



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDOS DE EFICIÊNCIA EM BUSCAS ALEATÓRIAS
UNIDIMENSIONAIS**

por

Tiago Aécio Grangeiro de Souza Barbosa Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (Orientador-UFPE)

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho (DF - UFPE)

Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan (IF-UFAL)

Recife - PE, Brasil
Julho - 2010

Lima, Tiago Aécio Grangeiro de Souza Barbosa.
Estudos de eficiência em buscas aleatórias
unidimensionais / Tiago Aécio Grangeiro de Souza
Barbosa Lima. - Recife: O Autor, 2010.
xvi, 80 p.: il. fig.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia.

1.Mecânica estatística. 2.Passeio aleatório
(Matemática). 3. Fractais. I.Título.

530.13

(22.ed.)

FQ 2010-049



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++) 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++) 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Tiago Aécio Grangeiro de Souza Barbosa Lima

ESTUDOS DE EFICIÊNCIA EM BUSCAS ALEATÓRIAS UNIDIMENSIONAIS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (Presidente e Orientador), Maurício Domingues Coutinho Filho, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Madras Viswanathan Gandhi Mohan, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato:

☒ Aprovado

☐ Reprovado

☐ Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e três de julho de dois mil e dez.

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Presidente e Orientador

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho

Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Às minhas duas mães, com carinho

Agradecimentos

Às minhas duas mães, mãe e vó, por acreditarem sempre, pelo apoio incondicional nos momentos de fraqueza, pelo carinho, companheirismo, amor e compreensão. Por tudo e por serem. Os frutos colhidos são sementes que por elas foram plantadas com dedicação e afinho, e não existem palavras para exprimir aqui minha profunda gratidão. Ao meu irmão Fernando José e todos os familiares por me ensinarem o valor da família, e pela força que deles emana. À Vanusia Souza pela sempre gentil solicitude.

À minha segunda família de Aldeia, por ter me acolhido como filho e compartilhado comigo momentos inesquecíveis. Pelas horas de lazer e pelo carinho, tão essenciais para a tranquilidade mental e espiritual. À Marília Valente e Ribamar Santos pelo amor que me foi dedicado, à Amanda Valente e Igor Ebrahim (e, claro, a Mateus Ebrahim Valente!) pela companhia sempre tão querida, e a todos os outros desta grande família que acabou se tornando parte fundamental de minha vida nos últimos anos.

À Denise Valente, pelo companheirismo, por tudo que vivi e aprendi, e pelos momentos que compartilhamos. Poucas pessoas têm a sorte de viver um grande amor nessa vida, e serei eternamente grato de ter podido viver um.

Aos amigos do peito, Artur Domingues, Daniel Amancio, Fernando Rozenblit, Alfredo Carneiro, Josué Fonseca e Eduarda Peixoto, por tornarem qualquer encontro em algo a ser celebrado e lembrado para toda a posteridade. Por me ensinarem que felicidade é estar com as pessoas que amamos e queremos bem. E que vale sempre o sábio provérbio: “dê dinheiro, mas não dê liberdade”.

Aos amigos que ganhei ao longo de minha jornada, não poderia agradecer o suficiente pelo carinho de todos vocês: Milena Frej, Fernanda Selingardi, Sérgio Lira, Thiago Sobral, Rafael Alves, Eduardo Dias, Plínio Ribeiro, Hugo Andrade, Thiago Nunes, Fábio Novaes, Rafael Menezes, Fernando Nóbrega, Roberto Dias, Hermes Gadêlha, Juliana “buddy” Cavalcanti, Isabella Valle, e tantos outros que poderiam facilmente preencher uma dissertação à parte. Muito em especial, à Scarlett Ingrid e Dayana Freire pelo carinho, pela companhia, pelas risadas, pelo apoio e torcida enérgica, vibração sincera que faz qualquer time virar o placar no fim do jogo.

Ao meu orientador, Ernesto Raposo, pelos socorros e pelas considerações sempre brilhantes, por me guiar com sua paciência, tranquilidade e sabedoria, me fazendo redescobrir o motivo pelo qual escolhi este caminho. Conviver com ele e vê-lo trabalhar foi certamente uma das maiores lições que tive, e agradeço sinceramente pela compreensão nas horas do cansaço, bem como pela alegria contagiante quando tudo dava certo.

A todos os professores que tive, em especial a Mauro Copelli, Jairo Rolim, José Albino e Flávio Aguiar, pelo tempo a mim dedicado, pela vontade em ajudar, e por toda experiência sempre à disposição quando precisei.

Aos amigos da dança e integrantes da Vivaz Dancesport Company, por tornarem minhas semanas mais leves e descontraídas, e por me ensinarem a pensar de forma artística e criativa, incitando uma nova paixão em minha vida.

A Neil Fiore, por me ensinar a viver em plenitude. Graças a ele, descobri o valor do *guilty-free play*, e ao longo desse mestrado voltei a estudar piano e violão, entrei na dança de salão, pratiquei esportes como corrida e natação, experimentei com o sono polifásico, fui monitor e aluno de Mecânica Geral como ouvinte, organizei a burocracia para o doutorado no exterior, fiz curso de inglês, agility, mágicas, dinâmica social e li vários livros sobre os assuntos mais diversos e não diretamente relacionados a física, sem no entanto deixar cair minha produtividade. Meu hobby passou a ser ter sempre um novo hobby, e a culpa é toda dele. Por isso, o meu muito obrigado.

A Deus, por presentear minha vida com pessoas maravilhosas, e ter sagazmente criado um mundo cheio de mistérios a serem desvendados, me encantando diariamente e dando um sentido absoluto à minha existência neste planeta.

*“Excelência é uma arte conquistada pelo treino e pelo hábito.
Nós não agimos certo porque temos virtuosidade ou excelência,
mas preferencialmente as temos porque agimos certo.
Nós somos o que fazemos repetidamente.
Excelência, então, não é um ato isolado, mas, sim, um hábito.”*
—ARISTÓTELES (Ética a Nicômaco)

Resumo

Neste trabalho investigamos o problema do caminhante aleatório unidimensional como modelo para encontrar que distribuição de probabilidades é a melhor estratégia a ser utilizada na busca por sítios-alvos aleatoriamente distribuídos, cuja localização é desconhecida, na situação em que o buscador tem informação limitada sobre sua vizinhança.

Embora tal problema tenha surgido na década de 1960, uma nova motivação surgiu nos anos 1990 quando dados empíricos mostraram que várias espécies de animais, sob condições gerais (especialmente escassez de comida), não usam estratégias brownianas de busca, mas sim distribuições de Lévy. A principal diferença entre elas é que as distribuições de Lévy decaem muito mais lentamente com a distância (com cauda do tipo lei de potência no limite de longos passos), não obedecendo, portanto, ao Teorema do Limite Central, e apresentam propriedades interessantes, como fractalidade, superdifusão e autoafinidade.

Estes experimentos, juntamente com conceitos evolucionistas, levantaram a suspeita de que tal escolha pode ter sido adotada por ser mais vantajosa para o buscador, uma idéia conhecida como *Lévy Flight Foraging Hypothesis*.

Em nosso estudo, definimos a eficiência da busca e obtemos a sua expressão analítica para o modelo. Utilizamos métodos computacionais para comparar as eficiências associadas às distribuições de Lévy e duas outras dentre as mais citadas na literatura, a gama e a "stretched exponential", concluindo que a de Lévy representa a melhor estratégia. Finalmente, empregamos métodos variacionais de extremização e obtemos a equação de Euler do problema.

Palavras-chave: busca; aleatória; caminhante; Lévy; eficiência; discretização; variacional; browniana; TLC; superdifusão; fractalidade

Abstract

In this work we study the one-dimensional random walk problem as a model to find which probability distribution function (pdf) is the best strategy when looking for randomly distributed target sites whose locations are not known, when the searcher has only limited information about its vicinity.

Although research on this problem dates back to the 1960's, a new motivation arose in the 1990's when empirical data showed that many animal species, under broad conditions (especially scarcity of food), do not use Brownian strategies when looking for food, but Lévy distributions instead. The main difference between them is that the Lévy distribution decay much slower with distance (with a power-law tail in the long-range limit), thereby not obeying the Central Limit Theorem, and present interesting properties, like fractality, superdiffusivity and self-affinity.

These experiments, coupled with evolutionary concepts, lead to suspicions that this choice might have been adopted because it is more advantageous for the searcher, an idea now termed as the *Lévy Flight Foraging Hypothesis*.

To study the problem, we define a search efficiency function and obtain its analytical expression for our model. We use computational methods to compare the efficiencies associated with the Lévy and two of the most cited pdfs in the literature, the stretched exponential and Gamma distributions, showing that Lévy is the best search strategy. Finally, we employ variational extremization methods to obtain the problem's Euler equation.

Keywords: search; random; walker; Lévy; efficiency; discretization; variational; Brownian; CLT; superdiffusion; fractality

Sumário

1	Introdução, motivação e objetivos	1
1.1	A situação na década de 1990	2
1.2	O Teorema do Limite Central (TLC)	5
1.3	Difusão	12
1.3.1	Difusão normal	12
1.3.2	Difusão anômala	15
1.4	Teorema do Limite Central generalizado	15
1.5	Caminhadas e Vãos de Lévy	18
2	Expressão analítica e discretização	27
2.1	Descrição do modelo	27
2.2	Eficiência da busca	29
2.3	Modelo Unidimensional	30
2.4	Cálculo da distância média percorrida entre sítios consecutivos	32
2.4.1	Densidades de probabilidade	32
2.4.2	Definição do operador integral $\mathcal{L}$	34
2.4.3	Cálculo da expressão para $\langle L \rangle$	36
2.4.4	Simplificando a expressão para $\langle L \rangle$	39
2.5	Discretização	41
3	Cálculo de $\langle \ell \rangle$ e dos elementos L_{ij}	43
3.1	Distribuições de interesse	45
3.1.1	Distribuição de Lévy	46
3.1.2	Stretched exponential	49
3.1.3	Distribuição Gama	53
4	Resultados numéricos	57
4.1	Distribuição de Lévy	58
4.1.1	Busca destrutiva	58
4.1.2	Busca não-destrutiva	59
4.2	Stretched Exponential	60
4.2.1	Busca destrutiva	60
4.2.2	Busca não-destrutiva	62
4.3	Distribuição Gama	63
4.3.1	Busca destrutiva	63
4.3.2	Busca não-destrutiva	63

5	Cálculo Variacional	67
5.1	Equação de Euler associada ao problema	67
5.2	Uma abordagem alternativa	70
5.3	Desenvolvimento da equação variacional	70
6	Conclusões e Perspectivas	75

Introdução, motivação e objetivos

Qual é a estratégia mais eficiente a ser adotada ao se procurar por alvos aleatoriamente distribuídos, cujas localizações não são conhecidas a priori, e em situações onde o buscador só tem informação direta acerca de sua proximidade imediata?

Este problema fundamental da busca aleatória tem sido estudado [1–9] desde a década de 1960 por matemáticos e também por biólogos, dada a sua aplicação relevante a sistemas de interesse biológico, como veremos a seguir. As primeiras abordagens [10] basearam-se nas caminhadas aleatórias correlacionadas (em inglês, *correlated random walks*, ou CRWs), que consistem em variações dos modelos de caminhadas aleatórias brownianas, conceito já bem estabelecido desde o início do século passado, através, por exemplo, do trabalho seminal de Albert Einstein, publicado em 1905 [11]. Na metade da década de 1990, o assunto ganhou uma força renovada com o ingresso de idéias surgidas no contexto da Física estatística e de sistemas complexos, tais como dinâmica superdifusiva, geometria fractal, idéias de escala, funções de correlação e processos de primeira passagem [12]. Outros importantes aspectos do problema da caminhada aleatória foram desenvolvidos com o auxílio destas idéias, como, por exemplo, o cálculo do tempo de cobertura parcial, definido como o tempo médio necessário para que o caminhante visite uma fração dos sítios de uma rede [13].

Surgiu então a proposta de que processos denominados de *vôos e caminhadas de Lévy* [14] poderiam ser uma estratégia mais vantajosa para o buscador. Estudos experimentais [15] realizados pouco depois mostraram que uma grande classe de animais, sob condições bem gerais (em especial escassez de comida), não se valem de distribuições gaussianas quando em busca de alimento, mas sim de distribuições de Lévy. Estes experimentos, junto com a bagagem teórica que se acumulara, levantaram a suspeita de que esta escolha foi feita evolucionariamente por ser mais vantajosa para o buscador, reforçando então a hipótese de que distribuições de Lévy são de fato mais eficientes que as demais. Esta idéia foi batizada posteriormente de *Lévy Flight Foraging Hypothesis* [16].

A resposta para essa pergunta é de fundamental importância, pois existem vários problemas que podem ser modelados de forma análoga, *e.g.*, celulares procurando por antenas em campo [17], extração de petróleo em reservatórios maduros [18], computadores procurando por informações aleatórias em bancos de dados [19] e o comportamento de fótons espalhados em lasers aleatórios [20]. A determinação de qual distribuição de probabilidades maximiza a eficiência da busca pode ainda trazer ganhos consideráveis sempre que for necessário realizar uma busca aleatória, como por exemplo na quebra de um código de criptografia [19], no projeto de um aeroporto [17] ou no posicionamento de antenas de telefonia celular [17], tendo portanto aplicação direta no mundo cotidiano.

A diferença fundamental entre as classes de distribuições gaussianas e de Lévy está cen-

trada principalmente no comportamento para passos muito longos, isto é, distribuições de Lévy decaem muito mais lentamente com a distância do que distribuições gaussianas, de forma que a ocorrência de grandes passos é bem mais provável. As diferenças qualitativas, consequentemente, não são poucas: distribuições de Lévy exibem caráter fractal, geram comportamento anômalo superdifusivo, apresentam invariância de escala devido à auto-afinidade e não obedecem ao Teorema do Limite Central (TLC), implicando em uma diferença substancial no comportamento estatístico [2, 21]. O assunto é território fértil para físicos, devido à ampla quantidade de ferramentas da Física estatística que podem ser usadas para abordá-lo, como caminhadas aleatórias, funções de correlação, dinâmica superdifusiva e métodos variacionais.

Atualmente, os modelos mais estudados e candidatos a melhor estratégia de busca são aqueles que consideram caminhantes aleatórios com distribuição de passos de Lévy [2–7], as já citadas CRWs [10, 22] e as caminhadas intermitentes (em inglês, *intermittent walks*) [23–26]. Discutiremos detalhadamente cada uma dessas propostas mais adiante.

Neste trabalho, procuramos esclarecer qual o mecanismo que rege as buscas eficientes. A maior parte dos resultados concerne às caminhadas e vôos de Lévy, caracterizados pela existência de passos raros mas extremamente grandes, alternando-se entre sequências de vários passos pequenos. Esta propriedade leva tais processos a exibir uma dinâmica anômala superdifusiva, em contraste com a dinâmica difusiva observada em caminhadas brownianas, governadas pelo Teorema do Limite Central. Mostraremos que, em domínios bem definidos, a distribuição de Lévy de fato maximiza a eficiência comparativamente às outras distribuições propostas na literatura. Desenvolveremos um modelo para a busca aleatória inspirado em problemas de predação e definiremos o que é a eficiência da busca, obtendo uma expressão analítica para seu cálculo. Em seguida, calcularemos computacionalmente seu valor para distribuições de interesse, mostrando que a de Lévy é de fato mais eficiente que as demais nos regimes considerados. Finalmente, empregando técnicas de cálculo variacional, obteremos a equação de Euler associada ao problema e analisaremos algumas de suas consequências importantes.

1.1 A situação na década de 1990

O início dos estudos sobre caminhantes aleatórios pode ser remetido à descrição do movimento irregular de pó de carvão suspenso em álcool feita em 1785 pelo biólogo Jan Ingenhousz [27]. Posteriormente, novas observações [28] foram feitas pelo botânico Robert Brown em 1827 acerca do movimento irregular de partículas de pólen em suspensão sobre um fluido em repouso, o que hoje é denominado de movimento browniano.

Embora os trabalhos em teoria de probabilidades já existissem a alguns séculos, surpreendentemente foi apenas no início do século XX que um caminhante aleatório foi descrito na literatura, quando o periódico *Nature* publicou uma discussão entre Karl Pearson [29] e Lord Rayleigh [30] sobre o assunto. Físicos como Albert Einstein [11, 31] e Marian Smoluchowski [32] entraram na discussão pouco depois e vários conceitos importantes como processos aleatórios, ruídos aleatórios, análise espectral e equações estocásticas foram desenvolvidos ao longo da pesquisa sobre caminhadas aleatórias [26].

Os primeiros modelos para o movimento errático utilizando caminhadas aleatórias eram bem simples, assumindo a ausência de correlação entre passos e desconsiderando qualquer

tipo de tendência (em inglês, *bias*). Nesse contexto, ausência de correlação significa que a direção do movimento é completamente independente das direções anteriormente escolhidas: a localização após cada passo dado ao longo da busca é dependente apenas da localização do último passo, e o processo é dito então markoviano, isto é, os efeitos de memória ao longo da evolução não são relevantes após um grande número de eventos estatísticos [33]. Por outro lado, ausência de tendência significa que não há nenhuma direção preferencial: a direção escolhida a cada passo é igualmente aleatória. Assumindo que o movimento em qualquer direção é permitido, esse processo é essencialmente um movimento browniano, e pode-se mostrar que tais modelos produzem a equação de difusão padrão [33].

A partir da década de 1960, o assunto ganhou interesse renovado [1] ao ser utilizado para modelar a dinâmica de predação animal, passando a ser visto como uma excelente ferramenta para responder a questão de qual estratégia otimizaria o processo de busca por alimentos na natureza. O modelo inicialmente mais utilizado [10] para buscas aleatórias realizadas por organismos biológicos era então um refinamento das caminhadas brownianas já descritas. Denominadas de caminhadas aleatórias correlacionadas (abreviadamente do inglês, CRWs), estas envolviam a correlação entre as sucessivas orientações de passos, batizada de *persistência* [34]. A justificativa para tal alteração reside no fato que a maioria dos animais possuem uma tendência maior a se mover para frente (persistência), e portanto as CRWs foram largamente utilizadas para modelar o deslocamento animal em vários contextos [10,22]. O refinamento deste modelo introduz uma tendência direcional local: cada passo tende a apontar na mesma direção do anterior, muito embora a influência da direção inicial no movimento diminua progressivamente com o tempo, de forma que a orientação dos passos fica uniformemente distribuída após vários passos. As CRWs ainda obedecem ao TLC e, portanto, tendem a uma distribuição gaussiana após um número suficientemente grande de passos.

Alguns anos mais tarde, um outro modelo de busca aleatória foi proposto. As caminhadas aleatórias intermitentes [23–26] consistem em caracterizar a dinâmica da busca por dois tipos distintos de movimento: um estágio de realocação balístico, durante o qual o buscador é não-receptivo ao alvo, e uma fase relativamente lenta, com um movimento aleatório do tipo browniano, durante a qual o alvo pode ser detectado. Nesta abordagem, varia-se a duração relativa entre os estágios ativo e de realocação de forma a encontrar a estratégia ótima, mas a busca ainda obedece ao TLC, tendendo a uma distribuição gaussiana após vários passos. A eficiência da busca com o uso desta estratégia foi demonstrada ser bem maior do que em buscas brownianas normais [35], e alterações mais recentes neste modelo incorporaram até mesmo distribuições com “cauda longa”, do tipo lei de potência, na fase de realocação [35].

Em meados da década de 1990, evidências empíricas de distribuições de Lévy nos tempos e comprimentos dos passos [2, 36–38], bem como a estrutura fractal invariante de escala em episódios de atividades predatória e de repouso [39], em espécies tão diversas como microorganismos marinhos [36] e moscas de fruta [39], levantaram a hipótese que organismos biológicos se utilizam de processos de Lévy ao procurar por nutrientes na natureza. Como veremos a seguir, o fato do segundo momento da distribuição de Lévy divergir, diretamente associado à presença da longa cauda, leva a um desvio no comportamento estatístico previsto pelo TLC, em contraste com as idéias até então predominantes. Estudos subsequentes [7,40,41] em várias espécies distintas (de dinoflagelados a mamíferos e peixes) reforçaram ainda mais a idéia que

De fato, o estudo de predação mais extensivo até o momento [16], envolvendo mais de doze milhões de passos para 55 indivíduos pertencendo a 14 espécies distintas de predadores marinhos ao redor do mundo inteiro, recentemente concluiu que as espécies investigadas de fato usam distribuições de Lévy em ambientes escassos de alimento. Mais surpreendentemente, encontrou-se que indivíduos da mesma espécie adaptam sua estratégia entre Lévy e gaussiana de acordo com a densidade de comida disponível no habitat, reforçando a hipótese LFF de que o comportamento levyano ocorre em meios onde os sítios estão esparsamente distribuídos, e que o movimento browniano é uma escolha adequada em meios com sítios abundantes. O número de evidências vem se acumulando cada vez mais desde então, corroborando a hipótese que Lévy é de fato largamente utilizada na natureza [15].

Ao longo deste trabalho, utilizaremos de conceitos e métodos da Física estatística e sistemas complexos para estudar com mais detalhes as vantagens oferecidas por processos de Lévy. Para isso, no entanto, precisamos primeiramente entender melhor o que distingue a distribuição de Lévy das demais.

1.2 O Teorema do Limite Central (TLC)

O Teorema do Limite Central (abreviadamente, TLC) é um dos mais importantes resultados em âmbito estatístico, e a principal justificativa para a grande popularidade e aplicabilidade das distribuições gaussianas no meio científico [42]. Inúmeros fenômenos estatísticos corriqueiros satisfazem suas poucas condições, o que levou ao estudo e a prevalência de gaussianas na modelagem de fenômenos aleatórios.

Como um exemplo ilustrativo bem simples, considere um dado não-viciado de seis faces. Quando o dado é lançado várias vezes (lei dos grandes números), raramente obtém-se apenas o número um, por exemplo. O resultado usual é aproximadamente a mesma quantidade de números entre um e seis, pois existe uma chance igual que o lançamento resulte em qualquer um desses números. A densidade de probabilidade $p(x_i)$ de obtermos um número $x_i = 1, \dots, 6$ pode ser escrita como

$$p(x_i) = \frac{1}{6} \sum_{f=1}^6 \delta(x_i - f) . \quad (1.1)$$

Note que $\int_{-\infty}^{\infty} p(x_i) dx_i = 1$. É claro que em algumas sequências de lançamentos pode-se obter cinco vezes o número seis, por exemplo, mas certamente não com frequência. A distribuição é “plana” - se fizermos um gráfico do resultado do dado versus sua probabilidade, todos os resultados possuem valor igual a um sexto.

No entanto, ao somar os resultados de dez lançamentos, por exemplo, o valor obtido é mais provável de estar próximo de 30 ou 40 do que do valor máximo, 60 (que ocorre apenas quando todos os lançamentos resultam em seis), ou do valor mínimo 10 (que ocorre apenas quando todos os lançamentos resultam em um). A razão é que os valores intermediários podem ser obtidos de muito mais formas do que os valores extremos. Por exemplo, ao jogar dois dados, $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$, mas apenas $1 + 1 = 2$. Ou seja, muito embora seja possível obter qualquer um dos seis números com a mesma probabilidade ao jogar apenas um dado,

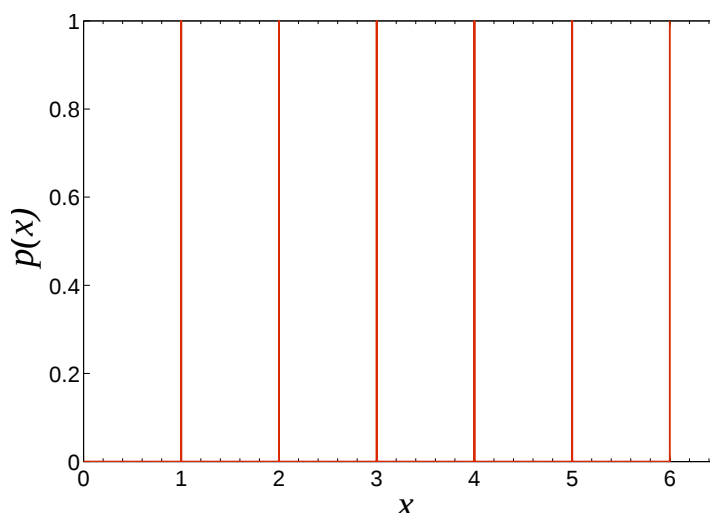


Figura 1.2 Gráfico ilustrativo da função densidade de probabilidade $p(x_i)$ vs. x_i para o lançamento de um dado não-viciado de seis faces, Eq. (1.1).

os extremos são menos prováveis do que os valores intermediários ao somar os resultados de vários dados.

O mesmo princípio vale para o lançamento de moedas. Ao derrubar um punhado de moedas no chão, é extremamente raro todas elas acabarem com a mesma face voltada para cima. Novamente, isso pode ocorrer algumas vezes, mas o resultado mais usual é que se tenha tantas caras quanto coroas. É de se esperar também que pequenas variações da média sejam bem mais comuns do que grandes variações (como todas as moedas resultando na mesma face, por exemplo). Logo, as probabilidades de diferentes somas seguem aproximadamente uma distribuição gaussiana, representada por uma curva que se assemelha a um “sino”, cujo centro está na metade entre as maiores e menores somas possíveis. Este centro é denominado de *valor esperado*.

Se todos os casos forem igualmente prováveis, tais como ao jogar dados ou moedas (onde as probabilidades de quaisquer resultados são $1/6$ e $1/2$, respectivamente), o valor esperado estará na metade entre os valores máximo e mínimo. Por exemplo, ao jogar um dardo numa tabela-alvo circular, é mais fácil obter um placar baixo nas bordas do que acertar o ponto central. Note, no entanto, que muito embora nem todos os resultados aqui sejam igualmente prováveis, as somas dos resultados extremos (acertar sempre no centro ou sempre na borda) ainda é menos comum do que as somas intermediárias. Portanto, a *soma de vários* lançamentos ainda segue aproximadamente uma distribuição gaussiana; apenas, neste caso, o valor esperado estará mais próximo do extremo inferior das diferentes somas do que do extremo superior.

Logo, a distribuição dos resultados individuais pode tanto ser simétrica ou não que, mesmo assim, a soma dos resultados de vários eventos ainda seguirá uma distribuição normal, e apenas o valor esperado e os desvios deste valor (denominado de variância) irão se modificar. Mais formalmente, o Teorema do Limite Central afirma que, sob determinadas condições (detalhadas a seguir), a média de variáveis aleatórias independentes está distribuída aproximadamente de forma gaussiana, com a aproximação melhorando à medida que o número de variáveis au-

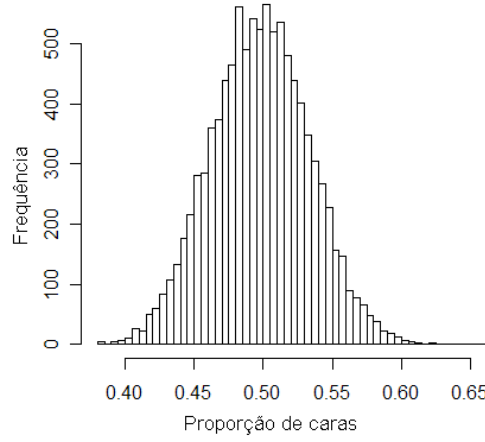


Figura 1.3 Histograma da proporção média de caras obtidas em dez mil lançamentos de duzentas moedas. Observe que o gráfico se assemelha a um “sino”, com o centro indicando que, para um grande número de lançamentos, o resultado mais usual é que se tenha tantas caras quanto coroas.

menta [43]. A generalidade deste resultado é a razão de grande parte das médias de quantidades mensuráveis estar distribuída de forma gaussiana, o que ressalta sua extrema importância. As condições a serem satisfeitas são que as distribuições das variáveis individuais devem ter médias e variâncias finitas, isto é, seus dois primeiros momentos não podem divergir, o número de tais variáveis deve ser suficientemente grande e as variáveis devem ser estatisticamente independentes e identicamente distribuídas. Partindo dessas hipóteses, é possível obter, inclusive, os parâmetros da gaussiana limite, o que faremos logo a seguir. Antes, no entanto, vamos obter uma expressão geral para a distribuição estatística da posição do caminhante após N passos.

Considere a soma x de N variáveis aleatórias s_i independentes e identicamente distribuídas de acordo com a distribuição $w = w(s_i)$:

$$x = \sum_{i=1}^N s_i . \quad (1.2)$$

Para um caminhante aleatório em uma dimensão, podemos interpretar s_i como o deslocamento associado ao i -ésimo passo, e x será portanto a posição do caminhante após N passos. Vamos encontrar a probabilidade $p(x)dx$ de encontrar o valor da soma x nos limites entre x e $x + dx$, ou seja, a probabilidade de encontrar o caminhante neste intervalo. Como os passos são estatisticamente independentes, a probabilidade de uma sequência *particular* de passos com o i -ésimo deslocamento entre s_i e $s_i + ds_i$ é dada simplesmente pelo produto das respectivas probabilidades, isto é, por

$$w(s_1)ds_1 \cdot w(s_2)ds_2 \cdot \dots \cdot w(s_N)ds_N . \quad (1.3)$$

Se somarmos esta probabilidade sobre todos os deslocamentos individuais que são consistentes com a condição de que o deslocamento total x sempre esteja nos limites entre x e $x + dx$,

obteremos a probabilidade total $p(x)dx$ de nosso interesse, irrespectivamente da sequência de passos que produziu esse deslocamento total. Podemos escrever,

$$p(x) = \int \cdots \int w(s_1) w(s_2) \cdots w(s_N) ds_1 \cdots ds_N, \quad (1.4)$$

onde a integração é sobre todos os possíveis valores das variáveis s_i , sujeito à restrição de que

$$x < \sum_{i=1}^N s_i < x + dx. \quad (1.5)$$

Em princípio, o cálculo da integral acima resolve completamente o problema de encontrar $p(x)$. No entanto, esta integral é difícil de calcular pois a restrição adicional deixa os limites de integração difíceis de serem explicitados, isto é, encontramos o complicado problema geométrico de determinar em qual subespaço consistente com a condição acima devemos integrar. Uma maneira poderosa de evitar este empecilho é eliminar o problema geométrico integrando sobre *todos* os valores da variável s_i sem restrição, enquanto transferimos a dificuldade introduzida pelas condições de contorno para o integrando, usando a função δ de Dirac. Podemos então reescrever a equação acima como

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} w(s_1) \cdots w(s_N) \left[\delta \left(x - \sum_{i=1}^N s_i \right) \right] ds_1 \cdots ds_N, \quad (1.6)$$

onde agora não há mais restrições no domínio de integração. Usando a representação integral (via transformada de Fourier) da função δ , podemos escrever

$$\delta \left(x - \sum_{i=1}^N s_i \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(ik \left[\sum_{i=1}^N s_i - x \right] \right) dk. \quad (1.7)$$

Substituindo essa expressão na integral para $p(x)$,

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} w(s_1) \cdots w(s_N) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp ik(s_1 + \cdots + s_N - x) dk \right) ds_1 \cdots ds_N, \quad (1.8)$$

ou ainda,

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dk \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1) \exp(iks_1) ds_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_N) \exp(iks_N) ds_N, \quad (1.9)$$

onde mudamos a ordem de integração e usamos a propriedade multiplicativa da função exponencial. Como a variável de integração é muda e as variáveis individuais s_i estão identicamente distribuídas, cada uma das últimas N integrais são análogas e iguais a

$$Q(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \exp(iks) ds. \quad (1.10)$$

A função $Q(k)$ é a transformada de Fourier da distribuição $w(s)$, e é denominada de *função característica* associada a esta distribuição.

Portanto, a integral para $p(x)$ fica

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) [Q(k)]^N dk . \quad (1.11)$$

A equação acima nos diz que a distribuição final para a soma de N variáveis s_i é a transformada de Fourier inversa da função característica dos passos individuais elevada à N -ésima potência, e seu escopo é bem geral. Até agora, usamos apenas a condição de que as variáveis s_i são independentes e estão identicamente distribuídas. Este resultado para a distribuição de probabilidades $p(x)$ do caminhante após N passos é portanto válido irrespectivamente à finitude dos momentos de $w(s)$. Então, o cálculo de duas integrais de Fourier resolve o problema completamente. Faremos uso deste resultado mais adiante.

Para a prova do Teorema do Limite Central, precisamos agora descobrir que aproximações para as expressões acima são apropriadas no limite de um número muito grande de variáveis aleatórias, $N \gg 1$. O integrando de $Q(k)$ contém o fator $\exp(iks)$, uma função oscilatória de s que oscila mais rapidamente à medida que k aumenta de magnitude - logo, a quantidade $Q(k)$ tende em geral a ser cada vez menor nesse limite. Elevando Q a uma grande potência N , segue que $[Q(k)]^N$ decai bem rapidamente quando k aumenta. Portanto, para calcular $p(x)$ pela equação anterior, um conhecimento de $[Q(k)]^N$ para *pequenos* valores de k será suficiente, já que para grandes valores de k a contribuição de $[Q(k)]^N$ na integral será negligenciavelmente pequena. Podemos então aproximar $[Q(k)]^N$ por uma expansão em potências de k . No entanto, como $[Q(k)]^N$ varia muito rapidamente com k , é preferível procurar uma expansão em série de potências que convirja mais rapidamente, como o logaritmo $\ln [Q(k)]^N$, já que este varia bem mais lentamente.

Primeiramente, vamos obter $Q(k)$ para pequenos valores de k . Expandindo $\exp(iks)$ em série de Taylor, a expressão para $Q(k)$ fica

$$Q(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \exp(iks) ds = \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \left(1 + iks - \frac{1}{2}k^2s^2 + \dots \right) ds , \quad (1.12)$$

ou ainda

$$Q(k) = 1 + i\bar{s}k - \frac{1}{2}\bar{s}^2k^2 + \dots , \quad (1.13)$$

onde

$$\bar{s}^n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(s) s^n ds \quad (1.14)$$

é uma constante que representa a definição usual do n -ésimo momento da distribuição $w(s)$. Agora assumimos a hipótese fundamental que $|w(s)| \rightarrow 0$ rápido o suficiente com $|s| \rightarrow \infty$, de forma que esses dois primeiros momentos são finitos. Usando a expansão anterior,

$$\ln [Q(k)]^N = N \ln Q = N \ln \left[1 + i\bar{s}k - \frac{1}{2}\bar{s}^2k^2 + \dots \right] . \quad (1.15)$$

Da expansão do logaritmo em série de Taylor, válida para $y \ll 1$,

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \dots, \quad (1.16)$$

a equação pode ser escrita, mantendo até os termos quadráticos em k , como

$$\ln Q^N \approx N \left[\left(i\bar{s}k - \frac{1}{2}\bar{s}^2 k^2 \right) - \frac{1}{2}(i\bar{s}k)^2 \right] = N \left[i\bar{s}k - \frac{1}{2}\overline{(\Delta s)^2} k^2 \right], \quad (1.17)$$

onde definimos a expressão para a variância

$$\overline{(\Delta s)^2} \equiv \bar{s}^2 - \bar{s}^2. \quad (1.18)$$

Portanto, obtemos

$$Q^N(k) = \exp \left(iN\bar{s}k - \frac{1}{2}N\overline{(\Delta s)^2} k^2 \right). \quad (1.19)$$

Substituindo na expressão para $p(x)$, encontramos

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(i(N\bar{s} - x)k - \frac{1}{2}N\overline{(\Delta s)^2} k^2 \right) dk. \quad (1.20)$$

Esta integral é da forma ($a > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-au^2 + bu) du = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-a \left(u - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a} \right) du. \quad (1.21)$$

Fazendo a substituição $y = u - b/2a$ e usando o resultado para a integral gaussiana, a expressão acima se reduz a

$$\exp(b^2/4a) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2) dy = \exp(b^2/4a) \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (1.22)$$

Identificando, ainda, $b = i(N\bar{s} - x)$ e $a = \frac{1}{2}N\overline{(\Delta s)^2}$, podemos escrever

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{N\overline{(\Delta s)^2}}} \exp(-(N\bar{s} - x)^2 / 2N\overline{(\Delta s)^2}), \quad (1.23)$$

de modo que, definindo

$$\mu \equiv N\bar{s} \quad (1.24)$$

e

$$\sigma^2 \equiv N\overline{(\Delta s)^2}, \quad (1.25)$$

obtemos finalmente

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2). \quad (1.26)$$

A expressão acima, denominada de *distribuição gaussiana*, será portanto a distribuição para a soma das variáveis s_i no limite $N \rightarrow \infty$, e dá a densidade de probabilidade de encontrar o caminhante em uma posição x após muitos passos. Vale reforçar a extrema generalidade deste resultado: não importa qual a distribuição de probabilidade $w(s)$ para cada variável individual, desde que estas sejam independentes e identicamente distribuídas, com $w(s)$ caindo rápido o suficiente quando $|s| \rightarrow \infty$ de forma que os dois primeiros momentos não diverjam, o deslocamento total x estará distribuído de acordo com uma gaussiana para N suficientemente grande. Naturalmente, o valor médio e a variância desta gaussiana dependem essencialmente da distribuição $w(s)$ dos passos individuais.

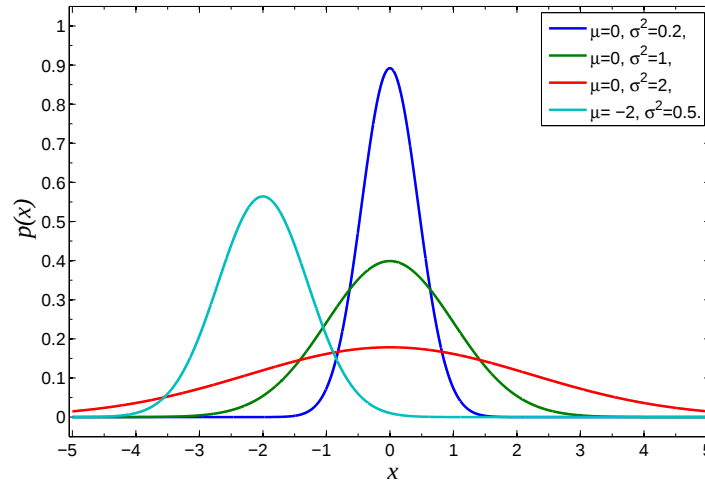


Figura 1.4 Gráficos da distribuição gaussiana, para diferentes valores esperados μ e variâncias σ^2 . A curva de cor verde é denominada de *gaussiana padrão*, e possui média nula e variância unitária.

Este resultado é de nosso especial interesse, justamente pelo fato da distribuição de Lévy não satisfazer a hipótese de finitude dos primeiros momentos, não satisfazendo, portanto, aos requisitos do TLC, e gerando inúmeras consequências interessantes na busca aleatória. Deste modo, ao longo deste trabalho iremos comparar distribuições que satisfazem o TLC com outras que não o satisfazem, sendo, na verdade, governadas pelo chamado TLC generalizado, como veremos mais adiante.

Por fim, e em conexão com a próxima seção, chamamos atenção para o resultado da Eq. (1.25),

$$\sigma \sim N^{1/2}, \quad (1.27)$$

típico de caminhadas aleatórias brownianas. De fato, pode-se até mesmo afirmar que uma das assinaturas características de tais processos é o aumento da dispersão ao redor da média com a raiz quadrada do número de passos N . Tal resultado quantifica, portanto, como se dá a difusão (dita normal) do caminhante aleatório à medida que mais passos são realizados.

1.3 Difusão

Após discutirmos como se processa a evolução espacial das características estatísticas de caminhantes aleatórios através do TLC, precisamos agora compreender o seu comportamento temporal. De particular relevância para este objetivo é o tipo de difusão gerada pela dinâmica subjacente, caracterizada por um parâmetro H , denominado *expoente de Hurst* [2].

Definindo

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i \quad (1.28)$$

como o deslocamento total obtido pela soma vetorial de todos os passos que compõem a caminhada, a raiz quadrada do deslocamento total médio quadrático do caminhante aleatório, $\langle (\Delta L)^2 \rangle^{1/2}$ (que caracteriza a taxa de espalhamento com respeito ao ponto de partida) escala com t^H , para tempos t suficientemente grandes. Para o caso do movimento browniano, cujos passos individuais têm variância finita e não possuem correlação, $H = 1/2$, levando à difusão normal. Difusão anômala é obtida quando $H > 1/2$ (superdifusão) ou $H < 1/2$ (subdifusão), e, em particular, o caso $H = 1$ representa um comportamento balístico. Vamos discutir este resultado com mais detalhes.

1.3.1 Difusão normal

Precisamos obter a dinâmica de um caminhante aleatório para um tempo contínuo a partir do caminhante discreto que estávamos considerando até então. Para um caminhante unidimensional, vamos assumir que cada passo tenha tamanho fixo δx e possa ocorrer dentro de um intervalo de tempo $(t, t + dt)$, com probabilidade dada por

$$P(t, t + dt) = \beta dt + O(dt) , \quad (1.29)$$

onde β é uma constante e $O(dt)$ indica termos de ordem superior a dt . Então, as probabilidades de transição para o caso de passos equiprováveis para a esquerda e para a direita são

$$P(x \rightarrow x + \delta x) = P(x \rightarrow x - \delta x) = \frac{1}{2} . \quad (1.30)$$

Vamos escrever $p_i(t)$ para a densidade de probabilidade de encontrarmos o caminhante em $x = i \cdot \delta x$ no instante t , isto é, $p_i(t) \equiv p[x(t) = i \cdot \delta x]$. Das hipóteses anteriores, temos a densidade de probabilidade de encontrarmos o caminhante em x no instante $t + dt$ dada por

$$p_i(t + dt) = (1 - \beta dt)p_i(t) + \beta dt \left[\frac{1}{2}p_{i-1}(t) + \frac{1}{2}p_{i+1}(t) \right] + O(dt) . \quad (1.31)$$

onde o primeiro e o segundo termo da soma correspondem à probabilidade de não dar passo após dt , estando inicialmente na posição x no instante t , e à probabilidade de dar um passo após dt , estando inicialmente em $x - \delta x$ e indo para a direita ou estando em $x + \delta x$ e indo para a esquerda, respectivamente. Portanto,

$$p_i(t + dt) - p_i(t) = -\beta dt p_i(t) + \frac{\beta dt}{2} [p_{i-1}(t) + p_{i+1}(t)] + O(dt) . \quad (1.32)$$

Dividindo por dt e tomando o limite $dt \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\beta p_i(t) + \frac{\beta}{2}[p_{i-1}(t) + p_{i+1}(t)] . \quad (1.33)$$

Tomamos então o limite contínuo, removendo a dependência em x para a discretização arbitrária δx . Usando a notação $p_i(t) = p(x, t)$, podemos escrever

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\beta p(x, t) + \frac{\beta}{2}[p(x - \delta x, t) + p(x + \delta x, t)] . \quad (1.34)$$

Expandindo p em série de Taylor como função de x ,

$$\begin{aligned} p(x - \delta x, t) + p(x + \delta x, t) &= [p(x) - \partial_x p(x) \delta x + \partial_x^2 p(x) (\delta x)^2] + \\ &+ [p(x) + \partial_x p(x) \delta x + \partial_x^2 p(x) (\delta x)^2] = 2p(x) + 2\partial_x^2 p(x) (\delta x)^2 , \end{aligned} \quad (1.35)$$

de modo que

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\beta p(x, t) + \frac{\beta}{2}[2p(x) + 2\partial_x^2 p(x) (\delta x)^2] , \quad (1.36)$$

ou, após simplificações,

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\beta (\delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} . \quad (1.37)$$

Definindo a constante de difusão $D \equiv \beta (\delta x)^2 / 2$, finalmente obtemos a equação de difusão para um caminhante aleatório unidimensional no limite de tempos contínuos:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.38)$$

Esta expressão, também denominada de *equação de Fokker-Planck* para a densidade como função da posição $p(x)$, pode ser resolvida, com solução geral dada por uma distribuição gaussiana:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) , \quad (1.39)$$

assumindo a condição inicial $p(x, 0) = \delta(x)$ (i.e., com todos os caminhanes localizados em um único ponto, aqui tomado como sendo a origem das coordenadas).

A partir deste resultado, podemos calcular os momentos e suas dinâmicas, usando a integral

$$\langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x, t) dt . \quad (1.40)$$

Pode ser mostrado, por exemplo, que a média $\langle x \rangle$ permanece constante com o tempo, i.e.

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0 , \quad (1.41)$$

consistentemente com as regras de simetria da caminhada. A dispersão também pode ser obtida, de modo que

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = 2D, \quad (1.42)$$

a qual pode ser facilmente resolvida, gerando a relação linear

$$\langle x^2(t) \rangle = 2Dt. \quad (1.43)$$

Como a variância é definida por $\sigma^2(x) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ e $\langle x(t) \rangle^2 = 0$, o desvio padrão para a caminhada, $\sigma(t)$, é dado por

$$\sigma(t) = \sqrt{2Dt}. \quad (1.44)$$

Para uma população de caminhantes aleatórios, o resultado anterior indica que o espalhamento espacial é limitado temporalmente por uma lei de escala geral e simples,

$$\sigma(t) = \langle x^2 \rangle^{1/2} \sim t^{1/2}, \quad (1.45)$$

que pode ser utilizada como teste para o movimento difusivo em uma determinada população de indivíduos. Embora tenhamos obtido a expressão anterior utilizando, por simplicidade, o exemplo de um caminhante unidimensional, uma propriedade surpreendente é que este resultado é rigorosamente válido para caminhadas aleatórias em qualquer dimensão, ou seja, a relação $\sigma(t) \sim t^{1/2}$ permanece preservada para caminhadas brownianas independentemente da dimensão do espaço.

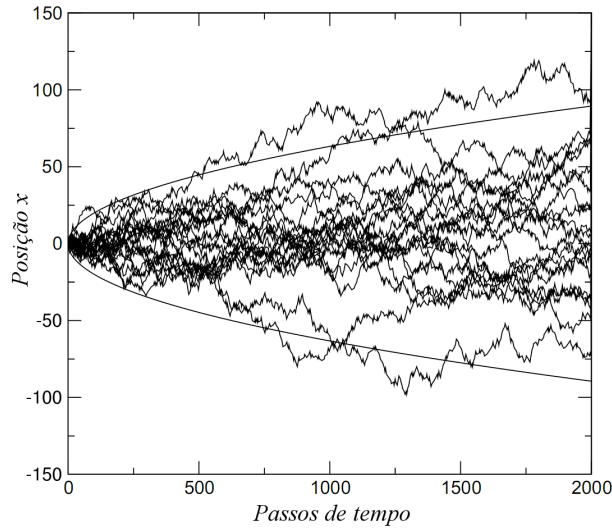


Figura 1.5 Trajetórias percorridas com o tempo para uma pequena população de caminhantes aleatórios unidimensionais. A parábola descreve o desvio padrão da dispersão, Eq. (1.45).

Finalmente, a conexão entre as Eqs. (1.45) e (1.27) para a difusão normal típica de movimentos brownianos pode ser entendida ao se observar que, na derivação acima, o número de passos é proporcional ao tempo transcorrido.

1.3.2 Difusão anômala

De forma geral, o desvio generalizado σ_q de caminhadas aleatórias pode ser escrito em função do tempo em que o processo se desenvolve como

$$\sigma_q(t) = \langle |x|^q \rangle^{1/q}(t) \sim t^H, \quad (1.46)$$

para um parâmetro q que depende da distribuição considerada, onde H é o expoente de Hurst ($H \in [0, 1]$).¹ Como vimos, o processo representa um simples movimento browniano $H = 1/2$ (difusão normal), mas passa a ser denominado de difusão anômala para outros valores de H . Para $H > 1/2$ o caminhante tende a continuar na direção do último passo, gerando um comportamento persistente. Quanto maior for o valor de H , maior a tendência em permanecer na mesma direção de movimento. Para $H < 1/2$, o caminhante ativamente escolhe evitar continuar em uma dada direção, e muda de direção mais frequentemente do que na caminhada browniana. Este comportamento é denominado de anti-persistência. Portanto, anomalias na difusão surgem devido a estatísticas não-gaussianas. Veremos logo mais adiante que estratégias de Lévy geram um comportamento anômalo superdifusivo.

1.4 Teorema do Limite Central generalizado

A forma canônica de descrever o movimento browniano é usando os modelos de caminhantes aleatórios mais simples, e o resultado básico que obtivemos foi uma distribuição de probabilidades $p(x, t)$ gaussiana para a posição x do caminhante após um tempo t , com a variância (definida como o quadrado do desvio padrão) linearmente proporcional ao tempo.

Considere então uma caminhada aleatória de N passos em uma dimensão, onde cada passo possui um comprimento aleatório x obtido da mesma distribuição de probabilidades $p(x)$, com média nula. O matemático francês Paul Lévy propôs a seguinte pergunta [44]: quando é que a densidade de probabilidade $p_N(X)$ para a soma dos N passos $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ possui a mesma distribuição $p(x)$ dos passos individuais, a menos de um fator de escala? Esta é basicamente a pergunta que define as fractais, ou seja, quando é que o todo se parece com as suas partes mais fundamentais? A resposta padrão, inspirada na dedução do TLC, é que $p(x)$ deve ser gaussiana, porque a soma de N gaussianas ainda é uma gaussiana, com N vezes a variância da distribuição original dos passos individuais. Lévy provou, contudo, que existem ainda outras respostas para esta pergunta. Todas elas, no entanto, envolvem variáveis aleatórias com variâncias infinitas.

Augustine Cauchy, em 1853, foi o primeiro [44] a perceber que existiam outras soluções para o problema da adição de N variáveis aleatórias, sendo uma delas a função característica, definida como a transformada de Fourier da distribuição $p_N(x)$ (ver a Eq. (1.10)):

$$\phi_N(k) = \exp(-N|k|^\alpha). \quad (1.47)$$

¹ A importância de definir o desvio generalizado σ_q desta forma é consequência do desvio padrão ($q = 2$) divergir para distribuições do tipo cauda longa, como veremos na próxima seção.

O famoso exemplo de Cauchy é o caso $\alpha = 1$ que, quando transformado de volta no espaço x , assume a forma

$$p_N(x) = \frac{1}{\pi N} \frac{1}{1 + (x/N)^2} = \frac{1}{N} p_1(x/N) . \quad (1.48)$$

Esta expressão é atualmente conhecida como *distribuição de Cauchy* [44]. Ela mostra explicitamente a conexão entre uma distribuição de passo único, $p_1(x)$, e sua extensão para N passos, $p_N(x)$.

Na década de 1930, Lévy generalizou este resultado, obtendo as chamadas distribuições α -estáveis de Lévy, com parâmetro α compreendido entre 0 e 2 para $p(x)$ ser não negativa para todo x , o que é uma condição necessária para uma probabilidade.

Mais formalmente, por definição uma variável aleatória X é *estável* se para X_1 e X_2 cópias independentes de X e quaisquer constantes positivas a e b , vale a relação [45]

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d , \quad (1.49)$$

para alguma constante positiva c e algum $d \in \mathbb{R}$.² A palavra estável é bem apropriada neste contexto, pois indica que a forma da distribuição é estável ou permanece inalterada quanto a somas do tipo acima definidas. Existem apenas três casos para os quais é possível escrever expressões fechadas para as densidades de probabilidade $p(x)$ e verificar diretamente que elas são estáveis: as distribuições gaussianas, de Cauchy e de Lévy.³

Embora útil, a definição acima não mostra uma forma concreta de parametrizar todas as possíveis distribuições estáveis $p(x)$. A maneira mais simples de descrevê-las é através de sua função característica $\phi(k)$. Como vimos, para uma variável aleatória x com função densidade de probabilidade $p(x)$, definimos a função característica como a transformada de Fourier de $p(x)$, i.e.

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) p(x) dx . \quad (1.50)$$

A função $\phi(k)$ determina completamente a distribuição de x e possui várias propriedades matemáticas interessantes e úteis. Pode-se mostrar [45] que as distribuições estáveis possuem, em geral, função característica da forma

$$\phi(k) = \begin{cases} \exp(-|k|^\alpha [1 - i\beta \tan(\pi\alpha/2) \text{sign}(k)]), & \text{para } \alpha \neq 1 ; \\ \exp(-|k| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(k) \ln |k|]), & \text{para } \alpha = 1 , \end{cases} \quad (1.51)$$

onde $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, e $\text{sign}(k)$ é a função sinal. Esta expressão nada mais é que uma generalização da função característica encontrada por Cauchy para $\alpha = 1$, com a introdução de uma fase dependendo do novo parâmetro β , responsável pela assimetria da distribuição.

²O símbolo $\stackrel{d}{=}$ significa igualdade entre distribuições, i.e., os conjuntos à esquerda e à direita do símbolo $\stackrel{d}{=}$ são distribuídos segundo a mesma lei de probabilidades.

³Denominam-se comumente na literatura distribuições α -estáveis de Lévy como aquelas que constituem a classe de todas as distribuições estáveis [2, 45]. Por outro lado, a nomenclatura *distribuição de Lévy* é frequentemente empregada para caracterizar uma escolha particular dos parâmetros que definem as distribuições α -estáveis, explicitamente $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$ (definiremos β mais adiante) [2, 45]. Em nosso trabalho, utilizaremos a denominação *distribuição de Lévy* para o limite assintótico de longos passos das distribuições α -estáveis de forma geral.

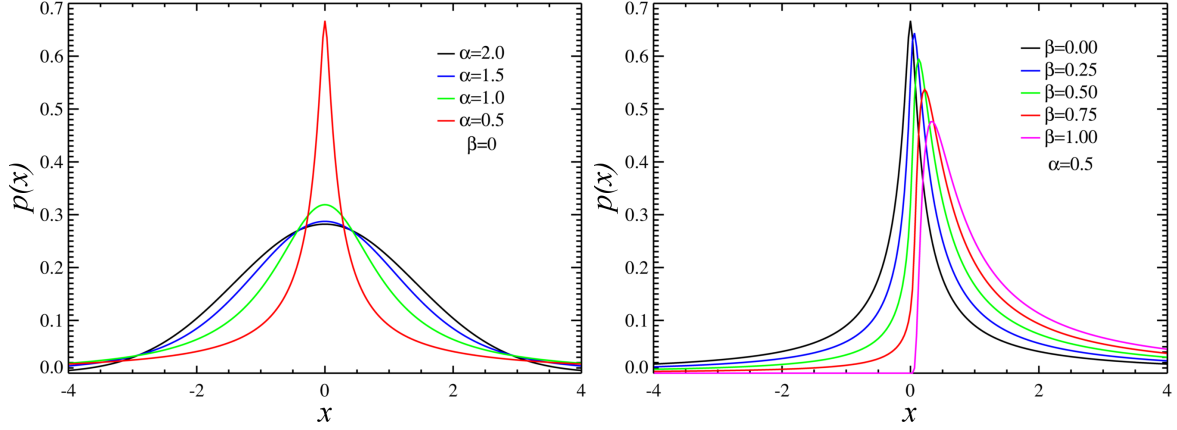


Figura 1.6 Gráficos de distribuições α -estáveis de Lévy simétricas ($\beta = 0$) e assimétricas ($\beta \neq 0$), para diferentes valores desses parâmetros.

A enorme importância das distribuições estáveis reside no fato que estas se comportam como “atratores” estatísticos, de modo similar ao comportamento de gaussianas como consequência do TLC, mas com uma abrangência muito maior por não exigirem finitude dos momentos. Este importante resultado é conhecido como o *Teorema do Limite Central generalizado*.

Como discutimos, o TLC afirma que a soma normalizada de termos independentes com média e variância finitas converge para uma distribuição gaussiana. Por outro lado, o Teorema do Limite Central generalizado mostra que se o requisito da variância e momento finitos for ignorado, os únicos resultados limites possíveis são as distribuições estáveis, descritas pela Eq. (1.51).

Em tais casos, é possível se obter a seguinte relação para a distribuição da variável $y = x_1 + \dots + x_N$, no limite de um grande número de passos [46],

$$p_{x,\alpha}(x, N) \sim \frac{1}{N^{1/\alpha}} p_{y,\alpha}(x/N^{1/\alpha}), \quad (1.52)$$

em contraste com o caso gaussiano (TLC), em que

$$p_x(x, N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}} p_y(x/\sqrt{N}). \quad (1.53)$$

Como consequência, o desvio generalizado em uma caminhada de Lévy escala superdifusivamente com o número de passos,

$$\sigma_q \sim N^{1/\alpha} \quad (1.54)$$

diferentemente do resultado browniano, Eq. (1.27). Desse modo, trajetórias em caminhadas de Lévy tornam-se geometricamente distinguíveis das trajetórias de movimentos brownianos comuns. Esta é apenas uma das surpresas geradas ao utilizar estratégias não-gaussianas na busca, e um dos principais motivos para a aplicação desta distribuição em sistemas mais complexos.

Em particular, como analisaremos em maior detalhe na próxima seção, quando o valor absoluto de x é grande, $p(x)$, dado pela transformada inversa da função característica $\phi(k)$, é aproximadamente igual a $|x|^{-1-\alpha}$, o que implica que o segundo momento diverge para α

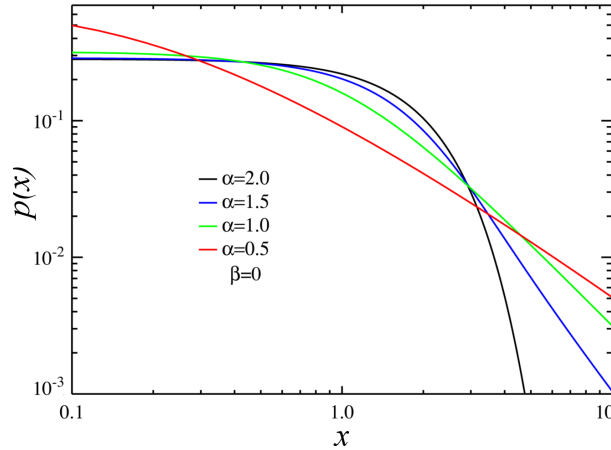


Figura 1.7 Gráficos log-log de distribuições α -estáveis simétricas ($\beta = 0$). O comportamento tipo lei de potência para valores grandes de x é evidenciado pelo aparecimento de uma linha reta neste limite, com inclinação igual a $-(\alpha + 1)$. A única exceção é para $\alpha = 2$, em preto, que é uma distribuição normal.

menor do que 2, e até mesmo o primeiro momento diverge para $0 < \alpha \leq 1$. Isto significa que não existe uma escala característica para os saltos do caminhante, exceto no caso particular gaussiano com $\alpha = 2$. É justamente este fato que leva as caminhadas aleatórias de Lévy a apresentarem caráter fractal. Na seção seguinte, trabalharemos de modo mais explícito alguns dos resultados acerca das distribuições de Lévy apenas mencionados na presente seção.

1.5 Caminhadas e Vôos de Lévy

Distribuições de Lévy já foram usadas com sucesso para modelar inúmeros eventos aleatórios, como a inversão dos pólos magnéticos terrestres [47], o caminho percorrido por um fóton em um meio turbulento [48] e mais recentemente, em 1987, foi escolhida na área de Econofísica para modelar [49] os riscos da bolsa pela *Options Clearing Corporation* devido à sua maior adequação para levar em conta eventos estatísticos raros, comparativamente às distribuições gaussianas. Em fisiologia, Peng *et al.* [50] encontraram que o intervalo entre duas batidas do coração humano satisfaz uma distribuição de Lévy, com valores de $\mu = \alpha + 1 = 2.7$ correspondendo a pessoas saudáveis (dentro, portanto, do regime de Lévy), enquanto o comportamento gaussiano $\mu > 3$ foi obtido para pessoas doentes. Brockman *et al.* [17] também encontraram uma distribuição de Lévy no deslocamento de notas de um dólar em território americano, ao estudar o fluxo populacional humano. Mais recentemente, González [17] *et al.* reforçaram este resultado para o fluxo populacional utilizando um grande número de dados de deslocamentos de pessoas entre a recepção de duas chamadas consecutivas de telefone celular, ao longo de um período de seis meses.

Ainda na década de 90, distribuições de Lévy foram aplicadas para modelar processos de busca aleatória inspiradas em problemas de predação [12]. Estas se mostraram bem adequadas em processos naturais por descreverem bem comportamentos difusivos anômalos, governados

por saltos raros mas extremamente grandes das partículas difundidas.

Nesse contexto, faz-se necessário introduzir a diferença entre caminhadas de Lévy (em inglês, *Lévy walks*) e vôos de Lévy (em inglês, *Lévy flights*). Na verdade embora existam várias definições para caminhadas e vôos de Lévy, nos concentraremos na definição mais usada na literatura [2]. Para vôos de Lévy, assumimos que a duração de cada passo é constante, de forma que a velocidade e o tempo total de percurso são, respectivamente, proporcionais ao comprimento do passo e ao número de passos. Em particular, vôos de Lévy podem ser definidos com passos instantâneos (duração nula), de forma que o buscador efetivamente salta entre as posições de destino no espaço de busca. Consequentemente, o deslocamento médio quadrático não existe como função do tempo. Essa propriedade impede aplicações diretas de vôos de Lévy em fenômenos físicos.

Em contraste, nas caminhadas de Lévy o buscador viaja com velocidade finita (*e.g.*, constante), independente do tamanho do passo. Então, o tempo de percurso é proporcional à distância total percorrida, fazendo com que o deslocamento médio quadrático exista como função do tempo, mas cresça superlinearmente, isto é, de forma superdifusiva. É esta propriedade que torna as caminhadas de Lévy adequadas para modelar o comportamento de difusão anômala. A distância total percorrida em um vôo de Lévy corresponde então ao tempo total de percurso em uma caminhada de Lévy.

Vimos na Eq. (1.11) que a distribuição de probabilidades $p(\ell, N)$ para a soma de N passos s_i é dada pela transformada de Fourier inversa da função característica dos passos individuais elevada à N -ésima potência, usando apenas a condição de que as variáveis s_i são independentes e identicamente distribuídas,

$$p(\ell, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik\ell) [\phi(k)]^N dk . \quad (1.55)$$

A função característica $\phi(k)$ da distribuição para os passos individuais em vôos de Lévy simétricos é dada pela Eq. (1.51) com $\beta = 0$:

$$\phi(k) = \exp(-\ell_0^\alpha |k|^\alpha) , \quad (1.56)$$

onde ℓ_0 é uma constante com dimensão de comprimento. O TLC generalizado garante então que após um número grande de passos N , a densidade de probabilidade de deslocamento ℓ em um processo de vôo de Lévy converge para uma distribuição α -estável de Lévy, dada, após observar que a parte imaginária da equação anterior se anula, por:

$$p(\ell, N) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-N\ell_0^\alpha k^\alpha) \cos(k\ell) dk , \quad (1.57)$$

com $0 < \alpha \leq 2$. Esta distribuição é uma generalização da distribuição gaussiana, e para $\alpha < 2$ gera, via expansão em série de Taylor, um decaimento tipo lei de potência com a distância para ℓ grande:

$$p(\ell, N) = \frac{N\Gamma(\mu) \sin(\pi(\mu-1)/2)}{\pi\ell_0} \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^\mu + O(\ell^{-2\mu+1}) \quad (1.58)$$

onde

$$\mu = \alpha + 1 , \quad (1.59)$$

e $\Gamma(x)$ representa a função gama.

Na maior parte deste trabalho, consideramos um caminhante aleatório unidimensional com comprimentos de passos ℓ estatisticamente independentes, distribuídos por uma densidade de probabilidades na forma da lei de potência

$$p(\ell) = A_l \frac{1}{|\ell|^\mu}, \quad \text{se } |\ell| \geq \ell_0 , \quad (1.60)$$

e $p(\ell) = 0$ caso contrário, com o corte inferior ℓ_0 representando o comprimento de vôo mínimo (de fato, distribuições com esta forma e $\ell_0 = 0$ não são normalizáveis). Acima, convencionamos que passos de “tamanho negativo”, $|\ell| = -\ell$, representam deslocamentos para a esquerda. Passos de mesmo tamanho para a esquerda e para a direita são equiprováveis.

Como $p(\ell)$ deve ser normalizado à unidade, devemos ter

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\ell) d\ell = A_l \int_{-\infty}^{-\ell_0} \frac{d\ell}{|\ell|^\mu} + A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{d\ell}{|\ell|^\mu} = 1 . \quad (1.61)$$

Fazendo $u = -\ell \rightarrow du = -d\ell$ e ajustando os limites de integração na primeira integral, esta vai ficar igual à

$$A_l \int_{\infty}^{\ell_0} \frac{-du}{|-u|^\mu} = A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{du}{|u|^\mu} , \quad (1.62)$$

que é igual a segunda integral. Então,

$$2A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{d\ell}{|\ell|^\mu} = 1 \quad \therefore \quad \left. \frac{\ell^{1-\mu}}{1-\mu} \right|_{\ell_0}^{\infty} = \frac{1}{2A_l} , \quad (1.63)$$

e para a normalização não divergir, devemos ter $\mu > 1$. Ainda, calculamos explicitamente o valor de A_l :

$$\frac{\ell_0^{1-\mu}}{\mu-1} = \frac{1}{2A_l} \quad \therefore \quad A_l = \frac{(\mu-1)}{2} \ell_0^{\mu-1} . \quad (1.64)$$

Reescrevemos então a distribuição como

$$p(\ell) = A_l \frac{1}{|\ell|^\mu} = \frac{(\mu-1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \frac{1}{|\ell|^\mu}, \quad \text{se } |\ell| \geq \ell_0 . \quad (1.65)$$

Denominaremos esta como a *distribuição de Lévy* ao longo de nosso trabalho (ver, também, a nota de rodapé à pág. 16). Comparando com o limite assintótico para distribuições α -estáveis de Lévy, observamos que a escolha $N^{-1} = 2\Gamma(\alpha+1) \sin(\pi\alpha/2)/(\pi\alpha)$ garante que o comportamento assintótico desta é idêntico ao da distribuição acima definida.

Uma distribuição com comprimentos de passos ℓ tão larga implica em momentos divergentes de ordem m , para $m \geq \mu - 1$ e $\mu < 3$. Vamos calcular o primeiro momento $\bar{\ell}$ desta distribuição:

$$\bar{\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} \ell p(\ell) d\ell = A_l \int_{-\infty}^{-\ell_0} \frac{\ell}{|\ell|^\mu} d\ell + A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{\ell}{|\ell|^\mu} d\ell \quad (1.66)$$

Fazendo a substituição $u = -\ell \longrightarrow du = -d\ell$ e ajustando os limites de integração na primeira integral, esta vai ficar igual a

$$A_l \int_{\infty}^{\ell_0} \frac{-u}{|-u|^\mu} (-du) = A_l \int_{\infty}^{\ell_0} \frac{u}{|u|^\mu} du = -A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{u}{|u|^\mu} du, \quad (1.67)$$

que é o simétrico da segunda integral. Note que ambas são iguais a

$$\int_{\ell_0}^{\infty} \frac{u}{|u|^\mu} du = \int_{\ell_0}^{\infty} u^{1-\mu} du = u^{2-\mu} \Big|_{\ell_0}^{\infty}, \quad (1.68)$$

supondo $\mu \neq 2$, divergindo para $\mu < 2$. Para $\mu = 2$, temos que

$$\int_{\ell_0}^{\infty} \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_{\ell_0}^{\infty}, \quad (1.69)$$

que também diverge. Portanto, a soma das duas integrais se anula apenas para $\mu > 2$, caso em que $\bar{\ell} = 0$. O primeiro momento é então nulo para $\mu > 2$ e diverge para $\mu \leq 2$.

Calculando o segundo momento, obtemos

$$\bar{\ell}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^2 p(\ell) d\ell = A_l \int_{-\infty}^{-\ell_0} \frac{\ell^2}{|\ell|^\mu} d\ell + A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{\ell^2}{|\ell|^\mu} d\ell. \quad (1.70)$$

Fazendo a substituição $u = -\ell \longrightarrow du = -d\ell$ e ajustando os limites de integração na primeira integral, esta vai ficar igual a

$$A_l \int_{\infty}^{\ell_0} \frac{(-u)^2}{|-u|^\mu} (-du) = A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{u^2}{|u|^\mu} du, \quad (1.71)$$

que é igual a segunda integral. Para $\mu \neq 3$, a expressão para o segundo momento fica então

$$\bar{\ell}^2 = 2A_l \frac{u^{3-\mu}}{3-\mu} \Big|_{\ell_0}^{\infty} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{2A_l}{3-\mu} \right) (u^{3-\mu} - \ell_0^{3-\mu}). \quad (1.72)$$

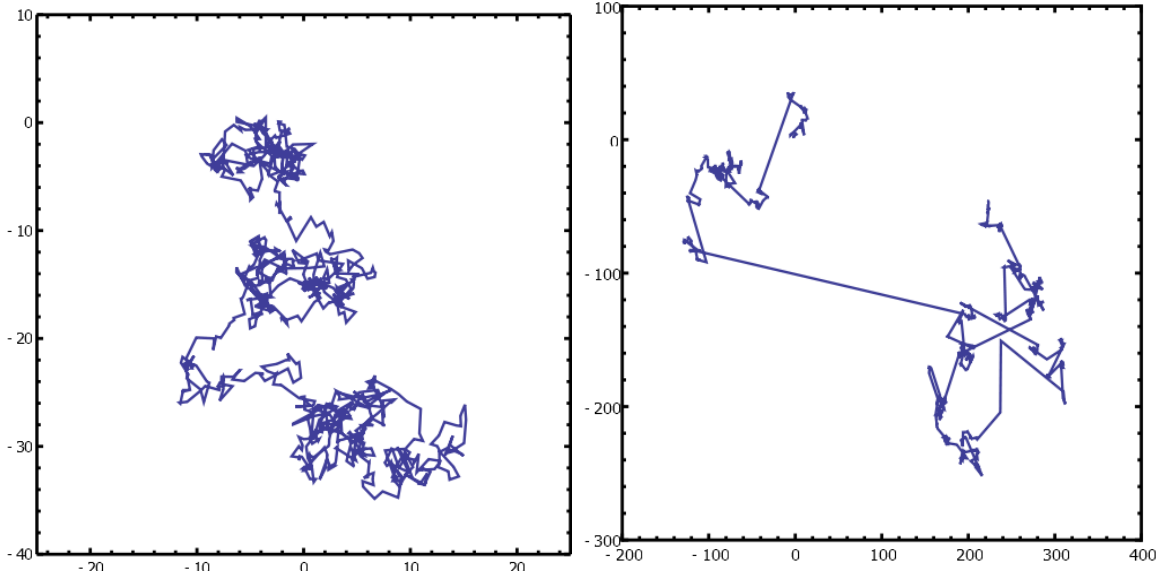


Figura 1.8 Um exemplo de caminhada aleatória com 1000 passos em duas dimensões. O caminhante inicia o movimento em $[0, 0]$, com direção angular uniformemente distribuída. À esquerda, temos uma aproximação do movimento browniano utilizando vãos de Lévy, onde os tamanhos dos passos são obtidos através de uma distribuição α -estável de Lévy com $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ (i.e. uma distribuição gaussiana). À direita, temos um vão de Lévy, onde os tamanhos dos passos são obtidos através de uma distribuição α -estável de Lévy com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ (i.e. uma distribuição de Cauchy). Note a presença de grandes saltos na posição comparado com o movimento browniano ilustrado na figura à esquerda.

Caso $\mu < 3$, o limite acima diverge, e consequentemente $\overline{\ell^2}$ diverge. Para $\mu = 3$, a integral fica levemente diferente,

$$\overline{\ell^2} = 2A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{u^2}{u^3} du = 2A_l \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{1}{u} du = 2A_l \ln u \Big|_{\ell_0}^{\infty}, \quad (1.73)$$

que também diverge, acarretando na divergência de $\overline{\ell^2}$. Para $\mu > 3$, o limite acima tende para

$$\overline{\ell^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{2A_l}{3 - \mu} \right) (u^{3-\mu} - \ell_0^{3-\mu}) = \frac{2A_l \ell_0^{3-\mu}}{\mu - 3} = \frac{(\mu - 1) \ell_0^{\mu-1}}{(\mu - 3) \ell_0^{\mu-3}} = \frac{(\mu - 1)}{(\mu - 3)} \ell_0^2, \quad (1.74)$$

e como os primeiro e segundo momentos são finitos, $p(\ell)$ obedece ao TLC no intervalo $\mu > 3$.

Como o segundo momento da distribuição acima diverge para $1 < \mu \leq 3$, o teorema do limite central não vale neste intervalo, e uma dinâmica difusiva anômala (superdifusiva) emerge, como discutido anteriormente. De fato, para caminhadas de Lévy, como a velocidade é finita, assumimos que $t \sim \langle L \rangle$, de forma que $\langle L^2 \rangle^{1/2}$ está bem definida como função do tempo. Já para vãos de Lévy, o deslocamento total médio quadrático $\langle L^2 \rangle^{1/2}$ não existe como função do tempo, pois a duração de cada passo é constante, podendo inclusive ser considerada nula (passos realizados instantaneamente), como vimos. Para contornar este problema, definimos então

um tempo operacional, proporcional ao número de passos N . Assim, é possível associar a caminhadas e vôos de Lévy um expoente de Hurst, tal que [2] $H > 1/2$ para $1 < \mu \leq 3$, enquanto o comportamento browniano (caminhadas difusivas com $H = 1/2$) emerge para $\mu > 3$ [51]. Em particular, para caminhadas de Lévy, encontramos que $H = 1$ para $1 < \mu \leq 2$, com uma dinâmica balística surgindo no limite $\mu \rightarrow 1$.

A dependência tipo lei de potência em ℓ implica na propriedade $p(\gamma\ell) = \gamma^{-\mu}p(\ell)$ de autossimilaridade, válida até a escala de corte inferior ℓ_0 , gerando então comprimentos de passo sem uma escala característica e caminhadas de busca aleatória com invariância de escala, com uma dimensão fractal [2] do conjunto dos sítios visitados dada por $d_f = \mu - 1$, com $1 < \mu \leq 3$. Para $\mu > 3$, $d_f = 2$, e recaímos na caminhada browniana.

Como demonstrado nesta seção, para $\mu > 3$ os dois primeiros momentos convergem, e portanto $p(\ell)$ obedece ao TLC (regime gaussiano). É possível explicitar a distribuição gaussiana limite correspondente ao caso $\mu > 3$ após um grande número de passos. Para a nossa distribuição em questão, sabemos que

$$\bar{\ell} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\ell^2} = \frac{(\mu - 1)}{(\mu - 3)} \ell_0^2 \quad \therefore \quad \overline{(\Delta\ell)^2} = \overline{\ell^2} - \bar{\ell}^2 = \frac{(\mu - 1)}{(\mu - 3)} \ell_0^2. \quad (1.75)$$

Então, os parâmetros μ e σ^2 , definidos nas Eqs. (1.24) e (1.25), valem

$$\sigma^2 \equiv N \overline{(\Delta\ell)^2} = N \frac{(\mu - 1)}{(\mu - 3)} \ell_0^2 \quad \text{e} \quad \mu \equiv N \bar{\ell} = 0 \quad (1.76)$$

(note que o parâmetro da distribuição de Lévy, $\mu = \alpha + 1$, não deve ser confundido com o valor esperado da gaussiana limite, μ). Como vimos na Seção 1.2, a gaussiana limite para $\mu > 3$ é então dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\mu - 1)\ell_0^2/(\mu - 3)}} \exp\left(\frac{-(\mu - 3)x^2}{2N(\mu - 1)\ell_0^2}\right). \quad (1.77)$$

Em contraste, o motivo pelo qual a distribuição de Lévy não obedece ao TLC é a existência de uma cauda longa, ou seja, do limite assintótico de grandes passos tender a zero como lei de potência $|\ell|^{-\mu}$. Como ilustração, consideremos uma distribuição de Lévy com um truncamento do tipo exponencial a partir de um ponto arbitrário λ . Esta é apenas uma das possibilidades de truncamento que podemos definir, isto é,

$$w(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{se } |s| < \ell_0 ; \\ A/|s|^\mu ds & \text{se } \ell_0 < |s| < \lambda ; \\ B \exp(-\alpha|s|) ds & \text{se } |s| > \lambda . \end{cases} \quad (1.78)$$

A diferença primordial aqui é que a cauda não é mais do tipo polinomial, e sim exponencial. Não é difícil mostrar que isso é suficiente para que $w(s)$ passe a obedecer o TLC. Calculando o

primeiro momento,

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \int_{-\infty}^{\infty} s w(s) ds \\ &= B \int_{-\infty}^{-\lambda} s \exp(-\alpha|s|) ds + A \int_{-\lambda}^{-\ell_0} \frac{s}{|s|^\mu} ds + A \int_{\ell_0}^{\lambda} \frac{s}{|s|^\mu} ds + B \int_{\lambda}^{\infty} s \exp(-\alpha|s|) ds .\end{aligned}\quad (1.79)$$

Vamos desenvolver as duas primeiras integrais. Fazendo $u = -s \rightarrow du = -ds$ na primeira integral, esta fica igual a

$$B \int_{\infty}^{\lambda} (-u) \exp(-\alpha|-u|) (-du) = -B \int_{\lambda}^{\infty} s \exp(-\alpha|s|) ds , \quad (1.80)$$

que é o simétrico da quarta integral. A soma das duas portanto se anula. Fazendo a mesma substituição na segunda integral,

$$A \int_{\lambda}^{\ell_0} \frac{(-u)}{|-u|^\mu} (-du) = -A \int_{\ell_0}^{\lambda} \frac{u}{|u|^\mu} du , \quad (1.81)$$

obtemos o simétrico da terceira integral. A soma das duas se anula e então $\bar{s} = 0$. O primeiro momento dessa distribuição é portanto finito. Para o segundo momento,

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2 w(s) ds \\ &= B \int_{-\infty}^{-\lambda} s^2 \exp(-\alpha|s|) ds + A \int_{-\lambda}^{-\ell_0} \frac{s^2}{|s|^\mu} ds + A \int_{\ell_0}^{\lambda} \frac{s^2}{|s|^\mu} ds + B \int_{\lambda}^{\infty} s^2 \exp(-\alpha|s|) ds .\end{aligned}\quad (1.82)$$

Repetindo o procedimento anterior, com as mesmas substituições, a primeira integral fica igual a

$$B \int_{-\infty}^{-\lambda} s^2 \exp(-\alpha|s|) ds = B \int_{\infty}^{\lambda} (-u)^2 \exp(-\alpha|-u|) (-du) = B \int_{\lambda}^{\infty} u^2 \exp(-\alpha|u|) du , \quad (1.83)$$

que é igual a quarta integral. Fazendo a mesma substituição na segunda integral,

$$A \int_{-\lambda}^{-\ell_0} \frac{s^2}{|s|^\mu} ds = A \int_{\lambda}^{\ell_0} \frac{(-u)^2}{|-u|^\mu} (-du) = A \int_{\ell_0}^{\lambda} \frac{u^2}{|u|^\mu} du , \quad (1.84)$$

que é igual à terceira integral. Podemos então resumidamente escrever

$$\overline{s^2} = 2 \left[\int_{\ell_0}^{\lambda} A \frac{s^2}{|s|^\mu} ds + \int_{\lambda}^{\infty} B s^2 \exp(-\alpha|s|) ds \right]. \quad (1.85)$$

Resta-nos saber se alguma dessas integrais diverge em algum intervalo de μ . Supondo $\mu \neq 3$, a primeira integral se resolve como

$$\int_{\ell_0}^{\lambda} A \frac{s^2}{|s|^\mu} ds = \frac{A}{3-\mu} s^{3-\mu} \Big|_{\ell_0}^{\lambda} = \frac{A}{3-\mu} (\lambda^{3-\mu} - \ell_0^{3-\mu}). \quad (1.86)$$

Para $\mu = 3$, temos que

$$A \int_{\ell_0}^{\lambda} \frac{s^2}{|s|^3} ds = \int_{\ell_0}^{\lambda} \frac{A}{|s|} ds = A \ln s \Big|_{\ell_0}^{\lambda} = A(\ln \lambda - \ln \ell_0) = A \ln(\lambda/\ell_0). \quad (1.87)$$

Já para a segunda integral, ao integrarmos por partes,

$$\int_{\lambda}^{\infty} s^2 \exp(-\alpha|s|) ds = \frac{\exp(-\alpha s)}{-\alpha} s^2 \Big|_{\lambda}^{\infty} + \frac{2}{\alpha} \int_{\lambda}^{\infty} s \exp(-\alpha s) ds. \quad (1.88)$$

Integrando mais uma vez por partes, obtemos como resultado

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\infty} s^2 \exp(-\alpha|s|) ds &= \frac{\lambda^2 \exp(-\alpha\lambda)}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \left[\frac{s \exp(-\alpha s)}{(-\alpha)} \Big|_{\lambda}^{\infty} + \frac{1}{\alpha} \int_{\lambda}^{\infty} \exp(-\alpha s) ds \right] \\ &= (\alpha\lambda^2 + 2\lambda + 1) \frac{\exp(-\alpha\lambda)}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Então, o segundo momento também é finito, sendo dado para $\mu \neq 3$ por

$$\overline{s^2} = 2 \left[\frac{A}{3-\mu} (\lambda^{3-\mu} - \ell_0^{3-\mu}) + (\alpha\lambda^2 + 2\lambda + 1) \frac{\exp(-\alpha\lambda)}{\alpha^2} \right] < \infty \quad (1.90)$$

e, para $\mu = 3$ por

$$\overline{s^2} = 2 \left[A \ln(\lambda/\ell_0) + (\alpha\lambda^2 + 2\lambda + 1) \frac{\exp(-\alpha\lambda)}{\alpha^2} \right] < \infty. \quad (1.91)$$

Como não há nenhuma restrição no valor de μ para que os dois momentos convirjam, $w(s)$ obedece ao TLC mesmo no intervalo $1 \leq \mu \leq 3$. Fica então clara a importância da cauda longa polinomial para que a distribuição apresente todas as características anômalas e interessantes inerentes às distribuições de Lévy.

Agora que já possuímos um entendimento maior acerca da distribuição de Lévy e de suas principais características, vamos definir no próximo capítulo o nosso modelo de busca e associar a este uma eficiência, analisando os fatores a influenciam, em busca de sua maximização.

Expressão analítica e discretização

2.1 Descrição do modelo

Iniciaremos o presente capítulo descrevendo o modelo de busca aleatória em que iremos trabalhar [14].

Considere um caminhante buscando sítios aleatoriamente distribuídos em um espaço d -dimensional. Seja λ o livre caminho médio associado à distribuição de sítios-alvo. Se considerarmos que o caminhante possui um raio de visão r_v , dentro do qual ele consegue detectar sítios-alvo, então durante uma busca no espaço d -dimensional, o caminhante “varre” efetivamente uma área ao longo de um corredor com seção transversal proporcional a r_v^{d-1} . Nesse caso, λ pode ser interpretado como o comprimento médio deste corredor entre dois sítios-alvo aleatoriamente distribuídos,

$$\lambda \sim \frac{1}{\rho r_v^{d-1}}, \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade dos sítios-alvo [52].

A busca aqui considerada procederá obedecendo a duas regras básicas:

1. Se existir um sítio localizado a uma distância r_v do caminhante, este se dirige ao sítio em linha reta;
2. Caso contrário, o caminhante sorteia aleatoriamente uma direção e um tamanho de passo ℓ usando uma distribuição de probabilidade $p(\ell)$ e se move para uma nova posição, sempre procurando sítios a uma distância máxima r_v de si ao longo da caminhada. Se um sítio não for encontrado ao final, uma nova direção e distância são sorteadas e a caminhada prossegue. De outro modo, se o caminhante encontra um sítio ao longo do percurso, ele trunca o passo e se desloca ao sítio de acordo com a regra 1.

A primeira regra é essencialmente baseada na existência de um mecanismo de curto alcance para a detecção dos sítios-alvo, constituindo o regime de passos com comprimento curto. Por outro lado, a segunda regra de fato envolve uma busca aleatória e governa os regimes de passos médios e longos. Logo, para a segunda regra entrar em vigor, o parâmetro característico λ deve exceder consideravelmente r_v , isto é, $\lambda \gg r_v$. Este limite está associado com os casos de concentrações média e baixa dos sítios-alvo no espaço de busca. Em contraste, quando os sítios-alvo são abundantes, eventos do segundo tipo se tornam raros e o processo de busca é regido pelo mecanismo de detecção, descritos pela primeira regra.

Embora extremamente simples, o modelo acima consegue capturar os elementos essenciais na dinâmica da busca. A existência de um raio de visão finito r_v introduz uma restrição espacial

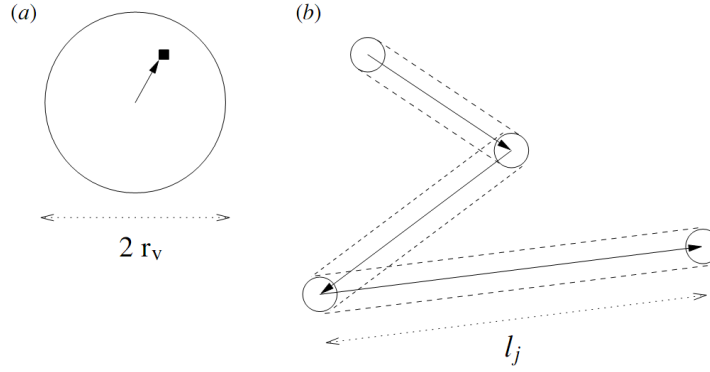


Figura 2.1 Modelo de busca aleatória: [14] (a) se um sítio-alvo (quadrado preto) está localizado dentro de um raio de visão r_v , então o buscador se move em linha reta até ele; (b) caso contrário, o buscador escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo ℓ_j a partir de uma distribuição $p(\ell)$ e incrementa seu deslocamento, procurando continuamente por um sítio dentro de um raio r_v ao longo de sua trajetória.

importante, bem como distingue claramente os dois mecanismos envolvidos nos limites de diferentes concentrações de sítios. Descartamos inicialmente efeitos de memória, relações do tipo presa-predador, variações no balanço energético ao longo da busca e outros fatores que pudessem dificultar consideravelmente o nosso tratamento. Na próxima seção, discutiremos qualitativamente acerca da relevância de tais fatores para a otimização da estratégia de busca.

Como vimos, devido à segunda regra, o buscador trunca seu percurso se encontrar um sítio-alvo dentro de uma distância r_v ao longo de seu caminho. Uma consequência direta para estratégias de Lévy é que este truncamento implica na distribuição de probabilidades efetiva corresponder a uma *distribuição de Lévy truncada* [14] com comprimento de corte característico associado λ , e que, como vimos no capítulo anterior, possui momentos finitos, muito embora a convergência para o comportamento gaussiano ocorra apenas após um número de passos extremamente grande [53]. De fato, esse limite de corte superior emerge naturalmente em processos de buscas reais (radares, celulares, animais, etc.) devido aos seus tamanhos finitos, ou, no caso da predação animal, devido a restrições biológicas que, por exemplo, podem levar um animal a morrer de fome se nenhum sítio de comida for localizado a uma certa distância máxima. Portanto, na natureza não existem efetivamente distribuições de Lévy “puras” (não-truncadas).

Da motivação inicial do modelo em estudar o mecanismo predatório de animais [14], várias adaptações foram realizadas para que situações de interesse biológico fossem recuperadas. Basicamente, podemos distinguir dois tipos de busca. Na **busca destrutiva**, após o caminhante encontrar o sítio, este não mais se torna disponível para uma busca posterior. Inserimos, então, aleatoriamente um sítio adicional de forma a manter a densidade de sítios ρ inalterada. Já na **busca não-destrutiva**, o caminhante pode revisitar um sítio encontrado quantas vezes quiser, desde que este esteja em seu raio de visão. Nesse caso, passa então a existir um interessante mecanismo de competição entre sair em busca de outros sítios distantes com grandes passos e ficar nas proximidades do sítio já encontrado com passos pequenos. As estratégias ótimas para cada tipo de busca são distintas, e para quantificá-las vamos definir uma função eficiência η .

2.2 Eficiência da busca

A definição mais simples para a eficiência da busca η é considerar que

$$\eta = \frac{\text{números de sítios encontrados}}{\text{distância total percorrida}}. \quad (2.2)$$

Assim, uma busca de grande eficiência é aquela que alia o encontro de muitos sítios-alvo ao longo do menor percurso realizado.

A distância total percorrida pode ser escrita como o produto do número de sítios encontrados pela distância média caminhada entre o encontro de dois sítios consecutivos, denotada por $\langle L \rangle$, de forma que

$$\eta = \frac{\# \text{ sítios}}{\# \text{ sítios} \cdot \langle L \rangle} = \frac{1}{\langle L \rangle} \quad (2.3)$$

Nosso objetivo passa a ser então calcular uma expressão para $\langle L \rangle$ como função da distribuição de probabilidades $p(\ell)$.

Em uma primeira aproximação, podemos escrever que $\langle L \rangle \approx N \cdot \langle \ell \rangle$, onde N e $\langle \ell \rangle$ são o número médio de passos entre o encontro de dois sítios consecutivos e o tamanho médio do passo individual, respectivamente. Nesse caso, a eficiência pode ser escrita então como

$$\eta \cong \frac{1}{N \langle \ell \rangle}. \quad (2.4)$$

Usando a distribuição de Lévy $p(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, $\langle \ell \rangle$ pode escrito aproximadamente como

$$\langle \ell \rangle \approx \frac{\lambda \int_{r_v}^{\infty} \ell^{1-\mu} d\ell + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell}{\int_{r_v}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell} = \left(\frac{\mu-1}{2-\mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}. \quad (2.5)$$

De fato, a segunda integral no numerador deste cálculo tipo “campo médio” é aproximada, pois assume que todos os passos com tamanho igual ou superior a λ são truncados pelo encontro de um sítio-alvo.

Note que um valor pequeno para η pode resultar de N grande ou de $\langle \ell \rangle$ grande. Por outro lado, valores grandes de μ em geral obrigam o caminhante a dar muitos saltos de pequeno comprimento para encontrar um sítio. No extremo oposto, valores pequenos de μ geram trajetórias compostas de grandes saltos, com o limite inferior para μ correspondendo a uma trajetória indefinidamente em linha reta (balística). É possível, portanto, que surjam situações, como veremos a seguir, em que tenhamos um máximo em η para valores intermediários de μ .

Em buscas destrutivas, o número médio de vôos N_d entre dois sítios sucessivos escala com [14] $N_d \sim (\lambda/r_v)^{\mu-1}$ para $1 < \mu \leq 3$, e $N_d \sim (\lambda/r_v)^2$ para $\mu \geq 3$, correspondendo ao movimento browniano. Para o caso não-destrutivo [14], $N_n \sim N_d^{1/2} \equiv (\lambda/r_v)^{(\mu-1)/2}$ para $1 < \mu \leq 3$.

Vamos considerar inicialmente o caso em que os sítios-alvo são abundantes, isto é, $\lambda \leq r_v$. Então $\langle \ell \rangle \approx \lambda$ e $N_d \approx N_n \approx 1$. Segue que η se torna essencialmente independente de μ . Este

comportamento não corresponde a movimentos regidos por Lévy porque vôos longos com $\ell \gg r_v$ são praticamente inexistentes.

Em seguida, vamos estudar o caso de nosso interesse no qual os sítios-alvo estão esparsamente distribuídos, definido por $\lambda \gg r_v$. No caso destrutivo, substituindo a expressão para N_d e para $\langle \ell \rangle$ em η , vemos que a eficiência média η possui máximo para $\mu \rightarrow 1^+$, com menores valores de μ levando a buscas mais eficientes [14]. Note que quando $\mu = 1 + \varepsilon$ com $\varepsilon \rightarrow 0^+$, a fração de vôos com $\ell < \lambda$ se torna desprezível, e efetivamente o buscador se move balisticamente em linha reta até detectar um sítio. Para buscas não-destrutivas, se $\lambda \gg r_v$, então $N_d \gg N_n$. Substituindo a expressão para N_n e para $\langle \ell \rangle$ em η e derivando em relação a μ , encontramos que a eficiência é ótima para [14]

$$\mu_{\text{opt}} = 2 - \delta, \quad (2.6)$$

onde $\delta \approx 1/[\ln(\lambda/r_v)]^2$. Logo, na ausência de um conhecimento prévio acerca da distribuição dos sítios-alvo, uma estratégia ótima para a busca não-destrutiva é escolher $\mu_{\text{opt}} \cong 2$ quando λ/r_v for grande, mas não exatamente conhecido.

Simulações numéricas deste modelo [14] para uma e duas dimensões mostram que os resultados aproximados obtidos acima são robustos, com $\mu_{\text{opt}} \cong 2$ no limite $\lambda \rightarrow \infty$ no caso não-destrutivo, e $\mu \rightarrow 1$ no caso destrutivo. Em contraste, se os sítios estão densamente distribuídos tal que $\lambda \approx r_v$, então, como esperado, não há efeitos significativos sobre η ao se variar o valor do expoente μ . Vale mencionar que as simulações numéricas que obtiveram estes resultados não sofreram das aproximações feitas no cálculo analítico acima.

Em nosso trabalho, vamos refinar o tratamento exposto acima, obtendo uma expressão analítica geral para $\langle L \rangle$ como função de uma distribuição $p(\ell)$ qualquer.

2.3 Modelo Unidimensional

Os comentários da última seção mostram que os resultados da eficiência ótima para Lévy parecem válidos em qualquer dimensão do espaço de busca. Isto é análogo ao comportamento de caminhantes aleatórios brownianos cujo deslocamento médio quadrático é proporcional ao número de passos em qualquer dimensão, como discutido no capítulo 1.

É importante ressaltar, no entanto, que a independência dos resultados com a dimensão d do espaço de busca não é trivial. Como exemplo, nas caminhadas auto-excluídas (em inglês, *self-avoiding random walks*) [54], onde não é permitido ao buscador visitar o mesmo ponto do espaço de busca mais de uma vez, a raiz quadrada do deslocamento total médio quadrático satisfaz a relação $\langle (\Delta x)^2 \rangle^{1/2} \sim N^v$, onde N é o número de passos e o expoente v depende da dimensão, isto é, $v \equiv v(d)$ para $d < 4$,

$$v = \begin{cases} 3/4, & \text{para } d = 2; \\ 0.59\dots, & \text{para } d = 3; \\ 1/2, & \text{para } d \geq d_c = 4. \end{cases} \quad (2.7)$$

A justificativa para esse resultado é que a restrição do caminhante não poder revisitar pontos de sua trajetória somada a um confinamento dimensional geram um comportamento anômalo

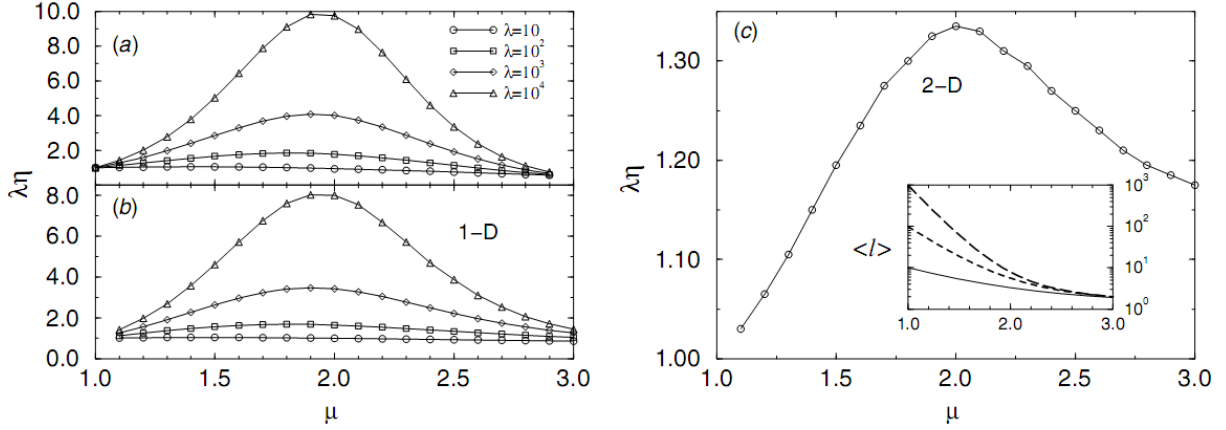
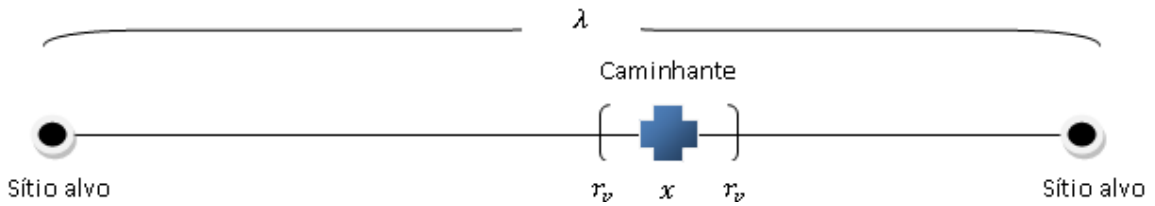


Figura 2.2 Gráfico do produto entre o livre caminho médio associado à distribuição de sítios-alvo λ e a eficiência da busca η vs. o expoente de Lévy μ em uma dimensão [14], para o caso de buscas não-destrutivas, (a) a partir da Eq. (2.4) e (b) de simulações numéricas. (c) $\lambda\eta$ em duas dimensões, para $\lambda = 5000$; a inserção mostra $\langle \ell \rangle$ como uma função de μ para $\lambda = 10$ (linha contínua), $\lambda = 10^2$ (traços), and $\lambda = 10^3$ (longos traços). Todos os dados foram obtidos usando $r_v = 1$.

superdifusivo. Para d maior que uma dimensão crítica $d_c = 4$, o espaço disponível para a caminhada é suficientemente grande e torna-se improvável que o caminhante revisite algum ponto da trajetória, tornando a restrição irrelevante. Fica então claro que modificações no modelo da busca podem gerar uma dependência com a dimensão nos resultados. Em nosso modelo, no entanto, essas preocupações podem ser relaxadas, com base em resultados já bem estabelecidos na literatura [14].

Resultados numéricos mostram ainda que as propriedades de escala são descritas corretamente mesmo na presença de correlações de curto alcance na direção e comprimento dos vôos. De fato, tais efeitos não são macroscopicamente relevantes, ao menos no que diz respeito ao valor do parâmetro μ que maximiza a eficiência da busca. Certamente, porém, outras quantidades relevantes, como por exemplo o valor da eficiência máxima, dependem dos ingredientes definidos no modelo. Como estamos interessados em obter a distribuição $p(\ell)$ que maximiza a busca (independentemente do seu valor), fatores como aprendizado, relações de presa-predador e outros efeitos de memória de curto alcance se tornam irrelevantes no limite de longos tempos e longas distâncias, motivo pelo qual os desprezamos neste trabalho.

Com essas observações em mente, consideramos um caminhante unidimensional, iniciando a busca em uma posição x no intervalo $[0, \lambda]$. Os sítios-alvo se encontram nas extremidades do intervalo, como ilustra a figura a seguir.



Como o raio de visão r_v é finito e não-nulo, a mínima distância que o caminhante pode

chegar dos sítios é igual à r_v e $\lambda - r_v$. A figura então fica:



Ao atingir os pontos r_v ou $\lambda - r_v$, o caminhante terá encontrado o sítio e a busca pelo próximo sítio então é iniciada. Para efeitos de cálculo, supomos a distância entre quaisquer dois sítios vizinhos igual a λ . Assim, toda a busca pode ser mapeada apenas no intervalo $0 \leq x \leq \lambda$. Claramente, a eficiência dependerá do ponto de partida do caminhante. De fato, podemos identificar os limites da busca destrutiva e não-destrutiva com pontos de partida do caminhante no intervalo. O limite da busca destrutiva é obtido com o caminhante partindo de $x = \lambda/2$, isto é, na metade do intervalo, visto que após um encontro de um sítio que é destruído, o buscador reinicia aproximadamente equidistante dos outros sítios. Já a busca não-destrutiva é realizada quando o caminhante parte de $x = r_v$, pois após o encontro com o sítio, o caminhante ainda se encontra bem próximo ao mesmo sítio, podendo, inclusive, revisitá-lo em seguida.

As distribuições de probabilidade que iremos considerar são do tipo modular (não há nenhuma preferência na direção, de forma que passos para a direita e esquerda são equiprováveis) e com um comprimento de corte inferior dado por ℓ_0 . Este corte tem, como vimos, a finalidade de tornar $p(\ell)$ normalizável, e está associado a um tamanho mínimo de passo que o caminhante poderá realizar. Como argumentamos, é de se esperar também um truncamento superior na distribuição $p(\ell)$ efetiva devido ao confinamento unidimensional.

Vamos em seguida obter uma expressão analítica para $\langle L \rangle$ neste modelo, a qual, como vimos, representa o inverso da sua eficiência η . Realizaremos nesse trabalho uma generalização para qualquer distribuição $p(\ell)$ dos resultados obtidos nas Refs. [55] para a distribuição de Lévy.

2.4 Cálculo da distância média percorrida entre sítios consecutivos

2.4.1 Densidades de probabilidade

Como a posição inicial do caminhante é definida por $x_0 = \alpha$, a densidade de probabilidade logo no início da busca, $\rho_0(x_0)$, é dada por uma função delta de Dirac, isto é, $\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - \alpha)$. Para o cálculo da densidade de probabilidade de se encontrar o caminhante entre x_1 e $x_1 + dx_1$ após o primeiro passo, $\rho_1(x_1)$, é suficiente realizar uma convolução entre $p(\ell)$ e $\rho_0(x_0)$, de forma que

$$\rho_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1 - x_0) \delta(x_0 - \alpha) dx_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1 - x_0) \rho_0(x_0) dx_0. \quad (2.8)$$

Similarmente, o cálculo da densidade de probabilidade após os dois primeiros passos, $\rho_2(x_2)$, é dado por

$$\rho_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_2 - x_1) p(x_1 - x_0) \delta(x_0 - \alpha) dx_0 dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_2 - x_1) \rho_1(x_1) dx_1 . \quad (2.9)$$

De forma geral, a expressão para a densidade de probabilidade como função da posição após $n + 1$ passos, $\rho_{n+1}(x_{n+1})$, é obtida pela convolução de $p(\ell)$ com ρ_n :

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(x_{n+1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{n+1} - x_n) p(x_n - x_{n-1}) \dots p(x_1 - x_0) \delta(x_0 - \alpha) dx_n \dots dx_0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{n+1} - x_n) \rho_n(x_n) dx_n . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para ρ_{n+1} , é necessário introduzir a restrição de que em x_{n+1} nenhum sítio foi ainda encontrado, de modo que haverá pelo menos o passo seguinte. Consequentemente, na expressão para ρ_{n+1} , $\rho_n(x_n) \neq 0$ se e somente se $r_v < x_n < \lambda - r_v$, modificando os limites de integração na expressão geral para $\rho_{n+1}(x_{n+1})$:

$$\rho_{n+1}(x_{n+1}) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(x_{n+1} - x_n) \rho_n(x_n) dx_n . \quad (2.11)$$

A obtenção analítica da densidade de probabilidade $\rho_n(x_n)$ para o n -ésimo passo permite responder algumas perguntas interessantes sobre a dinâmica da busca:

- Qual a probabilidade $\tilde{P}_n$ do caminhante **não** encontrar nenhum sítio após n passos?

Esta é igual a probabilidade do caminhante ainda se encontrar no intervalo $[r_v, \lambda - r_v]$ no n -ésimo passo, isto é,

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \underbrace{\rho_n(x_n)}_{\tilde{\rho}_n} dx_n \quad (2.12)$$

onde $\rho_n(x_n) \equiv \tilde{\rho}_n$ é a densidade de probabilidade de encontrar o caminhante na posição x_n após n passos, com $r_v < x_n < \lambda - r_v$, ou seja, sabendo que após n passos o encontro com o sítio ainda não se realizou.

- Qual a probabilidade $P_{>n}$ de encontrar um sítio em algum passo após n passos ($n + 1, n + 2, \dots, \infty$)?

Como a probabilidade do caminhante encontrar um sítio em algum passo após o primeiro passo é igual a 1 (pois a caminhada só cessa quando há o encontro do sítio), a probabilidade $P_{>n}$ é

igual a este evento (certo) menos a probabilidade de que o caminhante ainda não tenha encontrado nenhum sítio no n -ésimo passo, isto é, que ele ainda se encontre no intervalo $[r_v, \lambda - r_v]$ após n passos:

$$P_{>n} = 1 - \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n . \quad (2.13)$$

- Qual a probabilidade P_n de encontrar um sítio *exatamente* após n passos?

Pode-se observar que

$$P_n = \underbrace{\left[1 - \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x) dx \right]}_{\text{prob. de encontrar sítio em algum passo após } n \text{ passos}} - \overbrace{\left[1 - \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_{n-1}(x) dx \right]}^{\text{prob. de encontrar sítio em algum passo após } (n-1) \text{ passos}} \quad (2.14)$$

ou seja,

$$P_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \underbrace{[\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)]}_{\mathcal{P}_n(x)} dx \quad (2.15)$$

onde $\mathcal{P}_n(x)$ é a densidade de probabilidade do caminhante encontrar um sítio exatamente no n -ésimo passo, iniciado entre x e $x + dx$. Note que P_n satisfaz a condição de normalização esperada, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [(\rho_0(x) - \rho_1(x)) + (\rho_1(x) - \rho_2(x)) \dots] dx = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_0(x) dx = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \delta(x - \alpha) dx = 1 , \quad (2.16)$$

pois $0 < r_v < x_n < \lambda - r_v < \lambda$.

2.4.2 Definição do operador integral $\mathcal{L}$

Para simplificar as expressões do tratamento analítico a seguir, definimos o operador integral $\mathcal{L}$ por

$$\mathcal{L}[f(x)](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\alpha - x)[f(x)] dx . \quad (2.17)$$

O operador $\mathcal{L}$ realiza a convolução da função de entrada com a distribuição de probabilidade $p(\ell)$. A utilidade deste operador fica evidente quando o aplicamos em uma densidade de probabilidade $\rho_n(x_n)$:

$$\mathcal{L}[\rho_n(x_n)](\alpha) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(\alpha - x_n)[\rho_n(x_n)] dx_n \equiv \rho_{n+1}(\alpha) \quad (2.18)$$

onde os limites de integração foram alterados para satisfazer a restrição de que $\rho_n(x_n) \neq 0$ implica em $r_v < x_n < \lambda - r_v$, isto é, que o $n + 1$ -ésimo passo só existirá caso o caminhante não tenha encontrado sítios até o n -ésimo passo.

O operador $\mathcal{L}$ pode ser usado para deixar a expressão de $\rho_n(x_n)$ ainda mais compacta. Note que para $n = 0$,

$$\rho_1(x_1) = \mathcal{L}[\rho_0(x_0)](x_1) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x_1 - x_0) [\rho_0(x_0)] dx_0 . \quad (2.19)$$

Para $n = 1$,

$$\rho_2(x_2) = \mathcal{L}[\rho_1(x_1)](x_2) = \mathcal{L}[\mathcal{L}[\rho_0(x_0)]] \equiv \mathcal{L}^2[\rho_0(x_0)] . \quad (2.20)$$

Para $n = 2$,

$$\rho_3(x_3) = \mathcal{L}[\rho_2(x_2)] = \mathcal{L}[\mathcal{L}^2[\rho_0(x_0)]] \equiv \mathcal{L}^3[\rho_0(x_0)] . \quad (2.21)$$

Ou mais geralmente,

$$\rho_n(x_n) = \mathcal{L}[\mathcal{L}^{n-1}[\rho_0(x_0)]] \equiv \mathcal{L}^n[\rho_0(x_0)] . \quad (2.22)$$

Podemos então escrever a densidade de probabilidade do caminhante no intervalo após n passos de forma sintética e elegante fazendo uso do operador $\mathcal{L}$:

$$\rho_n(x) = \mathcal{L}^n[\rho_0(x_0)](x) . \quad (2.23)$$

O operador $\mathcal{L}$ é auto-conjugado com respeito ao produto escalar usualmente definido por $(f, g) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x)g(x) dx$. Isso é consequência direta de não considerarmos nenhuma tendência direcional na distribuição $p(\ell)$, isto é, $p(\ell) = p(-\ell) = p(|\ell|)$. Ainda, usando o teorema do valor máximo, podemos mostrar que o operador $\mathcal{L}$ tem norma menor que um [55]. De fato, para qualquer função contínua f , o teorema garante que

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} |\mathcal{L}f| dx \leq |\mathcal{L}^*| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |f| dx , \quad (2.24)$$

onde $|\mathcal{L}^*|$ significa $|\mathcal{L}[1](x')|$ calculado no ponto x' que gera o seu máximo valor. Na ausência de tendência direcional, tal situação corresponde a $x' = \lambda/2$. Portanto,

$$\mathcal{L}[1](x' = \lambda/2) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(\lambda/2 - x) \cdot 1 \cdot dx = 2 \int_{\lambda/2+\ell_0}^{\lambda-r_v} p(x - \lambda/2) dx , \quad (2.25)$$

e, fazendo a substituição $\ell = x - \lambda/2$, obtemos

$$\mathcal{L}[1](x' = \lambda/2) = 2 \int_{\ell_0}^{(\lambda-2r_v)/2} p(\ell) d\ell \equiv \mathcal{N} < 1 , \quad (2.26)$$

pois $p(\ell)$ é normalizada à unidade apenas quando integrada sobre todo o domínio. Podemos então escrever

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} |\mathcal{L}f| \leq \mathcal{N} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |f| dx . \quad (2.27)$$

O valor $\mathcal{N}$ pode ser tomado como a norma do operador $\mathcal{L}$. Seu significado físico está associado à probabilidade de sobrevivência de um vôo que se inicia em $\lambda/2$, i.e., à probabilidade de um salto que se inicia no centro do intervalo permanecer não absorvido (relacionada a $\tilde{P}_1$). A probabilidade de que o buscador permaneça não-absorvido após n passos pode então ser escrita como

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\mathcal{L}^n P_0](x) dx < \mathcal{N}^n . \quad (2.28)$$

Tomando o logaritmo em ambos os membros,

$$\ln(\tilde{P}_n) < n \cdot \ln(\mathcal{N}) . \quad (2.29)$$

Como $\mathcal{N} < 1$, logo $\ln(\mathcal{N}) < 0$; definindo $\gamma = |\ln(\mathcal{N})|$, podemos escrever

$$\tilde{P}_n < \exp(-\gamma n) , \quad (2.30)$$

e portanto encontramos que a probabilidade de que o buscador permaneça não-absorvido após n passos decai exponencialmente com n [55].

2.4.3 Cálculo da expressão para $\langle L \rangle$

De posse dos resultados da subseção anterior, vamos então calcular $\langle L \rangle$, a média do caminho total percorrido entre o encontro de dois sítios consecutivos [55]. Definindo $\langle L_n \rangle$ como a distância média percorrida até encontrar o próximo sítio *exatamente* após n passos, podemos escrever

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \mathcal{P}_n(x) \langle L_n \rangle(x) dx , \quad (2.31)$$

onde $\mathcal{P}_n(x)$ é a densidade de probabilidade do caminhante encontrar um sítio *exatamente* após n passos como função da posição x de partida do n -ésimo passo. Substituindo a expressão já

calculada para $\wp_n(x)$, Eq. (2.15),

$$\begin{aligned}
 \langle L \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \wp_n(x) \langle L_n \rangle(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} (\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)) \langle L_n \rangle(x) dx \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_{n-1}(x) \langle L_n \rangle(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x) dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_{n+1} \rangle(x) dx - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x) dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) (\langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x)) dx ,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde definimos $\langle L_0 \rangle \equiv 0$.

A distância total percorrida L_n para uma dada sequência de n passos é dada por

$$L_n = |\ell_1| + |\ell_2| + \dots + |\ell_n| \quad \therefore \quad \langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle . \tag{2.33}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x) &= (\langle |\ell_{n+1}| \rangle + \langle |\ell_n| \rangle + \langle |\ell_{n-1}| \rangle + \dots) + \\
 &\quad - (\langle |\ell_n| \rangle + \langle |\ell_{n-1}| \rangle + \dots) = \langle |\ell_{n+1}| \rangle .
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

De forma que chegamos na expressão a seguir para $\langle L \rangle$:

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle |\ell_{n+1}| \rangle(x) dx \tag{2.35}$$

No entanto, $\langle |\ell_{n+1}| \rangle$ representa a média do módulo da distância percorrida ℓ após um passo individual, e portanto não depende de sua ordem $(n+1)$, mas apenas da sua posição x de partida. Ou seja, chegamos à expressão:

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) \langle |\ell| \rangle(x) dx . \tag{2.36}$$

Invertendo a ordem do somatório e da integração,

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(x) \right) \langle |\ell| \rangle(x) dx . \tag{2.37}$$

Identificando $\rho_n(x)$ com o operador $\mathcal{L}^n[\rho_0](x)$, Eq. (2.23), encontramos

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n[\rho_0] \right) (x) \langle |\ell| \rangle (x) dx = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n[\delta(x_0 - \alpha)] \right) (x) \langle |\ell| \rangle (x) dx . \quad (2.38)$$

Existem outras formas de calcular esta expressão para $\langle L \rangle$. Desse modo, a fim de checar este resultado, apresentamos a seguir duas derivações alternativas que consistentemente levam à uma concordância com a equação acima.

- Primeira alternativa:

Substituindo $\langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle$, obtemos

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \mathcal{P}_n(x) \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \sum_{n=i}^{\infty} \mathcal{P}_n(x) \langle |\ell_i| \rangle dx , \quad (2.39)$$

onde invertemos a ordem dos somatórios. Usando a condição de normalização para $\mathcal{P}_n$,

$$\langle L \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\delta(x - \alpha) - \sum_{n=0}^i \mathcal{P}_n(x) \right) \langle |\ell_{i+1}| \rangle dx , \quad (2.40)$$

definindo $\mathcal{P}_0 \equiv 0$. Como $\sum_{n=0}^i \mathcal{P}_n(x)$ é a densidade de probabilidade do caminhante encontrar o sítio em algum passo após i passos, $(\delta(x - \alpha) - \sum_{n=0}^i \mathcal{P}_n(x))$ é a densidade de probabilidade complementar, $\tilde{\mathcal{P}}_i \equiv \rho_i$. Portanto, como $\langle |\ell| \rangle$ não depende da ordem do passo,

$$\langle L \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_i \langle |\ell| \rangle dx , \quad (2.41)$$

que se reduz à mesma expressão que havíamos obtido para $\langle L \rangle$, Eq. (2.38).

- Segunda alternativa:

Podemos escrever $\langle L \rangle$ da seguinte forma:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_w} \sum_{k=1}^{N_w} L_k \quad (2.42)$$

onde N_w é o número amostral de caminhadas (cujo limite tomaremos ao infinito posteriormente) e L_k é a distância total percorrida em uma caminhada aleatória genérica indexada por k . Mais explicitamente,

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_w} [L_1 + L_2 + \dots] . \quad (2.43)$$

Definindo $|\ell_{i,k}|$ como o módulo do i -ésimo passo dado na k -ésima caminhada, observa-se que podemos ter vários tipos amostrais de caminhada L_k , e.g.,

$$\begin{aligned} L_1 &= |\ell_{1,1}| + |\ell_{2,1}| + |\ell_{3,1}| ; \\ L_2 &= |\ell_{1,2}| ; \\ L_3 &= |\ell_{1,3}| + |\ell_{2,3}| + |\ell_{3,3}| + |\ell_{4,3}| ; \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.44)$$

Agrupando os passos de todas as caminhadas pela sua ordem dentro da caminhada e realizando a soma, temos que

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_w} \left[\int_x \sum_k^{N_1(x)} |\ell_{1,k}| dx + \int_x \sum_k^{N_2(x)} |\ell_{2,k}| dx + \dots \right], \quad (2.45)$$

onde o j -ésimo termo da soma acima corresponde à soma sobre todas as caminhadas cujo j -ésimo passo começa em x , isto é,

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_w} \left[\int_x N_1(x) |\ell_1|(x) dx + \int_x N_2(x) |\ell_2|(x) dx + \dots \right]. \quad (2.46)$$

Precisamos agora calcular uma expressão para $N_i(x)$, ou seja, para o número de caminhadas (dentre as N_w) cujo i -ésimo passo começa em x . Para elucidar essa questão, é suficiente saber qual a probabilidade do i -ésimo passo de uma caminhada começar em x , com $r_v \leq x \leq \lambda - r_v$. Mas esta probabilidade é igual à probabilidade do $(i-1)$ -ésimo passo de uma caminhada terminar em x , isto é, igual a $\rho_{i-1}(x)dx$. Portanto, segue que $N_i(x) = N_w \rho_{i-1}(x)$, e substituindo na expressão anterior,

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_w} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} N_w \rho_{i-1}(x) \langle |\ell_i| \rangle(x) dx \right]. \quad (2.47)$$

Como $\langle |\ell_i| \rangle(x)$ por sua vez não depende de i , apenas da posição inicial x , podemos fazer $n = i - 1$, chegando finalmente a

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x) \langle |\ell| \rangle(x) dx, \quad (2.48)$$

que, novamente, é a mesma expressão que havíamos obtido, Eq. (2.38).

2.4.4 Simplificando a expressão para $\langle L \rangle$

Partindo da expressão que havíamos obtido para $\langle L \rangle$ em termos do operador $\mathcal{L}^n$, Eq. (2.38), podemos considerar o somatório dos $\mathcal{L}^n$ como um operador único atuando na função δ de

Dirac e escrever

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n [\delta(x_0 - \alpha)] \langle |\ell| \rangle(x) dx = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \right) [\delta(x_0 - \alpha)] \langle |\ell| \rangle(x) dx . \quad (2.49)$$

A soma infinita converge, já que a norma de $\mathcal{L}$ é menor do que um, ou seja,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \right) [f(x)] = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} [f(x)] . \quad (2.50)$$

Aqui, $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é o operador inverso com relação ao operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$, e $\mathbb{1}$ é o operador identidade. O operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é auto-conjugado com relação ao produto escalar usual, pois $\mathcal{L}$ também o é. A expressão para $\langle L \rangle$ pode então ser simplificada para

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} [\delta(x_0 - \alpha)](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx . \quad (2.51)$$

Escrevendo o operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ na forma integral e representando seu núcleo por K , obtemos

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, x_0) \delta(x_0 - \alpha) \langle |\ell| \rangle(x) dx dx_0 = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \alpha) \langle |\ell| \rangle(x) dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(\alpha, x) \langle |\ell| \rangle(x) dx = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} [\langle |\ell| \rangle](\alpha) , \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde usamos a propriedade que o operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é auto-conjugado, isto é, $K(\alpha, x) = K(x, \alpha)$. A expressão final para $\langle L \rangle$ é então dada por

$$\langle L \rangle(\alpha) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} [\langle |\ell| \rangle](\alpha) . \quad (2.53)$$

Observe que a expressão anterior é a solução geral de uma equação integral de Fredholm do segundo tipo: aplicando o operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$ em ambos os membros pela esquerda,

$$(\mathbb{1} - \mathcal{L}) \{ \langle L \rangle \}(x) = (\mathbb{1} - \mathcal{L}) (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \langle |\ell| \rangle \} , \quad (2.54)$$

ou seja,

$$\langle L \rangle(x) = \mathcal{L} \{ \langle L \rangle \}(x) + \langle |\ell| \rangle(x) . \quad (2.55)$$

Explicitando o operador $\mathcal{L}$ em notação integral, obtemos

$$\langle L \rangle(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x - \alpha) \langle L \rangle(\alpha) d\alpha + \langle |\ell| \rangle(x) , \quad (2.56)$$

que, de fato, representa uma equação integral de Fredholm do segundo tipo [55], com solução formalmente descrita pela Eq. (2.53). As soluções analíticas para essa classe de equações são obtidas através do formalismo resolvente, e são denominadas de *séries de Neumann*, que podem ser escritas como

$$\langle L \rangle(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle L_n \rangle(x) , \quad (2.57)$$

onde

$$\langle L_n \rangle = \mathcal{L}^n[\langle |\ell| \rangle](x) . \quad (2.58)$$

O operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é denominado *resolvente* de $\mathcal{L}$ e captura analiticamente suas propriedades espectrais. De fato, se ω é um autovalor do espectro de $\mathcal{L}$, então $\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n$ será autovalor do resolvente. Esta propriedade pode ser judiciosamente utilizada para obter informações sobre a decomposição espectral de $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ usando o operador mais simples $\mathcal{L}$. No entanto, não existe uma fórmula analítica geral para o operador resolvente, e por este motivo precisamos de uma outra abordagem para o cálculo de $\langle L \rangle$, como discutiremos a seguir.

2.5 Discretização

A expressão analítica final obtida para $\langle L \rangle$, Eq. (2.53), é concisa e elegante, mas nos diz pouco sobre como $\langle L \rangle$ (e consequentemente a eficiência η) varia com a distribuição $p(\ell)$. Vamos então particionar o domínio $r_v \leq x \leq \lambda - r_v$ para tratar o problema numericamente. Subdividindo-o em $\lambda/\Delta x$ intervalos com comprimento Δx (o qual faremos computacionalmente muito pequeno), podemos reescrever a ação do operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ como

$$\langle L \rangle(x_j) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}[\langle |\ell| \rangle](x_j) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} K(x_j, x) \langle |\ell| \rangle(x) dx \Rightarrow \sum_{i=1}^N K(x_j, x_i) \langle |\ell| \rangle(x_i) \Delta x_i , \quad (2.59)$$

com $r_v \leq x_i, x_j \leq \lambda - r_v$. Ou seja, no limite discreto, vale que

$$\langle L \rangle(x_j) = \sum_{i=1}^N K(x_j, x_i) \langle |\ell| \rangle(x_i) \Delta x_i . \quad (2.60)$$

A expressão acima pode ser reescrita em forma matricial, com $K(x_j, x_i) \Delta x_i$ correspondendo a uma matriz discreta $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}$, $\langle L \rangle(x_j) \equiv \langle L_j \rangle$ e $\langle |\ell| \rangle(x_i) \equiv \langle |\ell_i| \rangle$ correspondendo a vetores coluna $\overrightarrow{\langle L \rangle}$ e $\overrightarrow{\langle |\ell| \rangle}$. Assim, expressamos a equação acima como

$$\overrightarrow{\langle L \rangle} \equiv (\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}) \overrightarrow{\langle |\ell| \rangle} , \quad (2.61)$$

ou mais explicitamente,

$$\begin{pmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \langle L_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \\ \vdots \\ \langle L_N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(x_1, x_1)\Delta x_1 & \dots & K(x_1, x_i)\Delta x_i & \dots & K(x_1, x_N)\Delta x_N \\ K(x_2, x_1)\Delta x_1 & \dots & K(x_2, x_i)\Delta x_i & \dots & K(x_2, x_N)\Delta x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_j, x_1)\Delta x_1 & \dots & K(x_j, x_i)\Delta x_i & \dots & K(x_j, x_N)\Delta x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N, x_1)\Delta x_1 & \dots & K(x_N, x_i)\Delta x_i & \dots & K(x_N, x_N)\Delta x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle |\ell_1| \rangle \\ \langle |\ell_2| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_i| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_N| \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Note que a j -ésima linha nos dá $\langle L \rangle$ para o caminhante partindo de $x = x_j$. O vetor $\overrightarrow{\langle L \rangle}$ nos fornece então como a eficiência varia com a posição inicial para uma dada distribuição $p(\ell)$, de forma que o seu cálculo permite obter gráficos da eficiência em função da posição de partida.

A matriz $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}$ pode ser simplificada ainda mais se particionarmos o intervalo de forma equitativa, ou seja, fazendo $\Delta x_i \equiv \Delta x$.

Por outro lado, para obter a matriz $\mathbf{K}$ acima, devemos discretizar também o operador $(\mathbf{1} - \mathcal{L})^{-1}$. Como não sabemos uma expressão analítica para o núcleo deste, procedemos discretizando o operador $\mathcal{L}$, cujo núcleo é dado por $p(x_i - x_j)\Delta x_i$. A matriz $\mathbf{K}$ é obtida através da matriz discretizada $\mathbf{L}$ pelas operações matriciais usuais de subtração e inversão, necessárias ao cálculo de $(\mathbf{1} - \mathbf{L})^{-1}$.

Os elementos L_{ij} da matriz $\mathbf{L}$ são, por sua vez, calculados integrando a distribuição $p(\ell)$ ao longo de uma partição do intervalo $[x_j - x_i, x_j - x_i + \Delta x_i]$:

$$L_{ij} = \int_{(x_j - x_i)}^{(x_j - x_i) + \Delta x_i} p(\ell) d\ell, \quad \text{se } |x_j - x_i| \geq \ell_0. \quad (2.63)$$

Como $L_{ij} = L_{ji}$, pois o operador $\mathcal{L}$ é auto-adjunto, podemos escrever:

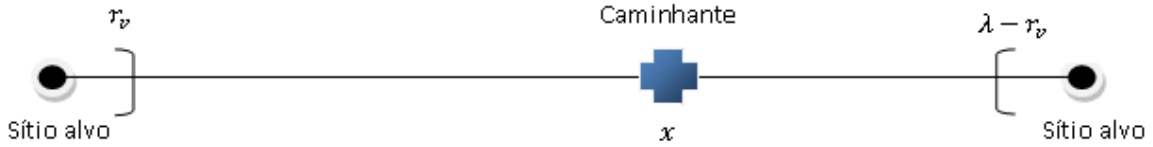
$$L_{ij} = L_{ji} = \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + \Delta x_i} p(\ell) d\ell, \quad \text{se } |x_j - x_i| \geq \ell_0. \quad (2.64)$$

A matriz $\mathbf{L}$ é então simétrica, e como $p(\ell) = 0$ para $\ell < \ell_0$, $L_{ij} \equiv 0$ quando $|x_j - x_i| < \ell_0$. Esta matriz possui ainda a propriedade de que todos os termos ao longo de uma mesma diagonal são iguais, e portanto, para $\mathbf{L}$ de ordem $M \times M$, o número de graus de liberdade é igual a M . $\mathbf{L}$ é então denominada de matriz de Toeplitz simétrica [57], e algoritmos computacionais como a recursão de Levinson [58] podem tirar vantagem desta propriedade, tornando as operações que definem $\mathbf{K}$ mais rápidas e eficientes.

Finalmente, o cálculo da Eq. (2.61) fica completo ao notarmos que para obter o vetor $\overrightarrow{\langle |\ell| \rangle}$, devemos calcular $\langle |\ell| \rangle(x)$ como função da posição x analiticamente para as distribuições de interesse, e simplesmente aplicar o resultado em x_j . Esta é a última peça necessária que falta para o cálculo computacional de $\langle L \rangle$, e consequentemente da eficiência η . Realizaremos estes cálculos explicitamente no próximo capítulo.

Cálculo de $\langle |\ell| \rangle$ e dos elementos L_{ij}

A expressão para o valor médio do comprimento de um passo individual, $\langle |\ell| \rangle$, em função da sua posição de partida, x , é bastante similar ao primeiro momento da distribuição $p(\ell)$, mas é necessária cautela por nosso modelo apresentar o confinamento unidimensional do caminhante. Para ilustrar bem as diferenças, vamos calcular o primeiro momento $\langle \ell \rangle$, considerando, como no capítulo anterior, dois sítios-alvo (absorvedores) localizados em $x = 0$ e em $x = \lambda$, como mostrado na figura a seguir:



São válidas todas as considerações já feitas para o nosso modelo até então: o tamanho mínimo de passo que o caminhante pode dar é ℓ_0 e a mínima distância a que ele pode chegar dos sítios é limitada pelo raio de visão r_v . Consideramos passos para a esquerda como negativos e para a direita como positivos, ambos equiprováveis [$p(\ell) = p(-\ell) = p(|\ell|)$], com o caminhante partindo da posição inicial x . Como mostra a figura, o maior passo que pode ser realizado antes do encontro com um sítio tem módulo igual a $(x - r_v)$ para passos à esquerda e $(\lambda - x - r_v)$ para passos à direita, de forma que a expressão geral do primeiro momento dada por $\langle \ell \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ell p(\ell) d\ell$ se reduz a

$$\langle \ell \rangle(x) = \int_{-\infty}^{-(x-r_v)} -(x-r_v) p(\ell) d\ell + \int_{-(x-r_v)}^{-\ell_0} \ell p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{(\lambda-x-r_v)} \ell p(\ell) d\ell + \int_{(\lambda-x-r_v)}^{\infty} (\lambda-x-r_v) p(\ell) d\ell. \quad (3.1)$$

A primeira integral considera todos os possíveis passos para a esquerda ($\ell < 0$) com comprimento em módulo maior que a distância ao sítio esquerdo $(x - r_v)$, isto é, satisfazendo $-\infty < \ell < -(x - r_v)$. Como todos estes passos irão necessariamente encontrar o sítio em questão (truncagem), a distância efetiva percorrida pelo caminhante nestas circunstâncias será igual à $\ell = -(x - r_v)$, razão pela qual substituímos este valor diretamente no integrando. A segunda integral refere-se a passos para esquerda ($\ell < 0$) com comprimento em módulo menor do que $(x - r_v)$, levando ainda em consideração que o menor comprimento de passo que pode ser dado em nosso modelo é igual a ℓ_0 . Como neste caso não há encontro com o sítio, os passos podem variar continuamente no intervalo $-(x - r_v) \leq \ell \leq -\ell_0$. A terceira integral refere-se a passos para a direita ($\ell > 0$) com comprimento em módulo menor do que a distância até o sítio à direita $(\lambda - x - r_v)$, levando ainda em consideração o tamanho mínimo de passo ℓ_0 . Como

neste caso não há encontro com o sítio, os passos podem variar continuamente no intervalo $\ell_0 \leq \ell \leq (\lambda - x - r_v)$. A última integral considera todos os possíveis passos para a direita ($\ell > 0$) com comprimento em módulo maior que a distância ao sítio direito ($\lambda - x - r_v$), isto é, satisfazendo $(\lambda - x - r_v) < \ell < \infty$. Como todos estes passos irão necessariamente encontrar o sítio em questão (truncagem), a distância efetiva percorrida pelo caminhante nestas circunstâncias será igual à $\ell = (\lambda - x - r_v)$, razão pela qual substituímos este valor diretamente no integrando.

Tomando como ponto de partida a expressão anterior, a expressão para $\langle |\ell| \rangle$ será então da forma:

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x) &= \int_{-\infty}^{-(x-r_v)} |-(x-r_v)| p(\ell) d\ell + \int_{-(x-r_v)}^{-\ell_0} |\ell| p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-x-r_v} |\ell| p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-x-r_v}^{\infty} |\lambda-x-r_v| p(\ell) d\ell \\ &= \int_{\infty}^{(x-r_v)} (x-r_v) p(\ell) (-d\ell) + \int_{(x-r_v)}^{\ell_0} \ell p(\ell) (-d\ell) + \int_{\ell_0}^{\lambda-x-r_v} \ell p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-x-r_v}^{\infty} (\lambda-x-r_v) p(\ell) d\ell, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde fizemos a substituição $\ell = -\ell'$ e usamos que $p(\ell)$ é do tipo modular, isto é, $p(-\ell) = p(\ell)$. A expressão para $\langle |\ell| \rangle$ é então dada por

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \int_{\ell_0}^{x-r_v} \ell p(\ell) d\ell + \int_{x-r_v}^{\infty} (x-r_v) p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-x-r_v} \ell p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-x-r_v}^{\infty} (\lambda-x-r_v) p(\ell) d\ell. \quad (3.3)$$

Podemos simplificá-la ainda mais usando a condição de normalização da distribuição $p(\ell)$:

$$\int_{\ell_0}^{\infty} p(\ell) d\ell = \int_{\ell_0}^{x-r_v} p(\ell) d\ell + \int_{x-r_v}^{\infty} p(\ell) d\ell = \int_{\ell_0}^{\lambda-x-r_v} p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-x-r_v}^{\infty} p(\ell) d\ell = \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

de forma que as integrais indefinidas podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x) &= \left(\frac{(\lambda-x-r_v)}{2} - \int_{\ell_0}^{\lambda-x-r_v} (\lambda-x-r_v) p(\ell) d\ell \right) + \int_{\ell_0}^{\lambda-x-r_v} \ell p(\ell) d\ell + \\ &\quad + \left(\frac{(x-r_v)}{2} - \int_{\ell_0}^{x-r_v} (x-r_v) p(\ell) d\ell \right) + \int_{\ell_0}^{x-r_v} \ell p(\ell) d\ell, \end{aligned} \quad (3.5)$$

ou seja,

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(\lambda-2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{x-r_v} [\ell - (x-r_v)] p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-x-r_v} [\ell - (\lambda-x-r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (3.6)$$

Observe que a expressão acima sofre uma tripartição no intervalo $[r_v, \lambda - r_v]$:

$$\bullet \quad r_v \leq x \leq r_v + \ell_0$$

Nesse caso, $(x - r_v) \leq \ell_0$ e a primeira integral se anula, pois $p(\ell) = 0$ para $\ell < \ell_0$, reduzindo a expressão de $\langle |\ell| \rangle$ para

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} [\ell - (\lambda - x - r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (3.7)$$

$$\bullet \quad \lambda - r_v - \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v$$

Nesse caso, $(\lambda - x - r_v) \leq \ell_0$ e a segunda integral se anula, reduzindo a sua expressão para

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{x - r_v} [\ell - (x - r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (3.8)$$

$$\bullet \quad r_v + \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v - \ell_0$$

Neste intervalo, as duas integrais estão bem definidas e a expressão é a que encontramos originalmente:

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{x - r_v} [\ell - (x - r_v)] p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} [\ell - (\lambda - x - r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (3.9)$$

Observe que as expressões integrais acima guardam entre si o mesmo formato básico, podendo ser escritas de forma geral como $\int_{\ell_0}^{\beta} [\ell - \beta] p(\ell) d\ell$, onde $\beta = (x - r_v)$ ou $\beta = (\lambda - x - r_v)$. Em particular, as expressões para os extremos do intervalo possuem exatamente a mesma estrutura: substituindo $(x - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x - r_v)$ em uma, recuperamos a outra, e vice-versa. Isso é consequência da simetria que existe no posicionamento do caminhante próximo a qualquer um dos sítios, já que ele não faz distinção entre estes. Observamos ainda que a expressão para a parte intermediária do intervalo pode ser obtida somando as expressões das extremidades e subtraindo $(\lambda - 2r_v)/2$ do resultado.

3.1 Distribuições de interesse

Vamos então calcular as expressões analíticas para $\langle |\ell| \rangle(x)$ e para a matriz discreta $\mathbf{L}$ para as distribuições de interesse: Lévy, exponencial “esticada” (em inglês, *stretched exponencial*) e gama. A escolha dessas duas outras distribuições em particular foi motivada pela sua presença constante na literatura [16, 56], com sugestões de que elas podem superar a eficiência obtida pela distribuição de Lévy no regime de baixa densidade de sítios ($\lambda \gg r_v$), mesmo observando que estas satisfazem ao TLC e, consequentemente, tendem a uma distribuição gaussiana após muitos passos.

3.1.1 Distribuição de Lévy

Como argumentamos no primeiro capítulo, usaremos a terminologia *distribuição de Lévy* para o limite assintótico de longos comprimentos de ℓ nas distribuições α -estáveis de Lévy mais gerais. Assim sendo, podemos caracterizar as distribuições de Lévy por uma $p(\ell)$ do tipo lei de potência, Eq. (1.65):

$$p(\ell) = \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \frac{1}{|\ell|^\mu}, \quad \text{se } \ell \geq \ell_0, \quad (3.10)$$

e $p(\ell) = 0$ caso contrário, com ℓ_0 representando o tamanho mínimo de passo que o caminhante pode executar. O expoente μ satisfaz $1 < \mu \leq 3$, como discutido no Capítulo 1.

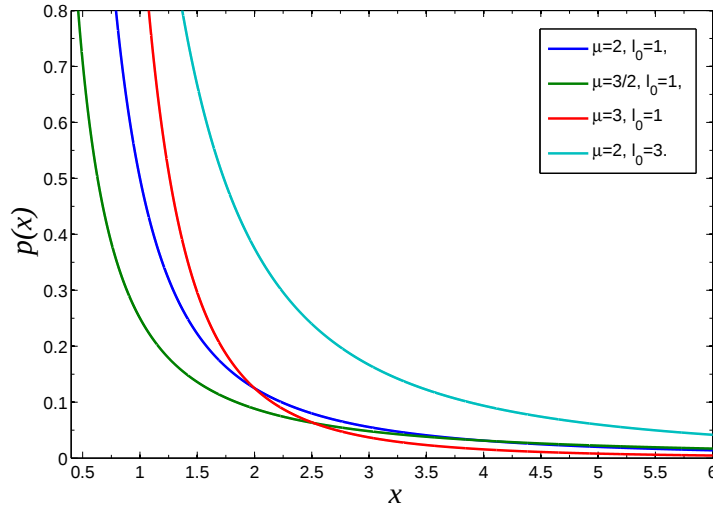


Figura 3.1 Gráficos da distribuição de Lévy, para diferentes valores dos parâmetros.

De acordo com o resultado obtido no Capítulo 2, Eq. (2.64), os elementos da matriz $\mathbf{L}$ são discretizados através da expressão

$$L_{ij} = L_{ji} = \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} p(\ell) d\ell. \quad (3.11)$$

Substituindo a $p(\ell)$ de Lévy acima,

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \frac{\ell^{1-\mu}}{(1-\mu)} \Big|_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx}, \quad (3.12)$$

ou seja,

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|x_j - x_i|}{\ell_0} \right)^{(1-\mu)} - \left(\frac{|x_j - x_i| + dx}{\ell_0} \right)^{(1-\mu)} \right]. \quad (3.13)$$

Escrevendo $x_i = i \cdot dx$ e $\ell_0 = i_\ell \cdot dx$, com $i, i_\ell \in \mathbb{N}$, obtemos a expressão discretizada:

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|j-i|}{i_\ell} \right)^{(1-\mu)} - \left(\frac{|j-i|+1}{i_\ell} \right)^{(1-\mu)} \right]. \quad (3.14)$$

Para determinar $\langle |\ell| \rangle$, vamos calcular primeiramente os casos de extremo do intervalo.

- Para o caminhante partindo de $r_v \leq x \leq r_v + \ell_0$:

Supondo $\mu \neq 2$,

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} [\ell - (\lambda - x - r_v)] \ell^{-\mu} d\ell \\ &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2(2-\mu)} \ell^{-\mu+2} \Big|_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} - \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}(\lambda - x - r_v)}{2(1-\mu)} \ell^{-\mu+1} \Big|_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} \\ &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} - \frac{\ell_0(\mu - 1)}{2(2-\mu)} + \frac{\ell_0^{\mu-1}(\lambda - x - r_v)^{2-\mu}}{2} \left[\frac{\mu - 1}{2-\mu} + \frac{2-\mu}{2-\mu} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

ou seja,

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(x - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((\lambda - x - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right]. \quad (3.16)$$

Já para $\mu = 2$,

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\ell_0}{2} \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} [\ell - (\lambda - x - r_v)] \ell^{-2} d\ell + \frac{\lambda - 2r_v}{2} \\ &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\ell_0}{2} \ln \ell \Big|_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} + \frac{\ell_0(\lambda - x - r_v)}{2} \ell^{-1} \Big|_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} \\ &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} \ln((\lambda - x - r_v)/\ell_0) + \frac{\ell_0}{2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

ou seja,

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(x - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} [1 + \ln((\lambda - x - r_v)/\ell_0)]. \quad (3.18)$$

- Para o caminhante partindo de $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v$:

Como argumentamos anteriormente, a substituição $(x - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x - r_v)$ na expressão anterior nos dá a resposta correta. A expressão para $\mu \neq 2$ deve então ser da forma

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((x - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right]. \quad (3.19)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\ell_0}^{x-r_v} [\ell - (x - r_v)] \ell^{-\mu} d\ell \\
 &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2(2 - \mu)} \ell^{-\mu+2} \Big|_{\ell_0}^{x-r_v} - \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}(x - r_v)}{2(1 - \mu)} \ell^{-\mu+1} \Big|_{\ell_0}^{x-r_v} \\
 &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - \frac{(x - r_v)}{2} - \frac{\ell_0(\mu - 1)}{2(2 - \mu)} + \frac{\ell_0^{\mu-1}(x - r_v)^{2-\mu}}{2} \left[\frac{\mu - 1}{2 - \mu} + \frac{2 - \mu}{2 - \mu} \right], \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

que se reduz à expressão sugerida. Para $\mu = 2$, devemos ter

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} [1 + \ln((x - r_v)/\ell_0)]. \quad (3.21)$$

E de fato,

$$\begin{aligned}
 \langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\ell_0}{2} \int_{\ell_0}^{x-r_v} [\ell - (x - r_v)] \ell^{-2} d\ell = \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\ell_0}{2} \ln \ell \Big|_{\ell_0}^{x-r_v} + \frac{\ell_0(x - r_v)}{2} \ell^{-1} \Big|_{\ell_0}^{x-r_v} \\
 &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} - \frac{(x - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} \ln((x - r_v)/\ell_0) + \frac{\ell_0}{2}, \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

que se reduz à expressão sugerida.

- Para o caminhante partindo de $r_v + \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v - \ell_0$:

Neste caso, é suficiente somar o resultado dos extremos do intervalo e subtrair $(\lambda - 2r_v)/2$. Para $\mu \neq 2$, ficamos com:

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{\ell_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[2 + \frac{((x - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} + \frac{((\lambda - x - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} \right]. \quad (3.23)$$

Já para $\mu = 2$, obtemos

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{\ell_0}{2} [2 + \ln((\lambda - x - r_v)/\ell_0) + \ln((x - r_v)/\ell_0)], \quad (3.24)$$

que pode ser simplificada para

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \ell_0 [1 + \ln([(\lambda - x - r_v)(x - r_v)]^{1/2}/\ell_0)]. \quad (3.25)$$

Nas simulações computacionais, não usaremos a expressão explícita para $\mu = 2$, e sim o valor do limite da expressão geral quando $\mu \rightarrow 2$.

3.1.2 Stretched exponential

A distribuição stretched exponential é caracterizada por uma $p(\ell)$ do tipo [59]

$$p(\ell) = A_s \exp(-\gamma|\ell|^\beta), \quad \text{se } \ell \geq \ell_0 \quad (3.26)$$

e $p(\ell) = 0$ caso contrário, com ℓ_0 representando o tamanho mínimo de passo que o caminhante pode executar. Os expoentes devem satisfazer $0 < \beta < 1$ e $\gamma > 0$, e A_s é a constante de normalização, a ser determinada a seguir.¹ Quanto menor o valor de β , maior é a probabilidade de observarmos grandes passos. Para $\beta = 1$, obtemos a distribuição exponencial pura, usada recentemente na análise de dados experimentais que testaram a hipótese de Lévy [16]. A stretched exponential nos dá uma alternativa interessante para a descrição de caudas longas, pois se encontra numa região intermediária entre o comportamento exponencial e o tipo lei de potência. Esta distribuição também já foi bastante utilizada por oferecer uma descrição razoável e parcimoniosa para várias situações encontradas na natureza e na economia [60].

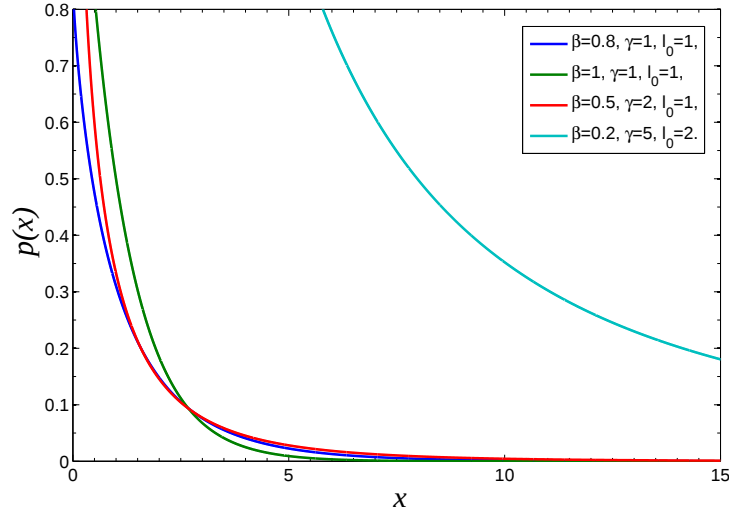


Figura 3.2 Gráficos da distribuição stretched exponential, para diferentes valores dos parâmetros.

O cálculo da constante de normalização é feito de forma usual, através de

$$2 \int_{\ell_0}^{\infty} p(\ell) d\ell = 1 = 2A_s \int_{\ell_0}^{\infty} \exp(-\gamma|\ell|^\beta) d\ell = 2A_s \frac{1}{\beta \gamma^{1/\beta}} \Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta), \quad (3.28)$$

¹É importante ressaltar que existe uma confusão na literatura sobre qual é a definição que deve ser universalmente aceita para esta distribuição. A stretched exponential foi proposta pela primeira vez, no séc. XIX, por R. Kholrausch, para descrever a relaxação de carga na chamada garrafa de Leiden. Devido a uma série de percalços históricos, uma segunda definição para esta distribuição foi também difundida, combinando o estiramento exponencial com uma lei de potência da forma

$$p(\ell) = \frac{\beta}{\ell_0} \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^{(\beta-1)} \exp(-(\ell/\ell_0)^\beta). \quad (3.27)$$

Por motivos discutidos em [59], iremos nos ater a definição original, composta apenas do estiramento exponencial.

ou seja,

$$A_s = \frac{\beta \gamma^{1/\beta}}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)} , \quad (3.29)$$

onde usamos a definição da função gama incompleta superior,

$$\Gamma_{\text{up}}(x_0; z) = \int_{x_0}^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt . \quad (3.30)$$

É importante ressaltar que a distribuição stretched exponencial satisfaz ao TLC, de modo que podemos, inclusive, obter a sua gaussiana limite. Como vimos no Capítulo 1, é suficiente calcular os primeiro e segundo momentos, e a distribuição gaussiana correspondente terá parâmetros dados por $\sigma^2 = N(\Delta \ell^2)$ e $\mu = N\bar{\ell}$. Para o primeiro momento $\bar{\ell}$, temos que

$$\bar{\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} \ell p(\ell) d\ell = 2A_s \int_{\ell_0}^{\infty} \ell \exp(-\gamma \ell^\beta) d\ell . \quad (3.31)$$

Fazendo a substituição $u \equiv \gamma |\ell|^\beta \longrightarrow du = \beta \gamma |\ell|^{\beta-1} d\ell$ e ajustando os limites de integração, obtemos

$$\bar{\ell} = 2A_s \int_{\gamma \ell_0^\beta}^{\infty} \frac{u^{1/\beta}}{\gamma^{1/\beta}} \exp(-u) \frac{u^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta \gamma^{1/\beta}} du = \frac{2A_s}{\beta \gamma^{2/\beta}} \int_{\gamma \ell_0^\beta}^{\infty} u^{\frac{2}{\beta}-1} \exp(-u) du . \quad (3.32)$$

Em seguida, substituindo a expressão para A_s , escrevemos

$$\bar{\ell} = \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 2/\beta)}{\gamma^{1/\beta} \Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)} . \quad (3.33)$$

Para o segundo momento, temos que

$$\overline{\ell^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^2 p(\ell) d\ell = 2A_s \int_{\ell_0}^{\infty} \ell^2 \exp(-\gamma \ell^\beta) d\ell . \quad (3.34)$$

Fazendo a substituição $u \equiv \gamma |\ell|^\beta \longrightarrow du = \beta \gamma |\ell|^{\beta-1} d\ell$ e ajustando os limites de integração,

$$\overline{\ell^2} = 2A_s \int_{\gamma \ell_0^\beta}^{\infty} \frac{u^{2/\beta}}{\gamma^{2/\beta}} \exp(-u) \frac{u^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta \gamma^{1/\beta}} du = \frac{2A_s}{\beta \gamma^{3/\beta}} \int_{\gamma \ell_0^\beta}^{\infty} u^{\frac{3}{\beta}-1} \exp(-u) du . \quad (3.35)$$

Substituindo, agora, a expressão para A_s , encontramos

$$\overline{\ell^2} = \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 3/\beta)}{\gamma^{2/\beta} \Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)} . \quad (3.36)$$

Usando, em seguida, a definição de $\overline{(\Delta\ell)^2}$, obtemos

$$\overline{(\Delta\ell)^2} \equiv \overline{\ell^2} - \bar{\ell}^2 = \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 3/\beta) - \frac{\Gamma_{\text{up}}^2(\gamma\ell_0^\beta; 2/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)}}{\gamma^{2/\beta}\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)}. \quad (3.37)$$

Portanto, como os dois primeiros momentos convergem, a stretched exponential tende a uma gaussiana com parâmetros

$$\mu = N\bar{\ell} = N \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 2/\beta)}{\gamma^{1/\beta}\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)} \quad (3.38)$$

e

$$\sigma^2 = N\overline{(\Delta\ell)^2} = N \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 3/\beta) - \frac{\Gamma_{\text{up}}^2(\gamma\ell_0^\beta; 2/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)}}{\gamma^{2/\beta}\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)}. \quad (3.39)$$

Os elementos da matriz $\mathbf{L}$ são discretizados através da Eq. (2.64), onde substituindo a expressão de $p(\ell)$ para a distribuição stretched exponencial, ficamos com

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{\beta\gamma^{1/\beta}}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)} \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} \exp(-\gamma|\ell|^\beta) d\ell. \quad (3.40)$$

Fazendo a substituição $u \equiv \gamma|\ell|^\beta \rightarrow du = \beta\gamma|\ell|^{\beta-1} d\ell$ e ajustando os limites de integração,

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{\beta\gamma^{1/\beta}}{2\beta\gamma^{1/\beta}\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)} \int_{\gamma|x_j - x_i|^\beta}^{\gamma(|x_j - x_i| + dx)^\beta} u^{1/\beta-1} \exp(-u) du, \quad (3.41)$$

de modo que identificamos a integral acima como sendo uma função Γ incompleta inferior e superior calculada em $1/\beta$, definida de forma geral como

$$\Gamma_{\text{up, down}}(x_0, x_1; z) = \int_{x_0}^{x_1} t^{z-1} \exp(-t) dt, \quad (3.42)$$

ou seja,

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma|x_j - x_i|^\beta, \gamma(|x_j - x_i| + dx)^\beta; 1/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)}. \quad (3.43)$$

Para a obtenção da média $\langle|\ell|\rangle$ para o caso da stretched exponencial, vamos calcular primeiramente os casos de extremo do intervalo.

- Para o caminhante partindo de $r_v \leq x \leq r_v + \ell_0$:

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_s \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} [\ell - (\lambda - x - r_v)] \exp(-\gamma |\ell|^\beta) d\ell \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_s \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} \ell \exp(-\gamma |\ell|^\beta) d\ell - A_s (\lambda - x - r_v) \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} \exp(-\gamma |\ell|^\beta) d\ell \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{A_s}{\beta \gamma^{2/\beta}} \int_{\gamma \ell_0^\beta}^{\gamma (\lambda - x - r_v)^\beta} u^{(2/\beta)-1} \exp(-u) du - \frac{A_s (\lambda - x - r_v)}{\beta \gamma^{1/\beta}} \int_{\gamma \ell_0^\beta}^{\gamma (\lambda - x - r_v)^\beta} u^{(1/\beta)-1} \exp(-u) du \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{1}{2\gamma^{1/\beta}} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma \ell_0^\beta, \gamma (\lambda - x - r_v)^\beta; 2/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)} + \\
&\quad - \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma \ell_0^\beta, \gamma (\lambda - x - r_v)^\beta; 1/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)}, \tag{3.44}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{1}{2\gamma^{1/\beta}} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma \ell_0^\beta, \gamma (\lambda - x - r_v)^\beta; 2/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)} + \\
&\quad - \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma \ell_0^\beta, \gamma (\lambda - x - r_v)^\beta; 1/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)}. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

- Para o caminhante partindo de $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v$:

Como argumentamos, a substituição $(x - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x - r_v)$ na expressão anterior nos dá a resposta correta. A expressão é então da forma

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{1}{2\gamma^{1/\beta}} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma \ell_0^\beta, \gamma (x - r_v)^\beta; 2/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)} + \\
&\quad - \frac{(x - r_v)}{2} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma \ell_0^\beta, \gamma (x - r_v)^\beta; 1/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma \ell_0^\beta; 1/\beta)}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

- Para o caminhante partindo de $r_v + \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v - \ell_0$:

Neste caso, é suficiente somar os resultados dos casos extremos e subtrair $(\lambda - 2r_v)/2$. Ficamos

então com:

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x) = & \frac{1}{2\gamma^{1/\beta}} \left[\frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0^\beta, \gamma(\lambda - x - r_v)^\beta; 2/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)} + \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0^\beta, \gamma(x - r_v)^\beta; 2/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)} \right] + \\ & - \frac{(\lambda - x - r_v)}{2} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0^\beta, \gamma(\lambda - x - r_v)^\beta; 1/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)} - \frac{(x - r_v)}{2} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0^\beta, \gamma(x - r_v)^\beta; 1/\beta)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0^\beta; 1/\beta)} + \\ & + \frac{\lambda - 2r_v}{2} . \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.1.3 Distribuição Gama

A distribuição gama é caracterizada por uma $p(\ell)$ do tipo [61]

$$p(\ell) = A_g |\ell|^{a-1} \exp(-\gamma|\ell|), \quad \text{se } \ell \geq \ell_0, \quad (3.48)$$

e $p(\ell) = 0$ caso contrário, com ℓ_0 representando o tamanho mínimo de passo que o caminhante pode executar. Os expoentes devem satisfazer a $\gamma, a > 0$.

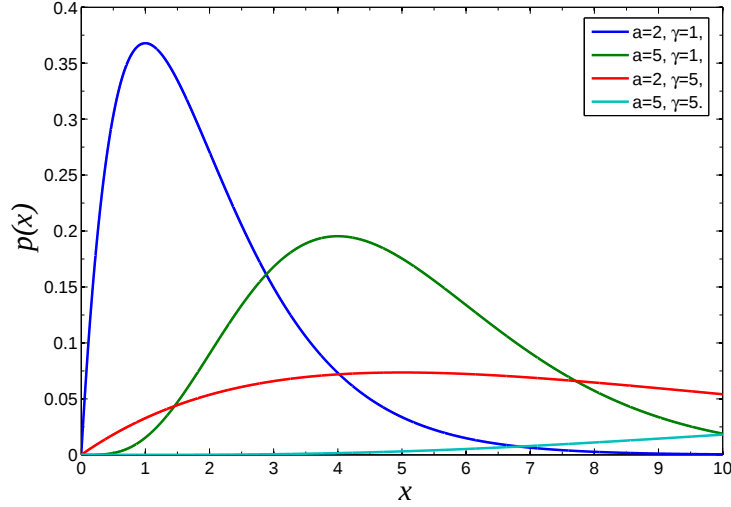


Figura 3.3 Gráficos da distribuição gama, para diferentes valores dos parâmetros.

Note que embora a primeira vista pareça existir uma similaridade entre as distribuições gama e de Lévy, os intervalos do expoente polinomial são disjuntos, pois

$$p(\ell) \sim \begin{cases} \ell^{a-1} \equiv \ell^{-\mu}, a > 0 \rightarrow a-1 \equiv -\mu > -1 \therefore \mu < 1 & \text{para gama} \\ \ell^{-a-1} \equiv \ell^{-\mu}, a > 0 \rightarrow a+1 \equiv \mu > 1 \therefore \mu > 1 & \text{para Lévy} \end{cases} \quad (3.49)$$

Para $\ell \ll 1/\gamma$, a distribuição gama se reduz aproximadamente a uma lei de potência; por outro lado, uma distribuição exponencial é aproximadamente obtida no limite $\ell \gg 1/\gamma$. Note, portanto, que um certo grau de auto-similaridade se mantém até o valor aproximado de $1/\gamma$, a

qual é definitivamente quebrada para maiores valores devido ao surgimento dessa escala característica.

A distribuição gama é bastante encontrada em fenômenos críticos na presença de efeitos de tamanho finito ou de uma distância finita de um ponto crítico [61]. Também é esperada ocorrer mais geralmente como consequência de restrições no método da máxima verossimilhança aplicado às distribuições tipo lei de potência [61], sendo sugerida para a descrição da distribuição de Gutenberg-Richter na magnitude de terremotos [62]. Mais recentemente, a reanálise [56] dos dados para o mecanismo predatório dos albatrozes, que supostamente utilizariam distribuições de Lévy em suas buscas [12], encontrou uma melhor concordância experimental com a distribuição gama.

O cálculo da constante de normalização da distribuição gama é feito de forma usual:

$$2 \int_{\ell_0}^{\infty} p(\ell) d\ell = 1 \quad \therefore \quad 2A_g \int_{\ell_0}^{\infty} \ell^{\alpha-1} \exp(-\gamma\ell) d\ell, \quad (3.50)$$

onde, fazendo a substituição $u = \gamma\ell$,

$$2A_g \int_{\gamma\ell_0}^{\infty} \left(\frac{u}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp(-u) \frac{du}{\gamma} = \frac{2A_g}{\gamma^\alpha} \int_{\gamma\ell_0}^{\infty} u^{\alpha-1} \exp(-u) du = \frac{2A_g}{\gamma^\alpha} \Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; \alpha) = 1, \quad (3.51)$$

ou seja,

$$A_g = \frac{\gamma^\alpha}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; \alpha)}. \quad (3.52)$$

Tal como no caso da distribuição stretched exponencial, observamos que a distribuição gama também satisfaz o TLC. De fato, podemos, também, calcular a gaussiana limite da distribuição gama. Como vimos, é suficiente calcular os primeiro e segundo momentos, e a distribuição gaussiana correspondente terá parâmetros $\sigma^2 = N(\Delta\ell^2)$ e $\mu = N\bar{\ell}$. Para o primeiro momento, escrevemos

$$\bar{\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} \ell p(\ell) d\ell = 2A_g \int_{\ell_0}^{\infty} \ell^{\alpha-1} \exp(-\gamma\ell) d\ell. \quad (3.53)$$

Fazendo a substituição $u \equiv \gamma|\ell| \rightarrow du = \gamma d\ell$ e ajustando os limites de integração,

$$\bar{\ell} = 2A_g \int_{\gamma\ell_0}^{\infty} \frac{u^a}{\gamma^a} \exp(-u) \frac{du}{\gamma} = \frac{2A_s}{\gamma\gamma^a} \int_{\gamma\ell_0}^{\infty} u^a \exp(-u) du, \quad (3.54)$$

de modo que, substituindo a expressão para A_s , ficamos com

$$\bar{\ell} = \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a+1)}{\gamma\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \quad (3.55)$$

Para o segundo momento, temos que

$$\bar{\ell}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^2 p(\ell) d\ell = 2A_s \int_{\ell_0}^{\infty} \ell^2 \ell^{a-1} \exp(-\gamma\ell) d\ell. \quad (3.56)$$

Fazendo a substituição $u \equiv \gamma|\ell| \longrightarrow du = \gamma d\ell$ e ajustando os limites de integração,

$$\bar{\ell}^2 = 2A_s \int_{\gamma\ell_0}^{\infty} \frac{u^{a+1}}{\gamma^{a+1}} \exp(-u) \frac{du}{\gamma} = \frac{2A_s}{\gamma^{a+2}} \int_{\gamma\ell_0}^{\infty} u^{a+1} \exp(-u) du. \quad (3.57)$$

Substituindo, agora, a expressão para A_s , encontramos

$$\bar{\ell}^2 = \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a+2)}{\gamma^2 \Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \quad (3.58)$$

Usando a definição de $\overline{(\Delta\ell)^2}$, identificamos

$$\overline{(\Delta\ell)^2} \equiv \bar{\ell}^2 - \bar{\ell}^2 = \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a+2) - \frac{\Gamma_{\text{up}}^2(\gamma\ell_0; a+1)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}}{\gamma^2 \Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \quad (3.59)$$

Portanto, como os dois primeiros momentos convergem, a distribuição gama tende a uma gaussiana com parâmetros

$$\mu = N\bar{\ell} = N \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a+1)}{\gamma \Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)} \quad (3.60)$$

e

$$\sigma^2 = N\overline{(\Delta\ell)^2} = N \frac{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a+2) - \frac{\Gamma_{\text{up}}^2(\gamma\ell_0; a+1)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}}{\gamma^2 \Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \quad (3.61)$$

Em seguida, calculamos, para a distribuição gama, os elementos da matriz $\mathbf{L}$, discretizados através da expressão

$$L_{ij} = L_{ji} = A_g \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} |\ell|^{a-1} \exp(-\gamma|\ell|) d\ell. \quad (3.62)$$

Fazendo a substituição $u \equiv \gamma|\ell| \longrightarrow du = \gamma d\ell$ e ajustando os limites de integração,

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{A_g}{\gamma^a} \int_{\gamma|x_j - x_i|}^{\gamma(|x_j - x_i| + dx)} |u|^{a-1} \exp(-u) du, \quad (3.63)$$

onde identificamos a função Γ incompleta inferior e superior, calculada em a , ou seja,

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma|x_j - x_i|, \gamma(|x_j - x_i| + dx); a)}{\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \quad (3.64)$$

Para a obtenção da média $\langle |\ell| \rangle$ para a distribuição gama, vamos calcular primeiramente os casos de extremo do intervalo.

- Para o caminhante partindo de $r_v \leq x \leq r_v + \ell_0$:

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_g \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} [\ell - (\lambda - x - r_v)] |\ell|^{a-1} \exp(-\gamma|\ell|) d\ell \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + A_g \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} |\ell|^{(a+1)-1} \exp(-\gamma|\ell|) d\ell - (\lambda - x - r_v) A_g \int_{\ell_0}^{\lambda - x - r_v} |\ell|^{a-1} \exp(-\gamma|\ell|) d\ell \\
&= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(\lambda - x - r_v); a+1)}{2\gamma\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)} + \\
&\quad - (\lambda - x - r_v) \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(\lambda - x - r_v); a)}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}, \tag{3.65}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(\lambda - x - r_v); a+1)}{2\gamma\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)} + \\
&\quad - (\lambda - x - r_v) \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(\lambda - x - r_v); a)}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \tag{3.66}
\end{aligned}$$

- Para o caminhante partindo de $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v$:

Como argumentamos, a substituição $(x - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x - r_v)$ na expressão anterior nos dá a resposta correta. A expressão é então da forma

$$\langle |\ell| \rangle(x) = \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(x - r_v); a+1)}{2\gamma\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)} - (x - r_v) \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(x - r_v); a)}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \tag{3.67}$$

- Para o caminhante partindo de $r_v + \ell_0 \leq x \leq \lambda - r_v - \ell_0$:

Neste caso, é suficiente somar o resultado dos casos extremos e subtrair $(\lambda - 2r_v)/2$. Ficamos então com:

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(x) &= \frac{\lambda - 2r_v}{2} + \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(\lambda - x - r_v); a+1)}{2\gamma\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)} + \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(x - r_v); a+1)}{2\gamma\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)} + \\
&\quad - (\lambda - x - r_v) \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(\lambda - x - r_v); a)}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)} - (x - r_v) \frac{\Gamma_{\text{up, down}}(\gamma\ell_0, \gamma(x - r_v); a)}{2\Gamma_{\text{up}}(\gamma\ell_0; a)}. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

No próximo capítulo, as expressões discretizadas, obtidas no presente capítulo para as diversas funções, vetores e matrizes associadas às distribuições de Lévy, stretched exponential e gama, serão analisadas numericamente, com o auxílio do programa MATLAB, com o objetivo de realizar uma comparação entre as eficiências das buscas destrutiva e não-destrutiva associadas a tais distribuições.

Resultados numéricos

Nosso objetivo neste capítulo é comparar a eficiência das distribuições citadas com a distribuição de Lévy, stretched exponential e gama, nas buscas destrutiva e não-destrutiva. De posse de todas as expressões que precisamos, vamos implementar o algoritmo numérico. A escolha natural para a realização desta etapa do trabalho foi o programa MATLAB, por tratar matrizes como matéria-prima nos cálculos, se ajustando então perfeitamente às nossas necessidades. Em resumo, o programa constrói a matriz $\mathbf{L}$ através das expressões obtidas para os elementos L_{ij} , variando $x_{i,j}$ de r_v até $\lambda - r_v$. Em seguida, calcula numericamente a inversa da matriz $(\mathbb{1} - \mathbf{L})$, resultando na matriz $\mathbf{K}$ correspondente à discretização do operador resolvente $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$. O vetor $\langle |\ell| \rangle$ é construído através das expressões analíticas calculadas, respeitando a distinção referente à tripartição do intervalo. Finalmente, realizamos a multiplicação matricial $\mathbf{K} \cdot \langle |\ell| \rangle$ e obtemos o vetor $\langle L \rangle$. Invertendo os elementos desse vetor, temos a eficiência como função da posição para uma distribuição de entrada $p(\ell)$. Por simplicidade, fizemos $\ell_0 = r_v$, com os valores numéricos escolhidos de forma a satisfazer o limite de escassez de sítios, isto é, $\ell_0, r_v \ll \lambda$.

Com o fim de comparar as eficiências das diferentes distribuições, dois programas distintos foram escritos. O algoritmo descrito no parágrafo anterior permite obter a eficiência como função da posição de partida para uma determinada distribuição $p(\ell)$. Uma pequena alteração no código do programa permite então fixar um ponto de partida genérico, e realizar a mesma operação acima para diversas distribuições de uma mesma classe variando os seus parâmetros, de modo a investigar em que intervalo obtemos a máxima eficiência para esta posição inicial. Dois pontos de partida são de nosso interesse particular por estarem associados aos tipos destrutivo e não-destrutivo de busca, quais sejam, $x = \lambda/2$ e $x = r_v$, respectivamente, como discutido no capítulo anterior.

Como estamos interessados no limite de escassez de sítios, tomaremos o maior valor computacional possível para λ . O máximo para λ está diretamente atrelado ao valor de dx na discretização do intervalo, pois a matriz L é quadrada com dimensão igual à $\lambda/dx - 2r_v/dx + 1$ (o comprimento do intervalo $\lambda - 2r_v$ discretizado). O limite computacional é atingido quando a ordem dessa matriz é grande o suficiente para que o programa não consiga invertê-la por falta de espaço na memória física. Satisfazendo o requerimento do maior valor possível para λ , sem contudo perder precisão numérica em dx , nos cálculos numéricos fizemos $dx = 1$, $r_v = \ell_0 = 1$ e $\lambda = 1000$. A razão λ/dx não pôde ser feita maior do que 1000 devido aos motivos computacionais acima expostos.

4.1 Distribuição de Lévy

4.1.1 Busca destrutiva

Considerando $\lambda = 1000$, $r_v = \ell_0 = 1$, $dx = 1$, $x_0 = \lambda/2$ (posição inicial associada à busca destrutiva), e variando o parâmetro μ em intervalos $d\mu = 0.01$, com $1 < \mu \leq 3$, obtemos o gráfico da eficiência η vs. μ para buscas de Lévy destrutivas a seguir. Embora tenhamos realizado a conta explícita para $\langle |\ell| \rangle$ quando $\mu = 2$, iremos desconsiderar o valor da eficiência neste caso, observando que o seu valor pode ser inferido pelo limite contínuo da curva obtida. Isso irá acarretar em uma região do gráfico não-preenchida em torno deste expoente, isto é, no intervalo $2 - d\mu < \mu < 2 + d\mu$. O máximo da eficiência está no limite balístico $\mu \rightarrow 1 + \varepsilon$, com $\varepsilon \rightarrow 0^+$, como previsto pela aproximação do tipo “campo médio” ao modelo [14], discutida na Seção 2.2. Por outro lado, no limite de buscas gaussianas, $\mu \rightarrow 3$, associadas ao TLC, as eficiências tornam-se menores que a máxima em mais de uma ordem de grandeza.

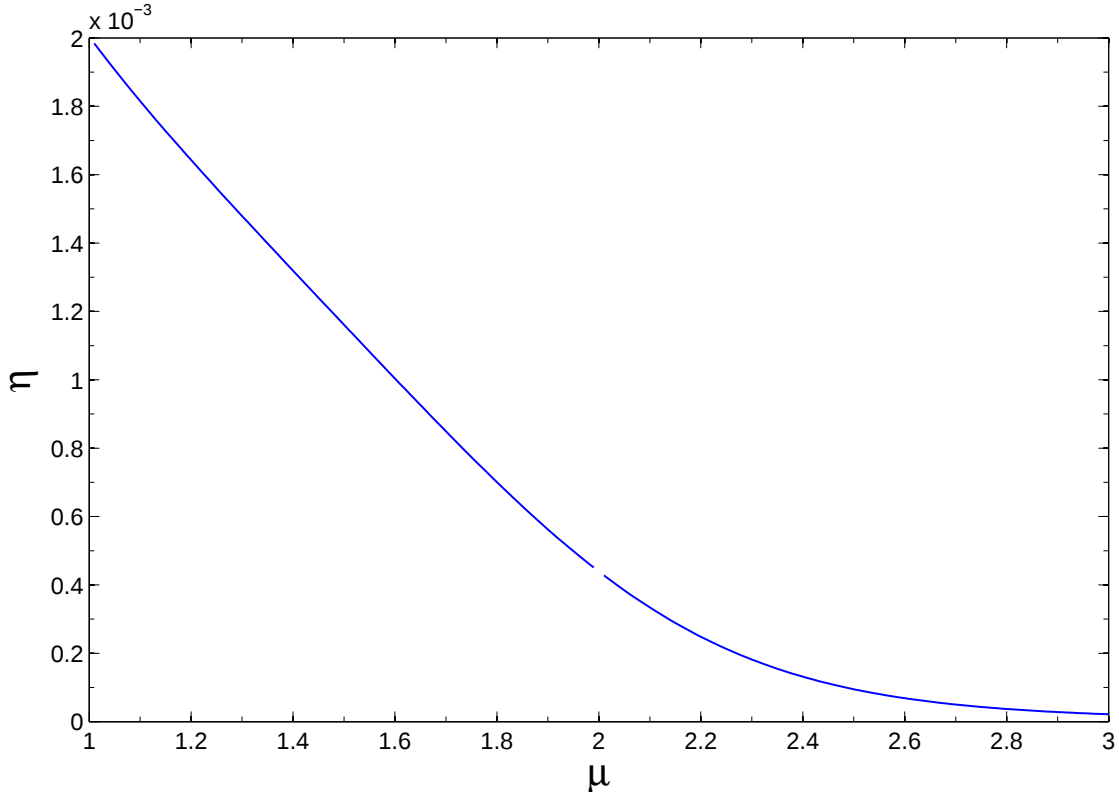


Figura 4.1 Gráfico da eficiência η vs. o expoente μ para buscas de Lévy destrutivas. O máximo para a eficiência está no limite balístico $\mu \rightarrow 1$.

O resultado acima pode ser entendido de acordo com o seguinte argumento. Para maximizar a eficiência, é necessário minimizar a distância total percorrida até o encontro com um sítio. Se o caminhante pudesse deterministicamente saber previamente qual sítio está mais próximo, a menor distância possível para a busca seria caminhar até ele em linha reta. Mas por estarmos tratando de um processo estocástico, esta informação não está previamente disponível, e

caminhadas balísticas podem não ser uma boa estratégia caso seja feita a escolha da direção errada para o sítio mais distante. Para $x = \lambda/2$, no entanto, ambos os sítios estão equidistantes, e este dilema não mais existe. Logo, mover-se balisticamente em linha reta, para qualquer um dos dois lados, obrigatoriamente fará o caminhante percorrer a menor distância possível até qualquer um dos sítios, maximizando então a eficiência. Como o movimento balístico está associado com o expoente $\mu \rightarrow 1$, esta é a justificativa física para o resultado acima. Observe inclusive que o valor da eficiência para esta posição é aproximadamente igual a 2×10^{-3} , e a distância total percorrida (igual ao seu inverso) é igual a $\langle L \rangle = (\lambda - 2r_v)/2 = 499$, de acordo com o exposto acima.

4.1.2 Busca não-destrutiva

Considerando, como no caso anterior, $\lambda = 1000$, $r_v = \ell_0 = 1$ e $dx = 1$, mas escolhendo agora $x_0 = r_v$ (posição inicial associada à busca não-destrutiva), e variando o parâmetro μ em intervalos $d\mu = 0.01$, com $1 < \mu \leq 3$, obtemos o gráfico da eficiência η vs. μ para buscas de Lévy não-destrutivas a seguir. Embora tenhamos realizado a conta explícita para $\langle |\ell| \rangle$ quando $\mu = 2$, iremos desconsiderar o valor da eficiência neste caso, observando que o seu valor pode ser inferido pelo limite contínuo da curva obtida. Isso irá acarretar em uma região do gráfico não-preenchida em torno deste expoente, isto é, no intervalo $2 - d\mu < \mu < 2 + d\mu$.

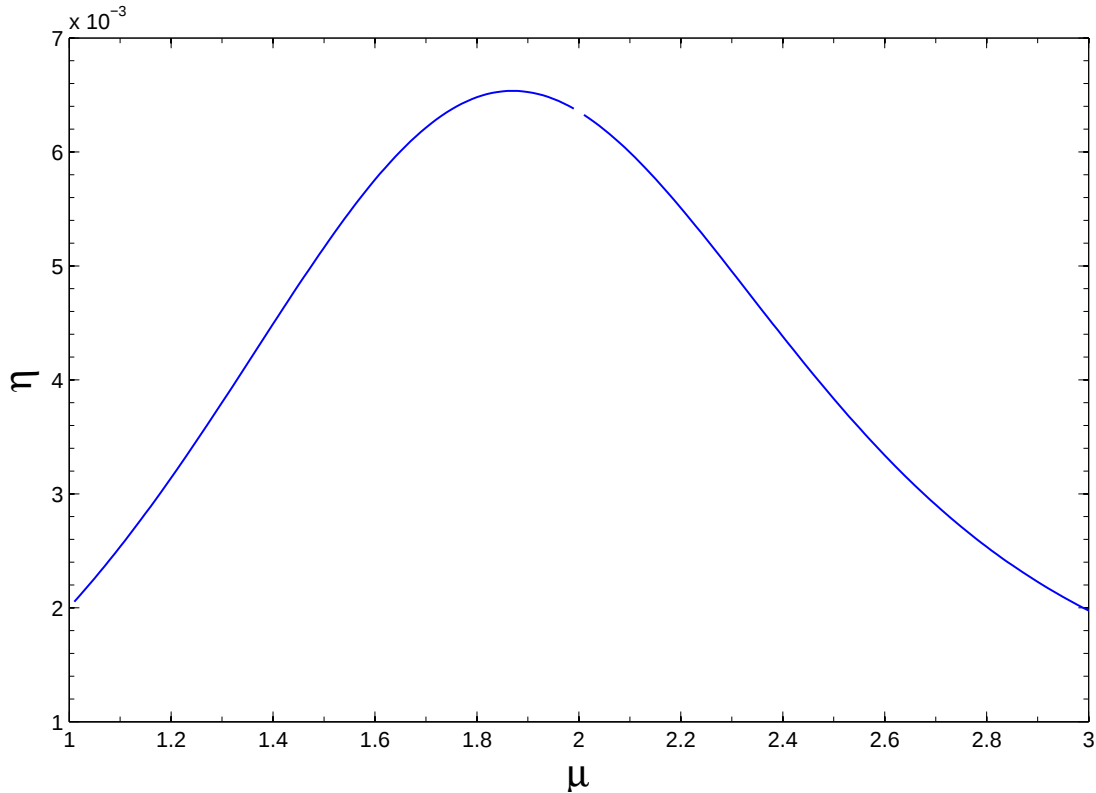


Figura 4.2 Gráfico da eficiência η vs. o expoente μ para buscas de Lévy não-destrutivas. O máximo para a eficiência é obtido para $\mu = 1.87$, valor próximo a $\mu \cong 2$, calculado teoricamente.

Note que o máximo da eficiência está localizado em $\mu = 1.87$, valor próximo ao encontrado com auxílio do modelo de campo médio [14], $\mu \cong 2$, como discutido na Seção 2.2. De fato, observamos também que a posição de tal máximo varia com λ , aumentando em direção ao valor $\mu = 2$ para λ maiores.

Para efeito de comparação posterior com as eficiências das distribuições stretched exponential e gama, identificamos que o valor máximo da eficiência da distribuição de Lévy no caso não-destrutivo é dado por $\eta = 6.5 \times 10^{-3}$. Tal valor corresponde à realização de um percurso médio $\langle L \rangle = \eta^{-1} \cong 153$ até o encontro do próximo sítio.

Embora caminhar balisticamente em linha reta ao sítio mais próximo seja sempre a melhor estratégia caso se saiba previamente se tal sítio está à esquerda ou à direita, devido a aleatoriedade deste processo a escolha da direção errada neste caso consistirá numa das piores estratégias possíveis, pois levará o caminhante a percorrer todo o intervalo em busca do sítio mais distante. Passa a existir então um equilíbrio entre realizar grandes saltos (correspondendo ao limite $\mu \rightarrow 1$) e caminhar brownianamente ($\mu \rightarrow 3$), acarretando em uma estratégia ótima para $\mu \cong 2$. De fato, como discutido no Capítulo 2, esta solução ótima representa, no caso de buscas não-destrutivas, um compromisso entre as estratégias que favorecem o retorno ao último sítio previamente visitado ($\mu \rightarrow 3$, com pequenos $\langle |\ell| \rangle$ e muitos passos em média) e aquelas que levam à visita a sítios nunca antes visitados, ou não visitados recentemente ($\mu \rightarrow 1$, com grandes $\langle |\ell| \rangle$ e poucos passos em média). Claramente, como no caso de buscas destrutivas o sítio mais próximo não se encontra presente (visto que foi destruído após o seu recente encontro), então tal equilíbrio, ou compromisso, não se apresenta, e estratégias de passos longos ($\mu \rightarrow 1$) tornam-se mais eficientes, como vimos.

4.2 Stretched Exponential

A distribuição de probabilidades para os tamanhos de passo $p(\ell)$ do caso stretched exponential tem dois parâmetros passíveis de serem variados: o expoente β e o coeficiente γ . O intervalo comumente utilizado para o β é assumir que $0 < \beta < 1$, que é quando o gráfico de $p(\ell)$ vs. $\ln(\ell)$ fica caracteristicamente “esticado” se comparado com o gráfico da distribuição exponencial “pura” ($\beta = 1$). O caso “comprimido” $\beta > 1$ é de menor interesse, uma vez que tende a aumentar a probabilidade de passos menores, diminuindo, ainda mais, os efeitos típicos de “alongamento da cauda”, e levando a uma convergência ainda mais rápida ao TLC. Usaremos, portanto, β nesse intervalo de variação. Os diversos gráficos a seguir correspondem a diferentes valores de γ .

4.2.1 Busca destrutiva

Considerando $\lambda = 1000$, $r_v = \ell_0 = 1$, $dx = 1$ e $x_0 = \lambda/2$, obtemos os gráficos da eficiência η vs. β a seguir para buscas destrutivas segundo a distribuição stretched exponential. Nota-se inicialmente que, para γ fixo, o efeito de diminuir β é similar ao de diminuir o parâmetro μ no caso Lévy destrutivo. De fato, em ambos os casos tais regiões de parâmetros favorecem à ocorrência de grandes passos.

Em particular, devido à finitude do intervalo, com comprimento $\lambda - 2r_v$, os sítios à esquerda

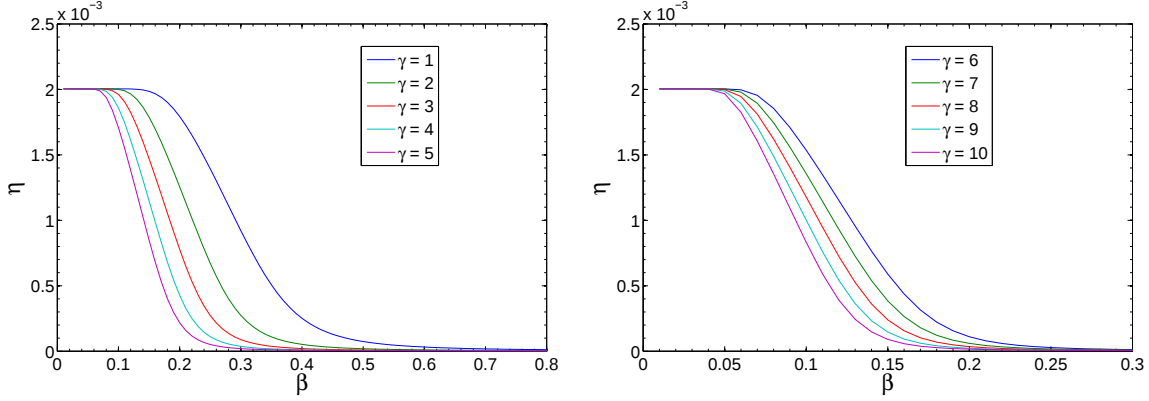


Figura 4.3 Gráfico da eficiência η vs. o parâmetro exponencial β para buscas destrutivas segundo a distribuição stretched exponential, para vários valores de γ . A diminuição no valor de β gera efeitos similares à diminuição do parâmetro μ no caso Lévy destrutivo.

e à direita podem ser acessados em um único passo de tamanho $\langle L \rangle = (\lambda - 2r_v)/2$, tal como ocorre no caso Lévy destrutivo. Isso leva, de forma análoga, a uma eficiência $\eta \cong 2 \times 10^{-3}$. Assim, concluímos que para os valores de λ computacionalmente permitidos nesse trabalho, as eficiências máximas de buscas destrutivas de Lévy e stretched exponential são idênticas. É possível, no entanto, que, no limite $\lambda \rightarrow \infty$ de extrema escassez de alimentos, a busca destrutiva de Lévy mostre eficiência superior. De fato, como vimos nos Capítulos 1 e 2, o primeiro momento da distribuição de Lévy diverge, enquanto que o primeiro momento da $p(\ell)$ stretched exponential permanece finito para todo o intervalo de definição dos seus parâmetros, levando a uma convergência para a distribuição gaussiana associada (TLC).

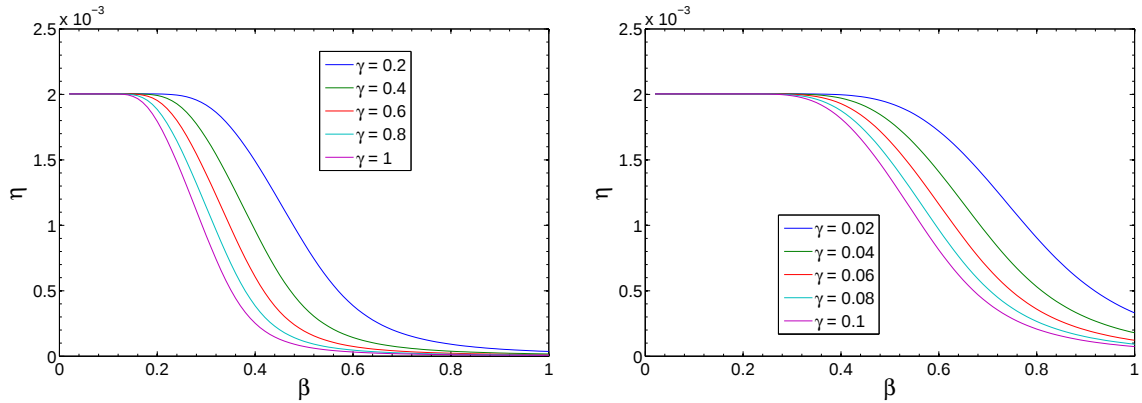


Figura 4.4 Gráfico da eficiência η vs. o parâmetro exponencial β para buscas destrutivas segundo a distribuição stretched exponential, para vários valores de γ . O limite balístico é atingido mais lentamente em $\beta \rightarrow 0$ para maiores valores de γ .

Por outro lado, para um valor de β fixo, notamos que quanto maior o parâmetro γ , menos largo se torna o platô na eficiência, isto é, mais lentamente o limite balístico (para $\lambda = 1000$) é atingido, de eficiência $\eta \cong 2 \times 10^{-3}$.

4.2.2 Busca não-destrutiva

Considerando $\lambda = 1000$, $r_v = \ell_0 = 1$, $dx = 1$ e $x_0 = r_v$, obtemos os gráficos da eficiência η vs. β a seguir para buscas não-destrutivas segundo a distribuição stretched exponential.

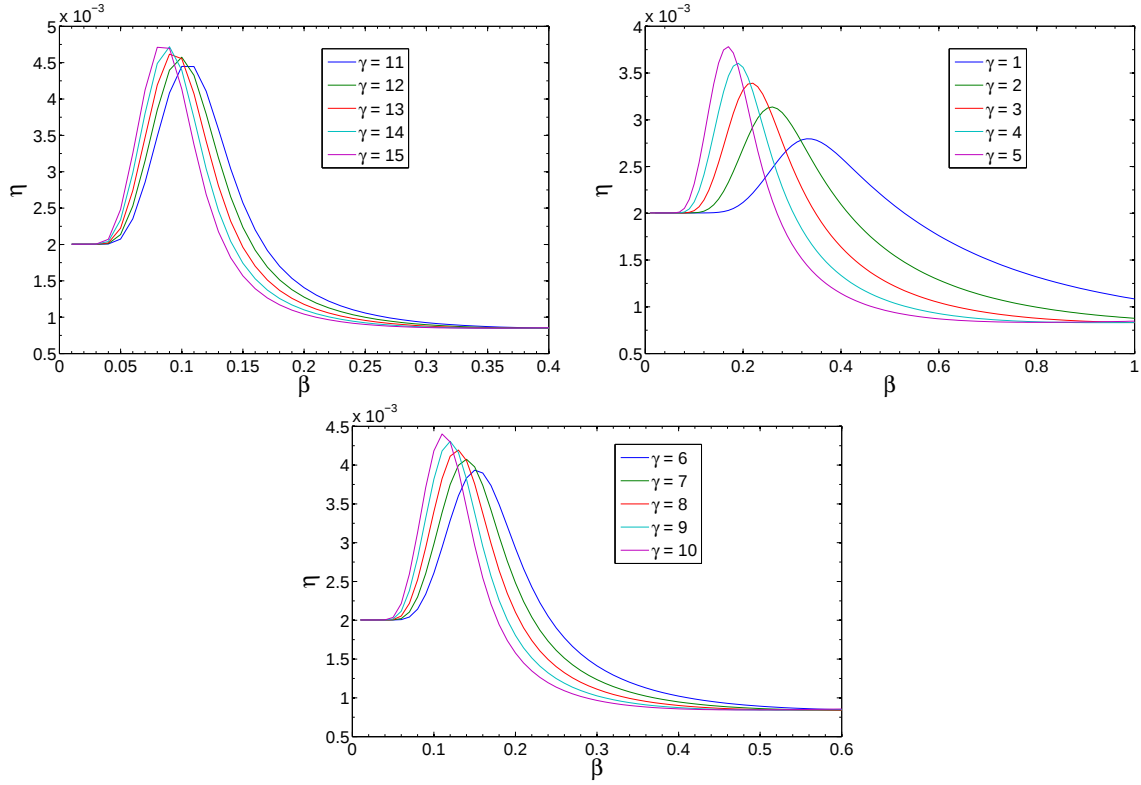


Figura 4.5 Gráfico da eficiência η vs. o parâmetro exponencial β para buscas não-destrutivas segundo a distribuição stretched exponential, para vários valores de γ . O aumento do valor de γ acarreta em um deslocamento no máximo da eficiência para menores valores de β .

Para um valor de γ fixo, observamos, qualitativamente, o mesmo tipo de competição descrito para buscas não-destrutivas de Lévy entre estratégias que favorecem os menores passos e tendem a visitar o sítio que acabou de ser encontrado ($\beta \rightarrow 1$) e estratégias que privilegiam maiores passos, e que vão buscar sítios nunca visitados, ou não visitados recentemente ($\beta \rightarrow 0$). Do ponto de vista quantitativo, porém, o importante é ressaltar que a máxima eficiência obtida para buscas não-destrutivas via stretched exponential, $\eta \cong 4.7 \times 10^{-3}$, obtida para $\beta = 0.08$ e $\gamma = 15$, é menor que o seu respectivo valor $\eta \cong 6.5 \times 10^{-3}$ obtido para a distribuição de Lévy. Mais precisamente, $(\eta_{\text{opt}}(\text{Lévy}) - \eta_{\text{opt}}(\text{stretched})) / \eta_{\text{opt}}(\text{Lévy}) \cong 28\%$, tornando mais evidente a superioridade de buscas de Lévy não-destrutivas em comparação com buscas não-destrutivas segundo a distribuição stretched exponential.

Finalmente, de modo similar ao que ocorre no caso destrutivo, o efeito do aumento do parâmetro γ corresponde ao de se deslocar o máximo da eficiência no sentido deste ser atingido para menores valores de β .

Por fim, é interessante notar que a estratégia exponencial ($\beta = 1$) de busca não-destrutiva

também se mostra sub-ótima, se comparada à de Lévy. Este fato é relevante no conceito dos resultados empíricos recentes para buscas realizadas por predadores marinhos [16], que identificam a estratégia exponencial como a adotada em regiões do oceano ricas em alimento. Tal conclusão, contudo, não entra em conflito com os resultados desta seção, válidos no regime de escassez de alimentos ($\lambda \gg r_v$). De fato, como discutido no Capítulo 2, espera-se que quando há abundância de alimento, a necessidade de longos passos é minimizada e buscas de Lévy se tornam tão (ou mesmo menos) eficientes do que estratégias governadas pelo TLC.

4.3 Distribuição Gama

A $p(\ell)$ da distribuição gama também possui dois parâmetros passíveis de serem variados: o expoente polinomial a e o coeficiente exponencial γ . O intervalo comumente utilizado para tais parâmetros é $\gamma, a > 0$. Em cada gráfico, usaremos, portanto, a nesse intervalo de variação, com as diversas curvas correspondendo a diferentes valores de γ .

4.3.1 Busca destrutiva

Considerando $\lambda = 1000$, $r_v = \ell_0 = 1$, $dx = 1$ e $x_0 = \lambda/2$, obtemos os gráficos da eficiência η vs. $1/a$ a seguir para buscas destrutivas segundo a distribuição gama.

Note, inicialmente, que valores menores de $1/a$ (isto é, valores maiores de a) geram valores médios maiores do tamanho do passo individual [ver Eq. (3.68)]. Assim, em função do quadro já discutido para as buscas destrutivas das distribuições de Lévy e stretched exponential, é de se esperar que as buscas destrutivas mais eficientes realizadas via distribuição gama ocorram para $1/a \rightarrow 0$. Observamos, entretanto, que para um largo intervalo de valores de γ , o limite balístico da eficiência $\eta = (\lambda/2 - r_v)^{-1} \cong 2 \times 10^{-3}$ não é possível de ser atingido. Como comentado no caso stretched exponential, isso se deve ao fato de que, para estas situações, o valor médio $\langle L \rangle = 499$ não pode ser alcançado através de um único passo, isto é, $\langle |\ell| \rangle < \langle L \rangle$, uma vez que é bastante improvável que um passo com tal extensão se dê nesse regime.

Por outro lado, à medida que o parâmetro γ diminui, a atenuação exponencial das probabilidades de passos longos é enfraquecida [ver Eq. (3.48)], e, eventualmente, para $\gamma \gtrsim 0.01$, tal limite balístico pode ser atingido, gerando eficiências de busca destrutiva (para $\lambda = 1000$) tão altas quanto as obtidas nos casos Lévy e stretched exponential. Uma vez mais, porém, vale ressaltar que a distribuição gama obedece ao TLC, de modo que no limite $\lambda \rightarrow \infty$ espera-se que a distribuição de Lévy, com primeiro momento divergente, gere uma eficiência maior que a das distribuições com momentos finitos.

4.3.2 Busca não-destrutiva

Considerando $\lambda = 1000$, $r_v = \ell_0 = 1$, $dx = 1$ e $x_0 = r_v$, obtemos os gráficos da eficiência η vs. a a seguir para buscas não-destrutivas segundo a distribuição gama.

Observamos, neste caso, que um máximo na eficiência da busca não-destrutiva em função de a só é obtido para um certo intervalo de valores do parâmetro γ . De fato, se γ for muito pequeno ($\gamma \ll 1$), a distribuição torna-se dominada pela lei de potência $p(\ell) \approx |\ell|^{a-1}$, com

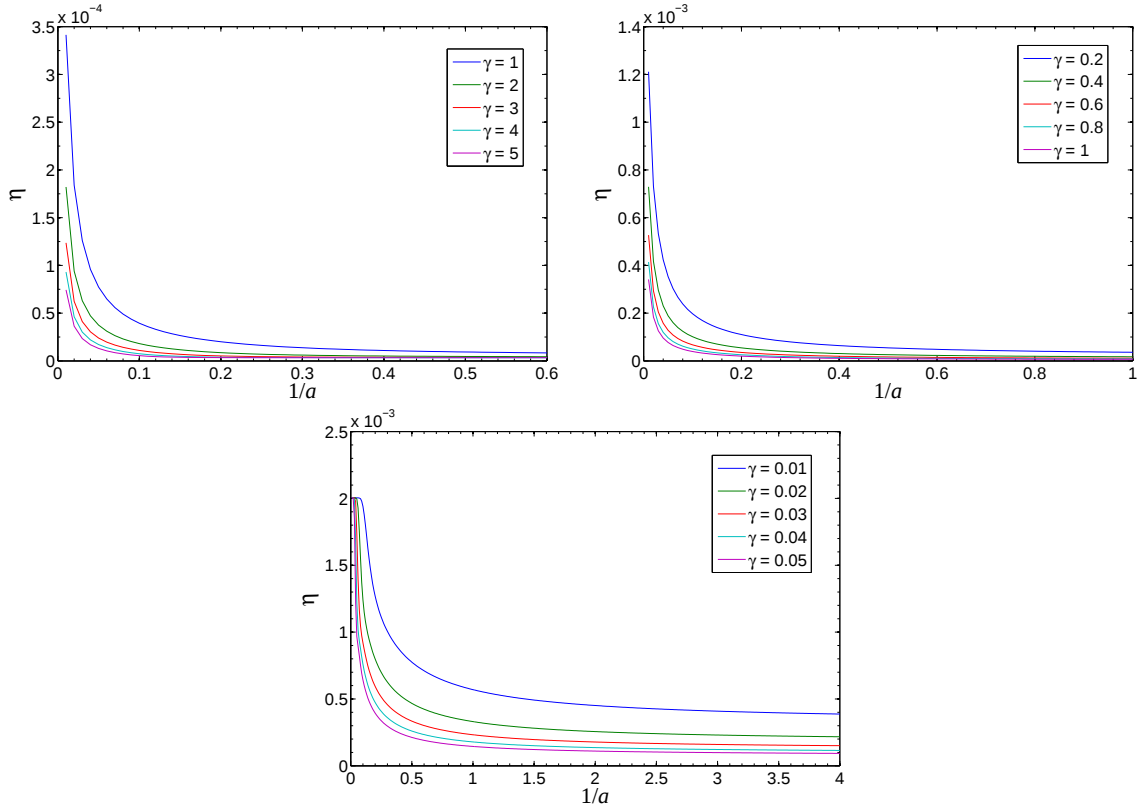


Figura 4.6 Gráfico da eficiência η vs. $1/a$ para buscas destrutivas segundo a distribuição gama, para vários valores de γ . A diminuição de γ corresponde ao enfraquecimento da atenuação exponencial, gerando maiores valores para a eficiência.

$a > 0$. Nesse caso, valores de a maiores que 1, embora comportados pela distribuição, não correspondem a situações físicas plausíveis, visto que envolvem um regime de probabilidades crescentes com $|\ell|$, devendo, portanto, ser descartados em nossa análise. A mencionada competição entre estratégias dominadas por tamanhos grandes e pequenos dos passos deve-se intensificar, então, para valores não tão pequenos de γ , como observado na figura acima. O importante, neste caso, é identificar que a máxima eficiência de busca não-destrutiva para a distribuição gama, $\eta \cong 2.3 \times 10^{-3}$, obtida para $a = 0.5$ e $\gamma = 0.01$, ainda é menor que a do caso Lévy, $\eta \cong 6.5 \times 10^{-3}$, tal como ocorreu com a distribuição stretched exponential. Mais precisamente, $(\eta_{\text{opt}}(\text{Lévy}) - \eta_{\text{opt}}(\text{gama}))/\eta_{\text{opt}}(\text{Lévy}) \cong 65\%$, diferença ainda maior do que o obtido para a stretched exponential, tornando mais evidente a superioridade de buscas de Lévy não-destrutivas em comparação com buscas não-destrutivas segundo a distribuição gama. A relevância deste resultado aumenta ao se considerar que na reanálise dos dados de tempos de vôos dos albatrozes [56], a distribuição gama foi sugerida como aquela adotada por estes animais quando em busca por alimentos. Caso tal resultado empírico venha a se confirmar em análises futuras envolvendo possivelmente um conjunto maior e mais preciso de dados, poderemos concluir que albatrozes buscam por alimento num regime de relativa abundância ($\lambda \gtrsim r_v$), em que as vantagens conferidas pela estratégia de busca de Lévy não são relevantes. Uma outra

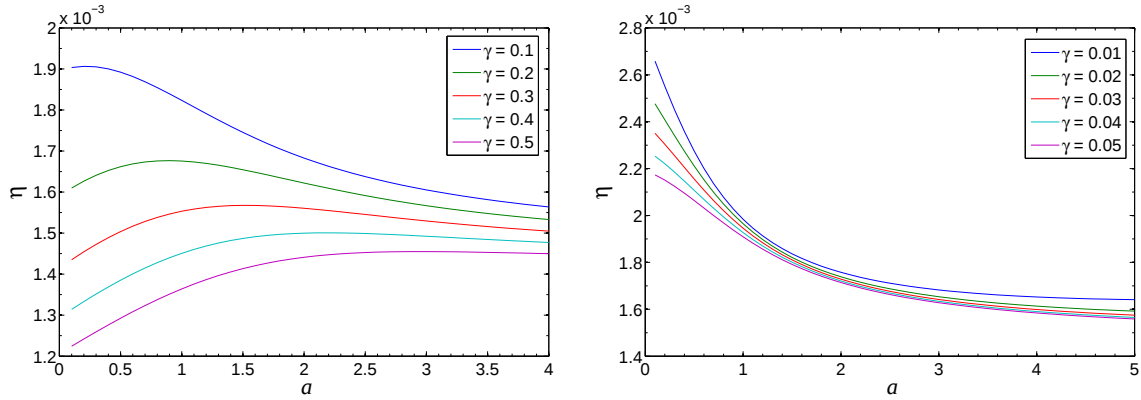


Figura 4.7 Gráfico da eficiência η vs. o parâmetro polinomial a para buscas não-destrutivas segundo a distribuição gama, para vários valores de γ . Para valores não tão pequenos de γ , a competição entre estratégias dominadas por tamanhos grandes e pequenos de passos se intensifica.

possibilidade seria o fato de albatrozes eventualmente adotarem uma estratégia sub-ótima de busca, ao invés da solução ótima de Lévy. Nesse sentido, a discussão a respeito das estratégias de busca realizadas por albatrozes ainda permanece em aberto [63].

Em resumo, concluímos neste capítulo que, através da análise numérica, via o procedimento de discretização das quantidades obtidas analiticamente no capítulo anterior, a eficiência das estratégias de Lévy (truncada) mostraram-se sempre maiores (no caso não-destrutivo) ou, na pior das hipóteses, equivalentes (no caso destrutivo) às eficiências obtidas utilizando as distribuições stretched exponential e gama. Em particular, argumentamos que, no regime $\lambda \rightarrow \infty$, devido à observância do TLC por estas últimas, espera-se que mesmo no caso destrutivo, a máxima eficiência, correspondente ao regime balístico, só seja passível de ser alcançada pelas distribuições de Lévy.

CAPÍTULO 5

Cálculo Variacional

5.1 Equação de Euler associada ao problema

Embora instrutivo e revelador, os cálculos e resultados numéricos dos dois capítulos anteriores possuem um ponto fraco: eles apenas comparam a estratégia de busca de Lévy com as de duas outras distribuições, mostrando que a estratégia de Lévy é de fato a mais eficiente no regime de escassez de alimentos, $\lambda \gg r_v$. O problema é que sempre pode existir uma outra distribuição cuja eficiência seja maior que a de Lévy nos regimes de interesse, e é computacionalmente impossível testar diretamente Lévy com todas as ditribuições existentes para garantir que esta é de fato a que maximiza a eficiência. Para abordar esta questão, precisamos de técnicas mais sofisticadas, e é natural que usemos aqui o cálculo de variações para obter a distribuição de probabilidade que extremiza a eficiência. Esta é a abordagem que utilizaremos neste capítulo.

Como vimos, a eficiência pode ser escrita como

$$\eta = \frac{1}{\langle L \rangle}, \quad (5.1)$$

e como $\langle L \rangle = \langle L \rangle(x, p(\ell))$, a distribuição $p(\ell)$ que minimizar a distância total percorrida para uma dada posição fixa x será a mesma que maximiza a eficiência definida acima.

No capítulo anterior, chegamos a uma expressão analítica para $\langle L \rangle$, dada por

$$\langle L \rangle(x) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \langle |\ell| \rangle \}(x). \quad (5.2)$$

Como o operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é auto-adjunto e possui norma menor que a unidade, podemos reescrevê-lo como uma soma infinita

$$\langle L \rangle(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \{ \langle |\ell| \rangle \}(x). \quad (5.3)$$

Vamos analisar um termo genérico dessa soma. Para $n \geq 1$, podemos escrever

$$\mathcal{L}^n \{ \langle |\ell| \rangle \}(x) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\alpha_0 \delta(\alpha_0 - x) \int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\alpha_1 p(\alpha_0 - \alpha_1) \int \cdots \int d\alpha_n p(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \langle |\ell| \rangle(\alpha_n). \quad (5.4)$$

Fazendo, agora, uma variação δ em $\mathcal{L}^n\{\langle|\ell|\rangle\}(x)$ com relação a $p(\ell)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}^n\{\langle|\ell|\rangle\}(x) = & \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_0 \delta(\alpha_0 - x) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_1 \delta p(\alpha_0 - \alpha_1) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_2 p(\alpha_1 - \alpha_2) \int \cdots \int d\alpha_n p(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \langle|\ell|\rangle(\alpha_n) + \\
& \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_0 \delta(\alpha_0 - x) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_1 p(\alpha_0 - \alpha_1) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_2 \delta p(\alpha_1 - \alpha_2) \int \cdots \int d\alpha_n p(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \langle|\ell|\rangle(\alpha_n) + \\
& \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_0 \delta(\alpha_0 - x) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_1 p(\alpha_0 - \alpha_1) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_2 p(\alpha_1 - \alpha_2) \int \cdots \int d\alpha_n \delta p(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \langle|\ell|\rangle(\alpha_n) + \\
& \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_0 \delta(\alpha_0 - x) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_1 p(\alpha_0 - \alpha_1) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_2 p(\alpha_1 - \alpha_2) \int \cdots \int d\alpha_n p(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \delta \langle|\ell|\rangle(\alpha_n) .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Os termos imediatamente antes e após a variação δ podem ser reescritos com o uso do operador $\mathcal{L}$ e da densidade de probabilidade ρ , respectivamente definidos pelas Eqs. (2.17) e (2.10):

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}^n\{\langle|\ell|\rangle\}(x) = & \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_0 \rho_0(\alpha_0) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_1 \delta p(\alpha_0 - \alpha_1) \mathcal{L}^{n-1}\{\langle|\ell|\rangle\}(\alpha_1) + \\
& + \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_1 \rho_1(\alpha_1) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_2 \delta p(\alpha_1 - \alpha_2) \mathcal{L}^{n-2}\{\langle|\ell|\rangle\}(\alpha_2) + \cdots + \\
& + \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_{n-1} \rho_{n-1}(\alpha_{n-1}) \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha_n \delta p(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \mathcal{L}^0\{\langle|\ell|\rangle\}(\alpha_n) + \mathcal{L}^n\{\delta \langle|\ell|\rangle\}(x) .
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Como as variáveis de integração são mudas, podemos escrever, sem perda de generalidade,

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}^n\{\langle|\ell|\rangle\}(x) = & \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \{ \rho_0(\alpha) \mathcal{L}^{n-1}\{\langle|\ell|\rangle\}(\gamma) + \rho_1(\alpha) \mathcal{L}^{n-2}\{\langle|\ell|\rangle\}(\gamma) + \\
& + \cdots + \rho_{n-1}(\alpha) \mathcal{L}^0\{\langle|\ell|\rangle\}(\gamma) \} + \mathcal{L}^n\{\delta \langle|\ell|\rangle\}(x) ,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

ou mais resumidamente,

$$\delta \mathcal{L}^n\{\langle|\ell|\rangle\}(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \left\{ \sum_{m=1}^n \rho_{m-1}(\alpha) \mathcal{L}^{n-m}\{\langle|\ell|\rangle\}(\gamma) \right\} + \mathcal{L}^n\{\delta \langle|\ell|\rangle\}(x) . \tag{5.8}$$

Segue então a variação de $\langle L \rangle$:

$$\begin{aligned} \delta \langle L \rangle(x) &= \delta \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \{ \langle |\ell| \rangle \}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta \mathcal{L}^n \{ \langle |\ell| \rangle \}(x) \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \rho_{m-1}(\alpha) \mathcal{L}^{n-m} \{ \langle |\ell| \rangle \}(\gamma) \right\} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \{ \delta \langle |\ell| \rangle \}(x) . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Invertendo a ordem dos somatórios, ficamos com

$$\begin{aligned} \delta \langle L \rangle(x) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \rho_{m-1}(\alpha) \mathcal{L}^{n-m} \{ \langle |\ell| \rangle \}(\gamma) \right\} + \\ &\quad + (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \delta \langle |\ell| \rangle \}(x) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Contudo, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \rho_{m-1}(\alpha) \mathcal{L}^{n-m} \{ \langle |\ell| \rangle \}(\gamma) &= \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{m-1}(\alpha) \sum_{n=m}^{\infty} \mathcal{L}^{n-m} \{ \langle |\ell| \rangle \}(\gamma) = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \{ \langle |\ell| \rangle \} &= (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \rho_0 \}(\alpha) (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \langle |\ell| \rangle \}(\gamma) , \end{aligned} \quad (5.11)$$

de forma que

$$\delta \langle L \rangle(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\alpha \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \rho_0 \}(\alpha) \langle L \rangle(\gamma) + (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \delta \langle |\ell| \rangle \}(x) . \quad (5.12)$$

Como o operador é auto-adjunto, usamos a propriedade da função delta para escrever que

$$\delta \langle L \rangle(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \delta p(\alpha - \gamma) \}(x) \langle L \rangle(\gamma) + (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \delta \langle |\ell| \rangle \}(x) , \quad (5.13)$$

ou ainda,

$$\delta \langle L \rangle(x) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \left\{ \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \langle L \rangle(\gamma) \right\} (x) + (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \{ \delta \langle |\ell| \rangle \}(x) , \quad (5.14)$$

donde finalmente obtemos a equação variacional:

$$\delta \langle L \rangle(x) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1} \left\{ \int_{r_v}^{\lambda-r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \langle L \rangle(\gamma) + \delta \langle |\ell| \rangle(\alpha) \right\} (x) . \quad (5.15)$$

5.2 Uma abordagem alternativa

Mostraremos, a seguir, que, para garantir a consistência dos cálculos da seção anterior, a Eq. (5.15) poderá ser obtida segundo uma abordagem distinta.

Vamos partir da equação integral de Fredholm, Eq. (2.56), e aplicar o princípio variacional ali. A equação integral é

$$\langle L \rangle(\alpha) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(\alpha - x) \langle L \rangle(x) dx + \langle |\ell| \rangle(\alpha). \quad (5.16)$$

Fazendo uma variação δ em relação a $p(\ell)$, obtemos

$$\delta \langle L \rangle(\alpha) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \delta p(\alpha - x) \langle L \rangle(x) dx + \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(\alpha - x) \delta \langle L \rangle(x) dx + \delta \langle |\ell| \rangle(\alpha), \quad (5.17)$$

onde usamos a regra da variação do produto, pois $\langle L \rangle \equiv \langle L \rangle(p(\ell))$. Podemos então escrever

$$\delta \langle L \rangle(\alpha) - \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(\alpha - x) \delta \langle L \rangle(x) dx = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \delta p(\alpha - x) \langle L \rangle(x) dx + \delta \langle |\ell| \rangle(\alpha). \quad (5.18)$$

Usando a definição do operador $\mathcal{L}$ na integral do lado esquerdo da igualdade, isto é:

$$\mathcal{L}[f(x)](\alpha) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(\alpha - x) [f(x)] dx, \quad (5.19)$$

a equação anterior é simplificada para

$$\delta \langle L \rangle(\alpha) - \mathcal{L}[\delta \langle L \rangle(x)](\alpha) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})[\delta \langle L \rangle(x)](\alpha) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \delta p(\alpha - \gamma) \langle L \rangle(\gamma) d\gamma + \delta \langle |\ell| \rangle(\alpha). \quad (5.20)$$

Finalmente, aplicando o operador inverso $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ em ambos os membros, chegamos a

$$\delta \langle L \rangle(x) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})_{\alpha}^{-1} \left\{ \int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \langle L \rangle(\gamma) + \delta \langle |\ell| \rangle(\alpha) \right\} (x), \quad (5.21)$$

que é a mesma equação da seção anterior, como queríamos demonstrar.

5.3 Desenvolvimento da equação variacional

Para obter a equação de Euler associada a este problema variacional, precisamos isolar o termo variacional δp . O problema é que o argumento de δp na equação acima depende de α ,

variável em que o operador $(1 - \mathcal{L})^{-1}$ irá atuar. Fazendo a mudança de variável $\ell = \alpha - \gamma$ no primeiro termo entre chaves da Eq. (5.15), encontramos

$$\begin{aligned}
& \int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\gamma \delta p(\alpha - \gamma) \langle L \rangle(\gamma) = \int_{-(\alpha - r_v)}^{\lambda - \alpha - r_v} d\ell \delta p(\ell) \langle L \rangle(\alpha + \ell) = \\
& \int_{-(\alpha - r_v)}^{-\ell_0} d\ell \delta p(\ell) \langle L \rangle(\alpha + \ell) + \int_{\ell_0}^{\lambda - \alpha - r_v} d\ell \delta p(\ell) \langle L \rangle(\alpha + \ell) = \\
& \int_{\ell_0}^{\alpha - r_v} d\ell \delta p(\ell) \langle L \rangle(\alpha - \ell) + \int_{\ell_0}^{\lambda - \alpha - r_v} d\ell \delta p(\ell) \langle L \rangle(\alpha + \ell) = \\
& \int_{\ell_0}^{\lambda - 2r_v} d\ell \delta p(\ell) \langle L \rangle(\alpha - \ell) \theta((\alpha - r_v) - \ell) + \int_{\ell_0}^{\lambda - 2r_v} d\ell \delta p(\ell) \langle L \rangle(\alpha + \ell) \theta((\lambda - \alpha - r_v) - \ell) = \\
& \int_{\ell_0}^{\lambda - 2r_v} d\ell \delta p(\ell) [\langle L \rangle(\alpha - \ell) \theta((\alpha - r_v) - \ell) + \langle L \rangle(\alpha + \ell) \theta((\lambda - \alpha - r_v) - \ell)] , \quad (5.22)
\end{aligned}$$

onde $\theta(x)$ é a função degrau de Heaviside, nula para $x < 0$ e igual a 1 para $x \geq 0$. O segundo termo entre parênteses, $\delta \langle |\ell| \rangle(\alpha)$, fica então

$$\begin{aligned}
\delta \langle |\ell| \rangle(\alpha) &= \delta_p \left[\frac{\lambda - 2r_v}{2} + \int_{\ell_0}^{\alpha - r_v} [\ell - (\alpha - r_v)] p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda - \alpha - r_v} [\ell - (\lambda - \alpha - r_v)] p(\ell) d\ell \right] \\
&= \int_{\ell_0}^{\alpha - r_v} [\ell - (\alpha - r_v)] \delta p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda - \alpha - r_v} [\ell - (\lambda - \alpha - r_v)] \delta p(\ell) d\ell = \\
& \int_{\ell_0}^{\lambda - 2r_v} d\ell \delta p(\ell) \{ [\ell - (\alpha - r_v)] \theta((\alpha - r_v) - \ell) + [\ell - (\lambda - \alpha - r_v)] \theta((\lambda - \alpha - r_v) - \ell) \} , \quad (5.23)
\end{aligned}$$

de forma que a equação variacional pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\delta \langle L \rangle(x) &= \int_{\ell_0}^{\lambda - 2r_v} d\ell \delta p(\ell) (1 - \mathcal{L})_{\alpha}^{-1}(x) \{ [\langle L \rangle(\alpha - \ell) - ((\alpha - \ell) - r_v)] \theta((\alpha - \ell) - r_v) + \\
& \quad + [\langle L \rangle(\alpha + \ell) - (\lambda - (\alpha + \ell) - r_v)] \theta(\lambda - (\alpha + \ell) - r_v) \} . \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Explicitando, agora, o operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})_{\alpha}^{-1}(x)$ na forma integral, encontramos

$$\delta \langle L \rangle(x) = \int_{\ell_0}^{\lambda - 2r_v} d\ell \delta p(\ell) \left\{ \int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\alpha k(x, \alpha) [\langle L \rangle(\alpha - \ell) - ((\alpha - \ell) - r_v)] \theta((\alpha - \ell) - r_v) + \int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\alpha k(x, \alpha) [\langle L \rangle(\alpha + \ell) - (\lambda - (\alpha + \ell) - r_v)] \theta(\lambda - (\alpha + \ell) - r_v) \right\}. \quad (5.25)$$

Na equação acima, a função que está sendo variada é a densidade de probabilidades $p(\ell)$, que não se anula nos extremos da integral. No entanto, sabemos que

$$p(\ell) = \frac{dP}{d\ell}, \quad (5.26)$$

onde $P(\ell)$ é a distribuição acumulada, definida em nosso caso por

$$P(\ell) = \int_{\ell_0}^{\ell} p(|\ell'|) d\ell'. \quad (5.27)$$

A variação em $p(\ell)$ pode então ser escrita como

$$\delta p(\ell) = \delta \frac{dP}{d\ell} = \frac{d\delta P}{d\ell} = \frac{d}{d\ell}(\delta P), \quad (5.28)$$

com a vantagem que $\delta P(\ell)$ se anula no extremo inferior da integral, pois $P(\ell_0) = 0$ para qualquer distribuição, e se anulará no regime de escassez de sítios, $\lambda \rightarrow \infty$, pois $P(\infty) = 1$ para qualquer distribuição.

A equação de Euler, associada ao problema de extremizar a eficiência das buscas com ponto de partida em x , consiste em impor a condição $\delta \langle L \rangle(x) = 0$. Levando em consideração que a variação está sendo feita em $\delta P'(\ell)$, isto é, na derivada da função que satisfaz as condições de contorno nos extremos da integral, a condição acima implica que [64]

$$(\mathbb{1} - \mathcal{L})_{\alpha}^{-1}(x) \{ [\langle L \rangle(\alpha - \ell) - ((\alpha - \ell) - r_v)] \theta((\alpha - \ell) - r_v) + [\langle L \rangle(\alpha + \ell) - (\lambda - (\alpha + \ell) - r_v)] \theta(\lambda - (\alpha + \ell) - r_v) \} = \xi, \quad (5.29)$$

ou, explicitando o operador em sua forma integral,

$$\int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\alpha k(x, \alpha) [\langle L \rangle(\alpha - \ell) - ((\alpha - \ell) - r_v)] \theta((\alpha - \ell) - r_v) + \int_{r_v}^{\lambda - r_v} d\alpha k(x, \alpha) [\langle L \rangle(\alpha + \ell) - (\lambda - (\alpha + \ell) - r_v)] \theta(\lambda - (\alpha + \ell) - r_v) = \xi, \quad (5.30)$$

para $\ell_0 \leq \ell \leq \lambda - 2r_v$, onde ξ é uma constante arbitrária.

Os termos que estão sendo operados na Eq. (5.29) correspondem a diferenças entre a distância média total percorrida partindo de um ponto arbitrário $\langle L \rangle(\alpha - \ell)$ [$\langle L \rangle(\alpha + \ell)$] utilizando a distribuição $p_{\text{opt}}(\ell)$ e a distância em linha reta ao sítio em $x = r_v$ [$x = \lambda - r_v$]. A Eq. (5.30) evidencia uma convolução entre o operador resolvente e estas diferenças. Estas equações sugerem que caminhadas balísticas associadas a $\mu \rightarrow 1$ podem ser mais vantajosas para várias configurações iniciais por anularem diretamente os termos operados, irrespectivamente a ação do operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})_{\alpha}^{-1}(x)$.

De fato, cálculos numéricos similares aos do capítulo anterior para a eficiência η vs. a posição inicial x mostram que, para $\lambda = 1000$, $r_v = \ell_0 = dx = 1$, o expoente $\mu \rightarrow 1$ maximiza a eficiência da busca para qualquer caminhada partindo no intervalo $82 \lesssim x \lesssim 918$, como mostram os gráficos abaixo. Os intervalos complementares ilustram a transição entre os regimes destrutivo e não-destrutivo. Note que a medida que a posição inicial do caminhante se aproxima do sítio, a competição entre realizar grandes saltos e caminhar brownianamente se intensifica, com a solução ótima representando um compromisso entre as estratégias que favorecem o retorno ao último sítio previamente visitado e aquelas que levam à visita a sítios não visitados recentemente.

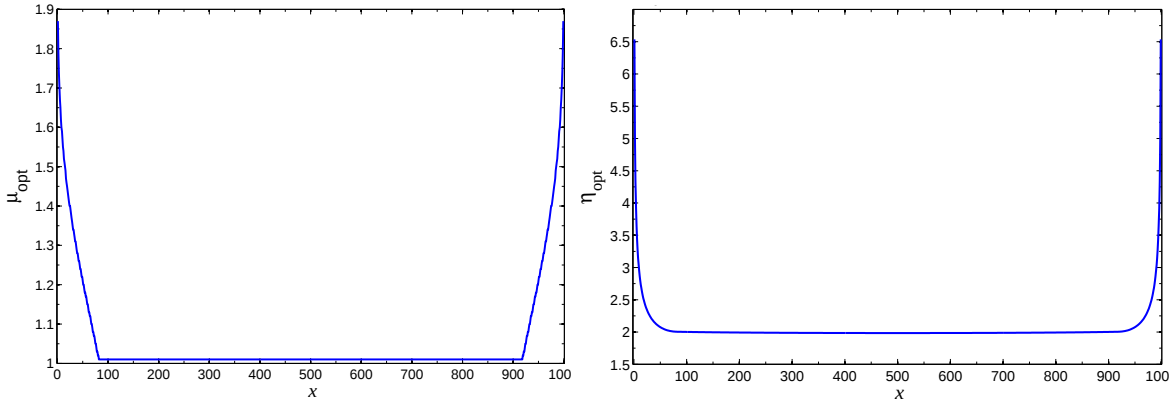


Figura 5.1 Gráficos do expoente μ_{opt} e da eficiência associada $\eta_{\text{opt}} \equiv \eta_{\text{opt}}(\mu_{\text{opt}})$ vs. a posição de partida da caminhada x . O expoente balístico $\mu \rightarrow 1$ maximiza a busca na maior parte das configurações iniciais, com $82 \lesssim x \lesssim 918$. As regiões complementares correspondem a transição entre os regimes destrutivo e não-destrutivo.

Apesar do desenvolvimento do procedimento de discretização utilizado no capítulo anterior, a solução (numérica ou analítica) da equação acima ainda não foi possível. Lembramos que, possivelmente, cada posição inicial se tem a ela associada uma distribuição de tamanho de passos $p_{\text{opt}}(\ell)$, satisfazendo a equação acima, que maximiza a eficiência da busca. Em particular, os casos de buscas destrutivas e não-destrutivas correspondem, como vimos, às respectivas escolhas $x = r_v$ (ou $x = \lambda - r_v$) e $x = \lambda/2$. Uma forte candidata para tais distribuições ótimas no regime $\lambda \gg r_v$ é, evidentemente, a família de distribuições de Lévy com $1 < \mu \leq 3$, onde, em tese, espera-se que $\mu_{\text{opt}} \equiv \mu_{\text{opt}}(x)$. Entretanto, para se confirmar esta suspeita, mais esforços devem ser envidados para resolver a Eq. (5.30), tarefa esta que entrará no rol das perspectivas futuras a este trabalho.

Conclusões e Perspectivas

Na presente dissertação, investigamos as eficiências das buscas unidimensionais destrutiva e não-destrutiva das distribuições de Lévy, stretched exponential e gama. Estas últimas, recentemente utilizadas para explicar dados empíricos de algumas espécies de animais em busca por alimentos, são governadas pelo TLC, enquanto que a distribuição de Lévy, com segundo momento divergente no regime $\lambda \rightarrow \infty$, apresenta dinâmica superdifusiva, invariância de escala e fractalidade, sendo governada pelo TLC generalizado.

Calculamos analiticamente a expressão formal para a eficiência de tais distribuições em função da distância ao último sítio visitado, do raio de visão r_v e do espaçamento médio entre os sítios, λ . Através de um processo de discretização do espaço de busca, obtivemos numericamente as eficiências mencionadas no regime de maior interesse em que a densidade de alimentos é baixa, $\lambda \gg r_v$.

Nesse contexto, confirmamos que, dentre as três distribuições estudadas, a de Lévy (truncada) sempre levou a buscas mais (caso não-destrutivo) ou equivalentemente (caso destrutivo) eficientes em relação às demais. Em particular, argumentos com base no TLC sustentam que, mesmo no caso destrutivo, a eficiência da distribuição de Lévy deve superar a das demais no regime $\lambda \rightarrow \infty$. Em contraste, quando há abundância de alimentos, espera-se que as vantagens conferidas pelas distribuições de Lévy percam relevância, de modo que estas se tornam tão (ou mesmo menos) eficientes quando comparadas às distribuições governadas pelo TLC.

Como perspectivas a esta parte da dissertação, mencionamos a possibilidade de análise de outras distribuições relevantes, tais como a log-normal e a stretched exponential combinada com lei de potência, por exemplo. De fato, a extensão para tais distribuições não deverá se constituir em tarefa muito complicada, uma vez que as partes analítica e numérica da técnica já se encontram controladas. Pode-se, ainda, estender a presente análise ao estudo detalhado de outros regimes de abundância de alimento, via a variação no valor da razão λ/r_v . Além disso, será interessante também alcançar o limite de maiores λ , com a perspectiva de aquisição de máquinas com maior capacidade de memória RAM.

Finalmente, desenvolvemos também, via cálculo variacional, a equação de Euler do problema, cuja solução, se existente, permitirá identificar qual distribuição, dentre todas as infinitas possibilidades, gera a busca mais eficiente, dado um determinado ponto de partida conhecido. Envidaremos esforços, no futuro próximo, no sentido de obter tal solução, quer numérica, quer analiticamente. Sem dúvida, tal feito, se logrado com êxito, constituirá uma relevante contribuição para responder à questão de qual estratégia de busca deve ser adotada quando se tem informação limitada acerca do espaço onde os sítios-alvo encontram-se aleatoriamente distribuídos.

Referências Bibliográficas

- [1] Oswald J. Schmitz, *Evol. Ecol.* **11**, 631 (1997).
- [2] M. F. Shlesinger and J. Klafter, in *On Growth and Form*, edited by H. E. Stanley and N. Ostrowsky (Nijhoff, Dordrecht, 1986), p. 279;
M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and J. Klafter, *Nature* **363**, 31 (1993);
M. F. Shlesinger, G. Zaslavsky, and U. Frisch, eds., *Lévy Flights and Related Topics in Physics* (Springer, Berlin, 1995).
- [3] I. Peterson, *The Jungle of Randomness: A Mathematical Safari* (Wiley, New York, 1997).
- [4] H. C. Berg, *Random Walks in Biology* (Princeton University Press, Princeton, 1983).
- [5] D. W. Stephens and J. R. Krebs, *Foraging Theory* (Princeton University Press, Princeton, 1987).
- [6] *Foraging Behavior*, edited by A. C. Kamil, J. R. Drebs, and H. R. Pulliam (Plenum Press, New York, 1987).
- [7] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, and M. G. E. da Luz, *Phys. Life Rev.* **5**, 133 (2008).
- [8] F. Bartumeus, *Oikos* **118**, 488 (2009).
- [9] A. M. Reynolds and C. J. Rhodes, *Ecology* **90**, 877 (2009).
- [10] P. M. Kareiva and N. Shigesada, *Oecologia* **56**, 234 (1983);
T. O. Crist, D. S. Guertin, J. A. Wiens, and B. T. Milne, *Funct. Ecol.* **6**, 536 (1992);
N. A. Hill and D. P. Hader, *J. Theor. Biol.* **186**, 503 (1997);
E. A. Codling, N. A. Hill, J. W. Pitchford, and S. D. Simpson, *Mar. Ecol. Prog. Series* **279**, 215 (2004).
- [11] A. Einstein, *Ann.Phys.* **17**, 549 (1905).
- [12] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince, and H. E. Stanley, *Nature* **381**, 413 (1996).
- [13] A. M. Nemirovsky, H. O. Mártin, and M. D. Coutinho-Filho, *Phys. Rev. A* **41**, 761 (1990);
A. M. Nemirovsky and M. D. Coutinho-Filho, *Physica A* **177**, 233 (1991);
K. R. Coutinho, M. D. Coutinho-Filho, M. A. F. Gomes, and A. M. Nemirovsky, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3745 (1994);
M. S. Nascimento, M. D. Coutinho-Filho and C. S. O. Yokoi, *Phys. Rev. E* **63**, 066125 (2001).
- [14] G. M. Viswanathan, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, and H. E. Stanley, *Nature* **401**, 911 (1999).
- [15] D. W. Sims, E. J. Southall, N. E. Humphries, G. C. Hays, C. J. A. Bradshaw, J. W. Pitchford, A. James, M. Z. Ahmed, A. S. Brierley, M. A. Hindell, D. Morritt, M. K. Musyl, D. Righton, E. L. C. Shepard, V. J. Wearmouth, R. P. Wilson, M. J. Witt, and J. D. Metcalfe, *Nature* **451**, 1098 (2008).

- [16] Nicolas E. Humphries, Nuno Queiroz, Jennifer R. M. Dyer, Nicolas G. Pade, Michael K. Musyl, Kurt M. Schaefer, Daniel W. Fuller, Juerg M. Brunnschweiler, Thomas K. Doyle, Jonathan D. R. Houghton, Graeme C. Hays, Catherine S. Jones, Leslie R. Noble, Victoria J. Wearmouth, Emily J. Southall, and David W. Sims, *Nature* **465**, 1066 (2010).
- [17] L. Hufnagel, D. Brockmann, and T. Geisel, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **101**, 15124 (2004);
S. Bertrand, J. M. Burgos, F. Gerlotto, and J. Antiquipa, *ICES J. Mar. Science* **62**, 477 (2005);
D. Brockmann, L. Hufnagel, and T. Geisel, *Nature* **439**, 462 (2006);
P. J. Brantingham, *Curr. Anth.* **47**, 435 (2006);
S. Bertrand, A. Bertrand, R. Guevara-Carrasco, and F. Gerlotto, *Ecol. Appl.* **17**, 331 (2007);
P. Marchal, J.-J. Poos, and F. Quirijns, *Fish. Res.* **83**, 33 (2007);
C. T. Brown, L. S. Liebovitch, and R. Glendon, *Human Ecol.* **35**, 129 (2007);
D. Brockmann, *Eur. Phys. J.* **157**, 173 (2008);
M. C. González, C. A. Hidalgo, and A.-L. Barabási, *Nature* **453**, 779 (2008).
- [18] F. A. L. Dullien, *Porous Media—Fluid Transport and Pore Structure* (Academic Press, New York, 1979);
M. Sahimi, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock* (VCH, Boston, 1995).
- [19] P. Pirolli and S. Card, in *Proceedings of the 1995 Conference on Human Factors in Computing Systems*, edited by G. C. van der Veer and C. Gale (ACM Press, New York, 1995), p. 51.
- [20] D. Sharma, H. Ramachandran, and N. Kumar, *Fluct. Noise Lett.* **6**, 95 (2006).
- [21] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes* (Chapman and Hall, New York, 1994);
V. M. Zolotarev and V. M. Uchailin, *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications* (VSP BV, Utrecht, 1999).
- [22] S. Benhamou, *J. Theor. Biol.* **159**, 67 (1992);
P. Bovet and S. Benhamou, *ibid.* **131**, 419 (1988);
J. M. Morales, D. T. Haydon, J. Frair, K. E. Holsinger, and J. M. Fryxell, *Ecology* **85**, 2436 (2004);
S. Benhamou, *ibid.* **88**, 1962 (2007);
E. A. Codling, M. J. Plank, and S. Benhamou, *J. Roy. Soc. Interf.* **5**, 813 (2008), e referências incluídas.
- [23] O. Bénichou, M. Coppey, M. Moreau, P. H. Suet, and R. Voituriez, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 198191 (2005);
O. Bénichou, M. Coppey, M. Moreau, and R. Voituriez, *Europhys. Lett.* **75**, 349 (2006);
O. Bénichou, C. Loverdo, M. Moreau, and R. Voituriez, *Phys. Rev. E* **74**, 020102 (2006), e referências incluídas.
- [24] M. A. Lomholt, T. Koren, R. Metzler, and J. Klafter, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **105**, 11055 (2008), e referências incluídas.
- [25] A. M. Reynolds, *Europhys. Lett.* **75**, 517 (2006);
ibid. **79**, 30006 (2007);
Physica A **388**, 561 (2009), e referências incluídas.
- [26] M. J. Plank and A. James, *J. Roy. Soc. Interf.* **5**, 1077 (2008).
- [27] J. Ingenhausz, *Vermischte schriften physisch medicinischen inhalts*, Wapler, Vienna, Vol. 2, pp. 123-126 (1784).
- [28] R. Brown, *Philos. Mag.* **4**, 161 (1828).
- [29] K. Pearson, *Nature* **72**, 294 (1905).

- [30] L. Rayleigh, *Nature* **72**, 318 (1905).
- [31] A. Einstein, *Ann.Phys.* **19**, 371 (1906).
- [32] M. Smoluchowski, *Phys. Zeit* **17**, 557 (1916).
- [33] G. H. Weiss, *Aspects and Applications of the Random Walk* (North Holland Press, Amsterdam, 1994).
- [34] C. S. Patlak, *Bull. Math. Biophys.* **15**, 311 (1953).
- [35] G. Oshanin, K. Lindenberg, H. S. Wio, and S. Burlatsky, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 434008 (2009).
- [36] M. Levandowsky, J. Klafter, and B. S. White, *Bull. Marine Sci.* **43**, 758 (1988).
- [37] F. L. Schuster and M. Levandowsky, *J. Euk. Microbio.* **43**, 150 (1996).
- [38] M. Levandowsky, B. S. White, and F. L. Schuster, *Acta Protozoologica* **36**, 237 (1997).
- [39] B. J. Cole, *Anim. Behav.* **50**, 1317 (1995).
- [40] D. Boyer, O. Miramontes, G. Ramos-Fernandez, J. L. Mateos, and G. Cocho, *Physica A* **342**, 329 (2004).
- [41] A. Mårell, J. P. Ball, and A. Hofgaard, *Canadian J. Zool.* **80**, 854 (2002);
R. P. D. Atkinson, C. J. Rhodes, D. W. Macdonald, and R. M. Anderson, *Oikos* **98**, 134 (2002);
F. Bartumeus, F. Peters, S. Pueyo, C. Marrase, and J. Catalan, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **100**, 12771 (2003);
G. Ramos-Fernandez, J. L. Mateos, O. Miramontes, G. Cocho, H. Larralde, and B. Ayala-Orozco, *Behav. Ecol. Sociobiol.* **55**, 223 (2004);
D. Boyer, G. Ramos-Fernández, O. Miramontes, J. L. Mateos, G. Cocho, H. Larralde, H. Ramos, and F. Rojas, *Proc. Royal Soc. B* **273**, 1595 (2006);
D. W. Sims, M. J. Witt, A. J. Richardson, E. J. Southall, and J. D. Metcalfe, *ibid.* **273**, 1195 (2006).
- [42] W. Feller, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51**, 800 (1945).
- [43] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [44] J. Klafter, M. F. Shlesinger, and G. Zumofen, *Phys. Today* **49**, 2 33 (1996).
- [45] J. P. Nolan, *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*, (Birkhäuser, Boston, 2010) (*In progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/~jpnolan*).
- [46] G. M. Zaslavsky, *Physica D* **76**, 110 (1994);
H. C. Fogedby, *Phys. Rev. E* **58**, 1690 (1998);
M. Gitterman, *ibid.* **62**, 6065 (2000);
R. Metzler and J. Klafter, *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000);
R. Metzler and T. F. Nonnenmacher, *Chem. Phys.* **284**, 67 (2002).
- [47] V. Carbone, L. Sorriso-Valvo, A. Vecchio, F. Lepreti, P. Veltri, P. Harabaglia, and I. Guerra, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 128501 (2006).
- [48] Geoffrey L. Rogers, *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 2879 (2008).
- [49] Donald A. MacKenzie, Fabian Muniesa, Lucia Siu, *Do Economists Make Markets?: On The Performativity of Economics* (Princeton University Press, Princeton, 2007).
- [50] C.-K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1343 (1993).

- [51] S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger, S. Havlin, C.-K. Peng, M. Simmons, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **47**, 4514 (1993).
- [52] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, M. C. Santos, H. E. Stanley, and G. M. Viswanathan, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240601 (2003).
- [53] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2946 (1994).
- [54] E. P. Raposo, S. M. de Oliveira, A. M. Nemirovski, and M. D. Coutinho-Filho, *Amer. J. Phys.* **59**, 633 (1991), e referências incluídas.
- [55] S. V. Buldyrev, S. Havlin, A. Ya. Kazakov, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, H. E. Stanley, and G. M. Viswanathan, *Phys. Rev. E* **64**, 041108 (2001);
S. V. Buldyrev, M. Gitterman, S. Havlin, A. Ya. Kazakov, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, H. E. Stanley, and G. M. Viswanathan, *Physica A* **302**, 148 (2001).
- [56] A. M. Edwards, R. A. Phillips, N. W. Watkins, M. P. Freeman, E. J. Murphy, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, H. E. Stanley, and G. M. Viswanathan, *Nature* **449**, 1044 (2007);
see, also, A. M. Edwards, *J. Anim. Ecol.* **77**, 1212 (2008).
- [57] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed., 82 (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [58] W. F. Trench, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **12**, 515 (1964).
- [59] M. Cardona, R. V. Chamberlin, and W. Marx, *Ann. Phys.* **16**, 12 (2007).
- [60] J. Laherrère and D. Sornette, *Eur. Phys. J. B* **2**, 525 (1998).
- [61] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools* (Springer, Berlin, 2006).
- [62] Y. Y. Kagan, *J. Geophys. Res.* **102**, 2835 (1997).
- [63] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, G. M. Viswanathan and H. E. Stanley, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 434003 (2009).
- [64] I. M. Gelfand and S. V. Fomim, *Calculus of Variations* (Prentice-Hall, New Jersey, 1963).