



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

## **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**EMPACOTAMENTO DE FIOS E TEORIA DE CAMPOS CONFORMES EM 2D**

**Tiago Anselmo da Silva**

Recife - PE, Brasil  
Setembro - 2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EMPACOTAMENTO DE FIOS E TEORIA DE CAMPOS CONFORMES EM 2D

por

**Tiago Anselmo da Silva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (Orientador - DF-UFPE)

Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (DF-UFPE)

Prof. Arsen Melikyan (IF-UnB)

Recife - PE, Brasil  
Setembro - 2013

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Silva, Tiago Anselmo da.

Empacotamento de fios e teoria do campo conforme em 2D / Tiago Anselmo da Silva. – Recife: O Autor, 2013.

xii, 84 f.: fig., tab.

Orientador: Bruno Geraldo Carneiro da Cunha.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2013.

Inclui referências bibliográficas.

1. Teoria de campos (Física). 2. Gravitação.

I. Cunha, Bruno Geraldo Carneiro da (orientador).

II. Título.

530.41

(22. ed.)

FQ 2013-46



**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Departamento de Física – CCEN**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**  
**Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil**  
**Fone ( ++ 55 81) 2126-7640/2126-8449**  
<http://www.ufpe.br/ppgfisica> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## **Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado**

---

**Tiago Anselmo da Silva**

**EMPACOTAMENTO DE FIOS E TEORIA DE CAMPOS CONFORMES EM 2D**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (Presidente e Orientador), Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Arsen Melikyan, do Instituto de Física da Universidade de Brasília, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em vinte e sete de setembro de dois mil e treze.

---

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha  
Presidente e Orientador

---

Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes

---

Prof. Arsen Melikyan

*Aos meus pais, dona Aparecida e seu Luiz.*

# Agradecimentos

Aos meus pais que estavam lutando antes que eu chegasse à vida e continuam no mesmo ritmo até hoje. Sou grato pelo amor transparente em todo tempo e visível em todo cuidado com o qual criaram a mim e minha irmã, Taís. (Um beijo, Taís!)

Aos meus amigos e familiares; a todos que são da família de uma forma ou de outra. A vocês que foram ontem, são hoje e sempre serão, cada um à própria maneira, especiais para mim. (Quem mandou que fossem tantos?)

Ao meu orientador, o professor Bruno, que redefiniu, algumas vezes, o conceito de paciência. Sou grato por cada conversa e pela oportunidade de com ele trabalhar. (Muito obrigado, professor.)

Aos colegas de graduação e da pós que me ensinaram mais que física. Sou grato especialmente a Hugo Andrade. (Um abraço, Hugo!)

À minha namorada, Débora Laís. (Sou feliz com você, meu bem!)

A todos que oraram por mim e me encorajaram.

Ao Eterno, minha esperança.

Ao CNPq.

*Não tendo os homens podido curar a morte,  
a miséria, a ignorância, resolveram,  
para ficar felizes, não mais pensar nisso.*  
—BLAISE PASCAL (Pensamentos)

# Resumo

Neste trabalho resumimos o estudo do empacotamento de fios em uma região bidimensional planar. Abordamos o problema de um ponto de vista teórico, usando técnicas de campo conforme, e propriedades de escala do modelo, no regime de empacotamento-rígido, são derivadas, de sorte que os expoentes críticos para a energia elástica e para o número de laços da conformação são obtidos. Os resultados apresentam razoável concordância com dados advindos de experimentos e simulações. Também esboçamos uma analogia entre esse sistema e gravitação em duas dimensões, via gravitação de Liouville.

**Palavras-chave:** Empacotamento de fios, teoria do campo conforme, gravitação em 2D, gravitação de Liouville.

# Abstract

In this work we summarize the study of the packaging of wire in a planar two-dimensional region. We approach the problem from a theoretical point of view, using techniques of conformal field, and scaling properties of the model, in the tight-packing configuration, are derived, so that the critical exponents for the elastic energy and the number of loops of the conformation are obtained. The results show reasonable agreement with data coming from experiments and simulations. We also outline an analogy between this system and gravitation in two dimensions, via Liouville gravity.

**Keywords:** Wire crumpling, conformal field theory, 2D gravity, Liouville gravity.

# Lista de Figuras

1.1	Esquema de um vírus da família <i>Herpesviridae</i> . Este vírus encapsula em seu interior um filamento duplo de DNA.	2
1.2	Empacotamento de fios. O fio é introduzido na cavidade através de dois canais diametralmente opostos e uma cascata de laços com diferentes tamanhos se forma. Fonte da imagem: Donato et al (2002) [1].	3
2.1	Processo experimental de empacotamento. Ao passo que o fio de cobre é inserido na cavidade entre as placas, o sistema evolui na forma $a \rightarrow b \rightarrow c$ . Fonte das imagens: Donato et al (2002) [1].	7
2.2	Comparação das diferentes morfologias para o empacotamento de fios em cavidades circulares. A morfologia <i>clássica</i> , para fio de material pouco plástico, ou bastante elástico, e apreciável atrito com a cavidade; morfologia <i>espiral</i> , essencialmente para o caso de atrito desprezível com a cavidade e material de baixa plasticidade; morfologia <i>plástica</i> , como o nome sugere, para fio de material com alta plasticidade, como o chamado ‘fio de solda’ ( $Pb_{0.60}Sn_{0.40}$ ). Fonte da imagem Stoop et al [2].	8
2.3	Possibilidades de empacotamento. Para um mesmo comprimento $L$ de fio injetado na cavidade, podemos ter mais de uma configuração minimizando a energia.	9
2.4	Processo de injeção. A função $z(w)$ leva o domínio $D$ nele mesmo, enquanto o diâmetro inicial é levado na curva $C$ .	11
2.5	Em cada ponto da curva $z(t)$ em $D$ , definimos $\theta$ como o ângulo que a tangente à curva faz com o eixo real $z = \bar{z}$ .	12
3.1	À esquerda (a), o experimento de dupla-fenda para partículas massivas. À direita (b), o experimento com várias fendas e dois anteparos entre a fonte $S$ e o detector $O$ .	18
3.2	No limite de várias fendas e vários anteparos entre a fonte e o detector, usando a física do experimento de dupla-fenda, vemos que a amplitude de propagação de uma partícula de $S$ a $O$ é obtida quando efetuamos uma soma sobre todas as trajetórias possíveis no espaço.	19
4.1	Transformação conforme em duas dimensões. O que distingue estas transformações das demais é que elas preservam ângulos, enquanto distorcem comprimentos.	36
4.2	Mapeamento radial. Levamos o cilindro infinito no plano complexo.	41

- 4.3 Contorno de integração. Como assumiremos que os integrandos serão sempre ordenados radialmente da forma mostrada em (4.36), as integrais na variável  $z$  serão avaliadas sobre um pequeno contorno em volta de  $w$ . 42
- 4.4 Representação de um laço. Vemos que onde há o encontro do fio com ele mesmo, o ângulo  $\theta$  que a curva faz com o eixo real varia na forma  $\theta(z - \varepsilon) = \theta(z + \varepsilon) + \pi$ . 52
- 5.1 Representação ilustrativa da função de Schwarz. 63
- A.1 Representação ilustrativa do espaço-tempo. Acima: na ausência de matéria; abaixo: na presença de matéria. Um observador comóvel, isto é, em queda-livre, percorre uma geodésica que, na presença de energia, deixa de ser uma reta e passa a ser uma trajetória curva. “Matéria diz ao espaço como se curvar, e o espaço diz a matéria como se mover”. 76
- B.1 Configuração típica do  $\beta$ -bronze. Os átomos de cobre e zinco se apresentam em (a) desordenadamente, para  $T \gg T_c$ , e em (b), para  $T \ll T_c$ , de forma organizada. 80
- C.1 Representação da evolução de cordas e de uma partícula em um espaço-tempo D-dimensional. À esquerda, temos a folha-mundo de uma corda aberta; à direita vemos a linha-mundo de uma partícula e uma folha-mundo de uma corda fechada. 84

# Lista de Tabelas

- 4.1 Valores dos expoentes críticos para o empacotamento de fios. Os dados experimentais foram obtidos por Donato et al. [1], enquanto Stoop et al. [2] fornece os dados de simulações, de onde obtemos os resultados para a morfologia clássica, elencados na tabela. 53
- B.1 Valores de expoentes críticos para alguns sistemas.  $D$  representa a dimensionalidade de cada sistema. Fe e Ni são representações para Ferro e Níquel, respectivamente, que, abaixo de uma certa temperatura crítica, são materiais ferromagnéticos. 81

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Empacotamento de fios	1
1.2	Relação com teoria do campo conforme	3
1.3	Gravitação em duas dimensões	4
1.4	Roteiro da dissertação	5
<b>2</b>	<b>Empacotamento de fios em 2d</b>	<b>6</b>
2.1	O aparato	6
2.2	Abordagem estatística do problema	9
2.3	O Modelo matemático	10
2.4	O problema e principais características	14
<b>3</b>	<b>Introdução à teoria quântica de campos</b>	<b>16</b>
3.1	Introdução aos campos	16
3.2	Integrais de trajetória	17
3.3	Funções de correlação	20
3.3.1	Propagador do bóson livre	21
3.4	Simetrias e leis de conservação	22
3.4.1	Transformações contínuas	22
3.4.2	Teorema de Noether	23
3.4.3	Transformação das funções de correlação	25
3.4.4	Definição alternativa para o tensor de energia-momento	26
3.5	QFT e mecânica estatística	27
3.5.1	Introdução à mecânica estatística	27
3.6	Modelos estatísticos clássicos	28
3.6.1	Mecânica estatística quântica	31
3.6.2	Fenômenos críticos	32
<b>4</b>	<b>Empacotamento de fios e teoria do campo conforme em 2d</b>	<b>34</b>
4.1	Teoria do campo conforme em $d$ dimensões	35
4.1.1	Transformações conformes	35
4.2	Funções de correlação para campos conformes	36
4.3	Teoria do campo conforme em duas dimensões	38
4.3.1	Campos primários	38
4.3.2	O tensor de energia-momento	39
4.3.3	Expansão em produto de operadores	40

4.3.4	Alguns OPEs importantes	43
4.3.5	A transformação do tensor de energia-momento	45
4.4	Função de Schwarz	47
4.4.1	Função de Schwarz para um arco analítico	47
4.4.2	Função de Schwarz e geometria	47
4.4.3	Função de Schwarz e o empacotamento de fios	49
4.5	Cálculo dos expoentes críticos	50
4.6	Discussão dos resultados	52
<b>5</b>	<b>Gravitação de Liouville e o empacotamento de fios</b>	<b>54</b>
5.1	Gravitação de Liouville	54
5.1.1	Teoria clássica do campo Liouville e o empacotamento de fios	57
5.1.2	Relação entre as gravitações de Liouville e de Einstein	59
5.2	Considerações sobre o contorno	62
5.3	Comentários	66
<b>6</b>	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	<b>68</b>
<b>A</b>	<b>Sistemas gravitacionais</b>	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Sistemas críticos</b>	<b>78</b>
B.1	Funções de correlação e expoentes críticos	78
B.2	Universalidade e simetria conforme	80
B.3	Parâmetro de ordem	81
<b>C</b>	<b>Teoria de cordas e suas simetrias</b>	<b>83</b>

## CAPÍTULO 1

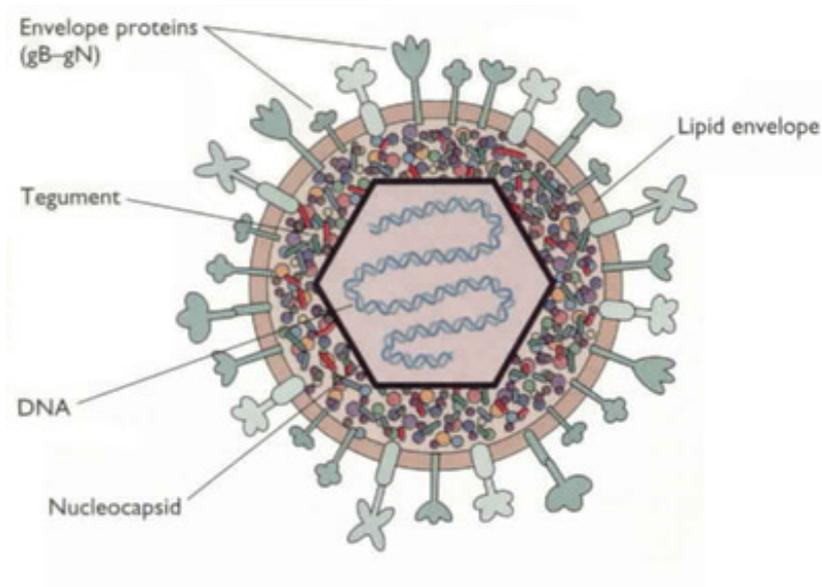
# Introdução

Se atentarmos para o fato de que alguma forma de empacotamento ou amassamento é observada em diversos sistemas na natureza, veremos que esses fenômenos possuem grande importância tanto científica quanto tecnológica. Conforme Donato, Gomes e Souza resumem [3], com as respectivas referências, o empacotamento de esferas idênticas despertou investigações teóricas, experimentais e tecnológicas, ao longo dos séculos, tendo em vista que o empacotamento de esferas rígidas encontra aplicação no estudo da teoria microscópica de fluidos, vidros e cristais, além de ser importante na determinação das estruturas granulares macroscópicas de alguns materiais porosos. O empacotamento tridimensional (3d) de objetos não esféricos como esferóides, cubóides, bastões, entre outros, também foi estudado. A análise do empacotamento bidimensional (2d) com discos foi realizado, assim como empacotamentos com misturas aleatórias de discos, quadrados e outros polígonos regulares foram investigados. Da mesma forma, o estudo, via geometria fractal, do amassamento de papéis despertou interesse científico [4]. De fato, certos aspectos teóricos e experimentais do amassamento de superfícies [5] são importantes em muitas áreas do conhecimento, como emissão acústica, mecânica contínua, modelos de crescimento, polímeros, membranas e física de interfaces.

### 1.1 Empacotamento de fios

Nas últimas duas décadas, as propriedades físicas do empacotamento de fios em 3d foram examinadas do ponto de vista experimental e de simulações computacionais, de forma que algumas relações de escala e dimensões fractais associadas a esses sistemas foram observadas.

Neste trabalho abordaremos analiticamente o empacotamento de fios em 2d, cujos aspectos geométricos são relevantes em aplicações biológicas, como no estudo da compactificação de DNA em cromossomos, assim como no estudo de estruturas de DNA superenroladas nos processos de replicação e recombinação, além do empacotamento de DNA em cápsulas virais (figura 1.1). De modo geral, o empacotamento de DNA pode ser visto como um arquétipo do empacotamento de filamentos em sistemas biológicos. Dado que distinguir a conformação do DNA dentro das células é uma tarefa difícil de ser implementada experimentalmente, espe-

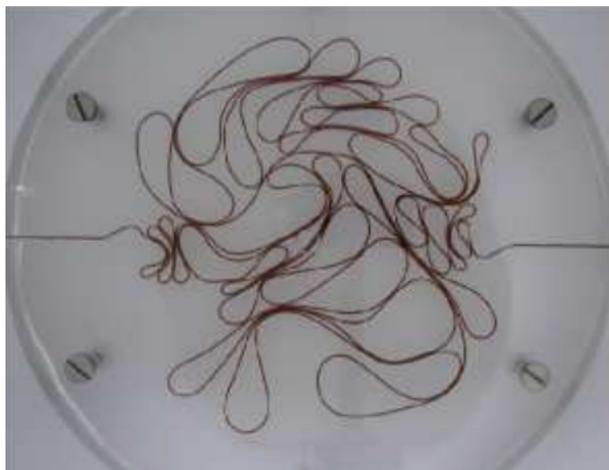


**Figura 1.1** Esquema de um vírus da família *Herpesviridae*. Este vírus encapsula em seu interior um filamento duplo de DNA.

cialmente usando métodos não invasivos [6], constatamos a necessidade do estudo teórico da conformação de estruturas unidimensionais em cavidades.

Por outro lado, empacotamento de fios também encontra aplicação no estudo de cadeias poliméricas e no confinamento de bastões elásticos; geral e cotidianamente, não é difícil encontrar estruturas aproximadamente unidimensionais de algum modo amassadas.

O empacotamento de fios em 2d é simulado experimentalmente como ilustra a figura 1.2. Como será mais criteriosamente descrito adiante, à medida em que o fio é introduzido na cavidade bidimensional e seu comprimento  $L$  se torna maior que o diâmetro da mesma, o fio se entorta, formando laços, embora essas estruturas sejam determinadas pelo *contato* do fio com ele mesmo, e não por sua *sobreposição*, como o nome “laço” pode sugerir. A cascata de laços evolui durante a progressiva injeção do fio de sorte que reorganizações locais ou globais dos laços previamente formados são observadas [3]. Porém, independente de existir atrito entre as partes do sistema, quando o comprimento do fio atinge um certo valor  $L_c$  (médio), a dificuldade em inseri-lo aumenta abruptamente e a estrutura no interior das placas se torna rígida, indicando um comportamento crítico. De fato, do ponto de vista mecânico, o sistema se comporta de maneira bastante distinta, em média, a depender de o comprimento do fio estar próximo a  $L_c$  ou bem abaixo deste.



**Figura 1.2** Empacotamento de fios. O fio é introduzido na cavidade através de dois canais diametralmente opostos e uma cascata de laços com diferentes tamanhos se forma. Fonte da imagem: Donato et al (2002) [1].

## 1.2 Relação com teoria do campo conforme

Na descrição analítica do empacotamento de fios precisaremos de uma abordagem estatística; não poderemos usar uma abordagem determinística para a evolução do sistema. A implementação de um modelo que forneça médias sobre os observáveis relevantes se dará sob a observação de algumas das características do sistema, como a não interseção do fio e a presença de comportamento crítico, entre outras, levando-nos à utilização de ferramentas de campo conforme.

A teoria do campo conforme se mostrou poderosa no tratamento de sistemas críticos. Essencialmente, nas vizinhanças de uma transição de fase, o comprimento de correlação de um sistema estatístico diverge e conseqüentemente surgem flutuações em todas as escalas possíveis. Em tal regime, as propriedades dos sistemas estatísticos podem ser eficientemente descritas por uma teoria quântica de campos. E, exatamente sobre o ponto crítico, o comprimento de correlação é infinito, de modo que a teoria de campo correspondente se torna invariante pelas transformações de escala

$$x_a \rightarrow \lambda x_a \quad (1.1)$$

onde  $x_a$  representa o(s) parâmetro(s) de comprimento do sistema, como a posição de suas partes, enquanto os campos  $\varphi_i$  associados aos parâmetros de ordem do sistema se transformam como

$$\varphi_i \rightarrow \lambda^{\Delta_i} \varphi_i \quad (1.2)$$

onde  $\Delta_i$  denotam as dimensões anômalas dos campos  $\varphi_i$ . Sistemas descritos por uma teoria

quântica de campos que também sejam invariantes por transformações de escala globais (eq. (1.1)), automaticamente são invariantes pelo grupo das transformações conformes, o qual pode ser visto como o conjunto das transformações que exibem a propriedade de “esticar” vetores localmente, enquanto seus ângulos relativos se mantêm fixos.

Então, na descrição de um fenômeno crítico em um sistema estatístico, há o encontro da mecânica estatística com a teoria quântica de campos e, mais ainda, com a teoria do campo conforme. Isso nos permite, usando a liberdade possibilitada pelas simetrias da teoria e as dimensões anômalas definidas acima, calcular os expoentes críticos de algumas quantidades termodinâmicas do sistema.

Uma vez que dispomos de uma teoria quântica de campos descrita pela ação  $S_M[X^i]$  em  $D$  dimensões, podemos acoplá-la, usando o princípio de covariância geral, à gravidade, resultando na ação  $S_M[g, X^i]$ , onde  $X^i$  são os campos de matéria e  $g$  representa a métrica do espaço-tempo. *Classicamente*, a teoria  $S[g, X^i]$  em 2d é sempre conforme. Quanticamente, o mecanismo que permite associar uma teoria quântica de campos a uma teoria do campo conforme é uma notável propriedade da teoria (ou gravitação) de Liouville.

### 1.3 Gravitação em duas dimensões

Desde o desenvolvimento da relatividade geral, o termo gravidade diz respeito à teoria dinâmica da estrutura métrica do espaço-tempo. Isso se deu porque as principais variáveis dinâmicas do espaço-tempo seriam entendidas como as componentes do tensor métrico  $g_{ab}$ . Sendo uma teoria clássica, a teoria de Einstein se mostrou com grande poder preditivo. Entretanto, fenômenos como a formação de buracos-negros e outros envolvendo densidade alta de energia induziram a consideração de efeitos quânticos para sua completa descrição. À tentativa de unir gravitação clássica à mecânica quântica dá-se o nome de gravitação quântica.

Normalmente, teorias de gravitação apresentam dificuldades conceituais e matemáticas em suas construções. Mesmo em gravitação clássica, as equações do movimento para as componentes da métrica são em geral altamente não lineares. Desse modo, tem seu lugar nas pesquisas qualquer modelo simplificado de gravitação que, embora não represente a realidade, possa ajudar na interpretação dos sistemas físicos mais complicados. De fato, alguns entre esses modelos, como gravitação em 2d, despertam interesse por si mesmos.

As principais simplificações e peculiaridades de gravitação em 2d são:

- O tensor de Riemann é completamente descrito pelo escalar de curvatura  $R$ ;
- A partir de uma escolha apropriada de coordenadas, a métrica  $g_{ab}$  pode ser descrita, pelo

menos localmente, por apenas uma variável dinâmica, na forma de um campo.

Essas características são importantes, por exemplo, em teoria de cordas. Veremos que a quantização desta teoria e a tentativa de descrever o fenômeno do empacotamento de fios em 2d usando campos conformes conduzem à gravitação de Liouville.

## 1.4 Roteiro da dissertação

Neste trabalho, vamos *resumir* o avanço teórico já alcançado na abordagem do problema do empacotamento de fios em duas dimensões, conforme pode ser visto em [7].

Com o objetivo de oferecer ao leitor uma abordagem mais clara e completa, falaremos no capítulo 2 um pouco do que foi desenvolvido dos pontos de vista experimental e de simulações computacionais no estudo deste problema. Nesse capítulo também apresentaremos uma ação clássica para o empacotamento de fios.

Pelo fato de algumas pessoas não estarem acostumadas com o formalismo de teoria de campos, tentaremos, considerando a limitação quanto à extensão do texto, chegar aos resultados a partir de princípios mais conhecidos. Por isso, falaremos no capítulo 3 sobre teoria quântica de campos e sua relação com mecânica estatística.

No capítulo 4, estudaremos um pouco de *teoria do campo conforme*, que não apenas oferece uma plataforma para trabalhar no problema de empacotamento de fios em 2d, permitindo o cálculo de alguns expoentes críticos do modelo, mas, de modo igualmente interessante, revela uma relação entre este sistema e *gravitação em duas dimensões*, via gravitação Liouville, que será estudada no capítulo 5.

Para facilitar a compreensão da nossa abordagem, ao longo do trabalho se mostrará conveniente entender um pouco da física de certos sistemas, sobre os quais introduzimos apêndices no fim da dissertação. Falaremos sobre gravitação einsteiniana no apêndice A, sobre sistemas críticos no apêndice B e rudimentos de teoria de cordas serão apresentados no apêndice C.

## CAPÍTULO 2

# Empacotamento de fios em 2d

“Amassamento é onipresente na natureza, ocorrendo em todas as escalas de comprimento, variando a partir de células de sangue que se deformam a fim de passar por capilares até a formação dos Alpes Suíços.”[2]. Ao constatar este fato, somos levados a pensar na variedade de aplicações científicas e industriais que o estudo do amassamento pode ter. Então, assim como os autores do trecho citado, ficamos surpresos pela pouca atenção que o *problema do empacotamento de fios* em duas dimensões atraiu até recentemente.

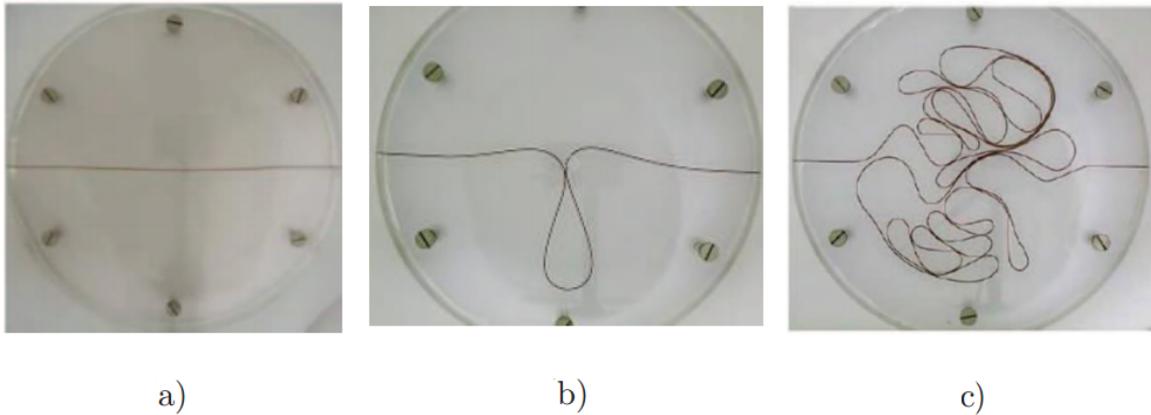
Neste capítulo, faremos uma primeira abordagem ao problema, citando suas principais características com o objetivo de descrever o empacotamento de fios matematicamente, por meio de uma *ação clássica*.

### 2.1 O aparato

Em essência, para simular o empacotamento de fios em 2d experimentalmente, são usadas duas placas, com uma das mesmas de material transparente, as quais se sobrepõem com uma cavidade entre elas, onde um fio de metal, ou outro material, é inserido. Se placas circulares forem utilizadas, o fio pode ser injetado através de duas aberturas na borda das placas, separadas pela distância angular de  $180^\circ$  (diametralmente opostos) ou separados por uma distância angular menor [3]. No nosso modelo, estaremos interessados no primeiro caso (figura 2.1). Lembremos, porém, que os resultados experimentais pouco dependem da distância angular entre as aberturas [8].

O experimento se inicia com a deformação do estado inicial (figura 2.1 a) pela inserção forçada do fio para dentro da cavidade. À medida que o fio é inserido, figuras de empacotamento vão se formando e, para evitar qualquer tipo de sobreposição do fio com ele mesmo, algo inconveniente em 2d, a distância entre as placas é controlada.

Em um dado momento durante o processo de injeção, o sistema “solidifica”, isto é, a velocidade de injeção vai rapidamente a zero e, a partir deste instante, o sistema fica congestionado, não sendo possível inserir mais fio. Temos a indicação de que o sistema passa por uma *transição de fase* neste ponto, levando à configuração de empacotamento-rígido, e médias são



**Figura 2.1** Processo experimental de empacotamento. Ao passo que o fio de cobre é inserido na cavidade entre as placas, o sistema evolui na forma  $a \rightarrow b \rightarrow c$ . Fonte das imagens: Donato et al (2002) [1].

mensuradas sobre os observáveis intuitivamente relevantes como o número total de laços  $N$  e o comprimento do fio inserido  $L$ , ou a densidade de empacotamento

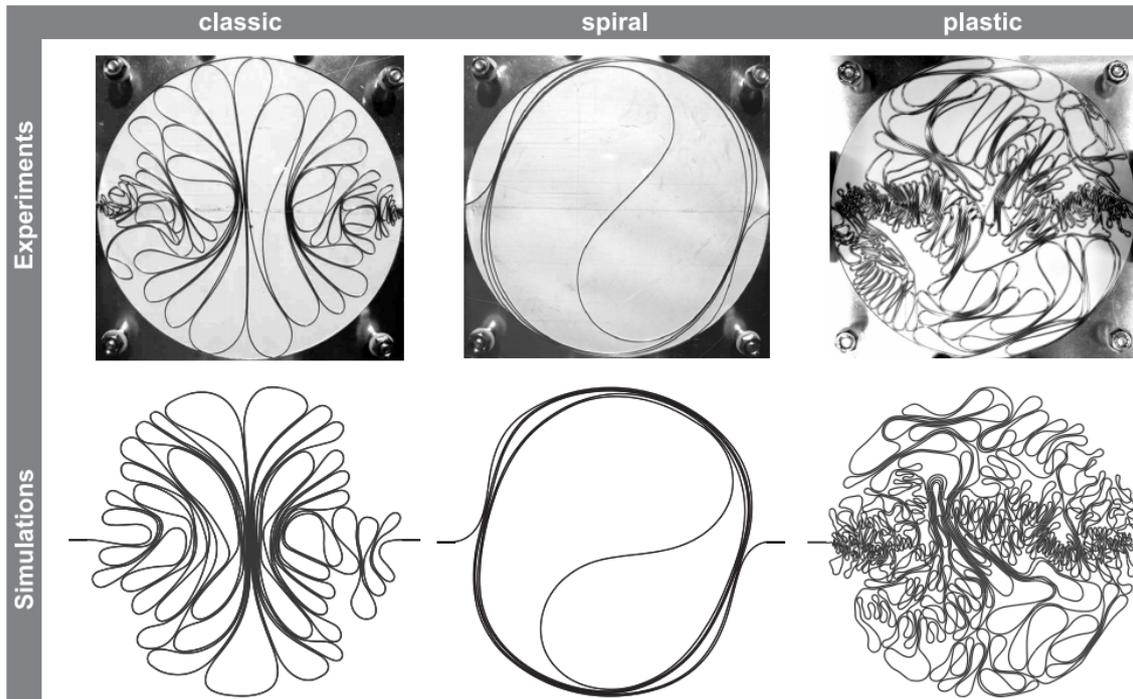
$$\Phi = L \frac{d}{2\pi r^2}, \quad (2.1)$$

onde  $d$  e  $r$  representam o diâmetro do fio e o raio da cavidade, respectivamente.

Constata-se a partir do experimento e também com auxílio de simulação computacional [2] que três diferentes morfologias, ou *fases morfológicas*, são observadas a depender da plasticidade<sup>1</sup> do fio e do atrito do mesmo com as placas (figura 2.2). Para o experimento com relevante atrito estático com a cavidade e fio elástico<sup>2</sup> surge a morfologia *clássica* (figura 2.2 à esquerda), na qual cascatas de laços de tamanhos decrescentes e bastante simétricos se apresentam [3]. Nas simulações para fios totalmente elásticos, essa simetria na formação dos laços é preservada até o congestionamento do sistema, porém, devido aos efeitos da plasticidade do material, o experimento revela a quebra da simetria, especialmente para estados com alta densidade de empacotamento. Experimentos com fios elásticos e baixo atrito estático com a cavidade revelam uma morfologia *espiral*, sem direção de giro preferencial (figura 2.2 ao centro). A simulação mostra que, sob estas condições, tal morfologia se mantém até que a cavidade seja totalmente preenchida, diferindo do experimento, onde alguns laços aparecem nas proximidades das aberturas da cavidade, novamente devido à plasticidade do fio. O último caso é

<sup>1</sup>Um material possui grande plasticidade quando apresenta grande tendência de permanecer deformado, uma vez que o tenhamos tirado da sua condição de repouso, encurvando-o.

<sup>2</sup>Quando dizemos que o fio é de material (totalmente) elástico, referimo-nos a um fio *inextensível*, que volta a sua posição de repouso após ser defletido; um fio com plasticidade desprezível.



**Figura 2.2** Comparação das diferentes morfologias para o empacotamento de fios em cavidades circulares. A morfologia *clássica*, para fio de material pouco plástico, ou bastante elástico, e apreciável atrito com a cavidade; morfologia *espiral*, essencialmente para o caso de atrito desprezível com a cavidade e material de baixa plasticidade; morfologia *plástica*, como o nome sugere, para fio de material com alta plasticidade, como o chamado ‘fio de solda’ ( $Pb_{0.60}Sn_{0.40}$ ). Fonte da imagem Stoop et al [2].

chamado de morfologia *plástica*, que na verdade se caracteriza pela ausência de um padrão, isto é, pela ausência de simetrias, não existindo, nesta morfologia, uma configuração final esperada, ou bem conhecida, ou mesmo alguma configuração em torno da qual várias outras levemente diferentes se apresentam. Nesta morfologia, a plasticidade do material encontra sua expressão mais acentuada.

É um fato notável que os resultados experimentais aproximadamente não dependam do atrito no sistema. Dito de outra maneira, a configuração de empacotamento-rígido não é uma consequência do atrito do fio com ele mesmo ou com as placas [3].

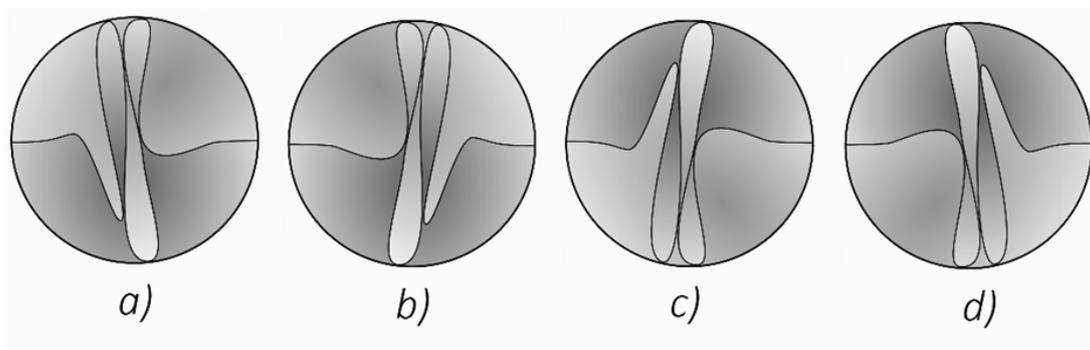
## 2.2 Abordagem estatística do problema

Para o empacotamento de fios, se repetirmos o experimento sob as mesmas condições, vemos que diferentes configurações são obtidas. Isto é um indício de que não poderemos abordá-lo do ponto de vista do determinismo clássico, uma vez que nesta abordagem, se conhecemos as interações no sistema, a sua evolução final é determinada pelo estado inicial; se repetirmos experimento sob as mesmas condições iniciais, os resultados serão repetidos.

Alguém poderia argumentar que, na verdade, a razão para as figuras de empacotamento não se repetirem a cada tentativa se deva à sensibilidade do experimento a pequenas variações nas condições para a realização do mesmo. Certamente, flutuações na velocidade de injeção e na temperatura poderiam influenciar nas propriedades elásticas do fio. Além disso, a presença de impurezas no material constituinte do fio e pequenas falhas na qualidade de confecção e apresentação do mesmo também poderiam justificar a variedade de “desenhos” observada.

No caso que estamos tratando, suponha que temos uma configuração que minimiza a energia. Se girarmos as placas  $180^\circ$  em torno do eixo de simetria radial, teremos uma configuração diferente que continua minimizando a energia. Vamos obter outra configuração que também minimizará a energia se girarmos o sistema  $180^\circ$  em torno da direção de inserção do fio. Por meio de composição destas duas operações, podemos facilmente obter quatro configurações diferentes, todas minimizando a energia (figura 2.3). Novamente, alguém poderia protestar que para um caso ideal de um fio totalmente elástico e sem levar em consideração o atrito deste com as placas não teríamos este número de possibilidades.

O ponto crucial em defesa de uma abordagem estatística é que a experiência aponta para a imprevisibilidade dos resultados dos experimentos, quando olhados individualmente. Para comprimentos do fio maiores que o diâmetro, não há uma conformação mais provável que



**Figura 2.3** Possibilidades de empacotamento. Para um mesmo comprimento  $L$  de fio injetado na cavidade, podemos ter mais de uma configuração minimizando a energia.

minimiza uma ação clássica; numa situação ideal, para um comprimento de fio (um pouco) maior que o diâmetro, não somos capazes de afirmar se o fio vai entortar “para cima” ou “para baixo”, em relação à posição inicial do mesmo. Não há fundamento para tal afirmação. Assim, não há uma hamiltoniana clássica. Por isso, em vez de o problema ser intrinsecamente clássico, e uma abordagem determinística não poder ser implementada por dificuldades técnicas, uma abordagem estatística, mais que possível e útil, é de fato requerida.

Vamos, então, desenvolver um tratamento clássico para o problema do empacotamento de fios, a partir do qual alguma física poderá ser obtida, sabendo que em algum momento precisaremos “quantizar” a teoria.

### 2.3 O Modelo matemático

Estamos interessados em modelar o empacotamento de fios em uma cavidade circular, como mostra a figura 2.1, sem considerar os atritos fio-fio e fio-placas.

Modelando matematicamente a área entre as placas como a região  $D$  no plano complexo definida pelo interior do círculo unitário, o processo de empacotamento pode ser descrito no disco como uma deformação de seu diâmetro, de modo a aumentar o comprimento deste, mantendo fixos os ângulos nas extremidades do mesmo. Simulamos a *injeção* do filamento utilizando um mapa  $z_L(t)$  que leva o diâmetro inicial  $t \in [-1, 1]$  em uma configuração  $C$  do fio injetado, com comprimento  $L$ . Entretanto, é conveniente que, embora  $z_L(t)$  esteja definido sobre o eixo real, estendamos este mapa analiticamente para todo o domínio  $D$ , isto é, olhemos  $z_L(t)$  como a restrição de uma transformação (difeomorfismo)  $z(t)$  que leva o domínio  $D$  nele mesmo. Tecnicamente, pelo uso do *teorema do mapeamento de Riemann* [9, 10], vemos que as regiões acima e abaixo de  $C$ ,  $D_+$  e  $D_-$ , podem ser mapeadas por funções analíticas nos semi-discos superior e inferior, respectivamente (figura 2.4). Então, olhando para  $D$  como uma *variedade* complexa, a restrição garante que podemos cobrir toda a imagem de  $D$  usando um *atlas* composto por dois mapas analíticos *simples*,  $z_{\pm}(w)$ , com *overlap* na região contendo a imagem de  $z_L(t)$ . Por definição, um mapa simples leva curvas simples, curvas sem interseção, em curvas simples. Por isso, as funções de transição serão analíticas e não haverá interseção pela imagem de  $z_{\pm}(w)$ , ou simplesmente  $z(w)$ , na região de overlap.

Tomando o mapa  $z(t)$ , com o comprimento  $L$  indeterminado, o elemento de linha  $dl$  da curva é dado por

$$dl^2 = \dot{z}\dot{\bar{z}}dt^2 \quad (2.2)$$

onde  $\bar{z}(t) = z^*(t)$  é o complexo conjugado do mapa  $z(t)$ . E, sendo  $T(t)$  o vetor unitário tangente

a  $z(t)$ , a curvatura  $k$  desta curva é calculada [11] como

$$k = \left| \frac{dT}{dl} \right| = \left| \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{dl}{dt}} \right|. \quad (2.3)$$

Como primeira tentativa, podemos enunciar nosso problema na forma: Seja  $z(w)$  a restrição do difeomorfismo do disco unitário  $D$  em  $D$  definida numa vizinhança de  $w$  real. Queremos encontrar a conformação  $z(t)$  do fio, dentro do domínio  $D$ , que minimiza a energia [12]

$$E = \frac{\alpha}{2} \int_0^L dl k^2. \quad (2.4)$$

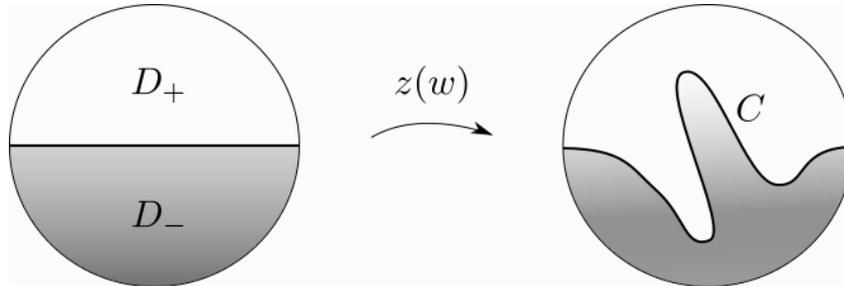
onde  $\alpha$  é uma constante e  $l$  é parâmetro comprimento próprio da curva. Este formato para a energia decorre do fato de estarmos modelando a fase elástica do processo de injeção, no qual a energia da configuração é dominada pela energia elástica de “entortamento” do fio. Por isso, pensando em termos de ação clássica, a energia usada é análoga à ação para um sistema massa-mola sem a parte cinética, uma vez que no nosso caso, consideramos a inserção como um processo “lento”, adiabático, e, do ponto de vista infinitesimal, a curvatura  $k$  faz o papel do deslocamento do sistema massa-mola.

Podemos escrever o vetor unitário tangente à curva como  $T(l) = \cos \theta(l) + \sin \theta(l)i$ , onde  $\theta$  é o ângulo que a tangente faz com a curva em cada ponto (figura 2.5). Então, reescrevemos a curvatura como

$$k = \left| \frac{dT}{dl} \right| = \left| \frac{d\theta(l)}{dl} \right|. \quad (2.5)$$

Utilizamos esta expressão para  $k$  por conveniência e escrevemos nossa ação como

$$E = \frac{\alpha}{2} \int_0^L dl \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 \quad (2.6)$$



**Figura 2.4** Processo de injeção. A função  $z(w)$  leva o domínio  $D$  nele mesmo, enquanto o diâmetro inicial é levado na curva  $C$ .

Porém, a evolução do sistema descrito por (2.6), ditada pela equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dl} \frac{\partial \bar{L}}{\partial (d\theta/dl)} = 0 \quad (2.7)$$

para a lagrangeana  $\bar{L} = (d\theta/dl)^2$ , leva-nos à equação do movimento

$$\frac{d^2 \theta}{dl^2} = 0 \quad (2.8)$$

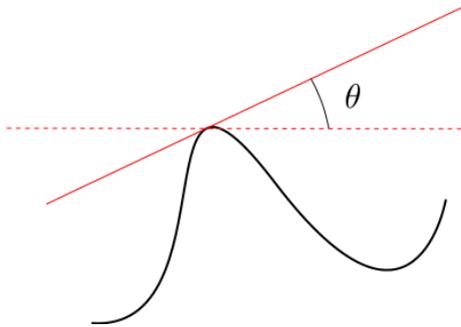
cuja solução  $\theta$  linear com  $l$  representa um arco de circunferência e, quando impomos a condição de extremidades com ângulos fixos, passa a representar uma reta, isto é, um arco de circunferência com raio infinito, que conhecemos como a configuração inicial do fio. Isto naturalmente resolve o problema, mas não é a solução que procuramos. Podemos (tentar) encontrar a solução não trivial se percebermos que no nosso modelo, até aqui, o fio está livre, a despeito do que encontramos no sistema físico. Então, em vez de impormos a condição de extremidades fixas após a extremização da ação, podemos fazê-lo diretamente na ação, por meio de um multiplicador de lagrange  $\mu$ , escrevendo uma nova ação livre na forma

$$\mathcal{F}' = \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 dt \sqrt{\dot{z}\dot{z}} k^2 + \mu \left[ \int_{-1}^1 dt \sqrt{\dot{z}\dot{z}} - L \right], \quad (2.9)$$

onde usamos a equação (2.2), e o último termo, dado por  $-\mu L$ , por não interferir nas equações do movimento, pode ser omitido, levando-nos a expressão

$$\mathcal{F} = \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 dt \sqrt{\dot{z}\dot{z}} k^2 + \mu \int_{-1}^1 dt \sqrt{\dot{z}\dot{z}}. \quad (2.10)$$

Note que a ação acima é invariante pela transformação  $\dot{z} \rightarrow e^{i\alpha(t)} \dot{z}$  apenas se  $\alpha(t) = \alpha$ , tendo em vista que em coordenadas complexas  $T = \dot{z}/\sqrt{\dot{z}\dot{z}}$  e escrevemos a curvatura (com sinal) na



**Figura 2.5** Em cada ponto da curva  $z(t)$  em  $D$ , definimos  $\theta$  como o ângulo que a tangente à curva faz com o eixo real  $z = \bar{z}$ .

forma

$$k = -\frac{i \ddot{z}\dot{z} - \dot{z}\ddot{z}}{2(\dot{z}\dot{z})^{3/2}}. \quad (2.11)$$

O vínculo na equação (2.10) (de que a minimização é realizada quando mantemos o comprimento total fixo) é implementado pelo multiplicador  $\mu$  de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu} = L \quad (2.12)$$

e, por isso, se pensarmos em termos de transformadas de Legendre,  $\mu$  pode ser visto como a variável conjugada ao comprimento. Reescrevendo (2.10) convenientemente, ficamos com

$$\mathcal{F}(L) = \int_0^L dl \left[ \frac{\alpha}{2} \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 + \lambda \cos \theta \right]. \quad (2.13)$$

Entretanto, o novo multiplicador  $\lambda$  não indica que a extensão total  $L$  do fio é fixa diretamente, mas nos diz que o diâmetro da cavidade é limitado e, de modo mais eficiente, encerra a propriedade de que o sistema é limitado, na medida em que as extremidades do fio não são móveis. Afinal, qualquer que seja  $L$ , a configuração natural do fio é uma reta, a menos que suas pontas estejam presas. É importante lembrar que, desta vez, estamos omitindo que o termo do multiplicador de Lagrange completo seria na forma  $\lambda \left( \int_0^L dl \cos \theta - 2 \right)$ , sem perda significativa.

Novamente, usamos a equação de Euler-Lagrange e procuramos as equações do movimento, chegando a

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{\lambda}{\alpha} \sin \theta = 0 \quad (2.14)$$

que é nada mais que a equação diferencial para um pêndulo com grandes amplitudes [13, 14]. Seguindo o modelo clássico de solução, usamos que  $\frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2$  na equação acima e a integramos em  $\theta$  chegando a

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dl} \right)^2 - \frac{\lambda}{\alpha} \cos \theta = C. \quad (2.15)$$

Então, considerando a analogia com o pêndulo, notamos que  $C = -\frac{\lambda}{\alpha} \cos \theta_{max}$ , resolvemos (2.15) para  $d\theta/dl$  e obtemos

$$\int dl = \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{max}}}. \quad (2.16)$$

Embora a integral à direita da última equação não possa ser resolvida em termos de funções elementares, podemos manipulá-la de modo a apresentá-la como uma integral tabelada. Para tanto, fazemos em (2.16) a substituição

$$\cos \theta = 1 - 2k^2 \sin^2 \phi, \quad k = \sin \left( \frac{\theta_{max}}{2} \right), \quad (2.17)$$

onde  $\phi$  é a nova variável de integração, e chegamos à expressão<sup>3</sup>

$$L\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = \int d\phi \left[ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

onde identificamos a integral acima, quando calculada de 0 a  $\alpha$ , como a *integral elíptica do primeiro tipo* [15]

$$F(k, \alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k^2 < 1. \quad (2.19)$$

Porém, até aqui, nossa abordagem foi determinística; não fizemos uso de nenhuma medida estatística sobre a  $E$ ,  $l$ , ou qualquer variável. Sabemos que uma abordagem estatística é necessária, mas, como implementá-la? A transição de fase encontrada é a ponte que nos leva à resposta.

## 2.4 O problema e principais características

Três características do empacotamento de fios são especialmente relevantes para a implementação da abordagem do problema via técnicas de campos conformes:

- A analogia do empacotamento de fios com o pêndulo revela um problema. No caso do pêndulo, existe uma certa amplitude máxima de movimento; não faz sentido falar em um movimento com amplitude maior que a amplitude máxima. Por outro lado, se a amplitude do movimento for igual ou menor que a amplitude máxima, então a evolução do sistema estará completamente determinada. Na descrição matemática que demos ao empacotamento de fios,  $L$  faz o papel análogo ao da amplitude no pêndulo e, como vimos, desde que  $L$  seja maior que o diâmetro da cavidade, não faz sentido falar em uma conformação unicamente determinada para o fio. Podemos dizer que  $L$  maior que o diâmetro das placas significa o mesmo, no caso do pêndulo, de uma amplitude maior que a amplitude máxima.
- A criticalidade, ou transição de fase (contínua), encontrada ao fim do processo de injeção, na qual um comprimento máximo  $L$  de fio é atingido, indica que ferramentas utilizadas na descrição de outros fenômenos críticos poderão ser usadas. De fato, experimentos e simulações fornecem alguns expoentes críticos para o problema.

---

<sup>3</sup>a mesma substituição conduz às relações:  $\cos \theta - \cos \theta_{max} = 2k^2 \cos^2 \phi$ ,  $\sin \theta = 2k \sin \phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$  e  $\sin(\theta)d\theta = 4k^2 \sin(\phi) \cos(\phi)d\phi$ .

- Funções analíticas são usadas para descrever a introdução do fio na cavidade, de modo que a não interseção do fio com ele mesmo é implementada por definição. Essencialmente, utilizando funções analíticas, levamos os semi-discos superior e inferior em duas regiões simplesmente conexas (figura 2.4) de modo a representar o processo de injeção como a deformação de  $D_+$  e  $D_-$ , por meio do teorema de Riemann. Mais precisamente, para que as regiões se mantenham simplesmente conexas, consideramos que, embora o fio físico possua uma certa espessura, a curva  $C$  dispõe de diâmetro nulo e, assim, ainda que o fio se encontre com ele mesmo em alguns pontos na configuração de empacotamento-rígido, a curva  $C$  todavia não se toca.

Buscamos um modelo que forneça médias sobre observáveis, mas não existe uma hamiltoniana clássica para o empacotamento de fios a partir da qual possamos usar métodos usuais de quantização para obtê-las. Desde que possamos usar as técnicas de campo conforme, podemos quantizar uma teoria, e, por exemplo, calcular funções de correlação sem lidar explicitamente com a hamiltoniana clássica para o sistema.

Veremos no próximo capítulo que é natural utilizar técnicas de campo conforme na descrição sistemas críticos. No capítulo 4, em razão de considerarmos apenas a fase elástica do empacotamento de fios, isto é, assumirmos que a variação de energia do fio inserido é totalmente elástica de entortamento, vamos comparar os resultados do modelo teórico, no qual as funções analíticas ocupam um lugar especial, com os resultados para a morfologia clássica.

## Introdução à teoria quântica de campos

Além de reunir ferramentas essenciais para o estudo em físicas atômica e nuclear, astrofísica e física da matéria condensada, a teoria quântica de campos (QFT)<sup>1</sup> é a linguagem, o ambiente e o arcabouço matemático naturais quando descrevemos as interações entre partículas elementares [16]. Por outro lado, para sistemas estatísticos definidos sobre redes e suficientemente próximos a um ponto crítico, torna-se natural assumir que suas configurações variam suavemente com a separação dos sítios e adotar um formalismo baseado em quantidades contínuas como um campo  $\varphi(x)$ .

A formulação de modelos estatísticos, não apenas os que são definidos em redes, via QFT tem a vantagem de simplificar o estudo dos fenômenos críticos, ajudando a selecionar alguns dos aspectos mais importantes das transições de fase, como aqueles relacionados às simetrias e à dimensionalidade do sistema, alcançando resultados com grande generalidade.

Neste capítulo, estudaremos uma pequena amostra de QFT e sua relação com mecânica estatística, o que será bastante relevante para a compreensão dos próximos capítulos. O leitor uma vez familiarizado com tais conceitos pode prescindir deste capítulo.

### 3.1 Introdução aos campos

Visto que através de  $E = mc^2$  podemos relacionar energia à massa de uma partícula, implicando, a princípio, que partículas podem surgir a partir de outras formas de energia, ou mesmo ser destruídas, convertendo-se em energia, a mecânica quântica não-relativística (MQ), expressa pela equação de Schrodinger, mostrou-se limitada. Na formulação não-relativística, um sistema fechado contendo  $n$  partículas interagentes, descrito por uma função de onda  $\psi$  jamais deixará de conter exatamente  $n$  partículas. Com o objetivo de casar a relatividade especial (RE) e MQ, rapidamente alguém avistou um problema: em RE, as coordenadas do tipo tempo e do tipo espaço são tratadas em “pé de igualdade”, enquanto em MQ, o tempo é um parâmetro da teoria, contrastando com a posição (espacial), que recebe o status de operador. *A priori*, po-

---

<sup>1</sup>do inglês “quantum field theory”.

deria não ser possível conciliar RE à MQ, mas este não foi o caso [17]. Ingenuamente, como resultado da unificação de RE e MQ, dois tipos de teorias seriam possíveis: em um tipo, o tempo seria “promovido” à condição de operador, assim como a posição; no outro tipo, ambos receberiam o status de parâmetro. Vamos explorar um pouco essas duas possibilidades.

Promovendo a coordenada do tipo tempo  $T$  a operador, e lembrando que em teorias relativísticas existe mais de uma noção de tempo, podemos utilizar o tempo próprio<sup>2</sup>  $\tau$  da partícula como o parâmetro temporal na teoria. Na representação de Heisenberg<sup>3</sup>, definimos os operadores de posição  $X^\mu(\tau)$ , com  $X^0 = T$ . Seguimos esta linha de argumentação e logo encontramos problemas: existem infinitos candidatos para a função monotônica  $\tau$ , e, *a priori*, não existe algo que impeça a existência de mais de um parâmetro para os operadores  $X^\mu$ . Poderíamos escolher dois parâmetros relevantes, definindo  $X^\mu(\sigma, \tau)$  e, variando esses parâmetros, teríamos uma folha-mundo, em vez de uma linha-mundo, de modo que  $X^\mu(\sigma, \tau)$  descreveria a propagação de uma *corda* no espaço-tempo, em vez de uma partícula. De fato, escolher *cordas* abertas ou fechadas como entidades físicas fundamentais é o ponto de partida da *Teoria de Cordas*.

Por outro lado, temos o segundo formalismo: rebaixamos a posição à condição de parâmetro em certos *operadores*. Um conjunto destes operadores é chamado de *campo quântico*, o qual denotamos por  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  e, na representação de Heisenberg, escrevemos:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt/\hbar} \varphi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt/\hbar}. \quad (3.1)$$

Chamamos este formalismo de Teoria Quântica de Campos. A princípio, ambos os formalismos podem ser utilizados para descrever os mesmos fenômenos, entretanto QFT tem se mostrado mais conveniente e eficiente na maioria dos problemas.

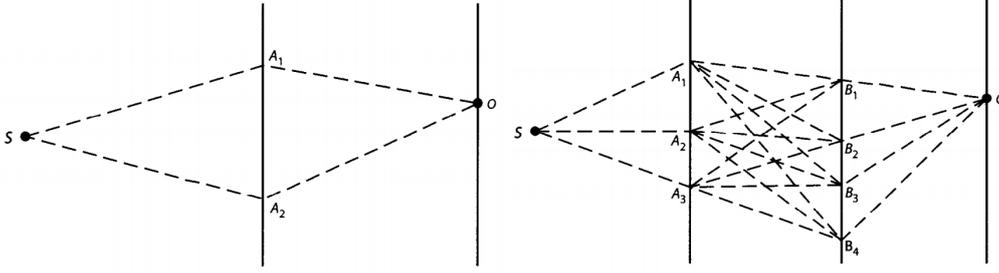
Inicialmente, podemos partir de campos clássicos  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , que se comportam como funções dos parâmetros, e ir em busca de campos quânticos, uma vez que uma descrição quântica da natureza necessita de objetos como operadores. Essencialmente, dois caminhos são utilizados: quantização canônica e quantização por integrais de trajetória.

## 3.2 Integrais de trajetória

O conceito de integrais de trajetória pode ser introduzido heurísticamente a partir da análise de um experimento de dupla fenda (veja a figura 3.1 (a)). Neste experimento, a amplitude de

<sup>2</sup> $\tau$  é o tempo medido no referencial da partícula.

<sup>3</sup>No qual o estado do sistema não depende do tempo, ao contrário dos operadores da teoria.



**Figura 3.1** À esquerda (a), o experimento de dupla-fenda para partículas massivas. À direita (b), o experimento com várias fendas e dois anteparos entre a fonte  $S$  e o detector  $O$ .

probabilidade de uma partícula que partiu da fonte  $S$  ser detectada no ponto  $O$ , tendo passado por uma das duas fendas  $A_1$  e  $A_2$ , é dada por um postulado fundamental em MQ: o princípio da superposição. Calculamos esta amplitude  $\mathcal{A}$  como a soma das amplitudes de probabilidade de a partícula ter chegado a  $O$  passando por  $A_1$  e passando por  $A_2$ ; matematicamente, escrevemos

$$\mathcal{A}(S \rightarrow O) = \mathcal{A}(S \rightarrow A_1 \rightarrow O) + \mathcal{A}(S \rightarrow A_2 \rightarrow O) \quad (3.2)$$

e, pelo fato de essas amplitudes serem complexas, a probabilidade  $P = |\mathcal{A}(S \rightarrow O)|^2$  exibirá padrões de interferência. Analogamente, para a situação ilustrada pela figura 3.1 (b), a amplitude de probabilidade seria

$$\mathcal{A}(S \rightarrow O) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \mathcal{A}(S \rightarrow A_i \rightarrow B_j \rightarrow O). \quad (3.3)$$

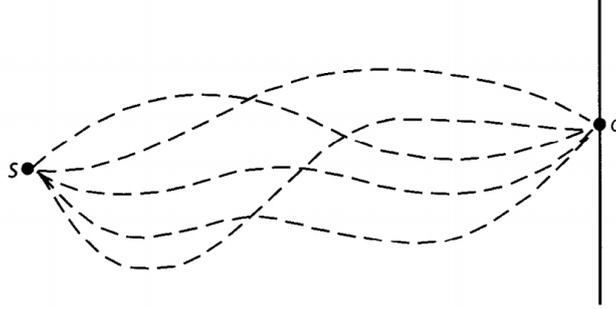
Procedendo com a análise, poderíamos acrescentar mais anteparos com várias fendas e no limite de infinitos anteparos, cada um com infinitas fendas, teríamos

$$\mathcal{A}(S \rightarrow O) = \sum_{\text{trajetórias}} \mathcal{A}(S \rightarrow O \text{ por uma trajetória particular}) \quad (3.4)$$

Matematicamente, em MQ, a amplitude de propagação de um ponto  $q_I$  a  $q_F$ , em um intervalo de tempo  $T$ , é governado pelo operador unitário  $U = e^{-iHT}$ , onde  $H$  é a hamiltoniana. Denotando por  $|q\rangle$  o estado da partícula em  $q$  e dividindo o intervalo em  $N$  segmentos, cada um com a duração de  $\delta t = T/N$ , escrevemos a amplitude

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_I \rangle = \langle q_f | e^{-iH\delta t} e^{-iH\delta t} \dots e^{-iH\delta t} | q_I \rangle. \quad (3.5)$$

Usando que  $|q\rangle$  forma um conjunto completo de estados (uma base), temos que  $\int |q\rangle \langle q| = 1$ , se considerarmos a normalização  $\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q)$ , onde  $\delta$  representa a distribuição delta de



**Figura 3.2** No limite de várias fendas e vários anteparos entre a fonte e o detector, usando a física do experimento de dupla-fenda, vemos que a amplitude de propagação de uma partícula de  $S$  a  $O$  é obtida quando efetuamos uma soma sobre todas as trajetórias possíveis no espaço.

Dirac, podemos fazer

$$\begin{aligned} \langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle &= \\ &= \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j \right) \langle q_F | e^{-iH\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH\delta t} | q_{N-2} \rangle \cdots \langle q_2 | e^{-iH\delta t} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-iH\delta t} | q_I \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vamos focar apenas no fator individual  $\langle q_{j+1} | e^{-iH\delta t} | q_j \rangle$ . Assumindo que  $H = (\hat{p}^2/2m) + V(\hat{q})$  e utilizando a relação  $\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) \exp(-[\hat{A}, \hat{B}]/2)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-iH\delta t} | q_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-i(\hat{p}^2/2m)\delta t} e^{-iV\delta t} e^{O(\delta t^2)} | q_j \rangle \\ &\simeq \int \frac{dp}{2\pi} \langle q_{j+1} | e^{-i(\hat{p}^2/2m)\delta t} | p \rangle \langle p | e^{-iV\delta t} | q_j \rangle \end{aligned}$$

onde na última linha usamos que  $\int (dp/2\pi) |p\rangle \langle p| = 1$ . Então, usando  $\langle q|p\rangle = e^{ipq}$  e a integral gaussiana  $\int dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$ , calculamos

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-iH\delta t} | q_j \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi} \exp \left\{ -i\delta t \left[ \frac{p^2}{2m} - p \frac{(q_{j+1} - q_j)}{\delta t} + V(q_j) \right] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \delta t}} \exp \left\{ i\delta t \left[ \frac{1}{2} m \frac{(q_{j+1} - q_j)^2}{\delta t^2} - V(q_j) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

A quantidade entre colchetes na equação acima é a ação infinitesimal  $S'(q_j, q_{j+1}, \delta t)$  que corresponde a passagem do sistema no estado  $|q_j\rangle$  para o estado  $|q_{j+1}\rangle$  em um tempo  $\delta t$ , de modo que em primeira ordem escrevemos

$$\langle q_{j+1} | U(\delta t) | q_j \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \delta t}} e^{S'(q_j, q_{j+1}, \delta t)}. \quad (3.8)$$

Segue que a equação 3.6, tomando  $N \rightarrow \infty$  de modo que cada trajetória seja dividida em partes infinitesimais, pode ser escrita na forma

$$\langle q_F | U(t) | q_I \rangle = \int [dq] e^{iS[q]} \quad (3.9)$$

com

$$S[q] = \int dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right] \quad \text{e} \quad [dq] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi i \delta t}} dq_j \right\} \quad (3.10)$$

onde chamamos  $[dq]$  de funcional ‘medida de integração’. Poderíamos chegar a esse resultado ainda que partíssemos de uma hamiltoniana  $H(\hat{q}, \hat{p})$  mais geral [17].

Este método de quantização pode ser generalizado para  $N$  partículas diretamente. Neste caso, a hamiltoniana fica

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} \hat{p}_i^2 + V(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N) \quad (3.11)$$

então, reescalando algumas constantes e, no limite contínuo, fazendo identificações [18] como

$$q \rightarrow \varphi, \quad i \rightarrow \mathbf{x}, \quad q_i \rightarrow \varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(x), \quad \sum_i \rightarrow \int d^D x \quad (3.12)$$

temos finalmente a integral de trajetória definida para um campo escalar em  $d = (D + 1)$  dimensões no espaço-tempo

$$\langle \varphi_f(\mathbf{x}, t_f) | \varphi_i(\mathbf{x}, t_i) \rangle = \int_i^f [d\varphi] e^{iS[\varphi]} \quad (3.13)$$

Quantização por integrais de trajetória será útil no cálculo de funções de correlação. Além disso, o conceito de soma sobre todos os caminhos desempenhará outro papel importante, como veremos.

### 3.3 Funções de correlação

Em QFT, estamos interessados em amplitudes de espalhamento entre estados assintóticos (partículas livres), visto que através dos espalhamentos podemos saber como as partículas interagem. Tais amplitudes são chamadas de *propagadores* ou *funções de Green*, ou ainda, na linguagem de mecânica estatística, *funções de correlação*.

Definimos a função de correlação de  $n$  pontos como

$$\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n) \rangle = \langle 0 | \mathcal{T}(\varphi(x_1) \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n)) | 0 \rangle \quad (3.14)$$

onde  $|0\rangle$  é o vácuo (estado fundamental da teoria), estamos omitindo os índices do quadri-vetor  $x$ , e  $\mathcal{T}$  é o operador de ordenamento temporal, o qual organiza os demais operadores na forma

$$\mathcal{T}(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \quad \text{se } t_1 = x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0 \quad (3.15)$$

Por meio de integrais de trajetória, podemos calcular funções de correlação como

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \rangle = \frac{\int [d\varphi] \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) e^{-S_E[\varphi(\mathbf{x},\tau)]}}{\int [d\varphi] e^{-S_E[\varphi(\mathbf{x},\tau)]}} \quad (3.16)$$

onde efetuamos uma *rotação de Wick*, isto é, definimos todas as funções de correlação no tempo imaginário, através do mapeamento  $t \rightarrow -i\tau$  ( $\tau \in \mathbb{R}$ ). Como a métrica do espaço-tempo deixa de ser a de Minkowski para se tornar uma métrica euclideana, as quais definimos como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1) & \text{(Minkowskiano)} \\ \text{diag}(1, 1, 1, \dots, 1) & \text{(Euclideano)} \end{cases}$$

chamamos este método no tempo imaginário de *formalismo euclideano*. A ação euclideana é definida como  $iS_E[x(\tau)] = S[x(t \rightarrow -i\tau)]$ , porém, tendo em vista que seguiremos trabalhando no formalismo euclideano, omitiremos o índice “E” e substituiremos  $\tau$  por  $x^0 = t$ .

### 3.3.1 Propagador do bóson livre

Considerando uma ação genérica para um campo quântico  $\varphi$  e a função de correlação

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] X e^{-S[\varphi]} \quad (3.17)$$

onde  $X$  denota uma expressão envolvendo  $\varphi$ , realizamos uma transformação infinitesimal  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$  e temos que  $\langle X \rangle \rightarrow \langle X + \delta X \rangle$ , implicando em

$$\langle X \rangle + \langle \delta X \rangle = \langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \left\{ X + \frac{\delta X}{\delta\varphi} \delta\varphi \right\} e^{-S[\varphi] - (\delta S/\delta\varphi)\delta\varphi}. \quad (3.18)$$

Expandindo o exponencial do lado direito da equação acima e usando a equação (3.17), vemos que

$$0 = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \left\{ -X \frac{\delta S}{\delta\varphi} + \frac{\delta X}{\delta\varphi} \right\} \delta\varphi e^{-S[\varphi]} \quad (3.19)$$

de onde temos, para arbitrários  $X$  e  $S$ , que

$$\left\langle X \frac{\delta S}{\delta\varphi} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta X}{\delta\varphi} \right\rangle \quad (3.20)$$

No caso especial onde  $X = \varphi(x)$  e  $S_E = \frac{g}{2} \int d^2x \{ \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi^2 \}$  é a ação para o bóson de massa  $m$ , livre de interações, segue que

$$g (-\partial^\mu \partial_\mu + m^2) K(x, y) = \delta(x - y) \quad (3.21)$$

onde  $g$  é uma constante de proporcionalidade, as derivadas do lado esquerdo são calculadas em relação a  $x^\mu$  e  $K(x, y) = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle$  é o *propagador* para o bóson livre. Vemos pela forma da equação acima, que  $K(x, y)$  é uma função de Green. Por causa das simetrias translacional e rotacional (do sistema livre de interações), podemos escrever  $K(x, y) = K(r = |x - y|)$ . Integrando (3.21) em coordenadas polares, temos

$$1 = 2\pi g \int_0^r d\rho \rho \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho K'(\rho)) + m^2 K(\rho) \right] \quad (3.22)$$

onde o caso  $m = 0$  pode ser rapidamente integrado, a menos de uma constante aditiva, na forma

$$K(r) = -\frac{1}{2\pi g} \ln r \quad (3.23)$$

de modo que

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \ln(x - y)^2 \quad (3.24)$$

é o propagador para o bóson livre sem massa.

### 3.4 Simetrias e leis de conservação

Dizemos que uma lei da física apresenta uma simetria quando esta lei não muda por alguma transformação. Nesta seção investigaremos as consequências da existência de simetrias nos sistemas físicos, embora, no que se segue, estajamos interessados principalmente em simetrias contínuas. De fato, “a importância das simetrias em física moderna não pode ser superestimada” [18] e através do teorema de Noether, isso fica mais claro.

#### 3.4.1 Transformações contínuas

Vamos estudar os efeitos de uma transformação contínua, atuante na posição e no campo como

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' \\ \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x') = \mathcal{F}(\varphi(x)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

sobre um funcional de ação

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\varphi, \partial_a \varphi), \quad (3.26)$$

onde, em geral,  $\mathcal{L}$  depende apenas do campo e de suas primeiras derivadas. Pela transformação (5.5), a ação se transforma como

$$\begin{aligned} S' &= \int d^d x' \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_a \varphi'(x')) \\ &= \int d^d x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L} \left\{ \mathcal{F}(\varphi(x)), (\partial x^b / \partial x'^a) \partial_b \mathcal{F}(\varphi(x)) \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde  $|\partial x' / \partial x|$  é o jacobiano da transformação  $x' \rightarrow x$ . Estamos particularmente interessados em um exemplo de transformação: a transformação de escala, definida na forma

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ \varphi'(\lambda x) &= \lambda^{-\Delta} \varphi(x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $\lambda$  é um fator de dilatação e  $\Delta$  é a dimensão de escala do campo  $\varphi$ . Neste caso, a ação transformada é

$$S' = \lambda^d \int d^d x \mathcal{L}(\lambda^{-\Delta} \varphi, \lambda^{-1-\Delta} \partial_a \varphi) \quad (3.29)$$

e, se considerarmos a ação para o campo bosônico sem massa  $S = \int d^d x \partial_a \varphi \partial^a \varphi$ , podemos verificar que a escolha  $\Delta = (d-2)/2$  mantém  $S$  invariante. Se, por outro lado, adicionarmos  $\varphi^n$  à lagrangeana, esta será invariante se  $n\Delta = d$ , ou  $n = 2d/(d-2)$ , permitindo, para  $n$  par, apenas as possibilidades  $d = 3$  e  $d = 4$ ; não é possível, por exemplo, termos uma teoria massiva com invariância conforme em duas dimensões.

### 3.4.2 Teorema de Noether

Vamos discutir a relação entre simetrias e leis de conservação em teoria clássica de campos [16]. O teorema de Noether, que implementa essa relação, diz respeito a transformações contínuas no campo  $\varphi$  na forma

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \alpha \Delta \varphi(x) \quad (3.30)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro infinitesimal e  $\Delta \varphi(x)$  é alguma deformação na configuração do campo. Chamamos esta transformação de simetria porque ela mantém as equações do movimento para o campo invariantes, isto é, se a transformação acima é uma simetria, então a ação clássica é invariante por tal transformação, implicando que a lagrangeana também deve ser invariante, a menos de uma quadri-divergência, na forma

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_a \mathcal{J}^a(x) \quad (3.31)$$

para algum  $\mathcal{J}^a$ . Podemos comparar este resultado com o cálculo explícito de  $\Delta\mathcal{L}$ , obtido pela variação dos campos como

$$\begin{aligned}\alpha \Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}(\alpha \Delta\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\varphi)}\partial_a(\alpha \Delta\varphi) \\ &= \alpha\partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\varphi)}\Delta\varphi\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\varphi)}\right)\right]\Delta\varphi.\end{aligned}\quad (3.32)$$

O termo entre colchetes é identicamente nulo pelas equações de Euler-Lagrange. Logo, se definirmos a parte restante como  $\alpha\partial_a\mathcal{J}^a$ , vemos que

$$\partial_a\mathcal{J}^a(x) = 0 \quad \text{com} \quad \mathcal{J}^a(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\varphi)}\Delta\varphi - \mathcal{J}^a \quad (3.33)$$

é uma corrente conservada. Também podemos expressar a lei de conservação através da equação

$$Q \equiv \int dx^3 j_0 \quad (3.34)$$

onde a integral é calculada sobre todo o espaço e é constante no tempo.

O teorema de Noether pode ser aplicado por exemplo a transformações no espaço-tempo como translações e rotações. Infinitesimalmente, escrevemos essas transformações como

$$x^a \rightarrow x^a + \varepsilon^a \quad (3.35)$$

enquanto os campos transformam na forma

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + \varepsilon) = \varphi(x) + \varepsilon^a\partial_a\varphi(x). \quad (3.36)$$

A lagrangeana transforma da mesma forma, por também ser um escalar, de modo que

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon^a\partial_a\mathcal{L} = \mathcal{L} + \varepsilon^b\partial_a(\delta^a_b\mathcal{L}) \quad (3.37)$$

e comparando com a equação (3.31), encontramos  $\mathcal{J}^a$  e quatro correntes conservadas (uma para cada valor do índice  $a$  em (3.35)):

$$T^a_b \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\varphi)}\partial_b\varphi - \mathcal{L}\delta^a_b \quad (3.38)$$

o qual chamamos de *tensor de energia-momento* para o campo  $\varphi$ .

Portanto, o teorema de Noether diz que, classicamente, a invariância da ação por uma transformação contínua implica na existência de uma corrente conservada.

### 3.4.3 Transformação das funções de correlação

No nível quântico, as funções de correlação são alguns dos principais objetos de estudo [19]; precisamos verificar como elas se comportam por uma transformação de simetria. Considere uma teoria de campos com ação  $S[\varphi]$  invariante por (5.5) e uma função de correlação geral na forma

$$\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) e^{-S(\varphi)} \quad (3.39)$$

onde  $Z = \int [d\varphi] e^{-S(\varphi)}$  é o funcional do vácuo. Constatamos a forma como a equação acima se transforma verificando que:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x'_1) \cdots \varphi(x'_n) \rangle &= \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \varphi(x'_1) \cdots \varphi(x'_n) e^{-S(\varphi)} \\ &= \frac{1}{Z} \int [d\varphi'] \varphi'(x'_1) \cdots \varphi'(x'_n) e^{-S(\varphi')} \\ &= \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \mathcal{F}(\varphi(x_1)) \cdots \mathcal{F}(\varphi(x'_n)) e^{-S(\varphi)} \end{aligned}$$

onde usamos por hipótese que  $S$  é invariante pela transformação (5.5) e assumimos que medida de integração possui um jacobiano que independe de  $\varphi$ , o que *não* acontece em geral. Segue que

$$\langle \varphi(x'_1) \cdots \varphi(x'_n) \rangle = \langle \mathcal{F}(\varphi(x_1)) \cdots \mathcal{F}(\varphi(x'_n)) \rangle \quad (3.40)$$

e, por transformações de escala,

$$\langle \varphi(\lambda x'_1) \cdots \varphi(\lambda x'_n) \rangle = \lambda^{-\Delta_1} \cdots \lambda^{-\Delta_n} \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x'_n) \rangle. \quad (3.41)$$

Poderíamos verificar, conforme [19], que para translações  $x' = x + a$  e transformações de Lorentz  $x' = \Lambda x$ , as funções de correlação se transformam como

$$\langle \varphi(x_1 + a) \cdots \varphi(x_n + a) \rangle = \langle \varphi(x_1 + a) \cdots \varphi(x_n + a) \rangle \quad (3.42)$$

$$\langle \varphi(\Lambda^\mu{}_\nu x_1^\nu) \cdots \varphi(\Lambda^\mu{}_\nu x_n^\nu) \rangle = \langle \varphi(x_1^\nu) \cdots \varphi(x_n^\nu) \rangle \quad (3.43)$$

respectivamente, onde  $\Lambda$  satisfaz  $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ .

O teorema de Noether é um resultado clássico, não podendo em geral ser estendido para o caso de campos quânticos. É possível que a medida de integração não possua a simetria da ação, e, neste caso, dizemos que a simetria é *anômala*. Porém, classicamente, as simetrias da ação produzirão alguns vínculos nas funções de correlação: as *identidades de Ward*.

### 3.4.4 Definição alternativa para o tensor de energia-momento

O tensor de energia-momento é um objeto fundamental em teoria de campos. O modo mais útil de defini-lo é em termos da *resposta do sistema a uma variação infinitesimal da métrica do espaço*  $g_{ab}$ . Vamos assumir que a ação admite uma extensão covariante  $S[\varphi] \rightarrow S[\varphi, g]$ . Isto é, vamos supor que podemos escrever a ação de tal forma que ela seja um invariante de Lorentz, onde  $g$  representa uma métrica arbitrária

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b \quad (3.44)$$

de forma que quando  $g$  for a métrica do espaço plano,  $S[\varphi, g]$  retorna a sua forma original  $S[\varphi]$ . Então, por uma transformação infinitesimal (de coordenadas)  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$ , a variação da ação tem a forma

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^d x T^{ab} \delta g_{ab}. \quad (3.45)$$

Podemos entender a expressão acima como a definição do tensor de energia-momento. Vamos analisar como, por efeito de uma transformação geral de coordenadas  $x^a \rightarrow x^a + \varepsilon^a$ , a ação varia. A métrica se transforma como

$$g'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} g_{cd} = g_{ab} - (\partial_a \varepsilon_b + \partial_b \varepsilon_a), \quad (3.46)$$

de onde identificamos  $\delta g_{ab} = -(\partial_a \varepsilon_b + \partial_b \varepsilon_a)$ . Logo, escrevemos a variação da ação:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^d x T^{ab} (\partial_a \varepsilon_b + \partial_b \varepsilon_a) = \int d^d x T^{ab} \partial_a \varepsilon_b \quad (3.47)$$

visto que sempre podemos assumir  $T^{ab}$  simétrico. Quanticamente, a definição (3.45) nos leva a seguinte análise. O funcional de vácuo  $Z[g]$  e a medida de integração  $[d\varphi]_g$  dependem ambos da métrica:

$$Z[g] = \int [d\varphi]_g \exp\{-S[\varphi, g]\} = \exp\{-W[g]\} \quad (3.48)$$

onde definimos o funcional conexo  $W[g]$ . Por uma variação infinitesimal  $\delta g$  da métrica, o funcional de vácuo se modifica como

$$\begin{aligned} Z[g + \delta g] &= \int [d\varphi]_g \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} \delta g_{ab} T^{ab} \right\} \exp\{-S[\varphi, g]\} \\ &= Z[g] + \frac{1}{2} Z[g] \int d^d x \sqrt{g} \delta g_{ab} \langle T^{ab} \rangle \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde incluímos o termo  $\sqrt{g}$  para que a ação seja invariante por difeomorfismos, e assumimos que o tensor de energia momento contabiliza a variação da ação e da medida de integração, se houver alguma. A variação do funcional de integração fica na forma

$$\delta W[g] = -\frac{\delta Z[g]}{Z[g]} = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} \delta g_{ab} \langle T^{ab} \rangle \quad (3.50)$$

e, em notação funcional, temos o valor esperado

$$\langle T^{ab}(x) \rangle = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[g]}{\delta g_{ab}(x)}. \quad (3.51)$$

Vemos que, diferentemente do caso clássico, a definição quântica do tensor de energia-momento envolve uma média.

### 3.5 QFT e mecânica estatística

Veremos nesta seção de que forma QFT está relacionada à mecânica estatística e como podemos usufruir desta proximidade no contexto de fenômenos críticos. Para tanto, se faz necessário introduzir alguns conceitos da mecânica estatística, principalmente aqueles relacionados hipótese da invariância conforme em sistemas críticos.

#### 3.5.1 Introdução à mecânica estatística

Em mecânica estatística, estamos interessados em descrever o comportamento de sistemas constituídos por um grande número de partículas, possivelmente, em interação, as quais, devido à complexidade, não podem ter seus estados determinados com exatidão. A ideia que resolve este problema, e permeia o estudo estatístico de sistemas complexos, é a de que qualquer quantidade física, como energia e magnetização, pode ser vista como uma média estatística, calculada sobre um *ensemble* de *microestados*, que são especificados pelas características das partículas quando examinadas de “perto o suficiente”, tais como a exata configuração (posição e momento) de cada partícula, classicamente, ou, os números quânticos de todas as partículas, no caso quântico. Por outro lado, caracterizados por um número finito de parâmetros, como pressão, temperatura, magnetização, entre outros, os *macroestados* retratam os sistemas do ponto de vista da “observação ordinária”. Procuramos, então, determinar o comportamento macroscópico dos sistemas a partir dos modelos microscópicos da mecânica estatística.

Em um sistema *isolado* a energia se conserva de sorte que para cada macroestado podemos ter um número grande de microestados equiprováveis, cada um levando às mesmas características macroscópicas, todos com a mesma energia (e conservando outros vínculos, como o volume, por exemplo). Precisamos, naturalmente, do ponto de vista da teoria, calcular uma média sobre todos os microestados para determinar os parâmetros macroscópicos de interesse. Para isso, supomos que o sistema vai passar com a mesma taxa de repetição por todos os estados permitidos, durante sua evolução, de modo que a média sobre períodos longos de tempo será

igual à média sobre um *ensemble* (“conjunto de amostras”) de estados com mesma energia, equiprováveis. Este ensemble é chamado de ensemble *microcanônico*.

Escolhemos o ensemble apropriado para cada sistema a depender do isolamento do mesmo. Um sistema  $S$  em contato térmico com a vizinhança, em vez de totalmente isolado, pode trocar energia com a mesma, de modo que seus microestados possíveis apresentam diferentes valores de energia e não podemos usar o ensemble microcanônico. Neste caso, a probabilidade  $P_i$  de que um microestado com energia  $E_i$  seja de fato o estado de  $S$  depende apenas de  $E_i$ :

$$P_i = \frac{1}{Z} \exp -\beta E_i \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (3.52)$$

onde  $T$  é a temperatura absoluta e a *função de partição*  $Z = \sum_i \exp -\beta E_i$  é a normalização da distribuição  $P_i$ , a qual é chamada de distribuição de Boltzmann e define o ensemble *canônico*. A função de partição é a função geradora de todas quantidades termodinâmicas de interesse. Por exemplo, a energia média em um ensemble canônico é obtida na forma

$$U = \frac{1}{Z} \sum_i E_i \exp -\beta E_i = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}. \quad (3.53)$$

Introduzindo a *energia livre*  $F = -T \log Z$ , temos

$$U = -T^2 \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (3.54)$$

e, genericamente, outras quantidades macroscópicas são relacionadas com  $Z$ , ou com  $F$ .

### 3.6 Modelos estatísticos clássicos

Em geral, no estudo de mecânica estatística, encontramos sistemas altamente complexos e apenas para um pequeno número destes sistemas, na prática, conseguimos calcular funções de partição  $Z$ , mesmo de modo aproximado. Assim, como usualmente ocorre em física, são criados modelos simplificados, frequentemente, em termos de variáveis discretas clássicas definidas em redes, como o modelo de *Ising*, que é o modelo mais conhecido.

O modelo de Ising consiste de uma rede (geralmente quadrada) de spins  $s_i$ , cada um assumindo o valor 1 ou  $-1$ . Cada sítio na rede é indicado pelo índice  $i \in [1, N]$ , onde  $N$  corresponde ao número total de sítios. Neste modelo, temos  $2^N$  configurações  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  possíveis, cada uma com energia

$$E[s] = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - h s_i \quad (3.55)$$

onde a notação  $\langle ij \rangle$  nos diz que a soma é feita sempre sobre sítios vizinhos na rede; não é considerada a interação entre spins que estejam à distância entre dois sítios vizinhos. O termo  $J$  representa a energia de interação entre spins ( $J > 0$  para ferromagnéticos e  $J < 0$  para materiais antiferromagnéticos) e  $h$  nos diz a energia de interação de cada spin com um campo magnético externo. A partir do formalismo canônico e da expressão acima para a energia de cada configuração, podemos determinar quantidades termodinâmicas de interesse como a magnetização

$$\begin{aligned} M = \langle s_j \rangle &= \frac{1}{NZ} \sum_{[s]} \left( \sum_i s_i \right) \exp(-\beta E[s]) \\ &= -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h} \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  denota uma média sobre ensemble. Outra quantidade interessante, que nos diz como a magnetização varia com o campo externo, é chamada de susceptibilidade magnética

$$\begin{aligned} \chi = \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0} &= \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h} \left\{ \frac{1}{z} \sum_{[s]} \left( \sum_i s_i \right) \exp(-\beta E[s]) \right\} \\ &= \frac{1}{NT} \{ \langle s_{total}^2 \rangle - \langle s_{total} \rangle^2 \} \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde  $s_{total} = \sum_i s_i$ . Então, a susceptibilidade é proporcional à variância do spin total e mede sua *flutuação*, além de estar relacionada à função de correlação

$$G(i-j) = \langle s_i s_j \rangle. \quad (3.58)$$

Por causa da homogeneidade na rede, isto é, da invariância translacional,  $G(i, j)$  só pode ter dependência na forma  $|i-j|$ . Definimos também, como na equação (B.2), a função de correlação conexa

$$G_c(i-j) = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle, \quad (3.59)$$

a qual mede a dependência estatística mútua dos spins  $s_i$  e  $s_j$  e nos permite escrever a susceptibilidade como

$$\chi = \beta \sum_{i=0}^{\infty} G_c(i). \quad (3.60)$$

Outros modelos estatísticos surgem como incrementações do modelo de Ising. Por exemplo, um tratamento mais realístico do ferromagnetismo é realizado quando assumimos o spin como um vetor unitário  $\mathbf{n}$  na equação (3.55), de onde obtemos

$$E[s] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j - \sum_i \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}_i \quad (3.61)$$

onde  $\mathbf{h}$  naturalmente representa o campo externo. Este é o modelo de *Heisenberg*, ou o modelo  $O(n)$  clássico, onde  $n$  é o número de componentes do vetor  $\mathbf{n}$ .

No contexto de fenômenos críticos, é conveniente trocarmos as redes por meios contínuos. Neste sentido, reescrevemos a hamiltoniana (3.61) na forma

$$E[n] = \int d^d x \{ J \partial_k \mathbf{n} \cdot \partial_k \mathbf{n} - \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \} \quad (3.62)$$

desta vez, substituindo  $\mathbf{n}_i$  e  $\mathbf{h}_i$  por  $\mathbf{n}(x)$  e  $\mathbf{h}(x)$ , respectivamente. O gradiente  $\partial_k$  é o análogo ao termo de interação com o vizinho mais próximo do caso discreto. O vínculo  $\mathbf{n}^2 = 1$  é implementado, no caso contínuo, quando consideramos

$$\frac{1}{V} \int d^d x \mathbf{n}^2(x) = 1 \quad (3.63)$$

Assim, obtemos o modelo *esférico*, que difere do modelo  $O(n)$  por causa do vínculo acima. Também podemos implementar o vínculo  $\mathbf{n}^2(x) = 1$  quando definimos um modelo onde é improvável que  $\mathbf{n}^2(x)$  seja diferente de 1. Isto pode ser feito se escolhermos um potencial  $V(|\mathbf{n}^2(x)|)$  quártico com um mínimo em  $|\mathbf{n}^2| = 1$ . Escolhendo uma nova normalização, o funcional de energia (3.62) pode ser tomado como

$$E[n] = \frac{1}{2} \int d^d x \{ \partial_k \mathbf{n} \cdot \partial_k \mathbf{n} - \mu^2 \mathbf{n}^2 + \frac{1}{2} u (\mathbf{n}^2)^2 \} \quad (3.64)$$

onde a posição do mínimo de  $|\mathbf{n}^2|$  depende dos valores de  $\mu$  e  $u$ .

Entretanto, se  $\mathbf{n}$  possui apenas um componente  $\varphi$ , obtemos um modelo mais simples, muito conhecido em QFT, chamado de modelo  $\varphi^4$ . O caso  $u = 0$ , conhecido como modelo *gaussiano*, tem solução exata e energia

$$E[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^d x \{ (\nabla \varphi)^2 + \mu^2 \varphi^2 \} \quad (3.65)$$

Vemos, explicitamente, a relação entre QFT e mecânica estatística quando estudamos os modelos contínuos. A função de partição do modelo  $\varphi^4$  é calculada quando, por meio de uma integral funcional, fazemos a soma sobre todas as configurações possíveis:

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\varphi] \exp(-\beta E[\varphi]) \\ &= \int [d\varphi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^d x [(\nabla \varphi)^2 + r^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} u \varphi^4] \right\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

A função de partição de um modelo estatístico d-dimensional é claramente semelhante ao funcional de vácuo de um campo quântico em um espaço-tempo d-dimensional, no formalismo euclidiano, conforme equação (3.48).

### 3.6.1 Mecânica estatística quântica

Em mecânica estatística quântica, estamos interessados nas flutuações térmicas e também na indeterminação quântica nos valores das quantidades físicas em cada microestado. Definimos a função de partição

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Tr} \rho \quad (3.67)$$

onde  $\text{Tr} \rho$  representa o traço do operador  $\rho = e^{-\beta H}$ , chamado de operador de densidade, e  $H$  é a hamiltoniana do sistema. A média de um operador  $A$  é dada por

$$\langle A \rangle = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} A | n \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (3.68)$$

Claramente, há uma semelhança entre o operador de densidade e o operador quântico de evolução  $U = e^{-iHt}$ . Vamos, então, introduzir o formalismo lagrangeano em mecânica estatística. Para um único grau de liberdade, consideramos o kernel do operador de densidade

$$\rho(x_f, x_i) \equiv \langle x_f | e^{-\beta H} | x_i \rangle \quad (3.69)$$

Adaptamos a integral de trajetória a este kernel por meio da rotação de Wick  $t \rightarrow -i\tau$ , onde  $\tau$  é uma variável real variando de 0 a  $\beta$ . A ação  $S[x(t)]$  se torna a ação euclideana  $S_E[x(\tau)]$ , enquanto o kernel de  $\rho$  se torna

$$\rho(x_f, x_i) = \int_{(x_i, 0)}^{(x_f, \beta)} [dx] \exp -S_E[x] \quad (3.70)$$

e a função de partição pode ser expressa por

$$Z = \int dx \rho(x, x) = \int [dx] \exp -S_E[x] \quad (3.71)$$

onde todas as trajetórias com  $x(0) = x(\beta)$  contribuem. O valor esperado de um operador  $A$  é calculado como

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{1}{Z} \int dx \langle x | \rho A | x \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int dx dy \int_{(x_i, 0)}^{(x_f, \beta)} [dx] \langle y | A | x \rangle \exp -S_E[x] \\ &= \frac{1}{Z} \int [dx] A(x(0)) \exp -S_E[x] \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde supomos que  $A = A(x)$  de modo que  $\langle y | A | x \rangle = A(x) \delta(x - y)$ . Vemos, finalmente, que o valor esperado de  $A$  foi calculado usando as integrais de trajetória, relacionando QFT à mecânica estatística.

### 3.6.2 Fenômenos críticos

Transições de fase contínuas são de interesse de grande interesse para este trabalho pela sua relação com invariância conforme. Nesta subseção, veremos como essa relação se dá intuitivamente.

Na subseção B.1, vimos que a função de correlação se comporta, para  $r \gg 1$ , como

$$G_c(r) \sim e^{-r/\xi(T)} \quad (3.73)$$

onde  $\xi(T)$  é o comprimento de correlação. Para o modelo de Ising [19], quando  $T$  está próximo a  $T_c$ , podemos escrever  $\xi(T)$  na forma

$$\xi \sim \frac{1}{|T - T_c|}. \quad (3.74)$$

Esta divergência no comprimento de correlação é a principal característica das transições de fase contínuas. Nas proximidades de um ponto crítico, sistemas de spin, como o modelo de Ising, são caracterizados pela formação de domínios de diferentes magnetizações. De modo grosseiro, o tamanho destes domínios deve ser  $\xi$ , tipicamente, a escala máxima de correlação dos spins. De fato, domínios de vários tamanhos menores que o comprimento de correlação são observados. De outra forma, a função de correlação  $G_c(i - j)$  deveria ter um máximo quando  $(i - j) \sim \xi$  e um valor aproximadamente nulo abaixo desta escala, o que não é observado [19]. Podemos ver isso se notarmos que a susceptibilidade  $\chi$ , por exemplo, diverge como

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} \sim (T - T_c)^{-7/4} \quad (3.75)$$

e então compararmos a expressão acima com a equação (3.60). Logo, os spins flutuam formando domínios com várias escalas de comprimento, da separação da rede  $l$  até  $\xi$ .

Quando a temperatura do sistema atinge a temperatura crítica ou está próxima a ela,  $\xi$  excede o comprimento físico  $L$  do sistema (supondo que o mesmo está contido em uma caixa quadrada de lado  $L$ ). Heuristicamente, neste caso, a função de correlação não tem espaço para decair exponencialmente e sua dependência espacial deve ser algébrica, na forma

$$G_c(i - j) \sim \frac{1}{|i - j|^{d-2+\eta}} \quad (3.76)$$

em conformidade com a equação (B.3). Se um sistema estatístico, definido sobre uma rede, estiver suficientemente perto do ponto crítico, o comprimento de correlação se tornará muito maior que o espaçamento entre os sítios, de tal forma que é natural assumir que as configurações do sistema são suficientemente suaves e adotar um formalismo baseado em campos, trazendo

as vantagens de explicitar as simetrias e a relação com a dimensionalidade do sistema. Próximo à transição, temos

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-H(\{s_i\})} \simeq \int \mathcal{D}\varphi(x) e^{-S[\varphi]}, \quad (3.77)$$

onde  $\mathcal{D}\varphi(x) \equiv [d\varphi]$ . Exatamente no ponto crítico, o comprimento de correlação diverge para infinito: a teoria de campos correspondente se torna invariante por uma dilatação

$$x^a \rightarrow \lambda x^a, \quad (3.78)$$

enquanto os campos  $\varphi_i$  associados aos parâmetros de ordem se transformam como

$$\varphi_i \rightarrow \lambda^{-\Delta_i} \varphi_i, \quad (3.79)$$

onde  $\Delta_i$  denota a dimensão de escala, ou dimensão anômala, do campo  $\varphi_i$ .

## Empacotamento de fios e teoria do campo conforme em 2d

No capítulo 2 falamos um pouco sobre a física do empacotamento de fios em 2D, encontramos uma ação clássica, mas não fizemos a análise estatística necessária para o sistema. No capítulo anterior, vimos como podemos utilizar a linguagem de QFT para definir médias sobre os observáveis de um modelo estatístico; em particular, vimos que nas proximidades de uma transição de fase, o sistema adquire invariância de escala, visto que o comprimento de correlação  $\xi$  diverge. É importante destacar que sistemas que interagem localmente e possuem simetrias de translação e rotação (ou transformação de Lorentz), que sejam também invariantes por uma dilatação global nas coordenadas, são automaticamente invariantes por um grupo maior de transformações: as *transformações conformes* [20, 19, 21].

No caso de um sistema com simetria conforme, podemos construir uma teoria de campos bastante diferente do formalismo lagrangeano, que vimos no capítulo anterior e que, essencialmente, envolve o cálculo de integrais de trajetória. A abordagem que apresentaremos neste capítulo, que nos capacitará, por exemplo, a calcular funções de correlação, baseia-se na álgebra de campos locais e, neste sentido, introduziremos o conceito de *expansão em produto de operadores*.

Nas próximas seções, estudaremos um pouco de teoria do campo conforme e desenvolveremos material suficiente para aplicar ao problema de empacotamento de fios. Na seção 4.5, mesmo sem levar em consideração os efeitos devidos ao contorno das placas, alguns expoentes críticos do problema serão obtidos.

## 4.1 Teoria do campo conforme em $d$ dimensões

Essencialmente, a teoria do campo conforme (CFT)<sup>1</sup> é uma teoria de campos invariante por transformações conformes, sobre as quais falaremos adiante.

### 4.1.1 Transformações conformes

Em análise complexa é comum estudar especialmente um certo tipo de mapas que preservam o ângulo entre curvas que se cruzam no mesmo ponto. São os chamados mapas *conformes* (figura 4.1). Formalmente, seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  um mapeamento dado por  $f(z) = z' = x' + iy'$ , analítico em  $z_0$ , sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curvas no plano complexo  $z$  que se intersectam no ponto  $z_0$ , com um ângulo  $\alpha$  entre elas, e  $\gamma'_1$  e  $\gamma'_2$  as respectivas imagens de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  por  $f(z)$ . Se  $(dz'/dz)_{z_0} \neq 0$ , então  $\alpha = \alpha'$ , onde  $\alpha'$  é o ângulo de inteseção entre  $\gamma'_1$  e  $\gamma'_2$ , isto é, o mapa é *conforme*; e se  $f$  é harmônica em  $(x, y)$  então também o é em  $(x', y')$ , ou seja, se as partes real e complexa de  $f$  satisfazem a equação de Laplace em  $(x, y)$ , então também o fazem em  $(x', y')$ . De modo geral, um mapa *analítico* é conforme em uma região  $D$  do plano complexo desde que sua derivada não se anule nesta região [22, 23].

Por definição, uma transformação de coordenadas (mapa invertível)  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  é uma *transformação conforme* quando, a menos de um fator de escala, mantém a métrica  $g_{ab}$  do espaço invariante:

$$g'_{ab}(x') = \Lambda(x)g_{ab}(x). \quad (4.1)$$

Intuitivamente, podemos verificar a equivalência entre as definições acima, se lembrarmos que o produto interno entre vetores, que define o cosseno do ângulo entre eles, é calculado em um espaço  $d$ -dimensional na forma

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ab}u^a v^b \quad (4.2)$$

No caso de um espaço de Minkowski  $d$ -dimensional,  $g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ , com  $d-1$  entradas iguais a 1; já para um espaço euclidiano,  $g_{ab} = \delta_{ab}$ , e fica claro que a condição (4.1) garante que o ângulo entre os vetores seja invariante pela transformação  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ . Então, podemos definir  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  como os vetores tangentes em cada ponto de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente. Segue que, no plano complexo,  $g_{ab}(z)$  se transforma na forma (4.1) quando  $z \rightarrow w = f(z)$ , com  $f$  analítica.

Podemos investigar o comportamento de  $g_{ab}$  por uma transformação conforme infinitesimal  $x^a \rightarrow x'^a = x^a + \varepsilon^a$ , com o objetivo de encontrar quais formas para  $\varepsilon$  nos levam à eq. (4.1).

---

<sup>1</sup>do inglês “conformal field theory”.

Como vimos na eq. (3.46), por esta transformação, a métrica varia na forma

$$g'_{ab} = g_{ab} - (\partial_a \varepsilon_b + \partial_b \varepsilon_a). \quad (4.3)$$

É fácil ver que (i) translações, (ii) rotações e (iii) dilatações são transformações conformes, por preservarem ângulos. Por estas transformações, o parâmetro infinitesimal  $\varepsilon$  se comporta como

$$(i) \ \varepsilon^a = b^a, \quad (ii) \ \varepsilon^a = \omega_{ab} x^b, \quad (iii) \ \varepsilon^a = \lambda x^a \quad (4.4)$$

com o tensor antissimétrico nos dois índices  $\omega_{ab}$ ,  $b^a$  e  $\lambda$  constantes. Porém existe um tipo mais difícil de enxergar: as *transformações conformes especiais*, que se escrevem na forma

$$x'^a = \frac{x^a - b^a x^2}{1 - 2(b \cdot x) + b^2 x^2} \quad (4.5)$$

Podemos chegar a ela a partir de uma reflexão na forma

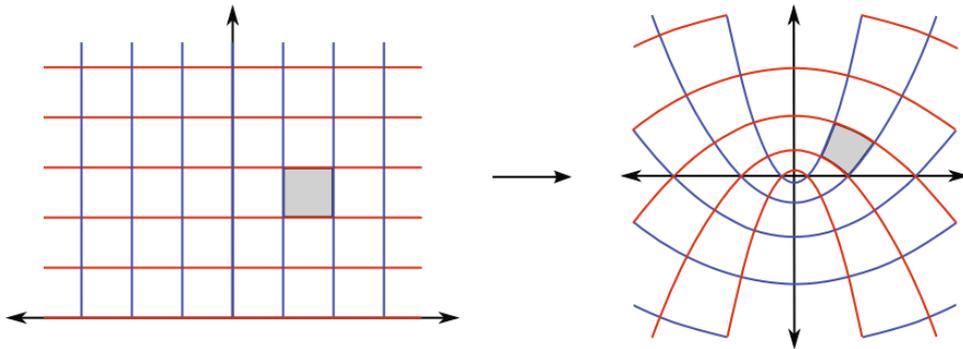
$$x^a \rightarrow \frac{x^a}{x^2} \quad (4.6)$$

seguida de uma translação  $x^a \rightarrow x^a + b^a$ , e de uma nova reflexão [24]. É interessante notar que uma reflexão comporta-se como uma transformação de escala local.

## 4.2 Funções de correlação para campos conformes

Vamos examinar as consequências da invariância conforme em funções de correlação (de dois pontos). Considere a função de correlação

$$\langle \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \exp\{-S[\varphi]\}, \quad (4.7)$$



**Figura 4.1** Transformação conforme em duas dimensões. O que distingue estas transformações das demais é que elas preservam ângulos, enquanto distorcem comprimentos.

onde assumimos que  $S[\varphi]$  é invariante conforme e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são campos quasi-primários, isto é, por uma transformação conforme  $x \rightarrow x'$  se transformam como

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \varphi(x) \quad (4.8)$$

onde  $\Delta$  é a dimensão de escala do campo  $\varphi$  e  $|\partial x'/\partial x|$  é o jacobiano da transformação, relacionado com  $\Lambda(x)$  na forma

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Lambda(x)^{-d/2}. \quad (4.9)$$

Se assumirmos invariância conforme na ação e na medida de integração, somos levados, de acordo com as eqs. (3.40) e (4.9), a seguinte transformação para as funções de correlação

$$\langle \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\Delta_1/d} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\Delta_2/d} \langle \varphi_1(x'_1) \varphi_2(x'_2) \rangle, \quad (4.10)$$

onde estamos considerando campos sem spin por simplicidade. Então, considerando apenas as transformações de escala  $x \rightarrow \lambda x$ , obtemos

$$\langle \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \varphi_1(\lambda x_1) \varphi_2(\lambda x_2) \rangle. \quad (4.11)$$

Invariância por translação e por rotação implicam

$$\langle \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|), \quad (4.12)$$

onde  $f(x) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\lambda x)$  por causa de 4.11, de modo que podemos escrever

$$\langle \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (4.13)$$

onde  $C_{12}$  é um coeficiente constante. Só nos resta aplicar a invariância por transformações conformes especiais. Por estas transformações, o jacobiano fica na forma [19, 25, 26]

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^d} \quad (4.14)$$

enquanto a distância  $|x_1 - x_2|$  se transforma como

$$|x'_i - x'_j| = \frac{|x_i - x_j|}{(1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2)^{1/2} (1 - 2b \cdot x_j + b^2 x_j^2)^{1/2}}. \quad (4.15)$$

A invariância das funções de correlação por transformações conformes especiais implica no vínculo

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad (4.16)$$

onde  $\gamma_i = (1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2)$ . A condição de consistência acima é satisfeita apenas se  $\Delta_1 = \Delta_2$ , de modo que

$$\langle \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} & \text{se } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \\ 0 & \text{se } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}$$

e por comparação com a eq. (B.3) vemos que

$$\eta = 2\Delta + 2 - d \quad (4.17)$$

Embora estejamos trabalhando em um caso simples, isto é, um campo bosônico sem massa e sem interação, fomos capazes de calcular funções de correlação apenas analisando as simetrias da teoria, sem a necessidade de calcular integrais. Isto ilustra e introduz a simplicidade e o poder da teoria do campo conforme.

### 4.3 Teoria do campo conforme em duas dimensões

#### 4.3.1 Campos primários

Em *CFT*, estamos especialmente interessados em certos campos conformes, os quais, quando aplicamos o mapa conforme  $z \rightarrow w(z)$ , se transformam como

$$\varphi(z, \bar{z}) \rightarrow \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^h \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \varphi(w, \bar{w}), \quad (4.18)$$

onde  $h$  e  $\bar{h}$  são as dimensões conformes holomorfa e antiholomorfa do campo  $\varphi(z, \bar{z})$ , respectivamente, que são definidas a partir da dimensão de escala  $\Delta$  e do spin  $s$  do campo na forma

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s), \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s). \quad (4.19)$$

No caso que vamos tratar,  $h$  e  $\bar{h}$  representam apenas as dimensões de escala do campo, visto que campos sem spin serão utilizados no nosso modelo. Ao campo  $\varphi(z, \bar{z})$ , que se transforma segundo (4.18), damos o nome de *campo primário*. Como  $s = 0$ , temos que  $h = \bar{h}$ , e precisamos nos ater apenas à parte holomorfa de  $\varphi(z, \bar{z})$ :

$$\varphi(z) \rightarrow \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^h \varphi(w). \quad (4.20)$$

Frequentemente na literatura, a parte não holomorfa das expressões é omitida, uma vez que, estando de posse da parte holomorfa, a parte não holomorfa pode ser diretamente deduzida. Escolhendo  $z \rightarrow w$  próximo à identidade, isto é, fazendo

$$z \rightarrow w = z + \varepsilon(z), \quad (4.21)$$

com  $|\varepsilon(z)|$  pequeno (nas vizinhanças de  $z$ ), segue da eq. (4.20) que a variação em  $\varphi(z)$  é dada por

$$\begin{aligned}\varphi(z) &\rightarrow (1 + \partial\varepsilon)^h \varphi(z + \varepsilon) \\ &\simeq \varphi(z) + h\partial\varepsilon\varphi(z) + \varepsilon\partial\varphi(z)\end{aligned}\quad (4.22)$$

onde estamos usando  $\partial \equiv \partial/\partial z$ . Vemos que a transformação (conforme) infinitesimal (4.21) produz em  $\varphi(z)$  a variação

$$\delta_\varepsilon\varphi(z) = h\partial\varepsilon\varphi(z) + \varepsilon\partial\varphi(z)\quad (4.23)$$

Existe apenas uma classe de funções analíticas que são bem definidas e invertíveis em todo o plano complexo (ou na esfera de Riemann), que são conhecidas por transformações de Moebius (transformações globais) e se escrevem na forma

$$f(z) = \frac{az - b}{cz - d}, \quad ad - bc = 1.\quad (4.24)$$

Por outro lado existem também as demais funções analíticas, que são transformações conformes locais. O que torna os campos primários tão especiais é o fato de eles se transformarem de acordo com (4.20) e (4.23) por transformações conformes locais e globais, o que não acontece, em geral, com os campos quasi-primários, que não necessariamente se mantêm quasi-primários por transformações conformes locais.

### 4.3.2 O tensor de energia-momento

Devido à localidade da teoria, podemos assumir que existe um campo local  $T_{ab}(x)$ , chamado de tensor de energia-momento, que surge a partir da variação da ação na forma (ver eq. (3.47))

$$\delta S = \int d^d x T^{ab} \partial_a \varepsilon_b\quad (4.25)$$

onde expressamos a invariância conforme da teoria pela condição  $\delta S = 0$ . Por meio da equação acima e da eq. (4.4), a invariância por (i) translação implica a lei de conservação

$$\partial_a T^{ab} = 0;\quad (4.26)$$

invariância por (ii) rotações nos leva à simetria do tensor de energia-momento:

$$T^{ab} = T^{ba};\quad (4.27)$$

e a simetria por dilatações se traduz na condição de nulidade do traço:

$$T^a{}_a = 0.\quad (4.28)$$

Sendo essas relações válidas em  $d$  dimensões. Considerando o plano  $d = 2$ , com coordenadas complexas, vemos a partir da definição  $z = x + iy$ , que o elemento de linha é

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z} \quad (4.29)$$

e por isso os componentes do tensor de energia-momento se transformam como

$$\begin{aligned} T(z, \bar{z}) &\equiv T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} - 2iT_{xy}), \\ \bar{T}(z, \bar{z}) &\equiv T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} + 2iT_{xy}), \\ T_{z\bar{z}} &= T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(T_{xx} + T_{yy}) = \frac{1}{4}T_a^a. \end{aligned}$$

Havendo simetria conforme, pela lei conservação (4.26) e nulidade do traço (4.28), temos que

$$\partial_{\bar{z}}T(z, \bar{z}) = \partial_z\bar{T}(z, \bar{z}) = 0 \quad (4.30)$$

e, portanto, na criticalidade,  $T$  depende apenas de  $z$ , enquanto  $\bar{T} = \bar{T}(\bar{z})$ . O primeiro é analítico, já o segundo é anti-analítico.

### 4.3.3 Expansão em produto de operadores

Formalmente, desde que a corrente  $j_a = T_{ab}\varepsilon^b$ , associada à simetria por transformação conforme, seja conservada, existe também uma carga conservada expressa pela eq. (3.34)

$$Q = \int dx^1 j_0 \quad (x^0 = \text{const.}). \quad (4.31)$$

Em teoria de campos, esta carga conservada é o gerador da transformação de simetria e para um operador  $A$  podemos escrever

$$\delta A = [Q, A] \quad (4.32)$$

onde o comutador é calculado em tempos iguais. A transformação de coordenadas

$$z \rightarrow w = e^z = e^{x^0} e^{ix^1} \quad (4.33)$$

será importante no que chamaremos de ordenamento radial e se fizermos uso desta transformação, vemos que no novo sistema de coordenadas  $x^0 = \text{const.}$  corresponde a  $|z| = \text{const.}$ , de modo que a integral  $\int dx^1$  naturalmente se torna uma integral de contorno, e assim

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \varepsilon(z) T(z) \quad (4.34)$$

Esta expressão nos permite portanto determinar a transformação infinitesimal de um campo  $\varphi(z)$  gerada pela carga  $Q$ . Calculamos, então, o análogo da eq. (4.32), usando a eq. (4.34):

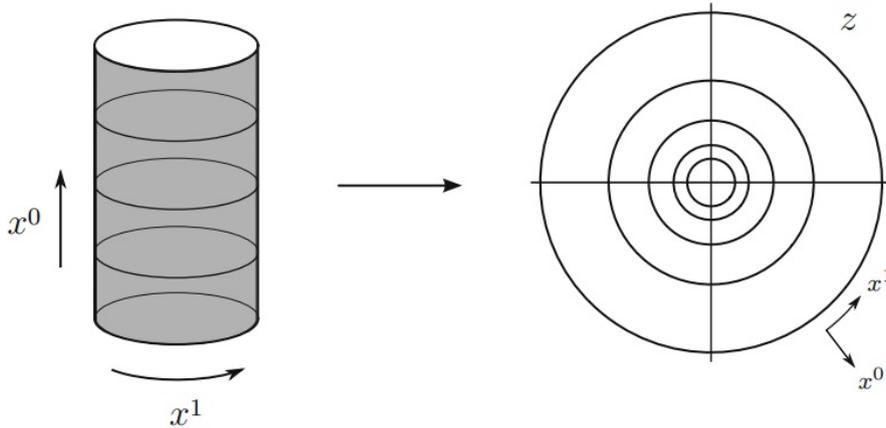
$$\delta_\varepsilon \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \varepsilon(z) [T(z), \varphi(w)] \quad (4.35)$$

Note que temos uma ambiguidade na expressão acima. Não está claro se  $w$  está dentro ou fora da região delimitada pelo contorno  $C$ . Em QFT, as funções de correlação são definidas como produtos ordenados no tempo. Vamos olhar por um instante a transformação (4.33) e investigar algumas de suas propriedades.

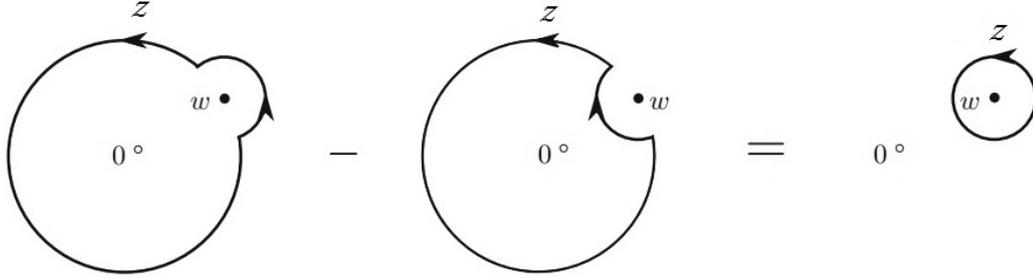
Neste mapeamento, levamos o cilindro infinito descrito por  $x^0$  e  $x^1$  no plano complexo descrito por  $z$  (fig. 4.2). Os pontos no infinito passado e futuro  $x^0 \mp \infty$  (no cilindro) são mapeados nos pontos  $z = 0, \infty$  (no plano), respectivamente. Fatias do cilindro com  $x^0 = \text{const.}$  representam círculos de raios fixos sobre o plano; fatias do cilindro com  $x^1 = \text{const.}$  são retas que cruzam a origem no plano. Translações temporais  $x^0 \rightarrow x^0 + \lambda$  se tornam dilatações no novo sistema de coordenadas:  $z \rightarrow e^\lambda z = (1 + \lambda + \dots)z$ . Analogamente, translações espaciais  $x^1 \rightarrow x^1 + \theta$  constituem rotações no plano complexo:  $z \rightarrow e^{i\theta} z$ .

A Hamiltoniana  $H$  do sistema, que antes era o gerador de translações temporais do mesmo, pode então ser identificada como o gerador de dilatações no plano, enquanto o operador momento  $P$ , gerador de translações espaciais, passa a ser visto como o gerador de rotações no plano. Por isso, concluímos que o tensor de energia-momento  $T(z)$  pode ser visto como o gerador de transformações conformes no plano complexo [27].

Vemos, por meio do uso da transformação (4.33), que o ordenamento temporal pode ser identificado com ordenamento radial em CFT e, deste modo, o produto de operadores  $A(z)B(w)$



**Figura 4.2** Mapeamento radial. Levamos o cilindro infinito no plano complexo.



**Figura 4.3** Contorno de integração. Como assumiremos que os integrandos serão sempre ordenados radialmente da forma mostrada em (4.36), as integrais na variável  $z$  serão avaliadas sobre um pequeno contorno em volta de  $w$ .

não está bem definido, fazendo sentido apenas se  $|z| > |w|$ . Para remediar este problema, definimos o ordenamento radial de dois operadores como

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w) & \text{se } |z| > |w| \\ B(w)A(z) & \text{se } |w| > |z| \end{cases}$$

e, com esta definição, devemos interpretar (4.35) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \oint dz[A(z), B(w)] &= \oint_{|z|>|w|} A(z)B(w) - \oint_{|z|<|w|} dzB(w)A(z) \\ &= \oint_{C(w)} dzR(A(z)B(w)) \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde aplicamos a relação entre os contornos das integrais conforme mostrado na figura (4.3). Com este entendimento sobre o contorno  $C$ , nos livramos da ambiguidade na expressão (4.35). Podemos escrevê-la como

$$\delta_\varepsilon \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \varepsilon(z) R(T(z), \varphi(w)). \quad (4.37)$$

Nosso próximo objetivo é recobrar a expressão (4.23) a partir da expressão acima. Aplicando as identidades

$$\begin{aligned} h\partial_w \varepsilon(w) \varphi(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz h \frac{\varepsilon(z)}{(z-w)^2} \varphi(w), \\ \varepsilon(w) \partial_w \varphi(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \frac{\varepsilon(z)}{z-w} \partial_w \varphi(w) \end{aligned} \quad (4.38)$$

para um campo  $\varphi(w)$  holomorfo, obtemos

$$R(T(z), \varphi(w)) = \frac{h}{(z-w)^2} \varphi(w) + \frac{1}{z-w} \partial \varphi(w) + \dots \quad (4.39)$$

onde omitimos os termos regulares (analíticos), visto que eles não contribuem para o resultado das integrais em contornos fechados. Assumindo ordenamento radial para produto de operadores daqui em diante, vamos escrever  $A(z)B(w)$  em vez de  $R(A(z), B(w))$ , e segue que

$$T(z)\varphi(w) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\varphi(w) + \frac{1}{z-w}\partial\varphi(w). \quad (4.40)$$

Uma expressão como (4.40) é chamada de expansão em produto de operadores, ou  $OPE^2$ , e define uma estrutura algébrica no espaço dos campos. Esta expansão significa que o produto de dois operadores locais,  $\mathcal{A}_2(z_1)$  e  $\mathcal{A}_1(z_1)$ , com  $z_1 \rightarrow z_2$ , pode ser aproximado com “arbitrária precisão” [28, 29] por uma soma de operadores locais como

$$\mathcal{A}_i(z_1)\mathcal{A}_j(z_2) = \sum_k C^k_{ij}(z_1 - z_2)\mathcal{A}_k(z_2) \quad (4.41)$$

onde  $C^k_{ij}(z_1 - z_2)$  são coeficientes na forma  $c^k_{ij}/(z_1 - z_2)^n$ , sendo  $c^k_{ij}$  coeficientes numéricos e  $n \geq 1$  não necessariamente inteiro, mas de sorte que apenas termos singulares contribuam para o OPE. Isso se dá porque a expressão (4.41) é definida dentro de algum valor esperado, implicando na irrelevância dos termos regulares. Na prática, assumimos em primeiro lugar a existência de uma base de operadores que inclui os parâmetros de ordem  $\varphi$ . Em segundo lugar, fazemos a hipótese de que qualquer outra quantidade, como produtos dos parâmetros de ordem podem ser expressos por operadores locais da base.

#### 4.3.4 Alguns OPEs importantes

A eq. (4.40) é o OPE geral para um campo primário  $\varphi$ . Na verdade, esta equação pode servir como a definição de campos primários em termos de expansão de operadores. Para diferentes tipos de campos, a dimensão holomorfa  $h$  recebe valores diferentes, em geral. No problema que estamos tratando,  $h = \Delta$ , a dimensão de escala.

Nesta seção, vamos calcular os OPEs para alguns campos e verificar o valor da dimensão de escala para cada um, o que, como veremos, auxiliar-nos-á na determinação dos expoentes críticos do problema de empacotamento de fios.

Como vimos no capítulo anterior (subseção 3.3.1), a função de correlação para um campo bosônico livre sem massa é dado por

$$\langle \varphi(z)\varphi(z') \rangle = -\ln(z - z'). \quad (4.42)$$

---

<sup>2</sup>do inglês “operator product expansion”.

A expressão acima nos diz que, a partir de derivadas da mesma, omitindo o símbolo de média e os termos regulares, temos os OPEs:

$$\partial\varphi(z)\varphi(w) \sim -\frac{1}{(z-w)} \quad , \quad \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) \sim -\frac{1}{(z-w)^2}. \quad (4.43)$$

Por outro lado, o tensor de energia-momento para este mesmo campo é

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (\partial_a\varphi\partial_b\varphi - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial_c\varphi\partial^c\varphi) \quad (4.44)$$

e, como acontece com os produtos de campos na forma  $\mathcal{O}$ , precisamos fazer uso do ordenamento normal  $:\mathcal{O}:$ , de modo que o valor esperado de vácuo  $\langle 0 | : \mathcal{O} : | 0 \rangle$  se anule [16], o que nos permite assumir que a energia (média) do vácuo é zero. Aplicando o ordenamento normal a  $T$  e o escrevendo em coordenadas complexas, ficamos com

$$T_0(z) = -\frac{1}{2} : \partial\varphi\partial\varphi : \quad (4.45)$$

embora a constante de proporcionalidade  $-1/2$  possa variar um pouco na literatura e o índice subscrito “0” tenha sido incluído por razão que ficará clara adiante. Utilizando o teorema de Wick [16], que essencialmente nos diz como escrever funções de correlação de  $n$  pontos como uma combinação de funções de correlação de dois pontos, calculamos o OPE:

$$\begin{aligned} T_0(z)\partial\varphi(w) &= -\frac{1}{2} : \partial\varphi\partial\varphi : \partial\varphi \\ &\sim \frac{\partial\varphi(z)}{(z-w)^2} \\ &\sim \frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2\varphi(w)}{(z-w)}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde da primeira para a segunda linha, fizemos duas contrações de Wick simples da forma  $\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)$ , utilizamos (4.43) e da segunda para a terceira linha, usamos a expansão

$$\begin{aligned} \partial\varphi(z) &= \partial\varphi(w-\varepsilon) \\ &\simeq \partial\varphi(w) + \partial^2\varphi(w)(z-w) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Semelhantemente, podemos calcular outros OPEs:

$$\begin{aligned} T_0(z)V_\beta(z') &= -\frac{1}{2} : (\partial\varphi(z))^2 : e^{\beta\gamma\varphi(z')} : \\ &= -\frac{1}{2} : (\partial\varphi(z))^2 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\beta\gamma\varphi(z')]^n}{n!} : \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $V_\beta(z')$  é chamado de operador de vértice e fizemos uso, na segunda linha, de sua expansão em série de Taylor. Utilizando o teorema de Wick, faremos contrações simples e duplas, de modo que a eq. (4.48), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} T_0(z)V_\beta(z') = & - : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) :: \varphi(z') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\beta\gamma)^n [\varphi(z')]^{n-1}}{n!} : \\ & - \frac{1}{2} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) :: \varphi(z')\varphi(z') \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(\beta\gamma)^n [\varphi(z')]^{n-2}}{n!} : \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde no primeiro termo estamos implicitamente aplicando uma contração simples de Wick e no segundo termo assumimos contrações duplas. Por meio da eq. (4.46), podemos escrever

$$\begin{aligned} T_0(z)V_\beta(z') = & - \left[ -\frac{1}{z-z'} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\beta\gamma)^n \partial\varphi(z') [\varphi(z')]^{n-1}}{n!} \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(z-z')^2} \right] (\beta\gamma)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[\beta\gamma\varphi(z')]^{n-2}}{(n-2)!} \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde utilizamos no primeiro termo à direita que  $\partial\varphi(z) \simeq \partial\varphi(z')$ , se  $z$  está infinitesimalmente próximo a  $z'$ , visto que uma correção de maior ordem em  $\partial\varphi(z)$  traria a tona apenas termos regulares para o OPE  $T_0(z)V_\beta(z')$ , sendo, por isso, irrelevantes. Notando que  $n\partial\varphi(z')[\varphi(z')]^{n-1} = \partial[\varphi(z')]^n$ , segue que

$$T_0(z)V_\beta(z') = -\frac{(\beta\gamma)^2}{2} \frac{V_\beta(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial V_\beta(z')}{z-z'}, \quad (4.51)$$

onde usamos o sinal de igualdade, embora deixemos implícito que estamos calculando um valor esperado.

Da mesma maneira, calculamos o OPE do tensor de energia-momento com ele mesmo:

$$T_0(z)T_0(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T_0(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_0(w)}{(z-w)} \quad (4.52)$$

onde a constante  $c$ , conhecida por carga central, depende do campo que estamos utilizando: para um campo bosônico livre,  $c = 1$ , enquanto o mesmo cálculo para férmions livres implica em  $c = 1/2$ .

### 4.3.5 A transformação do tensor de energia-momento

O tensor de energia-momento  $T(z)$ <sup>3</sup> está relacionado com a distribuição de matéria no espaço e também com sua geometria. Como modelamos a inserção do fio através de transformações

<sup>3</sup>Precisamente,  $T(z)$  é um componente do tensor de energia-momento.

conformes, é importante saber como  $T(z)$  se modifica por este tipo de transformação. Para o caso infinitesimal, a transformação procurada é dada por [19]

$$T'(z) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T(w) + \frac{c}{12}\{w; z\} \quad (4.53)$$

onde tomaremos  $c = 1$  e  $\{w; z\}$  é a derivada schwarziana, definida como

$$\{w(z); z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2 \quad (4.54)$$

Em comparação com (4.20), vemos que  $T(z)$  não é um campo primário, a menos que  $\{w(z); z\} = 0$ . De fato, não é difícil verificar que isto acontece quando  $w(z)$  é uma transformação de Möbius.

Vamos supor que, a princípio,  $T(z) = 0$  em algum sistema de coordenadas. Então, por uma transformação conforme  $S(z)$ , tal que  $S'(z) = e^{2\gamma\varphi(z)}$ , o tensor de energia-momento se apresentará na forma

$$\begin{aligned} T(z) &\propto \{S; z\} \\ &\propto -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2\gamma}\partial^2\varphi \end{aligned} \quad (4.55)$$

e identificamos, a partir da eq. (4.45), que  $T(z) = T_0(z) + \partial^2\varphi/2\gamma$ , onde o termo  $\partial^2\varphi$  é chamado de termo de “aperfeiçoamento” do tensor de energia-momento. O OPE deste termo com um operador de vértice pode ser calculado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma} : \partial^2\varphi(z) : e^{\beta\gamma\varphi(w)} : &= \frac{1}{2\gamma} \partial_z : \partial\varphi(z) : e^{\beta\gamma\varphi(w)} : \\ &= \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{(z-w)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\beta\gamma)^n \partial\varphi(z') [\varphi(z')]^{n-1}}{n!} \\ &= \frac{\beta}{2} \frac{V_\beta(w)}{(z-w)^2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

implicando que

$$T(z)V_\beta(z') = \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{(\beta\gamma)^2}{2} \right\} \frac{V_\beta(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial V_\beta(z')}{z-z'}, \quad (4.57)$$

de onde inferimos, usando a eq. (4.40), a dimensão de escala aperfeiçoada do operador de vértice:

$$\Delta[V_\beta] = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2\gamma^2}{2}. \quad (4.58)$$

Este resultado é central para o cálculo dos expoentes críticos do empacotamento de fios em 2D.

No capítulo 2, vimos que a extremização da ação para o empacotamento de fios nos levou à eq. (2.14)

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{\lambda}{\alpha} \sin\theta = 0. \quad (4.59)$$

Vamos encontrar uma parametrização para esta equação tal que a análise construída até aqui, em termos de CFT, seja aplicável. Já vimos que com a utilização da derivada schwarziana da função  $S(z) = e^{2\gamma\varphi(z)}$  foi possível construir  $T(z)$  convenientemente. Veremos que a parametrização via função de Schwarz é de fato adequada à nossa abordagem.

## 4.4 Função de Schwarz

Nesta seção, apresentaremos algumas características da Função de Schwarz. Nosso maior alvo é mostrar como esta função se relaciona com a curvatura  $k$  de uma curva analítica  $C$ , definida em alguma região (aberta)  $D$  do plano complexo, e concluir que é natural utilizar este mapa na modelagem do problema de empacotamento de fios. Um estudo mais detalhado sobre a Função de Schwarz e algumas aplicações pode ser visto em [30].

### 4.4.1 Função de Schwarz para um arco analítico

Dado um arco analítico simples  $C$  escrito como  $f(x, y) = 0$  em coordenadas cartesianas, podemos representá-lo em coordenadas complexas como

$$f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right) = g(z, \bar{z}) = 0 \quad (4.60)$$

**Definição:** A função de Schwarz  $S(z)$  de uma curva  $C$  é definida como a (única) função analítica nas vizinhanças de  $C$  tal que  $S(z) = \bar{z}$  sobre  $C$ .

Ao longo de um arco simples  $C$ , podemos encontrar  $\bar{z} = S(z)$  em cada ponto  $z$  da curva, e, por meio de continuação analítica, estender  $S(z)$  para uma região que contenha este arco.

### 4.4.2 Função de Schwarz e geometria

Podemos escrever cada ponto sobre  $C$  como  $z = re^{i\theta}$ . Assim,

$$r^2 = z\bar{z} = zS(z) = |S(z)|^2 \quad (4.61)$$

e escrevemos o elemento de linha sobre a curva na forma

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 = (dx + idy)(dx - idy) \\ &= dzd\bar{z} = dzS'(z)dz = S'(z)dz^2, \end{aligned}$$

onde  $l$  é o parâmetro comprimento de arco. A partir destas relações, vemos que

$$\frac{dz}{dl} = \frac{1}{\sqrt{S'(z)}} \quad (4.62)$$

$$S'(z) = \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{dx - idy}{dx + idy} = \frac{1 - iy'}{1 + iy'}. \quad (4.63)$$

Designando a curvatura (com sinal) de  $C$  por  $k$ , sabemos da equação (2.5) que

$$k = \frac{d\theta}{dl} \quad (4.64)$$

Queremos descrever esta curvatura em termos da função de Schwarz.

Da equação (4.63), vemos que  $|S'(z)| = 1$ , ou seja,  $S'(z) = e^{i\alpha(z)}$ , implicando pela equação (4.62) que podemos escrever (em coordenadas polares)

$$\frac{dz}{dl} = \frac{1}{\sqrt{S'(z)}} = e^{i\theta}. \quad (4.65)$$

Usando a definição (4.64), a equação acima e (4.62), mostramos que

$$k = \frac{i}{2} \frac{S''}{(S')^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.66)$$

Podemos também verificar como a curvatura  $k$  varia ao longo de  $C$ .

$$k' = \frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{dz}{dl} \frac{d}{dz} \left( \frac{i}{2} \frac{S''}{(S')^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Então, se definirmos a derivada schwarziana

$$\{S; z\} \equiv \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2} \left( \frac{S''}{S'} \right)^2 \quad (4.67)$$

concluimos que

$$k' = \frac{d^2\theta}{dl^2} = \frac{i}{2} \frac{1}{S'} \{S; z\}. \quad (4.68)$$

Uma vez que, no empacotamento de fios em 2D, conhecemos os pontos inicial e final de  $C$  na região  $D$ , esta curva está totalmente determinada pela curvatura  $k(l)$  [11], visto que ela está contida no plano. Por isso, a derivada schwarziana, que aparece na expressão para  $k'$ , desempenha um papel fundamental no entendimento da geometria e também da física do nosso problema.

### 4.4.3 Função de Schwarz e o empacotamento de fios

Em CFT, o tensor de energia-momento se transforma como (4.53)

$$T'(z) = \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 T(w) + \frac{1}{12} \{w; z\}. \quad (4.69)$$

O termo essencialmente geométrico  $\{w; z\}$ , que aparece se relacionando com  $T(z)$ , surge no nosso modelo (eq. (4.59)) na forma  $k' = d^2\theta/dl^2 = \{S; z\}/2S'$ , indicando que sobre a curva  $C$  é natural utilizar o mapa  $\bar{z} = S(z)$ , onde  $S(z)$  é a função de Schwarz. A eq. (4.59) pode ser escrita como

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{\lambda}{2i\alpha} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 0 \quad (4.70)$$

usando as eqs. (4.65) e (4.68), podemos reescrever a equação acima na forma

$$\{S; z\} - \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{S'}(1 - S') = 0 \quad (4.71)$$

Da mesma forma como fizemos anteriormente (eq. (4.55)), utilizamos a substituição  $S'(z) = e^{2\gamma\varphi(z)}$  na eq. (4.71) e posteriormente fixaremos  $\gamma$  usando argumentos de escala. Assim, obtemos:

$$-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2\gamma}\partial^2\varphi - \frac{\lambda}{4\gamma^2}(e^{\gamma\varphi} - e^{3\gamma\varphi}) = 0. \quad (4.72)$$

Esta equação, onde fizemos  $(\lambda/\alpha) \rightarrow \lambda$ , é de importância fundamental neste trabalho. Em geral, a contribuição do termo de aperfeiçoamento  $\partial^2\varphi$  à dinâmica dessa equação é não-trivial, porém, felizmente, o relacionamento da dimensão de escala do operador de vértice  $V_\beta$  com o OPE  $T_0V_\beta$  (4.40) se mantém válida com  $TV_\beta$ , conforme verificamos na eq. (4.57).

Podemos fixar  $\gamma$ , impondo que os termos do tipo potencial  $V_1 \propto e^{\gamma\varphi}$  e  $V_3 \propto e^{3\gamma\varphi}$  tenham a mesma dimensão de escala. Calculando  $\Delta[V_1]$  e  $\Delta[V_3]$ , temos

$$\Delta[V_1] = \frac{1 - \gamma^2}{2}, \quad \Delta[V_3] = \frac{3 - 9\gamma^2}{2}. \quad (4.73)$$

Igualando as expressões, segue que  $\gamma = \pm 1/2$  e  $\Delta[V_1] = \Delta[V_3] = 3/8$ . É importante notar que, a partir da eq. (4.65), podemos escrever  $S'(z) = e^{2i\theta(z)}$ , com  $|S'(z)| = 1$  sobre a curva  $C$ , enquanto na eq. (4.71) usamos a substituição  $S'(z) = e^{2\gamma\varphi(z)}$ , que não necessariamente possui norma unitária. Entretanto, poderíamos usar a substituição  $S'(z) = e^{2i\gamma\varphi(z)}$ , levando-nos à substituição  $\gamma \rightarrow i\gamma$  nas demais equações, implicando que encontraríamos  $\gamma = \pm(1/2)i$  e a equação para  $\Delta[V_\beta]$  não se alteraria. Então, uma vez que tenhamos  $\theta(z)$  sobre  $C$ , podemos estender esta função analiticamente para todo o domínio  $D$ , onde  $|S'(z)|$  não necessariamente é unitário.

## 4.5 Cálculo dos expoentes críticos

Estamos interessados em calcular as dimensões de escala dos observáveis  $E$  e  $N$ , isto é, queremos saber como a energia e o número total de loops escalam com o comprimento total  $L$ , quando  $L$  está próximo de  $L_c$ . Vamos encontrar expressões para  $L$  e  $E$  em termos de  $\varphi(z)$ . O comprimento total do fio

$$L = \int_C dl = \int_C dz \sqrt{S'} = \int_C dz e^{\gamma\varphi} \quad (4.74)$$

e vemos que  $L$  é a integral de um operador com dimensão  $\Delta[V_1] = 3/8$  e por isso

$$\Delta[L] = \Delta[V_1] - 1 = -5/8. \quad (4.75)$$

Como ilustração do fato de a integral de um campo (com dimensão conforme  $\Delta$ ) escalar com  $\Delta - 1$ , considere um campo  $\varphi$  com dimensão de escala nula (um campo bosônico). Então,  $\partial\varphi(z)$  se transforma como

$$\partial\varphi(z) \rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^1 \varphi'(w). \quad (4.76)$$

Onde o campo  $\varphi'(w)$  é o novo campo. Vemos que  $\Delta[\partial\varphi(z)] = 1$  e que a operação de derivação aumentou a dimensão de escala do campo em uma unidade. Daí, concluímos que a operação de integração diminui  $\Delta$  em uma unidade.

Por outro lado, temos a energia  $E$  de entortamento do fio:

$$E = \frac{\alpha}{2} \int_0^L dl \left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2 = -\frac{\alpha}{8} \int_C dz \sqrt{S'} \frac{(S'')^2}{(S')^3}$$

onde usaremos novamente a substituição  $S'(z) = e^{2\gamma\varphi(z)}$ , conduzindo a

$$E = \alpha\gamma^2 \int_C dz (\partial\varphi)^2 e^{-\gamma\varphi} \quad (4.77)$$

$$\propto \int_C dz \left(\frac{d}{dz} e^{-\frac{1}{2}\gamma\varphi}\right)^2 \quad (4.78)$$

Por isso, temos que

$$\Delta[E] = 2(\Delta[V_{-1/2}] + 1) - 1 = \frac{7}{16}. \quad (4.79)$$

e chegamos a expressão acima para  $\Delta[E]$  notando em (4.78) que o campo  $e^{-\frac{1}{2}\gamma\varphi}$  possui dimensão  $\Delta[V_{-1/2}]$ , o campo dentro dos parênteses possui dimensão  $\Delta[V_{-1/2}] + 1$  por causa da operação de derivação, precisamos incluir um fator de 2 porque os parênteses aparecem ao quadrado, e a integração diminui a dimensão conforme em uma unidade. Para ser preciso, notamos que o quadrado da derivada de um operador de vértice poderia não ter dimensão de escala bem

definida; em geral, o campo resultante da derivação de um campo primário pode não ser primário. Porém, a dimensão de escala acima poderia ser obtida explicitamente, utilizando uma expansão em produto de operadores a partir da expressão (4.77). Os operadores  $L_n$ , definidos como

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T_0(z) \quad (4.80)$$

são os geradores da álgebra de Virasoro

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \quad (4.81)$$

onde  $\delta_{a,b}$  representa o delta de Kronecker e usamos a expressão (4.52). Percebendo que os descendentes dos operadores de vértice, definidos como

$$L_n V_\beta(w) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz (z - w)^{n+1} T_0(z) V_\beta(w) \quad (4.82)$$

são conformes [19], com dimensão de escala  $\Delta[V_\beta] - n$  (o que pode ser verificado por meio da álgebra de Virasoro acima), que  $L_{-1}V_\beta(w) \equiv \beta\gamma(\partial\varphi)e^{\beta\gamma\varphi}$ , e que o primeiro coeficiente do OPE  $TV_\beta$  não é afetado pela inclusão do termo de aperfeiçoamento, concluimos que  $\Delta[E] = 7/16$ , de fato.

As relações (4.75) e (4.79) dizem que existe um parâmetro dimensional  $\lambda$ , cuja interpretação física é desconhecida ou inexistente, tal que

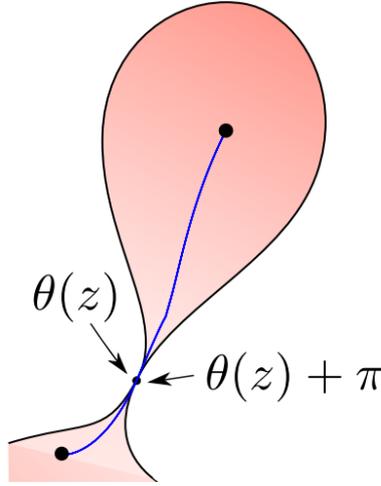
$$L_c - L \propto |\lambda|^{-5/8}, \quad E \propto |\lambda|^{7/16} \quad (4.83)$$

de sorte que as dimensões de escala para o comprimento total e para a energia podem ser relacionadas na forma

$$E \propto |L_c - L|^{-7/10} \quad (4.84)$$

e obtemos o expoente crítico  $-7/10$  para a energia.

Podemos também estimar o expoente crítico do número de laços  $N$ . Um laço é identificado pelo ponto de contato  $z$  ângulo  $\theta(z)$  satisfaz  $\theta(z - i\varepsilon) = \theta(z + i\varepsilon) + \pi$  onde o laço fecha (figura 4.4). Assim, intuitivamente, podemos determinar os laços pelos cortes de ramificação na função  $\theta(z)$ . Calculando a integral desta função em qualquer contorno diametral (e fechando o contorno de integração da maneira usual, sem que haja contribuição do “fechamento” do contorno)  $\theta$  ganha um fator de  $\alpha\pi$ , com  $\alpha$  constante, a cada vez que o contorno “passa” por um corte de ramificação. Estimando o número destes cortes de ramificação, temos uma estimativa para  $N$ . Por exemplo, sabemos que a função  $\log z$  possui um corte de ramificação ao longo do eixo real negativo e, ao cruzá-lo, passamos a uma nova folha de Riemann, onde a coordenada



**Figura 4.4** Representação de um laço. Vemos que onde há o encontro do fio com ele mesmo, o ângulo  $\theta$  que a curva faz com o eixo real varia na forma  $\theta(z - \varepsilon) = \theta(z + \varepsilon) + \pi$ .

tipo ângulo aparecerá deslocada de  $2\pi$ . Como  $\theta \propto \varphi$  pela escolha que fizemos para  $S'(z)$ , segue que

$$\int dz \varphi(z) \sim \pi N \sim N. \quad (4.85)$$

De fato,  $\varphi$  não é um campo primário; sua lei de transformação é logarítmica. Todavia, assumimos que sua dimensão de escala é zero. Portanto, concluímos que  $\Delta[N] = \Delta[\int dz \varphi(z)] = -1$  e relacionando com  $\Delta[L]$ , temos

$$N_L \propto L^{8/5} \quad (4.86)$$

de onde extraímos o expoente crítico  $8/5$  do número de laços, na configuração de empacotamento rígido.

## 4.6 Discussão dos resultados

Utilizando CFT, fomos capazes de prever relações de escala para  $E$  e  $L$ , além de estimar uma relação para  $N$ , mesmo sem dispor de uma hamiltoniana que descrevesse a evolução do sistema. Isso se deu porque, tendo em vista o comportamento crítico do sistema, assumimos que o mesmo apresenta invariância conforme, assim como ocorre em outros sistemas críticos, de modo que as ferramentas de CFT fossem aplicadas. O modelo apresentado, além de prever uma transição de fase, fornece médias sobre observáveis, de onde extraímos expoentes críticos do empacotamento de fios. Comparamos os resultados com dados experimentais e advindos de simulação computacional, conforme a tabela 4.1:

	E	F	N
Experimental			$1,8 \pm 0,2$
Simulação comp.		$-2,05 \pm 0,02$	$1,75 \pm 0,03$
Teórico	$-7/10$	$-17/10$	$8/5$

**Tabela 4.1** Valores dos expoentes críticos para o empacotamento de fios. Os dados experimentais foram obtidos por Donato et al. [1], enquanto Stoop et al. [2] fornece os dados de simulações, de onde obtemos os resultados para a morfologia clássica, elencados na tabela.

Obtemos o expoente crítico para a força  $F$  de injeção, a qual repentinamente aumenta quando a configuração de empacotamento rígido aparece, tomando a derivada da energia em relação ao comprimento. Vemos que os resultados analíticos se aproximam dos demais. Particularmente, Donato et al. [3] apresentam o valor  $1,6 \pm 0,2$  para o expoente crítico do número de laços  $L$ .

Também é importante notar que o contorno da cavidade não foi explicitamente levado em consideração. No cálculo da função de dois pontos para o campo  $\varphi$ , deveríamos ter utilizado um campo que atendessem a certas condições de contorno, em conformidade com a geometria da região entre as placas. Todavia, os resultados teóricos para os expoentes críticos concordam razoavelmente com os dados comparados. Isso pode indicar que não existe uma dependência forte entre os valores dos expoentes críticos e a geometria da cavidade, desde que as dimensões características da cavidade sejam muito maiores que o diâmetro do fio.

## Gravitação de Liouville e o empacotamento de fios

No segundo capítulo, vimos que a conformação do fio pode ser representada pela curva  $C = z(t)$ , com  $t \in [-1, 1]$ , levando um diâmetro do disco unitário complexo  $D$  numa configuração com comprimento  $L$ , sem interseção. Concluimos que  $z(t)$  pode ser estendida para todo o domínio  $D$  de tal modo que os mapas  $z_{\pm}(w)$ , as extensões de  $z(t)$ , são analíticas nos semi-discos superior e inferior  $D_{\pm}$ . Então, escrevemos a equação do movimento para o fio (análoga à equação para um pêndulo com grande amplitude de movimento). No capítulo passado, utilizando CFT, estudamos a física no interior das placas e derivamos algumas propriedades de escala do modelo.

Ainda no capítulo anterior, reescrevemos em termos do campo  $\varphi$  a equação do movimento, encontrando a eq. (4.72):

$$-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2\gamma}\partial^2\varphi - \frac{\lambda}{4\gamma^2}(e^{\gamma\varphi} - e^{3\gamma\varphi}) = 0. \quad (5.1)$$

Veremos neste capítulo como a equação acima descreve um sistema gravitacional. Além deste, daremos outros indícios de como o empacotamento de fios em 2d pode ser visto em analogia à gravitação.

### 5.1 Gravitação de Liouville

Nesta seção, vamos introduzir a gravitação de Liouville, partindo do contexto de teoria de cordas. (Confira o apêndice C.) Na sequência, falaremos sobre a versão clássica da teoria do campo Liouville, mostrando sua relação com o empacotamento de fios. Por último, falaremos sobre a relação entre esta gravitação e gravitação einsteiniana.

Vimos no capítulo 3 que uma forma de quantizar uma teoria, a partir de um modelo clássico, é via integrais de trajetória. As amplitudes, nesse formalismo, são obtidas através da soma sobre todas as histórias (trajetórias com estados inicial e final fixos) possíveis. Cada história recebe um peso dado por  $\exp(iS)$ , onde  $S = S[\varphi]$  é a ação clássica para uma dada história (conforme eq. (3.13)).

Seguindo uma receita análoga, no afã de quantizar a teoria de cordas, tentamos calcular a integral sobre geometrias e topologias bidimensionais:

$$Z \sim \sum_{\text{topologias}} \int \mathcal{D}g \mathcal{D}X e^{-S} \quad (5.2)$$

onde a física do espaço-tempo reside (no caso de uma corda bosônica) na ação:

$$S \propto \int d^2\xi \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) \quad (5.3)$$

onde  $g_{ab}$  e  $X^\mu$  são a métrica e as coordenadas da folha-mundo, respectivamente, e  $G_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo D-dimensional. Então, em analogia à teoria definida para descrever partículas, a qual conduz ao propagador (ou função de correlação), na teoria de cordas somamos sobre todas as possíveis folhas-mundo (conectando uma curva inicial a uma curva final), produzindo a função de partição  $Z$  acima. Voltaremos a falar sobre esta função adiante.

Usando o princípio de covariância geral, podemos acoplar qualquer QFT  $S_M[X^i]$  em  $D$  dimensões à gravidade, resultando na ação  $S_M[g, X^i]$ , onde  $X^i$  são os campos de matéria e  $g$  representa a métrica. *Classicamente*, a teoria  $S[g, X^i]$  em 2d é sempre conforme. Isso fica claro se notarmos que em 2d podemos escolher

$$g_{ab} = e^{\gamma\varphi} \hat{g}_{ab} \quad (5.4)$$

localmente, onde  $\hat{g}_{ab}$  é uma métrica fiduciária que pode ser escolhida como  $\delta_{ab}$  em uma variedade euclideana. Como  $g_{ab}$  possui três graus de liberdade independentes, enquanto um sistema de coordenadas dispõe de dois graus de liberdade, vemos que, escolhendo convenientemente um sistema de coordenadas, podemos descrever a métrica usando apenas uma variável dinâmica na forma de um campo local  $\varphi$ . Outra forma de verificar a eq. (5.4) é notando que a curvatura escalar  $R$  se transforma em 2d como

$$\sqrt{g}R[g] = \sqrt{\hat{g}}(R[\hat{g}] - \nabla^2(\gamma\varphi)). \quad (5.5)$$

Se supormos que  $R[g] = 0$ , encontramos a equação diferencial  $\gamma \nabla^2 \varphi = R[\hat{g}]$  que pode ser resolvida, implicando que, ao menos localmente, podemos escolher  $g_{ab} = \delta_{ab}$ . Faremos esta escolha daqui em diante.

Como vimos no capítulo 3, o tensor de energia-momento decorre da variação da ação, de modo que

$$\delta S = \alpha \int d^2\xi \sqrt{g} T^{ab} \delta g_{ab} \quad (5.6)$$

mas da eq. (5.4), vemos que  $\delta g_{ab} = (e^{\gamma\varphi} \delta_{ab}) \delta\varphi = g_{ab} \delta\varphi$ , de modo que pela substituição em (5.6), concluímos que  $T_a^a = 0$ , implicando que  $S[g, X^i]$  em 2d é conforme.

Em coordenadas complexas,

$$\delta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Então, a nulidade do traço de  $T_{ab}$  implica  $T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ . Por outro lado, a lei de conservação  $\partial_a T^{ab} = 0$  nos leva a:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} T_{zz} &= 0 \quad \therefore \quad T_{zz} = T(z) \quad \text{holomorfo} \\ \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} &= 0 \quad \therefore \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = T(\bar{z}) \quad \text{anti-holomorfo} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Voltando à eq. (5.2) e fixando a atenção em uma única topologia, ficamos com a função de partição

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}g \mathcal{D}X}{\text{Vol}(\text{Diff})} e^{-S_M - \mu_0 \int d^2\xi \sqrt{g}} \quad (5.9)$$

onde inserimos a constante cosmológica  $\mu_0$  para garantir a renormalização da teoria, e dividimos pelo “volume” do grupo de difeomorfismos, visto que estamos integrando sobre todas as geometrias, porém, para cada geometria temos várias métricas possíveis, todas elas relacionadas por difeomorfismos. Podemos tomar (5.3) como a ação para o bóson livre, com  $G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ .

As medidas de integração  $\mathcal{D}g$  e  $\mathcal{D}X$  são invariantes pelo grupo de difeomorfismos na superfície, mas não o são necessariamente por transformações conformes  $g_{ab} \rightarrow e^\varphi g_{ab}$ . Na verdade, por esta transformação verifica-se [31, 32] que

$$\mathcal{D}_{e^\varphi g} X = e^{\frac{D}{48\pi} S_L(\varphi)} \mathcal{D}_g X \quad (5.10)$$

onde  $S_L$  é a ação de Liouville, que surge na forma

$$S_L = \int d^2\xi \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \varphi \nabla_b \varphi + R\varphi + \mu e^\varphi \right). \quad (5.11)$$

A relação (5.10) pode ser encontrada diagramaticamente, mas é frequente a suposição de que o jacobiano  $J$  da transformação  $\mathcal{D}_{e^\varphi g} X = J(\varphi, \hat{g}) \mathcal{D}_g X$  tem a forma de um exponencial de uma ação de Liouville

$$S_L = \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} \left( \tilde{a} \hat{g}^{ab} \nabla_a \varphi \nabla_b \varphi + \tilde{b} \hat{R} \varphi + \mu e^{\tilde{c}\varphi} \right). \quad (5.12)$$

e as constantes  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  e  $\tilde{c}$  são fixadas por covariância e invariância conforme gerais. Desta forma, omitindo alguns passos, como a introdução dos fantasmas de Faddeev-Popov, que podem ser acompanhados em [31, 33], temos que a invariância por difeomorfismos implica que

$$\tilde{b} = \frac{25-D}{48\pi}, \quad \tilde{a} = \frac{1}{2} \tilde{b} \quad (5.13)$$

onde  $D$  é a dimensão do espaço-tempo. Então, em termos de um campo  $\varphi$  reescalado e omitindo o termo proporcional a  $e^{\tilde{c}\varphi}$ , a ação de Liouville fica na forma

$$S_L = \frac{1}{8\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} \left( \hat{g}^{ab} \nabla_a \varphi \nabla_b \varphi + Q \hat{R} \varphi \right) \quad (5.14)$$

onde

$$Q \equiv \sqrt{\frac{25-D}{3}}. \quad (5.15)$$

Resta fixar o coeficiente  $\tilde{c}$  em (5.12). Com esse fim, impomos que  $\int d^2\xi \sqrt{\hat{g}} e^{\gamma\varphi}$  seja invariante conforme, sendo suficiente que  $e^{\gamma\varphi}$ , onde acrescentamos o fator  $\gamma$  em virtude de termos reescalado o campo  $\varphi$ , tenha dimensão de escala igual a 1, implicando que a integral do termo  $e^{\gamma\varphi}$  retorne um campo com dimensão de escala nula. Por meio da eq. (4.58), temos as dimensões de escala dos operadores de vértice

$$\Delta(e^{\gamma\varphi}) = \bar{\Delta}(e^{\gamma\varphi}) = -\frac{1}{2}\gamma(\gamma - Q) = 1 \quad (5.16)$$

de onde temos que

$$Q = \frac{2}{\gamma} - \gamma \quad \therefore \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{25-D} - \sqrt{1-D}) = \frac{Q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{Q^2 - 8} \quad (5.17)$$

A partir destas simples expressões podemos obter alguma intuição sobre a dimensionalidade  $D$  do espaço-tempo. Ingenuamente, para uma corda imersa em um espaço plano euclidiano com  $D = 25$  dimensões, podemos interpretar  $X^0 = -i\varphi$  como uma coordenada livre, de sorte que o modo de Liouville  $\varphi$  funcione como a dimensão tipo tempo da teoria e, assim, seja implementada uma teoria de cordas em um espaço-tempo de Minkowski com 26 dimensões [31].

### 5.1.1 Teoria clássica do campo Liouville e o empacotamento de fios

A teoria clássica de Liouville foi extensivamente estudada no fim do século dezenove em conexão com o problema de uniformização de superfícies de Riemann e podemos descrevê-la como uma teoria de métricas  $g$  sobre uma superfície  $\Sigma$ , com o campo de Liouville  $\varphi$  definido como em (5.4). A forma padrão da ação de Liouville é

$$S_{Liouville} = \int d^2z \sqrt{\hat{g}} \left( \frac{1}{8\pi} (\hat{\nabla}\varphi)^2 + \frac{Q}{8\pi} \hat{R}\varphi + \frac{\mu}{8\pi\gamma^2} e^{\gamma\varphi} \right), \quad (5.18)$$

onde o campo  $\varphi$  é entendido como o fator conforme da métrica 2d

$$ds^2 = e^{\gamma\varphi} (d\tau^2 + d\sigma^2), \quad (5.19)$$

a interação implementada por  $\mu > 0$  tem valor geométrico, como veremos, e se fizermos a escolha particular

$$Q = 2/\gamma \quad (5.20)$$

temos que a ação (5.18) define uma CFT clássica, invariante por transformações de Weyl

$$\hat{g} \rightarrow e^{2\rho} \hat{g}, \quad \gamma\varphi \rightarrow \gamma\varphi - 2\rho, \quad (5.21)$$

onde estamos omitindo os índices da métrica fiduciária  $\hat{g}_{ab}$  e a translação em  $\varphi$  por efeito de uma transformação conforme diz que este campo pode ser visto como um bóson de Goldstone para a quebra da invariância de Weyl. Calculando a equação do movimento para  $\varphi$  a partir de  $S_L$ , obtemos

$$-2\hat{\nabla}^2\varphi + \frac{2}{\gamma}R[\hat{g}] + \frac{\mu}{\gamma}e^{\gamma\varphi} = 0 \quad (5.22)$$

e, fazendo uso da expressão (5.5), encontramos

$$R[g] = -\frac{1}{2}\mu \quad (5.23)$$

de modo que a equação do movimento clássica (5.22) descreve uma superfície com curvatura negativa constante e podemos verificar a função geométrica da  $\mu$ , que pode ser interpretada como (menos) a constante cosmológica. Restringindo a algum domínio na superfície, podemos tomar  $\hat{g}$  a métrica plana, de modo que (5.22) se reduz em coordenadas conjugadas à forma

$$-4\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi + \mu e^{\varphi} = 0 \quad (5.24)$$

que é a equação de Liouville e dá nome a toda a teoria. A solução clássica geral para  $\varphi$  pode ser expressa localmente como [34]

$$e^{\gamma\varphi} = -\frac{16}{\mu} \frac{\partial A(x^+) \partial B(x^-)}{[A(x^+) - B(x^-)]^2} \quad (5.25)$$

onde  $A$  e  $B$  são certas funções das coordenadas do cone de luz  $x^\pm = \tau \pm \sigma$ . Algumas soluções especiais para  $\mu > 0$  e dependência espacial incluem

$$\begin{aligned} e^{\gamma\varphi} &= \frac{4}{\mu} \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 \varepsilon \sigma} \\ &= \frac{4}{\mu} \frac{1}{\sigma^2} \\ &= \frac{4}{\mu} \frac{\varepsilon^2}{\sinh^2 \varepsilon \sigma}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde  $\varepsilon$  é um número real. Tendo a expressão para a métrica (5.19) em vista, vemos que as diferentes soluções acima indicam diferentes geometrias do espaço-tempo 2d.

O tensor de energia-momento para a ação de Liouville, calculado como  $T_{ab} = -2\pi\delta S/\delta g^{ab}$ , fica na forma

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}Q\partial^2\varphi \\ T(\bar{z}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\varphi)^2 + \frac{1}{2}Q\bar{\partial}^2\varphi \end{aligned} \quad (5.27)$$

com os demais componentes nulos, enquanto o componente  $T(z)$  se transforma de acordo com

$$T(z) \rightarrow \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T(w) + \frac{1}{\gamma^2} S\{w; z\}. \quad (5.28)$$

A forma do tensor de energia-momento para a ação de Liouville além de justificar a utilização da expressão (4.58) no cálculo das dimensões de escala (5.16), permite que vejamos o empacotamento de fios em analogia à gravitação em 2d. A equação de Einstein (eq. (A.4))

$$T_{ab} = \frac{1}{8\pi} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \quad (5.29)$$

quando comparada à eq. (5.1) (após alguma modificação)

$$-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2\gamma}\partial^2\varphi = \frac{\lambda}{4\gamma^2}(e^{\gamma\varphi} - e^{3\gamma\varphi}) \quad (5.30)$$

conduz a tal analogia, visto que temos na equação acima os termos do tensor de energia-momento de Liouville e, do lado direito, uma parte que faz o papel geométrico da equação de Einstein. Embora, a princípio, a parte geométrica desta equação possa ter uma forma genérica e, nesse caso, a “geometria diria a matéria como se mover”, no caso do empacotamento de fios surge (por construção) uma forma bastante familiar da teoria de Liouville: uma soma de operadores de vértice. Outra forma de interpretar a expressão acima seria entender a soma dos operadores de vértice como um tensor de energia-momento para certos campos de matéria. Isso justifica o requerimento de que as dimensões de escala dos operadores de vértice sejam iguais. Se estas dimensões fossem diferentes, teríamos as partes da equação acima se transformando de forma diferente por uma transformação conforme e, tendo em vista que mudanças de coordenadas são interpretadas fisicamente como escolha de observadores, a física nesse sistema seria diferente para diferentes observadores. Para evitar esse problema, impomos  $\Delta[V_1] = \Delta[V_3]$ .

### 5.1.2 Relação entre as gravitações de Liouville e de Einstein

Nessa seção, tentaremos mostrar que embora tenhamos encontrado uma relação entre o empacotamento de fios e gravitação de Liouville, essa semelhança se dá, de modo um pouco mais geral, com gravitação (einsteiniana) em 2d.

Uma classe de modelos gravitacionais em 2d é descrita por uma ação gravitacional dilaton, que em geral pode ser representada como

$$I \propto \int d^2x \sqrt{g} [\varphi R + U(\varphi)(\nabla\varphi)^2 - \lambda V(\varphi)]. \quad (5.31)$$

As funções  $U$  e  $V$  definem o modelo,  $\varphi$  é o campo dilaton (adimensional) e  $\lambda$  é um parâmetro dimensional. A ação de Liouville

$$I_L \propto \int d^2x \sqrt{|g|} (\varphi R - (\nabla\varphi)^2 - \lambda e^{-\varphi}) \quad (5.32)$$

modela claramente um caso específico de gravitação dilaton. É interessante notar que as gravitações de Liouville e einsteiniana (conforme introduzimos no apêndice A) estão relacionadas. Grumiller e Jackiw [35] mostraram que no limite de  $D = 2 + \varepsilon$  dimensões com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a gravitação de Einstein se reduz à gravitação de Liouville. Isto é, se escrevermos a ação de Einstein-Hilbert

$$I_D = -\frac{1}{\kappa_D} \int d^Dx \sqrt{|g^{(D)}|} R \quad (5.33)$$

em  $D = 2 + \varepsilon$  dimensões, onde  $\kappa_D = 16\pi G_D$  e  $G_D$  é a constante de Newton D-dimensional, então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{2+\varepsilon} = I_L. \quad (5.34)$$

Em linhas gerais, esse resultado é obtido através da constatação (ou do “ansatz”) de que em D dimensões o elemento de linha pode ser escrito com simetria esférica na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab} dx^a dx^b + \frac{1}{\lambda} \varphi^{2/(D-2)} d\Omega_{S_{D-2}}^2, \quad (5.35)$$

onde  $\{\mu, \nu\} = \{1, \dots, D\}$ ,  $\{a, b\} = \{1, 2\}$ ,  $d\Omega_{S_{D-2}}^2$  é o elemento de linha da  $(D-2)$ -esfera e  $\varphi$ , tal como  $g_{ab}$ , é função de  $x^a$  apenas. Parametrizando a dimensão como  $D = 2 + \varepsilon$ , por enquanto com  $\varepsilon$  finito, e inserindo o elemento de linha acima na ação (5.33), obtemos, após a integração sobre a parte angular, a ação de gravitação dilaton

$$I_{2gd}^\varepsilon = -\frac{1}{\kappa} \int d^2x \sqrt{|g|} \left( \varphi R - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\varphi} (\nabla\varphi)^2 - \lambda \varepsilon (1-\varepsilon) \varphi^{1-2/\varepsilon} \right) \quad (5.36)$$

onde  $\kappa \propto \kappa_{2+\varepsilon}$ . Em geral, para cada teoria definida pela ação (5.31), existe outra ação, que embora não seja equivalente à primeira, descreve a mesma família de geometrias 2d [36]. Dizemos que as duas ações são duais uma da outra. Para obter a ação dual, tomamos as definições

$$d\tilde{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{w(\varphi)}, \quad e^{\tilde{Q}(\tilde{\varphi})} d\tilde{\varphi} \equiv e^{Q(\varphi)}, \quad \tilde{w}(\tilde{\varphi}) \equiv 1/w(\varphi), \quad (5.37)$$

onde

$$Q'(\varphi) \equiv -U(\varphi), \quad w'(\varphi) \equiv e^{Q(\varphi)}V(\varphi) \quad (5.38)$$

com  $Q' = dQ/d\varphi$  e  $w$  estritamente positiva (ou negativa), para evitar singularidades. Diferenciando as equações acima e utilizando as expressões (5.37), encontramos os potenciais duais

$$\tilde{U}(\tilde{\varphi}) = w(\varphi)U(\varphi) - e^{Q(\varphi)}V(\varphi), \quad \tilde{V}(\tilde{\varphi}) = -\frac{V(\varphi)}{w^2(\varphi)} \quad (5.39)$$

que podem ser usados para definir uma ação  $\tilde{I}$  análoga à ação dilaton (5.31), porém, definida a partir de  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$ . A ação dilaton (5.31) tem como solução geral que pode ser apresentada (no gauge de Eddington-Finkelstein) como [37]

$$ds^2 = e^Q[2dudX + (\lambda w + M)du^2] \quad (5.40)$$

onde  $M$  é uma constante do movimento. Fatorando  $w$  na solução acima, obtendo

$$ds^2 = e^Q w [2du \frac{dX}{w} + (\frac{M}{w} + \lambda)du^2] \quad (5.41)$$

então, por meio das definições (5.37), encontramos

$$ds^2 = e^{\tilde{Q}}[2dud\tilde{X} + (M\tilde{w} + \lambda)du^2] \quad (5.42)$$

que é exatamente a solução que seria obtida a partir da ação dual  $\tilde{I}$ , embora, na formulação dual,  $\lambda$  e  $M$  apareçam com funções trocadas. Chamamos as relações (5.37), em conjunto com (5.39), de uma “dualidade”. Essa dualidade relaciona diferentes ações, mas deixa o espaço das soluções para a métrica invariante. Uma observação relevante é que se aplicarmos o processo de dualização duas vezes na mesma ação, encontramos o funcional original.

Seguindo [35], podemos nos livrar de algumas dificuldades para tomar o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  na ação (5.36). Por exemplo, qualquer tentativa de reescalar o termo cinético de (5.36) e torná-lo finito, implica em escalar o termo  $\varphi R$  a zero e uma forma de contornar esse problema é dualizar a ação (5.36), tomar o limite desejado e então dualizar novamente. De fato, esse processo conduz à ação (dual)

$$\tilde{I}_{2gd}^{\varepsilon} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}} \int d^2x \sqrt{g} (\tilde{\varphi} R - 2a(1 - \varepsilon)\tilde{\varphi}^{-\varepsilon}) \quad (5.43)$$

onde  $a$  é uma constante do movimento análoga a  $M$  usada anteriormente. O limite da ação acima pode ser tomado diretamente na forma

$$\tilde{I}_C \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{I}_{2gd}^{\varepsilon} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}} \int d^2x \sqrt{g} (\tilde{\varphi} R - 2a) \quad (5.44)$$

onde a ação  $\tilde{I}_C$  coincide com a parte geométrica da ação CGHS (Callan-Giddings-Harvey-Strominger), importante no estudo de evaporação de buracos negros. Dualizando  $\tilde{I}_C$  de volta, ficamos com

$$I_L = -\frac{1}{\hat{\kappa}} \int d^2x \sqrt{|g|} (\varphi R - (\nabla\varphi)^2 - \lambda e^{-\varphi}) \quad (5.45)$$

e concluímos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{2+\varepsilon} = I_L. \quad (5.46)$$

como pretendíamos mostrar. Outras pessoas ([34], por exemplo) indicaram, por outros caminhos, a relação entre as gravitações de Einstein e de Liouville, de modo que quando mostramos que o problema de empacotamento de fios possui uma analogia com gravitação de Liouville, referimo-nos apenas à forma como a analogia surge e não ao conteúdo da mesma. Podemos dizer que o empacotamento de fios está relacionado à gravitação em 2d.

## 5.2 Considerações sobre o contorno

Em física, as condições de contorno são importantíssimas na determinação de soluções únicas para problemas cuja dinâmica é descrita por meio de equações diferenciais. Restringindo a solução mais geral de algum modo, o contorno tem o efeito de um vínculo nos modelos matemáticos.

No nosso modelo, o mapeamento definido por  $z(w)$  mantém o contorno de  $D$  fixo. Para implementar este vínculo, com a intenção de encontrar uma ação que o descreva, definimos a função

$$\psi(w) = -i \log z(w), \quad (5.47)$$

a qual é real sobre o círculo unitário. Notamos a partir da equação acima que  $z(w) = e^{i\psi(w)}$ , implicando em  $\bar{z} = e^{-i\psi}$ . Então, usando a definição  $S(z) = \bar{z}$  para a função de Schwarz de uma curva  $z(w)$  (estudada na seção 4.4), escrevemos

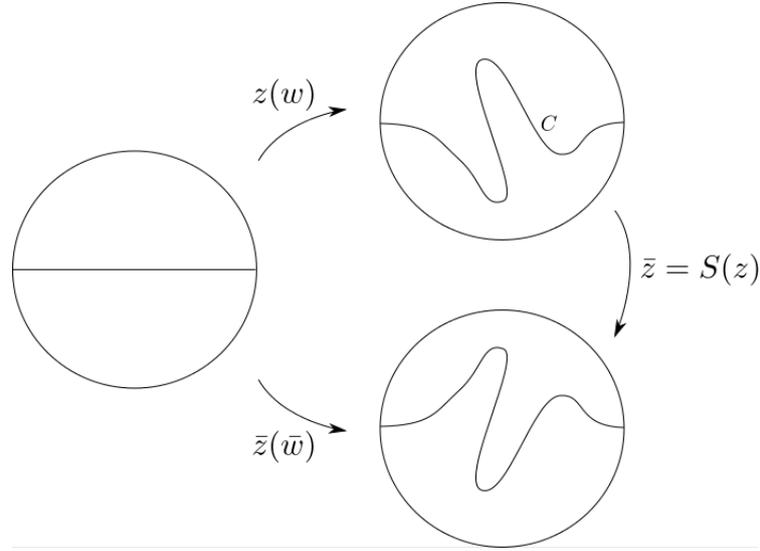
$$S(z(w)) = \bar{z} = e^{-i\psi(w)}. \quad (5.48)$$

A função de Schwarz age na configuração, e particularmente no contorno, como ilustra a figura 5.1. Definimos a função  $\varphi(w)$ , que será importante no que se segue, como

$$\varphi(w) = -i \log \partial S(w). \quad (5.49)$$

Na tentativa de relacionar  $\varphi(w)$  com  $\psi(w)$ , calculamos

$$\partial S = -i e^{-i\psi(w)} \partial \psi = e^{-i\psi(w) - \frac{\pi}{2}i} \quad (5.50)$$



**Figura 5.1** Representação ilustrativa da função de Schwarz.

de onde temos que

$$\log \partial S = -i\psi(w) - \frac{\pi}{2}i + \log \partial \psi \quad (5.51)$$

e finalmente

$$\varphi(w) = \psi(w) + \frac{\pi}{2} - i \log \partial \psi \quad (5.52)$$

Definimos também, convenientemente, as funções (harmônicas conjugadas)

$$u = \frac{\varphi(w) + \overline{\varphi(\bar{w})}}{2} \quad \text{e} \quad v = \frac{\varphi(w) - \overline{\varphi(\bar{w})}}{2i} \quad (5.53)$$

Notando que  $w = 1/\bar{w}$ , implicando em  $\frac{\partial w}{\partial \bar{w}} = -\frac{1}{\bar{w}^2} = (iw)^2$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} i \log \overline{\partial \psi} &= i \log \frac{\partial w}{\partial \bar{w}} \partial \psi \\ &= i \log [(iw)^2 \partial \psi] \end{aligned}$$

Então, utilizando esta última expressão e a definição de  $\varphi$  (5.52), reescrevemos  $u$  em termos de  $w$  e  $\psi$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} [2\psi - i \log \partial \psi + \pi + i \log [(iw)^2 \partial \psi]] \\ &= \psi + i \log w. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Semelhantemente, reescrevemos  $v$  em função de  $w$ :

$$v = -\log(iw \partial \psi). \quad (5.55)$$

Por meio da derivada tangente, podemos relacionar  $u$  e  $v$ . Seguindo as regras de derivação, a derivada tangente pode ser escrita como

$$\partial_t \equiv \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \quad (5.56)$$

por outro lado, sendo  $\bar{w} = S(w) = 1/w$  (no plano  $w$ ), temos que o  $dt = \sqrt{d\bar{w}dw} = \sqrt{S'}dw$ , implicando em

$$\frac{dw}{dt} = (\sqrt{S'(w)})^{-1} = \left[ -\sqrt{\frac{1}{w^2}} \right]^{-1} = -iw. \quad (5.57)$$

Então, aplicando a eq. (5.56), tendo em vista que  $u$  é uma função analítica de  $w$  e que, por isso,  $\partial u / \partial \bar{w} = 0$ , encontramos

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} u \\ &= -iw \partial \psi + 1 = -e^{-v} + 1 \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde na segunda linha usamos as relações (5.54) e (5.55). Pelo fato de as funções  $u$  e  $v$  serem harmônicas por construção, a equação de Cauchy-Riemann nos diz que

$$\frac{d}{dt} u = -\frac{d}{dn} v \quad (5.59)$$

onde  $d/dt$  e  $d/dn$  representam as derivadas tangente e normal, respectivamente. As duas expressões anteriores nos dizem que

$$e^{-v} - \partial_n v - 1 = 0 \quad (5.60)$$

e, se usarmos as fórmulas para integrais sobre funções vetoriais e que o laplaciano de uma função harmônica é sempre nulo, vemos que o vínculo acima, para a função  $v(w, \bar{w})$ , pode ser expresso como uma ação

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi} \int_D d^2z \partial v \bar{\partial} v + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial D} dl (vK + e^{-v}) \quad (5.61)$$

a qual nos devolve a eq. (5.60) quando é extremizada e consideramos a curvatura denotada por  $K$  igual a 1. a ação  $\mathcal{J}$  está diretamente relacionada à gravitação de Liouville. Na teoria de Liouville, se considerarmos  $g_{ab} = \delta_{ab}$  de sorte que  $R = 0$ , podemos escrever a ação para uma região simplesmente conexa  $\Gamma$  com fronteira  $\partial\Gamma$ , na forma [38, 39]

$$A_{bound} = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{4\pi} (\partial_a \varphi)^2 + \mu e^{2b\varphi} \right) d^2x + \int_{\partial\Gamma} \left( \frac{Qk}{2\pi} \varphi + \mu_B e^{b\varphi} \right) dl \quad (5.62)$$

onde  $k$  representa a curvatura da fronteira. As demais constantes  $Q$ ,  $\mu$ ,  $\mu_B$  e  $b$  podem ser escolhidas de modo a haver correspondência entre as ações  $A_{bound}$  e  $\mathcal{J}$ .

Como vimos (confira a equação 2.10), a ação livre  $\mathcal{F}$  para o fio na cavidade, sujeito apenas ao vínculo de ter as extremidades fixas e cuja energia total se resume a energia elástica de entortamento, pode ser expressa na forma

$$\mathcal{F} = \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 dt \sqrt{\dot{z}\dot{\bar{z}}} k^2 + \mu \int_{-1}^1 dt \sqrt{\dot{z}\dot{\bar{z}}}. \quad (5.63)$$

Vamos escrever a equação acima em função de  $u$  e  $v$ . Para isso, notamos, a partir das equações (5.54) e (5.47), que

$$u = -i \log z(w) + i \log w = i \log \left[ \frac{w}{z(w)} \right] \quad (5.64)$$

de onde segue que  $w/z = e^{-iu(w)}$ . Por outro lado, da equação (5.55), temos a relação  $e^{-v} = iw \partial \psi$ , implicando que

$$e^{-v} = iw \frac{\partial}{\partial w} [-\log z(w)] = \dot{z} \frac{w}{z} = \dot{z} e^{-iu}. \quad (5.65)$$

Logo, encontramos a relação

$$\dot{z} = e^{-v+ui}. \quad (5.66)$$

Conforme a equação (2.3), sabemos que a curvatura  $k$  é calculada como

$$k = \left| \frac{dT}{dl} \right| = \left| \frac{dw}{dl} \frac{dT}{dw} \right| \quad (5.67)$$

onde versor  $T$  tangente a curva  $C$  é representado por

$$T = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{z}(w)\dot{\bar{z}}(w)}} \quad (5.68)$$

e, da equação (2.2), escrevemos o elemento de linha sobre a curva como  $dl = \sqrt{\dot{z}(w)\dot{\bar{z}}(w)} dw$ , levando-nos à expressão para a curvatura

$$k = \left| \frac{1}{\sqrt{\dot{z}\dot{\bar{z}}}} \frac{d}{dw} \left( \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{z}(w)\dot{\bar{z}}(w)}} \right) \right| \quad (5.69)$$

Então, com a intenção de encontrar  $k$  em função de  $u$  e  $v$ , utilizamos a equação (5.66), deduzindo a expressão

$$\sqrt{\dot{z}\dot{\bar{z}}} = e^{-v}, \quad (5.70)$$

com a qual reescrevemos a curvatura na forma

$$k = \left| \frac{1}{e^{-v}} \frac{d}{dw} \frac{e^{-v+ui}}{e^{-v}} \right| = \left| \frac{1}{e^{-v}} e^{iu} i\dot{u} \right| = \dot{u} e^v \quad (5.71)$$

Portanto, se usarmos as duas últimas relações, a ação  $\mathcal{F}$  pode ser escrita como

$$\mathcal{F} = \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 dt (\dot{u})^2 e^v + \mu \int_{-1}^1 dt e^{-v}. \quad (5.72)$$

Como vemos, em comparação com a eq. (A.10),  $\mathcal{F}$  possui a forma exata de uma ação  $S'_{pp}$  para uma partícula livre em um espaço-tempo com  $(0+1)$  dimensões. Por isso, a ação  $\mathcal{F} + \mathcal{J}$  pode ser interpretada como a (descrição da) interação de uma partícula pontual com gravitação em 2d.

### 5.3 Comentários

Gravitação em 2d serve como um modelo de brinquedo para gravitação quântica e sua interação com matéria, por exemplo, no contexto de teoria de cordas com espaço alvo exibindo  $d \leq 2$  dimensões [31] e na evaporação de buracos negros, além de ilustrar uma variedade de aspectos de inflação cosmológica [34].

Nosso trabalho buscou relacionar o empacotamento de fios à gravitação em 2d e, heurísticamente, essa associação dos dois fenômenos se deu porque no modelo para o empacotamento, se não há interseção da curva que descreve a conformação do fio com ela mesma, podemos escolher um sistema de coordenadas  $\{x, y\}$  em  $D$ , no qual a curva possui uma das coordenadas fixa. Antes de o processo de injeção iniciar-se, fica claro que isso é possível. Se pensarmos em termos de linha-mundo de uma partícula, podemos escolher a coordenada  $y = 0$ , fixa, e teremos a trajetória de uma partícula em repouso no espaço-tempo plano, com a coordenada  $x$  fazendo o papel do tempo neste sistema. Após enxertar o fio, podemos manter o nosso sistema de coordenadas com  $y$  fixo e, fisicamente, interpretar a curva como a linha-mundo de uma partícula em repouso, desta vez, em um *espaço-tempo curvo*! Dizemos que há um acoplamento da partícula com gravitação, o qual pode ser descrito por  $\mathcal{F} + \mathcal{J}$ .

Matematicamente, o acoplamento de uma CFT livre com a curvatura do espaço base, pela adição do termo  $\sqrt{g}\varphi R$ , gera o termo de aperfeiçoamento  $Q\partial^2\varphi$  do tensor de energia momento de Liouville que também surge na descrição matemática do empacotamento. Por causa do termo adicionado, o sistema perde a invariância por translações em  $\varphi$ , e a variação é proporcional ao termo de Gauss-Bonnet (e à ação de Einstein-Hilbert em 2d)  $\int d^2x \sqrt{g} R = 4\pi\chi$  que, embora seja fixo para uma dada topologia (porque  $\chi$  denota a característica de Euler, um invariante topológico), acrescenta uma contribuição não trivial ao tensor de energia-momento.

Na seção 3.4.4 definimos o tensor de energia momento como

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^d x T^{ab} \delta g_{ab}, \quad (5.73)$$

onde a variação  $\delta g_{ab}$  é tomada sobre uma métrica arbitrária, mas, no caso em que estamos interessados, uma vez que esse termo esteja isolado, tomamos  $g_{ab}$  como a métrica para o espaço plano. Vamos calcular a variação do termo  $\sqrt{g}\phi R$ . Para isso, precisamos das variações

$$\delta\sqrt{g} = (1/2)\sqrt{g}g^{ab}\delta g_{ab}, \quad \delta g^{ab} = -g^{ac}g^{bd}\delta g_{cd} \quad (5.74)$$

além da variação da curvatura escalar

$$\delta R = \delta g^{ab}R_{ab} + g^{ab}\delta R_{ab} \quad (5.75)$$

onde o primeiro termo é nulo em um espaço plano, assim como os símbolos de Christoffel, de modo que

$$\delta R = \partial_a \left\{ g^{bc}\Gamma_{bc}^a - g^{ba}\Gamma_{bc}^c \right\}. \quad (5.76)$$

Chamaremos o vetor entre chaves acima de  $w^a$ . Então, usando as propriedades dos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{bc}^c = \partial_b(\ln\sqrt{g}), \quad g^{bc}\Gamma_{bc}^a = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_d(g^{ad}\sqrt{g}) \quad (5.77)$$

e que os termos envolvendo  $R$  (que não apareça derivado) se anulam, vemos que a variação da ação é

$$\begin{aligned} \delta S_1 &\propto \int d^2x \sqrt{g} \phi g^{ab} \delta R_{ab} \\ &= - \int d^2x \sqrt{g} \partial_a \phi w^a \\ &= \int d^2x \sqrt{g} \partial_a \phi \delta \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_d (g^{ad} \sqrt{g}) + g^{da} \partial_d (\ln \sqrt{g}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

onde integramos por partes algumas vezes. Finalmente, integrando por partes mais uma vez e se livrando dos termos nulos, ficamos com

$$\delta S_1 \propto \int d^2x \partial_a \partial_b \phi \left( \delta^{ac} \delta^{bd} - \frac{1}{2} \delta^{ab} \delta^{cd} \right) \delta g_{cd} \quad (5.79)$$

e a contribuição de  $S_1$  à componente  $T(z) = T_{zz}$  do tensor de energia-momento, no espaço plano em coordenadas complexas, é proporcional a  $\partial^2 \phi$  como queríamos mostrar. Em outras palavras, sempre que o tensor de energia-momento (ou, especificamente, a componente  $T_{zz}$ ) de uma teoria, a princípio, conforme, apresentar o termo de aperfeiçoamento, isso significa que pode haver uma relação entre esse sistema e gravitação.

## Conclusão e Perspectivas

As ferramentas de teoria do campo conforme são de grande utilidade na descrição de fenômenos críticos. A elegância em considerar as simetrias dos sistemas que apresentam criticalidade e o poder preditivo desta teoria ofereceram, desde seus primeiros momentos, um formalismo valioso à física.

Uma vez que o empacotamento de fios apresenta um comportamento crítico, indicado pelo surgimento da configuração de empacotamento-rígido no decorrer do processo de injeção do fio, aplicamos à modelagem do problema as ferramentas de CFT, de sorte que alguns expoentes críticos do modelo foram calculados e comparados, com sucesso, aos resultados advindos de experimentos e simulações computacionais. Entretanto, como alertamos ao fim do capítulo 4, o contorno das placas não foi extensivamente levado em conta. No último capítulo, fizemos algumas considerações sobre a fronteira da região que define a cavidade entre as placas, que conduziram a uma relação entre o empacotamento de fios e a gravitação de Liouville (eq. (4)). Porém, a existência e a forma do contorno poderiam, *a priori*, influenciar o cálculo dos expoentes e só poderíamos atestar, categoricamente, a indepência dos resultados com a forma do contorno se escolhêssemos um campo  $\varphi$  cujas funções de correlação atendessem a certas condições na fronteira [38, 40, 41, 42]. De fato, nosso modelo, da forma como está construído, é aplicável a qualquer formato de cavidade bidimensional, desde que a distância entre as aberturas para inserção do fio seja fixa.

Implementar um modelo que trate da influência do contorno ao empacotamento de fios é uma perspectiva de continuação para este trabalho. Acreditamos que, seguindo esse caminho, uma relação entre o comprimento crítico  $L_c$  e a distância entre as aberturas por onde o fio é introduzido nas placas será estabelecida.

Outra perspectiva seria a investigação da evolução *temporal* da conformação do fio durante sua inserção, descrevendo esse fenômeno como um processo estocástico. Seria interessante, também, com a intenção de acrescentar mais realidade ao modelo, verificar a influência de pontos fixos (pinos rígidos [43]) no interior da cavidade, o que acarretaria uma análise envolvendo topologias menos simples que aquela tratada neste trabalho.

A utilização de técnicas de campo conforme conduziram à analogia apresentada no capítulo

passado. A aplicação das mesmas ferramentas pode conduzir a novas relações entre gravidade e outros sistemas físicos de modo que algum aspecto de gravitação, a partir dessas analogias, possa, eventualmente, ser melhor compreendido.

## Referências Bibliográficas

- [1] C. C. Donato, M. A. F. Gomes, and R. E. de Souza, “Crumpled wires in two dimensions,” *Phys. Rev. E*, vol. 66, 2002.
- [2] N. Stoop, F. K. Wittel, and H. J. Herrmann, “Morphological Phases of Crumpled Wire,” *Physical Review Letters*, 2008.
- [3] C. C. Donato, M. A. F. Gomes, and R. E. de Souza, “Scaling properties in the packing of crumpled wires,” *Phys. Rev. E*, vol. 67, 2003.
- [4] M. A. F. Gomes, “Fractal geometry in crumpled paper balls,” *American Journal of Physics*, vol. 55, no. 7, pp. 649–650, 1987.
- [5] M. Marder, R. D. Deegan, and E. Sharon, “Crumpling, buckling, and cracking: Elasticity of thin sheets,” *Physics Today*, vol. Vol. 60, no. No. 2. (20070201), 2007.
- [6] E. Katzav, M. Adda-Bedia, and A. Boudaoud, “A statistical approach to close packing of elastic rods and to dna packaging in viral capsids,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2006.
- [7] B. Carneiro da Cunha, “Crumpled wires and Liouville field theory,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 88, p. 31001, Nov. 2009.
- [8] T. de Araujo Sobral Silva, “Propriedades físicas do empacotamento de fio polimérico em cavidades quase bidimensionais,” Master’s thesis, Universidade Federal de Pernambuco, July 2010.
- [9] R. E. Greene and S. G. K. and, *Function Theory of One Complex Variable*. American Mathematical Society, 3rd edition ed., Mar. 2006.
- [10] C. J. Efthimiou and D. A. Spector, “A Collection of Exercises in Two-Dimensional Physics, Part 1,” *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, 2000.
- [11] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Pearson, 1976.

- [12] L. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*. Pergamon Press LTD., 1959.
- [13] J. Marion and S. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Learning, fifth edition ed., 2004.
- [14] H. Goldstein, C. P. P. Jr., and J. L. S. and, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2001.
- [15] M. Abramowitz and I. A. S. and, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publication, 1965.
- [16] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [17] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [18] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2010.
- [19] P. D. Francesco, P. Mathieu, and D. Senéchal, *Conformal Field Theory*. Springer-Verlag, 1996.
- [20] A. Polyakov, “Conformal symmetry of critical fluctuations,” *JETP Letters*, 1970.
- [21] G. Mussardo, *Statistical Field Theory: An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*. Oxford University Press, 2009.
- [22] S. Hassani, *Mathematical Physics*. Springer, 1999.
- [23] J. Brown and R. Churchill, *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, 2008.
- [24] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [25] P. H. Ginsparg, “APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY,” 1988.
- [26] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory*. Springer, 2009.
- [27] S. V. Ketov, *Conformal Field Theory*. World Scientific Publishing Co., 1995.
- [28] J. Polchinski, *String Theory, Vol 1*. Cambridge University Press, 2005.
- [29] D. Pappadopulo, S. Rychkov, J. Espin, and R. Rattazzi, “Operator product expansion convergence in conformal field theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 86, p. 105043, 2012.

- [30] P. J. Davis, *The Schwarz Function and Its Applications*. Mathematical Association of America, 1974.
- [31] P. Ginsparg and G. Moore, “Lectures on 2D gravity and 2D string theory (TASI 1992),” *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, 1993.
- [32] N. Seiberg, “Notes on Quantum Liouville Theory and Quantum Gravity,” *Progress of Theoretical Physics Supplement*, vol. 102, pp. 319–349, 1990.
- [33] M. Kaku, *Strings, Conformal Fields, and Topology: An Introduction*. Springer-Verlag, 1991.
- [34] B. C. Da Cunha and E. J. Martinec, “Closed string tachyon condensation and world sheet inflation,” *Phys.Rev.*, vol. D68, p. 063502, 2003.
- [35] D. Grumiller and R. Jackiw, “Liouville gravity from Einstein gravity,” 2007.
- [36] D. Grumiller and R. Jackiw, “Duality in 2-dimensional dilaton gravity,” *Phys.Lett.*, vol. B642, pp. 530–534, 2006.
- [37] D. Grumiller, W. Kummer, and D. Vassilevich, “Dilaton gravity in two-dimensions,” *Phys.Rept.*, vol. 369, pp. 327–430, 2002.
- [38] I. K. Kostov, B. Ponsot, and D. Serban, “Boundary Liouville theory and 2D quantum gravity,” *Nuclear Physics B*, 2004.
- [39] A. Zamolodchikov and A. Zamolodchikov, “Lectures on liouville theory and matrix models.” <http://qft.itp.ac.ru/ZZ.pdf>.
- [40] V. Fateev, A. Zamolodchikov, and A. Zamolodchikov, “Boundary Liouville Field Theory I. Boundary State and Boundary Two-point Function,” *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, 2000.
- [41] J. Cardy, “Boundary Conformal Field Theory,” *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, 2004.
- [42] Y. Nakayama, “Liouville field theory: A Decade after the revolution,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A19, pp. 2771–2930, 2004.
- [43] M. A. F. Gomes, V. P. Brito, M. S. Araújo, and C. C. Donato, “Crumpled states of a wire in a two-dimensional cavity with pins,” *Phys. Rev. E*, vol. 81, p. 031127, Mar 2010.

- [44] A. M. POLYAKOV, “Quantum gravity in two dimensions,” *Modern Physics Letters A*, vol. 02, no. 11, pp. 893–898, 1987.
- [45] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [46] C. C. Donato, F. A. Oliveira, and M. A. F. Gomes, “Anomalous diffusion on crumpled wires in two dimensions,” *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 2006.
- [47] H. Weyl, *Symmetry*. Princeton University Press, 1983.
- [48] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. N. and, *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*. Oxford University Press, 1992.
- [49] J. J. Sakurai and J. J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2010.
- [50] C. Carathéodory, *Conformal Representation*. Dover Publications, 1998.
- [51] H. Cohn, *Conformal Mapping on Riemann Surfaces*. Dover Publications, 1980.
- [52] D. J. Amit, *Field Theory; The Renormalization Group and Critical Phenomena*. World Scientific Publishing, 1984.
- [53] R. Blumenhagen, D. Lüst, and S. Theisen, *Basic Concepts of String Theory*. Springer, 2013.
- [54] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [55] M. Henkel, *Conformal Invariance and Critical Phenomena*. Springer, 2010.
- [56] V. Fateev, A. Zamolodchikov, and A. Zamolodchikov, “Boundary Liouville Field Theory I. Boundary State and Boundary Two-point Function,” *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, 2000.
- [57] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis, 2003.
- [58] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 2003.
- [59] B. Schutz, *Geometric Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1980.

- [60] Y. C. Lin, Y. W. Lin, and T. M. Hong, “Crumpling wires in two dimensions,” *PHYSICAL REVIEW E*, vol. Vol. 78, no. 067101, 2008.
- [61] E. Bayart, S. Deboeuf, F. Corson, A. Boudaoud, and M. Adda-Bedia, “Measuring order in the isotropic packing of elastic rods,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 95, p. 34002, Aug. 2011.
- [62] H. E. Stanley, “Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena,” *Reviews of Modern Physics*, 1999.
- [63] P. C. W. Davies, “Quantum vacuum stress without regularization in two-dimensional space-time,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1977.
- [64] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. Cambridge University Press, 1989.
- [65] J. Distler and H. Kawai, “Conformal field theory and 2d quantum gravity,” *Nuclear Physics B*, vol. 321, no. 2, pp. 509 – 527, 1989.
- [66] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 241, pp. 333–380, 1984.
- [67] C. C. Donato and M. A. F. Gomes, “Condensation of elastic energy in two-dimensional packing of wires,” *Phys. Rev. E*, vol. 75, 2007.
- [68] D. J. Amit and Y. V. and, *Statistical Physics: An Introductory Course*. Publisher: World Scientific Pub Co Inc, Dec. 1999.
- [69] I. G. Avramidi, “Analytic and geometric methods for heat kernel applications in finance.” <http://infohost.nmt.edu/iavramid/notes/hkt/hktutorial13.pdf>, 2007.
- [70] A. Polyakov, “Quantum geometry of bosonic strings,” *Physics Letters B*, vol. 103, no. 3, pp. 207 – 210, 1981.

## APÊNDICE A

# Sistemas gravitacionais

O desenvolvimento da relatividade especial trouxe o entendimento de que a descrição dos fenômenos físicos precisa ser invariante por transformações de Lorentz. Esta transformação implica na conservação do tensor de energia-momento  $T_{ab}$ , o qual, em relatividade geral, descreve a distribuição de matéria no universo.

Partindo de princípios físicos e de algum entendimento de geometria riemanniana, Einstein, por meio de argumentação heurística, relacionou a energia com a geometria do espaço-tempo. Em 1915, ele publicou a relação [45]

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} R_{ab}. \quad (\text{A.1})$$

onde o tensor de Ricci  $R_{ac}$  é a contração<sup>1</sup> nos índices “b” e “d” do tensor de curvatura de Riemann  $R_{abc}{}^d$ , o qual descreve propriedades geoméricas do espaço-tempo e é calculado na forma

$$R_{abc}{}^d = \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_a \Gamma_{bc}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ea}^d \quad (\text{A.2})$$

onde os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{bc}^a$  são calculados a partir da métrica como

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (-\partial_d g_{bc} + \partial_k g_{bd} + \partial_b g_{dc}) \quad (\text{A.3})$$

Porém, verificando que a energia e o momento se conservam na forma  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , e que  $\nabla^a R_{ab}$  em geral não se anula, ficou claro que a eq. (A.1) precisava ser corrigida. E assim o foi, na forma

$$T_{ab} = \frac{1}{8\pi} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \quad (\text{A.4})$$

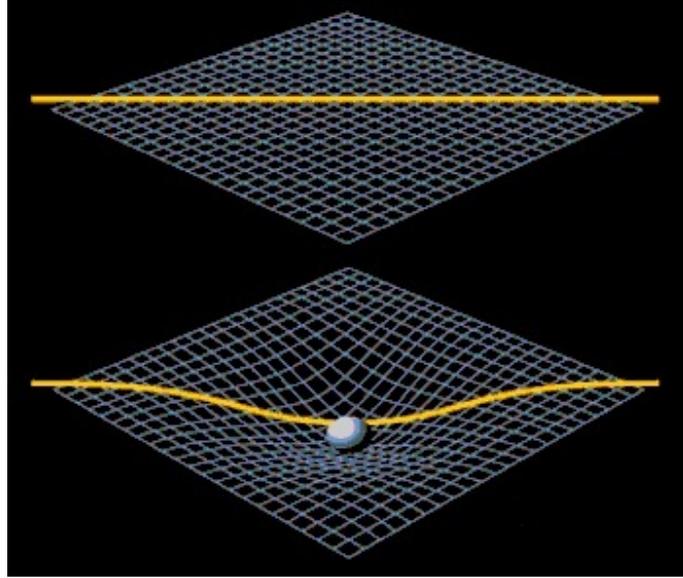
onde  $R = g^{ab} R_{ab}$  é escalar de curvatura e  $g_{ab}$  é a métrica, e em um espaço-tempo plano

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (\text{A.5})$$

A eq. (A.4) recebe o nome de Equação de Einstein e é central na teoria da relatividade geral, com ela vemos a forma como a energia se relaciona com a geometria do espaço-tempo (figura A.1).

---

<sup>1</sup>contração é o mesmo que soma nos índices repetidos; Neste trabalho, sempre que aparecerem índices iguais juntos, assumiremos que eles estão contraídos.



**Figura A.1** Representação ilustrativa do espaço-tempo. Acima: na ausência de matéria; abaixo: na presença de matéria. Um observador comóvel, isto é, em queda-livre, percorre uma geodésica que, na presença de energia, deixa de ser uma reta e passa a ser uma trajetória curva. “Matéria diz ao espaço como se curvar, e o espaço diz a matéria como se mover”.

Vamos construir uma ação para a relatividade geral. Nossa variável dinâmica é a métrica, visto que dada uma configuração de matéria no espaço-tempo, resolvemos a equação de Einstein a procura de  $g_{ab}$ . Para que a ação seja invariante por transformações de Lorentz, é suficiente que a densidade de lagrangeana escolhida seja um escalar de Lorentz. Como localmente em uma variedade diferenciável a métrica pode assumir sua forma canônica e suas primeiras derivadas se anularem, qualquer escalar não trivial deve envolver pelo menos derivadas de segunda ordem de  $g_{ab}$ . O tensor de Riemann possui derivadas segundas da métrica, e a partir dele podemos construir escalares. A opção mais simples é a curvatura escalar  $R$ . Hilbert e, pouco tempo depois, Einstein perceberam este fato e propuseram a ação

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^n x \quad (\text{A.6})$$

cuja variação leva diretamente à identidade [54]

$$\delta S_H = \int d^n x \sqrt{-g} \left[ R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right] \delta g^{ab} \quad (\text{A.7})$$

Uma vantagem da abordagem em termos de ação clássica se manifesta pelo fato de a primeira e mais simples tentativa geralmente conduzir a resposta correta, em contraste com o método de tentativas e erros usual. Isso é um reflexo de duas características da lagrangeana:

ela é um escalar, em vez de um tensor arbitrário; podemos impor as simetrias do sistema à lagrangeana de modo bastante direto.

A dinâmica de partículas em um espaço-tempo curvo D-dimensional pode ser formulado como um problema variacional. Como, classicamente, o movimento de uma partícula pontual se dá ao longo de uma geodésica, a ação deve ser proporcional ao comprimento (invariante) da trajetória da partícula

$$S_{pp} = -m \int ds, \quad \text{onde} \quad ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (\text{A.8})$$

onde  $m$  é a massa da partícula e a trajetória  $x^a(\tau)$ , com  $\tau$  designando o tempo próprio, é chamada de linha-mundo. Também podemos escrever a ação para a partícula pontual  $S_{pp}$  como

$$S_{pp} = -m \int d\tau (\dot{x}^a \dot{x}_a)^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

porém, visto que temos problemas para definir a ação para uma partícula sem massa usando  $S_{pp}$ , podemos definir outra ação

$$S'_{pp} = \frac{1}{2} \int d\tau (\eta^{-1} \dot{x}^a \dot{x}_a - \eta m^2) \quad (\text{A.10})$$

onde a equação do movimento para a função auxiliar  $\eta$  pode ser usada na equação acima para nos levar de volta a  $S_{pp}$ , de modo que ambas as ações descrevem a mesma física. Entretanto, ao contrário de  $S_{pp}$ , a ação  $S'_{pp}$  pode ser empregada para partículas sem massa [28].

## Sistemas críticos

Encontramos o paradigma das transições de fase contínuas quando analisamos, em diferentes temperaturas, o comportamento magnético dos materiais ferromagnéticos, os quais, em condições normais de temperatura, mesmo na ausência de um campo magnético externo  $H$ , tendem a permanecer magnetizados, porém, em temperaturas acima de uma certa temperatura crítica  $T_c$ , tornam-se paramagnéticos, sem a possibilidade de, na ausência de  $H$ , estarem magnetizados. Conforme aquecemos um ferromagneto, se assumirmos  $H = 0$ , a magnetização  $M$  do material diminui e uma vez que a temperatura atinja  $T_c$ ,  $M$  cai rapidamente para zero. Neste ponto,  $M(T)$  se aproxima de zero com inclinação infinita, ocorrendo uma transição de fase no material para um estado sem magnetização; com a variação da temperatura passando por  $T_c$ , o material, a princípio, totalmente magnetizado, passa drásticamente e continuamente a um estado absolutamente desmagnetizado. Este comportamento singular exemplifica um *fenômeno crítico*.

### B.1 Funções de correlação e expoentes críticos

Muito do conhecimento sobre transições de fase contínuas foi obtido através de experimentos nos quais partículas são espalhadas por sistemas próximos à criticalidade. Em gases, por exemplo, quando o sistema está perto de um ponto crítico, flutuações de pressão podem gerar o fenômeno conhecido como opalescência crítica: em comparação com seu estado longe da criticalidade, o gás passa a espalhar fótons de modo drasticamente diferente, tendo, neste regime, a aparência de uma neblina. Quantitativamente, ao desenvolver um modelo para o espalhamento de neutrons por uma rede de spins, é possível mostrar (como no apêndice A de [48]) que a função de correlação (de dois pontos)  $G^{(2)}$  surge naturalmente como

$$G^{(2)}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \equiv \langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle \quad (\text{B.1})$$

onde  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  são vetores que indicam a posição dos sítios na rede, e o símbolo  $\langle \cdot \rangle$  representa a média na temperatura. De um modo mais geral, dado um sistema cujos microestados sejam especificados pelos valores de  $N$  variáveis  $s_1, \dots, s_N$ , as quais chamamos por conveniência de spins, a função de correlação de  $n$  pontos se escreve como  $G^{(n)}(i_1, \dots, i_n) = \langle s_{i_1}, \dots, s_{i_n} \rangle$ .

Mas o que a função de correlação nos diz sobre o sistema? Se não há interação entre os spins, então  $G^{(2)}$  pode ser escrita como  $G^{(2)} = \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle$ , pela independência dos spins, sem nos dar informação que não seja obtida pelo estudo dos spins individualmente. Por outro lado, se há interação entre os spins, a função de correlação nos diz a medida da “correlação” entre as partes do sistema. Entretanto, através da função de correlação definida acima não temos a melhor forma de descrever o comportamento dos sistemas, porque, por exemplo, para um material ferromagnético na presença de campo magnético, visto que ambos os spins vão estar alinhados,  $G^{(n)}(i, j) = \langle s_i s_j \rangle$  vai assumir um valor maior que zero, indicando que  $s_i$  e  $s_j$  se relacionam, mesmo que eles não interajam entre si por estarem muito separados.

É interessante saber como as partes do sistema estão correlacionadas devido as suas interações *internas*, por isso definimos a função de correlação conexa (de dois pontos) como

$$\begin{aligned} G_c(r) &\equiv G_c^{(2)}(r) \equiv \langle (s_i - \langle s_i \rangle) \times (s_j - \langle s_i \rangle) \rangle \\ &= \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

assumimos as simetrias translacional e rotacional no sistema<sup>1</sup>, implicando que podemos escrever  $G_c(i, j) = G_c(r = |\mathbf{i} - \mathbf{j}|)$ . Acima de  $T_c$ ,  $\langle s_i \rangle = 0$ , portanto  $G_c$  é igual a  $G$  e ambos medem a correlação do parâmetro de ordem em pontos diferentes. Abaixo de  $T_c$ ,  $G_c$  difere de  $G$ , de modo que apenas *flutuações* contribuem para a função de correlação conexa. Experimentos de espalhamento mostram que para  $r \neq 0$  e  $T$  longe da temperatura crítica,  $G_c(r)$  é pequeno. Todavia, quando  $T = T_c$ , é encontrado um comportamento assintótico na forma

$$G_c(r) = \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \quad (\text{B.3})$$

onde  $d$  é a dimensionalidade do sistema e  $\eta$  é um expoente crítico.

Em materiais ferromagnéticos, os spins próximos geralmente se correlacionam. Longe da criticalidade, esta correlação se estende até uma certa distância  $\xi$  chamada de comprimento de correlação. Este é o tamanho típico das regiões nas quais os spins assumem o mesmo valor. Tecnicamente, quando  $|T - T_c| \gg 0$ ,  $G_c(r)$  não pode ser representado por uma simples lei de potência, mas para  $T$  próximo a  $T_c$ , temos aproximadamente que

$$G_c(r) \sim e^{-r/\xi} \quad (\text{B.4})$$

e, de acordo com a equação acima, podemos ter flutuações em blocos de spins de vários tamanhos, (aproximadamente) até  $\xi$ , mas flutuações demasiadamente maiores são raras. Constata-se

---

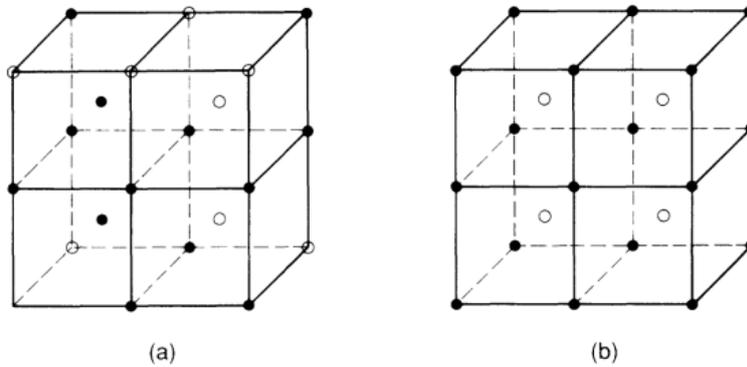
<sup>1</sup>Na verdade, uma rede nunca é invariante por translações ou rotações contínuas, porém podemos assumir estas simetrias se estivermos analisando o sistema a partir de distâncias muito maiores que o espaçamento  $a$  da rede.

empiricamente que, quando  $T$  se aproxima de  $T_c$ ,  $\xi$  cresce sem limites na forma

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (|T - T_c|/T_c \ll 1), \quad (\text{B.5})$$

onde  $\nu$  é outro expoente crítico.

## B.2 Universalidade e simetria conforme



**Figura B.1** Configuração típica do  $\beta$ -bronze. Os átomos de cobre e zinco se apresentam em (a) desordenadamente, para  $T \gg T_c$ , e em (b), para  $T \ll T_c$ , de forma organizada.

O beta-bronze consiste de liga metálica com um número (médio) igual de átomos de zinco e de cobre, os quais se dispõem em sítios de uma rede cúbica de corpo centrado, como ilustra a figura B.1. Ao cruzar a temperatura crítica  $T_c=733\text{K}$ , a partir de temperaturas mais altas, a liga passa por uma transição de fase de um estado desorganizado para um estado organizado, embora a rede (sólida) não deixe de existir durante o processo. Esse é um sistema onde uma transição de fase contínua ocorre e expoentes críticos são identificados. A tabela B.1 mostra alguns valores para expoentes críticos de alguns sistemas. Surpreendentemente, os expoentes críticos para a separação de uma mistura de dois líquidos orgânicos e para a transição de fase no beta-bronze são semelhantes, dentro dos erros experimentais<sup>2</sup>.

Vemos que sistemas físicos bem diferentes apresentam comportamentos muito semelhantes na criticalidade. Esse fenômeno é conhecido por *universalidade*. Podemos associar uma classe de universalidade a cada sistema, de modo que sistemas da mesma classe apresentem aproximadamente os mesmos expoentes críticos e a mesma dimensionalidade  $D$ , para seu parâmetro

<sup>2</sup>Para uma tabela incluindo outros sistemas e os erros experimentais [48].

	Fluido binário	$\beta$ -bronze	Fe	Ni
D	1	1	3	3
$\alpha$	0.113	0.05	-0.03	0.04
$\beta$	0.322	0.305	0.37	0.35
$\gamma$	1.239	1.25	1.33	1.33
$\delta$	4.85		4.3	4.29
$\eta$	0.017	0.08	0.07	0.041
$\nu$	0.625	0.65	0.69	0.64

**Tabela B.1** Valores de expoentes críticos para alguns sistemas. D representa a dimensionalidade de cada sistema. Fe e Ni são representações para Ferro e Níquel, respectivamente, que, abaixo de uma certa temperatura crítica, são materiais ferromagnéticos.

de ordem, que como o nome sugere, comunica-nos a organização dos constituintes do sistema (subseção B.3).

A universalidade indica a existência de alguma simetria comum a esses sistemas: a simetria *conforme*.

Através da análise das funções de correlação para os sistemas críticos, somos capazes de determinar alguns expoentes críticos. Quando lançamos mão de relações entre os próprios expoentes críticos, como

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2 \quad (\text{B.7})$$

$$\nu(2 - \eta) = \gamma \quad (\text{B.8})$$

$$\alpha + \nu d = 2 \quad (\text{B.9})$$

outros expoentes podem ser determinados. Então, é necessário que, por meio dos modelos teóricos, estejamos aptos para calcular funções de correlação.

### B.3 Parâmetro de ordem

Almejando descrever as transições de fase contínuas quantitativamente, definimos o parâmetro de ordem  $\varphi$ , o qual varia no tempo e no espaço, de forma que possamos interpretar fenômenos como a opalescência crítica em termos de flutuações em  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ . Para sistemas que apresentam fenômeno crítico com a variação da temperatura, este parâmetro é tal que sua média térmica se

anula de um lado da transição, geralmente quando  $T > T_c$ , e se distancia de zero do outro lado. Entretanto, não existe um procedimento geral para definir um parâmetro de ordem.

## Teoria de cordas e suas simetrias

Conforme vimos (eq. (A.8)), se uma partícula pontual se move no espaço-tempo, ela percorre uma linha-mundo com uma dimensão e podemos encontrar a trajetória seguida pela partícula simplesmente extremizando a ação que é dada pelo comprimento da linha-mundo. Analogamente, enquanto uma corda se move no espaço-tempo, ela varre uma folha-mundo bidimensional. Seja  $X_\mu(\sigma, \tau)$  um vetor definido em um espaço-tempo D-dimensional que começa na origem do nosso sistema de coordenadas e termina em algum ponto ao longo da folha-mundo (de uma corda), descrita por  $\xi^a = \{\sigma, \tau\}$ , e seja  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, \dots)$  a métrica no espaço-tempo D-dimensional.<sup>1</sup> Continuando a analogia, podemos escolher a ação para a corda como a área de sua folha-mundo e como esta área é independente de coordenadas  $\xi^a$  escolhidas, ela é automaticamente covariante.

Existem algumas formas de definir a área da folha-mundo. A mais simples é introduzir o tensor  $g_{ab}$ , o qual representa uma métrica definida sobre a superfície bidimensional, e a ação pode ser escrita na forma [70]

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X_{\nu\mu} \eta^{\mu\nu} \quad (\text{C.1})$$

onde  $\alpha'$  é uma constante dimensional. A ação é explicitamente invariante por reparametrizações, o que pode ser verificado pela reparametrização das coordenadas da folha-mundo na forma

$$\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}(\sigma, \tau), \quad \tau \rightarrow \tilde{\tau}(\sigma, \tau), \quad (\text{C.2})$$

notando que por uma transformação geral de coordenadas, a métrica se transforma como

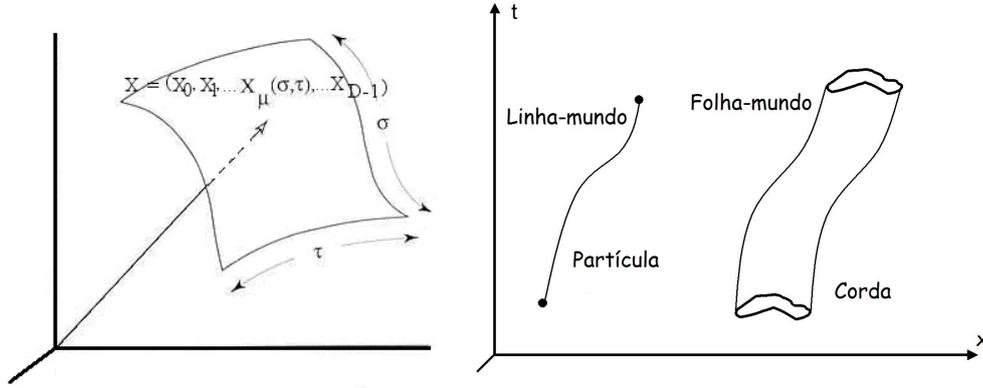
$$\bar{g}^{ab}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^c} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^d} g^{cd}(x) \quad (\text{C.3})$$

onde  $x = \{\sigma, \tau\}$ . A ação é também invariante por transformações de escala locais:

$$g^{ab} \rightarrow e^\phi g^{ab} \quad (\text{C.4})$$

---

<sup>1</sup>Usaremos letras romanas ( $a, b, c, \dots$ ) para representar os índices da folha-mundo bidimensional, e letras gregas ( $\mu, \nu, \sigma, \dots$ ) para representar os índices do espaço-tempo D-dimensional, sempre que houver a necessidade da distinção. Em geral, usaremos apenas letras romanas como índices.



**Figura C.1** Representação da evolução de cordas e de uma partícula em um espaço-tempo  $D$ -dimensional. À esquerda, temos a folha-mundo de uma corda aberta; à direita vemos a linha-mundo de uma partícula e uma folha-mundo de uma corda fechada.

onde  $\varphi = \varphi(x)$  é conhecido como campo de Liouville. A métrica bidimensional na ação não aparece acompanhada de suas derivadas, e por isso pode ser eliminada por meio das equações do movimento:

$$g_{ab} \sim \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu \quad (\text{C.5})$$

de sorte que, reinserindo a equação acima na ação, chegamos à ação de Nambu-Goto:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{(\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2 - (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2}. \quad (\text{C.6})$$

Com esta forma, vemos mais claramente que a ação é proporcional a área da superfície 2D varrida pela corda no espaço-tempo. É notável que teoria de cordas, que tem como um dos objetivos unir a relatividade geral à mecânica quântica, parta desta simples proposição: a ação é proporcional à área da folha-mundo da corda.