



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

GABRIEL DIAS CARVALHO

**INTERFACES ELÁSTICAS E O SURGIMENTO DE
INSTABILIDADES EM CÉLULAS DE HELE-SHAW**

Recife
2015

GABRIEL DIAS CARVALHO

**INTERFACES ELÁSTICAS E O SURGIMENTO DE INSTABILIDADES EM
CÉLULAS DE HELE-SHAW**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto
Universidade Federal de Pernambuco

Recife
2015

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno CRB4-1758

C231i Carvalho, Gabriel Dias.
Interfaces elásticas e o surgimento de instabilidades em células de Hele-Shaw. / Gabriel Dias Carvalho. – Recife: O Autor, 2015.
92 f.: fig.

Orientador: José Américo de Miranda Neto.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Física, 2015.
Inclui referências e apêndices.

1. Dinâmica de fluidos. 2. Formação de padrões (Ciências físicas).
I. Miranda Neto, José Américo de. (Orientador). II. Título.

532.05 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-06

GABRIEL DIAS CARVALHO

**INTERFACES ELÁSTICAS E O SURGIMENTO DE
INSTABILIDADES EM CÉLULAS DE HELE-SHAW**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 06/02/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

Resumo

Instabilidades de Saffman-Taylor ocorrem quando um fluido desloca outro de maior viscosidade entre as placas de uma célula de Hele-Shaw. Nessa dissertação, a interface que separa os fluidos é elástica, e apresenta uma rigidez dependente da curvatura. Empregando uma teoria de modos acoplados perturbativa de segunda ordem, investigamos como a natureza elástica da interface influencia na morfologia dos padrões emergentes. Mostramos que os efeitos não lineares são importantíssimos na determinação da morfologia das estruturas que se formam. Particularmente, vimos que a emergência de dedos estreitos ou largos pode ser regulada variando apenas um parâmetro de fração de rigidez. Por outro lado, em células de Hele-Shaw girantes, as instabilidades de Saffman-Taylor surgem quando são colocados na célula dois fluidos imiscíveis e com diferentes densidades. Na situação convencional, a disputa entre as forças de capilaridade e centrífuga torna a interface fluido-fluido instável, levando à formação de dedos que competem dinamicamente e atingem diferentes comprimentos. É sabido que a competição dos dedos é muito sensível a mudanças no contraste de viscosidade entre os fluidos. Novamente, estudamos uma variante desse problema, onde os fluidos reagem e produzem uma fase gelatinosa na interface. Assumimos a interface elástica e aplicamos o mesmo tratamento perturbativo anterior. Nossos resultados revelam um cenário completamente diferente dinamicamente, onde a variabilidade do comprimento dos dedos não é regulada pelo contraste de viscosidade. Por fim, usamos o formalismo de vortex sheet para procurar as formas estacionárias do problema elástico da célula de Hele-Shaw girante. Consideramos o caso em que o fluido mais denso está rodeado pelo fluido menos denso. A disputa entre as forças centrífuga e elástica leva à formação de uma variedade enorme de formas estacionárias. Complexas morfologias são obtidas através de soluções numéricas de uma equação diferencial não linear para a curvatura da interface (equação do contorno), determinada através da condição de nenhuma vorticidade. Nesse contexto, a classificação das várias famílias de formas é feita utilizando dois parâmetros adimensionais: a rigidez efetiva da interface e o parâmetro geométrico raio de giração.

Palavras-chave: Instabilidades de Saffman-Taylor. Célula de Hele-Shaw radial. Interface elástica. Rigidez dependente da curvatura. Rigidez constante. Formas estacionárias.

Abstract

The classic viscous fingering instability occurs when a fluid displaces another of higher viscosity between the parallel plates of a Hele-Shaw cell. In our work, the interface separating the fluids is elastic, and presents a curvature-dependent bending rigidity. By employing a second-order mode-coupling approach we investigate how the elastic nature of the interface influences the morphology of emerging interfacial patterns. We show that the inclusion of nonlinear effects plays a crucial role in inducing sizable interfacial instabilities, as well as in determining the ultimate shape of the pattern-forming structures. Particularly, we have found that the emergence of either narrow or wide fingers can be regulated by tuning a rigidity fraction parameter. On the other hand, the centrifugally-driven viscous fingering problem arises when two immiscible fluids of different densities flow in a rotating Hele-Shaw cell. In this conventional setting an interplay between capillary and centrifugal forces makes the fluid-fluid interface unstable, leading to the formation of fingered structures that compete dynamically and reach different lengths. It is known that finger competition is very sensitive to changes in the viscosity contrast between the fluids. Again, we study a variant of such a rotating flow problem where the fluids react and produce a gel-like phase at their separating boundary. This interface is assumed to be elastic and the same perturbative weakly nonlinear approach is used. Our results unveil a very different dynamic scenario, in which finger length variability is not regulated by the viscosity contrast. Finally, a vortex sheet formalism is used to search for equilibrium shapes in the centrifugally-driven interfacial elastic fingering problem. We study the development of interfacial instabilities when a viscous fluid surrounded by another of smaller density flows in a Hele-Shaw cell. The interplay between centrifugal and elastic forces leads to the formation of a rich variety of stationary shapes. Visually striking equilibrium morphologies are obtained from the numerical solution of a nonlinear differential equation for the interface curvature (the shape equation), determined by a zero vorticity condition. Classification of the various families of shapes is made via two dimensionless parameters: an effective bending rigidity (ratio of elastic to centrifugal effects), and a geometrical radius of gyration.

Keywords: Saffman-Taylor instability. Radial Hele-Shaw cell. Elastic interface. Curvature-dependent bending rigidity. Constant bending rigidity. Stationary shapes.

Lista de Figuras

- 1.1 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw retangular, onde o fluido 1 é injetado no fluido 2 (área hachurada). 12
- 1.2 Representação da situação de fluxo reverso em célula de Hele-Shaw radial. O fluido 1, mais viscoso, é injetado no fluido 2, menos viscoso. As instabilidades não ocorrem. 13
- 1.3 Foto do experimento realizado por Saffman-Taylor. O fluido menos viscoso (ar, parte superior da figura) é injetado no mais viscoso (glicerina, parte inferior da figura), favorecendo a formação de dedos. O tempo após o início do experimento cresce da esquerda para a direita. Figura retirada da Ref. [1]. 13
- 1.4 Foto do experimento realizado por Saffman-Taylor nos estágios finais da dinâmica. Destaque para a presença de um único dedo. Figura retirada da Ref. [1]. 14
- 1.5 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw radial. Inicialmente temos uma interface circular que, com o passar do tempo, se deformará. Figura retirada da Ref. [12]. 14
- 1.6 Experimento mostrando a evolução temporal de padrão formado em uma célula de Hele-Shaw radial. Inicialmente temos uma interface circular; em seguida, algumas dobras se formam e os dedos surgem. Note a tendência à bifurcação dos dedos (indicada pelas setas amarelas). 15
- 1.7 Outro experimento realizado em célula de Hele-Shaw radial. É possível observar várias bifurcações. 15
- 1.8 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw girante. Note o eixo passando pelo centro e o sentido de giro. O fluido 1 é mais denso que o fluido 2. Figura retirada da Ref. [12]. 16
- 1.9 Evolução temporal do padrão formado em um experimento em célula de Hele-Shaw girante. As imagens são mostradas da esquerda para a direita e de cima para baixo. Note o desmembramento de gotas satélites nos estágios finais da dinâmica. Figura retirada da Ref. [19]. 17
- 1.10 Simulações numéricas mostrando o desenvolvimento de padrões típicos de formação de dedos em uma célula de Hele-Shaw girante para três valores do contraste de viscosidade. Para $A = -1$ temos competição dos dedos que saem do fluido interno; para $A = 0$ temos competição significativamente suprimida; para $A = 1$ temos competição dos dedos que entram no fluido interno. Apenas a fronteira da gota inicial (linha circular) e o padrão final (em preto) são mostrados. Os círculos azul (pontilhado) e vermelho facilitam a visualização dos fenômenos de competição. Figura retirada da Ref. [20]. 18

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|----|
| 1.11 | Instabilidades elásticas no volume do fluido para célula de Hele-Shaw radial. Note a presença de dedos na forma de balões que penetram no gel elástico. Figura retirada da Ref. [27]. | 18 |
| 1.12 | Instabilidades elásticas no volume do fluido para célula de Hele-Shaw retangular. Note a semelhança com o padrão mostrado na figura 1.11. Figura retirada da Ref. [29]. | 19 |
| 1.13 | Surgimento das instabilidades em fluxo circular impulsionado por uma taxa de injeção de 150 ml/h de solução de CTAB 30 mM em solução de NaSal 30 mM: $t = (a) 10.0, (b) 20.0, (c) 28.8, e (d) 64.7$ s. Escala: a largura de cada figura é de 8 cm. Observe a formação de estruturas que parecem com cogumelos. Figura retirada da Ref. [30]. | 20 |
| 1.14 | Crescimento do padrão gel micelar nas estruturas do tipo tentáculos para injeção de solução de CTAB 50 mM em solução de NaSal 50 mM a uma taxa de injeção de 20 ml/h. A largura de cada figura é de 11 cm. Figura retirada da Ref. [30]. | 20 |
| 1.15 | Surgimento de instabilidades em fluxo circular sob as mesmas condições da figura 1.13, mas agora com os fluidos trocados: $t = (a) 8.2, (b) 11.0, (c) 16.3, e (d) 54.8$ s. Note a diferença nos padrões. Figura retirada da Ref. [30]. | 21 |
| 2.1 | Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw radial com interface elástica separando os fluidos 1 e 2. | 24 |
| 2.2 | Gráfico de $v(\kappa)$ para $v_0 = 1$ e $C = 0.6$. Note o decréscimo da função quando $\kappa = 1/\lambda$. Figura retirada da Ref. [31]. | 26 |
| 2.3 | Evolução temporal da interface para interação dos modos cosseno $n = 4$ e $2n = 8$. Evolução puramente linear para (a) $R_0 = 1.2$ cm e (b) $R_0 = 1.145$ cm. Fracamente não linear para (c) $R_0 = 1.2$ cm e (d) $R_0 = 1.145$ cm. $C = 0.99$. | 29 |
| 2.4 | Evolução temporal fracamente não linear da amplitude de perturbação cosseno a_{2n} para diferentes valores de C quando (a) $R_0 = 1.2$ cm e (b) $R_0 = 1.145$ cm. | 31 |
| 2.5 | Evolução temporal do campo de rigidez v [Eq. (2.6)] em unidades de $g\text{ cm}^2/s^2$, para as interfaces mostradas na Fig. 2.3. Evolução puramente linear para (a) $R_0 = 1.2$ cm e (b) $R_0 = 1.145$ cm, e fracamente não linear para (c) $R_0 = 1.2$ cm e (d) $R_0 = 1.145$ cm. Note que o menor v observado é 0.0013. | 32 |
| 3.1 | Esquema representativo de uma célula de Hele-Shaw girante com interface elástica separando os fluidos 1 e 2. | 34 |
| 3.2 | Taxa de crescimento linear $\Lambda(n)$ em função do modo n para três valores de C e dois valores de λ . Aqui, $B = 2.5 \times 10^{-3}$. | 36 |
| 3.3 | Função competição dos dedos $\mathcal{C}(n)$ em termos de λ para $B = 2.5 \times 10^{-3}$, $C = 0.5$ e $A = 1, 0, e -1$. | 38 |
| 3.4 | Evolução temporal da interface para a interação entre o modo fundamental $n = 6$ e o seu sub-harmônico $n = 3$ em situações correspondentes aos pontos P_1 (a) $\lambda = 0.8$, P_2 (b) $\lambda = 0.926$, e P_3 (c) $\lambda = 1.05$, que estão indicadas na Fig. 3.3 para $A = 0$. As interfaces estão representadas em intervalos de $t_f/10$, onde $t_f = 1.25$ é o tempo final. As linhas mais escuras correspondem a $t = t_f$. | 39 |

LISTA DE FIGURAS

- 3.5 Coordenada adimensional raio \mathcal{R} dos dedos que entram e que saem em função do ângulo polar θ , quando (a) $\lambda = 0.8$, (b) $\lambda = 0.9286$ e (c) $\lambda = 1.05$. Tais informações foram retiradas dos padrões representados nas Figs. 3.4(a)-(c), em $t = t_f$ e $A = 0$. 40
- 3.6 Função competição $\mathcal{C}(n)$, representada em termos de λ , para $B = 2.5 \times 10^{-3}$, $A = 0$ e cinco valores de C . 41
- 3.7 Função competição dos dedos $\mathcal{C}(n)$ em função do contraste de viscosidade A , para $C = 0.5$ e três valores diferentes de λ . Esses foram os valores de λ utilizados para obtermos os dados apresentados nas Figs. 3.4 e 3.5. 42
- 4.1 Formas estacionárias típicas para o problema convencional da célula de Hele-Shaw girante [42, 43] (isto é, na ausência de uma interface elástica). Nesse caso, capilaridade e forças centrífugas se balanceiam na interface fluido-fluido. Se aumentarmos os efeitos centrífugos formamos padrões com mais dedos, que eventualmente tendem ao *pinch-off* (desprendimento). A mesma classe de padrões aparecem em vários outros contextos [56–64]. 45
- 4.2 Representações da elástica de Euler. Figura retirada da Ref. [58]. 45
- 4.3 Padrões estacionários do problema de filmes confinados para diversos valores da razão entre efeitos de tensão superficial e elásticos. Note a ocorrência de *pinch-off*. Figura retirada da Ref. [64]. 46
- 4.4 Padrão formado pelo confinamento de fios em células de Hele-Shaw imóveis. Figura retirada da Ref. [65]. 47
- 4.5 Padrão formado pelo confinamento de fios em células de Hele-Shaw girantes. Figura retirada da Ref. [67]. 47
- 4.6 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw girante, onde a fronteira fluido-fluido é uma camada elástica. Consideramos $\rho_2 > \rho_1$. 48
- 4.7 Descontinuidade da componente tangencial da velocidade do fluido através da interface. Isso leva à formação de uma linha de vórtices na interface. 49
- 4.8 Mapa paramétrico (B, R_g) mostrando a disposição das famílias de padrões no equilíbrio I-V. 51
- 4.9 Formas estacionárias - Família I. (a) $B = 0.0333$, $R_g = 1.4768$; (b) $B = 0.0347$, $R_g = 1.7004$; (c) $B = 0.0483$, $R_g = 2.3253$; (d) $B = 0.0500$, $R_g = 2.5826$. Observe a interface na forma de uma serpentina, que surge em cada estrutura com modo principal n , com $1 \leq n \leq 4$. 52
- 4.10 Formas estacionárias - Família II. (a) $B = 0.0070$, $R_g = 1.4582$; (b) $B = 0.0058$, $R_g = 1.4032$; (c) $B = 0.0052$, $R_g = 1.3051$; (d) $B = 0.0038$, $R_g = 1.2547$. Note a natureza espiral dos padrões e o fenômeno de aprisionamento das gotas na ponta dos dedos que entram no fluido 2 em (d). 53
- 4.11 Formas estacionárias - Família III. (a) $B = 0.0087$, $R_g = 1.2640$; (b) $B = 0.0065$, $R_g = 1.2876$; (c) $B = 0.0050$, $R_g = 1.3296$; (d) $B = 0.0018$, $R_g = 1.3633$. Como na Fig. 4.10, os padrões também rodopiam, mas agora observamos a tendência de *pinch-off* dos dedos que saem do fluido 2 em (d). 54

LISTA DE FIGURAS

- 4.12 Formas estacionárias - Família IV. (a) $B = 0.0034$, $R_g = 1.6714$; (b) $B = 0.0054$, $R_g = 1.8260$; (c) $B = 0.0074$, $R_g = 1.9525$; (d) $B = 0.0096$, $R_g = 2.0633$. De (a) para (d) é possível notar que as interfaces dobram mais intensamente e ocorre o fenômeno de formação de dedos laterais (*side-branching formation*). 55
- 4.13 Formas estacionárias - Família V. (a) $B = 0.0060$, $R_g = 0.9539$; (b) $B = 0.0045$, $R_g = 0.9851$; (c) $B = 0.0032$, $R_g = 1.0408$; (d) $B = 0.0029$, $R_g = 1.0938$. Ocorrem *side-branching* e dobras na interface, mas as protuberâncias são consideravelmente maiores que as mostradas na Fig. 4.12. 56

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 12 |
| 1.1 | O problema de Saffman-Taylor | 12 |
| 1.1.1 | Célula retangular | 12 |
| 1.1.2 | Célula radial | 13 |
| 1.2 | Célula Girante | 16 |
| 1.3 | Instabilidades de Saffman-Taylor em interfaces elásticas | 17 |
| 1.4 | Roteiro dos próximos capítulos | 20 |
| 1.5 | Publicações resultantes desta dissertação | 22 |
| 2 | Injeção e interfaces elásticas: análise fracamente não linear | 23 |
| 2.1 | Introduzindo o problema | 23 |
| 2.2 | Teoria fracamente não linear | 24 |
| 2.3 | Surgimento das não linearidades | 27 |
| 3 | Instabilidades elásticas em células de Hele-Shaw girantes | 33 |
| 3.1 | Introdução ao problema | 33 |
| 3.2 | Equações fracamente não lineares | 33 |
| 3.3 | Efeitos da interface elástica: regimes linear e não linear | 36 |
| 3.3.1 | Estágio linear | 36 |
| 3.3.2 | Estágio fracamente não linear | 37 |
| 4 | Padrões estacionários no problema da célula de Hele-Shaw girante | 44 |
| 4.1 | Padrões elásticos da literatura e a elástica de Euler | 44 |
| 4.2 | Tratamento vortex sheet e equação do contorno | 46 |
| 4.3 | Famílias das formas estacionárias | 50 |
| 5 | Conclusões e perspectivas | 57 |
| | Referências | 59 |
| | Apêndice A: Derivação da eq.(2.5) | 63 |
| | Apêndice B: Funções que aparecem nos termos $F(n, m)$ das equações de modos acoplados | 65 |
| | Apêndice C: Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A weakly nonlinear study | 66 |
| | Apêndice D: Elastic fingering in rotating Hele-Shaw flows | 75 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| Apêndice E: Stationary patterns in centrifugally driven interfacial elastic fingering | 84 |
|--|-----------|

Introdução

1.1 O problema de Saffman-Taylor

Nesta dissertação, estudaremos variantes do famoso problema de Saffman-Taylor, tratado pelos dois cientistas em 1958 [1]. Instabilidades de Saffman-Taylor ou *viscous fingering instabilities* ocorrem quando um fluido viscoso é injetado em outro fluido com maior viscosidade na geometria confinada de uma célula de Hele-Shaw [2]. Inventada pelo engenheiro Henri Selby Hele-Shaw (1854 - 1941) próximo do ano de 1897, esse dispositivo consiste em duas placas de vidro paralelas separadas por uma distância da ordem de milímetros. Sob essas circunstâncias, a interface fluido-fluido é instável e leva ao crescimento de formas semelhantes à dedos. Podemos ter instabilidades de Saffman-Taylor para células de Hele-Shaw retangulares ou radiais.

1.1.1 Célula retangular

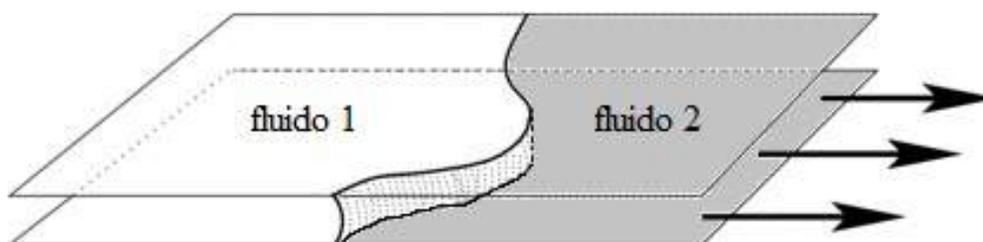


Figura 1.1 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw retangular, onde o fluido 1 é injetado no fluido 2 (área hachurada).

Um esquema de um aparato típico para uma célula de Hele-Shaw retangular está representado na figura 1.1, onde o fluido 1 está sendo injetado no fluido 2. Duas situações são possíveis: o fluido mais viscoso pode ser injetado no menos viscoso ou o menos viscoso injetado no mais viscoso. Na primeira, conhecida como situação de fluxo reverso, as instabilidades de Saffman-Taylor não ocorrem (figura 1.2). Na segunda, se formam estruturas semelhantes à dedos, como mostrado na figura 1.3, que mostra uma visão superior do resultado experimental original encontrado por Saffman e Taylor [1].

Quando a diferença de viscosidade entre os fluidos na célula de Hele-Shaw retangular é muito grande e eles estão confinados em uma região muito estreita, ocorre o crescimento de um dedo dominante em detrimento dos outros. No experimento de Saffman-Taylor (figura 1.3), no início da dinâmica, vemos que os dedos possuem comprimentos aproximadamente iguais. Com

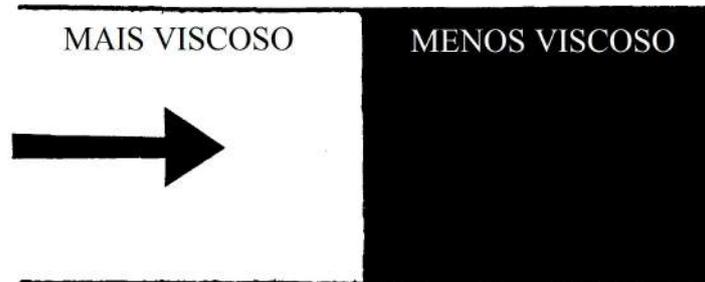


Figura 1.2 Representação da situação de fluxo reverso em célula de Hele-Shaw radial. O fluido 1, mais viscoso, é injetado no fluido 2, menos viscoso. As instabilidades não ocorrem.

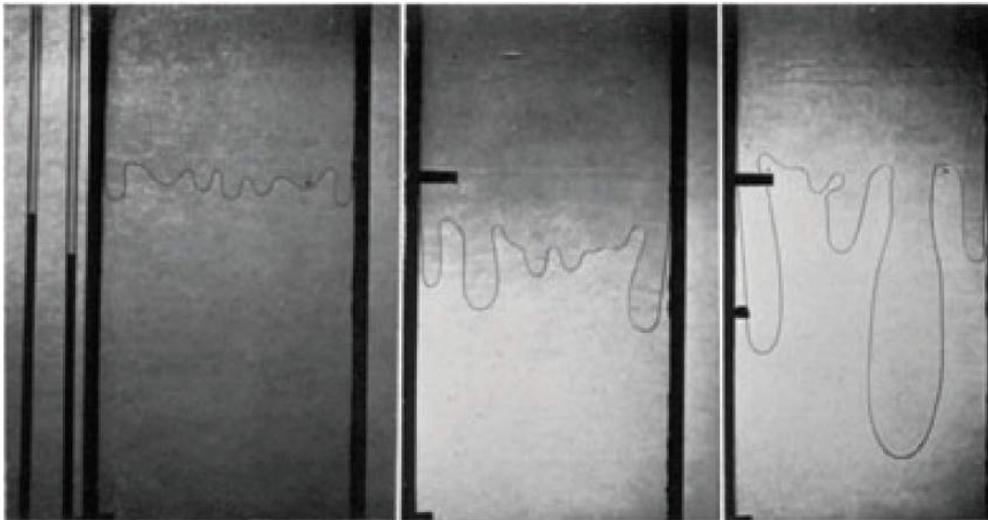


Figura 1.3 Foto do experimento realizado por Saffman-Taylor. O fluido menos viscoso (ar, parte superior da figura) é injetado no mais viscoso (glicerina, parte inferior da figura), favorecendo a formação de dedos. O tempo após o início do experimento cresce da esquerda para a direita. Figura retirada da Ref. [1].

o passar do tempo, um dedo cresce bastante e os outros não acompanham seu crescimento, de modo que ao final da dinâmica só resta um dedo. Dizemos que foi atingido um estado "estacionário". O comprimento do dedo restante continua aumentando, já que o fluido menos viscoso é injetado continuamente no mais viscoso. A figura 1.4 ilustra bem essa situação.

1.1.2 Célula radial

Nesta subseção iremos voltar nossa atenção à célula de Hele-Shaw radial [3–11]. Nesse tipo de configuração, um fluido é injetado radialmente no outro através de um furo no centro da célula de Hele-Shaw. Se o fluido injetado for o mais viscoso, a interface se propaga na forma de uma frente circular estável (fluxo reverso). Quando injetamos o fluido menos viscoso, a interface

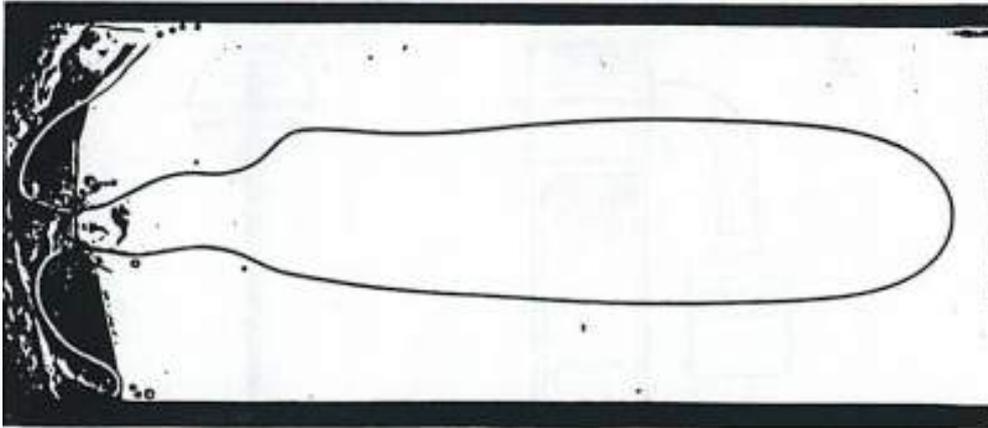


Figura 1.4 Foto do experimento realizado por Saffman-Taylor nos estágios finais da dinâmica. Destaque para a presença de um único dedo. Figura retirada da Ref. [1].

fluido-fluido inicialmente circular deforma e os dedos tendem a se multiplicar (figura 1.5).

Primeiramente, vamos destacar algumas diferenças do fluxo radial para o retangular. No caso radial não observamos simetria na interface, pois existe uma diferença entre as áreas interna e externa à interface. Além disso, aqui não é possível observar estados estacionários equivalentes aos comentados na seção 1.1.1. Os estágios de instabilidade na célula radial estão sempre evoluindo temporalmente.

Voltando ao caso em que injetamos o fluido menos viscoso no mais viscoso, à medida que vamos injetando, algumas ondulações vão se formando na interface inicialmente circular, e as primeiras instabilidades vão surgindo. Com o passar do tempo, dedos longos e delgados se formam e, eventualmente, ocorre o fenômeno de *tip-splitting* (bifurcação dos dedos), formando padrões ramificados bastante complexos (ver figuras 1.6 e 1.7).

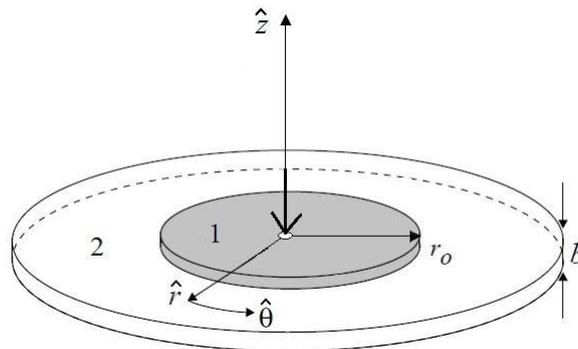


Figura 1.5 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw radial. Inicialmente temos uma interface circular que, com o passar do tempo, se deformará. Figura retirada da Ref. [12].

Tanto para a célula de Hele-Shaw retangular quanto para a radial, estágios iniciais da dinâmica podem ser estudados usando uma abordagem puramente linear. No entanto, se quisermos ter acesso e prever fenômenos não lineares, como as bifurcações, temos que empregar uma teoria fracamente não linear.

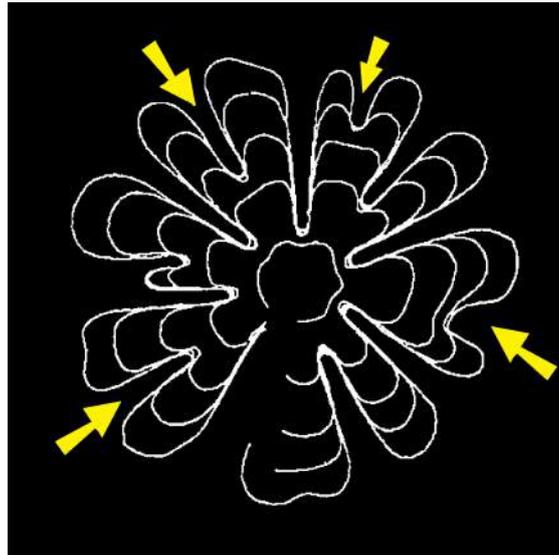


Figura 1.6 Experimento mostrando a evolução temporal de padrão formado em uma célula de Hele-Shaw radial. Inicialmente temos uma interface circular; em seguida, algumas dobras se formam e os dedos surgem. Note a tendência à bifurcação dos dedos (indicada pelas setas amarelas).



Figura 1.7 Outro experimento realizado em célula de Hele-Shaw radial. É possível observar várias bifurcações.

Em algumas situações de interesse prático e tecnológico precisamos favorecer o desenvolvimento de instabilidades na interface, mesmo durante fluxos reversos ou com contraste de viscosidade nulo. Por exemplo, é sabido que a formação de instabilidades na interface é van-

tajosa para aumentar processos de mistura em dispositivos de pequena escala [13]. De fato, recentemente o interesse em ativar instabilidades em situações originalmente estáveis aumentou bastante. Vários estudos recentes [14, 15] demonstraram, através de análises lineares e experimentos, que a introdução de um pequeno gradiente no espaçamento da célula de Hele-Shaw (de modo que as placas da célula deixam de ser paralelas) pode induzir instabilidades de Saffman-Taylor mesmo em situações classicamente estáveis [16].

1.2 Célula Girante

Uma forma alternativa de gerar instabilidades em forma de dedos, em geometrias de células de Hele-Shaw, ocorre quando fazemos uma célula de Hele-Shaw radial girar em torno de um eixo perpendicular às suas placas, passando pelo seu centro (figura 1.8). Agora a diferença de densidade entre os fluidos é fundamental: o fluido mais denso deve ser envolto por outro de menor densidade para que forças centrífugas atuem na diferença de densidade entre os fluidos e morfologias instáveis surjam. Uma grande variedade de formas de padrões é obtida no arranjo da célula de Hele-Shaw girante [2, 17–24], levando a estruturas de dedos que são bem distintas daquelas detectadas em fluxos de Hele-Shaw impulsionados por diferença de viscosidade, como mostrado na figura 1.9. Uma particularidade interessante é a formação de gotas nas extremidades dos dedos. Eventualmente as gotas se desmembram da maior porção de fluido, caracterizando um fenômeno chamado de *pinch-off*.

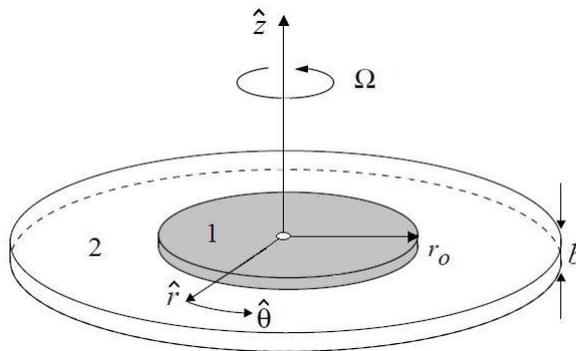


Figura 1.8 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw girante. Note o eixo passando pelo centro e o sentido de giro. O fluido 1 é mais denso que o fluido 2. Figura retirada da Ref. [12].

Em contraste com o problema da injeção, o mais relevante mecanismo de formação de padrões no caso da célula de Hele-Shaw girante não é bifurcação dos dedos, mas a competição (ou variação de comprimento) entre os dedos que se formam na interface. Através de análise fracamente não linear [25] e simulações numéricas avançadas [20, 26] foi verificado que o contraste de viscosidade A (diferença de viscosidade adimensional entre os fluidos, $-1 \leq A \leq 1$) tem um papel crucial na determinação das estruturas resultantes, no sentido de que a dinâmica de competição dos dedos muda significativamente quando a magnitude do sinal de A é variada. Foi mostrado que valores cada vez maiores de $A > 0$ ($A < 0$) levam a uma maior competição entre os dedos que entram no fluido externo (interno). Além disso, fenômenos de competição

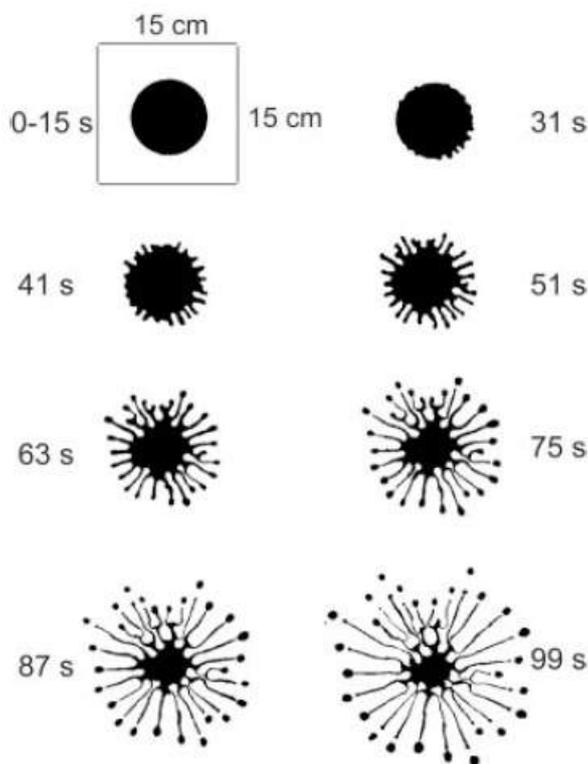


Figura 1.9 Evolução temporal do padrão formado em um experimento em célula de Hele-Shaw girante. As imagens são mostradas da esquerda para a direita e de cima para baixo. Note o desmembramento de gotas satélites nos estágios finais da dinâmica. Figura retirada da Ref. [19].

são consideravelmente suprimidos quando $A \rightarrow 0$ (figura 1.10).

1.3 Instabilidades de Saffman-Taylor em interfaces elásticas

As instabilidades convencionais de Saffman-Taylor estudadas na seção 1.1 são reguladas por processos de competição entre tensão superficial e forças viscosas/gradientes de pressão. Lembrando que os processos de fluxo reverso (o fluido mais viscoso empurrando o menos viscoso) ou com nenhuma diferença de viscosidade são estáveis. Recentemente, outro tipo de instabilidade de dedos que também ocorre no ambiente confinado de uma célula de Hele-Shaw (a chamada instabilidade elástica) tem atraído a atenção de um grande número de pesquisadores. Instabilidades elásticas podem surgir quando o fluido mais viscoso é trocado por uma material elástico (*bulk elastic fingering*, ou instabilidades elásticas no volume de fluido) [27–29] ou quando os fluidos são Newtonianos, mas a interface fluido-fluido apresenta propriedades elásticas (*interfacial elastic fingering*, ou instabilidades elásticas na interface) [30–34].

Os experimentos realizados na Ref. [27] consideram o desenvolvimento de instabilidades elásticas no volume quando um fluido é injetado contra um gel puramente elástico em uma célula de Hele-Shaw radial. Foi observado que a cavidade contendo o fluido se dilata até que,

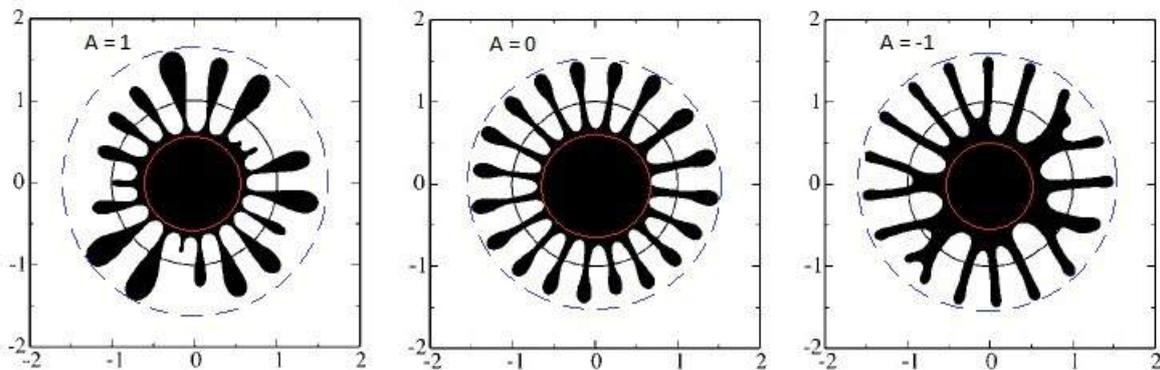


Figura 1.10 Simulações numéricas mostrando o desenvolvimento de padrões típicos de formação de dedos em uma célula de Hele-Shaw girante para três valores do contraste de viscosidade. Para $A = -1$ temos competição dos dedos que saem do fluido interno; para $A = 0$ temos competição significativamente suprimida; para $A = 1$ temos competição dos dedos que entram no fluido interno. Apenas a fronteira da gota inicial (linha circular) e o padrão final (em preto) são mostrados. Os círculos azul (pontilhado) e vermelho facilitam a visualização dos fenômenos de competição. Figura retirada da Ref. [20].

em uma dada pressão crítica, saliências na forma de dedos, oriundas do fluido invasor, penetram no gel elástico. Isso leva à formação de um padrão bem peculiar, onde os dedos inflam, criando estruturas na forma de balões (figura 1.11). Esses padrões são muito diferentes das formas obtidas no caso usual [2, 4] mostradas na seção 1.1. Ao contrário da situação hidrodinâmica comum, esse fenômeno é reversível, de modo que os dedos desaparecem e a bolha inicial de fluido é recuperada quando a pressão é diminuída. Mais ainda, foi mostrado que efeitos de tensão na interface entre o fluido injetado e o gel não são importantes, ou seja, a ocorrência de instabilidades no volume de fluido não depende de forças na interface. Tais resultados experimentais são respaldados por cálculos analíticos e simulações numéricas [28].

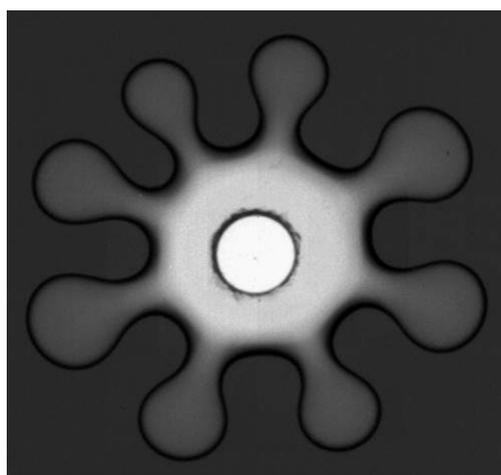


Figura 1.11 Instabilidades elásticas no volume do fluido para célula de Hele-Shaw radial. Note a presença de dedos na forma de balões que penetram no gel elástico. Figura retirada da Ref. [27].

Um tipo de geometria retangular análoga com a situação de fluxo radial examinada nas Refs. [27, 28] foi investigada na Ref. [29], onde as instabilidades em formas de dedos são impulsionadas por um deslocamento transverso de uma camada elástica sob tensão. Esse processo é similar àquele que ocorre durante o levantamento de uma das placas de células de Hele-Shaw [36, 37] e em testes de adesão [38]. No caso de deslocamento transverso [29], dedos inflados semelhantes aos encontrados em [27] são observados (figura 1.12), e a instabilidade elástica possui natureza reversível.

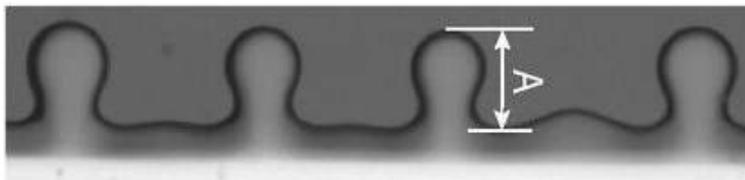


Figura 1.12 Instabilidades elásticas no volume do fluido para célula de Hele-Shaw retangular. Note a semelhança com o padrão mostrado na figura 1.11. Figura retirada da Ref. [29].

Um sistema diferente mas igualmente interessante está associado ao desenvolvimento de instabilidades elásticas na interface [30–34]. Esse fenômeno de formação de dedos foi observado em uma série de experimentos realizados por Podgorski *et al.* [30]. Nos seus experimentos dois fluidos miscíveis de igual viscosidade foram utilizados. A natureza não convencional do sistema está no fato de que, quando colocados em contato, uma reação química ocorre e a interface fluido-fluido se torna gelatinosa. O resultado é um sistema constituído por dois fluidos Newtonianos (como no caso tradicional) separados por uma fronteira elástica. A existência de uma interface elástica leva ao aparecimento de efeitos não esperados; por exemplo, foi verificado que mesmo com o contraste de viscosidade nulo a interface pode se tornar instável, resultando numa variedade de padrões na interface que são completamente distintos daqueles comumente detectados em experimentos usuais [2, 4].

As novas morfologias variam de estruturas em forma de cogumelo até formas com dedos que parecem tentáculos (ver Figs. 1.13 e 1.14). Além disso, este sistema possui uma assimetria muito interessante: apesar do fato dos fluidos possuírem mesma viscosidade, diferentes padrões são obtidos dependendo de qual fluido é injetado (isto é, se o fluido 1 é injetado no fluido 2 ou o contrário), conforme mostra a figura 1.15. Como corretamente especulado pelos autores da Ref. [30], o trabalho realizado pelo grupo de Anne De Wit [39–41] mostrou que esta assimetria ocorre pelo fato dos dois fluidos reagentes possuírem diferentes coeficientes de difusão.

Nas Refs. [31, 32] He e colaboradores propuseram uma teoria que tentou modelar o sistema reagente e miscível examinado em [30]: consideraram que os dois fluidos eram imiscíveis, mas que a interface que os separava era uma membrana elástica fina, apresentando rigidez à deformação dependente da curvatura. A camada elástica na interface impediria mais misturas, de modo que a miscibilidade possuiria um papel desprezível na determinação das instabilidades. Nesse contexto, os resultados lineares conseguiram mostrar que a interface poderia ser instável mesmo com contraste de viscosidade nulo, consistentemente com os resultados experimentais [30]. Os interessantes resultados experimentais mostrados em [30] e a análise linear de [31, 32] motivaram todo o trabalho mostrado nesta dissertação.

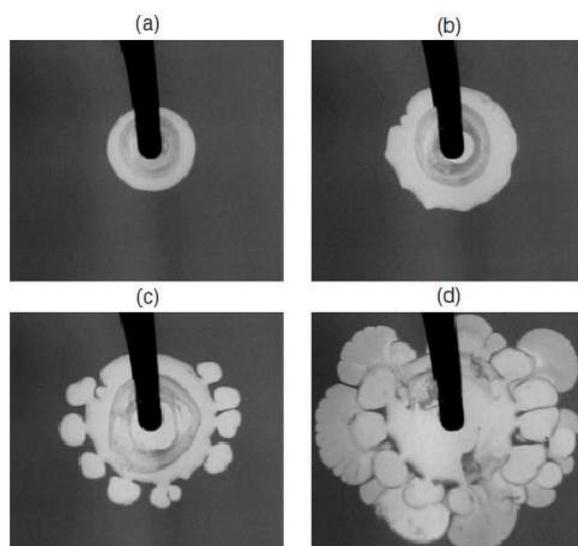


Figura 1.13 Surgimento das instabilidades em fluxo circular impulsionado por uma taxa de injeção de 150 ml/h de solução de CTAB 30 mM em solução de NaSal 30 mM: $t =$ (a) 10.0, (b) 20.0, (c) 28.8, e (d) 64.7 s. Escala: a largura de cada figura é de 8 cm. Observe a formação de estruturas que parecem com cogumelos. Figura retirada da Ref. [30].

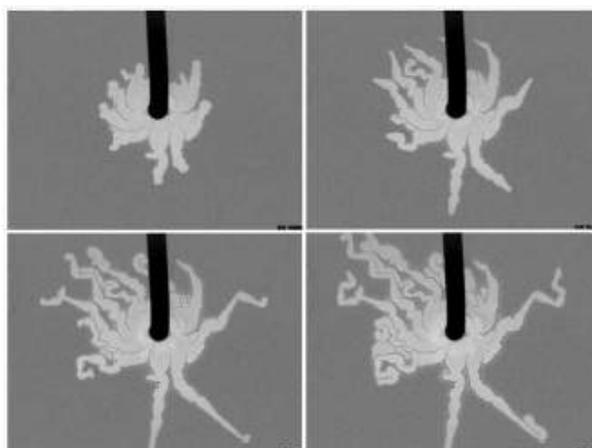


Figura 1.14 Crescimento do padrão gel micelar nas estruturas do tipo tentáculos para injeção de solução de CTAB 50 mM em solução de NaSal 50 mM a uma taxa de injeção de 20 ml/h. A largura de cada figura é de 11 cm. Figura retirada da Ref. [30].

1.4 Roteiro dos próximos capítulos

Começamos nosso trabalho fazendo uma análise fracamente não linear do sistema tratado nas Refs. [31, 32], abordada no capítulo 2. Mostramos que efeitos não lineares possuem papel fundamental na determinação da forma das estruturas que se formam [33]. Em particular, conseguimos mostrar que o aparecimento de dedos largos, que lembram cogumelos, ou estreitos, na forma de tentáculos, é regulado por um parâmetro de fração de rigidez da interface.

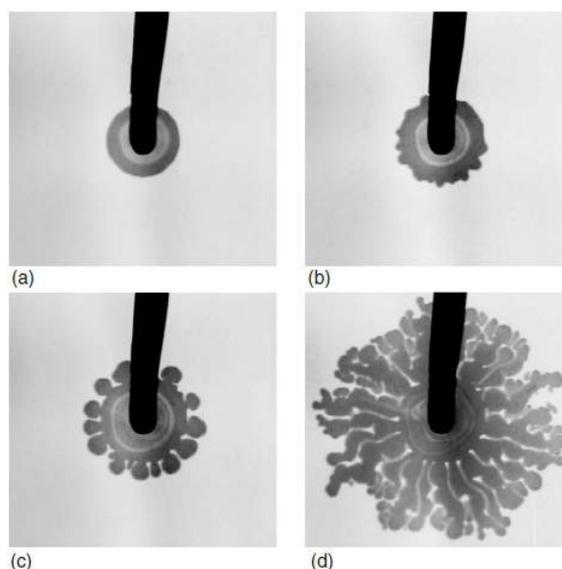


Figura 1.15 Surgimento de instabilidades em fluxo circular sob as mesmas condições da figura 1.13, mas agora com os fluidos trocados: t =(a) 8.2, (b) 11.0,(c) 16.3, e (d) 54.8 s. Note a diferença nos padrões. Figura retirada da Ref. [30].

Em seguida, examinamos o desdobramento de instabilidades elásticas na interface em uma variante do problema clássico de Saffman-Taylor [34]. Estudamos no capítulo 3 a influência da interface elástica no problema da célula de Hele-Shaw girante clássico [17–20, 24, 25, 42, 43]. Como nas Refs. [31–33], na Ref. [34] assumimos que os fluidos reagem, produzindo uma interface elástica na fronteira com rigidez dependente da curvatura. Nesse cenário, mostramos que o mecanismo mais relevante de formação de padrões é a competição dos dedos. Mais importante, mostramos que os eventos de competição dos dedos são significativamente afetados pela ação da interface elástica.

Por fim, no capítulo 4 usamos o formalismo de vortex sheet para procurar as formas estacionárias do problema elástico da célula de Hele-Shaw girante. Consideramos o caso em que o fluido mais denso está rodeado pelo fluido menos denso. A disputa entre as forças centrífuga e elástica leva à formação de uma variedade enorme de formas estacionárias. Morfologias impressionantes são obtidas através de soluções numéricas de uma equação diferencial não linear para a curvatura da interface (equação da forma), determinada através da condição de vorticidade nula. A classificação das várias famílias de formas é feita utilizando dois parâmetros adimensionais: a rigidez efetiva da interface e o parâmetro geométrico raio de giração.

Felizmente, todo o trabalho desenvolvido ao longo desses anos gerou três publicações no *Physical Review E* [33–35], listadas na próxima seção e que podem ser encontradas na íntegra nos apêndices C:, D: e E:.

1.5 Publicações resultantes desta dissertação

1. Gabriel D. Carvalho, José A. Miranda, e Hermes Gadêlha, *Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A weakly nonlinear study*, Phys. Rev. E **88**, 053006 (2013).
2. Gabriel D. Carvalho, Hermes Gadêlha, e José A. Miranda, *Elastic fingering in rotating Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **89**, 053019 (2014).
3. Gabriel D. Carvalho, Hermes Gadêlha, e José A. Miranda, *Stationary patterns in centrifugally driven interfacial elastic fingering*, Phys. Rev. E **90**, 063009 (2014).

Injeção e interfaces elásticas: análise fracamente não linear

2.1 Introduzindo o problema

No capítulo anterior, discutimos a instabilidade de Saffman-Taylor, destacando suas variantes e aplicabilidades. Além dos casos discutidos no capítulo 1, outras estratégias foram propostas para desestabilizar interfaces fluido-fluido em fluxos confinados em células de Hele-Shaw. O desenvolvimento de instabilidades viscosas reversas, quando o fluido mais viscoso é injetado no menos viscoso, foi investigado teoricamente e experimentalmente considerando a adição de surfactantes na interface, ou nas placas da célula de Hele-Shaw [44–50]. A presença de surfactantes faz com que a tensão superficial varie ao longo da fronteira fluido-fluido, facilitando a ocorrência de instabilidades locais.

Outra linha de estudos examina o aparecimento de instabilidades de natureza química e hidrodinâmica quando reações químicas e de difusão competem com processos de advecção e convexão [39, 51–55]. Simulações numéricas sofisticadas detectaram a ocorrência de instabilidades de Saffman-Taylor reversas em dedos viscosos miscíveis devido a efeitos difusivos [52]. Experimentos realizados em laboratório com dedos viscosos miscíveis [53, 54] confirmaram que reações químicas podem desestabilizar a situação reversa classicamente estável.

Um experimento interessante envolvendo a ocorrência de reações químicas na interface em células de Hele-Shaw foi realizado por Podgorski *et al.* na Ref. [30] usando fluidos miscíveis de mesma viscosidade. Os fluidos reagem na interface, produzindo uma estrutura semelhante à um gel e com rigidez elevada. Esse sistema se mostrou instável, levando à formação de uma variedade enorme de padrões na interface, incluindo estruturas parecidas com cogumelos e dedos que lembravam tentáculos (ver Figs. 1.13 e 1.14).

Uma investigação teórica subsequente tentou explicar o sistema miscível reativo examinado em [30] considerando que os dois fluidos eram imiscíveis e que a interface fluido-fluido fazia o papel de uma membrana elástica com rigidez dependente da curvatura [31]. Nesse contexto assumiu-se que a camada gelatinosa na interface evitava a mistura entre os fluidos, de modo que a miscibilidade dos fluidos possuía papel desprezível na determinação das instabilidades.

Na Ref. [31] foi considerada uma condição de pressão (estabelece a diferença de pressão entre os meios fluidos) modificada de Young-Laplace, que contemplava o fato da interface possuir uma rigidez dependente da curvatura local. Os resultados lineares encontrados confirmaram que os sistemas reativos eram mais instáveis dos que os não reativos, de modo que a reação possuía um efeito desestabilizante. Em particular, mostrou-se que a interface poderia se tornar instável mesmo se os fluidos tivessem mesma viscosidade, confirmando mais uma vez

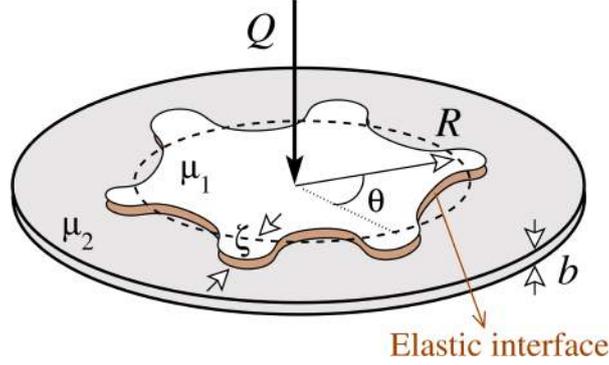


Figura 2.1 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw radial com interface elástica separando os fluidos 1 e 2.

os resultados experimentais encontrados em [30].

Apesar da significância dos resultados obtidos em [31], em estágios puramente lineares não se pode afirmar muita coisa sobre a influência da interface elástica na morfologia dos padrões emergentes. Para acessar tais efeitos é necessário investigar estágios não lineares da dinâmica. Este é o objetivo deste capítulo: usando o modelo teórico proposto em [31] como ponto de partida, empregamos uma teoria de modos acoplados perturbativa de segunda ordem [9] para obter informações preciosas sobre o processo de formação dos padrões.

2.2 Teoria fracamente não linear

Consideremos uma célula de Hele-Shaw com espaçamento b contendo dois fluidos viscosos imiscíveis e incompressíveis, como mostrado na Fig. 2.1. Denotemos as viscosidades dos fluidos interno e externo, respectivamente, como μ_1 e μ_2 . O fluido 1 é injetado no fluido 2 à taxa de injeção constante Q (área percorrida pelo tempo). Devido à uma reação química surge uma interface gelatinosa separando os dois fluidos. Como em [31, 32], tratamos a interface como uma membrana elástica, apresentando uma rigidez dependente da curvatura.

A interface fluido-fluido é descrita como $\mathfrak{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, onde θ representa o ângulo azimutal e $R(t)$ é o raio não perturbado dependente do tempo $R = R(t) = \sqrt{R_0^2 + Qt/\pi}$, com R_0 o raio não perturbado em $t = 0$. Aqui, $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$ denota a perturbação resultante na interface com amplitudes de Fourier $\zeta_n(t)$ e comprimentos de onda inteiros n . Nossa abordagem perturbativa mantém até termos de segunda ordem em ζ . Na expansão de Fourier para ζ incluímos o modo $n = 0$ para garantir que a área da figura perturbada seja independente da perturbação ζ . Conservação de massa nos dá que o modo zero é escrito em termos dos outros modos como $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$.

Para a geometria bidimensional da célula de Hele-Shaw, a equação que governa o sistema é a Lei de Darcy. Após tomarmos a média transversal na direção z [4, 30],

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\mu_j} \nabla p_j, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{v}_j e p_j denotam a velocidade e pressão nos fluidos $j = 1, 2$, respectivamente. Da natureza irrotacional do fluxo, $\nabla \times \mathbf{v}_j = 0$, e da condição de incompressibilidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad (2.2)$$

podemos verificar que o potencial de velocidade ϕ_j ($\mathbf{v}_j = -\nabla\phi_j$) obedece à equação de Laplace. Para encontrarmos a equação de movimento para a interface, reescrevemos (2.1) para cada um dos fluidos em termos do potencial de velocidade. Integramos e subtraímos as equações resultantes para obter [9]

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = -\frac{b^2 \Delta p}{12(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (2.3)$$

onde o parâmetro adimensional $A = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$ é o contraste de viscosidade, e

$$\Delta p = (p_1 - p_2)|_{r=\mathfrak{R}} - (p_1 - p_2)|_{r=R}, \quad (2.4)$$

onde $(p_1 - p_2)|_{r=\mathfrak{R}}$ denota a diferença de pressão na interface perturbada e $(p_1 - p_2)|_{r=R}$ representa a diferença de pressão na interface não perturbada [31, 32].

Para incluir contribuições oriundas da natureza elástica da interface fluido-fluido, similarmente ao que é feito em [31, 32], nós consideramos uma condição de pressão de Young-Laplace generalizada, que expressa a diferença de pressão através da interface fluido-fluido perturbada como

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)|_{r=\mathfrak{R}} = & -\frac{1}{2}v'''\kappa^2\kappa_s^2 - v'' \left(3\kappa\kappa_s^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\kappa_{ss} \right) \\ & - v' \left(\frac{1}{2}\kappa^4 + 3\kappa_s^2 + 2\kappa\kappa_{ss} \right) - v \left(\frac{1}{2}\kappa^3 + \kappa_{ss} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$v = v(\kappa) = v_0(Ce^{-\lambda^2\kappa^2} + 1 - C) \quad (2.6)$$

é a função de rigidez, v_0 é a rigidez máxima, que expressa maior resistência a perturbações, κ denota a curvatura da interface no plano da célula, $\lambda > 0$ é o raio característico [31] e $0 \leq C < 1$ é a fração de rigidez, que mede a fração de ligações intramoleculares quebradas na deformação da superfície.

Podemos pensar na quantidade $1/\lambda$ como uma curvatura característica além da qual $v(\kappa)$ decresce substancialmente (ver figura 2.2). Note que o limite de rigidez constante é atingido na Eq.(2.6) fazendo $C = 0$. Na Eq. (2.5) os apóstrofes indicam derivadas em relação à curvatura κ , enquanto que os subscritos em κ indicam derivadas em relação ao comprimento de arco s . Os detalhes das contas que levam à Eq. (2.5) são apresentados no apêndice A.: Nosso cálculo da Eq. (2.5) é distinto do apresentado em [32], embora tenhamos obtido o mesmo resultado.

Nosso problema é especificado pela condição de pressão generalizada (2.5) mais a condição de contorno cinemática, que garante que as componentes normais das velocidades dos fluidos são contínuas na interface [2],

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \right)_{r=\mathfrak{R}} - \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right)_{r=\mathfrak{R}}. \quad (2.7)$$

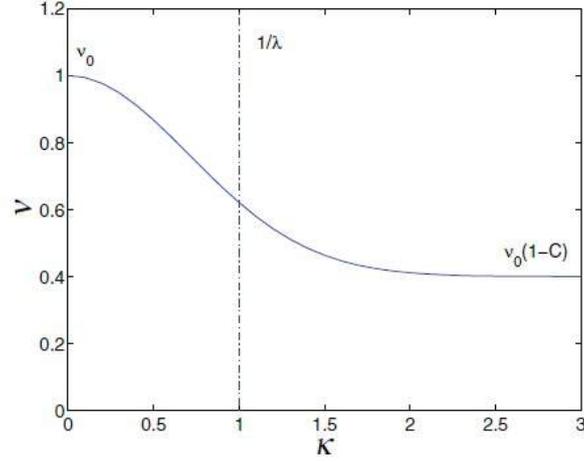


Figura 2.2 Gráfico de $v(\kappa)$ para $v_0 = 1$ e $C = 0.6$. Note o decréscimo da função quando $\kappa = 1/\lambda$. Figura retirada da Ref. [31].

Seguindo passos já estabelecidos em análises fracamente não lineares prévias de fluxos em células de Hele-Shaw radiais [9, 50], primeiramente definimos expansões de Fourier para os potenciais de velocidade. Em seguida, expressamos ϕ_j em termos das amplitudes de perturbação ζ_n considerando a condição (2.7). Substituindo essas relações e a condição de pressão, Eq. (2.5), na Eq. (2.3), sempre mantendo termos de até segunda ordem em ζ , e aplicando a transformada de Fourier, encontramos as equações de movimento para as amplitudes de perturbação (para $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n + \sum_{m \neq 0} [F(n, m)\zeta_m\zeta_{n-m} + G(n, m)\dot{\zeta}_m\zeta_{n-m}], \quad (2.8)$$

onde o ponto indica derivada total em relação ao tempo,

$$\Lambda(n) = \frac{Q}{2\pi R^2}(A|n| - 1) + \frac{\alpha v_0}{2R^5}|n|(n^2 - 1)[A_1(C, \eta)(n^2 + 1) + A_2(C, \eta)] \quad (2.9)$$

é a taxa de crescimento linear ou *growth rate*,

$$A_1(C, \eta) = Ce^{-\eta}(-4\eta^2 + 10\eta - 2) - 2(1 - C) \quad (2.10)$$

e

$$A_2(C, \eta) = Ce^{-\eta}(8\eta^2 - 22\eta + 5) + 5(1 - C), \quad (2.11)$$

com $\alpha = b^2/[12(\mu_1 + \mu_2)]$ e $\eta = (\lambda/R)^2$.

Os termos de acoplamento de segunda ordem são dados por

$$F(n, m) = \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{QA}{2\pi R^2} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nm) \right] - \frac{\alpha v_0 C e^{-\eta}}{R^5} [B_1(n, m) + \eta B_2(n, m) + \eta^2 B_3(n, m) + 2\eta^3 B_4(n, m)] - \frac{\alpha v_0 (1-C)}{R^5} B_1(n, m) \right\} \quad (2.12)$$

e

$$G(n, m) = \frac{1}{R} \{A|n|[1 - \text{sgn}(nm)] - 1\}. \quad (2.13)$$

As funções sgn valem ± 1 de acordo com o sinal do argumento. As expressões para as funções $B_1(n, m)$, $B_2(n, m)$, $B_3(n, m)$, e $B_4(n, m)$ são dadas no apêndice B:

As expressões (2.8)-(2.13) representam as equações de modos acoplados para o problema de instabilidades em interfaces elásticas em célula de Hele-Shaw radial com injeção, considerando que a interface possui uma rigidez dependente da curvatura. Esse conjunto de equações não lineares abre a possibilidade de investigarmos analiticamente como a morfologia da interface, que evolui no tempo, responde à competição entre injeção e as propriedades elásticas inerentes à interface fluido-fluido.

A nível linear, a competição mencionada acima se manifesta claramente na taxa de crescimento linear (2.9): o primeiro termo está relacionado com o efeito da injeção, enquanto o segundo expressa a contribuição da rigidez. Para um dado n , no limite de constante rigidez ($C = 0$) a quantidade $[A_1(C, \eta)(n^2 + 1) + A_2(C, \eta)]$ é negativa, e as forças elásticas estabilizam a interface. Por outro lado, considerando injeção $Q > 0$ (e não sucção, onde $Q < 0$), pode-se desestabilizar ou estabilizar o sistema dependendo do sinal do contraste de viscosidade ($-1 \leq A \leq +1$). Além disso, se $0 < C < 1$ a quantidade $[A_1(C, \eta)(n^2 + 1) + A_2(C, \eta)]$ pode assumir valores positivos ou negativos e o efeito da rigidez dependente da curvatura pode levar à desestabilização da interface.

Na próxima seção do capítulo, focamos nossa atenção na importante situação em que $A = 0$ (fluidos de mesma viscosidade, como em [30]), $0 < C < 1$ e $Q > 0$, de modo que temos contribuições estabilizante da injeção e desestabilizante das forças elásticas.

2.3 Surgimento das não linearidades

Nessa seção usamos nosso tratamento de modos acoplados para investigar a evolução da interface em primeira e segunda ordens. Ilustramos a utilidade da análise fracamente não linear em elucidar aspectos chave relacionados à forma dos dedos emergentes durante o desenvolvimento das instabilidades em interfaces elásticas em células de Hele-Shaw radiais. Para simplificar nossa discussão, é conveniente reescrever a perturbação resultante em termos de modos seno e cosseno

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (2.14)$$

onde $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ e $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ são números reais maiores que zero. Sem perda de generalidade escolhemos a fase do modo fundamental de modo que $a_n > 0$ e $b_n = 0$.

Vale salientar que os valores dos parâmetros utilizados nesse trabalho, e em toda a dissertação, são consistentes com quantidades físicas típicas usadas em experimentos reais de injeção em células de Hele-Shaw radiais [2, 4–8] e em experimentos e estudos teóricos envolvendo o desenvolvimento de instabilidades elásticas em geometrias de fluxo [30–32]. Consideramos fluidos de viscosidades iguais ($\mu_1 = \mu_2 = 0.3 \text{ g/(cm s)}$), de modo que o contraste de viscosidade é zero ($A = 0$). A taxa de injeção constante utilizada foi de $Q = 0.85 \text{ cm}^2/\text{s}$, a espessura da célula $b = 0.06 \text{ cm}$ e o raio inicial R_0 da ordem de 1.0 cm . Consideramos a evolução da interface até poucos segundos. Valores específicos para R_0 e para t serão informados na discussão de cada situação examinada, ainda nesta seção. Finalmente, tomamos $C = 0.99$, $\lambda = 1.0 \text{ cm}$, e $v_0 = 0.8 \text{ g cm}^2/\text{s}^2$.

Conforme comentado na seção (2.1), os experimentos com fluidos miscíveis realizados por Podgorski *et al.* [30] exibiram várias formas de dedos. Isto é, dependendo dos parâmetros utilizados foi possível obter dedos com formas semelhantes a tentáculos ou cogumelos. Enquanto que os padrões do tipo tentáculos são caracterizados por dedos finos e com pontas estreitas, as estruturas do tipo cogumelos apresentam dedos largos e inflados. Tais padrões representam configurações fortemente não lineares, onde a análise fracamente não linear de Fourier não se aplica com precisão. No entanto, usando nosso tratamento de modos acoplados podemos detectar o surgimento dos processos não lineares, e conseguir ter ideia da tendência de formação dos padrões ainda em estágios muito iniciais da dinâmica. Adicionalmente, isso pode ser convenientemente feito utilizando um pequeno número de modos de Fourier interagentes [9].

Dentro do nosso tratamento de modos acoplados o comportamento dos dedos está relacionado com a influência do modo fundamental n no crescimento do seu primeiro harmônico $2n$ [9]. Nestas condições, as equações de movimento para os modos seno e cosseno do primeiro harmônico são

$$\dot{a}_{2n} = \Lambda(2n) a_{2n} + \frac{1}{2} T(2n, n) a_n^2, \quad (2.15)$$

$$\dot{b}_{2n} = \Lambda(2n) b_{2n}, \quad (2.16)$$

onde

$$T(n, m) = F(n, m) + \Lambda(m) G(n, m). \quad (2.17)$$

Da Eq. (2.16) podemos ver que o crescimento do modo seno b_{2n} não é influenciado por a_n , e não apresenta acoplamentos de segunda ordem, portanto focamos nossa atenção no crescimento dos modos cosseno. A equação de movimento para o modo fundamental é dada por

$$\dot{a}_n = \Lambda(n) a_n + \frac{1}{2} [T(n, 2n) + T(n, -n)] a_n a_{2n}. \quad (2.18)$$

De fato, a Eq. (2.15) mostra que a presença do modo fundamental n força o crescimento do primeiro harmônico $2n$. Foi mostrado em [9] que se a_{2n} é forçado negativamente, observamos um alargamento dos dedos (*finger tip-widening*), e eventualmente bifurcação. Por outro lado,

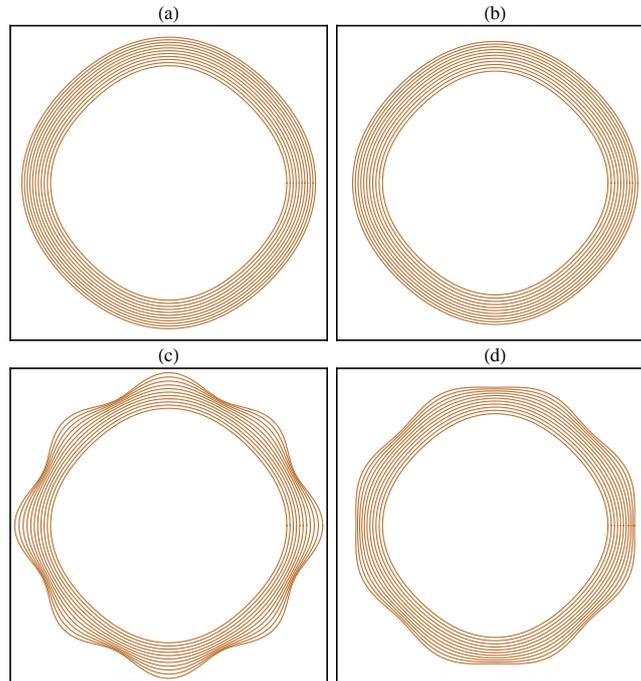


Figura 2.3 Evolução temporal da interface para interação dos modos cosseno $n = 4$ e $2n = 8$. Evolução puramente linear para (a) $R_0 = 1.2$ cm e (b) $R_0 = 1.145$ cm. Fracamente não linear para (c) $R_0 = 1.2$ cm e (d) $R_0 = 1.145$ cm. $C = 0.99$.

se a_{2n} é forçado positivamente, observamos um estreitamento dos dedos (*finger tip-narrowing*). Vamos analisar como esses mecanismos funcionam na presença de uma interface fluido-fluido elástica.

Para examinar os efeitos da elasticidade da interface no comportamento dos dedos, em segunda ordem, na Fig. 2.3 representamos a evolução temporal das amplitudes de perturbação do tipo cosseno para os modos fundamental a_n e primeiro harmônico a_{2n} . Isso é feito resolvendo as Eqs. (2.15) e (2.18). A Fig. 2.3(a) e a Fig. 2.3(b) mostram a evolução *puramente linear* da interface para os raios iniciais $R_0 = 1.2$ cm e $R_0 = 1.145$ cm, respectivamente. Por outro lado, as Figs. 2.3(c) e 2.3(d) retratam a evolução *fracamente não linear* da interface, novamente para os raios iniciais $R_0 = 1.2$ cm e $R_0 = 1.145$ cm, respectivamente. Consideramos as amplitudes de perturbação iniciais como $a_n(0) = R_0/40$ cm e $a_{2n}(0) = 0$. Todos os padrões mostrados na Fig. 2.3 estão representados para $0 \leq t \leq 3$ s, cada um deles dividido em intervalos de tempo de $\Delta t = 0.3$ s.

Inspecionando as Figs. 2.3(a) e 2.3(b) fica evidente que o cálculo puramente linear leva à evolução de interfaces quase circulares, muito pouco deformadas. É verdade que apesar do fato de $A = 0$, a natureza elástica da fronteira fluido-fluido e a existência de uma rigidez dependente da curvatura permitem desestabilização da interface. No entanto, os efeitos de desestabilização linear são muito modestos. Além disso, independentemente do valor do raio inicial R_0 , as formas dos padrões ilustrados nas Figs. 2.3(a) e 2.3(b) são similares.

Uma situação consideravelmente diferente é retratada nas Figs. 2.3(c) e 2.3(d), onde temos a evolução temporal fracamente não linear das interfaces. Primeiramente, fica claro que as

interfaces resultantes da evolução fracamente não linear estão consideravelmente mais deformadas que as interfaces lineares mostradas nas Figs. 2.3(a) e 2.3(b). Isso indica a importância dos efeitos não lineares no aparecimento de deformações de amplitudes consideráveis ainda no início da dinâmica. Além disso, note que as morfologias dos padrões retratados nas Figs. 2.3(c) e 2.3(d) são significativamente diferentes: enquanto obtivemos estreitamento dos dedos em (c), o alargamento dos dedos é o fenômeno dominante em (d). Como a única diferença entre as Figs. 2.3(c) e 2.3(d) está nos valores do raio inicial R_0 , isso indica uma grande sensibilidade do sistema às condições iniciais. Assim, uma pequena diferença em R_0 pode influenciar bastante a última forma dos padrões elásticos, podendo aparecer estruturas estreitas ou largas.

É importante ressaltar que essa dependência altamente sensível do valor de R_0 não é encontrada na análise fracamente não linear do problema clássico da instabilidade de Saffman-Taylor [9]. O que faz o sistema estudado nessa dissertação especial é a presença de expoentes de alta ordem do raio não perturbado R (R^N , com expoentes N até 12), que aparecem nos denominadores das expressões para a taxa de crescimento linear e para a função de modos acoplados $F(n, m)$ (ver Eqs. (2.9)-(2.12)). A dependência em R_0 fica mais forte por causa da presença do termo exponencial $e^{-\eta}$, onde $\eta = (\lambda/R)^2$, nas Eqs. (2.10)-(2.12). Portanto, pequenas mudanças em R_0 podem levar a significativas mudanças na dinâmica não linear. Esse efeito específico é consideravelmente menor no problema clássico de Saffman-Taylor, onde o maior valor do expoente N mencionado acima é 4 e o fator exponencial $e^{-\eta}$ está ausente (ver, por exemplo, Eqs.(19)-(21) na Ref. [9]).

Outro aspecto interessante da dinâmica fracamente não linear pode ser revelado se examinarmos a Fig. 2.4. Representa a evolução temporal da amplitude de perturbação do primeiro harmônico a_{2n} , para (a) $R_0 = 1.2$ cm e (b) $R_0 = 1.145$ cm, para diferentes valores da fração de rigidez C . Todos os outros parâmetros físicos e condições iniciais são os mesmos usados na Fig. 2.3. Da Fig. 2.4(a) vemos que não importa qual valor de C é usado, a amplitude de perturbação é sempre forçada positivamente. Além disso, note que aumentando o valor de C obtemos maiores valores para $a_{2n} > 0$. Em outras palavras, à medida que C cresce detectamos situações cada vez mais evidentes de estreitamento dos dedos. Dentro do limite de validade da teoria perturbativa de modos acoplados, a situação onde temos dedos mais finos ocorre quando $C = 0.99$, o que corresponde ao padrão ilustrado na Fig. 2.3(c).

Um comportamento diferente é verificado na Fig. 2.4(b). Aumentando a magnitude de C de 0.70 para 0.90 observa-se a produção de padrões com dedos mais finos. No entanto, para $C = 0.99$ verificamos que a amplitude de perturbação a_{2n} fica fortemente negativa, indicando a formação de dedos largos. Esse último caso corresponde ao padrão plotado na Fig. 2.3(d). Assim, Fig. 2.4(b) prevê a possibilidade de ocorrência de uma transição na forma dos dedos (de finos para largos) regulada pela variação do parâmetro de fração de rigidez C . Uma possível explicação física para o achatamento dos dedos pode estar relacionada com o fato da própria natureza elástica da interface tentar inibir o aparecimento de estruturas finas. De modo que o aparecimento de dedos largos e semelhantes a cogumelos é favorecido por representar uma configuração de curvatura mínima da interface fluido-fluido.

Agora vamos voltar nossa atenção ao efeito da rigidez $v = v(\theta, t)$ na formação dos padrões na interface. A figura 2.5 mostra a formação de padrões do campo de rigidez associado com a evolução das interfaces representadas na Fig. 2.3. A teoria linear, Figs. 2.5(a) e 2.5(b), é

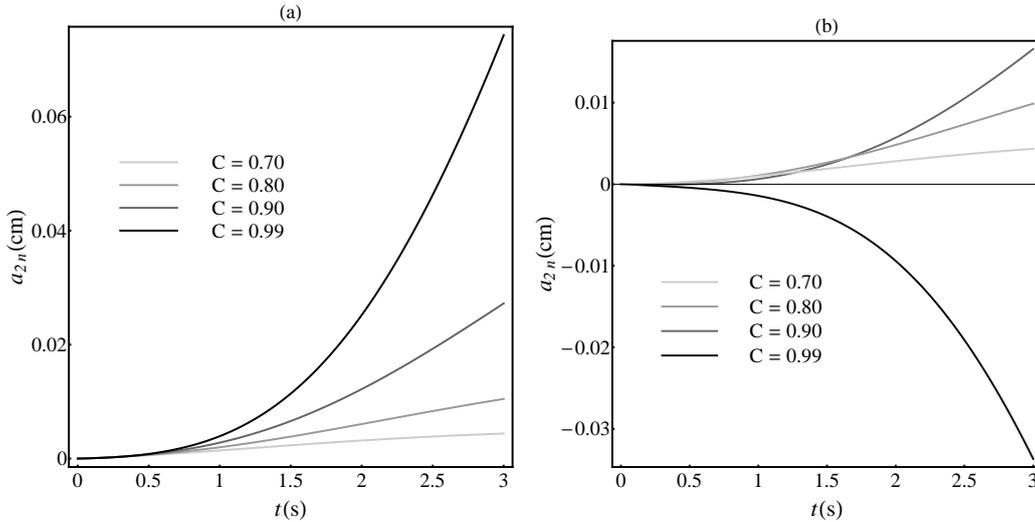


Figura 2.4 Evolução temporal fracamente não linear da amplitude de perturbação cosseno a_{2n} para diferentes valores de C quando (a) $R_0 = 1.2$ cm e (b) $R_0 = 1.145$ cm.

caracterizada por pequenas mudanças ao longo do comprimento de arco da interface, com magnitude decrescente de v centrada no máximo da curvatura e maior rigidez à elasticidade nas regiões mais planas. À medida que as interfaces evoluem no tempo, no entanto, a distribuição de rigidez inicialmente perturbada aumenta radialmente, com diferentes taxas de crescimento, em cada ponto da interface. O crescimento radial da interface reduz a curvatura global e, conseqüentemente, aumenta a magnitude de v , apesar do efeito local de enfraquecimento da rigidez elástica representado na Eq. (2.6).

Essa predição está de acordo com o comportamento geral da resistência elástica através da interface, que tenta impedir qualquer crescimento na curvatura local, dada a configuração energeticamente superior. Contudo, como esperado da teoria linear, Figs. 2.5(a) e 2.5(b) falham em fornecer a dinâmica de enfraquecimento da elasticidade, dada sua contribuição intrinsecamente não linear, Eq.(2.5). Nesse caso, a função de rigidez v modifica as forças de restauração elásticas dinamicamente, uma vez que altas curvaturas podem quebrar a rigidez elástica entre regiões adjacentes da interface, reduzindo localmente o efeito de resistência e promovendo instabilidades (dedos).

As soluções fracamente não lineares ilustradas nas Figs. 2.5(c) e 2.5(d) capturam a complexa ação combinada entre a formação de padrões na interface e o campo de rigidez; comparemos com as Figs. 2.3(c) e 2.3(d). Nesse regime, não linearidades são responsáveis por uma nova bifurcação dinâmica do campo de rigidez $v(\theta, t)$, o que causa a ramificação da magnitude da rigidez com o tempo. A bifurcação da rigidez pode ocorrer para altos, Fig. 2.5(c), ou baixos, Fig. 2.5(d), valores de v . Isso se deve ao fato da modulação da rigidez não privilegiar dedos que entram ou que saem, pois v não depende do sinal da curvatura local. Os efeitos de competição entre as regiões duras e flexíveis ao longo da interface que evolui levam regiões inicialmente estáveis (instáveis) à baixa (alta) rigidez na interface, formando os padrões de dedos representados nas Figs. 2.3(c) e 2.3(d).

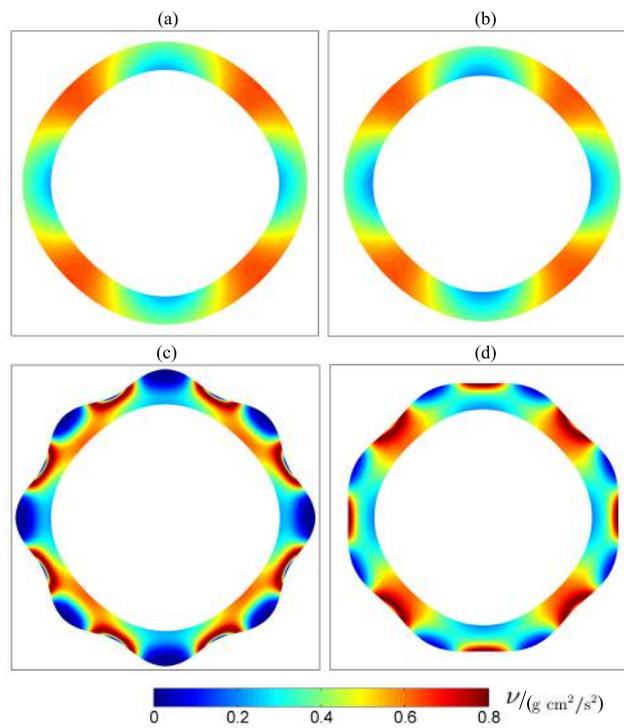


Figura 2.5 Evolução temporal do campo de rigidez v [Eq. (2.6)] em unidades de $g \text{ cm}^2/s^2$, para as interfaces mostradas na Fig. 2.3. Evolução puramente linear para (a) $R_0 = 1.2 \text{ cm}$ e (b) $R_0 = 1.145 \text{ cm}$, e fracamente não linear para (c) $R_0 = 1.2 \text{ cm}$ e (d) $R_0 = 1.145 \text{ cm}$. Note que o menor v observado é 0.0013.

Instabilidades elásticas em células de Hele-Shaw girantes

3.1 Introdução ao problema

Neste capítulo, revisitamos o problema clássico da célula de Hele-Shaw girante, discutido no Cap. 1, no cenário abordado no Cap. 2. Foi mostrado que a existência de uma interface elástica tem um forte impacto na dinâmica e morfologia dos padrões [30–33]. Na realidade, os padrões ramificados do tipo *tip-splitting* observados em [4–9, 11] são substituídos por estruturas na forma de cogumelos e dedos que se assemelham a tentáculos. Uma investigação similar para o caso da célula de Hele-Shaw girante precisava ser feita. Esse é o propósito deste capítulo.

Aqui estamos interessados em examinar a influência da interface elástica sobre os aspectos mais interessantes das instabilidades. Focamos nossa atenção na investigação de como os efeitos elásticos interferem nos eventos de competição dos dedos que geralmente ocorrem em fluxos girantes. O papel do contraste de viscosidade na determinação do comportamento da competição, na presença da interface elástica, é discutido. Toda a análise foi feita levando em conta os estágios linear e fracamente não linear da dinâmica. Isso foi feito através da teoria de modos acoplados perturbativa até segunda ordem [9, 33] já aplicada na dissertação, que oferece informações relevantes sobre a formação de padrões no sistema.

3.2 Equações fracamente não lineares

Considere uma célula de Hele-Shaw com espaçamento b contendo dois fluidos viscosos, incompressíveis e imiscíveis (ver Fig. 3.1). Denote as densidades e viscosidades dos fluidos interno e externo, respectivamente, como ρ_1, μ_1 e ρ_2, μ_2 . Neste capítulo trataremos o movimento induzido centrifugamente, quando $\rho_1 > \rho_2$, permitindo que o mais viscoso dos fluidos seja o interno ou o externo. A célula gira com velocidade angular constante Ω em relação ao eixo perpendicular às placas (z), que passa pelo centro da célula. Devido a uma reação química, forma-se uma estrutura gelatinosa na interface que separa os dois fluidos, como no problema tratado no capítulo anterior. Assim como nas Refs. [31–33], tratamos a interface como uma membrana elástica, apresentando uma rigidez dependente da curvatura.

A interface fluido-fluido perturbada é descrita como $\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)$, onde θ representa o ângulo azimutal e R é o raio da interface, inicialmente circular, em $t = 0$. Note que, ao contrário do que vimos no Cap. 2, R não varia no tempo. Aqui, $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$ denota a perturbação resultante na interface com amplitudes de Fourier $\zeta_n(t)$ e números de

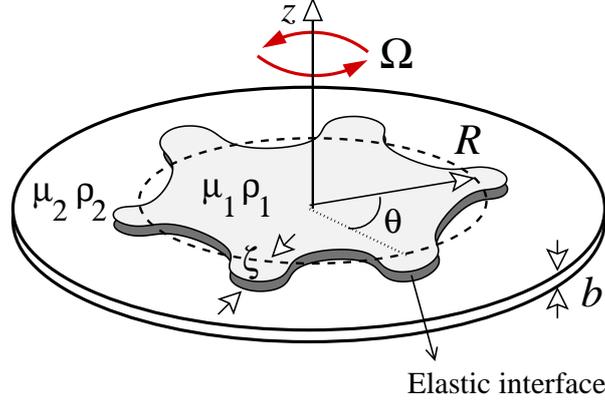


Figura 3.1 Esquema representativo de uma célula de Hele-Shaw girante com interface elástica separando os fluidos 1 e 2.

onda discretos n . Nossa análise perturbativa mantém até termos de segunda ordem em ζ . Na expansão de Fourier de ζ incluímos o modo $n = 0$ para manter a área do interior da interface independente da perturbação ζ . Conservação da massa implica que o modo zero seja escrito em termos dos outros modos como $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$.

Para uma geometria efetivamente bidimensional como é a célula de Hele-Shaw, a velocidade de fluxo é dada por $\mathbf{v}_j = -\nabla\phi_j$, onde ϕ_j representa o potencial de velocidade no fluido $j = 1, 2$. A equação de movimento da interface é dada pela lei de Darcy [1, 2] adicionada do termo centrífugo [17, 18]

$$A \left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right) + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) = \frac{b^2}{12(\mu_1 + \mu_2)} \left[\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2 r^2 - \Delta p \right], \quad (3.1)$$

onde A é o contraste de viscosidade, p_j representa a pressão e r denota a distância radial do eixo de rotação. Além disso, temos que

$$\Delta p = (p_1 - p_2)|_{r=\mathcal{R}} - (p_1 - p_2)|_{r=R}, \quad (3.2)$$

onde $(p_1 - p_2)|_{r=\mathcal{R}}$ é a diferença de pressão através da interface perturbada, dada pela Eq. (2.5), e $(p_1 - p_2)|_{r=R}$ representa a diferença de pressão através da interface não perturbada. Na Eq. (2.6) κ denota a curvatura da interface no plano da célula, dada, em coordenadas polares, por [9]

$$\kappa = \frac{\left[r^2 + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \right]}{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (3.3)$$

Para obter uma equação diferencial de modos acoplados para a evolução das amplitudes de perturbação, adaptamos uma abordagem fracamente não linear, inicialmente desenvolvida para estudar a dinâmica de fluxos em células de Hele-Shaw induzidos por injeção [9], ao nosso problema da célula girante com interface fluido-fluido elástica.

Primeiramente, definimos expansões de Fourier para os potenciais de velocidade, que obedecem à equação de Laplace $\nabla^2 \phi_j = 0$. Em seguida, expressamos ϕ_j em termos das amplitudes de perturbação ζ_n considerando a condição de contorno cinemática $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_2$, garantindo a continuidade da componente normal da velocidade ao longo da interface. Substituindo essas relações e a condição de pressão modificada (Eq. (2.5)) na Eq. (3.1), mantendo termos de segunda ordem em ζ , e aplicando a transformada de Fourier, obtemos a equação de modos acoplados *adimensional* (para $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n + \sum_{m \neq 0} [F(n, m)\zeta_m\zeta_{n-m} + G(n, m)\dot{\zeta}_m\zeta_{n-m}], \quad (3.4)$$

onde o ponto indica derivada temporal total,

$$\Lambda(n) = |n| \left\{ 1 + \frac{B}{2}(n^2 - 1) [A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)] \right\} \quad (3.5)$$

é a taxa de crescimento linear,

$$B = \frac{v_0}{(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2 R^5} \quad (3.6)$$

mede a razão entre as forças elástica e centrífuga,

$$A_1(C, \lambda) = Ce^{-\lambda^2}(-4\lambda^4 + 10\lambda^2 - 2) - 2(1 - C) \quad (3.7)$$

e

$$A_2(C, \lambda) = Ce^{-\lambda^2}(8\lambda^4 - 22\lambda^2 + 5) + 5(1 - C). \quad (3.8)$$

Os termos de segunda ordem da equação de modos acoplados são dados por

$$F(n, m) = |n| \left\{ \frac{1}{2} - B \left[Ce^{-\lambda^2} (B_1(n, m) + \lambda^2 B_2(n, m) + \lambda^4 B_3(n, m) + 2\lambda^6 B_4(n, m)) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - C)B_1(n, m) \right] \right\} \quad (3.9)$$

e

$$G(n, m) = A|n|[1 - \text{sgn}(nm)] - 1, \quad (3.10)$$

onde as funções sgn valem ± 1 de acordo com o sinal dos argumentos. As expressões para as funções $B_1(n, m)$, $B_2(n, m)$, $B_3(n, m)$, e $B_4(n, m)$ são dadas no apêndice B:. Note que nas Eqs. (3.4)-(3.10) comprimentos foram reescalados por R e tempo por R/U , onde

$$U = [b^2 R(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2] / [12(\mu_1 + \mu_2)] \quad (3.11)$$

é a velocidade característica. A partir de agora usaremos a versão adimensional para todas as equações.

Equações (3.4)-(3.10) representam as equações de modos acoplados para o problema de uma célula de Hele-Shaw girante, considerando que a interface fluido-fluido possui rigidez variável com a curvatura. Esse conjunto de equações não lineares permite a investigação analítica de como a competição entre os dedos responde ao jogo entre as forças elástica e centrífuga na interface.

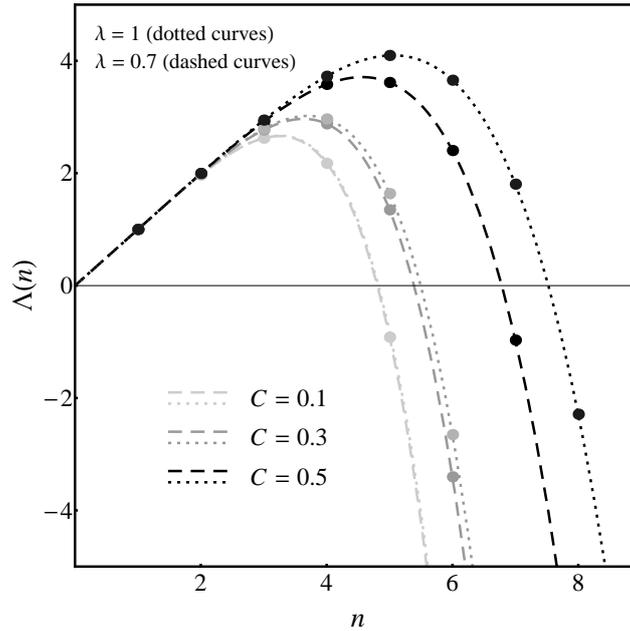


Figura 3.2 Taxa de crescimento linear $\Lambda(n)$ em função do modo n para três valores de C e dois valores de λ . Aqui, $B = 2.5 \times 10^{-3}$.

3.3 Efeitos da interface elástica: regimes linear e não linear

3.3.1 Estágio linear

Antes de discutir os efeitos puramente não lineares relacionados à dinâmica da competição dos dedos, discutiremos a parte linear da Eq. (3.4), mais especificamente a taxa de crescimento linear $\Lambda(n)$. O primeiro termo da Eq. (3.5) está conectado com a força centrífuga, desestabilizante, enquanto que o segundo termo expressa a contribuição da rigidez à deformação. Para um dado n no limite de rigidez constante ($C = 0$) a quantidade $[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)]$ é negativa, e as forças elásticas possuem tendência estabilizante. Nesse caso, o parâmetro v_0 atua como uma tensão superficial efetiva, similarmente com o que temos no problema usual da célula de Hele-Shaw girante [17–24]. No entanto, se $0 < C < 1$ a quantidade $[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)]$ pode ficar positiva e o efeito da rigidez dependente da curvatura levar a uma desestabilização da interface. Neste capítulo focamos nas situações em que $-1 \leq A \leq 1$ e $0 < C \leq 0.5$ ($\Lambda(n)$ pode ir para infinito se $C > 0.5$), de modo que as forças elásticas são desestabilizantes.

Os valores dos parâmetros estão consistentes com quantidades físicas típicas usadas em experimentos reais em células de Hele-Shaw girantes [18, 19, 21, 23], e com estudos teóricos e experimentais envolvendo o desenvolvimento de instabilidades em geometrias de fluxo radial [30–32].

A natureza desestabilizante das forças elásticas está expressa na Fig. 3.2, que representa a taxa de crescimento linear $\Lambda(n)$ como função do modo de Fourier n para $C = 0.1, 0.3$ e 0.5 e $\lambda = 1$ (curvas pontilhadas) e 0.7 (curvas tracejadas). Usamos $B = 2.5 \times 10^{-3}$. Inspeccionando a Fig. 3.2 fica claro que, para um valor fixo de λ , tanto a banda de modo instáveis quanto o

modo com maior taxa de crescimento aumentam quando C aumenta. Isso acontece pelo fato da função de rigidez $\nu(\kappa)$ variar linearmente com C . Para um valor fixo de C , quando variamos λ temos regiões onde a banda de modos instáveis e o modo de maior taxa de crescimento aumentam (ver Fig. 3.2) ou ambos diminuem. Isso ocorre pelo fato da função $\nu(\kappa)$ depender de λ como uma gaussiana (Eq. (2.6), figura 2.2). Finalmente, é evidente que quando $C \rightarrow 0$ as curvas pontilhadas e tracejadas tendem a se superpor, de modo que a banda de modos instáveis tende a um valor mínimo.

3.3.2 Estágio fracamente não linear

Nesta seção usamos nossa abordagem de modos acoplados para investigar a evolução da interface até segunda ordem. Demonstramos a utilidade do nosso tratamento fracamente não linear na elucidação de aspectos importantes relacionados ao comportamento das instabilidades quando sob ação de efeitos causados pela interface elástica. Para simplificar a discussão reescrevemos a perturbação resultante em termos de modos seno e cosseno

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (3.12)$$

onde $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ e $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ possuem valor real. Sem perda de generalidade podemos escolher a fase do modo fundamental de modo que $a_n > 0$ e $b_n = 0$.

Vamos focar a atenção nos efeitos da elasticidade da interface na competição dos dedos. Seguindo a Ref. [9], pode-se considerar a variação do comprimento entre dedos como medida de competição. Nessa abordagem, a competição dos dedos pode ser descrita através da influência do modo fundamental n , assumindo n par, no crescimento do modo sub-harmônico $n/2$. Usando as Eqs. (3.4)-(3.10), as equações de movimento para o modo sub-harmônico podem ser escritas como

$$\dot{a}_{n/2} = \{\Lambda(n/2) + \mathcal{C}(n) a_n\} a_{n/2}, \quad (3.13)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\Lambda(n/2) - \mathcal{C}(n) a_n\} b_{n/2}, \quad (3.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(n) = & \frac{1}{2} \left\{ \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \Lambda(n/2) G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \right. \\ & \left. + \left[F\left(\frac{n}{2}, n\right) + \Lambda(n) G\left(\frac{n}{2}, n\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

é a função de competição dos dedos. Observando as Eqs. (3.13) e (3.14) e lembrando que $a_n > 0$, verificamos que $\mathcal{C}(n) > 0$ aumenta o crescimento do modo sub-harmônico cosseno $a_{n/2}$, enquanto inibe o crescimento do modo sub-harmônico seno $b_{n/2}$. O resultado é um aumento da variação nos tamanhos dos dedos do fluido 1 empurrando o fluido 2, menos denso. Esse efeito descreve a competição dos dedos que saem radialmente do fluido 1. Modos seno $b_{n/2}$ variam os comprimentos dos dedos do fluido 2 que penetram no fluido 1, mas fica claro da Eq. (3.14) que o crescimento destes é suprimido se $\mathcal{C}(n) > 0$.

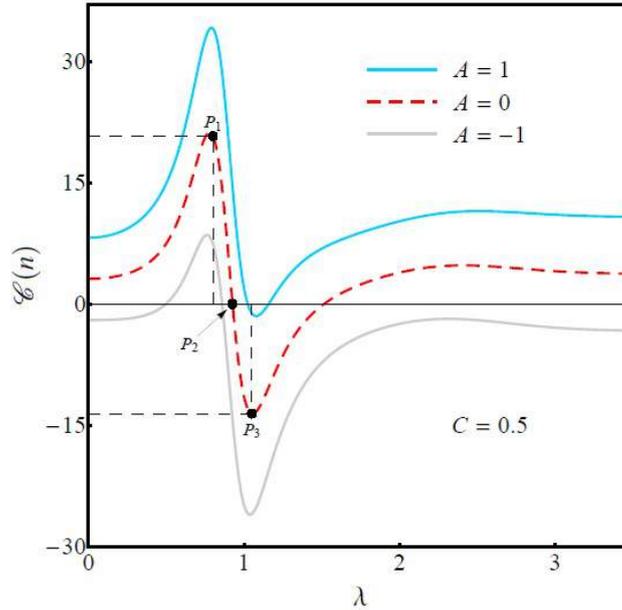


Figura 3.3 Função competição dos dedos $\mathcal{L}(n)$ em termos de λ para $B = 2.5 \times 10^{-3}$, $C = 0.5$ e $A = 1, 0$, e -1 .

Mudando o sinal de $\mathcal{L}(n)$ as conclusões acima ficam trocadas, os modos $b_{n/2}$ são favorecidos e os modos $a_{n/2}$ desfavorecidos. Portanto, $\mathcal{L}(n) < 0$ indica aumento na competição entre os dedos que entram no fluido 1, saindo do fluido 2. Esquecendo um pouco o sinal, a magnitude da função $\mathcal{L}(n)$ como dada em Eq. (3.15) mede o quão intensa é a competição: maiores valores de $\mathcal{L}(n)$ indicam maior competição dos dedos.

Para examinar a influência dos efeitos elásticos na competição dos dedos em segunda ordem, na Fig. 3.3 representamos a função competição dos dedos $\mathcal{L}(n)$ (dada na Eq. (3.15)) em termos de λ , para três valores característicos do contraste de viscosidade A , $B = 2.5 \times 10^{-3}$ e $C = 0.5$. Assim como na Ref. [25], para observar o crescimento do modo fundamental e para permitir o crescimento do seu sub-harmônico, realizamos nossa análise considerando que o modo n obedece à condição $\Lambda(n) = 0$. A mais interessante das revelações da Fig. 3.3 é o fato de que, independente do valor de A considerado, para um valor fixo do contraste de viscosidade a função $\mathcal{L}(n)$ pode ser positiva, negativa, ou zero à medida que variamos a magnitude de λ .

Essa constatação é bem diferente do que observamos no problema convencional da célula de Hele-Shaw girante (para o qual a interface não é elástica) [17–24], onde a função de competição dos dedos só pode mudar se o contraste de viscosidade for variado. Isso significa que para o problema de interface elástica tratado aqui, os parâmetros λ e C , e *não* o contraste de viscosidade A , determinam o comportamento da competição dos dedos.

Na Fig. 3.3, por exemplo, quando $A = 0$ temos as situações: (i) alta competição entre os dedos que saem (ver ponto P_1 , onde $\mathcal{L}(n)$ possui alto valor positivo); (ii) competição discreta de ambos os dedos que entram e saem (ver ponto P_2 , onde $\mathcal{L}(n)$ é zero); e (iii) alta competição dos dedos que entram no fluido 1 (ver ponto P_3 , onde $\mathcal{L}(n)$ é muito negativo). Na realidade, isso é verdade para todos os valores do contraste de viscosidade A . Os comportamentos de $A = 1$

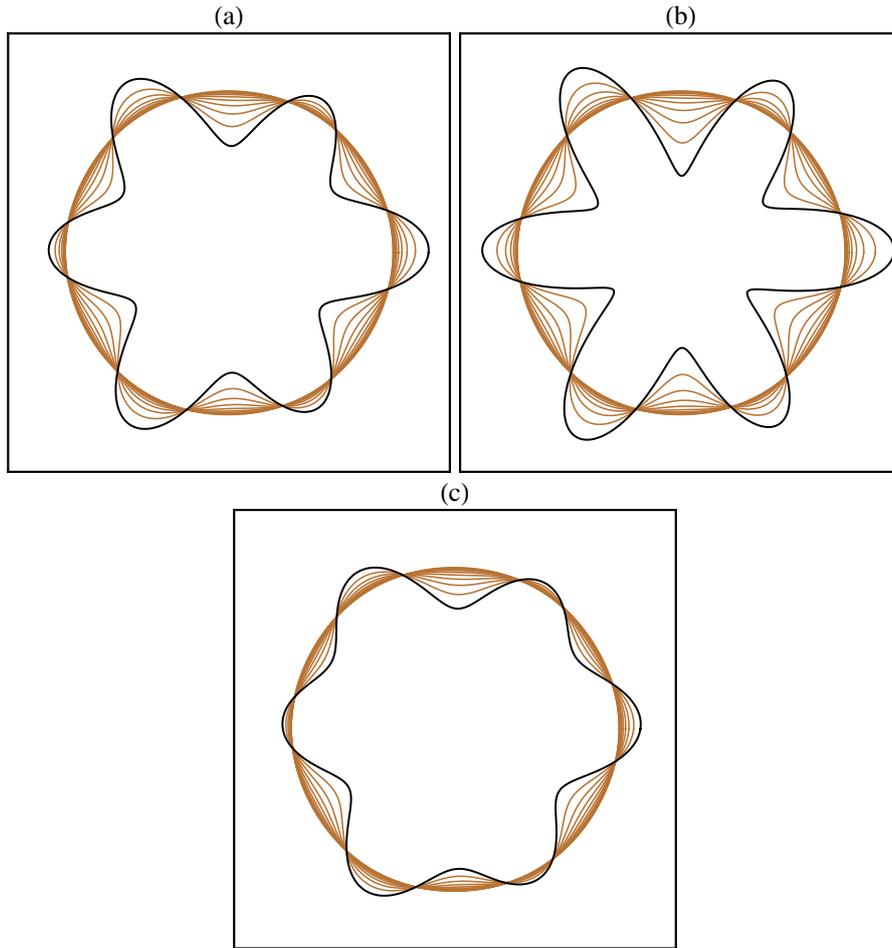


Figura 3.4 Evolução temporal da interface para a interação entre o modo fundamental $n = 6$ e o seu sub-harmônico $n = 3$ em situações correspondentes aos pontos P_1 (a) $\lambda = 0.8$, P_2 (b) $\lambda = 0.926$, e P_3 (c) $\lambda = 1.05$, que estão indicadas na Fig. 3.3 para $A = 0$. As interfaces estão representadas em intervalos de $t_f/10$, onde $t_f = 1.25$ é o tempo final. As linhas mais escuras correspondem a $t = t_f$.

e $A = -1$ também estão ilustrados na Fig. 3.3. É importante ressaltar que para um dado valor de A na Fig. 3.3, a função de competição $\mathcal{C}(n)$ não muda de sinal se considerarmos valores elevados de λ .

Para verificarmos as previsões indicadas na discussão da Fig. 3.3, na Fig. 3.4 representamos as evoluções fracamente não lineares das interfaces para $A = 0$, que correspondem aos pontos P_1 , onde $\lambda = 0.8$ (Fig. 3.4(a)), P_2 , onde $\lambda = 0.926$ (Fig. 3.4(b)), e P_3 , onde $\lambda = 1.05$ (Fig. 3.4(c)). Na Fig. 3.4 as amplitudes iniciais de perturbação são $a_n(0) = 1/400$ e $a_{n/2}(0) = b_{n/2}(0) = 1/800$. Além disso, como na Fig. 3.3 $B = 2.5 \times 10^{-3}$ e $C = 0.5$. Todos os padrões mostrados na Fig. 3.4 estão representados para $0 \leq t \leq 1.25$, divididos em intervalos de tempo iguais a $\Delta t = 0.125$.

Examinando as Figs. 3.4(a)-(c) nós observamos a evolução de formas inicialmente circulares, que deformam e desenvolvem dedos à medida que o tempo avança. Na Fig. 3.4(a) pode-se

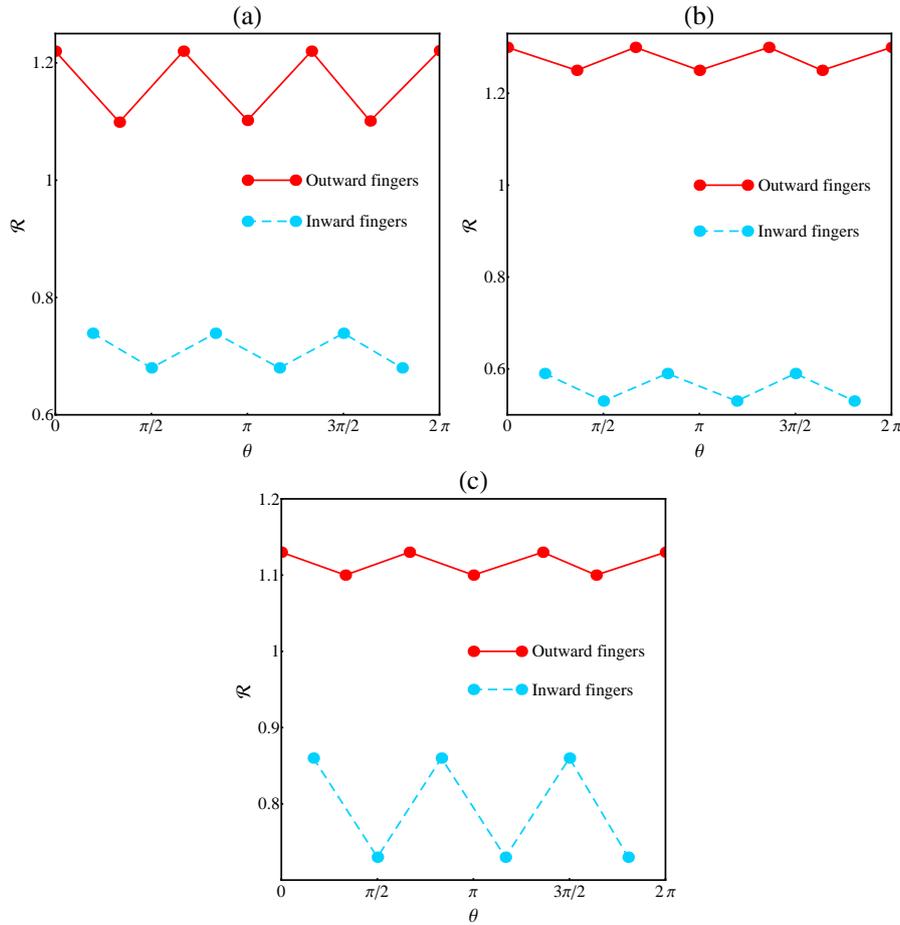


Figura 3.5 Coordenada adimensional raio \mathcal{R} dos dedos que entram e que saem em função do ângulo polar θ , quando (a) $\lambda = 0.8$, (b) $\lambda = 0.9286$ e (c) $\lambda = 1.05$. Tais informações foram retiradas dos padrões representados nas Figs. 3.4(a)-(c), em $t = t_f$ e $A = 0$.

notar a alta competição entre os dedos que saem do fluido 1. Por outro lado, na Fig. 3.4(b) observamos claramente que o comprimento dos dedos que saem não são tão diferentes. Isso também é verdade para os dedos que entram; os quais possuem tamanhos similares. Finalmente, examinando a Fig. 3.4(c) vemos que existe uma maior variação no comprimento dos dedos que entram no fluido 1. Todas essas observações estão em concordância com as previsões extraídas da Fig. 3.3. Destacamos que verificamos comportamentos similares para qualquer um dos outros valores do contraste de viscosidade A .

Para ilustrar essas características da competição dos dedos de maneira mais quantitativa, na Fig. 3.5 nós usamos os mesmos parâmetros físicos usados na Fig. 3.4 e representamos a coordenada adimensional \mathcal{R} dos dedos, para cada um dos que entram e saem, em termos do ângulo polar θ para $t = t_f$. As características discutidas acima através da visualização dos padrões mostrados na Fig. 3.4 são completamente confirmadas pela Fig. 3.5: mesmo com o contraste de viscosidade constante ($A = 0$), mudando o valor de λ podemos acessar os casos em que temos alta competição dos dedos que saem do fluido 1 Fig. 3.5(a), competição suprimida dos

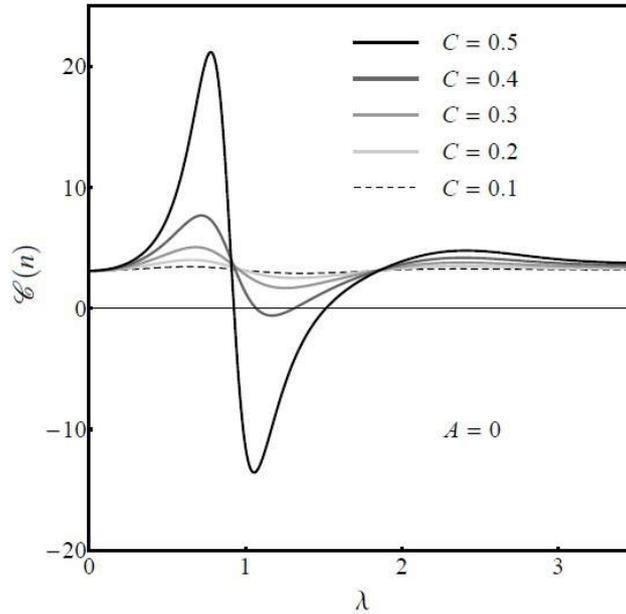


Figura 3.6 Função competição $\mathcal{L}(n)$, representada em termos de λ , para $B = 2.5 \times 10^{-3}$, $A = 0$ e cinco valores de C .

dedos que entram e saem Fig. 3.5(b) e competição favorecida dos dedos que entram Fig. 3.5(c). Isso indica que, na presença de uma interface elástica, a competição entre as instabilidades é prioritariamente determinada pelos parâmetros λ e C , e não pelo contraste de viscosidade.

Vamos prosseguir investigando o comportamento da função de competição dos dedos $\mathcal{L}(n)$ quando fixamos A e variamos a magnitude da fração de rigidez C . Sem perda de generalidade na Fig. 3.6 tomamos $A = 0$ e vimos como $\mathcal{L}(n)$ responde a variações no parâmetro λ quando C decresce de 0.5 para 0.1. Assim como na Fig. 3.3, consideramos $B = 2.5 \times 10^{-3}$. Da Fig. 3.6 vemos que quando $C = 0.5$, pode-se reproduzir a curva para $\mathcal{L}(n)$ mostrada na Fig. 3.3 para $A = 0$: inicialmente a função de competição é positiva, atinge um valor máximo, e então começa a decrescer. Eventualmente, $\mathcal{L}(n)$ cruza o zero, assume valores negativos e atinge um mínimo. Depois disso, atinge o zero novamente e fica positivo para valores grandes de λ . Quando $C = 0.4$ um comportamento similar é observado, com $\mathcal{L}(n)$ assumindo valores positivos, negativos e o zero. No entanto, se C continuar a decrescer, por exemplo quando $C = 0.3$ ou $C = 0.2$, a função $\mathcal{L}(n)$ continua oscilando, mas assume apenas valores positivos com a variação de λ . Finalmente, para valores ainda menores de C , por exemplo pra $C = 0.1$ (linha tracejada horizontal), a função de competição se torna insensível às variações de λ . No limite $C \rightarrow 0$ verificamos que $\mathcal{L}(n)$ também não depende de λ , e recuperamos algo similar com o caso convencional da célula de Hele-Shaw girante [17–24], onde $\mathcal{L}(n)$ varia apenas com a variação de A . É como se a rigidez constante atuasse como uma tensão superficial efetiva. Enfatizamos que todas as conclusões retiradas da Fig. 3.6 (obtidas para $A = 0$) são gerais, e podem ser reproduzidas para qualquer valor permitido do contraste de viscosidade A .

Outras informações relevantes podem ser extraídas da Fig. 3.7, que mostra a variação da função competição dos dedos $\mathcal{L}(n)$ à medida que o contraste de viscosidade é variado

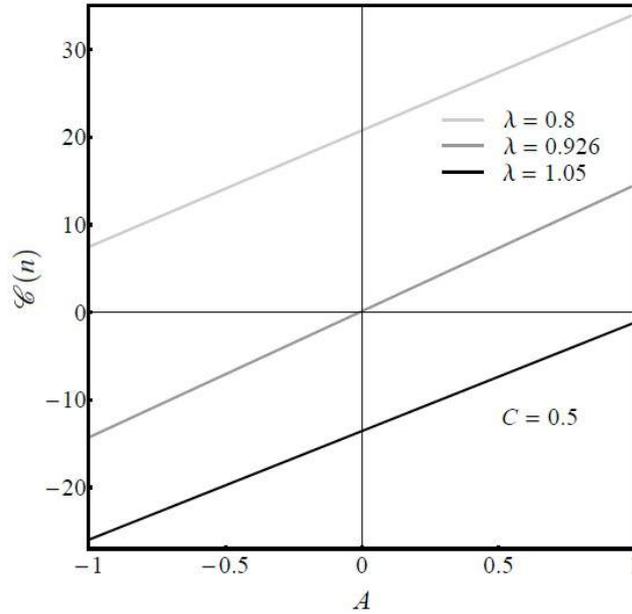


Figura 3.7 Função competição dos dedos $\mathcal{L}(n)$ em função do contraste de viscosidade A , para $C = 0.5$ e três valores diferentes de λ . Esses foram os valores de λ utilizados para obtermos os dados apresentados nas Figs. 3.4 e 3.5.

($-1 \leq A \leq 1$), para $C = 0.5$ e os três valores de λ que foram usados nas Figs. 3.4 e 3.5: 0.8, 0.926 e 1.05. Como antes, usamos $B = 2.5 \times 10^{-3}$. Mesmo com a influência não monotônica e dominante de λ na determinação da função competição, como mostrado na Fig. 3.3, a monotonicidade e linearidade de $\mathcal{L}(n)$ com o contraste de viscosidade A são preservadas. A linearidade da competição dos dedos com o contraste de viscosidade é reminescente do sistema clássico da célula de Hele-Shaw girante [25]. O contraste de viscosidade influencia a competição dos dedos de maneira idêntica, independente dos valores de λ . Note que a inclinação das linhas para diferentes valores de λ na Fig. 3.7 varia muito pouco.

Isso mostra que a competição dos dedos é governada por um acoplamento parcial entre os parâmetros viscosos e elásticos, caracterizado pela superposição dos efeitos não monotônicos elásticos com os efeitos monotônicos oriundos de contribuições viscosas. Além disso, a região delimitada pelas curvas $\lambda = 0.8$ e $\lambda = 1.05$ nos fornece um mapa no espaço de parâmetros (λ, A) para todas as morfologias de competição possíveis, lembrando que os valores de λ que maximizam ou minimizam $\mathcal{L}(n)$ não dependem do contraste de viscosidade A , como mostrado na Fig. 3.3. O contraste de viscosidade A é variado para aumentar um comportamento competitivo imposto por λ . Finalmente, C atua apenas para reduzir a área entre as curvas $\lambda = 0.8$ e $\lambda = 1.05$ na Fig. 3.7, como deduzido da Fig. 3.6.

Depois de contemplar as Figs. 3.5-3.7, concluímos esse capítulo revisitando a Fig. 3.4. Um importante aspecto percebido da Fig. 3.4 é o rápido crescimento do valor absoluto da curvatura para os dedos que entram e saem, junto com a falta de simetria entre a curvatura (como dada na Eq. (3.3)) dos dedos que entram e saem para todos os valores de λ . Esse fato é consequência direta da forte influência do efeito de enfraquecimento exponencial da rigidez da interface, que

faz com que $v(\kappa)$ atinja um valor mínimo rapidamente com $|\kappa|$, dada a dependência com κ^2 na Eq. (2.6). A variabilidade dos comprimentos dos dedos é resultado de um "cabo de guerra" entre os dedos que entram e saem, Eqs. (3.13) e (3.14). A alta variabilidade do comprimento radial dos dedos depende de o quão rápido um dado dedo (que entra ou que sai) aumenta a amplitude do seu modo, e conseqüentemente sua curvatura local, como expresso nas Eqs. (3.13) e (3.14). Em outras palavras, dedos que saem (entram) irão competir se suas curvaturas aumentarem mais rapidamente que as dos dedos que entram (saem).

Similarmente, quando a taxa de crescimento dos dedos que entram e saem são comparáveis, a competição é ausente (ver Eqs. (3.13) e (3.14)). A taxa de decaimento da rigidez é regulada pela curvatura característica $1/\lambda$. Esse efeito de enfraquecimento na rigidez tende a aumentar a curvatura dos dedos que crescem devido à diminuição local da resistência à deformação. Quando $\lambda = 0.8$ na Fig. 3.4(a), os dedos que saem atingem o mínimo $v(\kappa)$ mais rapidamente que os dedos que entram, pois a forma inicialmente circular da interface força os dedos que entram a mudar o sinal da curvatura antes de crescerem consideravelmente, resultando na competição entre os dedos que saem.

Quando λ é aumentado para 0.926 na Fig. 3.4(b), uma menor magnitude da curvatura absoluta tem agora acesso a baixos valores de rigidez, favorecendo igualmente o crescimento dos dedos que entram e que saem, e então reduzindo o fenômeno de competição a zero. Além disso, note que o efeito de enfraquecimento da rigidez não privilegia nenhum sinal específico da curvatura, tendo igual efeito para os dedos que entram e que saem com mesmo valor de curvatura. Quando a curvatura característica é reduzida na Fig. 3.4(c), os dedos que entram acessam mais rápido as regiões de baixos valores de rigidez, resultando na variação dos comprimentos dos dedos que entram, enquanto reduzindo consideravelmente o comprimento dos dedos que saem.

Finalmente, quando λ é aumentado além de 1.05, o efeito de enfraquecimento da rigidez satura no valor mínimo rapidamente ao longo da interface elástica, mas para um pequeno valor da curvatura. Nesse caso, a competição dos dedos é governada unicamente por v_0 , e a interface com rigidez variável se comporta como uma interface com rigidez constante (ver Fig. 3.3). Nesse último caso, o contraste de viscosidade retorna como o parâmetro dominante e determinante na competição dos dedos, como esperado no caso clássico da célula de Hele-Shaw girante [17–24].

Padrões estacionários no problema da célula de Hele-Shaw girante

4.1 Padrões elásticos da literatura e a elástica de Euler

Uma das características principais do problema da célula de Hele-Shaw girante é que nos permite encontrar padrões que são soluções estacionárias para a interface. Em contraste, o problema da injeção em célula de Hele-Shaw radial não nos dá formas estacionárias [2, 4]. No arranjo convencional da célula de Hele-Shaw girante (isto é, sem interface elástica) [42, 43] o balanço entre as forças de tensão superficial (estabilizante) e centrífuga (desestabilizante) na interface fluido-fluido resulta na formação de formas estacionárias. Essas estruturas estáticas, com tensão superficial não nula (ver Fig. 4.1), apresentam dedos que eventualmente assumem formas de lágrimas, e tendem a se desmembrar da gota principal do fluido interior através de um fenômeno conhecido como *pinch-off*.

Surpreendentemente, as formas estacionárias na interface para esse problema hidrodinâmico coincidem com as formas de equilíbrio assumidas por fios elásticos confinados no plano [56, 57]. Essas formas são precisamente as relacionadas com o problema clássico da elástica de Euler [58–61] associado com a determinação da forma de hastes delgadas flexíveis que minimizam sua energia elástica sob certos vínculos (ver Figs. 4.2 e 4.3). Vale a pena destacar que padrões bem semelhantes aos mostrados na Fig. 4.1 também surgem em vários outros sistemas, incluindo membranas fluidas [62], vesículas bidimensionais [63] e filmes confinados [64]. Formas diferentes de fios são reveladas por estudos que examinam o amassamento e drobramento de fios elásticos confinados em células de Hele-Shaw imóveis [65, 66] (figura 4.4) ou girantes [67, 68] (figura 4.5).

Motivados pelo fato dos padrões estacionários produzidos pelo problema hidrodinâmico da célula de Hele-Shaw girante sem interface elástica [42, 43] e aqueles obtidos na mecânica, relacionados com o problema da elástica [56–64], serem idênticos, e por existir um interesse recorrente em abordar o comportamento de hastes elásticas confinadas sob rotação [67, 68], decidimos avançar na pesquisa estudando esse tema.

Neste capítulo estudamos o desenvolvimento do problema de instabilidades em interfaces elásticas em células de Hele-Shaw girantes, agora focados na determinação de formas estacionárias na interface. Assim como nas Refs. [30–34] consideramos que a interface que separa os fluidos atua como uma membrana elástica, mas agora assumimos um modelo simples onde a fronteira entre os fluidos possui uma rigidez constante. Ao invés de usar os métodos variacionais largamente empregados nas Refs. [56–64, 75], nossas formas estacionárias foram obtidas por uma abordagem da vortex sheet proposta em [42]. Mostramos que a existência de uma

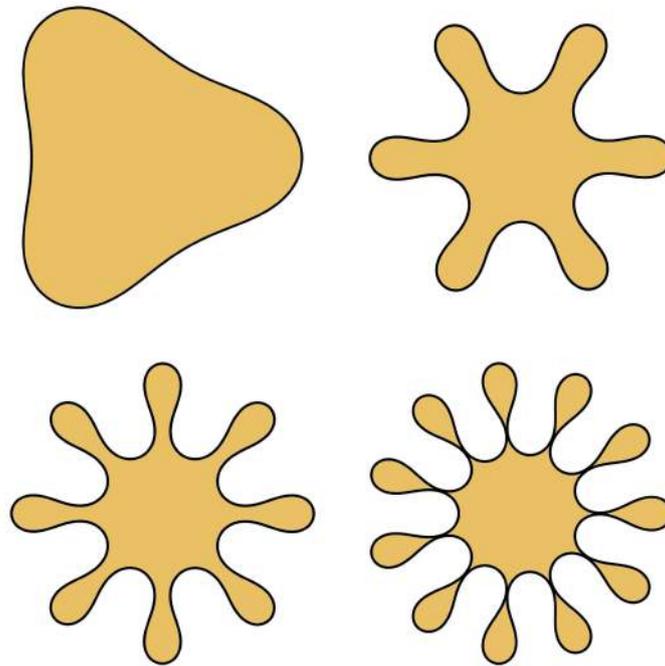


Figura 4.1 Formas estacionárias típicas para o problema convencional da célula de Hele-Shaw girante [42,43] (isto é, na ausência de uma interface elástica). Nesse caso, capilaridade e forças centrífugas se balanceiam na interface fluido-fluido. Se aumentarmos os efeitos centrífugos formamos padrões com mais dedos, que eventualmente tendem ao *pinch-off* (desprendimento). A mesma classe de padrões aparecem em vários outros contextos [56–64].

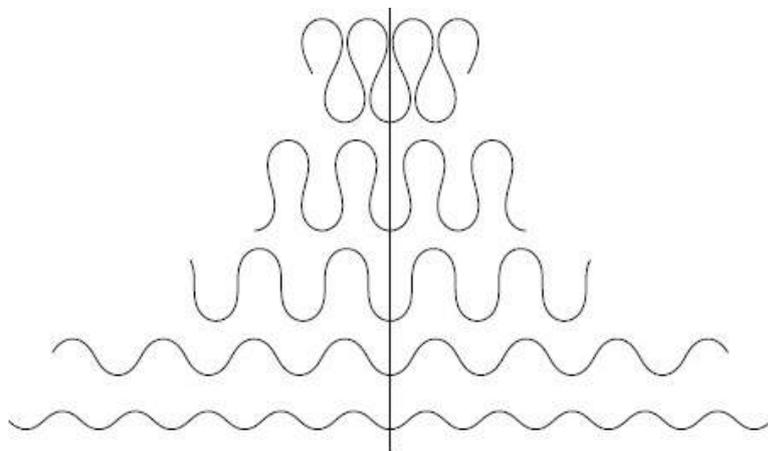


Figura 4.2 Representações da elástica de Euler. Figura retirada da Ref. [58].

interface elástica possui um forte impacto nas possíveis morfologias que emergem nos padrões estacionários, de modo que as famílias de formas são encontradas variando um parâmetro adimensional efetivo e o raio de giração. Como veremos, os padrões estacionários assumem uma rica variedade de formas, e são muito diferentes das estruturas típicas ilustradas na Fig. 4.1.

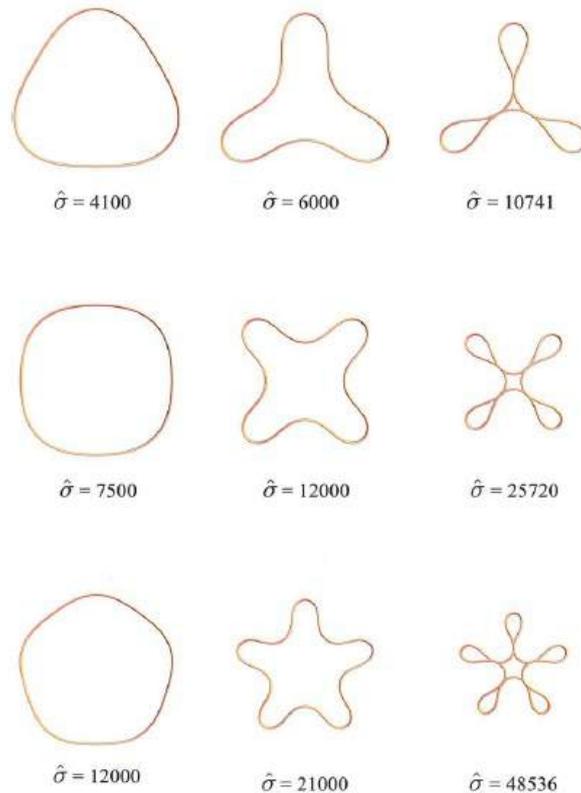


Figura 4.3 Padrões estacionários do problema de filmes confinados para diversos valores da razão entre efeitos de tensão superficial e elásticos. Note a ocorrência de pinch-off. Figura retirada da Ref. [64].

4.2 Tratamento vortex sheet e equação do contorno

Grande parte das buscas por formas estacionárias como soluções para fios flexíveis e inextensíveis confinados no plano (problemas da elástica) empregam métodos variacionais [56–64, 75]. Escreve-se um funcional de energia para o sistema de interesse, levando em conta possíveis vínculos relacionados a conservação de área e comprimento (multiplicadores de Lagrange do problema). Em seguida, o funcional é minimizado através da equação de Euler-Lagrange, fornecendo uma equação diferencial não linear para a curvatura do fio (daqui para frente chamada de equação da forma) cuja solução resulta nas possíveis estruturas morfológicas assumidas pelo fio no equilíbrio. Fisicamente, a equação do contorno representa o balanço de forças que atuam no fio. Como pode ser encontrado nas Refs. [56–64, 69, 70, 75], a derivação da equação da forma através do procedimento variacional não é tão simples.

Atacamos o problema da célula de Hele-Shaw girante com interface elástica usando o tratamento de vortex sheet para fluxos em Hele-Shaw [42, 43]. Esse formalismo explora a diferença entre as componentes tangenciais das velocidades dos fluidos quando atravessamos a interface fluido-fluido. Como ficará claro adiante, a abordagem de vortex sheet oferece um método simples para obter a equação do contorno, permitindo a investigação da morfologia dos padrões estacionários que se formam.

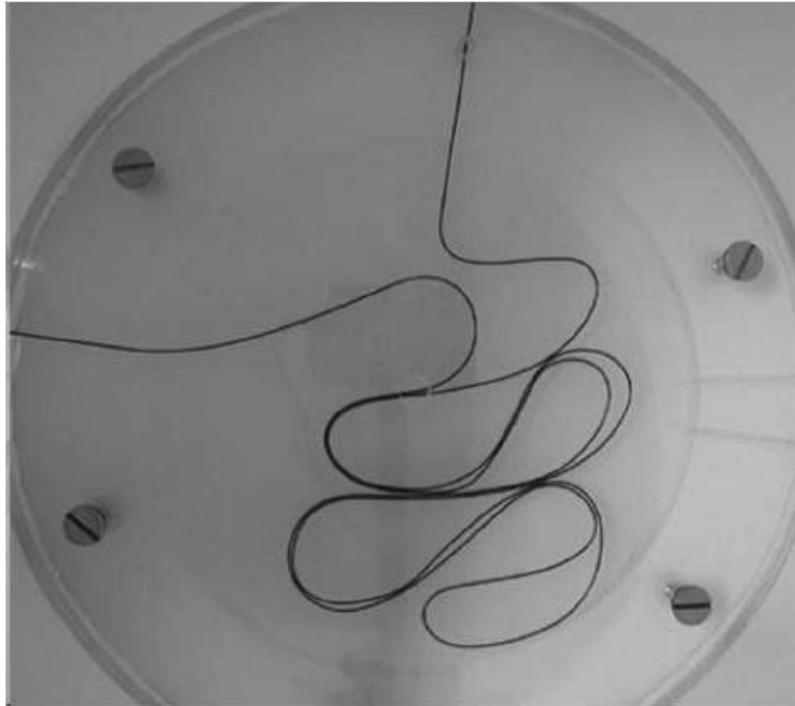


Figura 4.4 Padrão formado pelo confinamento de fios em células de Hele-Shaw imóveis. Figura retirada da Ref. [65].

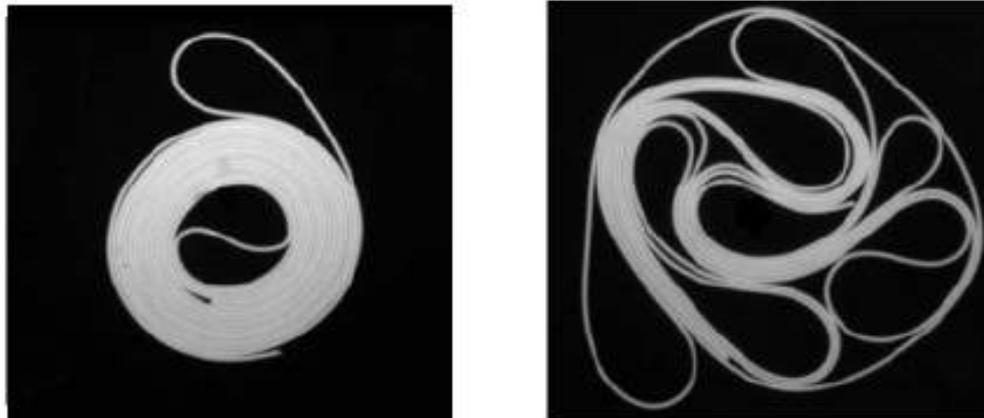


Figura 4.5 Padrão formado pelo confinamento de fios em células de Hele-Shaw girantes. Figura retirada da Ref. [67].

Primeiramente vamos descrever o sistema físico em estudo. Considere uma célula de Hele-Shaw com espaçamento b contendo dois fluidos Newtonianos imiscíveis e incompressíveis (Fig. 4.6). Dentro da célula uma gota circular (raio R) do fluido 2, mais denso, é rodeada pelo fluido 1. As densidades e viscosidades dos fluidos são denotadas por ρ_j e η_j , respectivamente (onde $j=1,2$). A célula gira com velocidade angular constante Ω em relação ao eixo perpendicular às placas (eixo z) que passa pelo seu centro.

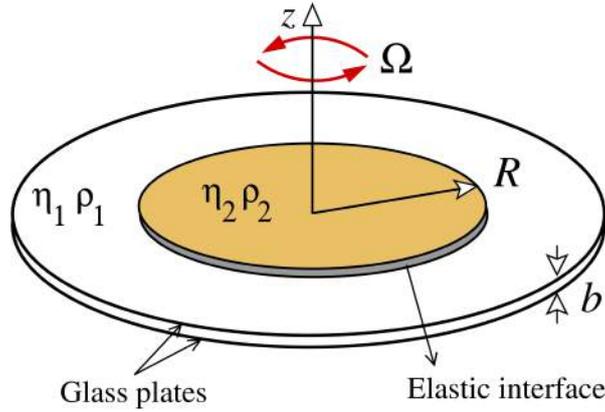


Figura 4.6 Representação esquemática de uma célula de Hele-Shaw girante, onde a fronteira fluido-fluido é uma camada elástica. Consideramos $\rho_2 > \rho_1$.

Como nas referências [31–34], assumimos que a interface entre os dois fluidos é elástica. Nessa situação, efeitos de tensão superficial podem ser negligenciados. Porém, neste capítulo tratamos a interface como uma membrana elástica com rigidez constante v_0 . A física do problema é bastante simples e envolve a competição entre uma força centrífuga desestabilizante e uma força elástica estabilizante que atuam para dobrar a interface fluido-fluido em sentidos opostos. É justamente esse balanço entre os dois efeitos antagonistas que irá produzir os padrões revelados por nosso estudo.

A equação hidrodinâmica básica do sistema expressa o campo de velocidade efetivamente bidimensional, após tirada a média no eixo z , dado pela lei de Darcy adicionada do termo centrífugo [17, 18]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} [\nabla p_j - \rho_j \Omega^2 r \hat{\mathbf{r}}], \quad (4.1)$$

onde p é a pressão, r é a distância em relação ao eixo de rotação e $\hat{\mathbf{r}}$ denota um vetor unitário que aponta radialmente do fluido 2 para o fluido 1.

O problema é então especificado por duas condições de contorno. A primeira delas é uma condição de pressão do tipo Young-Laplace generalizada que considera a contribuição vinda da natureza elástica do contorno e expressa a diferença de pressão através da interface fluido-fluido como [31–33, 75]

$$p_2 - p_1 = v_0 \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right), \quad (4.2)$$

onde κ denota a curvatura da interface no plano da célula e os subscritos de κ indicam derivadas em relação ao comprimento de arco s . A equação (4.2) é o limite de uma equação consideravelmente mais complicada (ver Eq. (2.5)) derivada nas Refs. [31–33] e no apêndice A: que considera uma rigidez dependente da curvatura. No caso mais complexo, a contribuição da força elástica pode ser estabilizante ou desestabilizante. Por outro lado, para rigidez constante temos apenas estabilização. Como estamos interessados apenas na natureza estabilizante da força elástica (para assim balancear o efeito desestabilizante da força centrífuga), focamos

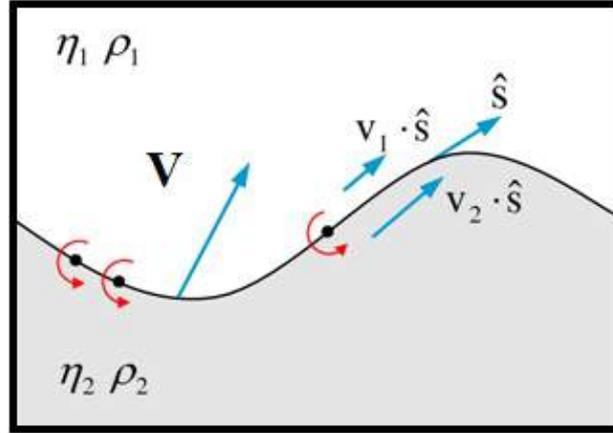


Figura 4.7 Descontinuidade da componente tangencial da velocidade do fluido através da interface. Isso leva à formação de uma linha de vórtices na interface.

nosso estudo no caso constante. Apesar da simplificação, o conjunto de padrões estacionários possíveis é bastante diverso, revelando uma variedade enorme de formas complexas.

A segunda condição de contorno relevante é a chamada condição de contorno cinemática [2, 4]

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_2, \quad (4.3)$$

que trata da continuidade da componente normal da velocidade através da interface ($\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário apontando do fluido 2 para o fluido 1). A componente tangencial da velocidade, no entanto, é descontínua e causa a chamada "vortex sheet" (folha ou linha de vórtices) [71]

$$\Gamma = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (4.4)$$

onde $\hat{\mathbf{s}}$ é o vetor unitário tangente ao longo da interface (figura 4.7).

Escrevendo a lei de Darcy (4.1) para os dois fluidos, subtraímos as expressões resultantes e resolvemos para a força de vortex sheet (4.4). Em seguida, utilizando as condições de contorno (4.2) e (4.3), obtemos a expressão adimensional da vorticidade

$$\Gamma = 2A \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{s}} + \nabla \left[B \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - r^2 \right] \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (4.5)$$

onde A é o contraste de viscosidade e $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$ é uma velocidade média da interface, com \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 dois valores limite (dos dois lados da interface) da velocidade em um ponto dado. Quando se está interessado na evolução temporal da interface (não é o nosso caso aqui) \mathbf{V} é expressa em termos de uma complicada fórmula integral de Birkhoff [42, 43, 71, 72]. Na Eq. (4.5)

$$B = \frac{2v_0}{(\rho_2 - \rho_1)\Omega^2 R^5} \quad (4.6)$$

expressa o parâmetro de rigidez efetivo, que mede a razão entre as forças elástica e centrífuga. Note que na Eq. (4.5) comprimentos e velocidades estão reescalados por R e $U = [b^2 R(\rho_2 -$

$\rho_1)\Omega^2]/[12(\eta_1 + \eta_2)]$, respectivamente. Daqui para frente, utilizaremos a forma adimensional das equações.

Estamos interessados nas soluções estáticas da Eq. (4.5), de modo que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$. Fazendo $\mathbf{V} = 0$ na Eq. (4.5), e considerando a condição de zero vorticidade ($\Gamma = 0$) encontramos que

$$\nabla \left[B \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - r^2 \right] \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0. \quad (4.7)$$

Assim, a curvatura da interface fluido-fluido deve satisfazer uma equação diferencial ordinária não linear de terceira ordem na forma

$$B \left(\frac{3}{2} \kappa^2 \kappa_s + \kappa_{sss} \right) - 2rr_s = 0. \quad (4.8)$$

As soluções da equação do contorno (4.8) balanceiam as forças centrífuga e elástica e revelam importantes características dos padrões que emergem no regime estacionário. A determinação de uma solução analítica fechada para a equação diferencial é um desafio considerável, e representa uma tarefa bastante não trivial. No nosso estudo, resolvemos (4.8) numericamente, empregando uma abordagem originalmente apresentada na Ref. [43].

Concluimos essa seção chamando a atenção para as importantes diferenças entre o trabalho discutido nesse capítulo e o discutido no capítulo anterior [34]. Embora tenhamos estudado fluxos em células de Hele-Shaw girantes com interfaces elásticas, note que os objetos de estudo e os objetivos das duas análises são distintos. Enquanto que no Cap. 3 focamos na dinâmica perturbativa dependente do tempo da interface durante os regimes linear e não linear, aqui estudamos o desenvolvimento de soluções estacionárias independentes do tempo da interface durante estágios fortemente não lineares. Conseqüentemente, as formas da interface obtidas no Cap. 3 são simples, enquanto aqui numerosos padrões complexos podem ser explorados. Além disso, em oposição com o que ocorre em [34], onde a suposição da rigidez dependente da curvatura é um fator chave na desestabilização da interface, nesse capítulo a rigidez constante implica em um efeito de estabilização da interface (necessário para balancear os efeitos centrífugos, desestabilizantes). A forma simplificada da rigidez adotada aqui não deve ser subestimada: apesar da aparente simplicidade da equação (4.8), elucidar a física por trás dela não é uma tarefa trivial.

4.3 Famílias das formas estacionárias

Nessa seção utilizamos a equação (4.8) para explorar a variedade de formas que pode ser acessada no nosso sistema variando o parâmetro de rigidez efetiva B . Para caracterizar as várias famílias de padrões de modo mais ordenado e sistemático, além do parâmetro B também usamos um parâmetro geométrico adimensional, conhecido como raio de giração, definido como [67, 68]

$$R_g = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L r^2(s) ds}, \quad (4.9)$$

onde s é o comprimento de arco ao longo da fronteira elástica e L é o comprimento total (ou perímetro) da interface. Nossa escolha desse parâmetro foi motivada por investigações realizadas por Bayart e colaboradores [67, 68], que examinaram o processo de dobra de fios flexíveis em células de Hele-Shaw girantes. Na abordagem das Refs. [67, 68], a rotação fornece um método útil para controlar os padrões resultantes, variando a intensidade do potencial parabólico radial em jogo. Sob essas circunstâncias, os autores usaram R_g , com sucesso, para caracterizar as várias configurações dos fios dobrados.

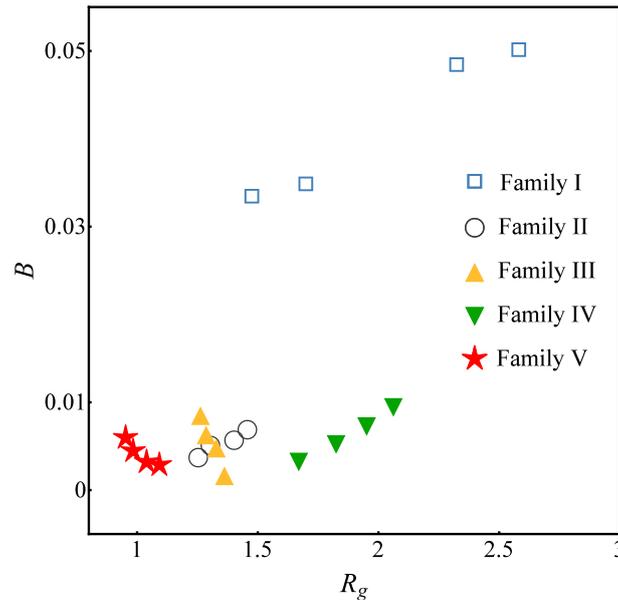


Figura 4.8 Mapa paramétrico (B, R_g) mostrando a disposição das famílias de padrões no equilíbrio I-V.

É importante ressaltar que no contexto das nossas soluções numéricas [43], o raio de giração R_g relacionado a cada forma estacionária apresentada aqui é obtido *a posteriori*: para um dado valor de B tentamos vários conjuntos diferentes de condições iniciais e procuramos numericamente por padrões fisicamente relevantes, com interfaces fechadas e que não se auto-interceptavam. Para cada padrão encontrado, calculamos o valor de R_g correspondente usando a Eq. (4.9). Essa foi a maneira que usamos para calcular os pares (B, R_g) para os padrões mostrados aqui. Nesse contexto, vimos que um dado par (B, R_g) está associado a apenas um padrão. Para uma discussão detalhada sobre comensurabilidade e condições de fechamento das curvas, sugere-se ao leitor Refs. [43, 56, 57, 62–64].

Variando B e R_g fomos capazes de identificar cinco famílias diferentes de padrões de dedos elásticos estáticos, cada uma das famílias com suas peculiaridades. A disposição das famílias de formas de I até V está representada na Fig. 4.8, que plota o mapa paramétrico (B, R_g) usado para obter a galeria de formas mostrada da Fig. 4.9 até a Fig. 4.13. Salienta-se que procuramos cuidadosamente por outras famílias dentro e além da gama de parâmetros B e R_g considerada na Fig. 4.8, mas não encontramos nenhum tipo de morfologia dramaticamente diferente dos padrões mostrados aqui.

Note que, assim como nas Refs. [42, 43], enquanto procuramos numericamente por padrões

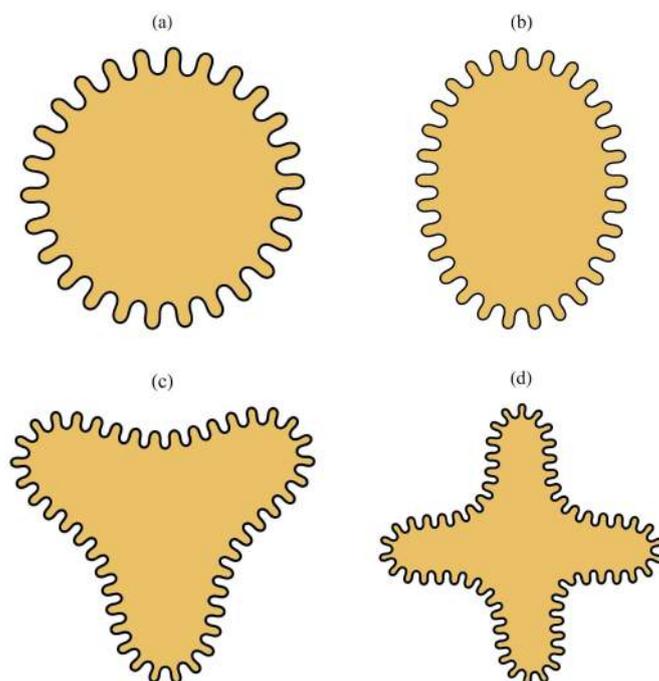


Figura 4.9 Formas estacionárias - Família I. (a) $B = 0.0333$, $R_g = 1.4768$; (b) $B = 0.0347$, $R_g = 1.7004$; (c) $B = 0.0483$, $R_g = 2.3253$; (d) $B = 0.0500$, $R_g = 2.5826$. Observe a interface na forma de uma serpentina, que surge em cada estrutura com modo principal n , com $1 \leq n \leq 4$.

fisicamente relevantes, o fazemos sem impor nenhum vínculo à área ou ao perímetro dos padrões formados. Essa é a razão pela qual podemos observar que alguns padrões mostrados aqui possuem dimensões diferentes (área interna e comprimento da interface). Além disso, na nossa abordagem sem vínculos, cada padrão resultante está associado a uma diferente situação inicial, de modo que não apresentam necessariamente o mesmo raio, área, ou comprimento iniciais.

Começamos nossa discussão analisando as estruturas da família I, como ilustrado na Fig. 4.9. Os padrões resultantes na interface são obtidos aumentando os valores de B e R_g . Note da Fig. 4.8 que a família I é o conjunto que possui os mais altos valores dos parâmetros. Examinando a Fig. 4.9 fica evidente que cada forma possui simetria de um modo principal dominante n ($n = 1, 2, 3$, e 4) e uma interface bastante acidentada, que lembra a forma de uma serpentina. Se por um lado, valores elevados de B significam uma estrutura mais rígida, por outro lado aumentando R_g permitimos a acomodação de um maior número de pequenos e estreitos dedos na interface. Outra conclusão imediata é que as estruturas com interface elástica mostradas na Fig. 4.9 são significativamente diferentes das formas típicas elásticas mostradas na Fig. 4.1 para o problema convencional da célula de Hele-Shaw girante sem interface elástica.

Agora passamos à análise da família II, retratada na Fig. 4.10. A ordem que os padrões são mostrados é tal que os valores de B e R_g decrescem quando vamos da Fig. 4.10(a) para a Fig. 4.10(d). Rapidamente é possível observar que esse conjunto de formas é completamente diferente dos padrões que aparecem na Fig. 4.1 e na Fig. 4.9 (família I). A característica em comum das estruturas apresentadas na Fig. 4.10 é a formação de padrões que parecem rodopiar,

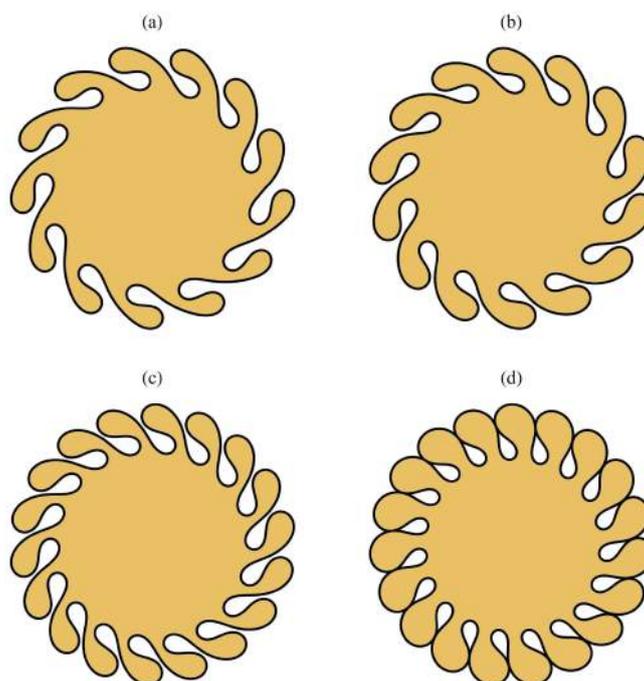


Figura 4.10 Formas estacionárias - Família II. (a) $B = 0.0070$, $R_g = 1.4582$; (b) $B = 0.0058$, $R_g = 1.4032$; (c) $B = 0.0052$, $R_g = 1.3051$; (d) $B = 0.0038$, $R_g = 1.2547$. Note a natureza espiral dos padrões e o fenômeno de aprisionamento das gotas na ponta dos dedos que entram no fluido 2 em (d).

enquanto os dedos dobras uns sobre os outros. Da Fig. 4.10(a) até a Fig. 4.10(d) os dedos dobrados aumentam de número e variam suas formas, tendendo a ficar cada vez mais inchados em suas pontas. Isso é o que esperávamos, pois para menores valores de B a interface elástica fica mais flexível. Por fim, os dedos inchados do fluido 2 se tocam, aprisionando gotas do fluido 1 no fluido 2 (Fig. 4.10(d)). Também é interessante notar que um tipo similar de formas surge quando fios flexíveis são confinados em geometrias imóveis [65,66] e em células de Hele-Shaw girantes [67,68].

Continuamos, agora examinando as formas estacionárias da família III mostradas na Fig. 4.11. Ao contrário do que acontece na Fig. 4.10, agora B decresce e R_g cresce quando vamos da Fig. 4.11(a) para a Fig. 4.11(d). O mapa paramétrico da Fig. 4.8 deixa claro que os valores dos parâmetros utilizados na Fig. 4.10 e na Fig. 4.11 são similares. Assim, não é surpreendente o fato dos padrões mostrados na Fig. 4.11 apresentarem uma natureza espiral. Quando vamos da Fig. 4.11(a) até a Fig. 4.11(d) o número de dedos aumenta. No entanto, em contraste com o que acontece na Fig. 4.10, agora vemos que os dedos vizinhos do fluido de dentro tendem a ficar mais separados, e mudam de inchados para finos. Além disso, note que ao invés de termos aprisionamento das gotas do fluido 1 no fluido 2 (Fig. 4.10(d)), na Fig. 4.11(d) os dedos que saem do fluido de dentro que tendem a se separar da parte central do fluido 2 através do fenômeno de *pinch-off*.

Agora vamos analisar a família IV, representada na Fig. 4.12. A característica que a distingue é o fato de que para essa família usamos valores de R_g maiores do que os utilizados nas

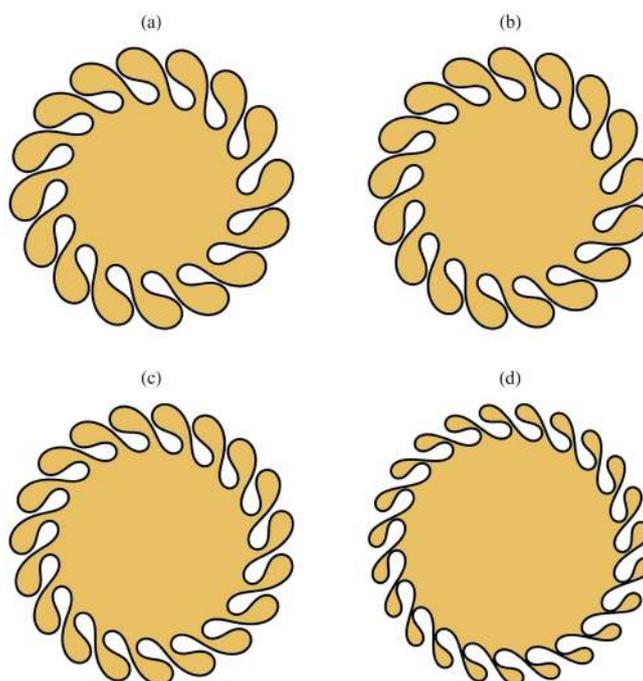


Figura 4.11 Formas estacionárias - Família III. (a) $B = 0.0087$, $R_g = 1.2640$; (b) $B = 0.0065$, $R_g = 1.2876$; (c) $B = 0.0050$, $R_g = 1.3296$; (d) $B = 0.0018$, $R_g = 1.3633$. Como na Fig. 4.10, os padrões também rodopiam, mas agora observamos a tendência de pinch-off dos dedos que saem do fluido 2 em (d).

famílias II e III. Agora, à medida que vamos da Fig. 4.12(a) para a Fig. 4.12(d) os valores de B e R_g aumentam. Podemos dizer que o que destaca essa família é sua morfologia bastante complexa, e tendência à dobra da interface. Temos um modo principal dominante n para cada padrão ($n = 5, 6, 7$, e 8), com n aumentando quando B e R_g assumem valores mais altos. Além disso, note que todos os padrões mantêm uma forma poligonal na sua estrutura. À medida que o raio de giração e a rigidez das estruturas aumentam, as dobras da interface induzem o crescimento de estruturas laterais e o surgimento do fenômeno de *side-branching* (crescimento lateral). As protuberâncias são tipicamente menores em comprimento do que as dimensões típicas de cada padrão.

Fechamos nossa discussão analisando a família V (Fig. 4.13). Como pode ser visto através do mapa paramétrico (Fig. 4.8), essa família assume os menores valores de R_g quando comparamos com os valores utilizados nas famílias I-IV. Nessa situação, da Fig. 4.13(a) para a Fig. 4.13(d) B decresce progressivamente enquanto R_g é aumentado. Inspeccionando a Fig. 4.13 vemos tipos diferentes de dobras na interface e *side-branching* quando comparamos com os mesmos fenômenos na Fig. 4.12. Como R_g assume valores menores, as estruturas resultantes (para $n = 2, 3, 4$, e 5) não mantêm uma forma poligonal central. O que ocorre é que as protuberâncias oriundas do crescimento lateral crescem significativamente, caracterizando visualmente cada padrão.

As famílias identificadas, e suas características, discutidas aqui representam uma aborda-

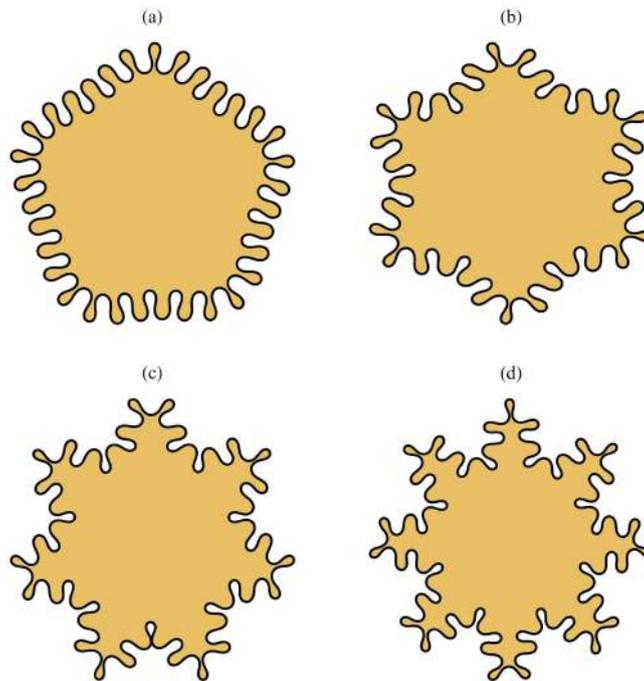


Figura 4.12 Formas estacionárias - Família IV. (a) $B = 0.0034$, $R_g = 1.6714$; (b) $B = 0.0054$, $R_g = 1.8260$; (c) $B = 0.0074$, $R_g = 1.9525$; (d) $B = 0.0096$, $R_g = 2.0633$. De (a) para (d) é possível notar que as interfaces dobram mais intensamente e ocorre o fenômeno de formação de dedos laterais (*side-branching formation*).

gem tentativa para a classificação dos complexos padrões que encontramos. No entanto, é verdade que alguns padrões de uma dada família mostram semelhanças com estruturas de uma família diferente. Esse fato é evidente quando inspecionamos a Fig. 4.8 e observamos o "cruzamento" das famílias II e III. Algumas similaridades podem ser identificadas quando comparamos, por exemplo, a estrutura convencional com seis protuberâncias mostrada na Fig. 4.1 e a Fig. 4.9(a): basicamente, variam no número e tamanho das protuberâncias. Seguindo esse raciocínio, pode-se afirmar que existem duas diferenças descontínuas entre os padrões: (i) a simetria global e (ii) o número de protuberâncias. Além disso, existem também transições contínuas, como a que está relacionada aos padrões com natureza espiral, que aparecem gradualmente à medida que B é reduzido (por exemplo entre a Fig. 4.9(a) e a Fig. 4.10(a)). Finalmente, podemos notar outras propriedades de simetria dos padrões: inspecionando as famílias I, IV, e V podemos notar que possuem uma simetria diaedral (rotações e reflexões), enquanto que nas famílias II e III estão faltando as reflexões. Apesar de todas essas observações, a física por trás das quebras de simetria e das transições que ocorrem quando passamos de uma família para a outra ainda não é bem entendida, e exige estudos adicionais.

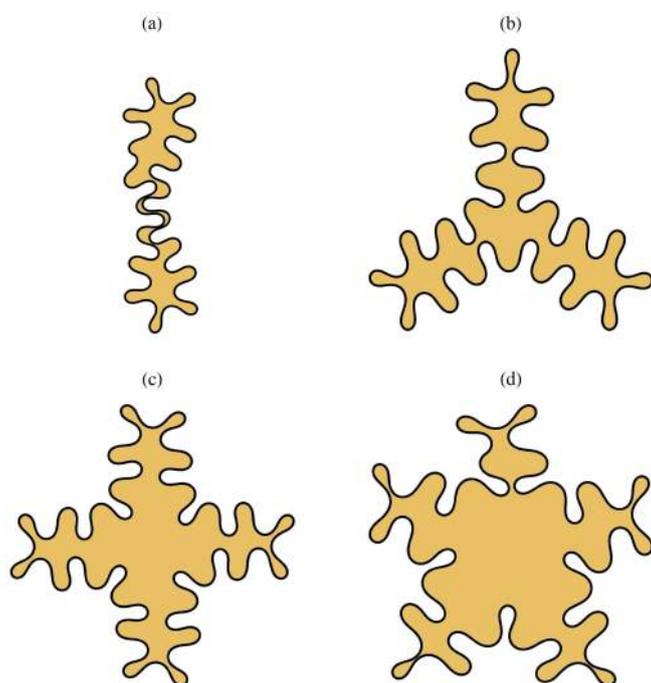


Figura 4.13 Formas estacionárias - Família V. (a) $B = 0.0060$, $R_g = 0.9539$; (b) $B = 0.0045$, $R_g = 0.9851$; (c) $B = 0.0032$, $R_g = 1.0408$; (d) $B = 0.0029$, $R_g = 1.0938$. Ocorrem *side-branching* e dobras na interface, mas as protuberâncias são consideravelmente maiores que as mostradas na Fig. 4.12.

Conclusões e perspectivas

Durante os últimos anos, houve grande interesse da comunidade científica em estudar fluxos reativos em células de Hele-Shaw. Nesses tipos de fluxos os padrões observados no problema tradicional de Saffman-Taylor [1, 2] são complementados pela ocorrência de reações químicas na interface fluido-fluido [30–32, 39, 51–55].

Uma investigação experimental particularmente interessante em fluxos reativos em células de Hele-Shaw foi feita por Podgorski *et al.* [30], que estudou o desenvolvimento de padrões visualmente marcantes (em forma de cogumelos e parecidos com tentáculos) que surgem por conta de reações químicas na interface que separa dois fluidos miscíveis e com mesma viscosidade. A reação induz a formação de uma camada gelatinosa entre os fluidos, que restringe a mistura, de modo que as instabilidades são iniciadas pela própria natureza elástica da interface. Esse sistema de formação de padrões caracteriza instabilidades não viscosas. Aqui a instabilidade clássica de Saffman-Taylor não ocorre justamente por causa do contraste de viscosidade nulo entre os fluidos.

Recentemente, um modelo teórico foi proposto [31, 32] para explicar a ocorrência das instabilidades, em sistemas de fluidos com mesma viscosidade, observadas experimentalmente na Ref. [30]. Assumindo que a interface fluido-fluido atua como uma membrana elástica com rigidez à deformação dependente da curvatura, He *et al.* [31, 32] desenvolveu uma teoria linear e mostrou que a interface pode ser instável, mesmo quando o contraste de viscosidade é zero.

No Cap. 2 da dissertação, revisitamos o problema originalmente estudado em [31, 32] e fomos além do regime puramente linear, focando nossa atenção em estágios fracamente não lineares da dinâmica. Isso foi feito aplicando um tratamento analítico de modos acoplados válido em ordens mais baixas de perturbação [9], que permite estudar a influência da elasticidade na morfologia dos padrões. Nesse contexto, mostramos que efeitos não lineares são essenciais para induzir deformações, assim como na determinação da forma final dos dedos. Mais especificamente, vimos que variando o parâmetro de fração de rigidez C e o raio inicial da interface R_0 podem prevalecer eventos tanto de formação de dedos largos quanto de formação de dedos agudos. Finalmente, verificamos que esses aspectos morfológicos básicos são consistentes com o efeito de enfraquecimento da curvatura discutido nas Refs. [31, 32], no sentido de que as instabilidades evoluem mais facilmente nas regiões de baixa rigidez.

Estudos tradicionais de formação de dedos em células de Hele-Shaw girantes tem focado a atenção no jogo entre efeitos viscosos, de capilaridade e centrífugos como responsável pelos padrões formados. Nessa abordagem, foi mostrado que o contraste de viscosidade exerce papel crucial na determinação da dinâmica de competição dos dedos do sistema. Se o contraste de viscosidade for positivo (negativo) a competição, ou de modo equivalente a variabilidade no tamanho dos dedos, entre os dedos que saem (entram) do fluido interno é aumentada. Por outro

lado, se o contraste de viscosidade for zero a competição é reprimida, e tanto os dedos que entram quanto os que saem possuem mesmo tamanho.

No Cap. 3, estudamos uma variante do problema da célula de Hele-Shaw girante. Consideramos a situação em que a interface fluido-fluido é elástica e possui rigidez dependente da curvatura. Nesse novo cenário as forças viscosas, elástica e centrífuga atuam na determinação do comportamento das estruturas instáveis que surgem. Novamente através do tratamento de modos acoplados, derivamos as equações que regem o sistema, com quatro parâmetros relevantes: o contraste de viscosidade A , o coeficiente B que mede a relação entre os efeitos elásticos e centrífugos, a fração de rigidez C e o raio característico λ . Ao contrário do problema usual da célula girante, nossos resultados analíticos mostraram uma forte dependência da dinâmica de competição dos dedos com os parâmetros C e λ . Mesmo mantendo A e B constantes, apenas variando os valores de C e λ , podemos reproduzir todos os comportamentos possíveis de competição dos dedos.

Já no capítulo 4, o formalismo de vortex sheet nos permitiu acessar as formas estacionárias originadas quando dois fluidos Newtonianos, separados por uma interface elástica, fluem em uma célula de Hele-Shaw girante. Nosso objetivo principal foi a determinação das formas estáticas quando as forças centrífuga e elástica são balanceadas. Para o regime estático, a técnica de vortex sheet surge como uma alternativa ao tradicional método variacional na determinação de uma equação diferencial não linear que descreva a curvatura da interface elástica (equação do contorno).

Soluções numéricas da equação de contorno revelaram um surpreendente conjunto de formas, incluindo padrões com interfaces que lembram serpentinas, que parecem rodopiar (onde aprisionamento de gotas e seus desmembramentos ocorrem) e dobramentos e morfologias com modos n dominantes exibindo ramificação lateral. Todas essas famílias de formas foram caracterizadas utilizando dois parâmetros adimensionais: uma rigidez efetiva e o parâmetro geométrico raio de giração. Note que as formas encontradas no nosso estudo são consideravelmente distintas das elásticas do problema de Euler e problemas relacionados [56, 57, 62–64], assim como os padrões produzidos quando tensão superficial e forças centrífugas se equilibram em fluxos em células de Hele-Shaw girantes (na ausência de uma interface elástica) [42, 43].

Apesar de todos os avanços que obtivemos, alguns aspectos importantes do problema elástico ainda merecem investigação. Por exemplo, em contraste com as soluções estacionárias exatas obtidas nas Refs. [43, 56, 57, 62–64], não conseguimos encontrar soluções analíticas fechadas para o nosso problema estático estudado no capítulo 4. Ainda do ponto de vista teórico, outro desafio existe quando nos referimos à estabilidade das formas encontradas nessa dissertação. Por exemplo, enquanto as soluções da elástica de Euler encontradas nas Refs. [56, 57, 62–64] são estáveis, as soluções hidrodinâmicas obtidas nas Refs. [42, 43, 73, 74] na ausência da interface elástica são instáveis. Então, a estabilidade dos padrões estacionários obtidos aqui é uma questão em aberto. Finalmente, seria interessante a realização de experimentos em laboratório e numéricos de célula de Hele-Shaw girante com interface elástica, ambos no regime estático e no regime não linear de evolução temporal.

Chegamos ao fim da dissertação na esperança de que nossos estudos e resultados tenham contribuído com o entendimento de instabilidades elásticas em células de Hele-Shaw e que motivem cada vez mais cientistas a adentrar nessa área. Não vamos parar por aqui.

Referências

- [1] P. G. Saffman e G. I. Taylor, Proc. R. Soc. London Ser. A **245**, 312 (1958).
- [2] Para artigos de revisão veja G. M. Homsy, Annu. Rev. Fluid Mech. **19**, 271 (1987); K. V. McCloud e J. V. Maher, Phys. Rep. **260**, 139 (1995); J. Casademunt, Chaos **14**, 809 (2004).
- [3] P. G. Saffman, J. Fluid Mech., 173 (1986).
- [4] L. Paterson, J. Fluid Mech. **113**, 513 (1981).
- [5] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim, e Y. Couder, Phys. Fluids A **1**, 224 (1989).
- [6] J.-D. Chen, J. Fluid Mech. **201**, 223 (1989); J. -D. Chen, Exp. Fluids **5**, 363 (1987).
- [7] S. S. S. Cardoso e A. W. Woods, J. Fluid Mech. **289**, 351 (1995).
- [8] O. Praud e H. L. Swinney, Phys. Rev. E **72**, 011406 (2005).
- [9] J. A. Miranda e M. Widom, Physica D **120**, 315 (1998).
- [10] J. A. Miranda, Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University (1998).
- [11] S. W. Li, J. S. Lowengrub, e P. H. Leo, J. Comput. Phys. **225**, 554 (2007).
- [12] Ll. Carrillo, Ph.D. Thesis, University of Barcelona (1994).
- [13] B. Jha, L. Cueto-Felgueroso, e R. Juanes, Phys. Rev. Lett. **106**, 194502 (2011).
- [14] T. T. Al-Housseiny, P. A. Tsai, e H. A. Stone, Nature Phys. **8**, 747 (2012).
- [15] T. T. Al-Housseiny e H. A. Stone, Phys. Fluids **25**, 092102 (2013).
- [16] R. M. Wilson, Phys. Today **65**(10), 15 (2012).
- [17] L. W. Schwartz, Phys. Fluids A **1**, 167 (1989).
- [18] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt, e J. Ortín, Phys. Rev. E **54**, 6260 (1996).
- [19] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, e J. Casademunt, Phys. Fluids **16**, 908 (2004).
- [20] J. A. Miranda e E. Alvarez-Lacalle, Phys. Rev. E **72**, 026306 (2005).

- [21] R. Folch, E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, e J. Casademunt, *Phys. Rev. E* **80**, 056305 (2009).
- [22] C. Y. Chen, Y. S. Huang, e J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **84**, 046302 (2011).
- [23] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, e J. Casademunt, *Phys. Rev. E* **74**, 025302(R) (2006).
- [24] J. Casademunt, *Eur. Phys. J. Plus* **126**, 94 (2011), e suas referências.
- [25] H. Gadêlha e J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **70**, 066308 (2004).
- [26] C.-Y. Chen, C.-H. Chen e J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **73**, 046306 (2006).
- [27] B. Saintyves, O. Dauchot, e E. Bouchaud, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 047801 (2013).
- [28] J. S. Biggins, Z. Wei, e L. Mahadevan, arXiv preprint arXiv:1407.0684 (2014).
- [29] J. S. Biggins, B. Saintyves, Z. Wei, E. Bouchaud, e L. Mahadevan, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **110**, 12545 (2013).
- [30] T. Podgorski, M. C. Sostarecz, S. Zorman, e A. Belmonte, *Phys. Rev. E* **76**, 016202 (2007).
- [31] A. He, J. S. Lowengrub, e A. Belmonte, *SIAM J. Appl. Math.* **72**, 842 (2012).
- [32] A. He, Ph.D. Thesis, Penn State University (2011).
- [33] G. D. Carvalho, J. A. Miranda, e H. Gadêlha, *Phys. Rev. E* **88**, 053006 (2013).
- [34] G. D. Carvalho, H. Gadêlha, e J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **89**, 053019 (2014).
- [35] G. D. Carvalho, H. Gadêlha, e J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **90**, 063009 (2014).
- [36] M. J. Shelley, F-R. Tian, e K. Wlodarski, *Nonlinearity* **10**, 1471 (1997).
- [37] A. Lindner, D. Derks, e M. J. Shelley, *Phys. Fluids* **17**, 072107 (2005).
- [38] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, e D. Bonn, *J. Appl. Phys.* **93**, 1557 (2003).
- [39] A. De Wit, K. Eckert, e S. Kalliadasis, *Chaos* **22**, 037101 (2012).
- [40] T. Gérard e A. De Wit, *Phys. Rev. E* **79**, 016308 (2009).
- [41] Y. Nagatsu, Y. Ishii, Y. Tada, e A. De Wit, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 024502 (2014).
- [42] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, e J. Casademunt, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 054501 (2004).
- [43] E. S. G. Leandro, R. M. Oliveira, e J. A. Miranda, *Physica D* **237**, 652 (2008).
- [44] H. Guo, D. C. Hong, e D. A. Kurtze, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1520 (1992).
- [45] H. Guo, D. C. Hong, e D. A. Kurtze, *Phys. Rev. E* **51**, 4469 (1995).

- [46] C. K. Chan e N. Y. Liang, Phys. Rev. Lett. **79**, 4381 (1997).
- [47] C. K. Chan, Physica A **288**, 315 (2000).
- [48] R. Krechetnikov e G. M. Homsy, J. Fluid Mech. **509**, 103 (2004).
- [49] J. Fernandez, R. Krechetnikov e G. M. Homsy, J. Fluid Mech. **527**, 197 (2005).
- [50] F. M. Rocha e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **87**, 013017 (2013).
- [51] C. Almarcha, P.M.J. Trevelyan, P. Grosfils, e A. De Wit, Phys. Rev. Lett. **104**, 044501 (2010).
- [52] M. Mishra, P.M.J. Trevelyan, C. Almarcha, e A. De Wit, Phys. Rev. Lett. **105**, 204501 (2010).
- [53] L. A. Riolfo, Y. Nagatsu, S. Iwata, R. Maes, P.M.J. Trevelyan, e A. De Wit, Phys. Rev. E **85**, 015304(R) (2012).
- [54] L. A. Riolfo, J. Carballido-Landeira, C. O. Bounds, J. A. Pojman, S. Kalliadasis, e A. De Wit, Chem. Phys. Lett. **534**, 13 (2012).
- [55] A. R. White e T. Ward, Chaos **22**, 037114 (2012).
- [56] G. Arreaga, R. Capovilla, C. Chryssomalakos, e J. Guven, Phys. Rev. E **65**, 031801 (2002).
- [57] P. A. Djondjorov, V. M. Vassilev, e I. M. Mladenov, Int. J. Mech. Sci. **53**, 355 (2011).
- [58] Para uma perspectiva histórica veja C. G. Fraser, Centaurus **34**, 211 (1991); R. Levien, *The Elastica: a mathematical history*, Technical Report UCB/EECS-2008-103, EECS Department, University of California, Berkeley, 2008.
- [59] G. M. Scarpello e D. Ritelli, Meccanica **41**, 519 (2006).
- [60] A. E. H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (Dover, New York, 1944).
- [61] M. Giaquinta e S. Hildebrandt, Calculus of Variations I (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [62] V.M. Vassilev, P. A. Djondjorov, e I. M. Mladenov, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 435201 (2008).
- [63] S. K. Veerapaneni, R. Raj, G. Biroso, e P. K. Purohit, Int. J. Nonlinear Mech. **44**, 257 (2009).
- [64] L. Giomi, Soft Matter **9**, 8121 (2013).
- [65] C. C. Donato, M. A. F. Gomes, e R. E. de Souza, Phys. Rev. E **67**, 026110 (2003).

- [66] Y. C. Lin, Y. W. Lin, e T. M. Hong, *Phys. Rev. E* **78**, 067101 (2008).
- [67] E. Bayart, S. Deboeuf, F. Corson, A. Boudaoud, e M. Adda-Bedia, *Europhys. Lett.* **95**, 34002 (2011).
- [68] E. Bayart, A. Boudaoud, e M. Adda-Bedia, *Phys. Rev. E* **89**, 012407 (2014).
- [69] E. Katifori, S. Alben, e D. R. Nelson, *Phys. Rev. E* **79**, 056604 (2009).
- [70] L. Giomi e L. Mahadevan, *Proc. R. Soc. A* **468**, 1851 (2012).
- [71] G. Tryggvason e H. Aref, *J. Fluid Mech.* **136**, 1 (1983).
- [72] G. Birkhoff, Los Alamos Scientific Laboratory Technical Report No. LA-1862, 1954 (não publicado).
- [73] C. J. Heine, *IMA J. Numer. Anal.* **26**, 723 (2006).
- [74] C. J. Heine, Ph.D. Thesis, Universität Freiburg, Germany (2003).
- [75] T. R. Powers, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1607 (2010).
- [76] Ou-Yang Zhong-can e W. Helfrich, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2486 (1987).
- [77] H. Gadêlha e J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **79**, 066312 (2009).

Derivação da eq.(2.5)

Aqui derivamos a condição de pressão, Eq. (2.5), considerando a interface como uma membrana elástica que divide efetivamente o domínio dos fluidos em dois, levando em conta variações na métrica e no tensor de curvatura que descreve a superfície da membrana [75]. O formalismo apresentado aqui independe do sistema de coordenadas, e não requer especificação das suas componentes [32].

Quando a membrana flexível está fora da configuração de equilíbrio, é responsável pelo surgimento de uma densidade de força elástica que é balanceada pelos estresses viscosos através da interface [75]. Nós consideramos uma membrana elástica de Helfrich [76] com energia de deformação

$$E = 2 \int v(H)H^2 dS, \quad (\text{A:.1})$$

e resistência à flexão (rigidez), $v(H)$, em unidades de energia, que pode ser função da curvatura média local H , onde dS é o elemento de área superficial da membrana. Equação (A:.1) despreza os potenciais de curvatura Gaussiana e espontânea, como também a tensão superficial da membrana [75,76]. A curvatura média na Eq. (A:.1) mede como a membrana se curva no espaço, e é dada pela média da soma das curvaturas principais, ao longo de duas direções independentes na superfície da membrana, definidas pelos vetores tangentes $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ com $i = \alpha, \beta$, onde $\mathbf{r}(\alpha, \beta)$ é a configuração instantânea da membrana parametrizada pelas coordenadas internas (α, β) . O elemento superficial de área dS pode ser escrito em termos do tensor métrico $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$ via $dS = \sqrt{g} d\alpha d\beta$, onde g denota o determinante de g_{ij} . Assim, a força por unidade de área associada à energia de deformação da membrana na Eq. (A:.1) pode ser calculada através da derivada variacional

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{r}}. \quad (\text{A:.2})$$

Por simplicidade, desprezamos a influência da curvatura na direção perpendicular ao plano do fluxo (direção z) [9] e consideramos uma membrana cilíndrica que se deforma paralelamente às placas da célula de Hele-Shaw, como representado na Fig. 2.1. Sob essas condições, o variacional da energia elástica de deformação nos dá

$$\begin{aligned} \delta E = \int d\alpha d\beta \left\{ -\left(\frac{3}{2}v\kappa^2 + v'\kappa^3\right) \hat{\mathbf{s}} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha \right. \\ \left. + \left(v\kappa + \frac{v'\kappa^2}{2}\right) \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha\alpha}}{\sqrt{\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha}} - \frac{(\mathbf{r}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{r}_\alpha) \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha}{(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A:.3})$$

onde κ é a curvatura da interface no plano do fluxo, $\{\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ é a base ortonormal de Frenet em termos dos vetores tangente e normal ao longo da interface, respectivamente, α parametriza o comprimento de arco s da interface elástica e a rigidez ν é função de κ . Denotamos derivadas parciais relativas à curvatura κ por apóstrofes, enquanto subscritos representam derivadas relativas ao parâmetro α .

Integrando a Eq. (A:.3) por partes chegamos a termos de fronteira que não contribuem para a distribuição de forças ao longo da interface. Finalmente, da Eq. (A:.2) a força resultante por unidade de área assume a forma compacta

$$\mathbf{f} = - \left[\partial_{ss} \left(\nu \kappa + \frac{\nu' \kappa^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (\nu \kappa^3 + \nu' \kappa^4) \right] \hat{\mathbf{n}}, \quad (\text{A:.4})$$

com uma contribuição nula da força na direção tangencial. Isso vem do fato da energia de deformação de uma membrana elástica cilíndrica ser invariante sob mudanças de coordenadas, e por isso ela não varia sob deformações em cada ponto ao longo da direção tangencial $\hat{\mathbf{s}}$, apesar de $\nu = \nu(\kappa)$. Além disso, Eq. (A:.4) concorda com o resultado mostrado em [31, 32]. A curvatura, no entanto, apresentada nas referências deve ser interpretada como a curvatura paralela, ao invés de curvatura média como está dito no texto das Refs. [31, 32]. Fatores de dois multiplicativos devem ser introduzidos na Eq. (A:.4) se a reescrevermos em termos da curvatura média [75].

O balanço da densidade de força elástica na membrana Eq. (A:.4) com os estresses locais ao longo da sua superfície resulta na equação de Young-Laplace modificada para uma interface elástica

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\boldsymbol{\pi}^{(2)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{f}, \quad (\text{A:.5})$$

onde

$$\pi_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A:.6})$$

é o tensor de estresse local representando os estresses normal e viscoso no fluido. A equação (A:.6) inclui um termo de fricção viscosa proporcional à viscosidade do fluido η , δ_{ik} denota a função delta de Kronecker e v_i representa a i -ésima componente do vetor velocidade do fluido. A condição de pressão apresentada na Eq. (2.5) é obtida combinando os termos diagonais da Eq. (A:.5). Vale a pena ressaltar, no entanto, que, em geral, estresses viscosos oriundos de gradientes de velocidades normais podem contribuir na geometria radial pela Eq. (A:.5), como previamente estudado em [77].

APÊNDICE B:

Funções que aparecem nos termos $F(n, m)$ das equações de modos acoplados

Expressões para as funções $B_1(n, m)$, $B_2(n, m)$, $B_3(n, m)$, e $B_4(n, m)$ que aparecem nas Eqs. (2.12) e (3.9) do texto.

$$\begin{aligned} B_1(n, m) &= -3 + \frac{15}{4}m(n-m) + 10(n-m)^2 - \frac{9}{2}m^2(n-m)^2 - 6m(n-m)^3 \\ &\quad - 4(n-m)^4, \end{aligned} \tag{B:.1}$$

$$\begin{aligned} B_2(n, m) &= \frac{39}{2} - 30m(n-m) - 71(n-m)^2 + \frac{81}{2}m^2(n-m)^2 + 54m(n-m)^3 \\ &\quad + 32(n-m)^4 - 12m^2(n-m)^4 - 12m^3(n-m)^3, \end{aligned} \tag{B:.2}$$

$$\begin{aligned} B_3(n, m) &= -14 + 25m(n-m) + 54(n-m)^2 - 36m^2(n-m)^2 - 48m(n-m)^3 \\ &\quad - 26(n-m)^4 + 18m^2(n-m)^4 + 18m^3(n-m)^3, \end{aligned} \tag{B:.3}$$

e

$$\begin{aligned} B_4(n, m) &= 1 - 2m(n-m) - 4(n-m)^2 + 3m^2(n-m)^2 + 4m(n-m)^3 \\ &\quad + 2(n-m)^4 - 2m^2(n-m)^4 - 2m^3(n-m)^3. \end{aligned} \tag{B:.4}$$

APÊNDICE C:

**Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A
weakly nonlinear study**

Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A weakly nonlinear study

Gabriel D. Carvalho and José A. Miranda*

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil

Hermes Gadêlha

*Wolfson Centre for Mathematical Biology, Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford OX2 6GG, United Kingdom
and Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge CB3 0WA, United Kingdom*

(Received 17 September 2013; published 11 November 2013)

We study a variant of the classic viscous fingering instability in Hele-Shaw cells where the interface separating the fluids is elastic, and presents a curvature-dependent bending rigidity. By employing a second-order mode-coupling approach we investigate how the elastic nature of the interface influences the morphology of emerging interfacial patterns. This is done by focusing our attention on a conventionally stable situation in which the fluids involved have the same viscosity. In this framework, we show that the inclusion of nonlinear effects plays a crucial role in inducing sizable interfacial instabilities, as well as in determining the ultimate shape of the pattern-forming structures. Particularly, we have found that the emergence of either narrow or wide fingers can be regulated by tuning a rigidity fraction parameter. Our weakly nonlinear findings reinforce the importance of the so-called curvature weakening effect, which favors the development of fingers in regions of lower rigidity.

DOI: [10.1103/PhysRevE.88.053006](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.053006)

PACS number(s): 47.15.gp, 47.70.Fw, 47.54.-r, 47.20.Ma

I. INTRODUCTION

The celebrated Saffman-Taylor instability [1] occurs when a viscous fluid is injected into another fluid of higher viscosity in the confined geometry of a Hele-Shaw cell [2]. Under such circumstances, the fluid-fluid interface is unstable leading to the growth of fingerlike shapes. For radial fluid injection [3–9] the fingers tend to multiply and evolve through repeated tip-splitting, ultimately forming complex branched patterns. In the context of the classic Saffman-Taylor problem there is no instability when a more viscous fluid displaces a less viscous one, constituting a stable, reverse flow displacement. In this case the fluid-fluid interface propagates in the form of a stable circular front. Conventional Hele-Shaw flow with viscosity-matched fluids is also stable.

In some situations of practical and technological interest one might need to favor the development of interfacial instabilities, even during reverse or viscosity-matched flows. For example, it is known the formation of interfacial instabilities is quite advantageous to improve mixing processes in small-scale devices [10]. In fact, there has been recent increased interest in trying to trigger the instability in conventionally stable Hele-Shaw flow conditions. Very recent studies [11,12] have demonstrated, by linear stability analysis and experiments, that the introduction of a small gradient in the gap of the Hele-Shaw cell (so that the cell plates are no longer parallel) can induce the Saffman-Taylor instability under classically stable situations [13].

Other suggestive strategies have been proposed to destabilize the fluid-fluid interface in confined Hele-Shaw flows. The development of the reversed viscous fingering instability has been investigated both theoretically and experimentally by considering the addition of surfactants to the moving interface, or to the Hele-Shaw cell plates [14–20]. The presence of the surfactant may cause the surface tension to vary along

the fluid-fluid boundary, facilitating the occurrence of local disturbances. Another line of study examines the appearance of chemohydrodynamic instabilities when chemical reactions and diffusion interplay with advection or convection processes [21–26]. Sophisticated numerical simulations have detected the occurrence of a reversed Saffman-Taylor instability in miscible viscous fingering due to double-diffusive effects [23]. Laboratory experiments of reaction-driven miscible viscous fingering [24,25] confirmed that chemical reactions can indeed destabilize the classically stable reverse situation.

A particularly interesting experiment involving the occurrence of interfacial chemical reactions in Hele-Shaw geometry has been performed by Podgorski *et al.* in Ref. [27], who performed experiments using two miscible fluids of equal viscosities. The miscible fluids react at the interface, producing a gel-like phase of increased stiffness. This system turned out to be unstable, leading to the formation of a variety of interfacial patterns, including mushroom-shaped structures and tentacle-like fingers.

A subsequent theoretical investigation tried to mimic the reactive miscible system examined in [27], by considering that the two fluids are immiscible, but that the interface separating them is an elastic membrane, presenting a curvature-dependent bending rigidity [28]. They have assumed that the gel-like phase at the interface prevents further mixing, so that miscibility plays a negligible role in determining the fingering instability. In this scenario, they have considered a modified Young-Laplace pressure jump boundary condition that contemplates the fact that the interface has a bending rigidity changing according to the local interfacial curvature. Their linear stability results have been able to account for the fact that the reactive system is more unstable than the nonreactive one, so that reaction has a destabilizing effect. In particular, it has been shown that the interface can become unstable even if the fluids have the same viscosity, consistently with the experimental findings of Ref. [27].

Despite the significance of the linear stability results obtained in Ref. [28] regarding the stability of the interface, at

*jme@df.ufpe.br

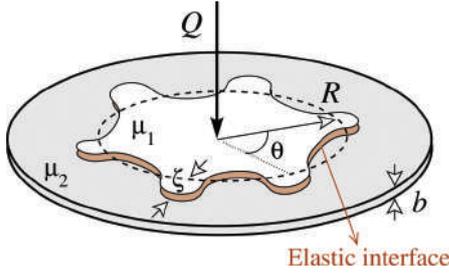


FIG. 1. (Color online) Representative sketch of a radial Hele-Shaw cell with an elastic interface separating fluids 1 and 2.

purely linear stages not much can be said about the influence of the elastic interface on the morphology of the emergent fingering patterns. To properly address this type of effect one must investigate the nonlinear stages of the dynamics. This is precisely what we do in this work: by using the theoretical model proposed in Ref. [28] as a starting point, we employ a second-order mode-coupling perturbative scheme [8] to get important insights into the onset of pattern formation processes in this interfacial elastic fingering instability problem.

II. WEAKLY NONLINEAR SCHEME

Consider a Hele-Shaw cell of gap spacing b containing two immiscible, incompressible, viscous fluids (see Fig. 1). Denote the viscosities of the inner and outer fluids, respectively, as μ_1 and μ_2 . Fluid 1 is injected into fluid 2 at a constant injection rate Q (equal to the area covered per unit time). Due to a chemical reaction there exists a gel-like interface separating the two fluids. As in Refs. [28,29] we treat the interface as an elastic membrane, presenting a curvature-dependent bending rigidity.

The perturbed fluid-fluid interface is described as $\mathfrak{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, where θ represents the azimuthal angle, and $R(t)$ is the time dependent unperturbed radius $R = R(t) = \sqrt{R_0^2 + Qt/\pi}$, with R_0 being the unperturbed radius at $t = 0$. Here, $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$ denotes the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$, and discrete wave numbers n . Our perturbative approach keeps terms up to the second order in ζ . In the Fourier expansion of ζ we include the $n = 0$ mode to maintain the area of the perturbed shape independent of the perturbation ζ . Mass conservation imposes that the zeroth mode is written in terms of the other modes as $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$.

For the effectively two-dimensional geometry of the radial Hele-Shaw cell, the governing equation of the system is the gap-averaged Darcy's law [3,27]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\mu_j} \nabla p_j, \quad (1)$$

where \mathbf{v}_j and p_j denote the velocity and pressure in fluids $j = 1, 2$, respectively. From the irrotational nature of the flow ($\nabla \times \mathbf{v}_j = 0$), and the incompressibility condition

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad (2)$$

it can be readily verified that the velocity potential ϕ_j ($\mathbf{v}_j = -\nabla\phi_j$) obeys Laplace's equation. To get the equation of

motion for the interface, we rewrite Eq. (1) for each of the fluids in terms of the velocity potential. Integrate and then subtract the resulting equations from each other to obtain [8]

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) - \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = -\frac{b^2 \Delta p}{12(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (3)$$

where the dimensionless parameter $A = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$ is the viscosity contrast, and

$$\Delta p = (p_1 - p_2)|_{r=\mathfrak{R}} - (p_1 - p_2)|_{r=R}, \quad (4)$$

where $(p_1 - p_2)|_{r=\mathfrak{R}}$ denotes the pressure jump on the perturbed interface, while $(p_1 - p_2)|_{r=R}$ represents the pressure jump on the unperturbed interface [28,29].

To include the contributions coming from the elastic nature of the fluid-fluid interface, similarly to what was done in [28,29] we consider a generalized Young-Laplace pressure boundary condition, which expresses the pressure jump across the perturbed fluid-fluid interface as

$$(p_1 - p_2)|_{r=\mathfrak{R}} = -\frac{1}{2}v''' \kappa^2 \kappa_s^2 - v''(3\kappa \kappa_s^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 \kappa_{ss}) - v'(\frac{1}{2}\kappa^4 + 3\kappa_s^2 + 2\kappa \kappa_{ss}) - v(\frac{1}{2}\kappa^3 + \kappa_{ss}), \quad (5)$$

where

$$v = v(\kappa) = v_0 [C e^{-\lambda^2 \kappa^2} + 1 - C] \quad (6)$$

is the bending rigidity function, v_0 is the maximum rigidity that expresses the largest resistance to disturbances, and $0 \leq C < 1$ is the rigidity fraction, which measures the fraction of intramolecular bonds broken through surface deformation. Note that the constant rigidity limit is reached in Eq. (6) by setting $C = 0$. κ denotes the interface curvature in the plane of the cell, and $\lambda > 0$ is a characteristic radius [28]. In Eq. (5) the primes indicate derivatives with respect to the curvature κ , while the subscripts of κ indicate derivatives with respect to the arc length s . The details of our computation leading to Eq. (5) are presented in Appendix A. Our calculation of Eq. (5) is distinct from the one presented in Ref. [29] but we obtain the same final result.

The problem is specified by the generalized pressure jump boundary condition (5), plus the kinematic boundary condition which states that the normal components of each fluid's velocity are continuous at the interface [2]

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \right)_{r=\mathfrak{R}} - \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right)_{r=\mathfrak{R}}. \quad (7)$$

Following standard steps performed in previous weakly nonlinear studies for radial Hele-Shaw flows [8,20], first we define Fourier expansions for the velocity potentials. Then, we express ϕ_j in terms of the perturbation amplitudes ζ_n by considering condition (7). Substituting these relations, and the pressure jump condition Eq. (5) into Eq. (3), always keeping terms up to second order in ζ , and Fourier transforming, we find the equation of motion for the perturbation amplitudes (for $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n + \sum_{m \neq 0} [F(n, m)\zeta_m \zeta_{n-m} + G(n, m)\dot{\zeta}_m \zeta_{n-m}], \quad (8)$$

where the overdot denotes total time derivative,

$$\Lambda(n) = \frac{Q}{2\pi R^2} (A|n| - 1) + \frac{\alpha v_0}{2R^5} |n|(n^2 - 1) \times [A_1(C, \eta)(n^2 + 1) + A_2(C, \eta)] \quad (9)$$

is the linear growth rate,

$$A_1(C, \eta) = C e^{-\eta} (-4\eta^2 + 10\eta - 2) - 2(1 - C), \quad (10)$$

$$A_2(C, \eta) = C e^{-\eta} (8\eta^2 - 22\eta + 5) + 5(1 - C), \quad (11)$$

with $\alpha = b^2/[12(\mu_1 + \mu_2)]$, and $\eta = (\lambda/R)^2$.

The second-order mode-coupling terms are given by

$$F(n, m) = \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{QA}{2\pi R^2} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nm) \right] - \frac{\alpha v_0 C e^{-\eta}}{R^5} \times [B_1(n, m) + \eta B_2(n, m) + \eta^2 B_3(n, m) + 2\eta^3 B_4(n, m)] - \frac{\alpha v_0 (1 - C)}{R^5} B_1(n, m) \right\}, \quad (12)$$

and

$$G(n, m) = \frac{1}{R} \{A|n|[1 - \text{sgn}(nm)] - 1\}, \quad (13)$$

where the sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. The expressions for the functions $B_1(n, m)$, $B_2(n, m)$, $B_3(n, m)$, and $B_4(n, m)$ are given in Appendix B.

Equations (8)–(13) represent the mode-coupling equations of the elastic fingering instability problem in a radial Hele-Shaw cell, considering that the interface has a curvature-dependent bending rigidity. This set of nonlinear equations opens up the possibility of investigating analytically how the morphology of the evolving interface respond to the interplay between injection, and the own elastic features of the fluid-fluid boundary.

At the linear level the interplay mentioned above is clearly manifested by the linear growth rate (9): the first term is related to the effect of injection while the second term expresses the bending rigidity contribution. For a given n , in the limit of constant rigidity ($C = 0$) the quantity $[A_1(C, \eta)(n^2 + 1) + A_2(C, \eta)]$ is negative, and the bending forces stabilize the interface. On the other hand, considering injection $Q > 0$ (and not suction, where $Q < 0$), it can either destabilize or stabilize the system depending on the sign of the viscosity contrast ($-1 \leq A \leq +1$). However, if $0 < C < 1$ the quantity $[A_1(C, \eta)(n^2 + 1) + A_2(C, \eta)]$ can become positive and the effect of the curvature-dependent bending may lead to interface destabilization. In this work, we focus on the important situation in which $A = 0$ (viscosity-matched fluids as in Ref. [27]), $0 < C < 1$, and $Q > 0$ so that the injection contribution is stabilizing, and bending forces are destabilizing.

III. ONSET OF NONLINEARITIES

In this section we use our mode-coupling approach to investigate the interface evolution at first and second order. We illustrate the usefulness of our weakly nonlinear analysis in elucidating key aspects related to shape of emergent fingers during the development of the interfacial elastic instability in radial Hele-Shaw cells. To simplify our discussion it is

convenient to rewrite the net perturbation in terms of cosine and sine modes

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (14)$$

where $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ and $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ are real-valued. Without loss of generality we may choose the phase of the fundamental mode so that $a_n > 0$ and $b_n = 0$.

We stress that the values we take for our parameters throughout this work are consistent with typical physical quantities used in real experiments for conventional injection-driven radial viscous flows in Hele-Shaw cells [2–7], and with related experimental and theoretical studies involving the development of the elastic fingering instability in this flow geometry [27–29]. We consider fluids of equal viscosities [$\mu_1 = \mu_2 = 0.3$ g/(cm s)], so that we have a zero viscosity contrast situation ($A = 0$). The constant injection rate is taken as $Q = 0.85$ cm²/s, and the thickness of the cell $b = 0.06$ cm. The initial radius R_0 is of the order of 1.0 cm, and the evolution of the interfaces we consider typically run up to a few seconds time. Specific values for R_0 and time t will be provided in the discussion of each different situation examined in the remainder of this work. Finally, unless otherwise stated we take $C = 0.99$, $\lambda = 1.0$ cm, and $v_0 = 0.8$ g cm²/s².

As commented in Sec. I, the reactive miscible fingering experiments performed by Podgorski *et al.* [27] exhibited a number of finger shapes. Generally speaking, depending on the flow parameters one could get tentacle-like fingers or mushroom-shaped structures. While the convoluted tentacle-like patterns are characterized by thin fingers with narrow tips, the mushroom-shaped structures present swollen fingering protrusions with wide, inflated tips. Of course, these intricate patterns are highly nonlinear and their complex shapes could not be accurately reproduced by our weakly nonlinear Fourier analysis. However, we can use our mode-coupling approach to try to detect the onset of such nonlinear effects, and then get analytical insight into the tendency toward finger tip-widening or finger tip-narrowing already at early nonlinear stages of the dynamics. In addition, this can be conveniently done by utilizing just a small number of interacting Fourier modes [8].

Within our mode-coupling approach the finger tip behavior is related to the influence of a fundamental mode n on the growth of its harmonic $2n$ [8]. Under these circumstances, the equations of motion for the cosine and sine modes of the harmonic are

$$\dot{a}_{2n} = \Lambda(2n)a_{2n} + \frac{1}{2}T(2n, n)a_n^2, \quad (15)$$

$$\dot{b}_{2n} = \Lambda(2n)b_{2n}, \quad (16)$$

where

$$T(n, m) = F(n, m) + \Lambda(m)G(n, m). \quad (17)$$

From Eq. (16) we can see that the growth of the sine mode b_{2n} is uninfluenced by a_n , and does not present second-order couplings, so we focus on the growth of the cosine modes. Likewise, the equation of motion for the fundamental mode is

$$\dot{a}_n = \Lambda(n)a_n + \frac{1}{2}[T(n, 2n) + T(n, -n)]a_n a_{2n}. \quad (18)$$

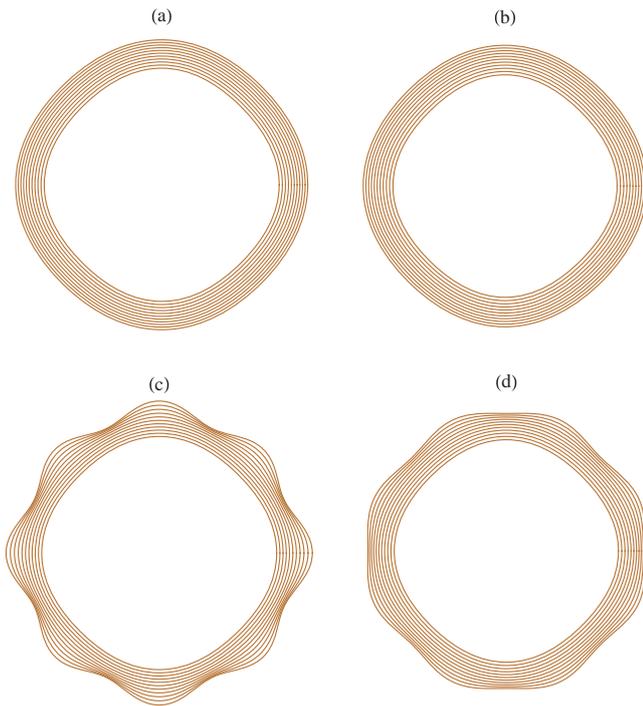


FIG. 2. (Color online) Snapshots of the evolving interface for the interaction of two cosine modes $n = 4$ and $2n = 8$. Purely linear evolution for (a) $R_0 = 1.2$ cm, and (b) $R_0 = 1.145$ cm. Weakly nonlinear evolution for (c) $R_0 = 1.2$ cm, and (d) $R_0 = 1.145$ cm. Recall that here $C = 0.99$.

In fact, Eq. (15) shows that the presence of the fundamental mode n forces growth of the harmonic mode $2n$. It has been shown in Ref. [8] that if a_{2n} is driven negative, one observes finger tip-widening, and even finger tip-splitting. On the other hand, if a_{2n} is driven positive finger tip-narrowing results. Next, we study how these finger tip mechanisms act in the presence of an elastic fluid-fluid interface.

To examine the influence of the elastic interface effects on finger tip behavior at second order, in Fig. 2 we plot the time evolution of the cosine perturbation amplitudes for the fundamental mode a_n , and for its harmonic mode a_{2n} . This is done by solving the coupled nonlinear Eqs. (15) and (18). Figures 2(a) and 2(b) show the *purely linear* evolution of the interface for initial radii $R_0 = 1.2$ cm, and $R_0 = 1.145$ cm, respectively. On the other hand, Figs. 2(c) and 2(d) depict the *weakly nonlinear* evolution of the interface, again for initial radii $R_0 = 1.2$ cm, and $R_0 = 1.145$ cm, respectively. We take the initial perturbation amplitudes as $a_n(0) = R_0/40$ cm, and $a_{2n}(0) = 0$. All patterns shown in Fig. 2 are plotted for $0 \leq t \leq 3$ s, in equal time intervals $\Delta t = 0.3$ s.

By inspecting Figs. 2(a) and 2(b) it is evident that the purely linear calculation just leads to the evolution of slightly deformed, almost circular interfaces. It is true that despite of the fact that $A = 0$, the elastic nature of the fluid-fluid boundary and the existence of a curvature-dependent bending rigidity allow interface destabilization. However, the linear destabilizing effects seem very modest. Moreover, regardless of the value of the initial radius R_0 , the overall shapes of the patterns illustrated in Figs. 2(a) and 2(b) are quite similar.

A considerably different situation is depicted in Figs. 2(c) and 2(d) which exhibit the weakly nonlinear time evolution of the interfaces. First, it is clear that the resulting weakly nonlinear interfaces are considerably more deformed than their purely linear counterparts shown in Figs. 2(a) and 2(b). This indicates the importance of the nonlinear effects in providing sizable interface deformations already at the onset of nonlinearity. Moreover, notice that the morphologies of the resulting patterns depicted in Figs. 2(c) and 2(d) are significantly different from one another: while finger tip-narrowing is obtained in (c), finger tip-widening is the dominant phenomenon in (d). Since the only difference between Figs. 2(c) and 2(d) resides on the value of the initial radius R_0 , this points to a strong sensitivity of the system to small changes in the initial conditions. So, a small initial difference in R_0 could be determinant in influencing the ultimate shape of the elastic interface patterns, which can present either wide or narrow fingering structures.

It is worth pointing out that this very strong sensitive dependence on the value of R_0 is not encountered in the weakly nonlinear analysis of the classical Saffman-Taylor instability [8]. What makes the present system special is the presence of high-order exponents of the unperturbed interface radius R [R^N , with exponents N as high as 12] that appear in the denominators of the expressions for the growth rate, and for the second-order mode-coupling function $F(n, m)$ [see Eqs. (9)–(12)]. The dependence on R_0 becomes even stronger because of the presence of the exponential term $e^{-\eta}$, where $\eta = (\lambda/R)^2$, in Eqs. (10)–(12). Therefore, tiny changes in R_0 can lead to significant changes in the nonlinear dynamics. This specific effect is considerably smaller in the classical Saffman-Taylor where the highest value for the exponent N mentioned above is 4, and where the exponential factor $e^{-\eta}$ is absent (see, e.g., Eqs. (19)–(21) in Ref. [8]).

Another interesting aspect of the weakly nonlinear dynamics can be unveiled by examining Fig. 3 which plots the time evolution of the first harmonic perturbation amplitude a_{2n} for (a) $R_0 = 1.2$ cm and (b) $R_0 = 1.145$ cm, for different values of the rigidity fraction C . All other physical parameters and initial conditions are the same as the ones used in Fig. 2. From Fig. 3(a) we see that no matter what value of C is used, the perturbation amplitude is always driven positive. Moreover, we notice that by increasing the value of C one obtains increasingly larger magnitudes for $a_{2n} > 0$. In other words, as C is increased one detects the occurrence of finger tip-narrowing events, presenting increasingly sharper finger tips. Within the scope of our perturbative mode-coupling theory, the sharpest finger situation occurs when $C = 0.99$ that corresponds to the pattern illustrated in Fig. 2(c).

A distinct type of behavior is verified in Fig. 3(b): by increasing the magnitude C from 0.70 to 0.90 one does observe the production of patterns having sharper finger tips. Nevertheless, for $C = 0.99$ we verify that the perturbation amplitude a_{2n} goes strongly negative, indicating the formation of wider finger tips. This last situation corresponds to the pattern plotted in Fig. 2(d). So, Fig. 3(b) predicts the possible occurrence of a peculiar finger shape transition (from narrow to wide fingers) regulated by the tuning of the rigidity fraction parameter C . A possible physical explanation for the flattening of the fingers can be related to the fact that the own elastic nature of the

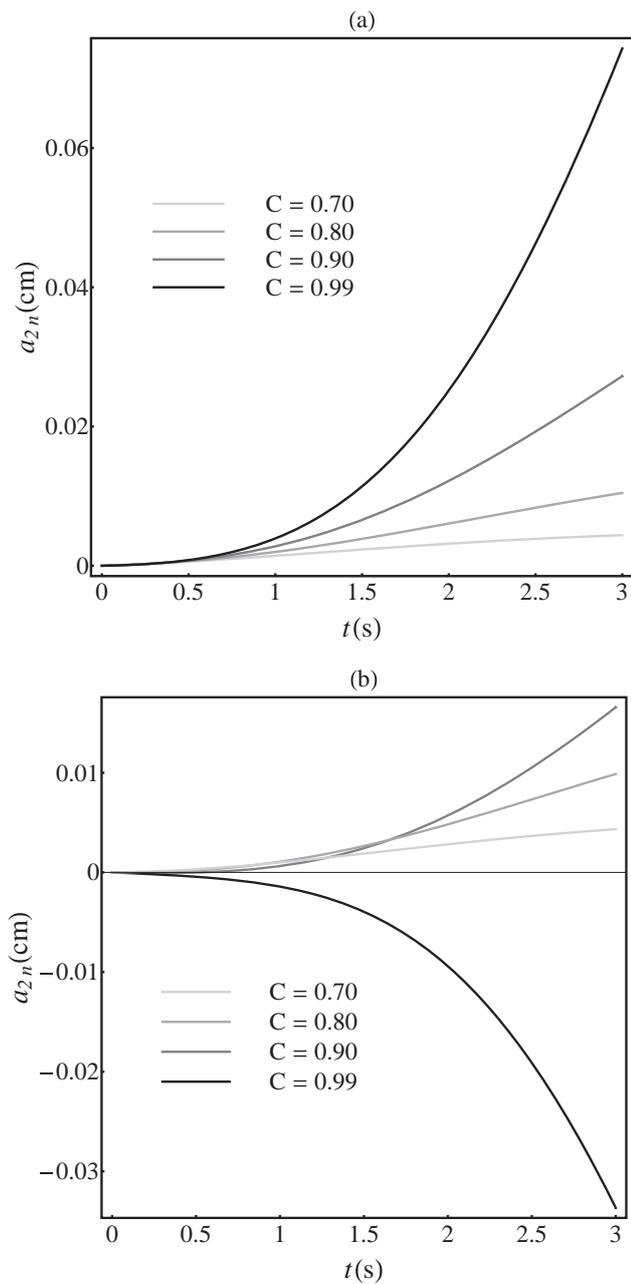


FIG. 3. Weakly nonlinear time evolution of the cosine perturbation amplitude a_{2n} for different values of C when (a) $R_0 = 1.2$ cm and (b) $R_0 = 1.145$ cm.

interface tends to inhibit the appearance of sharp structures. Therefore, the emergence of mushroom shapes or flat, wide fingers would be favored because each represent some approximation of a minimal curvature for the fluid-fluid interface.

We now turn our attention to the effect of the bending rigidity $\nu = \nu(\theta, t)$ while dynamically shaping the interface. Figure 4 displays the pattern formation of the bending rigidity field associated with the evolving interfaces portrayed in Fig. 2. The linear theory in Figs. 4(a) and 4(b) is characterized by smooth changes along the interfacial arc length with decreasing magnitude of ν , centered at the maxima in curvature, while nearly straight regions present an effectively stiffer bending

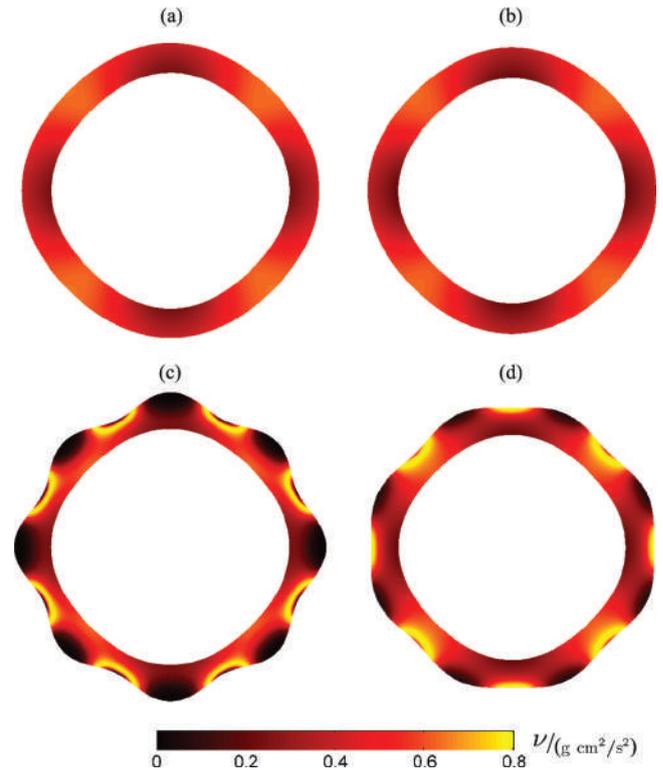


FIG. 4. (Color online) Time evolution of the bending rigidity field ν [Eq. (6)] in units of $\text{g cm}^2/\text{s}^2$, for the evolving interfaces in Fig. 2. Purely linear evolution for (a) $R_0 = 1.2$ cm, and (b) $R_0 = 1.145$ cm, and weakly nonlinear evolution for (c) $R_0 = 1.2$ cm and (d) $R_0 = 1.145$ cm. Note that smallest ν observed is 0.0013.

elasticity. As the interface evolves, however, the initially perturbed bending rigidity distribution increases radially, with different rates, at every point of the interface. The radial growth of the interface reduces the overall curvature and, consequently, augments the magnitude of ν , despite of the local elastic weakening effect from Eq. (6). This prediction is in agreement with the general behavior of the elastic resistance across the interface, which penalizes any increase in local curvature, given the energetically higher configuration. Nevertheless, as expected from the linear theory, Figs. 4(a) and 4(b) fail to provide the dynamical significance the elastic bending weakening behavior, given its intrinsic nonlinear contribution, Eq. (5). In this case, the bending rigidity ν modifies the elastic restoring forces dynamically, as it accounts for the fact that higher curvatures may brake the elastic binding between adjacent regions of the elastic interface, thus locally reducing the effective bending resistance and promoting fingering instability.

The weakly nonlinear solutions illustrated in Figs. 4(c) and 4(d) capture this complex interplay between the interface patterning and the bending rigidity field, compare for instance with Figs. 2(c) and 2(d). In this regime, nonlinearities are responsible for a new dynamical bifurcation at the level of the bending rigidity field $\nu(\theta, t)$, which causes the branching of the bending rigidity magnitude in time. The bending rigidity bifurcation may occur for higher [Fig. 4(c)] or lower [Fig. 4(d)] values of ν . This is due to the fact that the bending rigidity modulation does not privilege outward or inward

fingers, since ν does not depend on the sign of the local curvature. The competing effects between the effectively stiff and flexible regions along the evolving interface dynamically shift initially stable (unstable) regions to lower (higher) interfacial rigidities, shaping in this way the observed fingering pattern in Figs. 2(c) and 2(d).

IV. CONCLUDING REMARKS

During the past few years there has been a considerable interest in the study of the so-called reactive Hele-Shaw flows. In this type of confined flow displacements the already interesting features of traditional viscous fingering phenomena [1,2] are supplemented by the occurrence of chemical reactions at the fluid-fluid interface [21–29].

One particularly interesting experimental investigation on reactive Hele-Shaw flows has been carried out by Podgorski *et al.* [27], who studied the development of visually striking patterns (mushroom-shaped and tentacle-like structures) which arise due to chemical reactions at the boundary separating two miscible fluids of equal viscosity. The reaction induces the formation of a flexible gel-like layer between the fluids, that restrains further mixing, so that the interfacial instabilities are triggered by the own elastic nature of the interface. One noteworthy feature of this pattern-forming system is the fact that it characterizes the realization of a nonviscous elastic fingering instability. Here the classic Saffman-Taylor instability is not active due to the zero viscosity contrast between the fluids.

Recently, a theoretical model has been proposed [28,29] to explain the occurrence of instability between viscosity-matched fluids as experimentally observed in Ref. [27]. By assuming that the fluid-fluid interface acts as an elastic membrane which has a curvature-dependent bending rigidity, He *et al.* [28,29] developed a linear stability calculation and showed that the interface can indeed become unstable, even under zero viscosity contrast circumstances. Note that this model refers to an elastic fingering instability arising at the fluid-fluid interface [27], which differs from an equally interesting elastic instability that also takes place in Hele-Shaw cells [30], but that originates within the bulk of a gel.

In this work, we revisited the interfacial elastic fingering problem originally studied in [28,29], and went beyond the purely linear regime by focusing our attention on the weakly nonlinear stages of the dynamics. This has been accomplished by employing an analytic mode-coupling approach that is valid at lowest nonlinear perturbative order [8]. This theoretical scheme allows one to study the influence of the elastic character of the interface on key morphological features of the resulting patterned finger-like structures. In this context, we have shown that nonlinear effects are essential to induce sizable deformations, as well as to determine the ultimate shape of the fingers. Specifically speaking, we have found that by properly tuning the rigidity fraction parameter C and the initial interface radius R_0 one can get the prevalence of either finger tip-widening or finger tip-narrowing events. Finally, we verified that these basic morphological aspects are consistent with the curvature weakening effect discussed in Refs. [28,29], in the sense that interfacial elastic fingers arise more easily in regions of lower rigidity.

ACKNOWLEDGMENTS

J.A.M. and G.D.C. thank CNPq for financial support through the program “Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Fluidos Complexos (INCT-FCx)”, and FACEPE through PRONEM project No. APQ-1415-1.05/10. H.G. acknowledges support through an Oxford University Hooke Fellowship and is supported by Award KUK-C1-013-04 from King Abdullah University of Science and Technology.

APPENDIX A: DERIVATION OF EQ. (5)

In this appendix we derive the pressure jump condition in Eq. (5) associated with the presence of an interfacial elastic membrane, which effectively divides the fluid domain in two, by accounting for variations of the metric and curvature tensor describing the membrane surface [31]. The formalism presented here is general and independent of the coordinate system, and does not require specification of the coordinate components [29].

When the flexible membrane is away from the equilibrium configuration, it generates an elastic force density that is balanced by the viscous stresses across the interface [31]. We consider a Helfrich elastic membrane [32] with bending energy

$$E = 2 \int \nu(H) H^2 dS, \quad (\text{A1})$$

and membrane bending rigidity, $\nu(H)$, in units of energy, which may also be a function of the local mean curvature H , where dS is the element of the membrane surface area. Equation (A1) neglects both the potential for spontaneous and Gaussian curvature, as well as membrane surface tension [31,32]. The mean curvature in Eq. (A1) measures how the membrane bends in space, and is given by the average of the sum of the two principal curvatures, along two independent directions at the membrane surface, defined by the tangent vectors $\mathbf{r}_i \equiv \partial_i \mathbf{r}$ with $i = \alpha, \beta$, where $\mathbf{r}(\alpha, \beta)$ is the instantaneous membrane configuration parametrized by internal coordinates (α, β) . The surface area element dS can be written in terms of the metric tensor $g_{ij} \equiv \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$, via $dS = \sqrt{g} d\alpha d\beta$, where g denote the determinant of g_{ij} . Hence, the force per unit area associated with the membrane bending energy in Eq. (A1) can be computed through the variational derivative

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{r}}. \quad (\text{A2})$$

For simplicity, we neglect the influence of nonzero curvature in the direction perpendicular to the plane of flow (z -direction) [8], and consider a cylindrical membrane deforming parallel to the Hele-Shaw plates, as represented schematically in Fig. 1. Under these conditions, the variation of the elastic bending energy simply reads

$$\delta E = \int d\alpha d\beta \left\{ -\left(\frac{3}{2} \nu \kappa^2 + \nu' \kappa^3 \right) \hat{\mathbf{s}} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha + \left(\nu \kappa + \frac{\nu' \kappa^2}{2} \right) \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha\alpha}}{\sqrt{\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha}} - \frac{(\mathbf{r}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{r}_\alpha) \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha}{(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\}, \quad (\text{A3})$$

where κ is the interfacial curvature in the plane of flow, $\{\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ is the orthonormal Frenet basis, respectively, in terms of the

tangent and normal vectors along the interfacial membrane, α parametrizes the arc length s of the elastic interface, and the bending rigidity ν is a function of κ . We denote partial derivatives relative to the curvature κ by primes, while subscripts represent derivatives relative to the parameter α . Integration by parts of Eq. (A3) leads to boundary terms that do not contribute to the force distribution along the elastic interface. Finally, from Eq. (A2) the resulting force per unit area assumes a compact form

$$\mathbf{f} = -\left[\partial_{ss}\left(\nu\kappa + \frac{\nu'\kappa^2}{2}\right) + \frac{1}{2}(\nu\kappa^3 + \nu'\kappa^4)\right]\hat{\mathbf{n}}, \quad (\text{A4})$$

with a vanishing contribution of the force on the tangential direction. This follows from the fact that the bending energy of a cylindrical elastic membrane is invariant under changes in coordinates, and therefore it does not vary under deformations at every point along the tangential direction $\hat{\mathbf{s}}$, despite $\nu = \nu(\kappa)$. Furthermore, Eq. (A4) agrees with the result reported in Refs. [28,29]. The curvature, however, presented in the latter must be interpreted as the interfacial curvature, instead of mean curvature as argued in the text of the Refs. [28,29]. Multiple factors of two would be introduced in Eq. (A4) if rewritten in terms of the mean curvature [31].

The balance of the membrane elastic force density Eq. (A4) and the local stresses across the membrane surface, results on the modified Young-Laplace equation for an elastic interface

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\boldsymbol{\pi}^{(2)} - \boldsymbol{\pi}^{(1)}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{f}, \quad (\text{A5})$$

where $\boldsymbol{\pi}$

$$\pi_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right] \quad (\text{A6})$$

is the local stress tensor representing both normal and viscous stresses in the fluid. Equation (A6) includes a viscous friction

term proportional to the fluid's viscosity η , δ_{ik} denotes the Kronecker δ function, and v_i represents the i th component of the fluids' velocity vector. The pressure condition presented in the main text Eq. (5) is then obtained by matching the diagonal terms in Eq. (A5). It is worth noting, however, that, in general, viscous stresses originating from normal velocity gradients may also contribute for the radial geometry via Eq. (A5), as previously studied in [33].

APPENDIX B: FUNCTIONS APPEARING IN THE MODE-COUPLING TERM $F(n,m)$

This appendix presents the expressions for the functions $B_1(n,m)$, $B_2(n,m)$, $B_3(n,m)$, and $B_4(n,m)$ which appear in Eq. (12) of the text

$$B_1(n,m) = -3 + \frac{15}{4}m(n-m) + 10(n-m)^2 - \frac{9}{2}m^2(n-m)^2 - 6m(n-m)^3 - 4(n-m)^4, \quad (\text{B1})$$

$$B_2(n,m) = \frac{39}{2} - 30m(n-m) - 71(n-m)^2 + \frac{81}{2}m^2(n-m)^2 + 54m(n-m)^3 + 32(n-m)^4 - 12m^2(n-m)^4 - 12m^3(n-m)^3, \quad (\text{B2})$$

$$B_3(n,m) = -14 + 25m(n-m) + 54(n-m)^2 - 36m^2(n-m)^2 - 48m(n-m)^3 - 26(n-m)^4 + 18m^2(n-m)^4 + 18m^3(n-m)^3, \quad (\text{B3})$$

and

$$B_4(n,m) = 1 - 2m(n-m) - 4(n-m)^2 + 3m^2(n-m)^2 + 4m(n-m)^3 + 2(n-m)^4 - 2m^2(n-m)^4 - 2m^3(n-m)^3. \quad (\text{B4})$$

-
- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **245**, 312 (1958).
 [2] For review papers, see G. M. Homsy, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987); K. V. McCloud and J. V. Maher, *Phys. Rep.* **260**, 139 (1995); J. Casademunt, *Chaos* **14**, 809 (2004).
 [3] L. Paterson, *J. Fluid Mech.* **113**, 513 (1981).
 [4] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim, and Y. Couder, *Phys. Fluids A* **1**, 224 (1989).
 [5] J.-D. Chen, *J. Fluid Mech.* **201**, 223 (1989); *Exp. Fluids* **5**, 363 (1987).
 [6] S. S. S. Cardoso and A. W. Woods, *J. Fluid Mech.* **289**, 351 (1995).
 [7] O. Praud and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **72**, 011406 (2005).
 [8] J. A. Miranda and M. Widom, *Physica D* **120**, 315 (1998).
 [9] S. W. Li, J. S. Lowengrub, and P. H. Leo, *J. Comput. Phys.* **225**, 554 (2007).
 [10] B. Jha, L. Cueto-Felgueroso, and R. Juanes, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 194502 (2011).
 [11] T. T. Al-Housseiny, P. A. Tsai, and H. A. Stone, *Nat. Phys.* **8**, 747 (2012).
 [12] T. T. Al-Housseiny and H. A. Stone, *Phys. Fluids* **25**, 092102 (2013).
 [13] R. M. Wilson, *Phys. Today* **65**(10), 15 (2012).
 [14] H. Guo, D. C. Hong, and D. A. Kurtze, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1520 (1992).
 [15] H. Guo, D. C. Hong, and D. A. Kurtze, *Phys. Rev. E* **51**, 4469 (1995).
 [16] C. K. Chan and N. Y. Liang, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4381 (1997).
 [17] C. K. Chan, *Physica A* **288**, 315 (2000).
 [18] R. Krechetnikov and G. M. Homsy, *J. Fluid Mech.* **509**, 103 (2004).
 [19] J. Fernandez, R. Krechetnikov, and G. M. Homsy, *J. Fluid Mech.* **527**, 197 (2005).
 [20] F. M. Rocha and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **87**, 013017 (2013).
 [21] A. De Wit, K. Eckert, and S. Kalliadasis, *Chaos* **22**, 037101 (2012).
 [22] C. Almarcha, P. M. J. Trevelyan, P. Grosfils, and A. De Wit, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 044501 (2010).
 [23] M. Mishra, P. M. J. Trevelyan, C. Almarcha, and A. De Wit, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 204501 (2010).

- [24] L. A. Riolfo, Y. Nagatsu, S. Iwata, R. Maes, P. M. J. Trevelyan, and A. De Wit, *Phys. Rev. E* **85**, 015304(R) (2012).
- [25] L. A. Riolfo, J. Carballido-Landeira, C. O. Bounds, J. A. Pojman, S. Kalliadasis, and A. De Wit, *Chem. Phys. Lett.* **534**, 13 (2012).
- [26] A. R. White and T. Ward, *Chaos* **22**, 037114 (2012).
- [27] T. Podgorski, M. C. Sostarecz, S. Zorman, and A. Belmonte, *Phys. Rev. E* **76**, 016202 (2007).
- [28] A. He, J. S. Lowengrub, and A. Belmonte, *SIAM J. Appl. Math.* **72**, 842 (2012).
- [29] A. He, Ph.D. thesis, Penn State University (2011).
- [30] B. Saintyves, O. Dauchot, and E. Bouchaud, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 047801 (2013).
- [31] T. R. Powers, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1607 (2010).
- [32] Ou-Yang Zhong-can and W. Helfrich, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2486 (1987).
- [33] H. Gadélla and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **79**, 066312 (2009).

APÊNDICE D:

Elastic fingering in rotating Hele-Shaw flows

Elastic fingering in rotating Hele-Shaw flowsGabriel D. Carvalho,¹ Hermes Gadêlha,² and José A. Miranda^{1,*}¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil*²*Wolfson Centre for Mathematical Biology, Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford OX2 6GG, United Kingdom*

(Received 6 March 2014; published 21 May 2014)

The centrifugally driven viscous fingering problem arises when two immiscible fluids of different densities flow in a rotating Hele-Shaw cell. In this conventional setting an interplay between capillary and centrifugal forces makes the fluid-fluid interface unstable, leading to the formation of fingered structures that compete dynamically and reach different lengths. In this context, it is known that finger competition is very sensitive to changes in the viscosity contrast between the fluids. We study a variant of such a rotating flow problem where the fluids react and produce a gellike phase at their separating boundary. This interface is assumed to be elastic, presenting a curvature-dependent bending rigidity. A perturbative weakly nonlinear approach is used to investigate how the elastic nature of the interface affects finger competition events. Our results unveil a very different dynamic scenario, in which finger length variability is not regulated by the viscosity contrast, but rather determined by two controlling quantities: a characteristic radius and a rigidity fraction parameter. By properly tuning these quantities one can describe a whole range of finger competition behaviors even if the viscosity contrast is kept unchanged.

DOI: [10.1103/PhysRevE.89.053019](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.053019)

PACS number(s): 47.15.gp, 47.70.Fw, 47.54.-r, 47.20.Ma

I. INTRODUCTION

The traditional viscous fingering instability [1,2] is driven by the viscosity difference between fluids. More precisely, it manifests itself when a less viscous fluid pushes a more viscous one in the narrow gap separating parallel plates of a motionless Hele-Shaw cell. Under radial flow circumstances [3–9] an initially circular fluid-fluid interface deforms, and patterned structures presenting multiple fingertip splitting emerge.

An alternative form of fingering instability in Hele-Shaw geometry arises when there exists a difference in density between the fluids, and the cell is put in motion. This occurs when a fluid, surrounded by another of lower density, is located in a Hele-Shaw cell that rotates about an axis perpendicular to the cell plates. Centrifugal forces act upon the density difference between the fluids, and a morphological instability results. A great variety of patterned shapes is obtained in this rotating Hele-Shaw setup [10–18], leading to fingering structures that are very distinct from the ones detected in viscosity-driven Hele-Shaw flows.

In contrast to the viscosity-driven problem the most prominent pattern-forming mechanism in the density-driven, rotating Hele-Shaw case is not finger tip splitting, but the competition (or the finger length variability) among the interfacial fingers. Weakly nonlinear analysis [19] and fully nonlinear numerical simulations [13,20] have verified that the viscosity contrast A [dimensionless viscosity difference between the fluids, where $-1 \leq A \leq 1$ as defined in Eq. (2)] plays a crucial role in determining the resulting fingered structures, in the sense that finger competition dynamics changes significantly when the magnitude and sign of A are varied. It has been found that increasingly larger values of $A > 0$ ($A < 0$) lead to enhanced competition among outward- (inward-) pointing fingers. In addition, finger competition is significantly suppressed when $A \rightarrow 0$.

In this work we revisit the rotating Hele-Shaw cell problem in a different scenario: inspired by recent studies in viscosity-driven radial Hele-Shaw flows [21–24], we consider that the interface separating the fluids acts like an elastic membrane which has a curvature-dependent bending rigidity. The formation of a flexible gellike layer between the fluids is induced by a chemical reaction that occurs at the interface. In this framework, interfacial instabilities can be triggered by the own elastic nature of the fluid-fluid boundary. In Refs. [21–24] it has been shown that the existence of an elastic interface has a strong impact on the dynamics and morphology of the emerging interfacial patterns. In fact, the conventional branched, tip-splitting patterns observed in Refs. [3–9] are replaced by a variety of other interfacial forms, exhibiting mushroom-shaped structures and tentacle-like fingers. It is worth noting that a similar type of investigation focusing on the influence of the interface elasticity on pattern-forming phenomena under the centrifugally driven flow in rotating Hele-Shaw cells still needs to be performed. This is in fact the main purpose of our present work.

Here we are interested in examining the influence of the elastic interface on the most relevant dynamic features of the centrifugally driven fingering patterns. We focus our attention on investigating how elasticity effects interfere in the finger competition events that usually arise in rotating Hele-Shaw flows. The role of the viscosity contrast in determining finger competition behavior in the presence of an elastic interface is also discussed. To address these important issues we study both linear and weakly nonlinear stages of the dynamics. This is done by employing a second-order mode-coupling perturbative scheme [8,24] which offers useful analytical insights into the onset of pattern formation and fingering in this complex elastic interface system.

II. WEAKLY NONLINEAR EQUATIONS

Consider a Hele-Shaw cell of gap spacing b containing two immiscible, incompressible, viscous fluids (see Fig. 1).

*jme@df.ufpe.br

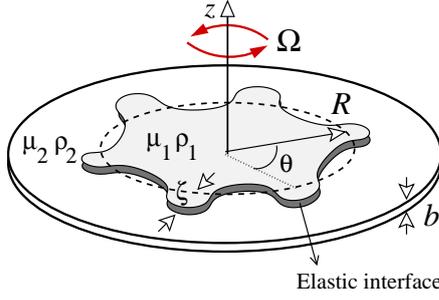


FIG. 1. (Color online) Perspective view of a rotating Hele-Shaw cell with an elastic interface separating fluids 1 and 2.

Denote the densities and viscosities of the inner and outer fluids, respectively as ρ_1, μ_1 and ρ_2, μ_2 . We focus on the centrifugally induced motion where $\rho_1 > \rho_2$ but allow the inner fluid to be either more or less viscous than the outer fluid. The cell rotates with constant angular velocity Ω about an axis perpendicular to the plates (z axis) and passing through the center of the cell. Due to a chemical reaction there exists a gellike interface separating the two fluids. As in Refs. [22–24] we treat the interface as an elastic membrane, presenting a curvature-dependent bending rigidity.

The perturbed fluid-fluid interface is described as $\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)$, where θ represents the azimuthal angle, and R is the radius of the initially circular fluid-fluid interface at $t = 0$. Here $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$ denotes the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$ and discrete wave numbers n . Our perturbative approach keeps terms up to the second order in ζ . In the Fourier expansion of ζ we include the $n = 0$ mode to maintain the area of the perturbed shape independent of the perturbation ζ . Mass conservation imposes that the zeroth mode is written in terms of the other modes as $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$.

For the effectively two-dimensional geometry of the Hele-Shaw cell, the flow velocity $\mathbf{v}_j = -\nabla\phi_j$, where ϕ_j represents the velocity potential in fluids $j = 1, 2$. The equation of motion of the interface is given by Darcy's law [1, 2], properly augmented by a centrifugally driven term [10, 11]

$$A \left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right) + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) = \frac{b^2}{12(\mu_1 + \mu_2)} \left[\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2 r^2 - \Delta p \right], \quad (1)$$

where the dimensionless parameter

$$A = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad (2)$$

is the viscosity contrast, p_j represents the pressure, and r denotes the radial distance from the axis of rotation. Additionally, we have that

$$\Delta p = (p_1 - p_2)|_{r=\mathcal{R}} - (p_1 - p_2)|_{r=R}, \quad (3)$$

where $(p_1 - p_2)|_{r=\mathcal{R}}$ denotes the pressure jump on the perturbed interface, while $(p_1 - p_2)|_{r=R}$ represents the pressure jump on the unperturbed interface.

To include the contributions coming from the elastic nature of the fluid-fluid interface, similarly to what was done in

Refs. [22–24], we consider a generalized Young-Laplace pressure boundary condition, which expresses the pressure jump across the perturbed fluid-fluid interface as

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)|_{r=\mathcal{R}} = & -\frac{1}{2}v'''\kappa^2\kappa_s^2 - v''(3\kappa\kappa_s^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\kappa_{ss}) \\ & - v'(\frac{1}{2}\kappa^4 + 3\kappa_s^2 + 2\kappa\kappa_{ss}) \\ & - v(\frac{1}{2}\kappa^3 + \kappa_{ss}), \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$v = v(\kappa) = v_0[Ce^{-\lambda^2\kappa^2} + 1 - C] \quad (5)$$

is the bending rigidity function, v_0 is the maximum rigidity that expresses the largest resistance to disturbances, and $0 \leq C < 1$ is the rigidity fraction, which measures the fraction of intramolecular bonds broken through surface deformation. Note that the constant rigidity limit is reached in Eq. (5) by setting $C = 0$. In Eq. (5) κ denotes the interface curvature in the plane of the cell, which in polar coordinates is given by [8]

$$\kappa = \frac{[r^2 + 2(\frac{\partial r}{\partial \theta})^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2}]}{[r^2 + (\frac{\partial r}{\partial \theta})^2]^{3/2}}, \quad (6)$$

and $\lambda > 0$ is a characteristic radius [22]. We can think of the quantity $1/\lambda$ as being a characteristic curvature beyond which $v(\kappa)$ has a substantial decrease. In Eq. (4) the primes indicate derivatives with respect to the curvature κ , while the subscripts of κ indicate derivatives with respect to the arc length s .

To obtain a mode-coupling differential equation for the evolution of the perturbation amplitudes, we adapt a weakly nonlinear approach originally developed to study the dynamics in motionless Hele-Shaw flows induced by injection [8] to the current rotating cell problem presenting an elastic fluid-fluid interface. First, we define Fourier expansions for the velocity potentials, which obey Laplace's equation $\nabla^2\phi_j = 0$. Then we express ϕ_j in terms of the perturbation amplitudes ζ_n by considering the kinematic boundary condition $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla\phi_2$, which refers to the continuity of the normal velocity across the interface. Substituting these relations, and the modified pressure jump condition Eq. (4) into Eq. (1), always keeping terms up to second order in ζ , and Fourier transforming, yields the *dimensionless* mode-coupling equation (for $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n + \sum_{m \neq 0} [F(n, m)\zeta_m\zeta_{n-m} + G(n, m)\dot{\zeta}_m\zeta_{n-m}], \quad (7)$$

where the overdot denotes total time derivative,

$$\Lambda(n) = |n| \left\{ 1 + \frac{B}{2}(n^2 - 1)[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)] \right\} \quad (8)$$

is the linear growth rate, and

$$B = \frac{v_0}{(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2 R^5} \quad (9)$$

measures the ratio of elastic to centrifugal forces,

$$A_1(C, \lambda) = Ce^{-\lambda^2}(-4\lambda^4 + 10\lambda^2 - 2) - 2(1 - C) \quad (10)$$

and

$$A_2(C, \lambda) = Ce^{-\lambda^2}(8\lambda^4 - 22\lambda^2 + 5) + 5(1 - C). \quad (11)$$

The second-order mode-coupling terms are given by

$$F(n, m) = |n| \left\{ \frac{1}{2} - B [Ce^{-\lambda^2}(B_1(n, m) + \lambda^2 B_2(n, m) + \lambda^4 B_3(n, m) + 2\lambda^6 B_4(n, m)) + (1 - C)B_1(n, m)] \right\} \quad (12)$$

and

$$G(n, m) = A|n|[1 - \text{sgn}(nm)] - 1, \quad (13)$$

where the sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. The expressions for the functions $B_1(n, m)$, $B_2(n, m)$, $B_3(n, m)$, and $B_4(n, m)$ are given in the Appendix. Note that in Eqs. (7)–(13) lengths are rescaled by R and time by R/U , where $U = [b^2 R(\rho_1 - \rho_2)\Omega^2]/[12(\mu_1 + \mu_2)]$ is a characteristic velocity. From this point on we use the dimensionless version of all the equations.

Equations (7)–(13) represent the mode-coupling equations of the elastic fingering instability problem in a rotating Hele-Shaw cell, considering that the interface has a curvature-dependent bending rigidity. This set of nonlinear equations allows one to investigate analytically how the important mechanism of finger competition respond to the interplay between centrifugal and elastic forces at the fluid-fluid boundary.

III. ELASTIC INTERFACE EFFECTS: LINEAR AND NONLINEAR REGIMES

A. Linear stage

For the sake of completeness, before discussing the inherently nonlinear effects related to the finger competition dynamics, we briefly discuss the linear part of Eq. (7), more specifically the linear growth rate $\Lambda(n)$. The first term in Eq. (8) is connected to the destabilizing centrifugal force, while the second term expresses the bending rigidity contribution. For a given n , in the limit of constant rigidity ($C = 0$) the quantity $[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)]$ is negative, and the bending forces tend to stabilize the interface. In this case, the parameter ν_0 acts like an effective surface tension, similarly to what one has in the usual rotating Hele-Shaw problem [10–18]. However, if $0 < C < 1$ the quantity $[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)]$ can become positive, and the effect of the curvature-dependent bending rigidity may lead to interface destabilization. In this work we focus on situations in which $-1 \leq A \leq 1$ and $0 < C \leq 0.5$ [we point out that $\Lambda(n)$ can be unbound if $C > 0.5$], so that bending forces are destabilizing.

We stress that the values we take for our parameters throughout this work are consistent with typical physical quantities used in real experiments in rotating Hele-Shaw cells [11,12,14,16] and with related experimental and theoretical studies involving the development of the elastic fingering instability in injection-driven radial flow geometry [21–23].

The typical destabilizing nature of the bending forces is expressed by Fig. 2, which plots the linear growth rate $\Lambda(n)$ as a function of the Fourier mode n , for $C = 0.1, 0.3$, and 0.5 , and $\lambda = 1$ (dotted curves) and 0.7 (dashed curves). We take

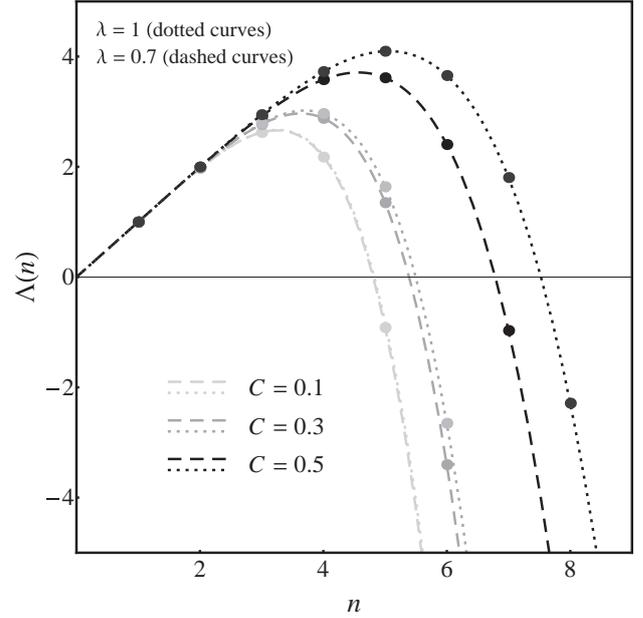


FIG. 2. Linear growth rate $\Lambda(n)$ as a function of mode n , for three values of C and two values of λ . Here $B = 2.5 \times 10^{-3}$.

$B = 2.5 \times 10^{-3}$. By inspecting Fig. 2 it is clear that, for a fixed value of λ , both the band of unstable modes and the mode of largest growth rate increase as C is increased. This is due to the fact that the bending rigidity function $\nu(\kappa)$ varies linearly with C . For a fixed C and variable λ we have regions in which the band of unstable modes and the mode of largest growth rate increase (see Fig. 2), or in which both decrease. This occurs because $\nu(\kappa)$ depends on λ as a Gaussian [Eq. (5)]. Finally, it is also evident that when $C \rightarrow 0$ the dotted and dashed curves tend to overlap, so that the width of the band of unstable modes tends to a minimal value.

B. Weakly nonlinear stage

In this section we use our mode-coupling approach to investigate the interface evolution at second order. We demonstrate the usefulness of our weakly nonlinear analysis in elucidating key aspects related to the finger competition behavior under the action of interfacial elastic effects. To simplify our discussion we rewrite the net perturbation in terms of cosine and sine modes

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta)], \quad (14)$$

where $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ and $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$ are real-valued. Without loss of generality we may choose the phase of the fundamental mode so that $a_n > 0$ and $b_n = 0$.

We focus on the effects of the interface elasticity on finger competition events. We follow Ref. [8] and consider finger length variability as a measure of the competition among fingers. Within our approach the finger competition mechanism can be described by the influence of a fundamental mode n , assuming n is even, on the growth of its subharmonic mode $n/2$. By using Eqs. (7)–(13) the equations of motion for

the subharmonic mode can be written as

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + \mathcal{C}(n)a_n\}a_{n/2}, \quad (15)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - \mathcal{C}(n)a_n\}b_{n/2}, \quad (16)$$

where

$$\mathcal{C}(n) = \frac{1}{2} \left\{ \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2)G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] + \left[F\left(\frac{n}{2}, n\right) + \lambda(n)G\left(\frac{n}{2}, n\right) \right] \right\} \quad (17)$$

is the finger competition function. Observing Eqs. (15) and (16), and recalling that $a_n > 0$, we verify that $\mathcal{C}(n) > 0$ increases the growth of the cosine subharmonic $a_{n/2}$, while inhibiting growth of its sine subharmonic $b_{n/2}$. The result is an increased variability among the lengths of fingers of fluid 1 pushing the less dense fluid 2. This effect describes enhanced competition of the outward-pointing fingers of fluid 1. Sine modes $b_{n/2}$ would vary the lengths of fingers of fluid 2 penetrating into fluid 1, but it is clear from Eq. (16) that their growth is suppressed if $\mathcal{C}(n) > 0$.

Reversing the sign of $\mathcal{C}(n)$ would exactly reverse these conclusions, such that modes $b_{n/2}$ would be favored over modes $a_{n/2}$. Therefore, $\mathcal{C}(n) < 0$ would indicate increased competition among the inward moving fingers of fluid 2. Regardless of its sign, the magnitude of the function $\mathcal{C}(n)$ as given by Eq. (17) measures the strength of the competition: increasingly larger values of $\mathcal{C}(n)$ lead to enhanced finger competition.

To examine the influence of the elastic interface effects on finger competition at second order, in Fig. 3 we plot the finger competition function $\mathcal{C}(n)$ [as given by Eq. (17)] in terms of λ , for three characteristic values of the viscosity contrast A , $B = 2.5 \times 10^{-3}$, and $C = 0.5$. As in Ref. [19], to observe growth of the fundamental mode and also to allow growth of its

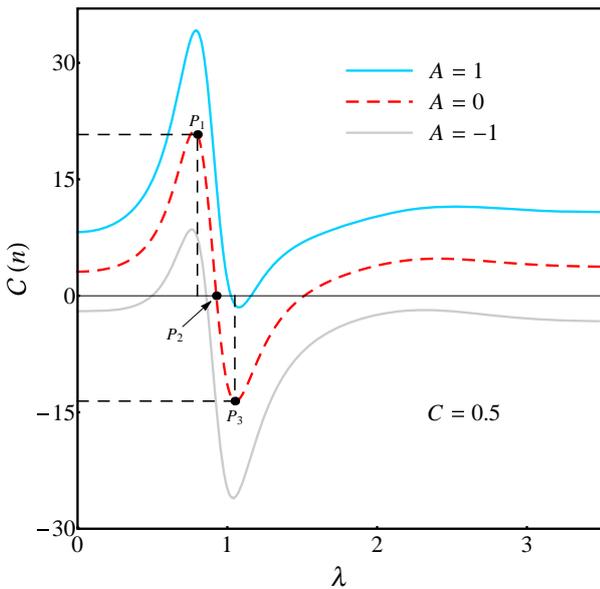


FIG. 3. (Color online) Finger competition function $\mathcal{C}(n)$ plotted in terms of λ , for $B = 2.5 \times 10^{-3}$, $C = 0.5$, and three values of $A = 1, 0$, and -1 .

subharmonic, we carry out our analysis considering that mode n obeys the condition $\Lambda(n) = 0$. The most interesting feature revealed by Fig. 3 is the fact that, no matter what value of A one considers, for a given fixed value of the viscosity contrast the function $\mathcal{C}(n)$ can be positive, negative, or zero as one varies the magnitude of λ . This is in striking contrast to what is observed in the conventional rotating Hele-Shaw problem (for which the interface is not elastic) [10–18], where the finger competition function can change only if the viscosity contrast is varied. This means that under the consideration of an elastic interface the parameters λ and C , and *not* the viscosity contrast A , determine the finger competition behavior. For instance, in Fig. 3 when $A = 0$ one can see situations in which we have (1) enhanced competition among outward-pointing fingers [see point P_1 where $\mathcal{C}(n)$ is large and positive]; (2) restrained competition of both outward- and inward-pointing fingers [see point P_2 where $\mathcal{C}(n)$ is zero]; and (3) enhanced competition among inward-pointing fingers [see point P_3 where $\mathcal{C}(n)$ is large and negative]. In fact, this is true for all values of the viscosity contrast A . Notice that the behaviors for $A = 1$ and $A = -1$ are also illustrated in Fig. 3. It is worth pointing out that for a given value of A in Fig. 3, the finger competition function $\mathcal{C}(n)$ does not change sign if larger values of λ are considered.

In order to verify the predictions indicated in the discussion of Fig. 3, in Fig. 4 we plot the weakly nonlinear evolution of the interfaces for $A = 0$ that correspond to the points P_1 where $\lambda = 0.8$ [Fig. 4(a)], P_2 where $\lambda = 0.926$ [Fig. 4(b)], and P_3 where $\lambda = 1.05$ [Fig. 4(c)]. In Fig. 4 we take the initial perturbation amplitudes as $a_n(0) = 1/400$ and $a_{n/2}(0) = b_{n/2}(0) = 1/800$. In addition, as in Fig. 3 $B = 2.5 \times 10^{-3}$, and $C = 0.5$. All patterns shown in Fig. 4 are plotted for $0 \leq t \leq 1.25$, in equal time intervals $\Delta t = 0.125$.

By inspecting Figs. 4(a)–(c) we observe the evolution of initially nearly circular shapes that deform and develop fingers as time progresses. It is evident that in Fig. 4(a) one notices the enhanced competition among outward-pointing fingers. On the other hand, in Fig. 4(b) one clearly observes that the lengths of the outward-moving fingers are not that different. This is also true for the inward-moving fingers, which have similar sizes. Finally, by examining Fig. 4(c) one sees that there is greater finger length variability among the inward-pointing fingers. All these observations are in line with the predictions extracted from Fig. 3. We stress that we have verified similar kind of behaviors for any other values of the viscosity contrast A .

To illustrate these finger competition features in a more quantitative fashion, in Fig. 5 we take the same physical parameters used in Fig. 4 and plot the dimensionless radial coordinate \mathcal{R} of the finger tips for each inward- and outward-pointing fingers, in terms of the polar angle θ at time $t = t_f$. The finger competition features we have discussed above, by visually inspecting the patterns shown in Fig. 4, are fully confirmed by Fig. 5: even though the viscosity contrast is constant ($A = 0$), by changing the value of λ we do recover the cases in which one obtains enhanced competition among outward fingers [Fig. 5(a)], suppressed competition of both inward and outward fingers [Fig. 5(b)], and favored competition among inward fingers [Fig. 5(c)]. This indicates that, in the presence of an elastic interface, the competition among the emerging fingering structures is primarily determined by the parameters λ and C , and not by the viscosity contrast.

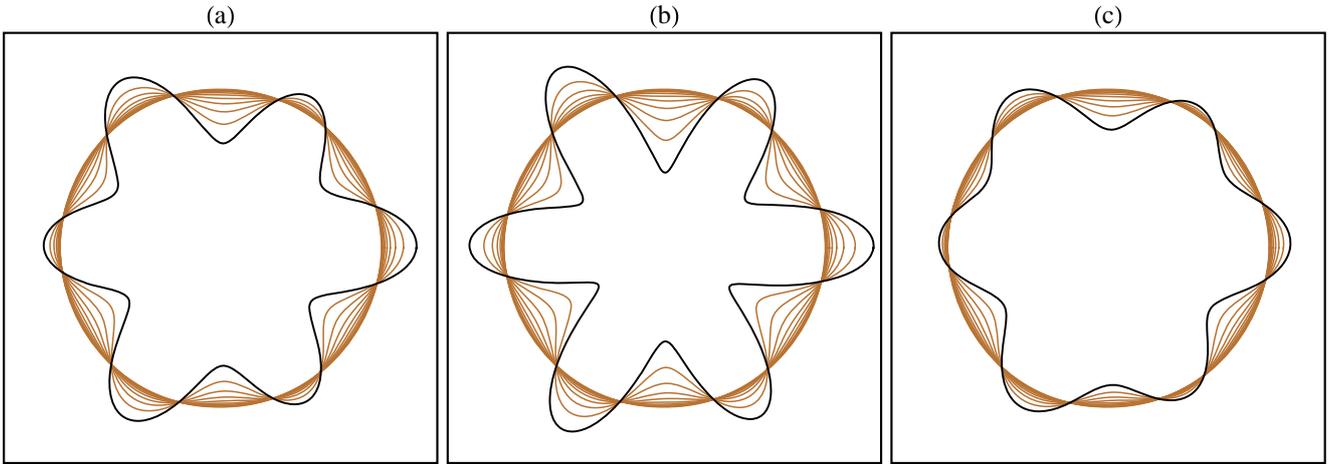


FIG. 4. (Color online) Snapshots of the evolving interface for the interaction of the fundamental mode $n = 6$ and its subharmonic mode $n = 3$ for the situations corresponding to points P_1 (a) $\lambda = 0.8$, P_2 (b) $\lambda = 0.926$, and P_3 (c) $\lambda = 1.05$ that have been indicated in Fig. 3 for $A = 0$. The interfaces are plotted in intervals of $t_f/10$, where $t_f = 1.25$ is the final time. The darker interfaces correspond to $t = t_f$.

We proceed by investigating the behavior of the finger competition function $\mathcal{C}(n)$ when we consider a fixed value of A and vary the magnitude of the rigidity fraction C . Without loss of generality in Fig. 6 we take $A = 0$ and depict how $\mathcal{C}(n)$ responds to variations in λ , when C decreases from 0.5 to 0.1. As in Fig. 3, we consider that $B = 2.5 \times 10^{-3}$. From Fig. 6 we see that when $C = 0.5$, one reproduces the $\mathcal{C}(n)$ curve already shown in Fig. 3 for $A = 0$: initially the competition function is positive, reaches a maximum value, and then starts to decrease. Eventually, $\mathcal{C}(n)$ crosses zero, begins to assume negative values, and reaches a minimum. After that, it crosses zero again and becomes positive for larger values of λ . When $C = 0.4$ a similar type of general behavior is detected, with $\mathcal{C}(n)$ assuming positive, zero, and negative values. However, if C keeps decreasing, for instance, when $C = 0.3$ or $C = 0.2$, the function $\mathcal{C}(n)$ varies in such a way that it still oscillates but assumes just positive values as λ is changed. Finally, for smaller values of C , say, for $C = 0.1$ (dashed horizontal line), the competition function is basically insensitive to variations

in λ . In the limit $C \rightarrow 0$ we have verified that $\mathcal{C}(n)$ also does not depend on λ , and we recover something similar to the conventional rotating Hele-Shaw case [10–18] in which the constant bending rigidity works like an effective surface tension, and where $\mathcal{C}(n)$ varies only if A is changed. We emphasize that all the findings of Fig. 6 (obtained for $A = 0$) are quite general and can be reproduced for any allowed value of the viscosity contrast A .

Other useful information can be extracted from Fig. 7 that shows the variation of the finger competition function $\mathcal{C}(n)$ as the viscosity contrast is varied ($-1 \leq A \leq 1$), for $C = 0.5$ and the three values of λ that have been used to plot Figs. 4 and 5: 0.8, 0.926, and 1.05. As before we take $B = 2.5 \times 10^{-3}$. Despite the dominant, nonmonotonic response of λ while determining the finger competition, as clearly shown in Fig. 3, the monotonicity and linearity of $\mathcal{C}(n)$ with the viscosity contrast A are still preserved. This linearity of the finger competition with the viscosity contrast is reminiscent from the classical rotating Hele-Shaw system for a nonelastic in-

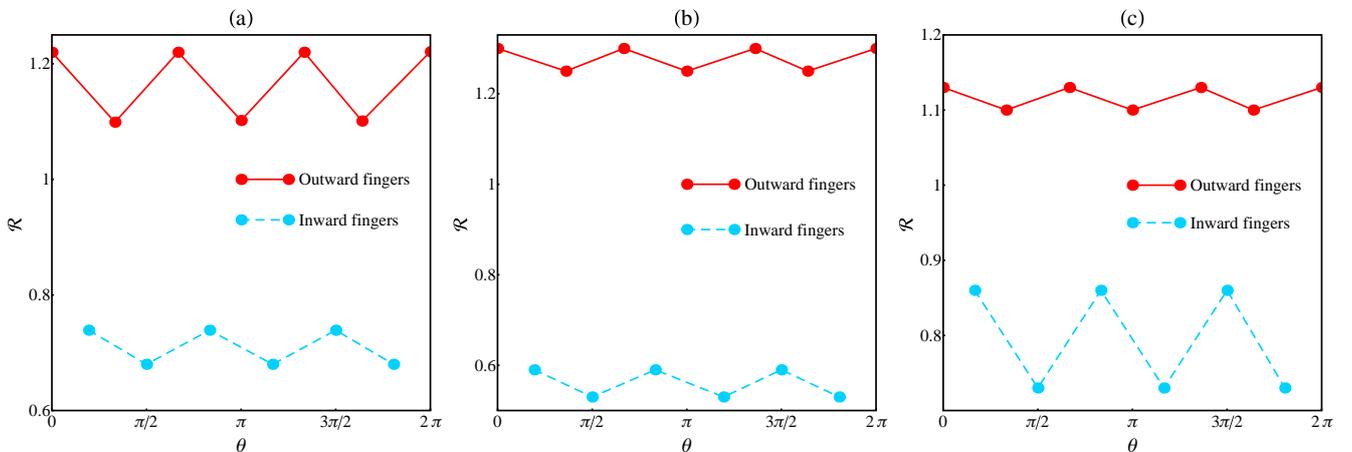


FIG. 5. (Color online) Dimensionless radial coordinate \mathcal{R} of the finger tips for each inward- and outward-pointing fingers, as a function of the polar angle θ , when (a) $\lambda = 0.8$, (b) $\lambda = 0.9286$, and (c) $\lambda = 1.05$. These data are taken from the corresponding patterns plotted in Figs. 4(a)–(c) at $t = t_f$, and $A = 0$.

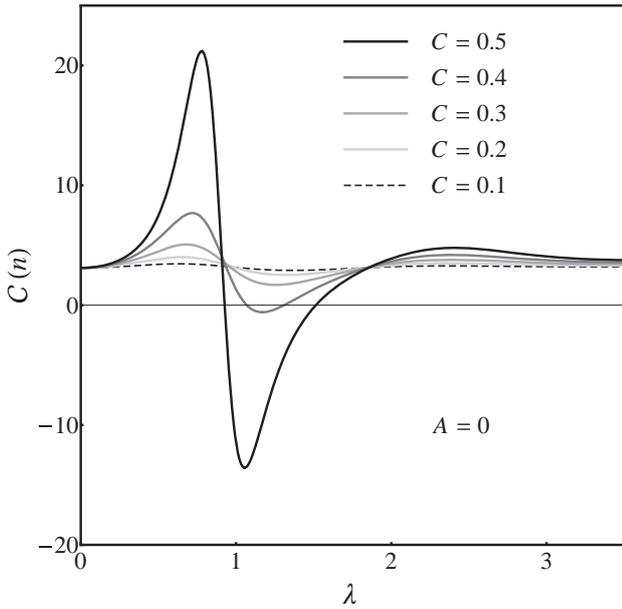


FIG. 6. Finger competition function $C(n)$ plotted in terms of λ , for $B = 2.5 \times 10^{-3}$, $A = 0$, and five values of C .

terface [19]. Interestingly, the viscosity contrast influences the finger competition in an almost identical manner, regardless of the values of λ . Note that the slope of the lines for different λ in Fig. 7 shows minor variations. This further demonstrates that the finger competition is governed by a partial decoupling between elastic and viscosity parameters, characterized by a superposition of elastic dominant nonmonotonic effects with the linear monotonicity arising from viscosity contribution. Furthermore, the region delimited by the curves $\lambda = 0.8$ and $\lambda = 1.05$ provides a map in the parameter space (λ, A) for all

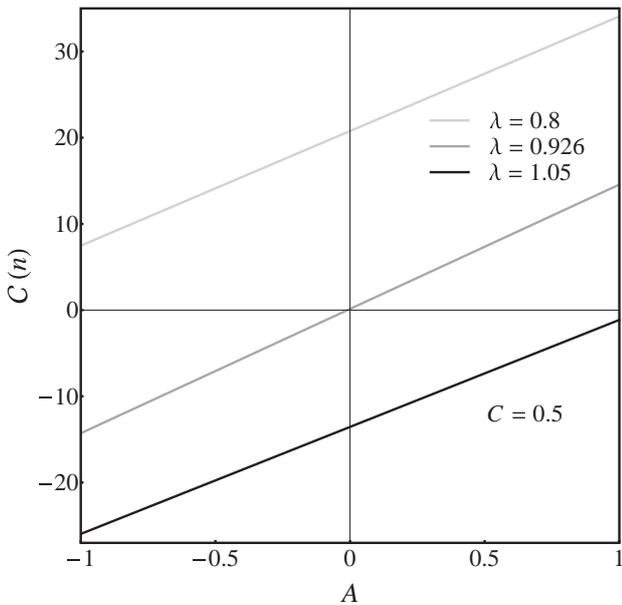


FIG. 7. Finger competition function $C(n)$ as a function of the viscosity contrast A , for $C = 0.5$, and three different values of λ . These are the values of λ utilized to get the interfacial evolutions presented in Figs. 4 and 5.

possible finger competition morphologies, recalling that the values of λ that maximize or minimize $C(n)$ do not depend on the viscosity contrast A , as shown in Fig. 3. Hence, the viscosity contrast A may be tuned to exacerbate, for instance, a desired competition behavior imposed by λ . Finally, C acts only to reduce the area between the curves $\lambda = 0.8$ and $\lambda = 1.05$ in Fig. 7, as deduced from Fig. 6.

After contemplating the findings of Figs. 5–7, we close this section by revisiting Fig. 4, and discussing it a bit further. One noteworthy feature of Fig. 4 is the rapid growth of the absolute value of the curvature for both inward- and outward-pointing fingers, together with the lack of symmetry between the curvature [as given by Eq. (6)] of inward- and outward-moving fingers for all values of λ . This is a direct consequence of the strong influence of the bending weakening effect while exponentially reducing the interfacial bending rigidity, which causes $\nu(\kappa)$ to reach its minimum value rapidly with $|\kappa|$, given the κ^2 dependence in Eq. (5). The variability in length between fingers is a result of a “tug of war” between outward- and inward-pointing fingers, Eqs. (15) and (16). The increased variability on the radial finger length depends on how rapidly a given finger (outward or inward) increases its mode amplitude, and consequently its local curvature, as expressed by Eqs. (15) and (16). In other words, outward- (inward-) growing fingers will compete if their curvature increases more rapidly than the inward- (outward-) moving finger.

Similarly, when the rate of growth of both inward and outward fingers are comparable, the finger competition is absent [see Eqs. (15) and (16)]. Nevertheless, the rate of bending rigidity decay is regulated by the characteristic curvature $1/\lambda$. This weakening effect on the bending rigidity tends to increase the curvature of a growing finger due to the locally reduced elastic bending resistance. When $\lambda = 0.8$ in Fig. 4(a), the outward fingers reach the minimum $\nu(\kappa)$ more rapidly than the inward fingers, since the initially circular shape of the interface forces inward fingers to switch the sign of the curvature before growing considerably, resulting in this way in a competition between outward-pointing fingers. When λ is increased to 0.926 in Fig. 4(b), a smaller magnitude of the absolute curvature now has access to lower bending rigidity values, favoring an equal rate of finger growth for both outward and inward fingers, and thus inducing zero finger competition phenomenon. Moreover, notice that the bending weakening effect does not privilege a particular sign of curvature, having therefore an equal effect for both outward- and inward-pointing fingers for the same magnitude of curvature. When the characteristic curvature is reduced further in Fig. 4(c), inward-moving fingers have faster access to the low bending rigidity values, resulting in an inward finger length variation, while considerably reducing the length of outward-moving fingers.

Finally, when λ is increased beyond 1.05, the bending weakening effect saturates at its minimum value very rapidly throughout the elastic interface, but for a small magnitude of curvature. In this case, the finger competition is solely governed by ν_0 , and the varying bending rigidity interface behaves as an interface with a constant bending rigidity [see Fig. 3]. In the latter, the viscosity contrast reemerges as the dominant parameter for the finger competition behavior, as expected from the classical rotating Hele-Shaw case [10–18].

IV. CONCLUDING REMARKS

Traditional studies of fingering instabilities in rotating Hele-Shaw cells have focused on the interplay of capillary, centrifugal, and viscous effects in dictating pattern formation behavior. In this framework, it has been shown that the viscosity contrast plays a major role in determining the finger competition dynamics of the system. If the viscosity contrast is positive (negative) the competition, or equivalently the finger length variability, among outward- (inward-) pointing fingers is increased. On the other hand, if the viscosity contrast tends to zero finger competition is restrained, so that both inward and outward pointing fingers have similar sizes.

Our current investigation, on the other hand, is concerned with a variant of the conventional rotating Hele-Shaw problem. Here we considered the situation in which the fluid-fluid interface is elastic and presents a curvature-dependent bending rigidity. In this new scenario, elastic, centrifugal, and viscous forces act to dictate the ultimate behavior of the emergent fingering structures. Through a second-order mode-coupling approach, we have derived the appropriate dimensionless form of the governing equations, containing four relevant parameters: a viscosity contrast A , a coefficient B that measures the relative strength between elastic and centrifugal effects, a rigidity fraction C , and a characteristic radius λ . In contrast to the usual rotating Hele-Shaw problem, our analytical results show a strong dependency of the finger competition dynamics on the parameters C and λ . The general observation is that, even if A and B are kept constant, by properly tuning the values of C and λ , one can reproduce a whole range of finger competition behaviors (i.e., enhanced competition among inward and outward fingers, or situations of restrained finger variability).

ACKNOWLEDGMENTS

J.A.M. and G.D.C. thank CNPq for financial support through the program “Instituto Nacional de Ciência e

Tecnologia de Fluidos Complexos (INCT-FCx),” and FACEPE through PRONEM project No. APQ-1415-1.05/10. H.G. acknowledges support from an Oxford University Hooke Fellowship and is supported by Award KUK-C1-013-04 from King Abdullah University of Science and Technology.

APPENDIX: FUNCTIONS APPEARING IN THE MODE-COUPLING TERM $F(n,m)$

This Appendix presents the expressions for the functions $B_1(n,m)$, $B_2(n,m)$, $B_3(n,m)$, and $B_4(n,m)$, which appear in Eq. (12):

$$B_1(n,m) = -3 + \frac{15}{4}m(n-m) + 10(n-m)^2 - \frac{9}{2}m^2(n-m)^2 - 6m(n-m)^3 - 4(n-m)^4, \quad (\text{A1})$$

$$B_2(n,m) = \frac{39}{2} - 30m(n-m) - 71(n-m)^2 + \frac{81}{2}m^2(n-m)^2 + 54m(n-m)^3 + 32(n-m)^4 - 12m^2(n-m)^4 - 12m^3(n-m)^3, \quad (\text{A2})$$

$$B_3(n,m) = -14 + 25m(n-m) + 54(n-m)^2 - 36m^2(n-m)^2 - 48m(n-m)^3 - 26(n-m)^4 + 18m^2(n-m)^4 + 18m^3(n-m)^3, \quad (\text{A3})$$

and

$$B_4(n,m) = 1 - 2m(n-m) - 4(n-m)^2 + 3m^2(n-m)^2 + 4m(n-m)^3 + 2(n-m)^4 - 2m^2(n-m)^4 - 2m^3(n-m)^3. \quad (\text{A4})$$

-
- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. London A* **245**, 312 (1958).
 - [2] G. M. Homsy, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987); K. V. McCloud and J. V. Maher, *Phys. Rep.* **260**, 139 (1995).
 - [3] L. Paterson, *J. Fluid Mech.* **113**, 513 (1981).
 - [4] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim, and Y. Couder, *Phys. Fluids A* **1**, 224 (1989).
 - [5] J.-D. Chen, *J. Fluid Mech.* **201**, 223 (1989); *Exp. Fluids* **5**, 363 (1987).
 - [6] S. S. S. Cardoso and A. W. Woods, *J. Fluid Mech.* **289**, 351 (1995).
 - [7] O. Praud and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **72**, 011406 (2005).
 - [8] J. A. Miranda and M. Widom, *Physica D* **120**, 315 (1998).
 - [9] S. W. Li, J. S. Lowengrub, and P. H. Leo, *J. Comput. Phys.* **225**, 554 (2007).
 - [10] L. W. Schwartz, *Phys. Fluids A* **1**, 167 (1989).
 - [11] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt, and J. Ortín, *Phys. Rev. E* **54**, 6260 (1996).
 - [12] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Fluids* **16**, 908 (2004).
 - [13] J. A. Miranda and E. Alvarez-Lacalle, *Phys. Rev. E* **72**, 026306 (2005).
 - [14] R. Folch, E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Rev. E* **80**, 056305 (2009).
 - [15] C. Y. Chen, Y. S. Huang, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **84**, 046302 (2011).
 - [16] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Rev. E* **74**, 025302(R) (2006).
 - [17] J. Casademunt, *Chaos* **14**, 809 (2004).
 - [18] J. Casademunt, *Eur. Phys. J. Plus* **126**, 94 (2011), and references therein.

- [19] H. Gadêlha and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **70**, 066308 (2004).
- [20] C.-Y. Chen, C.-H. Chen, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **73**, 046306 (2006).
- [21] T. Podgorski, M. C. Sostarecz, S. Zorman, and A. Belmonte, *Phys. Rev. E* **76**, 016202 (2007).
- [22] A. He, J. S. Lowengrub, and A. Belmonte, *SIAM J. Appl. Math.* **72**, 842 (2012).
- [23] A. He, Ph.D. thesis, Penn State University, 2011.
- [24] G. D. Carvalho, J. A. Miranda, and H. Gadêlha, *Phys. Rev. E* **88**, 053006 (2013).

APÊNDICE E:

**Stationary patterns in centrifugally driven
interfacial elastic fingering**

Stationary patterns in centrifugally driven interfacial elastic fingering

Gabriel D. Carvalho,¹ Hermes Gadêlha,² and José A. Miranda^{1,*}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil*

²*Wolfson Centre for Mathematical Biology, Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford OX2 6GG, United Kingdom*

(Received 9 October 2014; published 10 December 2014)

A vortex sheet formalism is used to search for equilibrium shapes in the centrifugally driven interfacial elastic fingering problem. We study the development of interfacial instabilities when a viscous fluid surrounded by another of smaller density flows in the confined environment of a rotating Hele-Shaw cell. The peculiarity of the situation is associated to the fact that, due to a chemical reaction, the two-fluid boundary becomes an elastic layer. The interplay between centrifugal and elastic forces leads to the formation of a rich variety of stationary shapes. Visually striking equilibrium morphologies are obtained from the numerical solution of a nonlinear differential equation for the interface curvature (the shape equation), determined by a zero vorticity condition. Classification of the various families of shapes is made via two dimensionless parameters: an effective bending rigidity (ratio of elastic to centrifugal effects) and a geometrical radius of gyration.

DOI: [10.1103/PhysRevE.90.063009](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.063009)

PACS number(s): 47.15.gp, 46.70.Hg, 47.54.-r, 46.32.+x

I. INTRODUCTION

The conventional viscous fingering instability occurs when a viscous fluid displaces a more viscous one in the narrow gap separating the two parallel glass plates of a Hele-Shaw cell [1,2]. Under these circumstances, the two-fluid interface deforms, leading to the formation of long smooth fingers in channel shaped, rectangular Hele-Shaw cells [1]. Fingerlike interfacial structures that tend to split at their tips can also be produced, creating characteristic multiply branched patterns in the radial Hele-Shaw flow setup [3]. In both geometries this interfacial, viscosity-driven instability is regulated by a dynamic competition process between surface tension and viscous forces or pressure gradients. Note that the reverse flow process (more viscous fluid pushing a less viscous one), as well as flow with viscosity-matched fluids are stable.

Recently, another type of fingering instability that also occurs in the confined environment of a Hele-Shaw cell (the so-called elastic fingering instability) has attracted the attention of a growing number of researchers. The elastic instability can arise when the more viscous fluid is replaced by an elastic material (bulk elastic fingering) [4–6], or when the fluids are Newtonian, but their own fluid-fluid interface presents elastic properties (interfacial elastic fingering) [7–11].

The experiments performed in Ref. [4] consider the development of bulk elastic fingering when a fluid is injected against a purely elastic gel in a radial Hele-Shaw cell. It has been observed that the cavity containing the fluid first dilates until, at a given critical pressure, fingerlike protrusions of the invading fluid penetrate the elastic gel. This leads to the formation of a peculiar pattern, where the fingers inflate, creating balloon-shaped extensions. These patterns are very different from the highly branched interfacial finger shapes obtained in the usual viscous fingering case [2,3]. Unlike the common viscosity-driven hydrodynamic situation, the bulk elastic fingering phenomenon is reversible, so that fingers disappear, and the initial fluid bubble is recovered,

when pressure is decreased. Moreover, it has been found that the effects of interfacial tension between the injected fluid and the gel are unimportant, so that the occurrence of the bulk elastic instability lacks dependence on interfacial forces. These experimental findings have been supported by analytical calculations and numerical simulations of the system [5].

A sort of rectangular geometry analog of the radial flow situation examined in Refs. [4,5] has been investigated in Ref. [6], where fingering is driven by a transverse displacement of an elastic layer under tension. This process is similar to the one that takes place during lifting Hele-Shaw cell flows [12,13], and in probe-tack adhesion tests [14]. In the transverse displacement case [6], swelled fingers that resemble those detected in [4] are observed, and the elastic instability is also of reversible nature.

An equally interesting but different type of system is associated to the development of the interfacial elastic instability [7–11]. This fingering phenomenon has been observed in a series of suggestive experiments performed by Podgorski *et al.* [7]. Their experiments used two miscible fluids of equal viscosities flowing in a radial Hele-Shaw cell. The unconventional nature of the system relies on the fact that, when brought into contact, a chemical reaction occurs, and the fluid-fluid interface becomes elastic. The result is a system constituted by two Newtonian fluids (like in the traditional viscous fingering case), but now separated by an elastic contact boundary. The existence of a localized elastic interface leads to the uprising of quite unexpected effects: first, it has been verified that even under zero viscosity difference, the interface may become unstable, resulting in a variety of interfacial patterns that are completely distinct from the ones commonly detected in usual viscous fingering experiments [2,3]. The new patterned morphologies vary from mushroom-shaped fingered structures to quite intricate shapes containing tentaclelike fingers. In addition, this reactive interface system possesses an amazing asymmetry: despite the fact that the reacting fluids have the same viscosity, different patterns are obtained depending of which fluid is injected into which (i.e., whether reactant fluid 1 is injected into reactant fluid 2, or vice versa). As correctly speculated by the authors of Ref. [7], the work carried out by De Wit's group [15–17] have shown that such

*jme@df.ufpe.br

asymmetry is due to the fact that the two reactants have different diffusion coefficients.

The appealing experimental results on the development of the interfacial elastic fingering instability reported in [7] motivated additional work on this topic, now addressing the problem theoretically [8–11]. In Refs. [8,9] He and collaborators proposed a theoretical model that tried to mimic the reactive miscible system examined in [7]: they considered that the two fluids are immiscible, but that the interface separating them was a thin elastic membrane, presenting a curvature-dependent bending rigidity. The interfacial elastic layer would prevent further mixing, so that miscibility could have a negligible role in determining the fingering instability. In this context, their linear stability results have been able to account for the fact that the interface can become unstable even if the fluids have the same viscosity, consistently with experimental findings [7]. Subsequently, a weakly nonlinear analysis of the system showed that nonlinear effects play a crucial role to determine the shape of the pattern-forming structures [10]. In particular, it has been verified that the appearance of either narrow or wide fingers is regulated by an interfacial rigidity fraction parameter.

More recently, we have examined the unfolding of the interfacial elastic fingering instability in another variant of the classic injection-driven viscous fingering problem [11]. Namely, we have studied the influence of the elastic interface on the rotating Hele-Shaw cell problem [18–25]. In this setting, a fluid surrounded by another of lower density is located in a Hele-Shaw cell that rotates about an axis perpendicular to the cell plates. While the classic viscous fingering instability is induced by the viscosity difference between the fluids, the centrifugally driven instability is triggered by the difference between the fluids' densities. In Ref. [11] we assumed that the rotating fluids react, producing an elastic interface at their separating boundary. As in Refs. [8–10] we considered that the elastic interface had a curvature-dependent bending rigidity. In this scenario, we have demonstrated that the most important pattern forming mechanism is finger competition rather than finger tip splitting. More importantly, we have shown that the finger competition events are significantly affected by the action of the elastic interface.

One out of the ordinary feature of the rotating Hele-Shaw problem is that it allows the establishment of stationary interfacial pattern solutions. In contrast, the injection-driven radial Hele-Shaw problem does not yield steady-state shape solutions [2,3]. In the conventional rotating Hele-Shaw arrangement (i.e., without an elastic interface) [21,22] it has been found that the balance between surface tension (stabilizing) and centrifugal forces (destabilizing) at the fluid-fluid interface results in the formation of neat stationary shapes. These nonzero surface tension, static patterned structures (see Fig. 1) present fingers that eventually assume a teardrop-like shape, and tend to be detached from the main body of the inner rotating fluid through the occurrence of pinch-off episodes. Amazingly enough, the interfacial stationary shapes of this hydrodynamic problem coincide with the equilibrium shapes assumed by closed elastic wires under pressure in the plane [26,27]. These shapes are precisely the ones related to the classic problem of Euler's elastica [28–31] associated with the determination of the shape of slender bending rods

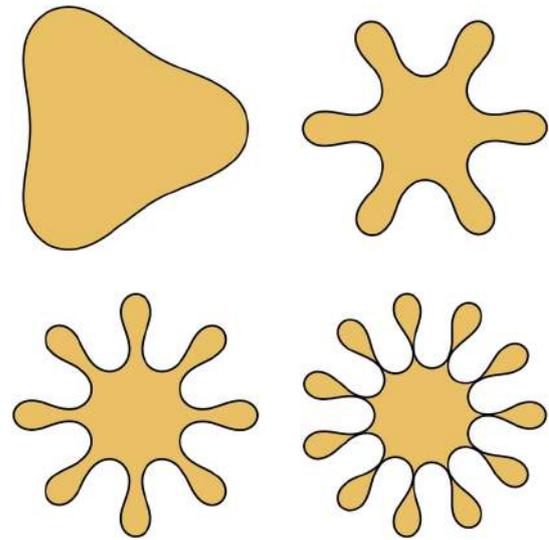


FIG. 1. (Color online) Typical stationary shapes that occur during the conventional rotating Hele-Shaw problem [21,22] (i.e., in the absence of an elastic interface). In this case, capillary and centrifugal forces equally balance at the two-fluid interface. Increasingly larger centrifugal driving results in patterns containing more fingers, that eventually tend to pinch off. The same class of patterns appear in various other contexts [26–34].

that minimize the elastic energy under certain constraints. It is worthwhile to note that the very same type of steady patterns (as the ones depicted in Fig. 1) also arise in various other systems including cylindrical fluid membranes [32], two-dimensional vesicles [33], and in softly constrained films [34]. Other distinguishing wire shapes are revealed by studies that examine the crumpling and folding dynamics of elastic rods confined in both motionless [35,36], and rotating [37,38] Hele-Shaw cells.

Motivated by the fact that the stationary patterns produced by the hydrodynamic rotating Hele-Shaw problem without an elastic interface [21,22] and those obtained by several mechanics-related elasticalike problems [26–34] are identical, and that there is a current interest in addressing the conformational behavior of confined elastic rods under rotation [37,38], we decided to pursue the research topic addressed in this work. Here we study the development of the interfacial elastic fingering problem in a rotating Hele-Shaw cell, now focusing on the determination of stationary interfacial shapes. As in [7–11] we consider that the interface separating the fluids acts like an elastic membrane, but now assume a simpler model in which the two-fluid boundary has a constant bending rigidity. Instead of using the variational methods largely employed in Refs. [26–34,39], our stationary shapes are obtained by the vortex sheet approach proposed in [21]. We show that the existence of an elastic interface has a strong impact on the possible morphologies of the emerging static interfacial patterns, so that several families of shapes result by varying a dimensionless effective rigidity parameter and the radius of gyration. As we will see, the resulting stationary elastic interface patterns assume a rich variety of shapes, and are very different from the typical elasticalike structures illustrated in Fig. 1.

II. VORTEX SHEET APPROACH AND THE SHAPE EQUATION

Most of the investigations that seek stationary shape solutions for flexible, inextensible pressurized wires in the plane (elasticlike problems) employ a variational method [26–34,39]. In short, one first writes down an energy functional for the system of interest, taking into account possible constraints related to length or area conservation (Lagrange multipliers of the problem). Then, this functional is properly minimized by utilizing the Euler-Lagrange equation, leading to a nonlinear differential equation for the wire curvature (hereafter referred to as the “shape equation”) whose solution results in the possible equilibrium shapes assumed by the flat wire. Physically, the shape equation represents the balance of the forces acting on the wire. As one can find out from Refs. [26–34,39–41], the derivation of the shape equation through this variational procedure is not exactly straightforward.

Here, we tackle the centrifugally driven, interfacial elastic fingering problem by using the vortex sheet representation for Hele-Shaw flows [21,22]. This formalism explores the jump in the tangential component of the fluid velocity as one crosses the fluid-fluid interface. As we will verify below, the vortex sheet approach offers a particularly simple method to obtain the shape equation, allowing one to probe the morphology of the stationary pattern-forming structures.

We begin by briefly describing our physical system. Consider a Hele-Shaw cell of gap spacing b containing two immiscible, incompressible, Newtonian viscous fluids (Fig. 2). Inside the cell an initially circular droplet (radius R) of the more dense fluid 2 is surrounded by an outer fluid 1. The densities and viscosities of the fluids are denoted by ρ_j and η_j , respectively (where $j = 1,2$). The cell rotates with constant angular velocity Ω about an axis perpendicular to the plates (z axis), and passing through its center. As in Refs. [8–11] we assume that a chemical reaction occurs when the fluids are brought into contact, creating a gel-like interface. In this situation, surface-tension effects can be neglected. We treat the interface as an elastic membrane, presenting a constant bending rigidity ν_0 . The physics of the problem is fairly simple and involves the competition between a destabilizing centrifugal force and a stabilizing elastic force that act to bend the elastic fluid-fluid interface in opposite directions. It is precisely the balance between these two antagonistic effects

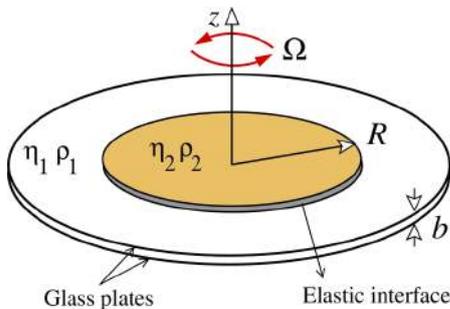


FIG. 2. (Color online) Schematic representation of a rotating Hele-Shaw cell, where the fluid-fluid boundary is an elastic layer. We consider that $\rho_2 > \rho_1$.

that will produce the intricate interfacial patterns unveiled by our current study.

The basic hydrodynamic equation of the system expresses the gap-averaged, effectively two-dimensional velocity field given by Darcy’s law, augmented by a centrifugal term [18,19]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j}[\nabla p_j - \rho_j \Omega^2 r \hat{\mathbf{r}}], \quad (1)$$

where p is the pressure, r is the distance to the rotation axis, and $\hat{\mathbf{r}}$ denotes a unit vector pointing radially outward.

The problem is then specified by two boundary conditions. The first one is a generalized Young-Laplace pressure boundary condition that considers the contribution coming from the elastic nature of the separating boundary, and expresses the pressure jump across the fluid-fluid interface as [8–10,39]

$$p_2 - p_1 = \nu_0 \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right), \quad (2)$$

where κ denotes the interface curvature in the plane of the cell, and the subscripts of κ indicate derivatives with respect to the arc length s . Equation (2) is a simplifying limit of a considerably more complicated expression derived in Refs. [8–10] that considers a curvature-dependent bending rigidity. In this more complex case, the elastic force contribution can be either stabilizing or destabilizing. On the other hand, the simpler constant rigidity case leads only to stabilization. Since in this work we are particularly interested in the stabilizing nature of the elastic force (in order to balance the destabilizing centrifugal force), we focus on the constant rigidity case. Despite the simplicity of such an assumption, the resulting set of possible stationary patterns is already quite diverse, revealing a rich variety of appealing complex shapes.

A second relevant boundary condition is the so-called kinematic boundary condition [2,3]

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_2, \quad (3)$$

which refers to the continuity of the normal velocity across the interface ($\hat{\mathbf{n}}$ is the unit normal vector pointing from fluid 2 to fluid 1). The tangential component of the velocity, however, is discontinuous and gives rise to the vortex sheet strength [42]

$$\Gamma = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (4)$$

where $\hat{\mathbf{s}}$ is the unit tangent vector along the interface.

By writing down Darcy’s expression (1) for both fluids, then by subtracting the resulting expressions, we solve for the vortex sheet strength (4). Then, by utilizing the boundary conditions (2) and (3) we obtain a dimensionless expression for the vorticity

$$\Gamma = 2A \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{s}} + \nabla \left[B \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - r^2 \right] \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (5)$$

where $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ is the viscosity contrast, and $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$ is an average velocity of the interface with \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 being the two limiting values (from both sides of the interface) of the velocity at a given point. When one is interested in the time evolution of the interface (not our case here) \mathbf{V} is expressed in terms of a complicated Birkhoff integral

formula [21,22,42,43]. In Eq. (5)

$$B = \frac{2\nu_0}{(\rho_2 - \rho_1)\Omega^2 R^5} \quad (6)$$

expresses the effective bending rigidity parameter that measures the ratio of elastic to centrifugal forces. Note that in Eq. (5) lengths and velocities are rescaled by R and $U = [b^2 R(\rho_2 - \rho_1)\Omega^2]/[12(\eta_1 + \eta_2)]$, respectively. From this point on, we use the dimensionless form of the equations.

We are interested in the static solutions of Eq. (5), so that $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$. By taking $\mathbf{V} = 0$ in Eq. (5), and considering the condition of zero vorticity ($\Gamma = 0$) we find that

$$\nabla \left[B \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - r^2 \right] \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0. \quad (7)$$

Thus the curvature of the fluid-fluid interface must satisfy a third-order nonlinear ordinary differential equation of the form

$$B \left(\frac{3}{2} \kappa^2 \kappa_s + \kappa_{sss} \right) - 2r r_s = 0. \quad (8)$$

The solutions of the shape equation (8) balance centrifugal and elastic forces, and reveal very important morphological features of the emerging elastic fingering patterns in the stationary regime. The determination of a closed-form, exact analytical solution of this shape equation is challenging, and poses a rather nontrivial task. In this work, we solve (8) numerically by employing the numerical approach originally presented in Ref. [22].

We conclude this section by calling the reader's attention to the important differences between our current work, and a paper we have recently published [11]. Although both studies examine rotating Hele-Shaw flows under elastic interface circumstances, it should be stressed that the object of study and the main scientific goals of these two articles are quite distinct. While in Ref. [11] we focused on the time-dependent perturbative dynamics of the interface during linear and weakly nonlinear regimes, here we study the development of time-independent, stationary solutions of the interface during fully nonlinear stages. Consequently, the interfacial shapes obtained in [11] are quite simple, whereas here numerous intricate patterns can be explored. Moreover, as opposed to what happens in [11], where the assumption of a curvature-dependent bending rigidity is a crucial ingredient to lead to interface destabilization, in the present work the bending rigidity is assumed to be curvature independent, which implies in a convenient stabilizing elastic interface effect (needed to balance destabilizing centrifugal forces). The simplified form of the bending rigidity adopted in this work should not be underestimated: after all, despite the apparent simplicity of the shape equation (8) teasing out the physics behind it is not at all trivial.

III. FAMILIES OF EQUILIBRIUM SHAPES

In this section we utilize the shape equation (8) to explore a variety of shapes that can be accessed by our centrifugally driven system upon varying the effective bending rigidity parameter B . In order to characterize the various families of patterns in a more orderly and systematic fashion, in addition to the physical parameter B we also use a dimensionless

geometrical parameter, known as the radius of gyration, which is defined as [37,38]

$$R_g = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L r^2(s) ds}, \quad (9)$$

where s is the curvilinear coordinate along the elastic boundary and L is the total length (or perimeter) of the interface. Our choice for such parameter has been motivated by the investigations performed by Bayart and co-workers [37,38] that examined the folding process of flexible rods in rotating Hele-Shaw cells. In the framework of Refs. [37,38] the rotational drive provides a useful way to control the resulting rods' confinement intensity by varying the stiffness of the underlying parabolic radial potential. Under such circumstances, they have used R_g as a successful way to characterize the various folded rods configurations.

At this point, we make an important comment about our attempt to classify the patterns through the pair (B, R_g) . In the context of our numerical solutions [22], the radius of gyration R_g related to each resulting stationary shape presented in this work is obtained *a posteriori*: for a given value of B we try various different sets of initial conditions, and search numerically for acceptable (i.e., physically relevant) patterns whose boundaries must be closed and non-self-intercepting. Once we find such a physical pattern numerically, we then evaluate the corresponding value for R_g by using Eq. (9). This is the way a pair (B, R_g) is evaluated for all patterns shown in our current study. In this context, we have found that a given pair (B, R_g) is associated to a single, specific pattern. For a detailed discussion about the commensurability, closure condition, as well as the non-self-intersecting nature of such type of static patterned configurations we refer the reader to Refs. [22,26,27,32–34].

By varying B and by computing its corresponding R_g we have been able to identify five different families of static elastic fingering patterns, each one with their own characteristic features. The disposition of the families of shapes I to V is given in Fig. 3 which plots the $B - R_g$ parametric map used to obtain the gallery of stationary shapes depicted in Fig. 4 to Fig. 8. It should be stressed that we have searched for other families within and beyond the range of parameters B and R_g considered in Fig. 3, but have not found any other significantly distinct type of patterned morphologies than the ones presented here.

Before we proceed, it should be noted that, as in Refs. [21,22], while we numerically search for physically relevant, closed, non-self-intercepting patterns, we do it without imposing constraints on the area and perimeter of different patterned structures. This is the reason why one can observe that some patterns shown in this work clearly present different dimensions (enclosed area and boundary length). It should be emphasized that, in the framework of our unconstrained approach, each resulting pattern is related to a different initial situation, so that they do not necessarily present the same starting radius, area, and contour length.

We begin our discussion by inspecting the structures related to family I, as illustrated in Fig. 4. The resulting interfacial patterns are obtained for increasingly larger values of both B and R_g . Notice from Fig. 3 that family I is the set that presents

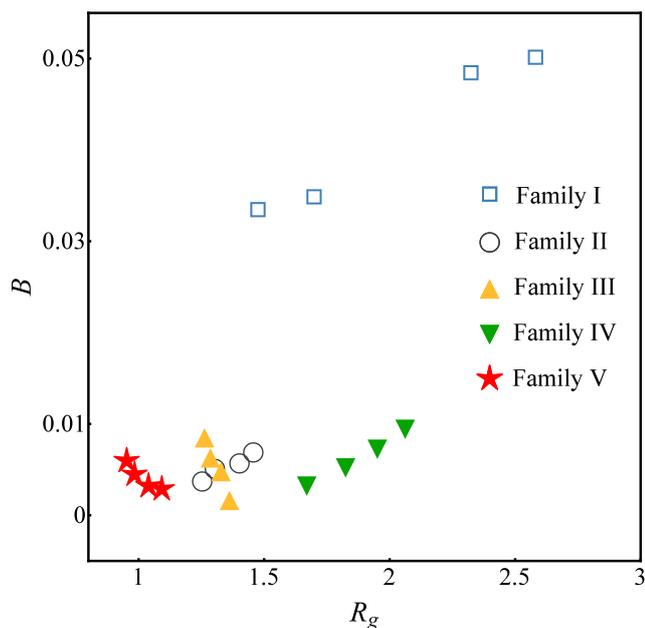


FIG. 3. (Color online) $B - R_g$ parametric map showing the disposition of the families of equilibrium patterns I–V.

the highest values for the parameters. By examining Fig. 4 it is evident that each shape has a dominant n -fold symmetry ($n = 1, 2, 3,$ and 4), and a fairly bumpy, serpentine-shaped interface. If on one hand, larger B means a more rigid structure, on the other hand by increasing R_g one allows the accommodation of a greater number of tight, small interfacial fingers arising at the interface. Another immediate conclusion is that the elastic interfacial structures shown in Fig. 4 are significantly distinct

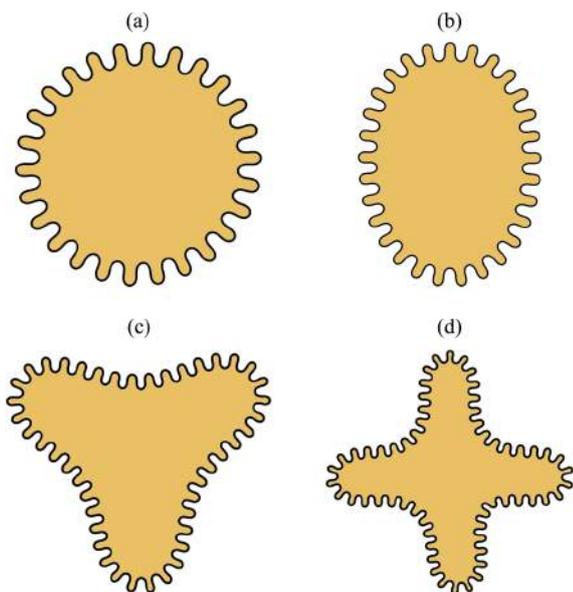


FIG. 4. (Color online) Stationary shapes—Family I. (a) $B = 0.0333$, $R_g = 1.4768$; (b) $B = 0.0347$, $R_g = 1.7004$; (c) $B = 0.0483$, $R_g = 2.3253$; (d) $B = 0.0500$, $R_g = 2.5826$. Observe the serpentine-like interface arising in each of the n -folded structures.

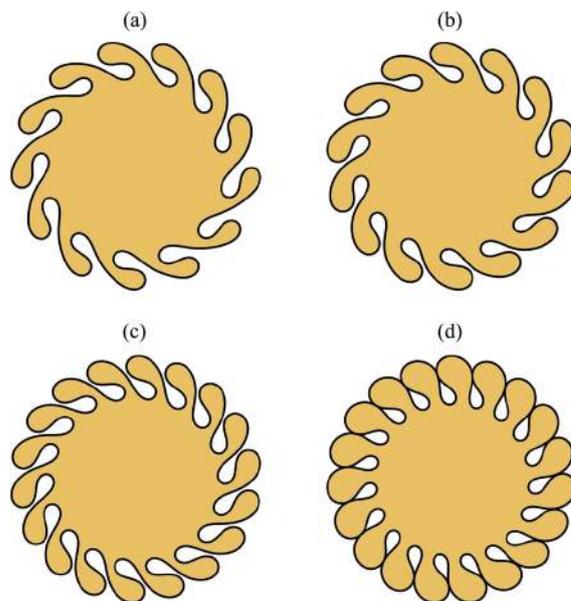


FIG. 5. (Color online) Stationary shapes—Family II. (a) $B = 0.0070$, $R_g = 1.4582$; (b) $B = 0.0058$, $R_g = 1.4032$; (c) $B = 0.0052$, $R_g = 1.3051$; (d) $B = 0.0038$, $R_g = 1.2547$. Note the swirling nature of all patterns, and the droplet entrapment phenomenon of inward pointing fingers of the outer fluid in (d).

from the typical elasticalike shapes illustrated in Fig. 1 for the conventional rotating Hele-Shaw problem in the absence of an elastic interface.

Now we turn to the analysis of family II depicted in Fig. 5. The order the patterns are shown is such that the value of both B and R_g are decreased as one goes from Fig. 5(a) to Fig. 5(d). First, one readily observes that this set of shapes is completely different from the patterns that appear in Fig. 1 (elasticalike) and in Fig. 4 (family I). The common feature among all the structures presented in Fig. 5 is the formation of swirling patterns, where the fingers tend to fold on one another. From Fig. 5(a) to Fig. 5(d) the bent fingers increase in number, and vary in their shapes tending to become increasingly swollen at their tips. This is somewhat expected since for smaller B the elastic boundary becomes more flexible. Ultimately, the inflated fingers of the inner fluid touch one another, entrapping a tearlike shaped droplet of the outer fluid between them [Fig. 5(d)]. It is also interesting to note that a similar type of finger shapes arise when elastic wires fold in the confined geometry of motionless [35,36] and rotating [37,38] Hele-Shaw cells.

We proceed by examining the stationary shape family III shown in Fig. 6. Unlike what we have done in Fig. 5, now B decreases and R_g increases when we go from Fig. 6(a) to Fig. 6(d). The parametric map of Fig. 3 makes evident that other than the parameter values used, Fig. 5 and Fig. 6 are similar. So, it is not really surprising to find out that the stationary patterns in Fig. 6 also present a swirling nature. As we go from Fig. 6(a) to Fig. 6(d) the number of fingers increase; however, in contrast to what happened in Fig. 5 now we see that neighboring fingers of the inner fluid tend to become more separated, and change from bloated to deflated fingers.

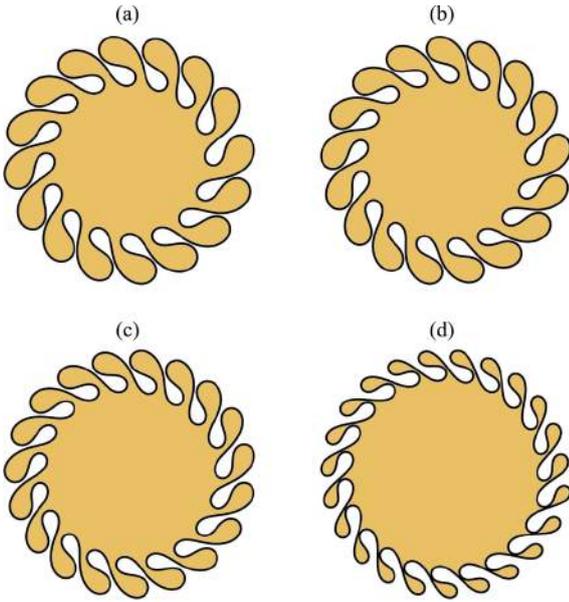


FIG. 6. (Color online) Stationary shapes—Family III. (a) $B = 0.0087$, $R_g = 1.2640$; (b) $B = 0.0065$, $R_g = 1.2876$; (c) $B = 0.0050$, $R_g = 1.3296$; (d) $B = 0.0018$, $R_g = 1.3633$. As in Fig. 5 the patterns also swirl, but now we observe tendency toward pinch off of outward pointing fingers of the inner in (d).

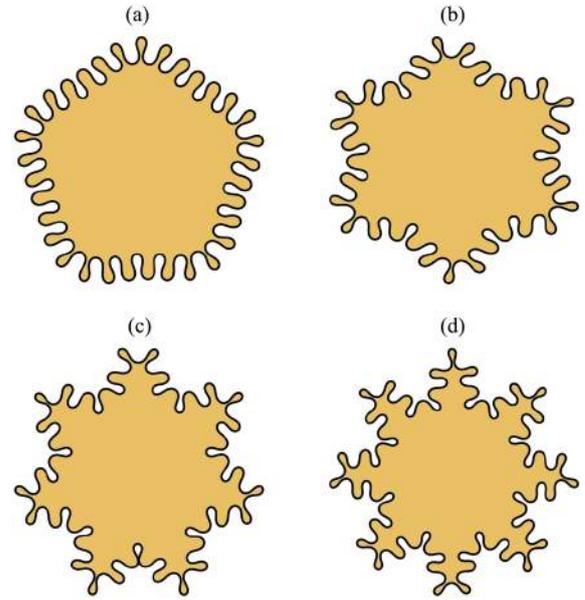


FIG. 7. (Color online) Stationary shapes—Family IV. (a) $B = 0.0034$, $R_g = 1.6714$; (b) $B = 0.0054$, $R_g = 1.8260$; (c) $B = 0.0074$, $R_g = 1.9525$; (d) $B = 0.0096$, $R_g = 2.0633$. From (a) to (d) one notices increasing interface buckling and finger sidebranching formation.

Moreover, note that as opposed to the droplet entrapment of the inward pointing fingers of the outer fluid [Fig. 5(d)], in Fig. 6(d) the outward pointing fingers of the inner fluid are the ones that tend to separate from the main body of the inner fluid through a pinch-off phenomenon.

We continue by inspecting family IV which is represented in Fig. 7. The distinguishing feature here is the fact that for this family we use values of R_g that are larger than those utilized in families II and III. Now as we go from Fig. 7(a) to Fig. 7(d) both B and R_g increase. We can say that the most salient feature of the patterns in this family is their morphological complexity, and tendency toward interface buckling. We do have an overall n -fold character for all patterns ($n = 5, 6, 7$, and 8), with n increasing as B and R_g assume larger values. In addition, note that all the n -fold patterns keep a robust polygonal shape in the bulk of such structures. As both the radius of gyration and the rigidity of the structures increase, the interface buckles further inducing the growth of visually appealing sideway structures that result in the sidebranching of the n -fold fingered protrusions. The protrusions are typically smaller in length than the typical dimensions of each pattern.

We close our discussion by analyzing family V (Fig. 8). As can be seen from that parametric map (Fig. 3) this family assumes the smallest values of R_g as compared to the values used in families I–IV. In this situation, from Fig. 8(a) to Fig. 8(d) B is progressively decreased while R_g is increased. By inspecting Fig. 8 we see a different kind of buckled, sidebranching shape as compared to those depicted in Fig. 7. Now since R_g takes smaller values, the complex n -fold resulting structures (for $n = 2, 3, 4$, and 5) do not keep a fat central polygonal shape. Instead, the sidebranched protrusions

grow significantly in size, dominantly characterizing the visual appearance of the resulting patterns.

The identified families and associated trends we have discussed throughout this section are instructive, and represent a tentative approach to classify the resulting complex patterns.

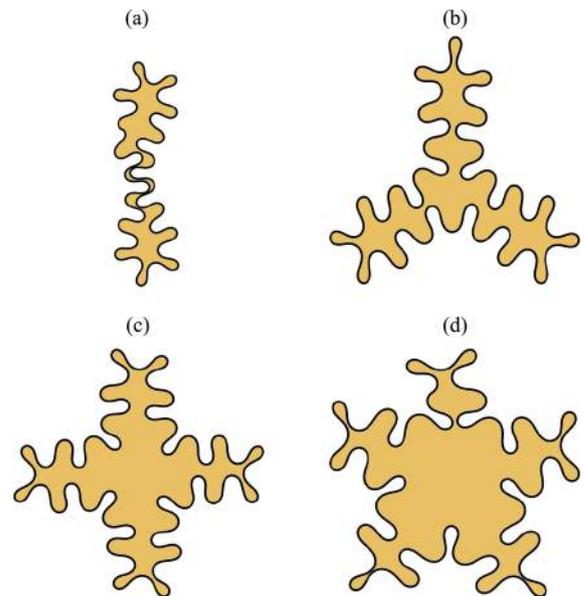


FIG. 8. (Color online) Stationary shapes—Family V. (a) $B = 0.0060$, $R_g = 0.9539$; (b) $B = 0.0045$, $R_g = 0.9851$; (c) $B = 0.0032$, $R_g = 1.0408$; (d) $B = 0.0029$, $R_g = 1.0938$. Sidebranching and buckling occurs, but the fingering protrusions are considerably larger than the ones shown in Fig. 7.

However, it is also true that sometimes patterns of a given family show some common features with structures of a different family. This fact is evident when one inspects Fig. 3 and observes the “crossing” of families II and III. Certain similarities can be even identified when one compares, for instance, the conventional elasticlike sixfold structures depicted in Fig. 1 and Fig. 4(a): basically, they seem to vary in the number and size of small bumps. In this spirit, one could say that there are two discontinuous differences among the patterns: (i) the n -fold overall symmetry and (ii) the number of small bumps. Additionally, there are also continuous transitions, like the one related to the swirling patterns, which presumably appears gradually as B is reduced [e.g., between Fig. 4(a) to Fig. 5(a)]. Finally, one can notice some other symmetry properties of the generated patterns: for instance, by inspecting families I, IV, and V one can note that they possess a dihedral symmetry (rotations and reflections), whereas families II and III are missing the reflections. Despite all these observations, the physics underlying the breaking of this symmetry, and the transitions that occur when one passes from one family to another is still poorly understood, and needs additional study.

IV. CONCLUDING REMARKS

A vortex sheet formalism has allowed us to access the stationary shapes originated when two Newtonian fluids, separated by an elastic interface, flow in the confined geometry of a rotating Hele-Shaw cell. Our main goal was determination of the resulting static interfacial shapes when centrifugal and elastic forces are exactly balanced. For the static regime, the vortex sheet technique arises as a simpler alternative to traditional variational methods in determining a nonlinear differential equation that describes the curvature of the elastic interface (the shape equation).

Numerical solutions of the shape equation unveiled a surprisingly rich set of shapes including n -fold serpentine

interface patterns, swirling patterns presenting bent fingering structures (where droplet entrapment and finger pinch-off phenomena occur), and peculiar, fat and thin, buckled n -folded morphologies exhibiting sidebranching. All these families of shapes have been characterized by utilizing two dimensionless parameters: an effective bending rigidity, and a geometrical radius of gyration. It should be noted that these elastic fingering shapes are dramatically distinct from the equilibrium Euler’s elastica type of forms obtained by pressurized elastic rings in a plane and related problems [26,27,32–34], as well as in the elasticlike patterns produced when surface tension and centrifugal forces equilibrate in rotating Hele-Shaw flows (in the absence of an elastic interface) [21,22].

Despite these findings, some other important issues still deserve further investigation. For example, in contrast to the exact stationary solutions obtained in Refs. [22,26,27,32–34], we have not been able to find closed-form, analytical solutions for the centrifugally driven interfacial elastic fingering problem. Still on the theoretical side, another challenging point refers to the stability of the shapes we found in this work. For instance, while Euler’s elastica solutions found in Refs. [26,27,32–34] are shown to be stable, the related hydrodynamic solutions obtained in Refs. [21,22,44,45] in the absence of an elastic interface are indeed unstable. So, the stability or not of the stationary patterns obtained here remains an open question. Finally, it would be interesting to perform laboratory and numerical experiments for the elastic fingering problem in rotating Hele-Shaw cells, both in the static and in the time evolving fully nonlinear regimes.

ACKNOWLEDGMENTS

J.A.M. and G.D.C. thank CNPq and FACEPE (through PRONEM Project No. APQ-1415-1.05/10) for financial support. H.G. acknowledges support through an Oxford University Hooke Fellowship.

-
- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. A* **245**, 312 (1958).
 - [2] G. M. Homsy, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987); K. V. McCloud and J. V. Maher, *Phys. Rep.* **260**, 139 (1995).
 - [3] L. Paterson, *J. Fluid Mech.* **113**, 513 (1981).
 - [4] B. Saintyves, O. Dauchot, and E. Bouchaud, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 047801 (2013).
 - [5] J. S. Biggins, Z. Wei, and L. Mahadevan, [arXiv:1407.0684](https://arxiv.org/abs/1407.0684).
 - [6] J. S. Biggins, B. Saintyves, Z. Wei, E. Bouchaud, and L. Mahadevan, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, 12545 (2013).
 - [7] T. Podgorski, M. C. Sostarecz, S. Zorman, and A. Belmonte, *Phys. Rev. E* **76**, 016202 (2007).
 - [8] A. He, J. S. Lowengrub, and A. Belmonte, *SIAM J. Appl. Math.* **72**, 842 (2012).
 - [9] A. He, Ph.D. thesis, Penn State University, 2011.
 - [10] G. D. Carvalho, J. A. Miranda, and H. Gadêlha, *Phys. Rev. E* **88**, 053006 (2013).
 - [11] G. D. Carvalho, H. Gadêlha, and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **89**, 053019 (2014).
 - [12] M. J. Shelley, F-R. Tian, and K. Wlodarski, *Nonlinearity* **10**, 1471 (1997).
 - [13] A. Lindner, D. Derks, and M. J. Shelley, *Phys. Fluids* **17**, 072107 (2005).
 - [14] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, and D. Bonn, *J. Appl. Phys.* **93**, 1557 (2003).
 - [15] T. Gérard and A. De Wit, *Phys. Rev. E* **79**, 016308 (2009).
 - [16] Y. Nagatsu, Y. Ishii, Y. Tada, and A. De Wit, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 024502 (2014).
 - [17] A. De Wit, K. Eckert, and S. Kalliadasis, *Chaos* **22**, 037101 (2012).
 - [18] L. W. Schwartz, *Phys. Fluids A* **1**, 167 (1989).
 - [19] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt, and J. Ortín, *Phys. Rev. E* **54**, 6260 (1996).
 - [20] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Fluids* **16**, 908 (2004).
 - [21] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 054501 (2004).

- [22] E. S. G. Leandro, R. M. Oliveira, and J. A. Miranda, *Physica D* **237**, 652 (2008).
- [23] H. Gadéilha and J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **70**, 066308 (2004).
- [24] J. A. Miranda and E. Alvarez-Lacalle, *Phys. Rev. E* **72**, 026306 (2005).
- [25] J. Casademunt, *Eur. Phys. J. Plus* **126**, 94 (2011).
- [26] G. Arreaga, R. Capovilla, C. Chryssomalakos, and J. Guven, *Phys. Rev. E* **65**, 031801 (2002).
- [27] P. A. Djondjorov, V. M. Vassilev, and I. M. Mladenov, *Int. J. Mech. Sci.* **53**, 355 (2011).
- [28] For a historical perspective, see C. G. Fraser, *Centaurus* **34**, 211 (1991); R. Levien, Technical Report No. UCB/EECS-2008-103, EECS Department, University of California, Berkeley, 2008 (unpublished).
- [29] G. M. Scarpello and D. Ritelli, *Meccanica* **41**, 519 (2006).
- [30] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (Dover, New York, 1944).
- [31] M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [32] V. M. Vassilev, P. A. Djondjorov, and I. M. Mladenov, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 435201 (2008).
- [33] S. K. Veerapaneni, R. Raj, G. Biros, and P. K. Purohit, *Int. J. Nonlin. Mech.* **44**, 257 (2009).
- [34] L. Giomi, *Soft Matter* **9**, 8121 (2013).
- [35] C. C. Donato, M. A. F. Gomes, and R. E. de Souza, *Phys. Rev. E* **67**, 026110 (2003).
- [36] Y. C. Lin, Y. W. Lin, and T. M. Hong, *Phys. Rev. E* **78**, 067101 (2008).
- [37] E. Bayart, S. Deboeuf, F. Corson, A. Boudaoud, and M. Adda-Bedia, *Europhys. Lett.* **95**, 34002 (2011).
- [38] E. Bayart, A. Boudaoud, and M. Adda-Bedia, *Phys. Rev. E* **89**, 012407 (2014).
- [39] T. R. Powers, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1607 (2010).
- [40] E. Katifori, S. Alben, and D. R. Nelson, *Phys. Rev. E* **79**, 056604 (2009).
- [41] L. Giomi and L. Mahadevan, *Proc. R. Soc. A* **468**, 1851 (2012).
- [42] G. Tryggvason and H. Aref, *J. Fluid Mech.* **136**, 1 (1983).
- [43] G. Birkhoff, Los Alamos Scientific Laboratory Technical Report No. LA-1862, 1954 (unpublished).
- [44] C. J. Heine, *IMA J. Numer. Anal.* **26**, 723 (2006).
- [45] C. J. Heine, Ph.D. thesis, Universität Freiburg, Germany, 2003.