemos nenhuma razão que nos obrigue a supor que $\alpha = \beta$ e tais parâmetros têm a mesma interpretação do caso anterior.

2.4.1.4 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial

No GMCR original, um estado sendo sequencialmente estável significa que mesmo se um DM puder se mover para um estado preferido ao do equilíbrio deve haver um movimento de resposta do outro DM que leva o conflito para um estado pior do que o do equilíbrio para o primeiro DM e, mais ainda, este movimento de resposta não é prejudicial ao segundo DM. Aqui no modelo de preferências probabilísticas precisas, nós queremos ter uma definição de estabilidade que capture a intuição que mesmo se um DM puder se mover para um estado preferido ao do equilíbrio com uma probabilidade suficientemente alta, deve haver um movimento de resposta do outro DM que leve o conflito a um estado que não é preferido ao estado do equilíbrio com uma probabilidade “alta demais”, e mais ainda, tal movimento de resposta do segundo DM o leva a um estado que é preferido ao estado atual com probabilidade suficientemente alta.

A seguinte definição formaliza esta ideia:

Definição 2.4.4: Um estado $s \in S$ é (α, β, γ) -Sequencialmente estável para DM i se para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Estável para DM i se para cada estado que i pode atingir estando em s e que ele prefere com probabilidade maior que $1 - \alpha$, então existe uma resposta do outro DM, j , para um estado s_2 e s_2 é tal que j prefere s_2 a s_1 com probabilidade maior ou igual a γ e i não prefere s_2 a s com probabilidade maior

que $1 - \beta$. Por exemplo, um estado s $(0.9, 0.8, 0.7)$ -Sequencialmente estável para DM i é tal que para cada estado s_1 que i pode atingir estando em s e que ele prefere a s com probabilidade maior que 0.10, existe um movimento s_2 como resposta do outro DM j e s_2 é tal que j prefere s_2 a s_1 com probabilidade maior ou igual a 0.7 e i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que 0.2. Como outro exemplo, um estado s é $(1, 1, 0)$ -Sequencialmente estável para DM i é tal que se para cada estado s_1 que i pode atingir estando em s e que ele prefere com probabilidade maior que zero, existe como possível resposta do DM j , um estado s_2 tal que j prefere s_2 a s_1 com probabilidade maior que zero e i não prefere s_2 a s com probabilidade positiva.

Como mostraremos na próxima seção, o conjunto de estados (α, β, γ) -Sequencialmente estáveis decresce monotonicamente quando aumentamos α , β ou γ . Então, para cada estado existe uma região de valores (α, β, γ) para os quais este estado satisfaz (α, β, γ) -estabilidade sequencial. Esta região caracteriza a intensidade da estabilidade sequencial do estado correspondente. Também não vemos nenhuma razão para adicionar alguma relação para os valores dos parâmetros α , β e γ . α e β têm a mesma interpretação dos casos anteriores, enquanto γ é interpretado como a barreira para a preferência quando analisamos os movimentos de resposta do segundo DM.

2.4.2 Relações Entre Diferentes Noções de Estabilidade

Existem conhecidas implicações entre as noções padrão de estabilidade no modelo GMCR [32]. É fácil ver que Nash Estabilidade implica Metaracionalidade Simétrica que por sua vez implica Metaracionalidade. Mais ainda, Nash Estabilidade implica Estabilidade Sequencial que por sua vez implica Metaracionalidade. No modelo com preferências probabilísticas precisas, implicações similares continuam válidas. Além de mostrar estas

implicações, nós também analisamos implicações nas noções de estabilidade quando mudamos os valores dos parâmetros α , β e γ .

Teorema 2.4.5: *As seguintes relações são válidas no GMCR com preferências probabilísticas precisas.*

- (a) *Se um estado s é α -Nash estável para o DM i , então é (α, β) -Metaracional estável, (α, β) -Metaracional Simétrico estável e (α, β, γ) -Sequencialmente estável para o DM i para todo α , β e γ .*
- (b) *Se um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico estável para o DM i , então é (α, β) -Metaracional estável para DM i para todo α e β .*
- (c) *Se um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente estável para DM i , então é (α, β) -Metaracional estável para o DM i , para todo α , β e γ .*
- (d) *Um estado s é $(\alpha, \beta, 1)$ -Sequencialmente estável se, e somente se, s é α -Nash estável.*
- (e) *Se um estado s é α_1 -Nash estável para o DM i , então é α_2 -Nash estável para o DM i para todo $\alpha_1 \geq \alpha_2$.*
- (f) *Se um estado s é (α_1, β) -Metaracional estável para o DM i , então é (α_2, β) -Metaracional estável para o DM i , para todo β e $\alpha_1 \geq \alpha_2$.*
- (g) *Se um estado s é (α, β_1) -Metaracional estável para DM i , então é (α, β_2) -Metaracional estável para o DM i , para todo α e $\beta_1 \geq \beta_2$.*
- (h) *Se um estado s é (α_1, β) -Metaracional Simétrico estável para o DM i , então é (α_2, β) -Metaracional Simétrico estável para o DM i , para todo β e $\alpha_1 \geq \alpha_2$.*
- (i) *Se um estado s é (α, β_1) -Metaracional Simétrico estável para o DM i , então é (α, β_2) -Metaracional Simétrico estável para o DM i , para todo α e $\beta_1 \geq \beta_2$.*

(j) Se um estado s é $(\alpha_1, \beta, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i , então é $(\alpha_2, \beta, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i , para todo β, γ e $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

(k) Se um estado s é $(\alpha, \beta_1, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i , então é $(\alpha, \beta_2, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i , para todo α, γ e $\beta_1 \geq \beta_2$.

(l) Se um estado s é $(\alpha, \beta, \gamma_1)$ -Sequencialmente estável para o DM i , então é $(\alpha, \beta, \gamma_2)$ -Sequencialmente estável para o DM i , para todo α, β e $\gamma_1 \geq \gamma_2$.

Prova: Para (a), note que um estado s é α -Nash estável para o DM i se $R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$. Então, como não existe nenhum estado em $R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$, todas as outras definições de estabilidade são imediatamente satisfeitas.

Para (b), suponha que s é (α, β) -Metaracional Simétrico estável para o DM i . Então, para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$. Portanto, é verdade que para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$, o que implica em s ser (α, β) -Metaracional estável para o DM i .

Para (c), suponha que s é (α, β, γ) -Sequencialmente estável para o DM i . Então, para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$. Portanto, para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$, o que implica em s ser (α, β) -Metaracional estável para o DM i .

Para (d), note que da parte (a), se um estado é α -Nash estável, então é $(\alpha, \beta, 1)$ -Sequencialmente estável. Para a outra direção, note que $R_j^{+1}(s) = \emptyset, \forall s \in S$. Então, se um estado s é $(\alpha, \beta, 1)$ -Sequencialmente estável, então deve ser verdade que $R_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$. Portanto, s é α -Nash estável.

Para as próximas partes, precisamos notar que se $\gamma_1 > \gamma_2$, então $R_i^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_i^{+\gamma_2}(s)$ e $\varphi_i^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi_i^{+\gamma_2}(s)$. Portanto, parte (e) segue do fato de que $\alpha_1 \geq \alpha_2$ implica que se s é α_1 -Nash estável para o DM i , então $R_i^{+(1-\alpha_2)}(s) \subseteq R_i^{+(1-\alpha_1)}(s) = \emptyset$. Portanto, s é α_2 -Nash

estável para o DM i .

Para (f), suponha que s é (α_1, β) -Metaracional estável para o DM i . Seja $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha_2)}(s) \subseteq R_i^{+(1-\alpha_1)}(s)$, pois $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Portanto, como s é (α_1, β) -Metaracional estável para o DM i , existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$, o que implica em s ser (α_2, β) -Metaracional estável para o DM i .

Para (g), suponha que s é (α, β_1) -Metaracional estável para o DM i . Então, para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta_1)}(s))^c \subseteq R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta_2)}(s))^c$, o que implica que s é (α, β_2) -Metaracional estável para o DM i .

Para (h), suponha que s é (α_1, β) -Metaracional Simétrico estável para o DM i . Seja $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha_2)}(s) \subseteq R_i^{+(1-\alpha_1)}(s)$, dado que $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Portanto, como s é (α_1, β) -Metaracional Simétrico estável para o DM i , existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha_2)}(s) \subseteq R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha_1)}(s) = \emptyset$. Então, s é (α_2, β) -Metaracional Simétrico estável para o DM i .

Para (i), suponha que s é (α, β_1) -Metaracional Simétrico estável para o DM i . Então, para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta_1)}(s))^c \subseteq R_j(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta_2)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$, o que implica em s ser (α, β_2) -Metaracional Simétrico estável para o DM i .

Para (j), suponha que s é $(\alpha_1, \beta, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i . Seja $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha_2)}(s) \subseteq R_i^{+(1-\alpha_1)}(s)$, dado que $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Portanto, como s é $(\alpha_1, \beta, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i , existe $s_2 \in R_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$, o que implica em s ser $(\alpha_2, \beta, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i .

Para (k), suponha que s é $(\alpha, \beta_1, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i . Então, para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta_1)}(s))^c \subseteq R_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta_2)}(s))^c$, o que implica em s ser $(\alpha, \beta_2, \gamma)$ -Sequencialmente estável para o DM i .

Para (l), suponha que s é $(\alpha, \beta, \gamma_1)$ -Sequencialmente estável para o DM i . Então, para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, existe $s_2 \in R_j^{+\gamma_1}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c \subseteq R_j^{+\gamma_2}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$, o

que implica que s é $(\alpha, \beta, \gamma_2)$ -Sequencialmente estável para o DM i . □

Nós agora provamos que as definições de estabilidade são apenas generalizações das definições de estabilidade padrão do GMCR original. Elas são idênticas para o caso onde todos DMs tem preferências determinísticas sobre os estados, i.e., $P_k(s_i, s_j) \in \{0, 1\}$ para todo DM k e $s_i, s_j \in S$.

Teorema 2.4.6.: *Suponha que $P_k(s_i, s_j) \in \{0, 1\}$ para todo DM k e $s_i, s_j \in S$. Seja \succ^k a relação de preferência tal que $s_i \succ^k s_j$ se e somente se $P_k(s_i, s_j) = 1$. Então, um estado s é α -Nash estável, (respectivamente, (α, β) -GMR estável, (α, β) -SMR estável e (α, β, γ) -Sequencialmente estável) se e somente se é Nash estável (respectivamente, GMR estável, SMR estável e Sequencialmente estável) considerando $(\succ^k)_{k \in N}$, para $0 < \alpha, \beta \leq 1$ e $0 \leq \gamma < 1$.*

Prova: Seja $\varphi_i^{+\succ^i}(s) = \{t \in S : t \succ^i s\}$ o conjunto de estados que são preferidos a s pelo DM i de acordo com \succ^i . Defina além disso, $R_i^{+\succ^i}(s) = R_i(s) \cap \varphi_i^{+\succ^i}(s)$. Por definição de \succ^i , segue que $\varphi_i^{+\succ^i}(s) = \{t \in S : P_i(t, s) = 1\} = \varphi_i^{+\gamma}(s)$, para $0 \leq \gamma < 1$, desde que $P_i(t, s) \in \{0, 1\}$. Portanto, $R_i^{+\succ^i}(s) = R_i^{+\gamma}(s)$, para $0 \leq \gamma < 1$. A prova segue do fato de que as definições propostas são equivalentes às definições originais neste caso. □

Na próxima seção, nós apresentamos as definições de estabilidade considerando que cada DM tem preferências probabilísticas sobre os estados e que pode haver mais de dois DMs no modelo de grafos para resolução de conflito.

2.4.3 Análise de Estabilidade para GMCR com Mais de Dois DMs

As definições de estabilidade apresentadas anteriormente consideram que existem apenas dois DMs envolvidos no conflito. Na presente seção, nós apresentamos novas definições de estabilidade considerando preferências probabilísticas precisas para cada DM

e que pode haver mais de dois DMs no conflito. Nós também definimos alguns conceitos necessários a estas definições. Nós modificamos as definições originais de estabilidade do GMCR para este caso, segundo o apresentado em [5].

Quando existem mais de dois DMs, os movimentos de resposta podem vir de um único DM ou de um grupo de DMs. De fato, os movimentos de respostas podem ser uma sequência de movimentos dos DMs de um grupo chamado *coalizão*, denotado por H , que pode ser qualquer subconjunto não-vazio de DMs envolvidos no conflito. Se H contém mais que um DM, é chamada não-trivial.

Quando existem apenas dois DMs no conflito, o movimento de resposta é feito por um único DM. A fim de definir as noções de estabilidade neste caso, é necessário definir o conjunto de estados atingíveis por um único DM i quando o estado atual é s , denotado por $R_i(s)$. Agora, o oponente do DM em foco é uma coalizão e então é necessário definir o conjunto de estados atingíveis para a coalizão H , denotado por $R_H(s)$. Vamos denotar então por $R_H(s)$ o conjunto de estados atingíveis de s por uma coalizão H . Nós consideramos que este conjunto contém apenas estados atingíveis por uma *sequência legal* de movimentos, onde uma sequência de movimentos é legal se nenhum DM em H se move duas vezes consecutivamente. Consideremos $\Omega_H(s, t)$ o subconjunto de H cujos membros são os DMs que fazem o último movimento para atingir t em uma sequência legal de movimentos de s . $R_H(s)$ e $\Omega_H(s, t)$ podem ser definidos indutivamente como segue: (i) se $k \in H$ e $t \in R_k(s)$, então $t \in R_H(s)$, e $k \in \Omega_H(s, t)$ (ii) se $t \in R_H(s)$, $k \in H$, $\Omega_H(s, t) \neq \{k\}$ e $u \in R_k(t)$, então $u \in R_H(s)$ e $k \in \Omega_H(s, u)$.

É importante ressaltar aqui porque é desejável evitar movimentos repetidos de um único DM neste modelo. Suponha que o DM i prefere s a t com probabilidade p e prefere t a s com probabilidade $1 - p$. Como $P_i(s, s) = 0$, nós temos que $s \notin R_i^{+\gamma}(s)$, $\forall \gamma \geq 0$, já que nenhum DM prefere estritamente um estado a ele mesmo com probabilidade positiva.

No entanto, se nós considerarmos uma coalizão onde i é o único membro e tivermos permissão para movimentos repetidos do DM i , nós teríamos que se $\gamma < \min\{p, 1 - p\}$, então $s \in R_{\{i\}}^{+\gamma}(s)$ já que DM i poderia ser mover de s para t e mover-se de volta para t de s . A fim de evitar tais situações, nós assumimos que nenhum DM pode se mover duas vezes consecutivamente na sequência de movimentos legais de uma coalizão.

Agora, nós podemos apresentar as definições de estabilidade para GMCR com preferências probabilísticas e mais que dois DMs. Note que a definição de α -Nash estabilidade permanece válida porque não depende de movimentos de respostas ao movimento do DM em foco. Então, nós começamos com a estabilidade metaracional .

2.4.3.1 (α, β) -Metaracionalidade

Definição 2.4.7.: Um estado $s \in S$ é (α, β) -Metaracional para DM i se para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{N-i}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β) -Metaracional para um DM i em um GMCR com mais de dois DMs se para cada estado s_1 que i possa atingir de s tal que i prefere s_1 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$, existe um estado atingível s_2 para os oponentes de i tal que i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$.

2.4.3.2 (α, β) -Metaracionalidade Simétrica

Definição 2.4.8: Um estado $s \in S$ é (α, β) -Metaracional Simétrico para DM i se para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{N-i}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap (\varphi_i^{+(1-\alpha)}(s)) = \emptyset$.

Então, um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico para um DM i em um GMCR com mais que dois DMs se para cada estado s_1 que i possa atingir de s tal que i prefere s_1 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$, existe um estado atingível s_2 para os oponentes

de i tal que i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$ e, mais ainda, não há movimento de contra resposta que i possa fazer de s_2 que leve para um estado s_3 tal que i prefere s_3 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$.

Antes de apresentar a definição de estabilidade sequencial, nós precisamos apresentar a definição de γ -Melhoramento Unilateral por uma Coalizão. Seja $\Omega_H^{+\gamma}(s, t)$ o subconjunto de H cujos membros são os DMs que fazem o último movimento de melhoramento γ para atingir t em uma sequência legal de movimentos de melhoramento γ de s . Seja $R_H^{+\gamma}(s)$ o conjunto de γ -Melhoramento Unilateral por uma coalizão H de um estado s definido indutivamente como segue: (i) se $k \in H$, $t \in R_k(s)$ e $P_k(t, s) > \gamma$, então $t \in R_H^{+\gamma}(s)$ e $k \in \Omega_H^{+\gamma}(s, t)$, (ii) se $t \in R_H^{+\gamma}(s)$, $k \in H$, $u \in R_k(t)$, $\Omega_H^{+\gamma}(s, t) \neq \{k\}$ e $P_k(u, t) > \gamma$, então $u \in R_H^{+\gamma}(s)$ e $k \in \Omega_H^{+\gamma}(s, u)$.

Então, todo estado tal que algum DM em H prefere a s com probabilidade maior que γ está no conjunto de γ -Melhoramento Unilateral por H de s . Se de um estado t que é um γ -Melhoramento Unilateral por H de s , um DM em H pode atingir, por um movimento legal, um estado u que ele prefere a t com probabilidade maior que γ , então u é também um γ -Melhoramento Unilateral por H de s . Agora, nós apresentamos a definição de estabilidade sequencial.

2.4.3.3 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial

Definição 2.4.9.: Um estado $s \in S$ é (α, β, γ) -Sequencialmente estável para o DM i se para todo $s_1 \in R_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{N-i}^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β) -Sequencialmente estável para DM i em um GMCR com mais de dois DMs se para cada estado s_1 que i pode atingir de s tal que i prefere s_1 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$, então existe um γ -Melhoramento Unilateral para os

oponentes de i , s_2 , tal que i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$.

Faremos agora duas importantes observações. Primeiro, todas as definições de estabilidade apresentadas na Subseção 2.4.1 são um caso particular das definições dadas nesta subseção para o caso no qual há apenas dois DMs. Segundo, todas as relações entre elas apresentadas na Subseção 2.4.2 para o GMCR com 2 DMs continuam válidas para as definições generalizadas propostas aqui. A prova é bastante similar, substituindo R_j por R_{N-i} em todas as partes da prova.

Nós precisamos mostrar que se aumentarmos o parâmetro γ , o conjunto de melhoramentos γ para a coalizão decresce, assim como ocorre com o conjunto de melhoramentos de um DM. É o que faremos na proposição a seguir.

Proposição 2.4.10. *Se $\gamma_1 \geq \gamma_2$, então $R_H^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_H^{+\gamma_2}(s)$, $\forall s \in S$.*

Prova: A prova se dá por indução no número de movimentos que são necessários para a coalizão H atingir um estado s_1 de um estado s . Seja l o número de estados no conflito. Primeiro, note que se $s_1 \in R_H(s)$, então no máximo $l - 1$ movimentos são necessários para ir de s para s_1 . Vamos particionar o conjunto $R_H(s)$ de acordo com o número mínimo de movimentos que a coalizão H precisa para atingir um estado em $R_H(s)$. Além disso, vamos definir subconjuntos de $\Omega_H(s, t)$ de acordo com o número de movimentos que a coalizão H leva para atingir o estado t do estado s .

Nós definimos $R_{H,m}(s)$ como o subconjunto de $R_H(s)$ consistindo de todos os estados para os quais o número mínimo de movimentos que a coalizão H precisa para atingir ele de s é igual a m .

Considere também $\Omega_{H,m}(s, t)$ como o subconjunto de $\Omega_H(s, t)$ consistindo de todos DMs que fazem os últimos movimentos quando o número de movimentos legais que a coalizão H leva para atingir t de s é igual a m . Então, $R_H(s) = \cup_{m=1}^{l-1} R_{H,m}(s)$ e $\Omega_H(s, t) = \cup_{m=1}^{l-1} \Omega_{H,m}(s, t)$, em que os conjuntos $R_{H,m}(s)$ formam uma partição de $R_H(s)$, porém os

conjuntos $\Omega_{H,m}(s,t)$ não necessariamente são disjuntos.

Defina além disso, $R_{H,m}^{+\gamma}(s) = R_H^{+\gamma}(s) \cap R_{H,m}(s)$ e $\Omega_{H,m}^{+\gamma}(s,t) = \Omega_H^{+\gamma}(s,t) \cap \Omega_{H,m}(s,t)$.

Nós agora provamos que se $\gamma_1 > \gamma_2$, então $R_{H,m}^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_{H,m}^{+\gamma_2}(s)$ e $\Omega_{H,m}^{+\gamma_1}(s,t) \subseteq \Omega_{H,m}^{+\gamma_2}(s,t)$, $\forall s, t \in S$ e $m \in \{1, \dots, l-1\}$, o que implica $R_H^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_H^{+\gamma_2}(s)$, como desejado.

Vamos provar o caso inicial, onde $m = 1$. Suponha que $t \in R_{H,1}^{+\gamma_1}(s)$ e $k \in \Omega_{H,1}^{+\gamma_1}(s,t)$. Então, nós temos que $k \in H$, $t \in R_k(s)$ e $P_k(t,s) > \gamma_1 > \gamma_2$, o que implica que $t \in R_{H,1}^{+\gamma_2}(s)$ e $k \in \Omega_{H,1}^{+\gamma_2}(s,t)$.

Agora assumimos que se $\gamma_1 > \gamma_2$, então $R_{H,m}^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_{H,m}^{+\gamma_2}(s)$ e $\Omega_{H,m}^{+\gamma_1}(s,t) \subseteq \Omega_{H,m}^{+\gamma_2}(s,t)$, $\forall s, t \in S$ e vamos mostrar que se $\gamma_1 > \gamma_2$, então $R_{H,m+1}^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_{H,m+1}^{+\gamma_2}(s)$ e $\Omega_{H,m+1}^{+\gamma_1}(s,t) \subseteq \Omega_{H,m+1}^{+\gamma_2}(s,t)$, $\forall s, t \in S$.

Suponha que $t \in R_{H,m+1}^{+\gamma_1}(s)$ e $k \in \Omega_{H,m+1}^{+\gamma_1}(s,t)$. Então, existe $u \in R_{H,m}^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_{H,m}^{+\gamma_2}(s)$ tal que $t \in R_k(u)$, $\{k\} \neq \Omega_{H,m}^{+\gamma_1}(s,u)$ e $P_k(t,u) > \gamma_1 > \gamma_2$, o que implica que $\{k\} \neq \Omega_{H,m}^{+\gamma_2}(s,u)$ e, conseqüentemente, $t \in R_{H,m+1}^{+\gamma_2}(s)$ e $k \in \Omega_{H,m+1}^{+\gamma_2}(s,t)$. ■

2.4.4 Análise de Estabilidade Coalizional

As definições já apresentadas nesta seção fornecem condições sob as quais um estado é estável para um determinado DM e consideram que a resposta aos movimentos deste DM pode ser uma sequência legal de movimentos de seus oponentes. Mas, existem alguns estudos considerando que os DMs podem agir juntos e atingir melhoramentos que não são possíveis se eles estiverem agindo individualmente. Por exemplo, Inohara e Hipel [5] estendem as definições de estabilidade para situações nas quais os DMs podem agir juntos formando uma coalizão, i.e., eles propõem uma análise coalizional do conflito.

Nós agora apresentamos as definições de estabilidade coalizional considerando que DMs podem agir juntos. Para a definição de α -Nash estabilidade, nós precisamos antes

apresentar a definição de γ -Melhoramento Coalizional, denotado por $R_H^{++\gamma}(s)$. Tal conjunto é definido como o conjunto dos estados em $R_H(s)$ tais que todos os DMs em H preferem tais estados a s com probabilidade maior que γ , i.e., $R_H^{++\gamma}(s) = \{t \in R_H(s) : P_i(t, s) > \gamma, \forall i \in H\}$. Nós denotamos por $\mathcal{P}(N)$ o conjunto de todas as coalizões contidas em N e por $\Phi_H^{+\gamma}(s) = \bigcap_{i \in H} \Phi_i^{+\gamma}(s)$ o conjunto de todos os estados que cada DM i em H prefere a s com probabilidade maior que γ . Note que $R_H^{++\gamma}(s) = \Phi_H^{+\gamma}(s) \cap R_H(s)$.

2.4.4.1 α -Nash Estabilidade Coalizional

Definição 2.4.11.: α -Nash Estabilidade Coalizional para uma coalizão. Um estado $s \in S$ é α -Nash Coalizional estável para a coalizão H se $R_H^{++(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

Então, um estado s é α -Nash Coalizional estável para a coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s , existe um DM em H que não prefere s_1 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$.

Definição 2.4.12.: α -Nash Estabilidade Coalizional para um DM. Um estado s é α -Nash Coalizional estável para o DM i se é α -Nash estável Coalizional para todas as coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

A fim de apresentar as outras definições de estabilidade, é necessário introduzir o conjunto de estados atingíveis por uma classe de coalizões. Note que os movimentos de respostas podem ser feitos por uma classe de coalizões. Seja \mathcal{C} uma classe de coalizões e seja $R_{\mathcal{C}}(s)$ o conjunto de estados atingíveis pela classe \mathcal{C} de s por uma sequência legal de movimentos. Seja $\Omega_{\mathcal{C}}(s, t)$ o subconjunto de \mathcal{C} cujos membros são os conjuntos de DMs que fazem a última sequência legal de movimentos para atingir t de s . $R_{\mathcal{C}}(s)$ e $\Omega_{\mathcal{C}}(s, t)$ podem ser definidos indutivamente como segue: (i) se $H \in \mathcal{C}$ e $t \in R_H(s)$, então $t \in R_{\mathcal{C}}(s)$ e $H \in \Omega_{\mathcal{C}}(s, t)$ (ii) se $t \in R_{\mathcal{C}}(s)$, $H \in \mathcal{C}$, $\Omega_{\mathcal{C}}(s, t) \neq \{H\}$ e $u \in R_H(t)$, então $u \in R_{\mathcal{C}}(s)$ e

$H \in \Omega_{\mathcal{G}}(s, u)$. Agora, nós podemos dar as definições de estabilidade (α, β) -Metaracional Coalizional e de estabilidade (α, β) -Metaracional Simétrica Coalizional.

2.4.4.2 (α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional

Definição 2.4.13: (α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional para uma coalizão.

Um estado $s \in S$ é (α, β) -Metaracional Coalizional estável para coalizão H se para todo $s_1 \in R_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe um movimento de resposta $s_2 \in R_{\mathcal{P}(N-H)}(s_1) \cap (\varphi_H^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional estável para coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s tal que cada DM i em H prefere s_1 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$, existe um estado atingível s_2 para os oponentes de H tal que para algum DM i em H , i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$.

Definição 2.4.14: (α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional para um DM. Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional estável para o DM i se é (α, β) -Metaracional estável Coalizional para todas as coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tal que $i \in H$.

2.4.4.3 (α, β) -Estabilidade Metaracional Simétrica Coalizional

Definição 2.4.15: (α, β) -Estabilidade Metaracional Simétrica Coalizional para uma Coalizão. Um estado $s \in S$ é (α, β) -Metaracional Simétrico Coalizional estável para a coalizão H se para todo $s_1 \in R_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{\mathcal{P}(N-H)}(s_1) \cap (\varphi_H^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_H(s_2) \cap (\varphi_H^{+(1-\alpha)}(s)) = \emptyset$.

Então, um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico Coalizional estável para a coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s tal que cada DM i em H prefere s_1 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$, existe um estado atingível s_2 para os oponentes de H

tal que para algum DM i em H , i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$ e, mais ainda, não há movimento de contra resposta que H possa fazer de s_2 levando a um estado s_3 tal que cada DM i em H prefere s_3 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$.

Definição 2.4.16: (α, β) -Estabilidade Metaracional Simétrica Coalizional para um DM. Um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico Coalizional estável para o DM i se é (α, β) -Metaracional Simétrico estável Coalizional para todas as coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tal que $i \in H$.

Para a definição de estabilidade sequencial coalizional, é necessário definir o conceito de γ -Melhoramento Coalizional de uma Classe de Coalizões, denotado por $R_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$. Seja $\Omega_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t)$ o subconjunto de \mathcal{C} cujos membros são os subconjuntos de DMs que fazem o último movimento de melhoramento γ para atingir t em sequências legais de movimentos de melhoramentos γ de s . $R_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $\Omega_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t)$ podem ser definidos como segue: (i) se $H \in \mathcal{C}$ e $t \in R_H^{++\gamma}(s)$, então $t \in R_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $H \in \Omega_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t)$ (ii) se $t \in R_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$, $H \in \mathcal{C}$, $\Omega_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t) \neq \{H\}$ e $u \in R_H^{++\gamma}(t)$, então $u \in R_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $H \in \Omega_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, u)$.

2.4.4.4 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional

Definição 2.4.17: (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional para a coalizão. Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional estável para a coalizão H se para todo $s_1 \in R_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{\mathcal{P}(N-H)}^{+\gamma}(s_1) \cap (\Phi_H^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional estável para a coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s tal que cada DM i em H prefere s_1 a s com probabilidade maior que $1 - \alpha$, então existe um γ -Melhoramento Coalizional da Classe de Coalizões formadas pelos oponentes de H , s_2 , tal que para algum DM i em H , i não prefere s_2 a s com probabilidade maior que $1 - \beta$.

Definição 2.4.18.: (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional para um DM. Um estado s é (α, β, γ) -Sequencial Coalizional estável para o DM i se é (α, β, γ) -Sequencial Coalizional estável para todas as coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tal que $i \in H$.

Todas as relações entre as definições de estabilidade apresentadas na Subseção 2.4.2 para GMCR com 2 DMs permanecem válidas para as definições de estabilidade coalizional para a coalizão e, conseqüentemente, para um DM. Para provar as relações para as definições de estabilidade coalizional para a coalizão, substitua *DM i* por *coalizão H* e R_j por $R_{\mathcal{P}(N-H)}$ em todas as partes da prova. É também necessário mostrar que se $\gamma_1 \geq \gamma_2$, então $R_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$ e $\varphi_H^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi_H^{+\gamma_2}(s)$, $\forall s \in S$. A prova de que $\varphi_H^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi_H^{+\gamma_2}(s)$ segue imediatamente do fato de que $\varphi_i^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi_i^{+\gamma_2}(s)$ para cada DM i , enquanto a prova de $R_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$ procede por indução de maneira similar à correspondente prova da proposição 2.4.10.

2.5 Aplicações

Duas aplicações são desenvolvidas nesta seção: uma ilustrando um conflito com dois DMs e outra analisando um caso com três DMs em um conflito. No segundo caso, nós apresentamos tanto a análise de estabilidade quanto a análise de estabilidade coalizional para a coalizão e para o DM.

2.5.1 Um Modelo com 2 DMs e Preferências Probabilísticas Precisas

Exemplo 2.5.1.: Considere as preferências probabilísticas precisas dos DMs como no Exemplo 2.3.1. Nós podemos agora retomar tal exemplo para examinar as propriedades

de estabilidade de cada estado. Tabelas 2.4 e 2.5 mostram os conjuntos $\varphi_i^{+\gamma}(s)$ e $R_i^{+\gamma}(s)$ para este exemplo. Nestas tabelas, se na linha correspondente ao estado s , nós usarmos a notação $t(\gamma < q)$, isto significa que o conjunto descrito contém o estado t se a condição $\gamma < q$ é satisfeita.

Tabela 2.4 Conjuntos $\varphi_i^{+\gamma}$

Estado	$\varphi_D^{+\gamma}(s)$	$\varphi_E^{+\gamma}(s)$
(P, S)	$(R, S), (\gamma < 1)$ (R, U) e $(P, U)(\gamma < 0.7)$	\emptyset
(R, S)	(R, U) e $(P, U)(\gamma < 0.7)$	$(P, S)(\gamma < 1)$
(P, U)	$(R, U) (\gamma < 1)$ (R, S) e $(P, S), (\gamma < 0.3)$	(R, S) e $(P, S)(\gamma < 1)$
(R, U)	(R, S) e $(P, S), (\gamma < 0.3)$	$(R, S), (P, S)$ e $(P, U)(\gamma < 1)$

Tabela 2.5 Conjuntos $R_i^{+\gamma}$

Estado	$R_D^{+\gamma}(s)$	$R_E^{+\gamma}(s)$
(P, S)	$(P, U)(\gamma < 0.7)$	\emptyset
(R, S)	$(R, U)(\gamma < 0.7)$	$(P, S), (\gamma < 1)$
(P, U)	$(P, S), (\gamma < 0.3)$	\emptyset
(R, U)	$(R, S), (\gamma < 0.3)$	$(P, U)(\gamma < 1)$

Tabelas 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9 mostram os conjuntos de valores para os parâmetros segundo os quais os estados (R, S) , (R, U) , (P, S) e (P, U) , respectivamente, satisfazem as definições de estabilidade probabilística precisa para cada DM. Por exemplo, considere que o estado inicial é (R, U) . Analisando o conflito de acordo com os estados atingíveis para DM D em (R, U) , nós temos que os estados possíveis de serem atingidos para este

Tabela 2.6 Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (R, S)

	Para E	Para D	Estável
α -Nash	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 0.3$	$\alpha = 0$
(α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$ ou $\alpha > 0.3, \beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$ ou $\alpha > 0.3, \beta \leq 0.3$
(α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$
(α, β, γ) -SEQ	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 0.7$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0.3, \beta \leq 0.3, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $0 < \alpha \leq 0.3, \forall \beta, \gamma < 0.7$ ou $\alpha > 0.3, \beta \leq 0.3, \gamma < 0.7$

Tabela 2.7 Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (R, U)

	Para E	Para D	Estável
α -Nash	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 0.7$	$\alpha = 0$
(α, β) -GMR	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$ ou $\alpha > 0.7, \beta \leq 0.7$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\forall \alpha, \beta = 0$
(α, β) -SMR	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
(α, β, γ) -SEQ	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 0.3$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0.7, \beta \leq 0.7, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 0.3$

Tabela 2.8 Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (P, S)

	Para E	Para D	Estável
α -Nash	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3$
(α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$ ou $\alpha > 0.3, \beta \leq 0.3$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$ ou $\alpha > 0.3, \beta \leq 0.3$
(α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta$
(α, β, γ) -SEQ	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 0.3, \forall \beta, \forall \gamma$

Tabela 2.9 Estabilidade Probabilística Precisa para o Estado (P, U)

	Para E	Para D	Estável
α -Nash	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 0.7$	$\alpha \leq 0.7$
(α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$ ou $\alpha > 0.7, \beta \leq 0.7$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$ ou $\alpha > 0.7, \beta \leq 0.7$
(α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta$
(α, β, γ) -SEQ	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 0.7, \forall \beta, \forall \gamma$

DM são (R, U) (D pode escolher ficar no mesmo estado) e (R, S) . Nós observamos na Tabela 2.3 que $P_D((R, U), (R, U)) = 0$ e $P_D((R, S), (R, U)) = 0.3$. Então, para inferir sobre os valores de α segundo os quais o estado (R, U) é α -Nash estável para o DM D , nós precisamos verificar se a probabilidade com a qual o DM D prefere cada estado disponível a ele em (R, U) ao estado (R, U) é menor ou igual que $1 - \alpha$. Portanto, (R, U) é α -Nash estável para DM D se $0 \leq 1 - \alpha$ e $0.3 \leq 1 - \alpha$. Então, se $\alpha \leq 0.7$, então as duas desigualdades anteriores são satisfeitas e portanto (R, U) é α -Nash estável para DM D .

Vamos considerar agora como analisar a estabilidade probabilística precisa do estado (R, U) de acordo com as outras noções. Primeiro, note que se $\alpha \leq 0.7$, então não existe estado atingível para o DM D em (R, U) tal que D prefira o tal ao estado (R, U) com probabilidade maior que $1 - \alpha$. Então, para qualquer β , o conceito de Metaracionalidade é satisfeito. De fato, o mesmo argumento vale para os outros conceitos, a saber, se $\alpha \leq 0.7$ e β é livre, então (R, U) é também (α, β) -Simétrico Metaracional e se $\alpha \leq 0.7$, β e γ são livres, então (R, U) é (α, β, γ) -Sequencialmente estável. Por outro lado, se $\alpha > 0.7$, então (R, S) é o único estado s atingível para DM D em (R, U) tal que $P_D((s), (R, U)) > 1 - \alpha$. O próximo passo é analisar os estados atingíveis para DM E em (R, S) no que diz respeito a preferência probabilística precisa do DM D pelo estado inicial (R, U) a estes estados atingíveis para E . Existem dois estados atingíveis para E em (R, S) : (R, S) e (P, S) . De

acordo com a Tabela 2.3, $P_D((R,S), (R,U)) = P_D((P,S), (R,U)) = 0.3$. Para examinar para quais valores de β (R,U) é (α, β) -Metaracional, nós precisamos verificar se β é tal que $0.30 \leq 1 - \beta$, o que é verdade para $\beta \leq 0.7$. Então, para $\alpha > 0.7$ e $\beta \leq 0.7$, o estado (R,U) é (α, β) -Metaracional para DM D .

Note que para $\alpha > 0.7$, o único estado s atingível para DM D em (R,U) tal que $P_D(s, (R,U)) > 1 - \alpha$ é (R,S) . Em (R,S) , DM E pode atingir ambos (R,S) e (P,S) . Porém, estes dois estados são preferidos pelo DM D a (R,U) com probabilidade $0.3 > 1 - \alpha$. Então, DM D pode escolher como uma contra resposta não fazer nada e ele estará em um estado que é preferido por ele ao original (R,U) com uma probabilidade maior que $1 - \alpha$. Portanto, se $\alpha > 0.7$, então (R,U) não é simétrico racional para DM D .

Finalmente, vamos analisar se é possível que, para $\alpha > 0.7$, o estado (R,U) seja sequencialmente estável para DM D . Note que como no parágrafo anterior, o único estado s atingível para DM D em (R,U) tal que $P_D(s, (R,U)) > 1 - \alpha$ é (R,S) e que em (R,S) , DM E pode atingir ambos estados (R,S) e (P,S) . (R,U) será sequencialmente estável para DM D se ou $P_E((R,S), (R,S)) = 0 \geq \gamma$ e $P_D((R,S), (R,U)) = 0.3 \leq 1 - \beta$ ou $P_E((P,S), (R,S)) = 1 \geq \gamma$ e $P_D((P,S), (R,U)) = 0.30 \leq 1 - \beta$. Então, (R,U) é sequencialmente estável para DM D se $\alpha > 0.7$, $\beta \leq 0.7$ e $\gamma \leq 1$. As outras células nas Tabelas 2.6-2.9 podem ser obtidas usando um procedimento similar.

2.5.2 Um Modelo 3-DM de Conflito com Preferências Probabilísticas e Precisas

Exemplo 2.5.2.: O conflito de exportação de água do Lago Gisborne foi analisado em Li et al. [22] considerando preferência incerta. O Lago Gisborne é localizado próximo à costa sul de Newfoundland no Canadá. Em 1995, uma companhia de Newfoundland, Canada Wet Incorporated, propôs um projeto para exportar água do Lago Gisborne. O

governo de Newfoundland e Labrador aprovou este projeto no ano seguinte, visando benefícios econômicos para a região. No entanto, alguns grupos ambientalistas criticaram duramente a aprovação, argumentando que tais projetos trariam terríveis consequências para o meio ambiente e para cultura local. Então, o Governo Federal entrou no conflito introduzindo uma proibição de exportação de água de grandes bacias de drenagem no Canadá e o governo local cedeu à pressão e introduziu um projeto de lei para proibir a exportação em 1999 e então a *Canadá Wet* abandonou o projeto do Lago Gisborne.

Em 2001, a fim de obter lucros, o novo *premier* decidiu revisar o projeto do Lago Gisborne. Houve duras críticas novamente. Então, o Ministro da justiça, Kelvin Parsons, prometeu, ainda em 2001, que nenhuma legislação para derrubar a proibição de exportação de água seria introduzida durante as próximas sessões.

Esta situação pode ser representada por um modelo 3-DM de conflito, onde um óbvio e crítico DM é o governo da província, outro DM é o Governo Federal e grupos contra o projeto do Lago Gisborne e o último DM representa as companhias interessadas em obter ganhos com a exportação de água do Canadá, incluindo a *Canada Wet*.

A tabela 2.10 mostra as opções disponíveis para cada DM e a Tabela 2.11 mostra os possíveis estados do conflito das as opções disponíveis para cada DM.

O grafo do modelo do conflito de Gisborne é mostrado na Figura 2.2, onde os nós representam os estados possíveis, e arcos dirigidos mostram os movimentos que os DMs podem fazer.

As preferências do governo provincial são incertas e dependem de ele ser economicamente orientado (dar prioridade aos benefícios econômicos, sem grandes preocupações com questões ambientais) ou ter uma orientação mais ambientalista. Aqui, nós supomos que ele é economicamente orientado com probabilidade p e ambientalista com probabilidade $1 - p$. Considerando estas probabilidades, nós mostramos as preferências probabi-

Tabela 2.10 DMs e suas opções no Modelo de Conflito de Gisborne

DMs	Opções	Status Quo
Governo Federal(GF)	1. Continuar no Amplo Acordo para a proibição de exportação de água no Canadá (Continuar)	S
Governo da Província de Newfoundland e Labrador(GP)	2. Revogar a proibição de exportação de água (Revogar)	N
Grupos de Suporte(S)	3. Apelar para continuidade do projeto de Gisborne. (Apelar)	N

Tabela 2.11 Possíveis estados no Modelo de Conflito de Gisborne

Federal								
1. Continuar	N	S	N	S	N	S	N	S
Provincial								
2. Revogar	N	N	S	S	N	N	S	S
Suporte								
3. Apelar	N	N	N	N	S	S	S	S
Número do estado	1	2	3	4	5	6	7	8

lísticas precisas dos DMs nas Tabelas 2.12, 2.13 e 2.14.

A Tabela 2.15 mostra os estados que são atingíveis de cada estado para cada possível coalizão de DMs. As Tabelas 2.16 e 2.17 mostram os conjuntos $R_H^{+\gamma}(s)$ e $\phi_H^{+\gamma}(s)$ para cada um dos 8 estados no conflito e para cada coalizão de 1 ou 2 DMs. A Tabela 2.18 mostra o conjunto de γ -Melhoramentos Coalizional. Como no exemplo anterior, em todas estas

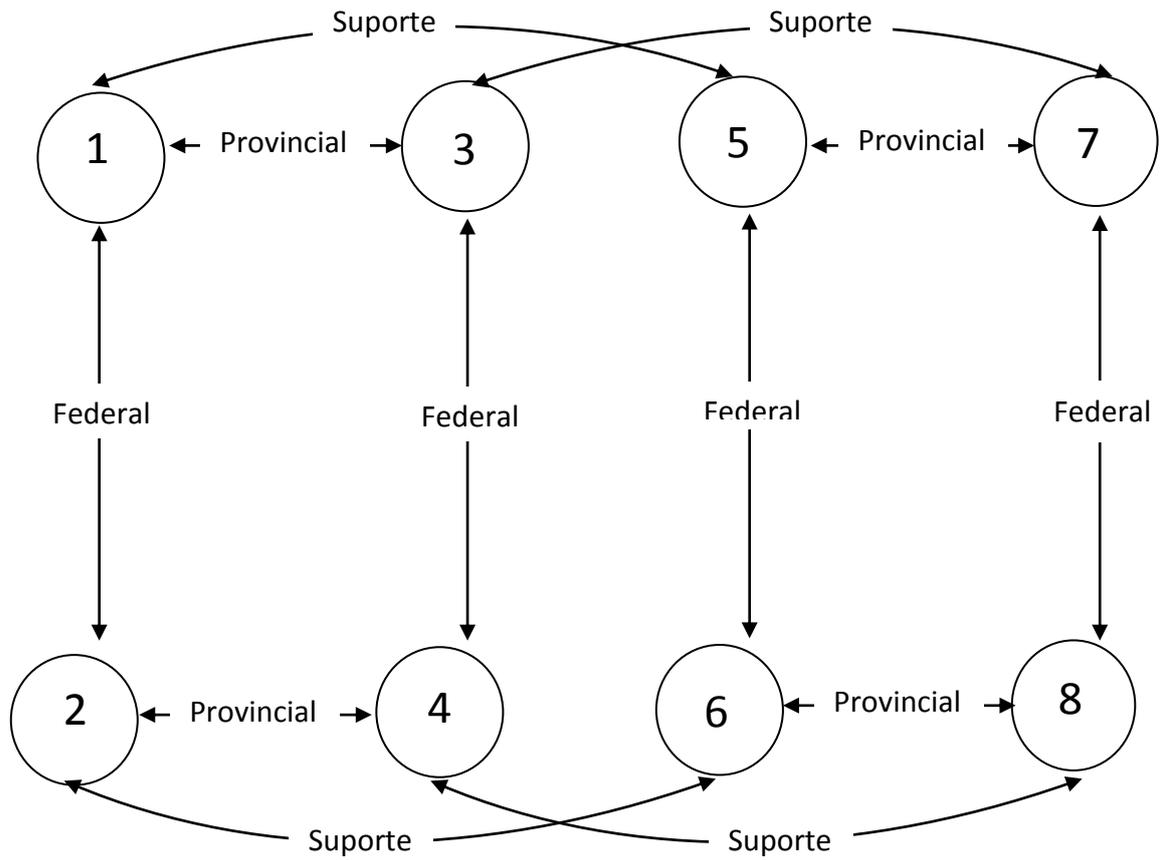


Figura 2.2 Grafo para O Modelo do Conflito de Gisborne

Tabela 2.12 Preferências Probabilísticas Precisas para o DM *GF* no Modelo do Conflito de Gisborne

<i>GF</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0
2	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
4	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0
5	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
6	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0	0.0	1.0	1.0
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0

Tabela 2.13 Preferências Probabilísticas Precisas para o DM S no Modelo do Conflito de Gisborne

S	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	1.0	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	1.0	1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
6	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	1.0	1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	1.0
8	1.0	1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0

Tabela 2.14 Preferências Probabilísticas Precisas para o DM GP no Modelo do Conflito de Gisborne

GP	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0	p	$1-p$	$1-p$	1.0	p	$1-p$	$1-p$
2	$1-p$	0.0	$1-p$	$1-p$	$1-p$	1.0	$1-p$	$1-p$
3	p	p	0.0	p	p	p	1.0	p
4	p	p	$1-p$	0.0	p	p	$1-p$	1.0
5	0.0	p	$1-p$	$1-p$	0.0	p	$1-p$	$1-p$
6	$1-p$	0.0	$1-p$	$1-p$	$1-p$	0.0	$1-p$	$1-p$
7	p	p	0.0	p	p	p	0.0	p
8	p	p	$1-p$	0.0	p	p	$1-p$	0.0

tabelas, se na linha correspondente ao estado s , nós usamos a notação $t(\gamma < q)$, significa que o conjunto descrito contém o estado t se a condição $\gamma < q$ é satisfeita.

Tabela 2.15 Estados Atingíveis

Estado	$R_{GF}(s)$	$R_{GP}(s)$	$R_S(s)$	$R_{\{GF,GP\}}(s)$	$R_{\{GF,S\}}(s)$	$R_{\{GP,S\}}(s)$	$R_{\{GF,GP,S\}}(s)$
1	1 e 2	1 e 3	1 e 5	1, 2, 3 e 4	1, 2, 5 e 6	1, 3, 5 e 7	Todos os estados
2	2 e 1	2 e 4	2 e 6	2, 1, 3 e 4	2, 1, 5 e 6	2, 4, 6 e 8	Todos os estados
3	3 e 4	3 e 1	3 e 7	3, 1, 2 e 4	3, 4, 7 e 8	3, 1, 5 e 7	Todos os estados
4	4 e 3	4 e 2	4 e 8	4, 1, 2 e 3	4, 3, 7 e 8	4, 2, 6 e 8	Todos os estados
5	5 e 6	5 e 7	5 e 1	5, 6, 7 e 8	5, 1, 2, e 6	5, 1, 3 e 7	Todos os estados
6	6 e 5	6 e 8	6 e 2	6, 5, 7 e 8	6, 1, 2, e 5	6, 2, 4 e 8	Todos os estados
7	7 e 8	7 e 5	7 e 3	7, 5, 6 e 8	7, 3, 4 e 8	7, 1, 3 e 5	Todos os estados
8	8 e 7	8 e 6	8 e 4	8, 5, 6 e 7	8, 3, 4 e 7	8, 2, 4 e 6	Todos os estados

Tabela 2.16 Conjuntos $R_H^{+\gamma}$

Estado	$R_{GF}^{+\gamma}(s)$	$R_{GP}^{+\gamma}(s)$	$R_S^{+\gamma}(s)$	$R_{\{GF,GP\}}^{+\gamma}(s)$	$R_{\{GF,S\}}^{+\gamma}(s)$	$R_{\{GP,S\}}^{+\gamma}(s)$
1	$2(\gamma < 1)$	$3(\gamma < p)$	$5(\gamma < 1)$	$2(\gamma < 1), 3e4(\gamma < p)$	$2, 5e6(\gamma < 1)$	$3e7(\gamma < p), 5(\gamma < 1)$ $1(\gamma < \min\{p, 1-p\})$
2	\emptyset	$4(\gamma < p)$	$6(\gamma < 1)$	$4(\gamma < p)$	$6(\gamma < 1)$	$6(\gamma < 1), 4e8(\gamma < p)$ $2(\gamma < \min\{p, 1-p\})$
3	$4(\gamma < 1)$	$1(\gamma < 1-p)$	\emptyset	$4(\gamma < 1),$ $1e2(\gamma < 1-p)$	$4(\gamma < 1)$	$1e5(\gamma < 1-p)$ $3e7(\gamma < \min\{p, 1-p\})$
4	\emptyset	$2(\gamma < 1-p)$	\emptyset	$2(\gamma < 1-p)$	\emptyset	$2e6(\gamma < 1-p)$ $4e8(\gamma < \min\{p, 1-p\})$
5	$6(\gamma < 1)$	$7(\gamma < p)$	\emptyset	$6(\gamma < 1),$ $7e8(\gamma < p)$	$6(\gamma < 1)$	$3e7(\gamma < p)$ $1e5(\gamma < \min\{p, 1-p\})$
6	\emptyset	$8(\gamma < p)$	\emptyset	$8(\gamma < p)$	\emptyset	$4e8(\gamma < p), 2e6(\gamma < \min\{p, 1-p\})$ $3((\gamma < 1)), 1e5(\gamma < 1-p)$
7	$8(\gamma < 1)$	$5(\gamma < 1-p)$	$3(\gamma < 1)$	$8(\gamma < 1),$ $5e6(\gamma < 1-p)$	$3, 4e8(\gamma < 1)$	$7(\gamma < \min\{p, 1-p\})$ $4(\gamma < 1), 2e6(\gamma < 1-p)$ $8(\gamma < \min\{p, 1-p\})$
8	\emptyset	$6(\gamma < 1-p)$	$4(\gamma < 1)$	$6(\gamma < 1-p)$	$4(\gamma < 1)$	$8(\gamma < \min\{p, 1-p\})$

Tabela 2.17 Conjuntos $\varphi_H^{+\gamma}$

Estado	$\varphi_{GF}^{+\gamma}(s)$	$\varphi_{GP}^{+\gamma}(s)$	$\varphi_S^{+\gamma}(s)$	$\varphi_{\{GF,GP\}}^{+\gamma}(s)$	$\varphi_{\{GF,S\}}^{+\gamma}(s)$	$\varphi_{\{GF,S\}}^{+\gamma}(s)$
1	2, 4, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p$) 2 e 6 ($\gamma < 1 - p$)	3, 4, 5, 6, 7, 8 ($\gamma < 1$)	2 e 6 ($\gamma < 1 - p$) 4 e 8 ($\gamma < p$)	4, 6, 8 ($\gamma < 1$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p$) 6 ($\gamma < 1 - p$)
2	\emptyset	1, 3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p$)	1, 3, 4, 5, 6 7 e 8 ($\gamma < 1$)	\emptyset	\emptyset	1, 3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p$)
3	1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p$)	\emptyset	1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p$)	\emptyset	\emptyset
4	2 e 6 ($\gamma < 1$)	1, 2, 5 e 6 ($\gamma < 1 - p$), 3 e 7 ($\gamma < p$)	3 ($\gamma < 1$)	2 e 6 ($\gamma < 1 - p$)	\emptyset	3 ($\gamma < p$)
5	1, 2, 4, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	1 ($\gamma < 1$), 2, 6 ($\gamma < 1 - p$) 3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < 1$)	1 ($\gamma < 1$), 4 e 8 ($\gamma < p$) 2 e 6 ($\gamma < 1 - p$)	4 e 8 ($\gamma < 1$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p$)
6	2 ($\gamma < 1$)	2 ($\gamma < 1$) 1, 3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p$)	3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < 1$)	2 ($\gamma < 1$)	\emptyset	3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p$)
7	1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	3 ($\gamma < 1$) 1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p$)	3 e 4 ($\gamma < 1$)	3 ($\gamma < 1$) 1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p$)	3 e 4 ($\gamma < 1$)	3 ($\gamma < 1$) 4 ($\gamma < 1 - p$)
8	2, 4 e 6 ($\gamma < 1$)	4 ($\gamma < 1$), 3 e 7 ($\gamma < p$) 1, 2, 5 e 6 ($\gamma < 1 - p$)	3, 4 e 7 ($\gamma < 1$)	4 ($\gamma < 1$), 2 e 6 ($\gamma < 1 - p$)	4 ($\gamma < 1$)	4 ($\gamma < 1$) 3 e 7 ($\gamma < p$)

Tabela 2.18 γ -Melhoramento Coalizional

	$R_{\{GF,GP\}}^{++\gamma}$	$R_{\{S,GP\}}^{++\gamma}$	$R_{\{GF,S\}}^{++\gamma}$	$R_N^{++\gamma}$
1	$2(\gamma < 1 - p)$ e $4(\gamma < p)$	3 e $7(\gamma < p)$	$6(\gamma < 1)$	$4, 8(\gamma < p)$ e $6(\gamma < 1 - p)$
2	\emptyset	4 e $8(\gamma < p)$	\emptyset	\emptyset
3	$1, 2$ e $4(\gamma < 1 - p)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
4	$2(\gamma < 1 - p)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
5	$6(\gamma < 1 - p)$ e $8(\gamma < p)$	3 e $7(\gamma < p)$	\emptyset	$4, 8(\gamma < p)$
6	\emptyset	4 e $8(\gamma < p)$	\emptyset	\emptyset
7	$5, 6$ e $8(\gamma < 1 - p)$	$3(\gamma < 1)$	3 e $4(\gamma < 1)$	$3(\gamma < 1)$ e $4(\gamma < 1 - p)$
8	$6(\gamma < 1 - p)$	$4(\gamma < 1)$	$4(\gamma < 1)$	$4(\gamma < 1)$

As Tabelas 2.19,2.20,2.21 e 2.22 mostram para quais valores de parâmetros cada um dos estados satisfaz as quatro definições de estabilidade. De acordo com estas tabelas, o estado 4 satisfaz Nash estabilidade para uma região maior de valores de α se $p > 1/2$, enquanto se $p < 1/2$, então o estado 6 é o único com tal propriedade. Todos os outros estados são apenas 0-Nash estável. Para GMR e SMR estabilidades, os estado 4 e 8 satisfazem as definições de estabilidade para uma maior região de valores de (α, β) se $p > 1/2$, enquanto se $p < 1/2$, então o estado 6 é o único com tal propriedade. No que concerne à SEQ estabilidade, o estado 4 satisfaz a definição de estabilidade para uma maior região de valores de (α, β, γ) se $p > 1/2$, enquanto se $p < 1/2$, então estado 6 é o único com tal propriedade.

As Tabelas 2.23,2.24,2.25 e 2.26 mostram para quais valores de parâmetros cada um dos estados satisfazem as quatro definições de estabilidade Coalizional para Coalizões. As Tabelas 2.27,2.28,2.29 e 2.30 mostram para quais valores de parâmetros cada um dos estados satisfaz as quatro definições de estabilidade Coalizional para DMs. De acordo

com estas tabelas, os estado 3 e 4 satisfazem Nash estabilidade Coalizional para uma maior região de valores de α se $p > 1/2$, enquanto que se $p < 1/2$, então os estados 2 e 6 são os que têm tal propriedade. Para GMR e SMR estabilidades coalizionais, os estados 3 e 4 satisfazem as definições de estabilidade para uma maior região de valores de (α, β) se $p > 1/2$, enquanto que se $p < 1/2$, então os estado 2 e 6 são os que têm tal propriedade. No que concerne à SEQ estabilidade coalizional, o estado 3 satisfaz a definição de estabilidade para uma maior região de valores (α, β, γ) se $p > 1/2$, enquanto que se $p < 1/2$, então os estados 2 e 6 são os que têm tal propriedade.

Tabela 2.19 α -Nash estabilidade

Estado	Para GF	Para S	Para GP	Estável
1	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha = 0$
2	$\forall \alpha$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha = 0$
3	$\alpha = 0$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p$	$\alpha = 0$
4	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p$	$\alpha \leq p$
5	$\alpha = 0$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha = 0$
6	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq 1 - p$
7	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq p$	$\alpha = 0$
8	$\forall \alpha$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq p$	$\alpha = 0$

Tabela 2.20 (α, β) -GMR estabilidade

Estado	Para GF	Para S	Para GP	Estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p$	$\alpha = 0, \forall \beta$ $\alpha > 0, \beta = 0$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
3	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
4	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$
5	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta \leq 1$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
8	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$

Tabela 2.21 (α, β) -SMR Estabilidade

Estado	Para GF	Para S	Para GP	Estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
3	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
4	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$
5	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$

Tabela 2.22 (α, β, γ) -SEQ Estabilidade

Estado	Para GF	Para S	Para GP	Estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou
	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p, \gamma < 1$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$
2	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < p$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq 1 - p, \beta = 0, \gamma < p$
	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou
3	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p$	$\alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p$
	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou
4	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou
	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p, \gamma < 1$	$\alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$
5	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$
	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < p$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < p$	$\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p, \gamma < 1$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < p$
6	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou
			$\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p, \gamma < 1$	$\alpha > 1 - p, \beta \leq 1 - p, \gamma < 1$
7	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou
	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1$	$\alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$	$\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$
8	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou
		$\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1 - p$		$\alpha \leq p, \forall \beta, \gamma < 1 - p$

Tabela 2.23 α -Nash Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	para $\{GF, GP\}$	Para $\{GF, S\}$	Para $\{GP, S\}$	Para N
1	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}$
2	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p$	$\forall \alpha$
3	$\alpha \leq p$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$
4	$\alpha \leq p$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq 1 - p$
6	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p$	$\forall \alpha$
7	$\alpha \leq p$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$
8	$\alpha \leq p$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$

Tabela 2.24 (α, β) -GMR Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	Para $\{GF, GP\}$	Para $\{GF, S\}$	Para $\{GP, S\}$	Para N
1	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta$ ou $1-p \geq \alpha > p$ e $\beta \leq p$ ou $p \geq \alpha > 1-p$ e $\beta \leq 1-p$ ou $\alpha > \max\{p, 1-p\}$ e $\beta \leq \min\{p, 1-p\}$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ $\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\forall \alpha, \forall \beta$
3	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
4	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta$ ou $1-p \geq \alpha > p, \beta \leq p$ ou $p \geq \alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$ ou $\alpha > \max\{p, 1-p\}, \beta \leq \min\{p, 1-p\}$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou $\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\forall \alpha, \forall \beta$
7	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta \leq p$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou $\alpha > p, \beta \leq p$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta \leq 1-p$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 2.25 (α, β) -SMR Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	Para $\{GF, GP\}$	Para $\{GF, S\}$	Para $\{GP, S\}$	Para N
1	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
3	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
4	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
7	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha \leq 1 - p$ e $\beta \leq 1 - p$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 2.26 (α, β) -SEQ Estabilidade Coalizional para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	Para $\{GF, GP\}$	Para $\{GF, S\}$	Para $\{GP, S\}$	Para N
1	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}$, $\forall \beta, \forall \gamma$ ou $1-p \geq \alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0$, $\beta = 0, \gamma < p$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p, \gamma < 1$	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}$ $\forall \beta, \forall \gamma$
2	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
3	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
4	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p, \gamma < 1$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta, \forall \gamma$
6	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
7	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1-p$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta \leq p, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$
8	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1-p$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$

Tabela 2.27 α -Nash Estabilidade Coalizional para DMs

Estado	GF	S	GP	Estável
1	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}$	$\alpha = 0$
2	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq 1 - p$
3	$\alpha \leq p$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p$	$\alpha \leq p$
4	$\alpha \leq p$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p$	$\alpha \leq p$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}$
6	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq 1 - p$	$\alpha \leq 1 - p$
7	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$
8	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$

Tabela 2.28 (α, β) -GMR Estabilidade Coalizional para DMs

Estado	GF	S	GP	Estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou
	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \beta = 0$	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \beta = 0$		$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \beta = 0$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou
		$\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$
3	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou
	$\alpha > p, \beta \leq p$		$\alpha > p, \beta \leq p$	$\alpha > p, \beta \leq p$
4	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq p, \forall \beta$ ou
	$\alpha > p, \beta \leq p$		$\alpha > p, \beta \leq p$	$\alpha > p, \beta \leq p$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq \min\{p, 1-p\}, \forall \beta$ ou
	$p < \alpha \leq 1-p, \beta \leq p$		$p < \alpha \leq 1-p, \beta \leq p$	$p < \alpha \leq 1-p, \beta \leq p$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq 1-p, \forall \beta$ ou
		$\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$	$\alpha > 1-p, \beta \leq 1-p$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 2.29 (α, β) -SMR Estabilidade Coalizional para DMs

Estado	GF	S	GP	Estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$
3	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$
4	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$	$\alpha \leq p, \forall \beta$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 2.30 (α, β, γ) -SEQ Estabilidade Coalizional para DMs

Estado	GF	S	GP	Estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \beta = 0, \gamma < p$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \beta = 0, \gamma < p$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \beta = 0, \gamma < p$
2	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$
3	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$
4	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$	$\alpha \leq p, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p, \beta \leq p, \gamma < 1$
5	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq \min\{p, 1 - p\}, \forall \beta, \forall \gamma$
6	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p, \forall \beta, \forall \gamma$
7	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$
8	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$

2.6 Discussão

Nesta seção nós discutimos acerca da relação entre o presente modelo e o GMCR com Preferências *Fuzzy*. Nós também discutimos como as definições de estabilidade propostas poderiam ser usadas para comparar a robustez dos equilíbrios do conflito.

2.6.1 Comparação com o GMCR com Preferências *Fuzzy*

Al-Mutairi et al. [23] propuseram o uso de preferências *fuzzy* no GMCR para indicar o grau de incerteza que um DM pode ter quando comparando dois estados. Formalmente, uma preferência *fuzzy* sobre o conjunto de estados S é a relação *fuzzy* em S , representada pela matriz $\mathcal{R} = (r_{ij})_{m \times m}$ com função pertinência $\mu_{\mathcal{R}} : S \times S \rightarrow [0, 1]$, onde $\mu_{\mathcal{R}}(s_i, s_j) = r_{ij}$ indica o grau de preferência pelo estado s_i a s_j e satisfaz $r_{ij} + r_{ji} = 1$. Neste modelo, a fim de definir quais são os melhoramentos unilaterais, os autores definiram um limite *fuzzy* de satisfação para cada DM, γ_k , tal que s_i é um *fuzzy* melhoramento unilateral sobre s_j para DM k , se $r_{ij} - r_{ji} > \gamma_k$.

Embora preferências *fuzzy* e preferências probabilísticas precisas sejam expressas por um número entre 0 e 1, suas interpretações são diferentes e levam a diferentes propriedades e diferentes definições de estabilidade. Por exemplo, no modelo *fuzzy*, indiferença entre dois estados s_i e s_j por um DM é modelada considerando $r_{ij} = 0.5$, enquanto no modelo probabilístico, se o DM k é indiferente entre estes estado, segue que $P_k(s_i, s_j) = 0$ e $P_k(s_j, s_i) = 0$, desde que $P_k(s_i, s_j)$ representa a probabilidade que DM k *estritamente* prefere s_i a s_j . Então, nós temos $r_{i,i} = 0.5$ e $P_k(s_i, s_i) = 0$.

Outra diferença é que no modelo *fuzzy*, cada DM tem possíveis diferentes limites *fuzzy* de satisfação, enquanto que no modelo probabilístico, para um estado s_i ser considerado

um γ -melhoramento sobre s_j , o limite γ é o mesmo para todos os DMs no conflito, uma vez que ele é relacionado a chance do estado ser escolhido quando qualquer DM é chamado a escolher entre um de dois estados.

2.6.2 Robustez

Um problema interessante é como comparar a robustez de algum equilíbrio, quando mais de um estado satisfaz uma dada definição de estabilidade. Recentemente, Matbouli et al. [26] propuseram uma medida de robustez do equilíbrio no GMCR a fim de definir quais equilíbrios são mais prováveis de serem estáveis.

Desde que as definições de estabilidade apresentadas para o GMCR com preferências probabilísticas são parametrizadas, o estado satisfaz uma dada definição de estabilidade para alguns valores de parâmetros e não para outros. Portanto, uma forma natural de comparar a robustez do equilíbrio é comparar as regiões dos parâmetros para os quais um particular estado satisfaz uma dada definição de estabilidade, como segue:

Definição 2.6.1: Um estado s_i é um equilíbrio mais robusto que um estado s_j para uma dada definição de estabilidade, se o conjunto de parâmetros para o qual s_i é estável contém o correspondente conjunto do estado s_j .

Por exemplo, na aplicação analisada na Seção 2.5, (P, S) é α -Nash estável para $\alpha \leq 0.3$ e (P, U) é α -Nash estável para $\alpha \leq 0.7$. Então, a probabilidade de um DM no conflito se mover de (P, S) para outro estado, desviando do equilíbrio, é no máximo 0.7, enquanto é no máximo 0.3 a probabilidade de um DM se mover de (P, U) . Então, neste sentido, (P, U) é o mais robusto equilíbrio de Nash.

Como outro exemplo, note que, na aplicação, (P, S) é (α, β) -GMR estável para $\alpha \leq 0.3$ e $\beta \leq 1$ ou $\alpha > 0.3$ e $\beta \leq 0.3$, enquanto o estado (P, U) é (α, β) -GMR estável para

$\alpha \leq 0.7$ e $\beta \leq 1$ ou $\alpha > 0.7$ e $\beta \leq 0.7$. Note que (P, U) satisfaz esta definição de estabilidade para mais pares de (α, β) que (P, S) . Então, para os estados que DMs podem atingir de (P, U) com baixa probabilidade (< 0.7), um movimento de resposta é possível levando a outro estado cuja probabilidade de ser preferido a (P, U) é menor que a probabilidade correspondente quando consideramos os movimentos de resposta de (P, S) . Então, neste sentido, (P, U) é o equilíbrio Metaracional mais robusto.

Conclusões similares podem ser obtidas para as outras definições de estabilidade. Note que esta definição é um critério que pode ser usado quando uma região de parâmetros contém a outra. Então, na aplicação apresentada, enquanto o estado (P, U) é o mais robusto equilíbrio de acordo com α -Nash estabilidade, (α, β) -GMR estabilidade e (α, β) -SMR estabilidade, para a definição (α, β, γ) -Sequencial estabilidade, não é possível comparar a robustez de todos os estados, porque algumas regiões não contêm outras.

2.7 Conclusão

Os conceitos de soluções do modelo GMCR foram estendidos para incluir a informação extra de preferências probabilísticas precisas introduzidas no modelo.

Neste trabalho, nós apresentamos alguns resultados sobre as relações entre as definições de estabilidade, mostrando que essencialmente as mesmas implicações válidas no GMCR original continuam válidas no presente modelo. Outros resultados foram adicionados para mostrar implicações que ocorrem quando consideramos diferentes parâmetros para o mesmo conceito de estabilidade.

Duas aplicações do modelo em conflitos foram feitas para ilustrar como determinar os parâmetros para os quais os estados são estáveis de acordo com as definições de estabili-

dade propostas. Estes exemplos também mostram a utilidade do GMCR com preferências probabilísticas precisas em modelar um número maior de conflitos reais. Também mostramos a utilidade do modelo e das definições aqui apresentadas para comparar quais dos equilíbrios são mais robustos.

Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos com Preferências Probabilísticas Imprecisas

3.1 Introdução

No Capítulo 2 nós vimos que um aspecto fundamental considerado na construção do Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR) é a preferência do tomador de decisão sobre os possíveis estados em um conflito. Vimos também que a preferência pode ser representada de maneiras diferentes da preferência estrita, \succ , usual em modelos de jogos ou conflitos. Na Seção 2.2, mostramos na revisão de literatura alguns trabalhos que buscam captar aspectos das preferências de indivíduos que não são captados pelo modelo de preferência usual, \succ , como, por exemplo, a incerteza. Na Seção 2.3 mostramos como o GMCR pode ser modificado para permitir aos DMs terem preferências probabilísticas. Chamamos tais preferências probabilísticas de precisas, pois podem ser expressas através de uma probabilidade precisa de forma que dados dois estados a e b , é possível ao DM identificar $P(a, b)$, isto é, a probabilidade com que prefere a a b . No Capítulo 2 usamos as preferências probabilísticas precisas para uma generalização do GMCR. É assumido que os dados sobre as preferências exibem algum tipo de regularidade que tornam tais preferências possíveis de serem modeladas por uma distribuição precisa de probabilidade. Tal probabilidade pode ser obtida através de uma distribuição de dados sobre escolhas passadas dos DMs, por exemplo. Porém, em algumas situações, pode não haver informação suficiente para determinar uma única probabilidade que expresse essa preferência, isto é,

as preferências probabilísticas podem ser imprecisas.

Nós apresentamos neste capítulo uma generalização do GMCR permitindo aos DMs expressar suas preferências usando probabilidades inferior e superior. O capítulo é organizado como segue: na Seção 3.2, nós faremos um breve resumo sobre probabilidades imprecisas, mais especificamente, sobre probabilidades inferior e superior; na Seção 3.3, nós propomos o GMCR com preferências probabilísticas imprecisas; na Seção 3.4, nós generalizamos as quatro definições de estabilidade comumente usadas no GMCR para o modelo proposto considerando dois tipos de comportamento por parte dos DMs: o arriscado e o cauteloso. Começamos as definições de estabilidade para o caso com 2-DMs, depois apresentamos o caso para 3-DMs e por fim, apresentamos a análise de estabilidade coalizional. Na Seção 3.5, mostramos algumas aplicações do modelo proposto e na Seção 3.6, nós apresentamos nossas conclusões sobre este capítulo.

3.2 Revisão de literatura

Situações nas quais os indivíduos precisam escolher algo ou tomar uma decisão, têm sido modeladas considerando que eles podem ter incerteza sobre os cenários disponíveis a eles e sobre os resultados de suas ações. No nosso trabalho, tanto no capítulo anterior quanto neste, as incertezas não são sobre os cenários ou as consequências de suas ações, mas sobre suas próprias preferências.

Na área de modelagem a respeito de crenças, a teoria mais desenvolvida é a Bayesiana. Nesta teoria, crenças são modeladas por uma probabilidade não condicional $P(A)$ ou por uma probabilidade condicional $P(A|B)$ que assume valores entre zero e um. A princípio, a teoria bayesiana pode ser aplicada em qualquer problema envolvendo incerteza, mas na

prática é difícil satisfazer todas as condições de coerência para determinar probabilidades precisas [33]. Em situações do dia a dia, é comum que as pessoas expressem suas preferências envolvendo probabilidade até mesmo por avaliações linguísticas bastante vagas, como em “A probabilidade de que o sol não nasça amanhã é baixíssima, quase nenhuma” ou em “esta válvula é altamente não-confiável” ([34] e [35]).

Fine [13] vê a teoria bayesiana como tendo papel importante na questão de modelar crenças individuais, mas questiona a necessidade de uma medida de probabilidade precisa para representar situações reais e argumenta que a teoria de probabilidade inferior e superior pode funcionar como alternativa à modelagem de crenças dos indivíduos sem requerer alto grau de precisão.

A teoria da probabilidade inferior e superior, ainda segundo Fine [13], é centrada no par de funções \underline{P} e \bar{P} , tomando valores em um intervalo unitário $[0, 1]$, onde \underline{P} representa a probabilidade inferior e \bar{P} a probabilidade superior. A abordagem é semelhante à de medida de probabilidade, considerando o espaço amostral Ω e uma álgebra de eventos \mathcal{A} do espaço Ω . \mathcal{A} é o domínio das funções \bar{P} e \underline{P} e estas devem satisfazer os seguintes axiomas:

1. $\underline{P}(A) + \bar{P}(A^c) = 1$;
2. $\underline{P}(\Omega) = 1$;
3. $\underline{P}(A) \geq 0$;
4. Se A e B são eventos disjuntos, então $\underline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$ e $\bar{P}(A) + \bar{P}(B) \geq \bar{P}(A \cup B)$.

Vimos no capítulo anterior que Modelos de Probabilidade têm uma longa história e usamos o modelo probabilístico de Luce [12] para desenvolver o GMCR com preferências probabilísticas precisas. No modelo probabilístico de Luce, é assumido que as escolhas

dos DMs têm algum tipo de regularidade que torna tal preferência possível de ser modelada por uma distribuição de probabilidade precisa. No entanto, ao modelar crenças, nem sempre é possível identificar precisamente tais preferências probabilísticas. Aqui, nós propomos relaxar a restrição de precisão e apresentamos um novo modelo de preferências baseado em probabilidades inferior e superior. Tais probabilidades inferior e superior devem satisfazer:

1. $\bar{P}(a, b) \geq \underline{P}(a, b) \geq 0$ para cada $a, b \in S$,
2. $\underline{P}(a, b) + \bar{P}(b, a) \leq 1$ para cada $a, b \in S$.

Nosso objetivo é definir uma extensão do GMCR que permite aos DMs terem preferências probabilísticas imprecisas (inferior e superior) sobre os estados. Tais preferências podem aparecer ao modelar o comportamento de um dado DM que vacila de maneira probabilística quando tendo que escolher entre dois estados ou podem ser usadas para representar, como já dito no capítulo anterior, situações nas quais algum dos envolvidos no conflito tenha representantes dos quais será escolhido um que efetivamente o representará e estes têm possíveis diferentes rankings de preferências sobre os estados. Por exemplo, um país que pode ser representado por diferentes diplomatas e cada um deles ter possivelmente diferentes rankings sobre os estados possíveis do conflito. Na próxima seção, nós apresentamos formalmente o GMCR com preferências probabilísticas imprecisas.

3.3 GMCR com Preferências Probabilísticas Imprecisas

GMCR com preferências probabilísticas imprecisas envolvem os mesmos componentes do GMCR original e GMCR com preferências probabilísticas precisas, com a exceção

de que agora, as preferências dos DMs podem ser expressas por um par de probabilidades inferior e superior representadas por \bar{P} e \underline{P} , respectivamente.

No GMCR com preferências probabilísticas precisas, um DM pode indicar com qual probabilidade precisa $P(a, b)$ ele prefere um estado a a um estado b para cada par de estados no conflito. No modelo apresentado aqui neste capítulo nós relaxamos esta restrição de precisão, dado que em problemas práticos pode ser difícil ter informações precisas sobre as preferências. Considere, por exemplo, uma situação na qual se elegerá representantes para representar um DM e que existam várias pesquisas apontando resultados diferentes sobre qual candidato se elegerá. Desta forma, não é possível definir uma probabilidade precisa acerca do vencedor. Se seus representantes têm diferentes preferências, então pode não ser possível definir uma preferência probabilística precisa para o DM sobre os estados do conflito antes da eleição.

Aqui nós consideraremos apenas as situações nas quais é possível determinar um par de probabilidades inferior e superior que representa a preferência imprecisa de cada DM quando tem de escolher entre dois estados quaisquer do conflito.

No GMCR original, a preferência é representada sem considerar incertezas como em um modelo usual de teoria dos jogos. No GMCR com preferências probabilísticas precisas apresentado no capítulo anterior, permite-se que a preferência do DM não seja determinística, isto é, o DM i pode expressar sua preferência por um estado a a um estado b , através da probabilidade $P_i(a, b)$ que indica a chance do DM i preferir a a b , para cada par de estados a e b no conflito. Agora, nós consideraremos que cada DM i possa expressar sua incerteza sobre sua preferência acerca dos estados a e b usando probabilidades inferior e superior representadas por $\underline{P}_i(a, b)$ e $\bar{P}_i(a, b)$ satisfazendo os axiomas apresentados na Seção 3.2. Então, dado que o conflito esteja em um determinado momento no estado a , a preferência de i por a em relação a um estado qualquer $b \in S$ é determinada agora por

um par de probabilidades inferior e superior, respectivamente representadas por $\underline{P}_i(a, b)$ e $\bar{P}_i(a, b)$ e é dita preferência probabilística imprecisa.

Na próxima Seção, nós apresentamos as definições de estabilidade considerando então as preferências probabilísticas imprecisas.

3.4 Análise de Estabilidade para GMCR com Preferências Probabilísticas Imprecisas

Nesta seção, apresentaremos a análise de estabilidade primeiramente para os conflitos com 2 DMs, a seguir nós apresentamos alguns resultados sobre as relações entre estas definições. Depois, nós apresentamos as definições para o GMCR com mais de dois DMs e finalmente faremos a análise de estabilidade coalizional.

3.4.1 Definições de Estabilidade para o GMCR com 2 DMs

Como visto no capítulo anterior, a análise de estabilidade apresentada é bastante importante pois pode apontar possíveis soluções para o conflito. Aqui, nós modificamos as quatro definições de estabilidade padrão do GMCR: Nash estabilidade [16, 17], Metaracionalidade Geral (GMR) [19], Metaracionalidade Simétrica (SMR) [19] e Estabilidade Sequencial (SEQ) [2]. Para isso, as definições de estabilidade propostas nesta seção consideram dois perfis distintos de DMs: o *cauteloso* e o *arriscado*. O DM cauteloso é aquele que age considerando sempre a preferência probabilística inferior quando analisando sua própria preferência ao comparar dois estados e considera que os demais agem considerando sempre a preferência probabilística superior. Por sua vez, o DM arriscado é aquele

que age considerando sempre a preferência probabilística superior ao analisar sua própria preferência sobre os estados e considera ao analisar a preferência dos outros a preferência probabilística inferior. Por exemplo, suponha que um DM sabe que suas preferências probabilísticas inferior e superior sobre sorvete de chocolate a sorvete de morango são, respectivamente, 0 e 0.6. Como ele sabe que existe a possibilidade de preferência ser 0, ou seja ele sabe que existe a possibilidade dele não preferir chocolate a morango, por cautela, ele prefere considerar esta menor probabilidade. Um DM cauteloso possui aversão à ambiguidade. Já o DM arriscado considera que embora exista a chance dele não preferir o chocolate a morango (menor probabilidade é zero) existe a possibilidade de que ele prefira sorvete de chocolate a de morango com probabilidade 0.6 e é esta a probabilidade que ele escolhe considerar.

Assim como no caso do GMCR com preferências probabilísticas precisas, para as definições de estabilidade consideraremos parâmetros α , β e γ pertencentes ao intervalo $[0, 1]$. Para definir as noções de estabilidade nos dois casos, arriscado e cauteloso, nós precisamos definir antes duas versões de melhoramento para um DM: uma versão para o DM cauteloso e outra para o DM arriscado. O conjunto de melhoramentos para um DM cauteloso é definido como $RL_i^{+\gamma}(s) = \{t \in R_i(s) : \underline{P}(t, s) > \gamma\}$ e o conjunto melhoramento para o DM arriscado é dado por $RU_i^{+\gamma}(s) = \{t \in R_i(s) : \bar{P}(t, s) > \gamma\}$. Definimos também os conjuntos $\varphi L_i^{+\alpha}(s) = \{t \in S : \underline{P}(t, s) > \alpha\}$ e $\varphi U_i^{+\alpha}(s) = \{t \in S : \bar{P}(t, s) > \alpha\}$ de estados (não necessariamente atingíveis) que são preferidos a s por um DM i cauteloso e um arriscado, respectivamente. A partir disso, somos capazes de agora apresentar as diferentes definições de estabilidades considerando: o comportamento cauteloso e o comportamento arriscado. Seguem as definições.

3.4.1.1 α -Nash Estabilidade Cautelosa

Definição 3.4.1: Um estado s é α -Nash cauteloso estável para o DM i se $RL_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

Então, um estado s é α -Nash cauteloso estável para DM i se dentre todos os estados que i pode atingir quando está em s não existe nenhum estado tal que ele prefira a s com probabilidade inferior maior que $1 - \alpha$. Por exemplo, um estado s que é 0.9-Nash estável cauteloso para DM i é tal que dentre todos os estados que i pode atingir de s não existe nenhum tal que i prefira a s com uma probabilidade inferior maior que 0.10. Como outro exemplo, um estado é 1-Nash estável cauteloso para o DM i se dentre todos os estados que i pode atingir de s não existe nenhum que ele prefira a s com probabilidade inferior positiva.

3.4.1.2 α -Nash Estabilidade Arriscada

Definição 3.4.2: Um estado s é α -Nash arriscado estável para o DM i se $RU_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

Então, um estado s é α -Nash arriscado estável para DM i se dentre todos os estados que i pode atingir quando está em s não existe estado tal que ele prefira a s com uma probabilidade superior maior que $1 - \alpha$. Por exemplo, um estado s que é 0.9-Nash estável arriscado para DM i é tal que dentre todos os estados que i pode atingir de s não existe nenhum tal que i prefira a s com uma probabilidade superior maior que 0.10. Como outro exemplo, um estado é 1-Nash estável arriscado para o DM i se dentre todos os estados que i pode atingir de s não existe nenhum que ele prefira a s com probabilidade superior positiva.

Note que as definições de α -Nash Estabilidade Cautelosa e Arriscada são similares

às definições de α -Nash Estabilidade vista no capítulo anterior, considerando ao invés da preferência probabilística precisa, a preferência probabilística inferior e superior, respectivamente. Do mesmo modo, as definições de (α, β) -Metaracionalidade e (α, β) -Metaracionalidade Simétrica tanto cautelosa quanto arriscada são similares às definições apresentadas no capítulo anterior e suas interpretações também. A seguir, apresentamos as definições sem repetir as interpretações.

3.4.1.3 (α, β) -Metaracionalidade Cautelosa

Definição 3.4.3: Um estado s é (α, β) -Metaracional Cauteloso para o DM i se para todo $s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

3.4.1.4 (α, β) -Metaracionalidade Arriscada

Definição 3.4.4: Um estado s é (α, β) -Metaracional Arriscado para o DM i se para todo $s_1 \in RU_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

3.4.1.5 (α, β) -Metaracionalidade Simétrica Cautelosa

Definição 3.4.5.: Um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico Cauteloso para o DM i se para todo $s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi L_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

3.4.1.6 (α, β) -Metaracionalidade Simétrica Arriscada

Definição 3.4.6.: Um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico Arriscado para o DM i se para todo $s_1 \in RU_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap$

$$\varphi U_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset.$$

3.4.1.7 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Cautelosa

No caso da estabilidade sequencial convém notar que um DM cauteloso possui aversão à ambiguidade. Ele considera como sua preferência probabilística inferior para se mover de um estado a outro. Contudo, quando ele necessita analisar os movimentos de respostas de seu adversário, ele considera o pior cenário: o outro DM ser do tipo arriscado. Isto justifica a seguinte definição de (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Cautelosa.

Definição 3.4.7.: Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Cauteloso Estável se para todo $s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in RU_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Cauteloso Estável para o DM i se para cada estado s_1 que i pode atingir de s tal que ele prefere s_1 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \alpha$, então existe um movimento de resposta para um estado s_2 que o DM j pode fazer tal que j prefere s_2 a s_1 com probabilidade superior maior que γ e i não prefere s_2 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \beta$. Por exemplo, um estado s que é $(0.9, 0.8, 0.7)$ -Sequencialmente Cauteloso Estável para DM i é tal que para cada estado s_1 que i pode atingir de s tal que ele prefira s_1 a s com probabilidade inferior maior que 0.1, existe um movimento de resposta para o estado s_2 que o DM j pode fazer tal que j prefere s_2 a s_1 com probabilidade superior maior que 0.7 e i não prefere s_2 a s com probabilidade inferior maior que 0.2.

3.4.1.8 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Arriscada

O DM arriscado é menos cuidadoso (ou mais otimista). Ele considera sempre sua preferência probabilística superior de um estado a outro, isto é, age com otimismo em

relação à sua própria preferência. Além disso, quando ele analisa os movimentos de contra-resposta que o outro pode lhe impor, ele continua agindo com otimismo considerando que o outro DM é do tipo cauteloso. Isto justifica a seguinte definição de (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Arriscada.

Definição 3.4.8.: Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Arriscado Estável se para todo $s_1 \in RU_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in RL_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\phi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Arriscado Estável para o DM i se para cada estado s_1 que i pode atingir de s tal que ele prefere s_1 a s com probabilidade superior maior que $1 - \alpha$, então existe um movimento de resposta para um estado s_2 que o DM j pode fazer tal que j prefere s_2 a s_1 com probabilidade inferior maior que γ e i não prefere s_2 a s com probabilidade superior maior que $1 - \beta$. Por exemplo, um estado s que é $(0.9, 0.8, 0.7)$ -Sequencialmente Arriscado Estável para DM i é tal que para cada estado s_1 que i pode atingir de s tal que ele prefira s_1 a s com probabilidade superior maior que 0.1, existe um movimento de resposta para o estado s_2 que o DM j pode fazer tal que j prefere s_2 a s_1 com probabilidade inferior maior que 0.7 e i não prefere s_2 a s com probabilidade superior maior que 0.2.

3.4.2 Relações entre as Definições e Outros Resultados

Na Seção 2.4, foram apresentadas algumas relações entre as definições de estabilidade probabilística precisa. Tais relações continuam válidas para as definições apresentadas na seção anterior. As provas são similares às demonstradas na Seção 2.4, substituindo $R_i^{+(1-\alpha)}(s)$, $\phi_i^{+(1-\beta)}(s)$ e $R_j^{+\gamma}(s_1)$, no caso *cauteloso*, por $RL_i^{+(1-\alpha)}(s)$, $\phi L_i^{+(1-\beta)}(s)$ e $RU_j^{+\gamma}(s_1)$, respectivamente, e no caso *arriscado*, por $RU_i^{+(1-\alpha)}(s)$, $\phi U_i^{+(1-\beta)}(s)$ e $RL_j^{+\gamma}(s_1)$, respectivamente.

Para os próximos resultados, note que $RL_i^{+\gamma}(s) \subseteq RU_i^{+\gamma}(s)$ e $\varphi L_i^{+\gamma}(s) \subseteq \varphi U_i^{+\gamma}(s)$, pois se $s_1 \in RL_i^{+\gamma}(s)$ ou $s_1 \in \varphi L_i^{+\gamma}(s)$, então $\underline{P}_i(s_1, s) > 1 - \alpha$ e, portanto, é verdade que $\bar{P}_i(s_1, s) > 1 - \alpha$. Logo, $s_1 \in RU_i^{+\gamma}(s)$ ou $s_1 \in \varphi U_i^{+\gamma}(s)$, respectivamente. O próximo resultado mostra que se um estado é arriscado estável para um determinado conjunto de parâmetros considerando alguma das definições de estabilidade, então é também cauteloso estável considerando a mesma definição de estabilidade e o mesmo conjunto de parâmetros.

Teorema 3.4.9. (a) *Se um estado s é α -Nash Estável Arriscado para o DM i , então s é α -Nash Estável Cauteloso para o DM i .*

(b) *Se um estado s é (α, β) -Metaracional Estável Arriscado para o DM i , então s é (α, β) -Metaracional Estável Cauteloso para o DM i .*

(c) *Se um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico Estável Arriscado para o DM i , então s é (α, β) -Metaracional Simétrico Estável Cauteloso para o DM i .*

(d) *Se um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Estável Arriscado para o DM i , então s é (α, β, γ) -Sequencialmente Estável Cauteloso para o DM i .*

Prova: Para (a), suponha que s é α -Nash Estável Arriscado para o DM i , então $RU_i(s)^{+(1-\alpha)} = \emptyset$. Como $RL_i^{+(1-\alpha)}(s) \subseteq RU_i(s)^{+(1-\alpha)}$, temos que $RL_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ e, portanto, s é α -Nash Estável Cauteloso para o DM i .

Para (b), suponha que s é (α, β) -Metaracional Estável Arriscado para o DM i . Então, $\forall s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s) \subseteq RU_i(s)^{+(1-\alpha)}$, existe um $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c \subseteq R_j(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ e, portanto, s é (α, β) -Metaracional Estável Cauteloso para o DM i .

Para (c), suponha que s é (α, β) -Metaracional Simétrico Estável Arriscado para o DM i . Então, $\forall s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s) \subseteq RU_i(s)^{+(1-\alpha)}$, existe um $s_2 \in R_j(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c \subseteq$

$R_j(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi L_i^{+(1-\alpha)}(s) \subseteq R_i(s_2) \cap \varphi U_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$ e, portanto, s é (α, β) -Metaracional Simétrico Estável Cauteloso para o DM i .

Para (d), suponha que s é (α, β, γ) -Sequencialmente Estável Arriscado para o DM i . Então, $\forall s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s) \subseteq RU_i(s)^{+(1-\alpha)}$, existe um $s_2 \in RL_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c \subseteq RU_j^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ e, portanto, s é (α, β, γ) -Sequencialmente Estável Cauteloso.

■

3.4.3 Definições de Estabilidade para GMCR com Mais de Dois DMs

As definições apresentadas na Seção consideram que existem apenas dois DMs no conflito. Assim como fizemos na Seção 2.4.3 para o caso de preferências probabilísticas precisas, definiremos aqui as noções de estabilidade do GMCR com preferências probabilísticas inferiores e superiores para os conflitos nos quais existem mais de dois DMs. A definição de coalizão H e do conjunto de estados atingíveis por uma coalizão H , R_H permanecem válidos. A definição de α -Nash estável tanto para o caso arriscado quanto para o caso cauteloso permanecem as mesmas apresentadas na Subseção 3.4.1, pois não pressupõem respostas por parte dos outros DMs. Apresentamos agora, então, as três outras definições de estabilidade do modelo GMCR com preferências probabilísticas imprecisas para conflitos com mais de dois DMs.

3.4.3.1 (α, β) -Metaracionalidade Cautelosa

Definição 3.4.10.: Um estado s é (α, β) -Metaracional Cauteloso para o DM i se para todo $s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{N-i}(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Assim, um estado é (α, β) -Metaracional Cauteloso para o DM i nos conflitos nos

quais há mais de dois DMs participando do conflito se para cada estado s_1 que i pode atingir de s tal que i prefere s_1 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \alpha$, então existe um estado s_2 atingível para os oponentes de i tal que i não prefere s_2 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \beta$.

Do mesmo modo como fizemos na Subseção 3.4.1, apresentaremos as definições de (α, β) -Metaracionalidade arriscada e (α, β) -Metaracionalidade Simétrica tanto cautelosa quanto arriscada sem repetir as interpretações, desde que são bastante similares às suas correspondentes já apresentadas até aqui nesta tese.

3.4.3.2 (α, β) -Metaracionalidade Arriscada

Definição 3.4.11.: Um estado s é (α, β) -Metaracional Arriscado para o DM i se para todo $s_1 \in RU_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{N-i}(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

3.4.3.3 (α, β) -Metaracionalidade Simétrica Cautelosa

Definição 3.4.12.: Um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico Cauteloso para o DM i se para todo $s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{N-i}(s_1) \cap (\varphi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi L_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

3.4.3.4 (α, β) -Metaracionalidade Simétrica Arriscada

Definição 3.4.13.: Um estado s é (α, β) -Metaracional Simétrico Arriscado para o DM i se para todo $s_1 \in RU_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{N-i}(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_i(s_2) \cap \varphi U_i^{+(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

Para a definição de (α, β) -Estabilidade Sequencial tanto arriscada e cautelosa pre-

cisamos definir os conjunto γ -melhoramentos cautelosos e γ -melhoramentos arriscados para uma coalizão. Seja $\Omega L_H^{+\gamma}(s,t)$ (resp., $\Omega U_H^{+\gamma}(s,t)$) o subconjunto de H dos DMs que fazem o último movimento de γ -melhoramento cauteloso (resp., arriscado) para atingir t em uma sequência legal de γ -melhoramentos cautelosos (resp., arriscados) de s . Seja $RL_H^{+\gamma}(s)$ o conjunto de γ -melhoramentos unilaterais cautelosos por uma coalizão H de um estado s definido indutivamente como segue:

(i) Se $k \in H$, $t \in R_k(s)$ e $\underline{P}_k(t,s) > \gamma$, então $t \in RL_H^{+\gamma}(s)$ e $k \in \Omega L_H^{+\gamma}(s,t)$, (ii) se $t \in RL_H^{+\gamma}(s)$, $k \in H$, $u \in R_k(t)$, $\Omega L_H^{+\gamma}(s,t) \neq \{k\}$ e $\underline{P}_k(u,t) > \gamma$, então $u \in RL_H^{+\gamma}(s)$ e $k \in \Omega L_H^{+\gamma}(s,u)$.

Similarmente, $RU_H^{+\gamma}(s)$ o conjunto de γ -melhoramentos unilaterais arriscados por uma coalizão H de um estado s é definido indutivamente como segue:

(i) Se $k \in H$, $t \in R_k(s)$ e $\bar{P}_k(t,s) > \gamma$, então $t \in RU_H^{+\gamma}(s)$ e $k \in \Omega U_H^{+\gamma}(s,t)$, (ii) se $t \in RU_H^{+\gamma}(s)$, $k \in H$, $u \in R_k(t)$, $\Omega U_H^{+\gamma}(s,t) \neq \{k\}$ e $\bar{P}_k(u,t) > \gamma$, então $u \in RU_H^{+\gamma}(s)$ e $k \in \Omega U_H^{+\gamma}(s,u)$.

3.4.3.5 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Cautelosa

Definição 3.4.14.: Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Cauteloso Estável para o DM i se para todo $s_1 \in RL_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in RU_{N-i}^{+\gamma}(s_1) \cap (\phi L_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Cauteloso Estável para DM i em GMCR com mais de dois DMs se para cada estado s_1 que i pode atingir de s tal que i prefere s_1 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \alpha$, então existe um γ -melhoramento unilateral arriscado pelos oponentes de i , s_2 , tal que i não prefere s_2 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \beta$.

3.4.3.6 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Arriscada

Definição 3.4.15.: Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Arriscado Estável para o DM i se para todo $s_1 \in RU_i^{+(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in RL_{N-i}^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi U_i^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Algumas considerações sobre as definições para o caso de conflitos com mais de dois DMs são importantes. Primeiro, obviamente as definições para o conflito com dois DMs são um caso particular da situação com dois DMs ou mais, basta considerar $N - i = \{j\}$. Segundo, todas as relações entre as definições válidas considerando preferências probabilísticas precisas apresentadas na Seção 2.4 continuam válidas para as definições apresentadas aqui. A prova é bastante similar e pode ser obtida semelhante à prova dos casos arriscado e cauteloso com 2 DMs, trocando R_j por R_{N-i} em todas as partes. Nós precisamos apenas provar também que se $\gamma_1 \geq \gamma_2$, então $RL_H^{+\gamma_1}(s) \subseteq RL_H^{+\gamma_2}(s)$ e $RU_H^{+\gamma_1}(s) \subseteq RU_H^{+\gamma_2}(s)$. A prova é bastante similar a prova por indução da proposição 2.4.10 (considerando preferências probabilísticas precisas) de que se $\gamma_1 \geq \gamma_2$ então $R_H^{+\gamma_1}(s) \subseteq R_H^{+\gamma_2}(s)$, substituindo $R_H^{+\gamma}$ e $\Omega_H^{+\gamma}(s, t)$ por $RL_H^{+\gamma}$ e $\Omega L_H^{+\gamma}(s, t)$ (resp., $RU_H^{+\gamma}$ e $\Omega U_H^{+\gamma}(s, t)$) em cada um dos casos e considerando sempre \underline{P} (resp., \bar{P}) em vez de P no caso cauteloso (resp., arriscado).

3.4.4 Análise de Estabilidade Coalizional

No Capítulo 2, apresentamos além da análise de estabilidade para conflitos com dois ou mais de dois DMs uma análise da estabilidade considerando que os DMs podem agir conjuntamente para chegar a algum estado do conflito. Apresentamos agora esta análise de estabilidade coalizional para o caso em que os DMs podem expressar suas preferências probabilísticas de modo impreciso através de probabilidades inferiores e superiores. Para as definições de α -Nash estabilidade arriscada e cautelosa, nós apresentamos a definição de γ -melhoramento coalizional cauteloso e γ -melhoramento coalizional arriscado, deno-

tados por $RL_H^{++\gamma}(s)$ (resp., $RU_H^{++\gamma}(s)$). Tais conjuntos são definidos como subconjuntos de $R_H(s)$ contendo os estados tais que todos os DMs em H preferem cada estes a s com probabilidades inferior (resp., superior) maior que γ . Isto é, $RL_H^{++\gamma}(s) = \{t \in R_H(s) : \underline{P}_i(t, s) > \gamma, \forall i \in H\}$ e $RU_H^{++\gamma}(s) = \{t \in R_H(s) : \bar{P}_i(t, s) > \gamma, \forall i \in H\}$. Nós denotamos por $P(N)$ o conjunto de coalizões contido em N , por $\varphi L_H^{+\gamma}(s) = \bigcap_{i \in H} \varphi L_i^{+\gamma}(s)$ o conjunto de todos os estados s_1 que cada DM i em H prefere com $\underline{P}(s_1, s) > \gamma$ e por $\varphi U_H^{+\gamma}(s) = \bigcap_{i \in H} \varphi U_i^{+\gamma}(s)$ o conjunto de todos os estados s_1 que cada DM i em H prefere com $\bar{P}(s_1, s) > \gamma$. Note que $RL_H^{++\gamma}(s) = \varphi L_H^{+\gamma}(s) \cap R_H(s)$ e $RU_H^{++\gamma}(s) = \varphi U_H^{+\gamma}(s) \cap R_H(s)$.

3.4.4.1 α -Nash Estabilidade Coalizional

Definição 3.4.16.: α -Nash Estabilidade Coalizional Cautelosa para uma coalizão.

Um estado s é α -Nash Coalizional Estável Cauteloso para a coalizão H se $RL_H^{++(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

Então, um estado s é α -Nash Coalizional Estável Cauteloso para a coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s , existe um DM em H que não prefere s_1 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \alpha$.

Definição 3.4.17.: α -Nash Estabilidade Coalizional Arriscada para uma coalizão.

Um estado s é α -Nash Coalizional Estável Arriscado para a coalizão H se $RU_H^{++(1-\alpha)}(s) = \emptyset$.

Então, um estado s é α -Nash Coalizional Estável Arriscado para a coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s , existe um DM em H que não prefere s_1 a s com probabilidade superior maior que $1 - \alpha$.

Ao analisar o conflito considerando o que coalizões podem fazer, conseguimos ao mesmo tempo, determinar a estabilidade para cada DM especificamente, tanto do ponto

de vista da estabilidade cautelosa quanto do da arriscada, considerando um estado como estável para um DM de acordo com determinada definição se é estável de acordo com aquela definição para todas as coalizões das quais o DM participa.

Definição 3.4.18.: α -Nash Estabilidade Coalizional Cautelosa para um DM. Um estado s é α -Nash Coalizional Estável Cauteloso para DM i se é α -Nash Coalizional Estável Cauteloso para todas coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

Definição 3.4.19.: α -Nash Estabilidade Coalizional Arriscada para um DM. Um estado s é α -Nash Coalizional Estável Arriscado para DM i se é α -Nash Coalizional Estável Arriscado para todas coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

Também evitaremos aqui repetir todas as interpretações das definições por serem bastante similares às suas correspondentes já apresentadas anteriormente.

3.4.4.2 (α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional

Definição 3.4.20.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Cautelosa para uma coalizão. Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional Estável Cauteloso para coalizão H se para todo $s_1 \in RL_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe uma contra resposta $s_2 \in R_{\mathcal{P}(N-H)}(s_1) \cap (\varphi L_H^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Definição 3.4.21.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Arriscada para uma coalizão. Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional Estável Arriscado para coalizão H se para todo $s_1 \in RU_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe uma contra resposta $s_2 \in R_{\mathcal{P}(N-H)}(s_1) \cap (\varphi U_H^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Definição 3.4.22.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Cautelosa para um DM. Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional Estável Cauteloso para DM i se é (α, β) -

Metaracional Coalizional Estável Cauteloso para todas coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

Definição 3.4.23.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Arriscada para um DM.

Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional Estável Arriscado para DM i se é (α, β) -Metaracional Coalizional Estável Arriscado para todas coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

3.4.4.3 (α, β) -Estabilidade Metaracional Coalizional Simétrica

Definição 3.4.24.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Simétrica Cautelosa para

uma Coalizão. Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional Simétrico Estável Cauteloso para coalizão H se para todo $s_1 \in RL_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{\mathcal{P}(N-H)}(s_1) \cap (\varphi L_H^{+(1-\beta)}(s))^c$

tal que $R_H(s_2) \cap (\varphi L_H^{+(1-\alpha)}(s)) = \emptyset$.

Definição 3.4.25.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Simétrica Arriscada para

uma Coalizão. Um estado $s \in S$ é (α, β) -Metaracional Coalizional Simétrico estável arriscado para coalizão H se para todo $s_1 \in RU_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in R_{\mathcal{P}(N-H)}(s_1) \cap$

$(\varphi U_H^{+(1-\beta)}(s))^c$ tal que $R_H(s_2) \cap (\varphi U_H^{+(1-\alpha)}(s)) = \emptyset$.

Definição 3.4.26.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Simétrica Cautelosa para

um DM. Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional Simétrico Estável Cauteloso

para DM i se é (α, β) -Metaracional Coalizional Simétrico Estável Cauteloso para todas

coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

Definição 3.4.27.: (α, β) -Metaracionalidade Coalizional Simétrica Arriscada para

um DM. Um estado s é (α, β) -Metaracional Coalizional Simétrico Estável Arriscado

para DM i se é (α, β) -Metaracional Coalizional Simétrico Estável Arriscado para todas

coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

3.4.4.4 (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional

Para a definição de Estabilidade Sequencial Coalizional, é necessário definir o conceito de γ -Melhoramento Cauteloso de Classe de Coalizões e γ -Melhoramento Arriscado de Classe de Coalizões, denotados por $RL_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $RU_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$, respectivamente. Seja $\Omega L_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t)$ o subconjunto de \mathcal{C} cujos membros são os subconjuntos de DMs que fazem o último movimento de γ -melhoramento cauteloso para atingir t em seqüências legais de γ -melhoramentos cautelosos a partir de s e $\Omega U_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t)$ o subconjunto de \mathcal{C} cujos membros são os subconjuntos de DMs que fazem o último movimento de γ -melhoramento arriscado para atingir t em seqüências legais de γ -melhoramentos arriscados a partir de s . $RL_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ pode ser definido como a seguir: (i) Se $H \in \mathcal{C}$ e $t \in RL_H^{++\gamma}(s)$, então $t \in RL_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $H \in \Omega L_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t)$ (ii) se $t \in RL_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$, $H \in \mathcal{C}$, $\Omega L_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t) \neq \{H\}$ e $u \in RL_H^{++\gamma}(t)$, então $u \in RL_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $H \in \Omega L_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, u)$. $RU_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ pode ser definido como a seguir: (i) Se $H \in \mathcal{C}$ e $t \in RU_H^{++\gamma}(s)$, então $t \in RU_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $H \in \Omega U_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t)$ (ii) se $t \in RU_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$, $H \in \mathcal{C}$, $\Omega U_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, t) \neq \{H\}$ e $u \in RU_H^{++\gamma}(t)$, então $u \in RU_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s)$ e $H \in \Omega U_{\mathcal{C}}^{+\gamma}(s, u)$.

Definição 3.4.28: (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional Cautelosa para uma coalizão. Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Estável Cauteloso para coalizão H se para todo $s_1 \in RL_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in RU_{\mathcal{D}(N-H)}^{+\gamma}(s_1) \cap (\phi L_H^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional Estável Cauteloso para coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s tal que cada DM i em H prefere s_1 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \alpha$, então existe um γ -Melhoramento Arriscado por parte dos oponentes de H , s_2 , tal que para algum DM i em H , i não prefere s_2 a s com probabilidade inferior maior que $1 - \beta$.

Definição 3.4.29: (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional Arriscada para uma coalizão. Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional Estável Arriscado para

coalizão H se para todo $s_1 \in RU_H^{++(1-\alpha)}(s)$ existe $s_2 \in RL_{\mathcal{P}(N-H)}^{+\gamma}(s_1) \cap (\varphi U_H^{+(1-\beta)}(s))^c$.

Então, um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional Estável Arriscado para coalizão H se para cada estado s_1 atingível para H de s tal que cada DM i em H prefere s_1 a s com probabilidade superior maior que $1 - \alpha$, então existe um γ -Melhoramento Cauteloso por parte dos oponentes de H , s_2 , tal que para algum DM i em H , i não prefere s_2 a s com probabilidade superior maior que $1 - \beta$.

Definição 3.4.30.: (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional Cautelosa para um DM. Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional Estável Cauteloso para DM i se é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional Estável Cauteloso para todas coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

Definição 3.4.31.: (α, β, γ) -Estabilidade Sequencial Coalizional Arriscada para um DM. Um estado s é (α, β, γ) -Sequencialmente Coalizional Estável Arriscado para DM i se é (α, β, γ) -Sequencialmente Estável Arriscado para todas coalizões $H \in \mathcal{P}(N)$ tais que $i \in H$.

Todas as relações entre as definições válidas para o caso de preferências probabilísticas precisas apresentadas na Seção 2.4, que são válidas para os casos arriscado e cauteloso no conflito com 2 ou mais DMs como afirmamos nas Subseções 3.4.2 e 3.4.3, continuam válidas para as definições apresentadas aqui. A prova é bastante idêntica à prova dos casos arriscado e cauteloso com 2 DMs, trocando R_j por $R_{\mathcal{P}(N-H)}$ em todas as partes da prova. Nós precisamos apenas provar também que se $\gamma_1 \geq \gamma_2$, então $RL_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq RL_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$, $RU_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq RU_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$, $\varphi L_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi L_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$ e $\varphi U_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi U_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$. A prova de que $\varphi L_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi L_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$ e $\varphi U_{\mathcal{C}}^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi U_{\mathcal{C}}^{+\gamma_2}(s)$ vem do fato já mostrado que $\varphi L_i^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi L_i^{+\gamma_2}(s)$ e $\varphi U_i^{+\gamma_1}(s) \subseteq \varphi U_i^{+\gamma_2}(s)$. A outra parte da prova é bastante similar a prova por indução apresentada no final da Subseção 2.4.3 para o caso de preferências probabilísticas precisas.

3.5 Aplicações

Na Seção 2.5, mostramos a importância de introduzir preferências probabilísticas no GMCR analisando uma versão modificada do exemplo apresentado em Hamouda [27]. Aqui, nós modificamos este exemplo permitindo preferências probabilísticas inferior e superior para os DMs.

Exemplo 3.5.1. Conflito com dois DMs e preferências imprecisas. Considere o exemplo apresentado para dois DMs no Capítulo 2. Trata-se de um conflito ambiental, no qual os dois DMs participantes do conflito são os ambientalistas(E) e os desenvolvimentistas(D). Sabe-se que o DM D pode ser de dois tipos: ou dar baixa prioridade à consciência ambiental (D_U) ou é mais responsável nesse sentido (D_S). Nós vamos considerar agora que haja incerteza sobre qual o tipo do DM D e que esta incerteza é representada pelas probabilidades inferior e superior $\underline{P}(D = D_U) = p_1$ e $\bar{P}(D = D_U) = p_2$. Daí, pelo Axioma 1 apresentado na Seção 3.2, $\underline{P}(D = D_S) = 1 - p_2$ e $\bar{P}(D = D_S) = 1 - p_1$.

Nós consideramos aqui que se um DM prefere deterministicamente um estado s_p a outro s_q , então ambas preferências probabilísticas inferior e superior são iguais a 1, i.e., $\bar{P}_i(s_p, s_q) = \underline{P}_i(s_p, s_q) = 1$ e, mais ainda, $\bar{P}_i(s_q, s_p) = \underline{P}_i(s_q, s_p) = 0$. De acordo com esta condição, as preferências probabilísticas inferior e superior para o DM E são como apresentadas na Tabela 3.1. Cada célula expressa a probabilidade inferior e superior, respectivamente, de que DM E prefere o estado da linha ao estado da coluna.

Considere agora o DM D . Neste caso, nós assumimos que se ambos os tipos do DM D preferem o estado s_p ao estado s_q , então $\underline{P}_D(s_p, s_q) = \bar{P}_D(s_p, s_q) = 1$. Se ambos não preferem o estado s_p ao estado s_q , então $\underline{P}_D(s_p, s_q) = \bar{P}_D(s_p, s_q) = 0$. Enquanto que se apenas um dos tipos prefere o estado s_p ao estado s_q , então as preferências probabilísticas inferior e superior do DM D são dadas pelas probabilidades inferior e superior de cada

Tabela 3.1 Preferências Probabilísticas Imprecisas para o DM E

E	(P,S)	(R,S)	(P,U)	(R,U)
(P,S)	(0.00, 0.00)	(1.00, 1.00)	(1.00, 1.00)	(1.00, 1.00)
(R,S)	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)	(1.00, 1.00)	(1.00, 1.00)
(P,U)	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)	(1.00, 1.00)
(R,U)	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)

tipo ser o escolhido. Então, as preferências probabilísticas inferior e superior do DM D são como apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 Preferências Probabilísticas Imprecisas para o DM D

D	(P,S)	(R,S)	(P,U)	(R,U)
(P,S)	(0.00, 0.00)	(0.00, 0.00)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$
(R,S)	(1.00, 1.00)	(0.00, 0.00)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$
(P,U)	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	(0.00, 0.0)	(0.00, 0.00)
(R,U)	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	(1.00, 1.00)	(0.00, 0.00)

Dado este modelo de GMCR, uma análise de estabilidade pode ser feita para determinar para quais valores de parâmetros os estados satisfazem cada uma das oito definições de estabilidade propostas para conflitos com 2 DMs na Seção 3.4 para cada DM. Se um estado é estável para ambos DMs de acordo com uma definição de estabilidade em particular, então é dito que o estado é estável de acordo com tal definição de estabilidade. As Tabelas 3.3 , 3.4, 3.5 e 3.6 apresentam para quais valores de parâmetros cada um dos estados satisfaz cada uma das definições de estabilidade propostas.

Tabela 3.3 Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (R, S)

	Para E	Para D	Estável
Cautelosa α -Nash	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0$
Arriscada α -Nash	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p_2$	$\alpha = 0$
Cautelosa (α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$
Arriscada (α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_2, \beta \leq 1 - p_2$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_2, \beta \leq 1 - p_2$
Cautelosa (α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$
Arriscada (α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$
Cautelosa (α, β, γ) -SEQ	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < p_2$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $0 < \alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \gamma < p_2$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < p_2$
Arriscada (α, β, γ) -SEQ	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < p_1$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_2, \beta \leq 1 - p_2, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $0 < \alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta, \gamma < p_1$ ou $\alpha > 1 - p_2, \beta \leq 1 - p_2, \gamma < p_1$

Tabela 3.4 Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (R, U)

	Para E	Para D	Estável
Cautelosa α -Nash	$\alpha = 0$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha = 0$
Arriscada α -Nash	$\alpha = 0$	$\alpha \leq p_1$	$\alpha = 0$
Cautelosa (α, β) -GMR	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\forall \alpha, \beta = 0$
Arriscada (α, β) -GMR	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > p_1, \beta \leq p_1$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\forall \alpha, \beta = 0$
Cautelosa (α, β) -SMR	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
Arriscada (α, β) -SMR	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
Cautelosa (α, β, γ) -SEQ	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p_1$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p_1$
Arriscada (α, β, γ) -SEQ	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p_2$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_1, \beta \leq p_1, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p_2$

Tabela 3.5 Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (P, S)

	Para E	Para D	Estável
Cautelosa α -Nash	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1$
Arriscada α -Nash	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_2$	$\alpha \leq 1 - p_2$
Cautelosa (α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$
Arriscada (α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_2, \beta \leq 1 - p_2$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_2, \beta \leq 1 - p_2$
Cautelosa (α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$
Arriscada (α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta$
Cautelosa (α, β, γ) -SEQ	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$
Arriscada (α, β, γ) -SEQ	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_2, \forall \beta, \forall \gamma$

Tabela 3.6 Estabilidade Probabilística Imprecisa para o Estado (P, U)

	Para E	Para D	Estável
Cautelosa α -Nash	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha \leq p_2$
Arriscada α -Nash	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p_1$	$\alpha \leq p_1$
Cautelosa (α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$
Arriscada (α, β) -GMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > p_1, \beta \leq p_1$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > p_1, \beta \leq p_1$
Cautelosa (α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$
Arriscada (α, β) -SMR	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta$
Cautelosa (α, β, γ) -SEQ	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$
Arriscada (α, β, γ) -SEQ	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_1, \forall \beta, \forall \gamma$

Exemplo 3.5.2. Conflito com mais de dois DMs e preferências imprecisas. Na Seção 2.5, nós apresentamos um conflito com três DMs referente à exportação de água no Lago Gisborne, no Canadá. Nós tratamos o conflito considerando que poderia haver incerteza sobre a orientação do DM GP que representa o governo da província, isto é, GP pode ter mais preocupação com a economia ou com o meio ambiente. No exemplo apresentado, consideramos que GP é economicamente orientado com probabilidade p e tem uma orientação mais ambientalista com probabilidade $1 - p$. Dessa forma, as preferências do DM GP podem ser representadas por preferências probabilísticas precisas. Agora, nós iremos supor aqui que há uma imprecisão sobre quais as probabilidades sobre as orientações do DM GP e assumiremos que essa imprecisão pode ser representada por probabilidades inferior e superior, de forma que a chance de GP ser do tipo economicamente orientado (E) é representado pelas probabilidades inferior e superior $\underline{P}(GP = E) = p_1$ e $\bar{P}(GP = E) = p_2$. Pelo Axioma 1, apresentado na Seção 3.2 nós temos que consequentemente a chance de GP ter orientação mais ambientalista (A) é $\underline{P}(GP = A) = 1 - p_2$ e $\bar{P}(GP = A) = 1 - p_1$. Daí, podemos redefinir as preferências dos DMs para modelá-las como preferências probabilísticas imprecisas. As preferências dos DMs GF e S (Governo Federal e Suporte) são bastante semelhantes às apresentadas nas Tabelas 2.12 e 2.13 do Exemplo 2.5.2, trocando os valores 0.0 e 1.0 pelos pares (0.0,0.0) e (1.0,1.0), enquanto que a preferência do DM GP é mostrada na Tabela 3.7. Os estados atingíveis permanecem os mesmos. As Tabelas 3.8 e 3.9 mostram então os melhoramentos cautelosos para cada DM e a Tabela 3.10 mostra o melhoramento coalizional cauteloso. Em seguida, nós apresentamos a análise de estabilidade cautelosa nas Tabelas 3.11- 3.14 e finalmente, as Tabelas 3.15- 3.22 mostram a análise de estabilidade coalizional cautelosa para os DMs e para as coalizões. Os melhoramentos arriscados e as estabilidades arriscadas podem ser determinados substituindo p_1 por p_2 e vice-versa.

Tabela 3.7 Preferências Probabilísticas Imprecisas para DM GP no Modelo do Conflito de Gisborne

GP	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(0,0)$	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1, 1)$	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$
2	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(0,0)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1, 1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$
3	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(0,0)$	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(1, 1)$	(p_1, p_2)
4	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(0,0)$	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1, 1)$
5	$(0,0)$	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(0,0)$	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$
6	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(0,0)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(0,0)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(1 - p_2, 1 - p_1)$
7	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(0,0)$	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(0,0)$	(p_1, p_2)
8	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(0,0)$	(p_1, p_2)	(p_1, p_2)	$(1 - p_2, 1 - p_1)$	$(0,0)$

Tabela 3.8 Conjuntos $RL_H^{+\gamma}$

estado	$RL_{GF}^{+\gamma}(s)$	$RL_{GP}^{+\gamma}(s)$	$RL_S^{+\gamma}(s)$	$RL_{\{GF,GP\}}^{+\gamma}(s)$	$RL_{\{GF,S\}}^{+\gamma}(s)$	$RL_{\{GP,S\}}^{+\gamma}(s)$
1	$2 (\gamma < 1)$	$3 (\gamma < p_1)$	$5 (\gamma < 1)$	$2 (\gamma < 1)$ $3 e 4 (\gamma < p_1)$	$2, 5 e$ $6 (\gamma < 1)$	$3, 7 (\gamma < p_1), 5 (\gamma < 1) e 1 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$
2	\emptyset	$4 (\gamma < p_1)$	$6 (\gamma < 1)$	$4 (\gamma < p_1)$	$6 (\gamma < 1)$	$6 (\gamma < 1), 4 e 8 (\gamma < p_1), 2 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$
3	$4 (\gamma < 1)$	$1 (\gamma < 1 - p_2)$	\emptyset	$4 (\gamma < 1),$ $1 e 2 (\gamma < 1 - p_2)$	$4 (\gamma < 1)$	$1 e 5 (\gamma < 1 - p_2), 3 e 7 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$
4	\emptyset	$2 (\gamma < 1 - p_2)$	\emptyset	$2 (\gamma < 1 - p_2)$	\emptyset	$2 e 6 (\gamma < 1 - p_2), 4 e 8 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$
5	$6 (\gamma < 1)$	$7 (\gamma < p_1)$	\emptyset	$6 (\gamma < 1),$ $7 e 8 (\gamma < p_1)$	$6 (\gamma < 1)$	$3 e 7 (\gamma < p_1), 1 e 5 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$
6	\emptyset	$8 (\gamma < p_1)$	\emptyset	$8 (\gamma < p_1)$	\emptyset	$4 e 8 (\gamma < p_1), 2 e 6 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$
7	$8 (\gamma < 1)$	$5 (\gamma < 1 - p_2)$	$3 (\gamma < 1)$	$8 (\gamma < 1),$ $5 e 6 (\gamma < 1 - p_2)$	$3, 4 e 8 (\gamma < 1)$	$3 ((\gamma < 1)), 1 e 5 (\gamma < 1 - p_2), 7 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$
8	\emptyset	$6 (\gamma < 1 - p_2)$	$4 (\gamma < 1)$	$6 (\gamma < 1 - p_2)$	$4 (\gamma < 1)$	$4 (\gamma < 1), 2 e 6 (\gamma < 1 - p_2), 8 (\gamma < \min\{p_1, 1 - p_2\})$

Tabela 3.9 Conjuntos $\varphi L_H^{+\gamma}$

Estado	$\varphi L_{GF}^{+\gamma}(s)$	$\varphi L_{GP}^{+\gamma}(s)$	$\varphi L_S^{+\gamma}(s)$	$\varphi L_{\{GF,GP\}}^{+\gamma}(s)$	$\varphi L_{\{GF,S\}}^{+\gamma}(s)$	$\varphi L_{\{GP,S\}}^{+\gamma}(s)$
1	2, 4, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p_1$) 2 e 6 ($\gamma < 1 - p_2$)	3, 4, 5, 6 7 e 8 ($\gamma < 1$)	2 e 6 ($\gamma < 1 - p_2$)	4, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p_1$) 6 ($\gamma < 1 - p_2$)
2	\emptyset	1, 3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p_1$)	1, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 ($\gamma < 1$)	\emptyset	\emptyset	1, 3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p_1$)
3	1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p_2$)	\emptyset	1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p_2$)	\emptyset	\emptyset
4	2 e 6 ($\gamma < 1$)	1, 2, 5 e 6 ($\gamma < 1 - p_2$) 3 e 7 ($\gamma < p_1$)	3 ($\gamma < 1$)	2 e 6 ($\gamma < 1 - p_2$)	\emptyset	3 ($\gamma < p_1$)
5	1, 2, 4, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	1 ($\gamma < 1$), 2, 6 ($\gamma < 1 - p_2$) 3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p_1$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < 1$)	1 ($\gamma < 1$), 4 e 8 ($\gamma < p_1$) 2 e 6 ($\gamma < 1 - p_2$)	4 e 8 ($\gamma < 1$)	3, 4, 7 e 8 ($\gamma < p_1$)
6	2 ($\gamma < 1$)	2 ($\gamma < 1$) 1, 3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p_1$)	3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < 1$)	2 ($\gamma < 1$)	\emptyset	3, 4, 5, 7 e 8 ($\gamma < p_1$)
7	1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1$)	3 ($\gamma < 1$) 1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p_2$)	3 e 4 ($\gamma < 1$)	3 ($\gamma < 1$) 1, 2, 4, 5, 6 e 8 ($\gamma < 1 - p_2$)	3 e 4 ($\gamma < 1$)	3 ($\gamma < 1$) 4 ($\gamma < 1 - p_2$)
8	2, 4 e 6 ($\gamma < 1$)	4 ($\gamma < 1$), 3 e 7 ($\gamma < p_1$) 1, 2, 5 e 6 ($\gamma < 1 - p_2$)	3, 4 e 7 ($\gamma < 1$)	4 ($\gamma < 1$), 2 e 6 ($\gamma < 1 - p_2$)	4 ($\gamma < 1$)	4 ($\gamma < 1$) 3 e 7 ($\gamma < p_1$)

Tabela 3.10 γ -Melhoramento Coalizional Cauteloso

	$R_{\{GF,GP\}}^{++\gamma}$	$R_{\{S,GP\}}^{++\gamma}$	$R_{\{GF,S\}}^{++\gamma}$	$R_N^{++\gamma}$
1	$2(\gamma < 1 - p_2)$ e $4(\gamma < p_1)$	3 e $7(\gamma < p_1)$	$6(\gamma < 1)$	$4, 8(\gamma < p_1)$ e $6(\gamma < 1 - p_2)$
2	\emptyset	4 e $8(\gamma < p_1)$	\emptyset	\emptyset
3	$1, 2$ e $4(\gamma < 1 - p_2)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
4	$2(\gamma < 1 - p_2)$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
5	$6(\gamma < 1 - p_2)$ e $8(\gamma < p_1)$	3 e $7(\gamma < p_1)$	\emptyset	$4, 8(\gamma < p_1)$
6	\emptyset	4 e $8(\gamma < p_1)$	\emptyset	\emptyset
7	$5, 6$ e $8(\gamma < 1 - p_2)$	$3(\gamma < 1)$	3 e $4(\gamma < 1)$	$3(\gamma < 1)$ e $4(\gamma < 1 - p_2)$
8	$6(\gamma < 1 - p_2)$	$4(\gamma < 1)$	$4(\gamma < 1)$	$4(\gamma < 1)$

Tabela 3.11 α -Nash Estabilidade Cautelosa

Estado	para GF	para S	para GP	estável
1	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0$
2	$\forall \alpha$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0$
3	$\alpha = 0$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha = 0$
4	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha \leq p_2$
5	$\alpha = 0$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0$
6	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1$
7	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha = 0$
8	$\forall \alpha$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha = 0$

Tabela 3.12 (α, β) -GMR Estabilidade Cautelosa

Estado	para GF	para S	para GP	estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
3	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
4	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$
5	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0, \forall \beta$ e $\alpha > 0, \beta = 0$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta \leq 1$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$
8	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$

Tabela 3.13 (α, β) -SMR Estabilidade Cautelosa

Estado	para GF	para S	para GP	estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
3	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
4	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$
5	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ e $\alpha > 0, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$

Tabela 3.14 (α, β, γ) -SEQ Estabilidade Cautelosa

Estado	para GF	para S	para GP	estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$
2	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq 1 - p_1, \beta = 0, \gamma < p_1$
3	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p_2$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1 - p_2$
4	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$
5	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < p_1$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma, \alpha > 0, \beta = 0, \gamma < p_1$
6	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < 1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < 1$
7	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < 1$
8	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1 - p_2$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq p_2, \forall \beta, \gamma < 1 - p_2$

Tabela 3.15 α -Nash Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	para $\{GF, GP\}$	para $\{GF, S\}$	para $\{GP, S\}$	para N
1	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$
2	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\forall \alpha$
3	$\alpha \leq p_2$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$
4	$\alpha \leq p_2$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1$
6	$\forall \alpha$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\forall \alpha$
7	$\alpha \leq p_2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$
8	$\alpha \leq p_2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$

Tabela 3.16 (α, β) -GMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	para $\{GF, GP\}$	para $\{GF, S\}$	para $\{GP, S\}$	para N
1	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$ ou $1 - p_1 \geq \alpha > p_2$ e $\beta \leq p_2$ ou $p_2 \geq \alpha > 1 - p_1$ e $\beta \leq 1 - p_1$ ou $\alpha > \max\{p_2, 1 - p_1\}$ e $\beta \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta = 0$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\forall \alpha, \forall \beta$
3	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
4	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$ ou $1 - p_1 \geq \alpha > p_2, \beta \leq p_2$ ou $p_2 \geq \alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$ ou $\alpha > \max\{p_2, 1 - p_1\}, \beta \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\forall \alpha, \forall \beta$
7	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta \leq p_2$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha > 0, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 3.17 (α, β) -SMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	para $\{GF, GP\}$	para $\{GF, S\}$	para $\{GP, S\}$	para N
1	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
3	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
4	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$
7	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha \leq p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha \leq 1 - p_1$ e $\beta \leq 1 - p_1$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 3.18 (α, β) -SEQ Estabilidade Coalizional Cautelosa para Coalizões com 2 ou mais DMs

Estado	para $\{GF, GP\}$	para $\{GF, S\}$	para $\{GP, S\}$	para N
1	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\},$ $\forall \beta, \forall \gamma$ ou $1 - p_1 \geq \alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0,$ $\beta = 0, \gamma < p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < 1$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$ $\forall \beta, \forall \gamma$
2	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
3	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
4	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1, \gamma < 1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$
6	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$
7	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1 - p_2$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$
8	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > 0, \forall \beta, \gamma < 1 - p_2$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$

Tabela 3.19 α -Nash Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs

Estado	GF	S	GP	estável
1	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$	$\alpha = 0$
2	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1$
3	$\alpha \leq p_2$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha \leq p_2$
4	$\alpha \leq p_2$	$\forall \alpha$	$\alpha \leq p_2$	$\alpha \leq p_2$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}$
6	$\forall \alpha$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1$
7	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$
8	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$

Tabela 3.20 (α, β) -GMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs

Estado	GF	S	GP	estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \beta = 0$	$\alpha = 0, \forall \beta$ ou $\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \beta = 0$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$ $\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \beta = 0$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$
3	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$
4	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$ ou $p_2 < \alpha \leq 1 - p_1, \beta \leq p_2$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$ ou $p_2 < \alpha \leq 1 - p_1, \beta \leq p_2$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$ ou $p_2 < \alpha \leq 1 - p_1, \beta \leq p_2$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou $\alpha > 1 - p_1, \beta \leq 1 - p_1$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 3.21 (α, β) -SMR Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs

Estado	GF	S	GP	estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
2	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$
3	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$
4	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta$
6	$\forall \alpha, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$ ou	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta$
7	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$
8	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$	$\alpha = 0, \forall \beta$

Tabela 3.22 (α, β, γ) -SEQ Estabilidade Coalizional Cautelosa para DMs

Estado	GF	S	GP	estável
1	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \beta = 0, \gamma < p_1$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \beta = 0, \gamma < p_1$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \beta = 0, \gamma < p_1$
2	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$
3	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$
4	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$	$\alpha \leq p_2, \forall \beta, \forall \gamma$ ou $\alpha > p_2, \beta \leq p_2, \gamma < 1$
5	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq \min\{p_2, 1 - p_1\}, \forall \beta, \forall \gamma$
6	$\forall \alpha, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha \leq 1 - p_1, \forall \beta, \forall \gamma$
7	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$
8	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$	$\alpha = 0, \forall \beta, \forall \gamma$

3.6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Os conceitos de soluções do modelo GMCR foram estendidos para permitir que as preferências probabilísticas dos DMs pudessem ser imprecisas. Para tanto, foi usado o conceito de probabilidades inferior e superior que é uma alternativa para se modelar a incerteza quando não é possível representar esta através de um único valor numérico. Apresentamos as definições de estabilidade para um GMCR que incorpora essa nova forma de expressar preferências, considerando dois tipos de análise, a que prevê comportamento cauteloso para o DM e a que prevê comportamento arriscado.

Além disso, nós mostramos alguns resultados sobre as relações entre os conceitos de estabilidade, mostrando que essencialmente as mesmas implicações continuam válidas no presente modelo entre as noções padrão de estabilidade e as noções do GMCR com preferência probabilística precisa. Também foi demonstrado que todo estado que é estável segundo a perspectiva arriscada, também o é segundo a perspectiva cautelosa, mantidos os mesmos valores dos parâmetros.

Como trabalho futuro, podemos pensar em uma outra forma de definir DMs que não sejam tão pessimistas quanto os cautelosos, nem tão otimistas quanto os arriscados. Isto é, é desejável obter uma maneira de captar a ideia de que indivíduos não estejam nos extremos, considerando ou a probabilidade inferior ou a superior, mas um valor intermediário ao analisar a estabilidade dos estados. Precisaremos definir qual a forma mais adequada de definir tal valor intermediário. Uma opção seria defini-lo como uma combinação linear das probabilidades inferior e superior, permitindo que se dê mais peso a uma ou a outra, a depender se o DM está considerando suas próprias escolhas ou as escolhas dos oponentes.

Modelo de Co-Autores com Pesos nas Ligações

4.1 Introdução

Redes sociais afetam nossa vida de várias maneiras, desde a forma como fazemos amigos até o modo como trabalhamos. Um tipo de rede que têm sido analisada em diversos estudos é a de co-autores. Nela, indivíduos (cientistas, artistas) investem recurso, geralmente tempo, em parcerias que trarão benefícios para os envolvidos no projeto. Diversos estudos têm sido feitos analisando estatísticas de tais redes, como o número de nós, média dos graus, média da menor distância entre os autores, etc.

Em [7], por exemplo, são estudadas redes de cientistas usando dados de 4 publicações (Los Alamos e-Print Archive, MEDLINE, SPIRES e NCSTRL) durante um período de 4 anos. São analisadas estatísticas básicas como número de autores, números de artigos por autor, número de colaboradores por artigo e outras como tamanho de grandes componentes e distância entre dois autores. Newman [8] apresenta um outro artigo baseado nessas mesmas bases de dados que se propõe ir além dos estudos usuais de rede que consideram que os indivíduos estão ligados ou não. Ele considera um peso para as ligações entre dois autores, levando em conta o total de artigos de cada um e a quantidade de trabalhos juntos e a partir disto calcula algumas das estatísticas do trabalho apresentado em [7].

Outros estudos mais teóricos têm se dedicado a criar modelos que representem a situação na qual indivíduos devem decidir quanto investir de seu tempo em cada relação com outros co-autores. Jackson e Wolinsky [6] propõem o modelo de co-autores no qual benefícios individuais vêm da interação com outros, como uma colaboração em um pro-

jeto de pesquisa. Indivíduos têm uma quantidade fixa de tempo para gastar com projetos. Além de terem o benefício da colaboração de outro autor em seu projeto, existe a vantagem de trabalhar efetivamente juntos criando algo. O modelo capta também a ideia de que se o indivíduo aumenta seu tempo em outros projetos, ele tem menos tempo para trabalhar efetivamente junto com seus pares. Então, quanto mais ligações um parceiro de um determinado indivíduo tem, menos tempo possui para investir em tal parceria. Assim, indivíduos desejariam que seus vizinhos tivessem poucas ligações, ao contrário de outros modelos nos quais indivíduos se beneficiam de suas ligações indiretas.

Tal trabalho traz resultados na análise da formação de redes no que diz respeito à eficiência e à estabilidade. É demonstrado qual estrutura de rede traz mais benefícios à sociedade e em qual estrutura os indivíduos não desviam de suas estratégias. O resultado detalhado está explícito na próxima seção.

Nosso objetivo neste capítulo é estender o trabalho de Jackson e Wolinsky, estudando não apenas quando os indivíduos e a sociedade se beneficiam da criação ou remoção de ligações entre os autores, mas também analisando qual a intensidade ótima de colaboração entre os co-autores. Em uma rede de colaboração, é comum indivíduos trabalharem mais de uma vez com um determinado outro indivíduo e que trabalhem mais com alguns do que com outros. A quantidade de vezes que eles trabalham juntos dá uma ideia da intensidade dessa relação e tal intensidade afeta a relação de trabalho e a produção. Acreditamos que indivíduos que trabalham mais vezes juntos têm a possibilidade de se conhecerem mais e isso, por sua vez, facilitaria a produção e aumentaria a satisfação dos indivíduos envolvidos naquela relação. Além disso, a possibilidade de trabalhar mais vezes com um indivíduo mais disponível do que uma única vez com um indivíduo muito ocupado pode ser considerada pelos indivíduos ao escolherem seus co-autores. Após apresentarmos o modelo, analisamos que estruturas de redes são eficientes e estáveis em dois casos

distintos: um no qual a força que uma ligação pode ter é ilimitada e outro no qual tal força é limitada. Mostraremos que no caso ilimitado, não existem redes estáveis, enquanto que no caso limitado, as estruturas estáveis são similares as correspondentes no modelo de Jackson e Wolinsky, onde a força de todas as ligações é máxima.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 4.2 deste capítulo, fizemos uma breve revisão dos conceitos de teoria dos grafos necessários à compreensão dos modelos, do modelo de co-autores proposto por Jackson e Wolinsky e das noções de eficiência e estabilidade. Na Seção 4.3, apresentamos nosso modelo e na Seção 4.4, desenvolvemos resultados relacionando os conceitos de eficiência e estabilidade para este novo modelo. Concluimos na Seção 4.5, com observações finais e sugestões para trabalhos futuros.

4.2 Grafos e o Modelo de Co-autores

Os modelos criados para representar redes de modo geral usam conceitos e representações da Teoria dos Grafos que ajudam na visualização e análise da estrutura de uma rede e sua formação. Na próxima subseção, apresentamos alguns conceitos básicos necessários à compreensão do nosso modelo de co-autores e de seus resultados e na seguinte, apresentamos o modelo de co-autores proposto por Jackson e Wolinsky [6] com um de seus resultados que será aplicado a um de nossos resultados.

4.2.1 Grafos e Redes

Existem diversos tipos de rede: amizades, sociais, econômicas, etc. As redes representam um conjunto de objetos que se relacionam. Os objetos que se relacionam nessas

redes podem ser pessoas, instituições, cidades, países ou quaisquer outros entes que podem se relacionar entre si. Cada um deles pode se relacionar com um ou mais de um objeto daquele conjunto de objetos. Particularmente, em um contexto social, esse conjunto é chamado de sociedade e é razoável que haja uma estrutura capaz de representar cada ente dessa sociedade e as ligações entre eles. Uma representação que é útil a essa necessidade é a Teoria de grafos. Vamos agora formalmente relembrar alguns conceitos desta teoria, que serão utilizados neste capítulo.

- **Nós.** O conjunto de nós representam os envolvidos na rede de relacionamentos. Também chamados de indivíduos, agentes, jogadores, dependendo do contexto. Nós não necessariamente são pessoas. Podem ser também empresas, países, etc. Se dois nós se relacionam, diremos que há uma ligação entre eles.
- **Grafos.** A forma canônica de uma rede é um grafo não dirigido, no qual dois nós são conectados um ao outro ou não. Formalmente, um grafo (N, g) consiste de um conjunto de nós N e uma matriz g de valores reais não-negativos e de ordem $n \times n$, onde n é a cardinalidade de N e g_{ij} representa a relação entre i e j . Se o nó i está ligado ao nó j , tem-se que $g_{ij} > 0$ e diz-se que existe uma aresta (ligação) entre os nós i e j . Quando não existe confusão sobre qual é o conjunto de nós, a notação g é usada em vez de (N, g) .
- **Redes dirigidas e não-dirigidas.** Uma rede é dirigida se $g_{ij} \neq g_{ji}$ para algum par de nós i e j e é não-dirigida, caso contrário. Redes de amizade costumam ser não-dirigidas, já redes de citações são usualmente dirigidas.
- **Redes com Pesos nas Ligações e Redes sem Pesos.** Uma rede é sem peso nas ligações se $g_{ij} \in \{0, 1\}$ para cada par de nós i e j e é com peso, caso contrário. Em uma rede com peso, g_{ij} representa o peso da ligação entre os nós i e j .

- **Caminho.** Um caminho em uma rede g entre dois nós i e j é uma sequência de ligações $i_1i_2, i_2i_3, \dots, i_{K-1}i_K$, tal que $g_{i_{k-1}i_k} > 0$ para todo $k \in 1, 2, \dots, K-1$, com $i_1 = i$ e $i_K = j$ e cada nó na sequência é distinto.
- **Vizinhança.** A vizinhança $N(i)$ de um nó i é o conjunto de nós a quem i está ligado, isto é, $N(i) = \{j \in N : g_{ij} > 0\}$.
- **Grau.** Para boa parte dos modelos de rede, o grau do indivíduo, representado por $d_i(g)$, é o número de ligações nas quais aquele nó i está envolvido. No nosso trabalho, o grau do jogador, usando a mesma representação, será a quantidade total de projetos nos quais está envolvido.
- **Rede conectada.** Uma rede (N, g) é conectada se para cada dois nós na rede, existe um caminho conectando-os.
- **Componente.** Uma componente de uma rede (N, g) é uma sub-rede não vazia (N', g') tal que $\emptyset \neq N' \subset N$ e $g'_{ij} = g_{ij}$ para todo $i, j \in N'$.
 - (N', g') é conectada, e
 - Se $i \in N'$ e $g_{ij} > 0$, então, $j \in N'$.
- **Rede completa.** $g_{ij} > 0$ para todo $i, j \in N$.
- **Utilidade ou payoff.** Modelos de formação de rede consideram que os indivíduos recebem algum benefício e que este benefício depende de alguma forma da estrutura da rede. Nestes cenários os nós de um conjunto N são geralmente chamados de jogadores e os benefícios e os custos de um jogador para estar na rede são modelados através de uma *função utilidade* ou payoff, isto é, dado um grafo (N, g) , o payoff do jogador $i \in N$ é representado por uma função $u_i(g) \in \mathbb{R}$ que representa a utilidade que i recebe se a rede é g [36].

Para cada contexto a função $u_i(g)$ varia, pois pode depender de coisas diferentes. Por exemplo, no contexto de co-autores, essa função depende do grau do nó e dos seus vizinhos. No modelo de Jackson e Wolinsky [6] e no apresentado a seguir neste trabalho é considerado que jogadores são conscientes das possibilidades de estabelecer ou quebrar ligações e de que maneira isto afeta a função utilidade deles na rede.

- **Eficiência.** Uma análise feita em relação a modelos de formação de redes é o total de benefícios atingidos com determinada estrutura de rede. Mais especificamente, há o interesse em descobrir qual estrutura que maximiza o ganho total dos jogadores (a soma de todas as utilidades de cada jogador). Seja $G(N)$ o conjunto de todas as redes com conjunto N de nós. Uma rede é então dita *eficiente* relativamente a um perfil de utilidades (u_1, \dots, u_n) se $\sum_i u_i(g) \geq \sum_i u_i(g')$ para toda g' tal que $g' \in G(N)$.
- **Estabilidade.** Indivíduos em uma rede são capazes de analisar se quebrando ou estabelecendo ligações são capazes de melhorar seus benefícios, isto é, aumentar sua utilidade. Quando não é possível para os nós aumentarem suas utilidades através de alguma ação, a rede é dita estável. Existem diferentes conceitos de estabilidade. Neste trabalho, tais conceitos levam em conta que para indivíduos estabelecerem uma ligação é necessário o consentimento de ambos, enquanto que para quebrá-la basta a vontade de um. Na próxima seção detalharemos esse conceito tal como no modelo de Jackson e Wolinsky [6] e incrementamos uma modificação para adaptá-lo ao nosso contexto.

4.2.2 O Modelo de Co-autores

O modelo de co-autores foi introduzido por Jackson e Wolinsky [6]. A idéia é que indivíduos se beneficiam da colaboração com outros, por exemplo, em um projeto de pesquisa. Além do benefício de ter outra pessoa dedicando tempo a trabalhar com o nó, existe um benefício extra de trabalharem juntos, algo chamado de sinergia, que aumenta a utilidade de trabalharem juntos e é proporcional ao produto dos tempos que ambos dedicam um ao outro. Se eles passam mais tempo juntos, mais desse benefício se obtém. Se indivíduos estão dedicando mais tempo a outros nós, resta menos tempo para trabalhar com cada um. Cada autor tem uma quantia fixa de tempo para se dedicar a quem ele gosta trabalhar e a quantidade de pessoas com as quais ele vai trabalhar é $d_i(g)$, seu grau na rede. Então, este modelo considera uma rede sem pesos nas ligações para representar uma rede científica de colaboração. Assim, a utilidade de um autor é dada por:

$$u_i(g) = \sum_{j:g_{ij}>0} \left(\frac{1}{d_i(g)} + \frac{1}{d_j(g)} + \frac{1}{d_i(g)d_j(g)} \right),$$

se $d_i(g) > 0$ e $u_i(g) = 1$ se $d_i(g) = 0$.

Os custos ficam então implícitos e a utilidade de cada um é proporcional a soma dos tempos que eles colocam no projeto com um autor, do tempo que o outro coloca e do produto desses tempos.

Para o modelo de co-autores apresentado por Jackson e Wolinsky [6], o conceito de estabilidade definido em é o de estabilidade par a par. Segundo eles, uma rede g é estável par a par se:

1. para todo $g_{ij} > 0$, $u_i(g) \geq u_i(g - ij)$ e $u_j(g) \geq u_j(g - ij)$ e
2. para todo $g_{ij} = 0$, se $u_i(g + ij) > u_i(g)$, então $u_j(g + ij) < u_j(g)$,

onde $g - ij$ e $g + ij$ são respectivamente a rede g sem a ligação entre os nós i e j e a rede

g acrescida desta ligação. Ou seja, dos pares de nós que estão ligados, ambos não têm interesse em quebrar a ligação pois ficariam em situação pior na rede se a quebrassem e dos pares que não estão ligados, se um deles tiver sua situação melhorada por uma adição de uma ligação, a situação deste outro piora por conta dessa adição. Assim, ligações não são quebradas e novas ligações não são feitas e a rede é dita estável par a par.

Porém, no contexto do nosso modelo, algumas outras situações podem alterar a estrutura da rede. Na próxima seção, após apresentar nossa definição de utilidade, nós daremos uma definição de estabilidade par a par adequada ao nosso modelo.

No resultado a seguir obtido por [6] sobre a questão da análise da estabilidade, é feita uma distinção entre as redes que são eficientes e as que são estáveis, como segue:

Proposição 4.2.1 (Jackson e Wolinsky [6]). *No modelo de co-autores, se n é par, então a estrutura de rede eficiente consiste de $n/2$ pares isolados. Se uma rede é estável par a par e $n \geq 4$, então é ineficiente e pode ser particionada em componentes completamente conectadas, cada uma com um número diferente de membros. Mais ainda, se m é o número de membros de um componente de uma rede estável par a par e \hat{m} é o número de membros de uma componente diferente que não é maior que a primeira, então $m > \hat{m}^2$.*

Ou seja, se uma rede eficiente, ela é constituída por $n/2$ pares separados. Já redes estáveis par a par e com $n \geq 4$ são ineficientes e podem ser particionadas em componentes completamente conectadas e com número diferente de membros. Além disso, tem-se uma condição suficiente sobre os números de membros das componentes para que a estabilidade aconteça.

4.3 O Modelo de Co-autores com Pesos nas Ligações

No modelo de co-autores de Jackson e Wolinsky [6], autores se ligam a outros autores ou não. No mundo real, sabemos que algumas relações no entanto são mais frequentes que outras, isto é, um autor pode trabalhar com outro em mais de um projeto, obtendo assim maior proximidade, o que pode lhe resultar em maiores benefícios, por criar mais afinidade e isso melhorar a capacidade de trabalharem juntos. Estabelecemos um modelo então que representa a idéia de que cada ligação estabelecida entre dois autores i e j pode ter um peso, definido pela quantidade de projetos que os autores desenvolvem juntos, representada por n_{ij} .¹ A utilidade de um autor i é então representada por:

$$u_i(g) = \sum_{j:g_{ij}>0} \left(\frac{n_{ij}}{d_i(g)} + \frac{n_{ij}}{d_j(g)} + \frac{n_{ij}^2}{d_i(g)d_j(g)} \right) \quad (4.1)$$

se $d_i(g) > 0$, e $u_i(g) = 1$ se $d_i(g) = 0$. Diferente do modelo de Jackson e Wolinsky [6], $d_i(g) = \sum_{j \in N} n_{ij}$, ou seja, é a soma das quantidades de trabalhos desenvolvidos e não apenas a quantidade de co-autores com quem se relaciona. De acordo com o novo modelo, o valor gerado por uma relação com o jogador j é proporcional a quantidade de vezes que eles trabalham juntos. Os custos apesar de não evidentes, estão implícitos no grau de cada co-autor.

O conceito de estabilidade necessita ser adaptado de acordo com este novo conceito desde que além de quebrar e estabelecer ligações, os nós podem intensificar ou diminuir as intensidades das ligações. Para estabilidade par a par é requerido que nenhum autor possa se beneficiar reduzindo o número de projetos que tem com algum de seus colaboradores e se algum autor se beneficiar de um aumento do número de projetos com um dado autor, o

¹Note que $g_{ij} = n_{ij}$. Daqui em diante, ao nos referirmos ao peso da ligação entre i e j , usaremos a notação n_{ij} .

segundo autor fica em pior situação se concordar em intensificar a ligação. Formalmente, o conceito de estabilidade adaptado ao novo modelo é dado por:

- $u_i(g) \geq u_i(g - x_{ij}), \forall 0 \leq x_{ij} \leq n_{ij}$ e $u_j(g) \geq u_j(g - x_{ij}), \forall 0 \leq x_{ij} \leq n_{ij}$,
- $\forall x_{ij} > 0$, se $u_i(g + x_{ij}) > u_i(g)$, então $u_j(g + x_{ij}) < u_j(g)$,

onde $g - x_{ij}$ (resp., $g + x_{ij}$) é igual a rede g com a intensidade da ligação entre i e j diminuída (resp., acrescida) de x_{ij} unidades.

4.4 Resultados

Um dos principais objetivos ao se estudar redes é analisar sua formação, identificando que estruturas de rede são mais prováveis de surgirem de acordo com critérios como eficiência e estabilidade. Nosso objetivo nesta seção, é generalizar a Proposição 4.2.1, utilizando o modelo descrito na seção anterior. Proposição 4.4.1 mostra quais estruturas são eficientes no modelo de co-autores com peso nas ligações.

Proposição 4.4.1. *Seja N , o conjunto de co-autores, $n = ||N||$, a cardinalidade de N , e V a soma total dos benefícios dos co-autores pertencentes a uma rede g . Se n é par, então a estrutura eficiente consiste de $n/2$ pares separados, concentrando assim i e j todos seus projetos em um único co-autor.*

Prova: Para analisar eficiência, note que:

$$V = \sum_{i \in N} (u_i(g)) = \left(\sum_{i: d_i(g)=0} 1 \right) + \sum_{i: d_i(g)>0} \sum_{j: g_{ij}>0} \left(\frac{n_{ij}}{d_i(g)} + \frac{n_{ij}}{d_j(g)} + \frac{n_{ij}^2}{d_i(g)d_j(g)} \right).$$

Note que o somatório das razões entre as intensidades das ligações e o grau de cada autor é 1, se eles têm grau positivo. Então, a soma do primeiro somatório e do somatório

duplo das duas primeiras parcelas é no máximo $2n$, isto é,

$$V \leq 2n + \sum_{i:d_i(g)>0} \sum_{j:g_{ij}>0} \frac{n_{ij}^2}{d_i(g)d_j(g)}.$$

A igualdade ocorre quando $d_i(g) > 0$ para todo i . Como $n_{ij} \leq d_i(g)$ e $n_{ij} \leq d_j(g)$, então $n_{ij}^2 \leq d_i(g)d_j(g)$, onde a igualdade é atingida quando $n_{ij} = d_i(g) = d_j(g)$. Daí,

$$\sum_{i:d_i(g)>0} \sum_{j:g_{ij}>0} \frac{n_{ij}^2}{d_i(g)d_j(g)} \leq n,$$

e, conseqüentemente, o maior valor para V é $3n$ que é atingido quando cada co-autor se liga a um único outro co-autor e todos os seus projetos são realizados exclusivamente com aquela pessoa. Assim, se n é par, a rede eficiente é a que é formada por pares de jogadores ligados entre si e que concentram todos seus projetos nesta ligação. ■

Porém, nem sempre indivíduos agem de acordo com o que traz maior ganho utilitário para o conjunto de indivíduos no grafo como um todo. Agora então investigaremos quais as redes estáveis para o modelo de co-autores com pesos nas ligações. Nós apresentaremos dois resultados: um considerando que os pesos nas ligações serem ilimitadas e outro considerando um limite para a força das ligações.

O próximo resultado afirma que indivíduos ligados em uma rede, seja ela com ligações ilimitadas ou não, ou têm interesse em quebrar a ligação ou desejam aumentar a intensidade. Obviamente, ao tratar de redes limitadas, o aumento de intensidade só poderá ser feita até a intensidade da ligação ser o limite máximo fixado.

Lema 4.4.2. *Se i e j estão ligados em uma rede de co-autores com pesos, e não formam um par isolado, então ou pelo menos um deles gostaria de quebrar a ligação ou ambos têm incentivo para aumentar a intensidade da ligação entre eles.*

Prova:

Considere uma rede g na qual dois indivíduos i e j estão ligados com uma intensidade $n_{ij} > 0$. Então, a utilidade do autor i pode ser expressa como:

$$u_i(g) = 1 + \frac{n_{ij}}{d_j} + \frac{n_{ij}^2}{d_i d_j} + \sum_{k: g_{ik} > 0, k \neq j} \frac{n_{ik}}{d_k} + \sum_{k: g_{ik} > 0, k \neq j} \frac{n_{ik}^2}{d_i d_k}.$$

Seja $D = \sum_{k: g_{ik} > 0, k \neq j} \frac{n_{ik}^2}{d_k}$, $d_i = n_{ij} + K_1$ e $d_j = n_{ij} + K_2$, onde $K_1 = \sum_{k: g_{ik} > 0, k \neq j} n_{ik}$ e $K_2 = \sum_{k: g_{jk} > 0, k \neq i} n_{jk}$. Então, nós podemos reescrever $u_i(g)$ como segue:

$$u_i(g) = 1 + \frac{n_{ij}}{(n_{ij} + K_2)} + \frac{n_{ij}^2}{(n_{ij} + K_1)(n_{ij} + K_2)} + \sum_{k: g_{ik} > 0, k \neq j} \frac{n_{ik}}{d_k} + \frac{D}{(n_{ij} + K_1)}. \quad (4.2)$$

Note que a utilidade para o autor i na rede $g - n_{ij}$, onde a ligação entre i e j é removida, pode ser calculada fazendo $n_{ij} = 0$ na Equação (4.2).

Vamos dividir a análise em três casos. Primeiro, consideremos o caso no qual $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$. Então, a derivada de $u_i(g)$ com respeito a n_{ij} é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(g)}{\partial n_{ij}} &= \frac{K_2}{(n_{ij} + K_2)^2} + \frac{n_{ij}^2(K_1 + K_2) + 2n_{ij}K_1K_2}{(n_{ij} + K_1)^2(n_{ij} + K_2)^2} - \frac{D}{(n_{ij} + K_1)^2} = \\ &= \frac{-D(n_{ij} + K_2)^2 + K_2(n_{ij} + K_1)^2 + n_{ij}^2(K_1 + K_2) + 2n_{ij}K_1K_2}{(n_{ij} + K_1)^2(n_{ij} + K_2)^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Primeiro, note que o sinal da derivada é igual ao sinal do numerador, já que o sinal do denominador é sempre positivo. Então, note que o numerador da fração é quadrático em n_{ij} com o coeficiente do termo n_{ij}^2 , e pode ser escrito como $an_{ij}^2 + bn_{ij} + c$, onde $a = (2K_2 + K_1 - D)$, $b = 4K_1K_2 - 2K_2D$ e $c = K_2K_1^2 - DK_2^2$. Note que desde que $D = \sum_{k: g_{ik} > 0, k \neq j} \frac{n_{ik}^2}{d_k} \leq \sum_{k: g_{ik} > 0, k \neq j} n_{ik} = K_1$, então a é positivo. O coeficiente do termo n_{ij} , b , também é positivo. Então, as raízes da equação, se existirem, podem ser escritas como sendo $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Então, podemos concluir que:

1. Se $\Delta < 0$, como a é positivo, o numerador será sempre positivo. Portanto, $u_i(g)$ é crescente em n_{ij} .

²Quando não houver possibilidade de confusão, nós usaremos d_i em vez de $d_i(g)$ para representar o grau de i na rede g .

2. Se $\Delta = 0$, a raiz é igual a $-b/2a$ que é negativo. Logo, $c > 0$ e assim, para $n_{ij} \geq 0$, o numerador será sempre positivo como no caso anterior.
3. Se $\Delta > 0$ e $c \geq 0$ a conclusão dos casos anteriores continua válida.
4. Se $\Delta > 0$ e $c < 0$, como a menor das raízes é negativa, então o numerador é negativo até um certo valor positivo de n_{ij} . Então para n_{ij} de 0 até este valor, que chamaremos de n_{ij}^i , a função $u_i(g)$ é decrescente em n_{ij} e para n_{ij} maior que este valor, $u_i(g)$ é crescente.

Podemos concluir então que nos três primeiros casos, como a utilidade é crescente, i sempre tem interesse em aumentar suas ligações com j . Já no último caso, se $0 < n_{ij} < n_{ij}^i$, i tem interesse em quebrar a intensidade de sua ligação com j e para valores de n_{ij} maiores que n_{ij}^i , i tem interesse em intensificar a ligação. Analisando analogamente a derivada de $u_j(g)$ em relação a n_{ij} , chega-se a conclusões semelhantes. Seja n_{ij}^j o valor máximo para o qual $u_j(g)$ é decrescente em n_{ij} . Suponha sem perda de generalidade que $n_{ij}^i \leq n_{ij}^j$. Então, se $n_{ij} \leq n_{ij}^j$, então j tem interesse em quebrar a ligação com i , enquanto se $n_{ij} > n_{ij}^j$, ambos i e j se beneficiam de um aumento em n_{ij} .

Consideremos agora o caso $K_2 = 0$ e $K_1 > 0$. Isto ocorre quando j está ligado apenas a i . Neste caso, a derivada de $u_i(g)$ é dada por:

$$\frac{\partial u_i(g)}{\partial n_{ij}} = \frac{K_1 - D}{(n_{ij} + K_2)^2}.$$

Como $K_1 \geq D$, se $K_1 \neq D$, a derivada sempre é positiva e $u_i(g)$ é crescente em n_{ij} e se $K_1 = D$ (o que ocorre se cada k ligado a i estiver ligado apenas a ele, formando uma estrela), então a derivada de $u_i(g)$ em relação a n_{ij} é zero. Precisamos então analisar o que ocorre com a derivada de $u_j(g)$ nesse caso específico. De fato, como j está ligado apenas a i , a derivada de $u_j(g)$ é dada por:

$$\frac{\partial u_j(g)}{\partial n_{ij}} = \frac{2K_1 n_{ij}}{(n_{ij} + K_1)^2}.$$

Logo, a derivada de u_j é sempre positiva. Então, ambos, i e j , têm interesse em intensificar a intensidade da ligação. O caso $K_1 = 0$ e $K_2 > 0$ é simétrico a este. Neste caso, a derivada de i em relação a n_{ij} é sempre positiva e a derivada de j em relação a n_{ij} é zero ou sempre positiva.³ ■

O próximo resultado estabelece uma condição sobre os graus de dois autores que não estão ligados para que um deles se interesse em se ligar ao outro. Logo, se essa condição se verificar para um determinado autor em relação a outro, e este outro, pela mesma condição ou por outra, também tem vontade de se ligar ao primeiro, então a rede não pode ser estável par a par.

Lema 4.4.3. *O nó i tem interesse em acrescentar uma ligação de intensidade n_{ij} ao nó j ao qual ele não está ligado se $\frac{d_i(g)+2n_{ij}}{d_j(g)+n_{ij}} > \frac{1}{d_i(g)} \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{d_k(g)}$.*

Prova: Como definido antes, a rede g acrescida de n_{ij} na força da ligação entre i e j é denotada por $g + n_{ij}$. Então, nós iremos comparar a utilidade do autor i na rede g (sem qualquer ligação de i e j) com sua utilidade na rede $g + n_{ij}$ (neste caso, a rede $g + n_{ij}$ é a rede g aumentada de uma ligação entre i e j de força n_{ij}), que pode ser escrita como segue:

$$u_i(g + n_{ij}) = \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}}{d_i(g) + n_{ij}} + \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}}{d_k(g)} + \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{(d_i(g) + n_{ij})d_k(g)} + \frac{n_{ij}}{d_i(g) + n_{ij}} + \frac{n_{ij}}{d_j(g) + n_{ij}} + \frac{n_{ij}^2}{(d_i(g) + n_{ij})(d_j(g) + n_{ij})}.$$

Desde que a utilidade de i na rede g é dada pela Equação (4.1), adicionar uma ligação

³No caso $K_1 = 0$ e $K_2 = 0$, que ocorre se os nós estiverem ligados em um par isolado, a derivada da função utilidade é igual a zero para ambos i e j . Por isso, o lema vale apenas quando isto não ocorre.

entre i e j irá beneficiar i se:

$$\sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}}{d_i(g)+n_{ij}} + \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}}{d_k(g)} + \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{(d_i(g)+n_{ij})d_k(g)} + \frac{n_{ij}}{d_i(g)+n_{ij}} + \frac{n_{ij}}{d_j(g)+n_{ij}} + \frac{n_{ij}^2}{(d_i(g)+n_{ij})(d_j(g)+n_{ij})} > \sum_{k:g_{ik}>0} \left(\frac{n_{ik}}{d_i(g)} + \frac{n_{ik}}{d_k(g)} + \frac{n_{ik}^2}{d_i(g)d_k(g)} \right).$$

Como $\sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}}{d_i(g)+n_{ij}} + \frac{n_{ij}}{d_i(g)+n_{ij}} = 1$ e $\sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}}{d_i(g)} = 1$, isto é equivalente a:

$$\frac{n_{ij}}{d_j(g)+n_{ij}} + \frac{n_{ij}^2}{(d_i(g)+n_{ij})(d_j(g)+n_{ij})} > \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{d_i(g)d_k(g)} - \frac{n_{ik}^2}{(d_i(g)+n_{ij})d_k(g)},$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{n_{ij}}{d_j(g)+n_{ij}} \left[1 + \frac{n_{ij}}{d_i(g)+n_{ij}} \right] > \left[\frac{1}{d_i(g)} - \frac{1}{d_i(g)+n_{ij}} \right] \sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{d_k(g)}.$$

Então, o nó i tem interesse em se ligar a j com ligação de intensidade n_{ij} se:

$$\frac{d_i(g)+2n_{ij}}{d_j(g)+n_{ij}} > \frac{1}{d_i(g)} \sum_{k:k \neq j, g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{d_k(g)}. \quad (4.4)$$

■

Este resultado é útil para a próxima proposição que trata do fato de que, em uma rede estável par a par, se dois indivíduos têm o mesmo grau, então eles têm de estar ligados. De fato, por este lema tendo o mesmo grau, ambos teriam vontade de se ligar e a rede não seria estável.

Proposição 4.4.4. *Se g for estável par a par e $d_i(g) = d_j(g)$, então $g_{ij} > 0$.*

Prova: Se $d_j(g) \leq d_i(g)$, então $\frac{d_i(g)+2n_{ij}}{d_j(g)+n_{ij}} > 1$. Por outro lado, como

$$\frac{n_{ik}}{d_k} \leq 1 \Rightarrow \frac{n_{ik}^2}{d_k(g)} \leq n_{ik} \Rightarrow \sum_{k:k \neq j, g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{d_k(g)} \leq \sum_{k:k \neq j, g_{ik}>0} n_{ik}$$

e $\sum_{k:g_{ik}>0} n_{ik} = d_i(g)$, segue que $\sum_{k:g_{ik}>0} \frac{n_{ik}^2}{d_k(g)} \leq d_i(g)$. Então, o lado direito da Equação (4.4) é no máximo 1. Logo, pelo Lema 4.4.3, i tem interesse em adicionar uma ligação de intensidade n_{ij} com j . Se os dois tem mesmo grau, então j também tem interesse em adicionar uma ligação de intensidade n_{ij} com i . Portanto, como g é estável par a par, $g_{ij} > 0$. ■

No estudo das redes que são estáveis par a par, é útil nos munirmos de resultados que nos mostram em quais grafos os nós têm interesse em estabelecer (ou quebrar) ligações ou modificar intensidade das ligações que possui. O próximo resultado fornece mais uma condição sob a qual um determinado nó tem interesse em se ligar a outro.

Lema 4.4.5. *Se g for estável par a par, $g_{ih} = 0$ e $d_h(g) \leq \max \{d_k(g) | g_{ik} > 0\}$, então i se beneficia de uma ligação com h de intensidade $n_{ih} = 1$.*

Prova: Na prova da Proposição 4.2.1 de Jackson e Wolinsky [6], demonstra-se que se $d_h(g) \leq \max \{d_k(g) | g_{ik} > 0\}$, então é verdade que:

$$\frac{d_i(g) + 2}{d_h(g) + 1} > \frac{1}{d_i(g)} \sum_{k: g_{ik} > 0} \frac{1}{d_k(g)}.$$

Esta inequação equivale a nossa inequação na Expressão (4.4), fazendo $n_{ih} = 1$. Então, i tem interesse em se ligar a h com ligação de intensidade 1. ■

O próximo resultado mostra que uma rede que seja estável par a par não pode conter nós isolados.

Lema 4.4.6. *Em uma rede estável par a par não existem nós isolados.*

Prova: Se existe um nó isolado i e um outro nó com grau positivo j , ambos têm interesse em se ligar, devido ao lema 4.4.5, já que o nó com grau positivo se beneficiaria de uma ligação com qualquer um que tenha grau zero por este ter grau menor que qualquer um ao qual j está ligado. Enquanto que i têm interesse nesta ligação, uma vez que sua utilidade isolado é 1 e se ele se juntar a j , sua utilidade passa a ser de $u_i = 1 + \frac{n_{ij}}{d_j(g)} + \frac{n_{ij}^2}{d_i(g)d_j(g)}$. Já se houver mais de um nó isolado, quaisquer dois deles sempre têm vantagem de se ligar entre si, pois nós isolados, por definição têm utilidade 1, enquanto que se ambos estabelecerem uma relação exclusiva entre si, a utilidade de cada um passa a ser 3, sendo assim, a rede não seria estável par a par. ■

O Teorema 4.4.7 a seguir mostra que não existem redes estáveis par a par quando as forças das ligações podem ser ilimitadas.

Teorema 4.4.7. *Se $n \geq 3$ e os co-autores podem estabelecer ligações de intensidade ilimitada, então não existe rede estável par a par.*

Prova: Pelo Lema 4.4.2, excetuando-se o caso de uma ligação entre pares isolados, não pode haver ligações em uma rede estável par a par na qual a intensidade das ligações pode ser ilimitada. É preciso analisar as redes que poderiam ser estáveis par a par por não satisfazerem a condição do Lema 4.4.2. Primeiro, analisemos o caso no qual há nós isolados, isto é, a rede formada apenas por nós isolados ou por pares isolados e nós isolados. Pelo Lema 4.4.6, tal rede também não é estável par a par. Resta a análise da rede formada por pares isolados. Os indivíduos em cada par não têm interesse em intensificar nem diminuir suas ligações (intensidade sempre 3). Também não têm interesse em quebrar a ligação, pois como nó isolado sua utilidade é 1. Se houverem dois pares isolados com mesma intensidade na ligação, os nós de cada par teriam interesse em se ligar pelo Lema 4.4.5. Logo, nos resta analisar se na rede formada por pares isolados com ligações de intensidades diferentes, os indivíduos em pares que não estão ligados têm interesse em estabelecer uma ligação. Pelo Lema 4.4.5, o indivíduo que está no par com maior intensidade de ligação, que chamaremos de j , têm interesse em se ligar ao indivíduo que está em um par de menor intensidade, que chamaremos de i . Pelo Lema 4.4.3, i tem interesse em se ligar a j se $n_{ij} > d_j(g) - d_i(g)$, o que é sempre possível, já que a rede é ilimitada. Sendo assim, nenhuma das estruturas, se $n \geq 3$ é estável par a par, quando a intensidade da ligação pode ser ilimitada. ■

Corolário 4.4.8. *Se $n > 1$ e os co-autores podem ter intensidade ilimitada, a única rede estável par a par é a rede formada por um único par isolado.*

Prova: Pelo Teorema 4.4.7, para $n \geq 3$, não há estáveis par a par. Analisando então, o caso $n = 2$, sabe-se que não há nós isolados pelo Lema 4.4.6. Logo, para que a rede seja estável par a par, eles devem estar em um par. Em um par, a utilidade de cada indivíduo é 3, que não pode ser aumentada por diminuição ou incremento da intensidade. Logo, a rede é estável par a par. ■

Note que o Teorema 4.4.7 só é válido para as redes nas quais as intensidades das ligações podem ser ilimitadas, uma vez que nas redes cujas intensidades de ligações são limitadas os nós apesar de quererem aumentar a intensidade das ligações podem não conseguir fazer isso por a ligação já estar com a máxima intensidade permitida.

O próximo teorema mostra quais estruturas de rede são estáveis considerando que as intensidades das ligações são limitadas por um número máximo l . O resultado apresentado na Proposição 4.2.1 é um caso particular do Teorema 4.4.9, considerando $l = 1$.

Teorema 4.4.9. *Seja $n > 1$ e l o limite máximo que o peso de uma ligação pode ter em uma rede de co-autores com peso nas ligações. Então qualquer rede estável par a par consiste de componentes completamente conectadas de nós de graus distintos nas quais todas as ligações possuem peso igual a l , exceto se houver uma única componente de dois nós que pode ter intensidade de ligação positiva com valor menor ou igual a l . Além disso, se m e \hat{m} são os graus dos nós em duas componentes distintas e $m > \hat{m}$, então $m > \frac{\hat{m}^2}{l}$.*

Prova: Pela Proposição 4.4.4 todos os nós de mesmo grau estão conectados entre si em uma rede que é estável par a par. Pelo Lema 4.4.2, as intensidades destas ligações são iguais a l , exceto no caso de dois nós isolados que podem ter ligação de intensidade menor que l . Seja i um nó de grau máximo e j um nó de grau menor que i . Pelo Lema 4.4.5, se i estiver ligado a j então todos os nós que têm alguma ligação com i se beneficiariam de uma ligação com j de intensidade 1. Pelo Lema 4.4.2, estes nós se beneficiariam se suas ligações com j fossem de intensidade máxima. Logo, o grau de j não poderia ser menor

que o de i , ou seja, temos uma contradição. Portanto, os nós de grau máximo em uma rede estável par a par formam uma componente completamente conectada de ligações de intensidade l , se houverem mais de dois nós de grau máximo. Se houverem exatamente dois nós de grau máximo, a ligação tem intensidade no máximo l .

Argumento similar vale para mostrar que, se a rede é estável par a par, os nós de grau imediatamente menor que os de grau máximo também formam uma componente completamente conectada de ligações de intensidade l , se houverem mais de dois nós de grau imediatamente menor que o máximo e no máximo l , se forem exatamente dois nós de grau imediatamente menor que o máximo, os de grau imediatamente menor que estes também e assim por diante. Além disso, pelo Lema 4.4.6, não podem haver nós isolados. Sendo assim, se a rede é estável par a par, é formada por componentes completamente conectadas de ligações de intensidade sendo a máxima permitida l , podendo haver além das mesmas, um único par com intensidade menor que l . Só pode haver um par isolado, pois se houverem dois pares isolados, o que está no de maior intensidade (l_2), a quem chamaremos de j , gostaria de se ligar ao que está na intensidade de menor ligação (l_1), i pelo Lema 4.4.5 e i gostaria de se ligar a j pelo Lema 4.4.3, sempre que $n_{ij} > l_2 - l_1$. Como tal diferença é menor que l , eles sempre teriam interesse em se ligar e a rede não seria estável par a par.

Por fim, pelo Lema 4.4.5 os nós da componente completamente conectada que têm grau maior têm incentivo a se ligarem aos nós das componentes de grau menor. Para que necessariamente a rede seja estável par a par, os nós de grau menor não podem ter interesse em estabelecer tal ligação. Para que isto ocorra, se $0 < d_i(g) < d_j(g)$, pelo Lema 4.4.3, devemos ter $\forall n_{ij} > 0$,

$$\frac{d_i + n_{ij}}{d_j + n_{ij}} \leq \frac{1}{d_i} \sum_{k: g_{ik} > 0} \frac{l^2}{d_i} = \frac{l}{d_i} \iff d_j \geq \frac{d_i}{l} (d_i + 2n_{ij}) - n_{ij} = \frac{d_i^2}{l} + n_{ij} \left(\frac{2d_i}{l} - 1 \right).$$

Como $\frac{2d_i}{l} - 1 > 0$, então $\frac{d_i^2}{l} + n_{ij} \left(\frac{2d_i}{l} - 1 \right) \leq \frac{d_i^2}{l} + 2d_i - l$. Logo, $d_j \geq \frac{d_i^2}{l} + 2d_i - l \geq \frac{d_i^2}{l}$,

como desejado. ■

4.5 Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho nós generalizamos o modelo de co-autores de Jackson e Wolinsky apresentando um modelo de representação de uma rede de co-autores no qual os benefícios dos nós do grafo, isto é, dos participantes da rede, dependem da quantidade efetiva de trabalhos desenvolvidos. Esta generalização é útil desde que a quantidade efetiva de tempo que cada autor se dedica aos seus co-autores depende do número de projetos nos quais está envolvido.

Nós mostramos que a rede consistindo de pares isolados de autores é eficiente. Além disso, considerando as redes nas quais co-autores podem estabelecer ligações de intensidade ilimitadas, mostramos que se $n \geq 3$, então não existem redes estáveis par a par, enquanto que no caso onde os pesos das ligações são limitados por um valor máximo, as redes estáveis par a par consistem em componentes completamente conectadas onde todas as ligações têm peso máximo, exceto no caso de uma componente com dois nós que podem ter uma ligação de qualquer peso positivo menor ou igual ao peso máximo.

Note que nem o modelo de Jackson e Wolinsky, nem o proposto neste capítulo são capazes de diferenciar a situação onde existe um único trabalho sendo desenvolvido por três autores da situação onde cada um desses três autores desenvolve dois trabalhos, sendo cada desses com um autor diferente, pois ambas as situações seriam modeladas por uma componente completamente conectada de 3 nós, onde todas as ligações têm peso igual a 1. Para trabalhos futuros, nós pretendemos modelar a situação de co-autoria como um grafo misto na qual há nós que representam projetos e nós que representam indivíduos.

Indivíduos precisariam então decidir entre se ligar ou não a um determinado projeto. Deste modo, seria possível distinguir entre as situações acima. Além disso, queremos comparar os resultados obtidos com dados reais de redes de co-autores.

Ligações com Pesos

5.1 Introdução

Muitos modelos têm sido criados para tentar representar situações específicas envolvendo diversos tipos de redes. Estamos particularmente interessados nas redes com pesos (ou *weighted networks*). Nas mais diversas relações é fácil constatar que algumas ligações podem ser mais fortes que outras.

Indivíduos podem se dedicar mais a uma amizade do que a outra. Podemos supor que quanto mais tempo e atenção são destinados a uma determinada amizade, ela tende a se fortalecer. De certo modo, podemos então dizer que a força (peso) das relações estaria relacionada aos investimentos feitos pelos indivíduos em cada uma delas.

No Capítulo 4, nós apresentamos um modelo de rede de co-autores no qual as ligações têm suas intensidades dadas pela quantidade de projetos nos quais os indivíduos nas ligações trabalham juntos. Tal modelo de co-autores é específico à situação de colaboração, pois capta a idéia de que indivíduos ganham um benefício extra por estarem produzindo algo juntos. Aqui, trataremos das redes, onde os indivíduos investem nas suas ligações uma quantidade de algum recurso, mas sem essa particularidade do benefício da sinergia produzida pelo trabalho conjunto.

Dada a importância do tema, muitos artigos têm sido feitos recentemente considerando redes nas quais os indivíduos decidem quanto investir em cada relação. Basicamente se dividem entre dois grupos: os que consideram o investimento depois de estabelecida a rede e os que consideram a formação da rede e a escolha dos investimentos

como simultâneos. Goyal e Moraga Gonzales [37] consideram uma situação na qual firmas formam ligações e então decidem como alocar seus investimentos. Já Brueckner [9] considera um modelo de rede de amizades onde agentes despendem um certo esforço para estabelecer uma relação com outros agentes, mas o nível de investimento individual é uma decisão variável e a formação do *link* é probabilística. Rogers [14] propõe um modelo no qual as ligações são dirigidas e podem ser interpretadas como a influência que cada agente tem sobre o outro, enfatizando a heterogeneidade dos jogadores. Neste trabalho, estamos particularmente interessados no trabalho de Bloch e Dutta [10]. Em tal artigo, supõe-se que jogadores em redes formais (internet) ou informais (amizades) têm uma quantidade fixa de recursos, devendo alocá-los através de seus *links*, mas os jogadores são homogêneos. Algumas das questões principais de tais trabalhos é a análise sobre a formação de redes: quais redes surgem? quais redes se mantêm? Essas questões estão diretamente relacionadas a análise de quais redes são eficientes e quais redes são estáveis.

Bloch e Dutta [10] apresentam resultados sobre algumas estruturas de rede que sob algumas condições são as redes que são eficientes e estáveis. Tal trabalho baseia-se em relações estabelecidas quando um indivíduo (ou componente) faz um investimento de um determinado recurso. As relações assim formadas determinam uma rede de ligações. Estabelecendo que para cada rede existe um grafo que a represente e definindo o que seriam grafos eficientes e grafos estáveis, são definidos conceitos importantes para a análise dos grafos como o de força da ligação e confiabilidade. É importante ter um critério que diga o quanto um caminho entre um nó e outro do grafo é confiável e que esta confiabilidade dependa de alguma forma da força das ligações. Baseando-se em tais definições, o artigo citado afirma que dadas algumas restrições, a estrela¹, por exemplo, é a única estrutura

¹A estrela é um grafo no qual um nó, chamado de nó central, está ligado a todos os outros, chamados periféricos, e os periféricos estão ligados apenas ao nó central.

eficiente. Neste trabalho, revisamos alguns resultados deste artigo e apresentamos alguns resultados sobre as redes eficientes e estáveis.

5.2 O Modelo

Um dos objetivos nos estudos sobre redes é entender como elas se formam. O modelo apresentado por Bloch e Dutta [10] analisa como a rede se forma quando jogadores podem escolher como investir em determinada relação.

Eles analisam redes de comunicação. Segundo [10], redes de comunicação são redes nas quais os agentes recebem benefícios positivos por conta dos indivíduos a quem estão conectados com os benefícios decrescendo à medida que a distância entre dois agentes aumenta. Tais redes podem ser formais como a internet ou informais como uma rede de relacionamentos sociais. Em ambos os casos, é comum observar que ligações diferentes podem ter qualidade diferente e que agentes podem escolher quanto investir em cada ligação.

Neste trabalho, supõe-se então que cada um dos jogadores envolvidos tem um recurso para investir e que eles alocam esse recurso em diferentes interações com outros jogadores. Analisando um grupo de indivíduos ligados entre si formando uma rede, é razoável considerar que os mesmos obtenham algum tipo de benefício das relações que estabelecem. Certas relações podem ser benéficas para o indivíduo pela amizade estabelecida, acesso a informações que o outro possui, ou troca de favores, por exemplo. É também razoável supor que para estabelecer relações seja necessário investir nelas: para manter uma amizade, o indivíduo investe parte de seu tempo dedicando-se àquele amigo específico ou para duas empresas criarem uma parceria, elas devem investir uma certa quantia para es-

tabelecer e manter a ligação. Além disso, uma relação pode ser mais forte que outra, dependendo de alguma forma dos investimentos dos indivíduos envolvidos. Por exemplo, amizades nas quais os indivíduos investem mais recurso tendem a ser mais relevantes, já que os indivíduos passam a se conhecer mais e fortalecer as afinidades.

Seja então $N = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de indivíduos. Cada um dos n indivíduos tem uma quantidade $X > 0$ de recurso, que pode ser tempo, dinheiro, ou outra quantidade necessária para estabelecer a ligação. Cada indivíduo distribui então seus recursos entre alguns indivíduos da população.

Considere x_i^j a quantidade de recurso que o indivíduo i destina à relação com o indivíduo j . Então, define-se a força da relação entre i e j , s_{ij} , como sendo uma função simétrica e aditivamente separável² de x_i^j e x_j^i , de forma que:

$$s_{ij} = \phi(x_i^j) + \phi(x_j^i),$$

em que $\phi(\cdot)$ é uma função não-decrescente e convexa. Além disso, supõe-se $\phi(0) = 0$ e $\phi(X) < 1/2$ de modo que $s_{ij} \in [0, 1]$.

A definição da força das ligações como uma função aditivamente separável implica que a decisão do jogador sobre a alocação dos recursos nas ligações diretas é independente de quanto os seus vizinhos decidem investir nas ligações diretas com ele. No entanto, a estratégia de um jogador depende da estratégia de seus vizinhos. Jogadores também obtêm benefícios das ligações indiretas, então ao decidir se vai alocar mais em uma ligação direta do que em outra, ele deve levar em consideração as estratégias dos outros jogadores para analisar quais as consequências que sua escolha trará nos benefícios obtidos das ligações indiretas. A condição de ϕ ser convexa é justificada em [10] por considerarem a mais indicada quando se trata de ligações que envolvam comunicação. No nosso traba-

²O termo aditivamente separável refere-se ao fato da função que representa a força ser uma adição onde cada parcela depende de apenas um dos investimentos.

lho, nós consideraremos também o caso ϕ côncava. Por fim, sem perda de generalidade, assume-se uma normalização de forma que a força de uma ligação esteja entre zero e um.

Dois indivíduos nessa rede estão ligados se a força da ligação direta entre eles é positiva, isto é, se um deles investe algo na relação. Dada uma estratégia de alocação de recursos de cada agente na rede, um grafo $g(X)$ com pesos é formado onde os pesos são as forças das ligações. Então, se $s_{ij} > 0$, (i, j) é um arco de $g(X)$, o que é denotado por $ij \in g(X)$.

Dois indivíduos i e j nesse grafo estão *conectados* se existe um caminho entre eles, isto é, se há uma sequência $i^0 = i, i^1, \dots, i^m, \dots, i^M = j$ tal que $i^m i^{m+1} \in g(X)$ para todo $m \in \{0, \dots, M-1\}$. Considerando então dois indivíduos conectados, i e j , pode-se dizer que o benefício obtido por i dessa relação depende do quanto está assegurado o acesso de i às informações que j possui, o que é chamado de confiabilidade da ligação. É razoável supor que a confiabilidade de uma ligação dependa de alguma forma das forças das ligações. Porém, existem diferentes formas de definir essa relação. Para Bloch e Dutta [10], a interpretação mais natural é que a força de uma ligação seja um indício da qualidade da transmissão, de forma que mensagens ou informações são enviadas com mais qualidade ou sem distorções se as ligações são mais fortes. Uma das definições então para a confiabilidade de um caminho é o produto das forças das ligações daquele caminho. Isto é, para qualquer caminho $p(i, j) = (i, i^1, \dots, i^{M-1}, j)$, é definido que

$$r(p(i, j)) = s_{ii^1} \dots s_{i^{m-1}i^m} \dots s_{i^{M-1}j}.$$

Por outro lado, em redes de comunicação física, como a internet, a comunicação depende do gargalo da rede, de forma que pode ser útil definir a confiabilidade de um caminho como a força da ligação mais fraca no caminho, isto é, se $i_0 = i, i^M = j$ e

$p(i, j) = (i^0, i^1, i^2, \dots, i^M)$, então

$$\hat{r}(p(i, j)) = \min_{k \in \{0, 1, \dots, M-1\}} S_{i^k i^{k+1}}.$$

Como agentes escolhem para seu uso os caminhos com maior confiabilidade, os benefícios de uma conexão com o indivíduo j , para o indivíduo i podem ser definidos como:

$$R(p(i, j)) = \max_{p(i, j) \in P(i, j)} r(p(i, j)),$$

ou

$$\hat{R}(p(i, j)) = \max_{p(i, j) \in P(i, j)} \hat{r}(p(i, j)),$$

em que $P(i, j)$ é o conjunto de todos os caminhos entre i e j . A partir de tais definições, deseja-se então analisar a formação de redes em tais cenários. Então, Bloch e Dutta, definem a utilidade de um agente e o valor do grafo com pesos como a seguir.

Definição 5.2.1: A utilidade que um agente i obtém de um grafo com peso g é dada por

$$U_i(g) = \sum_{j \neq i} \hat{R}(i, j),$$

se a confiabilidade é a mínima força do caminho, ou,

$$U_i(g) = \sum_{j \neq i} R(i, j),$$

se a confiabilidade é considerada como o produto das forças do caminho.

Definição 5.2.2: O valor total de um grafo é dado por

$$V(g) = \sum_i U_i(g).$$

Definição 5.2.3: Um grafo com pesos $g(X)$ é eficiente se $V(g) \geq V(g')$ para todo $g'(X)$.

Dado um vetor de investimentos \mathbf{x} , representando os investimentos de todos os indivíduos, o vetor (\mathbf{x}_{-i}, x'_i) representa os investimentos quando o indivíduo i desvia de x_i para

x'_i . Da mesma forma, $(\mathbf{x}_{-i,j}, x'_{i,j})$ denota o vetor onde ambos i e j desviam de \mathbf{x} e passam a investir (x'_i, x'_j) .

Definição 5.2.4: Um grafo $g(\mathbf{x})$ é Nash estável se não existir indivíduo i e x'_i tal que

$$U_i(g(\mathbf{x}_{-i}, x'_i)) > U_i(g(\mathbf{x})).$$

Um grafo Nash estável é então aquele no qual nenhum indivíduo i pode aumentar sua utilidade por uma mudança unilateral de estratégia. Já em um grafo fortemente estável par a par, nenhum par de indivíduos tem interesse em combinar um desvio, já que nenhum par consegue aumentar a utilidade de ambos comparado ao grafo fortemente estável par a par, como mostra a definição a seguir.

Definição 5.2.5: Um grafo $g(\mathbf{x})$ é fortemente estável par a par se é Nash estável e não existe um par de indivíduos (i, j) e desvio conjunto (x'_i, x'_j) tal que

$$U_k(g(\mathbf{x}_{-i,j}, x'_{i,j})) > U_k(g(\mathbf{x})),$$

para $k = i, j$.

Existem alguns grafos cuja estrutura é diferenciada e que devido a isso recebem nomes especiais como o grafo “estrela”, já mencionado anteriormente e que formalmente é aquele no qual existe algum i no conjunto de indivíduos tal que $g = \{ik | k \in N, k \neq i\}$. O indivíduo i seria o nó central. Há um interesse então em investigar quais estruturas de grafos seriam eficientes ou estáveis. Alguma dessas estruturas com tais características teriam alguma particularidade?

5.2.1 Eficiência e Estabilidade

Em Bloch e Dutta [10], alguns resultados são apresentados sobre o que caracteriza conjuntos de redes estáveis e eficientes para os modelos de investimento considerados.

Nós estamos particularmente interessados no resultado a seguir que generaliza um resultado de Bala e Goyal [38] para redes sem peso. Em tal resultado, Bloch e Dutta [10] consideram a confiabilidade de um caminho como o produto das forças.

Teorema 5.2.6 (Bloch e Dutta [10]). *Suponha que ϕ é uma função separável e convexa de investimentos. Então, a única rede eficiente é a estrela. Mais ainda, se ϕ é linear, então a única rede eficiente é a estrela simétrica na qual o nó central investe uma quantia igual em cada uma de suas ligações com os nós periféricos.*

Na prova sobre eficiência, a idéia é reduzir o número de ligações para formar uma estrela, mostrando que os benefícios aumentam. Porém, a estrela assim formada, segundo Bloch e Dutta [10], pode não ser factível, pois pode envolver construções nas quais o nó central invista mais do que o recurso X disponível a ele para investimentos.

A prova é dividida em duas partes. A idéia, de fato, é construir uma estrela S a partir de qualquer dado componente h com m agentes dado, tendo então um total de investimentos mX . A forma como S é construída tem como objetivo relacionar as forças de suas ligações às forças das ligações de h , de modo que uma comparação entre os benefícios de cada uma seja possível de maneira relativamente simples. S é construída para ter maior valor que h , quando h não é estrela. Então, se g contém mais que um componente, eles constroem uma estrela que tem maior valor que a soma dos valores das estrelas construídas no primeiro passo da prova. Nós primeiramente observamos que o Teorema 5.2.6 não é válido se ϕ for identicamente igual a zero, mesmo tal ϕ satisfazendo as condições do Teorema. Logo, para que este teorema possa ser válido, deve-se excluir esta possibilidade para ϕ .

Vamos agora descrever a construção da estrela S , segundo Bloch e Dutta. Seja h um certo componente com m nós, e z_i a i -ésima maior força de ligação em h , para $i = 1, 2, \dots, K$. Como h pode ter mais ligações diretas que S , é definido que um agente de h é escolhido aleatoriamente para ser o central (agente chamado de m) e que as suas

ligações com os agentes de 1 até $m - 2$ serão uma reprodução das primeiras $m - 2$ maiores forças de h , isto é, reproduzirão as forças das $m - 2$ ligações mais fortes do componente h . A última ligação com o agente denotado por $m - 1$ terá a mesma força que a soma das forças das ligações restantes em h . Isto é, sendo as forças dos componentes h, z_1, z_2, \dots, z_K , tais que z_i é a i -ésima maior força, reproduz-se as forças $z_1, z_2, \dots, \sum_{k=m-1}^K z_k$. Formalmente, Bloch e Dutta propõem obter isso definindo os investimentos de cada jogador na estrela S da seguinte forma:

$$x_i^m = \min \{ \phi^{-1}(z_i), X \}, x_m^i = \phi^{-1}(z_i) - x_i^m, i = 1, \dots, m - 2$$

$$x_{m-1}^m = \min \left\{ \phi^{-1} \left(\sum_{k=m-1}^K z_k \right), X \right\}, x_m^{m-1} = \phi^{-1} \left(\sum_{k=m-1}^K z_k \right) - x_{m-1}^m$$

Para Bloch e Dutta, S construída dessa forma satisfaz as seguintes propriedades: (1) S tem os mesmos benefícios diretos de h , (2) S tem benefícios indiretos maiores que h , se h não é estrela, (3) S é factível, se todos os nós periféricos investem todos seus recursos no nó central. O exemplo a seguir mostra que (1) pode ser falsa.

Exemplo 5.2.7. Considere $N = \{1, 2, 3\}$, $X = 1/2$, $\phi(x) = x^2$, $x_1^2 = 1/2$, $x_2^1 = 1/4$, $x_2^3 = 1/4$, $x_3^1 = 1/4$ e $x_3^2 = 1/4$. Neste caso, temos $z_1 = 5/16$, $z_2 = 2/16$ e $z_3 = 1/16$. Ao usar a construção de S proposta por Bloch e Dutta [10], temos que $x_1^3 = \min \{ \sqrt{5/16}, 1/2 \} = 1/2$ e $x_3^1 = \sqrt{5/16} - 1/2$, mas neste caso a força da ligação entre 1 e 3 não é igual a $z_1 = 5/16$, como deveria ser de acordo com a construção pretendida.

De fato, analisando essas forças temos que

$$z_i = \phi(x_i^m) + \phi(x_m^i) \Leftrightarrow$$

$$\phi(x_m^i) = z_i - \phi(x_i^m) \Leftrightarrow$$

$$x_m^i = \phi^{-1}(z_i - \phi(x_i^m)).$$

Então, se fizermos

$$x_m^i = \phi^{-1}(z_i - \phi(x_i^m)) \quad (5.1)$$

e

$$x_m^{m-1} = \phi^{-1}\left(\sum_{k=m-1}^K z_k - \phi(x_{m-1}^m)\right), \quad (5.2)$$

teremos que as forças de S serão $z_1, z_2, \dots, \sum_{k=m-1}^K z_k$, conforme pretendido por Bloch e Dutta. Então, considerando estas novas definições apresentadas acima, tornamos (1) verdadeira. A prova de que (2) é verdadeira continua a mesma contida em Bloch e Dutta [10], mas a prova de (3), fundamental para os outros resultados de Bloch e Dutta não é válida pois usa a definição incorreta dos investimentos de S . De fato utilizando a definição correta, conforme as Equações 5.1 e 5.2, não conseguimos nem corrigir a prova da Propriedade (3), nem encontrar um contra-exemplo para tal propriedade. Assim, provar o teorema, ou encontrar um contra-exemplo para o mesmo, é um problema em aberto. A mesma construção da estrela, corrigida por nós, foi suada por Block e Dutta [10] para provar outros resultados, considerando a confiabilidade como a mínima força do caminho. Então, a seguir, fornecemos resultados alternativos e complementares aos apresentados por eles em [10] que não dependem da validade da Propriedade (3).

5.3 Resultados

Nos resultados apresentados nesta seção, estamos sempre considerando a confiabilidade entre dois nós como sendo igual a menor força no caminho entre eles. A prova detalhada de cada resultado está no Apêndice, mas nesta seção damos uma idéia resumida de cada uma.

5.3.1 Estabilidade e Eficiência

Como dito anteriormente, alguns resultados de Bloch e Dutta [10] dependem da prova da Propriedade (3) que precisa ser revista. Nosso primeiro resultado nesta seção é apresentar uma prova formal acerca da eficiência e estabilidade de redes lineares descrita no artigo de Bloch e Dutta.

5.3.1.1 O Caso ϕ Linear

Um caso mais fácil de tratar é quando ϕ é uma função linear. Bloch e Dutta [10] afirmam que, nesse caso, a rede eficiente não é única e que todas elas são equivalentes a uma árvore com ligações de mesma força. Vale observar que no caso da confiabilidade tratada como o mínimo, qualquer rede eficiente ou estável não possui ciclo, ou seja, é uma árvore. Isto é fácil de ser observado, à medida que em uma rede que contém um ciclo, os investidores da ligação de menor força estão sempre em situação melhor se retirarem seu investimento de tal ligação mais fraca e investirem em alguma(s) das outras relações. Por isso, nesse cenário estaremos considerando sempre árvores. O resultado a seguir mostra que dada qualquer árvore é possível obter a partir dela uma árvore onde todas as forças das ligações são iguais e que tal árvore é eficiente e ainda Nash estável, sem usar a construção de uma estrela.

Teorema 5.3.1. *Se todas as ligações de uma árvore tiverem a mesma força e $\phi(x) = x$ tal rede é eficiente e Nash estável.*

A idéia é que dada qualquer outra árvore h , para obter a árvore de ligações de mesma força, basta que os agentes usem o seguinte algoritmo:

- Os agentes nos nós terminais apostam todo seu recurso nas ligações nas quais estão

envolvidos.

- Um jogador i em uma ligação com um jogador j , investe $\frac{k}{m-1}X$, sendo k o número de jogadores aos quais está conectado através do ligação ij , incluindo o jogador j .

Dessa forma, todos os ligações terão força

$$\frac{k}{m-1}X + \frac{m-k}{m-1}X = \frac{m}{m-1}X.$$

É fácil ver que tal árvore é Nash estável se observarmos que nenhum indivíduo de tal árvore pode melhorar seu benefício recebido sozinho. Considerando que todos os indivíduos na árvore procederam como no algoritmo mencionado e portanto todas as forças das ligações são iguais, então se um indivíduo decide se desviar de tal algoritmo e mudar seu investimento, ele estará necessariamente tirando de uma ligação e investindo em outra. A primeira será a ligação de menor força na rede e a segunda será a maior. Como o benefício se baseia na maior confiabilidade que por sua vez é definida pela menor força de um caminho, então o indivíduo ganha em uma ligação, na qual ele investiu a mais, mas perde em todos os caminhos que envolvem a ligação de onde ele tirou investimento.

Quanto a eficiência, a prova consiste na comparação dos benefícios diretos e indiretos de uma árvore qualquer dada com m nós e a árvore de ligações de mesma força obtida através do algoritmo mencionado anteriormente. No caso dos benefícios diretos é fácil ver que em qualquer árvore e para $\phi(x) = x$, os benefícios diretos são no máximo $2mX$. Então, a análise recai sobre os benefícios indiretos. Na prova nós comparamos o máximo de benefícios indiretos que qualquer árvore pode ter aos benefícios indiretos da árvore de ligações de mesma força e constatamos que o total de benefícios indiretos da árvore de ligações de mesma força é pelo menos tão bom quanto o máximo de indiretos de qualquer outra.

5.3.1.2 O Caso ϕ Não-Linear

Para outros casos, as análises tornam-se mais trabalhosas já que não existe uma expressão geral para os benefícios que permitam uma comparação entre os benefícios, como foi feito no caso linear. A própria estrutura da árvore e o próprio ϕ podem ter características que afetarão os benefícios consideravelmente.

No caso de um único componente com 3 elementos, a única estrutura possível de árvore é a estrela. No caso $m = 4$, as únicas árvores possíveis são o grafo estrela ou o grafo linha, isto é, o grafo onde o nó 1 está ligado ao nó 2, o 2 ao 3 e este ao 4. Então, esse caso é interessante para compararmos qual dessas duas estruturas seria mais eficiente.

Ao analisar o caso $m = 4$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.2. *Seja $\phi(x)$ uma função convexa e seja $g(a,x) = a\phi(x/a)$ sua perspectiva. Em qualquer componente com 4 nós, se $g(a,x)$ for crescente em a , então a única rede eficiente é a estrela simétrica com benefício de $12\phi(X) + 12\phi(X/3)$.*

Analisando as forças das três ligações e todas as comparações possíveis entre elas, obtemos algumas expressões para os benefícios recebidos em cada caso. Ao maximizar essas expressões, observamos que seus máximos só podiam ocorrer nas fronteiras de determinados conjuntos do plano, pelo fato de $\phi(x)$ ser convexa. Tais casos então resultaram em três benefícios: $14\phi(X)$, $12\phi(X) + 6\phi(X/2)$ e $12\phi(X) + 12\phi(y^*)$, com $\phi(y^*) < \phi(X/3)$. Fazendo o mesmo procedimento com a estrela de 4 nós, obtemos também como melhores benefícios $14\phi(X)$, $12\phi(X) + 6\phi(X/2)$ e $12\phi(X) + 12\phi(X/3)$. Logo, se a perspectiva de $\phi(x)$ for uma função crescente, a única rede eficiente é a estrela com benefícios $12\phi(X) + 12\phi(X/3)$.

A análise na mesma perspectiva de um componente com m indivíduos torna-se inviável pela quantidade de variáveis, o que aumentaria muito os casos a serem comparados.

Porém, um resultado pode ser obtido analisando apenas a estrela. Considerando duas características diferentes para $\phi(x)$, provamos que dentre as estrelas não há nenhuma que ultrapasse os benefícios da estrela simétrica, isto é, da estrela onde os nós terminais investem todo seu recurso no nó central e o central divide seus recursos igualmente.

Teorema 5.3.3. *Nenhuma estrela tem benefício maior do que o da estrela simétrica, isto é, a estrela na qual o nó central divide igualmente seus recursos entre todos os nós e os nós periféricos investem todo seu recurso no nó central, se*

(a) $\phi(x)$ é côncava.

(b) $\phi(x)$ é convexa e sua perspectiva $g(a,x) = a\phi(x/a)$ é crescente em a .

Considerando $\phi(x)$ uma função côncava, supõe-se que há dois nós periféricos nos quais os investimentos do nó central neles sejam diferentes. Conseguimos então mostrar que se o nó central resolver investir em cada um a média do que investia antes nos mesmos, o valor do grafo assim obtido é pelo menos tão bom quanto o grafo anterior. Então, sempre que o nó central igualar investimentos desiguais em dois nós, o valor do grafo é pelo menos tão bom quanto antes e daí, o único grafo eficiente é aquele onde não há investimentos desiguais por parte do nó central.

Considerando $\phi(x)$ uma função convexa, escrevendo os benefícios da estrela, vemos que a soma dos benefícios é uma função que só possui mínimos locais, considerando os investimentos do nó central nos periféricos como variáveis. Portanto, os máximos da função acontecem em pontos de fronteira de determinado conjuntos do espaço considerado. Assim, prova-se que os melhores benefícios serão da forma: $m(m-1)\phi(X) + 2\phi(X)$, $m(m-1)\phi(X) + 6\phi(X/2)$, $m(m-1)\phi(X) + 12\phi(X/3)$, ..., $m(m-1)\phi(X) + k(k-1)\phi(X/(k-1))$, ..., $m(m-1)\phi(X) + m(m-1)\phi(X/(m-1))$, correspondendo o último caso a estrela

simétrica. Como a perspectiva de $\phi(x)$, $g(a,x) = a\phi(x/a)$ é crescente em a , então temos que o último benefício é o maior.

5.4 Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesse trabalho, nós analisamos a formação de redes de comunicação quando os jogadores decidem como investir em cada uma de suas relações, revisando o artigo de Bloch e Dutta [10]. Nós consideramos que os indivíduos têm um certo recurso fixo para investir e que eles podem distribuir esses recursos através das ligações. Supusemos ainda que a força das ligações é uma função dos investimentos dos jogadores e que o benefício de um caminho é baseado na confiabilidade dele, e esta por sua vez pode ser definida de diversas formas. Aqui, nós consideramos a confiabilidade baseada na ligação de menor força do caminho. Baseando-se nessas definições, estudamos as estruturas quanto à sua estabilidade e eficiência, revisando os resultados da literatura e acrescentando outros resultados. Também apontamos a necessidade de revisão de um resultado de Bloch e Dutta [10], fundamental para seus outros resultados e apresentamos novos resultados que caracterizam o conjunto de redes eficientes e/ou estáveis. Os resultados obtidos mostram que a melhor alternativa em termos de benefício geral para a rede (no caso de $(\phi(x) = x)$ é os indivíduos estarem conectados de tal forma que as forças de ligação sejam as mesmas. O mesmo acontece na rede de quatro elementos. Desenvolver esses resultados para redes com mais componentes é um desafio para trabalhos futuros.

Como trabalho futuro, é necessário ou corrigir a prova ou apresentar um contra-exemplo para o Teorema 5.2.6 de Bloch e Dutta [10]. Além disso, pode-se estudar algumas outras situações em termos da definição da força das ligações e/ou confiabilidade.

Por exemplo, na definição original de força das ligações, se um indivíduo investir algo na ligação, esta já tem força. Porém, é razoável considerar que existem ligações que precisam do consentimento e investimento de ambas as partes para existirem.

Provas

Teorema 5.3.1

Prova: Sobre a estabilidade, suponha que um jogador i queira desviar desse algoritmo e retire ε do seu investimento na ligação com j . Ele não tem interesse em investir em um nó que não seja seu vizinho, visto que como já dito, considerando a confiabilidade o mínimo, é desvantajoso para ele estar em um ciclo. Então, suponha que ele divida tal recurso com alguns de seus vizinhos. Dessa forma, o jogador i perde ε em todos os caminhos que envolvam a ligação ij , já que essa se torna a ligação com menor força em toda rede. Por outro lado, i ganha um total de ε somando todas as forças das relações diretas onde investiu a mais, já que relações indiretas envolverão outras ligações da rede e estes tem menor força do que os que ele investiu a mais. Então, não existe interesse em i de desviar, pois não existe rede na qual ele obtenha maior benefício. Assim, a árvore com ligações de mesma força é Nash estável.

Quanto à eficiência, como na árvore de ligações de mesma força todas são iguais a $\frac{m}{m-1}X$ e há $m - 1$ ligações, o valor total dos benefícios diretos é $2mX$, sendo $\phi(x) = x$. O total de recursos que os agentes dispõem para investir é mX , logo, o máximo benefício direto possível é $2mX$. Já o total dos benefícios indiretos é $m(m - 2)X$, o que pode ser visto considerando que há $\binom{m}{2} - (m - 1)$ ligações indiretas e como todas as ligações têm mesma força, a mínima força em qualquer caminho será sempre a mesma, $\frac{m}{m-1}X$. Logo, o benefício de qualquer ligação indireta também será sempre o mesmo, $\frac{m}{m-1}X$, para cada jogador envolvido. No caso de uma árvore qualquer h , considere uma ordenação, z_1, z_2, \dots, z_{m-1} , de suas ligações pela força, de modo que z_i é a i -ésima ligação mais forte. Há pelo menos

$m - 2$ caminhos que contém z_{m-1} , onde o mínimo ocorre quando z_{m-1} é uma ligação terminal. De forma semelhante, há pelo menos $m - 3$ caminhos que contém o ligação z_{m-2} e assim por diante. Logo, o máximo benefício indireto que uma rede pode ter é

$$\sum_{t=1}^{m-1} 2z_{m-t}(m-t-1).$$

Basta então provar que os benefícios indiretos da árvore com ligações de mesma força é pelo menos tão bom quanto o valor máximo que os benefícios indiretos podem ter em qualquer outra árvore.

O último somatório pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\sum_{t=1}^{m-1} 2z_{m-t}(m-t-1) = 2(m-1) \sum_{t=1}^{m-1} z_{m-t} - 2 \sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t}.$$

Como $\sum_{t=1}^{m-1} z_{m-t} = mX$, então o somatório é igual a $2(m-1)mX - 2\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t}$. Assim queremos provar que $m(m-2)X \geq 2(m-1)mX - 2\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t}$, o que equivale a provar que:

$$\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} \geq \frac{m^2}{2}X$$

Note que

$$\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} = \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{k=1}^t z_{m-t} = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{t=k}^{m-1} z_{m-t},$$

e que o último somatório duplo pode ser reescrito como

$$mX + mX - z_{m-1} + mX - (z_{m-1} + z_{m-2}) + \dots + mX - (z_{m-1} + z_{m-2} + \dots + z_2),$$

já que o somatório de todas as forças é mX .

Logo,

$$\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} = (m-1)mX - (m-2)z_{m-1} - (m-3)z_{m-2} - \dots - z_2.$$

A última soma pode ser reescrita, somando e subtraindo z_1 , obtendo:

$$\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} = (m-1)mX - mX - (m-3)z_{m-1} - (m-4)z_{m-2} - \dots - z_3 + z_1.$$

Para continuar retirando mX , soma-se e subtrai-se então $z_1 + z_2$ e assim por diante, de forma que:

$$\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} = (m-k-1)mX - (m-(k+2))z_{m-1} - (m-(k+3))z_{m-2} - \dots - z_{k+2} + kz_1 + (k-1)z_2 + \dots + z_k.$$

Queremos provar que a soma acima é maior que $\frac{m^2}{2}X$. Vamos separar em passos:

1. Podemos requerer que $(m-k-1) > m/2$, o que nos dá a seguinte restrição sobre k :

$$k \leq \frac{m}{2} - 1$$

2. Os termos restantes da soma dividem-se em $(m-k-2)$ termos negativos e em módulo menores que os k termos positivos. Podemos requerer que k seja maior que $(m-k-2)$, o que nos dá a restrição

$$k \geq \frac{m}{2} - 1$$

Se m é par, basta tomar $k = m/2 - 1$, que então teremos provado que o somatório é maior que $m^2/2X$.

Se m é ímpar, da primeira restrição, obtemos

$$k = \frac{m-3}{2}$$

e então temos que o somatório acima pode ser escrito como

$$\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} = \frac{m^2X}{2} + 0,5mX - \left(\frac{m-1}{2}\right)z_{m-1} - \left(\frac{m-3}{2}\right)z_{m-2} - \dots - z_{\frac{m+1}{2}} + \left(\frac{m-3}{2}\right)z_1 + \left(\frac{m-5}{2}\right)z_2 + \dots + z_{\frac{m-3}{2}},$$

e ainda podemos escrevê-lo como

$$\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} = \frac{m^2X}{2} + 0,5mX - \left(\frac{m-1}{2}\right)z_{m-1} + \left[\left(\frac{m-3}{2}\right)(z_1 - z_{m-2}) + \left(\frac{m-5}{2}\right)(z_2 - z_{m-3}) + \dots + (z_{\frac{m-3}{2}} - z_{\frac{m+1}{2}})\right].$$

Note que o termo entre colchetes é não negativo, pois as forças positivas em cada parêntese são sempre maiores ou iguais que a força negativa. Como z_{m-1} é a menor força da árvore e o maior valor que ela pode ter é quando os links têm mesma força (e nesse caso todos os links têm força $\frac{mX}{m-1}$), então $0.5mX \geq z_{m-1}$ e portanto, $\sum_{t=1}^{m-1} tz_{m-t} \geq \frac{m^2X}{2}$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 5.3.2

Prova: Em um componente com 4 nós, as únicas árvores possíveis são a linha e a estrela. A prova consiste em comparar a linha que tem maior benefício com a estrela de maior benefício. Para analisar os benefícios de cada estrutura, precisamos analisar todas as ordenações possíveis entre a força das ligações em uma linha como na Figura A.1 , já que é a menor delas que determina o benefício de um caminho. No caso da linha, excluindo os casos simétricos, temos que as possíveis ordenações são:

1. $s_{12} \leq s_{23} \leq s_{34}$,
2. $s_{12} \leq s_{34} \leq s_{23}$,
3. $s_{23} \leq s_{12} \leq s_{34}$.

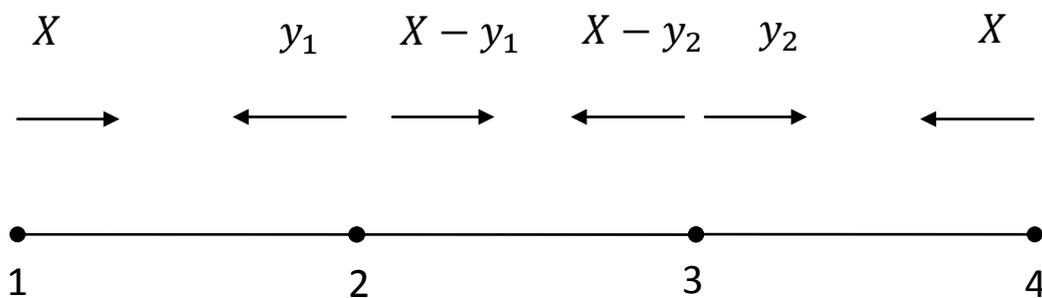


Figura A.1 Linha

Para cada uma dessas ordenações, há uma função de benefícios correspondentes, no caso,

$$g_1(y_1, y_2) = 8\phi(X) + 6\phi(y_1) + 4\phi(X - y_1) + 4\phi(X - y_2) + 2\phi(y_2)$$

$$g_2(y_1, y_2) = 10\phi(X) + 6\phi(y_1) + 2\phi(X - y_1) + 2\phi(X - y_2) + 4\phi(y_2)$$

$$g_3(y_1, y_2) = 4\phi(X) + 2\phi(y_1) + 8\phi(X - y_1) + 8\phi(X - y_2) + 2\phi(y_2),$$

onde y_1 e y_2 são os investimento do nó 2 no nó 1 e do nó 3 no nó 4, respectivamente, como mostra a Figura A.1. A idéia é então maximizar cada uma dessas funções em y_1 e y_2 . Ao aplicarmos o teste da segunda derivada, percebemos que pela convexidade de $\phi(X)$, as funções na verdade têm um mínimo local, então seus máximos ocorrem nas fronteiras das regiões do plano delimitadas pelas restrições do problema e das ordenações. Na primeira ordenação, por exemplo, temos que $\phi(X) + \phi(y_1) \leq \phi(X - y_1) + \phi(X - y_2) \leq \phi(X) + \phi(y_2)$ e então existem 3 extremidades possíveis:

- A primeira ocorre quando a última força é a maior possível e para isto, $y_2 = X$, o que junto com a primeira desigualdade implica $y_1 = 0$.
- A segunda ocorre quando fazemos a primeira força da linha, (s_{12}) , ser a menor possível, o que ocorre quando $y_1 = 0$. Isto junto com a segunda desigualdade implica que existe uma extremidade onde $y_2 = X/2$.
- A última ocorre quando as três forças são iguais, daí $2\phi(X - y) = \phi(X) + \phi(y)$. O y para o qual essas duas funções são iguais, y^* , é tal que $y^* < X/3$. Isto pode ser visto dado que $2\phi(X - y)$ é decrescente em y e $\phi(X) + \phi(y)$ é crescente em y . Quando $y = 0$, a primeira é $2\phi(X)$ e é maior que a segunda, $\phi(X)$. Porém, pela convexidade de $\phi(X)$ que garante $\phi(X) + \phi(X/3) > 2\phi(2X/3)$, vemos que para $y = X/3$, a desigualdade entre as duas se inverte e $\phi(X) + \phi(y)$ passa a ser

maior que $2\phi(X - y)$. Logo, deve haver um y^* , onde os gráficos dessas funções se interceptam e este y^* é menor que $X/3$.

Então, os benefícios correspondentes a estas extremidades são, respectivamente, iguais a $14\phi(X)$, $12\phi(X) + 6\phi(X/2)$ e $12\phi(X) + 12\phi(y^*)$, com $y^* < X/3$. As outras duas ordenações nos dão benefícios menores ou iguais a esses nas extremidades.

Analogamente, no caso da estrela os melhores benefícios são $14\phi(X)$, $12\phi(X) + 6\phi(X/2)$ e $12\phi(X) + 12\phi(X/3)$, sendo este último caso o extremo correspondente a estrela simétrica, na qual os periféricos investem X e o central reparte de forma igual seus recursos entre os periféricos. Logo, sendo a perspectiva de $\phi(x)$, uma função $g(a, x) = a\phi(x/a)$ crescente em a , a única estrutura eficiente é a estrela simétrica. ■

Teorema 5.3.3

Prova: Vamos provar primeiro a parte (a). Considere então a estrela onde m é o jogador central. Suponha que m investe de maneira diferente em dois jogadores i e j , isto é, sem perda de generalidade, considere $x_m^i > x_m^j$. O valor do grafo assumindo que os nós periféricos investem tudo é dado por

$$\begin{aligned}
 V = & 2 \sum_{k=1, k \neq i, j}^{m-1} (\phi(X) + \phi(x_m^k)) + 2\phi(X) + 2\phi(x_m^i) + 2\phi(X) + 2\phi(x_m^j) + \\
 & \sum_{k=1, k \neq i, j}^{m-1} \sum_{l=1, l \neq k, i, j}^{m-1} (\min(\phi(x_m^k), \phi(x_m^l)) + \phi(X)) + 2 \sum_{k=1, k \neq i, j}^{m-1} (\min(\phi(x_m^k), \phi(x_m^i)) + \phi(X)) + \\
 & 2 \sum_{k=1, k \neq i, j}^{m-1} (\min(\phi(x_m^k), \phi(x_m^j)) + \phi(X)) + 2(\phi(X) + \phi(x_m^j)),
 \end{aligned}$$

onde as primeiras parcelas representam os benefícios das ligações diretas entre o periférico e outros nós que não i e j , a ligação direta entre m e i e entre m e j . As outras representam os benefícios das ligações indiretas.

Supondo que o agente m resolva investir $(x_m^i + x_m^j)/2$ transferindo recursos entre eles e mantendo os mesmos investimentos nos outros nós. O valor do novo grafo assim obtido

é:

$$\begin{aligned}
V' = & 2 \sum_{k=1, k \neq i, j}^{m-1} (\phi(X) + \phi(x_m^k)) + 4\phi(X) + 4\phi\left(\frac{x_m^i + x_m^j}{2}\right) + \\
& \sum_{k=1, k \neq i, j}^{m-1} \sum_{l=1, l \neq k, i, j}^{m-1} (\min(\phi(x_m^k), \phi(x_m^l)) + \phi(X)) + \\
& 4 \sum_{k=1, k \neq i, j}^{m-1} (\min(\phi(x_m^k), \phi(\frac{x_m^i + x_m^j}{2})) + \phi(X)) + 2(\phi(X) + \phi(\frac{x_m^i + x_m^j}{2})).
\end{aligned}$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \left\{ k \neq j : x_m^k \leq x_m^j \right\}, \\
N_2 &= \left\{ k : x_m^j < x_m^k \leq \frac{x_m^i + x_m^j}{2} \right\}, \\
N_3 &= \left\{ k \neq i : \frac{x_m^i + x_m^j}{2} < x_m^k < x_m^i \right\},
\end{aligned}$$

e

$$N_4 = \left\{ k : x_m^k \geq x_m^i \right\}.$$

Eles representam todas as comparações possíveis entre os valores de x_m^k , x_m^i , x_m^j e $(x_m^i + x_m^j)/2$. Assuma que i e j sejam escolhidos de tal forma que $N_2 = N_3 = \emptyset$. Então:

$$\begin{aligned}
V - V' &= 2 \left(\phi(x_m^i) + \phi(x_m^j) - 2\phi\left(\frac{x_m^i + x_m^j}{2}\right) \right) + \\
& 2 \sum_{k \in N_4} \left(\phi(x_m^i) + \phi(x_m^j) - 2\phi\left(\frac{x_m^i + x_m^j}{2}\right) \right) + \\
& 2 \left(\phi(x_m^j) - \phi\left(\frac{x_m^i + x_m^j}{2}\right) \right).
\end{aligned}$$

Como $\phi(x)$ é côncava, temos então que $V - V' < 0$. Logo, em uma estrela eficiente o nó central não pode fazer investimento desiguais nos nós periféricos. Portanto, a estrela simétrica é eficiente. ■

Para a parte (b), note que considerando sem perda de generalidade que os periféricos investem tudo, i.e, investem X no central e que o central investe $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{m-1}$ nos

periféricos, o valor do grafo "estrela" pode ser dado por:

$$V = 2(m-1)\phi(X) + 2[\phi(y_1) + \phi(y_2) + \cdots + \phi(y_{m-1})] + 2(m-2)[\phi(X) + \phi(y_1)] + \\ 2(m-3)[\phi(X) + \phi(y_2)] + \cdots + 2[\phi(X) + \phi(y_{m-2})],$$

que pode ser reescrito como:

$$V = m(m-1)\phi(X) + 2 \sum_{t=1}^{m-1} (m-t)\phi(y_t).$$

Observe que a matriz Hessiana de V em relação as variáveis y_i é uma matriz diagonal e, além disso, todos os elementos desta diagonal são positivos pois envolvem constantes positivas que multiplicam segundas derivadas de ϕ , que são positivas pois ϕ é convexa. Desta forma, todos os pontos críticos são mínimos locais e os máximos só podem ocorrer em pontos de fronteiras das regiões para y_1, y_2, \dots, y_{m-1} . Tais pontos de fronteira podem ser obtidos fazendo $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_{m-2} = y_{m-1} = X/2$, $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_{m-3} = y_{m-2} = y_{m-1} = X/3$ até $y_1 = y_2 = \dots, y_{m-1} = y_{m-2} = X/(m-1)$. Assim, os maiores benefícios serão da forma: $m(m-1)\phi(X) + 2\phi(X)$, $m(m-1)\phi(X) + 6\phi(X/2)$, $m(m-1)\phi(X) + 12\phi(X/3)$, $\dots, m(m-1)\phi(X) + k(k-1)\phi(X/(k-1))$, $\dots, m(m-1)\phi(X) + m(m-1)\phi(X/(m-1))$, correspondendo o último caso a estrela simétrica. Como a perspectiva de $\phi(x)$, $g(a, X) = a\phi(X/a)$ é crescente em a , então temos que o último benefício é o maior.

Referências Bibliográficas

- [1] M. J. Osborne. *A course in Game Theory*. MIT Press, Cambridge, 1994.
- [2] N. Fraser and K.W. Hipel. *Conflicts Analysis: Models and Resolutions*. North-Holland, New York, 1984.
- [3] D.M. Kilgour, K.W. Hipel, and L. Fang. The graph model for conflicts. *Automatica*, 23(1):41–55, 1987.
- [4] D.M Kilgour and K.W. Hipel. The graph model for conflict resolution: past, present, and future. *Group Decision and Negotiation*, 14(6):441–460, 2005.
- [5] T. Inohara and K.W. Hipel. Coalition analysis in the graph model for conflict resolution. *Systems Engineering*, 11(4):343–359, 2008.
- [6] M.O. Jackson and J. Wolinsky. A strategic model of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 71(1):44–74, 1996.
- [7] M.E. Newman. Scientific collaboration networks. ii. shortest paths, weighted networks, and centrality. *Physical Review E*, 64(1):016132, 2001.
- [8] M.E. Newman. Who is the best connected scientist? a study of scientific co-authorship networks. In *Complex Networks*, Lecture Notes in Physics, pages 337–370. Springer, Berlin, 2004.
- [9] J. K. Brueckner. Friendship networks. *ournal of Regional Science*, 46(5):847–865, 2006.

- [10] F. Bloch and B. Dutta. Communication networks com endogenous link strength. *Games and Economic Behavior*, 66:39–56, 2009.
- [11] R.B. Myerson. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press, 1997.
- [12] R.D. Luce. A probabilistic theory of utility. *Econometrica*, 26(2):193–224, 1958.
- [13] T. L. Fine. Lower probability models for uncertainty and nondeterministic processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 20(3):389–411, 1988.
- [14] B. Rogers. A strategic theory of network status. Unpublished manuscript, MEDS, Northwestern University, 2008.
- [15] F. M. Campello de Souza. *Produção e Competitividade: Aplicações e Inovações*, chapter Modelos Probabilísticos de Preferências e Escolhas, pages 175–214. Editora/UFPE, 2000.
- [16] J. Nash. Equilibrium points in n -person games. *Proceedings of National Academy of Science*, 36:48–49, 1950.
- [17] J. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54:286–295, 1951.
- [18] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953.
- [19] N. Howard. *Paradoxes of Rationality: Theory of Metagames and Political Behavior*. MIT press, Cambridge, Massachusetts, 1971.
- [20] K.W. Hipel, D.M. Kilgour, and L. Fang. The graph model for conflict resolution. In *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Developed under the Auspices of the UNESCO*, volume 2. Eolss Publishers, Oxford, UK, 2012.

<http://www.eolss.net/Sample-Chapters/C14/E1-40-04-01.pdf> (last accessed on 28 december 2012).

- [21] K.W. Li, K.W. Hipel, D.M. Kilgour, and L. Fang. Stability definitions for 2-player conflict models with uncertain preferences. *IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern.*, 7:13–18, 2002.
- [22] K.W. Li, K.W. Hipel, D.M. Kilgour, and L. Fang. Preference uncertainty in the graph model for conflict resolution. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 34(4):507–520, 2004.
- [23] M.S. Al-Mutairi, K.W. Hipel, and M.S. Kamel. Fuzzy preferences in conflicts. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 17:257–276, 2008.
- [24] M.A. Bashar, D.M. Kilgour, and K.W. Hipel. Fuzzy preferences in the brownfield redevelopment conflicts. In *Proceeding of Water 2010: Hydrology, Hydraulics and Water Resources in an Uncertain Environment-10th International Symposium on Stochastically Hydraulics and 5th International Conference on Water Resources and Environment Research*, page 8 pages, Quebec City, July 5-7 2010.
- [25] Y. Ben-Haim and K.W. Hipel. The graph model for conflict resolution with information-gap uncertainty in preferences. *Appl. Math. Computat.*, 126(2-3):319–340, 2002.
- [26] Y.T. Matbouli, K.W. Hipel, and D.M. Kilgour. Robustness of equilibrium in conflict resolution. In *Proceedings of Group Decision and Negotiation - GDN 2013*, pages 52–53, Stockholm, Sweden, June 2013.
- [27] L. Hamouda, D.M. Kilgour, and K.W. Hipel. Strength of preferences in the graph models for conflict resolution. *Group Decision and Negotiation*, 13:449–462, 2004.

- [28] F. M. Campello de Souza. Mixed models, random utilities and the triangle inequality. *Journal of Mathematical Psychology*, 27(2):183–200, 1983.
- [29] H. Xu, K.W. Hipel, and D.M. Kilgour. Matrix representation of solution concepts in multiple-decision-maker graph models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 39:96–108, 2009.
- [30] D. Kreps. *Notes on The Theory of Choice*. Underground Classics in Economics. Westview Press, 1988.
- [31] K.W. Hipel. Conflict resolution. In M.K. Tolba, editor, *OUR FRAGILE WORLD (OFW) Challenges and Opportunities for Sustainable Development*, volume 1, pages 935–952. Eolss Publishers, Oxford, UK, 2001.
- [32] L. Fang, K.W. Hipel, and D.M. Kilgour. *Interactive Decision Making: The Graph Model for Conflict Resolution*. Wiley, New York, 1993.
- [33] P. Walley. Measures of uncertainty in expert systems. *Artificial Intelligence*, 83(1):1–58, 1996.
- [34] P. Walley. Towards a unified theory of imprecise probability. *International Journal of Approximate Reasoning*, 24(2):125–148, 2000.
- [35] G. De Cooman. A behavioural model for vague probability assessments. *Fuzzy sets and systems*, 154(3):305–358, 2005.
- [36] M.O Jackson. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, 2008.
- [37] J. Goyal, S.; Moraga Gonzales. R&d networks. *RAND Journal of Economics*, 32:686–707, 2001.

- [38] V. Bala and S. Goyal. A noncooperative model of network formation. *Econometrica*, 68:1181–1229, 2000.