
Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática Computacional

Pós-graduação em Matemática Computacional

Refinamento de inferências na distribuição Birnbaum-Saunders generalizada
com núcleos normal e t de Student sob censura tipo II

Larissa Santana Barreto

TESE DE DOUTORADO

Recife, fevereiro de 2013

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática Computacional

Larissa Santana Barreto

Refinamento de inferências na distribuição Birnbaum-Saunders generalizada
com núcleos normal e t de Student sob censura tipo II

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Matemática Computacional da Universidade Federal de
Pernambuco como requisito parcial para obtenção do
grau de Doutor em Matemática Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari-Neto
Área de concentração: Métodos probabilísticos e Estatísticos

Recife, fevereiro de 2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da Silva, CRB4-1217

Barreto, Larissa Santana

Refinamento de inferências na distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos normal e t de Student sob censura tipo II / Larissa Santana Barreto. - Recife: O Autor, 2013.

xii, 93 p.: il., fig., tab.

Orientador: Francisco Cribari Neto.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Matemática Computacional, 2013.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Inferência estatística. 2. Máxima verossimilhança. 3. Bootstrap I. Cribari Neto, Francisco (orientador). II. Título.

519.54

CDD (23. ed.)

MEI2013 – 034



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

LARISSA SANTANA BARRETO

“REFINAMENTO DE INFERÊNCIAS NA DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM- SAUNDERS GENERALIZADA COM NÚCLEOS NORMAL E T DE STUDENT SOB CENSURA TIPO II”

A Banca Examinadora composta pelos Professores: FRANCISCO CRIBARI NETO (Orientador e Presidente da Banca Examinadora), do Departamento de Estatística da UFPE; AUDREY HELEN MARIZ DE AQUINO CYSNEIROS, do Departamento de Estatística da UFPE; RENATA MARIA CARDOSO RODRIGUES DE SOUZA, do Centro de Informática da UFPE; FRANCISCO JOSÉ DE AZEVEDO CYSNEIROS, do Departamento de Estatística da UFPE; e KLAUS LEITE PINTO VASCONCELLOS, do Departamento de Estatística da UFPE, considera a candidata:

APROVADA () EM EXIGÊNCIA () REPROVADA

Secretaria do Programa de Doutorado em Matemática Computacional do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, aos 18 dias do mês de fevereiro de 2013.

PROF. FRANCISCO CRIBARI NETO
PRESIDENTE E 1º EXAMINADOR

PROFA. AUDREY HELEN MARIZ DE AQUINO CYSNEIROS
2º EXAMINADOR

PROFA. RENATA MARIA CARDOSO RODRIGUES DE SOUZA
3º EXAMINADOR

PROF. FRANCISCO JOSÉ DE AZEVEDO CYSNEIROS
4º EXAMINADOR

PROF. KLAUS LEITE PINTO VASCONCELLOS
5ª EXAMINADOR

A Deus, que é o verdadeiro guia de nossos passos. Aos meus pais, Neusa e Barreto, pela dedicação constante. A Lara e Carlos Gadelha, “honey”, pelas alegrias que possibilitaram que momentos de stress se transformassem em momentos de descontração.

Agradecimentos

Sou imensamente grata ao nosso bom Deus, que, de forma abençoadora, deu-me forças e perseverança.

Aos meus pais, pelo carinho, dedicação, confiança e por terem contribuído para a minha formação moral e acadêmica.

Ao meu grande incentivador Carlos Gadelha (honey), pela motivação, incentivo e companheirismo.

À minha família e amigos, pela enorme paciência e compreensão com a minha ausência.

Ao meu orientador professor Francisco Cribari-Neto, pela confiança em mim depositada, pelas valiosas sugestões e orientação.

À minha “mãe científica”, mestra e amiga, professora Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros, pela constante dedicação, disposição, paciência e pelos ensinamentos que foram fundamentais para conclusão desta tese. Muito obrigada pelo convívio enriquecedor nestes últimos quatro anos.

Aos meus amigos Juliana, Marcelo, Maria Lidia e Maria Ligia pela amizade e pelos momentos de alegria que muito contribuíram para afastar o estresse.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos participantes da banca examinadora pelas sugestões.

Resumo

Frequentemente temos interesse em realizar inferências, em um determinado modelo, envolvendo apenas alguns dos seus parâmetros. Tais inferências podem ser feitas através da função de verossimilhança perfilada. Contudo, alguns problemas podem surgir quando tratamos a função de verossimilhança perfilada como uma verossimilhança genuína. Com o objetivo de solucionar estes problemas, vários pesquisadores, dentre eles Barndorff-Nielsen (1983, 1994) e Cox & Reid (1987, 1992), propuseram modificações à função de verossimilhança perfilada.

O principal objetivo deste trabalho é utilizar a verossimilhança perfilada e seus ajustes propostos por Barndorff-Nielsen (1983,1994) e Cox & Reid (1987,1992) no aperfeiçoamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos normal e t de Student, na presença, ou não, de censura tipo II. Mais precisamente obtemos os estimadores de máxima verossimilhança relacionados às funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas; calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t e também apresentamos os testes da razão de verossimilhanças ajustados, o teste bootstrap paramétrico e o teste gradiente. Através de simulações de Monte Carlo avaliamos os desempenhos dos testes e dos estimadores pontuais e intervalares propostos. Os resultados evidenciam que tanto os testes quanto os estimadores baseados nas versões modificadas da verossimilhança perfilada possuem desempenho superior em pequenas amostras quando comparados com suas contrapartidas não modificadas. Adicionalmente, apresentamos alguns exemplos práticos para ilustrar tudo o que foi desenvolvido.

Palavras-chave: Distribuição Birnbaum-Saunders generalizada; Bootstrap; Teste da razão de verossimilhanças; Estimadores de máxima verossimilhança; Verossimilhança perfilada modificada.

Abstract

Frequently the interest lies in performing inferences on a subset of the parameters that index the model. Such inferences can be performed through the profile likelihood function. However, some problems can arise when using the profile likelihood function as a likelihood genuine function. In order to solve this problems, several researchers as Barndorff-Nielsen (1983, 1994) and Cox and Reid (1987, 1992), proposed modifications to the profile likelihood function.

In this work we use the profile likelihood function and the modified versions of the likelihood function proposed by Barndorff-Nielsen (1983, 1994) and Cox and Reid (1987, 1992) to obtain improved inference results on generalized Birnbaum-Saunders distribution with normal and Student- t kernels under type II censored data. More precisely, we obtained maximum likelihood estimators by maximizing the corresponding to the profile and adjusted likelihood functions, calculate confidence intervals of type asymptotic, percentile bootstrap, bootstrap BCa and bootstrap-t and also present the adjusted likelihood ratio tests, the parametric bootstrap test and gradient test. Monte Carlo simulation results have been presented to evaluate the performance of the estimators and tests we propose. The results show that both tests and estimators based on modified versions of the profile likelihood outperform in small samples when compared with their unmodified version. Additionally, we present some practical examples to illustrate what has been developed.

Keywords: Birnbaum-Saunders distribution; Bootstrap; Likelihood ratio test; Maximum likelihood estimation; Modified profile likelihood.

Lista de Figuras

3.1	Funções de densidade Birnbaum-Saunders para os valores de α indicados e $\beta = 4$.	22
3.2	Funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders para os valores de α indicados e $\beta = 4$.	23
3.3	Gráfico das discrepâncias relativas de quantis (censura: 10%).	37
3.4	Gráfico das discrepâncias relativas de quantis (censura: 30%).	38
3.5	Gráfico das discrepâncias relativas de quantis (censura: 50%).	38
4.1	Funções de densidade da distribuição Birnbaum-Saunders genegalizada com núcleos Laplace, logística e normal.	53
4.2	Funções de densidade da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student para diferentes números de graus de liberdade.	53
4.3	Funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos normal e t de Student.	54
4.4	Funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos Laplace, logística e normal.	55

Lista de Tabelas

3.1	Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).	32
3.2	Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).	33
3.3	Estimação pontual de α para $n = 30$ ($\beta = 1.0$).	34
3.4	Estimação pontual de α para $n = 30$ ($\beta = 1.0$).	35
3.5	Coberturas dos intervalos de confiança (95%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 20$).	36
3.6	Coberturas dos intervalos de confiança (95%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 30$).	36
3.7	Média e variância das estatísticas de teste para testar $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.5$	39
3.8	Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).	42
3.9	Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 30$ ($\beta = 1.0$).	43
3.10	Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α	44
3.11	Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).	46
3.12	Estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada ajustadas de α — primeira aplicação.	47
3.13	p -valores — primeira aplicação.	47
3.14	Intervalos de confiança para α — primeira aplicação.	48
3.15	Intervalos de confiança para α — segunda aplicação.	49
4.1	Estimação pontual de α para $n = 10$ ($\beta = 1.0$).	60
4.2	Estimativas intervalares (90%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 10$).	62

4.3	Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 10$ ($\alpha = 0.1, \beta = 1.0$).	63
4.4	Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 10$ ($\alpha = 0.5, \beta = 1.0$).	64
4.5	Taxas de rejeição não nula, inferência em α ($n = 10$) e nível nominal 10%.	66
4.6	Estimativas intervalares para α —primeira aplicação.	68
4.7	Medidas de bondade de ajuste para as distribuições BS e GBS- t_3	68
4.8	Estimativas intervalares para α —segunda aplicação.	69
5.1	Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).	75
5.2	Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 20$ ($\beta = 1.0, \alpha = 0.1$).	77
5.3	Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 20$ ($\beta = 1.0, \alpha = 0.5$).	78
5.4	Taxas de rejeição não nulas, inferência em α ($n = 20$) e N.nominal 10%.	79
5.5	Estimativas intervalares (95%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 20$).	80
5.6	Estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada ajustadas de α com $\nu = 8$	81
5.7	p -valores do teste $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.13$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.13$	81
5.8	Intervalos de confiança para α com $\nu = 8$	82
A.1	Número de ciclos até a falha da lâmina do alumínio 6061 - T6	91
A.2	Tempo de fadiga em horas das chumaceiras.	91

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Organização da tese	3
2 Verossimilhanças perfiladas modificadas	5
2.1 Introdução	5
2.2 Definições preliminares	6
2.3 Função de verossimilhança perfilada	9
2.4 Função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen .	11
2.4.1 Aproximações sugeridas por Severini (2000) e Fraser & Reid (1995)	13
2.5 Função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox & Reid	15
3 Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders sob cen-	
sura tipo II	18
3.1 Introdução	18
3.2 Distribuição Birnbaum-Saunders	20

3.3	Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders sob censura tipo II	23
3.4	Resultados numéricos	30
3.5	Resultados numéricos adicionais	45
3.6	Aplicação	47
3.7	Conclusão	49
4	Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student	50
4.1	Introdução	50
4.2	Distribuição Birnbaum-Saunders generalizada	51
4.3	Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student	55
4.4	Resultados numéricos	58
4.5	Aplicação	67
4.6	Conclusão	69
5	Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student na presença de censura tipo II	70
5.1	Introdução	70
5.2	Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student na presença de censura tipo II	71
5.3	Resultados numéricos	74
5.4	Aplicação	80
5.5	Conclusão	82
6	Considerações finais	83
6.1	Conclusões	83
7	Referências Bibliográficas	85

Apêndice	90
A Dados reais	91
B Derivadas	92

1.1 Introdução

Muitas vezes em situações práticas temos interesse na análise de dados sobre o tempo decorrido até que um determinado evento ocorra. Vários modelos têm sido considerados para analisar tais dados. Birnbaum & Saunders (1969a) propuseram uma distribuição bi-paramétrica para modelagem de dados de tempo de vida utilizando um modelo em que a falha decorre do desenvolvimento e crescimento de uma rachadura dominante. A distribuição foi mais tarde derivada por Desmond (1985) com base em suposições menos restritivas. Ele também investigou a relação entre a distribuição Birnbaum-Saunders (BS) e a distribuição gaussiana inversa (Desmond, 1986). A distribuição Birnbaum-Saunders tem sido amplamente revisitada na última década, ver, por exemplo, Cysneiros et al. (2008), Díaz-Garcia & Leiva-Sanchez (2005), Galea et al. (2004), Lemonte et al. (2007), Ng et al. (2003, 2006), Wang et al. (2006) e Wu & Wong (2004). Em particular, Cysneiros et al. (2008) propuseram, para a distribuição Birnbaum-Saunders, as funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas de Cox & Reid (1987) e Barndorff-Nielsen (1983). Eles apresentaram os estimadores de máxima verossimilhança e os testes da razão de verossimilhanças, relacionados a estas funções, para amostras finitas e com dados completos (sem censura). É comum, no entanto, que em dados de tempo de vida exista censura. Por exemplo, pesquisas na área médica que envolvem uma resposta temporal são prospectivas e

de longa duração e, por isso, ao final, dificilmente são observados os tempos de falhas de todos os indivíduos. Assim, quando o estudo termina, após a ocorrência do evento de interesse em um número pré-determinado destes, as demais observações são censuradas. Este caso define a censura do tipo II. Procedimentos inferenciais envolvendo este tipo de censura vêm sendo discutidos extensivamente na literatura; ver Balasooriya (1995), Castro-Kuriss et al. (2010), McCarter (1999), Ng et al. (2006) e Sultan e Khaleel (2005). Tiku e Akkaya (2004, p.155) ressaltam que “censored samples are used in constructing robust procedures, both estimation and hypothesis testing. They are also used for detecting outliers in a sample and in formulating goodness-of-fit tests”. O autores se referem a amostras censuradas do tipo II apenas como censored samples. Um dos nossos objetivos neste trabalho é estender os resultados apresentados em Cysneiros et al. (2008) para situações em que os dados apresentam censura do tipo II e também considerar estimação intervalar.

Embora nos últimos anos a distribuição Birnbaum-Saunders tenha sido aplicada nas mais diversas situações, a suposição de normalidade não é adequada quando desejamos modelar os percentis mais baixos ou mais altos da distribuição; como por exemplo em problemas que envolvam garantias de equipamentos ou doses letais de algum medicamento. Para isto faz-se necessário o uso de modelos de tempo de vida mais flexíveis. Existem hoje na literatura poucos modelos que conseguem ajustar bem os dados nas caudas. Um exemplo de distribuição altamente flexível e que vem sendo bastante utilizada para estas situações é a Birnbaum-Saunders generalizada (BSG). Relativamente à distribuição Birnbaum-Saunders, proposta por Birnbaum & Saunders (1969a), essa nova classe de distribuições é bastante flexível pois permite diferentes graus de assimetria e curtose.

A distribuição Birnbaum-Saunders generalizada, proposta por Díaz-García e Leiva (2005), tem como base as distribuições de contornos elípticos também conhecidas como distribuições simétricas em \mathbb{R} ; ver Fang & Anderson (1990), Gupta & Varga (1993) e Galea et al. (2000). Ou seja, a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada torna flexível a distribuição do estresse cumulativo, que ao invés de ser assumida normal é agora assumida simétrica em \mathbb{R} . Algumas distribuições interessantes pertencentes a essa família de distribuições simétricas são: normal,

Cauchy, logística, Laplace e t de Student. Portanto, a distribuição Birnbaum-Saunders é um caso particular da Birnbaum-Saunders generalizada. Para maiores detalhes sobre as extensões da distribuição Birnbaum-Saunders e a Birnbaum-Saunders generalizada, ver Desmond (1985), Díaz-García & Leiva (2005), Leiva et al. (2008a, 2008b, 2009, 2010), Owen (2006), Sanhueza et al. (2008) e Vilca & Leiva (2006). Convém notar que a distribuição t , além de possuir curtose maior que a normal, também possui curtose indexada pelo parâmetro ν (graus de liberdade), o que introduz certa flexibilidade à modelagem. Nosso segundo objetivo é o melhoramento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student para observações com censura e sem censura.

1.2 Organização da tese

Esta tese está organizada da seguinte forma:

No segundo capítulo fazemos uma revisão sobre função de verossimilhança perfilada e seus ajustes. São apresentadas as formas e propriedades de tais funções. Para exemplificar a maneira como se obtém tais verossimilhanças é considerada uma amostra aleatória de uma variável com densidade normal.

No terceiro capítulo derivamos os estimadores de máxima verossimilhança relacionados às funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas da distribuição Birnbaum-Saunders para dados com presença de censura do tipo II. Apresentamos os testes da razão de verossimilhanças ajustados e o teste bootstrap paramétrico. Também calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t . Através de simulações de Monte Carlo são avaliados os desempenhos dos testes e dos estimadores pontuais e intervalares propostos. Adicionalmente, mostramos dois exemplos práticos para ilustrar tudo o que foi desenvolvido e apresentamos nossas conclusões finais a respeito do capítulo.

Nos Capítulos 4 e 5 derivamos os estimadores pontuais e intervalares, relacionados à função de verossimilhança perfilada e seus ajustes, da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student para observações não censuradas e censuradas, respectivamente. Também obtivemos os testes da razão de verossimilhanças e o teste gradiente. Vale ressaltar que os

Capítulos 3, 4 e 5 contêm as principais contribuições teóricas desta tese.

Por fim, no último capítulo apresentamos as conclusões finais deste trabalho.

2.1 Introdução

Frequentemente temos interesse em realizar inferências em um determinado modelo sobre apenas alguns dos seus parâmetros; tais parâmetros são ditos ser de interesse enquanto os demais são os parâmetros de perturbação do modelo. Essas inferências podem ser feitas através da função de verossimilhança perfilada, a qual é obtida substituindo o vetor de parâmetros de perturbação por uma estimativa consistente na verossimilhança original. Alguns problemas inferenciais como, por exemplo, ineficiência e inconsistência dos estimadores podem surgir quando utilizamos a função de verossimilhança perfilada. Outro problema comum refere-se à aproximação da distribuição da estatística da razão de verossimilhanças usual pela distribuição qui-quadrado, que pode ser muito pobre. Dessa forma, a obtenção de ajustes para a verossimilhança perfilada torna-se necessária. Existem na literatura vários trabalhos que apresentam tais ajustes; ver Barndorff-Nielsen (1983, 1994), Cox & Reid (1987, 1992), McCullagh e Tibshirani (1990), Fraser e Reid (1995), Stern (1997) e Fraser et al. (1999). Estes ajustes, incorporados à função de verossimilhança perfilada, visam à diminuição dos vieses da função score e da informação.

Neste capítulo, faremos uma revisão sobre função de verossimilhança perfilada e seus ajustes. Os ajustes abordados aqui serão os propostos por Cox & Reid (1987) e Barndorff-Nielsen (1983). Neste último usaremos as aproximações sugeridas por Severini (1999) e Fraser & Reid (1995).

2.2 Definições preliminares

Nesta seção introduzimos alguns conceitos básicos que serão úteis para o desenvolvimento deste capítulo e também dos capítulos seguintes.

Suponha que o vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ seja o valor observado da variável aleatória $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ associada a um experimento aleatório, representado pelo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, em que Ω é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento, \mathcal{A} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e \mathcal{P} é uma medida de probabilidade definida nos elementos de \mathcal{A} . Suponha também que a variável X é caracterizada por uma função de densidade ou de probabilidade com forma analítica $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ conhecida, porém, dependente do vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$. Considere o espaço paramétrico $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ como o conjunto dos possíveis valores do vetor $\boldsymbol{\theta}$. A função $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$, denominada função do modelo estatístico, define alguma família \mathcal{F} de distribuições de probabilidade.

A função de verossimilhança é definida como sendo igual à função $f(x; \theta)$, embora seja interpretada diferentemente como função de θ para x dado. Logo,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \Theta \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Note que se os componentes de X forem mutualmente independentes, a função de verossimilhança pode ser expressa como

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \boldsymbol{\theta}),$$

em que f_i corresponde a densidade individual da i -ésima observação. O estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é o valor em Θ que maximiza a função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})$.

Em muitas situações é mais conveniente se trabalhar com o logaritmo da função de verossimilhança, que é conhecido como função de log-verossimilhança e é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \log L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \log f_i(x_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Não é difícil verificar que o valor de $\boldsymbol{\theta}$ que maximiza a função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})$ também maximiza $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x})$, isto porque a função $y = \log x$ é crescente.

A função escore $U(\boldsymbol{\theta}) = (U_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, U_p(\boldsymbol{\theta}))^\top$ é dada por

$$U_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Sob condições de regularidade (ver Cox & Hinkley (1974) e Lehmann (1999)), temos que o valor esperado da função escore é sempre igual a zero, ou seja, $E[U(\boldsymbol{\theta})] = 0$. Um outro resultado importante estabelece que, sob certas condições,

$$E \left\{ \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right\} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right\}.$$

Esta igualdade é conhecida como igualdade da informação.

A quantidade $j(\boldsymbol{\theta}) = -\partial^2 \ell / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top$ é conhecida como matriz de informação observada, enquanto que a quantidade $i(\boldsymbol{\theta}) = E[j(\boldsymbol{\theta})]$ é denominada matriz de informação esperada ou matriz de informação de Fisher.

Suponha agora que o vetor $\boldsymbol{\theta}$ pode ser decomposto em $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi})$, onde os vetores $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\phi}$ possuem dimensões q e $p - q$, respectivamente. Assim, podemos representar a matriz de informação de forma particionada por

$$j(\boldsymbol{\theta}) = j(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} j_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} & j_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\phi}} \\ j_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\tau}} & j_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix},$$

em que

$$j_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}^\top}, \quad j_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\phi}} = j_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\tau}}^\top = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\phi}^\top} \quad \text{e} \quad j_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}} = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi} \partial \boldsymbol{\phi}^\top}.$$

De forma análoga, representamos a matriz de informação de Fisher de forma particionada por

$$i(\boldsymbol{\theta}) = i(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} i_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} & i_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\phi}} \\ i_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\tau}} & i_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix},$$

em que

$$i_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}^\top} \right\}, \quad i_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\phi}} = i_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\tau}}^\top = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\phi}^\top} \right\} \quad \text{e} \quad i_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi} \partial \boldsymbol{\phi}^\top} \right\}.$$

Em muitas situações estamos interessados em testar hipóteses sobre um subconjunto do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, digamos

$$\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\tau} \neq \boldsymbol{\tau}_0. \quad (2.1)$$

Existem na literatura vários testes de hipóteses que são utilizados com tal finalidade, dentre os quais destacamos três que são bastante conhecidos, são eles: o teste da razão de verossimilhanças, proposto por Neyman e Pearson (1928); o teste Wald, proposto por Wald (1943), e o teste escore, proposto por Rao (1948). Sabe-se que, em problemas regulares, as estatísticas da razão de verossimilhanças (LR), de Wald (W) e escore (S_R) são assintoticamente equivalentes, isto é, possuem a mesma distribuição nula assintótica, sendo esta qui-quadrado com o número de graus de liberdade igual ao número de restrições impostas sob \mathcal{H}_0 . Neste trabalho, focaremos nossos estudos apenas no teste da razão de verossimilhanças e em um teste recentemente proposto por Terrell (2002), denominado teste gradiente. A seguir apresentaremos, detalhadamente, estes testes.

Teste da razão de verossimilhanças

Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de observações de uma variável aleatória com função de densidade $f(x; \tau, \phi)$. Sejam $L(\tau, \phi)$ a função de verossimilhança e $\ell(\tau, \phi)$ a função de log-verossimilhança, ambas definidas anteriormente. A estatística da razão de verossimilhanças para testar a hipótese nula em (2.1) é definida como

$$\lambda = \frac{L(\tau_0, \tilde{\phi})}{L(\hat{\tau}, \hat{\phi})},$$

em que $\tilde{\phi}$ é o EMV de ϕ restrito à hipótese nula ($\tau = \tau_0$). Como a distribuição nula exata de λ é, em geral, de difícil obtenção, utiliza-se a seguinte transformação na estatística: $LR = -2 \log \lambda$. Assim, a estatística da razão de verossimilhanças pode ser reescrita como $LR = 2 \left\{ \ell(\hat{\tau}, \hat{\phi}) - \ell(\tau_0, \tilde{\phi}) \right\}$. Como dito anteriormente, a estatística LR tem, sob a hipótese nula, distribuição assintótica χ_q^2 , em que q é a dimensão do vetor τ . O teste da razão de verossimilhanças consiste em rejeitar a hipótese nula se o valor de LR for maior que o quantil de nível $1 - \gamma$ da distribuição χ_q^2 , em que γ é o nível de significância adotado para o teste.

Teste gradiente

O teste gradiente é uma alternativa aos testes usuais citados anteriormente. Obtida por Terrell (2002), a estatística de teste gradiente é uma mistura das estatísticas escore e Wald modificada. Ao combinar essas duas estatísticas, Terrell obteve uma estatística simples e que, ao contrário da

escore e da Wald, não envolve a matriz de informação (tanto observada quanto esperada).

Seja (x_1, \dots, x_n) uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade (caso contínuo) ou de probabilidade (caso discreto) $f(x; \tau, \phi)$. Sejam $\ell(\tau, \phi) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \tau, \phi)$ e $U(\tau, \phi) = (U_\tau^T, U_\phi^T)^T$ a função de log-verossimilhança e o vetor escore, respectivamente. A estatística gradiente para testar a hipótese nula em (2.1) é definida como $G_R = U_\tau(\tau_0, \tilde{\phi})^T (\hat{\tau} - \tau_0)$. Assim como a estatística LR , a estatística gradiente também possui distribuição assintótica χ_q^2 , sob a hipótese nula. O teste gradiente rejeita a hipótese nula se o valor calculado de G_R for maior que o quantil $1 - \gamma$ da distribuição χ_q^2 , em que γ é o nível de significância adotado para o teste.

2.3 Função de verossimilhança perfilada

Seja $\theta = (\tau^\top, \phi^\top)^\top$ um vetor paramétrico de um dado modelo estatístico com função de verossimilhança $L(\tau, \phi)$, para o qual τ e ϕ são vetores de parâmetros de interesse e perturbação, respectivamente. A função de verossimilhança perfilada para τ é definida como

$$L_p(\tau) = L(\tau, \hat{\phi}_\tau),$$

em que $\hat{\phi}_\tau$ é o estimador de máxima verossimilhança de ϕ para um dado valor de τ . Assim, a função log-verossimilhança perfilada é representada por $\ell_p(\tau) = \ell(\tau, \hat{\phi}_\tau)$.

Devido ao fato da função de verossimilhança perfilada ser obtida a partir da substituição do parâmetro de perturbação ϕ por $\hat{\phi}_\tau$, ela não é, de fato, uma função de verossimilhança genuína. Portanto, ela não possui algumas propriedades básicas válidas para uma verossimilhança original; por exemplo, a sua função escore é viciada e a informação apresenta viés. Entretanto, essa função possui algumas propriedades interessantes (ver Pace & Salvan (1997)), a saber:

- (i) O estimador de máxima verossimilhança e o estimador de máxima verossimilhança perfilado do parâmetro de interesse τ são iguais, isto é, $\hat{\tau} = \hat{\tau}_p$.
- (ii) Ao se testar hipóteses sobre τ , a estatística da razão de verossimilhanças baseada em $\ell_p(\tau)$ é igual à baseada em $\ell(\tau, \phi)$, ou seja, $LR = 2 \left\{ \ell(\hat{\tau}, \hat{\phi}) - \ell(\tau, \hat{\phi}_\tau) \right\} = 2 \left\{ \ell_p(\hat{\tau}) - \ell_p(\tau) \right\}$, onde $\hat{\tau}$ e $\hat{\phi}$ são os estimadores de máxima verossimilhança de τ e ϕ , respectivamente.

Para exemplificar a maneira como se obtém a função de verossimilhança perfilada consideraremos uma amostra (x_1, \dots, x_n) de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade dada por

$$\pi(x; \tau, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\phi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\phi} (x - \tau)^2 \right\}, \quad (-\infty < \tau, x < \infty, \phi > 0), \quad (2.2)$$

sendo τ e ϕ parâmetros desconhecidos. Temos então que

$$L(\tau, \phi) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \tau, \phi) = \frac{1}{(2\pi\phi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2 \right\},$$

de modo que

$$\ell(\tau, \phi) = \log L(\tau, \phi) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\phi) - \frac{1}{2\phi} \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2.$$

Assim,

$$\frac{\partial \ell(\tau, \phi)}{\partial \tau} = \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^n (x_i - \tau) \quad (2.3)$$

e

$$\frac{\partial \ell(\tau, \phi)}{\partial \phi} = -\frac{n}{2\phi} + \frac{1}{2\phi^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2. \quad (2.4)$$

Igualando as derivadas em (2.3) e (2.4) a zero e resolvendo o sistema de equações obtemos os seguintes estimadores de máxima verossimilhança para τ e ϕ , respectivamente: $\hat{\tau} = \bar{X}$ e $\hat{\phi} = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\tau})^2 / n$. O estimador de máxima verossimilhança de ϕ restrito ao parâmetro τ é, então, dado por $\hat{\phi}_\tau = \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2 / n$.

Finalmente, a função de verossimilhança perfilada para o parâmetro τ é

$$\ell_p(\tau) = \ell(\tau, \hat{\phi}_\tau) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\hat{\phi}_\tau) - \frac{1}{2\hat{\phi}_\tau} \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2 = c - \frac{n}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2,$$

sendo c uma constante que não depende de parâmetros.

Para encontrarmos o estimador de máxima verossimilhança perfilado ($\hat{\tau}_p$) basta igualar a função escore perfilada a zero e resolver a equação, ou seja,

$$u_p(\tau) = \frac{\partial \ell_p(\tau)}{\partial \tau} = n \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tau)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2} = 0.$$

Assim, o estimador perfilado é dado por $\hat{\tau}_p = \bar{X}$.

Quando usamos a função de verossimilhança perfilada, estamos assumindo que os parâmetros de perturbação são conhecidos. É claro que isto não é razoável em casos onde os dados não trazem muita informação a respeito destes parâmetros, o que usualmente ocorre quando a dimensão do vetor de parâmetros de perturbação é grande relativamente ao tamanho da amostra. Portanto, ajustes para a função de verossimilhança perfilada são necessários para suprir essa carência de informação. Algumas versões modificadas da verossimilhança perfilada são apresentadas nas seções a seguir.

2.4 Função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen

A função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen (1983) pode ser derivada como uma aproximação para as funções de verossimilhança marginal ou condicional para o parâmetro τ , quando uma destas funções existir. Para isto utiliza-se a fórmula p^* .

Seja $\theta = (\tau^\top, \phi^\top)^\top$ um vetor paramétrico de um dado modelo estatístico com função de verossimilhança $L(\theta; s)$, em que s é uma estatística suficiente minimal que ressalta a dependência desta função das observações da variável modelada. A expressão para p^* é dada por

$$p^*(\hat{\theta}|a; \theta) = c(\theta, a) \left| j(\hat{\theta}; \hat{\theta}, a) \right|^{1/2} \frac{L(\theta; \hat{\theta}, a)}{L(\hat{\theta}; \hat{\theta}, a)}, \quad (2.5)$$

sendo a uma estatística ancilar, $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança de θ e $(\hat{\theta}, a)$ uma função um-a-um de s e $j(\theta; \hat{\theta}, a) = -\partial^2 \log L(\theta; \hat{\theta}, a) / \partial \theta \partial \theta^\top$.

A fórmula p^* , apresentada em (2.5), é uma aproximação para a função densidade do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ condicionalmente a uma estatística ancilar a , $p(\hat{\theta}|a; \theta)$. Mais precisamente, $p(\hat{\theta}|a; \theta) = p^*(\hat{\theta}|a; \theta) \{1 + O(n^{-3/2})\}$, ou seja, $p(\hat{\theta}|a; \theta) \cong p^*(\hat{\theta}|a; \theta)$.

A derivação da função de verossimilhança perfilada modificada é feita sob a seguinte suposição em relação ao modelo: existe uma estatística a_0 tal que, quando τ é considerado fixo, $(\phi_\tau; a_0)$ é suficiente minimal e a_0 é ancilar. Ou seja, a distribuição de a_0 pode depender de τ , mas não de ϕ .

Para derivar a função de verossimilhança como uma aproximação da verossimilhança marginal, é preciso supor que $(\widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a)$ é uma transformação um-a-um da estatística suficiente minimal do modelo. Assuma também que, fixado τ , $\widehat{\tau}$ é ancilar. Observe que a distribuição condicional de $\widehat{\tau}$ dado a pode ser expressa por

$$p(\widehat{\tau}|a; \tau) = \frac{p(\widehat{\tau}, \widehat{\phi}|a; \tau, \phi)}{p(\widehat{\phi}|\widehat{\tau}, a; \tau, \phi)}. \quad (2.6)$$

Utilizando a fórmula p^* para aproximar as funções $p(\widehat{\tau}, \widehat{\phi}|a; \tau, \phi)$ e $p(\widehat{\phi}|\widehat{\tau}, a; \tau, \phi)$ temos

$$p^*(\widehat{\tau}, \widehat{\phi}|a; \tau, \phi) = c_1(\tau, \phi, a) \left| j_{\widehat{\tau}, \widehat{\phi}}(\tau, \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a) \right|^{1/2} \frac{L(\tau, \phi; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a)}{L(\widehat{\tau}, \widehat{\phi}; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a)} \quad (2.7)$$

e, considerando o modelo com τ fixado,

$$p^*(\widehat{\phi}|\widehat{\tau}, a; \tau, \phi) = c_2(\tau, \phi, a) \left| j_{\phi\phi}(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}_\tau, a) \right|^{1/2} \frac{L(\tau, \phi; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}_\tau, a)}{L(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}_\tau, a)}, \quad (2.8)$$

em que $j_{\phi\phi}(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}_\tau, a) = -\partial^2 \log L(\tau, \phi; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}_\tau, a) / \partial \phi^2$ avaliada em $(\tau, \widehat{\phi}_\tau)$. Como $\widehat{\phi}_\tau$ é função de $\widehat{\phi}$, fazendo uma mudança de variável na expressão (2.8), obtém-se

$$p^*(\widehat{\phi}|\widehat{\tau}, a; \tau, \phi) = c_2(\tau, \phi, a) \left| j_{\phi\phi}(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a) \right|^{1/2} \frac{L(\tau, \phi; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a)}{L(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a)} \left| \frac{\partial \widehat{\phi}_\tau}{\partial \widehat{\phi}} \right|. \quad (2.9)$$

Agora, para obtermos a função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen, basta substituímos as densidades na expressão (2.6) por suas expressões aproximadas (2.7) e (2.9). Assim,

$$L_{BN}(\tau) = L_p(\tau) \left| j_{\phi\phi}(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a) \right|^{-1/2} \left| \frac{\partial \widehat{\phi}_\tau}{\partial \widehat{\phi}} \right|^{-1}.$$

Tomando o logaritmo de L_{BN} obtém-se a seguinte função log-verossimilhança:

$$\ell_{BN}(\tau) = \ell_p(\tau) - \frac{1}{2} \log \left| j_{\phi\phi}(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a) \right| - \log \left| \frac{\partial \widehat{\phi}_\tau}{\partial \widehat{\phi}} \right|. \quad (2.10)$$

O estimador de máxima verossimilhança modificado, $\widehat{\tau}_{BN}$, é obtido através da expressão: $u_{BN}(\tau) = \partial \ell_{BN} / \partial \tau = 0$.

A expressão (2.10) pode ser apresentada de outra forma, em que $\partial \widehat{\phi}_\tau / \partial \widehat{\phi}$ é expressa em termos de uma derivada no espaço amostral do logaritmo da função de verossimilhança, ou seja,

$$\frac{\partial \widehat{\phi}_\tau}{\partial \widehat{\phi}} = j_{\phi\phi}(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a)^{-1} \ell_{\phi; \widehat{\phi}}(\tau, \widehat{\phi}_\tau; \widehat{\tau}, \widehat{\phi}, a),$$

em que $\ell_{\phi;\hat{\phi}} = \partial^2 \ell / \partial \phi \partial \hat{\phi}$.

Portanto, $\ell_{BN}(\tau)$ pode ser reescrita como

$$\ell_{BN}(\tau) = \ell_p(\tau) + \frac{1}{2} \log \left| j_{\phi\phi}(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi}, a) \right| - \log \left| \ell_{\phi;\hat{\phi}}(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi}, a) \right|.$$

Para o cálculo da quantidade $\ell_{\phi;\hat{\phi}}(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi}, a)$ é indispensável a especificação da estatística ancilar a .

Nas seções a seguir apresentaremos algumas aproximações para a função $\ell_{BN}(\tau)$ que são derivadas a partir de aproximações para $\ell_{\phi;\hat{\phi}}(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi}, a)$.

2.4.1 Aproximações sugeridas por Severini (2000) e Fraser & Reid (1995)

Na seção anterior, vimos que a função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen depende da quantidade $\ell_{\phi;\hat{\phi}}(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi}, a)$, que é uma derivada relativa ao espaço amostral. O cálculo desta quantidade é na maioria das situações de difícil, ou até mesmo impossível, obtenção. Motivados por tal dificuldade vários autores propuseram aproximações para a derivada do espaço amostral do logaritmo da função de verossimilhança. Nesta seção trataremos, especificamente, das propostas feitas por Severini (1999) e Fraser & Reid (1995).

A aproximação proposta por Severini (1999), cujo erro de aproximação é $O(n^{-1/2})$, pode ser facilmente calculada e é conveniente em situações em que há dificuldade para calcular a esperança do produto de derivadas do logaritmo da verossimilhança. A função de log-verossimilhança proposta é dada por

$$\check{\ell}_{BN}(\tau) = \ell_p(\tau) + \frac{1}{2} \log |j_{\phi\phi}(\tau, \hat{\phi}_\tau)| - \log |\check{I}_\phi(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi})|,$$

em que

$$\check{I}_\phi(\tau, \phi; \tau_0, \phi_0) = \sum_{j=1}^n \ell_\phi^{(j)}(\tau, \phi) \ell_\phi^{(j)}(\tau_0, \phi_0)^\top$$

e $\ell_\phi^{(j)}$ sendo a função escore baseada na j -ésima observação. O respectivo estimador de máxima verossimilhança será denotado por $\hat{\tau}_{BN}$.

Uma segunda aproximação foi apresentada por Fraser & Reid (1995) e Fraser et al. (1999). Ela é dada por

$$\tilde{\ell}_{BN}(\tau) = \ell_p(\tau) + \frac{1}{2} \log |j_{\phi\phi}(\hat{\phi}_\tau, \tau)| - \log |l_{\phi;T}(\hat{\phi}_\tau, \tau) \widehat{V}_\phi|,$$

em que $l_{\phi;T}(\phi, \tau) = \partial l_\phi(\phi, \tau) / \partial T'$, sendo $l_\phi(\phi, \tau)$ a função escore de ϕ . A quantidade \widehat{V}_ϕ é dada por

$$\widehat{V}_\phi = \left(-\frac{\partial F(x_1; \hat{\phi}, \hat{\tau}) / \partial \hat{\phi}}{f(x_1; \hat{\phi}, \hat{\tau})}, \dots, -\frac{\partial F(x_n; \hat{\phi}, \hat{\tau}) / \partial \hat{\phi}}{f(x_n; \hat{\phi}, \hat{\tau})} \right)^\top,$$

em que $F(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada e $f(\cdot)$ é a função de densidade da variável aleatória X . O correspondente estimador de máxima verossimilhança será denotado por $\hat{\tau}_{BN}$.

Como exemplo, mostraremos agora através da distribuição $\mathcal{N}(\tau, \phi)$, como se obtêm as aproximações para a função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen. Para a aproximação sugerida por Severini (1999) temos

$$\check{\ell}_{BN}(\tau) = \ell_p(\tau) + \frac{1}{2} \log |j_{\phi\phi}(\tau, \hat{\phi}_\tau)| - \log |\check{I}_\phi(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi})|$$

com

$$j_{\phi\phi}(\tau, \hat{\phi}_\tau) = \frac{n^3}{2 [\sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2]^2}$$

e

$$\check{I}_\phi(\tau, \hat{\phi}_\tau; \hat{\tau}, \hat{\phi}) = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2\hat{\phi}_\tau} + \frac{1}{2\hat{\phi}_\tau^2} (x_i - \tau)^2 \right] \times \left[-\frac{1}{2\hat{\phi}} + \frac{1}{2\hat{\phi}^2} (x_i - \hat{\tau})^2 \right].$$

Já a função sugerida por Fraser & Reid (1995) é

$$\tilde{\ell}_{BN}(\tau) = \ell_p(\tau) + \frac{1}{2} \log |j_{\phi\phi}(\tau, \hat{\phi}_\tau)| - \log |\ell_{\phi;x}(\tau, \hat{\phi}_\tau) \widehat{V}_\phi|$$

onde

$$\ell_{\phi;x}(\tau, \hat{\phi}_\tau) = \left(\frac{x_1 - \tau}{\hat{\phi}_\tau^2}, \dots, \frac{x_n - \tau}{\hat{\phi}_\tau^2} \right)$$

e

$$\widehat{V}_\phi = \left(\frac{x_1 - \hat{\tau}}{2\hat{\phi}}, \dots, \frac{x_n - \hat{\tau}}{2\hat{\phi}} \right)^\top.$$

2.5 Função de verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox & Reid

Analisando as consequências da ortogonalidade entre os parâmetros de interesse e perturbação, Cox & Reid (1987) propuseram uma versão modificada para a função de verossimilhança perfilada. Essa versão é uma aproximação para a função densidade condicional das observações dado o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de perturbação.

Suponha novamente que $\theta = (\tau^\top, \phi^\top)^\top$ é um vetor paramétrico que indexa um dado modelo estatístico com função de verossimilhança $L(\tau, \phi)$, para o qual τ e ϕ são vetores de parâmetros de interesse e perturbação, respectivamente. A matriz de informação particionada de acordo com a partição de θ é dada por

$$i(\theta) = \begin{pmatrix} i_{\tau\tau} & i_{\tau\phi} \\ i_{\phi\tau} & i_{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

em que $i(\theta) = E \{j(\theta)\} = E \left\{ -\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right\}$. Os vetores τ e ϕ são ortogonais se $i_{\tau\phi} = i_{\phi\tau}^\top = 0$ para todo $\theta \in \Theta$. Destacamos, a seguir, algumas consequências importantes da ortogonalidade entre τ e ϕ .

- (i) independência assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança de τ e ϕ ;
- (ii) a matriz de covariância de $\hat{\tau}$ pode ser calculada como se ϕ fosse conhecido. De fato, $i^{\tau\tau} = (i_{\tau\tau} - i_{\tau\phi}(i_{\phi\phi})^{-1}i_{\phi\tau})^{-1} = (i_{\tau\tau})^{-1}$ se $i_{\tau\phi} = 0$;
- (iii) $\hat{\phi}_\tau - \hat{\phi} = O_p(n^{-1})$, enquanto que usualmente $\hat{\phi}_\tau - \hat{\phi} = O_p(n^{-1/2})$.

Suponha, agora, os parâmetros τ e ϕ não necessariamente ortogonais. O logaritmo da função de verossimilhança, $\ell(\tau, \phi)$, pode ser expandido em série de Taylor em torno de $(\hat{\tau}, \hat{\phi})$ como

$$\begin{aligned} \ell(\tau, \phi) &= \ell(\hat{\tau}, \hat{\phi}) - \frac{1}{2} \left[(\tau - \hat{\tau})^2 j_{\tau\tau}(\hat{\tau}, \hat{\phi}) + (\phi - \hat{\phi})^2 j_{\phi\phi}(\hat{\tau}, \hat{\phi}) + 2(\tau - \hat{\tau})(\phi - \hat{\phi}) j_{\tau\phi}(\hat{\tau}, \hat{\phi}) \right] \\ &+ O_p(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Se estamos no caso onde τ e ϕ são ortogonais, $j_{\tau\phi}(\tau, \phi)$ e $j_{\tau\phi}(\hat{\tau}, \hat{\phi})$ são de ordem $O_p(n^{1/2})$. Assim,

$$\begin{aligned} \ell(\tau, \phi) &= \ell(\hat{\tau}, \hat{\phi}) - \frac{1}{2} \left[(\tau - \hat{\tau})^2 j_{\tau\tau}(\hat{\tau}, \hat{\phi}) + (\phi - \hat{\phi})^2 j_{\phi\phi}(\hat{\tau}, \hat{\phi}) \right] + O_p(n^{-1/2}) \quad (2.11) \\ &= \ell_1(\tau) + \ell_2(\phi) + O_p(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

para $(\tau, \phi) = (\hat{\tau}, \hat{\phi}) + O_p(n^{-1/2})$.

Da expressão (2.11), temos

$$\ell(\hat{\tau}, \hat{\phi}) = \ell(\tau, \phi) + \frac{1}{2} \left[(\tau - \hat{\tau})^2 j_{\tau\tau}(\hat{\tau}, \hat{\phi}) + (\phi - \hat{\phi})^2 j_{\phi\phi}(\hat{\tau}, \hat{\phi}) \right] + O_p(n^{-1/2}).$$

Portanto, podemos aproximar o logaritmo da função de verossimilhança condicional, a menos de termos que não dependem de τ e ϕ , pela expressão

$$\log p(x|\hat{\phi}; \tau) = \ell(\tau, \phi) - \frac{1}{2} \log |j_{\phi\phi}(\tau, \phi)| + \frac{1}{2} (\phi - \hat{\phi})^T j_{\phi\phi}(\tau, \phi) (\tau - \hat{\phi}).$$

Podemos notar que a função acima depende do parâmetro ϕ ; isto acontece porque a suficiência de $\hat{\phi}$ para ϕ é somente observada assintoticamente e além disso foi utilizada uma aproximação para a distribuição deste estimador de máxima verossimilhança. Uma solução viável seria a substituição do parâmetro ϕ pelo estimador restrito $\hat{\phi}_\tau$. Assim, como τ e ϕ são ortogonais, observa-se $\hat{\phi}_\tau - \hat{\phi} = O_p(n^{-1})$ e por, conseguinte, a forma quadrática $(\phi - \hat{\phi})^T j_{\phi\phi}(\tau, \phi) (\tau - \hat{\phi})$ tem ordem $O_p(n^{-1})$ e por isso pode ser desprezada.

Assim, a função de log-verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox & Reid (1987) é definida por

$$\ell_{CR}(\tau) = \ell_p(\tau) - \frac{1}{2} \log |j_{\phi\phi}(\tau, \hat{\phi}_\tau)|. \quad (2.12)$$

O correspondente estimador de máxima verossimilhança será denotado por $\hat{\tau}_{CR}$.

Como podemos notar, a obtenção da função ℓ_{CR} só foi possível com a suposição de ortogonalidade dos parâmetros τ e ϕ . Quando esta suposição não é satisfeita precisamos encontrar uma nova parametrização ortogonal, o que só é garantido quando o parâmetro de interesse é escalar.

Como exemplo, mostraremos agora como se obtém a função de log-verossimilhança perfilada proposta por Cox & Reid (1987) para a densidade dada em (2.2). Da Seção 2.2, temos

$$\ell_p(\tau) = c - \frac{n}{2} \log \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2.$$

Já da Seção 2.1, vem

$$j_{\phi\phi}(\tau, \hat{\phi}_\tau) = \frac{n^3}{2 [\sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2]^2}.$$

Agora basta substituímos esses termos na expressão (2.12):

$$\ell_{CR}(\tau) = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \log \sum_{i=1}^n (x_i - \tau)^2.$$

Para maiores detalhes sobre verossimilhança perfilada, assim como suas versões ajustadas aqui utilizadas, veja Pace & Salvan (1997) e Severini (2000).

Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders sob censura
tipo II

3.1 Introdução

A fadiga é um dano estrutural que surge quando um material é exposto a flutuações de tensão e estresse. As distribuições estatísticas mais comumente utilizadas na modelagem do tempo de falha em processos de fadiga são gama, gaussiana inversa, lognormal e Weibull. Essas distribuições tipicamente apresentam um excelente ajuste na parte central da distribuição de vida, porém, apresentam ajuste pobre nos percentis mais baixos ou mais altos da distribuição. Birnbaum & Saunders (1969a), motivados por problemas de vibração encontrados em aviões comerciais e por problemas de falhas de materiais, utilizaram o conhecimento que tinham a respeito de um tipo de fadiga para derivar uma nova família de distribuições. A distribuição Birnbaum-Saunders (BS) pode ser usada para modelar o tempo de vida de materiais e equipamentos sujeitos a cargas dinâmicas, ajustando-se melhor nas caudas do que as distribuições citadas acima. Vários estudos referentes a esta distribuição vêm sendo realizados; dentre esses trabalhos destacamos, a seguir, alguns que consideramos relevantes. Engelhardt et al. (1981) propuseram intervalos de confiança e testes de hipóteses para os parâmetros da BS considerando um deles como parâmetro de perturbação desconhecido. Desmond (1986) investigou a relação entre a distribuição Birnbaum-Saunders e a distribuição gaussiana inversa. Rieck & Nedelman (1991) desenvolveram

um modelo log-linear para a distribuição BS e também alguns métodos de estimação. Achcar & Espinosa (1991) utilizaram o modelo log-linear proposto por Rieck & Nedelman (1991) para desenvolver métodos bayesianos em testes de vida acelerados. Dupuis & Mills (1998) propuseram métodos robustos de estimação para os parâmetros da distribuição BS. Outros trabalhos, de igual relevância, referentes à distribuição Birnbaum-Saunders são Ng et al. (2003, 2006), Galea et al. (2004), Wu & Wong (2004), Wang et al. (2006), Lemonte et al. (2007) e Cysneiros et al. (2008). Em particular, Cysneiros et al. (2008) propuseram para a distribuição Birnbaum-Saunders as funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas de Cox & Reid (1987) e Barndorff-Nielsen (1983). Os autores apresentaram os estimadores de máxima verossimilhança e os testes da razão de verossimilhanças, relacionados a estas funções, para amostras finitas e com dados completos (sem censura).

É comum, no entanto, que em dados de tempo de vida exista censura. As censuras podem acontecer de duas maneiras: pelo término do estudo antes do evento de interesse acontecer ou pela saída do indivíduo antes do estudo terminar. Logo, para estes indivíduos cujo evento de interesse não ocorreu, o tempo de censura é o tempo correspondente do início do experimento até o momento em que ele foi retirado da amostra, ou até o fim do estudo. Já o tempo de falha é o tempo decorrido do início do experimento até o momento em que ocorreu o evento de interesse. Sabemos apenas que o tempo de falha é maior que o tempo de censura. A censura do tipo II acontece em situações em que o estudo termina após a ocorrência do evento de interesse em um número pré-determinado de indivíduos.

O objetivo deste capítulo é estender os resultados apresentados em Cysneiros et al. (2008) para situações nas quais os dados apresentam censura do tipo II e também considerar estimação intervalar. Neste capítulo, derivamos os estimadores de máxima verossimilhança relacionados às funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas para dados com presença de censura do tipo II. Apresentamos ainda os testes da razão de verossimilhanças ajustados e o teste bootstrap paramétrico. Também calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t . Através de simulações de Monte Carlo são avaliados os desempenhos em pequenas amostras dos testes e dos estimadores pontuais e intervalares propo-

tos. Essas simulações são feitas para vários níveis de censura e diferentes tamanhos de amostras. Por fim, mostramos dois exemplos práticos para ilustrar tudo o que foi desenvolvido e apresentamos nossas conclusões finais.

3.2 Distribuição Birnbaum-Saunders

Baseando-se em um determinado tipo de dano estrutural, que acontece quando um material é exposto a carga de estresse e tensão, Birnbaum & Saunders (1969a) construíram uma nova família de distribuições. A seguir, apresentaremos uma breve descrição de como a distribuição Birnbaum-Saunders foi derivada.

Considere um material exposto a um processo de fadiga, ou seja, sujeito a um padrão cíclico de força e tensão. Seja cada ciclo composto por “ m ” oscilações. Assim, cada aplicação da i -ésima oscilação em um ciclo resulta em uma extensão aleatória da rachadura X_i . Logo a extensão da rachadura devido ao j -ésimo ciclo é dada pela variável $Y_j = \sum_{i=1}^m X_i$.

Birnbaum e Saunders (1969a) então fizeram as seguintes suposições: (i) A distribuição da variável aleatória X_i depende somente da rachadura atual causada pela oscilação neste ciclo e (ii) Y_j é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 , para todo $j = 1, 2, 3, \dots$. Assim, de (i) e (ii) temos que as variáveis (Y_1, Y_2, \dots) são independentes e identicamente distribuídas.

Ao serem aplicados n ciclos de cargas, a extensão total da rachadura é dada pela variável aleatória $W_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ com função de distribuição $H_n(w) = P(W_n \leq w)$, para $n = 1, 2, \dots$

Seja C o número de ciclos requeridos até que seja observada a falha, em que tal falha ocorre quando a extensão total da rachadura (W_n) excede um dado comprimento crítico w . A função de distribuição da variável aleatória C é

$$\begin{aligned} P(C \leq n) &= P\left(\sum_{j=1}^n Y_j > w\right) = P(W_n > w) = 1 - H_n(w) \\ &= 1 - P\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{w}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Assumindo que os Y_j 's são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, a função de distribuição de C pode ser aproximada usando o Teorema Central do Limite, isto é,

$$\begin{aligned} P(C \leq n) &\cong 1 - \Phi\left(\frac{w}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left[-\left(\frac{w}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} - \frac{w}{\sigma\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

em que $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Segundo Birnbaum & Saunders (1969a), substituindo n por uma variável aleatória real não negativa t , então a variável aleatória T é a extensão contínua da variável aleatória discreta C . Assim, T representa o tempo total até que ocorra a falha. Assim, fazendo $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu w}}$ e $\beta = \frac{w}{\mu}$ a função de distribuição acumulada da variável aleatória T pode ser reescrita como

$$F_T(t; \alpha, \beta) = P(T \leq t) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right], \quad 0 < t < \infty, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (3.1)$$

onde α e β são os parâmetros de forma e escala, respectivamente. A correspondente função densidade de probabilidade de T é

$$f_T(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta}\xi'\left(\frac{t}{\beta}\right)\phi\left[\frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right], \quad t > 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (3.2)$$

onde $\phi(\cdot)$ é a densidade normal padrão, $\xi(t) = t^{1/2} - t^{-1/2}$ e $\xi'(t) = \frac{1}{2t}(t^{1/2} + t^{-1/2})$.

A distribuição Birnbaum-Saunders possui algumas propriedades interessantes que podem ser encontradas em Birnbaum & Saunders (1969a). À medida que α tende a zero a distribuição se torna simétrica em torno de β . Este comportamento pode ser visto na Figura 3.1, que apresenta a função de densidade para diferentes valores do parâmetro de forma considerando o parâmetro de escala fixo ($\beta = 4$). Adicionalmente, β é a mediana da distribuição, ($T/\beta \sim \mathcal{BS}(\alpha, 1)$). Em Saunders (1974) é mostrado que a distribuição $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ possui a *propriedade recíproca*, ou seja, $T^{-1} \sim \mathcal{BS}(\alpha, \beta^{-1})$.

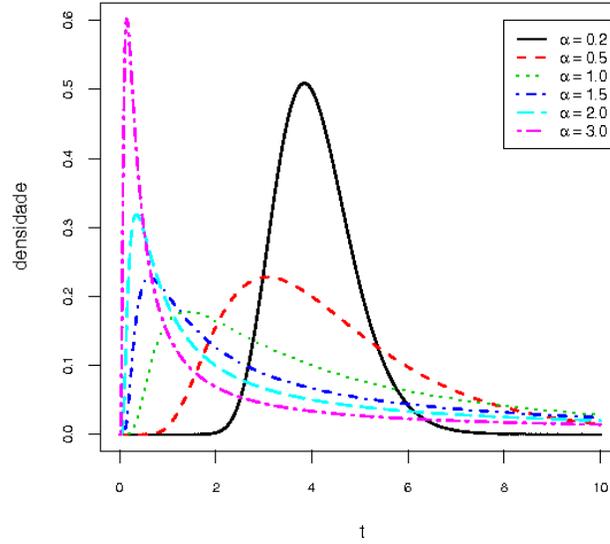


Figura 3.1: Funções de densidade Birnbaum-Saunders para os valores de α indicados e $\beta = 4$.

Considere a seguinte transformação monótona:

$$T = \beta \left(1 + 2X^2 + 2X(1 + X^2)^{1/2} \right),$$

em que, de (3.1), temos que $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{4}\alpha^2)$. Através desta transformação, podemos obter facilmente o valor esperado, a variância e os coeficientes de assimetria e a curtose:

$$\begin{aligned} E(T) &= \beta \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \right), & \text{Var}(T) &= (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2 \right), \\ \beta_1(T) &= \frac{16\alpha^2(11\alpha^2 + 6)}{(5\alpha^2 + 4)^3} & \text{e } \beta_2(T) &= 3 + \frac{6\alpha^2(93\alpha^2 + 41)}{(5\alpha^2 + 4)^2}. \end{aligned}$$

A função de sobrevivência e a função de risco da distribuição Birnbaum-Saunders são dadas, respectivamente, por

$$S_T(t) = 1 - F_T(t) = 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \xi \left(\frac{t}{\beta} \right) \right] \quad \text{e} \quad h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)}. \quad (3.3)$$

O comportamento da função de risco $h_T(t)$ pode ser visto na Figura 3.2. Note que $h_T(t)$ assume valor zero em $t = 0$, depois cresce até um valor máximo e então decresce até uma constante positiva.

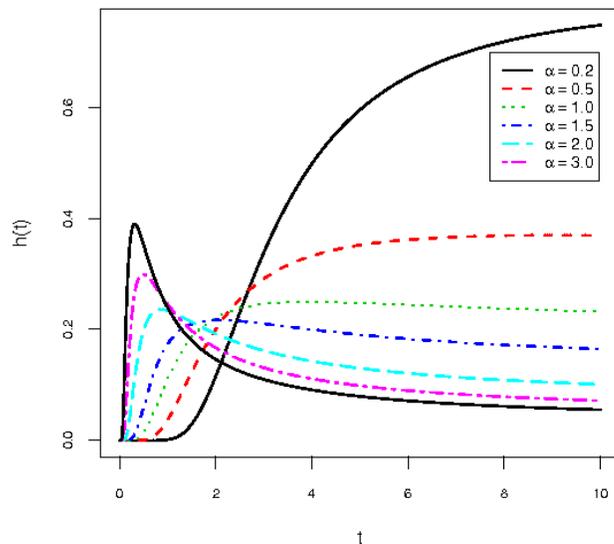


Figura 3.2: Funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders para os valores de α indicados e $\beta = 4$.

3.3 Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders sob censura tipo II

Nesta seção, apresentaremos inferências melhoradas para a distribuição Birnbaum-Saunders sob censura tipo II. Essas inferências serão realizadas sobre o parâmetro de forma α através das funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas, mostradas no Capítulo 2. Adicionalmente, apresentaremos as estatísticas da razão de verossimilhanças baseadas nestas funções e também intervalos de confiança bootstrap.

Sejam $\{t_{(1)}, \dots, t_{(r)}\}$ as r menores observações numa amostra aleatória de tamanho n de uma variável T com distribuição Birnbaum-Saunders e densidade dada em (3.2). Dizemos que $\{t_{(1)}, \dots, t_{(r)}, t_{(r)}, \dots, t_{(r)}\}$ é uma amostra de tamanho n com censura tipo II, onde $(n - r)$ observações são censuradas. Neste caso, a função de verossimilhança é dada por

$$L = L(\alpha, \beta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \xi \left(\frac{t_{(r)}}{\beta} \right) \right] \right\}^{n-r} \times \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2\pi\alpha\beta})^r} \left[\prod_{i=1}^r \xi' \left(\frac{t_{(i)}}{\beta} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r \xi^2 \left(\frac{t_{(i)}}{\beta} \right) \right] \right\} \quad (3.4)$$

sendo a log-verossimilhança

$$\begin{aligned} \ell = \log(L) = c &+ (n-r) \log \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \xi \left(\frac{t_{(r)}}{\beta} \right) \right] \right\} - r \log(\alpha\beta) \\ &+ \sum_{i=1}^r \log \left\{ \xi' \left(\frac{t_{(i)}}{\beta} \right) \right\} - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r \xi^2 \left(\frac{t_{(i)}}{\beta} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$e \ c = \log \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) - \frac{r}{2} \ln(2\pi).$$

No que segue usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} t_{(i)}^* &= \frac{t_{(i)}}{\beta}, \quad u^* = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r t_{(i)}^*, \quad v^* = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{1}{t_{(i)}^*} \right)^{-1}, \\ K^*(\beta) &= \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{1}{1+t_{(i)}^*} \right)^{-1} \quad e \quad H(x) = \frac{\phi(x)}{1-\Phi(x)}. \end{aligned}$$

Note que a função $H(x)$ é a função de risco da distribuição normal padrão.

O estimador de máxima verossimilhança restrito de β , $\hat{\beta}_\alpha$, é obtido da seguinte equação não-linear:

$$Q(\beta) = \varphi^2(\beta) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{K^*(\beta)} \right] - \frac{u^*}{2} + \frac{1}{2v^*} - \frac{\varphi(\beta)(n-r)}{r} \times H \left[\frac{1}{\varphi(\beta)} \xi(t_{(r)}^*) \right] t_{(r)}^* \xi'(t_{(r)}^*), \quad (3.6)$$

em que $\varphi^2(\beta) = \alpha^2 = \frac{h_2(\beta)h_3(\beta)-h_1(\beta)h_4(\beta)}{h_1(\beta)-h_3(\beta)}$. Aqui,

$$\begin{aligned} h_1(\beta) &= \xi(t_{(r)}^*), \\ h_2(\beta) &= -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \xi^2(t_{(i)}^*), \\ h_3(\beta) &= \left[1 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{t_{(i)}^* \xi''(t_{(i)}^*)}{\xi'(t_{(i)}^*)} \right]^{-1} t_{(r)}^* \xi'(t_{(r)}^*) \end{aligned}$$

e

$$h_4(\beta) = \left[1 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{t_{(i)}^* \xi''(t_{(i)}^*)}{\xi'(t_{(i)}^*)} \right]^{-1} \left[-\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r t_{(i)}^* \xi(t_{(i)}^*) \xi'(t_{(i)}^*) \right].$$

Para maiores detalhes, ver Ng et al. (2006). Observamos que o estimador de máxima verossimilhança restrito de β é igual ao estimador de máxima verossimilhança de β , ou seja, $\widehat{\beta}_\alpha = \widehat{\beta}$.

Temos que a função de log-verossimilhança perfilada (vide Seção 2.3) é dada por

$$\begin{aligned} \ell_p(\alpha) &= (n-r) \log \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \xi \left(\frac{t_{(r)}}{\widehat{\beta}_\alpha} \right) \right] \right\} - r \log(\alpha \widehat{\beta}_\alpha) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \log \left\{ \xi' \left(\frac{t_{(i)}}{\widehat{\beta}_\alpha} \right) \right\} - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r \xi^2 \left(\frac{t_{(i)}}{\widehat{\beta}_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

O EMV perfilado $\widehat{\alpha}_p$ é obtido como solução de $u_p(\alpha) = 0$, não possuindo forma fechada. Logo, para encontrarmos o valor de $\widehat{\alpha}_p$ que maximiza $\ell_p(\alpha)$ é necessária a utilização de um procedimento de otimização não-linear, como, por exemplo, o algoritmo de Newton (Newton-Raphson, escore de Fisher) ou um algoritmo quasi-Newton (BFGS); para maiores detalhes sobre tais algoritmos, ver Nocedal e Wright (1999).

Mostraremos agora a obtenção dos ajustes para a função de verossimilhança perfilada, utilizando as expressões apresentadas no Capítulo 2.

A função de log-verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen (1983) para o parâmetro α é dada por

$$\ell_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log \left| j_{\beta\beta}(\alpha, \widehat{\beta}_\alpha; \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, a) \right| - \log \left| \ell_{\beta; \widehat{\beta}}(\alpha, \widehat{\beta}_\alpha; \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, a) \right|. \quad (3.8)$$

Devido à grande dificuldade em se obter a quantidade $\ell_{\beta; \widehat{\beta}}(\alpha, \widehat{\beta}_\alpha; \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, a)$, optamos por utilizar aproximações para a função (3.8). Essas funções modificadas usam aproximações para a derivada do espaço amostral propostas por Severini (1999) e Fraser & Reid (1995) e são dadas, respectivamente, por

$$\check{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \widehat{\beta}_\alpha)| - \log |\check{I}_\beta(\alpha, \widehat{\beta}_\alpha; \widehat{\alpha}, \widehat{\beta})| \quad (3.9)$$

e

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \widehat{\beta}_\alpha)| - \log |\ell_{\beta; T}(\alpha, \widehat{\beta}_\alpha) \widehat{V}_\beta|, \quad (3.10)$$

em que, para o nosso modelo,

$$\begin{aligned} \check{I}_\beta(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \sum_{j=1}^r \frac{1}{\hat{\beta}^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{\beta}}{t_{(j)} + \hat{\beta}} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t_{(j)}}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{t_{(j)}} \right) \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\hat{\beta}}{t_{(j)} + \hat{\beta}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\hat{\alpha}^2} \left(\frac{t_{(j)}}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{t_{(j)}} \right) \right] + (n-r)H \left(\frac{1}{\alpha} \xi \left(\frac{t_{(r)}}{\hat{\beta}} \right) \right) H \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} \xi \left(\frac{t_{(r)}}{\hat{\beta}} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha \hat{\alpha} \hat{\beta}^2} \left(\xi' \left(\frac{t_{(r)}}{\hat{\beta}} \right) \right)^2 \left(\frac{t_{(r)}}{\hat{\beta}} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_{\beta;T}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha) \hat{V}_\beta &= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{t_{(i)}}{\hat{\beta}} \left(\frac{-1}{t_{(i)} + \hat{\beta}_\alpha} + \frac{1}{2(\alpha \hat{\beta}_\alpha)^2} + \frac{1}{2(t_{(i)} \alpha)^2} \right) + (n-r+1) \frac{t_{(r)}}{\hat{\beta}} \times \\ &\quad \left\{ \frac{(n-r)}{\alpha \hat{\beta}_\alpha} \left[\frac{1}{\hat{\beta}_\alpha} H \left(\frac{1}{\alpha} \xi(t_{(r)}^*) \right) \left(t_{(r)}^* \xi''(t_{(r)}^*) + \xi'(t_{(r)}^*) \right) + \frac{t_{(r)}^*}{\alpha \hat{\beta}_\alpha} \left(\xi'(t_{(r)}^*) \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. H' \left(\frac{1}{\alpha} \xi(t_{(r)}^*) \right) \right] \right\} + (n-r+1) \frac{t_{(r)}}{\hat{\beta}} \left(-\frac{1}{(t_{(r)} + \hat{\beta}_\alpha)^2} + \frac{1}{2(\alpha \hat{\beta}_\alpha)^2} + \frac{1}{2(t_{(r)} \alpha)^2} \right) \end{aligned}$$

e

$$j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha) = \frac{r}{(\alpha \hat{\beta}_\alpha)^2} \left[-Q(\hat{\beta}_\alpha) + A \right]. \quad (3.11)$$

Aqui, para resolvermos a equação (3.11) utilizamos a equação (3.6) avaliada em $\hat{\beta}_\alpha$ junto com

$$H'(x) = -xH(x) + H^2(x)$$

e

$$\begin{aligned} A &= -\alpha^2 \left(\frac{1}{K^*} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{1}{(1+t_{(i)}^*)^2} \right) + \frac{u^*}{2} + \frac{1}{2v^*} + \frac{\alpha(n-r)}{r} t_{(r)}^* \left[H \left(\frac{1}{\alpha} \xi(t_{(r)}^*) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(t_{(r)}^* \xi''(t_{(r)}^*) + \xi'(t_{(r)}^*) \right) + \frac{t_{(r)}^*}{\alpha} \left(\xi'(t_{(r)}^*) \right)^2 H' \left(\frac{1}{\alpha} \xi(t_{(r)}^*) \right) \right]. \end{aligned}$$

Os EMVs perfilados ajustados $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\beta}_{BN}$ são obtidos como solução das equações $\check{u}_{BN}(\alpha) = \partial \check{\ell} / \partial \alpha = 0$ e $\check{u}_{BN}(\alpha) = \partial \check{\ell} / \partial \alpha = 0$, respectivamente.

Podemos mostrar que a função de log-verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox & Reid (1987) pode ser expressa como

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)|,$$

sendo $j_{\beta\beta}$ dado em (3.11). O correspondente estimador de máxima verossimilhança perfilado ajustado de α é denotado por $\hat{\alpha}_{CR}$. Assim como os EMVs $\hat{\beta}_\alpha$ e $\hat{\alpha}_p$, os estimadores $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ não têm forma fechada. Eles podem ser obtidos numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança; ver Nocedal & Wright (1999).

Suponha agora que o interesse está em testar a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \alpha = \alpha_0$ contra a hipótese alternativa $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq \alpha_0$, onde α_0 é um dado escalar. As estatísticas da razão de verossimilhanças perfilada e perfiladas ajustadas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} LR_p &= 2 \{ \ell_p(\hat{\alpha}_p) - \ell_p(\alpha_0) \}, \\ LR_{BN_1} &= 2 \{ \check{\ell}_{BN}(\check{\alpha}) - \check{\ell}_{BN}(\alpha_0) \}, \\ LR_{BN_2} &= 2 \{ \tilde{\ell}_{BN}(\tilde{\alpha}) - \tilde{\ell}_{BN}(\alpha_0) \} \end{aligned}$$

e

$$LR_{CR} = 2 \{ \ell_{CR}(\hat{\alpha}_{CR}) - \ell_{CR}(\alpha_0) \}.$$

Assintoticamente e sob a hipótese nula, as estatísticas de teste LR_p , LR_{BN_1} , LR_{BN_2} e LR_{CR} são distribuídas como χ_1^2 . Os testes consistem em rejeitar a hipótese nula se o valor da estatística de teste for maior que o quantil $(1 - \gamma)$ da χ_1^2 .

Vale ressaltar que o ajuste de Cox & Reid (1987) para a função de verossimilhança perfilada requer a ortogonalidade entre o parâmetro de interesse e o parâmetro de perturbação. Para dados completos (sem presença de censura), os parâmetros que indexam a distribuição Birnbaum-Saunders são ortogonais, ou seja, os elementos fora da diagonal da matriz de informação de Fisher são iguais a zero; ver Lemonte et al. (2007). Na presença de censura tipo II, no entanto, a matriz de informação de Fisher não pode ser obtida de forma analítica. Portanto, não se tem certeza a respeito da ortogonalidade entre α e β . Devemos, no entanto, trabalhar com o ajuste de Cox & Reid (1987), pois nossos resultados numéricos (Monte Carlo) mostram que ele tipicamente proporciona inferência confiável.

Para o teste bootstrap paramétrico utilizamos a estatística LR_b . Esse teste objetiva aproximar a distribuição da estatística LR através de reamostragens. O teste funciona da seguinte

maneira: geramos, supondo \mathcal{H}_0 verdadeira, B amostras bootstrap a partir da amostra original e calculamos, para cada amostra bootstrap, a estatística LR_b , $b = 1, 2, \dots, B$. A seguir, ordenamos as B réplicas bootstrap LR_b e tomamos como o percentil estimado $\hat{q}_{1-\gamma}$ a réplica $B \times (1-\gamma)$. Caso $B \times (1-\gamma)$ não seja inteiro, utilizamos o seguinte método: seja $k = \lfloor (B+1) \times \gamma \rfloor$ o maior inteiro $\leq (B+1) \times \gamma$, então consideramos como o percentil estimado $\hat{q}_{1-\gamma}$ a réplica $(B+1-k)$. O teste da razão de verossimilhanças bootstrap consiste em rejeitar a hipótese nula \mathcal{H}_0 se $LR > \hat{q}_{1-\gamma}$. Este esquema de amostragem é conhecido como bootstrap paramétrico (Efron, 1979).

Muitas vezes temos também interesse em realizar estimativas intervalares. Uma abordagem usual é empregar um intervalo de confiança assintótico (ICA), que resulta da distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Quando o tamanho da amostra é grande, os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são aproximadamente normalmente distribuídos:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \stackrel{A}{\sim} \mathcal{N}_2 \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \right],$$

sendo $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ a inversa da matriz de informação esperada. Assim, temos o seguinte intervalo de confiança assintótico $100(1-\gamma)\%$ ($0 < \gamma < 1/2$) para α :

$$\left(\hat{\alpha} + z_{\gamma/2} \sqrt{\hat{V}_{11}}, \hat{\alpha} + z_{1-\gamma/2} \sqrt{\hat{V}_{11}} \right),$$

em que z_p é tal que $\Pr(Z \leq z_p) = p$, sendo $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Aqui, z_p denota o p -ésimo ($0 < p < 1$) quantil normal padrão. No que segue, \hat{V}_{11} é o elemento (1,1) da matriz de informação esperada avaliada nos estimadores de máxima verossimilhança. Para o caso em que estamos trabalhando (dados com presença de censura) utilizamos a matriz de informação observada no lugar da esperada, pois esta última não pode ser obtida analiticamente. Vale ressaltar que este intervalo é baseado em aproximações de grandes amostras o que pode torná-lo impreciso em amostras pequenas. Note também que ele pode incluir valores negativos com probabilidade positiva e que ele é sempre simétrico.

Uma alternativa consiste na utilização de reamostragem de bootstrap. Diferentes intervalos de confiança baseados no método bootstrap podem ser construídos. O intervalo de confiança

bootstrap percentil para α , com cobertura nominal $(1 - \gamma) \times 100\%$, é construído a partir da distribuição empírica do estimador $\hat{\alpha}$, que é obtida através das B réplicas bootstrap. Geramos B amostras bootstrap a partir da amostra original e para cada amostra bootstrap calculamos $\hat{\alpha}^{*b}$; em seguida ordenamos as B réplicas e tomamos como os limites do intervalo as réplicas $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$. Caso $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$ não sejam inteiros utilizamos o seguinte método: seja $k = \lfloor (B + 1) \times \gamma/2 \rfloor$ (o maior inteiro que não excede $(B + 1) \times \gamma/2$), consideramos como os limites do intervalo as réplicas k e $(B + 1 - k)$. O intervalo de confiança percentil para α é assim dado por

$$\left(\hat{\alpha}^{*(\gamma/2)}, \hat{\alpha}^{*(1-\gamma/2)} \right).$$

O intervalo de confiança bootstrap- t , com cobertura nominal $(1 - \gamma) \times 100\%$, é obtido da seguinte forma: geramos B amostras bootstrap a partir da amostra original e para cada amostra bootstrap calculamos a estatística $\mathcal{T}^{*b} = (\hat{\alpha}^{*b} - \hat{\alpha}) / \hat{e}p^{*b}$, onde $\hat{\alpha}$ é o estimador obtido da amostra original, $\hat{\alpha}^{*b}$ é o estimador obtido da amostra bootstrap e $\hat{e}p^{*b}$ é o erro padrão de $\hat{\alpha}^{*b}$; em seguida, ordenamos as B réplicas bootstrap \mathcal{T}^{*b} e tomamos como $\hat{t}^{(\gamma/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\gamma/2)}$ as réplicas $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$, respectivamente. Caso as quantidades $B \times (\gamma/2)$ e $B \times (1 - \gamma/2)$ não sejam inteiras, utilizamos o mesmo procedimento proposto no intervalo bootstrap percentil. Portanto, o intervalo de confiança bootstrap- t é dado por

$$\left(\hat{\alpha} - \hat{t}^{(1-\gamma/2)} \hat{e}p, \hat{\alpha} - \hat{t}^{(\gamma/2)} \hat{e}p \right).$$

Outro intervalo de confiança bootstrap utilizado aqui é o intervalo BCa. Para a obtenção do intervalo de confiança BCa, com cobertura nominal $(1 - \gamma) \times 100\%$, geramos B amostras bootstrap a partir da amostra original e calculamos $\hat{\alpha}^{*b}$ para cada amostra bootstrap. Em seguida encontramos as seguintes quantidades:

$$\hat{v}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\#\{\hat{\alpha}^{*b} < \hat{\alpha}\}}{B} \right),$$

$$\hat{a} = \frac{1}{6} \text{Skew}(u_\alpha(\hat{\alpha})),$$

$$\delta_1 = \Phi \left(\hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_0 + z_{\gamma/2}}{1 - \hat{a}(\hat{v}_0 + z_{\gamma/2})} \right)$$

e

$$\delta_2 = \Phi \left(\hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_0 + z_{1-\gamma/2}}{1 - \hat{a}(\hat{v}_0 + z_{1-\gamma/2})} \right),$$

em que Φ é a função de distribuição acumulada normal padrão, $\text{Skew}(\cdot)$ denota o coeficiente de assimetria e u_α é a derivada da log-verossimilhança com respeito a α avaliada em $\hat{\alpha}$. O próximo passo é ordenar as B réplicas bootstrap $\hat{\alpha}^{*b}$ e tomar como limites do intervalo as réplicas $B \times \delta_1$ e $B \times \delta_2$. Dessa forma, o intervalo de confiança BCa é dado por

$$\left(\hat{\alpha}^{*(\delta_1)}, \hat{\alpha}^{*(\delta_2)} \right).$$

Em todos os esquemas bootstrap utilizados para calcular as estimativas intervalares a amostragem foi feita parametricamente. Isto é, nós retiramos as amostras da distribuição Birnbaum-Saunders depois de substituir os parâmetros que a indexam por suas respectivas estimativas (calculadas a partir dos dados originais). O processo de inclusão de censura nas amostras bootstrap segue o mesmo procedimento da amostra original, com o mesmo número de observações censuradas. Para mais detalhes sobre o método bootstrap, ver Davison & Hinkley (1997).

3.4 Resultados numéricos

Nesta seção, avaliaremos numericamente a qualidade das inferências feitas sobre o parâmetro de forma α da distribuição BS em amostras de tamanho finito e sob diferentes cenários. Os principais objetivos neste estudo de simulação são: comparar os desempenhos dos EMVs perfilado e perfilados modificados (Tabelas 3.1 a 3.4), comparar as precisões das diferentes estimativas intervalares (Tabelas 3.5 e 3.6), avaliar a aproximação assintótica das estatísticas de teste em relação à distribuição qui-quadrado (Tabela 3.7, Figuras 3.3 a 3.5), e, por fim, comparar os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças perfiladas e perfiladas modificadas, através de seus tamanhos e poderes (Tabelas 3.8, 3.9 e 3.10).

Apresentaremos os resultados obtidos nas simulações de Monte Carlo para estimação pontual, estimação intervalar e teste de hipóteses. Baseamos nossos resultados em 10000 réplicas de Monte Carlo e 600 réplicas bootstrap¹. Foram geradas amostras de tamanhos $n = 20$ e $n = 30$ com os parâmetros de forma $\alpha = 0.10, 0.25, 0.50$ e 1.0 e níveis de censura 10%, 30% e 50%. O nível de censura é representado pela sigla d.o.c (degree of censoring). O parâmetro de escala β foi fixado em 1.0 em todas as simulações, dado que este parâmetro funciona apenas como um multiplicador.

As simulações foram realizadas usando a linguagem de programação `0x` (ver Doornik, 2009). Para as maximizações das funções de log-verossimilhança, utilizamos o algoritmo quasi-Newton BFGS. A amostragem bootstrap foi realizada parametricamente.

Para avaliar o comportamento dos estimadores pontuais utilizamos as seguintes medidas: média, viés, variância, erro quadrático médio (EQM), viés relativo (VR, que é definido como sendo $100 \times (\text{viés}/\text{valor verdadeiro do parâmetro})\%$), assimetria e curtose. Através dos resultados apresentados nas Tabelas 3.1 a 3.4 podemos avaliar os desempenhos dos estimadores $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$, $\tilde{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$. Analisando as tabelas percebemos que, com base no viés relativo, os estimadores corrigidos possuem melhor desempenho, com a melhor performance sendo do estimador $\tilde{\alpha}_{BN}$. Por exemplo, na Tabela 3.2 com $\alpha = 0.50$ e d.o.c=10% os vieses relativos são 1.16% ($\tilde{\alpha}_{BN}$), 1.28% ($\hat{\alpha}_{CR}$), 1.63% ($\hat{\alpha}_{BN}$) e 4.30% ($\hat{\alpha}_p$). Note que o viés relativo de $\hat{\alpha}_p$ é aproximadamente quatro vezes maior do que o do estimador modificado que apresenta melhor performance. Percebemos também que, em geral, os vieses relativos aumentam à medida que a taxa de censura (d.o.c) aumenta, porém a relação de ordem entre os estimadores se mantém. Por exemplo, observamos novamente na Tabela 3.2 ($\alpha = 0.5$) que quando as porcentagens de observações censuradas são iguais a 30% e 50% os vieses relativos são, respectivamente: 1.87% e 3.51% ($\tilde{\alpha}_{BN}$), 2.41% e 4.70% ($\hat{\alpha}_{CR}$), 3.16% e 5.29% ($\hat{\alpha}_{BN}$), 6.20% e 9.09% ($\hat{\alpha}_p$). Quanto ao erro quadrático médio, nota-se que para todos os estimadores o valor é praticamente o mesmo.

¹Apenas para os intervalos de confiança utilizamos 1000 réplicas bootstrap

Tabela 3.1: Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).

$\alpha = 0.1$								
censura (%)	estimador	média	viés	variância	MSE	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0.09583	-0.00417	0.00028	0.00030	4.16936	0.01354	3.14088
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09837	-0.00163	0.00030	0.00030	1.62944	0.01425	3.14843
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09883	-0.00117	0.00030	0.00030	1.16713	0.01438	3.14983
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.09876	-0.00124	0.00030	0.00030	1.23807	0.01436	3.14961
30	$\hat{\alpha}_p$	0.09393	-0.00607	0.00039	0.00043	6.06684	0.01301	3.13537
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09663	-0.00337	0.00042	0.00043	3.37380	0.01376	3.14323
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09808	-0.00192	0.00043	0.00043	1.92229	0.01417	3.14755
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.09782	-0.00218	0.00043	0.00043	2.18221	0.01409	3.14677
50	$\hat{\alpha}_p$	0.09104	-0.00896	0.00059	0.00067	8.95794	0.01224	3.12718
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09406	-0.00594	0.00063	0.00066	5.94157	0.01305	3.13573
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09606	-0.00394	0.00065	0.00067	3.94478	0.01360	3.14154
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.09581	-0.00419	0.00065	0.00066	4.18934	0.01353	3.14083
$\alpha = 0.25$								
censura (%)	estimador	média	viés	variância	MSE	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0.23950	-0.01050	0.00175	0.00186	4.20180	0.07725	3.86773
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24593	-0.00407	0.00185	0.00186	1.62681	0.08099	3.91407
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24710	-0.00290	0.00186	0.00187	1.16018	0.08167	3.92258
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.24687	-0.00313	0.00186	0.00187	1.25388	0.08154	3.92087
30	$\hat{\alpha}_p$	0.23476	-0.01524	0.00247	0.00270	6.09796	0.07453	3.83433
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24175	-0.00825	0.00263	0.00270	3.29934	0.07855	3.88384
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24529	-0.00471	0.00270	0.00273	1.88264	0.08062	3.90941
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.24435	-0.00565	0.00267	0.00271	2.25992	0.08007	3.90257
50	$\hat{\alpha}_p$	0.22754	-0.02246	0.00370	0.00420	8.98538	0.07045	3.78464
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.23568	-0.01432	0.00400	0.00421	5.72837	0.07506	3.84079
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24056	-0.00944	0.00416	0.00425	3.77666	0.07786	3.87530
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.23906	-0.01094	0.00406	0.00418	4.37613	0.07700	3.86463

Tabela 3.2: Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).

$\alpha = 0.5$								
censura (%)	estimador	média	viés	variancia	MSE	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0.47846	-0.02154	0.00699	0.00745	4.30780	0.22914	6.23263
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.49181	-0.00819	0.00742	0.00749	1.63867	0.23708	6.39550
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.49417	-0.00583	0.00749	0.00752	1.16621	0.23847	6.42457
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.49357	-0.00643	0.00746	0.00751	1.28657	0.23812	6.41716
30	$\hat{\alpha}_p$	0.46898	-0.03102	0.00998	0.01094	6.20327	0.22340	6.11838
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.48419	-0.01581	0.01075	0.01100	3.16147	0.23257	6.30230
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.49065	-0.00935	0.01097	0.01106	1.86968	0.23640	6.38132
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.48796	-0.01204	0.01079	0.01093	2.40733	0.23481	6.34837
50	$\hat{\alpha}_p$	0.45460	-0.04540	0.01525	0.01731	9.08084	0.21453	5.94736
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.47354	-0.02646	0.01696	0.01766	5.29171	0.22617	6.17317
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.48243	-0.01757	0.01744	0.01775	3.51384	0.23152	6.28084
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.47649	-0.02351	0.01661	0.01716	4.70154	0.22795	6.20879
$\alpha = 1.0$								
censura (%)	estimador	média	viés	variancia	MSE	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0.95378	-0.04622	0.02802	0.03016	4.62157	0.37295	12.38140
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.98327	-0.01673	0.03016	0.03044	1.67350	0.37325	12.73098
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.98743	-0.01257	0.03028	0.03044	1.25671	0.37324	12.77977
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.98600	-0.01400	0.03018	0.03038	1.40032	0.37324	12.76298
30	$\hat{\alpha}_p$	0.93411	-0.06589	0.04132	0.04566	6.58923	0.37233	12.14385
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.97161	-0.02839	0.04619	0.04700	2.83919	0.37322	12.59368
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.98027	-0.01973	0.04610	0.04649	1.97287	0.37325	12.69584
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.97126	-0.02874	0.04450	0.04532	2.87355	0.37322	12.58962
50	$\hat{\alpha}_p$	0.90474	-0.09526	0.06761	0.07668	9.52594	0.37075	11.78327
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.95772	-0.04228	0.08126	0.08305	4.22823	0.37303	12.42849
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.97028	-0.02972	0.08163	0.08251	2.97221	0.37321	12.57794
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.94384	-0.05616	0.07214	0.07530	5.61615	0.37268	12.26174

Tabela 3.3: Estimação pontual de α para $n = 30$ ($\beta = 1.0$).

		$\alpha = 0.1$						
censura (%)	estimador	média	viés	variância	MSE	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0.09722	-0.00278	0.00019	0.00020	2.77887	0.01392	3.14499
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09892	-0.00108	0.00020	0.00020	1.08188	0.01441	3.15009
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09924	-0.00076	0.00020	0.00020	0.76339	0.01450	3.15105
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.09918	-0.00082	0.00020	0.00020	0.82397	0.01448	3.15087
30	$\hat{\alpha}_p$	0.09576	-0.00424	0.00027	0.00029	4.24016	0.01352	3.14068
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09757	-0.00243	0.00028	0.00029	2.43095	0.01402	3.14603
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09855	-0.00145	0.00029	0.00029	1.45391	0.01430	3.14896
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.09835	-0.00165	0.00028	0.00029	1.64770	0.01424	3.14838
50	$\hat{\alpha}_p$	0.09396	-0.00604	0.00039	0.00043	6.03829	0.01302	3.13546
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09601	-0.00399	0.00041	0.00043	3.98996	0.01359	3.14141
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.09732	-0.00268	0.00042	0.00043	2.67598	0.01395	3.14530
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.09717	-0.00283	0.00042	0.00043	2.83452	0.01391	3.14483
		$\alpha = 0.25$						
10	$\hat{\alpha}_p$	0.24300	-0.00700	0.00119	0.00124	2.79995	0.07928	3.89282
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24730	-0.00270	0.00123	0.00124	1.08028	0.08179	3.92405
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24809	-0.00191	0.00124	0.00124	0.76321	0.08226	3.92986
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.24791	-0.00209	0.00124	0.00124	0.83424	0.08215	3.92856
30	$\hat{\alpha}_p$	0.23935	-0.01065	0.00169	0.00180	4.26161	0.07716	3.86667
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24404	-0.00596	0.00176	0.00180	2.38238	0.07989	3.90035
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24641	-0.00359	0.00179	0.00181	1.43768	0.08127	3.91752
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.24575	-0.00425	0.00178	0.00180	1.69949	0.08088	3.91274
50	$\hat{\alpha}_p$	0.23485	-0.01515	0.00248	0.00271	6.06114	0.07458	3.83497
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24037	-0.00963	0.00262	0.00271	3.85252	0.07775	3.87395
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.24355	-0.00645	0.00268	0.00272	2.57872	0.07960	3.89681
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.24260	-0.00740	0.00264	0.00270	2.96134	0.07904	3.88991

Tabela 3.4: Estimação pontual de α para $n = 30$ ($\beta = 1.0$).

		$\alpha = 0.5$						
censura (%)	estimador	média	viés	variancia	MSE	VR(%)	assimetria	curtose
10	$\hat{\alpha}_p$	0.48566	-0.01434	0.00476	0.00497	2.86888	0.23344	6.32015
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.49456	-0.00544	0.00495	0.00498	1.08895	0.23870	6.42933
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.49609	-0.00391	0.00498	0.00499	0.78189	0.23960	6.44826
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.49572	-0.00428	0.00497	0.00499	0.85534	0.23938	6.44373
30	$\hat{\alpha}_p$	0.47833	-0.02167	0.00683	0.00729	4.33442	0.22906	6.23101
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.48853	-0.01147	0.00717	0.00731	2.29446	0.23515	6.35528
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.49269	-0.00731	0.00726	0.00731	1.46135	0.23761	6.40640
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.49100	-0.00900	0.00719	0.00727	1.79964	0.23661	6.38562
50	$\hat{\alpha}_p$	0.46930	-0.03070	0.01028	0.01122	6.14027	0.22359	6.12216
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.48210	-0.01790	0.01102	0.01134	3.58069	0.23132	6.27677
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.48775	-0.01225	0.01120	0.01135	2.45066	0.23469	6.34571
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.48404	-0.01596	0.01087	0.01112	3.19104	0.23248	6.30050
		$\alpha = 1.0$						
10	$\hat{\alpha}_p$	0.96927	-0.03073	0.01914	0.02009	3.07345	0.37320	12.56594
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.98880	-0.01120	0.02007	0.02020	1.12047	0.37323	12.79569
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.99112	-0.00888	0.02008	0.02016	0.88803	0.37321	12.82280
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.99071	-0.00929	0.02010	0.02019	0.92861	0.37322	12.81807
30	$\hat{\alpha}_p$	0.95413	-0.04587	0.02837	0.03048	4.58709	0.37296	12.38554
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.97914	-0.02086	0.03052	0.03095	2.08553	0.37325	12.68259
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.98383	-0.01617	0.03031	0.03057	1.61720	0.37325	12.73758
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.97898	-0.02102	0.02979	0.03024	2.10239	0.37325	12.68061
50	$\hat{\alpha}_p$	0.93573	-0.06427	0.04649	0.05062	6.42739	0.37240	12.16351
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.97105	-0.02895	0.05233	0.05317	2.89482	0.37321	12.58710
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.97795	-0.02205	0.05210	0.05259	2.20476	0.37325	12.66856
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.96214	-0.03786	0.04851	0.04994	3.78570	0.37311	12.48130

Apresentamos nas Tabelas 3.5 e 3.6 resultados relativos a estimação intervalar. Descrevemos as coberturas empíricas (%) dos intervalos ICA, ICP, ICBt e IBCa para o parâmetro α . A cobertura nominal é 95%, são considerados todos os três níveis de censura, $\alpha = 0.10, 0.25, 0.50, 1.00$, $\beta = 1.00$ e $n = 20$ (Tabela 3.5) e $n = 30$ (Tabela 3.6). Observamos que o intervalo bootstrap- t (ICBt) apresenta a melhor performance, sendo o intervalo bootstrap BCa (IBCa) bem próximo a ele. O intervalo bootstrap percentil (ICP) apresentou as piores probabilidades de cobertura em todos os cenários considerados. Por exemplo, quando $\alpha = 0.5$, $n = 30$ (Tabela 3.6) e 30% das observações são censuradas as coberturas dos intervalos ICA, ICP, ICBt e IBCa são 89.34%, 86.72%, 94.60% e 94.20%, respectivamente.

Tabela 3.5: Coberturas dos intervalos de confiança (95%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 20$).

censura (%)	$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.25$			
	ICA	ICP	ICBt	IBCa	ICA	ICP	ICBt	IBCa
10	88.98	86.66	95.04	94.52	88.96	86.54	95.06	94.48
30	86.66	83.14	95.14	93.32	86.64	83.04	95.16	93.38
50	82.80	79.30	94.60	90.80	82.70	79.20	94.50	90.86
censura (%)	$\alpha = 0.5$				$\alpha = 1.0$			
	ICA	ICP	ICBt	IBCa	ICA	ICP	ICBt	IBCa
10	88.74	86.34	95.04	94.32	88.48	85.62	94.96	94.18
30	86.42	82.92	95.00	93.20	85.86	82.42	94.66	92.98
50	82.60	79.02	94.20	90.80	81.26	77.94	92.92	90.46

Tabela 3.6: Coberturas dos intervalos de confiança (95%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 30$).

censoring (%)	$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.25$			
	ICA	ICP	ICBt	IBCa	ICA	ICP	ICBt	IBCa
10	90.94	88.84	95.00	94.92	90.88	88.80	95.06	94.90
30	89.40	87.02	94.66	94.36	89.40	87.02	94.68	94.30
50	86.54	83.54	94.52	93.46	86.46	83.54	94.36	93.36
censoring (%)	$\alpha = 0.5$				$\alpha = 1.0$			
	ICA	ICP	ICBt	IBCa	ICA	ICP	ICBt	IBCa
10	90.84	88.68	95.06	94.82	90.58	88.20	94.94	94.78
30	89.34	86.72	94.60	94.20	88.94	86.26	94.52	94.08
50	86.08	83.50	94.08	93.40	85.50	82.94	92.98	93.40

Para avaliarmos a aproximação assintótica dos testes baseados nas estatísticas LR_p , LR_{BN-1} , LR_{BN-2} e LR_{CR} utilizamos o gráfico das discrepâncias relativas entre os quantis amostrais e os quantis assintóticos das estatísticas de testes contra os quantis assintóticos. A discrepância relativa é aqui calculada como sendo a diferença entre o quantil amostral de ordem $(1 - \gamma)$ do conjunto de valores simulados da estatística de teste e o correspondente quantil da distribuição χ_1^2 dividido por esse último. A ideia é que quanto mais próxima da ordenada zero estiver a curva, melhor a aproximação da distribuição nula da estatística de teste pela distribuição assintótica. As Figuras 3.3 a 3.5 apresentam os gráficos das discrepâncias relativas de quantis das quatro estatísticas de teste (LR_p , LR_{BN_1} , LR_{BN_2} e LR_{CR}) *versus* os correspondentes quantis assintóticos para o tamanho de amostra $n = 20$ e d.o.c=10%, 30% e 50%. Quando apenas 10%

das observações são censuradas (Figura 3.3), as curvas associadas às estatísticas LR_{BN_1} , LR_{BN_2} e LR_{CR} são as mais próximas da ordenada zero, diferentemente da curva associada à estatística LR_p , que se encontra entre as ordenadas 0.05 e 0.15. Porém, à medida em que a taxa de censura aumenta, essas curvas se distanciam da ordenada zero, como observado nas Figuras 3.4 e 3.5. De maneira geral, através da análise das Figuras 3.3 a 3.5 notamos que a distribuição nula da estatística LR_{BN_2} é a distribuição melhor aproximada pela distribuição χ_1^2 .

A Tabela 3.7 contém as médias e variâncias das estatísticas de teste LR_p , LR_{BN-1} , LR_{BN-2} e LR_{CR} , bem como os dois primeiros momentos da distribuição χ_1^2 . A hipótese nula sob o teste é $\mathcal{H} : \alpha = 0.5$. A geração dos dados foi feita sob a hipótese nula, $\beta = 1.0$ e $n = 20, 30$. Os resultados apresentados nesta tabela mostram que a estatística que apresenta média e variância (para os diferentes níveis de censura) mais próximas da média e variância assintóticas é a estatística LR_{BN_2} , seguida pela estatística LR_{CR} .

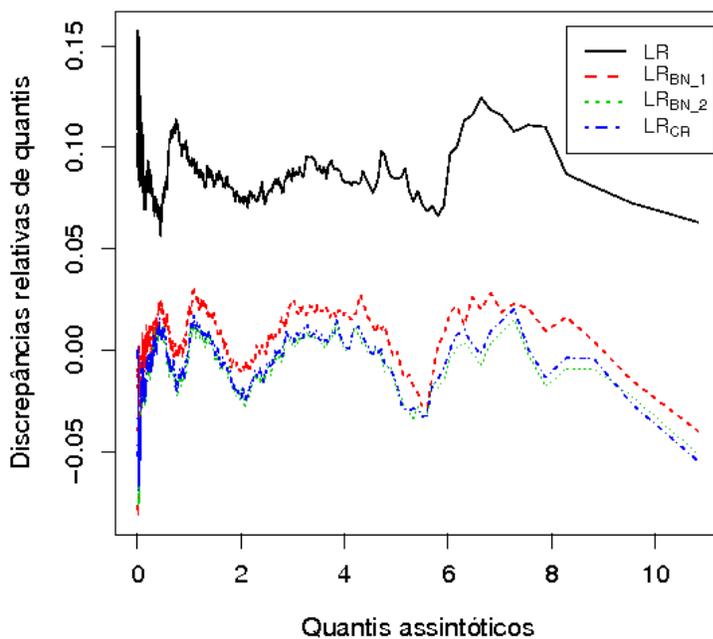


Figura 3.3: Gráfico das discrepâncias relativas de quantis (censura: 10%).

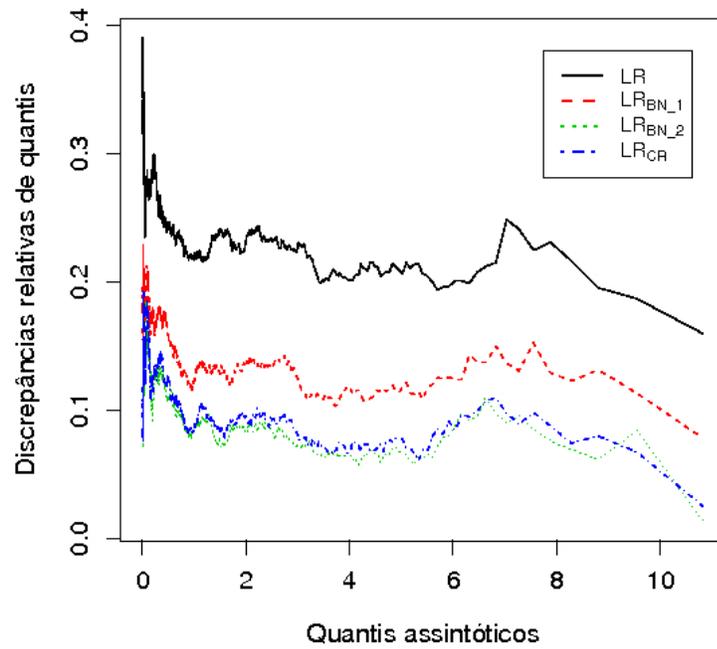


Figura 3.4: Gráfico das discrepâncias relativas de quantis (censura: 30%).

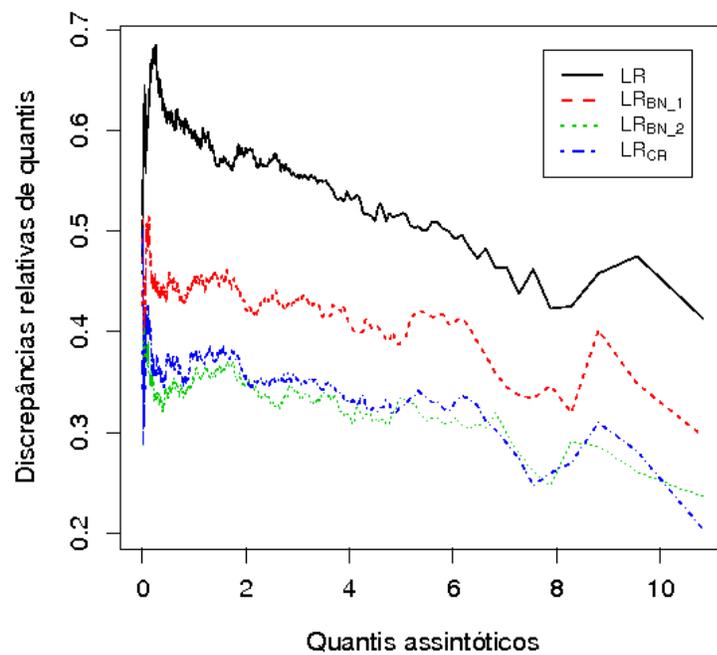


Figura 3.5: Gráfico das discrepâncias relativas de quantis (censura: 50%).

Tabela 3.7: Média e variância das estatísticas de teste para testar $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.5$.

censura (%)	$n = 20$						$n = 30$					
	χ_1^2	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}		
10	média	1.000	1.086	1.008	0.993	0.996	1.061	1.010	1.000	1.002		
	variância	2.000	2.340	2.013	1.950	1.959	2.221	2.024	1.986	1.992		
30	média	1.000	1.224	1.130	1.082	1.090	1.191	1.126	1.094	1.099		
	variância	2.000	2.892	2.485	2.277	2.306	2.822	2.534	2.387	2.411		
50	média	1.000	1.557	1.425	1.334	1.349	1.453	1.365	1.308	1.318		
	variância	2.000	4.476	3.873	3.423	3.469	3.936	3.565	3.302	3.329		

A fim de compararmos os desempenhos dos testes baseados nas estatísticas obtidas a partir das funções de verossimilhança perfilada e perfiladas modificadas desenvolvidas na Seção 3.3, avaliamos suas distorções de tamanho, ou seja, a distância entre os tamanhos efetivos e nominal dos testes. Avaliamos também os poderes dos testes. As Tabelas 3.8 e 3.9 contêm as taxas de rejeição nula aos níveis nominais 10%, 5%, 1% e 0.5% dos diferentes testes sobre α , baseados nas estatísticas LR_p , LR_{BN-1} , LR_{BN-2} , LR_{CR} e LR_b . Quando somente 10% das observações são censuradas, os testes baseados nas estatísticas LR_{BN_2} e LR_{CR} são os que apresentam os melhores desempenhos, seguidos pelo teste bootstrap. Por exemplo, na Tabela 3.8 para d.o.c=10% com $\alpha_0 = 0.10$ e nível de significância 10%, as taxas de rejeição dos testes baseados nas estatísticas LR_p , LR_{BN_1} , LR_{BN_2} , LR_{CR} e LR_b são, respectivamente, 11.31%, 10.18%, 10.03%, 10.03% e 9.88%. Quando a porcentagem de observações censuradas aumenta (para 30% e 50%) o teste bootstrap torna-se o teste com melhor performance. Por exemplo, quando $\alpha_0 = 1.0$, metade das observações são censuradas e o nível de significância é de 10% (Tabela 3.8), as taxas de rejeição nula dos testes baseados nas estatísticas LR_p , LR_{BN_1} , LR_{BN_2} , LR_{CR} e LR_b são 21.68%, 19.18%, 17.83%, 18.18% e 10.62%, respectivamente. Note que o teste da razão de verossimilhanças usual é bastante liberal.

A Tabela 3.10 apresenta os resultados de simulação obtidos levando em consideração a hipótese alternativa \mathcal{H}_1 para $n = 20$, $\beta = 1$ e diferentes valores de α variando de 0.12 a 0.28. Utilizamos os níveis nominais 5% e 10% e de censura 10%, 30% e 50%. Para as simulações de poder utilizamos valores críticos exatos (estimados via Monte Carlo) ao invés de valores críticos assintóticos, pois dessa forma fazemos com que os testes tenham o mesmo tamanho. (O teste bootstrap foi omitido desta análise uma vez que não é possível corrigi-lo em relação ao seu tamanho.) A hipótese nula testada foi $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.10$. É importante observar que esta simulação de poder corresponde à situação abordada na Tabela 3.8. Através da Tabela 3.10 notamos que o teste baseado na estatística LR_p é menos poderoso que os demais testes e que o teste baseado na estatística LR_{BN_2} apresenta o maior poder, seguido pelos testes LR_{CR} e LR_{BN_1} . Também observamos que os testes tornam-se menos poderosos quando o grau de censura aumenta. Por exemplo, quando $\alpha = 0.16$ e o nível nominal é 10%, os poderes dos testes baseados nas estatís-

ticas LR_p , LR_{BN-1} , LR_{BN-2} e LR_{CR} são, respectivamente, 71.78%, 76.51%, 77.14% e 77.08%. Quando metade das observações são censuradas os poderes correspondentes são 36.45%, 41.94%, 45.56% e 45.13%.

Tabela 3.8: Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).

		$\alpha = 0.1$									
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b
	10	11.31	10.18	10.03	10.03	9.88	11.30	10.19	10.02	10.03	9.88
	5	6.02	5.12	5.04	5.04	5.30	6.03	5.16	5.06	5.08	5.28
10	1	1.35	1.09	0.98	0.99	1.16	1.35	1.11	0.98	0.99	1.18
	0.5	0.78	0.53	0.47	0.47	0.58	0.79	0.53	0.46	0.47	0.58
	10	13.50	12.04	11.23	11.32	10.70	13.63	12.08	11.32	11.39	10.74
	5	7.45	6.14	5.64	5.56	5.38	7.51	6.17	5.63	5.65	5.42
30	1	1.79	1.43	1.30	1.31	1.10	1.80	1.45	1.31	1.30	1.12
	0.5	1.04	0.86	0.66	0.68	0.72	1.04	0.87	0.68	0.68	0.74
	10	18.06	16.28	14.85	14.94	9.46	18.19	16.47	14.93	15.10	9.44
	5	11.12	9.60	8.39	8.48	4.74	11.29	9.59	8.50	8.57	4.72
50	1	3.41	2.69	2.28	2.29	0.90	3.47	2.75	2.36	2.34	0.90
	0.5	1.99	1.68	1.29	1.31	0.50	2.00	1.75	1.37	1.35	0.50
		$\alpha = 1.0$									
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b
	10	11.30	10.12	9.95	10.01	9.88	11.46	10.17	9.88	9.98	9.90
	5	6.07	5.24	5.09	5.10	5.28	6.20	5.28	5.14	5.15	5.28
10	1	1.39	1.10	0.99	1.00	1.16	1.44	1.14	1.00	1.03	1.10
	0.5	0.80	0.52	0.47	0.47	0.60	0.80	0.56	0.47	0.47	0.56
	10	13.99	12.25	11.42	11.58	10.72	14.84	13.05	12.19	12.27	10.68
	5	7.71	6.27	5.75	5.77	5.42	8.36	6.84	6.29	6.36	5.54
30	1	1.90	1.53	1.36	1.36	1.06	2.17	1.73	1.53	1.56	1.18
	0.5	1.06	0.90	0.72	0.72	0.72	1.25	0.97	0.83	0.81	0.72
	10	18.81	17.04	15.66	15.82	9.42	21.68	19.18	17.83	18.18	10.62
	5	11.78	10.12	9.07	9.22	4.68	13.64	11.80	10.76	10.90	5.44
50	1	3.62	2.90	2.57	2.55	0.96	4.67	3.95	3.37	3.43	1.30
	0.5	2.22	1.84	1.45	1.45	0.50	2.89	2.44	1.98	1.99	0.68

Tabela 3.9: Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 30$ ($\beta = 1.0$).

		$\alpha = 0.1$						$\alpha = 0.25$					
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b		
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b		
10	10	10.96	10.27	10.07	10.09	9.88	10.95	10.30	10.06	10.09	9.80		
	5	5.61	5.01	4.93	4.93	5.24	5.63	5.01	4.93	4.92	5.24		
	1	1.21	1.07	1.04	1.04	1.34	1.21	1.08	1.04	1.04	1.34		
	0.5	0.66	0.43	0.40	0.40	0.84	0.65	0.43	0.40	0.41	0.82		
30	10	12.67	11.58	10.97	11.06	10.00	12.72	11.61	11.03	11.11	9.84		
	5	6.98	6.16	5.93	5.94	4.74	7.02	6.19	5.94	5.96	4.78		
	1	1.71	1.49	1.35	1.37	1.28	1.75	1.49	1.39	1.41	1.18		
	0.5	0.97	0.73	0.69	0.69	0.72	0.98	0.75	0.69	0.71	0.68		
50	10	16.40	15.04	14.08	14.15	10.54	16.62	15.24	14.22	14.38	10.58		
	5	9.66	8.74	8.06	8.07	5.12	9.92	8.77	8.25	8.18	5.18		
	1	2.75	2.23	1.85	1.87	1.16	2.80	2.24	1.91	1.99	1.24		
	0.5	1.52	1.18	1.06	1.06	0.70	1.57	1.23	1.09	1.11	0.64		
		$\alpha = 0.5$						$\alpha = 1.0$					
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b		
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_b		
10	10	11.02	10.36	10.11	10.18	9.86	11.20	10.40	10.14	10.22	9.88		
	5	5.62	5.05	4.94	4.97	5.24	5.86	5.16	5.04	5.09	5.22		
	1	1.24	1.08	1.06	1.07	1.32	1.27	1.13	1.07	1.07	1.30		
	0.5	0.67	0.44	0.42	0.41	0.82	0.68	0.45	0.44	0.44	0.78		
30	10	12.99	11.76	11.13	11.23	10.00	13.99	12.79	12.16	12.45	10.26		
	5	7.20	6.37	5.98	6.03	4.94	7.75	6.73	6.38	6.41	4.94		
	1	1.82	1.56	1.44	1.44	1.24	2.08	1.74	1.62	1.60	1.14		
	0.5	1.01	0.78	0.71	0.71	0.72	1.18	0.97	0.85	0.85	0.68		
50	10	17.24	15.99	14.98	15.18	10.56	20.34	18.37	17.50	17.89	9.74		
	5	10.50	9.12	8.61	8.66	5.08	12.55	11.24	10.40	10.68	5.10		
	1	2.96	2.50	2.12	2.26	1.18	4.08	3.55	3.19	3.25	0.88		
	0.5	1.74	1.31	1.16	1.18	0.68	2.43	2.07	1.82	1.82	0.60		

Tabela 3.10: Taxas de rejeição não nulas, inferência sobre α .

censura (%)	α	Nível nominal 10%				Nível nominal 5%			
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}
10%	0.12	14.55	19.01	19.60	19.54	4.83	7.65	8.27	8.17
	0.14	43.88	50.35	51.29	51.15	24.10	30.76	32.35	32.13
	0.16	71.78	76.51	77.14	77.08	52.97	60.70	62.07	61.88
	0.18	87.97	90.79	91.02	90.99	75.79	81.09	82.04	81.83
	0.20	95.07	96.38	96.49	96.48	88.71	91.44	91.96	91.91
	0.22	98.34	98.82	98.87	98.87	95.50	96.81	97.03	96.98
	0.24	99.12	99.35	99.38	99.38	97.78	98.43	98.59	98.58
	0.26	99.66	99.84	99.86	99.86	99.13	99.36	99.41	99.40
30%	0.28	99.89	99.92	99.94	99.94	99.72	99.80	99.81	99.81
	0.12	9.69	12.92	14.43	14.20	2.60	4.24	5.13	5.00
	0.14	30.22	36.25	38.68	38.20	14.97	19.86	22.11	21.83
	0.16	53.85	59.69	62.29	61.82	35.30	42.08	44.78	44.52
	0.18	73.75	78.10	79.84	79.58	57.31	63.46	66.17	65.81
	0.20	85.26	88.34	89.44	89.26	73.96	78.66	80.27	80.14
	0.22	92.19	93.80	94.53	94.44	84.31	87.81	89.00	88.91
	0.24	95.85	96.75	97.10	97.07	91.56	93.52	94.15	94.08
50%	0.26	97.88	98.34	98.58	98.52	95.30	96.50	96.74	96.72
	0.28	98.89	99.24	99.36	99.33	97.53	98.08	98.29	98.28
	0.12	7.08	9.17	10.95	10.68	1.87	2.61	3.69	3.49
	0.14	18.97	23.10	26.63	26.16	8.61	10.98	13.33	13.11
	0.16	36.45	41.94	45.56	45.13	21.35	25.47	29.66	29.17
	0.18	53.34	58.77	62.18	61.80	36.44	41.65	45.96	45.43
	0.20	67.14	71.69	74.69	74.39	53.01	57.08	61.06	60.54
	0.22	78.02	81.43	83.50	83.33	65.85	69.71	72.97	72.60
0.24	85.51	87.71	89.45	89.24	76.54	79.58	81.97	81.68	
	90.01	91.84	92.77	92.65	83.18	85.66	87.61	87.41	
0.26	93.39	94.59	95.41	95.32	88.25	89.97	91.30	91.21	

3.5 Resultados numéricos adicionais

Vamos agora comparar o comportamento de um dos nossos estimadores perfilados modificados ($\hat{\alpha}_{BN}$) com o do estimador proposto por Ng et al. (2006), que é dado por

$$\alpha^* = \hat{\alpha} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left[1 + 2.5 \left(1 - \frac{r}{n} \right) \right] \right\}^{-1}.$$

Os resultados numéricos são baseados em 10000 réplicas Monte Carlo, $n = 20$, $\alpha = 0.10$, 0.25, 0.50, 1.0 e os mesmos três níveis de censura utilizados nas avaliações anteriores (10%, 30% e 50%). Na Tabela 3.11 são apresentados os estimadores de α . Note que $\hat{\alpha}_{BN}$ tem sempre menor variância e erro quadrático médio que $\hat{\alpha}^*$. Por exemplo, quando $\alpha = 1.0$ e metade dos dados são censurados, temos que $\text{var}(\hat{\alpha}_{BN}) = 0.08163$ e $\text{var}(\alpha^*) = 0.08583$; também, $\text{MSE}(\hat{\alpha}_{BN}) = 0.08251$ e $\text{MSE}(\alpha^*) = 0.08621$. Nosso estimador é também menos viesado do que o estimador proposto por Ng et al. (2006), exceto quando metade das observações são censuradas.

Tabela 3.11: Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).

α	censura (%)	RB ($\hat{\alpha}_p$)	variância ($\hat{\alpha}_p$)	MSE ($\hat{\alpha}_p$)	RB ($\hat{\alpha}_{BN}$)	variância ($\hat{\alpha}_{BN}$)	MSE ($\hat{\alpha}_{BN}$)	RB ($\hat{\alpha}^*$)	variância ($\hat{\alpha}^*$)	MSE ($\hat{\alpha}^*$)
0.1	10	4.16936	0.00028	0.00030	1.16713	0.00030	0.00030	2.21935	0.00032	0.00032
	30	6.06684	0.00039	0.00043	1.92229	0.00043	0.00043	2.94045	0.00047	0.00048
	50	8.95794	0.00059	0.00067	3.94478	0.00065	0.00065	2.58261	0.00074	0.00075
0.25	10	4.20180	0.00175	0.00186	1.16018	0.00186	0.00186	2.18475	0.00199	0.00202
	30	6.09796	0.00247	0.00270	1.88264	0.00270	0.00270	2.90634	0.00297	0.00302
	50	8.98538	0.00370	0.00420	3.77666	0.00416	0.00416	2.55169	0.00469	0.00473
0.5	10	4.30780	0.00699	0.00745	1.16621	0.00749	0.00752	2.07168	0.00795	0.00806
	30	6.20327	0.00998	0.01094	1.86968	0.01097	0.01106	2.79093	0.01198	0.01217
	50	9.08084	0.01525	0.01731	3.51384	0.01744	0.01775	2.44412	0.01936	0.01951
1.0	10	4.62157	0.02802	0.03016	1.25671	0.03028	0.03044	1.73699	0.03188	0.03218
	30	6.58923	0.04132	0.04566	1.97287	0.04610	0.04649	2.36797	0.04962	0.05018
	50	9.52594	0.06761	0.07668	2.97221	0.08163	0.08251	1.94261	0.08583	0.08621

3.6 Aplicação

Nesta seção consideramos duas aplicações usando dados reais (não simulados). Em ambos os casos assumimos que as observações seguem distribuição Birnbaum-Saunders. A primeira aplicação utiliza o conjunto de dados obtido de Birnbaum & Saunders (1969b). Estes dados correspondem ao número de ciclos de estresse sofrido até a falha de $n = 101$ tiras de lâmina de alumínio 6061-T6 cortadas paralelamente no sentido do rolo. Cada observação foi submetida a uma carga periódica com frequência de 18 ciclos por segundo e uma pressão máxima de 31 kpsi. Os estimadores de máxima verossimilhança perfilados e perfilados modificados de α para diferentes quantidades de falhas ($r = 95, 90, 80$) são apresentados na Tabela 3.12. Podemos notar que todas as estimativas são similares, com uma leve diferença para menos da estimativa que se baseia na perfilada em relação às que se baseiam nas perfiladas ajustadas.

Tabela 3.12: Estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada ajustadas de α — primeira aplicação.

r	$\hat{\alpha}_p$	$\hat{\alpha}_{BN-1}$	$\hat{\alpha}_{BN-2}$	$\hat{\alpha}_{CR}$
95	0.16906	0.16992	0.17002	0.16999
90	0.17061	0.17149	0.17168	0.17162
80	0.17505	0.17599	0.17637	0.17625

Suponha que queremos testar $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.15$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.15$. As estatísticas de teste foram computadas para $r = 95, 90, 80$ e os correspondentes p -valores são apresentados na Tabela 3.13. Vale ressaltar que para $r = 95$ o p -valor (0.091) da estatística da razão de verossimilhanças perfilada está muito próximo de 10%; enquanto que os p -valores de todas as três estatísticas da razão de verossimilhanças perfiladas modificadas possuem forte evidência contra a hipótese nula.

Tabela 3.13: p -valores — primeira aplicação.

r	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}
95	0.091	0.079	0.078	0.078
90	0.079	0.068	0.066	0.067
80	0.048	0.041	0.039	0.040

A Tabela 3.14 contém as estimativas intervalares para o parâmetro de forma (α) correspon-

dentess a cobertura nominal de 95%. Note que o comprimento do intervalo bootstrap percentil (ICP) é geralmente menor que o dos estimadores bootstrap concorrentes. Por exemplo, para $r = 70$, o comprimento dos intervalos ICP, ICBt e IBCa são, respectivamente, 0.0604, 0.0625 e 0.0617.

Tabela 3.14: Intervalos de confiança para α — primeira aplicação.

r	Intervalo	Limite inferior	Limite superior	comprimento
90	ICA	0.1450	0.1962	0.0512
	ICP	0.1457	0.1959	0.0502
	ICBt	0.1487	0.1997	0.0510
	IBCa	0.1495	0.2013	0.0518
70	ICA	0.1429	0.2041	0.0612
	ICP	0.1423	0.2027	0.0604
	ICBt	0.1486	0.2112	0.0625
	IBCa	0.1487	0.2104	0.0617
50	ICA	0.1448	0.2249	0.0801
	ICP	0.1428	0.2235	0.0807
	ICBt	0.1533	0.2384	0.0851
	IBCa	0.1525	0.2392	0.0867

Para a segunda aplicação utilizamos os dados apresentados por McColl (1974), que correspondem ao tempo de vida, em horas, de $n = 10$ chumaceiras de um certo tipo. Estes dados também foram utilizados por Cohen et al. (1984) como exemplo ilustrativo para a distribuição Weibull tri-paramétrica. Nós consideramos que 20% das observações são censuradas, ou seja, temos 8 falhas. As estimativas pontuais de α são $\hat{\alpha}_p = 0.17915$, $\check{\alpha}_{BN} = 0.18938$, $\tilde{\alpha}_{BN} = 0.19348$ e $\hat{\alpha}_{CR} = 0.19274$.

Considere a hipótese nula do teste $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.12$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.12$. As estatísticas de teste são $LR_p = 3.110$, $LR_{BN-1} = 3.808$, $LR_{BN-2} = 4.029$ e $LR_{CR} = 3.988$; os correspondentes p -valores são 0.078, 0.051, 0.045 e 0.046. Note que os testes apresentam inferências conflitantes ao nível nominal de 5%: os testes baseados nas estatísticas LR_p e LR_{BN-1} não rejeitam a hipótese nula enquanto que os testes baseados nas estatísticas LR_{BN-2} e LR_{CR} rejeitam.

A Tabela 3.15 apresenta os diferentes intervalos de confiança para o parâmetro de forma (α). A cobertura nominal é de 95%. Vale considerar que o intervalo bootstrap- t (ICBt) é

consideravelmente mais amplo do que os outros intervalos. Por exemplo, seu comprimento é igual a 0.3025 enquanto que o comprimento dos intervalos assintótico (ICA), percentil (ICP) e BCa (IBCa) são, respectivamente, 0.1847, 0.1831 e 0.2337.

Tabela 3.15: Intervalos de confiança para α — segunda aplicação.

Intervalo	Limite inferior	Limite superior	comprimento
ICA	0.0868	0.2715	0.1847
ICP	0.0756	0.2587	0.1831
ICBt	0.1238	0.4263	0.3025
IBCa	0.1249	0.3586	0.2337

Os dois conjuntos de dados utilizados nesta seção são apresentados no apêndice A.

3.7 Conclusão

Neste capítulo, desenvolvemos inferências associadas às funções de verossimilhança perfilada e perfiladas modificadas para o parâmetro de forma da distribuição Birnbaum-Saunders com censura tipo II. Também consideramos inferências baseadas no método bootstrap: estimação intervalar e teste de hipóteses. Em particular, os intervalos foram calculados utilizando três diferentes estratégias bootstrap: bootstrap percentil, bootstrap- t e Bootstrap BCa (Bias-Corrected and accelerated). Apresentamos e discutimos os resultados de extensivas simulações de Monte Carlo para estimação pontual, estimação intervalar e teste de hipóteses. A melhor performance, em se tratando de estimação pontual, foi obtida pelo estimador de máxima verossimilhança perfilado ajustado $\hat{\alpha}_{BN}$, proposto por Barndorff-Nielsen (1983). Ele apresentou o menor viés relativo em todos os cenários propostos. Nossos resultados também revelaram que quando temos poucas observações censuradas (por exemplo, 10% de todas as observações) os testes baseados nas estatísticas da razão de verossimilhanças ajustadas e o teste bootstrap fornecem resultados confiáveis. Entretanto, quando uma grande proporção das observações são censuradas (30% e 50%, por exemplo) o teste bootstrap paramétrico é bem superior aos outros, isto é, apresenta taxas de rejeição nula bem mais próximas aos níveis nominais. Finalmente, quanto aos resultados obtidos para as estimativas intervalares, observamos que o intervalo bootstrap- t (ICBt) apresentou coberturas mais próximas dos níveis nominais, seguido pelo intervalo bootstrap BCa.

Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student

4.1 Introdução

A distribuição Birnbaum-Saunders (BS) proposta por Birnbaum & Saunders (1969a) para modelagem de dados de tempo de vida foi recentemente generalizada por Díaz-García e Leiva (2005). Eles propuseram uma nova classe de distribuições de vida que generaliza a distribuição Birnbaum-Saunders a partir de distribuições de contornos elípticos, ou seja, a distribuição do estresse cumulativo que era assumida normal é agora assumida simétrica em \mathbb{R} . A distribuição Birnbaum-Saunders generalizada, proposta por Díaz-García e Leiva (2005), é um modelo de tempo de vida bastante flexível por conter distribuições que possuem caudas mais ou menos pesadas que a distribuição Birnbaum-Saunders clássica. Vale destacar que a distribuição BS é um caso particular da distribuição BSG e, por isso, muitas propriedades da BS são também válidas para a BSG. Recentemente, alguns trabalhos envolvendo o modelo BSG têm sido desenvolvidos; listamos a seguir alguns deles. Leiva et al. (2008a) apresentaram uma completa análise de tempo de vida baseada na função de risco do modelo. Leiva et al. (2008b) propuseram três diferentes maneiras para gerar observações da BSG. Sanhueza et al. (2008) descreveram o desenvolvimento teórico do modelo BSG, bem como suas propriedades e distribuições relacionadas. Eles também discutiram alguns métodos de diagnóstico e testes de bondade de ajuste. Barros et al. (2009)

desenvolveram um pacote para o R, chamado `gbs`, utilizado para análise de dados do modelo BSG. Gómez et al. (2009) propuseram uma extensão para a BSG visando torná-la ainda mais flexível em termos de curtose.

Neste capítulo, obtemos os estimadores de máxima verossimilhança perfilados e ajustados da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada usando como núcleo a distribuição t de Student, haja vista que essa distribuição produz estimativas mais robustas. Os ajustes da função de verossimilhança perfilada que utilizamos foram os propostos por Barndorff-Nielsen (1983), Fraser e Reid (1995), Fraser, Reid e Wu (1999), Severini (1998, 1999) e Cox & Reid (1987). Apresentamos os testes da razão de verossimilhanças associados a estes estimadores e o teste proposto recentemente por Terrel (2002), o teste gradiente. Também calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t . Utilizamos simulações de Monte Carlo para avaliar os desempenhos dos testes e dos diferentes estimadores pontuais e intervalares do parâmetro de forma da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada, com núcleo t , em amostras de tamanho finito e com diferentes graus de curtose. Por fim, apresentamos algumas aplicações práticas e nossas conclusões finais sobre o capítulo.

4.2 Distribuição Birnbaum-Saunders generalizada

Seja $Z \sim S(g)$ (variável aleatória com distribuição simétrica em \mathbb{R}), em que g é o núcleo da função de densidade de probabilidade de Z que é por sua vez representada por

$$f_Z(z) = cg(z^2), \quad (4.1)$$

sendo c uma constante de normalização.

Uma variável aleatória T com distribuição Birnbaum-Saunders generalizada, denotada por $\text{GBS}(\alpha, \beta; g)$, pode ser representada estocasticamente da forma:

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4} \right]^2$$

A função de densidade de probabilidade de T é $f_T(t) = cg(a_t^2)A_t = f_Z(a_t)A_t$, com $t > 0, \alpha > 0$ e $\beta > 0$, sendo

$$a_t = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{t}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{t}{\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.2)$$

e

$$A_t = \frac{\partial a_t}{\partial t} = \frac{1}{2\alpha\beta} \left[\left(\frac{t}{\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{t}{\beta} \right)^{-\frac{3}{2}} \right].$$

Vários exemplos para a função de densidade f_T podem ser encontrados em Díaz-García e Leiva (2005, 2006). Apresentamos a seguir algumas dessas densidades da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com diferentes núcleos (Laplace, t de Student e logística, respectivamente).

$$f_T(t) = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{-1}{\alpha} \left| \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right| \right) \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{\beta^3}{t^3}} \right), [\text{BSG}(\text{lap})]$$

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left[1 + \frac{\left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right]}{\nu\alpha^2} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{\beta^3}{t^3}} \right), [\text{BSG}(t_\nu)] \quad (4.3)$$

e

$$f_T(t) = \frac{\exp \left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right] \right)}{\left[1 + \exp \left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right] \right) \right]^2} \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{\beta^3}{t^3}} \right), [\text{BSG}(\text{logis})].$$

Apresentamos, a seguir alguns gráficos da distribuição BSG obtida a partir das densidades apresentadas acima.

Na Figura 4.1 apresentamos as densidades geradas pelas distribuições Laplace, logística e normal. Todas foram geradas para os parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.0$. Podemos perceber que as funções apresentam comportamentos distintos.

Na Figura 4.2 apresentamos dois gráficos. O primeiro (lado esquerdo da figura) descreve as densidades geradas pelas distribuições normal e t de Student (para diferentes graus de liberdade). Já o segundo gráfico é um detalhe ampliado do primeiro. Analisando o primeiro gráfico percebemos que, quando o parâmetro ν cresce, a distribuição BSG com núcleo t tende à distribuição

Birnbaum-Saunders, ou seja, BSG com núcleo normal. Note que, no segundo gráfico, a distribuição BSG com núcleo t possui caudas mais pesadas do que a distribuição Birnbaum-Saunders.

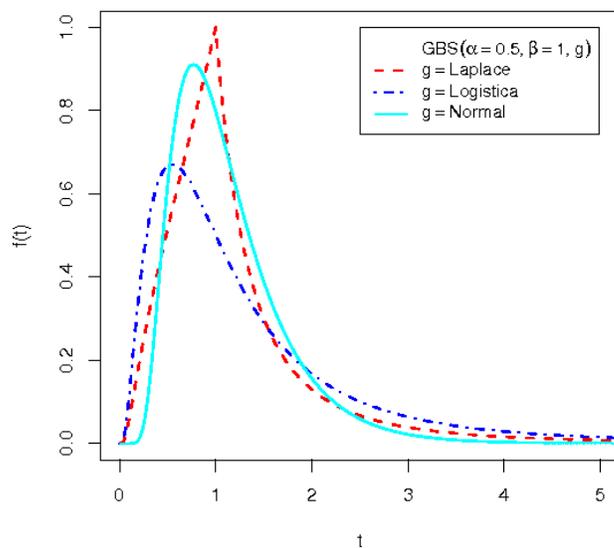


Figura 4.1: Funções de densidade da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos Laplace, logística e normal.

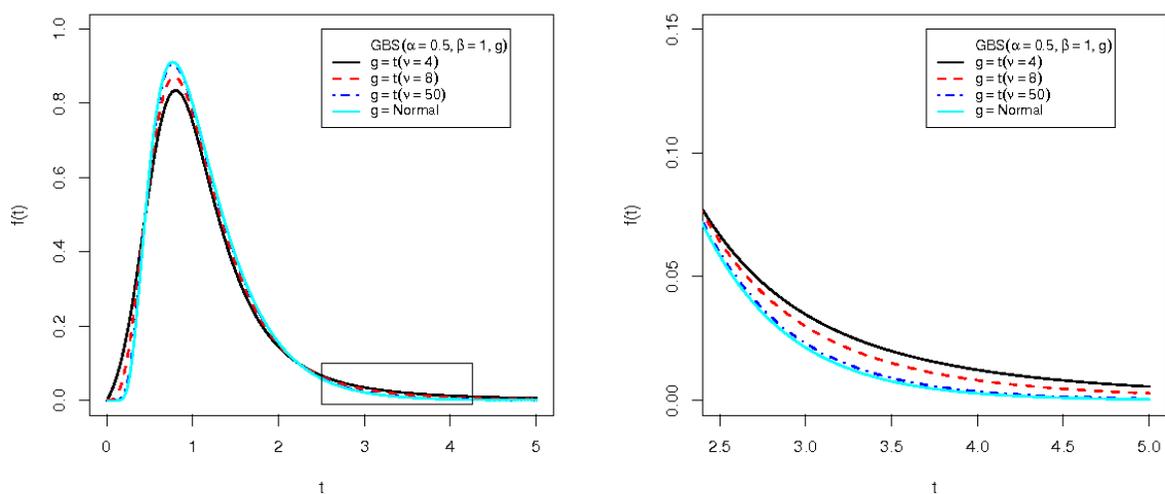


Figura 4.2: Funções de densidade da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student para diferentes números de graus de liberdade.

A função de distribuição acumulada e a função risco da distribuição BSG são dadas, respectivamente, por $F_T(t) = F_Z(a_t)$ e $h_T(t) = f_T(t)/(1 - F_T(t))$, em que F_Z e a_t são obtidas de (4.1) e (4.2), respectivamente. Apresentamos, a seguir, alguns gráficos da função de risco da distribuição BSG para diferentes núcleos, a saber: t de Student, Laplace, logística e normal.

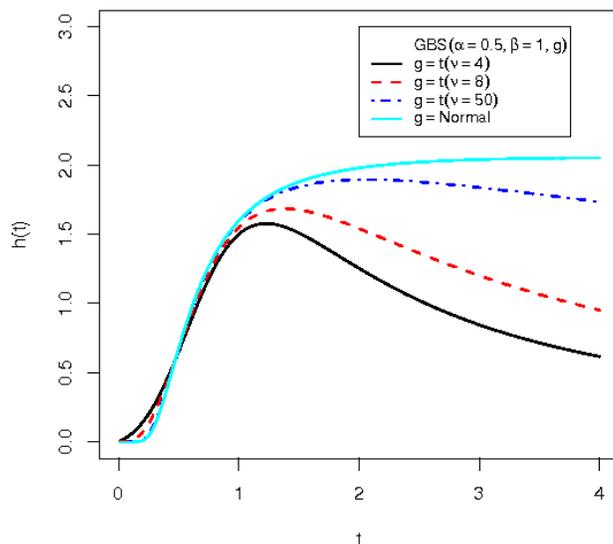


Figura 4.3: Funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos normal e t de Student.

A Figura 4.3 apresenta as funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada para os núcleos normal e t de Student (com diferentes graus de liberdade). Note que as funções mostradas no gráfico apresentam comportamentos semelhantes entre si. Também observamos que quanto menor o número de graus de liberdade mais rápido a função de risco cresce e decresce. Da Figura 4.4, onde são apresentadas as funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos Laplace, logística e normal, podemos perceber que as funções possuem comportamentos diferentes entre si.

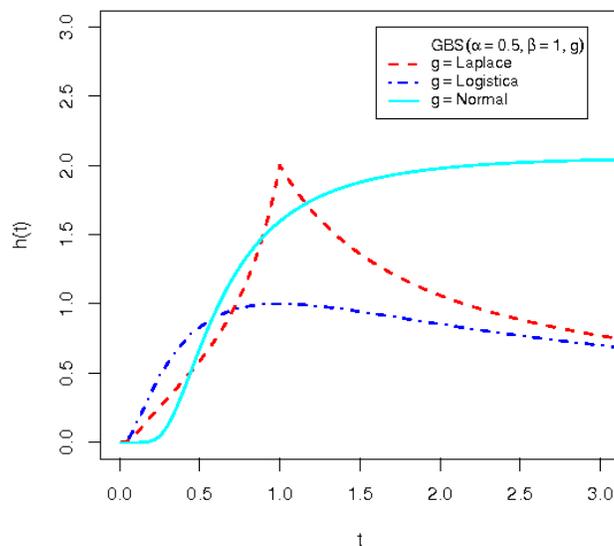


Figura 4.4: Funções de risco da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleos Laplace, logística e normal

4.3 Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student

Nesta seção, apresentaremos inferências melhoradas para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student para os casos onde não há censura. Essas inferências serão realizadas sobre o parâmetro de forma α através das funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas, descritas no Capítulo 2. Adicionalmente, apresentaremos as estatísticas da razão de verossimilhanças baseadas nestas funções e também intervalos de confiança baseados na metodologia bootstrap.

Seja (t_1, \dots, t_n) uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável T com distribuição Birnbaum-Saunders Generalizada com núcleo t de Student ($BSG(t_\nu)$) e densidade dada em (4.3). Neste caso a função de log-verossimilhança, exceto por um termo constante, é dada por

$$\ell(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\alpha, \beta),$$

em que $\ell_i(\alpha, \beta) = -\log(\alpha) - \log(\beta) + \log\left(\sqrt{\frac{\beta}{t_i}} + \sqrt{\frac{\beta^3}{t_i^3}}\right) - \frac{\nu+1}{2} \log\left[1 + \frac{\left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2\right]}{\nu\alpha^2}\right]$.

Derivando a função de log-verossimilhança em relação aos parâmetros α e β obtemos os componentes do vetor score $U_\theta = (U_\alpha, U_\beta)^T$:

$$U_\alpha = -\frac{n}{\alpha} + \frac{\nu + 1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right]}{\nu\alpha^2 + \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right]}$$

e

$$U_\beta = -\frac{n}{\beta} + \frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^n \frac{t_i + 3\beta}{t_i + \beta} - \frac{\nu + 1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\left[\frac{-t_i}{\beta^2} + \frac{1}{t_i} \right]}{\nu\alpha^2 + \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right]}.$$

Para encontrarmos os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ utilizamos o método numérico BFGS (ver Nocedal & Wright (1999)), pois as equações $U_\alpha = 0$ e $U_\beta = 0$ não podem ser resolvidas analiticamente. Da mesma forma não podemos encontrar, analiticamente, o estimador restrito $\hat{\beta}_\alpha$, para isso utilizamos o método numérico SQP onde impomos a restrição de que $U_\beta = 0$.

Temos que, para o nosso modelo, a log-verossimilhança perfilada definida na Seção 2.2 é

$$\ell_p(\alpha) = -n \log(\alpha) - n \log(\hat{\beta}_\alpha) + \sum_{i=1}^n \log \left(\sqrt{\frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i}} + \sqrt{\frac{\hat{\beta}_\alpha^3}{t_i^3}} \right) - \frac{\nu + 1}{2} \sum_{i=1}^n \log \left[1 + \frac{\left[\frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i} - 2 \right]}{\nu\alpha^2} \right].$$

O EMV perfilado $\hat{\alpha}_p$ é o valor que maximiza a função $\ell_p(\alpha)$. Para encontrarmos o valor de $\hat{\alpha}_p$ é necessário a utilização de algum procedimento de otimização não-linear, pois não há forma fechada para este estimador.

A partir de agora, mostraremos como ficam as versões modificadas da função de verossimilhança perfilada descritas no Capítulo 2.

A expressão para a função de log-verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox & Reid (1987) é dada por

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)|,$$

em que, para o nosso modelo, temos:

$$\begin{aligned} j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha) = & -\frac{n}{\hat{\beta}_\alpha^2} - \frac{1}{\hat{\beta}_\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{(t_i + \hat{\beta}_\alpha)^2} + \frac{\nu + 1}{\hat{\beta}_\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\nu\alpha^2 + \left(\frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i} - 2 \right)} \\ & - \frac{\nu + 1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\frac{-t_i}{\hat{\beta}_\alpha^2} + \frac{1}{t_i}}{\nu\alpha^2 + \left(\frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i} - 2 \right)} \right)^2. \end{aligned}$$

O estimador de máxima verossimilhança perfilado ajustado de α é $\hat{\alpha}_{CR}$.

A função de log-verossimilhança perfilada modificada proposta por Barndorff-Nielsen (1983) para o parâmetro α é dada por

$$\ell_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log \left| j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, a) \right| - \log \left| \ell_{\beta; \hat{\beta}}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, a) \right|. \quad (4.4)$$

Devido a grande dificuldade em se obter a quantidade $\ell_{\beta; \hat{\beta}}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, a)$, optamos por utilizar aproximações para a função (4.4). Essas funções modificadas usam aproximações para a derivada do espaço amostral. Apresentaremos aqui duas propostas, de diferentes autores, para a derivada do espaço amostral da log-verossimilhança. A primeira versão foi a proposta por Severini (1999) enquanto a segunda por Fraser & Reid (1995). As funções de log-verossimilhança são, respectivamente,

$$\check{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)| - \log |\check{I}_\beta(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta})| \quad (4.5)$$

e

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)| - \log |\ell_{\beta; T}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha) \hat{V}_\beta|, \quad (4.6)$$

em que, para o nosso modelo,

$$\begin{aligned} \check{I}_\beta(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{1}{2\hat{\beta}_\alpha} \left(\frac{t_i + 3\hat{\beta}_\alpha}{t_i + \hat{\beta}_\alpha} \right) - \frac{\nu + 1}{2} \left(\frac{\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_\alpha^2} + \frac{1}{t_i} \right)}{\nu\alpha^2 + \left(\frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i} - 2 \right)} \right) \right] \\ &\quad \left[-\frac{1}{\hat{\beta}} + \frac{1}{2\hat{\beta}} \frac{t_i + 3\hat{\beta}}{t_i + \hat{\beta}} - \frac{\nu + 1}{2} \frac{\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}^2} + \frac{1}{t_i} \right)}{\nu\hat{\alpha}^2 + \left(\frac{t_i}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{t_i} - 2 \right)} \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \ell_{\beta; T}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha) \hat{V}_\beta &= \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\hat{\beta}} \left\{ \frac{-1}{(t_i + \hat{\beta}_\alpha)^2} - \frac{\nu + 1}{2} \left[\frac{\left(\frac{-1}{\hat{\beta}_\alpha^2} - \frac{1}{t_i^2} \right) \left(\nu\alpha^2 + \frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i} - 2 \right)}{\left(\nu\alpha^2 + \frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i} - 2 \right)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\left(\frac{-t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{1}{t_i} \right) \left(\frac{1}{\hat{\beta}_\alpha} - \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i^2} \right)}{\left(\nu\alpha^2 + \frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha} + \frac{\hat{\beta}_\alpha}{t_i} - 2 \right)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Os estimadores de máxima verossimilhança perfilados ajustados de α correspondentes à maximização das funções (4.5) e (4.6) são, respectivamente, $\widehat{\alpha}_{BN}$ e $\widehat{\alpha}_{BN}$.

Assim como o estimador $\widehat{\alpha}_p$ os estimadores $\widehat{\alpha}_{CR}$, $\widehat{\alpha}_{BN}$ e $\widehat{\alpha}_{BN}$ não podem ser encontrados de forma analítica; portanto, para obtermos tais estimadores devemos utilizar algum procedimento numérico, ver Nocedal & Wright (1999).

Consideraremos agora o teste de hipóteses para o parâmetro α baseado nas estatísticas gradiente e razão de verossimilhanças. O interesse está em testar a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \alpha = \alpha_0$ contra a hipótese alternativa $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq \alpha_0$, onde α_0 é um escalar conhecido e positivo. A estatística gradiente, descrita na Seção 2.2, é da forma $G_R = \widetilde{U}_\alpha(\widehat{\alpha} - \alpha_0)$. Já as estatísticas da razão de verossimilhanças obtidas das funções de verossimilhanças perfilada e perfiladas ajustadas são como as apresentadas na Seção 3.3. Sob hipótese nula todas as estatísticas são assintoticamente distribuídas como χ_1^2 .

Muitas vezes, nosso interesse não está em apenas encontrar uma estimativa pontual para o parâmetro, e sim, encontrar um intervalo que contenha este parâmetro com alguma probabilidade (confiança). Com esse propósito, utilizamos os seguintes intervalos de confiança: assintótico, bootstrap percentil, bootstrap- t e bootstrap BCa. O método utilizado para encontrar estes intervalos é o mesmo utilizado na Seção 3.3, com a diferença de que agora não temos observações censuradas e a distribuição considerada é a Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student.

4.4 Resultados numéricos

Apresentaremos aqui os resultados do estudo de simulação realizado com objetivo de avaliar o desempenho das inferências, desenvolvidas na Seção 4.3, para o parâmetro de forma α da distribuição BSG com núcleo t de Student. O estudo foi feito considerando diferentes cenários e amostras finitas. Os principais objetivos são: comparar os desempenhos dos EMVs perfilado e perfilados modificados (Tabelas 4.1), comparar a precisão das estimativas intervalares do intervalo assintótico com os intervalos baseados na metodologia bootstrap (Tabela 4.2) e, por fim, comparar os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças baseados nas verossimilhanças perfilada

e perfiladas modificadas, através dos tamanhos e poderes dos testes (Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5).

Com o intuito de avaliar o desempenho dos métodos sugeridos na seção anterior utilizamos simulações de Monte Carlo sob diferentes cenários. Utilizamos o tamanho da amostra $n = 10$, o parâmetro de interesse α igual a 0.1 e 0.5 e os graus de liberdade do núcleo t iguais a 4, 8 e 50 (representando alta, média e baixa curtose, respectivamente). O parâmetro de escala β foi fixado em 1.0, sem perda de generalidade. Para estimação pontual e os testes de hipóteses o número de réplicas utilizadas em cada simulação foi 10000. Para a estimação intervalar, além das 10000 réplicas de Monte Carlo utilizamos também 1000 réplicas bootstrap.

As simulações foram realizadas usando a linguagem de programação Ox (ver Doornik, 2009). Para as maximizações das funções de log-verossimilhança, utilizamos os métodos numéricos BFGS e SQP. A amostragem bootstrap foi realizada parametricamente.

Em todas as tabelas que apresentaremos a seguir, utilizamos o seguinte método para a estimação dos parâmetros: geramos amostras do modelo GBS com núcleo t_{ν_1} , chamado “núcleo verdadeiro”, e estimamos os parâmetros assumindo que as amostras foram geradas do modelo GBS com núcleo t_{ν_2} , com $\nu_1 = \nu_2$ ou $\nu_1 \neq \nu_2$, chamado “núcleo assumido”. O objetivo deste método é verificar o quanto o erro na especificação do núcleo interfere nas estimativas.

Para avaliar o comportamento dos estimadores pontuais utilizamos os vieses, os erros quadráticos médios (MSE) e os vieses relativos (RB). Na Tabela 4.1 apresentamos as estimativas para os estimadores perfilado ($\hat{\alpha}_p$) e perfilados ajustados ($\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$). Analisando a tabela, podemos observar que, quando o núcleo verdadeiro possui um número de graus de liberdade (ν_1) maior ou igual ao do núcleo assumido (ν_2) os ajustes propostos conseguem corrigir bem as estimativas, com uma pequena vantagem, na grande maioria dos casos, para o ajuste proposto por Severini ($\hat{\alpha}_{BN}$). Por exemplo, quando consideramos $\alpha = 0.1$ e os núcleos como sendo t_8 (núcleo verdadeiro) e t_4 (núcleo assumido) temos o viés relativo de $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ dados, respectivamente, por 14.19%, 8.78%, 9.24% e 9.24%. Uma outra análise importante feita através desta tabela é que os ajustes não melhoram as estimativas quando $\nu_1 < \nu_2$. Por exemplo para $\alpha = 0.1$ e núcleos t_4 (núcleo verdadeiro) e t_8 (núcleo assumido) temos os seguintes vieses relativos 7.67% ($\hat{\alpha}_p$), 13.65% ($\hat{\alpha}_{BN}$), 14,15% ($\hat{\alpha}_{BN}$) e 14.14% ($\hat{\alpha}_{CR}$).

Tabela 4.1: Estimação pontual de α para $n = 10(\beta = 1.0)$.

α	núcleo assumido	estimador	núcleo verdadeiro				t(8)				t(50)						
			t(4)		t(8)		t(8)		t(50)		t(50)		t(50)				
			Vies	MSE	RB(%)	Vies	MSE	RB(%)	Vies	MSE	RB(%)	Vies	MSE	RB(%)	Vies	MSE	RB(%)
0.1	t(4)	$\hat{\alpha}_p$	-0.00436	0.00092	4.35660	-0.01419	0.00079	14.19476	-0.02134	0.00088	21.33910	-0.02134	0.00088	21.33910	-0.02134	0.00088	21.33910
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00165	0.00102	1.65276	-0.00879	0.00074	8.78612	-0.01631	0.00075	16.30858	-0.01631	0.00075	16.30858	-0.01631	0.00075	16.30858
		$\tilde{\alpha}_{BN}$	0.00158	0.00103	1.57743	-0.00925	0.00073	9.24674	-0.01708	0.00075	17.07923	-0.01708	0.00075	17.07923	-0.01708	0.00075	17.07923
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00158	0.00103	1.57714	-0.00925	0.00073	9.24650	-0.01708	0.00075	17.07823	-0.01708	0.00075	17.07823	-0.01708	0.00075	17.07823
t(8)	$\hat{\alpha}_p$	0.00768	0.00130	7.67553	-0.00535	0.00072	5.34667	-0.01435	0.00067	14.35454	-0.01435	0.00067	14.35454	-0.01435	0.00067	14.35454	
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.01366	0.00156	13.65666	0.00004	0.00077	0.04244	-0.00938	0.00061	9.38191	-0.00938	0.00061	9.38191	-0.00938	0.00061	9.38191	
	$\tilde{\alpha}_{BN}$	0.01415	0.00165	14.15046	-0.00006	0.00077	0.06087	-0.00977	0.00060	9.77447	-0.00977	0.00060	9.77447	-0.00977	0.00060	9.77447	
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.01415	0.00165	14.14624	-0.00006	0.00077	0.06095	-0.00977	0.00060	9.77390	-0.00977	0.00060	9.77390	-0.00977	0.00060	9.77390	
t(50)	$\hat{\alpha}_p$	0.02153	0.00271	21.52987	0.00391	0.00091	3.90993	-0.00739	0.00057	7.39229	-0.00739	0.00057	7.39229	-0.00739	0.00057	7.39229	
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.02812	0.00327	28.12448	0.00958	0.00109	9.57993	-0.00232	0.00058	2.31814	-0.00232	0.00058	2.31814	-0.00232	0.00058	2.31814	
	$\tilde{\alpha}_{BN}$	0.02819	0.00331	28.18610	0.00954	0.00109	9.53915	-0.00241	0.00058	2.40812	-0.00241	0.00058	2.40812	-0.00241	0.00058	2.40812	
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.02819	0.00331	28.18611	0.00954	0.00109	9.53910	-0.00241	0.00058	2.40803	-0.00241	0.00058	2.40803	-0.00241	0.00058	2.40803	
0.5	t(4)	$\hat{\alpha}_p$	-0.02263	0.02302	4.52690	-0.07161	0.01976	14.32151	-0.10723	0.02212	21.44557	-0.10723	0.02212	21.44557	-0.10723	0.02212	21.44557
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00879	0.02593	1.75892	-0.04307	0.01885	8.61326	-0.08077	0.01896	16.15303	-0.08077	0.01896	16.15303	-0.08077	0.01896	16.15303
		$\tilde{\alpha}_{BN}$	0.00802	0.02583	1.60421	-0.04610	0.01842	9.21936	-0.08529	0.01884	17.05808	-0.08529	0.01884	17.05808	-0.08529	0.01884	17.05808
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00802	0.02589	1.60403	-0.04608	0.01843	9.21622	-0.08526	0.01884	17.05191	-0.08526	0.01884	17.05191	-0.08526	0.01884	17.05191
t(8)	$\hat{\alpha}_p$	0.03777	0.03401	7.55325	-0.02764	0.01806	5.52751	-0.07244	0.01675	14.48753	-0.07244	0.01675	14.48753	-0.07244	0.01675	14.48753	
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.06980	0.04174	13.95980	0.00113	0.01973	0.22537	-0.04608	0.01535	9.21519	-0.04608	0.01535	9.21519	-0.04608	0.01535	9.21519	
	$\tilde{\alpha}_{BN}$	0.07107	0.04283	14.21496	-0.00012	0.01958	0.02353	-0.04861	0.01517	9.72171	-0.04861	0.01517	9.72171	-0.04861	0.01517	9.72171	
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.07104	0.04302	14.20865	-0.00011	0.01958	0.02249	-0.04859	0.01517	9.71840	-0.04859	0.01517	9.71840	-0.04859	0.01517	9.71840	
t(50)	$\hat{\alpha}_p$	0.09850	0.05583	19.70008	0.01691	0.02205	3.38280	-0.03825	0.01438	7.64916	-0.03825	0.01438	7.64916	-0.03825	0.01438	7.64916	
	$\hat{\alpha}_{BN}$	0.13487	0.07117	26.97343	0.04763	0.02706	9.52579	-0.01114	0.01481	2.22821	-0.01114	0.01481	2.22821	-0.01114	0.01481	2.22821	
	$\tilde{\alpha}_{BN}$	0.13442	0.07115	26.88312	0.04700	0.02697	9.40003	-0.01189	0.01473	2.37719	-0.01189	0.01473	2.37719	-0.01189	0.01473	2.37719	
	$\hat{\alpha}_{CR}$	0.13437	0.07104	26.87446	0.04700	0.02696	9.39972	-0.01188	0.01474	2.37669	-0.01188	0.01474	2.37669	-0.01188	0.01474	2.37669	

Os resultados da estimação intervalar estão descritos na Tabela 4.2. As probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança ICA, ICP, ICBt e IBCa foram calculadas para o nível nominal de 90%. Analisando a tabela percebemos que as melhores coberturas se alternam entre os intervalos ICBt e IBCa enquanto que as piores se alternam entre ICA e ICP; isto acontece apenas para os casos onde o número de graus de liberdade do núcleo verdadeiro é maior ou igual ao do núcleo assumido. Por exemplo, quando ambos os núcleos são t_{50} temos as seguintes probabilidades de cobertura: 79.56% (ICA), 75.02% (ICP), 89.70% (ICBt) e 89.32% (IBCa). Para os casos onde $\nu_1 < \nu_2$, as melhores coberturas se alternam entre os intervalos ICA e ICP, enquanto que as piores se alternam entre ICBt e IBCa.

A fim de compararmos os desempenhos dos testes baseados nas estatísticas obtidas a partir das funções de verossimilhança perfilada e perfiladas modificadas desenvolvidas na Seção 4.3, avaliamos as distorções de tamanho dos testes e também os seus poderes. As Tabelas 4.3 e 4.4 contêm as taxas de rejeição sob a hipótese nula dos testes da razão de verossimilhanças baseados nas estatísticas $LR_p, LR_{BN1}, LR_{BN2}, LR_{CR}$ e do teste gradiente (G_R); para os níveis nominais 10%, 5% e 1%. Podemos observar, através da análise das tabelas, que os testes baseados nas estatísticas ajustadas e o teste gradiente, quando comparados com o teste baseado na estatística sem ajuste, apresentam taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais sempre que o núcleo verdadeiro contém um número de graus de liberdade maior ou igual ao núcleo assumido. Destacamos o teste gradiente, que possui um melhor desempenho quando $\nu_1 = \nu_2$. Por exemplo, para $\alpha = 0.1$, nível nominal 10% e ambos os núcleos t_8 temos as seguintes taxas: 12.82% (LR_p), 10.79% (LR_{BN1}), 10.78% (LR_{BN2}), 10.78% (LR_{CR}) e 9.68% (G_R). O contrário acontece quando $\nu_1 < \nu_2$, ou seja, as taxas de rejeição dos testes baseados nas estatísticas ajustadas e do teste gradiente ficam muito distantes dos níveis nominais, com o teste baseado na estatística sem ajuste apresentando uma pequena vantagem em relação a eles.

Tabela 4.2: Estimativas intervalares (90%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 10$).

α	núcleo Assumido	núcleo verdadeiro			t(4)			t(8)			t(50)		
		ICA	ICP	ICBt	IBCa	ICA	ICP	ICBt	IBCa	ICA	ICP	ICBt	IBCa
0.1	t(4)	83.08	83.28	89.44	89.64	76.02	77.36	91.14	91.90	67.12	68.78	88.96	89.32
	t(8)	84.20	82.90	81.82	80.74	83.20	81.50	89.82	89.68	76.18	73.88	91.74	91.64
	t(50)	76.40	78.08	65.26	64.94	82.88	81.06	80.60	80.02	79.56	75.02	89.70	89.32
0.5	t(4)	83.38	83.66	89.36	89.62	75.80	77.00	90.96	91.94	66.96	68.34	88.82	89.28
	t(8)	84.30	83.08	82.40	81.68	82.80	81.30	89.68	89.64	75.96	73.62	91.60	91.52
	t(50)	77.06	79.12	65.22	65.32	82.74	81.00	80.64	80.12	79.24	74.52	89.56	89.08

Tabela 4.3: Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 10$ ($\alpha = 0.1, \beta = 1.0$).

núcleo	Assumido	Testes	núcleo verdadeiro								
			t(4)		t(8)		t(50)				
			10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
t(4)		LR_p	12.960	7.160	1.610	14.060	7.650	2.230	18.800	10.930	2.900
		LR_{BN-1}	11.020	5.600	1.200	9.870	5.060	1.170	12.730	6.750	1.520
		LR_{BN-2}	10.910	5.680	1.190	9.760	5.000	1.180	12.910	6.760	1.540
		LR_{CR}	10.890	5.670	1.200	9.730	5.000	1.180	12.910	6.750	1.540
		G_R	9.920	4.440	1.060	8.190	2.880	0.140	10.310	3.340	0.080
t(8)		LR_p	17.440	10.600	3.670	12.820	6.900	1.850	14.810	8.230	2.140
		LR_{BN-1}	17.520	10.720	3.900	10.790	5.640	1.170	9.810	5.170	1.080
		LR_{BN-2}	17.820	10.910	3.970	10.780	5.630	1.200	9.930	5.180	1.060
		LR_{CR}	17.880	10.910	3.980	10.780	5.650	1.200	9.930	5.200	1.060
		G_R	17.850	10.870	5.110	9.680	4.530	0.800	8.140	2.740	0.150
t(50)		LR_p	30.820	22.860	13.480	18.520	11.650	4.630	13.410	7.220	1.900
		LR_{BN-1}	32.560	25.010	14.780	18.480	12.240	4.930	10.790	5.410	1.220
		LR_{BN-2}	32.570	25.050	14.810	18.480	12.290	4.960	10.770	5.420	1.210
		LR_{CR}	32.570	25.070	14.830	18.480	12.290	4.940	10.750	5.420	1.210
		G_R	31.760	25.440	17.190	18.550	11.750	5.720	9.250	3.720	0.680

Tabela 4.4: Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 10$ ($\alpha = 0.5, \beta = 1.0$).

núcleo assumido	testes	núcleo verdadeiro								
		t(4)		t(8)		t(50)				
		10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
t(4)	LR_p	13.010	7.270	1.630	14.260	7.750	2.250	19.010	11.080	2.940
	LR_{BN-1}	11.190	5.590	1.290	9.880	5.050	1.160	12.730	6.690	1.490
	LR_{BN-2}	10.910	5.590	1.200	9.730	5.050	1.190	12.980	6.750	1.520
	LR_{CR}	10.940	5.610	1.190	9.700	5.030	1.170	12.920	6.710	1.530
	G_R	9.970	4.440	1.060	8.310	2.920	0.140	10.450	3.390	0.080
t(8)	LR_p	17.680	10.840	3.970	12.910	6.980	1.880	14.960	8.270	2.180
	LR_{BN-1}	17.610	10.960	4.060	10.820	5.780	1.220	9.870	5.160	1.070
	LR_{BN-2}	17.910	11.160	4.230	10.780	5.730	1.210	9.970	5.200	1.060
	LR_{CR}	17.950	11.080	4.240	10.850	5.710	1.210	9.960	5.210	1.050
	G_R	16.940	11.100	5.420	9.810	4.580	0.870	8.260	2.740	0.150
t(50)	LR_p	30.040	21.990	12.760	18.320	11.430	4.400	13.450	7.290	1.900
	LR_{BN-1}	31.860	24.240	14.310	18.380	12.050	4.900	10.870	5.440	1.230
	LR_{BN-2}	31.790	24.180	14.210	18.330	12.000	4.860	10.800	5.420	1.210
	LR_{CR}	31.730	24.190	14.250	18.340	11.980	4.870	10.770	5.400	1.200
	G_R	30.790	24.540	16.420	17.250	11.360	5.510	9.210	3.730	0.650

As taxas de rejeição não-nula dos testes, ou seja, os poderes dos testes são apresentados na Tabela 4.5. Para as simulações de poder utilizamos valores críticos exatos (estimados via Monte Carlo) ao invés de valores assintóticos, pois dessa forma fazemos com que os testes tenham o mesmo tamanho. A tabela apresenta os resultados de simulação obtidos levando em consideração a hipótese alternativa \mathcal{H}_1 para $n = 10$, $\beta = 1$, valores de α variando de 0.12 a 0.28 e nível nominal 10%. Os núcleos verdadeiros e assumidos foram alternados entre t_4 , t_8 e t_{50} . A hipótese nula testada foi $H_0 : \alpha = 0.10$. É importante observar que esta simulação de poder corresponde à situação abordada na Tabela 4.3. Através da Tabela 4.5 notamos que o teste baseado na estatística G_R apresentou maior poder, enquanto que o teste baseado na estatística LR_p foi o menos poderoso. Por exemplo, para $\nu_1 = \nu_2 = 4$ e $\alpha = 0.28$ os poderes dos testes baseados nas estatísticas LR_p , LR_{BN1} , LR_{BN2} , LR_{CR} e G_R são, respectivamente: 90.92, 91.37, 91.35, 91.55 e 94.41.

Tabela 4.5: Taxas de rejeição não nula, inferência em α ($n = 10$) e nível nominal 10%.

núcleo Assumido	α	núcleo verdadeiro				
		t(4)				
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
t(4)	0.12	11.83	15.53	15.57	15.63	16.78
	0.16	36.41	45.15	44.96	45.07	47.29
	0.20	64.08	71.20	71.60	71.71	73.79
	0.24	81.73	85.54	85.93	86.05	88.03
	0.28	90.92	91.37	91.35	91.55	94.41
t(8)	0.12	19.53	22.40	22.24	22.24	24.38
	0.16	51.83	56.07	55.79	55.74	58.91
	0.20	77.40	80.49	80.39	80.38	82.23
	0.24	90.48	91.87	91.76	91.75	92.88
	0.28	95.98	96.33	96.27	96.32	97.16
t(50)	0.12	22.71	23.13	22.99	23.02	23.15
	0.16	55.00	55.74	55.58	55.61	55.77
	0.20	79.21	79.80	79.56	79.58	79.81
	0.24	91.19	91.36	91.28	91.30	91.43
	0.28	96.33	96.35	96.30	96.30	96.44
		t(8)				
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
t(4)	0.12	6.58	9.87	9.34	9.37	10.40
	0.16	23.54	35.37	34.79	34.72	37.42
	0.20	52.11	63.73	63.82	63.76	66.18
	0.24	74.34	82.07	82.37	82.39	84.13
	0.28	86.67	89.73	89.81	89.92	92.50
t(8)	0.12	13.02	17.66	17.39	17.42	18.70
	0.16	45.37	54.20	54.26	54.26	56.27
	0.20	73.37	79.16	79.20	79.22	80.51
	0.24	88.87	92.12	92.17	92.17	92.86
	0.28	95.21	96.35	96.38	96.36	96.80
t(50)	0.12	20.37	23.15	23.12	23.11	24.89
	0.16	59.35	63.05	62.95	62.93	65.44
	0.20	82.96	85.13	85.07	85.03	86.40
	0.24	93.90	94.95	94.91	94.91	95.43
	0.28	97.41	97.91	97.91	97.91	98.16
		t(50)				
		LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
t(4)	0.12	3.64	5.00	4.39	4.39	5.54
	0.16	9.63	20.71	18.48	18.46	23.83
	0.20	34.70	51.48	49.91	49.91	55.89
	0.24	61.11	73.78	73.25	73.34	77.73
	0.28	78.23	85.70	85.59	85.69	89.37
t(8)	0.12	6.11	10.35	9.81	9.86	10.96
	0.16	28.89	42.77	41.90	41.93	44.30
	0.20	62.71	74.23	73.91	73.92	75.62
	0.24	83.34	89.66	89.65	89.71	90.57
	0.28	92.95	95.77	95.85	95.86	96.44
t(50)	0.12	14.18	19.85	19.93	19.85	21.16
	0.16	51.99	60.89	60.97	60.89	62.24
	0.20	81.62	86.74	86.77	86.74	87.65
	0.24	93.11	95.38	95.42	95.38	95.61
	0.28	97.78	98.50	98.47	98.50	98.62

4.5 Aplicação

As aplicações que apresentaremos nesta seção utilizam os mesmos dados reais mostrados na Seção 3.6. Várias análises têm sido feitas nesse primeiro conjunto de dados assumindo que as observações seguem a lei Birnbaum-Saunders. Contudo, Leiva et al (2008a) mostrou, através de métodos de bondade de ajuste e critérios de seleção de modelos, que a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t se ajusta melhor aos dados do que a Birnbaum-Saunders. Um grande questionamento que surge a partir daí é o que fazer com os graus de liberdade da distribuição t , ou seja, a questão é se o parâmetro ν deve ou não ser estimado. Vários autores têm relatado que encontram problemas de máximo local na função de verossimilhança quando o parâmetro ν é estimado; ver Lange et al. (1989), Fernandez & Steel (1999) e Taylor & Verbyla (2004). Por essa razão, é melhor fixar o parâmetro ν e assumir que ele é um valor conhecido. Para nossas aplicações, iremos utilizar a sugestão proposta por Leiva et al (2008a), onde a escolha do parâmetro ν se dá através do valor (dentro do intervalo $[2,100]$) que maximiza a função de verossimilhança. Assim para esta primeira aplicação o valor selecionado para o parâmetro ν é 8, ou seja para a análise dos dados utilizaremos a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t_8 .

As estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada modificadas para o parâmetro α são $\hat{\alpha}_p = 0.14749$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0.14828$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0.14827$ e $\hat{\alpha}_{CR} = 0.14827$. Percebemos que as estimativas são bem semelhantes, com uma leve diferença (para mais) para as estimativas corrigidas. Suponha que estamos interessados em testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.13$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.13$. Os p -valores associados às estatísticas de teste $LR_p, LR_{BN-1}, LR_{BN-2}, LR_{CR}$ e G_R são, respectivamente, 0.117, 0.103, 0.103, 0.103 e 0.100. Podemos notar que os testes corrigidos apresentam taxas de rejeição bem próximas a 10% e que o teste gradiente é o único que rejeita a hipótese nula com esse mesmo nível de significância.

Na Tabela 4.6 apresentamos os intervalos de confiança para o parâmetro α com cobertura nominal de 95%. Podemos observar que dentre os intervalos bootstrap apresentados, o ICP apresenta menor comprimento.

Tabela 4.6: Estimativas intervalares para α –primeira aplicação.

Intervalo	Limite inferior	Limite superior	Comprimento
ICA	0.1237	0.1713	0.0476
ICP	0.1237	0.1719	0.0483
ICBt	0.1267	0.1758	0.0491
IBCa	0.1271	0.1766	0.0495

No que diz respeito ao segundo conjunto de dados, para encontrarmos o ν ótimo nós utilizamos o mesmo método utilizado na primeira aplicação. Assim assumimos que estes dados seguem uma distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t_3 . Na Tabela 4.7 apresentamos algumas medidas (teste KS, SIC e R^2 do PP plot) que mostram um melhor ajuste da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t_3 aos dados, quando comparada com a Birnbaum-Saunders.

Tabela 4.7: Medidas de bondade de ajuste para as distribuições BS e GBS- t_3 .

	BS	GBS- t_3
KS	0.170	0.150
SIC	5.727	5.657
R^2	99.16	99.39

As estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada modificadas para o parâmetro α são $\hat{\alpha}_p = 0.18250$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0.19767$, $\hat{\alpha}_{BN} = 0.19433$ e $\hat{\alpha}_{CR} = 0.19356$. Para os testes da razão de verossimilhança e teste Gradiente, com hipóteses $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.11$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.11$ os p-valores obtidos das estatísticas $LR_p, LR_{BN-1}, LR_{BN-2}, LR_{CR}$ e G_R foram, respectivamente, 0.090, 0.054, 0.066, 0.068 e 0.048. Note que o p-valor associado a estatística LR_p está bem próximo a 10%, enquanto que as outras apresentam forte evidência contra a hipótese nula. Note também que ao nível de 5% o teste gradiente é o único a rejeitar $\alpha = 0.11$.

Os intervalos de confiança para o parâmetro α com cobertura nominal de 95% são apresentados na tabela 4.8. Podemos observar que dentre os intervalos bootstrap apresentados, o IBCa apresenta maior comprimento.

Tabela 4.8: Estimativas intervalares para α -segunda aplicação.

Interval	Lower limit	Upper limit	Width
ICA	0.0688	0.2962	0.2274
ICP	0.0820	0.3132	0.2311
ICBt	0.1059	0.3993	0.2934
IBCa	0.1057	0.4109	0.3052

4.6 Conclusão

Desenvolvemos neste capítulo o melhoramento de inferências baseadas no parâmetro de forma da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t . Mais precisamente, apresentamos os estimadores de máxima verossimilhança perfilados, original e ajustados, para a distribuição. Fornecemos as expressões para os testes da razão de verossimilhanças associados a estes estimadores e o teste Gradiente. Também apresentamos estimativas intervalares levando em consideração intervalos de confiança baseados na metodologia bootstrap. Particularmente fornecemos os intervalos do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t .

Os resultados de extensivas simulações de Monte Carlo evidenciam que os estimadores corrigidos apresentam melhor desempenho em amostras finitas, com uma pequena vantagem, na grande maioria dos casos, para o ajuste proposto por Severini ($\hat{\alpha}_{BN}$). Para os testes os resultados mostraram que o teste gradiente possui melhor desempenho. Por fim, no que diz respeito às estimativas intervalares temos um melhor desempenho para os intervalos bootstrap BCa e bootstrap- t .

Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student na presença de censura tipo II

5.1 Introdução

A distribuição Birnbaum-Saunders Generalizada, proposta por Díaz-García e Leiva (2005), tem se mostrado bastante eficiente em situações onde desejamos modelar os percentis mais baixos ou mais altos da distribuição. Comparando com a distribuição Birnbaum-Saunders, proposta por Birnbaum & Saunders (1969a), temos que essa nova classe de distribuições é bastante flexível, pois contém distribuições que possuem caudas mais ou menos pesadas que a distribuição Birnbaum-Saunders. No Capítulo 4 foram apresentados alguns ajustes para inferências na distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student para dados completos (sem censura). É comum, no entanto, que em dados de tempo de vida exista presença de censura. Conforme definido na Seção 3.1, a censura do tipo II acontece em situações onde o estudo termina após a ocorrência do evento de interesse em um número pré-determinado de indivíduos.

O objetivo deste capítulo é estender os resultados apresentados no Capítulo 4 para situações nas quais os dados apresentem censura do tipo II. Neste Capítulo, derivamos os estimadores de máxima verossimilhança relacionados às funções de verossimilhança perfilada e perfiladas ajustadas para dados com presença de censura do tipo II. Apresentamos os testes da razão de verossimilhanças ajustados e o teste gradiente. Também calculamos os intervalos de confiança

do tipo assintótico, bootstrap percentil, bootstrap BCa e bootstrap- t . Através de simulações de Morte Carlo são avaliados os desempenhos dos testes e dos estimadores pontuais e intervalares propostos. Essas simulações são feitas para diferentes níveis de censura. Por fim, mostramos dois exemplos práticos para ilustrar tudo o que foi desenvolvido e apresentamos nossas conclusões finais.

5.2 Refinamento de inferências para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student na presença de censura tipo II

Nesta seção consideraremos o problema de realizar inferências sobre o parâmetro de forma α da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student para dados com presença de censura do tipo II. Utilizando as funções de verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas de Cox & Reid (1987) e Barndorff-Nielsen (1983), apresentaremos os estimadores de máxima verossimilhança e as estatísticas do teste da razão de verossimilhanças baseados nestas funções. Adicionalmente forneceremos algumas estimativas intervalares para o parâmetro α .

Sejam $\{t_{(1)}, \dots, t_{(r)}\}$ as r menores observações numa amostra aleatória de tamanho n de uma variável T com distribuição Birnbaum-Saunders Generalizada com núcleo t de Student ($GBS-t_\nu$) e densidade dada em (4.3). Dizemos que $\{t_{(1)}, \dots, t_{(r)}, t_{(r)}, \dots, t_{(r)}\}$ é uma amostra de tamanho n com censura tipo II, onde $n - r$ observações são censuradas. Logo, podemos representar a função de log-verossimilhança, baseada nesta amostra, por

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) &= c - r \log(\alpha) - \frac{r}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^r \log(t_i + \beta) + \sum_{i=1}^r \log(g(a_i^2)) \\ &+ (n - r) \log(F(-a_{t_r})), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde c é uma constante, $g(a_i^2) = \left(1 + \frac{a_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$ e $F(\cdot)$ é a acumulada da distribuição t de Student.

As funções score de α e β são, respectivamente

$$U_\alpha = -\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^r v_i \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right) + \frac{2(n-r)}{\alpha} \frac{t_r - \beta}{t_r + \beta} t_r h_T(t_r) \quad (5.2)$$

e

$$U_\beta = -\frac{r}{2\beta} + \sum_{i=1}^r (t_i + \beta)^{-1} - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r v_i \left(\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\beta^2} \right) + \frac{(n-r)t_r}{\beta} h_T(t_r), \quad (5.3)$$

em que $v = (\nu + 1)/(\nu + a_t^2)$ e $h_T(\cdot)$ é a função de risco da $GBS - t_\nu$.

Para encontrarmos os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ utilizamos o método numérico BFGS (ver Nocedal & Wright (1999)), pois as equações $U_\alpha = 0$ e $U_\beta = 0$ não podem ser resolvidas analiticamente. Da mesma forma não podemos encontrar, analiticamente, o estimador restrito $\hat{\beta}_\alpha$, para isso utilizamos o método numérico SQP onde impomos a restrição de que $U_\beta = 0$.

A função de verossimilhança perfilada é obtida pela substituição de $\hat{\beta}_\alpha$ por β na equação 5.1, ou seja, $\ell_p(\alpha) = \ell(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)$. Assim $\hat{\alpha}_p$ é o estimador de máxima verossimilhança perfilado de α .

As expressões para as funções modificadas descritas no Capítulo 2 são apresentadas a seguir.

A função de log-verossimilhança perfilada modificada proposta por Cox & Reid (1987) é dada por

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)|,$$

em que, para o nosso modelo,

$$j_{\beta\beta} = -\frac{r}{2\beta^2} + \sum_{i=1}^r (t_i + \beta)^{-2} + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^r \left[\frac{\partial v_i}{\partial \beta} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\beta^2} \right) + \frac{2t_i v_i}{\beta^3} \right] - \frac{(n-r)}{\beta} t_r \left(\frac{\partial h_T(t_r)}{\partial \beta} - h_T(t_r) \beta^{-1} \right).$$

As quantidades $\partial v_i / \partial \beta$ e $\partial h_T / \partial \beta$ estão descritas no apêndice B.

Maximizando a função $\ell_{CR}(\alpha)$ encontramos o estimador de máxima verossimilhança modificado $\hat{\alpha}_{CR}$.

Usando as aproximações para a verossimilhança modificada proposta por Barndorff-Nielsen, descritas no Capítulo 2, chegamos às seguintes expressões:

$$\check{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)| - \log |\check{I}_\beta(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta})| \quad (5.4)$$

e

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2} \log |j_{\beta\beta}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)| - \log |\ell_{\beta;T}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha) \hat{V}_\beta|, \quad (5.5)$$

em que, para nosso modelo,

$$\begin{aligned} \check{I}_\beta(\alpha, \hat{\beta}_\alpha; \hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \sum_{i=1}^r \left[-\frac{1}{2\hat{\beta}_\alpha} + (t_i + \hat{\beta}_\alpha)^{-1} - \frac{1}{2\alpha^2} v_i^{(1)} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\hat{\beta}_\alpha^2} \right) \right] \times \\ &\quad \left[-\frac{1}{2\hat{\beta}} + (t_i + \hat{\beta})^{-1} - \frac{1}{2\hat{\alpha}^2} v_i^{(2)} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\hat{\beta}^2} \right) \right] + (n-r) \frac{t_r^2}{\hat{\beta}_\alpha \hat{\beta}} h_T^{(1)}(t_r) h_T^{(2)}(t_r), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \ell_{\beta;T}(\alpha, \hat{\beta}_\alpha) \hat{V}_\beta &= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{t_i}{\hat{\beta}} \left\{ -\frac{1}{(t_i + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left[v_i^{(1)} \left(-\frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial t_i} \left(\frac{1}{t_i} - \frac{t_i}{\beta^2} \right) \right] \right\} + \\ &\quad (n-r+1) \frac{t_r}{\hat{\beta}} \left\{ -\frac{1}{(t_r + \beta)^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left[v_r^{(1)} \left(-\frac{1}{t_r^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial t_r} \left(\frac{1}{t_r} - \frac{t_r}{\beta^2} \right) \right] \right\} + \\ &\quad \frac{(n-r)}{\beta} \left(h_T^{(1)}(t_r) + t_r \frac{\partial h_T^{(1)}(t_r)}{\partial t_r} \right) \left. \right\}. \end{aligned}$$

As quantidades com potências (1) e (2) representam as devidas funções avaliadas em $(\alpha, \hat{\beta}_\alpha)$ e $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, respectivamente. Os cálculos das quantidades $\partial v_i / \partial t_i$ e $\partial h_T(t_r) / \partial t_r$ estão descritos no apêndice B.

Maximizando as funções (5.4) e (5.5) obtemos os estimadores de máxima verossimilhança perfilados ajustados $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{BN}$, respectivamente.

Os estimadores $\hat{\beta}_\alpha$, $\hat{\alpha}_p$, $\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$ não têm forma fechada. Eles podem ser obtidos numericamente maximizando a correspondente função de log-verossimilhança; ver Nocedal & Wright (1999).

Para a realização dos testes de hipóteses suponha que queremos testar $\mathcal{H}_0 : \alpha = \alpha_0$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq \alpha_0$, onde α_0 é um escalar conhecido e positivo. As expressões para as estatísticas de teste da razão de verossimilhanças perfilada e perfiladas ajustadas são iguais às dadas na Seção 3.3. Já a estatística gradiente é $G_R = \tilde{U}_\alpha(\hat{\alpha} - \alpha_0)$. Sob hipótese nula estas estatísticas de teste são assintoticamente distribuídas como χ_1^2 .

Nas estimativas intervalares utilizamos os seguintes intervalos de confiança: assintótico, bootstrap percentil, bootstrap- t e bootstrap BCa. A maneira como encontramos cada um destes intervalos foi apresentada na Seção 3.3, com a diferença de que agora estamos trabalhando com a distribuição BSG com núcleo t de Student.

5.3 Resultados numéricos

Nesta seção, faremos uma avaliação do desempenho dos estimadores (pontuais e intervalares) e dos testes descritos na Seção 5.2. Essas inferências foram realizadas para o parâmetro de forma α da distribuição BSG com núcleo t de Student para o caso onde temos presença de censura do tipo II e foram baseadas na função de verossimilhança perfilada e em algumas de suas versões modificadas.

Apresentaremos os resultados obtidos nas simulações de Monte Carlo para estimação pontual, estimação intervalar e teste de hipóteses. Baseamos nossos resultados em 10000 réplicas de Monte Carlo. Para a estimação intervalar, além das 10000 réplicas de Monte Carlo utilizamos também 1000 réplicas bootstrap. Os níveis de censura utilizados foram 10%, 30% e 50% para valores de $\alpha = 0.1, 0.5$ e tamanho de amostra $n=20$. Sem perda de generalidade, fixamos o valor de β em 1.

Os principais objetivos deste estudo de simulação são: comparar os vieses dos estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfilados modificados, comparar as distorções dos testes da razão de verossimilhanças baseados nas verossimilhanças perfilada e perfiladas modificadas consideradas e do teste gradiente e, por fim, comparar a precisão das estimativas intervalares do intervalo assintótico com os intervalos baseados na metodologia bootstrap.

A Tabela 5.1 apresenta os vieses, os erros quadráticos médios (MSE) e os vieses relativos (RB) do estimador perfilado ($\hat{\alpha}_p$) e dos estimadores corrigidos ($\hat{\alpha}_{BN}$, $\hat{\alpha}_{BN}$ e $\hat{\alpha}_{CR}$). Com base no viés relativo, podemos perceber que os estimadores corrigidos possuem melhor desempenho que o estimador perfilado usual. Notamos também que, em geral, os vieses relativos aumentam a medida em que a taxa de censura aumenta. Por exemplo, observamos que na Tabela 5.1 para $\alpha = 0.1$ e t_{50} , os vieses relativos para taxas de censura 30% e 50% são, respectivamente, 5.81, 3.10, 1.55 e 1.90 (d.o.c 30%) e 8.41, 5.39, 2.99 e 3.52 (d.o.c 50%).

Tabela 5.1: Estimação pontual de α para $n = 20$ ($\beta = 1.0$).

α	d.o.c	estimador	núcleo				t(8)				t(50)			
			t(4)		t(8)		t(8)		t(50)		t(50)		t(50)	
			Viés	MSE	RB(%)	Viés	MSE	RB(%)	Viés	MSE	RB(%)	Viés	MSE	RB(%)
0.1	0%	$\hat{\alpha}_p$	-0.00221	0.00045	2.20985	-0.00285	0.00035	2.84503	-0.00359	0.00028	3.59007			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00075	0.00047	0.75385	-0.00018	0.00036	0.18013	-0.00107	0.00028	1.06537			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00074	0.00047	0.73878	-0.00020	0.00036	0.20127	-0.00109	0.00028	1.08519			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00074	0.00047	0.73862	-0.00020	0.00036	0.20139	-0.00109	0.00028	1.08513			
10%	10%	$\hat{\alpha}_p$	-0.00267	0.00047	2.67043	-0.00344	0.00038	3.43842	-0.00427	0.00033	4.26534			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00045	0.00050	0.45097	-0.00065	0.00039	0.64998	-0.00170	0.00033	1.69548			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	-0.00048	0.00049	0.48118	-0.00092	0.00039	0.91548	-0.00135	0.00033	1.34555			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00044	0.00050	0.44325	-0.00049	0.00040	0.49359	-0.00136	0.00033	1.35558			
30%	30%	$\hat{\alpha}_p$	-0.00424	0.00063	4.24437	-0.00513	0.00053	5.13141	-0.00582	0.00045	5.81815			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00038	0.00067	0.97748	-0.00226	0.00054	2.25548	-0.00310	0.00045	3.10122			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	-0.00098	0.00066	0.29048	-0.00047	0.00055	0.47327	-0.00156	0.00046	1.55911			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00029	0.00068	0.38039	-0.00091	0.00055	0.91288	-0.00190	0.00046	1.90066			
50%	50%	$\hat{\alpha}_p$	-0.00719	0.00098	7.18885	-0.00768	0.00079	7.68057	-0.00841	0.00069	8.41392			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	-0.00410	0.00101	4.10303	-0.00470	0.00081	4.70110	-0.00539	0.00069	5.39026			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00303	0.00116	3.03239	-0.00112	0.00086	0.12032	-0.00299	0.00070	2.99303			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	-0.00002	0.00108	0.01630	-0.00191	0.00083	1.90702	-0.00352	0.00069	3.52332			
0.5	0%	$\hat{\alpha}_p$	-0.01141	0.01124	2.28258	-0.01470	0.00878	2.93960	-0.01856	0.00702	3.71274			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00390	0.01188	0.78027	-0.00075	0.00910	0.14986	-0.00520	0.00712	1.03982			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00379	0.01187	0.75740	-0.00098	0.00909	0.19513	-0.00538	0.00711	1.07626			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00378	0.01187	0.75623	-0.00098	0.00909	0.19581	-0.00538	0.00711	1.07597			
10%	10%	$\hat{\alpha}_p$	-0.01386	0.01182	2.77105	-0.01779	0.00960	3.55882	-0.02199	0.00816	4.39892			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00203	0.01243	0.40574	-0.00343	0.00988	0.68630	-0.00853	0.00822	1.70564			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	-0.00285	0.01217	0.57017	-0.00471	0.00985	0.94186	-0.00673	0.00826	1.34593			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00226	0.01247	0.45132	-0.00258	0.00993	0.51582	-0.00700	0.00825	1.39982			
30%	30%	$\hat{\alpha}_p$	-0.02215	0.01576	4.42966	-0.02648	0.01326	5.29541	-0.02987	0.01138	5.97387			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	-0.00519	0.01646	1.03881	-0.01086	0.01363	2.17226	-0.01457	0.01152	2.91474			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.00124	0.01694	0.24715	-0.00238	0.01397	0.47510	-0.00765	0.01162	1.52932			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	0.00102	0.01683	0.20342	-0.00570	0.01372	1.14085	-0.01073	0.01146	2.14624			
50%	50%	$\hat{\alpha}_p$	-0.03745	0.02493	7.49042	-0.03942	0.02036	7.88436	-0.04282	0.01777	8.56437			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	-0.01838	0.02644	3.67679	-0.02055	0.02133	4.11100	-0.02373	0.01830	4.74585			
		$\hat{\alpha}_{BN}$	0.01801	0.03097	3.60273	0.00197	0.02291	0.39490	-0.01280	0.01857	2.56075			
		$\hat{\alpha}_{CR}$	-0.00425	0.02678	0.85090	-0.01306	0.02095	2.61105	-0.02044	0.01779	4.08826			

As Tabelas 5.2 e 5.3 apresentam as taxas de rejeição nula dos testes da razão de verossimilhanças e gradiente para os níveis nominais 10%, 5% e 1%. Observe que o teste baseado na estatística LR_p apresenta taxas de rejeição maiores que os outros testes considerados. Note também que ele se torna bastante liberal a medida em que os graus de liberdade do núcleo t e a taxa de censura aumentam. Por exemplo, na Tabela 5.2 para taxa de censura igual a 50%, núcleo t_{50} e nível nominal 10%, a taxa de rejeição deste teste foi 17.93%. Adicionalmente podemos observar que o teste gradiente apresenta melhor desempenho. Entretanto, não podemos deixar de destacar o desempenho dos testes corrigidos (LR_{BN-1} , LR_{BN-2} e LR_{CR}), que apesar de não terem sido melhores que o teste gradiente, conseguiram corrigir bem o teste da razão de verossimilhanças usual. Por exemplo, na Tabela 5.3 para taxa de censura igual a 30%, núcleo t_4 e nível nominal 10%, as taxas de rejeição dos testes baseados nas estatísticas LR_p , LR_{BN-1} , LR_{BN-2} , LR_{CR} e G_R são 12.50, 11.28, 10.31, 10.65 e 9.85.

Analisamos também os poderes dos testes basados nas estatísticas LR_p , LR_{BN-1} , LR_{BN-2} , LR_{CR} e G_R para testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \alpha = \alpha_0$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq \alpha_0$, para valores de α variando de 0.12 a 0.28, nível nominal 10% e taxas de censura 10%, 30% e 50%. O valor verdadeiro para o parâmetro de interesse foi fixado em $\alpha_0 = 0.1$. Para fazer com que os testes tenham o mesmo tamanho as simulações do poder foram feitas usando valores críticos estimados e não valores tabulados. As taxas de rejeição não nulas são apresentadas na Tabela 5.4. Analisando a tabela percebemos que o teste da razão de verossimilhanças usual apresenta menor poder que os demais testes analisados, sendo o teste gradiente o mais poderoso. Adicionalmente podemos notar que os poderes dos testes diminuem a medida em que a taxa de censura aumenta. Por exemplo, na Tabela 5.4 para t_8 , $\alpha = 0.28$ e níveis de censura 10% e 50%, temos, respectivamente, 99.72, 99.80, 99.78, 99.81 e 99.82 (d.o.c 10%) e 91.41, 93.38, 94.99, 94.47 e 94.94 (d.o.c 50%).

Tabela 5.2: Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 20$ ($\beta = 1.0, \alpha = 0.1$).

		t_4				
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
0	10	11.61	10.61	10.52	10.47	10.05
	5	6.01	5.29	5.28	5.29	4.78
	1	1.36	1.13	1.09	1.11	0.88
10	10	11.44	10.64	10.36	10.46	9.91
	5	5.91	5.49	5.40	5.46	4.92
	1	1.38	1.14	1.13	1.11	0.87
30	10	12.41	11.31	10.34	10.67	9.80
	5	6.83	5.92	5.19	5.50	4.63
	1	1.49	1.30	1.07	1.14	0.97
50	10	14.93	12.99	12.29	12.06	10.80
	5	8.49	7.44	6.64	6.60	4.89
	1	2.42	1.73	1.26	1.37	0.76
		t_8				
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
0	10	11.71	10.50	10.52	10.52	10.08
	5	5.91	5.30	5.35	5.34	4.79
	1	1.27	0.99	0.98	0.97	0.90
10	10	11.81	11.02	10.88	10.93	10.12
	5	6.26	5.36	5.21	5.21	4.43
	1	1.40	1.13	1.08	1.08	0.86
30	10	12.96	11.58	11.01	11.06	10.15
	5	7.08	6.01	5.52	5.65	4.50
	1	1.74	1.34	1.13	1.17	0.71
50	10	15.63	14.14	12.84	13.03	11.35
	5	9.15	7.67	6.87	6.93	4.93
	1	2.42	1.88	1.51	1.51	0.81
		t_{50}				
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
0	10	12.02	10.89	10.87	10.87	10.27
	5	6.48	5.31	5.36	5.37	4.66
	1	1.37	0.96	0.96	0.96	0.79
10	10	12.56	11.28	10.99	10.98	10.15
	5	6.91	5.73	5.53	5.57	4.60
	1	1.37	1.02	0.97	0.97	0.77
30	10	13.37	12.16	11.39	11.41	10.38
	5	7.36	6.28	5.82	5.79	4.49
	1	1.81	1.37	1.24	1.25	0.76
50	10	17.93	16.04	14.79	14.84	12.80
	5	10.70	9.24	8.28	8.34	6.24
	1	3.39	2.67	2.14	2.14	1.09

Tabela 5.3: Taxas de rejeição nula, inferência em α para $n = 20$ ($\beta = 1.0, \alpha = 0.5$).

		t_4				
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
0	10	11.68	10.65	10.54	10.52	10.13
	5	6.11	5.32	5.22	5.26	4.78
	1	1.40	1.14	1.11	1.11	0.95
10	10	11.54	10.69	10.39	10.53	9.88
	5	5.98	5.48	5.40	5.53	4.89
	1	1.38	1.14	1.10	1.16	0.87
30	10	12.50	11.28	10.31	10.65	9.85
	5	6.88	5.93	5.32	5.55	4.65
	1	1.58	1.27	1.06	1.14	0.98
50	10	15.29	13.39	12.69	12.43	11.10
	5	8.76	7.53	6.95	7.00	4.99
	1	2.52	1.80	1.34	1.42	0.75
		t_8				
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
0	10	11.81	10.58	10.64	10.68	10.14
	5	5.92	5.33	5.35	5.33	4.83
	1	1.28	1.03	1.00	1.00	0.89
10	10	11.83	11.07	10.85	10.94	10.18
	5	6.31	5.37	5.22	5.23	4.40
	1	1.42	1.12	1.08	1.10	0.90
30	10	13.23	11.68	11.03	11.22	10.21
	5	7.27	6.02	5.61	5.72	4.60
	1	1.80	1.39	1.12	1.16	0.72
50	10	16.34	14.47	13.32	13.54	11.88
	5	9.72	8.03	7.26	7.29	5.29
	1	2.66	2.01	1.58	1.70	0.83
		t_{50}				
censura (%)	N. nominal	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
0	10	12.06	10.88	10.92	10.91	10.31
	5	6.55	5.33	5.33	5.33	4.65
	1	1.40	0.95	0.94	0.94	0.78
10	10	12.75	11.23	10.97	10.99	10.13
	5	6.97	5.74	5.51	5.53	4.58
	1	1.40	1.01	0.97	0.98	0.79
30	10	13.68	12.30	11.61	11.53	10.61
	5	7.62	6.35	5.94	6.00	4.61
	1	1.91	1.41	1.23	1.29	0.74
50	10	18.77	16.92	15.41	15.73	13.62
	5	11.42	9.73	8.62	8.81	6.48
	1	3.59	2.89	2.31	2.39	1.37

Tabela 5.4: Taxas de rejeição não nulas, inferência em α ($n = 20$) e N.nominal 10%.

d.o.c	α	núcleo	$\tau(4)$				$\tau(8)$				$\tau(50)$				
			LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}
0	0.12	18.06	21.46	21.58	21.68	21.88	25.62	25.69	25.67	26.60	23.67	29.02	28.88	28.87	30.00
	0.16	64.85	70.24	70.46	70.46	74.53	79.13	79.38	79.38	80.18	82.63	86.12	86.10	86.09	86.69
	0.20	91.53	93.58	93.60	93.61	95.83	97.01	97.03	97.03	97.17	98.05	98.68	98.67	98.67	98.75
	0.24	98.35	98.73	98.76	98.76	99.41	99.57	99.59	99.59	99.62	99.80	99.87	99.87	99.87	99.88
0.28	99.59	99.39	99.35	99.40	99.88	99.92	99.93	99.93	99.95	99.99	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
10	0.12	17.22	20.85	19.79	20.92	18.93	23.42	23.00	23.59	24.94	20.33	25.72	26.43	26.45	27.35
	0.16	62.36	68.34	66.79	68.35	70.24	74.91	74.77	75.16	76.44	76.56	81.18	81.68	81.73	82.52
	0.20	89.61	91.91	91.40	92.07	93.81	95.31	95.20	95.44	95.84	96.24	97.29	97.41	97.41	97.49
	0.24	97.77	98.32	97.86	98.33	98.96	99.24	99.22	99.28	99.35	99.51	99.67	99.68	99.69	99.69
0.28	99.39	99.19	98.33	99.21	99.72	99.80	99.78	99.81	99.82	99.95	99.96	99.96	99.96	99.97	
30	0.12	13.48	16.97	18.31	18.45	14.98	18.12	20.19	19.69	20.69	16.10	20.18	22.26	21.83	22.97
	0.16	48.90	54.72	56.82	57.47	55.35	60.50	63.58	62.95	64.07	61.28	66.88	69.77	69.26	70.48
	0.20	79.10	82.74	82.78	84.16	85.00	87.78	89.39	89.04	89.62	89.02	91.17	92.21	92.03	92.39
	0.24	92.78	94.30	89.37	95.06	95.32	96.39	96.98	96.85	97.07	97.16	97.83	98.25	98.19	98.31
0.28	97.09	97.31	83.37	97.75	98.66	98.96	99.11	99.19	99.25	99.44	99.55	99.65	99.64	99.69	
50	0.12	9.92	11.95	16.29	14.61	10.62	13.18	16.55	15.26	16.44	11.81	14.61	17.09	16.47	18.77
	0.16	29.73	34.18	43.83	40.15	36.61	42.62	49.63	47.03	49.35	44.09	49.80	53.88	52.89	56.27
	0.20	55.70	60.45	69.24	66.23	65.05	70.07	75.78	73.79	75.62	73.17	76.86	79.36	78.79	81.12
	0.24	74.62	77.84	84.48	82.50	83.01	86.21	89.33	88.19	89.23	88.98	90.98	92.13	91.86	92.68
0.28	85.88	88.11	92.33	90.89	91.41	93.38	94.99	94.47	94.94	95.05	96.06	96.74	96.59	97.01	

Na Tabela 5.5 descrevemos as coberturas empíricas (%) dos intervalos ICA, ICP, ICBt e IBCa para o parâmetro α . A cobertura nominal é 95%, são considerados todos os três níveis de censura, $\alpha = 0.10$ e 0.50 , $\beta = 1.00$ e $n = 20$. Analisando a tabela, podemos perceber que, em geral, o intervalo ICP apresenta as piores probabilidades de cobertura, seguido pelo intervalo assintótico. Notamos também que a melhor performance se alterna entre os intervalos ICBt e IBCa. Por exemplo, quando $\alpha = 0.1$ e a censura é de 50% as coberturas dos intervalos ICA, ICP, ICBt e IBCa são, respectivamente, 84.44, 80.50, 94.74 e 91.84.

Tabela 5.5: Estimativas intervalares (95%) para α ($\beta = 1.0$ e $n = 20$).

núcleo	censura (%)	$\alpha = 0.1$				$\alpha = 0.5$			
		ICA	ICP	ICBt	IBCa	ICA	ICP	ICBt	IBCa
t_4	0	90.96	91.82	95.40	95.30	90.88	91.80	95.42	95.36
	10	90.72	91.34	95.20	95.36	90.60	91.16	95.14	95.16
	30	88.44	88.98	95.10	94.98	88.48	88.82	94.96	94.84
	50	85.06	85.46	94.86	94.50	85.00	85.38	93.88	94.24
t_8	0	91.38	91.04	94.98	94.84	91.34	90.84	94.90	94.80
	10	90.04	89.56	95.14	94.86	90.06	89.40	95.14	94.78
	30	87.82	87.06	95.20	95.06	87.64	86.74	95.06	94.84
	50	85.24	84.20	95.32	94.68	84.92	83.68	94.90	94.48
t_{50}	0	89.58	88.26	94.96	94.74	89.48	87.96	95.04	94.80
	10	89.46	87.34	94.92	94.22	89.34	87.06	94.86	94.16
	30	87.24	84.86	95.46	93.82	87.02	84.54	95.18	93.70
	50	84.44	80.50	94.74	91.84	84.28	80.46	94.62	92.00

5.4 Aplicação

Nesta seção ilustraremos, através de dados reais, o uso das funções de verossimilhança perfiladas ajustadas na distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student sob censura do tipo II.

Na aplicação utilizamos o conjunto de dados obtido de Birnbaum & Saunders (1969b). Para este caso assumimos que as observações seguem distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t_8 , conforme foi mostrado na Seção 4.5. Os estimadores de máxima verossimilhança perfilado e perfifados modificados de α para diferentes quantidades de falhas ($r = 101, 95, 90, 80$) são apresentados na Tabela 5.6. Podemos notar que as estimativas estão bem próximas entre si, com uma pequena diferença, para menos, da estimativa que se baseia na verossimilhança

perfilada em relação às que se baseiam nas perfiladas ajustadas. Observamos também que as estimativas aumentam a medida em que a taxa de observações censuradas aumenta.

Tabela 5.6: Estimativas de máxima verossimilhança perfilada e perfilada ajustadas de α com $\nu = 8$.

r	$\hat{\alpha}_p$	$\hat{\alpha}_{BN-1}$	$\hat{\alpha}_{BN-2}$	$\hat{\alpha}_{CR}$
101	0.14750	0.14828	0.14827	0.14827
95	0.14849	0.14931	0.14911	0.14933
90	0.14999	0.15083	0.15054	0.15091
80	0.15367	0.15454	0.15456	0.15478

Suponha agora que estamos interessados em testar $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.13$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.13$. As estatísticas de teste foram computadas para $r = 101, 95, 90, 80$ e os correspondentes p -valores são apresentados na Tabela 5.7. Nota-se que os p -valores das estatísticas que se baseiam nas verossimilhanças perfiladas ajustadas e teste gradiente são sempre menores do que os da verossimilhança perfilada. Vale ressaltar também que, para $r = 80$, o teste gradiente é o único que rejeita a hipótese nula a um nível de significância de 5%.

Tabela 5.7: p -valores do teste $\mathcal{H}_0 : \alpha = 0.13$ contra $\mathcal{H}_1 : \alpha \neq 0.13$.

r	LR_p	LR_{BN-1}	LR_{BN-2}	LR_{CR}	G_R
101	0.117	0.103	0.103	0.103	0.100
95	0.106	0.093	0.093	0.097	0.091
90	0.091	0.079	0.080	0.085	0.074
80	0.064	0.054	0.056	0.057	0.034

Na Tabela 5.8 apresentamos os intervalos de confiança para o parâmetro α correspondente à cobertura nominal de 95%, para $r = 101, 95, 90, 80$. Note que a medida em que aumenta o número de censuras aumenta também o comprimento dos intervalos. É importante ressaltar que o comprimento do intervalo bootstrap percentil (ICP) é sempre menor que o dos intervalos bootstrap concorrentes. Por exemplo, para $r = 80$, o comprimento dos intervalos ICA, ICP, ICBt e IBCa são, respectivamente, 0.0563, 0.0559, 0.0583 e 0.0580.

Tabela 5.8: Intervalos de confiança para α com $\nu = 8$.

r	Intervalo	Limite inferior	Limite superior	comprimento
101	ICA	0.1237	0.1713	0.0476
	ICP	0.1241	0.1715	0.0474
	ICBt	0.1267	0.1753	0.0487
	IBCa	0.1270	0.1762	0.0493
95	ICA	0.1239	0.1731	0.0492
	ICP	0.1240	0.1731	0.0491
	ICBt	0.1274	0.1779	0.0505
	IBCa	0.1273	0.1780	0.0507
90	ICA	0.1244	0.1756	0.0512
	ICP	0.1247	0.1753	0.0506
	ICBt	0.1282	0.1807	0.0525
	IBCa	0.1281	0.1818	0.0537
80	ICA	0.1255	0.1818	0.0563
	ICP	0.1257	0.1815	0.0559
	ICBt	0.1298	0.1881	0.0583
	IBCa	0.1299	0.1879	0.0580

5.5 Conclusão

Neste capítulo desenvolvemos inferências associadas às funções de verossimilhança perfilada e perfiladas modificadas para o parâmetro de forma da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com censura tipo II. Apresentamos os estimadores de máxima verossimilhança perfilados (original e ajustados); também fornecemos as expressões para os testes da razão de verossimilhanças associados a estes estimadores e o teste gradiente. Calculamos o intervalo assintótico e os intervalos utilizando três diferentes estratégias bootstrap; bootstrap percentil (ICP), bootstrap-t (ICBt) e Bootstrap BCa (IBCa, Bias-Corrected and accelerated). Após extensivas simulações de Monte Carlo chegamos às seguintes conclusões:

1. Os estimadores corrigidos possuem melhor desempenho do que o estimador perfilado usual.
2. O teste gradiente possui melhor desempenho que os demais testes considerados, pois apresenta menor distorção de tamanho e maior poder.
3. O intervalo ICP apresenta pior performance, enquanto que os intervalos ICBt e IBCa se alternam entre o que possui melhor cobertura.

6.1 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos características e propriedades das distribuições Birnbaum-Saunders e Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student. Adicionalmente, fornecemos para estas distribuições as funções de verossimilhança perfilada e perfiladas modificadas propostas por Cox & Reid (1987) e Barndorff-Nielsen (1983). Estas funções foram derivadas para os seguintes casos: (i) α parâmetro de interesse, distribuição Birnbaum-Saunders e dados com presença de censura tipo II; (ii) α parâmetro de interesse, distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student e dados completos (sem censura); (iii) α parâmetro de interesse, distribuição Birnbaum-Saunders generalizada com núcleo t de Student e dados com presença de censura tipo II. Listamos a seguir as principais contribuições desta tese.

1. Obtemos os ajustes de Cox & Reid (1987) e Barndorff-Nielsen (1983) para a função de verossimilhança perfilada nos casos (i), (ii) e (iii).
2. Estudamos os estimadores de máxima verossimilhança perfilados, original e ajustados para os casos (i), (ii) e (iii). Verificamos, via simulação de Monte Carlo, que em todos os casos ((i), (ii) e (iii)) os estimadores corrigidos apresentam melhor desempenho que o original.
3. Fornecemos as expressões para os testes da razão de verossimilhanças associados a estes

estimadores e também o teste bootstrap e gradiente. Para o caso (i) comparamos o teste original com os corrigidos e o bootstrap. Já para os casos (ii) e (iii) comparamos o teste original com os corrigidos e o gradiente. Através de extensivas simulações chegamos à conclusão de que os testes bootstrap e gradiente são superiores aos outros, isto é, apresentam taxas de rejeição nula bem mais próximas aos níveis nominais.

4. Também obtemos intervalos de confiança baseados no método bootstrap. Em particular, os intervalos foram calculados utilizando três diferentes estratégias bootstrap; os intervalos calculados foram: bootstrap percentil, bootstrap- t e Bootstrap BCa (Bias-Corrected and accelerated). Simulações de Monte Carlo mostraram que os intervalos bootstrap- t (ICBt) e bootstrap BCa apresentam melhor desempenho para todos os casos ((i), (ii) e (iii)).

Referências Bibliográficas

- [1] Achar, J. A.; Espinosa, M. M. (1991). Bayesian methods in accelerated life tests considering a log-linear model for the Birnbaum-Saunders distribution. *Revista Brasileira de Estatística*, **52**, 47–68.
- [2] Barndorff-Nielsen, O.E. (1983). On a formula to the distribution of the maximum likelihood estimator. *Biometrika*, **70**, 343–365.
- [3] Barndorff-Nielsen, O.E. (1994). Adjusted versions of profile likelihood and directed likelihood, and extended likelihood. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **56**, 125–140.
- [4] Barros, M.; Paula, G. A.; Leiva, V. (2009). An R implementation for generalized Birnbaum-Saunders distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 1511–11528.
- [5] Birnbaum, Z.W.; Saunders, S.C. (1969a). A new family of life distribution. *Journal of Applied Probability*, **6**, 319–327.
- [6] Birnbaum, Z.W.; Saunders, S.C. (1969b). Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied Probability*, **6**, 328–347.
- [7] Cohen, A.C.; Whitten, B.J.; Ding, Y. (1984). Modified moment estimation for the three-parameter Weibull distribution. *Journal of Quality Technology*, **16**, 159–167.

- [8] Cox, D. R.; Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. Chapman & Hall, London.
- [9] Cox, D.R.; Reid, N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **49**, 1–39.
- [10] Cox, D.R.; Reid, N. (1992). A note on the difference between profile and modified profile likelihood. *Biometrika*, **79**, 408–411.
- [11] Cysneiros, A.H.M.A.; Cribari-Neto, F.; Araújo Júnior, C.A.G. (2008). On Birnbaum-Saunders Inference. *Computational Statistics and Data Analysis*, **80**, 1–21.
- [12] Davison, A.C.; Hinkley, D.V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*. New York: Cambridge University Press.
- [13] Desmond, A.F. (1985). Stochastic models of failure in random environments. *Canadian Journal of Statistics*, **13**, 171–183.
- [14] Desmond, A.F. (1986). On the relationship between two fatigue-life models. *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 167–169.
- [15] Díaz-García, J.A.; Leiva-Sánchez, V. (2005). A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **128**, 445–457.
- [16] Doornik, J.A. (2009). An Object-oriented Matrix Programming Language Ox6 London: Timberlake Consultants and Oxford: <http://www.doornik.com>.
- [17] Dupuis, D. J.; Mills, J. E. (1998). Robust estimation of the Birnbaum-Saunders distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **47**, 88–95.
- [18] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, **7**, 1–26.
- [19] Efron, B.; Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- [20] Engelhardt, M.; Bain, L. J.; Wright, F. T. (1981). Inferences on the parameters of the

- Birnbaum-Saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation. *Technometrics*, **23**, 251–255.
- [21] Fang, K. T.; Anderson, T. W. (1990). *Statistical Inference in Elliptical Contoured and Related Distributions*. Allerton Press, New York.
- [22] Fernandez, C.; Steel, M. (1999). Multivariate student t regression models: pitfalls and inference. *Biometrika*, **86**, 153–167.
- [23] Fraser, D.A.S.; Reid, N. (1995). Ancillaries and third-order significance. *Utilitas Mathematica*, **47**, 33–53.
- [24] Fraser, D.A.S.; Reid, N.; Wu, J. (1999). A simple formula for tail probabilities for frequentist and Bayesian inference. *Biometrika*, **86**, 655–661.
- [25] Galea, M.; Leiva-Sánchez, V.; Paula, G.A. (2004). Influence diagnostics in log-Birnbaum-Saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*, **31**, 1049–1064.
- [26] Galea, M.; Riquelme, M.; Paula, G. A. (2000). Diagnostics methods in elliptical linear regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **14**, 167–184.
- [27] Gómez, H.W.; Olivares-Pacheco, J.F.; Bolfarine, H. (2009). An extension of the generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 331–338.
- [28] Gupta, A. K.; Varga, T. (1993). *Elliptically Contoured Models in Statistics*. Kluwer Academic Publishers.
- [29] Lange, k.L.; Little, J.A; Taylor, M.G. (1989). Robust statistical modeling using the t distribution. *Journal of the American Statistical Association* , **84**, 881–896.
- [30] Lehmann, E. L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [31] Leiva, V.; Riquelme, M.; Balakrishnan, N.; Sanhueza, A. (2008a). Lifetime analysis based on the generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*., **52**, 2079–2097.

- [32] Leiva, V.; Sanhueza, A.; Sen, P.K.; Paula, G.A. (2008b). Random number generators for the generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 1105–1118.
- [33] Leiva, V.; Sanhueza, A.; Angulo, J.M. (2009). A length-biased version of the Birnbaum-Saunders distribution with application in water quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **23**, 299–307.
- [34] Leiva, V.; Vilca, F.; Balakrishnan, N.; Sanhueza, A. (2010). A skewed sinh-normal distribution and its properties and application to air pollution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **39**, 426–443.
- [35] Lemonte, A.J.; Cribari-Neto, F.; Vasconcellos, K.L.P. (2007). Improved statistical inference for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4656–4681.
- [36] McCullagh, P.; Tibishirani, R. (1990). A simple method for the adjustment of profile likelihood. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **52**, 325–344.
- [37] McCool, J.I. (1974). Inferential techniques for Weibull populations. *Aerospace Research Laboratories Report*, ARL TR74-0180. Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, OH.
- [38] Neyman, J.; Pearson, E. (1928). On The Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference. *Biometrika*, **20**, 175–240.
- [39] Ng, H.K.T.; Kundu, D.; Balakrishnan, N. (2003). Modified moment estimation for the two parameters Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **43**, 283–298.
- [40] Ng, H.K.T.; Kundu, D.; Balakrishnan, N. (2006). Point and interval estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution based on Type-II censored samples. *Computational Statistics and Data Analysis*, **50**, 3222–3242.
- [41] Nocedal, J.; Wright, S.J. (1999). *Numerical Optimization*. New York: Springer.

- [42] Owen, W.J. (2006). A new three-parameter extension to the Birnbaum-Saunders distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 475–479.
- [43] Pace, L.; Salvan, A. (1997). *Principles of Statistical Inference from a Neo-Fisherian Perspective*. World Scientific, Singapore.
- [44] Rao, C. R. (1948). Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **44**, 50–57.
- [45] Rieck, J. R.; Nedelman, J. R. (1991). A log-linear model for the Birnbaum-Saunders distribution. *Technometrics*, **33**, 51–60.
- [46] Sanhueza, A.; Leiva, V.; Balakrishnan, N. (2008). The generalized Birnbaum-Saunders distribution and its theory, methodology and application. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**, 645–670.
- [47] Saunders, S.C. (1974). A family of random variables closed under reciprocation. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 533–539.
- [48] Severini, T.A. (1998). An approximation to the modified profile likelihood function. *Biometrika*, **85**, 403–411.
- [49] Severini, T.A. (1999). An empirical adjustment to the likelihood ratio statistic. *Biometrika*, **86**, 235–247.
- [50] Severini, T.A. (2000). *Likelihood Methods in Statistics*. Oxford University Press, Oxford
- [51] Taylor, J.; Verbyla, A. (2004). Joint modeling of location and scale parameters of t distribution. *Statistics Model.*, **4**, 91–112.
- [52] Stern, S.E. (1997). A second-order adjustment to the profile likelihood in the case of a multidimensional parameter of interest. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **59**, 653–665.
- [53] Terrel, G. R. (2002). The gradient statistic. *Computing Science and Statistics*, **34**, 206–215.

- [54] Vilca, F.; Leiva, V. (2006). A new fatigue life model based on the family of skew-elliptical distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **35**, 229–244.
- [55] Wald, A. (1943). Tests of statistical hypothesis concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Ann. Math. Soc.*, **54**, 426–482.
- [56] Wang, Z.; Desmond, A.F.; Lu, X. (2006). Modified censored moment estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **50**, 1033–1051.
- [57] Wu, J.; Wong, A.C.M. (1994). Improved interval estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **47**, 809–821.

APÊNDICE A

Dados reais

Neste apêndice apresentamos os dados reais utilizados nas aplicações desta tese.

Tabela A.1: Número de ciclos até a falha da lâmina do alumínio 6061 - T6

70	90	96	97	99	100	103	104	104	105	107
108	108	108	109	109	112	112	113	114	114	114
116	119	120	120	120	121	121	123	124	124	124
124	124	128	128	129	129	130	130	130	131	131
131	131	131	132	132	132	133	134	134	134	134
134	136	136	137	138	138	138	139	139	141	141
142	142	142	142	142	142	144	144	145	146	148
148	149	151	151	152	155	156	157	157	157	157
158	159	162	163	163	164	166	166	168	170	174
196	212									

Tabela A.2: Tempo de fadiga em horas das chumaceiras.

152,7	172,0	172,5	173,3	193,0
204,7	216,5	234,9	262,6	422,6

Neste apêndice, apresentamos os cálculos de algumas derivadas utilizadas na Seção 5.2 para obtenção das funções de log-verossimilhança perfiladas modificadas.

- Obtenção das quantidades $\partial a_t / \partial \beta$ e $\partial a_t / \partial t$:

Sejam a_t e v conforme definidos em (4.2) e (5.3), respectivamente. Como

$$a_t^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right),$$

segue que

$$\frac{\partial a_t^2}{\partial \beta} = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{-t}{\beta^2} + \frac{1}{t} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial a_t^2}{\partial t} = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{-\beta}{t^2} \right).$$

Assim,

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = -(\nu + 1)(\nu + a_t^2)^{-2} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{-t}{\beta^2} + \frac{1}{t} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -(\nu + 1)(\nu + a_t^2)^{-2} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{-\beta}{t^2} \right).$$

- Obtenção da quantidade $\partial h_T / \partial \beta$:

Sejam

$$A_t = \frac{1}{2\alpha\beta} \left[\left(\frac{t}{\beta} \right)^{-1/2} + \left(\frac{\beta}{t} \right)^{-3/2} \right] \quad \text{e} \quad h_T = \frac{f_Z(a_t)}{F_Z(-a_t)} A_t,$$

em que f_Z e F_Z são, respectivamente, a densidade e a acumulada da distribuição t de Student. Assim,

$$\frac{\partial h_T}{\partial \beta} = \frac{\left(\frac{\partial f_Z(a_t)}{\partial \beta} A_t + f_Z(a_t) \frac{\partial A_t}{\partial \beta} \right) F_Z(-a_t) + f_Z(a_t) A_t f_Z(-a_t) \frac{\partial a_t}{\partial \beta}}{(F_Z(-a_t))^2}$$

em que

$$\frac{\partial f_Z(a_t)}{\partial \beta} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \frac{(-\nu-1)\nu^{-1}}{2} \left[1 + \frac{a_t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2-1} \frac{\partial a_t^2}{\partial \beta}$$

e

$$\frac{\partial A_t}{\partial \beta} = \frac{-1}{4\alpha\beta^2} \left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{-1/2} - \left(\frac{t}{\beta}\right)^{-3/2} \right].$$