



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MANIPULAÇÃO DE INSTABILIDADES HIDRODINÂMICAS VIA
TENSÃO SUPERFICIAL DEPENDENTE DA CURVATURA DA
INTERFACE FLUIDO-FLUIDO**

Francisco Melo da Rocha

Recife - PE, Brasil
Janeiro - 2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MANIPULAÇÃO DE INSTABILIDADES HIDRODINÂMICAS VIA
TENSÃO SUPERFICIAL DEPENDENTE DA CURVATURA DA
INTERFACE FLUIDO-FLUIDO

por

Francisco Melo da Rocha

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. José Américo de Miranda Neto (Orientador, DF-UFPE)

Prof. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral (DF-UFPE)

Prof. Domingos Sávio Pereira Salazar (EADTec-UFRPE)

Recife - PE, Brasil
Janeiro - 2014

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno, CRB 4-1758

Rocha, Francisco Melo da.
Manipulação de instabilidades hidrodinâmicas via
tensão superficial dependente da curvatura fluido-fluido. /
Francisco Melo da Rocha. – Recife: O Autor, 2014.
81f.: il., fig.

Orientador: José Américo Miranda Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física , 2014.
Inclui referências.

1. Dinâmica de fluidos. 2. Formação de padrões
3. Célula de Hele-shaw . I. Miranda Neto, José Américo.
(orientador). II. Título.

532.05 (22. ed.)

FQ 2014-16



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-7640/2126-8449
<http://www.ufpe.br/ppg fisica> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Francisco Melo da Rocha

MANIPULAÇÃO DE INSTABILIDADES HIDRODINÂMICAS VIA TENSÃO SUPERFICIAL DEPENDENTE DA CURVATURA DA INTERFACE FLUIDO-FLUIDO

A Banca Examinadora composta pelos Professores José Américo de Miranda Neto (Presidente e Orientador), Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Domingos Sávio Pereira Salazar, da Unidade Acadêmica de Educação a Distância e Tecnologia da Universidade Federal Rural de Pernambuco, consideram o candidato:

☒ Aprovado

☐ Reprovado

☐ Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em trinta e um de janeiro de dois mil e catorze.

Prof. José Américo de Miranda Neto
Presidente e Orientador

Prof. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral

Prof. Domingos Sávio Pereira Salazar

Primeiramente, agradeço a meu orientador, José Américo Miranda, por passar da maneira mais sincera e eficaz seu amor e dedicação à ciência, contagiando qualquer um que tenha a oportunidade de trabalhar com ele. Gostaria de agradecê-lo profundamente por esses prazerosos três anos de trabalho, desde a iniciação científica, onde aprendi que com humildade, paciência, perseverança e sorte, mesmo o pior resultado possível tem um lado bem positivo.

Um agradecimento muito especial aos meus pais, Heitor e Cecília, e à minha irmã, Beatriz, pelo apoio em tempo integral e também por aturar a falta exacerbada de paciência em vários momentos!

Aos professores da banca examinadora, Leonardo Cabral e Domingos Salazar, pela dedicação à leitura e ao estudo da dissertação. Pelas sugestões e correções bastante construtivas que tornaram este trabalho mais completo e rico. Agradeço também aos professores Fernando Parísio, Sérgio Coutinho, Flávio Aguiar, Raúl Montagne, Clécio Clemente e Paulo Campos que contribuíram importantemente na minha formação até aqui.

Aos amigos do departamento, Pablo, Victor, Tiago, Eglânio, João, Rebeca, Gabrigio, Mário e George agradeço pela companhia e ajuda fundamental para conclusão desta etapa. A Mr. Hugo Andrade pois sem sua ajuda esta dissertação não estaria no papel, pelo menos desta forma. Aos companheiros de grupo de pesquisa, Eduardo, Sérgio e Rodolfo pelas discussões sempre muito ricas e proveitosas ao longo destes anos.

Aos amigos do dia-a-dia, agradeço pelo aprendizado mais do que formal em todos os momentos mais informais possíveis.

Finalmente, mas não menos importante, gostaria de agradecer ao CAPES pelo apoio financeiro.

É preciso provocar sistematicamente confusão. Isso promove a criatividade. Tudo aquilo que é contraditório gera vida.

—SALVADOR DALÍ

Resumo

A instabilidade de Saffman-Taylor acontece quando um fluido desloca outro de maior viscosidade entre as placas de uma célula de Hele-Shaw. A evolução temporal da interface entre os fluidos é marcada por sucessivas bifurcações, resultando em uma morfologia bastante ramificada. Outro tipo de instabilidade é observado quando, ao invés de injetarmos fluido continuamente, permitimos que a célula rotacione com velocidade angular constante em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Nesta versão girante o fator crucial na desestabilização da interface não é mais o contraste de viscosidade, mas sim a diferença de densidade entre os fluidos. A desestabilização ocorre de tal forma que não mais bifurcações são observadas, mas sim uma competição no crescimento das perturbações do fluido menos denso ao penetrar o mais denso. Neste trabalho analisamos uma variante destas instabilidades onde consideramos uma tensão superficial entre os fluidos que depende da curvatura da interface que os separa. Através de uma teoria perturbativa mostramos que o acoplamento entre a tensão superficial variável e efeitos tridimensionais relacionados ao ângulo de contato, podem levar à formação de padrões diferentes dos tradicionalmente vistos. Para o problema com injeção, mostramos como esta nova abordagem pode estabilizar (desestabilizar) situações convencionalmente instáveis (estáveis), bem como o fenômeno da bifurcação dos dedos. Já no caso da célula girante, focamos na capacidade do modelo em controlar perturbações lineares e também a competição existente.

Palavras-chave: Instabilidade de Saffman-Taylor, célula de Hele-Shaw girante, controle de instabilidades hidrodinâmicas, tensão superficial dependente da curvatura.

Abstract

The Saffman-Taylor instability occurs when a fluid displaces another of higher viscosity between the parallel plates of a Hele-Shaw cell (HSC). The interfacial evolution is characterized by successive bifurcations producing a strongly ramified morphology. A different kind of instability is observed when instead of injecting fluid continuously the HSC is allowed to rotate with constant angular velocity around a vertical axis that passes through its center. In this rotating version the main role in the destabilization of the interface is played not by the viscosity contrast but the density difference between the fluids. This destabilization occurs such that the rotating patterns exhibit a finger competition of the less dense fluid that penetrates the denser one. In the present work we analyze a variation of these instabilities which the surface tension between the fluids depends on the interfacial curvature. Employing a perturbative theory of coupled modes we show that the coupling between the variable surface tension and three-dimensional effects related to the wetting contact angle at the interface can lead to the formation of unusual patterns. In the case of injection, we show how this approach can stabilize (destabilize) a conventionally unstable (stable) situation, as well as the fingers bifurcations. In the rotating version, we focus on the control of interfacial disturbances, verifying the ability of the model to control and eventually completely suppress linear perturbations and also the fingers competition.

Keywords: Saffman-Taylor instability, rotating Hele-Shaw cell, control of hydrodynamic instabilities, curvature-dependent surface tension.

Lista de Figuras

1.1	Alguns exemplos de padrões naturais.	11
1.2	Exemplos de padrões naturais hidrodinâmicos. Da esquerda para a direita: padrão conhecido como rua de vórtice de Von Kármán, padrão deixado por uma gota ao cair na superfície de um fluido e fluxos nas proximidades de corpos rígidos.	12
1.3	Diagrama esquemático de um possível arranjo experimental para realização de experimentos com uma célula de Hele-Shaw. Este não é um diagrama fidedigno da montagem original da célula, como proposta por Hele-Shaw. Apresentamos aqui uma versão mais moderna com alguns aperfeiçoamentos.	12
1.4	Diagrama esquemático das instabilidades na célula de Hele-Shaw retangular. Em (a), está ilustrado o início da dinâmica, enquanto ainda não observa-se deformações interfaciais. Já em (b), podemos ver um padrão típico deste tipo de sistema, onde o crescimento de um dos dedos é perceptivelmente favorecido.	14
1.5	Padrão típico formado em uma célula de Hele-Shaw retangular muito estreita, onde os fluidos usados tem uma elevada diferença de viscosidade. Da esquerda para a direita o tempo avança, deixando perceptível o crescimento dominante de um dos dedos. A figura horizontal mostra um estágio bem avançado da dinâmica onde um dedo domina completamente.	14
1.6	Representação esquemática da célula de Hele-Shaw radial com injeção. Usualmente a taxa com que se injeta fluido Q (área por unidade de tempo) é constante, e os fluidos têm diferentes viscosidades η_1 e η_2 . Além disto, o pequeno espaçamento entre as placas da célula é denotado por b .	15
1.7	Padrão típico observado em experimentos numa célula de Hele-Shaw radial com injeção. Em estágios bastante avançados da dinâmica, a interface fluido-fluido apresenta uma estrutura bem ramificada e ainda em evolução. Em ambas as figuras temos inicialmente uma gota circular.	16
1.8	Séries temporais ilustrando padrões típicos observados em experimentos com célula de Hele-Shaw radial. Em (a), observa-se um padrão obtido através da injeção contínua de fluido. Já em (b), vemos um padrão típico observado quando rotacionamos a célula em torno de um eixo que passa pelo seu centro.	16

LISTA DE FIGURAS

1.9	Exemplos de processos influenciados pela instabilidade de Saffman-Taylor. Começando na extrema esquerda superior e seguindo no sentido horário temos: mistura de fluidos em um recipiente, processo de formação de flocos de neve, citoesqueleto relacionado ao processo de fragmentação celular, separação cromatográfica, mistura de fluidos miscíveis em um canal e simulações em solidificação dendrítica.	17
1.10	Ilustração dos padrões obtidos em experimentos envolvendo reações químicas interfaciais de fluidos miscíveis de mesma viscosidade. Do lado esquerdo um padrão semelhante a cogumelos ("mushroom-shaped structures"), enquanto do lado direito, observamos dedos que lembram tentáculos ("tentaclelike fingers").	18
2.1	Evolução da interface prevista pelo modelo proposto por Guo, Hong e Kurtze mostrando a formação de dedos pontiagudos no sentido do movimento da interface.	22
2.2	Experimentos em célula de Hele-Shaw com surfactantes mostrando o surgimento de dedos com uma extremidade pontiaguda apontando no sentido oposto ao do movimento interfacial.	22
2.3	Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw radial.	24
2.4	Diagrama esquemático ilustrando o ângulo de contato θ_c medido entre o menisco (considerado circular) e as placas da célula, onde o fluido da direita está sendo deslocado pelo da esquerda.	27
2.5	Diagrama de fase de estabilidade mostrando as curvas de estabilidade (linhas pretas sólidas) para os casos (a) $A = 1$, $\theta_c = 0$, and (b) $A = -1$, $\theta_c = \pi$. As áreas em cinza claro mostram as regiões estáveis do diagrama, enquanto a área em cinza escuro indica uma região instável. Aqui, utilizamos valores típicos para os parâmetros físicos usados em experimentos de fluxo radial: $\sigma_0 = 63$ dina/cm, and $b = 0.15$ cm. Além disso, a viscosidade do fluido mais viscoso é 5.21 g/(cm s), enquanto o outro tem viscosidade desprezível.	34
2.6	Inibição dos dedos. Instantâneos da evolução interfacial, plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.5$ s) mostrando a interação entre dois modos cossenos $n = 4$ e $2n = 8$, quando $A = 1$ (o fluido interno é menos viscoso), $\theta_c = 0$ e $Q = 2\pi$ cm ² /s. Três valores do parâmetro β são usados: (a) 0, (b) 1, and (c) 4 dina. Aqui, $0 \leq t \leq 10$ s. Claramente, o surgimento de instabilidades na interface (incluindo o fenômeno das bifurcações) é observado em (a), mas crescentemente suprimido em (b) e (c).	36
2.7	Estimulando a formação de instabilidades. Instantâneos da evolução interfacial, plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.5$ s) mostrando a interação entre dois modos cossenos $n = 4$ e $2n = 8$, quando $A = -1$ (o fluido interno é mais viscoso), $\theta_c = \pi$ e $Q = \pi/5$ cm ² /s. Três valores do parâmetro β são usados: (a) 0, (b) 2.82, and (c) 2.87 dina. Aqui, $0 \leq t \leq 10$ s. A clássica situação estável é retratada em (a), enquanto em (b) e (c) uma interface cada vez mais deformada é observada.	37

LISTA DE FIGURAS

- 2.8 Instantâneos da evolução interfacial, plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.5$ s) mostrando a interação entre dois modos cossenos $n = 4$ e $2n = 8$, quando $A = -1$ (o fluido interno é mais viscoso) e $\theta_c = \pi$ para $Q = 3\pi/2$ cm²/s e $\beta = 4.70$ dina. Depois de um período inicial de desestabilização, a interface tende a recircularizar no decorrer do tempo para valores elevados de Q tais como este. 38
- 3.1 Padrão típico obtido em experimento com célula de Hele-Shaw girante. Neste caso, o fluido interno é óleo de silicone e ar o externo. 42
- 3.2 Instantâneos do processo de formação de padrão no limite de baixo contraste de viscosidade retirados de um experimento com uma célula de Hele-Shaw girante. 43
- 3.3 Simulações numéricas da evolução temporal de uma gota circular em regime de baixo contraste de viscosidade ($A = 0.4$) numa célula de Hele-Shaw girante. 43
- 3.4 Visão em perspectiva de uma célula de Hele-Shaw girante. As placas da célula estão separadas por uma distância b e rotaciona com velocidade Ω em torno de um eixo perpendicular z que passa pelo seu centro. O fluido mais viscoso e mais denso tem inicialmente raio R e ocupa a região sombreada. Perturbações interfaciais são denotadas por ζ , o ângulo azimutal por θ e a tensão superficial variável entre os fluidos por σ . 44
- 3.5 Inibição de instabilidades estimuladas por força centrífuga a nível linear. Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função do número de modos n para diferentes valores de $\mathfrak{B}$. O número típico de dedos emergentes na interface, dado pelo valor de n que maximiza a função $\lambda(n)$ (n_{max}) cai consideravelmente a medida que o parâmetro de variação da tensão superficial $\mathfrak{B}$ cresce. Os valores calculados para o número de dedos foi $n_{max} \approx 17, 11, 6$ e 1 , respectivamente. 50
- 3.6 Inibição de instabilidades centrífugas em estágios fracamente não lineares. Instantâneos da evolução interfacial plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.062$) para a interação entre o modo fundamental e seu sub-harmônico. Diferentes valores do parâmetro de tensão superficial variável $\mathfrak{B}$: (a) 0 , (b) -3.4×10^{-3} , and (c) -1.7×10^{-2} . As curvas tracejadas são mostradas para guiar o olho do leitor em relação à competição dos dedos. As inserções retangulares ilustram visões de perto das regiões delimitadas pelas linhas tracejadas e cores mais escuras indicam tempos mais avançados. 53
- 3.7 Figuras referentes ao padrões ilustrados na Fig. 3.6 onde os mesmo valores para os parâmetros físicos foram usados. A Fig. 3.7(b) mostra a diferença entre posições interfaciais da ponta dos dedos entrantes do fluido externo $\Delta \mathcal{R}$ (veja Eq. (3.27) e Fig. 3.7) em função do tempo, para diferentes valores do parâmetro de controle $\mathfrak{B}$. É fácil observar a significativa diminuição na competição entre os dedos ao introduzir os efeitos da tensão superficial dependente da curvatura. Aqui, $\tau = 15\Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo adimensional usado para plotar a Fig. 3.6. 54

Sumário

1	Introdução	11
1.1	O problema de Saffman-Taylor	11
1.2	A célula de Hele-Shaw radial	14
1.3	Resultados inesperados classicamente	17
1.4	Cenas dos próximos capítulos - Esboço geral	19
2	Manipulando a instabilidade de Saffman-Taylor	21
2.1	Introdução	21
2.2	Equacionando o problema	23
2.2.1	Lei de Darcy	23
2.2.2	As condições de contorno	27
2.2.3	Teoria de modos acoplados	30
2.3	Manipulação da instabilidade	32
2.3.1	Análise Linear	32
2.3.2	Estágio fracamente não linear	35
2.4	Expandindo um pouco os horizontes	38
3	Controlando instabilidades estimuladas por rotação	41
3.1	Motivação e descrição física do sistema	41
3.2	Apresentação das equações	44
3.2.1	Lei de Darcy	44
3.2.2	Equação diferencial de modos acoplados	46
3.3	Controlando a instabilidade: regimes linear e fracamente não linear	49
3.3.1	Comportamento linear	49
3.3.2	Estágio fracamente não linear	51
4	Conclusões e perspectivas	56
A	Manipulation of the Saffman-Taylor instability: A curvature-dependent surface tension approach.	65
B	Control of centrifugal fingering via a variable interfacial tension approach	74

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 O problema de Saffman-Taylor

A natureza, em suas diversas formas, sempre gerou curiosidade e deslumbramento, não só em cientistas mas também em qualquer um que se disponha a dedicar um mínimo tempo em sua apreciação. Padrões naturais, belos e complexos, são gerados a todo instante, variando desde as incríveis formas de uma teia de aranha, passando por crescimento de colônias de bactérias, padrões encontrados em peles de animais, entre vários outros [1]. Surpreendentemente, estes fenômenos, aparentemente bem distintos, surgem de mecanismos similares, sendo sua produção fortemente influenciada pela dinâmica de interfaces divisoras de fases diferentes. Tais padrões exercem também grande importância em aplicações tecnológicas [2, 3]. O leitor pode se deleitar com alguns exemplos de formas e padrões naturais mostrados na Fig. 1.1. Um exemplo de dinâmica interfacial, no âmbito da hidrodinâmica [4], vem à tona quando observamos o movimento ao longo do tempo da interface entre dois fluidos (ver Fig. 1.2). Mais especificamente, os padrões formados na interface entre dois fluidos viscosos confinados em uma região espacialmente restrita, é o que conhecemos por instabilidade de Saffman-Taylor [5], na qual focalizaremos nossa atenção ao longo desta dissertação.

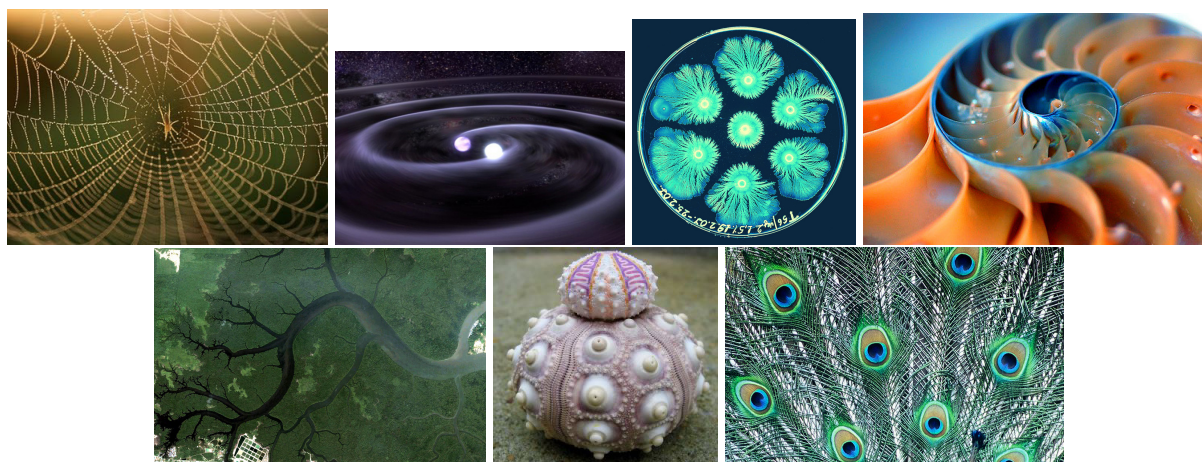


Figura 1.1 Alguns exemplos de padrões naturais.

Quando nos deparamos com um problema de dinâmica de fluidos, cujo objetivo é entender o fluxo de fluidos viscosos em ambientes tridimensionais, devemos ter bastante cuidado. Este tipo de análise, apesar de ser objeto de estudo a várias décadas, não é nem um pouco trivial e, por isso, ainda é um problema que, em várias situações, não se tem uma solução fechada até o



Figura 1.2 Exemplos de padrões naturais hidrodinâmicos. Da esquerda para a direita: padrão conhecido como rua de vórtice de Von Kármán, padrão deixado por uma gota ao cair na superfície de um fluido e fluxos nas proximidades de corpos rígidos.

presente momento. Voltemos para o final do século XIX, onde a situação se encontrava ainda mais obscura. Nesta época, já se tinha conhecimento que fluxos de fluidos viscosos deveriam ser regidos pela equação de Navier-Stokes, expressão que determina a velocidade e a pressão em qualquer ponto do fluxo, em qualquer instante de tempo. No entanto, infelizmente, do ponto de vista matemático, seu tratamento é acentuatadamente não trivial (para se ter uma idéia, até os tempos atuais não se sabe ao certo se tal equação tem solução para um contorno qualquer). Com isto em mãos, o engenheiro mecânico e automobilístico Henry Selby Hele-Shaw, na ocasião membro do corpo docente da University College Liverpool, tentava compreender o fluxo de água em torno de cascos de navios, até então sem sucesso devido à tal não trivialidade. No entanto, Hele-Shaw propôs uma maneira alternativa afim de simplificar sua análise. O engenheiro inglês confinou o fluido em questão em um longo canal estreito, permitindo o movimento dos fluidos, mas reduzindo a dimensionalidade do problema sem perder fenômenos multidimensionais, tais como a convecção, conseguindo abordar o problema de uma maneira realista e mais quantitativa. Neste momento, Hele-Shaw desenvolvia um aparato amplamente usado até os dias de hoje para estudar dinâmica de fluidos, cujo nome foi dado em sua homenagem: a renomada *célula de Hele-Shaw*. A figura abaixo, mostra um arranjo experimental característico para montagem de um experimento envolvendo o dispositivo que até hoje leva o nome do cientista.

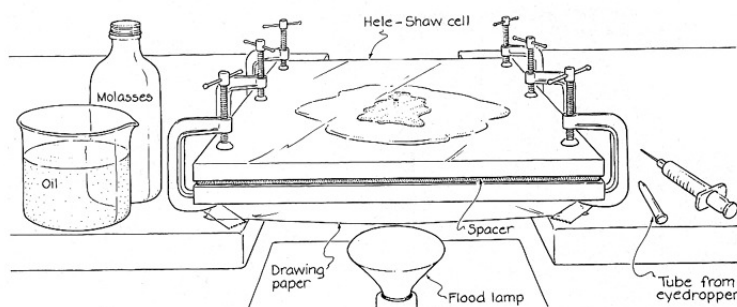


Figura 1.3 Diagrama esquemático de um possível arranjo experimental para realização de experimentos com uma célula de Hele-Shaw. Este não é um diagrama fidedigno da montagem original da célula, como proposta por Hele-Shaw. Apresentamos aqui uma versão mais moderna com alguns aperfeiçoamentos.

Daí para frente, o dispositivo começou a ser usado como forma simples, de demonstrar

visualmente como estes fluxos ocorrem na realidade, porém, sem distinção se pensarmos em termos de aplicações tecnológicas. Foi então que nos anos 50, a célula ressurgiu como uma novidade, agora sim, com grande aplicabilidade na indústria energética [6]. Esta reaparição, ocorreu quando, por volta de 1956, Sir Geoffrey Taylor, renomado físico britânico por seus trabalhos em mecânica de fluidos e ondulatória, juntamente com o jovem cientista Philip G. Saffman, ambos da universidade de Cambridge, reconheceram no aparato criado por Hele-Shaw, um potencial protótipo para modelar um problema em aberto da indústria petrolífera. No processo de extração de petróleo de meios porosos é comum bombear água contra o óleo a fim de retirar o material preso nas rochas. Um problema surge quando percebe-se que a água se propaga apresentando um certo tipo de deformações ramificadas, fazendo com que uma quantidade substancial de petróleo fique para trás. Para atacar este problema, Saffman e Taylor buscaram entender não somente a fenomenologia por trás da extração de petróleo, mas sim como a interface entre dois fluidos se comporta quando um desloca outro de maior viscosidade. Os dois cientistas britânicos, notaram que, neste caso, o fluido menos viscoso penetra o mais viscoso gerando uma interface perturbada, onde tais perturbações se assemelham a dedos, por isso, este fenômeno ficou conhecido como instabilidade de Saffman-Taylor ou *viscous fingering*. Esta nova instabilidade é caracterizada pela desestabilização da interface divisora dos fluidos devido à diferença de viscosidade entre eles. Por outro lado, se um fluido é deslocado por outro de maior viscosidade uma situação estável toma conta do cenário, e a interface fluido-fluido evolui sem apresentar nenhuma protuberância.

A partir desta descoberta, a célula de Hele-Shaw vem sendo usada muito frequentemente como um dispositivo elegante para o estudo de instabilidades hidrodinâmicas. As formas mais comuns da célula são as chamadas geometrias radial [7] e retangular [5]. Em ambas as geometrias, a evolução interfacial é caracterizada inicialmente por pequenas perturbações e pode ser descrita com base nas previsões da teoria linear [5]. Avançando um pouco no tempo, percebe-se um crescimento nas deformações, gerado pelo acoplamento entre modos instáveis e a teoria linear não prevê mais com sucesso a morfologia da interface. Neste momento, faz-se necessário o uso de uma teoria fracamente não linear [8]. Evoluindo ainda mais, o sistema chega a um estado final completamente dominado por efeitos fortemente não lineares, caracterizado por uma estrutura parecida com "dedos". Por isso, chama-se comumente a estrutura morfológica da interface deformada de *dedos viscosos*.

Na geometria retangular, o fluido menos viscoso é injetado contra o mais viscoso na direção ao longo da célula, como mostrado na Fig. 1.4. Neste caso, quando a diferença de viscosidade entre os fluidos é máxima e os fluidos são confinados em uma célula extremamente estreita (canal fino), observa-se que um dedo cresce dominantemente, em relação aos outros, gerando um estado, de certa maneira, "estacionário". A palavra estacionário, aqui, significa que esta estrutura, de apenas um dedo dominante, é conservada a partir do momento que é atingida. Porém, o comprimento do dedo não se conserva, crescendo no tempo, devido a fluido está sendo injetado continuamente no sistema. Esta estrutura é ilustrada na Fig. 1.5. Nela, podemos ver, da esquerda para a direita, a evolução temporal da interface, em um experimento realizado por Saffman e Taylor em [5], usando dois fluidos (ar e glicerina) cuja diferença de viscosidade é muito elevada e a célula usada é um canal fino. No início da dinâmica, percebemos a existência de alguns dedos, mas a medida que o tempo passa, a diferença elevada na viscosidade leva à

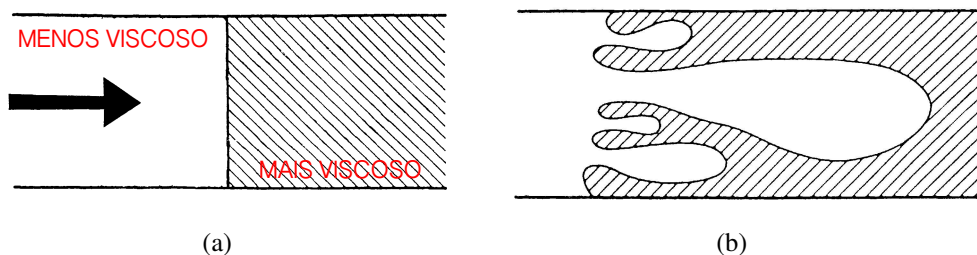


Figura 1.4 Diagrama esquemático das instabilidades na célula de Hele-Shaw retangular. Em (a), está ilustrado o início da dinâmica, enquanto ainda não observa-se deformações interfaciais. Já em (b), podemos ver um padrão típico deste tipo de sistema, onde o crescimento de um dos dedos é perceptivelmente favorecido.

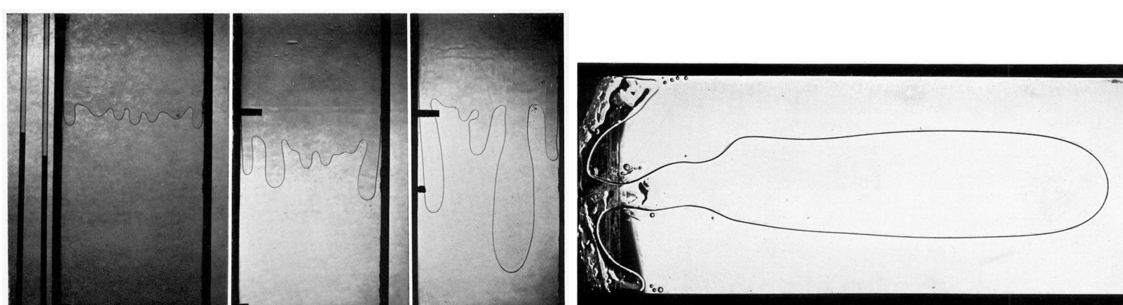


Figura 1.5 Padrão típico formado em uma célula de Hele-Shaw retangular muito estreita, onde os fluidos usados tem uma elevada diferença de viscosidade. Da esquerda para a direita o tempo avança, deixando perceptível o crescimento dominante de um dos dedos. A figura horizontal mostra um estágio bem avançado da dinâmica onde um dedo domina completamente. Figura retirada da Ref. [5], onde ar empurra glicerina.

competição entre os dedos, fazendo com que o crescimento de um deles se destaque, até que finalmente só reste um, atingindo então o que chamamos de estado estacionário da dinâmica. A geometria radial será tratada em mais detalhes na seção seguinte. Faremos isto pois ela nos acompanhará ao longo de toda a dissertação, de modo que será interessante ter bastante intimidade com a mesma.

1.2 A célula de Hele-Shaw radial

Dedicamos esta seção à descrição do que conhecemos por célula de Hele-Shaw radial, bem como à apresentação de suas características físicas básicas. A geometria radial vem sendo amplamente estudada, tanto no âmbito experimental [9–12], quanto teórico [8, 13–15]. Tal dispositivo é formado por duas placas paralelas separadas por uma estreita distância b , da ordem de milímetros, como mostra a Fig. 1.6. Usualmente, o fluido menos viscoso é injetado, a uma taxa constante, através de um pequeno orifício feito no centro da célula, deslocando o mais viscoso, que já havia sido colocado previamente no aparato. Desta forma, como discutido

na Seção 1.1, a instabilidade de Saffman-Taylor irá se manifestar. Os aspectos morfológicos serão discutidos em seguida, porém, antes devemos comentar duas diferenças básicas entre o sistema em questão e o problema de fluxo retangular. A primeira delas diz respeito à simetria em relação à interface. No caso radial, não se observam situações nas quais a interface é simétrica, isto porque há uma diferença entre as áreas interna e externa à mesma. A segunda tem relação com o estado estacionário, também comentando na seção anterior. Pois bem, ele aqui nunca é atingido. A evolução interfacial na célula radial é caracterizada por vários estágios de instabilidade, sempre evoluindo, seja na escala ou na morfologia, de maneira que este estágio estacionário, nunca é visto. Analisemos agora os vários estágios da dinâmica interfacial quando o ambiente é a célula de Hele-Shaw radial.

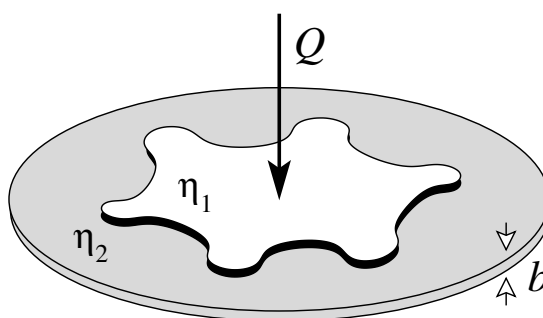


Figura 1.6 Representação esquemática da célula de Hele-Shaw radial com injeção. Usualmente a taxa com que se injeta fluido Q é constante, e os fluidos têm diferentes viscosidade η_1 e η_2 . Além disto, o pequeno espaçamento entre as placas da célula é denotado por b .

De início, preenchemos a célula com um fluido viscoso. Começamos então a injetar outro fluido, menos viscoso, a fim de deslocar o já presente na célula. Inicialmente, a interface que divide os fluidos é circular, definindo uma bolha. A medida que a bolha evolui, logo percebemos o surgimento de ondulações na interface e aí os dedos começam a emergir. Estes dedos crescem e esticam, formando estruturas com extremidades mais alargadas. Um fenômeno bem característico toma conta do cenário quando esperamos mais algum tempo: os dedos começam a se ramificar através de sucessivas bifurcações, onde os dedos maiores inibem o crescimento dos menores, resultando num padrão assimétrico.

Da mesma maneira que antes, estágios iniciais da dinâmica podem ser previstos por uma simples análise linear [7, 8]. No entanto, os fenômenos intrinsecamente não lineares citados a cima, tais como as bifurcações, não podem ser acessados por tal abordagem. Para isto, faz-se necessário o uso de uma teoria fracamente não linear [8], onde o acoplamento de modos fará surgir, nas previsões teóricas, efeitos como bifurcações e achatamento dos dedos. Em tempos muito avançados da dinâmica, estágios fortemente não lineares, a interface apresenta um padrão típico extremamente ramificado e não estacionário, como mostra a Fig. 1.7.

Algumas modificações do sistema radial com injeção já foram estudadas anteriormente [15, 18–22]. Em particular, uma versão alternativa, bastante interessante, da célula radial com injeção é a chamada célula girante [17]. Nesta versão, ao invés de injetarmos fluido no centro da célula, passamos agora um eixo vertical pelo orifício existente e permitimos que a mesma rotacione em torno dele. Esta simples modificação gera drásticas alterações fenomenológicas

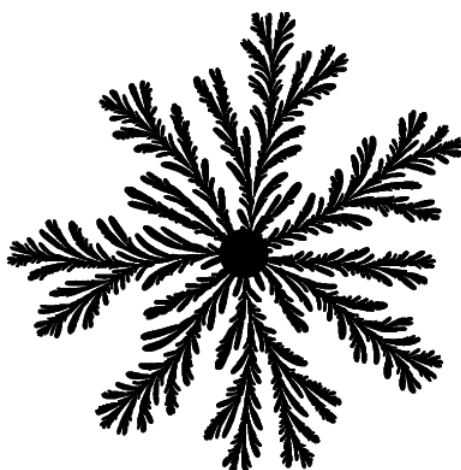


Figura 1.7 Padrão típico observado em experimentos numa célula de Hele-Shaw radial com injeção. Em estágios bastante avançados da dinâmica, a interface fluido-fluido apresenta uma estrutura bem ramificada e ainda em evolução. Figura retirada de [14]. Em ambas as figuras temos inicialmente uma gota circular.

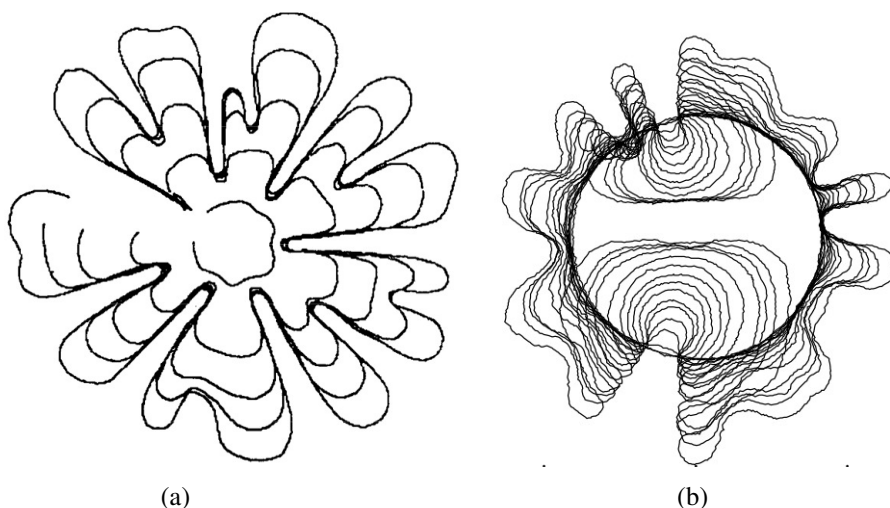


Figura 1.8 Séries temporais ilustrando padrões típicos observados em experimentos com célula de Hele-Shaw radial. Em (a), observa-se um padrão obtido através da injeção contínua de fluido (figura retirada de [16]). Já em (b), vemos um padrão típico observado quando rotacionamos a célula em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Retirada de experimentos realizados por [17]

na evolução interfacial. Tais diferenças serão discutidas em mais detalhes no Cap. 3, mas, a critério de ilustração inicial, vejamos a Fig. 1.8, onde são mostrados dois padrões típicos observados numa célula radial. Na Fig. 1.8(a), é mostrada uma série temporal de um padrão típico observado quando injetamos fluido no centro da célula, retirada da Ref. [16]. Por outro lado, na Fig. 1.8(b), é mostrada uma série temporal de um experimento para o problema girante, realizado por Carrilo em [17]. Deixemos para o Cap. 3 a explicitação das diferenças básicas entre os dois perfis, no intuito de permitir o leitor observar e imaginar consigo mesmo que diferenças

são essas.

1.3 Resultados inesperados classicamente

O problema da instabilidade de Saffman-Taylor tem sido estudado ativamente por mais de meio século, e constitui um arquétipo para diversos campos da ciência e tecnologia. Entre eles, estão processos como o de extração de petróleo [23] (já vimos que este processo influenciou diretamente a descoberta do fenômeno de *viscous fingering*), solidificação dendrítica [24], microdescargas em plasmas [25], mistura de fluidos [26] e biodinâmica de fragmentação celular [27]. Apesar desta vasta literatura abordando as características gerais, bem como a evolução da instabilidade de Saffman-Taylor, é importante ter em mente que, dependendo do interesse momentâneo, a formação das estruturas de dedos pode ser um fator positivo ou negativo. Já foi discutido neste capítulo que a aparição destas estruturas é um fator dominante para perdas na extração de petróleo de reservatórios [23]. Além disto, para processos de separação cromatográfica, o surgimento de deformações interfaciais pode ser extremamente prejudicial [28] para o êxito do método. Por outro lado, a existência da instabilidade é desejada quando tratamos de processos de mistura de fluidos em dispositivos de pequena escala [26]. Assim, dependendo da circunstância, ou interesse particular, uma situação instável (estável) da interface fluido-fluido pode caracterizar o cenário mais almejado. Neste contexto, é de crucial importância entender como manipular, de maneira precisa, o crescimento ou a repressão destas instabilidades interfaciais. Para o leitor não tão familiarizado aos tópicos multidisciplinares citados acima, ilustramos alguns deles na Fig. 1.9.

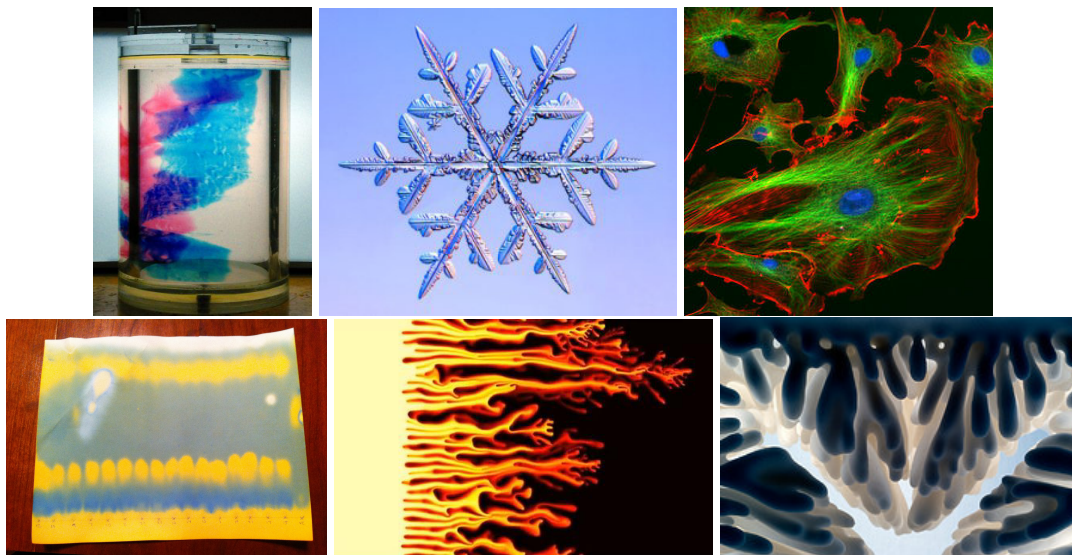


Figura 1.9 Exemplos de processos influenciados pela instabilidade de Saffman-Taylor. Começando na extrema esquerda superior e seguindo no sentido horário temos: mistura de fluidos em um recipiente, processo de formação de flocos de neve, citoesqueleto relacionado ao processo de fragmentação celular, separação cromatográfica, mistura de fluidos miscíveis em um canal e simulações em solidificação dendrítica.

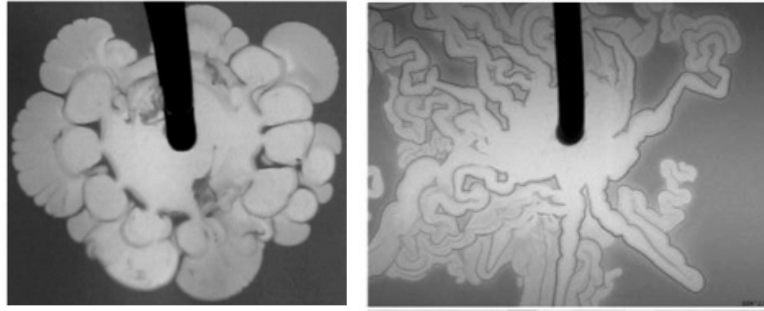


Figura 1.10 Ilustração dos padrões obtidos em [33]. Do lado esquerdo um padrão semelhante a cogumelos ("mushroom-shaped structures"), enquanto do lado direito, observamos dedos que lembram tentáculos ("tentaclelike fingers").

Devido a este duplo papel assumido pelas instabilidades hidrodinâmicas, manipular tais fenômenos vem atraindo cada vez mais entusiastas afim de estabilizar (desestabilizar) situações convencionalmente instáveis (estáveis). Algumas estratégias interessantes já foram propostas no intuito de deixar a interface mais estável [29–32]. Estudos teóricos [29, 30] e experimentais [30], mostram que usando uma taxa de injeção específica, não constante, podemos minimizar as perturbações interfaciais existentes num fluxo em uma célula de Hele-Shaw radial. Empregando este procedimento de controle por uma taxa de injeção dependente do tempo, as estruturas extremamente ramificadas, como mostrado na Fig. 1.7, dão lugar a uma interface totalmente circular, significando o desaparecimento completo das deformações interfaciais. Outro conhecido esquema de estabilização, proposto em [31], foi considerado em experimentos onde o aparato tradicional da célula de Hele-Shaw radial foi modificado, trocando a placa fixa superior por uma membrana flexível. Além destes, realizados para o caso radial, um estudo adicional acerca da célula retangular [32], demonstrou, através de uma análise de estabilidade linear e experimentos, que a introdução de um pequeno gradiente no espaçamento da célula, quebrando o paralelismo das placas, pode suprimir as instabilidades classicamente esperadas. Posteriormente, no Cap. 2, vamos comparar nosso resultado linear com o obtido na Ref. [32], e veremos que existe uma possível relação entre os dois métodos.

Por outro lado, outros grupos de pesquisa [33–43] focaram na perspectiva de estimular a formação de dedos através da desestabilização da situação classicamente estável, onde um fluido desloca outro menos viscoso ou de mesma viscosidade. Experimentos também foram realizados analisando reações químicas interfaciais de fluidos miscíveis de mesma viscosidade [33]. Neles, observou-se uma situação instável, contrariando as previsões clássicas, apresentando diferentes padrões da instabilidade, entre eles formas semelhantes a cogumelos e também dedos em forma de tentáculos (ver Fig. 1.10). Subsequentemente, um estudo teórico, realizado em [43], consegue prever tais morfologias considerando uma interface elástica, cuja rigidez varia com a curvatura interfacial. Além disto, sofisticadas simulações numéricas conseguiram detectar o surgimento de uma "instabilidade de Saffman-Taylor reversa" em problemas envolvendo fluidos miscíveis, a qual se relaciona a efeitos de difusão [34]. Por fim, experimentos recentes, ainda com fluidos miscíveis [35], reconfirmaram que reações químicas podem realmente desestabilizar situações classicamente estáveis.

Uma técnica particularmente interessante, que não envolve complicadas reações químicas na interface, explora a evolução da interface, quando um fluido desloca outro menos viscoso, em uma célula de Hele-Shaw retangular [36, 37]. Ao considerar que a tensão interfacial é modificada ao longo da interface devido à variações na curvatura da mesma, Guo, Hong e Kurtze [36, 37], mostraram que uma situação instável pode tomar conta do cenário. Uma discussão mais aprofundada sobre este exemplo peculiar será feita logo no início do próximo capítulo.

1.4 Cenas dos próximos capítulos - Esboço geral

Neste capítulo inicial, comentamos alguns dos diversos padrões formados na natureza, e discutimos, qualitativamente, os padrões formados no ambiente peculiar da célula de Hele-Shaw. Introduzimos o que hoje chama-se instabilidade de Saffman-Taylor, ou *viscous fingering*. Vimos que duas geometrias principais são abordadas em fluxos Hele-Shaw, a radial e a retangular. Morfologicamente, apresentamos as características básicas de ambas geometrias, deixando claro as diferenças existente entre elas. Em seguida, discutimos algumas técnicas existentes para estimular ou suprimir a formação dos chamados dedos viscosos, bem como a motivação para o fazer. Este será o ponto central desta dissertação. Nos capítulos restantes, vamos abordar novamente fluxos em célula de Hele-Shaw radial, onde vamos propor uma maneira simples e eficaz de gerar resultados diferentes dos esperados classicamente.

Neste trabalho, nosso principal objetivo é desenvolver uma teoria perturbativa, analítica, fracamente não linear, a fim de analisar estágios intermediários da dinâmica interfacial na célula radial. No capítulo que se segue, Cap. 2, inicialmente, iremos apresentar as equações básicas que regem o fluxo no ambiente efetivamente bidimensional da célula de Hele-Shaw e discutiremos as condições de contorno impostas aos fluidos, ponto importantíssimo de nossa análise. Em seguida, encararemos o problema da célula radial com injeção propondo um método [44] no qual a tensão superficial, corrigida por variações da curvatura interfacial, acoplada a efeitos tridimensionais relacionados ao ângulo de contato, é capaz de mudar completamente o cenário da clássica instabilidade de Saffman-Taylor. Nele, mostraremos como podemos gerar dedos viscosos na situação em que um fluido desloca outro de menor viscosidade, assim como suprimir sistematicamente, até fazer desaparecer totalmente, as deformações interfaciais para o caso inverso, classicamente instável. Isto será feito em duas etapas complementares. A primeira delas, descreve a dinâmica da interface fluido-fluido em estágios primordiais, previstos por uma análise de estabilidade linear. Por fim, confirmaremos as previsões lineares avançando a estágios fracamente não lineares, onde conseguimos prever as morfologias assumidas pela interface.

Posteriormente, no Cap. 3, entraremos no novo ambiente da célula girante. A princípio, faremos uma breve revisão literária dos resultados conhecidos deste sistema, e, em seguida apresentaremos nosso modelo teórico [45]. Nele, aplicaremos o mesmo método da tensão superficial variando com a curvatura da interface fluido-fluido, afim de controlar as deformações induzidas pela rotação. Novamente, nossa análise se dividirá entre abordagens via análise linear e fracamente não linear da dinâmica. Nesta segunda etapa, mostraremos a capacidade do método em combater o fenômeno, intrinsecamente não linear, da competição entre os dedos

entrantes, e, eventualmente, em estabilizar totalmente a interface.

Finalmente, no capítulo 4, faremos um apanhado geral dos resultados obtidos ao longo da dissertação, enfatizando qual seu papel em meio a toda literatura já existente. Apresentaremos também a continuação natural deste estudo, visando complementar, futuramente, questões ainda em aberto nesta classe de problemas. Felizmente, o estudo aqui desenvolvido gerou duas publicações no periódico *Physical Review E* [44,45], e poderão ser encontrados nos apêndices A e B da dissertação.

Manipulando a instabilidade de Saffman-Taylor

2.1 Introdução

No capítulo anterior, discutimos o que hoje conhecemos por instabilidade de Saffman-Taylor ou *viscous fingering*, bem como algumas técnicas utilizadas tanto para suprimir [29–32] quanto para estimular [33–41] a formação dos chamados dedos viscosos. Em particular, vimos que resultados diferentes ao encontrado por Saffman e Taylor em 1958 [5] podem ser obtidos se considerarmos uma tensão superficial variável ao longo da interface entre os fluidos.

Originalmente proposta por Guo, Hong e Kurtze [36, 37], uma modelagem simples que leva em conta esta variação na tensão superficial se baseia na hipótese de que ao adicionarmos um surfactante aos fluidos, as moléculas do mesmo iriam se distribuir ao longo da interface tendo, devido a uma curvatura não nula, seu empacotamento favorecido em algumas regiões. Este agrupamento não uniforme das moléculas seria a justificativa de termos uma tensão interfacial variável ao longo da fronteira divisora dos fluidos. Esta idéia básica do modelo está de acordo com experimentos realizados em célula de Hele-Shaw retangular com surfactantes [42].

Nos trabalhos publicados em 1992 e 1995 Guo *et al.* usaram uma célula de Hele-Shaw retangular para analisar a evolução da interface numa situação de *fluxo reverso*, ou seja, quando um fluido mais viscoso é injetado contra um de menor viscosidade. Usa-se esta expressão pois este fluxo ocorre, de certa maneira, no sentido oposto ao que tradicionalmente observa-se deformações interfaciais. Através de simulações numéricas os autores preveem, mesmo nesta situação usualmente estável, a formação de dedos pontiagudos apontando na direção do movimento (veja Fig. 2.1). Como a instabilidade surge devido à tensão superficial variável, os autores a denominaram "*surfactant driven instability*", baseados na motivação do surfactante ser o responsável por esta variação.

Na procura por evidências comprobatórias a respeito das previsões feitas por [36, 37], outros trabalhos teóricos e experimentais foram realizados pelas Refs. [38–41] nesta mesma classe de problemas, onde a tensão superficial varia ao longo da interface. Porém os resultados experimentais obtidos não foram totalmente exitosos. Apesar dos experimentos mostrarem o surgimento de dedos com uma parte frontal mais rombuda e uma calda pontiaguda, morfologia semelhante à prevista em [36, 37], a extremidade afiada aponta no sentido oposto ao movimento da interface, como mostrado na Fig. 2.2. Além disso, nos experimentos verifica-se a necessidade de um pré-molhamento da célula com uma camada de surfactante para estimular a formação dos padrões, fato não considerado em [36, 37]. Ou seja, pelos resultados obtidos em [38–41] aparentemente o modelo de tensão superficial variável proposto em [36, 37] não é capaz de capturar a morfologia exata dos dedos observados nos experimentos. No entanto, mesmo sem capturar a informação do sentido para onde apontam as extremidades afiadas dos

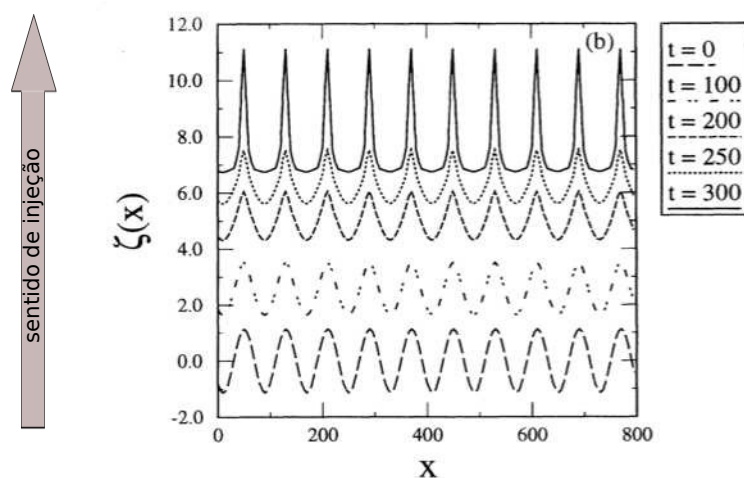


Figura 2.1 Evolução interfacial prevista pelo modelo proposto por Guo, Hong e Kurtze mostrando a formação de dedos pontiagudos no sentido do movimento da interface. Figura retirada da Ref. [37]

dedos, o modelo proposto em [36, 37] consegue descrever as principais características morfológicas observadas experimentalmente em [38–41]. Assim, temos muitas semelhanças entre os padrões encontrados em [36, 37] e os observados nas Refs. [38–41], mas o fato do modelo não capturar o sentido correto dos dedos bem como a exigência experimental do pré-molhamento da célula para o surgimento das deformações deixa em aberto se há realmente uma correspondência direta entre o modelo proposto em [36, 37] e a situação experimental estudada em [38–41].

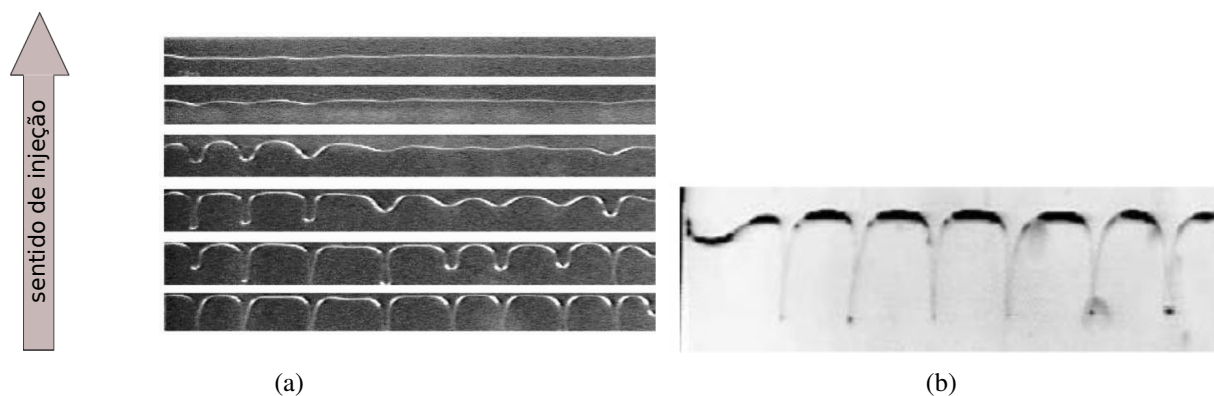


Figura 2.2 Experimentos em célula de Hele-Shaw com surfactantes mostrando o surgimento de dedos com uma extremidade pontiaguda apontando no sentido oposto ao do movimento interfacial. Figura (a) retirada de [39] e (b) de [41]

No capítulo anterior, vimos também que recentemente há uma crescente busca por métodos capazes de manipular a formação de dedos, estabilizando uma situação convencionalmente instável ou estimulando o crescimento de deformações no caso estável do fluxo reverso. Em seguida, mostramos que algumas técnicas já foram desenvolvidas neste aspecto em várias

configurações diferentes. Vale salientar neste ponto que a ênfase dos trabalhos realizados em [36–41] era a evolução morfológica da interface e não exatamente na possibilidade de controlar ou estimular a formação de dedos.

Neste capítulo iremos revisitar o modelo originalmente proposto por Guo, Hong e Kurtze [36, 37] onde a tensão superficial varia com a curvatura da interface e estenderemos sua aplicabilidade em alguns sentidos. Primeiramente, diferente dos trabalhos desenvolvidos em [36–41], focaremos na possibilidade de suprimir ou estimular a instabilidade de Saffman-Taylor propondo uma nova versão da condição de contorno de pressão, ou equação de Young-Laplace. Esta nova condição leva em conta o acoplamento entre a tensão superficial variável e efeitos tridimensionais (3D) relacionados ao ângulo de contato na interface. Outra diferença crucial deste trabalho é que ao invés de analisar o caso retangular, como em [36–41], utilizaremos o caso ainda inexplorado da célula de Hele-Shaw radial. Faremos isto analiticamente através de uma teoria de modos acoplados em segunda ordem, o que nos permite de maneira simples ter acesso à informações relevantes não só sobre a estabilidade do sistema, mas também sobre aspectos morfológicos desde os primeiros instantes da evolução, que obedecem a um regime linear, até estágios fracamente não-lineares.

2.2 Equacionando o problema

Antes de propor nossa manipulação é preciso obter as equações que governam o sistema em estudo. Faremos isto nesta presente seção. Faremos isto em três partes. Na primeira delas apresentaremos a famosa lei de Darcy. Em seguida, especificaremos o problema por duas condições de contorno na interface fluido-fluido e, por fim, mostraremos como descrevemos a interface em movimento por uma teoria perturbativa de modos acoplados até segunda ordem. Começamos pela lei de Darcy.

2.2.1 Lei de Darcy

A famosa lei de Darcy é a lei que governa a dinâmica de fluidos confinados em uma célula de Hele-Shaw. Por isso será o ponto de partida para desenvolvermos nossa análise linear e fracamente não-linear.

A lei de Darcy foi primeiro apresentada em 1856 quando o engenheiro Henry Darcy, motivado por um problema público da cidade de Dijon, França, estudava o fluxo de água em filtros de areia verticais e homogêneos [46]. Baseado em seus experimentos de fluxos estáveis, Darcy observou empiricamente que a velocidade do fluxo era proporcional aos gradientes de pressão aos quais o fluido estava submetido. Através do mecanismo de uma célula de Hele-Shaw é possível observar experimentalmente um análogo bidimensional do problema estudado por Darcy em 1956 e obter uma versão efetivamente bidimensional da lei por ele desenvolvida.

Considere então uma célula de Hele-Shaw de espaçamento constante, b , contendo dois fluidos imiscíveis, incompressíveis e viscosos como mostra a Fig.2.3. Sejam η_1 e η_2 as viscosidades dos fluidos interno e externo, respectivamente, e σ a tensão superficial entre os fluidos. O fluido 1 é injetado no fluido 2 a uma taxa constante Q representando a área coberta por unidade de tempo.

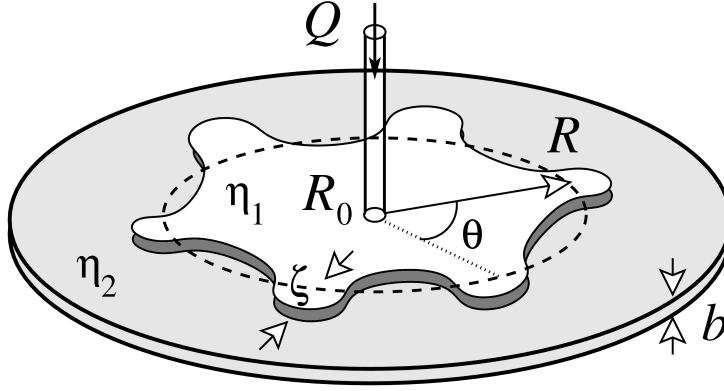


Figura 2.3 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw radial.

A equação da continuidade [47] expressa a condição de conservação da massa dos fluidos

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_j \mathbf{u}_j) = 0 \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{u}_j$ e ρ_j a velocidade tridimensional e a densidade para os fluidos $j = 1, 2$. Além disso, como os fluidos são incompressíveis, ρ_j é constante e uniforme logo, reduzimos a equação da continuidade a

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0. \quad (2.2)$$

Aplicando a equação de Navier-Stokes [47, 48], segunda lei de Newton para fluidos, é possível descrever o movimento dos mesmos. Se $d\mathbf{u}_j/dt$ é a aceleração de um elemento de fluido que se movimenta no espaço e $\mathbf{f}_j$ a resultante das forças providas da pressão hidrodinâmica e de estresses viscosos por unidade de volume, a segunda lei de Newton toma a seguinte forma

$$\rho_j \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \mathbf{f}_j. \quad (2.3)$$

Para dar continuidade à análise deveremos encontrar uma expressão para a densidade de força $\mathbf{f}_j$. A força que um elemento infinitesimal de superfície ds sente, devido à pressão hidrodinâmica p_j , é, por definição, $-p_j \hat{n} ds$, onde o sinal de menos indica que a força é exercida no elemento de superfície, portanto, no sentido contrário ao vetor normal $\hat{n}$ que aponta para fora da superfície S . Então, usando o teorema da divergência chegamos na seguinte expressão para a força associada à pressão hidrodinâmica

$$-\int_S p_j \hat{n} ds = -\int_V \nabla p_j dv. \quad (2.4)$$

Logo, a densidade de força que atua no elemento de fluido é dada por $\mathbf{f}_{p_j} = -\nabla p_j$. O fluido ainda está submetido às forças viscosas que estão relacionadas ao "atrito interno" devido à resistência do fluido em movimento a se deformar. Tais forças podem ser expressas através do tensor de estresses viscosos $\mathbf{T}_j$, sendo a densidade de forças viscosas expressa por $\mathbf{f}_{v_j} = \nabla \cdot \mathbf{T}_j$ [47, 48]. A relação entre o tensor de estresses viscosos e a velocidade do fluido é a seguinte

$$\mathbf{T}_j = \eta_j [\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T], \quad (2.5)$$

expressão conhecida como a *relação constitutiva para fluidos incompressíveis* [47] e η_j é a viscosidade dos fluidos $j = 1, 2$. Desta forma, tirando o divergente da Eq. (2.5) e reescrevendo a aceleração na Eq. (2.3) vem que

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j. \quad (2.6)$$

Onde o primeiro termo do lado direito na Eq. (2.6) representa a densidade de força devido ao gradiente de pressão e o segundo, proporcional à viscosidade, provém das forças de fricção interna entre os elementos do fluido. Já o lado esquerdo, corresponde à contribuições inerciais do fluido. Da mesma forma que no tratamento de um corpo rígido se o fluido estiver submetido a outros tipos de forças (e.g. gravitacional, centrífuga, magnética, Coriolis, etc) suas contribuições deveriam ser adequadamente incluídas no lado direito da Eq. (2.6), ou seja, na resultante das forças por unidade de volume.

Agora, em posse das Eqs. (2.6) e (2.2) podemos obter a lei de Darcy. Porém antes devemos fazer algumas considerações. Primeiramente, consideremos b a menor escala de comprimento do problema de forma que podemos abordar efetivamente o sistema como bidimensional e ainda garantimos que essa escala é pequena o suficiente para o fluxo na célula ser completamente determinado pelo balanço entre as forças viscosas e de pressão. Além disto, o fluxo deve assumir velocidades baixas para podermos desprezar, sem perda de generalidade, os termos inerciais na Eq. (2.6). Finalmente, vamos supor que a pressão p_j é aproximadamente constante na direção $\hat{z}$. Feitas estas considerações e tendo em mente a incompressibilidade do fluido, percebamos que a velocidade do fluido $\mathbf{u}_j$ deve variar muito mais rapidamente na direção z do que no plano $x - y$, uma vez que b é muito pequeno e, como ambas as placas estão em repouso, a velocidade do fluido deve ser nula nessas extremidades passando por valores não nulos entre as placas. Esta condição de contorno para a velocidade é conhecida por condição de não deslizamento ou "*no-slip boundary condition*". Sob tais condições obtemos as seguintes equações para as componentes de $\mathbf{u}_j$:

$$\eta_j \frac{\partial^2 u_{jx}}{\partial z^2} = \frac{\partial p_j}{\partial x} \quad (2.7)$$

e

$$\eta_j \frac{\partial^2 u_{jy}}{\partial z^2} = \frac{\partial p_j}{\partial y} \quad (2.8)$$

onde $u_{jz} = 0$ pois assumimos p_j independente de z . Utilizando a condição de não deslizamento sabemos que $\mathbf{u}_j(z = 0) = \mathbf{u}_j(z = b) = 0$, logo, podemos escrever as soluções para as Eqs. (2.7) e (2.8) na forma vetorial

$$\eta_j \mathbf{u}_j(x, y, z) = \frac{1}{2} z(z - b) \nabla p_j(x, y), \quad (2.9)$$

comumente chamado de perfil "parabólico" devido à sua dependência quadrática com z . Finalmente, para obter a equação para a velocidade média (efetivamente bidimensional) dos fluidos tiramos uma média transversal da Eq. (2.9) com relação à coordenada z , definida por

$$\mathbf{v}_j \equiv \frac{1}{b} \int_0^b \mathbf{u}_j(x, y, z) dz, \quad (2.10)$$

e então chegamos a

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j, \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(x, y)$ e $p_j = p_j(x, y)$ são a velocidade e pressão média com relação a z , respectivamente. Esta é a conhecida lei de Darcy, que representa a equação de movimento da interface fluido-fluido.

Pela lei de Darcy também podemos capturar outra informação importante sobre o fluxo em estudo: forças associadas ao gradiente da pressão média não exercem torque num elemento de fluido. Por esse motivo iremos considerar o fluxo irrotacional. No entanto, apesar de ser efetivamente irrotacional, o fluxo pode apresentar uma região de vorticidade não nula. Tal região é restrita à uma estreita "folha de vorticidade", conhecida como "vortex-sheet". Para fluxos em uma célula de Hele-Shaw esta vorticidade surge da descontinuidade das componentes tangenciais do campo de velocidade na interface divisora dos fluidos. Aqui nesta dissertação iremos focar apenas nestes fluxos irrotacionais, assim, o campo de velocidade deve satisfazer

$$\nabla \times \mathbf{v}_j = 0. \quad (2.12)$$

Com isto podemos escrever a velocidade como o gradiente de uma função escalar a qual chamaremos potencial de velocidade, dado por

$$\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j, \quad (2.13)$$

onde ϕ_j é o potencial de velocidade para os fluidos $j = 1, 2$. Podemos então agora, a partir das Eqs. (2.13) e (2.11), chegar numa nova lei de Darcy para os potenciais

$$\phi_j = \frac{b^2}{12\eta_j} p_j. \quad (2.14)$$

Tirando a média transversal da equação da continuidade, Eq. (2.2), concluímos que o potencial de velocidade deve satisfazer a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi_j = 0. \quad (2.15)$$

Agora, em posse das Eqs. (2.14) e (2.15), basta resolvê-las e a dinâmica dos fluidos estará totalmente determinada. No entanto, para solucionar a equação de Laplace é necessário saber as condições de contorno que especificam o problema. Neste aspecto, o sistema em questão não é trivial, uma vez que nosso objeto de estudo envolve um contorno, a interface fluido-fluido, de forma desconhecida e que se move ao longo do tempo. Este é o conhecido "*free boundary problem*" que, em geral, não possui solução analítica. As condições de contorno constituem uma parte essencial para nossa manipulação, de modo que serão abordadas em mais detalhes na próxima sessão.

Antes de prosseguir, vamos dar um pouco mais de atenção à lei de Darcy na tentativa de entender melhor a origem física da instabilidade de Saffman-Taylor. Por simplicidade, concentremo-nos no caso extremo em que $\eta_1 \ll \eta_2$. Assim, a lei de Darcy nos mostra que a velocidade não nula do fluxo dá origem a um gradiente de pressão no fluido 2 extremamente

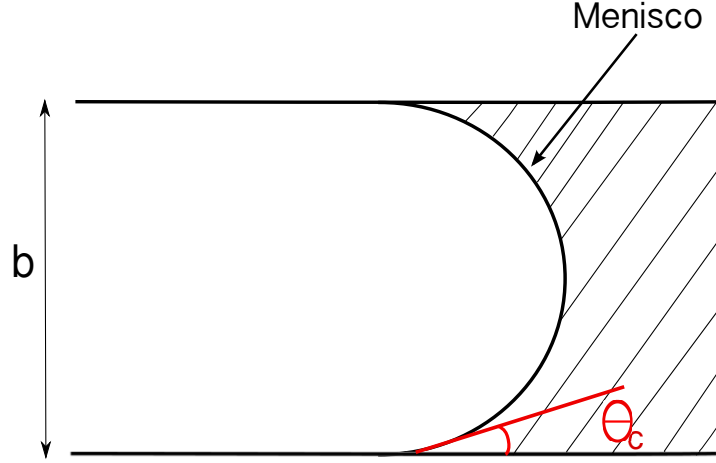


Figura 2.4 Diagrama esquemático ilustrando o ângulo de contato θ_c medido entre o menisco (considerado circular) e as placas da célula, onde o fluido da direita está sendo deslocado pelo da esquerda.

mais intenso que o gerado no fluido 1. Praticamente, como estamos analisando este caso extremo, podemos considerar a pressão no fluido 1 aproximadamente constante já que, pela lei de Darcy, $\nabla p_j \sim \eta_j$. Então, quando o fluido desloca o outro de maior viscosidade, uma perturbação na interface tende a aumentar já que o gradiente de pressão cresce no fluido mais viscoso. Já no fluxo reverso, perturbações não tendem a aumentar pois ao deslocar o fluido de menor viscosidade, o fluido mais viscoso se depara com uma espécie de barreira devido à pressão no fluido menos viscoso ser aproximadamente constante e uma situação estável é observada.

2.2.2 As condições de contorno

Neste momento, dedicaremos uma seção à apresentação das condições de contorno que especificam nosso problema. A primeira delas, a condição de contorno para a diferença de pressão, tem um papel absolutamente fundamental na nossa manipulação. No estudo de fluidos imiscíveis, observa-se que na interface divisora dos fluidos existe uma descontinuidade na pressão hidrodinâmica. Esta descontinuidade provém da tensão superficial σ existente entre os fluidos e também desta interface possuir uma curvatura não nula. A tensão superficial é produzida pelas forças microscópicas entre átomos e moléculas na interface fluido-fluido [49]. Expressamos a descontinuidade por uma versão modificada da conhecida condição de Young-Laplace

$$p_1 - p_2 = \sigma(\mathcal{K}) \mathcal{K}. \quad (2.16)$$

Esta expressão nos diz que a diferença de pressão entre os fluidos depende da curvatura média da interface fluido-fluido,

$$\mathcal{K} = \kappa + \kappa_{\perp}, \quad (2.17)$$

onde κ representa a curvatura média no plano da célula [50] e

$$\kappa_{\perp} = \frac{2}{b} \cos \theta_c \quad (2.18)$$

é a curvatura constante associada ao perfil da interface na direção perpendicular às placas da célula, definida por meio de θ_c , o ângulo de contato medido entre as placas e o menisco (considerado circular e de raio $b/2$) (ver Fig. 2.2.2).

Note, na Eq. (2.16), a existência de uma tensão superficial dependente da curvatura da interface fluido-fluido. Vamos considerar uma dependência da seguinte forma

$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma_0 + \beta\mathcal{K}, \quad (2.19)$$

onde nosso parâmetro de controle β , pode ser positivo, negativo ou nulo e σ_0 a tensão superficial para a interface plana [13, 36, 37]. Podemos perceber que este parâmetro de acoplamento entre a tensão superficial e a curvatura, tem unidade de força, já que, lembrando, uma tensão superficial representa uma força por unidade de comprimento. Assim, controlando o valor de β e de θ_c podemos aumentar ou diminuir a tensão superficial efetiva alterando assim a estabilidade da interface.

Neste ponto, é importante discutirmos como relacionar nosso parâmetro β às quantidades experimentais relevantes como, por exemplo, a concentração de surfactante, c . Quando adicionamos surfactantes aos fluidos a tensão superficial é alterada de acordo com a equação de estado de Langmuir linearizada [13, 51],

$$\sigma(c) = \gamma_0 - \alpha c, \quad (2.20)$$

com γ_0 sendo a tensão superficial para a interface sem surfactante ($c = 0$) e $\alpha = RT$, onde R denota a constante dos gases ideais e T a temperatura. A Eq. (2.20) é válida no limite em que $c \ll c_\infty$, onde c_∞ é a concentração de máximo empacotamento (ou concentração micelar crítica), concentração onde se inicia o processo de formação das micelas e acima da qual a adição de surfactante tem pouco efeito na tensão superficial da interface. No contexto do nosso problema [36, 37] podemos expandir a concentração até primeira ordem na curvatura como

$$c(\mathcal{K}) = c_0 - \frac{\partial c}{\partial \mathcal{K}} \mathcal{K}, \quad (2.21)$$

onde c_0 é a concentração de surfactante para a interface plana. A presença do sinal negativo no segundo termo da Eq. (2.21) é justificada pelo fato de ser entropicamente desfavorável agrupar moléculas de surfactante em regiões de curvatura positiva [36, 37]. Substituindo a Eq. (2.21) na Eq. (2.20) e comparando com (2.19) obtemos que

$$\sigma_0 = \gamma_0 - RTc_0, \text{ e } \beta = RT \frac{\partial c}{\partial \mathcal{K}}. \quad (2.22)$$

Estas expressões conectam σ_0 e β com quantidades experimentais relevantes do sistema físico.

Aqui, é importante enfatizar um fato importante visto na introdução deste capítulo. As previsões teóricas baseadas na variação da tensão interfacial com a curvatura, da forma sugerida pela Eq. (2.19), originalmente proposta por Guo *et al.* [36, 37], foram investigadas experimentalmente para o caso de fluxos em uma célula de Hele-Shaw retangular [38–41]. Nos experimentos, os padrões interfaciais observados foram bastante similares aos previstos teoricamente em [36, 37] quando analisaram o fluxo reverso de fluidos viscosos em uma célula retangular

pré molhada com uma camada de surfactante. Como vimos anteriormente, o grande problema em afirmar a correspondência exata entre teoria [36, 37] e experimento [38–41] diz respeito ao sentido do movimento dos dedos mais pontiagudos. Como mostra a Fig. 2.2, a teoria proposta em [36, 37] prevê o sentido oposto ao observado nos experimentos [38–41]. Sem esquecer este importante fato mas focando na forma geral dos padrões, é impossível negar a incrível semelhança entre os perfis previstos teoricamente e os reproduzidos nos experimentos. Por este motivo, acreditamos que o modelo introduzido nas Refs. [36, 37] não é apenas um exercício teórico mas poderia sim ser observado numa situação real, associado a um mecanismo físico diferente do estudado em [38–41]. Apesar de não termos nenhum registro de algum experimento análogo para a célula de Hele-Shaw radial, a implementação experimental do problema com injeção, caso abordado nesta dissertação, é tão plausível quanto as realizadas em [38–41] usando uma célula retangular.

Gostariamos também de ressaltar o papel fundamental da Eq. (2.18) em nossa manipulação. Esta equação expressa a contribuição da terceira dimensão, pois diz respeito à $\kappa_\perp$, além de introduzir à ação do ângulo de contato θ_c . O valor de θ_c varia com a natureza do fluido a ser deslocado. Um fluido é dito molhante (completa ou perfeitamente molhante) se o ângulo de contato medido é nulo, para fluidos não molhantes verifica-se que $\theta_c = \pi$. Diz-se ainda que o fluido é parcialmente molhante para casos intermediários, ou seja, $0 < \theta_c < \pi$, onde $\theta_c = \pi/2$ representa a situação ideal de assumirmos a interface fluido-fluido exatamente perpendicular às placas da célula na qual não há mais contribuições tridimensionais [52]. Este é um ponto onde nossa análise vai além das feitas nas Refs. [36, 37], uma vez que neles o termo de $\kappa_\perp$ não é considerado. Aqui, também não levaremos em conta efeitos de pré-molhamento da célula [53]. Faremos tal qual Ref. [32] ao propor um mecanismo de controle de instabilidades, onde os autores estão interessados em circunstâncias típicas de fluxos em célula de Hele-Shaw nas quais tais efeitos podem ser seguramente negligenciados.

Finalmente, para determinar totalmente a condição de contorno de pressão basta substituir as Eqs. (2.17)-(2.19) na Eq. (2.16), resultando em

$$p_1 - p_2 = \sigma_0 \kappa + \beta \kappa^2 + \frac{4\beta \kappa \cos \theta_c}{b}, \quad (2.23)$$

onde termos constantes já foram negligenciados. Notemos a estrita relação existente entre nossa tensão superficial variável $\sigma(\mathcal{K})$ e o termo 3D expresso pela Eq. (2.18): Se estivéssemos no caso clássico, onde a tensão superficial é constante ao longo da interface ($\beta = 0$), o termo 3D não afetaria o movimento da interface, já que se trata de um termo constante e portanto, seu gradiente é nulo. No entanto, existindo a dependência na tensão superficial com a curvatura ($\beta \neq 0$), o termo 3D acopla-se ao β não nulo e à curvatura κ que varia espacialmente no plano da célula, como mostra o último termo do lado direito da Eq. (2.23). Inspeccionando melhor este termo percebemos a dependência com o produto entre β e o termo do ângulo de contato $\cos \theta_c$, ambos livres para variar de sinal, deixando extremamente clara a importância deste acoplamento para a manipulação da instabilidade de Saffman-Taylor.

Para especificar totalmente o problema precisamos conhecer a segunda importante condição de contorno, conhecida por condição de contorno cinemática [8]. A fim de determiná-la, vamos descrever a interface $I(r, \theta, t)$ como

$$I(r, \theta, t) \equiv r - \mathcal{R}(\theta, t) = 0, \quad (2.24)$$

onde $\mathcal{R}$ é a posição da interface. Derivando esta equação em relação ao tempo chega-se a

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla)I = 0. \quad (2.25)$$

Escrevendo as velocidades em termo dos potenciais, Eq. (2.13), chegamos à chamada condição de contorno cinemática

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right)_{r=\mathcal{R}} - \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right)_{r=\mathcal{R}}. \quad (2.26)$$

Tendo em vista que o vetor normal à interface é definido por $\hat{n} = \nabla I / |\nabla I|$, a equação (2.26) significa dizer que a componente normal do campo de velocidade dos fluidos é contínua na interface

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_2. \quad (2.27)$$

Com a lei de Darcy (2.2.1) e as duas condições de contorno (2.16) e (2.26) em mãos, temos as ferramentas necessárias para dar continuidade à nossa abordagem fracamente não linear do problema.

2.2.3 Teoria de modos acoplados

No intuito de obter a equação diferencial para a evolução temporal da interface divisora dos fluidos seguiremos os passos tradicionais usados em estudos fracamente não lineares em célula de Hele-Shaw [7, 8, 11, 54].

Descrevemos a interface fluido-fluido perturbada como $\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, onde θ representa o ângulo azimutal e $R(t)$ é o raio não perturbado dependente do tempo

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + \frac{Qt}{\pi}} \quad (2.28)$$

com R_0 sendo o raio não perturbado em $t = 0$ (ver Fig. (2.2.1)). Completando a descrição da interface temos ainda $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$ denotando a perturbação interfacial em termos das amplitudes de Fourier $\zeta_n(t)$ e do número de onda azimutal discreto $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Nossa teoria mantém termos até segunda ordem em ζ , diferentemente da análise perturbativa executada por Guo *et al.* [36, 37] onde termos até terceira ordem são considerados. Além disto, para manter a área ocupada pelo fluido interno independente de ζ iremos incluir o modo $n = 0$. Usando a conservação da massa, este modo pode ser escrito em termos de outros modos de Fourier da seguinte maneira

$$\zeta_0 = -\frac{1}{2R} \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2. \quad (2.29)$$

Aplicando a lei de Darcy para ambos os fluidos obtemos a equação de movimento da interface

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}} + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}} = -\frac{b^2(p_1 - p_2)}{12(\eta_1 + \eta_2)} \Big|_{r=\mathcal{R}}, \quad (2.30)$$

onde o parâmetro adimensional A é o conhecido contraste de viscosidade, dado por

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (2.31)$$

Os potenciais de velocidade ϕ_j obedecem à equação de Laplace, Eq. (2.15). Solucionando esta equação chegamos nas seguintes expressões para os potenciais

$$\phi_j = \phi_j^0 + \sum_{n \neq 0} \phi_{jn} \left(\frac{R^{|n|}}{r^{|n|}} \right)^{(-1)^j} \exp(in\theta) \quad (2.32)$$

onde ϕ_j^0 vem da exigência do campo de velocidade longe da interface, ou seja, em $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow +\infty$, aproximar-se de um fluxo estacionário não perturbado. Desta forma, nestes limites o potencial de velocidade deve se aproximar de ϕ_j^0 dado por

$$\phi_j^0 = -\frac{Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{R}\right) + C_j, \quad (2.33)$$

onde C_j é uma constante independente de r e θ .

Devemos agora escrever os coeficientes de Fourier dos potenciais em termos das amplitudes da perturbação ζ_n . Para isto, usaremos a condição de contorno cinemática, Eq. (2.26). Substituindo nesta condição ϕ_j e $\mathcal{R}$, expandindo propriamente até segunda ordem em ζ e em seguida tirando a transformada de Fourier, obtemos as expressões para os potenciais em termos das amplitudes ζ_n

$$\phi_{1n}(t) = -\frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n - \frac{Q}{2\pi R|n|} \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left(\operatorname{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} \right) \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + \frac{Q}{2\pi R^2} \sum_{n' \neq 0} \operatorname{sgn}(nn') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \quad (2.34)$$

e

$$\phi_{2n}(t) = \frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n + \frac{Q}{2\pi R|n|} \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left(\operatorname{sgn}(nn') + \frac{1}{|n|} \right) \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + \frac{Q}{2\pi R^2} \sum_{n' \neq 0} \operatorname{sgn}(nn') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'}, \quad (2.35)$$

onde pontos a cima da grandeza representam derivadas temporais totais e a função $\operatorname{sgn} = \pm 1$ dependendo do seu argumento.

O lado direito da Eq. (2.30) está relacionado à condição de contorno de pressão derivada na Seção 2.2.2. Por este motivo, devemos expressar a curvatura no plano da célula κ em termos da perturbação. Em coordenadas polares, esta curvatura será dada por [55]

$$\kappa = \frac{\left[r^2 + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \right]}{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}}, \quad (2.36)$$

para encontrar seu valor na interface devemos avaliar $r = \mathcal{R}(\theta, t)$. Fazendo isto e guardando termos até segunda ordem em ζ , reescrevemos a curvatura como

$$\kappa \simeq \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left(\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{R^3} \left[\zeta^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right)^2 + 2\zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right]. \quad (2.37)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (2.37) na nova condição de pressão, Eq. (2.23), e em seguida a equação resultante na Eq. (2.30), tirando a transformada de Fourier e substituindo as expressões para os potenciais, dados pelas Eqs. (2.34) e (2.35) achamos, para $n \neq 0$, a equação de movimento para as amplitudes de perturbação $\zeta_n(t)$ [56]

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n')\zeta_{n'}\zeta_{n-n'} + G(n, n')\dot{\zeta}_{n'}\zeta_{n-n'} \right]. \quad (2.38)$$

Aqui,

$$\lambda(n) = \frac{Q}{2\pi R^2}(A|n| - 1) - \frac{\alpha}{R^3} \left[\sigma_0 + 2\beta \left(\frac{2\cos\theta_c}{b} + \frac{1}{R} \right) \right] |n|(n^2 - 1) \quad (2.39)$$

é a taxa de crescimento linear, $\alpha = b^2/[12(\eta_1 + \eta_2)]$ e A o contraste de viscosidade.

Os termos de segunda ordem dos modos acoplados são dados por

$$\begin{aligned} F(n, n') &= \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{QA}{2\pi R^2} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nn') \right] \right. \\ &\quad - \frac{\alpha}{R^3} \left(\sigma_0 + 4\beta \frac{\cos\theta_c}{b} \right) \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \\ &\quad \left. - \frac{\alpha\beta}{R^4} [3 - n'(5n' + n) + n'^2(n - n')^2] \right\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

e

$$G(n, n') = \frac{1}{R} \{ A|n|[1 - \text{sgn}(nn')] - 1 \}. \quad (2.41)$$

A relação de dispersão (2.39) nos dará importantes informações sobre a estabilidade linear da interface, enquanto os termos não lineares (2.40) e (2.41) permitem que tenhamos alguma informação analítica sobre a morfologia dos padrões emergentes em estágios fracamente não lineares [7, 8, 11, 54]. A análise destes termos será assunto da próxima seção, mas antes gostaríamos de ressaltar que os valores a serem usados para as quantidades físicas relevantes do sistema estão consistentes com valores típicos usados em experimentos com células de Hele-Shaw radial [7, 8, 11, 12].

2.3 Manipulação da instabilidade

2.3.1 Análise Linear

Observando a Eq. (2.39) já nos deparamos com uma diferença notável entre os resultados obtidos nas Refs. [36, 37] e os nossos. Aqui, observamos efeitos da tensão superficial variável já a nível linear. Fato importantíssimo já que pode nos dar, por uma simples análise linear, informações muito relevantes sobre o papel desta tensão superficial dependente da curvatura interfacial na estabilidade da interface. Esta contribuição linear tem origem no acoplamento

entre esta tensão superficial e a curvatura perpendicular ao plano da célula, por isso ressaltamos várias vezes a importância da consideração deste termo na nossa manipulação.

Para começar, vamos focar no caso usual da configuração de maior instabilidade onde um fluido, não-molhante, desloca outro de maior viscosidade e perfeitamente molhante, num fluxo gerado por injeção ($Q > 0$). Vamos analisar o caso extremo onde a viscosidade do fluido 2 é muito maior que a do fluido 1, isto nos leva a um contraste de viscosidade $A = 1$. Além disto, lembrando das considerações feitas na Seção (2.2.2), esta configuração esta associada a um ângulo de contato $\theta_c = 0$ ($\cos \theta_c = 1$). Neste caso, o primeiro termo da taxa de crescimento, o termo de injeção, é desestabilizante, enquanto o segundo, de tensão superficial pode contribuir de maneira a desestabilizar ou estabilizar a interface dependendo do sinal do parâmetro β . Claramente, para $\beta = 0$, a relação de dispersão se reduz aos resultados já bem conhecidos [7, 8, 11] uma vez que isto representaria uma tensão superficial constante na interface fluido-fluido. Para $\beta < 0$ este termo iria ajudar na desestabilização da interface. Porém, como estamos interessados em manipular a instabilidade já conhecida, será mais interessante observar o que acontece quando consideramos $\beta > 0$ e aí o termo em questão se torna estabilizante. Uma possível dúvida sobre esta análise surge quando olhamos com mais cuidado o termo de tensão superficial na Eq. (2.39): $-\left[\sigma_0 + 2\beta \left(\frac{2\cos \theta_c}{b} + \frac{1}{R}\right)\right]$. No entanto, lembrando que b é a menor escala de comprimento do problema, temos, $b \ll R$, logo, a contribuição na tensão superficial associada ao ângulo de contato ($\sim \beta/b$) realiza um papel dominante na estabilidade do sistema.

Uma maneira bastante útil e esclarecedora de organizar os resultados importantes obtidos através da análise linear é plotar um "diagrama de fase" de estabilidade para o sistema. Uma maneira de fazê-lo é considerar as curvas de estabilidade, definidas como as curvas onde $\lambda(n) = 0$. Igualando a Eq. (2.39) a zero e negligenciando o termo proporcional a β/R nós obtemos

$$QR = \frac{2\pi\alpha|n|(n^2 - 1)}{A|n| - 1} \left[\sigma_0 + \frac{4\beta \cos \theta_c}{b} \right]. \quad (2.42)$$

Usamos a Eq. (2.42) para plotar o diagrama de fase no espaço de parâmetros $QR - \beta$ mostrado, para esta situação, na Fig. 2.4(a). Antes de analisar o diagrama propriamente dito, notemos a conveniência em expressá-lo em termos do parâmetro QR (taxa de injeção multiplicada pelo raio não perturbado da interface em movimento). Talvez o leitor não tenha notado, mas a dependência explícita de $\lambda(n)$ com raio $R(t)$, faz com que a relação dependa também do tempo. Então, as curvas de estabilidade também deveriam depender. Aí é onde entra a importância na escolha adequada do espaço de parâmetros. A Eq. (2.42) nos mostra que QR depende apenas do modo de Fourier n , fazendo o diagrama proposto ser válido para qualquer valor de R ou, equivalentemente, qualquer intervalo de tempo. Dito isto, voltemos nossa atenção para a Fig. 2.4(a). As curvas de estabilidade para cada modo de Fourier são mostradas em linhas pretas sólidas, determinando quando cada modo se torna instável. A curva divisora para o modo $n = 2$ separa a região instável da estável do diagrama, nele mostrada em cinza claro. Com base neste diagrama, nota-se que para cada valor específico de QR se aumentarmos suficiente o valor de β passamos a fronteira da região instável para a estável. Ou seja, escolhendo os valores apropriados de QR e β podemos controlar a situação instável da instabilidade de Saffman-Taylor classicamente observada para esses valores de $A = 1$, $\theta_c = 0$ e $\beta = 0$.

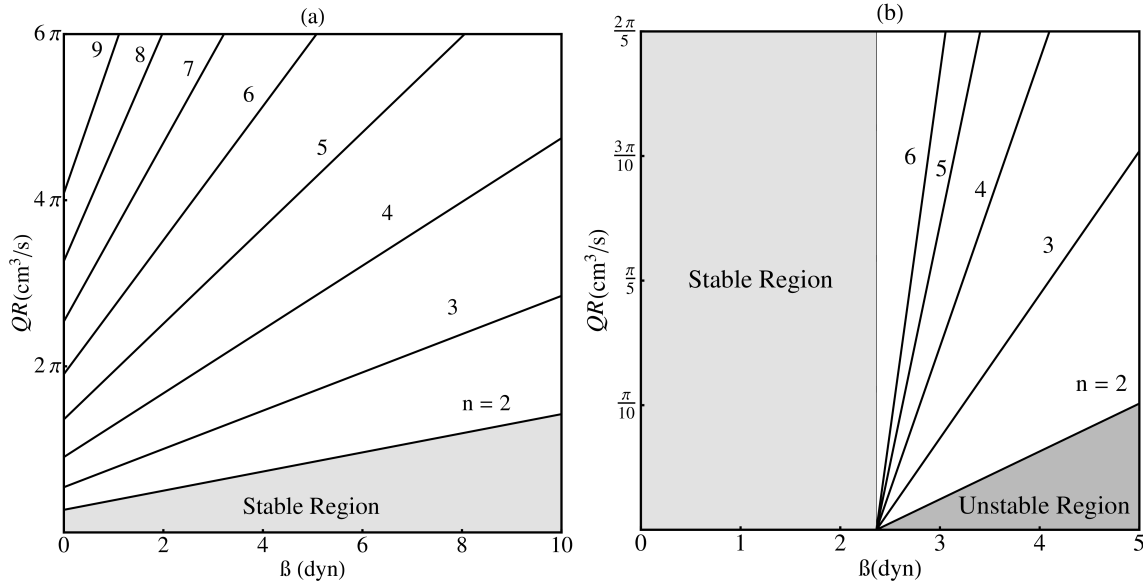


Figura 2.5 Diagrama de fase de estabilidade mostrando as curvas de estabilidade (linhas pretas sólidas) para os casos (a) $A = 1, \theta_c = 0$, and (b) $A = -1, \theta_c = \pi$. As áreas em cinza claro mostram as regiões estáveis do diagrama, enquanto a área em cinza escuro indica uma região instável. Aqui, utilizamos valores típicos para os parâmetros físicos usados em experimentos de fluxo radial : $\sigma_0 = 63$ dina/cm, and $b = 0.15$ cm. Além disso, a viscosidade do fluido mais viscoso é 5.21 g/(cm s), enquanto o outro tem viscosidade desprezível.

Voltando agora as atenções para a situação classicamente estável do fluxo reverso, onde o fluido perfeitamente molhante empurra outro menos viscoso não-molhante. Para este caso os parâmetros assumem os seguintes valores: $A = -1$ e $\theta_c = \pi$. Com o cuidado necessário é possível perceber que, semelhantemente ao caso anterior, dependendo do valor de β , o termo de tensão superficial realiza um duplo papel. Com ($\beta < 0$) nada surpreendente acontece, uma vez que isto só estabilizaria mais o sistema. Por outro lado, se considerarmos ($\beta > 0$) o acoplamento entre este parâmetro e o ângulo de contato pode conduzir o sistema a situações instáveis. Novamente iremos focar na situação mais intrigante, onde a introdução de β leva a resultados inesperados, logo, analisaremos os efeitos na evolução da interface quando introduzimos um $\beta > 0$. Lembrando que continua válida nossa discussão sobre o termo dominante da parte de tensão superficial na relação de dispersão (2.39) mas agora, o termo de injeção, por envolver o contraste de viscosidade, torna-se estabilizante. Aqui, também utilizamos o diagrama de estabilidade para tirar conclusões a nível linear. Examinando a Fig. 2.4(b) verifica-se a possibilidade de desestabilização da interface por uma escolha adequada dos parâmetros QR e β . A região de instabilidade é mostrada em cinza escuro. Diferente do caso tratado anteriormente, com $A = 1$, o diagrama para situação agora em análise mostra todas as curvas de estabilidade convergindo para um valor crítico de $\beta = \beta_c = \sigma_0 b/4$ abaixo do qual a interface permanece estável para qualquer valor de QR . Este β_c é facilmente obtido ao tomarmos $QR = 0$ em (2.42).

Para checar os resultados obtidos via análise linear, acerca da estabilização ou desestabilização da interface fluido-fluido quando introduzimos uma dependência na tensão superficial

com a curvatura, onde $\beta > 0$, avançaremos nossa abordagem a estados fracamente não lineares da evolução interfacial.

2.3.2 Estágio fracamente não linear

As contribuições fracamente não lineares na nossa teoria vem do acoplamento entre modos de Fourier de diferentes amplitudes de perturbação, como mostra a Eq. (2.38). Por simplicidade vamos reescrever a equação de modos acoplados, Eq. (2.39), em termos dos modos cossenos $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$. E, no intuito de capturar a morfologia desejada do sistema, consideraremos o acoplamento entre dois modos, um modo fundamental n e o primeiro harmônico associado $2n$. Isto é feito pois, em estágios fracamente não lineares, este simples acoplamento é capaz de ilustrar o fenômeno da bifurcação dos dedos para o caso clássico onde $\beta = 0$ [8]. Desta forma, obtemos as seguintes expressões para as amplitudes do modo fundamental e sub-harmônico

$$\dot{a}_{2n} = \lambda(2n) a_{2n} + \frac{1}{2} [F(2n, n) + \lambda(n) G(2n, n)] a_n^2, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= \lambda(n) a_n + \frac{1}{2} \{ [F(n, 2n) + \lambda(2n) G(n, 2n)] \\ &+ [F(n, -n) + \lambda(n) G(n, -n)] \} a_n a_{2n}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Mantendo sempre nossa expansão até segunda ordem na perturbação, as equações (2.43) e (2.44) já foram escritas substituindo termos de derivada temporal como $\dot{a}_n$ por $\lambda(n)a_n$. Resolvendo este sistema de equações diferenciais não lineares acopladas (2.43) e (2.44), chegamos à evolução temporal da interface fluido-fluido.

Novamente vamos abordar primeiro o caso tradicionalmente instável, onde $A = 1$ e $\theta_c = 0$. A Fig. 2.5 mostra a evolução da interface considerando a interação entre dois representativos modos cossenos com $n = 4$ e $2n = 8$, para três valores diferentes de $\beta = 0, 1$ dina e 4 dina. Os valores das outras grandezas físicas envolvidas são os seguintes: $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 5.21$ g/(cm s), $\sigma_0 = 63$ dina/cm, $Q = 2\pi$ cm²/s, $b = 0.15$ cm, $R_0 = 0.5$ cm e $0 \leq t \leq 10$ s. Sabemos da necessidade em expressar as condições iniciais das amplitudes, a_n e a_{2n} em $t = 0$ s, para completar a especificação problema. São elas: $a_n = 0.025$ cm e $a_{2n} = 0$.

Examinando a Fig 2.6(a), entendemos como a interface evolui quando a tensão superficial não depende da curvatura, $\beta = 0$. A estrutura da interface é marcada por dedos largos com extremidades rombudas. Claramente é possível observar em tempos avançados os dedos se dividindo, mostrando a tendência de tais estruturas em bifurcar a medida que evoluímos no tempo. Isto está de acordo com resultados clássicos em célula de Hele-Shaw radial [7,8,11,12]. Este característico cenário instável é significativamente modificado quando consideramos a ação de valores crescentes de $\beta > 0$. Na Fig. Fig 2.6(b), para $\beta = 1$ dina, vemos uma interface inicial praticamente circular evoluindo como uma estrutura de 4 dedos. Para tempos mais avançados da análise, o padrão resultante ainda é constituído de 4 dedos simétricos. Comparando as Figs. 2.6(a) e 2.6(b) percebemos bem a diferença dos dois casos no que diz respeito à bifurcação dos dedos. Em 2.6(a) é clara a tendência das estruturas em bifurcar pela divisão dos dedos, chegando a ver o início deste efeito. Já a Fig 2.6(b) não mostra qualquer mínima divisão dos

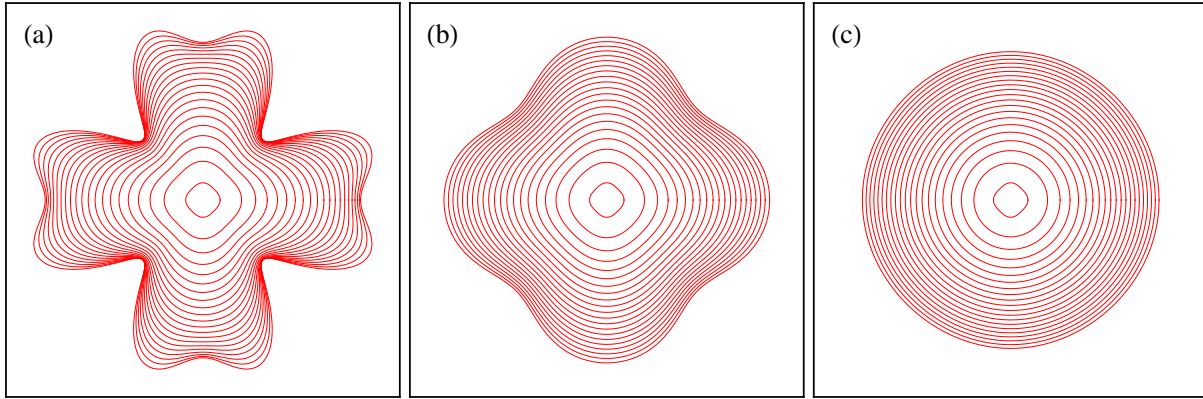


Figura 2.6 Inibição dos dedos. Instantâneos da evolução interfacial, plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.5$ s) mostrando a interação entre dois modos cossenos $n = 4$ e $2n = 8$, quando $A = 1$ (o fluido interno é menos viscoso), $\theta_c = 0$ e $Q = 2\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Três valores do parâmetro β são usados: (a) 0, (b) 1, and (c) 4 dina. Aqui, $0 \leq t \leq 10$ s. Claramente, o surgimento de instabilidades na interface (incluindo o fenômeno das bifurcações) é observado em (a), mas crescentemente suprimido em (b) e (c).

dedos, conseqüentemente, qualquer tendência dos dedos em bifurcar, indicando a capacidade do modelo em deixar o sistema menos instável. No entanto, mesmo assim, a situação mostrada em 2.6(b) é suficientemente deformada, caracterizando ainda uma situação instável para a interface. Uma mudança mais dramática é perceptível quando olhamos para a Fig 2.6(c), onde a evolução interfacial é plotada usando $\beta = 4$ dina. Neste caso, fica evidente a capacidade do modelo em suprimir completamente a formação dos dedos, pois o que a figura mostra é a evolução de interfaces perfeitamente circulares, concêntricas.

Prosseguindo nossa manipulação, vejamos agora a situação convencionalmente mais estável do fluxo reverso, na qual um fluido perfeitamente molhante é injetado ($Q > 0$) sobre outro menos viscoso, não-molhante. Lembre-se da mudança nos parâmetros relevantes para: $A = -1$ ($\eta_1 = 5.21 \text{ g}/(\text{cm s})$ e $\eta_2 = 0$) e $\theta_c = \pi$. O restante das grandezas físicas e condições iniciais para as amplitudes dos modos são as mesmas usadas na Fig. 2.6. Mostraremos a capacidade do modelo proposto em estimular o surgimento de instabilidades mesmo nesse caso bastante estável classicamente. Para verificar esta capacidade, apresentamos simulações fracamente não lineares do sistema na Fig. 2.7. Quando $\beta = 0$ e $Q = \pi/5 \text{ cm}^2/\text{s}$ a interface evolui estavelmente como círculos perfeitos, assim como podemos ver na Fig. 2.7(a), como deveria ser. Resultados inesperados surgem quando permitimos a tensão superficial variar ao longo da interface. Mantendo a taxa de injeção constante ($Q = \pi/5$) e aumentando sistematicamente o valor de β chegamos numa situação crítica quando este parâmetro atinge o valor $\beta = 2.82$ dina, acima do qual o sistema entra em um regime instável. Para este valor crítico observamos a formação de dedos bem suaves, Fig. 2.6(b). Este valor crítico de β pode ser estimado pela teoria linear, usando a Eq. (2.39), e definindo $\lambda(n) = 0$. Aumentando ainda mais o valor de β para 2.87 dina a interface apresenta uma mudança significativa em sua estrutura. Como podemos ver na Fig. 2.6(c), para este acoplamento de β e θ_c dedos significativos surgem desestabilizando de vez o sistema, formando uma estrutura tipo estrela. Vale a pena notar a diferença entre este

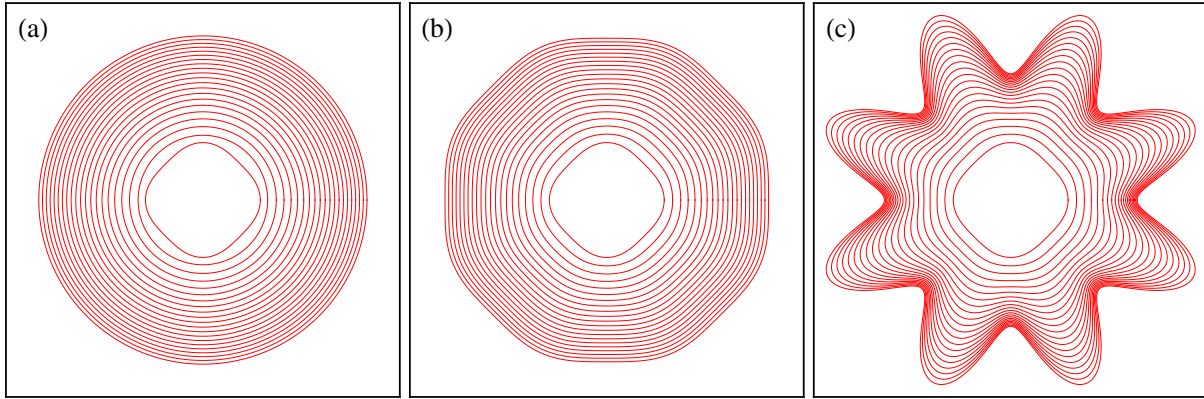


Figura 2.7 Estimulando a formação de instabilidades. Instantâneos da evolução interfacial, plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.5$ s) mostrando a interação entre dois modos cossenos $n = 4$ e $2n = 8$, quando $A = -1$ (o fluido interno é mais viscoso), $\theta_c = \pi$ e $Q = \pi/5$ cm²/s. Três valores do parâmetro β são usados: (a) 0, (b) 2.82, and (c) 2.87 dina. Aqui, $0 \leq t \leq 10$ s. A clássica situação estável é retratada em (a), enquanto em (b) e (c) uma interface cada vez mais deformada é observada.

padrão tipo estrela, emergente devido à ação da tensão superficial variável, e as estruturas observadas na instabilidade usual. Nossa teoria não observou nenhuma tendência marcante dos dedos em bifurcar a medida que o desestabilizamos incrementando o parâmetro β .

Em ambos os casos estudados aqui, é possível perceber, em primeira ordem, uma competição entre os termos de injeção e os de tensão superficial a fim de legitimar ou não a desestabilização (estabilização) da interface. Porém neste segundo caso, do fluxo reverso, o balanço entre os termos apresenta-se de certa forma mais delicada. Enquanto avançávamos na análise de como desestabilizar situações classicamente estáveis, observamos um caso inusitado tomar conta do ambiente. Conseguíamos desestabilizar inicialmente o sistema com um valor de β , porém no decorrer do tempo uma recircularização da interface eventualmente era observada. Verificamos isto ocorrer, por exemplo, para $\beta = 2.87$ dina, como na Fig. 2.7(c), mas injetando a uma taxa Q mais alta. Uma ilustração clara deste efeito é mostrada na Fig. 2.8, onde a instabilidade inicialmente estimulada por um $\beta = 4.70$ dina, porém não consegue prevalecer à taxa de injeção elevada, $Q = 3\pi/2$ cm²/s, resultando na recircularização da interface. Para plotar esta figura o restante dos parâmetros físicos bem como as condições iniciais foram os mesmos daqueles utilizados na Fig 2.7. Apesar de inusitado, este fato é consistente com resultados da Ref. [32], onde os autores mostram que a desestabilização da interface ocorre para regimes de velocidades baixas ou, equivalentemente, baixos números de capilaridade (o leitor não deve preocupar-se caso não esteja familiarizado com esta grandeza, iremos comentar um pouco mais sobre ele ainda neste capítulo).

Com base nos resultados sintetizados nas figuras 2.6 e 2.7, concluímos que nossas previsões puramente lineares realmente são confirmadas e estão em completo acordo com as simulações fracamente não lineares. Estes resultados fornecem uma base sólida que fundamentam nossa idéia de manipular a instabilidade de Saffman-Taylor através de uma tensão superficial que depende da curvatura da interface fluido-fluido.

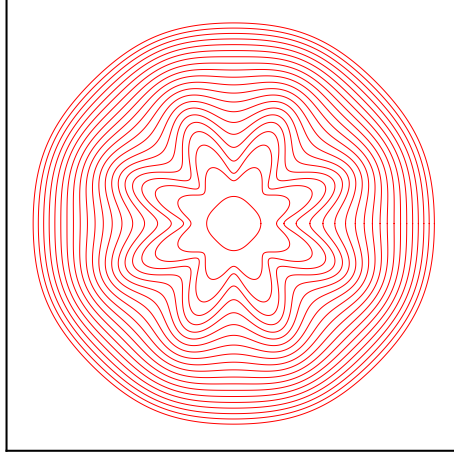


Figura 2.8 Instantâneos da evolução interfacial, plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.5$ s) mostrando a interação entre dois modos cossenos $n = 4$ e $2n = 8$, quando $A = -1$ (o fluido interno é mais viscoso) e $\theta_c = \pi$ para $Q = 3\pi/2$ cm²/s e $\beta = 4.70$ dina. Depois de um período inicial de desestabilização, a interface tende a recircularizar no decorrer do tempo para valores elevados de Q tais como este.

2.4 Expandindo um pouco os horizontes

Antes de finalizarmos este capítulo, gostaríamos de comentar alguns casos relacionados ao sistema em estudo, mas com algumas diferenças muito importantes. O primeiro deles, surge quando, ao invés de injetarmos fluido radialmente na célula, colocamos, já de início, dois fluidos de diferentes viscosidades no aparato e sugamos pelo mesmo canal onde era feita a injeção. Praticamente, o que muda do caso estudado por nós durante o presente capítulo e essa versão apresentada agora é o sinal de Q , sendo ele negativo quando realizamos a sucção [11]. Verificamos que o método aqui apresentado é similarmente aplicável para esse caso, fazendo as devidas alterações. Como o sinal de Q é alterado, a situação com $A = 1$ e $\theta_c = 0$ se torna estável, pois aqui, isto representa o fluido perfeitamente molhante, mais viscoso deslocar o menos viscoso, não-molhante. Uma possível desestabilização da interface ocorre quando introduzimos um $\beta < 0$. Analogamente, o caso reverso, determinado por $A = -1$ e $\theta_c = \pi$, em que o fluido interno é o mais viscoso, perfeitamente molhante, pode ser estabilizado se $\beta < 0$. Portanto, a estratégia empregada para o problema com injeção ($Q > 0$) e $\beta > 0$ é igualmente efetivo se aplicado ao caso de sucção ($Q < 0$) e $\beta < 0$.

Além disso, comentaremos brevemente como nossas expressões (2.38)-(2.41), para a geometria radial, ficariam se aplicássemos o método da tensão superficial variável ao fluxo em uma célula de Hele-Shaw retangular. Esta conversão de uma geometria para outra é feita aplicando o conhecido "limite retangular" [8], onde tomamos os seguintes limites: $R \rightarrow \infty$ e $Q \rightarrow \infty$, mantendo a velocidade do fluxo $v_\infty \equiv Q/(2\pi R)$ finita e o número de onda da perturbação $k \equiv n/R$ constante. Neste limite a evolução da interface descreve como se desenvolve o fluxo na geometria retangular, onde

$$\lambda(n) \rightarrow |k| \left[Av_\infty - \alpha k^2 \left(\sigma_0 + \frac{4\beta \cos \theta_c}{b} \right) \right] \quad (2.45)$$

$$F(n, n') \rightarrow \alpha \beta |k| [2k'^3 k - (kk')^2 - k'^4] \quad (2.46)$$

$$G(n, n') \rightarrow A |k| [1 - \text{sgn}(kk')], \quad (2.47)$$

são agora quantidades independentes do tempo. Aqui, fica mais explícita uma observação feita anteriormente neste texto: em contraste à relação de dispersão calculada nas Refs. [36, 37] para o fluxo na geometria retangular, nossa Eq. (2.45) exibe uma dependência explícita com o parâmetro β . Em outras palavras, no problema abordado aqui, os efeitos da tensão superficial variável aparecem já em primeira ordem, dispensando a obrigatoriedade de considerarmos o acoplamento de modos para capturar seus efeitos na estabilidade do sistema. Isto fortalece mais ainda a ênfase que demos no papel crucial dos efeitos tridimensionais relacionados ao ângulo de contato.

Por fim, antes de concluirmos o capítulo, vale a pena mencionar uma interessante conexão entre nossa relação de dispersão (2.45) e a computada recentemente na Ref. [32] para o problema em que as placas da célula de Hele-Shaw exibem um espaçamento não uniforme (a Eq.(2) deles). Para uma comparação mais direta reescreveremos a Eq. (2.45) em sua forma adimensional,

$$\lambda(k) = |k| \left[A - \left(\frac{A+1}{2} \right) \frac{(bk)^2}{Ca} \left(1 + \frac{\beta' \cos \theta_c}{b} \right) \right], \quad (2.48)$$

com

$$Ca = \left(\frac{12\eta_2}{\sigma_0} \right) v_\infty \quad (2.49)$$

e

$$\beta' = \frac{4\beta}{\sigma_0 L}, \quad (2.50)$$

Nessas expressões, reescalamos a velocidade por v_∞ e comprimentos por L (comprimento da célula de Hele-Shaw retangular). Na Eq. (2.48), Ca denota o parâmetro adimensional conhecido por número de capilaridade e β' é o nosso β reescalado. Aqui, uma breve pausa se faz necessária para recordar o final da seção 2.3.2, onde relacionamos um baixo número de capilaridade a um regime de baixas velocidades. Agora o leitor pode ficar mais confortável com esta comparação pois na Eq. (2.49) fica clara a proporcionalidade entre Ca e v_∞ . Neste sentido, podemos encontrar uma velocidade crítica, abaixo da qual seria possível desestabilizar efetivamente o sistema, através de um valor crítico de capilaridade, facilmente calculado fazendo $\lambda(n) = 0$ na Eq. (2.48). Comparando a Eq. (2.48) apresentada aqui e a Eq. (2) de [32] nota-se semelhança entre o acoplamento de β' e θ_c , em (2.48), e o termo na expressão equivalente que leva em conta o acoplamento entre o ângulo de contato e a variação no espaçamento. Desta forma, nosso parâmetro de tensão superficial β' tem, em primeira ordem, papel equivalente ao gradiente de espaçamento no que diz respeito à manipulação da instabilidade de Saffman-Taylor. No mais, assim como em [32], esperamos que o número de capilaridade realize um papel fundamental no estímulo ou inibição da formação de instabilidades.

Em suma, apresentamos neste capítulo uma técnica simples e eficiente capaz de criar situações inusitadas do ponto de vista clássico da instabilidade de Saffman-Taylor. Neste caso, consideramos que a tensão superficial entre os fluidos varia com a curvatura da interface fluido-fluido. Aplicando este método, conseguimos estabilizar (desestabilizar) situações classicamente instáveis (estáveis), tanto para o início da dinâmica, via análise linear, quanto

para estágios um pouco mais avançados, onde se faz necessária a introdução de termos fracamente não-lineares. Uma conclusão mais detalhada dos resultados aqui obtidos será feita no último capítulo desta dissertação.

Controlando instabilidades estimuladas por rotação

3.1 Motivação e descrição física do sistema

Ainda imersos no vasto âmbito das instabilidades hidrodinâmicas é que iniciamos a próxima etapa deste trabalho. Este próximo capítulo versará sobre uma instabilidade diferente, mas igualmente interessante da tratada no capítulo 2. O novo cenário vem à tona quando, ao invés de injetarmos fluido continuamente, permitimos a célula de Hele-Shaw rotacionar com velocidade angular constante em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. Este novo sistema constitui o que comumente chama-se de célula de Hele-Shaw girante [57]. Para a versão girante do problema, a interface fluido-fluido pode apresentar deformações mesmo numa situação de fluxo reverso. Isto acontece porque agora quem realiza o papel principal na desestabilização da interface não é mais o contraste de viscosidade, mas sim a diferença de densidade entre os fluidos, caracterizando uma instabilidade induzida por rotação [17, 58–63]. A interface então se torna instável quando giramos a célula onde o fluido viscoso interno é mais denso que o externo. No entanto, os padrões observados são bem diferentes aos da instabilidade de Saffman-Taylor usual. Mais especificamente, não mais bifurcações são observadas mas agora uma competição entre os dedos do fluido menos denso que penetram o mais denso toma conta da situação. Assim, ao longo do tempo os dedos assumem diferentes tamanhos. Veja, por exemplo, uma fotografia de um experimento com uma célula girante realizado por [64] na Fig. 3.1. Através do experimento, podemos ver a diferença relativa entre o comprimento dos dedos entrantes, enquanto os dedos saíntes têm, claramente, comprimentos bem equivalentes.

A célula de Hele-Shaw girante vem atraindo cada vez mais atenção de pesquisadores nas últimas duas décadas. Com isto, vários trabalhos experimentais [17, 58, 64, 65] e teóricos [17, 57, 58, 66–72] foram desenvolvidos nesta classe de problemas. Nas investigações teóricas, estes trabalhos apresentaram estudos analíticos acerca de estabilidade linear [17, 57, 71] e fracamente não linear [66, 71], passando por dinâmica de anéis de fluido [65] e estudos rigorosos de soluções exatas para tais fluxos [73–77]. Além disso, foram feitas análises do comportamento de ferrofluidos confinados na célula ao serem submetidos a campos magnéticos externos [69, 70]. Sofisticadas simulações numéricas também foram realizadas envolvendo fluxos de fluidos miscíveis [68] e sistemas com baixo contraste de viscosidade [58]. Já do lado experimental, uma vasta gama de situações foi estudada, entre elas fluxos viscosos com baixos [58] e altos [17] contrastes de viscosidade, deslocamento radial de um anel de fluido [64, 65], entre outras. Apesar de termos comentado que o contraste de viscosidade não mais define a estabilidade do sistema, experimentos e simulações mostram que ele tem sim seu papel na formação de

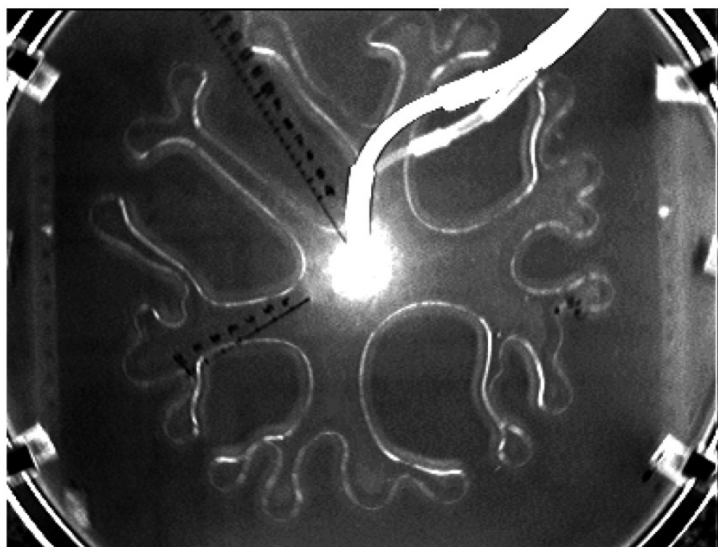


Figura 3.1 Padrão típico obtido em experimento com célula de Hele-Shaw girante realizado por [17]. Neste caso, o fluido interno é óleo de silicone e ar o externo.

padrões em uma célula girante. Nesta versão girante do problema, o parâmetro A é importante para a morfologia dos dedos, fato estudado através de simulações numéricas e experimentos com uma célula girante pré-molhada na Ref. [58] e também analiticamente em [71], onde uma teoria de modos acoplados foi implementada para fazer previsões sobre o sistema. As Figs. 3.2 e 3.3, retiradas de [58], mostram resultados experimentais e numéricos, respectivamente, onde no limite de baixo contraste de viscosidade o fenômeno da competição entre os dedos praticamente não aparece.

Esta crescente busca em entender a fenomenologia por trás da célula girante em suas diversas configurações [78] está diretamente relacionada, além de outras coisas, à sua aplicabilidade a sistemas biológicos e tecnológicos. No aspecto biológico, os fluxos girantes constituem um ótimo protótipo para modelar, por exemplo, crescimento de tecidos em biorreatores [79], fragmentação [80] e motilidade [81] celular. Já no lado tecnológico, o sistema aqui em estudo está relacionado ao problema de revestimento por rotação (ou "spin coating") [82, 83], que consiste em rotacionar filmes finos de fluidos em ambientes de baixa dimensionalidade.

Apesar do significativo número de estudos sobre a célula de Hele-Shaw girante, com foco no surgimento de instabilidades e os padrões por ela formados, existem situações onde a aparição de irregularidades interfaciais é fortemente indesejável. Por exemplo, acabamos de comentar sobre os processos de revestimento por rotação [82, 83] e crescimento de tecidos em biorreatores [60]. Em ambos os casos, o surgimento de deformações interfaciais pode resultar numa cobertura superficial imperfeita e/ou defeituosa. Por este e outros motivos, é de interesse prático e acadêmico buscar mecanismos capazes de controlar o crescimento de perturbações interfaciais nesta classe de problemas envolvendo fluxos estimulados por rotação.

Com isto em mente e motivados pelo sucesso do método apresentado no Capítulo 2, onde, dentre outras coisas, a consideração de uma variação específica da tensão superficial com a curvatura da interface entre os fluidos nos possibilitou controlar a instabilidade de Saffman-Taylor

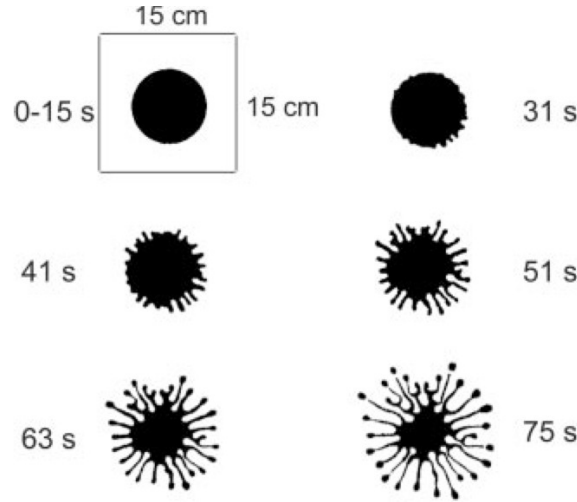


Figura 3.2 Instantâneos do processo de formação de padrão no limite de baixo contraste de viscosidade retirados de um experimento realizado por [58] com uma célula de Hele-Shaw girante.

em células de Hele-Shaw radiais [44], neste presente capítulo vamos investigar a possibilidade de restringir o surgimento de dedos viscosos em fluxos confinados a uma célula de Hele-Shaw girante. Novamente, através de uma teoria perturbativa de modos acoplados fracamente não linear [8] mostraremos que o acoplamento entre a tensão superficial variável e os efeitos tri-dimensionais relacionados ao ângulo de contato afeta significativamente o cenário usual com respeito à formação de instabilidades. Analisaremos a eficácia do nosso método de controle tanto para estágios lineares quanto para regimes fracamente não lineares da dinâmica. Será discutido ainda como este modelo pode inibir o fenômeno da competição dos dedos e eventualmente estabilizar completamente a interface girante que separa os fluidos.

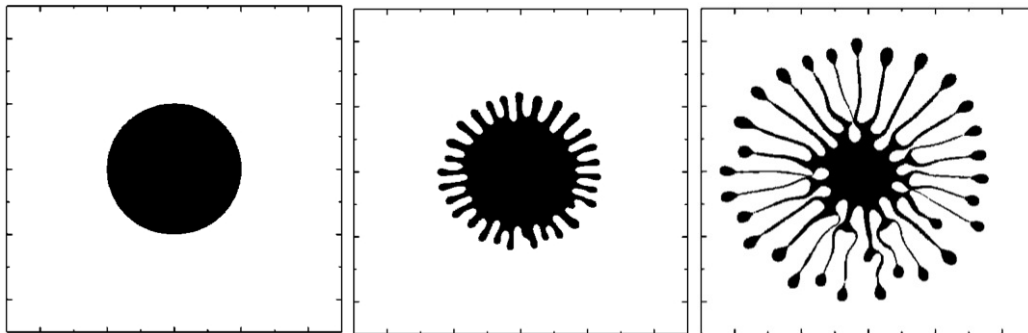


Figura 3.3 Simulações numéricas da evolução temporal de uma gota circular em regime de baixo contraste de viscosidade ($A = 0.4$) realizadas em [58] usando uma célula de Hele-Shaw girante.

Antes de apresentar o conjunto de equações fundamentais na nossa análise, vamos antes descrever fisicamente o sistema, especificando todos os parâmetros físicos relevantes. Considere então uma célula de Hele-Shaw de espaçamento constante b contendo dois fluidos imiscíveis, incompressíveis e viscosos, como mostrado na Fig. 3.4. Os fluidos interno e externo têm

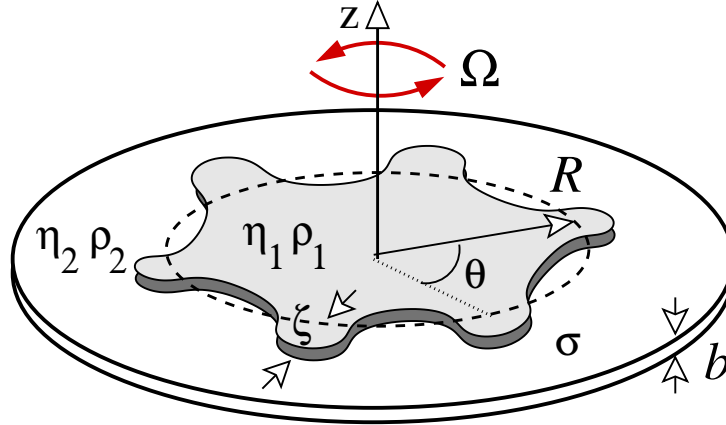


Figura 3.4 Visão em perspectiva de uma célula de Hele-Shaw girante. As placas da célula estão separadas por uma distância b e rotacionam com velocidade Ω em torno de um eixo perpendicular z que passa pelo seu centro. O fluido mais viscoso e mais denso tem inicialmente raio R e ocupa a região sombreada. Perturbações interfaciais são denotadas por ζ , o ângulo azimutal por θ e a tensão superficial variável entre os fluidos por σ .

densidades e viscosidades denotadas por ρ_1 , η_1 e ρ_2 , η_2 , respectivamente. Apesar do nosso modelo possibilitar uma análise para quaisquer valores de ρ e η , nosso foco será no caso tradicionalmente instável onde $\rho_1 > \rho_2$ e $\eta_1 \gg \eta_2$. A célula rotaciona com velocidade angular constante Ω , e na interface entre os fluidos existe uma tensão superficial σ . Assim como visto anteriormente [36,37,44], consideraremos uma tensão superficial não constante, que varia proporcionalmente à curvatura da interface fluido-fluido. Dito isto, vamos agora apresentar as equações básicas que governam o fluxo efetivamente bidimensional em uma célula de Hele-Shaw girante.

3.2 Apresentação das equações

3.2.1 Lei de Darcy

Novamente, nosso ponto de partida será a lei de Darcy, que deverá ser modificada em relação à aqui apresentada anteriormente. Estas mudanças são necessárias para capturar os efeitos das forças inerciais que surgem no referencial girante quando rotacionamos a célula. Essencialmente, estas forças são a força centrífuga e de Coriolis. Aqui, iremos considerar apenas casos em que os fluidos a serem analisados têm baixa viscosidade cinemática ($\eta_j/\rho_j \ll 1$), ou baixo número de Reynolds. Assim, podemos seguramente desprezar a força de Coriolis, além de outros efeitos inerciais [58] e analisar as instabilidades estimuladas apenas pela força centrífuga. O efeito da força de Coriolis na célula de Hele-Shaw girante foi estudado teoricamente por Gadêlha e Miranda em [72] e outros efeitos inerciais foram levados em conta em [60,61,63].

A princípio, para melhor compreender o que muda no ambiente da célula girante, temos que entender o papel dessas novas forças inerciais que surgem neste referencial. A relação

entre uma variação no tempo de um vetor qualquer $\mathbf{L}$, vista por um observador num referencial girante e num fixo é dada por [84]

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(f)} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(g)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}, \quad (3.1)$$

onde f e g estão definindo os referenciais fixo e girante. Por exemplo, o campo de velocidade do fluxo será visto por um observador girante diferentemente de um expectador em repouso. A diferença entre as duas visões é dada pela relação (3.1)

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_j}{dt}\right)_{(f)} = \left(\frac{d\mathbf{u}_j}{dt}\right)_{(g)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j. \quad (3.2)$$

Aplicando a Eq. (3.1) ao vetor posição, derivando-a em relação ao tempo e substituindo recursivamente a Eq. (3.2), obtemos uma relação entre a aceleração medida por um observador fixo e por um girando com velocidade $\boldsymbol{\Omega}$

$$\mathbf{a}_{(f)} = \mathbf{a}_{(g)} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j, \quad (3.3)$$

sendo o segundo termo do lado direito proporcional à posição ($\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$) relacionado à *força centrífuga*, enquanto o proporcional à velocidade ($2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j$) vem da *força de Coriolis*. Note que se a célula girar com velocidade angular variável outro termo, proporcional a $d\boldsymbol{\Omega}/dt$, surgiria na expressão (3.3). Esta nova contribuição estaria associada a uma força comumente chamada de *força de Euler*. Aqui, consideraremos apenas fluxos onde os fluidos têm baixa viscosidade cinemática. Isto, como já discutimos nesta mesma seção, faz com que o termo dominante na Eq. (3.3) seja o da força centrífuga e, por isto, poderemos desconsiderar efeitos da força de Coriolis na nossa análise. Dito isto, a transformação para aceleração do fluxo se resume a

$$\mathbf{a}_{(f)} = \mathbf{a}_{(g)} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Vejamos, então, que a aceleração medida num referencial fixo, por exemplo, por um pesquisador que realiza um experimento com uma célula girante num laboratório, deve ter correções devido ao fluido sentir novas forças inerciais quando o sistema rotaciona. O leitor deve recordar a Seção 2.2.1, na qual vimos a segunda lei de Newton para fluidos, a equação de Navier-Stokes, e discutimos a necessidade de adicionar termos à ela caso novas forças estejam "em jogo" além das providas da pressão hidrodinâmica e de estresses viscosos. Aqui, isto se faz necessário devido à essas novas forças inerciais que acabamos de ver. Desta forma e com todas as considerações feitas até aqui, devemos adicionar ao lado direito da Eq. (2.6) a contribuição da densidade de força centrífuga

$$\mathbf{f}_{cent} = -\rho_j \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Tendo em mãos a equação de Navier-Stokes, podemos obter uma nova lei de Darcy, modificada pela adição do termo centrífugo. Seguindo os mesmos passos expostos na Seção 2.2.1 chegamos na lei de Darcy modificada

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla \left[p_j - \frac{\rho_j \Omega^2 r^2}{2} \right], \quad (3.6)$$

que descreverá a dinâmica dos fluidos confinados em um ambiente efetivamente bidimensional girante. Na expressão (3.6), $\mathbf{v}_j$ e p_j denotam a velocidade e a pressão média com relação à coordenada z . Outra informação já implícita em (3.6), é o fato da velocidade angular Ω ser sempre perpendicular à posição r , calculada a partir do eixo de rotação, assim, o produto vetorial cede lugar ao simples produto entre Ω^2 e r . Além disso, o fator $r/2$, no lado direito de (3.6), surge quando colocamos a contribuição centrífuga (3.5) convenientemente em termos de um gradiente.

Para completar a descrição matemática do problema, precisaremos novamente saber quais condições de contorno especificam nosso sistema. Equivalentemente ao problema analisado no Capítulo 2, as duas condições de contorno (2.16) e (2.27), apresentadas na Seção 2.2.2, devem continuar sendo válidas. Isto se deve ao fato de estarmos trabalhando, em ambas as situações, com fluidos imiscíveis, logo deve existir uma interface entre eles associada a uma tensão superficial não nula, além de serem incompressíveis e ter uma relação constitutiva dada pela Eq. (2.5). É importante ressaltar mais uma vez a importância crucial da condição de contorno de pressão, Eq. (2.16), para nossa análise. Anteriormente, vimos que a ausência desta condição impossibilitaria a manipulação da instabilidade de Saffman-Taylor, proposta no Cap. 2 [44]. Da mesma forma, sem o acoplamento existente na Eq. (2.16) entre a curvatura variável no plano da célula e o ângulo de contato θ_c , não conseguiríamos prosseguir com nossa proposta de controlar as instabilidades induzidas por rotação.

Neste ponto, da mesma maneira que no caso radial com injeção, adquirimos a lei de Darcy modificada (3.6) e as duas condições de contorno (2.16) e (2.27) que especificam o problema. Com isso em mãos, podemos dar início à nossa abordagem de modos acoplados análoga à feita no capítulo anterior, porém com as devidas modificações. A apresentação detalhada desta teoria é o tema da seção a seguir.

3.2.2 Equação diferencial de modos acoplados

No intuito de obter a equação diferencial para a evolução da interface divisora dos fluidos, vamos novamente seguir os passos tradicionais em teoria fracamente não linear de modos acoplados, no ambiente quasi-bidimensional da célula de Hele-Shaw [7, 8, 11, 54].

A interface será novamente descrita por uma contribuição da gota inicial de fluido, que terá raio R , além da perturbação ζ , dependente do tempo e do ângulo azimutal θ . Esta relação é dada por

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t). \quad (3.7)$$

O leitor deve notar uma diferença básica entre esta descrição e a expressa na Seção 2.2.3. No problema com injeção, o raio não perturbado R cresce com o tempo como mostrado na Eq. (2.28). Já no caso atual do problema girante, como não há fluido sendo injetado a todo instante, o raio R denota o raio inicial da gota, não mais dependente do tempo. Temos ainda que a perturbação é mapeada via sua série de Fourier

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta), \quad (3.8)$$

com $\zeta/R \ll 1$ e as amplitudes de Fourier complexas da perturbação dadas por

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta(\theta, t) \exp(-in\theta) d\theta. \quad (3.9)$$

Iremos também resguardar o fato da área perturbada ser independente da perturbação ζ , com a inclusão do modo $n = 0$. Por isso, a conservação da massa nos leva a uma amplitude para o modo central $n = 0$ exatamente igual a expressa pela Eq. (2.29).

A incompressibilidade dos fluidos (2.2) juntamente com a irrotacionalidade do fluxo (2.12) nos leva à introdução dos potenciais escalares de velocidade ϕ_j , os quais devem obedecer à equação de Laplace (2.15). Assim, os potenciais de velocidade serão dados por

$$\phi_j = \phi_j^0 + \sum_{n \neq 0} \phi_{jn} \left(\frac{R^{|n|}}{r^{|n|}} \right)^{(-1)^j} \exp(in\theta). \quad (3.10)$$

Aqui, ϕ_j^0 é independente de r e θ já que não há mais fluido sendo injetado a todo instante, logo, o termo de "fonte", $\left[\frac{Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{R}\right) \right]$, não contribuirá mais para a dinâmica.

Precisaremos ainda da informação adicional de como os coeficientes de Fourier dos potenciais se relacionam com as amplitudes da perturbação ζ . Faremos isto através da condição de contorno cinemática (2.27). Inserindo a expressão (3.8) para a perturbação juntamente com a Eq. (3.10) para os potenciais na condição cinemática (2.27), obtemos a relação desejada

$$\phi_{1n}(t) = -\frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n + \sum_{n' \neq 0} \left(\operatorname{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} \right) \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \quad (3.11)$$

e

$$\phi_{2n}(t) = \frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n + \sum_{n' \neq 0} \left(\operatorname{sgn}(nn') + \frac{1}{|n|} \right) \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'}, \quad (3.12)$$

onde os pontos representam derivadas temporais totais.

Escrevendo a nova lei de Darcy em termos dos potenciais para cada fluido $j = 1, 2$, subtraindo uma expressão da outra e reorganizando os termos da maneira mais conveniente, chegamos na equação de movimento para a evolução interfacial

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}} + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}} = -\frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \left[\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2 r^2 - (p_1 - p_2) \right] \Big|_{r=\mathcal{R}}, \quad (3.13)$$

com A sendo o contraste de viscosidade entre os fluidos (2.31).

Agora, devemos substituir a expressão para a curvatura, Eq. (2.37), na Eq. (2.23) para a condição de pressão. Em seguida, pegamos a expressão resultante e a colocamos na expressão que acabamos de obter para a equação de movimento da interface, Eq. (3.13). Tirando a inversa de Fourier, substituindo as expressões dos coeficientes de Fourier dos potenciais, ϕ_{1n} e ϕ_{2n} , e

tendo sempre em mente que guardaremos sempre termos até segunda ordem em ζ , chegamos no objetivo desta seção, a equação diferencial *adimensional* regente do movimento interfacial [56]

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n')\zeta_{n'}\zeta_{n-n'} + G(n, n')\dot{\zeta}_{n'}\zeta_{n-n'} \right], \quad (3.14)$$

sendo a taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ dada pela relação de dispersão

$$\lambda(n) = |n| \left\{ \text{sgn}(U) - S(n^2 - 1) \left[1 + 2\mathfrak{B} \left(1 + \frac{2\cos\theta_c}{b} \right) \right] \right\}, \quad (3.15)$$

agora independente do tempo. O parâmetro adimensional

$$S = \frac{\sigma_0}{R^3\Omega^2|\rho_1 - \rho_2|} \quad (3.16)$$

representa a razão entre a capilaridade (conceito visto no final do capítulo anterior) e forças centrífugas,

$$\mathfrak{B} = \frac{\beta}{\sigma_0 R} \quad (3.17)$$

mede a ação de efeitos provenientes da dependência da tensão superficial com a curvatura reescalada por uma certa "força" ligada à tensão superficial para a interface plana e

$$U = \frac{b^2 R(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \quad (3.18)$$

é uma velocidade característica do sistema.

Os termos de acoplamento em segunda ordem são dados por

$$\begin{aligned} F(n, n') = & |n| \left\{ \frac{1}{2} \text{sgn}(U) \right. \\ & - S \left(1 + 4\mathfrak{B} \frac{\cos\theta_c}{b} \right) \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \\ & \left. - S\mathfrak{B}[3 - n'(5n' + n) + n'^2(n - n')^2] \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e

$$G(n, n') = A|n|[1 - \text{sgn}(nn')] - 1. \quad (3.20)$$

Na Eq. (3.14), comprimentos são escalonados pelo raio inicial da gota R e os tempos por $R/|U|$. Daqui para frente embasaremos nossa análise nas versões adimensionais das funções que descrevem o movimento interfacial.

A relação de dispersão para a taxa de crescimento linear (3.15) nos dará informações relevantes a cerca da estabilidade linear da interface, assim como os termos não lineares (3.19) e

(3.20) servem para podermos fazer, analiticamente, previsões morfológicas de como esta nova tensão superficial variável pode afetar a competição dos dedos em estágios fracamente não lineares. Diferentemente do Cap. 2, nosso foco aqui será apenas a situação de maior instabilidade, na qual $\text{sgn}(U) = 1$, $A = -1$ e $\theta_c = \pi$. Tomamos esta decisão basicamente por dois motivos principais. O primeiro deles é que esta configuração é a mais comum em experimentos já existentes com célula de Hele-Shaw girante. Além disso, caracterizamos desta forma importantes aplicações tecnológicas [79–83], para as quais seria de grande importância o possível controle das deformações interfaciais estimuladas pela força centrífuga. Antes de prosseguir, devemos enfatizar que os valores usados para nossos parâmetros adimensionais estão em completo acordo com quantidades físicas usadas em experimentos na célula girante [17, 58, 59].

3.3 Controlando a instabilidade: regimes linear e fracamente não linear

Como já foi dito anteriormente, nosso objetivo principal neste capítulo é usar o modelo da tensão superficial dependente da curvatura da interface fluido-fluido para estabilizar fluxos usualmente instáveis em uma célula de Hele-Shaw girante. Faremos isto em duas etapas: na primeira delas, Seção 3.3.1, tentaremos retirar informações importantes sobre o possível controle das instabilidades apenas a nível linear, para os primeiros instantes da evolução interfacial. Logo em seguida, na Seção 3.3.2, colocaremos nosso mecanismo de controle em xeque a fim de testar a robustez das previsões feitas em estágios lineares, ampliando a análise a regimes fracamente não lineares da dinâmica. Para estes regimes, poderemos verificar como a tensão superficial variável atua no fenômeno da competição dos dedos, característico de fluxos em célula de Hele-Shaw girante.

3.3.1 Comportamento linear

Começamos nossa abordagem examinando a origem de cada termo na relação de dispersão para a taxa de crescimento linear, Eq. (3.15). Como restringimos nossa análise ao caso em que $\text{sgn}(U) = 1$, fica claro o caráter desestabilizante do termo relacionado à força centrífuga. Por outro lado, tendo em mente o parâmetro S , definido acima, o segundo termo do lado direito de (3.15), proporcional a $S(n^2 - 1)$, está ligado a contribuições de tensão superficial. Observando os termos entre colchetes, $1 + 2\mathfrak{B} \left(1 + \frac{2\cos\theta_c}{b} \right)$, é possível notar a relação entre o primeiro deles e o acoplamento entre a tensão superficial constante σ_0 e a curvatura κ no plano da célula. Ainda mais, é fácil perceber sua contribuição estabilizante ao sistema, confirmando um fato já conhecido sobre o papel deste acoplamento na estabilidade interfacial. Já o segundo, proporcional ao parâmetro que leva em conta a dependência da tensão superficial com a curvatura $\mathfrak{B}$, apresenta a contribuição associada à curvatura $\kappa_\perp$ perpendicular ao plano da célula que depende diretamente do ângulo de contato θ_c , como visto na Eq. (2.18). Lembremos aqui um fato discutido em detalhes na Seção 2.3.1: como, para assumir sem perdas fenomenológicas o sistema efetivamente bidimensional, o espaçamento, agora adimensional, b deve ser a menor escala de comprimento, $b \ll 1$, o termo relacionado ao ângulo de contato será de fato dominante na determinação da estabilidade linear. Outra percepção muito importante é a de qual

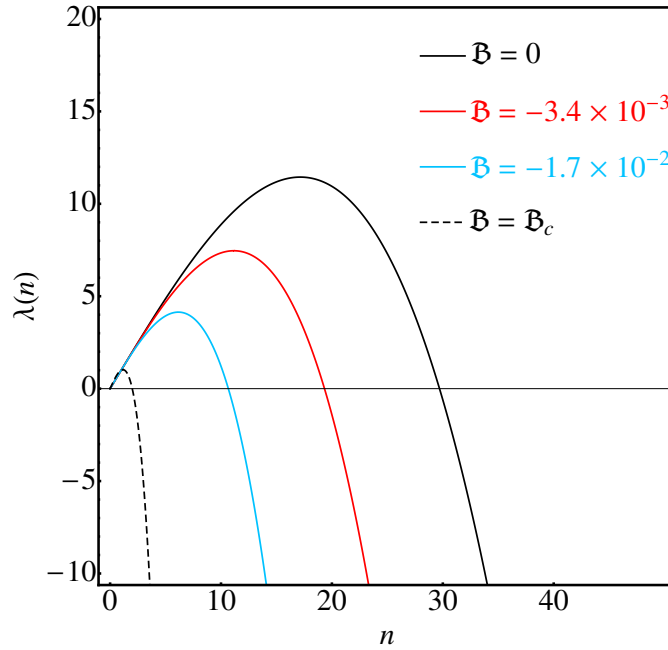


Figura 3.5 Inibição de instabilidades estimuladas por força centrífuga a nível linear. Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função do número de modos n para diferentes valores de $\mathfrak{B}$. O número típico de dedos emergentes na interface, dado pelo valor de n que maximiza a função $\lambda(n)$ (n_{max}) cai consideravelmente a medida que o parâmetro de variação da tensão superficial $\mathfrak{B}$ cresce em módulo. Os valores calculados para o número de dedos foi $n_{max} \approx 17, 11, 6$ e 1 , respectivamente.

sinal de $\mathfrak{B}$ deveremos utilizar. Como para nós $\theta_c = \pi$, $\mathfrak{B} > 0$ levaria a uma desestabilização ainda maior do sistema, porém este não é o efeito que estamos buscando. Logo, como nosso propósito aqui é controlar o surgimento de deformações na interface fluido-fluido, iremos usar um $\mathfrak{B} < 0$ a fim de o sistema mais estável e eventualmente sem perturbações interfaciais.

O papel de $\mathfrak{B}$ no controle da instabilidade, linearmente falando, é ilustrado na Fig. 3.5. A figura mostra a taxa de crescimento (3.15) em função do modo de Fourier n para diferentes valores do parâmetro de variação da tensão superficial $\mathfrak{B}$: 0 , -3.4×10^{-3} , -1.7×10^{-2} e $\mathfrak{B}_c$. Este valor específico de $\mathfrak{B}$ denota o valor crítico do parâmetro necessário para eliminar todas as deformações na interface, ou seja, para o qual todos os modos $n > 1$ se tornam estáveis. Este valor é previsto pela teoria linear simplesmente fazendo $\lambda(n) = 0$, assim, chegamos a

$$\mathfrak{B}_c^*(n) = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{2 \cos \theta_c}{b} \right)} \left[\frac{\text{sgn}(U)}{S(n^2 - 1)} - 1 \right], \quad (3.21)$$

ou seja, temos um valor de $\mathfrak{B}^*(n)$ para cada modo n . A fim de estabilizar todos os modos $n > 1$ usamos $\mathfrak{B}^*(n = 2) = \mathfrak{B}_c$, como mostrado na Fig. 3.5. Para plotá-la consideramos os seguintes valores típicos para os parâmetros S e b : $S = 1.14 \times 10^{-3}$ e $b = 10^{-2}$. Estes valores característicos de S e b serão usados também para plotar as próximas figuras apresentadas neste capítulo.

Vamos agora nos debruçar sobre a Fig. 3.5 e tentar retirar todas as informações que ela

pode nos dar. Para $\mathfrak{B} = 0$, é evidente uma grande banda de instabilidade, ou seja, quando a tensão interfacial entre os fluidos é constante ao longo da interface que os divide, existe uma vasta região de modos para os quais a taxa de crescimento é positiva ($\lambda(n) > 0$). Por isso uma pequena deformação tenderia a aumentar no tempo, caracterizando uma situação instável. O máximo desta curva representa o modo dominante, que comandaria a dinâmica da interface em estágios iniciais, n_{max} , o qual podemos obter fixando $d\lambda(n)/dn = 0$. Para $\mathfrak{B} = 0$ este valor do modo dominante é $n_{max} \approx 17$. Isto significa dizer que nos instantes iniciais da evolução interfacial, estágios lineares, iríamos notar um padrão cujo número de dedos seria igual a n_{max} . Introduzindo agora os efeitos da nossa tensão superficial variável, vejamos o que acontece quando $\mathfrak{B} = -3.4 \times 10^{-3}$. Claramente, a banda de instabilidade diminuiu em relação à observada com $\mathfrak{B} = 0$. Além disso, há um decréscimo na magnitude da taxa de crescimento para todos os modos e agora o número de dedos cai para $n_{max} \approx 11$. Seguindo nossa análise sistemática, a teoria linear nos leva a crer que podemos eventualmente suprimir totalmente a instabilidade se aumetarmos o valor de $\mathfrak{B}$ até atingir seu valor crítico $\mathfrak{B}_c$, dado pela Eq. (3.21), fazendo o número de dedos n_{max} cair para 1 (um).

Na realidade, para suprimir totalmente as deformações interfaciais seria suficiente garantir a estabilidade para modos $n \geq 2$. Isto se deve ao fato do modo $n = 0$ ser um modo marginal, como chamamos comumente, ou seja, $\lambda(0) = 0$. Assim, seu efeito na dinâmica da interface seria uma expansão uniforme de um círculo. Além dele, quando analisamos o efeito do modo $n = 1$, verificamos que na verdade ele não introduz nenhuma deformação à interface. A introdução desse modo geraria um deslocamento global do círculo. Então, do ponto de vista de formação de dedos, o sistema continuaria completamente estável apesar de poder ser tido como instável já que está ocorrendo uma translação da gota.

3.3.2 Estágio fracamente não linear

Embora os resultados obtidos via análise linear sejam fortes indicativos de que podemos usar nosso parâmetro $\mathfrak{B}$ para controlar o surgimento de instabilidades induzidas por força centrífuga, rigorosamente isto não garante a eficácia deste controle em níveis mais avançados da dinâmica. Além disso, fenômenos morfológicos típicos, assim como o da competição dos dedos, característicos da dinâmica interfacial em uma célula girante, são efeitos intrinsecamente não lineares e não podem ser propriamente acessados por uma simples análise linear [20,59,71,85]. Por este motivo, para checar as previsões lineares discutidas na seção 3.3.1, além de esclarecer os efeitos principais da tensão superficial variável na competição dos dedos em um fluxo Hele-Shaw girante, aprofundaremos nossa análise a estágios mais avançados da dinâmica, caracterizados por termos fracamente não lineares. Isto será feito novamente de maneira sistemática, concentrando nossa atenção no papel realizado pelo parâmetro de controle $\mathfrak{B}$ no controle da competição e, por fim, na capacidade deste modelo em suprimir completamente as deformações interfaciais.

Agora, a equação de modos acoplados (3.14) será utilizada em sua totalidade a fim de estudarmos a formação de padrões não lineares pelo acoplamento de poucos modos de Fourier. Para simplificar nossa discussão é conveniente reescrever a perturbação complexa em termos

de modos cossenos e senos

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (3.22)$$

onde $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ e $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ são as amplitudes reais dos modos cosseno e seno, respectivamente. Sem perda de generalidade, para os fins deste trabalho, escolhemos a fase do modo fundamental tal que $a_n > 0$ e $b_n = 0$. Assim como proposto na Ref. [8], iremos mensurar o fenômeno da competição através da variabilidade no comprimento dos dedos. Para fazer tal análise vejamos o que ocorre quando consideramos a influência de um modo fundamental n , assumindo n par, no crescimento do modo sub-harmônico $n/2$ associado. Escrevendo a Eq. (3.15) em termos de a_n e b_n , separando o somatório, atualmente considerando valores de n no intervalo $(-\infty, +\infty)$ com exceção do modo $n = 0$, em somatórios nos quais apenas valores positivos de n são considerados, obtemos a equação de movimento para a amplitude da perturbação do sub-harmônico

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + \mathcal{C}(n) a_n\} a_{n/2}, \quad (3.23)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - \mathcal{C}(n) a_n\} b_{n/2}, \quad (3.24)$$

onde $\mathcal{C}(n)$ representa o que chamamos de *função de competição*

$$\mathcal{C}(n) = \frac{1}{2} \left[C\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) + C\left(\frac{n}{2}, n\right) \right], \quad (3.25)$$

e

$$C(n, n') = F(n, n') + \lambda(n') G(n, n'). \quad (3.26)$$

Vejamos, das Eqs. (3.23) e (3.24), o papel da função de competição no crescimento dos dedos. Ao analisar tais equações, é possível notar que um valor de $\mathcal{C}(n) < 0$ ajuda o crescimento do modo seno do sub-harmônico $b_{n/2}$, inibindo a evolução do modo cosseno $a_{n/2}$. O resultado deste crescimento desigual é uma grande variabilidade no tamanho dos dedos do fluido menos denso que penetram o mais denso. Este fenômeno caracteriza o que chamamos da competição dos dedos entrantes. Note ainda que este mecanismo de verificação da competição indica um sentido preferencial para o aumento desigual dos dedos. Em breve, veremos também a existência de uma variabilidade no tamanho dos dedos que saem, ou seja, do fluido mais denso penetrando o de menor densidade mesmo quando $\mathcal{C}(n) < 0$. No entanto, observaremos que mesmo existindo competição em ambas as direções, a diferença no tamanho dos dedos que entram é muito mais significativa. Invertendo o sinal de $\mathcal{C}(n)$ reverteria exatamente as conclusões aqui tiradas. Neste caso, o crescimento do modo cosseno seria favorecido e com isso a competição dos dedos que saem seria mais expressiva.

Para valores típicos dos parâmetros físicos relevantes num fluxo Hele-Shaw girante, já usados em experimentos [17, 58, 62], mostramos que $\mathcal{C}(n) < 0$ indica um crescimento restrito do modo cosseno do sub-harmônico $a_{n/2}$, acompanhado de um crescimento favorecido do modo seno $b_{n/2}$. Isto é ilustrado na Fig. 3.6, na qual plotamos a evolução temporal da interface

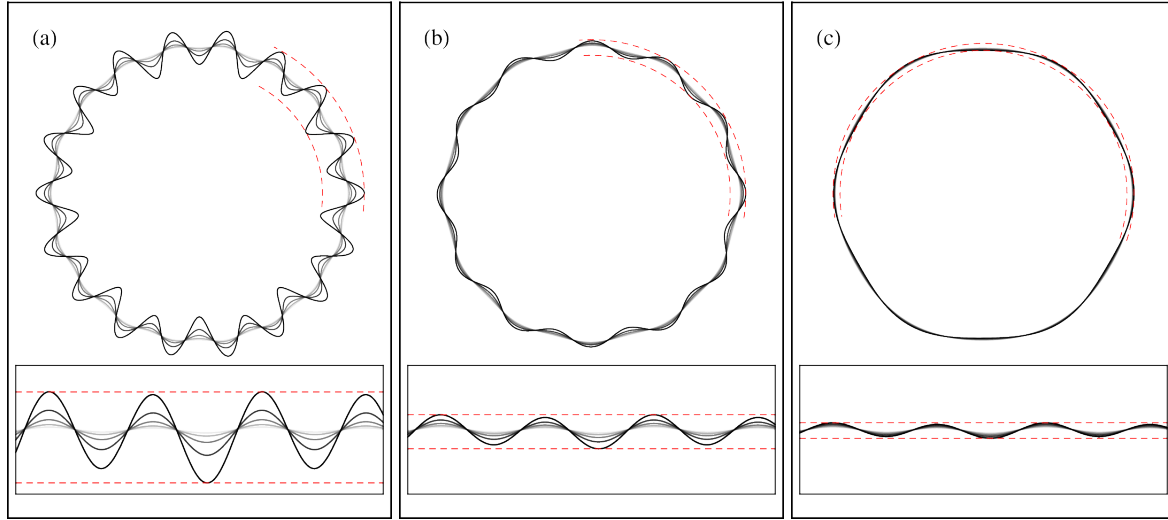


Figura 3.6 Inibição de instabilidades centrífugas em estágios fracamente não lineares. Instantâneos da evolução interfacial plotados em intervalos de tempos iguais ($\Delta t = 0.062$) para a interação entre o modo fundamental e seu sub-harmônico. Diferentes valores do parâmetro de tensão superficial variável $\mathfrak{B}$: (a) 0, (b) -3.4×10^{-3} , and (c) -1.7×10^{-2} . As curvas tracejadas são mostradas para guiar o olho do leitor em relação à competição dos dedos. As inserções retangulares ilustram visões de perto das regiões delimitadas pelas linhas tracejadas e cores mais escuras indicam tempos mais avançados.

fluido-fluido girante para diferentes valores do parâmetro de tensão superficial variável $\mathfrak{B}$: 0, -3.4×10^{-3} e -1.7×10^{-2} . As interfaces mostradas nesta figura foram calculadas com ajuda da Eq. (3.22), onde consideramos o acoplamento fracamente não linear de dois números de onda azimutal. O fundamental n^* foi usado como o número inteiro, par, mais próximo do número que maximiza a taxa de crescimento linear n_{max} , e o sub-harmônico associado foi $n^*/2$. Usamos as condições iniciais do problema tais que as amplitudes eram dadas por: $a_{n/2}(0) = b_{n/2}(0) = 1/750$ e $a_n(0) = 1/130$. Além disso, as interfaces são plotadas para um tempo adimensional $0 \leq t \leq 0.247$, onde os intervalos adimensionais entre uma interface e outra são os mesmos e iguais a $\Delta t = 0.062$ e, como já tínhamos comentado anteriormente, usaremos sempre $S = 1.14 \times 10^{-3}$ e $b = 10^{-2}$. Analisemos agora com cuidado a Fig. 3.6.

Examinando a Fig. 3.6(a), para $\mathfrak{B} = 0$, é evidente a diferença no comprimento dos dedos entrantes, caracterizando a competição destes dedos. A inserção retangular desta figura, mostra, em tamanho maior, uma parte dos dedos enclausurada pela linha vermelha tracejada. A linha foi traçada para ajudar o leitor a perceber, sem dúvidas, a diferença no comprimento dos dedos: alguns deles tocam a curva enquanto outros não. Por outro lado, também com ajuda da curva tracejada, é possível perceber os dedos saintes com praticamente os mesmos comprimentos, confirmando nossas previsões em que a competição entre esses dedos deve ser bem menos expressiva. Então, concluímos que ao considerar uma tensão superficial constante em toda a interface fluido-fluido, observamos uma grande competição entre os dedos entrantes, enquanto que os dedos saintes têm comprimentos semelhantes.

Um comportamento diferente é observado na Fig. 3.6(b) para $\mathfrak{B} = -3.4 \times 10^{-3}$: a introdução da tensão superficial variável age de tal forma a não só reduzir o número de dedos

existentes, reduzindo n_{max} como visto na Seção 3.3.1, mas também reduzir consideravelmente a competição entre os dedos. Olhando para a inserção desta figura, percebemos dedos vizinhos com comprimentos bem parecidos, salientando o fato da competição ter diminuído. Finalmente, incrementando ainda mais o valor de $\mathfrak{B}$ até um valor $\mathfrak{B} = -1.7 \times 10^{-2}$, obtemos uma situação bem mais estável para a interface que divide os fluidos, na qual o fenômeno da competição é dificilmente perceptível, como podemos ver na inserção da Fig. 2.8(c). Este fato suporta a idéia da tensão superficial variar com a curvatura da interface fluido-fluido ser um mecanismo eficaz na repressão da competição entre os dedos e das perturbações interfaciais em geral, também em estados fracamente não lineares.

A fim de reforçar a demonstração visual a cerca da ação do parâmetro de tensão superficial $\mathfrak{B}$ no fenômeno da competição entre os dedos, seguimos em frente ao analisar este efeito de maneira mais quantitativa, mostrada na Fig. 3.7. Introduzimos então o parâmetro $\Delta\mathcal{R}$

$$\Delta\mathcal{R} = |\mathcal{R}_i - \mathcal{R}_{i+1}|, \quad (3.27)$$

no intuito de medir mais diretamente eventos de competição. Esta nova grandeza expressa o valor absoluto na diferença entre posições interfaciais de dedos *entrantes* vizinhos i e $i+1$, com $\mathcal{R}_i$ sendo a posição radial da ponta do i -ésimo dedo entrante, enquanto $\mathcal{R}_{i+1}$ é a posição equivalente para o dedo vizinho. Este aspecto geométrico está esboçado na Fig. 3.7(a). Note que $\Delta\mathcal{R}$ nos fornece uma medida muito conveniente da variabilidade dos dedos entrantes ou, equivalentemente, da competição entre eles.

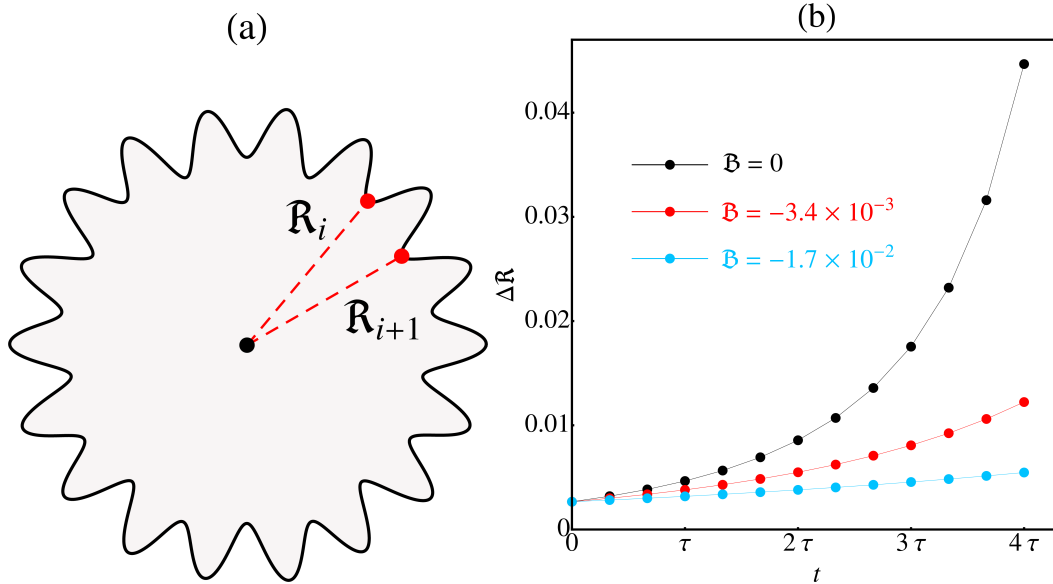


Figura 3.7 Figuras referentes aos padrões ilustrados na Fig. 3.6 onde os mesmo valores para os parâmetros físicos foram usados. A Fig. 3.6(b) mostra a diferença entre posições interfaciais da ponta dos dedos entrantes do fluido externo $\Delta\mathcal{R}$ (veja Eq. (3.27) e Fig. 3.7) em função do tempo, para diferentes valores do parâmetro de controle $\mathfrak{B}$. É fácil observar a significativa diminuição na competição entre os dedos ao introduzir os efeitos da tensão superficial dependente da curvatura. Aqui, $\tau = 15\Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo adimensional usado para plotar a Fig. 3.6.

Para finalizar, podemos retirar informações de grande importância sobre como o comportamento competitivo entre os dedos evolui no tempo quando submetemos o sistema a diferentes valores de $\mathfrak{B}$ voltando nossas atenções à Fig. 3.7(b), onde plotamos $\Delta\mathcal{R}$ em função do tempo. Perceba o decaimento nas curvas quando aplicamos uma tensão superficial não constante ao longo da interface, mostrando a diminuição na competição entre os dedos a medida que aumentamos $\mathfrak{B}$. Isto demonstra de uma maneira quantitativa que o espírito competitivo dos dedos é de fato afetado pelo parâmetro de tensão superficial variável $\mathfrak{B}$.

Com isto, fincamos um ponto final no capítulo tendo visto a real capacidade do modelo da tensão superficial variante com a curvatura da interface fluido-fluido em controlar o surgimento de instabilidades geradas por força centrífuga em geral, assim como o fenômeno particular da competição entre os dedos. Deixaremos, novamente, para sintetizar nossos resultados de maneira mais detalhada no Capítulo 4, onde faremos juntamente com as conclusões do estudo feito no Capítulo 2.

Conclusões e perspectivas

A habilidade de controlar a clássica instabilidade de Saffman-Taylor é essencial tanto no âmbito científico quanto no tecnológico. A versão convencional do problema, estudada por Saffman e Taylor mais de meio século atrás, nos diz que o deslocamento de um fluido por outro de menor viscosidade leva a uma interface instável entre eles, ou seja, apresentando deformações. Por outro lado, a situação de fluxo reverso, quando um fluido é deslocado por outro mais viscoso, é classicamente estável e tais deformações não são mais observadas. O surgimento destas paradigmáticas instabilidades resultando na formação de padrões diversos, tem influência, entre outras coisas, na eficiência de várias técnicas de engenharia. De fato, dependendo da situação em questão, a aparição de deformações na interface pode ser desejada ou não. Devido a este duplo papel assumido pela instabilidade, desenvolver e compreender técnicas tanto capazes de estimular o surgimento de perturbações na interface, quanto de controlar estas instabilidades, é um tópico de grande interesse atual [30–32, 86, 87].

Ao longo desta dissertação, usamos o método originalmente proposto por Guo, Hong e Kurtze [36, 37] para entender como uma tensão superficial não constante pode mudar drasticamente cenários clássicos. Especificamente no Cap. 2, mostramos que a consideração de uma tensão superficial dependente da curvatura da interface fluido-fluido pode levar o sistema a comportamentos interfaciais fundamentalmente diferentes do problema de Saffman-Taylor original. Em contraponto aos estudos feitos anteriormente [36, 37], onde simulações numéricas foram usadas para examinar o efeito da tensão interfacial variável na formação de padrões para o problema da injeção numa célula de Hele-Shaw retangular, aqui, aplicamos uma teoria perturbativa de modos acoplados relativamente simples, analisando como o acoplamento entre esta tensão superficial variável e efeitos tridimensionais relacionados ao ângulo de contato. Tal acoplamento permite uma manipulação direta da instabilidade clássica. Apesar de sua simplicidade, nosso modelo teórico [44] é capaz de estabilizar (desestabilizar) situações convencionalmente instáveis (estáveis). Este fato foi verificado tanto para estágios bem primordiais da dinâmica, via uma teoria linear, quanto para tempos um pouco mais avançados, pela introdução de termos fracamente não lineares à equação que rege a dinâmica interfacial.

Neste sentido, nosso estudo acerca da manipulação da instabilidade de Saffman-Taylor convencional, contribui relevantemente para o crescimento do material já existente na literatura no que diz respeito à controlabilidade de instabilidades interfaciais. Fornecemos assim um método alternativo capaz de estimular ou inibir o crescimento de protuberâncias interfaciais provenientes da interação viscosa entre fluidos confinados numa estreita célula de Hele-Shaw radial.

Já no Cap. 3, revisitamos o problema de fluxos em célula de Hele-Shaw girante, focando nossa atenção no controle de instabilidades induzidas por rotação [17, 58–63]. Como discutido

na seção 3.1, a crescente busca por entender a física por trás deste novo sistema, está relacionada com sua grande aplicabilidade tecnológica [82, 83], bem como sua destreza em servir como protótipo para modelagem de sistemas biológicos [60, 80, 81]. Em ambos os casos, o surgimento de deformações interfaciais é indesejado, como discutido previamente. Por este motivo, deixamos de lado a possibilidade de estimular as instabilidades, analisando apenas a possibilidade de inibição da mesma. Novamente, investigamos o efeito da tensão interfacial dependente da curvatura nas propriedades de estabilidade da interface fluido-fluido através de uma abordagem perturbativa fracamente não linear da situação de fluxo girante, igualmente simples quando comparada à desenvolvida no Cap. 2.

Nossa análise [45], possibilita o leitor verificar a eficácia do modelo da tensão superficial variável em controlar deformações interfaciais estimuladas por rotação, tanto em estágios puramente lineares da dinâmica, como para tempos iniciais de estágios não lineares. Em particular, mostramos que o fenômeno intrinsecamente não linear da competição entre os dedos pode ser sistematicamente reprimido, levando posteriormente à estabilização total da interface que divide os fluidos. Analogamente, esta segunda etapa do trabalho oferece contribuições adicionais para o crescente corpo literário de estudos recentes sobre diferentes estratégias que visam o controle de instabilidades hidrodinâmicas em geometrias confinadas de Hele-Shaw [13, 26, 30–32, 45, 87–90].

Como já foi discutido no Cap. 2, ainda é uma questão em aberto a direta correspondência entre o modelo teórico proposto por Guo *et al.* [36, 37] e os experimentos realizados com surfactantes em [38–41] numa célula de Hele-Shaw retangular, uma vez que o modelo teórico prevê um sentido de movimento dos dedos pontiagudos oposto ao observado nos experimentos. Neste contexto, uma extensão natural deste trabalho seria a investigação da influência do nosso modelo de tensão superficial dependente da curvatura da interface fluido-fluido (incluindo efeitos 3D associados ao ângulo de contato) na geometria confinada da célula de Hele-Shaw retangular. Esta futura análise, pode nos levar à reinterpretação dos resultados teóricos obtidos anteriormente para o sistema [36, 37], dando-nos uma luz sobre as possíveis propriedades morfológicas dos padrões formados, bem como a possibilidade de controlar ou estimular tais instabilidades no ambiente da célula retangular.

Finalmente, chegamos ao fim deste trabalho na esperança de que nosso estudo, bem como os resultados aqui obtidos, motivem investigadores experimentais a checar nossas previsões teóricas em relação à eficácia do protocolo de controle de instabilidades hidrodinâmicas via tensão superficial variando com a curvatura da interface fluido-fluido, tanto no caso da célula de Hele-Shaw radial induzida por injeção, quanto no sistema envolvendo fluxo girante.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Meinhardt, *Models of Biological Pattern Formation*. New York: Academic Press, 1982.
- [2] D. W. Thompson, *On Growth and Form*. Cambridge: Cambridge University Press, 1944.
- [3] P. S. Stevens, *Patterns in Nature*. Boston: Little Brown, 1974.
- [4] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. London: Oxford University, 1961.
- [5] P. G. Saffman and G. Taylor, “The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 245, pp. 312–329, June 1958.
- [6] R. L. Chuoke, P. van Meurs, and C. van der Poel, “The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media,” *Petrol. Trans. AIME*, vol. 216, p. 188, 1959.
- [7] L. Paterson, “Radial fingering in a Hele-Shaw cell,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 113, p. 513, 1981.
- [8] J. A. Miranda and M. Widom, “Radial fingering in a Hele-Shaw cell: a weakly nonlinear analysis,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 120, pp. 315–328, Sept. 1998.
- [9] J. D. Chen, “Radial viscous fingering patterns in Hele-Shaw cells,” *Exp. Fluids*, vol. 5, p. 363, 1987.
- [10] J. D. Chen, “Growth of radial viscous fingers in a Hele-Shaw cell,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 201, p. 223, 1989.
- [11] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim, and Y. Couder, “The Saffman-Taylor Instability : From the Linear to the Circular Geometry,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. A 1, pp. 224–240, 1989.
- [12] O. Praud and H. Swinney, “Fractal dimension and unscreened angles measured for radial viscous fingering,” *Physical Review E*, vol. 72, p. 011406, July 2005.
- [13] J.-J. Xu, Z. Li, J. Lowengrub, and H. Zhao, “A level-set method for interfacial flows with surfactant,” *Journal of Computational Physics*, vol. 212, pp. 590–616, Mar. 2006.

- [14] J. Mathiesen, I. Procaccia, H. L. Swinney, and M. Thrasher, “The universality class of diffusion-limited aggregation and viscous fingering,” *Europhysics Letters (EPL)*, vol. 76, pp. 257–263, Oct. 2006.
- [15] C.-Y. Chen, C.-W. Huang, H. Gadêlha, and J. Miranda, “Radial viscous fingering in miscible Hele-Shaw flows: A numerical study,” *Physical Review E*, vol. 78, p. 016306, July 2008.
- [16] K. McCloud and J. Maher, “Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow,” *Physics Reports*, 1995.
- [17] L. Carrillo, F. Magdaleno, J. Casademunt, and J. Ortín, “Experiments in a rotating Hele-Shaw cell,” *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, vol. 54, pp. 6260–6267, Dec. 1996.
- [18] M. J. Shelley, F.-R. Tian, and K. Wlodarski, “Hele - Shaw flow and pattern formation in a time-dependent gap,” *Nonlinearity*, vol. 10, pp. 1471–1495, Nov. 1997.
- [19] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, and D. Bonn, “Cohesive failure of thin layers of soft model adhesives under tension,” *Journal of Applied Physics*, vol. 93, no. 3, p. 1557, 2003.
- [20] C.-Y. Chen, C.-H. Chen, and J. Miranda, “Numerical study of pattern formation in miscible rotating Hele-Shaw flows,” *Physical Review E*, vol. 73, p. 046306, Apr. 2006.
- [21] C.-Y. Chen, S.-Y. Wu, and J. Miranda, “Fingering patterns in the lifting flow of a confined miscible ferrofluid,” *Physical Review E*, vol. 75, p. 036310, Mar. 2007.
- [22] E. Dias and J. Miranda, “Interfacial instabilities in periodically driven Hele-Shaw flows,” *Physical Review E*, vol. 80, p. 026303, Aug. 2009.
- [23] L. W. Lake, *Enhanced oil recovery*. NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [24] J. S. Langer, “Dendrites, viscous fingers, and the theory of pattern formation,” *Science (New York, N.Y.)*, vol. 243, pp. 1150–6, Mar. 1989.
- [25] H.-Y. Chu and H.-K. Lee, “Evolution of the Plasma Bubble in a Narrow Gap,” *Physical Review Letters*, vol. 107, p. 225001, Nov. 2011.
- [26] B. Jha, L. Cueto-Felgueroso, and R. Juanes, “Fluid Mixing from Viscous Fingering,” *Physical Review Letters*, vol. 106, p. 194502, May 2011.
- [27] A. Callan-Jones, J.-F. Joanny, and J. Prost, “Viscous-Fingering-Like Instability of Cell Fragments,” *Physical Review Letters*, vol. 100, p. 258106, June 2008.
- [28] G. Rousseaux, M. Martin, and A. De Wit, “Viscous fingering in packed chromatographic columns: non-linear dynamics,” *Journal of chromatography. A*, vol. 1218, pp. 8353–61, Nov. 2011.

- [29] E. O. Dias, F. Parisio, and J. A. Miranda, “Suppression of viscous fluid fingering: A piecewise-constant injection process,” *Physical Review E*, vol. 82, p. 067301, Dec. 2010.
- [30] E. O. Dias, E. Alvarez-Lacalle, M. S. Carvalho, and J. A. Miranda, “Minimization of Viscous Fluid Fingering: A Variational Scheme for Optimal Flow Rates,” *Physical Review Letters*, vol. 109, p. 144502, Oct. 2012.
- [31] D. Pihler-Puzović, P. Illien, M. Heil, and A. Juel, “Suppression of Complex Fingerlike Patterns at the Interface between Air and a Viscous Fluid by Elastic Membranes,” *Physical Review Letters*, vol. 108, p. 074502, Feb. 2012.
- [32] T. T. Al-Housseiny, P. A. Tsai, and H. A. Stone, “Control of interfacial instabilities using flow geometry,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 747–750, Aug. 2012.
- [33] T. Podgorski, M. Sostarecz, S. Zorman, and A. Belmonte, “Fingering instabilities of a reactive micellar interface,” *Physical Review E*, vol. 76, p. 016202, July 2007.
- [34] M. Mishra, P. M. J. Trevelyan, C. Almarcha, and A. De Wit, “Influence of Double Diffusive Effects on Miscible Viscous Fingering,” *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 204501, Nov. 2010.
- [35] L. A. Riolfo, Y. Nagatsu, S. Iwata, R. Maes, P. M. J. Trevelyan, and A. De Wit, “Experimental evidence of reaction-driven miscible viscous fingering,” *Physical Review E*, vol. 85, p. 015304, Jan. 2012.
- [36] H. Guo, D. Hong, and D. Kurtze, “Surface-Tension-Driven Nonlinear Instability in Viscous Fingers,” vol. 69, no. 10, pp. 1520–1523, 1992.
- [37] H. Guo, D. Hong, and D. Kurtze, “Dynamics of viscous fingers and threshold instability,” *Physical Review E*, vol. 51, no. 5, 1995.
- [38] C. Chan and N. Liang, “Observations of Surfactant Driven Instability in a Hele-Shaw Cell,” *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 4381–4384, Dec. 1997.
- [39] C. Chan, “Surfactant wetting layer driven instability in a Hele-Shaw cell,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 288, pp. 315–325, Dec. 2000.
- [40] R. Krechetnikov and G. M. Homsy, “On a new surfactant-driven fingering phenomenon in a Hele-Shaw cell,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 509, pp. 103–124, June 2004.
- [41] J. Fernandez, R. Krechetnikov, and G. M. Homsy, “Experimental study of a surfactant-driven fingering phenomenon in a Hele-Shaw cell,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 527, pp. 197–216, Mar. 2005.
- [42] D. Bonn, H. Kellay, M. Amar, and J. Meunier, “Viscous Finger Widening with Surfactants and Polymers,” *Physical review letters*, vol. 75, no. 11, pp. 2132–2135, 1995.

- [43] A. He, J. Lowengrub, and A. Belmonte, “Modeling an Elastic Fingering Instability in a Reactive Hele-Shaw Flow,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 72, no. 3, pp. 842–856, 2012.
- [44] F. M. Rocha and J. A. Miranda, “Manipulation of the Saffman-Taylor instability: A curvature-dependent surface tension approach,” *Physical Review E*, vol. 87, p. 013017, Jan. 2013.
- [45] F. M. Rocha and J. A. Miranda, “Control of centrifugal fingering via a variable interfacial tension approach,” *Physical Review E*, vol. 88, p. 033008, Sept. 2013.
- [46] H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Distribution d’eau et Filtrage des Eaux*. 1856.
- [47] Z. U. A. Warsi, *Fluid Dynamics: theoretical and computational approaches*. CRC press, 2nd ed.
- [48] D. J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford university press, 1st ed., 1990.
- [49] J. Langer, “Instabilities and pattern formation in crystal growth,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 52, no. 1, 1980.
- [50] G. Homsy, “Viscous fingering in porous media,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1987.
- [51] Y. Pawar and K. J. Stebe, “Marangoni effects on drop deformation in an extensional flow: The role of surfactant physical chemistry. I. Insoluble surfactants,” *Physics of Fluids*, vol. 8, no. 7, p. 1738, 1996.
- [52] P. G. Saffman, “Viscous fingering in Hele-Shaw cells,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 173, p. 73, 1986.
- [53] G. Park, C.-W.; Homsy, “Two-phase displacement in Hele Shaw cells: theory,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 139, p. 291, 1984.
- [54] J. A. Miranda and M. Widom, “Weakly Nonlinear Investigation of the Saffman-Taylor Problem in a Rectangular Hele-Shaw Cell,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 12, no. 09, p. 931, 1998.
- [55] S. Wilson, “A Note on the Measurement of Dynamic Contact Angles,” *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 51, no. 3, pp. 532–534, 1975.
- [56] J. A. Miranda, *Weakly nonlinear analysis of the Saffman-Taylor problem*. PhD thesis, Carnegie Mellon, 1998.
- [57] L. W. Schwartz, “Instability and fingering in a rotating Hele-Shaw cell or porous medium,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 1, no. 2, p. 167, 1989.

- [58] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, “Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell,” *Physics of Fluids*, vol. 16, no. 4, p. 908, 2004.
- [59] J. Miranda and E. Alvarez-Lacalle, “Viscosity contrast effects on fingering formation in rotating Hele-Shaw flows,” *Physical Review E*, vol. 72, p. 026306, Aug. 2005.
- [60] S. L. Waters and L. J. Cummings, “Coriolis effects in a rotating Hele-Shaw cell,” *Physics of Fluids*, vol. 17, no. 4, p. 048101, 2005.
- [61] A. Abidate, S. Aniss, O. Caballina, and M. Souhar, “Effects of circular rigid boundaries and Coriolis forces on the interfacial instability in a rotating annular Hele-Shaw cell,” *Physical Review E*, vol. 75, p. 046307, Apr. 2007.
- [62] R. Folch, E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, “Pattern formation and interface pinch-off in rotating Hele-Shaw flows: A phase-field approach,” *Physical Review E*, vol. 80, p. 056305, Nov. 2009.
- [63] E. O. Dias and J. E. Miranda, “Inertial effects on rotating Hele-Shaw flows,” *Physical Review E*, vol. 83, p. 046311, Apr. 2011.
- [64] L. Carrillo, J. Soriano, and J. Ortín, “Interfacial instabilities of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell,” *Physics of Fluids*, vol. 12, no. 7, p. 1685, 2000.
- [65] L. Carrillo, J. Soriano, and J. Ortín, “Radial displacement of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell,” *Physics of Fluids*, vol. 11, no. 4, p. 778, 1999.
- [66] E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt, and J. Ortín, “Systematic weakly nonlinear analysis of radial viscous fingering,” *Physical Review E*, vol. 68, p. 026308, Aug. 2003.
- [67] F. X. Magdaleno, A. Rocco, and J. Casademunt, “Interface dynamics in Hele-Shaw flow with centrifugal forces: Preventing cusp singularities with rotation,” *Physical Review E*, vol. 62, no. 5, 2000.
- [68] C. Chen and S. Wang, “Interfacial instabilities of miscible fluids in a rotating Hele-Shaw cell,” *Fluid dynamics research*, vol. 30, pp. 315–330, 2002.
- [69] J. Miranda, “Rotating Hele-Shaw cells with ferrofluids,” *Physical Review E*, vol. 62, pp. 2985–2988, Aug. 2000.
- [70] D. Jackson and J. Miranda, “Controlling fingering instabilities in rotating ferrofluids,” *Physical Review E*, vol. 67, p. 017301, Jan. 2003.
- [71] H. Gadêlha and J. Miranda, “Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells,” *Physical Review E*, vol. 70, p. 066308, Dec. 2004.
- [72] H. Gadêlha, N. Brito, and J. Miranda, “Dynamics of viscous fingers in rotating Hele-Shaw cells with Coriolis effects,” *Physical Review E*, vol. 75, p. 016305, Jan. 2007.

- [73] D. G. Crowdy, “Theory of exact solutions for the evolution of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell,” *Q. Appl. Math.*, vol. 60, no. 1, p. 11, 2002.
- [74] E. S. Leandro, R. M. Oliveira, and J. a. Miranda, “Geometric approach to stationary shapes in rotating Hele-Shaw flows,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 237, pp. 652–664, May 2008.
- [75] R. López, “A comparison result for radial solutions of the mean curvature equation,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, pp. 860–864, June 2009.
- [76] M. Ehrnström, J. Escher, and B.-V. Matioc, “Well-Posedness, Instabilities, and Bifurcation Results for the Flow in a Rotating Hele-Shaw Cell,” *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, vol. 13, pp. 271–293, Feb. 2010.
- [77] N. R. McDONALD, “Generalised Hele-Shaw flow: A Schwarz function approach,” *European Journal of Applied Mathematics*, vol. 22, pp. 517–532, May 2011.
- [78] J. Casademunt, “Exploring topological singularities with phase-field methods,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 126, p. 94, Oct. 2011.
- [79] S. L. Waters, L. J. Cummings, K. M. Shakesheff, and F. R. a. J. Rose, “Tissue growth in a rotating bioreactor. Part I: mechanical stability,” *Mathematical medicine and biology : a journal of the IMA*, vol. 23, pp. 311–37, Dec. 2006.
- [80] M. A. Fardin, O. M. Rossier, P. Rangamani, P. D. Avigan, N. C. Gauthier, W. Vonnegut, a. Mathur, J. Hone, R. Iyengar, and M. P. Sheetz, “Cell spreading as a hydrodynamic process,” *Soft Matter*, vol. 6, no. 19, p. 4788, 2010.
- [81] C. Blanch-Mercader and J. Casademunt, “Spontaneous Motility of Actin Lamellar Fragments,” *Physical Review Letters*, vol. 110, p. 078102, Feb. 2013.
- [82] L. W. Schwartz and R. V. Roy, “Theoretical and numerical results for spin coating of viscous liquids,” *Physics of Fluids*, vol. 16, no. 3, p. 569, 2004.
- [83] K. Holloway, P. Habdas, N. Semsarillar, K. Burfitt, and J. de Bruyn, “Spreading and fingering in spin coating,” *Physical Review E*, vol. 75, p. 046308, Apr. 2007.
- [84] J. Marion and S. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 1995.
- [85] C.-Y. Chen, Y.-S. Huang, and J. A. Miranda, “Diffuse-interface approach to rotating Hele-Shaw flows,” *Physical Review E*, vol. 84, p. 046302, Oct. 2011.
- [86] A. Juel, “Fluid dynamics: Flattened fingers,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 706–707, Aug. 2012.
- [87] R. M. Wilson, “Flow geometry controls viscous fingering,” *Phys. Today*, vol. 65, no. 10, p. 15, 2012.

- [88] D. Pihler-Puzović, R. Périllat, M. Russell, A. Juel, and M. Heil, “Modelling the suppression of viscous fingering in elastic-walled Hele-Shaw cells,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 731, pp. 162–183, Aug. 2013.
- [89] T. T. Al-Housseiny and H. A. Stone, “Controlling viscous fingering in tapered Hele-Shaw cells,” *Physics of Fluids*, vol. 25, no. 9, p. 092102, 2013.
- [90] T. T. Al-Housseiny, I. C. Christov, and H. A. Stone, “Two-Phase Fluid Displacement and Interfacial Instabilities Under Elastic Membranes,” *Physical Review Letters*, vol. 111, p. 034502, July 2013.
- [91] C.-Y. Chen, Y.-S. Yang, and J. Miranda, “Miscible ferrofluid patterns in a radial magnetic field,” *Physical Review E*, vol. 80, p. 016314, July 2009.
- [92] S. K. Das and K. Binder, “Universal Critical Behavior of Curvature-Dependent Interfacial Tension,” *Physical Review Letters*, vol. 107, p. 235702, Nov. 2011.
- [93] J. S. Rowlinson and B. Widom, *Molecular theory of capillarity*. New York: Oxford, 1982.
- [94] J. Rowlinson, “A drop of liquid,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 1, 1994.
- [95] T. Squires and S. Quake, “Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale,” *Reviews of modern physics*, vol. 77, no. July, 2005.

APÊNDICE A

Manipulation of the Saffman-Taylor instability: A curvature-dependent surface tension approach.

PHYSICAL REVIEW E 87 013017 (2013)

Manipulation of the Saffman-Taylor instability: A curvature-dependent surface tension approach

Francisco M. Rocha and José A. Miranda*

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil

(Received 9 October 2012; revised manuscript received 14 December 2012; published 23 January 2013)

A variant of the classic Saffman-Taylor instability problem is reported, in which the surface tension at the fluid-fluid interface depends on the interfacial curvature. We show that the interplay between the variable surface tension and three-dimensional effects connected to the contact angle significantly modifies the scenario of instability formation. This allows the manipulation of the Saffman-Taylor instability, leading to the stabilization (destabilization) of conventionally unstable (stable) situations. This is done analytically through a perturbative mode-coupling approach, providing relevant information about both linear and weakly nonlinear regimes of interface evolution.

DOI: [10.1103/PhysRevE.87.013017](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.013017)

PACS number(s): 47.15.gp, 47.20.Ma, 47.55.N-, 47.54.-r

I. INTRODUCTION

The Saffman-Taylor instability [1] occurs when a fluid displaces another of higher viscosity between the narrowly spaced parallel plates of a Hele-Shaw cell (HSC) [2]. The lower viscosity fluid penetrates the more viscous one in a pattern resembling a set of fingers, characterizing a phenomenon commonly known as viscous fingering. For typical longitudinal flow in a rectangular channel (rectangular HSC) [3–7] the system evolves until a single stable finger forms. On the other hand, for radial fluid injection (radial HSC) [8–11] the fingers tend to multiply and develop further into a complex branched morphology. In the framework of the classic Saffman-Taylor problem there is no instability when a more viscous fluid displaces a less viscous one, constituting a stable, reverse flow displacement. Likewise, conventional Hele-Shaw flow with viscosity-matched fluids is also stable.

The viscous fingering problem has been actively studied over half a century and is an archetype for a wide range of fields, including research in oil recovery processes [12], dendritic solidification [13], fluid mixing [14], microdischarges in plasmas [15], and biodynamics of cell fragmentation [16]. Despite the large body of literature focusing on the development of the Saffman-Taylor instability, it is important to emphasize that, depending on the situation, the emergence of finger-forming structures can be seen as either a good or a bad thing. For instance, it is well known that viscous fingering is a major factor in reducing oil recovery from underground petroleum reservoirs [12]. Viscous fingering can be also detrimental to chromatographic separation processes [17]. Conversely, these instabilities are quite advantageous to improve mixing in small-scale devices [14]. Therefore, depending on the circumstances or particular application, either a stable or an unstable interface can characterize the most desirable scenario. In this context, it is crucial to understand how to properly manipulate the growth and decay of these interfacial instabilities.

Because of the dual role played by the viscous fingering instability there has been an increased recent interest in trying to inhibit the conventional destabilizing situation, as well as to trigger the instability in the stable reverse case.

Some interesting strategies have been proposed to stabilize the interface [18–21]. It has been shown both experimentally and theoretically [18,19] that the use of a proper injection rate leads to a minimization of interfacial disturbances in a radial HSC. By employing such an injection-controlled procedure instead of typical ramified fingering one obtains a nearly circular evolving interface. Another stabilization scheme [20] considered experiments in a modified radial flow setup where the rigid upper plate of the HSC is replaced by a flexible membrane. An additional study, now in rectangular geometry [21], has demonstrated by linear stability analysis and experiments that the introduction of a small gradient in the gap of the HSC, so that the plates are not exactly parallel, can suppress the interfacial instability.

Other research groups [22–31] focused on the prospect of inducing fingering formation by destabilizing the classically stable situation of a more viscous fluid displacing a less viscous one or the stable case in which the fluids have the same viscosity. Experiments using two miscible fluids of equal viscosities which react at the interface [22] have been shown to be unstable, producing a variety of interfacial patterns, including mushroom-shaped structures and tentaclelike fingers. A subsequent theoretical investigation of such a reactive system has been able to account for some of these anomalous fingering instabilities [23] by considering the interface as elastic, presenting a curvature-dependent bending rigidity. Sophisticated numerical simulations have also detected the occurrence of a reversed Saffman-Taylor instability in miscible viscous fingering due to double-diffusive effects [24]. Finally, recent experiments of reaction-driven miscible viscous fingering [25] confirmed that chemical reactions can indeed destabilize the classically stable reverse situation.

A particularly interesting example, which does not involve complicated chemical reactions at the interface, explores the development of the reversed viscous fingering instability in a rectangular HSC [26,27]. The so-called surface tension-driven instability could arise if one considers a curvature-dependent surface tension model in which the surface tension modifies in proportion to the local curvature of the evolving interface. It has been hypothesized that such an instability could occur if surfactants are added to the moving interface, so that the presence of the surfactant would cause the surface tension to vary along the fluid-fluid boundary. In fact, this basic idea is supported by some experiments in rectangular HSC

*jme@df.ufpe.br

with surfactants [32]. Moreover, a similar variable interfacial tension approach is utilized in crystal theory where a dependence of the surface tension on the curvature is introduced to smooth out the crystal corners [33]. Numerical simulations of the curvature-dependent surface tension system in rectangular HSC [26,27] predicted the formation of narrow, spiky fingers pointing in the direction of the interface motion.

Further theoretical and experimental studies on this class of problem have been executed in Refs. [28–31], but the experimental search for the instability predicted in [26,27] was not exactly successful. Reversed flow experiments showed the development of fingering patterns with blunted fronts and sharp trailing tails resembling the structures theoretically predicted in Refs. [26,27], but with the sharp tails pointing in the direction opposite to the interface motion. The authors in [28–31] claimed the existence of a somewhat different type of phenomenon (a surfactant-driven one) in which the presence of a pre-existing wetting layer of surfactant was a necessary condition for the onset of the instability. In any case, from the findings of Refs. [28–31] apparently the curvature-dependent surface tension model proposed in [26,27] was not able to correctly predict the correct direction of the fingers observed in their experiments. However, the theoretical model carried out in [26,27] captures the most salient morphological features of the patterns observed experimentally in Refs. [28–31].

It is worthwhile to note that in the studies of Refs. [26–31] the emphasis was on the evolution of the interfacial morphologies and not exactly on controlling the fingering instabilities. In the present work we revisit the curvature-dependent surface tension model originally proposed by Guo, Hong, and Kurtze [26,27] and extend it in several directions. First, in contrast to [26–31], we focus on either triggering or suppressing the Saffman-Taylor instability by proposing an augmented version of the Young-Laplace boundary condition. The modified condition properly couples the action of a curvature-dependent surface tension with three-dimensional (3D) effects related to the wetting contact angle at the interface. In addition, instead of addressing the simpler rectangular HSC situation examined in [26–31], we tackle the still unexplored radial flow geometry case. The problem is particularly well suited to analytical treatment, permitting a simplified description of important stability and morphological aspects during linear and early nonlinear flow stages. All this is done by employing a simple second-order mode-coupling theory.

II. MODE-COUPLING AND VARIABLE SURFACE TENSION APPROACH

Consider a HSC of constant gap spacing b containing two immiscible, incompressible, viscous fluids (see Fig. 1). Denote the viscosities of the inner and outer fluids, respectively, as η_1 and η_2 . Between the two fluids there exists a surface tension σ that can vary along the fluid-fluid interface. Fluid 1 is injected into fluid 2 at a constant injection rate Q (equal to the area covered per unit time). We describe the perturbed fluid-fluid interface as $\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, where θ represents the azimuthal angle, and $R(t) = [R_0^2 + Qt/\pi]^{1/2}$ is the time-dependent unperturbed radius, with R_0 being the unperturbed radius at $t = 0$. In addition, $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$

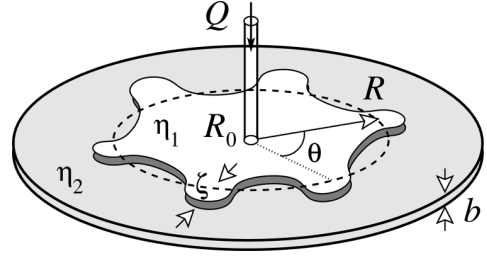


FIG. 1. Schematic representation of a radial HSC.

denotes the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$ and integer azimuthal wave numbers n .

Our perturbative mode-coupling approach keeps terms up to the second order in ζ in a radial HSC. This is in contrast to the third-order perturbative analysis executed by Guo *et al.* [26,27] in their rectangular HSC study. In the Fourier expansion of ζ we include the $n = 0$ mode to maintain the area of the perturbed shape independent of the perturbation ζ . Mass conservation imposes that the zeroth mode is written in terms of the other modes as $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$.

For the quasi-2D geometry of the HSC, the equation of motion of the interface is given by the gap-averaged Darcy's law [1,2,8–10],

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j, \quad (1)$$

where $\mathbf{v}_j$ and p_j represent the gap-averaged velocity and pressure of fluid j , where $j = 1, 2$. From Eq. (1) and the incompressibility condition $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$ it can be verified that the velocity potential ϕ_j ($\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j$) obeys Laplace's equation $\nabla^2 \phi_j = 0$.

The problem is specified by two boundary conditions. The first one, which is absolutely essential to our manipulation strategy, is a modified version of the usual Young-Laplace pressure boundary condition,

$$p_1 - p_2 = \sigma(K)\mathcal{K}. \quad (2)$$

It expresses that the pressure difference between the fluids is governed by the mean curvature of the fluid-fluid interface,

$$\mathcal{K} = \kappa + \kappa_\perp, \quad (3)$$

where κ denotes the spatially varying interfacial curvature in the plane of the HSC [2] and

$$\kappa_\perp = \frac{2}{b} \cos \theta_c \quad (4)$$

is the constant curvature associated with the interface profile in the direction perpendicular to the HSC plates, set by the static contact angle θ_c measured between the plates and the curved meniscus (assumed to be circular with radius $b/2$)

In Eq. (2) note the presence of a curvature-dependent surface tension given by

$$\sigma(K) = \sigma_0 + \beta K, \quad (5)$$

where the control parameter β can be positive, negative, or zero, and σ_0 is the surface tension when $\beta = 0$ [26,27,34]. Depending on the values of β and θ_c , the effective surface tension can be either reduced or increased when the interface

bulges into the displaced fluid, altering the stability of the fluid-fluid interface.

Before we proceed, we briefly discuss how the controlling parameter β can be related to relevant experimental quantities, such as the surfactant concentration. When surfactants are present the relation between the surfactant concentration c and the surface tension is given by a linearized Langmuir equation of state [34,35],

$$\sigma(c) = \gamma_0 - \alpha c, \quad (6)$$

with γ_0 being the surface tension for a clean interface ($c = 0$), $\alpha = RT$, where R denotes the ideal gas constant and T is the temperature. Equation (6) holds in the limit $c \ll c_\infty$, where c_∞ represents the surfactant concentration at maximum packing (or the critical micellar concentration). In the context of our problem [26,27] one can expand the concentration to leading order in curvature as

$$c(\mathcal{K}) = c_0 - \frac{\partial c}{\partial \mathcal{K}} \mathcal{K}, \quad (7)$$

where c_0 is the concentration at the flat interface. The presence of the minus sign in front of the second term on the right hand side of (7) is justified by the fact that it is entropically unfavorable to pack surfactant molecules in a region of positive curvature [26,27]. By substituting Eq. (7) into Eq. (6) and comparing the resulting expression with Eq. (5) we obtain that

$$\sigma_0 = \gamma_0 - RTc_0, \quad \text{and} \quad \beta = RT \frac{\partial c}{\partial \mathcal{K}}.$$

These expressions connect σ_0 and β with the experimentally relevant quantities of the physical system.

At this point it is important to emphasize that the theoretical predictions based on the variation of the interfacial tension with curvature as given by Eq. (5), originally proposed by Guo *et al.* [26,27], have been experimentally investigated for the case of flow in rectangular HSCs [28–31]. In these experiments, interfacial patterns very similar to the ones theoretically computed in [26,27] are obtained, as long as the displacing liquid is a surfactant solution, and a wetting layer of the surfactant solution prewets the walls of the rectangular HSC. As pointed out in Sec. I the major pending issue regarding the comparison between theory [26,27] and experiments [28–31] refers to the direction of the motion of the sharp fingers, which was opposite to the one detected experimentally. However, the overall shape of the resulting patterns is properly reproduced. These facts support the idea that, despite the possibility of the presence of some other physical mechanisms, the situation introduced in Refs. [26,27] is not a mere theoretical exercise, but can actually be observed in a real experimental system. Although we are not aware of any directly related experiments in a radial HSC, the experimental implementation of the radial injection-driven problem we present in this work is as plausible as the ones already performed in rectangular geometry [28–31].

We stress that the consideration of Eq. (4) is crucial to our instability manipulation procedure, since it incorporates the influence of the third dimension through the curvature $\kappa_\perp$ and accounts for the action of the contact angle θ_c . The displaced fluid is said to be wetting (or completely or perfectly wetting) if the contact angle is zero, nonwetting for $\theta_c = \pi$, and partially

wetting for all other situations. Of course, if the fluid-fluid interface is ideally assumed to be perpendicular to the plates, $\theta_c = \pi/2$, and the 3D contribution vanishes [5]. We point out that the contribution of this relevant 3D term has not been taken into account in Refs. [26,27]. Our analysis does not consider the effect of a thin wetting film trailing behind the displaced fluid [4]. As in Ref. [21], we are interested in typical HSC circumstances under which this effect can be safely neglected.

There exists a subtle interplay between the curvature-dependent surface tension $\sigma(\mathcal{K})$ and the 3D term given by Eq. (4): If the surface tension does not depend on the curvature ($\beta = 0$), since the 3D term is constant (its gradient is zero), it does not affect the motion of the interface. However, if $\beta \neq 0$ we have the coupling of β and the spatially varying in-plane curvature κ with the 3D term. This can be more clearly verified by substituting Eqs. (3)–(5) into the pressure boundary condition (2), yielding

$$p_1 - p_2 = \sigma_0 \kappa + \beta \kappa^2 + \frac{4\beta \kappa \cos \theta_c}{b}, \quad (8)$$

where irrelevant constant terms have been dropped out. By inspecting the last term on the right hand side of Eq. (8), we confirm the appearance of a spatially variable contribution involving the product of β and the contact angle term $\cos \theta_c$. Again, since both β and $\cos \theta_c$ can change signs, the coupling between them is a fundamental asset to allow a proper manipulation of the Saffman-Taylor instability.

The second important boundary condition, known as the kinematic boundary condition, states that the normal components of each fluid's velocity are continuous at the interface,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_2, \quad (9)$$

with $\mathbf{n} = \nabla[r - \mathcal{R}(\theta, t)]/|\nabla[r - \mathcal{R}(\theta, t)]|$ representing the unit normal vector at the interface.

To obtain a mode-coupling differential equation for the interface evolution, we follow standard steps performed in weakly nonlinear studies in HSC [7,10]: From the solution of Laplace's equation we define Fourier expansions for the velocity potentials. Then, we express ϕ_j in terms of the perturbation amplitudes ζ_n by considering condition (9). Substituting these relations, and the modified pressure jump condition Eq. (8) into Eq. (1), always keeping terms up to second order in ζ , and Fourier transforming, we find the equation of motion for the perturbation amplitudes (for $n \neq 0$),

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n) \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} [F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'}], \quad (10)$$

where the overdot denotes total time derivative,

$$\lambda(n) = \frac{Q}{2\pi R^2} (A|n| - 1) - \frac{\alpha}{R^3} \left[\sigma_0 + 2\beta \left(\frac{2 \cos \theta_c}{b} + \frac{1}{R} \right) \right] |n| (n^2 - 1) \quad (11)$$

is the linear growth rate, $\alpha = b^2/[12(\eta_1 + \eta_2)]$, and $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ is the viscosity contrast.

The second-order mode-coupling terms are given by

$$F(n, n') = \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{QA}{2\pi R^2} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nn') \right] - \frac{\alpha}{R^3} \left(\sigma_0 + 4\beta \frac{\cos \theta_c}{b} \right) \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] - \frac{\alpha\beta}{R^4} [3 - n'(5n' + n) + n'^2(n - n')^2] \right\} \quad (12)$$

and

$$G(n, n') = \frac{1}{R} \{ A|n| [1 - \text{sgn}(nn')] - 1 \}. \quad (13)$$

The sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. While the dispersion relation (11) provides important information about the linear stability of the interface, the nonlinear terms (12) and (13) offer key analytical insights into the basic morphology of the emerging patterns at the weakly nonlinear regime [7,10]. We stress that the values we take for our physical parameters are consistent with typical quantities used in real experiments for injection-driven radial viscous flow [8–11].

III. DISCUSSION

In contrast to what occurred in Refs. [26,27], where the effect of the variable surface tension could not be detected by linear analysis, here we can extract very relevant information about the role played by the curvature-dependent surface tension on the stability of the interface, already at the linear regime.

First, we focus on the usual, most unstable configuration in which a less viscous, nonwetting fluid pushes a more viscous, perfectly wetting one ($A = 1$, $\theta_c = 0$) in an injection-driven flow ($Q > 0$). By inspecting the linear growth rate (11) we see

that in this case the injection term is destabilizing, while the surface tension term can be either stabilizing or destabilizing depending on the sign of the parameter β . Of course, without the curvature-dependent surface tension ($\beta = 0$), the dispersion relation reduces to well-known unstable results [8–10]. If $\beta < 0$ the interface would be further destabilized. As a matter of fact, the most interesting case occurs when $\beta > 0$ so that the interface could be stabilized. Recall that Hele-Shaw flows consider a high aspect ratio situation where $R \gg b$ so that the contact angle contribution in the surface tension term ($\sim \beta/b$) in Eq. (11) dominates over the term proportional to β/R .

A very useful way of organizing important results at the linear level is to plot a stability “phase diagram” for the system. This can be done by considering the stability curves for which $\lambda(n) = 0$. By setting Eq. (11) to zero and by neglecting the surface tension term proportional to β/R we obtain

$$QR = \frac{2\pi\alpha|n|(n^2 - 1)}{A|n| - 1} \left[\sigma_0 + \frac{4\beta \cos \theta_c}{b} \right]. \quad (14)$$

We use Eq. (14) to plot phase diagrams in $QR - \beta$ parameter space in Figs. 2(a) and 2(b). Notice that the quantity expressed by the product QR (injection rate multiplied by the unperturbed radius of the evolving interface) is a particularly convenient parameter, making the diagrams valid for all values of R (or, equivalently, all values of time). Figure 2 shows the stability curves for each Fourier mode n as solid black lines, which determine when a given mode becomes unstable. This is done for the most unstable classical situation ($A = 1$, $\theta_c = 0$) in Fig. 2(a), while Fig. 2(b) addresses the most stable classical scenario ($A = -1$, $\theta_c = \pi$). The dividing line for mode $n = 2$ separates the stable and unstable regions of the diagrams (the

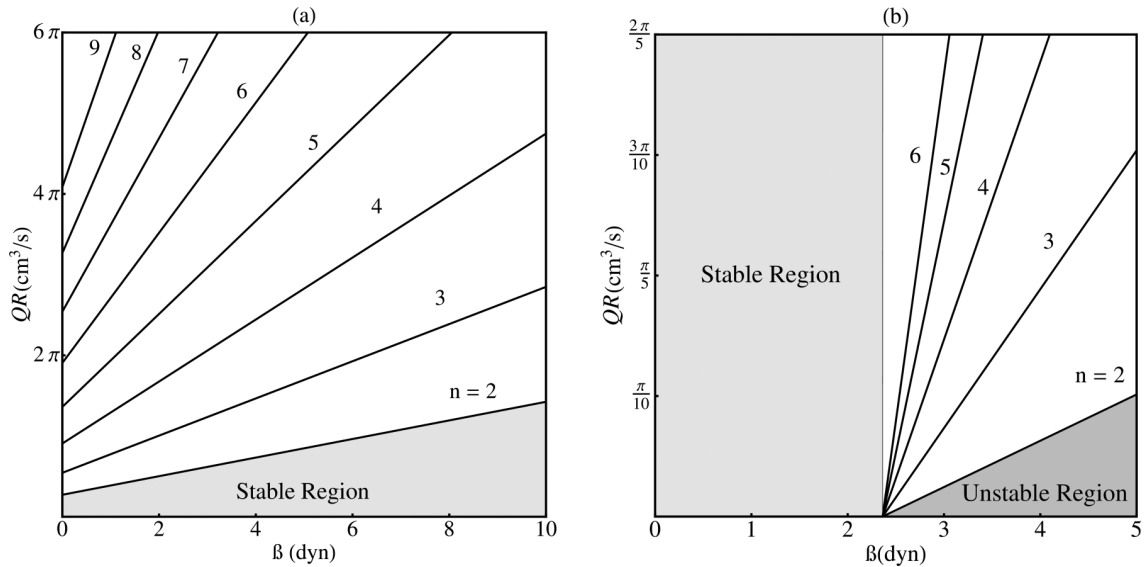


FIG. 2. Linear stability phase diagrams showing the stability curves (solid black lines) for (a) $A = 1$, $\theta_c = 0$, and (b) $A = -1$, $\theta_c = \pi$. The areas in light gray identify stable regions, while the area in dark gray refers to a unstable region. Here we utilize typical physical parameters used in radial flow experiments [8,9]: $\sigma_0 = 63$ dyne/cm and $b = 0.15$ cm. Moreover, the viscosity of the more viscous fluid is 5.21 g/(cm s), while the other fluid has negligible viscosity.

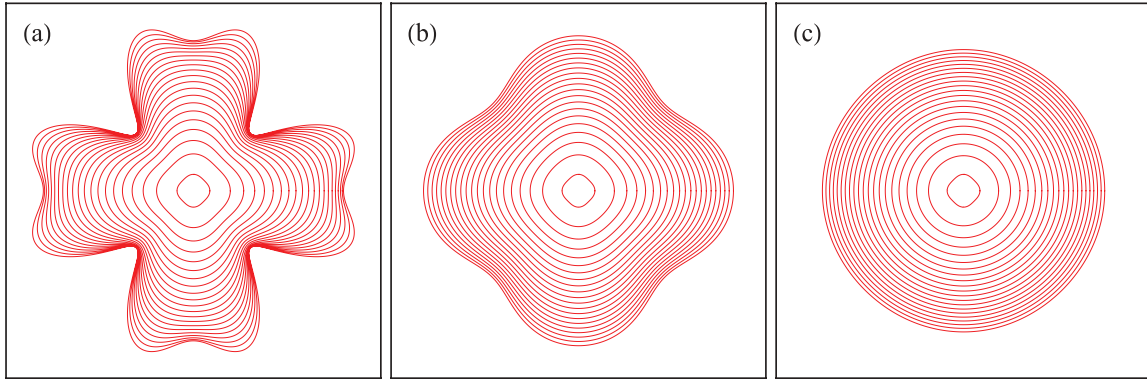


FIG. 3. (Color online) Inhibition of fingering. Snapshots of the evolving interface, plotted at equal time intervals ($\Delta t = 0.5$ s) for the interaction of two cosine modes $n = 4$ and $2n = 8$ when $A = 1$ (inner fluid is less viscous), $\theta_c = 0$, and $Q = 2\pi$ cm²/s. Three values of the parameter β are used: (a) 0 dyne, (b) 1 dyne, and (c) 4 dyne. Here $0 \leq t \leq 10$ s. Interfacial instabilities (including tip splitting) are clearly present in (a), but increasingly suppressed in (b) and (c).

stable regions are depicted in light gray). In Fig. 2(a), one can see that for a specified value of QR , and by increasing β one can go from an unstable region to the stable zone. Therefore, by properly choosing the values of the parameters QR and β that lie inside the stable region, one is able to control the classical Saffman-Taylor instability which occurs when $A = 1$, $\theta_c = 0$, and $\beta = 0$. On the other hand, Fig. 2(b) shows that the classically stable (reverse flow) situation characterized by $A = -1$, $\theta_c = \pi$, and $\beta = 0$ could be eventually destabilized by conveniently choosing the adequate set of parameters in the phase diagram. In this figure the unstable region is shown in dark gray. Notice that in Fig. 2(b) all stability lines converge to a single critical value of $\beta = \beta_c = \sigma_0 b/4$ below which the system is stable for all values of QR .

To check the linear predictions discussed above for the possible stabilization or destabilization of the fluid-fluid interface when $\beta > 0$, in Fig. 3 we present mode-coupling simulations for the interface evolution. To capture the essential morphology of the system we consider the coupling of the fundamental mode n with its harmonic mode $2n$. This is done because this simple coupling is able to illustrate the emergence of finger tip-splitting events at the weakly nonlinear regime when $\beta = 0$ [10]. We rewrite the mode-coupling equation (10) in terms of cosine modes $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$, considering the interplay of modes n and $2n$, to obtain

$$\dot{a}_{2n} = \lambda(2n)a_{2n} + \frac{1}{2}[F(2n, n) + \lambda(n)G(2n, n)]a_n^2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_n = \lambda(n)a_n + \frac{1}{2}\{[F(n, 2n) + \lambda(2n)G(n, 2n)] \\ + [F(n, -n) + \lambda(n)G(n, -n)]\}a_n a_{2n}. \end{aligned} \quad (16)$$

For consistent second-order expressions, on the right hand side of Eqs. (15) and (16) we replaced time derivative terms like $\dot{a}_n$ with $\lambda(n)a_n$. The time evolution of the fluid-fluid interfaces is obtained by numerically solving the coupled nonlinear differential equations (15) and (16). Figure 3 illustrates the interface evolution considering the interaction of two representative cosine modes ($n = 4$ and $2n = 8$), when the viscosity contrast $A = 1$, and $\theta_c = 0$, for three values of $\beta = 0$, 1, and 4, where β has units of force (dyne). The values of the other physical quantities used to plot Fig. 3 are the following

[8,9]: $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 5.21$ g/(cm s), $\sigma_0 = 63$ dyne/cm, $Q = 2\pi$ cm²/s, $b = 0.15$ cm, $R_0 = 0.5$ cm, and $0 \leq t \leq 10$ s. The initial amplitudes at $t = 0$ s are $a_n(0) = 0.025$ cm and $a_{2n}(0) = 0$.

As one can see by examining Fig. 3(a) the evolution for $\beta = 0$ leads to the formation of wide fingers, having blunt tips. At later times, these grown fingers clearly start to bifurcate, by splitting at their tips, resulting in typical fanlike patterns. This characteristic unstable scenario is significantly changed when we consider the action of increasingly larger values of $\beta > 0$. In Fig. 3(b), for $\beta = 1$ dyne, we see a nearly circular initial interface evolving to a four-fingered structure. At later times, the resulting patterns are still fourfold symmetric, presenting the formation of fingering structures which show no clear tendency toward typical finger tip-splitting formation. However, the resulting pattern in Fig. 3(b) is sufficiently deformed to still characterize an unstable situation. A more dramatic change is depicted in Fig. 3(c), where the evolution is plotted by considering that $\beta = 4$ dyne. In this case, it is evident that the fingering instability has been completely inhibited, producing the evolution of perfectly circular, concentric interfaces.

We proceed by investigating the conventionally most stable injection-driven situation ($Q > 0$) in which we have a reverse flow where a more viscous, perfectly wetting fluid displaces a nonwetting less viscous fluid (note that now $A = -1$, $\theta_c = \pi$). Under such circumstances, from Eq. (11) we readily realize that injection is now stabilizing, while the surface tension term has a dual role. If $\beta < 0$ nothing really surprising happens, and the interface becomes even more stable. On the other hand, if $\beta > 0$ the coupling between β and the contact angle can drive the system towards instability.

Now we seek to trigger fingering instabilities in a classically stable system. In order to verify such a possibility, we present weakly nonlinear simulations of the system in Fig. 4, assuming that $Q > 0$, $A = -1$ [here $\eta_1 = 5.21$ g/(cm s), and $\eta_2 = 0$], $\theta_c = \pi$, and $\beta \geq 0$. The remaining physical parameters and initial conditions are the same as the ones used in Fig. 3. When $\beta = 0$ and $Q = \pi/5$ cm²/s we have the development of stable circular interfaces [Fig. 4(a)]. However, if the injection rate is kept constant ($Q = \pi/5$ cm²/s), and β is increased,

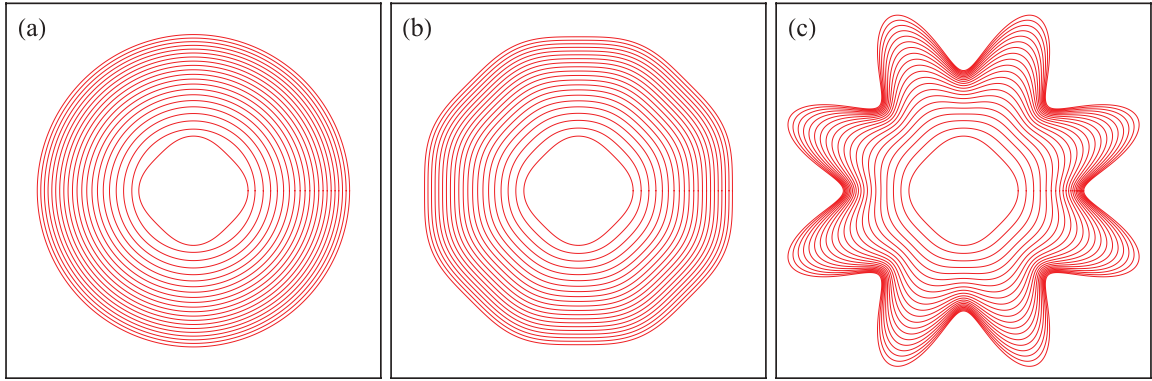


FIG. 4. (Color online) Triggering the fingering instability. Snapshots of the evolving interface, plotted at equal time intervals ($\Delta t = 0.5$ s) for the interaction of two cosine modes $n = 4$ and $2n = 8$ when $A = -1$ (inner fluid is more viscous), and $\theta_c = \pi$ for the following values injection rate Q and β : (a) $Q = \pi/5$ cm²/s, $\beta = 0$; (b) $Q = \pi/5$ cm²/s, $\beta = 2.82$ dyne; and (c) $Q = \pi/5$ cm²/s, $\beta = 2.87$ dyne. Here $0 \leq t \leq 10$ s. The classically stable situation is depicted in (a), while in (b) and (c) an increasingly deformed interface is obtained.

a critical situation is reached (at $\beta = 2.82$ dyne), beyond which the system becomes unstable, and mild fingering is observed [Fig. 4(b)]. A linear theory estimate of such a critical value for β can be obtained by using Eq. (11), and by setting $\lambda(n) = 0$. However, if β assumes a higher value ($\beta = 2.87$ dyne) significant fingering arises [Fig. 4(c)]. It is worthwhile to note that the starlike morphology of this pattern is quite distinct from the typical fanlike structure shown in Fig. 3(a).

Notice that there exists a delicate balance between β and Q in order to get a legitimate interface destabilization. There is the possibility that the interface is initially unstable, but that it eventually recircularizes as time progresses. We have verified that this indeed happens, for example, for $\beta = 2.87$ dyne [as in Fig. 4(b)], but if a larger value of Q is used. A clearer illustration of this recircularization process is provided in Fig. 5, where the fingering instability is not really sustained when $\beta = 4.70$ dyne and $Q = 3\pi/2$ cm²/s, resulting in an eventual interface stabilization. The physical

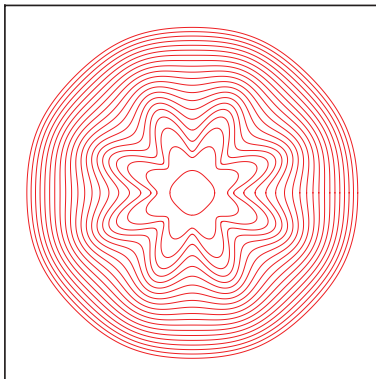


FIG. 5. (Color online) Snapshots of the evolving interface, plotted at equal time intervals ($\Delta t = 0.5$ s and $0 \leq t \leq 10$ s) for the interaction of two cosine modes $n = 4$ and $2n = 8$, when $A = -1$ (inner fluid is more viscous) and $\theta_c = \pi$ for $Q = 3\pi/2$ cm²/s, $\beta = 4.70$ dyne. After an initial period of destabilization, the interface tends to recircularize at later times for such high value of Q .

remaining parameters and initial conditions are the same as the ones utilized in Fig. 4. This is consistent with the results of Ref. [21] where it has been found that interface destabilization occurs in the low velocity regime (or for low capillary number values). On the basis of the findings illustrated in Figs. 3 and 4 we conclude that our purely linear predictions do agree with our weakly nonlinear simulations. These findings provide a theoretical ground to substantiate the idea of manipulating the Saffman-Taylor instability via a variable surface tension approach.

Although in the course of this work we have been mostly concerned with the case of positive injection rate ($Q > 0$), we point out that the control of the Saffman-Taylor instability via a curvature-dependent surface tension is similarly applicable in the case of suction, i.e., when $Q < 0$ [9]. For instance, if the injection rate is negative, $A = 1$, and $\theta_c = 0$, the conventional case ($\beta = 0$) is indeed stable. However, the action of a $\beta < 0$ can destabilize the shrinking interface. Conversely, the conventionally unstable suction situation for $A = -1$, and $\theta_c = \pi$ can be stabilized if $\beta < 0$. Therefore, the stabilization strategy employed for $Q > 0$ and $\beta > 0$ is equally effective if $Q < 0$ and $\beta < 0$.

We close this section by briefly presenting how the radial geometry second-order expressions (10)–(13) would look if we consider a curvature-dependent flow in a rectangular HSC. This can be done if we take the “rectangular geometry limit” [10]: $R \rightarrow \infty$ and $Q \rightarrow \infty$, such that $Q/(2\pi R) \equiv v_\infty$ and $n/R \equiv k$ remain constant, where v_∞ is the flow velocity at infinity and k denotes the wave number of the disturbance. In this limit the interface evolution reverts to the evolution of the rectangular flow geometry, where

$$\lambda(n) \rightarrow |k| \left[A v_\infty - \alpha k^2 \left(\sigma_0 + \frac{4\beta \cos \theta_c}{b} \right) \right], \quad (17)$$

$$F(n, n') \rightarrow \alpha \beta |k| [2k^3 k' - (kk')^2 - k'^4], \quad (18)$$

$$G(n, n') \rightarrow A |k| [1 - \text{sgn}(kk')], \quad (19)$$

are now time-independent quantities. Note that, in contrast to the linear growth rate calculated in Refs. [26,27] for the

rectangular geometry flow, our Eq. (17) exhibits an explicit dependence on the parameter β . So, in our current problem the effect of β shows up already at the linear level. This is due to the consideration of the 3D effects related to the contact angle. It is worth mentioning an interesting connection between our growth rate (17), and the linear dispersion relation recently computed in Ref. [21] for the gradient-gap rectangular HSC [their Eq. (2)]. To make a clearer connection we rewrite Eq. (17) in a dimensionless form,

$$\lambda(k) = |k| \left[A - \left(\frac{A+1}{2} \right) \frac{(bk)^2}{Ca} \left(1 + \frac{\beta' \cos \theta_c}{b} \right) \right], \quad (20)$$

where velocity and lengths have been rescaled by v_∞ and L (width of the rectangular HSC), respectively. In Eq. (20) $Ca = (12\eta_2 v_\infty / \sigma_0)$ denotes a capillary number, and $\beta' = (4\beta)/(\sigma_0 L)$ is a rescaled β parameter. A critical capillary number at which the interface undergoes a change in stability can be readily obtained by setting $\lambda(k) = 0$. In practical terms this establishes a critical speed (as a function of β') that characterizes the transition between stable and unstable regimes.

By comparing our Eq. (20) with Eq. (2) in Ref. [21] we notice that the coupling of β' and θ_c in (20) is similar to the one between the gradient-gap term and the contact angle in their equivalent expression. So, in terms of manipulation of the Saffman-Taylor instability our surface tension parameter β' works as their gradient-gap term. Moreover, as in [21] here we expect the capillary number to be a key ingredient in inhibiting or triggering interfacial instabilities. A more thorough analysis of the curvature-dependent surface tension problem in rectangular HSC (controlling strategies and morphology of the emerging patterns) and its connection to Refs. [21,26,27] is beyond the scope of this work. We plan to study these issues in a separate publication.

IV. CONCLUSION

The ability to control the classical viscous fingering instability is essential in science and technology. In the conventional version of the problem, the displacement of a viscous fluid by another of lower viscosity leads to interface destabilization. On the other hand, the reverse situation in which the displaced fluid is less viscous is classically stable. The emergence of this paradigmatic pattern-forming instability influences the efficiency of many engineering techniques, and depending on the situation it can be something desirable or not. Because of this dual role, improved understanding and control of this interfacial instability is a topic of broad current interest [19–21,36,37].

In this work, we find that the consideration of a curvature-dependent surface tension can lead to fundamentally different interfacial behaviors in the Saffman-Taylor problem. By employing a relatively simple, perturbative mode-coupling approach we have shown that the interplay between the variable surface tension and 3D effects connected to the contact angle allows the manipulation of the Saffman-Taylor instability. This allows the stabilization (destabilization) of conventionally unstable (stable) situations. In this sense, our study contributes to the growing body of literature on the controllability of interfacial instabilities, providing an

alternative method to determine the inhibition or triggering of viscous fluid fingering.

A natural extension of this work is the investigation of the influence of our curvature-dependent interfacial tension model (including 3D effects associated to the contact angle) in the rectangular HSC problem. This could offer a reinterpretation of the previous theoretical results obtained for the system [26,27], shedding light on the possible morphological properties of the resulting patterns, as well as offering the possibility to properly control such instabilities in rectangular flow geometry. Finally, we hope that our study and results will motivate experimentalists to check our theoretical predictions regarding the effectiveness of the variable surface tension controlling protocol in radial HSC flow.

We conclude by calling the readers' attention to a suggestive parallel between our curvature-dependent surface tension [Eq. (5)] and a similar expression derived by Tolman [38] in a different context. In 1949, Tolman realized that the surface tension for small droplets needs curvature corrections. To leading order in curvature $1/R$ the corrected surface tension would be given by

$$\sigma(R) = \sigma_\infty \left(1 - \frac{2\delta}{R} + \dots \right), \quad (21)$$

where R denotes the droplet radius, σ_∞ represents the surface tension of the planar interface ($R \rightarrow \infty$), and δ is the so-called Tolman's length. This would imply a curvature correction in the pressure difference between the inside and outside of the droplet. The physical origin of the curvature correction is a difference between the equimolar surface and the surface of tension [39,40], being phenomenologically associated with asymmetry in fluid phase coexistence [41]. Calculations indicate that the Tolman length is of the order of nanometers, making the correction important for the description of nucleation phenomena and fluids in microcapillaries or nanopores [42].

By inspecting our Eq. (5) and Tolman's expression (21), one is led to a possible correspondence between the parameters δ and β . As close as the analogy can be, there exist important distinctions between the situation studied here and the one investigated by Tolman. For example, contrary to the situation analyzed in our paper, in Ref. [38] the curved interface separates different phases (liquid and vapor) of the same material. Moreover, Tolman's calculation is valid for a static case, while here we examined dynamical effects. The fact is, despite the similarity between Eqs. (5) and (21), we have not been able to find any convincing physical justification which could link our β to Tolman's δ . So, the possibility of understanding our results via a Tolman's length interpretation remains an open question.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank CNPq for financial support through the program "Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Fluidos Complexos (INCT-FCx)" and also through the CNPq/FAPESQ Pronex program. We acknowledge useful discussions with Rodolfo Brandão, Sérgio Lira, and Eduardo Dias.

- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **245**, 312 (1958).
- [2] G. M. Homsy, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987); K. V. McCloud and J. V. Maher, *Phys. Rep.* **260**, 139 (1995); J. Casademunt, *Chaos* **14**, 809 (2004).
- [3] A. J. DeGregoria and L. W. Schwartz, *J. Fluid Mech.* **164**, 383 (1986).
- [4] C.-W. Park and G. M. Homsy, *J. Fluid Mech.* **139**, 291 (1984).
- [5] P. G. Saffman, *J. Fluid Mech.* **173**, 73 (1986).
- [6] T. Maxworthy, *J. Fluid Mech.* **177**, 207 (1987).
- [7] J. A. Miranda and M. Widom, *Int. J. Mod. Phys. B* **12**, 931 (1998).
- [8] L. Paterson, *J. Fluid Mech.* **113**, 513 (1981).
- [9] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim, and Y. Couder, *Phys. Fluids A* **1**, 224 (1989).
- [10] J. A. Miranda and M. Widom, *Physica D* **120**, 315 (1998).
- [11] O. Praud and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **72**, 011406 (2005).
- [12] L. W. Lake, *Enhanced Oil Recovery* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989).
- [13] J. S. Langer, *Science* **243**, 1150 (1989).
- [14] B. Jha, L. Cueto-Felgueroso, and R. Juanes, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 194502 (2011).
- [15] H.-Y. Chu and H.-K. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 225001 (2011).
- [16] A. C. Callan-Jones, J.-F. Joanny, and J. Prost, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 258106 (2008).
- [17] G. Rousseaux, M. Martin, and A. De Wit, *J. Chromatogr. A* **1218**, 8353 (2011).
- [18] E. O. Dias, F. Parisio, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **82**, 067301 (2010).
- [19] E. O. Dias, E. Alvarez-Lacalle, M. S. Carvalho, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 144502 (2012).
- [20] D. Pihler-Puzović, P. Illien, M. Heil, and A. Juel, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 074502 (2012).
- [21] T. T. Al-Housseiny, P. A. Tsai, and H. A. Stone, *Nat. Phys.* **8**, 747 (2012).
- [22] T. Podgorski, M. C. Sostarecz, S. Zorman, and A. Belmonte, *Phys. Rev. E* **76**, 016202 (2007).
- [23] A. He, J. S. Lowengrub, and A. Belmonte, *SIAM J. Appl. Math.* **72**, 842 (2012).
- [24] M. Mishra, P. M. J. Trevelyan, C. Almarcha, and A. De Wit, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 204501 (2010).
- [25] L. A. Riolfo, Y. Nagatsu, S. Iwata, R. Maes, P. M. J. Trevelyan, and A. De Wit, *Phys. Rev. E* **85**, 015304(R) (2012).
- [26] H. Guo, D. C. Hong, and D. A. Kurtze, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1520 (1992).
- [27] H. Guo, D. C. Hong, and D. A. Kurtze, *Phys. Rev. E* **51**, 4469 (1995).
- [28] C. K. Chan and N. Y. Liang, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4381 (1997).
- [29] C. K. Chan, *Physica A* **288**, 315 (2000).
- [30] R. Krechetnikov and G. M. Homsy, *J. Fluid Mech.* **509**, 103 (2004).
- [31] J. Fernandez, R. Krechetnikov, and G. M. Homsy, *J. Fluid Mech.* **527**, 197 (2005).
- [32] D. Bonn, H. Kellay, M. Ben Amar, and J. Meunier, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2132 (1995).
- [33] A. A. Wheeler, *Proc. R. Soc. A* **462**, 3363 (2006).
- [34] J. J. Xu, Z. Li, J. Lowengrub, and H. Zhao, *J. Comput. Phys.* **212**, 590 (2006).
- [35] Y. Pawar and K. J. Stebe, *Phys. Fluids* **8**, 1738 (1996).
- [36] A. Juel, *Nat. Phys.* **8**, 706 (2012).
- [37] R. Mark Wilson, *Phys. Today* **65**(10), 15 (2012).
- [38] R. C. Tolman, *J. Chem. Phys.* **17**, 333 (1949).
- [39] J. S. Rowlinson and B. Widom, *Molecular Theory of Capillarity* (Claredon, Oxford, 1982).
- [40] J. S. Rowlinson, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, A1 (1994).
- [41] S. K. Das and K. Binder, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 235702 (2011).
- [42] T. M. Squires and S. R. Quake, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 977 (2005).

APÊNDICE B

**Control of centrifugal fingering via a variable
interfacial tension approach**

PHYSICAL REVIEW E 88 033008 (2013)

Control of centrifugal fingering via a variable interfacial tension approach

Francisco M. Rocha and José A. Miranda*

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil

(Received 20 August 2013; published 17 September 2013)

We study the centrifugal fingering instabilities that occur in rotating Hele-Shaw cells containing two different fluids. A weakly nonlinear analysis of the problem is performed, considering that the surface tension between the rotating fluids changes with the local curvature of the interface. It is shown that the coupling between the contact angle and the variable interfacial tension permits the control of the interface disturbances. As a result, linear perturbations and nonlinear finger competition phenomena can be properly controlled and suppressed.

DOI: [10.1103/PhysRevE.88.033008](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.033008)

PACS number(s): 47.15.gp, 47.20.Ma, 47.55.N-, 47.54.-r

I. INTRODUCTION

It is well known that the Saffman-Taylor instability [1] takes place in the confined geometry of motionless Hele-Shaw cells, being generated by the viscosity difference between the moving fluids (viscosity-driven instability). If the less viscous fluid pushes the more viscous one the interface is unstable, and patterned structures presenting multiple fingertip splitting are formed. However, if the more viscous fluid displaces the less viscous one (reverse viscous flow), the system is stable and no interfacial instability is observed [2].

A different kind of instability occurs if the Hele-Shaw cell is allowed to rotate with constant angular velocity around a vertical axis that passes through its center [3]. In this rotating version of the problem, the fluid-fluid interface may become unstable even under reverse viscous flow, due to the density difference between the fluids. This characterizes a centrifugally driven hydrodynamic instability [4–10]. If the inner fluid is denser, centrifugal viscous fingering arises, leading to the formation of interfacial patterns that are very distinct from those obtained in the usual viscosity-driven case. Instead of presenting branched, tip-split fingers, the rotating patterns exhibit fingers of different lengths, which compete with each other.

Rotating Hele-Shaw flows have been the object of considerable interest during the past two decades [11]. Among other things, this particular type of rotating flow has been serving as a useful prototypical system, with relevance to the modeling of biological systems involving tissue growth in rotating bioreactors [12], cell spreading [13], and cell motility [14]. It is also related to the technological problem of spin coating [15,16], which involves the rotation of thin fluid films in low-dimensional environments. On the theoretical side, researchers have been giving continued attention to rigorous exact solutions of fluid flows in such confined rotating systems [17–21].

Despite the significant number of studies examining the occurrence of interfacial instabilities and complex patterns in rotating Hele-Shaw cells, and other confined centrifugally driven systems, there are situations in which the formation of interfacial irregularities is undesirable. For example, in rotating bioreactors [12] and spin coating processes [15,16] the emergence of centrifugally driven instabilities can result in

uneven or defective surface coverage. Therefore, it is of both academic and practical importance to find ways to control the growth of interfacial disturbances in this class of rotating flow problems.

As a matter of fact, the development of controlling strategies to the usual viscosity-driven viscous fingering problem has been a topic of major recent interest [22–31]. One particularly simple and efficient controlling method has been proposed in Ref. [31] which considers a curvature-dependent surface-tension model [32,33]. Within the context of this model, the surface tension varies in proportion to the local curvature of the evolving interface [34]. This strategy allowed the manipulation of the conventional viscosity-driven Saffman-Taylor instability leading to the suppression of fingertip-splitting events, and ultimate stabilization of the deformed interface.

Motivated by the success of the variable interfacial tension approach in controlling the usual viscosity-driven instability in motionless radial Hele-Shaw cells [31], in this work we investigate the possibility of restraining the emergence of centrifugal viscous fingering instability in rotating Hele-Shaw flows. Through the employment of a weakly nonlinear perturbative scheme [35] we show that the interplay between the variable surface tension and three-dimensional (3D) effects connected to the contact angle significantly affects the scenario of instability formation. The effectiveness of our controlling protocol is examined at both linear and early nonlinear stages of the dynamics, indicating inhibition of finger competition phenomena, and consequent stabilization of the rotating fluid-fluid interface.

II. GOVERNING EQUATIONS OF THE PROBLEM

Consider a Hele-Shaw cell of gap spacing b containing two immiscible, incompressible, viscous fluids (Fig. 1). Denote the densities and viscosities of the inner and outer fluids, respectively as ρ_1, η_1 and ρ_2, η_2 . Although our model is capable of describing two fluids of densities and viscosities of any magnitude, we focus on the centrifugally driven motion where $\rho_1 > \rho_2$, and $\eta_1 \gg \eta_2$. The cell rotates with constant angular velocity Ω , and there exists a surface tension σ between the fluids. As in Refs. [31–33] the interfacial tension is not constant, and varies along the fluid-fluid interface.

To perform the weakly nonlinear analysis of the system, we consider that the initial circular fluid-fluid interface is slightly perturbed (Fig. 1), $\mathfrak{R} = R + \zeta(\theta, t)$, where θ represents the azimuthal angle and R is the radius of the initially

*jme@df.ufpe.br

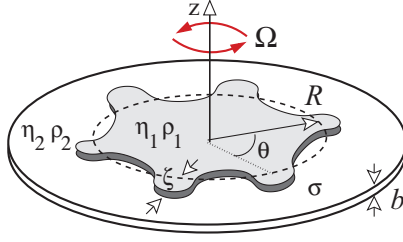


FIG. 1. (Color online) Perspective view of the rotating Hele-Shaw cell. The plates of the cell have spacing b and rotate about a perpendicular z axis with angular velocity Ω . The more viscous and more dense fluid has initial radius R and occupies the shaded region. Interface disturbances are denoted by ζ , azimuthal angle by θ , and the variable interfacial tension between the fluids is given by σ .

circular interface. The interface perturbation is written in the form of a Fourier expansion $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$, where $\zeta/R \ll 1$, $\zeta_n(t) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \zeta(\theta, t) \exp(-in\theta) d\theta$ denotes the complex Fourier mode amplitudes, and n is an integer wave number.

The $n = 0$ mode is included in our analysis to keep the area of the perturbed shape independent of the perturbation ζ . Mass conservation imposes that the zeroth mode is written in terms of the other modes as $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$. Note that in order to address both linear and weakly nonlinear aspects of the interface dynamics, our perturbative analysis keeps terms up to the second order in ζ .

The equation of motion of the interface is given by Darcy's law [1,2], properly augmented by a centrifugally driven term [3,4]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla \left[p_j - \frac{\rho_j \Omega^2 r^2}{2} \right], \quad (1)$$

where $\mathbf{v}_j$ and p_j represent the gap-averaged velocity and pressure of fluid j , where $j = 1, 2$. In addition, r denotes the radial distance from the axis of rotation. Equation (1) is valid in the small Reynolds number limit, where Coriolis and other inertial effects are negligible [5]. For the inclusion of such effects into the rotating Hele-Shaw problem, we refer the reader to Refs. [7,8,10].

From Eq. (1) and the incompressibility condition $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$, it can be verified that the velocity potential ϕ_j ($\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j$) obeys Laplace's equation $\nabla^2 \phi_j = 0$. The problem is then specified by two boundary conditions at the interface

$$p_1 - p_2 = \sigma(\mathcal{K})\mathcal{K} \quad (2)$$

and

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_2. \quad (3)$$

Equation (2) is a modified version of the usual Young-Laplace pressure jump at the interface [31] with $\mathcal{K} = \kappa + \kappa_\perp$, where κ denotes the spatially varying interfacial curvature in the plane of the Hele-Shaw cell, and $\kappa_\perp = \cos \theta_c / (b/2)$ is the constant curvature associated with the interface profile in the direction perpendicular to the Hele-Shaw plates, set by the static contact angle θ_c measured between the plates and the curved meniscus. In Eq. (2) note the presence of a curvature-

dependent surface tension given by

$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma_0 + \beta \mathcal{K}, \quad (4)$$

where the control parameter β can be positive, negative, or zero, and σ_0 is the surface tension when $\beta = 0$ [32,33]. The possible physical mechanisms involved with this particular functional form of the variable interfacial tension are related to the addition of surfactants or polymers at the fluid-fluid interface, or at the cell walls. These issues have been thoroughly discussed in Refs. [31–33].

Depending on the values of β and θ_c , the effective surface tension can be either reduced or increased when the interface bulges into the displaced fluid, altering the stability of the fluid-fluid interface. As in Refs. [27,29] we focus on the situation in which the displaced fluid is nonwetting ($\theta_c = \pi$). The second important boundary condition [Eq. (3)], known as the kinematic boundary condition, states that the normal components of each fluid's velocity are continuous at the interface, with $\mathbf{n}$ representing the interface unit normal vector.

At this point we stress that the coupling between the curvature-dependent surface tension $\sigma(\mathcal{K})$ and the three-dimensional (3D) term represented by $\kappa_\perp$ plays a fundamental role in allowing a proper manipulation of the centrifugal fingering instability. If the surface tension does not depend on the curvature ($\beta = 0$), since the 3D term is constant (its gradient is zero), it does not affect the motion of the interface. However, if $\beta \neq 0$ we have the coupling of β and the spatially varying in-plane curvature κ with the 3D term.

To obtain a mode-coupling differential equation for the interface evolution, we follow standard steps performed in previous weakly nonlinear studies in Hele-Shaw cells [31,35]: from the solution of Laplace's equation we define Fourier expansions for the velocity potentials. Then, we express ϕ_j in terms of the perturbation amplitudes ζ_n by considering condition (3). Substituting these relations and the modified pressure jump condition Eq. (2) into Eq. (1), always keeping terms up to second order in ζ , and Fourier transforming, we find the *dimensionless* equation of motion for the perturbation amplitudes (for $n \neq 0$),

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} [F(n, n')\zeta_{n'}\zeta_{n-n'} + G(n, n')\dot{\zeta}_{n'}\zeta_{n-n'}], \quad (5)$$

where the overdot denotes total time derivative, and

$$\lambda(n) = |n| \left\{ \text{sgn}(U) - S(n^2 - 1) \left[1 + 2\mathfrak{B} \left(1 + \frac{2 \cos \theta_c}{b} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

is the (time-independent) linear growth rate. The parameter

$$S = \frac{\sigma_0}{R^3 \Omega^2 |\rho_1 - \rho_2|} \quad (7)$$

represents the ratio of capillary to centrifugal forces, while

$$\mathfrak{B} = \frac{\beta}{\sigma_0 R} \quad (8)$$

measures the action of curvature-dependent surface-tension effects. The sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument.

The second-order mode-coupling terms are given by

$$F(n, n') = |n| \left\{ \frac{1}{2} \text{sgn}(U) - S \left(1 + 4\mathfrak{B} \frac{\cos \theta_c}{b} \right) \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] - S\mathfrak{B}[3 - n'(5n' + n) + n'^2(n - n')^2] \right\} \quad (9)$$

and

$$G(n, n') = A|n| [1 - \text{sgn}(nn')] - 1, \quad (10)$$

where $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ is the viscosity contrast. In Eq. (5) lengths are rescaled by R , and time by R/U , where $U = [b^2 R(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2]/[12(\eta_1 + \eta_2)]$ is a characteristic velocity. From this point on, we will be dealing with the dimensionless version of the governing equations.

The linear growth rate (6) provides relevant information about the linear stability of the interface, and the nonlinear terms (9) and (10) offer key analytical insights into the response of finger competition events to the action of the variable interfacial tension at the weakly nonlinear regime. As pointed out at the beginning of this section, recall that in this work we focus on the centrifugally unstable situation in which $\text{sgn}(U) = 1$, $A = -1$, and $\theta_c = \pi$. These are the most common conditions present in existing experiments in rotating Hele-Shaw cells. Moreover, these are also the conditions of important technological applications [12–16] where control of centrifugal fingering could be needed. We emphasize that the values we take for our dimensionless parameters are consistent with typical physical quantities used in real experiments for rotating Hele-Shaw flows [4,5,9].

III. FINGERING CONTROL: LINEAR AND NONLINEAR REGIMES

As mentioned earlier in this work, our main goal is to use the curvature-dependent surface-tension approach to stabilize usually unstable flows in rotating Hele-Shaw cells. First, in Sec. III A we try to extract useful information regarding control of centrifugally driven instabilities at purely linear, early time stages of the interface evolution. Then, in Sec. III B we test the robustness of the control strategy verified at the linear level, turning our attention to the weakly nonlinear regime. At the nonlinear level, we can examine how the variable interfacial tension acts on the typical finger competition mechanism which takes place in rotating Hele-Shaw flows.

A. Linear behavior

We begin our discussion by examining the origin of the terms in the linear growth rate expression [Eq. (6)]. Since we concentrate on the situation where $\text{sgn}(U) = 1$, it is clear that the centrifugal term does act to destabilize the system. On the other hand, the second term proportional to $S(n^2 - 1)$ is related to the surface-tension contributions: the first term on the square bracket is associated to the surface tension connected to the in-plane curvature κ , and plays a stabilizing role. The term proportional to the variable surface-tension

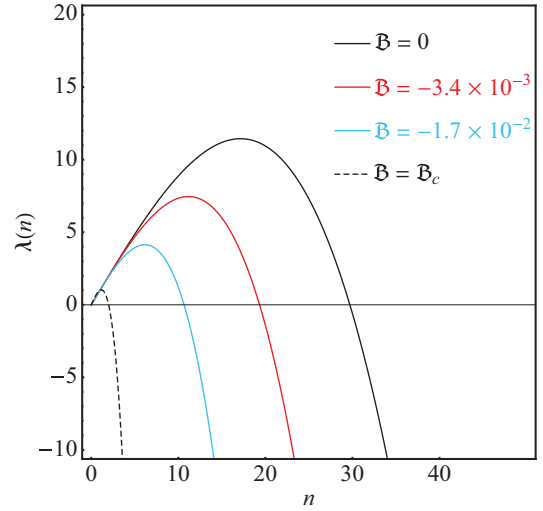


FIG. 2. (Color online) Inhibition of centrifugal fingering at the linear level. Linear growth rate $\lambda(n)$ as a function of mode number n for different values of $\mathfrak{B}$. The typical number of interfacial fingers, given by the maximum of the curves ($n_{\max}$), drops successively ($n_{\max} \approx 17, 11, 6$, and 1) as the magnitude of the variable interfacial tension parameter $\mathfrak{B}$ is increased.

parameter $\mathfrak{B}$ presents the contribution due to the transverse interfacial curvature $\kappa_{\perp}$ involving the contact angle. Recall that Hele-Shaw flows consider a high aspect ratio situation where $b \ll 1$ so that the contact angle term is indeed the dominant one. Finally, notice that since here we consider that $\theta_c = \pi$, $\mathfrak{B}$ must be negative in order to stabilize the interface. Of course, if $\mathfrak{B} > 0$ the interface would be further destabilized, but this is not the effect in which we are currently interested.

The role of $\mathfrak{B}$ in controlling the instability at the linear level is illustrated in Fig. 2. This figure plots the linear growth rate (6) as a function of mode number n for different values of the variable surface-tension parameter $\mathfrak{B}$: 0, -3.4×10^{-3} , -1.7×10^{-2} , and $\mathfrak{B}_c$, where $\mathfrak{B}_c$ denotes the critical value for which all modes $n > 1$ become stable [obtained by setting $\lambda(n) = 0$]

$$\mathfrak{B}_c = \frac{1}{2(1 + \frac{2\cos\theta_c}{b})} \left[\frac{\text{sgn}(U)}{S(n^2 - 1)} - 1 \right]. \quad (11)$$

Figure 2 is plotted by considering the following typical values of S and b : $S = 1.14 \times 10^{-3}$ and $b = 10^{-2}$. As a matter of fact, these characteristic parameter values will also be used to plot the remaining figures appearing in this work.

By inspecting Fig. 2 it is clear that the system is unstable when $\mathfrak{B} = 0$: there is a large band of unstable modes, for which $\lambda(n) > 0$. Note that the maximum of the curve represents the mode of largest growth $n_{\max}$ [obtained by setting $d\lambda/dn = 0$]. For $\mathfrak{B} = 0$ we find that $n_{\max} \approx 17$. This number represents the typical number of fingers that emerges at the rotating interface in the linear regime. Moreover, Fig. 2 indicates that for $\mathfrak{B} = -3.4 \times 10^{-3}$ the interface becomes more stable compared with the $\mathfrak{B} = 0$ case: the band of unstable modes is reduced, the growth rate magnitude is decreased, and the number of fingers drops (now $n_{\max} \approx 11$).

We can also see that by further increasing the magnitude of $\mathfrak{B}$ one could stabilize the system quite significantly, making $n_{\max}$ drop to one when $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_c$ [Eq. (11)].

In order to suppress any interfacial instability it would suffice to consider the case $n \geq 2$. The mode $n = 0$ that corresponds to a uniform expansion of the circle is marginal [i.e., $\lambda(n = 0) = 0$] for all values of $\mathfrak{B}$. Note that mode $n = 1$ does not introduce any interfacial deformations. In fact, it corresponds to a global off-center shift of the circle. So, it preserves circular shape but can be unstable in the sense that it can lead to droplet translation.

B. Weakly nonlinear stage

Although it is encouraging to be able to verify that at the linear level one could use the parameter $\mathfrak{B}$ to control the degree of centrifugal fingering, rigorously it does not guarantee that such a controlling strategy will be really effective during nonlinear stages of the interface evolution. Additionally, the typical finger competition phenomenon verified in rotating Hele-Shaw flows is an intrinsically nonlinear effect and cannot be properly addressed by purely linear analysis [6,36–38]. Therefore, to check the linear predictions discussed in Sec. III A, and to elucidate key effects related to finger competition in rotating Hele-Shaw flow in the presence of a variable interfacial tension, we proceed by analyzing the weakly nonlinear dynamics of the system. This is done by concentrating our attention on the role played by the parameter $\mathfrak{B}$ in possibly controlling finger competition events, and ultimately leading to interface stabilization.

Now the mode-coupling equation (5) is utilized in its entirety to study the onset of nonlinear pattern formation through the coupling of a small number of modes. To simplify our discussion it is convenient to rewrite the complex net

perturbation in terms of cosine and sine modes,

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (12)$$

where $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ and $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ are real valued. Without loss of generality, for the remainder of this work, we choose the phase of the fundamental mode so that $a_n > 0$ and $b_n = 0$. We follow Ref. [35] and consider finger length variability as a measure of the competition among fingers. Within our approach the finger competition mechanism can be described by the influence of a fundamental mode n , assuming n is even, on the growth of its subharmonic mode $n/2$. By using Eqs. (5)–(10) the equations of motion for the subharmonic mode can be written as

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + \mathcal{C}(n)a_n\}a_{n/2}, \quad (13)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - \mathcal{C}(n)a_n\}b_{n/2}, \quad (14)$$

where the finger competition function is given by

$$\mathcal{C}(n) = \frac{1}{2} \left[C\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) + C\left(\frac{n}{2}, n\right) \right] \quad (15)$$

and

$$C(n, n') = F(n, n') + \lambda(n')G(n, n'). \quad (16)$$

From Eqs. (13) and (14) we verify that a negative $\mathcal{C}(n)$ increases the growth of the sine subharmonic $b_{n/2}$, while inhibiting growth of its cosine subharmonic $a_{n/2}$. The result is an increased variability among the lengths of fingers of the outer fluid penetrating into the inner one. This effect describes the competition of inward fingers. Note that our finger competition mechanism determines the preferred direction for finger growth and finger length variability. So, when

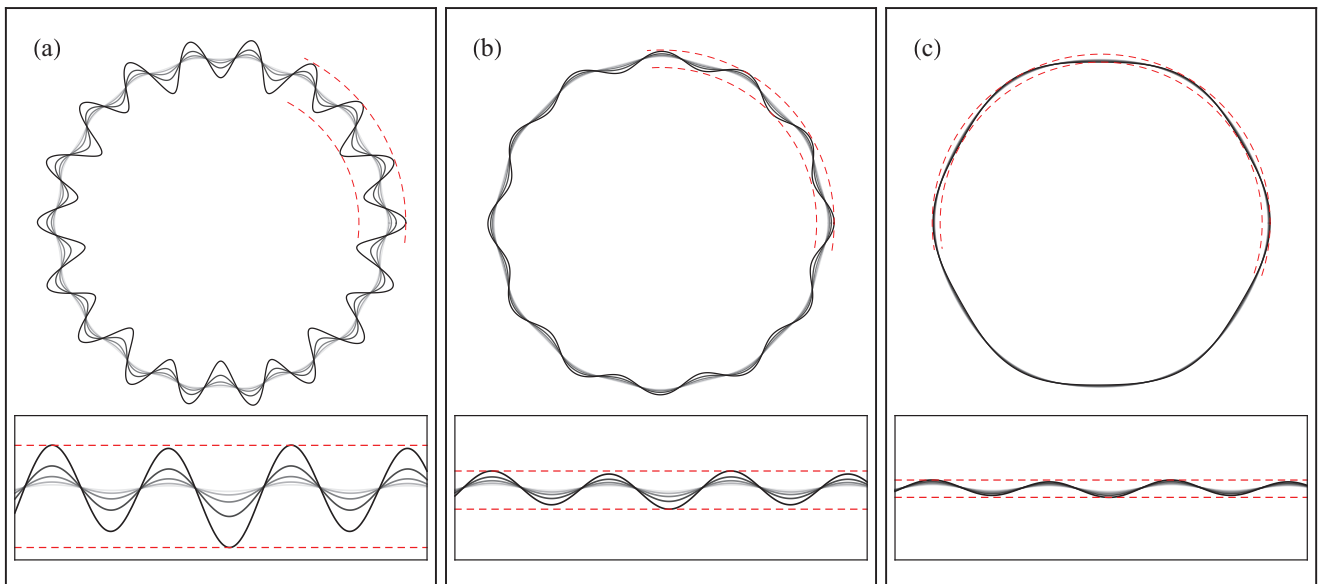


FIG. 3. (Color online) Inhibition of centrifugal fingering at the weakly nonlinear level. Snapshots of the evolving interface, plotted at equal time intervals for the interaction of the fundamental mode, and its subharmonic. Different values of the variable interfacial tension parameter $\mathfrak{B}$ are used: (a) 0, (b) -3.4×10^{-3} , and (c) -1.7×10^{-2} . The dashed curves are added to better guide the eye regarding finger competition. The insets show close-up views of the regions delimited by the dashed curves. Darker colors mean later times.

$\mathcal{C}(n) < 0$, even though there exists finger competition in both directions (inward and outward), the competition among inward moving fingers is much stronger than the competition among outward moving fingers. Reversing the sign of $\mathcal{C}(n)$ would exactly reverse these conclusions, such that modes $a_{n/2}$ would be favored over modes $b_{n/2}$. In this case, competition of the outward moving fingers of the inner fluid would have preferential growth.

For the typical rotating Hele-Shaw flow experimental parameters used in Refs. [4,5,9] we have found that $\mathcal{C}(n) < 0$ indicating a restrained growth of cosine subharmonic modes $a_{n/2}$, accompanied by a simultaneous increased growth of sine subharmonic modes $b_{n/2}$. These findings are illustrated in Fig. 3, which plots the time evolution of the rotating fluid-fluid interface for three different values of $\mathfrak{B}$: 0, -3.4×10^{-3} , and -1.7×10^{-2} . The interfaces shown in this figure are calculated with the help of Eq. (12) and consider the weakly nonlinear interplay of two wave numbers, namely the fundamental $n = n^*$, where n^* is the nearest even integer to $n_{\max}$ and its subharmonic $n/2$. We take the initial amplitudes as $a_{n/2}(0) = b_{n/2}(0) = 1/750$ and $a_n(0) = 1/130$. In addition, the interfaces are plotted for $0 \leq t \leq 0.247$, at equal time intervals $\Delta t = 0.062$. As in Fig. 2, $S = 1.14 \times 10^{-3}$ and $b = 10^{-2}$. These parameters are also utilized to plot Fig. 4.

By examining Fig. 3(a) for $\mathfrak{B} = 0$ it is evident that the inward moving fingers of the outer fluid present different lengths, indicating the presence of finger competition. The inset of Fig. 3(a) shows a close-up view of part of the fingers, where competition among inward moving fingers can be clearly verified: some inward moving fingers touch the inner dashed line, while other inward moving fingers do not. On the other hand, the fingers of the inner fluid pointing outward have nearly similar sizes, confirming the prediction that competition among these fingers is repressed. So, the fact is that when the surface tension is constant, one does observe

a finger competition phenomenon among inward moving fingers.

A different kind of behavior is revealed in Fig. 3(b) for $\mathfrak{B} = -3.4 \times 10^{-3}$: the action of the variable interfacial tension not only reduces the number of fingers, but also decreases the competition of the inward moving fingers. By inspecting the inset of Fig. 3(b) we see that both neighboring inward moving fingers are very close to the inner dashed line, indicating weaker competition. Finally, by increasing the magnitude of $\mathfrak{B}$ even further [in Fig. 3(c) $\mathfrak{B} = -1.7 \times 10^{-2}$] we obtain a much more stabilized fluid-fluid interface in which finger competition events are hardly observable, as illustrated by the inset of Fig. 3(c). This supports the idea that the variable interfacial tension approach is effective in suppressing finger competition events, and interface disturbances in general, also at weakly nonlinear stages of the dynamics.

In order to reinforce the visual illustration of the restrained finger competition for larger $\mathfrak{B}$ discussed in Fig. 3, we go ahead and analyze this issue more quantitatively in Fig. 4. The evaluation of finger competition is done by the quantity

$$\Delta \mathfrak{R} = |\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_{i+1}|, \quad (17)$$

which expresses the absolute value of the difference between the interfacial positions for consecutive inward moving fingers i and $i + 1$, where $\mathfrak{R}_i$ is the radial position of the tip of an i th inward moving finger and $\mathfrak{R}_{i+1}$ is the equivalent position of the neighboring inward moving finger [or the $(i + 1)$ th finger]. These geometric concepts are sketched in Fig. 4(a). Note that $\Delta \mathfrak{R}$ provides a convenient quantitative measure of the finger length variability or, equivalently, of the finger competition events among inward moving fingers.

Useful information about the time evolution of the finger competition behavior in our system can then be obtained by analyzing Fig. 4(b) that plots $\Delta \mathfrak{R}$ as a function of time. Note that the curves for $\mathfrak{B} \neq 0$ are located below the one for $\mathfrak{B} = 0$

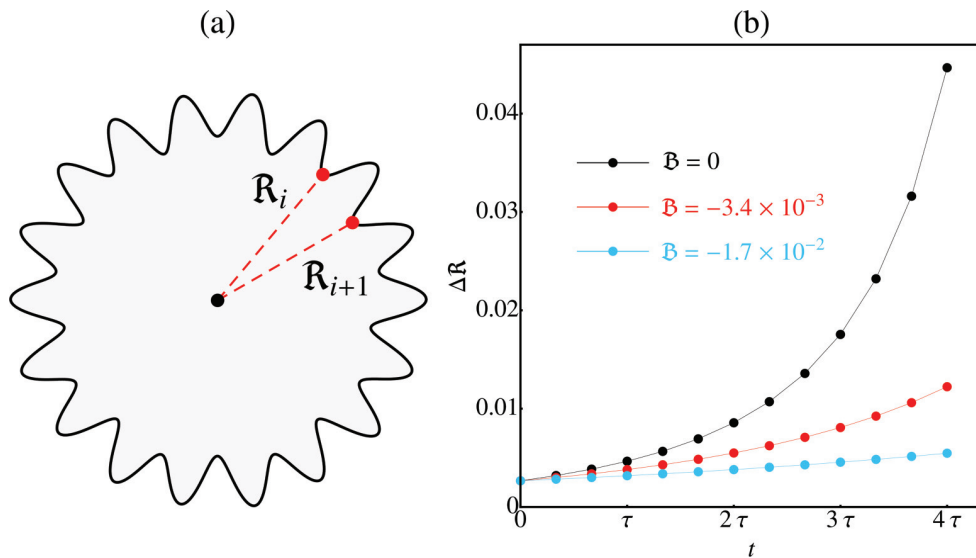


FIG. 4. (Color online) Refers to the patterns illustrated in Fig. 3, and uses the same physical parameters. Difference between the interface positions of the fingertips for consecutive inward moving fingers of the outer fluid $\Delta \mathfrak{R}$ [see Eq. (17) and Fig. 4(a)] as a function of time, for different values of $\mathfrak{B}$ as plotted in Fig. 4(b). One readily observes that finger competition is decreased by the use of variable interfacial tension of increasingly larger magnitude. Here $\tau = 15\Delta t$, where Δt is the time interval used in Fig. 3.

expressing that finger competition decreases as the magnitude of $\mathfrak{B}$ is increased. This demonstrates in a quantitative fashion that finger competition is significantly affected by the variable interfacial tension parameter $\mathfrak{B}$. This makes it appropriate to properly tune and control centrifugal fingering in general, and nonlinear finger competition events in particular.

IV. CONCLUSION

In this work, we revisited the rotating Hele-Shaw flow problem, and investigated the effect of a curvature-dependent interfacial tension on the stability properties of the fluid-fluid interface. This was done by performing a weakly nonlinear analysis of the rotating flow situation. It enabled us to verify the effectiveness of the variable interfacial tension approach in

controlling centrifugal fingering both at purely linear stages of the dynamics, as well as at the onset of nonlinearities. In particular, we showed that nonlinear finger competition events can be systematically suppressed, yielding subsequent interface stabilization. This work offers an additional contribution to the growing body of recent studies in the literature addressing a number of different strategies targeting the control of interfacial instabilities in confined Hele-Shaw geometries [22–31].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank CNPq for financial support through the program “Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Fluidos Complexos (INCT-FCx)” and FACEPE through PRONEM Project No. APQ-1415-1.05/10.

-
- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. A* **245**, 312 (1958).
 - [2] G. M. Homsy, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987); K. V. McCloud and J. V. Maher, *Phys. Rep.* **260**, 139 (1995); J. Casademunt, *Chaos* **14**, 809 (2004).
 - [3] L. W. Schwartz, *Phys. Fluids A* **1**, 167 (1989).
 - [4] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt, and J. Ortín, *Phys. Rev. E* **54**, 6260 (1996).
 - [5] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Fluids* **16**, 908 (2004).
 - [6] J. A. Miranda and E. Alvarez-Lacalle, *Phys. Rev. E* **72**, 026306 (2005).
 - [7] S. L. Waters and L. J. Cummings, *Phys. Fluids* **17**, 048101 (2005).
 - [8] A. Abidate, S. Aniss, O. Caballina, and M. Souhar, *Phys. Rev. E* **75**, 046307 (2007).
 - [9] R. Folch, E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Rev. E* **80**, 056305 (2009).
 - [10] E. O. Dias and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **83**, 046311 (2011).
 - [11] J. Casademunt, *Eur. Phys. J. Plus* **126**, 94 (2011), and references therein.
 - [12] S. L. Waters, L. J. Cummings, K. M. Shakesheff, and F. R. A. J. Rose, *IMA J. Math. Med. Biol.* **23**, 311 (2006).
 - [13] M. A. Fardin, M. O. Rossier, P. Rangamani, P. D. Avigan, N. C. Gauthier, W. Vonnegut, A. Mathur, J. Hone, R. Iyengar, and M. P. Sheetz, *Soft Matter* **6**, 4788 (2010).
 - [14] C. Blanch-Mercader and J. Casademunt, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 078102 (2013).
 - [15] L. W. Schwartz and R. V. Roy, *Phys. Fluids* **16**, 569 (2004).
 - [16] K. E. Holloway, P. Habdas, N. Semsarillar, K. Burfitt, and J. R. de Bruyn, *Phys. Rev. E* **75**, 046308 (2007).
 - [17] D. G. Crowdy, *Q. Appl. Math.* **60**(1), 11 (2002).
 - [18] E. S. G. Leandro, R. M. Oliveira, and J. A. Miranda, *Physica D* **237**, 652 (2008).
 - [19] R. López, *Appl. Math. Lett.* **22**, 860 (2009).
 - [20] N. R. McDonald, *Eur. J. Appl. Math.* **22**, 517 (2011).
 - [21] M. Ehrnström, J. Escher, and B. V. Matioc, *J. Math. Fluid Mech.* **13**, 271 (2011).
 - [22] S. W. Li, J. S. Lowengrub, J. Fontana, and P. Palffy-Muhoray, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 174501 (2009).
 - [23] B. Jha, L. Cueto-Felgueroso, and R. Juanes, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 194502 (2011).
 - [24] E. O. Dias, E. Alvarez-Lacalle, M. S. Carvalho, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 144502 (2012).
 - [25] D. Pihler-Puzović, P. Illien, M. Heil, and A. Juel, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 074502 (2012).
 - [26] D. Pihler-Puzović, R. Périllat, M. Russell, A. Juel, and M. Heil, *J. Fluid Mech.* **731**, 162 (2013).
 - [27] T. T. Al-Housseiny, P. A. Tsai, and H. A. Stone, *Nature Phys.* **8**, 747 (2012).
 - [28] R. M. Wilson, *Phys. Today* **65**(10), 15 (2012).
 - [29] T. T. Al-Housseiny, I. C. Christov, and H. A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 034502 (2013).
 - [30] T. T. Al-Housseiny and H. A. Stone, *Phys. Fluids* **25**, 092102 (2013).
 - [31] F. M. Rocha and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **87**, 013017 (2013).
 - [32] H. Guo, D. C. Hong, and D. A. Kurtze, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1520 (1992).
 - [33] H. Guo, D. C. Hong, and D. A. Kurtze, *Phys. Rev. E* **51**, 4469 (1995).
 - [34] A similar variable interfacial tension approach is utilized in crystal theory where a dependence of the surface tension on the curvature is introduced to smooth out the crystal corners. See, e.g., A. A. Wheeler, *Proc. R. Soc. A* **462**, 3363 (2006).
 - [35] J. A. Miranda and M. Widom, *Physica D* **120**, 315 (1998).
 - [36] H. Gadêlha and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **70**, 066308 (2004).
 - [37] C.-Y. Chen, C.-H. Chen, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **73**, 046306 (2006).
 - [38] C.-Y. Chen, Y. S. Huang, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **84**, 046302 (2011).

