

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

INVESTIGANDO A IDEIA DO POSSÍVEL EM CRIANÇAS

GISELDA MAGALHÃES MORENO NÓBREGA

RECIFE - PE

2015

GISELDA MAGALHÃES MORENO NÓBREGA

INVESTIGANDO A IDEIA DO POSSÍVEL EM CRIANÇAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Doutor em Psicologia Cognitiva.

Área de Concentração: Psicologia Cognitiva
Orientadora: Alina Galvão Spinillo

**RECIFE - PE
2015**

ATA DA **81ª** DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA DO CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, NO DIA **11 DE FEVEREIRO DE 2015**.

Aos **11** (onze) dias do mês de **fevereiro** (2015), às quatorze horas, no Auditório do 8º andar do Centro de Filosofia e Ciências Humanas – CFCH, da Universidade Federal de Pernambuco, em sessão pública, teve início a defesa da Tese de Doutorado intitulada “Investigando a Ideia de Possível em Crianças” da aluna **GISELDA MAGALHÃES MORENO NÓBREGA**, na área de concentração Psicologia Cognitiva, sob a orientação da Profa. Dra. Alina Galvão Spinillo. A doutoranda cumpriu todos os demais requisitos regimentais para a obtenção do grau de DOUTORA em Psicologia Cognitiva. A Banca Examinadora foi indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva na sua 15ª Reunião Ordinária/2014 e homologada pela Diretoria de Pós-Graduação, através do Processo Nº 23076.002795/2015 em 16 (dezesesseis) de janeiro de dois mil e quinze (2015), composta pelos Professores Doutores ALINA GALVÃO SPINILLO (Presidente e 1º Orientador), do Dep. de Psicologia/UFPE; CLAUDIA ROBERTA DE ARAUJO GOMES (Examinador Externo, Dep. de Educação/UFRPE); FLAVIA MENDES DE ANDRADE E PERES (Examinador Externo, Dep. de Educação/UFRPE), SINTRIA LABRES LAUTERT (Examinador Interno, Dep. de Psicologia/UFPE) e ERICK FRANCISCO QUINTAS CONDE (Examinador Interno, Dep. de Psicologia/UFPE). Após cumpridas as formalidades, a candidata foi convidada a discorrer sobre o conteúdo da Tese. Concluída a explanação, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora que, em seguida, reuniu-se para deliberar e conceder à mesma a menção **APROVADA** da referida Tese. E, para constar, lavrei a presente Ata que vai por mim assinada, Secretária de Pós-Graduação, e pelos membros da Banca Examinadora.

Recife, 11 de fevereiro de 2015

BANCA EXAMINADORA:

Profa. ALINA GALVÃO SPINILLO

Profa. CLAUDIA ROBERTA DE ARAUJO GOMES

Profa. FLAVIA MENDES DE ANDRADE E PERES

Profa. SINTRIA LABRES LAUTERT

Prof. ERICK FRANCISCO QUINTAS CONDE

*À todas as crianças que participaram
deste estudo, tornando-o possível!*

RESUMO

O pensamento sobre o possível (e consequentemente sobre o impossível e a certeza) configura-se enquanto raciocínio abstrato, sendo esse um dos aspectos que caracteriza o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Isso porque conjecturar acerca de possíveis exige habilidades hipotético-dedutivas, que permitem ao sujeito pensar sobre situações que não constituem uma realidade imediata. Apesar da importância do tema, há na literatura uma escassez de estudos acerca da concepção de possível. O estudo encontrado data de 1985, e consiste em um conjunto de experimentos realizados por Piaget e colaboradores. Na visão piagetiana, as noções sobre o possível começam a emergir por volta dos sete, oito anos. Porém, estudos recentes no campo da Psicologia da Educação Matemática têm mostrado que crianças de cinco anos já são capazes de conjecturar sobre o possível em situações que envolvem noções iniciais de probabilidade e análise combinatória. Diante disso, este estudo teve por objetivo investigar a concepção do possível em crianças no âmbito do conhecimento matemático e não-matemático. Participaram deste estudo 180 crianças de ambos os sexos, alunas de duas escolas particulares da cidade de Recife, igualmente divididas em seis grupos de participantes em função da escolaridade, que variava do Infantil III ao 5º ano. Cada participante respondeu a um conjunto de 36 perguntas acerca de ocorrência de três tipos de situações: possíveis, impossíveis e certas de acontecer – tanto no domínio de conhecimento matemático como não-matemático. Especificamente no domínio da matemática, as questões eram referentes a probabilidade e análise combinatória. Os dados foram analisados em função do desempenho (acertos) e das justificativas dadas pelas crianças. Os resultados mostraram que aos cinco anos as crianças já são capazes de pensar sobre a possibilidade (ou não) de ocorrência de situações hipotéticas a elas apresentadas. Essa concepção de possível se desenvolve ao longo do tempo, de modo que as crianças mais velhas não só apresentam um melhor desempenho como também se tornam mais capazes de justificar suas respostas de maneira fundamentada. Os dados mostraram também que com exceção das crianças do Infantil III (que evidenciam um desempenho superior nas perguntas de conhecimento não-matemático), não houve diferença significativa de desempenho entre as perguntas de conhecimento matemático e não-matemático. Tal fato sugere que desde muito cedo as crianças já se mostram aptas a conjecturar sobre o possível em diferentes contextos. No que se refere aos tipos de questões (possibilidade, impossibilidade e certeza), constatou-se que as perguntas do tipo possibilidade foram mais facilmente respondidas no âmbito do conhecimento matemático do que no âmbito do conhecimento não-matemático. Já as perguntas do tipo impossibilidade mostraram-se mais fáceis no conhecimento não-matemático. Nas questões do tipo certeza o desempenho das crianças foi semelhante nesses dois domínios de conhecimento. O fato das crianças apresentarem facilidade em pensar sobre as possibilidades no âmbito do conhecimento matemático abre caminhos para aprofundar a abordagem dos conteúdos de probabilidade e análise combinatória no contexto escolar. Se crianças a partir do 3º ano do Ensino Fundamental já demonstram ter o entendimento de situações probabilistas, talvez seja o momento de aprofundar mais as noções de probabilidade trabalhadas em sala de aula. A partir do 3º ano as crianças apresentaram um desempenho significativamente melhor em probabilidade do que em combinatória, sugerindo a existência de um “freio” no desenvolvimento deste conceito, que é essencialmente escolar. Ao que parece, os conteúdos de análise combinatória ou não estão sendo trabalhados nas series iniciais, ou a maneira como se conduz esse

trabalho não permite que as crianças se apropriem e desenvolvam o seu raciocínio acerca dos princípios da combinatória.

Palavras-chave: crianças, noção de possível; conhecimento matemático; conhecimento não-matemático.

ABSTRACT

The thought of the possible (and consequently of the impossible, as well as “certainty”) is configured in the realm of abstract reasoning, being one of the aspects to characterize the cognitive development of a subject. That can be justified by the fact that conjectures about possibilities and outcomes, requires hypothetical-deductive skills that allow the subject to think about situations that are not an immediate reality. Despite the importance of the issue, there is a shortage, in the literature, of studies on the conception of possible. The study found dates back to 1985 and consists of a set of experiments conducted by Piaget and colleagues. According to their view, the notions about the possible begin to emerge when the individual is about seven or eight years old. However, recent studies in the field of Psychology of Mathematics Education have shown that children under five years old are already able to conjecture about the possible in situations involving basics of probability and combinatory analysis. This study aimed to investigate the designation of possible in children under the mathematical as well as non-mathematical knowledge. The study included 180 children of both sexes, two private school students in the city of Recife, equally divided into six groups of participants according to level of education, ranging from Childhood III to 5th Grade. Each participant answered a set of 36 questions about occurrence of three types of situations: possible, impossible and certain to happen - both in the mathematical and non-mathematical knowledge domains. Specifically in the mathematical domain, the questions concerned probability and combinatory analysis. Data were analyzed in terms of performance (right/wrong) and the justifications given by subjects. The results showed that at the age of five, children are capable of thinking about the possibility (or not) of the occurrence of hypothetical situations presented to them. This design can develop over time, in the sense that older children not only incur in a better performance including well fundamented justifications to their responses. The data also showed that with the exception of children from Childhood III (that show superior performance in non-mathematical knowledge questions), there was no significant difference in performance between the mathematical and non-mathematical knowledge questions. This suggests that at early stages in life, children already show the ability to conjecture about the possible in different contexts. With regard to the types of questions (possibility and impossibility and certainty), it was found that the questions of the type possibility were more easily answered in the context of the mathematical knowledge than under the non-mathematical knowledge. Nonetheless the questions of impossibility type proved to be better handled in the non-mathematical domain. In the certainty questions the children's performance was similar regarding both domains of knowledge. The fact that children presented their responses regarding possibility with ease within the mathematical knowledge paves the way to deepen the approach of combinatorial probability of content and analysis in the school context. If children from the 3rd year of elementary school have already demonstrated understanding of probabilistic situations, it may be time to deepen more the notions of probability explored in the classroom. Still in this context, children from the 3rd year on, the subjects had significantly better performance in probability than in combinatorial analysis, suggesting the existence of a brake on the development of this concept, which is essentially established by school. Apparently, the combinatorial contents are either not being developed in the early school years, or the way that this work is conducted does not allow children to take ownership and develop their own thinking about such principles.

Key-words: children, concept of possible; mathematical knowledge; non-mathematical knowledge.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Percentual de acertos em T-PIC.	82
Gráfico 2. Percentual de acertos nas questões de conhecimento matemático.	86

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Distribuição dos itens na T-PIC.	63
Quadro 2. Situações-problema referentes ao conhecimento não-matemático.	65
Quadro 3. Situações-problema referentes ao conhecimento matemático.	66
Quadro 4. Comparação entre os anos escolares – conhecimento não-matemático.	99
Quadro 5. Comparação entre os anos escolares – conhecimento matemático.	102
Quadro 6. Desempenho nos tipos de questões a partir do campo de conhecimento.	103

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Número de participantes por ano escolar e média de idade (em anos) de cada grupo.	62
Tabela 2. Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares em questões de conhecimento não-matemático.	83
Tabela 3. Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares em questões de conhecimento matemático.	84
Tabela 4. Valores e significância do teste de Wilcoxon na comparação entre os desempenhos em conhecimento não-matemático e conhecimento matemático.	85
Tabela 5. Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares em questões de conhecimento matemático - probabilidade.	87
Tabela 6. Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares nas questões de conhecimento matemático - combinatória.	88
Tabela 7. Valores e significância do teste de Wilcoxon na comparação entre os desempenhos em probabilidade e combinatória.	89
Tabela 8. Frequência e percentual das justificativas nas questões de conhecimento não-matemático. Máximo de respostas por grupo = 540.	90
Tabela 9. Frequência e percentual das justificativas nas questões de conhecimento matemático. Máximo de respostas por grupo = 540.	92
Tabela 10. Frequência e percentual das justificativas nas questões de probabilidade. Máximo de respostas por grupo = 360.	94
Tabela 11. Frequência e percentual das justificativas nas questões de combinatória – possibilidade e impossibilidade. Máximo de respostas por grupo = 180.	95
Tabela 12. Frequências e percentual de acertos – conhecimento não-matemático.	97
Tabela 13. Comparação de desempenho – conhecimento não-matemático.	98
Tabela 14. Frequências e percentual de acertos – conhecimento matemático.	100
Tabela 15. Comparação de desempenho – conhecimento matemático.	101

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	14
CAPÍTULO 1: Possível: questões filosóficas e psicológicas.....	17
1. Considerações filosóficas.....	17
2. Considerações psicológicas.....	19
CAPÍTULO 2: O possível no âmbito da Psicologia da Educação Matemática.....	31
1. O possível e o conhecimento matemático.....	31
1.1 Probabilidade.....	33
1.2 Análise Combinatória.....	36
2. O possível e o conhecimento não-matemático.....	39
CAPÍTULO 3: Estudos realizados com crianças.....	40
1. Estudos com conteúdo matemático.....	40
1.1 Probabilidade.....	41
1.2 Análise Combinatória.....	52
2. Estudos acerca do possível – conhecimento não-matemático.....	57
CAPÍTULO 4: Método.....	60
1. Contextualização e objetivos do estudo.....	60
2. Participantes.....	62
3. Material e procedimento.....	63
CAPÍTULO 5: Sistema de análise de dados.....	68
1. Análise de desempenho.....	68
2. Análise das justificativas.....	69
CAPÍTULO 6: Resultados.....	81
1. Análise de desempenho.....	81

2. Análise das justificativas.....	89
3. Análise de desempenho nos três tipos de questões.....	97
CAPÍTULO 7: Conclusões e discussão.....	105
1. Implicações educacionais.....	114
2. Pesquisas futuras.....	115
REFERÊNCIAS.....	117

Esse estudo tem por objetivo investigar a concepção de *possível* em crianças. O termo *possível* permeia não só o domínio do senso comum, mas também diversos campos de estudos científico-filosóficos, como a própria Filosofia, a Matemática, a Psicologia Cognitiva e a Psicologia da Educação Matemática.

Filósofos discorrem acerca do *possível* a fim de refletir o *ser ou não ser* das coisas de um modo geral. Na matemática a concepção de *possível* caracteriza um campo de conhecimento constituído por situações de incertezas. Fazem parte desse campo de conhecimento a probabilidade e a análise combinatória, por exemplo. Distanciando-se do domínio da matemática, o *possível* permeia conteúdos dos mais diversos, envolvendo tanto domínios de conhecimentos essencialmente escolares, como também situações cotidianas, corriqueiras.

Apesar desse cenário, o *possível* enquanto objeto de estudo é bastante escasso. O estudo encontrado na literatura da área data de 1985, e consiste em um conjunto de experimentos realizados por Piaget e seus colaboradores reunidos em dois volumes (O possível e o necessário – volumes 1 e 2). Por outro lado, constata-se uma riqueza crescente no número de pesquisas realizadas com crianças, especificamente relacionados aos conteúdos matemáticos de probabilidade e análise combinatória.

Como será discutido adiante, tanto o raciocínio probabilista como o combinatório requer da criança conjecturas no âmbito do possível, a fim de refletirem sobre situações que podem – ou não – tornarem-se reais. Ou seja, os estudos realizados nessas áreas indubitavelmente oferecem elementos que possibilitam inferências acerca da concepção de *possível* na criança. O que é curioso notar é que é justamente o pensar

sobre o *possível* que permite o raciocínio sobre probabilidade e análise combinatória. E esse raciocínio sobre o *possível* raramente é investigado!

No âmbito da Psicologia Cognitiva a concepção de *possível* encontra-se relacionada ao pensamento abstrato, sendo a mesma, pois, um dos aspectos que caracteriza o desenvolvimento cognitivo do sujeito. De acordo com a visão piagetiana, esse raciocínio só se faz presente nas crianças por volta dos 10-12 anos. Entretanto, estudos no campo da Psicologia da Educação Matemática têm mostrado que crianças muito pequenas são capazes de pensar de forma probabilística e combinatória, a depender da tarefa apresentada.

Então, a partir de que idade as crianças podem apresentar indícios dessa concepção? Como a mesma se apresenta em diferentes idades? Será que ela se manifesta igualmente em diferentes campos de conhecimento (matemático e não-matemático)? Como a criança lida com a possibilidade e seus “extremos” (certeza e impossibilidade)? Especificamente no âmbito do conhecimento matemático, será que a concepção do possível aplicada a perguntas de natureza probabilística e combinatória traz desempenhos diferentes nesses dois campos de conhecimento? O presente estudo foi idealizado a partir dessas reflexões, e será aqui apresentado em sete capítulos.

O capítulo 1 traz considerações filosóficas e psicológicas acerca do possível. No capítulo 2 o leitor irá encontrar a contextualização do possível no âmbito da Psicologia da Educação Matemática. O capítulo 3 apresenta alguns estudos realizados com crianças, tanto no domínio de conhecimento matemático como também não-matemático.

O capítulo 4 (Método) traz inicialmente a contextualização e os objetivos deste estudo. Em seguida, descreve em detalhes os participantes, o material e os procedimentos adotados na coleta de dados.

O capítulo 5 refere-se ao sistema de análise utilizado para o tratamento dos dados, trazendo também recortes das entrevistas realizadas com as crianças, a título de exemplificação, para que o leitor tenha contato com os dados que serviram de base para a análise. Em seguida, o capítulo 6 apresenta os resultados relativos ao desempenho e às justificativas fornecidas pelas crianças.

O capítulo 7 discorre sobre as principais conclusões derivadas da análise dos resultados, fazendo, sempre que possível, comparações com outros estudos da área e proposições teóricas relacionadas ao tema central (possível). Ao final deste capítulo são feitas breves considerações acerca de possíveis implicações educacionais e ideias para pesquisas futuras. Na última parte deste trabalho são apresentadas todas as referências bibliográficas citadas no estudo.

Possível: questões filosóficas e psicológicas

1. Considerações filosóficas

Do ponto de vista filosófico o possível é aquilo que pode ser ou não ser. Entretanto, para abordá-lo de maneira mais aprofundada torna-se imprescindível levar em consideração as concepções de *real*, *necessário* e *impossível*. De acordo com Comte-Sponville (2011, p. 463), o possível “é a modalidade mais vasta, que inclui tudo o que é real, tudo o que pode se tornar real, tudo que se tornará necessariamente real”.

A partir de Abbagnano (2007, p. 818) tem-se que o real é aquilo que existe de fato ou efetivamente, enquanto que o necessário é algo “que não pode não ser” ou, como afirma Comte-Sponville (2011), aquilo que acontecerá inevitavelmente. Para Mora (2001) a noção de necessidade pode ser entendida de duas maneiras: 1) *necessidade ideal*, que expressa um encadeamento de ideias; 2) *necessidade real*, que expressa o encadeamento de causas e efeitos. A essa última concepção Japiassu (2008) denomina *necessidade física*, onde uma mesma causa determina sempre o mesmo efeito, estando assim relacionada à ideia de determinismo. Por fim tem-se o impossível, que é tido como algo que não pode ser; ou seja, algo que necessariamente não acontecerá.

Voltando-se à consideração feita anteriormente sobre o possível, verifica-se que o possível não se opõe nem ao real nem ao necessário, mas sim ao impossível (Abbagnano, 2007). Entretanto, o necessário e o impossível pertencem à esfera do que é *certo* (quer seja porque irá acontecer ou porque não irá acontecer), enquanto que o

possível encontra-se no âmbito da *incerteza*. De acordo com esse autor, há três definições conceituais do possível: a negativa, a positiva de possibilidade real e a positiva de possibilidade objetiva.

Na perspectiva da visão negativa, possível é “aquilo que não é necessariamente falso ou não inclui contradição”. (Abbagnano, 2007, p.911). Esse autor afirma que uma das teses fundamentais da noção negativa do possível é o fato da mesma poder ser inferida a partir do necessário, uma vez que o que é necessário deve ser também possível. Isso porque de acordo com a visão aristotélica, se o necessário não fosse possível ele seria impossível – o que geraria uma contradição. A outra tese fundamental à essa noção negativa do possível é a redução do mesmo ao não-impossível; dedução essa que também encontra respaldo na reflexão aristotélica citada, uma vez que o necessário é também possível.

Em relação à definição positiva do possível enquanto possibilidade real, tem-se o possível como potencial, sendo o potencial, por sua vez, entendido como algo que infalivelmente se destina a realizar-se (Abbagnano, 2007). Na visão hegeliana, a possibilidade real existe quando se tem todas as condições de algo e, portanto, esse algo deve tornar-se real. Porém, definida nesses termos, a possibilidade real considerada por Hegel em nada se distingue da necessidade, e tem o impossível como seu oposto. Desse modo, a definição de possível enquanto possibilidade real muitas vezes não se sustenta em seus próprios elementos de definição.

Já a definição positiva de possibilidade objetiva está baseada nos dados da experiência. Apesar de Kant nomeá-la também como possibilidade real, não se trata aqui de uma possibilidade destinada a realizar-se, como a definição exposta anteriormente. Na visão kantiana, a possibilidade real é aquela que tem por base os dados da experiência, onde as coisas podem ser possíveis sem que sejam reais. Cada

possibilidade objetiva tem por indispensável tanto a referência a um contexto de condições como a existência de regras técnicas determinadas. Segundo Abbagnano, a teoria da probabilidade baseia-se nessa noção de possibilidade objetiva. Essa é a concepção de possibilidade que permeia o presente estudo e suas reflexões.

2. Considerações psicológicas

No âmbito da psicologia o *possível* não tem sido um tema eleito para reflexões mais direcionadas. Tal fato é constatado pela escassez de obras que abordem essa questão, tanto do ponto de vista teórico-conceitual como também no que se refere a considerações acerca da evolução ontogenética dessa concepção e suas implicações para o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Após uma busca minuciosa sobre estudos que abordem o possível a partir de uma perspectiva psicológica – sem restrições a correntes teóricas – encontrou-se apenas os estudos realizados por Jean Piaget.

Piaget abordou de maneira central as concepções sobre o possível, bem como as diferenciações entre o possível, o real e o necessário em duas obras: *O possível e o necessário* (1985 – volumes 1 e 2) e *A origem da ideia do acaso na criança*¹ (1951).

Em *O possível e o necessário: a evolução dos possíveis na criança* (volume 1), Piaget apresenta experimentos realizados por ele e seus colaboradores envolvendo crianças entre quatro e doze anos, com o objetivo de buscar compreensões acerca dos possíveis para esses sujeitos. Entre os experimentos estão: *As posições possíveis de três dados sobre um suporte*; *As formas possíveis de uma realidade parcialmente escondida*; *Os trajetos possíveis de um carro*; *Construções livres com hastes articuladas*; *Como fazer um nível de água subir*; *A construção dos triângulos*.

¹ Essa em co-autoria com B. Inhelder.

Ao apresentar os resultados obtidos a partir da realização dos experimentos Piaget (1985) conduz a discussão sobre o possível tendo como foco dois aspectos por ele indicados como centrais e que estão interligados: a evolução dos possíveis com a idade e o desenvolvimento das estruturas operatórias. Em verdade, já no início da obra, o autor questiona a origem da relação entre esses dois aspectos: seria o desenvolvimento dos possíveis dirigido pela evolução das estruturas operatórias ou ao contrário, a formação dos possíveis é que permite a constituição dos sistemas operatórios? Essa última é a hipótese defendida por Piaget.

Na concepção piagetiana “o possível não é algo observável, mas o produto de uma construção do sujeito”, sendo pois formado progressivamente (Piaget, 1985, p. 07). No início dessa construção há uma indiferenciação entre o real, o possível e o necessário; ou seja, para a criança tudo que a ela se apresenta (o real) não só é o que é, mas também o que deve *necessariamente* ser, excluindo assim possibilidades de mudanças ou variações. De acordo com o autor,

“o pequeno sujeito não parte de um “real” constituído por puros observáveis para completá-lo a seguir com as construções de “possíveis” e de relações “necessárias”: o estatuto ontológico do estado inicial é, ao contrário, o de uma indiferenciação, aparecendo o real percebido ou manipulado como devendo necessariamente ser tal como é, e continuando em consequência o único possível, exceto a margem das variações admitidas como realizáveis em razão de já terem sido observadas e ainda fazerem parte de um setor desse real indiferenciado (Piaget, 1985, p. 133, grifos do próprio autor.)”.

A essas falsas “proibições” Piaget chamou “pseudo-necessidades” e “pseudo-impossibilidades” que são, como de fato se espera, complementares entre si. É nesse sentido que pode-se afirmar que “o real é, ao mesmo tempo, muito pobre relativamente ao possível e indevidamente enriquecido ou superestimado em relação ao necessário” (p. 134).

Ao tratar sobre o possível Piaget (1985) propõe aspectos funcionais e estruturais.

Do ponto de vista funcional o autor distingue o possível em:

- Possível hipotético – se refere a mistura de ensaios válidos e dos erros cometidos pelas crianças, que quando realizam esses ensaios não sabem, de antemão, se terão sucesso;
- Possível atualizável – é aquele selecionado em função dos resultados obtidos. Na concepção piagetiana cada possível atualizável pode provocar o surgimento de outro possível, por analogia ou associação. Para Piaget (1985, p. 87), a realidade atualizada “não é somente o que ela é, mas, na medida em que é considerada como resultante de uma escolha, o sujeito descobre que ela poderia ter sido outra e que, mesmo realizada, permanece fonte de variações úteis”;
- Possível dedutível – para que ele ocorra faz-se necessário que uma variação possível seja antecipada enquanto tal, ao invés de ser descoberta apenas no curso de uma ação já esboçada. Ao contrário do possível atualizável, que ocorre em função das variações extrínsecas do real, o possível dedutível ocorre em função das variações intrínsecas de um sistema causal, tendendo a tornar-se inferencial.
- Possível exigível – relativo a crença de que novas construções são realizáveis, ainda que não se encontre os procedimentos adequados.

No que se refere aos aspectos estruturais Piaget (1985) apresenta quatro níveis, que ele considera, de modo geral, a evolução dos possíveis:

- Possível engendrado gradualmente – ocorre através de sucessões analógicas onde uma sucessão acarreta outra. Uma vez que o sujeito não

conceitualiza antecipadamente os co-possíveis, trata-se de aberturas sucessivas de um possível ao seguinte;

- Co-possível concreto – esse nível já comporta mais antecipações simultâneas. Apesar do sujeito aqui já ser capaz de prever numerosas variações, ele se limita aquelas que vai atualizar. Esse ato de antecipar muitos possíveis é a fonte de conexões generalizáveis.
- Co-possível abstrato – nas palavras de Piaget (1985, p.132-133): “esses possíveis são simplesmente deduzidos, constituindo assim, em primeiro lugar, espécies de classes ou de séries virtuais”; as atualizações previstas pelos sujeitos são apenas exemplos representativos entre muitas outras variações concebíveis;
- Co-possível qualquer – nesse nível, as variações concebíveis no nível anterior tornam-se ilimitadas. Novamente citando Piaget (1985, p. 133): “o co-possível qualquer e ilimitado torna-se inteiramente dedutível e se apoia em mecanismos recursivos que ultrapassam de longe todo controle empírico”.

De acordo com Piaget (1985, p. 91), a evolução revela a sucessão progressiva “de um estado onde as variações tidas como possíveis são produzidas gradualmente em função dos resultados precedentes, isto é, a partir de dados extrínsecos, ... a um estado onde os possíveis resultam de variações intrínsecas deduzidas pelo sujeito”. Na visão piagetiana, tanto as transformações materiais da situação “como seus resultados dependem fisicamente do “real” e só são “possíveis” em relação ao sujeito que modifica esse real em ato ou em pensamento” (p. 68).

A partir das respostas dadas pelas crianças nos experimentos, Piaget as classificou em três níveis de evolução dos possíveis; níveis esses permeados pelos

aspectos funcionais e estruturais há pouco descritos. No nível I há uma indiferenciação entre o real, o necessário e o possível. Para esses sujeitos é mais fácil aumentar o número de “objetos possíveis” em um experimento construindo novos objetos partindo “do zero” (material entregue pelo experimentador) do que modificando aqueles já existentes.

No nível II os possíveis acessíveis ao sujeito são em sua maioria “concretos”, ou seja, atualizáveis na realidade pela ação do sujeito. Tem-se início aqui a constituição dos co-possíveis, com o sujeito prevendo um conjunto de variações antes de iniciar o deslocamento de um carro ou durante seu trajeto, por exemplo.

No nível III o possível torna-se verdadeiramente dedutível (graças a sua união com o necessário). Os sujeitos adquirem a noção de infinito, representando o duplo caráter do “qualquer um” em compreensão e de “ilimitado” em existência. É a ideia do co-possível abstrato, que significa a compreensão do sujeito de que as realizações que ele indica são apenas exemplos de um campo de variações tão numerosas que não podem ser realizadas uma a uma. Para o autor,

“a sucessão das variedades qualitativas de possíveis, das formas analógicas iniciais aos co-possíveis concretos, a seguir abstratos, manifesta-se por uma passagem das variações extrínsecas sem recursividade às variações intrínsecas recursivas e isso é de molde a favorecer o desenvolvimento das estruturas operatórias” (Piaget; 1985, p.26).

O autor aponta três razões que fundamentam a ideia de que “as limitações das famílias de co-possíveis estão ligadas às atualizações materiais que condicionam as operações “concretas” desse nível”: 1 – “as analogias e transferências de procedimentos são mais precoces do que as operações”; 2 – “as famílias de co-possíveis repousam essencialmente nas semelhanças e diferenças, enquanto as estruturas operatórias

exigem, ao contrário, um equilíbrio preciso entre as afirmações e as negações de diversas ordens”; 3 – “o processo que conduz da indiferenciação inicial do real, do possível e do necessário a uma diferenciação progressiva (e finalmente a uma integração de conjunto) situa-se numa escala mais global do que a formação das operações” (p. 35). Na concepção piagetiana o desenvolvimento dos possíveis e das estruturas formais são evidentemente solidárias, mas o desenvolvimento dos possíveis parece constituir um enquadre indispensável ao desenvolvimento das operações.

Essa relação é tão íntima que Piaget (1985) utilizou os mesmos estágios para discorrer acerca dos dois desenvolvimentos: o nível I coincidindo com o estágio pré-operatório; o nível II relacionado ao estágio das operações concretas e o nível III referente aos possíveis ilimitados e as operações hipotético-dedutivas, características das operações formais. Ao final do desenvolvimento de ambos os aspectos tem-se não apenas uma separação entre o possível, o real e o necessário, mas também uma integração dessas três instâncias. Vale ressaltar que não se fala aqui em possíveis “prontos” antes das operações serem desenvolvidas, mas sim de possíveis elementares, que serão elaborados pelas próprias condições operacionais.

O volume 2 da obra (*O possível e o necessário: a evolução dos necessários na criança*) pode ser visto como complementar ao volume 1, dada a relação existente entre as concepções de *possível* e *necessário*. Seguindo o mesmo modelo da investigação acerca do possível, Piaget e seus colaboradores realizaram experimentos que buscavam a compreensão da criança acerca do necessário, entre eles: *Um problema de necessidade física*; *A construção de um declive*; *Um caso de limitação necessária*; *As necessidades relativas à medida de comprimentos*; *Condições necessárias e suficientes na constituição de provas*; *O necessário e o suficiente num problema de possibilidades*.

A realização dos experimentos conduziu Piaget (1985, p. 122) a três resultados principais: 1) “a necessidade depende das composições realizadas pelo sujeito, não é um observável dado nos objetos”; 2) “ela não é um estado isolado e definitivo, mas que resulta de um processo de necessitação”; 3) a necessidade “é solidária com a constituição dos possíveis”. O fato da necessidade não ser um observável dado nos objetos não nega a importância dos observáveis enquanto suporte indispensável às deduções do sujeito, mas sempre a título de “dados exógenos” que serão interpretados. De acordo com o autor, esses observáveis podem ser entendidos como o que em física é denominado *os princípios*: “reguladores gerais atribuíveis ao real e ao mesmo tempo necessários a esses modelos”, ou seja, a necessidade inerente aos modelos físicos. É o que pode ser chamado de *necessitação*, “aquilo cuja negação é materialmente impossível” (Piaget, 1985, p. 11), e que dependendo da situação implica em composições sucessivas devido à necessidade de relações engrenadas.

Como exemplo desse processo tem-se o experimento onde as crianças tinham que construir um declive a partir de três pilares (A, B, C, onde uma bolinha deveria rolar de A à C. Ora, *necessariamente* A deve ser mais alto que B e este deve ser mais alto que C, caso contrário a bolinha não completa seu percurso. Entretanto, Piaget salienta que mesmo em situações desse tipo

“não significa que esta forma de necessidade seja extraída unicamente do real, uma vez que sua constituição exige as deduções do sujeito, mas isso postula um certo isomorfismo [...] entre a necessidade inerente à construção dos modelos e o que o sujeito deve admitir como “necessitável” no seio da realidade” (Piaget, 1985, p. 12).

O necessário só passa a existir para o sujeito a partir do momento em que ele é integrado em modelos dedutivos construídos pelo próprio sujeito.

No início da busca pela necessidade, ainda mesmo pelo reconhecimento do que Piaget chamou *necessitação*, pode-se dizer que, na compreensão do autor, aos olhos do sujeito nada é necessário. Através de procedimentos empíricos o sujeito começa a identificar a “necessidade exigível”, onde ele dá início às composições postuladas como necessárias, com base na experiência empírica e por isso ainda não dedutíveis. Aos poucos essa necessidade exigível – que se baseia na pesquisa empírica – abre espaço para o que Piaget (1985) chamou de “necessidade dedutiva ou operatória”, que por não mais recorrer necessariamente à ação é capaz de antecipar composições.

Essa evolução dos necessários – que indubitavelmente está relacionada ao aumento da idade – parece não conter a regularidade dos três níveis propostos por Piaget (1985) ao discorrer acerca da evolução dos possíveis. Em relação a esse último, em alguns experimentos, o autor propôs a divisão de um ou outro nível em sub-níveis. Porém, no caso dos experimentos acerca do *necessário*, mesmo propondo sub-níveis para o nível I e para o nível II em todos os experimentos, Piaget ainda sentiu dificuldade em categorizar as respostas dadas por alguns sujeitos. De tal modo que mais importante do que falar da evolução dos necessários em termos de níveis (I, II e III) é abordar o desenvolvimento dessas concepções a partir das ações e deduções dos sujeitos, bem como suas relações com o possível.

Na concepção piagetiana as interdependências entre o possível e o necessário são naturais. Assim como fez com o possível, Piaget (1985) distinguiu três estágios relativos ao desenvolvimento das necessidades. O primeiro deles, correspondente ao nível pré-operatório, é o estágio das “pré-necessidades” (inevitavelmente locais e incompletas) e das pseudonecessidades (crença de que a escolha atual é a única válida, quando na verdade ela se apoia em diversos possíveis). O segundo estágio, que acompanha o estágio das operações concretas, abarca as “co-necessidades limitadas”

(no sentido de que se constituem solidariamente e são limitadas pelos conteúdos concretos aos quais se aplicam). O terceiro nível, hipotético-dedutivo, permite falar em “co-necessidades ilimitadas”, uma vez que podem intervir em quaisquer deduções formais.

Note-se claramente aqui o paralelismo traçado por Piaget entre o desenvolvimento dos possíveis e dos necessários: o primeiro estágio deste corresponde ao estágio 1 dos possíveis engendrados por sucessões analógicas – ambos se limitam a poucas variações e atualizações do real recém-constatadas. O segundo nível, por sua vez, relaciona-se aos co-possíveis concretos e limitados, enquanto que o terceiro nível remete aos co-possíveis quaisquer e ilimitados, conforme descrito anteriormente.

Ao imaginar uma lei de evolução envolvendo o possível, o necessário e o real, Piaget distinguiu a relação entre eles em três períodos:

“O primeiro seria o de uma *indiferenciação*: o real acompanha-se, nesse caso, de múltiplas “pseudonecessidades”, enquanto o possível se reduz aos prolongamentos diretos do real atual. O segundo período (coincidindo com a formação dos “agrupamentos” e de suas operações “concretas”) seria o da *diferenciação* das três modalidades: o possível se desdobraria em famílias de co-possíveis; o necessário ultrapassaria as coordenações locais, gerando as composições operatórias, condição das formas necessárias, e o real consistiria em conteúdos concretos. O terceiro período seria o da integração das três modalidades em um sistema total de modo que o real aparece ao sujeito como um conjunto de atualizações entre os possíveis. Mas o real é, por outro lado, subordinado aos sistemas de ligações necessárias” (Piaget, 1985, p. 08-09, grifos do próprio autor).

Em outra obra, cronologicamente anterior a esses dois volumes citados, Piaget e Inhelder (1951) abordaram as questões do possível, bem como suas relações com o real e o necessário, a partir da ideia de *acaso*. Em *A origem da ideia do acaso na criança* os autores apresentaram diversos experimentos realizados com sujeitos de idades que variavam de cinco a quinze anos. Dentre os experimentos, compostos por diversas

tarefas envolvendo essencialmente as ideias de probabilidade e análise combinatória estavam: *Noções da mistura e da irreversibilidade; Tirar a sorte por pares; A quantificação das probabilidades; Operações de permutações; Acaso e “milagre” no jogo de cara e coroa*. Os autores consideram de antemão que a concepção de acaso se opõe a dois tipos de causalidade: determinismo mecânico e contradição radical do conceito de milagres. A partir das respostas dos sujeitos aos variados experimentos, Piaget e Inhelder propõem que a ideia do acaso se desenvolve ao longo de um contínuo de três estágios.

No estágio 1, que se encerra aos sete anos, a criança é incapaz de raciocinar sobre a instância do possível por não considerar simultaneamente a existência de diferentes possibilidades em cada tarefa, além de não ser capaz de incluir os casos favoráveis nos casos possíveis (ou seja, a parte no todo). Diante de experimentos envolvendo truques (como, por exemplo, uma barra imantada sobre um disco giratório de alumínio) – e consequentes alterações nos resultados prováveis (uma equivalência de possibilidades de paradas nos diferentes setores de mesmo ângulo do disco) – a criança aceita com naturalidade os aparentes “milagres”, não buscando explicações sobre os fatos. No que se refere aos experimentos envolvendo combinações e arranjos, as crianças não chegam a formação de um sistema, de um esquema combinatório das diferentes possibilidades, procedendo por tentativas empíricas.

Como coloca Pieruccini (2010), as crianças nesse estágio não identificam a imprevisibilidade, prendendo-se as relações subjetivas e intuições de regularidades dos fenômenos. De acordo com Piaget e Inhelder (1951, p. 204), a criança, nesse nível, apresenta uma “indiferenciação das modalidades do possível, do real e do necessário”, de modo que para os autores tanto a ideia de acaso como qualquer noção de probabilidade permanecem inacessíveis à criança.

Ao longo do estágio 2, que se inicia por volta dos sete anos e se encerra aos onze anos, a criança torna-se capaz de realizar o encaixe das partes complementares (casos favoráveis e casos desfavoráveis) em um todo. Notadamente quando estão diante de situações envolvendo truques, as crianças começam a duvidar da previsibilidade dos casos isolados, e passam a buscar previsões de conjunto, dando início a um processo de quantificação de probabilidades. No entanto a criança fracassa ao analisar o possível de forma exaustiva (Piaget & Inhelder, 1951), por ainda não compreender o papel dos grandes números. No que se refere aos experimentos de arranjos e combinações, as crianças nesse estágio realizam interpretações cada vez mais corretas e buscam um sistema de associação entre as diferentes possibilidades, que ainda permanece incompleto.

Gradativamente a criança mobiliza as noções de reversibilidade e do esquema combinatório das situações concretas para as situações abstratas, alargando-as para o domínio do possível (Carvalho & Fernandes, 2007). A partir do momento em que a criança torna-se apta a dissociar-se do real enquanto aquilo que a ela se apresenta (Piaget, 1996), ela torna-se também capaz de diferenciar o possível (ou indeterminado) do necessário (deduzido operatoricamente), o que a conduz à descoberta do acaso.

No último estágio descrito por Piaget e Inhelder (1951), a criança torna-se capaz de analisar a totalidade dos casos possíveis como um conjunto, o que propicia um julgamento mais apurado sobre a probabilidade propriamente dita. Outro fator fundamental para o domínio da probabilidade é a descoberta da “Lei dos grandes números”, o que leva a criança a ter também o domínio das diferentes combinações possíveis, ou seja, a criança passa a ter a compreensão das operações combinatórias.

No que se refere às operações de arranjo, a criança descobre a lei do quadrado multiplicador para um número pequeno, generalizando em seguida para números

maiores. Nesse estágio a criança não depende mais apenas das constatações concretas, uma vez que é capaz de reconstruir o real através do raciocínio hipotético-dedutivo. De acordo com os autores, as noções de probabilidade e acaso complementam a construção da lógica da criança.

O possível no âmbito da Psicologia da Educação Matemática

Na visão piagetiana tanto o possível quanto o necessário constituem instrumentos de organização cognitiva. Pensar sobre o possível, *na maioria das vezes*, implica em transitar em meio a incertezas. Ressalta-se *na maioria das vezes* porque em algumas situações, ao pensar sobre o possível, cai-se no âmbito das instâncias do *certo* – onde encontram-se o *necessário* e o *impossível* – e do *real* – que uma vez que já é não requer inferências acerca da sua possibilidade de ser.

Ou seja, ao conjecturar sobre o possível o sujeito se distancia da realidade que lhe é imediata, o que sugere indícios de um desenvolvimento cognitivo já em níveis superiores. Piaget e seus colaboradores, como dito anteriormente, abordam o raciocínio sobre o possível – e suas relações com o desenvolvimento cognitivo em três obras: *O possível e o necessário* (volumes 1 e 2) e *A origem da ideia de acaso na criança*. De modo geral, nessas três obras, os autores investigaram o possível ou de forma intimamente relacionada a conteúdos matemáticos específicos *ou* de maneira mais geral, sem associar a tal concepção um caráter matemático.

1. O possível e o conhecimento matemático

De acordo com Piaget e Inhelder (1951) a noção de probabilidade é uma síntese que nasce entre as *operações* e o *acaso*. Para esses autores, o *acaso* representa algo que não foi diretamente causado, e uma vez que não se tem o domínio da causa não se pode pré-

estabelecer o efeito estando o acaso, pois, no domínio do imprevisível e, portanto, daquilo que pode – ou não – ser possível.

Já as *operações* – aquilo que é operatorialmente deduzido – dizem respeito às ações do sujeito no ambiente, ao que está sob o domínio do sujeito. Coutinho (1994) parece estar de acordo com esses autores ao afirmar que a probabilidade se refere em parte à nossa ignorância, e em parte aos nossos conhecimentos. Ou seja, para se pensar de forma probabilística – e combinatória – o sujeito inevitavelmente encontra-se no âmbito do possível.

Quando crianças pequenas eficientemente estimam o nível de chance de ocorrência de um evento (Spinillo, 2002; 1997a, 1997b), expressam noções de mais/menos provável (Nikiforidou & Pange, 2007), ou esboçam noções que requerem raciocínio combinatório (Pessoa & Borba, 2009), inevitavelmente estão permeando a esfera do possível para conjecturar sobre algo que (ainda) não é real e pode – ou não – vir a ser. Sendo assim, constata-se de forma indubitável as relações entre a concepção do possível e o raciocínio em probabilidade e análise combinatória. Tal fato torna possível que questões de cunho probabilista e / ou combinatório sejam usadas com o objetivo de “acessar” a concepção de possível em crianças.

Faz-se, pois, necessário tecer breves considerações acerca desses domínios de conhecimento.

1. 1. Probabilidade

O termo probabilidade é derivado da palavra de origem latina *probare*, que significa provar, testar². Probabilidade significa a medida de possibilidade de um evento ou classe de eventos (Abbagnano, 2007). De maneira geral o uso do termo provável ocorre para designar eventos ou classe de eventos incertos (Carvalho, 2005). Apesar do interesse em quantificar as ideias probabilísticas ser bastante antigo, as descrições matemáticas para uso nesse tipo de problema só vieram a existir tardiamente, através da Teoria das Probabilidades (Cabral Junior, 2009). No âmbito dessa teoria, que busca quantificar a noção de provável, os conceitos probabilísticos são representados em termos formais, que são manipulados por regras lógicas e matemáticas e cujos resultados são interpretados ao se voltar ao domínio do problema.

Do ponto de vista formal a Teoria das Probabilidades conta com conceitos-chaves presentes nas diversas situações probabilísticas. O primeiro deles é o *espaço amostral*, que consiste no conjunto de todos os resultados possíveis para um dado experimento. Outro conceito presente em qualquer experimento de probabilidade é o *evento*, que se refere a todo e qualquer resultado do experimento, sendo este, pois, necessariamente um subconjunto do espaço amostral (Dantas, 2008). Nesse contexto existem dois tipos de experimentos. Os *experimentos determinísticos* são aqueles que ao serem repetidos nas mesmas condições produzem os mesmos resultados. Já os *experimentos aleatórios*, ainda que repetidos nas mesmas condições, não (necessariamente) produzem os mesmos resultados.

Em termos numéricos a probabilidade de um evento é convencionalmente representada por um número real entre 0 e 1 (Abbagnano, 2007). Um evento impossível

² Disponível em <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Probabilidade>>. Acesso em: 22 jun. 2011.

de acontecer tem a sua probabilidade igual a zero, ao passo que um evento de ocorrência certa tem sua probabilidade igual a um. Desse modo, um evento que é mais provável de acontecer tende a se aproximar de um, enquanto um evento menos provável encontra-se numericamente mais próximo de zero. Esse número entre 0 e 1 é o resultado da razão entre o número de casos favoráveis (aquilo que se pretende) e o número total de casos possíveis (Carvalho, 2005). Tal maneira de calcular a probabilidade está de acordo com a chamada *Probabilidade clássica*.

Segundo Dantas (2008) essa ideia surgiu com Galileu na Idade Média, quando este propôs a ocorrência de eventos “igualmente possíveis”. Ou seja, a interpretação da probabilidade do ponto de vista clássico requer a existência de espaços amostrais equiprováveis (Marques, 2010), onde os eventos elementares possuem a mesma chance de ocorrência (como, por exemplo, as duas faces de uma moeda honesta ou as seis faces de um dado regular).

No entanto, muitas vezes não é possível saber de antemão se os resultados de uma situação de incerteza teriam as mesmas chances de acontecer (Coutinho, 1994). Diante desses casos o cálculo a ser realizado encontra-se no domínio da noção de *Probabilidade frequencial*, fundamentada na “Lei dos grandes números”. Enunciada por James Bernoulli em 1713³, a “Lei dos grandes números” tem como elemento central a ideia de que quanto maior for o número de experimentos realizados mais próxima a frequência relativa de um evento estará da sua ocorrência. Ou seja, quanto maior for o número de eventos envolvidos no experimento, mais a Probabilidade frequencial se aproximará da Probabilidade clássica.

³ Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_dos_N%C3%BAmoros_Grandes>. Acesso em: 27 ago. 2010.

Porém existem situações onde a repetição do experimento não pode ser realizada ou, ainda que possa ocorrer, a repetição não se dá em condições idênticas (Dantas, 2008). Associa-se a esses os casos em que é impossível a realização de cálculos numéricos para medida de probabilidade, mas que, no entanto, permitem avaliações qualitativas.

Sendo assim, tanto a concepção clássica de probabilidade quanto a concepção frequencial mostram-se de certa forma insuficientes para o fim que se propõem. Existe, pois, outro modo de lidar com as questões de possibilidades. Enquanto o termo *probabilidade* se refere à medida numérica da ocorrência das diferentes possibilidades (Marques, 2010), o termo *chance* se refere às estimativas (qualitativas) de ocorrência das possibilidades em questão. Sendo assim, o conceito de chance mostra-se, pois, bastante relevante em situações de análise de possibilidades, quer seja devido à natureza do fenômeno (que não permite quantificações e / ou repetições), quer seja devido a especificidades dos sujeitos que analisam tais situações (como por exemplo crianças, que por ainda não terem adquirido instrução escolar para realizar alguns tipos de cálculos específicos, podem apresentar dificuldades no processo de quantificação das possibilidades, o que não as torna incapazes de julgar acerca da ocorrência de eventos).

De acordo com Spinillo (1997a; 1997b), os princípios essenciais do conceito de chance são as *quantidades* e as *relações*. As *quantidades* referem-se tanto as duas partes (casos favoráveis e casos desfavoráveis) como ao todo (casos possíveis). Já as *relações* referem-se às comparações estabelecidas entre essas quantidades, que tanto podem ser relações do tipo parte-parte (comparações entre os casos favoráveis e os casos desfavoráveis) como do tipo parte-todo (comparações entre os casos favoráveis – ou desfavoráveis – e os casos possíveis). Ao estimar probabilidades, a criança deve levar

em consideração esses princípios, que guardam relação direta com os conceitos-chaves de probabilidade há pouco descrito.

1. 2. Análise combinatória

Outro domínio da matemática que assim como a probabilidade lida com as possibilidades é a análise combinatória. De acordo com Merayo (2001) a análise combinatória se refere a uma técnica utilizada na descoberta do número de elementos existentes em um conjunto sem que seja necessária a contagem um a um.

Apesar de ter surgido no contexto dos jogos de azar – como por exemplo lançamentos de moedas e jogos de dados – a análise combinatória, enquanto campo de estudo, desenvolveu-se consideravelmente, sendo hoje aplicada em áreas diversas como o estudo da probabilidade, estatística, confecção de quadros de horários, etc. (Pessoa & Borba, 2010). Para Vazques e Nogute (2004) a combinatória moderna é, de maneira geral, composta por quatro aspectos: listar, contar, estimar e existir. No entanto, como salientam Pessoa e Borba (2009, p. 115), a *contagem* que caracteriza a análise combinatória “exige que seja superada a simples ideia de enumeração de elementos de um conjunto, para passar a contagem de grupos de objetos, ou seja, de subconjuntos, tendo como base o raciocínio multiplicativo”.

Essa modalidade de raciocínio pode aparecer através do uso de diferentes “técnicas” de contagem. Uma delas é o *produto cartesiano*: “Dados dois conjuntos A e B , o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto dos pares ordenados (a,b) , onde a é elemento de A e b é elementos de B ” (Santos *et al.*, 2007, p. 07). Outra técnica bastante utilizada é a *árvore de possibilidades*, que ao se apoiar em esquemas gráficos proporciona uma visão mais clara do número de decisões, mas como afirmam Iezzi et al. (2004), pode se

tornar difícil e confusa no caso de muitos conjuntos ou de muitos elementos no(s) conjunto(s). Notadamente para esses casos, mas podendo ser aplicado em todos os outros, usa-se o princípio multiplicativo, que se caracteriza da seguinte maneira:

“Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$ ” (Santos *et al.*, 2007, p. 39).

Ou seja, o princípio multiplicativo permite calcular o número total de possibilidades sem que seja necessário enumerá-las.

Todas essas “técnicas” de contagem são amplamente utilizadas em tarefas que demandam o raciocínio combinatório. De acordo com Mekhmandarov (2000) esse tipo de tarefa requer o entendimento de quatro princípios básicos: 1) saber que um par é constituído por um e somente um elemento de cada um dos dois conjuntos; 2) entender que cada par é um novo elemento no novo conjunto produto; 3) aceitar o fato de que cada elemento dos “conjuntos-base” pode aparecer em diversos pares do conjunto produto; 4) entender que cada par aparece apenas uma vez no conjunto produto.

Para Santos *et al.* (2007), pode-se pensar em três construções clássicas da análise combinatória: *permutações*, *arranjos* e *combinações* de objetos⁴. Em seu trabalho, Silva (2010) apresenta os problemas de produto cartesiano, igualmente representativos da classe de problemas de análise combinatória, porém mais simples que os problemas de permutação, arranjo e combinação. Serão feitas aqui breves considerações acerca de cada uma dessas modalidades de problemas:

⁴ Apesar de haver permutações, arranjos e combinações *de repetição*, essa breve explanação se detém à modalidade *simples* das construções em análise combinatória.

- Produto cartesiano → Esses problemas são caracterizados por dois ou mais conjuntos distintos combinados, a fim de formar um terceiro conjunto – distinto dos “conjuntos-base” (Pessoa & Borba, 2010).

Ex. Na sorveteria eram vendidos sorvetes de uma bola que podiam ser de três sabores diferentes (morango, baunilha e chocolate) e dois tipos de casquinhos (claro e escuro). De quantas maneiras diferentes você pode montar o sorvete?

- Permutação → A permutação é utilizada quando se deseja analisar de quantas maneiras diferentes é possível agrupar ordenadamente todos os n elementos de um conjunto. Nos problemas de permutação não são permitidas repetições de elementos (todos os elementos são usados apenas uma vez) e a ordem dos mesmos é considerada. Matematicamente tem-se que $P_n = n!$, ou seja, o número de permutações possíveis em um conjunto de n elementos é o fatorial de n (Santos *et al.*, 2007).

Ex. Calcule o número de anagramas da palavra C A S A.

- Arranjo → No caso dos arranjos também não são permitidas repetições dos elementos, sendo igualmente considerada a ordem dos mesmos. A diferença do arranjo para a permutação é que no arranjo não se trabalha com todos os elementos do grupo; considera-se sempre um subgrupo de elementos. Elementos ordenados de diferentes maneiras compõem diferentes possibilidades, de modo que a ordem de disposição dos elementos é fator considerado nos arranjos.

Ex. Chegaram às etapas finais do campeonato pernambucano Sport, Santa Cruz, Náutico e Salgueiro. De quantas maneiras diferentes pode ser a classificação final?

- Combinação → Assim como nos arranjos, nas combinações trabalha-se com um subgrupo de elementos do grupo original, porém, a ordem dos elementos não é levada em consideração. Ou seja, toda combinação é um arranjo onde a ordem não importa.

Ex. Gabriela, Geovana e Liana participarão de um sorteio de duas bonecas.

Quais são os resultados possíveis para esse sorteio?

2. O possível e o conhecimento não-matemático

Nos experimentos que não traziam a investigação do possível associada a conteúdos matemáticos (probabilidade e análise combinatória), Piaget e seus colaboradores não ficaram restritos a um domínio de conteúdo específico. Os experimentos (alguns deles serão apresentados no subitem 4.2. do capítulo 3) envolviam objetos diversos e tarefas de naturezas distintas, sendo a maioria ou de manipulação de objetos por parte do sujeito ou calcadas na atividade perceptual desses sujeitos.

Apesar da cuidadosa busca feita na literatura, não foram encontrados outros estudos que investigassem a concepção do possível em si, nem associado ao conhecimento matemático nem dissociado deste.

Estudos realizados com crianças

Como dito no tópico anterior, são escassos estudos que abordem a concepção do possível. Entretanto, sabe-se também que pesquisas que envolvem o raciocínio probabilista e / ou combinatório permitem inferências ricas e válidas acerca do pensamento sobre o possível, ainda que não seja esse o foco dos mesmos. Sendo assim, serão apresentados estudos que focam os conteúdos de probabilidade e análise combinatória – onde pode-se inferir considerações sobre a concepção de possível associada ao conhecimento matemático – e os estudos realizados por Piaget sobre o possível, desprovidos de conteúdo matemático.

1. Estudos com conteúdo matemático

Há uma tendência dos estudos acerca das habilidades cognitivas em enfatizar os limites do pensamento infantil em prol das noções emergentes (Spinillo, 1995). Talvez por herança da teoria piagetiana as concepções probabilísticas e o raciocínio combinatório – intimamente relacionadas ao raciocínio de possibilidades – foram durante muito tempo aceitos como um privilégio do pensamento operatório formal, cabendo apenas a adolescentes e adultos. Isso porque de acordo com Piaget e Inhelder (1951) a criança não pode considerar apenas os casos isolados – uma vez que eles são imprevisíveis – tendo que lidar com o todo enquanto um sistema de possibilidade múltiplas; para isso a criança necessita de um raciocínio que só se desenvolve durante o estágio operatório formal, que se encerra por volta dos doze anos.

Entretanto, estudos sucessivos realizados com crianças menores cada vez mais sugerem que as mesmas possuem noções sobre o raciocínio probabilista. Pesquisas atuais indicam que mesmo antes de se submeterem ao processo de ensino formal e ainda sem dominar os cálculos numéricos, crianças já se mostram capazes de compreender alguns princípios essenciais ao pensamento probabilista e ao raciocínio combinatório. A seguir são apresentados alguns resultados de estudos nessa direção, realizados não só no Brasil como também em outros países.

1. 1. Probabilidade

Spinillo (2002) investigou as estratégias utilizadas por 40 crianças brasileiras com idades entre sete e oito anos na estimativa de probabilidade em tarefas envolvendo bolas de gude. As atividades propostas às crianças possibilitavam comparações entre diferentes níveis de probabilidades, favorecendo tanto a compreensão das relações parte-parte como também das relações parte-todo. Nessa pesquisa não foi realizada ênfase em nenhuma das quantidades envolvidas nas tarefas (casos favoráveis, casos desfavoráveis e casos possíveis). Para a realização das tarefas foi proposto às crianças o uso de estimativas de probabilidade como alternativa à realização de cálculos numéricos. Eram apresentadas às crianças doze tarefas divididas em três conjuntos de bolas de gude (azuis e rosas) para que elas representassem e ordenassem os diferentes índices de probabilidade de retirada da cor azul (casos favoráveis) – sendo, pois, os casos desfavoráveis as bolas de gude rosa, e os casos possíveis a totalidade de bolas de gude de ambas as cores.

A análise dos dados mostrou quatro tipos de estratégias utilizadas pelas crianças: estratégia 1 – a criança atenta apenas para os casos favoráveis (bolas de gude azuis);

estratégia 2 – a criança considera, de modo absoluto, tanto os casos favoráveis quanto os casos desfavoráveis (bolas de gude rosa), apesar de ainda não entender 100% de chance como certeza da ocorrência dos eventos favoráveis; estratégia 3 – nesse caso a criança considera os casos favoráveis e desfavoráveis em termos absolutos, e demonstra entender que 100% de chance implica em certeza; estratégia 4 – os casos favoráveis e desfavoráveis são considerados simultaneamente em termos relativos, além de serem feitas referência à “metade” quando se trata de um conjunto com 50% de chance de retirada de uma bola de gude azul.

Os resultados dessa pesquisa (Spinillo, 2002) foram condizentes com a hipótese de que as crianças, mesmo as menores (sete anos), possuem habilidade para estimar o nível de chance de ocorrência dos casos favoráveis com base nas relações parte-parte; ou seja, nessa idade as crianças já são capazes de estimar probabilidades. As crianças maiores (oito anos) além de estimar probabilidades, já o fazem em termos relacionais, quando comparavam simultaneamente os três conjuntos de bola de gude.

Com o uso de novas tecnologias, Nikiforidou e Pange (2007) chegaram a resultados nessa mesma direção. O estudo realizado pelos pesquisadores teve por objetivo investigar como algumas combinações de cores podem ser manipuladas por crianças da pré-escola em uma tarefa probabilística, apoiada em um jogo de computador (PowerPoint). Participaram do estudo 30 crianças de uma pré-escola pública de Atenas, com idade entre cinco e seis anos. Cada criança sentava-se em frente ao computador e ouvia o experimentador contar a história de uma abelha que se sentia cansada após voar o dia inteiro e precisava parar em uma flor para descansar. Enquanto o experimentador narrava a história, a criança via no computador ilustrações da mesma. A história era interrompida no momento em que a abelha procura em qual flor descansar. Primeiro os

participantes deviam predizer onde a abelha pararia e explicar sua estimativa; depois a abelha seguia para a flor.

O experimento era composto de duas condições, cada uma delas contendo três situações. Na situação 1 eram quatro flores vermelhas e uma branca (ou seja, combinação de duas cores onde a vermelha era predominante). Na situação 2 eram três flores vermelhas, uma flor branca e uma flor rosa (combinação de três cores onde a vermelha é dominante). Na situação 3 eram duas flores vermelhas, uma flor branca, uma flor rosa e outra amarela (combinação de quatro cores). Na primeira condição, em todas as situações, a abelha era programada para selecionar uma flor vermelha (a mais provável). Na segunda condição a abelha podia parar em alguma outra cor além da vermelha. Nas duas condições a apresentação espacial das combinações de cores era a mesma, assim como a história contada às crianças.

Todas as justificativas dadas pelas crianças baseavam-se em intuições e preferências pessoais ou em raciocínio mais científico (co-ocorrências; mais ou menos provável). Na situação 1 – nas duas condições – a quase totalidade das crianças (25) afirmavam ser mais provável a abelha escolher uma flor vermelha, expressando noções de mais / menos provável. Um resultado semelhante foi constatado na situação 2 (19 crianças). Já na situação 3 apenas oito crianças indicaram a cor vermelha como resposta das suas inferências. Ou seja, as crianças podem operar cientificamente com condições de duas ou três combinações de cores, mas com quatro elas têm dificuldade. De acordo com Nikiforidou e Pange (2007, p. 03), nessa última situação as “crianças pareciam não ser hábeis para predizer e fazer julgamentos fazendo uso do pensamento probabilista”⁵.

Também com o objetivo de buscar informações sobre as noções básicas de probabilidade das crianças, Way (1996) realizou um estudo com 50 crianças de uma

⁵ Tradução nossa.

escola australiana que tinham entre cinco e 12 anos. O pesquisador estava particularmente interessado na percepção das crianças acerca das relações entre espaço amostral e probabilidade de ocorrência dos casos favoráveis, assim como nas diferenças nas performances das crianças em tarefas com um único espaço amostral e tarefas envolvendo dois espaços amostrais.

Way (1996) desenvolveu e aplicou um protocolo de pesquisa estruturado, que consistia de quatro tarefas acompanhadas de questões apresentadas em um contexto de jogo. Na tarefa 1 as crianças escolhiam duas cores de fichas de plástico que eram colocadas em uma caixa na razão de 3:1. O pesquisador então pedia a elas que indicassem o resultado de retirada de ficha mais provável de uma mistura aleatória e explicassem a razão da sua escolha, o que era feito seis vezes consecutivas. O experimentador então perguntava quais seriam os resultados ao repetir a ação mais seis vezes. Cada vez que a ficha era retirada, ela era em seguida colocada de volta para a nova mistura. A tarefa 2 era semelhante a tarefa 1, porém as fichas retiradas não eram colocadas de volta na caixa.

A tarefa 3 consistia em uma corrida de carros e usava: quatro carros de cores diferentes, uma pista de corrida (composta por quatro linhas, todas elas divididas em oito quadrados que iam do início ao fim da pista) e quatro diferentes roletas com setores das cores dos carros, em diferentes proporções ((a) 2:2:2:2; (b) 4:2:1:1; (c) 3:1:2:2 e (d) 3:1:4:0). O jogo começa com a roleta de iguais proporções. Em seguida o experimentador indicava outra roleta e a criança deveria escolher a cor do carro com maior chance de ganhar. No terceiro jogo a situação era invertida: o experimentador selecionava um dos carros e a criança deveria escolher a roleta que dava mais chance daquele carro vencer. Em seguida o experimentador solicitava a criança para indicar a roleta que favorecia cada um dos carros. Para algumas escolhas da criança o

experimentador questionava sobre a certeza que ela tinha em predizer seu resultado, buscando explicações para a resposta dada.

Por fim, a quarta tarefa requeria que a criança transferisse para as fichas na caixa as proporções contidas em algumas roletas da corrida de carro. O experimentador solicitava que a criança explicasse sua estratégia. Uma quinta tarefa era dada apenas as crianças da escola secundária⁶, onde a criança tinha que desenvolver um raciocínio proporcional para julgar a probabilidade de tirar fichas de uma dada cor (vermelho) ao comparar jarros com diferentes combinações de fichas amarelas e vermelhas, explicando suas respostas.

Os resultados preliminares do estudo de Way (1996) surgiram a partir da categorização das respostas dadas pelas crianças como corretas ou incorretas, tanto no que se refere a “previsão” dos resultados como em relação às justificativas. De maneira geral esses dados mostraram que as crianças, mesmo as menores, são hábeis em realizar uma previsão correta, apesar de não conseguirem dar uma justificativa “fundamentada” para suas respostas.

Nas primeiras tarefas (das fichas na caixa) o experimentador constatou que o raciocínio das crianças era inapropriadamente influenciado pelos resultados das misturas anteriores. A tarefa da corrida de carro foi mais fácil para as crianças do que as outras. Especificamente em relação ao grupo de crianças de 5-6 anos, foi observada uma dificuldade em reconhecer espaço amostral igualmente provável, e de identificar um espaço amostral para impossibilidade (de um dos carros ganhar – roleta (d)).

A sub-amostra que foi submetida às tarefas de proporção teve essa como sendo a tarefa mais difícil, tendo as crianças dificuldade em reconhecer a igual proporcionalidade dos espaços amostrais. O erro mais comum nessas tarefas era

⁶ Que na Austrália inicia-se por volta dos 12 anos.

decorrente do fato das crianças compararem apenas a cor alvo (casos favoráveis), ignorando o restante das fichas de outra cor. Para Way (1996), os resultados do estudo indicam de maneira óbvia uma forte ligação entre a idade e o pensamento probabilista.

A ideia de investigar o raciocínio probabilista através de um jogo de corrida de carros com roletas também foi utilizada no estudo realizado por Mousoulides e English (2009). O objetivo dos pesquisadores era investigar o entendimento e as estratégias intuitivas das crianças na resolução de problemas relacionados à probabilidade, usando como base o modelo desenvolvido por Jones et al. (1997). Participaram da pesquisa doze estudantes de “jardim da infância” (*kindergarten*)⁷ de uma escola rural da Austrália, randomicamente selecionados, sendo seis com idade entre três e quatro anos e seis com idade entre cinco e seis anos. Nenhum deles havia sido formalmente instruído sobre probabilidade. Como base para a tarefa, os pesquisadores utilizaram um *software* que reproduzia uma situação de corrida de carro (*Car Racing*)⁸, representada em um desenho que continha a posição de cada carro em uma tabela e uma roleta dividida em seis setores, sendo dois de cada cor (e cada uma das cores referente a um carro de corrida).

Para avaliar o pensamento probabilista dos participantes os pesquisadores administraram um protocolo de entrevista semi-estruturada, com tarefas associadas aos quatro construtos propostos por Jones et al. (1997): espaço amostral, probabilidade de um evento, comparações de probabilidade e probabilidade condicional, em dois dos níveis propostos pelos autores (subjetivo e transicional). As entrevistas continham perguntas do tipo: “*Que cor você irá tirar se você girar a roleta de novo e de novo?*” e

⁷ De maneira geral o termo pode ser traduzido como “Jardim da Infância” e em algumas partes da Austrália é destinado a crianças com quatro anos em média, consistindo em um precursor para a Pré-escola propriamente dita e a Educação Primária.

⁸ <http://scratch.mit.edu>. Acessado em 15 de fevereiro de 2012.

*“Qual cor tem a maior chance de aparecer?”*⁹. O *software* permitia que no decorrer da entrevista o experimentador alterasse a divisão inicial das cores na roleta.

Ao apresentar os dados das entrevistas de duas crianças, cada uma pertencendo a um dos grupos do estudo, Mousoulides e English (2009) indicam que a criança mais nova frequentemente baseia seus comentários e justificativas de respostas em crenças subjetivas. Já a criança mais velha (seis anos) raramente fundamenta suas respostas em crenças subjetivas. O que surpreendeu os pesquisadores foi que, além disso, a criança baseava suas respostas e comentários em suas intuições de probabilidade (já observadas) e no entendimento de outros construtos matemáticos.

Essa constatação chamou a atenção dos autores dada a idade das crianças (apenas seis anos) e a ausência de instrução formal para a mesma. De acordo com Mousoulides e English (2009), os resultados desse estudo dão evidências de que os conceitos de probabilidade podem ser introduzidos às crianças já a nível de “jardim de infância”, e que o ensino dos mesmos precisa considerar tanto as estratégias intuitivas que a criança já possui, como também seus “modelos cognitivos” relacionados a probabilidade e sentido de número.

Ainda no contexto de jogos, mas com uma proposta um pouco diferente, Cãizares et al. (2003) realizaram na Espanha um estudo com duas amostras de crianças, totalizando 467 participantes (entre 10 e 14 anos), ao analisar suas concepções sobre jogos de honestidade, levando em consideração como a criança aplica a ideia de valor esperado para determinar a honestidade (justiça) de um jogo. Os pesquisadores consideraram para o estudo as percentagens de respostas corretas e incorretas, bem como os argumentos dados pelos alunos para justificarem suas respostas em duas questões: *“Eduardo tinha 10 bolas de gude brancas e 20 pretas em sua caixa. Luis*

⁹ Tradução nossa.

tinha 30 bolas de gude brancas e 60 pretas em sua caixa. Eles jogaram um jogo de chance. O vencedor é a criança que tirar uma bola de gude branca primeiro. Se cada um deles tirar uma bola de gude branca simultaneamente, ninguém ganha e o jogo tem que continuar. Eduardo reclama que o jogo não é justo porque na caixa de Luis tem mais bolas de gude brancas do que na sua caixa. Qual a sua opinião sobre isso?” e “Maria e Esteban jogam um jogo de dados. Maria ganha 1 peseta¹⁰ se o dado apresentar 2, 3, 4, 5 ou 6. Se o dado apresentar 1 Esteban ganha algum dinheiro. Quanto Esteban deveria ganhar quando ele arremessasse 1 se o jogo é para ser justo? Por quê?”¹¹.

Cânizares et al. (2003) constataram que de maneira geral “jogo justo” é sinônimo de resultados equiprováveis. Entretanto, o que chamou a atenção dos autores foi o fato da dificuldade de muitos alunos não está em julgar onde o jogo é honesto, mas sim em estabelecer se há ou não equiprobabilidade. Especificamente em relação ao item 2, Cãnizares et al. concluíram que as crianças mais jovens não têm habilidade para coordenar diferentes variáveis no problema (elas compararam ou a probabilidade de um dado resultado ou o dinheiro a ser dado a cada jogador, mas não consideraram as duas juntas). Os pesquisadores encontraram ainda, a partir das respostas dos alunos, uma variedade de interpretações para o conceito de justiça (no jogo). De acordo com os autores esses resultados sugerem que pode ser apropriado incluir “justiça” no ensino de probabilidade. Os achados desse estudo podem ser um argumento para começar a ensinar conceitos de probabilidade no início da vida escolar.

Crianças brasileiras que ainda não haviam iniciado o processo de instrução escolar sobre probabilidade participaram do estudo realizado por Spinillo (1997a;

¹⁰ Moeda corrente na Espanha entre os anos de 1869 e 2002.

¹¹ Tradução nossa.

1997b) onde também não era exigido das mesmas a realização de cálculos para respostas precisas, uma vez que as tarefas propostas envolviam o uso de estimativas. As tarefas continham os dois tipos de relações (parte-parte e parte-todo) e nesse caso a experimentadora enfatizava igualmente o papel desempenhado por cada uma das partes (casos favoráveis e casos desfavoráveis) e pelo todo (casos possíveis).

Duas situações foram propostas às crianças, que tinham entre sete e oito anos. Na primeira delas a criança devia ordenar três arranjos dados em função do nível de chance de ocorrência dos casos favoráveis. A segunda situação solicitava a construção de um arranjo (composto de fichas azuis e rosas, assim como na primeira tarefa), em função de um nível de chance estabelecido pelo experimentador. Essa situação de construção representou um procedimento metodológico inovador diante daqueles tradicionalmente adotados pelas pesquisas da área até então (Spinillo, 1995).

A pesquisadora observou que as crianças fizeram uso de três estratégias distintas: estratégia 1 – consideração apenas do número absoluto de casos favoráveis, sem considerar os casos possíveis; estratégia 2 – isolamento de um dos três arranjos, voltando a considerá-lo somente após ter realizado a comparação entre os outros dois, ainda em termos absolutos; estratégia 3 – a criança realiza a comparação entre os três arranjos em termos relativos, considerando tanto os casos favoráveis como os casos desfavoráveis.

Através do uso de estimativas as crianças participantes do estudo apresentaram noções sobre o conceito de chance. Essas noções aparecem primeiro nas relações do tipo parte-parte (Spinillo, 1997a; 1997b). As duas situações propostas às crianças implicaram diferentes níveis de dificuldades: a situação de construção do arranjo mostrou-se mais fácil do que a tarefa de ordenação. De acordo com Spinillo essa

diferenciação se deve ao fato desta última tarefa requerer do aluno uma maior precisão nas respostas, uma vez que nesse caso há apenas uma resposta correta.

Em outro estudo que tinha como objetivo avaliar a capacidade das crianças na estimativa de probabilidade de ocorrência de eventos em situações diversas, Spinillo (1996; 1995) buscou examinar o papel que a natureza das tarefas desempenhava sobre a performance da criança, uma vez que as habilidades cognitivas não se manifestam da mesma forma em situações distintas. O estudo, que envolveu 120 crianças entre cinco e oito anos, contava com duas situações distintas.

Na situação 1, que consistia em uma tarefa de julgamento, era solicitado a criança que estimasse o nível de chance de ocorrência dos casos favoráveis em um arranjo único composto de fichas rosas e azuis. Na situação 2 a criança era solicitada a construir um arranjo com um nível de chance de ocorrência dos casos favoráveis pré-determinado, constituindo-se assim em uma tarefa de construção, semelhante aquela considerada no estudo anteriormente descrito (Spinillo, 1997a; 1997b). Nenhuma das crianças participantes do estudo havia sido instruída formalmente sobre probabilidade ou conceitos afins.

Na situação 1 era contada às crianças a história de um boneco que participaria de um sorteio e que o mesmo ganharia o prêmio se retirasse as fichinhas de uma determinada cor (entre azul e rosa, a cor preferida da criança). O boneco era desenhado sem rosto, e a criança deveria colocar nele o rosto que melhor representasse a reação do boneco diante dos diferentes conjuntos de fichas que recebia. Os rostos disponibilizados para as crianças correspondiam aos diferentes níveis de chance nos itens que compunham cada situação: muito triste (impossibilidade – 0%), triste (25%), nem triste nem feliz (50%), feliz (75%) e muito feliz (certeza – 100%). Na situação 2 a criança era

solicitada a construir os arranjos, que abarcavam os mesmos percentuais de chances da situação 1.

Na tarefa de julgamento (situação 1), houve uma diferença estatisticamente significativa entre as crianças de cinco anos e as demais. As crianças menores apresentaram sucesso com os extremos (certeza e impossibilidade), mostrando dificuldade ao estimar os níveis de chance mais sutis (muita chance, mesma chance e pouca chance; 75%, 50%, e 25%, respectivamente). Já nas tarefas de construção Spinillo (1996) verificou diferenças significativas entre as crianças de 7-8 anos e as crianças de 5-6 anos. A principal dificuldade na construção dos arranjos ocorreu nos itens de certeza (100%), que freqüentemente eram compreendidos como muita chance (75%). Curiosamente essa dificuldade foi mais freqüente nas crianças mais velhas (8 anos). Nessa situação 2 as crianças de cinco anos não apresentaram dificuldades com os níveis de chance intermediários.

De acordo com Spinillo (1996, p. 174), esses “resultados sugerem que estimar um nível de chance em uma dada situação pode ser mais fácil do que em outra”. A autora concluiu que as crianças de todas as idades apresentaram mais acertos nas tarefas de construção do que nas tarefas de julgamento, e aponta duas possíveis razões para isso: o fato das tarefas de construção ter como correta mais de uma resposta (exceto nos níveis de certeza e impossibilidade) e a oportunidade da criança manipular o material. Outra constatação interessante é que em nenhuma ocasião as crianças consideraram o todo dos conjuntos (casos possíveis). De fato foi possível observar que a atividade de estimar o nível de chance de ocorrência de um dado evento varia em função da situação que é apresentada à criança. A autora salienta ainda que um mesmo conceito manifesta-se de diferentes formas, e que essas várias formas não são exploradas por um único tipo de tarefa.

1. 2. Análise Combinatória

Silva (2010) abordou o raciocínio combinatório através de problemas de produto cartesiano, que são mais simples do que os tradicionais problemas de arranjo, permutação e combinação¹². Os problemas de produto cartesiano não trazem explícita a relação de correspondência um-para-muitos, marcante nos problemas de raciocínio combinatório. A hipótese investigada por Silva (2010) é que a explicitação da correspondência um-para-muitos pode ser um fator importante no raciocínio combinatório em problemas de produto cartesiano. Para examinar tal hipótese, a autora realizou um estudo que envolvia duas pesquisas distintas, porém relacionadas. Foram então propostas três situações, comuns aos dois estudos: 1) as relações de correspondência um-para-muitos eram implícitas, sendo os problemas apresentados de forma clássica; 2) a correspondência um-para-muitos era explicitada e acompanhada de representação gráfica (pictográfica ou diagramática); 3) a correspondência um-para-muitos era explicitada, acompanhada da verbalização dos princípios de problemas de combinatória¹³. O que mudava entre as duas pesquisas realizadas por Silva era a ordem de apresentação dessas situações.

Na primeira pesquisa, estudo 1, a ordem de apresentação era: situação 1, situação 2 e situação 3. Na outra pesquisa, estudo 2, a ordem foi situação 2, situação 3,

¹² Os problemas de produto cartesiano comportam uma relação entre os elementos de dois ou mais conjuntos distintos. Sua forma de representação mais comum é a tabela cartesiana, mas os mesmos podem também ser representados por uma *árvore de possibilidades*, como já referido anteriormente. Para solucionar esse tipo de problema – quer seja através da multiplicação (direto) ou divisão (inverso), é necessário que a criança compreenda que cada elemento dos conjuntos elementares podem aparecer em vários pares do conjunto produto, caracterizando assim a correspondência um-para-muitos (Silva, 2010).

¹³ Como já citado em tópico anterior, esses princípios, segundo Mekhmandarov (2000), são: 1) compreender que cada par é formado por um e apenas um elemento de cada um dos conjuntos elementares; 2) compreender que cada par é um elemento no novo conjunto produto; 3) compreender que cada elemento do conjunto elementar pode aparecer em diversos pares; 4) compreender que cada par deve aparecer apenas uma vez no conjunto produto.

situação 1. Nesse último estudo buscou-se particularmente analisar a influência que as situações 2 e 3 exerciam na resolução dos problemas da situação 1. Nos dois estudos buscou-se examinar se o desempenho e o uso de estratégias na resolução dos problemas propostos iriam variar em função da situação apresentada. Participaram da pesquisa 40 crianças, sendo 20 delas componentes do estudo 1 e vinte do estudo 2. A média de idade era 8 anos, e todas as crianças eram alunas do terceiro ano do ensino fundamental de uma escola do Recife, não tendo ainda recebido instrução formal sobre multiplicação no contexto escolar. Para cada situação eram propostos quatro problemas, totalizando doze.

O examinador solicitava que a criança resolvesse os problemas – que não exigia o uso de algoritmo – e em seguida solicitava justificativas e explicações sobre o resultado apresentado. Em todos os problemas era solicitado o valor da medida produto. Os valores dessas medidas podiam ser 8, 10, 12 e 15. Os mesmos pares numéricos foram utilizados nas três situações, variando apenas a ordem de apresentação dos elementos. Um exemplo de problema da situação 1 é: “Um parque tem 2 entradas (A e B) e 3 saídas (1, 2 e 3). Combinando as entradas e saídas Mateus pode fazer caminhos para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ele pode entrar e sair desse parque?” (Silva, 2010, p.64).

Os dados foram analisados de duas maneiras: em função do número de acertos (desempenho) e em função das estratégias adotadas pelas crianças (raciocínio combinatório ou não-combinatório). No que se refere ao desempenho, o estudo 1 mostrou diferenças estatisticamente significativas entre a situação 1 (26,25% de acerto) e as situações 2 e 3 (48,75% de acerto e 56,25% de acerto, respectivamente), mas não entre as situações 2 e 3, o que mostra que a explicação da correspondência um-para-muitos auxilia a resolução desse tipo de problema (produto cartesiano). Diferentemente do estudo 1, no estudo 2 não foram constatadas diferenças significativas entre as

situações. Ao comparar os dois estudos observou-se diferenças significativas de desempenho entre as três situações, sendo esse percentual mais alto no estudo 2. No caso particular da situação 1, o percentual de acerto no estudo 2 é quase 3 vezes maior que o percentual no estudo 1.

Em relação às estratégias, Silva (2010) afirma que a compreensão dos princípios que regem as relações combinatórias nos problemas apresentados parecem ter auxiliado na adoção de estratégias mais eficazes. Tem-se então que os resultados do estudo não só confirmaram a hipótese inicial de que a explicitação dos invariantes auxilia na resolução dos problemas, como também que a explicitação presente nas situações 2 e 3 parecem ser generalizadas e aplicadas na situação 1.

De acordo com a pesquisadora, “diferentemente do que pensava Piaget, crianças menores podem encontrar um método capaz de realizar as combinações de forma exaustiva, especialmente quando se esclarece o esquema operacional envolvido na resolução desses problemas” (Silva, 2010, p. 115-116). Ela coloca ainda que tal crença pode residir no fato de Piaget não ter o propósito de facilitar suas situações para que as mesmas estivessem ao alcance de crianças de 7-8 anos.

Já no estudo realizado por Pessoa e Borba (2009) os problemas de raciocínio combinatório utilizados não se restringem aos do tipo “produto cartesiano”. As autoras desenvolveram uma pesquisa que tinha por objetivo analisar as estratégias utilizadas por alunos de 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental I¹⁴, assim como o desempenho dos mesmos na resolução de problemas de raciocínio combinatório de quatro tipos: produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. Participaram do estudo 99 crianças de duas escolas (uma pública e uma particular) em Pernambuco, com idades variando de

¹⁴ Na atual nomenclatura essas séries correspondem ao 2º e 5º anos, respectivamente.

seis a doze anos. Nenhuma das crianças havia recebido instrução formal escolar sobre o assunto.

Cada uma delas respondeu a oito questões, sendo duas pertencentes a cada um dos quatro tipos de problemas descritos. As primeiras questões de cada um dos tipos continham números que conduziam a maior número de possibilidades na solução, enquanto que as questões seguintes continham números que envolviam menos possibilidades. As pesquisadoras constataram, de um modo geral, um melhor desempenho dos alunos das séries mais avançadas em relação aos alunos das séries iniciais. Houve também um melhor desempenho (percentual médio de acertos) dos alunos da escola particular em detrimento dos alunos da escola pública. Pessoa e Borba (2009) constataram ainda a influência da grandeza numérica no desempenho dos alunos, uma vez que os primeiros problemas (números maiores) contaram com um desempenho significativamente inferior que o desempenho dos alunos nos outros problemas.

Por fim, no que se refere ao tipo de problema em questão, as pesquisadoras constataram um melhor desempenho dos alunos nos problemas do tipo “produto cartesiano”. Na sequência, mas com desempenho significativamente inferior, estão os problemas de “combinação”, seguidos pelos problemas do tipo “arranjo”. O pior desempenho ficou reservado aos problemas de permutação. De acordo com Pessoa e Borba (2009, p. 131), os sujeitos “apresentam dificuldades em esgotar todas as possibilidades do problema” (notadamente os alunos de 1ª e 2ª séries). O que as autoras salientam é que os alunos, mesmo antes de receberem instrução formal sobre o conteúdo *combinatória* já esboçam compreensões que requerem raciocínio combinatório, quer seja decorrente de experiências escolares não necessariamente ligadas à *combinatória*, quer seja através de vivências extra-escolares.

O estudo realizado por Mekhmandarov (2000) fortalece essas conclusões. A pesquisa envolveu 45 crianças israelenses de jardim de infância, às quais foram aplicadas tarefas que envolviam “produto cartesiano”, onde os elementos dos conjuntos participantes da multiplicação podiam ser iguais ($A \times A$) ou diferentes ($A \times B$) entre si. O autor estava particularmente interessado no entendimento, por parte das crianças, da estrutura do produto cartesiano através da construção de pares ordenados, da análise de um dado conjunto de pares e da predição do tamanho do conjunto-produto antes da sua construção. Cada criança, individualmente, recebia uma sequência de três tarefas. As duas primeiras diferiam não só quanto ao material utilizado (blocos LEGO e cartões com diferentes figuras), mas também quanto a igualdade ou diferenciação dos elementos dos conjuntos-base. A criança então deveria construir todos os pares possíveis e analisá-los, mas antes disso ela deveria informar o número de novos elementos (pares) que poderiam ser criados; e para isso contavam com o apoio de um quadro vazio de “dupla entrada”. Na terceira tarefa a criança deveria analisar um conjunto-produto construído pelo entrevistador.

O entendimento que as crianças apresentavam acerca da estrutura do produto cartesiano era deduzido através dos métodos empregados na construção dos pares e nas respostas dadas pelas crianças ao longo da entrevista¹⁵. Os resultados encontrados por Mekhmandarov (2000) indicam que muitas das crianças que participaram do estudo já se mostram hábeis a construir elementos de produto cartesiano, ou aprendem ao longo da entrevista. Mais da metade delas completa todos os pares possíveis em tarefas com conjuntos diferentes entre si ($A \times B$), o que o pesquisador considera um dado muito surpreendente. A análise das tarefas de produto cartesiano do tipo $A \times A$ mostrou-se

¹⁵ Com base nos mesmos princípios citados no estudo de Silva (Mekhmandarov, 2000) e já descritos anteriormente.

mais difícil que as tarefas do tipo A x B porque as crianças focavam nas relações entre os elementos no interior dos pares; o que segundo Mekhmandarov parece mais um obstáculo perceptual do que um obstáculo matemático, sugerindo o uso de tarefas do tipo A x B com crianças nessa faixa etária. Outro achado interessante é que a análise dos produtos criados pelas próprias crianças mostrou-se mais fácil do que aqueles criados pelo entrevistador, o que segundo o pesquisador parece ser decorrente de uma oportunidade de auto-aprendizagem.

2. Estudos acerca do possível - conteúdo não matemático

Reitera-se aqui que os únicos estudos encontrados na literatura acerca do possível foram realizados por Piaget e seus colaboradores. Aqueles que envolvem conteúdos matemáticos, notadamente probabilidade e análise combinatória, possuem íntima relação com uma enorme diversidade de estudos acerca do raciocínio probabilista e combinatório em si, inclusive do ponto de vista metodológico. Por esse motivo o tópico anterior denota uma riqueza de pesquisas. O presente tópico, entretanto, será ilustrado por dois experimentos, de naturezas distintas, realizados por Piaget e seus colaboradores, ambos componentes da obra *O possível e o necessário: a evolução dos possíveis na criança* (1985).

Com o auxílio de Monnier e Vauclair, Piaget propôs a crianças entre quatro e doze anos um experimento que envolvia dois pontos (A e B), representados por dois brinquedos quaisquer, localizados em uma sala com móveis e um obstáculo (poste) que podia ser colocado entre os dois pontos referenciais. A tarefa proposta à criança era deslocar um carrinho entre esses pontos, pelos trajetos possíveis. No momento inicial a criança apenas deve indicar o caminho que o carrinho deve percorrer. Em seguida o

experimentador solicitava à criança que ela fizesse o carrinho andar, através de um controle. As crianças indicadas por Piaget como componentes do nível I¹⁶ reduzem os trajetos possíveis a traçados mais ou menos diretos entre os dois pontos. Já no nível II os sujeitos se concentram mais na trajetória em si, e conseguem multiplicar os trajetos iniciais. Além disso, nesse nível os sujeitos começam a prever um conjunto de variações, sem que seja necessário iniciar o deslocamento do carrinho. No nível III os sujeitos compreendem que as realizações por eles indicadas são apenas exemplos de um conjunto de variações tão numeroso que não podem ser realizadas uma a uma.

Em outro experimento, Piaget e colaboradores (Brulhart e Tissot) propuseram a crianças entre quatro e quinze anos tarefas de natureza essencialmente perceptual. O objetivo era fazer subir o nível de água de um aquário mergulhando nele diferentes objetos (pedaços de chumbo, um balão inflável, um pedaço de madeira, uma pedra, um copo, uma caixa metálica tubular, uma vela e um vidro de doce com tampa). Era solicitado aos sujeitos que, usando esses objetos, fizessem o nível da água subir o mais alto possível.

A partir do desempenho das crianças na tarefa, Piaget propôs três níveis¹⁷ de desenvolvimento. No primeiro nível a criança não diferencia sua própria ação da ação de uns objetos sobre os outros. Além disso, os sujeitos acreditam ser possível modificar as propriedades dos objetos (empurrando para o fundo do aquário um objeto que naturalmente flutua, por exemplo). No nível II as crianças começam a antecipar algumas situações que elas julgam possíveis e que em seguida são por elas testadas, a fim de verificar se as mesmas são materialmente realizáveis; ou seja, de fato possíveis. No nível III, além de compreender o papel do volume (inclusive dos objetos ocultos), o nível

¹⁶ Vale lembrar que os níveis I, II e III proposto por Piaget e seus colaboradores coincidem com os estágios do desenvolvimento cognitivo: pré-operacional, operacional concreto e operacional formal, respectivamente.

¹⁷ *Ibidem*.

de “acertos” nas verificações empíricas cresce muito. Ou seja, há um aumento considerável nos acertos das hipóteses elaboradas.

1. Contextualização e objetivos do estudo

Como já afirmado, há na literatura uma escassez de estudos acerca da concepção de *possível* em crianças. À bem da verdade, apenas foram encontrados experimentos realizados por Piaget e seus colaboradores, reunidos em dois volumes: *O possível e o necessário: a evolução dos possíveis na criança* e *O possível e o necessário: a evolução dos necessários na criança*.

De modo geral, as tarefas desses experimentos podem ser categorizadas em dois grupos: algumas requerem que o sujeito realize atividades usando o material oferecido pelo experimentador. Outras são de natureza perceptual, e requerem observação e respostas dos sujeitos. Entretanto, uma aspecto é comum à essas tarefas e chama à atenção: as mesmas abordam conteúdos que se distanciam do cotidiano das crianças, notadamente crianças menores, que têm experiências escolares ainda pouco abrangentes (no que se refere à geometria e a física, por exemplo).

Outro aspecto comum a esses experimentos é a idade dos participantes. Em todas as tarefas o grupo de sujeitos tinha a idade variando entre cinco e 14-15 anos. Porém, as atividades só eram satisfatoriamente realizadas pelas crianças maiores; e muitas vezes nem sequer faziam sentido para as crianças menores. Essa parece ser uma característica dos experimentos piagetianos, que oferecem tarefas que só são resolvidas de modo satisfatório por crianças maiores (final do período operatório concreto e início do período operatório formal) e replica as mesmas a crianças menores, sem adaptações.

E se essas tarefas tivessem uma estrutura mais simples? Talvez noções iniciais sobre o possível possam ser acessadas em uma idade precoce, a depender da estruturação das tarefas apresentadas. Não se trata de induzir a criança a pensar sobre o possível, mas sim de criar tarefas que possibilitem a emergência de traços de uma concepção em construção.

Além da estrutura da tarefa, outro elemento que pode facilitar a evocação de noções emergentes é o conteúdo em questão. Quanto mais esse conteúdo se aproxima de situações cotidianas das crianças, mais tende-se a proporcionar às mesmas a chance de correlacionar o conteúdo daquela atividade com situações já vivenciadas e que serviram de base para a construção de concepções.

Mas, por que investigar acerca da concepção de possível em crianças de diferentes idades, notadamente crianças muito pequenas? Apesar de Piaget defender a ideia que as conjecturas sobre o possível caminham de mão dadas com o raciocínio hipotético-dedutivo – característico do período operatório formal – estudos acerca do raciocínio probabilista e combinatório cada vez mais indicam a capacidade de crianças muito pequenas realizarem conjecturas acerca de situações possíveis, (ainda) não reais.

O estudo da concepção de possível em crianças de diferentes idades, desde muito cedo, propicia o entendimento não apenas das construções iniciais sobre o possível, mas também de aspectos importantes da evolução dessa concepção com o aumento da idade. Conhecer detalhes desse processo pode ser útil nas decisões sobre *o que e como* trabalhar as noções iniciais dos conteúdos de probabilidade e combinatória já com alunos do primeiro Ciclo do Ensino Fundamental, como indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil/MEC, 1997). Sem contar com o fato de que trabalhar situações de incerteza em sala de aula pode propiciar uma espécie de ruptura com uma visão determinística da matemática.

Sendo assim, a presente pesquisa tem por objetivo investigar acerca da concepção de *possível* em crianças. A partir de que idade as crianças podem apresentar indícios dessa concepção? Como a mesma se apresenta em diferentes idades? Será que ela se manifesta igualmente em diferentes campos de conhecimento (matemático e não-matemático)? Como a criança lida com a possibilidade e seus “extremos” (certeza e impossibilidade)? Especificamente no âmbito do conhecimento matemático, será que a concepção do possível aplicada a perguntas de natureza probabilista e combinatória traz desempenhos diferentes nesses dois campos de conhecimento?

São esses questionamentos e as lacunas existentes na literatura da área que motivaram a presente pesquisa.

2. Participantes

Cento e oitenta crianças de ambos os sexos, alunas de duas escolas particulares da cidade de Recife, com escolaridade entre o Infantil III e o 5º ano. Os participantes foram igualmente divididos em seis grupos estratificados por ano escolar, da seguinte maneira:

Tabela 1: Número de participantes por ano escolar e média de idade (em anos) de cada grupo.

Ano escolar	Nº de participantes	Média de idade
Infantil III	30	5,1
1º ano	30	6,0
2º ano	30	7,0
3º ano	30	8,3
4º ano	30	9,2
5º ano	30	9,9

3. Material e Procedimento

O estudo foi composto por uma tarefa aplicada individualmente a cada um dos participantes pela mesma experimentadora. Essa tarefa versou sobre a noção de Possível, Impossível e Certeza, e será aqui chamada de T-PIC. O objetivo desta tarefa é investigar as noções de crianças sobre o possível, bem como sobre o impossível e a certeza, tanto no âmbito do conhecimento matemático como também do conhecimento não-matemático.

A T-PIC consiste em uma entrevista composta de 36 itens, que são situações-problema a serem julgadas pelos participantes. Cada um dos campos de conhecimento (não-matemático e matemático) conta com 18 itens, subdivididos em três tipos de situações-problema: possibilidade, impossibilidade e certeza. No caso das perguntas de conhecimento matemático, os 18 itens se referem a conhecimentos acerca de probabilidade e de análise combinatória. O Quadro 1 apresenta resumidamente a distribuição dos tipos de situações-problema em T-PIC:

Quadro 1: Distribuição dos itens na T-PIC.

BLOCOS	TIPOS DE ITENS		
	Possibilidade	Impossibilidade	Certeza
Conhecimento não-matemático	6	6	6
Conhecimento matemático (Probabilidade)	3	3	6
Conhecimento matemático (Combinatória)	3	3	-

Faz-se necessário destacar o fato de não haver itens na modalidade *certeza* no âmbito da análise combinatória. Do ponto de vista epistemológico, não é possível se ter *certeza* da ocorrência de uma combinação. Há, sem dúvida nenhuma, um campo de *possibilidades*, e algumas combinações que não estão presentes nesse campo, que

representam justamente as *impossibilidades*. Já no caso da probabilidade, tal fato não se observa. Em virtude disso, e objetivando manter o mesmo número de itens relativos ao conhecimento não-matemático e ao conhecimento matemático, elevou-se o número de perguntas envolvendo o raciocínio probabilista (certeza) de três para seis.¹⁸

Tendo em vista a possibilidade da apresentação dos 36 itens em uma única sessão tornar a tarefa cansativa para os participantes, a mesma foi realizada em duas sessões. Em cada uma das sessões foram apresentados nove itens relativos ao conhecimento matemático e nove itens relativos ao conhecimento não-matemático, totalizando 18 itens (metade do número de itens que compõem a tarefa). Cada uma dessas perguntas foi impressa isoladamente em uma cartela. A ordem de apresentação dos itens na T-PIC foi aleatória, decidida por sorteio, evitando-se apenas que dois itens de um mesmo tipo (possível, certeza e impossibilidade) fossem apresentados consecutivamente. Para isso, o sorteio relativo à ordem de apresentação dos itens para cada criança foi realizado *a priori*, antes da aplicação da tarefa.

O procedimento consistiu em apresentar cada item por vez. Os enunciados de todas as questões foram lidos pela examinadora. A tarefa teve tempo livre para a sua realização, sendo cada sessão gravada em áudio e transcrita para posterior análise. A cada pergunta a examinadora convidou a criança a explicar sua resposta. A seguir são apresentados os 36 itens que compõem a T-PIC, identificados a partir do campo de conhecimento e do tipo:

¹⁸ Ainda no que se refere às questões de raciocínio combinatório, destaca-se aqui que apesar do capítulo 2 trazer considerações acerca dos tipos clássicos de construções em análise combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), nesse estudo foram utilizadas apenas a estrutura dos problemas de produto cartesiano, como será visto no quadro 3.

Quadro 2: Situações-problema referentes ao conhecimento não-matemático.

CONHECIMENTO NÃO-MATEMÁTICO	
Possibilidade	
P1: Você acha que pode acontecer de duas pessoas com idades diferentes terem o mesmo tamanho? Por quê?	
P2: De manhã estava chovendo. Você acha que nesse mesmo dia pode fazer sol à tarde? Por quê?	
P3: Você acha que pode acontecer de alguém apertar o botão de acender a luz e ela não acender? Por quê?	
P4: Você acha que pode acontecer de uma pessoa com 16 anos ser maior do que uma pessoa com 30 anos? Por quê?	
P5: Você acha que pode acontecer de uma pessoa usar um salto bem alto e continuar menor do que outra pessoa? Por quê?	
P6: Você acha que pode acontecer de alguém colocar açúcar no suco e ele não ficar doce? Por quê?	
Certeza	
P7: Maria tirou o gelo da geladeira e esqueceu ele em cima da mesa. Você acha que o gelo pode ter derretido? Por quê?	
P8: Paula tirou a pilha do relógio da casa dela. Você acha que o relógio pode ter parado de funcionar? Por quê?	
P9: Felipe pegou um copo com água e colocou bastante açúcar. Você acha que a água pode ter ficado doce? Por quê?	
P10: Sem querer Mariana derrubou o vidro de perfume no chão e quebrou. Você acha que o perfume pode ter derramado? Por quê?	
P11: Rodrigo soltou uma bola no meio da ladeira. Você acha que a bola pode ter descido? Por quê?	
P12: Jorge jogou uma bola para cima. Você acha que a bola pode ter caído? Por quê?	
Impossibilidade	
P13: Você acha que pode acontecer de uma gata estar grávida (esperando um filhote) e nascer um cachorrinho? Por quê?	
P14: A porta estava trancada e Denys pegou a chave errada. Você acha que ele pode ter conseguido abrir a porta? Por quê?	
P15: Patrícia pegou um lápis para fazer a tarefa. O lápis estava sem ponta. Você acha que ela pode ter conseguido escrever com esse lápis? Por quê?	
P16: Joana estava brincando com tintas. Sem querer ela derramou a tinta vermelha no pote de tinta amarela. Você acha que a tinta desse pote continuou sendo amarela? Por quê?	
P17: Sérgio soltou uma bola no meio da ladeira. Você acha que a bola pode ter ficado parada? Por quê?	
P18: Você acha que pode acontecer de alguém olhar no espelho e não se vê? Por quê?	

Quadro 3: Situações-problema referentes ao conhecimento matemático.

CONHECIMENTO MATEMÁTICO	
Probabilidade – Possibilidade	
P19: Maurício tinha um saquinho com oito fichas vermelhas e duas fichas azuis. Você acha que Maurício pode, sem olhar, tirar uma ficha azul do saquinho dele? Por quê?	
P20: Janaina jogou o dado. Você acha que ela pode ter tirado dois? Por quê?	
P21: Rafaela jogou o dado. Você acha que ela pode ter tirado seis? Por quê?	
Probabilidade – Certeza	
P22: Jorge tinha um saquinho com 10 fichas, sendo todas amarelas. Você acha que Jorge pode, sem olhar, tirar uma ficha amarela do saquinho dele? Por quê?	
P23: Antônio tinha um saquinho com seis bolas de gude, todas pretas. Você acha que Antônio pode, sem olhar, tirar uma bola de gude preta do saquinho dele? Por quê?	
P24: Fabiana tinha um estojo com 20 lápis, todos vermelhos. Você acha que ela pode, sem olhar, pegar um lápis vermelho de dentro desse estojo? Por quê?	
P25: Izabel tinha uma caixinha com apenas quatro lápis de cor, todos rosa. Você acha que ela pode, sem olhar, pegar um lápis de cor rosa de dentro dessa caixinha? Por quê?	
P26: João tinha um saquinho onde só tinha sete tampinhas verdes. Você acha que ele pode, sem olhar, tirar de dentro do saquinho uma tampinha verde? Por quê?	
P27: Tony tinha um saquinho com 30 bolas de gude, todas azuis. Você acha que ele pode, sem olhar, tirar uma bola de gude azul do saquinho dele? Por quê?	
Probabilidade – Impossibilidade	
P28: Júlia tinha um saquinho com 12 fichas, sendo todas verdes. Você acha que Júlia pode, sem olhar, tirar uma ficha branca do saquinho dela? Por quê?	
P29: Luís jogou o dado. Você acha que ele pode ter tirado oito? Por quê?	
P30: Mércia jogou o dado. Você acha que ela pode ter tirado nove? Por quê?	
Combinatória – Possibilidade	
P31: Marina tem três blusas (uma vermelha, uma branca e uma amarela) e quatro saias (uma vermelha, uma branca, uma amarela e uma preta). Você acha que ela pode sair toda vestida de amarelo? Por quê?	
P32: Em uma festa onde só podiam dançar casais tinham três mulheres (Helena, Regina e Rosário) e dois homens (Geo e Jorge). Você acha que Helena pode ter dançado com Jorge nessa festa? Por quê?	
P33: Paulo tinha duas gravatas (uma azul e uma preta) e três chapéus (um branco, um marrom e um preto). Você acha que ele pode sair com uma gravata azul e um chapéu marrom? Por quê?	
Combinatória – Impossibilidade	
P34: Quatro crianças estão participando de um sorteio que tem como prêmio dois computadores. Você acha que as quatro crianças podem, cada uma, ganhar um computador? Por quê?	
P35: Pedro tem quatro calças (uma verde, uma azul, uma vermelha e uma preta) e três blusas (uma verde, uma vermelha e uma preta). Você acha que ele pode sair todo vestido de azul? Por quê?	
P36: Alexandre tinha três gravatas (uma verde, uma vermelha e uma preta) e dois chapéus (um branco e um preto). Você acha que ele pode sair com uma gravata verde e um chapéu verde? Por quê?	

Em T-PIC o paradigma experimental se caracteriza por apresentação verbal de situações-problema em que a criança, diante da pergunta da examinadora, respondeu sim ou não, justificando sua resposta. Perguntas complementares ocasionalmente foram feitas, com o intuito de esclarecer a justificativa dada pelo participante. É importante comentar que o fato da resolução das situações-problema de conhecimento matemático não envolver quantificações numéricas está de acordo com a perspectiva geral da pesquisa, que é investigar as noções intuitivas e iniciais que as crianças têm sobre o Possível, Impossível e Certeza, sem que seja necessária a realização de cálculos numéricos.

Como explicado anteriormente, este estudo contou com a realização de uma tarefa chamada T-PIC. Com base nos objetivos propostos, as respostas das crianças à essa tarefa foram analisadas a partir de dois aspectos, a saber: o desempenho das crianças (acertos nas perguntas) e as justificativas dadas pelas mesmas (às suas respostas). As 180 crianças que participaram do estudo responderam à todas as questões de T-PIC, que pressupunham duas respostas. A primeira delas foi referente à pergunta: “*tu acha que pode...?*”, e a segunda resposta foi dada à pergunta “*por quê?*”. Sendo assim, as respostas foram avaliadas em função de dois aspectos: desempenho e justificativas. A seguir será explicado de forma mais detalhada o sistema de análise utilizado.

1. Análise de desempenho

Por análise de desempenho entende-se aqui o índice de acerto das crianças nas primeiras perguntas por elas respondidas. Ou seja, respostas do tipo “sim” ou “não” foram contabilizadas em função dos acertos. Estes são os resultados que serviram de base para a análise de desempenho. Foram feitas análises estatísticas descritivas e inferenciais, que serão apresentadas no capítulo de resultados.

2. Análise das justificativas

As justificativas dos participantes foram analisadas e agrupadas em categorias distintas e mutuamente excludentes. Essa diferenciação entre as categorias tem um caráter genuinamente qualificativo, de modo que ao se contrastar dois ou mais tipos de justificativas, não é prudente afirmar que determinada justificativa é melhor, ou “vale mais”, do que outra. Tal fato não impede de observar e reconhecer que em determinado contexto uma justificativa parece melhor do que outra, sugerindo mais sofisticação cognitiva. Porém, essa ideia de sofisticação aparece atrelada ao contexto trazido pela pergunta, não sendo a mesma aplicada a aspectos gerais do raciocínio e / ou à natureza da justificativa em si. Por esse motivo, optou-se aqui por tratar os tipos de justificativas (categorias) como distintas qualitativamente, sem classificá-las em mais ou menos elaboradas.

As justificativas dadas pelas crianças foram agrupadas em cinco tipos – justificativa tipo 1 (J1), justificativa tipo 2 (J2), justificativa tipo 3 (J3), justificativa tipo 4 (J4) e justificativa tipo 5 (J5) – que serão descritas e exemplificadas a seguir. Apesar da nomenclatura das categorias sugerir uma sequência crescente, reitera-se aqui que não há relação de ordem entre as mesmas.

Justificativa tipo 1 (J1) – Ausência de justificativa, ou justificativa em que não fica clara a forma de pensar da criança.

Exemplos:

- 1º ano (conhecimento não-matemático):

Paula tirou a pilha do relógio da casa dela. Tu acha que o relógio pode ter parado de funcionar?
Pode.

Por quê tu acha que pode?

Porque sim.

- 5º ano (conhecimento não-matemático):

Sérgio soltou a bola no meio da ladeira. Tu acha que a bola pode ter ficado parada?

Sim.

Por quê tu acha que sim?

Não sei, sei lá...

- 2º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Janaina jogou o dado. Tu acha que ela pode ter tirado o número dois?

Acho.

Por quê?

Um, tô conseguindo explicar não.

- 3º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Jorge tinha um saquinho com dez fichas, todas elas amarelas. Tu acha que ele pode tirar uma ficha amarela de dentro do saquinho dele?

Pode.

Por quê?

... Não sei.

- Infantil III (conhecimento matemático - combinatória):

Marina tem três blusas: uma vermelha, uma branca e uma amarela. E tem quatro saias: uma vermelha, uma branca, uma amarela e uma preta. Tu acha que ela pode sair toda vestida de amarelo?

Não.

Por quê?

...

A explicação que vale pra mim é a que tu disser, tá bom?

Não sei não.

- 1º ano (conhecimento matemático - combinatória):

Pedro tem quatro calças: uma verde, uma azul, uma vermelha e uma preta. E tem três blusas: uma verde, uma vermelha e uma preta. Tu acha que ele pode sair todo vestido de azul?

Hum... Não.

Por quê?

Não sei.

Justificativa tipo 2 (J2) – Justificativa baseada em preferências pessoais ou em aspectos idiossincráticos que não estão relacionados aos elementos do enunciado apresentado.

Exemplos:

- Infantil III (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de alguém apertar o botão de acender a luz e a luz não acender?

Não.

Por quê?

Porque assim, todo mundo fica com medo, aí não pode.

- Infantil III (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de uma pessoa que tem 16 anos ser maior do que uma pessoa que tem 30 anos?

Não.

Por quê?

Porque se a pessoa for maior do que a outra, a mãe vai pedir pra cuidar dela.

- Infantil III (conhecimento não-matemático):

Joana tava brincando com tinta; sem querer ela derramou a tinta vermelha no pote de tinta amarela. Tu acha que a tinta desse pote continuou sendo amarela?

Eu acho que, eu acho que sim, porque a cor preferida dela deve ser amarelo.

- Infantil III (conhecimento matemático - probabilidade):

Isabel tinha uma caixinha com quatro lápis de cor, todos cor de rosa. Tu acha que ela pode colocar a mão dentro dessa caixinha, sem olhar, pegar um lápis de cor e ele ser rosa?

Não.

Por quê?

Porque eu gosto agora mais de amarelo.

- Infantil III (conhecimento matemático - combinatória):

Em uma festa onde só podiam dançar casais, um homem com uma mulher, tinham três mulheres: Helena, Regina e Rosário, e tinham dois homens: Geo e Jorge. Tu acha que Helena pode ter dançado com Jorge nessa festa?
Pode.

Por quê?

Porque esses nomes, eles são parecidos.

- Infantil III (conhecimento matemático - combinatória):

Quatro crianças estão participando de um sorteio que tem como prêmio dois computadores. Tu acha que as quatro crianças podem, cada uma, ganhar um computador?

Não.

Por quê?

Porque ela são ainda pequenas.

- 1º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Rafaela jogou o dado. Tu acha que ela pode ter tirado o número seis?

Pode.

Por quê?

Se ela tivesse seis anos, aí podia ter saído seis no dado.

- 1º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Tu sabe o que é dado, aquele quadradinho do jogo?

Sei.

Luís jogou o dado. Tu acha que ele pode ter tirado o número oito?

Acho.

Por quê?

Porque eu acho que ele jogou forte.

- 4º ano (conhecimento matemático - combinatória):

Alexandre tinha três gravatas, uma verde, uma vermelha e uma preta; e dois chapéus: um branco e um preto. Tu acha que ele pode sair com uma gravata verde e um chapéu verde?

Repete por favor.

Repito. Ele tinha três gravatas, uma verde, uma vermelha e uma preta; e dois chapéus: um branco e um preto. Tu acha que ele pode sair com uma gravata verde e um chapéu verde?

Depende.

Por quê?

Se ele fosse um empresário não daria, mas se ele fosse, por exemplo, comerciante, até que podia.

- Infantil III (conhecimento não-matemático):

Sem querer Mariana derrubou o vidro de perfume no chão e o vidro quebrou. Tu acha que o perfume pode ter derramado?

Não.

Por quê?

Porque se a mãe dela vê, botava ela de castigo.

- 3º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Maurício tinha um saquinho com oito fichas vermelhas e duas fichas azuis.

Oito vermelhas e duas azuis.

Tu acha que Maurício pode tirar uma ficha azul do saquinho dele?

De olho fechado?

É, sem ele escolher. Ele botar a mão dentro e sair uma ficha azul. Tu acha que pode?

Não.

Por quê?

Porque ele taria de olho fechado e não teria como ele escolher.

- 3º ano (conhecimento matemático - combinatória):

Pedro tem quatro calças: uma verde, uma azul, uma vermelha e uma preta.

E ele tem três blusas: uma verde, uma vermelha e uma preta. Tu acha que ele pode sair todo vestido de azul?

Todo?

Tudo, de camisa e de calça azul?

Acho que sim.

Por quê?

Porque ele quis.

- 5º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Jorge tinha um saquinho com dez fichas, todas elas amarelas. Tu acha que ele pode tirar uma ficha amarela de dentro do saquinho dele?

Sim.

Por quê?

Porque o saco vai ser do irmão.

Justificativa tipo 3 (J3) – Justificativa que se limita a repetição de parte do enunciado, assumindo assim um caráter tautológico que não permite identificar com clareza se a criança estabeleceu relações entre os elementos trazidos na pergunta.

Exemplos:

- Infantil III (conhecimento não-matemático):

Patrícia pegou um lápis pra fazer a tarefa; o lápis tava sem ponta. Tu acha que ela pode ter conseguido escrever com esse lápis?

Não.

Por quê?

Porque tava sem ponta.

- 2º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Maurício tinha um saquinho com oito bolinhas vermelhas e duas bolinhas azuis. Tu acha que ele pode, sem olhar, colocar a mão dentro do saquinho, tirar uma bolinha e ela ser azul?

Pode, porque tirou uma bolinha azul.

- 2º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

João tem um saquinho com sete bolinhas, todas eram verdes. Tu acha que ele pode, sem olhar, colocar a mão dentro do saquinho, tirar uma bolinha, e essa bolinha ser verde?

Pode, porque ele pegou uma bolinha verde.

- 4º ano (conhecimento não-matemático):

Paula tirou a pilha do relógio da casa dela. Tu acha que o relógio pode ter parado de funcionar?

Sim, porque ela tirou a pilha.

- 5º ano (conhecimento não-matemático):

De manhã estava chovendo. Tu acha que nesse mesmo dia pode fazer sol à tarde?

Repete.

De manhã estava chovendo. Tu acha que nesse mesmo dia pode fazer sol à tarde?

Pode, porque de manhã tava chovendo, e de tarde pode fazer sol.

Justificativa tipo 4 (J4) – Justificativa baseada nas relações estabelecidas entre os elementos do enunciado.

Exemplos:

- Infantil III (conhecimento matemático - probabilidade):

Isabel tinha uma caixinha com quatro lápis de cor, todos cor de rosa. Tu acha que ela pode colocar a mão dentro dessa caixinha, sem olhar, pegar um lápis de cor e ele ser rosa?

Se todos os lápis é rosa ela vai conseguir pegar só lápis rosa.

- 4º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Fabiana tem um estojo com 20 lápis e todos eram vermelhos. Tu acha que ela pode pegar um lápis vermelho de dentro desse estojo?

Pode.

Por quê?

Porque se todos os lápis são vermelhos ela não pode pegar lápis de outra cor.

- 4º ano (conhecimento matemático - combinatória):

Paulo tinha duas gravatas, uma azul e uma preta; e tinha três chapéus, um branco, um marrom e um preto. Tu acha que ele pode sair com uma gravata azul e um chapéu marrom?

Pode.

Por quê?

Porque é uma possibilidade. Não tem o chapéu marrom e a gravata azul?

É.

Então, pode formar essa possibilidade e ele sair com esse conjunto.

- 4º ano (conhecimento matemático - combinatória):

Pedro tem quatro calças: uma verde, uma azul, uma vermelha e uma preta. E tem três blusas: uma verde, uma vermelha e uma preta. Tu acha que ele pode sair todo vestido de azul?

Pode.

Por quê tu acha que pode?

Porque ele tem uma calça azul e uma blusa azul.

Deixa eu ver aqui: ele tem quatro calças: uma verde, uma azul, uma vermelha e uma preta. E tem três blusas: uma verde, uma vermelha e uma preta.

Então ele não pode.

Por quê tu acha que ele não pode?

Porque tá faltando a blusa azul, ele vai comprar ainda a blusa azul.

- Infantil III (conhecimento matemático - combinatória):

Quatro crianças estão participando de um sorteio que tem como prêmio dois computadores. Tu acha que as quatro crianças podem, cada uma, ganhar um computador?

Não.

Por quê?

Porque só tem dois computadores.

- 4º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Jorge tinha um saquinho com dez fichas, todas elas amarelas. Tu acha que ele pode tirar uma ficha amarela de dentro do saquinho dele?

Sim, porque só tem amarela.

- 5º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Júlia tinha um saquinho com 12 fichas, sendo todas verdes. Tu acha que Júlia pode tirar uma ficha branca do saquinho dela?

Não, porque nenhuma é branca, então não tem probabilidade.

Justificativa tipo 5 (J5) – Justificativa baseada nas experiências relativas ao mundo empírico da criança, podendo ser combinada com as relações estabelecidas entre os elementos do enunciado.

Exemplos:

- Infantil III (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de uma gata estar grávida, esperando um filhotinho, e nascer um cachorrinho?

Não.

Por quê?

Porque quando nasce cachorrinho significa que a gata em vez de gata é um cachorro.

- 1º ano (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de uma pessoa que tem 16 anos ser maior do que uma pessoa que tem 30 anos?

Pode.

Por quê?

Meu irmão tem treze e já é maior do que minha mãe.

- 1º ano (conhecimento não-matemático):

Patrícia pegou um lápis pra fazer a tarefa; o lápis tava sem ponta. Tu acha que ela pode ter conseguido escrever com esse lápis?

Pode.

Por quê?

Só era apontar.

E se ela não tivesse como apontar, tu acha que ela pode ter conseguido escrever com esse lápis?

Não.

Por quê?

Porque tá sem ponta, mas ela pode pedir pra tia um lápis.

- 1º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Rafaela jogou o dado. Tu acha que ela pode ter tirado o número seis?

Acho.

Por quê?

Porque o dado, quando a gente joga, aparece o seis, às vezes.

- 2º ano (conhecimento não-matemático):

Rodrigo soltou a bola no meio da ladeira. Tu acha que a bola pode ter descido?

Sim.

Por quê?

Porque ele soltou a bola na ladeira, e a ladeira é uma rampa, uma rampa que desce.

- 2º ano (conhecimento não-matemático):

A porta tava trancada e Denys pegou a chave errada. Tu acha que ele pode ter conseguido abrir a porta com essa chave?

Não.

Por quê?

Porque cada chave tem sua profissão, de porta, de carro...

- 2º ano (conhecimento não-matemático):

Joana tava brincando com tinta; sem querer ela derramou a tinta vermelha no pote de tinta amarela. Tu acha que a tinta desse pote continuou sendo amarela?

Não.

Por quê?

Porque quando mistura vermelho com amarelo, amarelo é uma cor meio clara, e vermelho é uma cor meio escura, aí forma laranja, porque é uma cor meio escura e meio clara.

- 3º ano (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de alguém apertar o botão de acender a luz e ela não acender?

Sim.

Por quê?

Porque pode tá faltando luz ou a pessoa não ter pagado a conta de luz.

- 4º ano (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de alguém olhar no espelho e não se ver?

Não.

Por quê?

Porque o espelho tem um tipo de folha atrás que permite o reflexo voltar pra pessoa.

- 5º ano (conhecimento não-matemático):

Jorge jogou uma bola pra cima. Tu acha que a bola pode ter caído?

Sim.

Por quê?

Eu quero fazer uma pergunta.

Pode fazer.

Gravidade é aquela que tem aqui ou no espaço?

Aqui.

Ah, porque aqui tem gravidade, e a gravidade não sustenta o peso da bola.

- Infantil III (conhecimento matemático - probabilidade):

Janaina jogou o dado. Tu acha que ela pode ter tirado o número dois?

Se os dados tem número um, número três, número quatro, número cinco, número seis, tinha o número dois.

- 3º ano (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de duas pessoas com idades diferentes terem o mesmo tamanho?

Não.

Por quê?

Não, peraí, repete a pergunta.

Tu acha que pode acontecer de duas pessoas com idades diferentes terem o mesmo tamanho?

Pode.

Por quê tu acha que pode?

Por quê eles só tem, é, um é maior do que o outro de quantos anos, e não de altura.

- 4º ano (conhecimento não-matemático):

Felipe pegou um copo com água e colocou bastante açúcar. Tu acha que a água pode ter ficado doce?

Sim.

Por quê?

Porque quando você bota açúcar em algum alimento, ele provavelmente vai ficar doce, e a água, como não tem gosto, aí ela deve ficar doce, independente da quantidade.

- 4º ano (conhecimento matemático - combinatória):

Quatro crianças estão participando de um sorteio que tem como prêmio dois computadores. Você acha que as quatro crianças podem cada uma ganhar um computador?

Não.

Por quê tu acha que não?

Porque, pera, eles são irmãos?

Não.

Não, porque só tem dois computadores, se tivesse dois irmãos até que dava, porque um ia ficar com cada, um irmão poderia dividir com o outro.

- 5º ano (conhecimento não-matemático):

Tu acha que pode acontecer de uma gata tá grávida, esperando um filhote, e nascer um cachorrinho?

Não.

Por quê?

Porque gato não pode ter cachorro, senão vai ter briga.

- 5º ano (conhecimento matemático - probabilidade):

Luís jogou o dado. Tu acha que ele pode ter tirado oito?

Não.

Por quê?

Porque um dado, ele só tem seis lados.

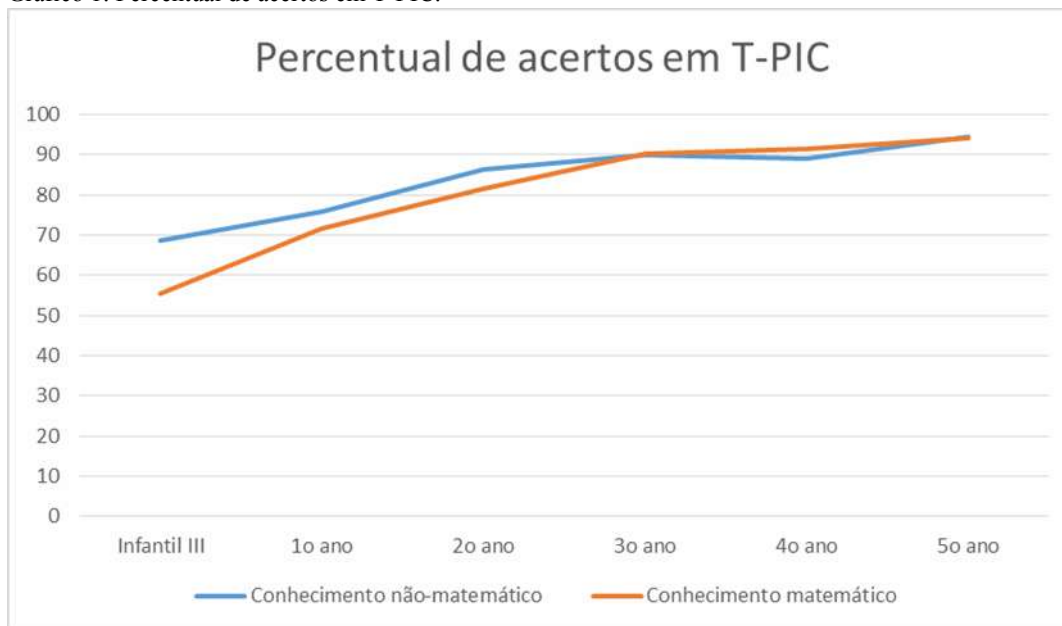
A categorização das respostas nesses cinco tipos de justificativas foi realizada por dois juízes em duas etapas. Inicialmente ocorreu a etapa de julgamentos independentes, onde se constatou um percentual de concordância de 82,6%. Na segunda etapa os casos de discordância foram então classificados a partir da discussão entre esses mesmos juízes. No próximo capítulo serão apresentados os resultados deste estudo.

Neste capítulo serão apresentados os resultados da tarefa que investigou a concepção das crianças acerca de situações que são possíveis, impossíveis e certas de acontecer (T-PIC). Conforme já foi explicado, os dados foram analisados em função de dois aspectos: desempenhos (acertos) e justificativas. Foram realizadas análises estatísticas tanto do tipo descritivas como também inferenciais. O programa estatístico usado no tratamento dos dados foi o SPSS (Statistical Package for the Social Sciences). A seguir tem-se inicialmente os dados relativos ao desempenho, em sequência serão apresentados os dados referentes às justificativas, e por fim os resultados do desempenho das crianças em cada um dos três tipos de questões (possível, impossível e certeza). Os resultados das análises desses dados são apresentados de formas descritiva e interpretativa.

1. Análise de desempenho

O gráfico a seguir mostra o percentual de acerto das crianças em função das questões de conhecimento não-matemático e de conhecimento matemático que compõem a T-PIC:

Gráfico 1: Percentual de acertos em T-PIC.



NOTA: Número máximo de acertos em cada campo de conhecimento = 540.

Como pode ser observado no Gráfico 1, há um aumento no percentual de acertos nas questões dos dois campos de conhecimento em relação ao avanço dos anos escolares. O teste de Kruskal-Wallis mostrou diferenças significativas entre os grupos, nas questões de conhecimento não-matemático ($p = 0,000$) e de conhecimento matemático ($p = 0,000$). A partir dessa constatação foram feitas comparações entre os anos escolares usando o teste de Mann-Whitney. A Tabela 2 apresenta os valores das estatísticas e dos níveis de significância dessas comparações em relação as questões de conhecimento não-matemático:

Tabela 2: Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares em questões de conhecimento não-matemático.

Comparações entre os anos escolares	Z	P
Infantil III x 1º ano	-2,291	0,022
Infantil III x 2º ano	-5,867	0,000
Infantil III x 3º ano	-6,087	0,000
Infantil III x 4º ano	-5,931	0,000
Infantil III x 5º ano	-6,519	0,000
1º ano x 2º ano	-3,344	0,001
1º ano x 3º ano	-4,213	0,000
1º ano x 4º ano	-3,957	0,000
1º ano x 5º ano	-5,436	0,000
2º ano x 3º ano	-1,840	0,066
2º ano x 4º ano	-1,410	0,158
2º ano x 5º ano	-4,274	0,000
3º ano x 4º ano	-0,407	0,684
3º ano x 5º ano	-1,926	0,054
4º ano x 5º ano	-2,461	0,014

Os dados sintetizados na Tabela 2 mostram que a maioria das comparações entre os anos escolares trazem de fato diferenças de desempenho; desempenho este que melhora com o aumento da escolaridade. Ou seja, as crianças do Infantil III têm um desempenho consideravelmente inferior às crianças do 1º ano, que por sua vez repetem essa mesma condição de desempenho inferior quando comparadas às crianças do 2º ano. Do 2º ano ao 4º ano observa-se que as crianças tiveram desempenhos muitos próximos. Uma diferença expressiva de desempenho volta a aparecer na comparação entre o 4º ano e o 5º ano, onde as crianças do 5º ano têm um desempenho de fato melhor.

Essas mesmas comparações entre os anos escolares foram feitas em relação ao desempenho das crianças nas questões de conhecimento matemático, como mostra a Tabela 3:

Tabela 3: Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares em questões de conhecimento matemático.

Comparações entre os anos escolares	Z	P
Infantil III x 1º ano	-3,175	0,001
Infantil III x 2º ano	-4,852	0,000
Infantil III x 3º ano	-6,276	0,000
Infantil III x 4º ano	-6,395	0,000
Infantil III x 5º ano	-6,450	0,000
1º ano x 2º ano	-3,090	0,002
1º ano x 3º ano	-5,761	0,000
1º ano x 4º ano	-6,027	0,000
1º ano x 5º ano	-6,190	0,000
2º ano x 3º ano	-2,710	0,007
2º ano x 4º ano	-3,126	0,002
2º ano x 5º ano	-4,023	0,000
3º ano x 4º ano	-0,622	0,534
3º ano x 5º ano	-2,056	0,040
4º ano x 5º ano	-1,518	0,129

Observa-se também aqui que a grande maioria das comparações entre os grupos mostram diferenças de desempenho significativas. Essa melhora importante no desempenho é crescente e acompanha a evolução dos grupos quanto a escolaridade, de modo que o 1º ano apresenta melhor desempenho que o Infantil III, o 2º ano melhor desempenho que o 1º ano e o 3º ano melhor desempenho que o 2º ano. A partir daí tem-se as frequências de acertos praticamente equiparadas entre os três grupos restantes, de modo que as crianças do 4º ano têm desempenho semelhante às crianças do 3º ano e às crianças do 5º ano.

Faz-se agora necessário retomar o Gráfico 1 (Percentual de acertos em T-PIC), a fim de tecer considerações acerca das comparações entre o desempenho das crianças nesses dois domínios de conhecimento (não-matemático e matemático). Para avaliar as diferenças de desempenho foi realizado o teste de Wilcoxon, comparando-se os números de acertos nas questões de conhecimento não-matemático com aquelas obtidas

nas questões de conhecimento matemático em cada um dos anos escolares, como mostra a Tabela 4:

Tabela 4: Valores e significância do teste de Wilcoxon na comparação entre os desempenhos em conhecimento não-matemático e conhecimento matemático.

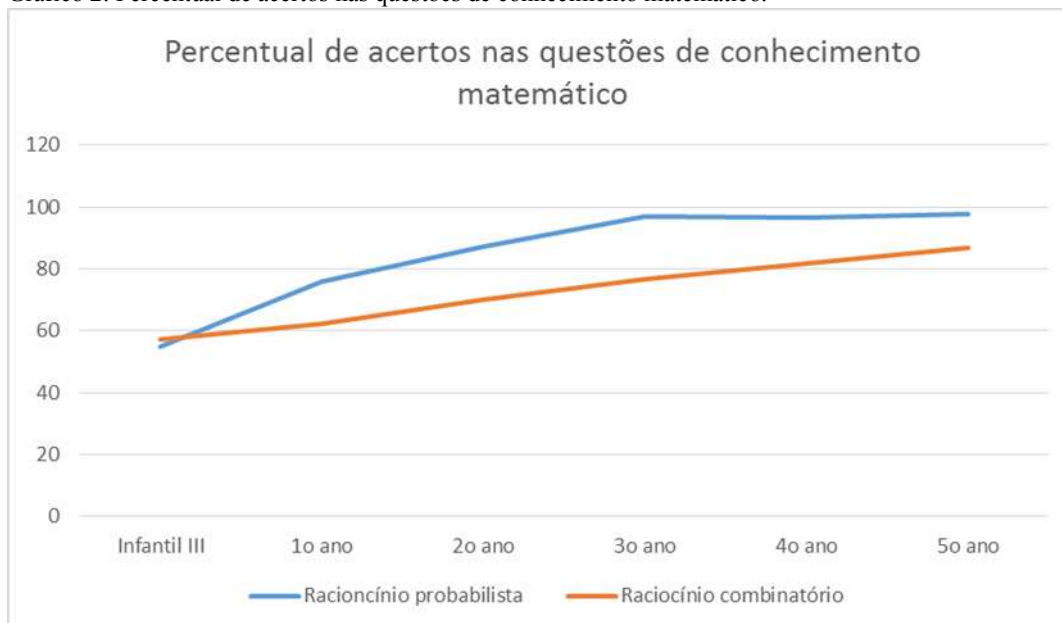
Conhecimento Não-matemático x Conhecimento Matemático	Z	P
Infantil III	-2,701	0,007
1º ano	-1,547	0,122
2º ano	-1,658	0,097
3º ano	-0,098	0,922
4º ano	-1,059	0,289
5º ano	-0,172	0,864

Constatou-se, então, que as crianças do Infantil III apresentam um resultado melhor nas questões de conhecimento não-matemático em detrimento das questões de conhecimento matemático ($Z = -2,701$; $p = 0,007$). Essa diferença de desempenho não foi observada nos demais grupos.

Conforme foi dito no capítulo 4 (Método), as questões de conhecimento matemático eram referentes ao raciocínio probabilista e combinatório. Sendo assim, foram realizadas análises estatísticas a partir da frequência de acertos das crianças nesses dois subtipos de perguntas, tanto no que se refere às comparações entre os diferentes grupos como também à comparação no interior de cada grupo, a fim de avaliar diferenças de desempenho das crianças nas referidas questões.

O gráfico 2 indica o percentual de acertos nas questões de probabilidade e nas questões de combinatória:

Gráfico 2: Percentual de acertos nas questões de conhecimento matemático.



NOTA: Número máximo de acertos nas questões de probabilidade = 360. Número máximo de acertos nas questões de combinatória = 180.

No que se refere as questões de probabilidade, é possível constatar que, de maneira geral, o percentual de acertos torna-se maior à medida que os anos escolares avançam. A análise estatística da comparação dos anos escolares, através do teste de Kruskal-Wallis, mostrou que há diferença significativa entre eles ($p = 0,000$).

Para identificar em qual(ais) comparação(ões) específica(s) essa diferença ocorre, foi aplicado o teste de Mann-Whitney, como resume a Tabela a seguir:

Tabela 5: Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares em questões de conhecimento matemático - probabilidade.

Comparações entre os anos escolares	Z	P
Infantil III x 1º ano	-3,335	0,001
Infantil III x 2º ano	-5,141	0,000
Infantil III x 3º ano	-6,619	0,000
Infantil III x 4º ano	-6,572	0,000
Infantil III x 5º ano	-6,720	0,000
1º ano x 2º ano	-3,351	0,001
1º ano x 3º ano	-5,978	0,000
1º ano x 4º ano	-5,933	0,000
1º ano x 5º ano	-6,133	0,000
2º ano x 3º ano	-3,377	0,001
2º ano x 4º ano	-3,157	0,002
2º ano x 5º ano	-3,854	0,000
3º ano x 4º ano	-0,374	0,708
3º ano x 5º ano	-0,864	0,387
4º ano x 5º ano	-1,180	0,238

Como pode ser observado, do Infantil III ao 3º ano há uma melhora de desempenho significativa associada ao avanço dos anos escolares. Por outro lado, ao comparar o 3º ano, o 4º ano e o 5º ano entre si, constata-se que as crianças desses três anos escolares apresentam desempenhos semelhantes nas questões que envolvem raciocínio probabilista.

Em relação as questões de raciocínio combinatório, observa-se (ver novamente o Gráfico 2) um desempenho crescente das crianças a partir da evolução da escolaridade. Na comparação desses grupos, o teste de Kruskal-Wallis mostra que existe diferenças de desempenho entre eles ($p = 0,000$). A indicação de onde tais diferenças ocorrem foi obtida através do teste de Mann-Whitney, como apresentado na Tabela 6:

Tabela 6: Valores e significância do teste de Mann-Whitney nas comparações do número de acertos entre os anos escolares nas questões de conhecimento matemático - combinatória.

Comparações entre as turmas	Z	P
Infantil III x 1º ano	-0,792	0,428
Infantil III x 2º ano	-2,061	0,039
Infantil III x 3º ano	-3,298	0,001
Infantil III x 4º ano	-4,186	0,000
Infantil III x 5º ano	-5,030	0,000
1º ano x 2º ano	-1,397	0,162
1º ano x 3º ano	-2,701	0,007
1º ano x 4º ano	-3,672	0,000
1º ano x 5º ano	-4,597	0,000
2º ano x 3º ano	-1,317	0,188
2º ano x 4º ano	-2,279	0,023
2º ano x 5º ano	-3,270	0,001
3º ano x 4º ano	-0,832	0,406
3º ano x 5º ano	-1,825	0,068
4º ano x 5º ano	-1,055	0,291

Os dados apresentados na Tabela 6 mostram uma situação bastante interessante no que se refere ao desempenho das crianças nas questões de combinatória. Em nenhuma das comparações de anos escolares imediatamente subsequentes (ou seja, Infantil III x 1º ano; 1º ano x 2º ano; 2º ano x 3º ano; 3º ano x 4º ano e 4º ano x 5º ano) foram observadas diferenças significativas nos desempenhos das crianças. As diferenças de fato importantes só aparecem quando se compara grupos que estão mais distantes, do ponto de vista do sequenciamento dos anos escolares (Infantil III x 3º ano, por exemplo).

Concluídas as análises que proporcionaram comparações entre os anos escolares, tanto no que se refere ao desempenho nas questões de probabilidade como também naquelas de combinatória, é possível fazer agora análises em cada ano escolar separadamente. O teste de Wilcoxon forneceu indicações de quanto o desempenho nas questões de probabilidade de fato difere daquele observado nas questões de

combinatória. A Tabela 7 apresenta os valores da estatística do teste, bem como os índices de significância:

Tabela 7: Valores e significância do teste de Wilcoxon na comparação entre os desempenhos em probabilidade e combinatória.

Probabilidade x Combinatória	Z	P
Infantil III	-1,607	0,108
1º ano	-0,864	0,388
2º ano	-1,576	0,115
3º ano	-3,111	0,002
4º ano	-2,804	0,005
5º ano	-2,885	0,004

Os valores de significância apresentados na Tabela acima mostram que nas crianças do Infantil III, do 1º ano e do 2º ano, não houve diferença significativa de desempenho nas questões de probabilidade e de combinatória. Já para as crianças do 3º ano, do 4º ano e do 5º ano, a diferença de o desempenho nesses dois tipos de questões é de fato expressiva.

2. Análise das justificativas

As justificativas dadas pelas crianças em T-PIC serão aqui inicialmente abordadas a partir do campo de conhecimento (não-matemático e matemático). A Tabela 8 traz a frequência – bem como o percentual – das respostas dos participantes dos seis anos escolares em função dos tipos de justificativas nas questões de conhecimento não-matemático:

Tabela 8: Frequência e percentual das justificativas nas questões de conhecimento não-matemático. Máximo de respostas por grupo = 540.

Ano escolar	J1	J2	J3	J4	J5
Infantil III	25 (4,6%)	97 (17,9%)	78 (14,5%)	0	340 (63%)
1º ano	23 (4,2%)	48 (8,9%)	70 (13%)	0	399 (73,9%)
2º ano	7 (1,3%)	19 (3,5%)	53 (9,8%)	0	461 (85,4%)
3º ano	9 (1,7%)	14 (2,6%)	61 (11,3%)	0	456 (84,4%)
4º ano	0	14 (2,6%)	44 (8,2%)	0	482 (89,2%)
5º ano	4 (0,7%)	3 (0,5%)	52 (9,7%)	0	481 (89,1%)

NOTA: J1: ausência de justificativa; J2: justificativa baseada em aspectos idiossincráticos; J3: justificativa tautológica; J4: justificativa baseada nas relações entre os elementos do enunciado; J5: justificativa baseada em experiências do mundo empírico.

De modo geral a Tabela 8 mostra que com o avanço dos anos escolares há uma diminuição na frequência das justificativas J1 e J2. Tal fato sugere que nas questões de conhecimento não-matemático as crianças com maior escolaridade recorrem menos a elementos pessoais, idiossincráticos, para justificar suas respostas (J2). Ou seja, as crianças vão se mostrando mais capazes de justificar sua resposta com base no contexto apresentado na pergunta.

O mesmo acontece em relação a capacidade das crianças de justificar suas respostas. De modo geral a frequência de J1 diminui diante do sequenciamento dos anos escolares. Vale salientar aqui que já no Infantil III (crianças mais novas) o percentual de ausência de justificativas (tipo J1) é consideravelmente baixo (4,6%). Essa constatação sugere que as situações apresentadas nas perguntas de conhecimento não-matemático fazem, de fato, sentido para as crianças.

Em relação a J3 é possível observar uma relativa estabilidade na frequência desse tipo de justificativa nos diferentes grupos. Lembrando que J3 representa um tipo de resposta onde não é possível identificar se a criança estabeleceu relações entre os elementos presentes no enunciado da questão apresentada. É a justificativa tautológica, onde a resposta consiste numa repetição literal de um trecho da pergunta, quer seja porque a criança não foi capaz de encontrar relações para os elementos nela contidos,

quer seja porque a pergunta requeria uma resposta tão óbvia que não se julgou necessário discorrer mais sobre a mesma.

Chama-se aqui atenção para a ausência de justificativas tipo 4 em todos os seis grupos. Na J4 a criança baseia suas respostas nas relações entre os elementos presentes na pergunta. Nesse caso a criança não traz na sua justificativa fatos ou observações provenientes das suas experiências no mundo. Desse modo a ausência de justificativas desse tipo parece estar relacionada a natureza da pergunta. As questões de conhecimento não-matemático parecem requerer das crianças que as mesmas fundamentem suas justificativas em elementos, observações ou mesmo suposições relacionados às suas experiências no mundo. Ou seja, apenas a relação entre os elementos presentes na pergunta não parece ser suficiente para justificar as respostas a questões desse tipo.

Contrastando com esse cenário de J4 está a frequência de respostas J5. Nas questões de conhecimento não-matemático, a justificativa tipo 5 foi a que obteve maior frequência em todos os grupos, com percentual mínimo de 63% no Infantil III. Esse tipo de justificativa é caracterizada pelo fato da criança embasar a resposta em suas experiências e observações sobre o mundo. Essa constatação vem a reiterar o que foi dito há pouco quanto à natureza das perguntas: as questões de conhecimento não-matemático requerem das crianças que elas busquem em suas experiências elementos para justificar suas respostas. Observa-se que do Infantil III ao 2º ano a frequência de J5 é crescente (63% no infantil III, 73,9% no 1º ano e 85,4% no 2º ano). A partir daí tem-se uma equivalência da frequência de J5 nos demais grupos, chegando a 89,1% das justificativas dadas pelas crianças do 5º ano.

No que se refere ao conhecimento matemático, a distribuição das respostas em função dos tipos de justificativas pode ser observado na Tabela 9:

Tabela 9: Frequência e percentual das justificativas nas questões de conhecimento matemático. Máximo de respostas por grupo = 540.

Ano escolar	J1	J2	J3	J4	J5
Infantil III	57 (10,5%)	356 (65,9%)	14 (2,6%)	93 (17,3%)	20 (3,7%)
1º ano	29 (5,4%)	197 (36,5%)	1 (0,2%)	260 (48,1%)	53 (9,8%)
2º ano	13 (2,4%)	152 (28,1)	8 (1,5%)	269 (49,9%)	98 (18,1%)
3º ano	12 (2,2%)	102 (18,9%)	0	317 (58,7%)	109 (20,2%)
4º ano	2 (0,4%)	78 (14,4%)	3 (0,6%)	341 (63,1%)	116 (21,5%)
5º ano	1 (0,2%)	55 (10,2%)	0	358 (66,3%)	126 (23,3%)

NOTA: J1: ausência de justificativa; J2: justificativa baseada em aspectos idiossincráticos; J3: justificativa tautológica; J4: justificativa baseada nas relações entre os elementos do enunciado; J5: justificativa baseada em experiências do mundo empírico.

Como pode ser observado na Tabela 9, há uma diminuição da frequência de J1 à medida que se avança nos anos escolares. Ou seja, é mais comum as crianças dos anos escolares iniciais não conseguirem justificar as suas respostas. Nota-se aqui que no caso do Infantil III 10% das crianças não conseguem oferecer uma justificativa que indique sua forma de pensar.

Uma diminuição de frequência também é constatada para a justificativa tipo 2, porém num cenário bem diferente. Os percentuais de J2, notadamente no Infantil III e no 1º ano, são consideravelmente altos (65,9% e 36,5%, respectivamente). Esse percentual vai diminuindo com o avançar dos anos escolares, chegando a 10,2% no 5º ano. Sendo assim tem-se que quanto menor o grau de escolaridade, mais crianças mostram-se incapazes de justificar suas respostas a partir dos elementos apresentados nas perguntas, recorrendo então a aspectos de natureza idiossincrática, que não apresentam relação clara com a questão.

Contrastando com o que acontece em J2, a justificativa tipo 3 tem frequência extremamente baixa. Apesar de não ser possível apontar uma direção de aumento ou diminuição na frequência J3 em relação ao avanço dos anos escolares, a variação dessa frequência não se mostra relevante, pois ela vai de um mínimo de 0% (3º ano e 5º ano) a um máximo de 2,6% (Infantil III). Constata-se então que no âmbito das questões de

conhecimento matemático é baixíssimo o número de justificativas que se limitam apenas a repetir parte do enunciado da questão apresentada.

No caso de J4 existe uma relação direta entre o aumento da frequência desse tipo de justificativa e o avanço dos anos escolares. No Infantil III essa frequência é de 17,3% e vai aumentando a cada ano escolar, chegando a 66,3% no 5º ano. Ou seja, cada vez mais crianças de cada grupo passam a justificar as suas respostas usando os elementos que estão presentes na questão apresentada. Tal fato denota que, no contexto de conhecimento matemático, a capacidade de fazer uso dos elementos trazidos na pergunta – sem recorrer a suas experiências no mundo – está relacionado com um maior nível de escolaridade.

Essa mesma situação de correlação se repete em relação a justificativa tipo 5, que vai de 3,7% no Infantil III até 23,3% no 5º ano. A J5 se caracteriza pelo fato da criança basear as justificativas em suas observações sobre o mundo, podendo relacionar essas experiências com elementos contidos na pergunta apresentada. Vale salientar que ainda que se observe – nas questões de conhecimento matemático – um aumento na frequência de J5, esse aumento é muito maior nas justificativas tipo J4.

Como já se sabe, o campo de conhecimento matemático é composto de questões sobre o raciocínio probabilista e sobre o raciocínio combinatório. Agora será feita uma análise descritiva e interpretativa das justificativas dadas pelos participantes às suas respostas nesses dois tipos de questões, a começar pela frequência de justificativas nas questões de probabilidade, como mostra a Tabela 10:

Tabela 10: Frequência e percentual das justificativas nas questões de probabilidade. Máximo de respostas por grupo = 360.

Ano escolar	J1	J2	J3	J4	J5
Infantil III	34 (9,4%)	222 (61,7%)	14 (3,9%)	74 (20,6%)	16 (4,4%)
1º ano	18 (5%)	92 (25,6%)	1 (0,3%)	198 (55%)	51 (14,1%)
2º ano	6 (1,7%)	45 (12,5%)	8 (2,2%)	206 (57,2%)	95 (26,4%)
3º ano	6 (1,7%)	24 (6,7%)	0	221 (61,4%)	109 (30,2%)
4º ano	0	17 (4,7%)	3 (0,8%)	226 (62,8%)	114 (31,7%)
5º ano	0	10 (2,8%)	0	229 (63,6%)	121 (33,6%)

NOTA: J1: ausência de justificativa; J2: justificativa baseada em aspectos idiossincráticos; J3: justificativa tautológica; J4: justificativa baseada nas relações entre os elementos do enunciado; J5: justificativa baseada em experiências do mundo empírico.

Vê-se na Tabela supra citada que há uma diminuição na frequência de J1 com a evolução da escolaridade. Ainda que no início essa frequência não seja tão baixa (9,4% no Infantil III), ela vai diminuindo e só aparece até o 3º ano, mostrando que de fato só no início da vida escolar é que as crianças – em poucas situações – não são capazes de justificar suas respostas nas questões de probabilidade.

Nesse tipo de questão também se observa uma diminuição da frequência das justificativas tipo 2 nessa mesma direção. Ou seja, cada vez menos as crianças recorrem a elementos estranhos ao contexto das questões para justificar suas respostas. Apesar disso, destaca-se aqui o fato do percentual de J2 ser bem maior do que os de J1, em todos os grupos. Esses resultados denotam que as crianças se empenharam em dar uma justificativa para as suas respostas, ainda que para isso recorressem a elementos pessoais, idiossincráticos.

Em relação a frequência de justificativas tipo 3, não é possível apontar uma direção de aumento ou diminuição da mesma a partir do avanço dos anos escolares. Entretanto vale salientar aqui a baixíssima frequência desse tipo de justificativa, quando ela ocorre (máximo de 3,9% no Infantil III). Esses dados mostram que em pouquíssimas questões os alunos usaram apenas parte do enunciado como justificativa.

A justificativa tipo 4, ao contrário do que foi observado em J1 e J2, torna-se mais frequente quanto maior é o nível de escolaridade. O menor percentual de J4, que não é baixo, ocorre no infantil III (20,6%), chegando a 63,6% no 5º ano. A partir desses resultados pode-se pensar que o aumento da escolaridade mantém uma relação direta com a capacidade da criança de estabelecer relações entre os elementos da pergunta para justificar suas respostas, sem recorrer a fatores estranhos ao contexto da questão apresentada.

A frequência da justificativa tipo 5 também aumenta com o avanço dos anos escolares. Ainda que se observe que cada vez mais as crianças usam suas experiências e observações sobre o mundo para justificar suas respostas, ao observar cada grupo separadamente percebe-se que a frequência de J4 é praticamente o dobro – ou mais – da frequência de J5.

Em relação as questões de combinatória, a Tabela 11 traz a frequência e o percentual dos tipos de justificativas nos seis grupos de participantes:

Tabela 11: Frequência e percentual das justificativas nas questões de combinatória – possibilidade e impossibilidade. Máximo de respostas por grupo = 180.

Ano escolar	J1	J2	J3	J4	J5
Infantil III	23 (12,8%)	134 (74,4%)	0	19 (10,6%)	4 (2,2%)
1º ano	11 (6,1%)	105 (58,4%)	0	62 (34,4%)	2 (1,1%)
2º ano	7 (3,9%)	107 (59,4%)	0	63 (35%)	3 (1,7%)
3º ano	6 (3,3%)	78 (43,3%)	0	96 (53,4%)	0
4º ano	2 (1,1%)	61 (33,8%)	0	115 (64%)	2 (1,1%)
5º ano	1 (0,6%)	45 (25%)	0	129 (71,6%)	5 (2,8%)

NOTA: J1: ausência de justificativa; J2: justificativa baseada em aspectos idiossincráticos; J3: justificativa tautológica; J4: justificativa baseada nas relações entre os elementos do enunciado; J5: justificativa baseada em experiências do mundo empírico.

É notável a diminuição da frequência, tanto nas justificativas tipo 1 como nas justificativas tipo 2 à medida que o nível de escolaridade aumenta. Ou seja, não só as crianças cada vez menos deixam de fornecer justificativas para as suas respostas (J1),

como também vão deixando de usar nas justificativas elementos que são alheios ao enunciado da questão (J2). Chama-se à atenção para o fato de que, apesar da frequência de J1 e J2 serem decrescentes em relação à sequência dos anos escolares, a justificativa tipo 2 se faz bem mais frequente (pelo menos cinco vezes mais) do que a justificativa tipo 1. Tal fato sugere um empenho das crianças em justificar suas respostas, ainda que ela não encontre no enunciado elementos para isso.

Destaca-se na Tabela 11 a ausência de justificativa tipo 3. Assim sendo, no caso das questões de combinatória as crianças não usaram apenas os elementos da pergunta como justificativa. Como essa ausência de J3 ocorreu em todos os grupos, é possível acreditar que tal fato está relacionado à natureza das perguntas, como se em questões de raciocínio combinatório não fosse possível justificar as respostas apenas através de parte do enunciado.

Ao contrário do que acontece com J1 e J2, constata-se um aumento da frequência da justificativa tipo 4 em relação ao avanço dos anos escolares. Essa frequência é de 10,6% no Infantil III e chega a 71,6% no 5º ano. Esse aumento substancial da frequência sugere que existe uma correlação entre o aumento da escolaridade e a capacidade da criança de estabelecer relações entre os elementos presentes no enunciado das questões de combinatória.

No caso da justificativa tipo 5, a frequência observada em todos os grupos é muito baixa (máximo de 2,8% no 5º ano) e não é possível traçar uma relação de aumento ou de diminuição da mesma em relação à sequência dos anos escolares. Sendo assim, pode-se dizer que são pontuais, nas questões de combinatória, os casos em que as crianças fazem uso das suas experiências e observações sobre o mundo para justificar suas respostas, visto que na grande maioria das vezes esse tipo de justificativa (J5) não aparece.

3. Análise do desempenho nos três tipos de questões

Aqui serão apresentados os resultados do desempenho das crianças nos três tipos de questões que compuseram a T-PIC: possibilidade, certeza e impossibilidade. A Tabela a seguir mostra a frequência (e percentual) de acertos que as crianças tiveram nesses três tipos de questões, no âmbito do conhecimento não-matemático:

Tabela 12: Frequências e percentual de acertos – conhecimento não-matemático.

Ano escolar	Possibilidade	Certeza	Impossibilidade
Infantil III	65 (36,1%)	159 (88,3%)	146 (81,1%)
1º ano	75 (41,7%)	163 (90,5%)	171 (95%)
2º ano	120 (66,7%)	171 (95%)	175 (97,2%)
3º ano	138 (76,7%)	176 (97,8%)	172 (95,5%)
4º ano	138 (76,7%)	173 (96,1%)	170 (94,4%)
5º ano	152 (84,4%)	178 (98,9%)	179 (99,4%)

Observando a Tabela 12 é possível constatar que a frequência de acertos é menor nas questões de possibilidade. Sendo assim, aplicou-se o teste de Wilcoxon a fim de comparar o desempenho das crianças nesses três tipos de perguntas, como mostra a Tabela 13:

Tabela 13: Comparação de desempenho – conhecimento não-matemático.

Possibilidade x Certeza	Z	p
Infantil III	- 4,725	0,000
1º ano	- 4,645	0,000
2º ano	- 4,187	0,000
3º ano	- 4,091	0,000
4º ano	- 3,126	0,002
5º ano	- 4,061	0,000
Possibilidade x Impossibilidade	Z	p
Infantil III	- 4,123	0,000
1º ano	- 4,647	0,000
2º ano	- 4,238	0,000
3º ano	- 3,596	0,000
4º ano	- 3,150	0,002
5º ano	- 4,288	0,000
Certeza x Impossibilidade	Z	p
Infantil III	- 1,002	0,316
1º ano	- 1,890	0,059
2º ano	- 1,069	0,285
3º ano	- 1,265	0,206
4º ano	- 0,663	0,507
5º ano	- 0,577	0,564

Os dados da Tabela 12 mostram que as crianças, em todos os anos escolares, apresentam melhor desempenho tanto nas questões de certeza como naquelas de impossibilidade, quando comparado às questões de possibilidade. Ou seja, o desempenho das crianças nas perguntas sobre possibilidades é de fato pior do que nos outros dois tipos de pergunta. Porém, quando se compara o número de acertos nas perguntas de certeza com o número de acertos em impossibilidade, constata-se que não há diferença de desempenho das crianças, em nenhum dos anos escolares.

Ainda no domínio de conhecimento não-matemático, foram feitas comparações de desempenho entre os anos escolares – nas questões de possibilidade, certeza e impossibilidade – através do teste de Mann-Whitney. O quadro 4 apresenta esses dados:

Quadro 4: Comparação entre os anos escolares – conhecimento não-matemático.

Comparações	Possibilidade	Certeza	Impossibilidade
Infantil III x 1º ano	Z = - 0,642 p = 0,521	Z = - 0,102 p = 0,919	Z = - 2,987 p = 0,003
Infantil III x 2º ano	Z = - 4,492 p = 0,000	Z = - 1,234 p = 0,217	Z = - 3,776 p = 0,000
Infantil III x 3º ano	Z = - 5,321 p = 0,000	Z = - 2,319 p = 0,020	Z = - 3,200 p = 0,001
Infantil III x 4º ano	Z = - 4,985 p = 0,000	Z = - 1,876 p = 0,061	Z = - 2,700 p = 0,007
Infantil III x 5º ano	Z = - 6,079 p = 0,000	Z = - 2,917 p = 0,004	Z = - 4,662 p = 0,000
1º ano x 2º ano	Z = - 3,545 p = 0,000	Z = - 1,257 p = 0,209	Z = - 1,000 p = 0,318
1º ano x 3º ano	Z = - 4,514 p = 0,000	Z = - 2,448 p = 0,014	Z = - 0,288 p = 0,773
1º ano x 4º ano	Z = - 4,308 p = 0,000	Z = - 1,944 p = 0,052	Z = - 0,469 p = 0,639
1º ano x 5º ano	Z = - 5,379 p = 0,000	Z = - 3,085 p = 0,002	Z = - 2,280 p = 0,023
2º ano x 3º ano	Z = - 1,897 p = 0,058	Z = - 1,320 p = 0,187	Z = - 0,707 p = 0,479
2º ano x 4º ano	Z = - 1,992 p = 0,046	Z = - 0,814 p = 0,416	Z = - 1,496 p = 0,135
2º ano x 5º ano	Z = - 3,465 p = 0,001	Z = - 2,081 p = 0,037	Z = - 1,404 p = 0,160
3º ano x 4º ano	Z = - 0,382 p = 0,702	Z = - 0,453 p = 0,650	Z = - 0,764 p = 0,445
3º ano x 5º ano	Z = - 1,510 p = 0,131	Z = - 0,853 p = 0,393	Z = - 2,017 p = 0,044
4º ano x 5º ano	Z = - 0,800 p = 0,424	Z = - 1,248 p = 0,212	Z = - 2,755 p = 0,006

Nota-se que nas questões de possibilidade o desempenho das crianças do Infantil III se assemelha ao das crianças do 1º ano. Já as crianças do 2º ano apresentam um desempenho melhor do que as crianças do 1º ano. Porém, do 3º ano ao 5º ano não foram observadas diferenças de desempenho entre as crianças. Por sua vez, nas perguntas do tipo certeza, o avanço dos anos escolares não está associado a uma melhora no desempenho das crianças, a não ser quando se compara anos escolares “distantes” (como Infantil III x 3º ano, por exemplo). Ou seja, nas questões de certeza, o desempenho das crianças de um determinado ano escolar comparado com o seguinte é

semelhante. Já nas questões de impossibilidade constata-se diferenças de desempenhos nas partes superior e inferior da tabela: as crianças do 1º ano apresentam melhor desempenho do que as crianças do Infantil III. Do 1º ano ao 4º ano não há diferença de desempenho. Só se observa novamente aumento significativo no número de acertos quando se compara o 5º ano com o 4º ano.

No âmbito das questões de conhecimento matemático, o desempenho das crianças nos três tipos de questões será apresentado na Tabela a seguir:

Tabela 14: Frequências e percentual de acertos – conhecimento matemático.

Ano escolar	Possibilidade	Certeza	Impossibilidade
Infantil III	92 (51,1%)	117 (65%)	101 (56,1%)
1º ano	115 (63,9%)	171 (95%)	100 (55,5%)
2º ano	149 (82,8%)	176 (97,8%)	115 (63,9%)
3º ano	160 (88,9%)	180 (100%)	147 (81,7%)
4º ano	163 (90,5%)	179 (99,4%)	152 (84,4%)
5º ano	170 (94,4%)	179 (99,4%)	159 (88,3%)

Com o objetivo de comparar o desempenho das crianças nas questões de possibilidade, impossibilidade e certeza, foi realizado o teste de Wilcoxon, cujos valores e índices de significância são apresentados na Tabela 15:

Tabela 15: Comparação de desempenho – conhecimento matemático.

Possibilidade x Certeza	Z	P
Infantil III	- 2,596	0,009
1º ano	- 4,353	0,000
2º ano	- 3,719	0,000
3º ano	- 3,115	0,002
4º ano	- 3,557	0,000
5º ano	- 2,530	0,011
Possibilidade x Impossibilidade	Z	P
Infantil III	- 0,693	0,488
1º ano	- 1,636	0,102
2º ano	- 3,052	0,002
3º ano	- 1,765	0,077
4º ano	- 1,718	0,086
5º ano	- 1,778	0,075
Certeza x Impossibilidade	Z	P
Infantil III	- 1,286	0,198
1º ano	- 4,186	0,000
2º ano	- 4,049	0,000
3º ano	- 4,005	0,000
4º ano	- 3,289	0,001
5º ano	- 3,126	0,002

No que se refere a comparação do desempenho entre as questões de certeza e possibilidade, constata-se um desempenho melhor das crianças de todos os anos escolares nas questões de certeza. Também quando se compara o desempenho das crianças nessas questões com o desempenho em impossibilidade, o melhor resultado é nas questões de certeza para as crianças do 1º ano ao 5º ano. Não há diferença de desempenho das crianças do Infantil III entre as perguntas de impossibilidade e certeza. Já ao se comparar os acertos nas questões de possibilidade com impossibilidade, observa-se que entre esses dois tipos de perguntas não há diferença de desempenho das crianças em todos os anos escolares exceto no 2º ano, onde o desempenho é melhor nas questões de possibilidade.

Para finalizar as análises no campo de conhecimento matemático, foram feitas comparações de desempenho entre os anos escolares através do teste de Mann-Whitney. O quadro 5 traz os valores e significância:

Quadro 5: Comparação entre os anos escolares – conhecimento matemático.

Comparações	Possibilidade	Certeza	Impossibilidade
Infantil III x 1º ano	Z = - 1,975 p = 0,048	Z = - 4,069 p = 0,000	Z = - 0,297 p = 0,767
Infantil III x 2º ano	Z = - 4,501 p = 0,000	Z = - 4,465 p = 0,000	Z = - 0,905 p = 0,365
Infantil III x 3º ano	Z = - 5,224 p = 0,000	Z = - 5,110 p = 0,000	Z = - 3,846 p = 0,000
Infantil III x 4º ano	Z = - 5,632 p = 0,000	Z = - 4,904 p = 0,000	Z = - 4,073 p = 0,000
Infantil III x 5º ano	Z = - 5,925 p = 0,000	Z = - 4,904 p = 0,000	Z = - 4,699 p = 0,000
1º ano x 2º ano	Z = - 3,629 p = 0,000	Z = - 0,438 p = 0,662	Z = - 1,177 p = 0,239
1º ano x 3º ano	Z = - 4,628 p = 0,000	Z = - 2,051 p = 0,040	Z = - 4,837 p = 0,000
1º ano x 4º ano	Z = - 5,171 p = 0,000	Z = - 1,419 p = 0,156	Z = - 4,842 p = 0,000
1º ano x 5º ano	Z = - 5,663 p = 0,000	Z = - 1,419 p = 0,156	Z = - 5,507 p = 0,000
2º ano x 3º ano	Z = - 1,393 p = 0,164	Z = - 1,762 p = 0,078	Z = - 2,687 p = 0,007
2º ano x 4º ano	Z = - 1,442 p = 0,149	Z = - 1,043 p = 0,297	Z = - 3,019 p = 0,003
2º ano x 5º ano	Z = - 3,026 p = 0,002	Z = - 1,043 p = 0,297	Z = - 3,609 p = 0,000
3º ano x 4º ano	Z = - 0,165 p = 0,869	Z = - 1,000 p = 0,317	Z = - 0,933 p = 0,351
3º ano x 5º ano	Z = - 1,568 p = 0,117	Z = - 1,000 p = 0,317	Z = - 1,846 p = 0,065
4º ano x 5º ano	Z = - 2,073 p = 0,038	Z = - p = -	Z = - 0,750 p = 0,453

O avanço dos anos escolares mostra um melhor desempenho das crianças do Infantil III ao 2º ano nas questões de possibilidade. Nova melhora de desempenho ocorre nas crianças do 5º ano comparadas àquelas do 4º ano. Do 2º ano ao 4º ano não houve diferença de desempenho das crianças nas questões de possibilidade. Já nas questões de certeza, só se observa uma melhora de desempenho ao comparar o Infantil III com o 1º ano, onde esse último de fato apresenta maior índice de acertos. A partir daí, a sequência dos anos escolares não traz consigo melhora no desempenho,

destacando-se aqui que as crianças do 4º ano tiveram desempenho exatamente igual às do 5º ano¹⁹.

No que se refere as questões de impossibilidade, o avanço dos anos escolares só é acompanhado de uma melhora de desempenho das crianças quando se compara o 3º ano com o 2º ano. Ou seja, nesse tipo de questão as crianças do Infantil III ao 2º ano apresentam desempenhos semelhantes; o mesmo ocorre entre as crianças do 3º ano ao 5º ano.

Por fim, foram realizadas análise de comparação de desempenho das crianças nas questões de possibilidade, impossibilidade e certeza a partir do campo de conhecimento (não-matemático e matemático). Os valores do teste de Mann-Whitney bem como os índices de significância são mostrados no Quadro 6:

Quadro 6: Desempenho nos tipos de questões a partir do campo de conhecimento.

Ano escolar	Possibilidade (não-matemático x matemático)	Certeza (não-matemático x matemático)	Impossibilidade (não-matemático x matemático)
Infantil III	Z = - 2,314 p = 0,021	Z = - 3,123 p = 0,002	Z = - 4,375 p = 0,000
1º ano	Z = - 3,135 p = 0,002	Z = - 1,526 p = 0,127	Z = - 4,688 p = 0,000
2º ano	Z = - 2,664 p = 0,008	Z = - 1,249 p = 0,212	Z = - 4,106 p = 0,000
3º ano	Z = - 2,573 p = 0,010	Z = - 2,000 p = 0,046	Z = - 3,697 p = 0,000
4º ano	Z = - 2,552 p = 0,011	Z = - 1,730 p = 0,084	Z = - 2,336 p = 0,020
5º ano	Z = - 3,411 p = 0,001	Z = - 0,577 p = 0,564	Z = - 3,000 p = 0,003

¹⁹ O fato desses dois anos escolares apresentarem frequências de acertos exatamente iguais inviabiliza o uso do teste estatístico, que se propõe a avaliar diferenças entre variáveis. Por isso, na comparação entre o 4º ano e o 5º ano, nas questões do tipo certeza, não se dispõe nem do valor do teste nem do índice de significância.

A comparação do desempenho das crianças nos três tipos de questões levando em consideração os campos de conhecimento trouxe dados bastante interessantes. Nas questões tipo certeza praticamente não se observa diferenças de desempenhos quando se compara o conhecimento não-matemático ao conhecimento matemático. Já nas questões de possibilidade o desempenho das crianças de todos os anos escolares é melhor nas questões que envolvem conhecimento matemático. Por outro lado, nas questões de impossibilidade o desempenho das crianças é melhor no campo de conhecimento não-matemático, independente do ano escolar.

Conclusões e discussão

O pensamento sobre o possível (e consequentemente sobre o impossível e a certeza) configura-se enquanto raciocínio abstrato, sendo este um dos aspectos que caracteriza o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Isso porque conjecturar acerca de possíveis exige habilidades hipotético-dedutivas, que permitem ao sujeito pensar sobre situações que não constituem uma realidade imediata. Apesar de Piaget (1985; Piaget & Inhelder, 1951) propor que as considerações acerca de situações possíveis (notadamente no campo da probabilidade e da análise combinatória) não estão disponíveis para crianças menores – até sete, oito anos – estudos recentes no campo da Psicologia da Educação Matemática (Mekmandarov, 2000; Mousoulides & English, 2009; Nikiforidou & Pange, 2007; Silva, 2014; 2010; Spinillo, 2002; 1997; 1996; Way, 1996) têm mostrado que crianças muito pequenas – quatro, cinco anos – já são capazes de conjecturar sobre o possível de forma eficaz. Ressalta-se aqui que o raciocínio sobre o possível (impossível e certo) é que torna o sujeito capaz de julgar situações de probabilidade e análise combinatória.

No entanto, o possível não se revela apenas no campo dos conhecimentos matemáticos, podendo se manifestar no campo do conhecimento não-matemático, visto que a concepção de possível permeia os mais diversos contextos e, portanto, se faz presente no cotidiano.

Diante disso, este estudo teve por objetivo investigar a concepção do possível em crianças. De maneira mais específica, buscou-se saber: a partir de que idade as crianças podem apresentar indícios dessa concepção? Como a mesma se apresenta em

diferentes idades? Será que ela se manifesta igualmente em diferentes campos de conhecimento (matemático e não-matemático)? Como a criança lida com a possibilidade e seus “extremos” (certeza e impossibilidade)? Especificamente no âmbito do conhecimento matemático, será que a concepção do possível aplicada a perguntas de natureza probabilista e combinatória traz desempenhos diferentes nesses dois campos de conhecimento?

Para responder a essas perguntas foi desenvolvida uma tarefa composta de 36 itens que versavam sobre a ocorrência de situações de fatos possíveis, impossíveis e certas de acontecer, tanto no domínio de conhecimento matemático como não-matemático. Os dados oriundos desta pesquisa, que foram analisados em função do desempenho e das justificativas das crianças, são brevemente discutidos neste capítulo final.

Os dados deste estudo mostraram que mesmo crianças muito pequenas (cinco anos) já são capazes de pensar sobre o possível de um modo geral. Não se pode aqui estabelecer relações entre o desempenho das crianças que participaram deste estudo e os níveis de evolução dos possíveis propostos por Piaget (1985) a partir de suas pesquisas. Isso porque as tarefas apresentadas nos dois casos são de natureza distintas. Porém, os participantes deste estudo – mesmo os mais novos – foram capazes de conjecturar sobre o possível de forma eficaz ao acertarem as perguntas da tarefa proposta nesta investigação.

Por outro lado, Piaget (1985) propôs uma evolução dos possíveis com a idade. De fato, os dados desta pesquisa indicam que o desempenho das crianças mais velhas é melhor que o das crianças mais novas, tanto no que se refere às questões de conhecimento matemático como às questões de conhecimento não-matemático. O que muda no desempenho desses dois campos de conhecimento é que nas questões de

conhecimento não-matemático observa-se uma semelhança de desempenho entre as crianças do 2º ano, 3º ano e 4º ano. Ou seja, há um desempenho crescente nas crianças menores (Infantil III e 1º ano), desempenho esse que se estabiliza e em seguida volta a crescer entre o 4º ano e o 5º ano. Já nas questões de conhecimento matemático o aumento do número de acertos ocorre de forma expressiva nos três anos escolares iniciais (Infantil III, 1º ano e 2º ano) e não se estende para os anos escolares mais avançados, visto que constata-se desempenho semelhante entre as crianças do 3º ano ao 5º ano.

Ainda no que diz respeito ao desempenho dos participantes nesses dois campos de conhecimento os dados mostram que apenas no início da vida escolar (Infantil III) as crianças são mais eficazes em pensar acerca do possível, em conhecimentos não-matemáticos, quando comparados a conhecimentos matemáticos. Ou seja, no 1º ano as crianças não só são capazes de pensar sobre situações possíveis, impossíveis e certas de acontecer, como também possuem elementos que lhes permitem obter desempenhos semelhantes em diferentes domínios de conhecimentos (matemático e não-matemático).

Especialmente no âmbito do conhecimento matemático, as perguntas feitas às crianças envolviam dois domínios da matemática: a probabilidade e a análise combinatória. Uma vez que este estudo envolveu crianças muito novas (cinco anos), essas perguntas abarcavam as noções iniciais desses domínios, não requerendo por parte dos participantes conhecimento escolar sobre os mesmos. Notadamente no caso da combinatória, era perguntado às crianças acerca da possibilidade de ocorrência de uma combinação específica, ao invés de se solicitar a formação de diferentes combinações possíveis, como ocorre na maioria dos estudos (Pessoa & Borba, 2009; Silva, 2010).

A evolução dos possíveis proposta por Piaget (1985) também se aplica às questões específicas de raciocínio probabilista e combinatório. Os dados do presente

estudo ratificam essa colocação, tanto nas questões de probabilidade como nas questões de combinatória, uma vez que observa-se um aumento na frequência de acertos diante do avanço dos anos escolares. Nas questões que envolvem raciocínio probabilista, esse aumento é bem mais expressivo quando se compara as crianças menores (Infantil III, 1º ano e 2º ano). A partir do 3º ano tem-se um desempenho (número de acertos) análogo das demais crianças (3º ano, 4º ano e 5º ano).

Ainda que se observe uma melhora de desempenho significativa do 1º ano em relação ao Infantil III, é importante ressaltar que mesmo as crianças do Infantil III já se mostram capazes de pensar sobre o possível. Esses resultados diferem daqueles encontrados por Piaget e Inhelder (1951), uma vez que segundo esses autores, tanto a ideia de acaso como qualquer noção de probabilidade permanecem inaccessíveis à criança até os sete anos.

É possível que uma diferença nos resultados esteja relacionada à natureza das tarefas. Ao analisar as tarefas piagetianas, percebe-se que as mesmas eram mais complexas do que a tarefa oferecida aos participantes do presente estudo. Entretanto, é necessário salientar que ainda que tenham sido apresentadas tarefas simples, as mesmas só foram respondidas com êxito quando as crianças foram capazes de conjecturar sobre o possível.

Por outro lado, os resultados da presente pesquisa foram semelhantes àqueles encontrados por Nikiforidou e Pange (2007), onde crianças de cinco e seis anos já expressam noções de mais provável / menos provável. A capacidade de crianças pequenas (sete anos) refletirem acerca de situações possíveis – através do conceito de chance – também foi evidenciada nos estudos conduzidos por Spinillo (2002; 1997a; 1997b).

Curiosamente, nas questões de raciocínio combinatório, ainda que se constate um crescente número de acertos, essa melhora no desempenho não é expressiva de um ano escolar para o seguinte. Apesar disso, não se pode afirmar que as crianças não sejam capazes de pensar do ponto de vista combinatório, como mencionado por Piaget e Inhelder (1951). Isso porque os participantes do presente estudo – mesmo os mais novos – responderam com êxito mais da metade das questões de combinatória. Tal fato sugere que, ainda de forma elementar – dada a baixa complexidade das perguntas apresentadas – as crianças conjecturam acerca da possibilidade ou impossibilidade da ocorrência de combinações. Esses dados se fortalecem ao considerar os resultados encontrados por Mekmandarov (2000), onde crianças do “Jardim de Infância” já se mostram hábeis a construir conjuntos de produto cartesiano (ou aprendem ao longo da entrevista).

Chama-se aqui a atenção para a ausência de “saltos” no desempenho das crianças nas questões de combinatória de um ano para o seguinte. É intrigante constatar que não há melhora significativa de desempenho quando se compara dois anos escolares consecutivos, quaisquer que sejam esses anos. Nas questões de probabilidade essa ausência de diferença significativa só ocorre quando as crianças atingem um alto índice de acertos, fato esse constatado a partir do 3º ano.

A comparação do desempenho nas questões de probabilidade e de combinatória mostrou que as crianças do 3º ano, 4º ano e 5º ano apresentam mais acertos nas questões de raciocínio probabilista do que naquelas que envolvem raciocínio combinatório. Nos outros anos escolares (Infantil III, 1º ano e 2º ano) a diferença de desempenho entre as questões de probabilidade e combinatória não é significativa.

Ao que parece, do 3º ano em diante as questões de probabilidade ficaram muito fáceis para as crianças, uma vez que elas passaram a acertar quase a totalidade dessas perguntas. Esse fato justifica a semelhança de desempenho entre os três últimos anos

escolares. Já no caso do raciocínio combinatório, a melhora no desempenho é muito mais lenta. Some-se a isso o fato que esse desempenho, além de melhorar de maneira muito discreta, ainda não se estabiliza ao final do Ensino Fundamental I.

Tanto no campo de conhecimento não-matemático como também do conhecimento matemático, as perguntas feitas às crianças foram de três tipos: possibilidade de algo acontecer, impossibilidade e certeza. O que se observou foi que no âmbito do conhecimento não-matemático as crianças de todos os anos escolares apresentam pior desempenho nas questões de possibilidade, quer seja em relação às questões de certeza, quer seja em relação às questões de impossibilidade. Ou seja, os resultados sugerem que nas questões de conhecimento não-matemático as crianças acham mais fáceis (tanto que acertam mais) questões que focam nos extremos dos acontecimentos (certeza e impossibilidade) do que aquelas perguntas que focam na possibilidade (indefinição) do acontecimento de determinado fato.

Nas questões de conhecimento matemático os resultados apontam um cenário diferente. As questões mais fáceis foram aquelas que retratavam acontecimentos cuja ocorrência era certa (certeza). Ou seja, as questões de possibilidade e de impossibilidade no conhecimento matemático não se mostraram tão fáceis como as questões de certeza. Uma maior dificuldade com as possibilidades também foi constatada por Spinillo (1996; 1995), onde as crianças de cinco e seis anos mostravam-se capazes de estimar níveis de chance de ocorrência extremos (certeza e impossibilidade), mas apresentavam dificuldades em estimar níveis de chance mais sutis (pouca chance, mesma chance e certeza).

Por sua vez, Way (1996) constatou uma dificuldade de crianças entre cinco e seis anos em identificar o espaço amostral para impossibilidade. Já na identificação do espaço amostral para certeza, essa dificuldade não foi observada, denotando uma maior

facilidade em identificar situações cujo acontecimento é certo, corroborando com os resultados do presente estudo.

O desempenho das crianças nos três tipos de pergunta (possibilidade, impossibilidade e certeza) foi ainda avaliado em função do campo de conhecimento (matemático e não-matemático). A análise desses dados permitiu constatar que nas perguntas do tipo certeza, o desempenho das crianças nas questões de conhecimento não-matemático é equivalente àquele observado nas questões de conhecimento matemático. Porém, nas questões do tipo possibilidade, o desempenho das crianças é melhor nas questões de conhecimento matemático. Ou seja, parece mais fácil lidar com possibilidades no campo de conhecimentos matemáticos. Já as questões do tipo impossibilidade trazem um melhor desempenho nas perguntas referentes ao conhecimento não-matemático, o que denota que é mais fácil conjecturar acerca de situações impossíveis de acontecer no conhecimento não-matemático.

Além do número de acertos, examinou-se também as justificativas dadas pelas crianças, com o objetivo de ter uma noção acerca das razões e critérios de julgamentos que a criança tinha ao pensar sobre o possível (impossível e certo). As justificativas fornecidas foram categorizadas em tipos que expressam diferentes formas de raciocinar e fazer julgamento acerca das situações propostas na tarefa apresentada.

Para lembrar, tem-se que: a justificativa tipo 1 (J1) se caracteriza pela ausência de explicação; a justificativa tipo 2 (J2) é definida pelo uso de elementos idiossincráticos; já a justificativa tipo 3 (J3) restringe-se a repetição literal de parte do enunciado, apresentando um caráter tautológico; a justificativa tipo 4 (J4) consistia na relação estabelecida entre os elementos da pergunta, e só foi observada nas questões de conhecimento matemático; por fim, a justificativa tipo 5 (J5) denota um recurso das crianças às suas experiências empíricas no mundo para poder explicar suas respostas.

Os resultados da análise das justificativas mostram que nas questões de conhecimento matemático o cenário de distribuição das frequências de justificativas é bem diferente quando se compara com as questões de conhecimento não-matemático. Apesar de nos dois campos de conhecimento observar-se uma diminuição da frequência de justificativas tipo 1 com o aumento da escolaridade, esses números são menores nas questões de conhecimento não-matemático, sugerindo que nas questões de conhecimento matemático as crianças encontram mais dificuldades, uma vez que foi nas questões de conhecimento matemático que se observou uma maior ausência de justificativas para as respostas.

Também se observa uma diminuição do número de justificativas tipo 2 (que se baseia em elementos idiossincráticos) com o aumento da escolaridade. Além disso, vê-se que os percentuais que esse tipo de justificativa alcança nas questões de conhecimento matemático são bem maiores do que os percentuais nas questões de conhecimento não-matemático – comparando os mesmos anos escolares nos dois campos de conhecimento. O estudo realizado por Way (1996) encontrou resultados semelhantes, visto que apesar das crianças se mostrarem hábeis em realizar previsões de probabilidade corretas, eram incapazes de justificar suas respostas de maneira fundamentada. Nessa mesma direção, Mousoulides e English (2009) afirmaram que as crianças mais novas, diante de questões que envolvem raciocínio probabilista, frequentemente baseiam suas justificativas em crenças subjetivas. Essa observação denota que nas questões de conhecimento matemático as crianças possuem mais dificuldades para justificar suas respostas, e por isso recorrem a elementos alheios à questão apresentada, notadamente nos anos escolares iniciais.

A justificativa tipo 3 foi mais frequente nas questões de conhecimento não-matemático. O baixo percentual desse tipo de justificativa nas questões de

conhecimento matemático parece indicar que as crianças entenderam que não seria possível justificar as respostas dadas a esse tipo de questão apenas repetindo parte do enunciado.

O maior contraste entre os dois campos de conhecimento ocorreu na justificativa tipo 4. Nas questões de conhecimento não-matemático não se observou a ocorrência de nenhuma justificativa desse tipo, como dito anteriormente. Já nas questões de conhecimento matemático vê-se um aumento na frequência da justificativa tipo 4 à medida que os anos escolares avançam. Tal fato sugere que nas questões de conhecimento matemático as relações estabelecidas entre os elementos trazidos nas perguntas muitas vezes já são suficientes para que as crianças justifiquem suas respostas.

Por fim, apesar de se observar um aumento na frequência da justificativa tipo 5 nos dois campos de conhecimento, os números são bem mais expressivos nas questões de conhecimento não-matemático. Esses dados sugerem que para as crianças parece ser muito mais fácil justificar suas respostas no âmbito do conhecimento não-matemático recorrendo às suas experiências pessoais – e quanto maior a escolaridade mais evidente isso fica.

Em resumo, esse estudo mostrou que aos cinco anos as crianças já são capazes de pensar sobre o possível. Essa concepção se desenvolve ao longo do tempo, de modo que as crianças mais velhas não só apresentam um melhor desempenho nas questões, como também se tornam mais capazes de justificar suas respostas de maneira fundamentada. Os dados mostraram também que com exceção do Infantil III (que evidencia um desempenho superior nas perguntas de conhecimento não-matemático), não houve diferença significativa de desempenho entre as perguntas de conhecimento matemático e não-matemático. No que se refere aos tipos de questões, constatou-se que

as perguntas do tipo possibilidade foram mais facilmente respondidas no domínio do conhecimento matemático, quando comparado ao desempenho no domínio não-matemático. Já as perguntas do tipo impossibilidade mostraram-se mais fáceis no domínio do conhecimento não-matemático. Nas questões do tipo certeza o desempenho das crianças foi semelhante nesses dois domínios de conhecimento.

Ao procurar responder as questões que o motivaram, esse estudo traz contribuições para a Psicologia da Educação Matemática e para a Psicologia Cognitiva. Esta pesquisa contribuiu para a compreensão de aspectos relevantes do raciocínio sobre o possível em crianças, aspectos esses que não haviam sido ainda investigados, como por exemplo a noção de possível em diferentes campos do conhecimento.

1. Implicações educacionais

Do ponto de vista educacional, as contribuições deste estudo apontam na direção da abordagem escolar de domínios de conhecimento fundamentados na concepção de possível: probabilidade e análise combinatória. Do ponto de vista da probabilidade, constatou-se uma semelhança de desempenho das crianças do 3º ano ao 5º ano do Ensino Fundamental. Ainda que as perguntas feitas às crianças não fossem complexas, elas se fundamentavam no princípio mais importante da probabilidade, qual seja: a ocorrência de casos favoráveis a partir de um determinado espaço amostral. Se as crianças a partir do 3º ano do Ensino Fundamental já demonstram ter o entendimento desse princípio, talvez seja o momento de aprofundar mais as noções de probabilidade trabalhadas em sala de aula.

No que se refere às questões de combinatória o cenário chama bastante atenção. Esta pesquisa contou com a participação de crianças alunas de seis anos escolares

consecutivos (Infantil III ao 5º ano) e em nenhuma das comparações entre anos escolares subsequentes observou-se melhora significativa do desempenho das crianças mais avançadas do ponto de vista escolar. Apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil/MEC, 1997) recomendarem que conteúdos de análise combinatória sejam trabalhados já nos anos escolares iniciais do Ensino Fundamental, Silva (2014) acredita que mesmo os problemas de produto cartesiano – que constituem o tipo mais simples de combinações – não estão sendo trabalhados nessa faixa etária. Destaca-se ainda que para Silva os problemas do tipo produto cartesiano deveriam ser trabalhados com as crianças a partir do 3º ano. Não parece ser por acaso que é justamente a partir do 3º ano que as crianças participantes desse estudo passam a ter um desempenho significativamente melhor nas questões de probabilidade do que nas questões de combinatória, sugerindo a existência de uma lacuna, de um “freio” no desenvolvimento de um conceito que é essencialmente escolar. Ao que parece, esses conteúdos ou não estão sendo trabalhados nas series iniciais, ou a maneira como se conduz esse trabalho não permite que as crianças se apropriem e desenvolvam o seu raciocínio acerca dos princípios da combinatória. Até que se chegue ao manejo dos algoritmos a criança deve percorrer um longo caminho, referente a apropriação das relações envolvidas nos problemas de combinatória. Isso não só auxilia as crianças em relação a aprendizagem da análise combinatória como também minimiza as chances das mesmas se tornarem apenas reprodutoras de formulas algorítmicas.

2. Pesquisas futuras

Ainda que tenha sido feito um esforço para responder as questões da pesquisa com êxito, a operacionalização deste estudo e a análise dos seus resultados levantou

novos aspectos que podem ser abordados em pesquisas futuras. Um deles, por exemplo, é que para as questões de conhecimento não-matemático, já no Infantil III, obteve-se um alto percentual de acertos. Tal fato sugere que mesmo antes do Infantil III (antes dos cinco anos) as crianças já devem ser capazes de fazer conjecturas sobre o possível. Talvez fosse interessante abordar essas crianças mais novas para investigar ideias do possível ainda mais iniciais. Em contrapartida, as questões de combinatória, ainda de natureza muito simples, não se mostraram óbvias mesmo para as crianças do 5º ano, o que sugere que uma investigação envolvendo crianças ainda mais velhas poderia fornecer indícios acerca as relações iniciais que as crianças estabelecem sobre a análise combinatória.

Outro aspecto bastante relevante a ser considerado em pesquisas futuras é a análise dos erros cometidos pelas crianças. O desempenho dos participantes deste estudo foi contabilizado em termos de acertos, dado o objetivo da pesquisa. Entretanto, a análise dos erros poderá trazer informações importantes e úteis para o processo ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos de probabilidade e análise combinatória.

Além disso, o presente estudo não investigou o desenvolvimento de um conceito que está intimamente relacionado à ideia de certeza: a noção de suficiente. É a concepção de suficiente que propicia a certeza do acontecimento de um dado evento antes mesmo que todo espaço amostral seja explorado. Esse é um aspecto fundamental no ensino-aprendizagem de probabilidade, e deve ser explorado.

Esta pesquisa foi idealizada a partir de uma série de perguntas para às quais não se tinha respostas. Ao ser concluída, encontra as respostas que buscava e gera novas perguntas que até o momento estão sem respostas... Essa é a essência da construção do conhecimento!

Referências

- Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de filosofia* (5ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.
- Brasil/MEC. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental.
- Cabral Júnior, R. S. (2009). *Abordagem das noções iniciais de probabilidade em uma perspectiva construtivista*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Acesso em junho 20, 2011, em http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/rubens_souza_cabral.pdf
- Cânizares, M. J.; Batanero, C.; Serrano, L. & Ortiz, J. J. (2003). *Children's understanding of fair games*. Acesso em outubro 21, 2011, em http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG5/TG5_canizar es_cerme3.pdf
- Carvalho, R. P. F. (2005). *A formação de conceitos probabilísticos em crianças da 4ª série do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, Universidade Católica de Brasília, Brasília. Acesso em agosto 27, 2010, em http://www.bdtd.ucb.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=339
- Carvalho, C. & Fernandes, A. J. (2007). *Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da psicologia*. Acesso em agosto 10, 2010, em <http://cie.fc.ul.pt/membrosCIE/ccarvalho/Quadrante%2007.pdf>
- Chiarontino, Z. R. (2005). Os “estágios” do desenvolvimento da inteligência. *Viver: mente & cérebro*, 1, 16-23.
- Comte-Sponville, A. (2011). *Dicionário filosófico*. São Paulo: Martins Fontes.

- Coutinho, C. Q. S. (1994). *Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista: estudo epistemológico e didático*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Acesso em setembro 17, 2010, em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/cileda_coutinho.pdf
- Dantas, C. A. B. (2008). *Probabilidade: um curso introdutório*. São Paulo: EDUSP.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Jones, G. A.; Langrall, C. W.; Thornton, C. A. & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101-125.
- Iezzi, G; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Perigo, R. & Almeida, R. (2004). *Coleção matemática: ciências e aplicações*. São Paulo: Atual.
- Japiassu, M. D. (2008). *Dicionário básico de filosofia*. Rio de Janeiro: Zahar.
- Marques, P. *Probabilidade*. 2010. Acesso em junho 07, 2012, em <http://www.algosobre.com.br/matematica/nocoes-de-probabilidade>
- Mekhmandarov, I. (2000). Analysis and Synthesis of the Cartesian product by kindergarten children. In *Proceedings of the 24th Annual Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: 24° PME, (295-301).
- Merayo, F. (2001). *Matemática discreta*. Madri: Thomson Paraninfo.
- Mora, J. F. (2001). *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martin Fontes.
- Mousoulides, N. G. & English, L. D. (2009) *Kindergarten students' understanding of probability concepts*. Acesso em outubro 21, 2011, em <http://eprints.qut.edu.au/29682/1/29682.pdf>

- Nikiforidou, Z. & Pange, J. (2007). *Can probability combinations/estimations be assessed in prechoolers with the use of computers (PowerPoint)?* Acesso em outubro 21, 2011, em http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/sat07/Nikiforidou_Pange.pdf
- Pessoa, C. A. S. & Borba, R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. *Zetetiké*, 17, 105-150. Acesso em abril 10, 2012, em www.fe.unicamp.br/zetetike/include/getdoc.php?id=826...246
- Pessoa, C. A. S. & Borba, R. (2010) O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 1, 1-22. Acesso em abril 10, 2012, em www.gente.eti.br/emteia/index.php/emteia/article/download/4/2
- Piaget, J. (1951). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Record Cultural.
- Piaget, J. (1985). *O possível e o necessário: a evolução dos possíveis na criança* (vol. 1). Porto Alegre: Artes Médicas.
- Piaget, J. (1985). *O possível e o necessário: a evolução dos necessários na criança* (vol. 2). Porto Alegre: Artes Médicas.
- Piaget, J. (1996). *A construção do real na criança* (5ª ed). São Paulo: Ática.
- Piaget, J. (2007) *Epistemologia Genética* (3ª ed). São Paulo: Martins Fontes.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (2006). *A psicologia da criança* (2ª ed). Rio de Janeiro: Difel.
- Pieruccini, R. D. R. (2010). *Interação social e tomada de consciência das noções básicas de probabilidade em crianças do primeiro ano do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

- Santos, J. P. O.; Mello, M. P. & Murari, I. T. C. (2007). *Introdução à análise combinatória* (4ª ed). Rio de Janeiro: Ciência Moderna.
- Silva, J. F. G. (2010). *O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Silva, J. F. G. (2014). *O raciocínio combinatório à luz dos princípios invariantes: uma análise de problemas de produto cartesiano*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Spinillo, A. G. (1995). Noções iniciais das crianças sobre probabilidade. *Temas em Psicologia*, Ribeirão Preto, 1, 47-68.
- Spinillo, A. G. (1996). O conceito de chance em situações de julgamento e de construção. In: Novaes, M. H. & Brito, M. R. F. *Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica*. Coletâneas da ANPEPP, 1 (5), 167-186.
- Spinillo, A. G. (1997). Chance estimates by young children: strategies used in an ordering chance task. In *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Lahti: 21º PME (296-302).
- Spinillo, A. G. (1997). O conceito de chance em crianças: noções iniciais e possibilidades de ensino. In *Anais da 2ª Semana de estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife, (126-132).
- Spinillo, A. G. (2002). Children's use of part-part comparisons to estimate probability. *Journal of Mathematical Behavior*, New Brunswick, v. 21(3), 357-369.

- Vazques, C. M. R. & Nogute, F. C. H. (2004). Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In *Anais do 8º Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife. Acesso em maio 11, 2012, em <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>
- Way, J. (1996). *A study of children's probability judgements*. Acesso em outubro 21, 2011, em http://www.merga.net.au/documents/RP_Way_1996.pdf