UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GUILHERME FEITOSA DE ALMEIDA

GEOMETRIA COMPLEXA GENERALIZADA E SUPERSIMETRIA

Recife
2015

GUILHERME FEITOSA DE ALMEIDA

GEOMETRIA COMPLEXA GENERALIZADA E SUPERSIMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Universidade Federal de Pernambuco

Recife
2015

Catalogação na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB4-532

A447g Almeida, Guilherme Feitosa de.
Geometria complexa generalizada e supersimetria / Guilherme Feitosa de Almeida. – Recife: O Autor, 2015.
85 f.

Orientador: Bruno Carneiro da Cunha.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2015.
Inclui referências.

1. Física – Matemática. 2. Geometria diferencial. 3. Teoria da supercordas. 4. Supersimetria. I. Cunha, Bruno Carneiro da (Orientador). II. Titulo.

530.15 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-33

GUILHERME FEITOSA DE ALMEIDA

GEOMETRIA COMPLEXA GENERALIZADA E SUPERSIMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 06/08/2015.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Carlos Alberto Batista da Silva Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Roberto Rubio Núñez
Examinador Externo
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuiram para esta dissertação diretamente ou indiretamente. Em especial, gostaria de manifestar minha gratidão mais enfaticamente

- Aos meus pais Ana Glória e Nilson pelo apoio emocional, pela educação que eles me proporcionaram, e por terem me apoiado na minha decisão de seguir a carreira de um pesquisador. Agradeço com ainda mais carinho pelos domingos que meu pai perdia me ensinando matemática pela manhã, quando eu ainda era criança, e por todos os lanches que minha mãe sempre preparava para mim ao me ver estudando tarde da noite. Agradeço também a minha avó Deborá, pela preocupação e pelos lanches preparados a tarde quando ela minha via estudando. Agredeço também a minha avó Ana por sempre lembrar de mim em suas orações.

- A Cristiano Costa Bastos, pelas inspiradoras conversas e orientações que foram decisivas para meu ínicio de carreira na área da ciência.

- Ao meu orientador de mestrado, professor Bruno Carneiro da Cunha, por ter tido a sensibilidade de sugerir um tema de dissertação de mestrado que fosse compatível com minhas paixões científicas, e por todas as conversas que tivemos, principalmente pela conversa que me fez entrar no curso de física.

- Aos professores que foram fundamentais na minha formação básica como: Sérgio Santa-Cruz, José Américo, Fernando Parísio, Antonio Murillo, César Castilho, pois eles foram professores espetaculares em todos os sentidos: ditática, domínio do conteúdo e pela motivação que eles sempre me proporcionavam. Em especial gostaria de agradecer ao professor Sergio Santa-Cruz, pelo curso de Geometria Diferencial, pois este curso influenciou fortemente minha escolha pela área de física matemática.

- Ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pois sem ele eu não seria capaz de estender meu conhecimento em matemática. Em particular, agradeço aos professores Henrique Bursztyn, Reimundo Heluani e Roberto Rubio por terem sidos fundementais para o meu entedimento de Geometria complexa generalizida, o qual é um dos temas centrais da minha dissertação. Agradeço também aos estudantes do IMPA pelas boas conversas e pelo excelente ambiente de convivência que eles proporcionavam.

- A Kainã Terto, Cecília Veras e Florentino Gomes e a todos os meus colegos do departamento de física da UFPE, pelas longas conversas no DA, pelo otimo convivio, e pelo ótimo ambiente de cooperação, pois conhecimento se constrói cooperando e não competindo.

- A noiva Maria Augusta, por sempre me incentivar nos meus estudos e nos meus projetos, por ser uma fonte de inspiração e por me dar suporte nos momentos difícieis do curso, pelos incontáveis fins de semana de estudo, e não poderia deixar de agradecer pela ajuda com o Latex. Muito obrigado meu amor!

Resumo

Geometria complexa generalizada é um formalismo matemático adequado para descrever modelos sigma não-lineares do tipo N=(2,2) com fluxo H. A geometria do espaço alvo desse modelo não é Kähler, mas sim uma geometria bi-hermitiana. Recentemente, uma descrição alternativa para essa geometria foi encontrada, de fato, pode-se associar a toda geometria bi-hermitiana uma geometria Kähler generalizada. Generalizações dos modelos A e B para modelos sigmas N=2 com fluxo H são possíveis, uma vez que torções topológicas podem ser feitas para geoemtrias Kähler generelazidas torcidas, e não apenas para geometrias Kähler. O espaço dos observáveis também é associado à geometria complexa generalizada, pois esses espaços estão associados à cohomologia de algebroides de Lie, a qual provém de uma geometria complexa generalizada torcida.

Palavras-chave: Geometria complexa generalizada. Geometria Kähler generalizada. Modelos sigmas. Supersimetria. Teoria de Cordas. Teorias Topológicas. Algebroide de Lie. Modelos A e B generalizados.

Abstract

Generalized complex geometry is a suitable mathematical formalism to describe (2,2) sigma-models with H-flux. The target space of this geometry is not Kähler, but it is a bi-Hermitian geometry. Recently, an alternative description of this geometry was found, in fact all bi-Hermitian geometry can be associated to generalized Kähler geometry. Generalizations of the models A and B for sigma models with H-flux are possible, since topological twists can be made, if the target space is twisted generalized Kähler geometry, and not just for Kähler geometries. The space of the observable is also associated with generalized complex geometry, because it is associated with cohomology of Lie algebroids, which comes from a twisted generalized complex geometry.

Keywords: Generalized complex geometry. Generalized Kähler geometry. Sigma models. Supersymmetry. String theory. Topological theory. Lie algebroid. Generalized model A and B.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

As teorias supersimétricas têm cada vez mais importância na física Teórica, particularmente em teorias de unificação. Um dos seus aspectos mais importantes são as simetrias entre bósons e férmions, partículas com spin inteiro e spin fracionário respectivamente. Supersimetria desempenha um papel importante em física de partícula, o modelo padrão supersimétrico prevê a existência de superpares para cada partícula do modelo padrão. Outro fato importante, porém um pouco mais distante do mundo experimental acontence em teorias das cordas, ou melhor em supercordas. Supercordas é um modelo de teorias de cordas que incorporam supersimetria e tem como vantagem a não previsão de partículas superluminais como Taquions. Por outro lado, há uma motivação matemática para supersimetria. Foi provado por Coleman e Mandula (1) que não existe extensão não trivial para a Álgebra de Poincaré, que é a álgebra do grupo ortgonal de simetrias e translação do espaço tempo. Posteriormente, através da teoria de Super álgebras, Haag, Lopuszanski e Sohnius (2) descreveram como contornar este problema. Eles provaram que a Super álgebra mais geral, que estende a Álgebra de Poincaré, é a Álgebra supersimétrica.

Supersimetria tem, também, uma forte relação com geometria. Em (3) Zumino descreveu modelos sigmas não lineares em variedades tipo Kähler. Alvarez-Gaume e Freedman (4) classificaram os modelos sigmas supersimétricos em termos das estruturas geometricas. Estes modelos sigmas consistem em mapas entre espaços bi-dimensionais chamados de folha mundo e alguns espaços alvos. Eles estabelecem uma relação entre o tipo de supersimetria e a geometria do espaços alvo. Um destes casos é o modelo sigma supersimetrico (2,2) que está associado a geometria Kähler. Em (5) Gates, Hull e Rocek investigaram uma classe de modelos sigmas que admite o campo B e determinaram as geometrias associadas a este campo. Uma das mais notáveis dentre as geometrias é a geometria bi-hermitiana, porque está associada a supersimetria (2,2) (com o campo B de background). Posteriormente, provou-se que a geometria bi-hermitiana não era equivalente à geometria Kähler. Contudo, em (6) Hitchin e Gualtieri criaram a Geometria Complexa Generalizada, a qual permite generalizar a geometria Kähler, criando assim novos exemplos e uma nova visão para supersimetria.

Esta dissertação está organizada da seguiente maneira: no capítulo 2 será dado uma introdução a modelos sigmas. Também serão escritos alguns ingredientes básicos de teoria de cordas. Em seguida, será introduzido o conceito de supersimetria. A representação chamada de superalgebra (p,q) será construída usando o conceito de superespaço. A incorporação destas representações no modelo sigma traz consigo vínculos geométricos no espaço alvo, e isto será um dos temas centrais desta dissertação.

No capítulo 3, a Geometria Complexa Generalizada será introduzida. O capítulo será subdivido nas secções Álgebra Linear de $V \oplus V^*$, Colchete de Courant, Estruturas Complexas Generalizadas. Espinores e Álgebra de Clifford serão discutidos na parte de Álgebra Linear. O próximo tópico abordado é a geometria de TM$\oplus$TM*, que inclui colchete de Courant, estruturas de Dirac e Algebroide de Lie. Por fim, serão estudados conceitos como estrutura complexa generalizada.

Os cálculos técnicos que relacionam explicitamente supersimetria e geometria são objetos do Capítulo 4. Tomou-se cuidado para apresentar os cálculos de tal maneira que um mínimo de esforço é necessário para que todos os passos sejam seguidos sem exagerar na quantidade de etapas intermediárias tediosas. No capítulo 4 é definido também o conceito de uma gemetria Kähler generalizada.

Finalmente, o capítulo 5 é centrado na torção topológica. Inicia-se com uma discussão sobre a quantização, a fim de explicar o que é necessário para uma teoria ser topológica. Após estas definições, retorna-se à discussão do modelo sigma, dos problemas que surgem quando a folha mundo é generalizada a uma superfície de Riemann arbitrária, e como a torção topológica resolve estes problemas. A parte (2,2)-álgebra que sobrevive à torção dá origem a um operador nilpotente Q. O capítulo é finalizado com um cálculo do seu anel cohomologico associado. As principais referências para este capítulo são (7) e (8).

CAPÍTULO 2

Modelos Sigma

O modelo sigma é o estudo de mapas entres espaços geométricos, com a finalidade de descrever processos físicos. Esses espaços são usualmente equipados com estruturas geométricas, que variam de acordo com o modelo físico adotado. Nesta dissertação, esses espaços geométricos são variedades suaves possivelmente com fronteira. Muitos processos físicos são formulados nesta linguagem. Um bom exemplo de um modelo sigma é a mecânica clássica, onde o objeto de estudo são mapas de um intervalo da reta em uma variedade simplética, ou seja x(t) e p(t) são os mapas deste modelo sigma.

Esses modelos podem ser bem distintos, mas todos eles compartilham a ideia da existência de uma ação. Seja X o espaço dos mapas do modelo sigma, a ação é o mapa $S : X \mapsto \mathbb{R}$, a qual descreve o comportamento físico do sistema. No nível clássico, as soluções físicas são aquelas que extremizam a ação S. Muito frequentemente, mapas do modelo sigma serão denotados por campos, cujo domínio é uma variedade denotada por Σ, enquanto que a imagem é outra variedade denotada por espaço alvo. De maneira geral, a ação pode ser descrita por uma quantidade local L, denotada por densidade lagrangeana, a qual é uma função do espaço dos campos sobre o espaço das densidades em Σ. A ação pode ser escrita como uma integral de L sobre Σ.

Considerando um exemplo simples: seja o conjunto das n funções $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ em $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^m$=Σ). A ação é dada por $\int_{\mathbb{R}^m} L(x, \varphi^i, \partial_\mu \varphi^j, ...)dx$, onde L geralmente depende de pontos x do espaço-tempo, de φ^i e de todas as suas derivadas, apesar de que, na maioria dos casos, L não depende de derivadas de ordem maior que 2. Para $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ formarem pontos estacionários é necessário impor $\frac{d}{dt}\mathrm{S}(\varphi + t\gamma)|_{t=0}$=0, onde γ^i é uma função arbitrária com suporte compacto. Pode-se reescrever a condição acima, como:

$$0 = \frac{d}{dt} S(\varphi + t\gamma)|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i,\alpha} \frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \varphi^i)} \partial_\alpha \gamma^i = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i,\alpha} (-1)^{|\alpha|} \partial_\alpha \left(\frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \varphi^i)}\right) \gamma^i, \tag{2.1}$$

onde o somatório de α é em todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ com $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, e é usada a notação abreviada $\partial_\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha 1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}$. Então, e. g., $\partial_{0,\dots,0} \varphi^i = \varphi^i$. Na terceira igualdade, foi utilizada uma integração parcial, o que é permitido visto que γ^i tem suporte compacto. Nota-se $\frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \varphi^i)}$ significa a derivada parcial da variável $\partial_\alpha \varphi^i$. Como os γ^i são arbitrários, essa equação implica nas equações Euler-Lagrange:

$$\sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial_\alpha \left(\frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha \varphi^i)} \right) = 0 \tag{2.2}$$

Boa parte das teorias físicas conhecidas permitem uma descrição em termos de uma ação, porém, na teoria quântica não somente os pontos críticos são importantes, pois o comportamento completo de S também precisa ser considerado.

2.1 Teoria das cordas como um modelo sigma bidimensional

Apesar de existirem vários exemplos de modelos sigma que são bastante recorrentes em física, esta dissertação estará focada em um caso em particular. Seja Σ uma variedade bidimensional, possivelmente com fronteiras, e seja M uma variedade compacta equipada com uma métrica Riemanniana. Os mapas deste modelo sigma serão mapas suave: $\varphi : \Sigma \to M$, a serem posteriormente estendidos junto com campos de diferentes tipos para criar as teorias supersimétricas. A razão principal para o estudo deste modelo particular vem da Teoria das Cordas, então inicialmente, será dado uma rápida introdução à Teoria das Cordas e será explicado como ela dá origem a este modelo.

A Teoria das Cordas é a generalização da física de partículas pontuais estendendo-a para objetos unidimensionais chamados de cordas. A Teoria das Cordas tem como uma das suas principais motivações a unificação mecânica quântica com a relatividade geral, duas teorias que aparentemente não podem ser fundidas dentro do quadro de física de partículas pontuais. Cordas podem ser tanto fechadas quanto abertas. Se denotamos nosso espaço-tempo por M, uma variedade pseudo-Riemanniana, de assinatura $(1, n-1)$ (1 sendo a "direção negativa"), a configuração espaço de uma corda propagando-se em M é dada por $LM := \{\gamma : S^1 \to M\}$[1] para cordas fechadas e $PM := \{\gamma : [0,1] \to M\}$ [2] para cordas abertas.

À medida que a corda se propaga em M, ela varre uma região bidimensional, a qual é referida como a folha-mundo da corda. Para ser mais preciso, a folha-mundo é definida como uma corda fechada não interativa como um cilíndro $S^1 \times [\tau_0, \tau_1]$. A coordenada $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ deve ser considerada como um tempo intrínseco da corda, e não está diretamente relacionada ao tempo de um observador externo. A coordenada σ é usada para a direção tipo espaço, i. e. a parte S^1 do folha-mundo. A propagação da corda é agora descrita como um mapa $\varphi : \Sigma \to M$, o qual é um modelo sigma bidimensional. Analogamente, existe um modelo sigma para cordas abertas, mas o objeto de estudo deste texto será apenas cordas fechadas.

O próximo passo natural seria escrever explicitamente a ação de cordas. Quando a intenção é estendender uma teoria mais antiga em termos de uma nova, um requisito básico é que dentro dos limites da teoria antiga, a nova teoria deve obter os mesmos resultados. Por tanto, é natural buscar inspiração na ação para física de partículas pontuais, cuja ação é proporcional ao comprimento da linha-mundo γ (a trajetória que partícula segue):

$$S(\gamma) = -m \int_{[\tau_0, \tau_1]} \sqrt{-\langle \gamma'(\tau), \gamma'(\tau) \rangle} d\tau, \tag{2.3}$$

onde assumimos que a partícula segue a trajetória tipo-tempo $\langle \gamma'(\tau), \gamma'(\tau) \rangle \leq 0$, o que significa

[1] o espaço de *loop* de M.

[2] o espaço de caminho de M.

que ela está se movendo mais lentamente do que a velocidade da luz. Para verificar que esta é a ação correta, tome $M = \mathbb{R}^{1,3}$ e parametrize a trajetória via $\gamma(t) = (t, \vec{x}(t))$, então a fórmula 2.3 será reduzida para:

$$S(\gamma) = -m \int_{[\tau_0, \tau_1]} \sqrt{1 - (\dot{\vec{x}}(t))^2} dt. \tag{2.4}$$

A partir da equação 2.4 pode-se extrair o momento p_i, definido por $p_i := \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_i}$, e o Hamiltoniano, a qual é definida por $H := p_i \dot{x}_i - L$, e eles são expressos pelas equações bem conhecidas:

$$\vec{p} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - (\dot{\vec{x}})^2}}, \quad H = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \tag{2.5}$$

Uma analogia direta para uma corda é a área da sua folha-mundo, i. e. a área de $\phi(\Sigma)$, que pode ser escrita como:

$$S(\varphi) = -T \int_{\Sigma} d\sigma d\tau \sqrt{-det \varphi^* g}, \tag{2.6}$$

onde g é a métrica em M e T é uma constante relacionada a tensão da corda, e o *pullback* da métrica é definido como $\varphi^* g_p(v, w) = g_{\varphi(p)}(d_p\varphi(v), d_p\varphi(w))$, onde $d\varphi_p$ é a diferencial de φ em p. Esta ação é chamada de Ação de Nambu-Goto (9).

A raiz quadrada na ação de Nambu-Goto dificulta a sua quantização, pois não é permitido usar a técnica de integral de trajetória padrão da Teoria de Perturbação [3], o problema pode ser resolvido como será mostrado. Considere uma métrica independente h em Σ, e defina a Ação de Polyakov (9):

$$S(\varphi) = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} g_{ij} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j d\tau d\sigma, \tag{2.7}$$

onde α, β denotam as coordenadas τ, σ em $\Sigma, i, j, \ldots$ são coordenadas em M, e h é o determinante $h_{\alpha\beta}$. Ao impor h *on-shell*[4], a Ação de Polyakov é reduzida para Ação de Nambu-Goto, e neste senso ambas são classicamente equivalentes. Na teoria quântica, este não é necessariamente o caso.

Uma característica bem conhecida em Teoria das Cordas é a existência de uma dimensão crítica. Em teoria de cordas temos a simetria conforme da métrica h, esta simetria pode ser quebrada depois da quantização. No caso, dizemos que ocorreu uma anomalia. No caso particular de teoria das cordas que foi descrito nesta dissertação, denotada de corda bosônica, existe anomalia conforme, exceto na dimensão 26. É possível mostrar que uma teoria de cordas supersimetrica, supercordas, reduz a dimensão crítica para 10. Isto torna a segunda uma candidata melhor para a teoria da unificação, mas em ambos os casos, existem algumas dimensões extras que de alguma forma estão escondidas. Uma forma de se escondê-las é através da compactação. Assume-se que de alguma forma essas dimensões extras tomam a forma de espaços compactos, cujas escalas de comprimentos típicas são tão pequenas que tornam-se praticamente invisíveis.

[3] Diagramas de Feynman.

[4] satisfazendo as suas equações de movimento.

Pode-se assumir que o espaço-tempo é da forma $N \times M$, onde N é uma variedade quadrimensional pseudo-Riemanniana que descreve nosso espaço-tempo visível, enquanto que M é uma variedade Riemanniana compacta que descreve a parte compacta "escondida". Além disso, assume-se que a propagação da corda pode ter seu comportamento descrito e estudado separadamente em N e M. Efetivamente, ao escrever $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ em referência a partição $N \times M$, a ação é particionada como:

$$S(\varphi) = S_1(\varphi^1) + S_2(\varphi^2). \tag{2.8}$$

Desta forma, os campos no modelo sigma tomados na Teoria de Cordas Bosônica são mapas: $\varphi : \Sigma \to M$ de uma superfície compacta Σ em uma variedade Riemanniana compacta (M, g), de métricas h em Σ. Para simplificar, assume-se também que estas superfícies são orientadas.

2.2 O que é supersimetria?

As motivações físicas para supersimetria são as seguintes:

- Não existem fermiôns no espectro da teoria bosônica.
- Na teoria bosônica existem táquion[5].
- A dimensão crítica[6] cai de 26 para 10 em uma teoria de cordas supersimétricas.

Para obter uma teoria de supercordas, basta adicionar termos fermiônicos[7] na ação. Esta nova ação teria uma simetria global, a qual seria chamada de supersimétria. Pode-se também formular supersimetria em termos mais matemáticos. Uma teoria relativística no Espaço de Minkoski $(\mathbb{R}^{1,d-1})$ é invariante sobre um grupo de Poincaré, o qual é definido como isometrias e translações no espaço de Minkowski. É natural questionar se o grupo de Poincaré é o maior grupo de simétrias possível. A álgera de Poincaré se baseia na existência de uma subalgebra e o Teorema Coleman-Mandula (1) declara uma álgebra de Lie é completa se ela é a soma direta da álgebra de Poincaré com outras simetrias sob consideração. Logo qualquer gerador dessas simetrias extras comutam com os geradores de Poincaré.

Conclui-se, que não pode-se estender a álgebra de Poincaré para uma álgebra de Lie maior de forma trivial, mas será mostrado que a extensão é possível considerando as superalgebras de Lie. Superalgebra de Lie consiste em um espaço vetorial V (sobre o corpo $\mathbb{C}$, neste caso) com uma decomposição em uma parte ímpar e outra par;

$$V = V_0 \oplus V_1 \tag{2.9}$$

equipado com os colchetes de Lie graduados, i. e. um mapa bilinear

$$[,] : V \times V \to V, \tag{2.10}$$

[5] partículas superluminais que causam a estabilidade do vácuo.
[6] livre de anomalia.
[7] espinores e elementos da álgebra de Clifford.

sastisfazendo a:

$$\begin{aligned}
&\text{Anti-simetria graduada: } [X,Y] = -(-1)^{ab}[Y,X] \\
&\text{Identidade graduada de Jacobi: } (-1)^{ab}[X,[Y,Z]] + (-1)^{cb}[Z,[X,Y]] + (-1)^{ba}[Y,[Z,X]] = 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

para elementos homogêneos $X \in V_a, Y \in V_b$ e $Z \in V_c$, com $a,b,c \in \{0,1\}$.

A estrutura de tal superalgebra de Lie, que contém a álgebra completa de Poincaré é restrita devido ao Teorema de Coleman-Mandula e às duas restrições de 2.11. A forma mais geral é dada pelos geradores de Poincaré (2), mais N geradores espinoriais ímpares $Q^a(a = 1,\dots,N)$, também referidos como supercargas, e ainda $\frac{1}{2}N(N-1)$ geradores pares, referidos como cargas centrais porque elas estão no centro da álgebra. Espinorial significa, que cada Q^a é um espinor(pertence ao grupo Spin), então tem $2^{[\frac{d}{2}]}$ componentes Q^a_α em d dimensões ($[\frac{d}{2}]$ denotando o maior inteiro menor ou igual a $[\frac{d}{2}]$), e se comporta como um espinor em relação aos geradores de Lorentz. Aqui N é um número positivo, A álgebra (2.11) é denotada por superalgebra de Poincaré N extendida, ou supersimetria N extendida.

Uma expressão geral e precisa de todos os geradores e relações, pode ser obitida em (10). Considerando apenas essa álgebra em duas dimensões sem cargas centrais, o que no caso desta álgebra simplifica bastante. Além disso, em duas dimensões a representação do spin é redutível, o que implica que cada carga espinoral Q^a tem dois componentes $Q^a_\pm$, cada componente em uma representação unidimensional irredutível de $Spin(1,1)$. Então, não é necessário considerar Q^a como um único objeto espinoral, mas pode-se considerar suas componentes separadamente. Em particular, não é necessário tomar tantos + quanto - componentes, então em duas dimensões, tem-se a noção de (p,q) simetria superestendida, p referindo-se ao número de Q^a_+ cargas e q ao númro Q^a_- cargas. Em suma, a álgebra que será usada no texto é a (p,q) superalgebra extendida de Poincaré, onde $q,p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com:

$$\begin{aligned}
&\text{Geradores pares}: \quad L, P_\pm, \\
&\text{Geradores ímpares}: \quad Q^1_+,\dots,Q^p_+,Q^1_-,\dots,Q^q_-, \\
&\text{Relações}: [L,P_\pm] = \mp P_\pm, [L,Q^a_\pm] = \mp\frac{1}{2}Q^a_\pm, \{Q^a_\pm,Q^b_\pm\} = \delta^{ab}P_\pm.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

O gerador L denota o gerador de Lorentz, o qual é apenas um *boost* na direção espacial, e $P_\pm$ denota a translação de geradores (mais comumente referida como o momento dos geradores) na direção dos cones de luz $\sigma^\pm = \sigma \pm \tau$. Os índices $\pm$ nas supercargas indicam que existe uma origem diferente, a medida que eles denotam as componentes do espinor Q.

2.3 Superespaço e modelos sigma (1,1)-supersimétricos

Para definir uma teoria de campo supersimétrica, é necessário representar a superalgebra de Poincaré como simetrias atuando nos campos, e para isto é suficiente representar a álgebra *on-*

shell, [8]. Uma abordagem elegante para construir essas representações foi criada por Salam e Strathdee (11), usando o formalismo de superespaço. Para entender a construção deles, nota-se que a forma natural de representar a álgebra ordinária de Poincaré é através de sua ação no espaço-tempo ou, o que é mais conveniente quando consideramos campos no espaço-tempo, pela sua ação induzida nas funções do espaço-tempo. Lembrando que quando um grupo de Lie G atua no espaço M, ele herda uma ação de grupo do conjunto de funções em M, definido por $(g \circ f)(x) := f(g^{-1} \circ x)$ onde $g \in M, f : M \to \mathbb{C}$. Diferenciando esta ação obtém-se a representação da álgebra de Lie de G neste espaço de funções, utilizando esta representação em Σ com coordenadas $\sigma^{\pm} := \sigma \pm \tau$ e

$$L = \sigma^{+}\partial_{+} - \sigma_{-}\partial_{-}, \qquad P_{\pm} = -2i\partial_{\pm} \tag{2.13}$$

onde $\partial_{\pm} := \frac{\partial}{\partial \sigma^{\pm}}$. Os fatores particulares e os sinais negativos são convencionais, mas rapidamente verifica-se que isto define a representação da superalgebra de Poincaré em duas dimensões. Para estendê-la para a representação da superalgebra de Poincaré, o truque será introduzir coordenadas extras. Para isto, precisa-se introduzir as características fermiônicas das supercargas, será necessário definir essas coordenadas com o número de Grassmann anti-comutativos. Eles serão denotados por $\theta_1^{+}, \ldots, \theta_p^{+}$ e $\theta_1^{-}, \ldots, \theta_p^{-}$. Eles transformam-se sob a ação de L como os componentes de um espinor, i. e. $\theta_a^{\pm} \to \exp^{\pm\alpha/2} \theta_a^{pm}$. Isto sugere imediatamente a seguinte correção no gerador de Lorentz

$$L = \sigma^{+}\partial_{+} - \sigma^{-}\partial_{-} \to L = \sigma^{+}\partial_{+} - \sigma^{-}\partial_{-} + \frac{1}{2}\theta_a^{+}\frac{\partial}{\partial \theta_a^{+}} - \frac{1}{2}\theta_a^{-}\frac{\partial}{\partial \theta_a^{-}} \tag{2.14}$$

onde o soma sobre a é entendida. Funções em ambas coordenadas pares e ímpares são chamadas de supercampos e é assumido que elas são analíticas nas coordenadas ímpares. Como os termos quadráticos são zerados, isso significa que cada supercampo é expresso através uma série finita de potência em termos de θ's. Além disso, serão considerados apenas os supercampos de estatística fixas, o que significa que todos os termos homogêneos em θ's são ambos bosônicos ou fermiônicos. As derivadas ímpares são definidas como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_a^{\pm}}\theta_b^{\pm} = \delta_{ab}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_a^{\pm}}\theta_b^{\mp} = 0 \tag{2.15}$$

Do mesmo modo, defini-se uma integração, que é uma integração ordinária para coordenadas pares e é igual a diferenciação para coordenadas ímpares (então $\int d\theta_a^{\pm}\theta_b^{\pm} = \delta_{ab}\ldots$). Com essas coordenadas e derivadas existe um número de operadores que pode-se definir como $Q's$, mas olhando para as relações 2.12 nota-se que tais operadores devem ter *spin* $\pm\frac{1}{2}$. Isto basicamente restringe os operadores a $\theta_a^{\pm}\partial_{\pm}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta_a^{\pm}}$. Cada um destes possuem comutação direita com os geradores de Lorentz, mas não vão ao quadrado com os operadores de momento $P_{\pm}$. Desta forma eles decompõem-se nos seguintes operadores:

$$Q_{\pm}^{a} = \frac{\partial}{\partial \theta_a^{\pm}} - i\theta_a^{\pm}\partial_{\pm} \text{ e } D_{\pm}^{a} = \frac{\partial}{\partial \theta_a^{\pm}} - i\theta_a^{\pm}\partial_{\pm} \tag{2.16}$$

[8] para campos que satisfazem suas equações de movimento.

Foi escrito $Q^a_\pm$ para o primeiro operador, sugestivamente indicando que isso irá definir a representação de supercargas. De fato, verifica-se que com essas escolhas para L, $P_\pm$ e $Q^a_\pm$ tem-se uma representação da álgebra de Poincaré (p,q). Para uso posterior será definido o anti-comutador de $D's$, que é o oposto de $Q's$:

$$\{D^a_\pm, D^b_\pm\} = -\delta^{ab} P_\pm. \tag{2.17}$$

Até então não foi usado a forma explicita do nosso modelo sigma, e a representação da teoria dada por 2.16 e 2.17 pode ser aplicada de forma mais geral a teoria de campos bidimensionais. Além disso, não existem restrições nesta teoria de campo para usar essa representação supersimétrica. Especificando no modelo sigma da seção 2.1. Em coordenadas locais $i, j, \ldots$ em M o mapa φ é descrito por n funções $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, e pode-se considerá-los como por exemplo os termos dominantes de super-campos bosônicos Φ^i. Impondo a (p,q) super-simetria nesses Φ^i e imediatamente usando a construção descrita acima observa-se um grande número de novos campos, a medida que a expansão Φ^i em variáveis ímpares no super-espaço (p,q) resulta em 2^{p+q} coeficientes. Além disso, a priori não está claro como deve-se ser escrita a ação, de forma que a parte bosônica seja reduzida a 2.7. Por estas razões, a supersimetria $(1,1)$ precisa ser incorporada no nosso modelo sigma, fixando um calibre em h para que h seja plano, obtém-se:

$$h_+ = h_{+-} = 0, \quad h_{++} = h_{--} = \frac{1}{2}, \tag{2.18}$$

, então nossa ação 2.17 se reduz a:

$$S(\varphi) = \int_\Sigma g_{ij} \partial_+ \varphi^i \partial_- \varphi^j d\sigma + d\sigma -, \tag{2.19}$$

nas coordenadas $\sigma \pm = \sigma \pm \tau$. Reescrevendo os campos bosônicos ϕ^i em termos dos campos super-bosônicos Φ^i, cuja expansão de Taylor é igual a:

$$\Phi^i = \phi^i + \theta^+ \psi^i_+ + \theta^- \psi^i_- + \theta^- \theta^+ F^i. \tag{2.20}$$

Os novos campos $\psi^i_\pm$ e F^i aparecem como uma consequeência da construção do super-espaço, com Φ^i é bosônico, os $\psi^i_\pm$ são fermiônicos e F^i são bosônicos. Será visto posteriormente que F^i não dará nenhum grau físico de liberdade, portanto serão referidos como campos auxiliares. O candidato mais natural para a ação (em analogia a 2.19) é

$$S(\Phi) = \int_\Sigma d\sigma^+ d\sigma^- d\theta^+ d\theta^- g_{ij} D_+ \Phi^i D_- \Phi^j \tag{2.21}$$

Esta ação tem, devido a sua construção, uma simetria manifesta gerada por Q;

$$\delta_\varepsilon \Phi^i := \varepsilon^\alpha Q_\alpha \Phi^i = \varepsilon^+ Q_\alpha \Phi^i + \varepsilon^- Q_\alpha \Phi^i, \tag{2.22}$$

onde ε é um espinor constante. O termo $\varepsilon^\alpha Q_\alpha$ foi abreviado por εQ. Esta simeria é manifesta, porque o efeito desta simetria na ação leva a uma derivada total. Pode-se realizar uma integração ímpar em 2.21 para reescrever tudo em termos dos campos físicos ϕ^i e ψ^i, onde F é substituido pela equação de movimento. O resultado final é dado por

$$S(\varphi,\psi)=\int_\Sigma d\tau d\sigma(g_{ij}\partial_+\varphi^i\partial_-\varphi^j+ig_{ij}\psi_+^i\nabla_-\psi_+^j+ig_{ij}\psi_-^i\nabla_+\psi_-^j+\frac{1}{2}R_{ijkl}\psi_+^i\psi_+^j\psi_-^k\psi_-^l), \tag{2.23}$$

onde $\nabla_\pm\psi_\alpha^i=\partial_\pm\psi_\alpha^i+\Gamma_{jk}^i\partial_\pm\phi^j\psi_\alpha^k$, Γ_{jk}^i os símbolos de Christoffel para a conecções Levi-Cevita e R_{jkl}^i é a sua curvatura. A supersimetria em termos dos componentes é dada por:

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon\varphi^i&=\varepsilon\psi^i,\\ \delta_\varepsilon\psi_+^i&=i\varepsilon^+\partial_+\varphi^i-\varepsilon^-\Gamma_{jk}^i\psi_-^j\psi_+^k,\\ \delta_\varepsilon\psi_-^i&=i\varepsilon^-\partial_-\varphi^i-\varepsilon^+\Gamma_{jk}^i\psi_+^j\psi_-^k.\end{aligned} \tag{2.24}$$

A partir de agora, tais expressões serão abreviadas com símbolos $\pm$. As duas últimas equações de 2.24 são combinadas em uma única equação:

$$\delta_\varepsilon\psi_\pm^i=i\varepsilon^\pm\partial_\pm\varphi^i-\varepsilon^\mp\Gamma_{jk}^i\psi_\mp^j\psi_\pm^k, \tag{2.25}$$

onde os sinais desta equações são sempre lidos como os superiores ou inferiores.
Para entender a forma global de 2.23, é necessário entender o que o objeto global $\psi_\pm^i$ representa. A combinação $\theta^\pm\psi_\pm^i$ na equação de supercampo bosônico (2.20) implica que estes campos se comportam sob a transformação de Lorentz como $\psi_\pm\mapsto e^{\mp\alpha/2}\psi_\pm$. Por convenção, é permitido que os índices do spin sejam aumentados e diminuídos usando as regras $\theta^\alpha=C^{\alpha\beta}\theta_\beta$ e $\theta_\alpha=\theta^\beta C_{\beta\alpha}$, onde

$$C_{\alpha\beta}=-C^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Ao calcular esta quantidade, deve-se manter em mente que os objetos transformam-se de acordo com os seus índices, com os índices inferiores transformando em oposição aos superiores. Assim, $\psi_\pm^i$ forma as componentes de um espinor ψ^i, e os índices $i,j,\ldots$ indicam que estes espinores também formam as componentes de um objeto com índices tangentes a M. Colocando-os juntos, deduz-se que o fibrado para ψ é

$$S_\Sigma\otimes\varphi^*(TM), \tag{2.27}$$

comS_Σ de Σ sendo o fibrado de spin trivial referente à métrica h. Esse fibrado de spin decompõe-se em $S_\Sigma=S^+\otimes S^-$, então em um contexto de coordenadas locais $\partial_i:=\frac{\partial}{\partial x^i}$, em M pode-se escrever $\psi=\psi_+^i\otimes\partial_i+\psi_-^i\otimes\partial_i$. Como as componentes $\psi_\pm^i$ devem ser fermiônicas, i. e. anti-comutarem com outros objetos fermiônicos, ψ é uma seção do fibrado $S_\Sigma\otimes\varphi^*(TM)$ com "paridade reversa". Paridade, neste contexto, não tem nada a ver com a simetria que recebe o nome da paridade, a qual é sobre reflexões das coordenadas espaciais na folha-mundo. Em vez disso, paridade neste contexto refere-se ao fato de que ψ é um objeto anti-comutativo. Talvez uma boa maneira de pensar nisto, apesar não ser matematicamente rigoroso, é como segue: Seja $\{s_\alpha\}_{\alpha\in I}$ a base para o espaço de seções de $S_\Sigma\otimes\varphi^*(TM)$ onde I é um índice que foi escolhido. Uma seção ordinária pode então, ser expressa como $s=\sum_{\alpha\in I}\lambda^\alpha s_\alpha$, onde a soma não é muito bem definida nesta configuração. Os λ^{α} são números reais e para uma seção fermiônica nós trocamos esses elementos por elementos ímpares da álgebra de Grassmann

$$G := \mathbb{R}[\{\lambda_\alpha | \alpha \in I\}]/(\{\lambda_\alpha\lambda_\beta + \lambda_\beta\lambda_\alpha | \alpha, \beta \in I\}. \tag{2.28}$$

Esta forma de olhar para os campos fermiônicos será conveniente para a discussão em termos de integral de trajetória.

Para resumir; a representação $(1,1)$ da super-algebra de Poincaré no modelo sigma da seção 2.1 exige campos fermiônicos $\psi \in S_\Sigma \otimes \varphi^*(TM)$, atuando como os superpares de $\varphi : \Sigma \to M$. Esta representação não implica em restrições em M. Além disso, como o fibrado de spin decompõe-se em $S^{\pm}$, pode-se esquecer uma das componentes $\pm$ e obter a representacão das álgebras (1,0) e (0,1).

2.4 Super-simetria e geometria complexa extendida

Na seção anterior foi visto que o modelo sigma, para qualquer espaço alvo M, pode ser extendido para um modelo (1,1) super-simétrico. O próximo passo é expandir essas simetrias i. e. definir as representações (2,2). No entanto, a existência de mais simetrias impõe algumas restrições em M, o que vem a ser fortemente relacionado com geometria complexa.

Em (4), foi mostrado que a segunda simetria mais geral que comuta com a primeira e que preserva a paridade é da forma:

$$\delta_\varepsilon \Phi^i = I^i_j \varepsilon D \Phi^i, \tag{2.29}$$

com I representando uma estrutura complexa. Nota-se que *a priori* não é claro se a segunda super-simetria pode ser expressa em um superespaço, mas para estes modelos isto é sim possível. Para a ação ser invariante com relação às cargas $Q^2_{\pm}$, é preciso que (M, g, I) seja uma variedade de Kähler. Isso significa que I é ortogonal em relação a g:

$$g(Iv, Iw) = g(v, w) \quad \forall v, w \in TM, \tag{2.30}$$

e que a *segunda forma fundamental*: $\omega := gI$ é fechada. Esta última afirmação é equivalente a dizer que I é covariantemente constante, isto é ∇I=0

O cálculo preciso para os vínculos em (M,g,I,ω) podem ser achados no capítulo 4, mas nós podemos tentar dar argumentos de simetria do porque (2.29) tem aquela forma. Como foi mencionado antes, assumiu-se que a supersimetria pode ser descrita em termos da linguagem de superespaços.

Por argumentos dimensionais a segunda simetria deve ser da forma:

$$\delta_\varepsilon \Phi^i = \varepsilon^+ (I^i_{+j} D_+ \Phi^i + J^i_{+j} Q_+ \Phi^j) + \varepsilon^- (I^i_{-j} + D_- \Phi^i + J^i_{-j} Q_- \Phi^j) \tag{2.31}$$

para certos tensores $I_{\pm}$,$J_{\pm}$. A forma 2.31 ainda pode ser restrita por causa da paridade. Em qualquer teoria de campo sobre o espaço-tempo, a transformação de paridade denota a reflexão do espaço. No caso, a paridade manda assim $(\tau,\sigma) \mapsto (\tau,-\sigma)$ e isso troca as componentes $\pm$ dos espinores. Observando como o *boost* de lorentz atua nas duas componentes dos espinores separadamente, obtém-se que.

$$\psi_\pm \mapsto e^{\mp\alpha/2}\psi_\pm \tag{2.32}$$

Embora, trocando a coordenada tipo espaço, isso trocaria os sinais $\mp$ do expoente acima. Portanto, as compenentes $\pm$ de ψ são trocadas. Para que ainda tenhamos a simetria de paridade, todo mundo deve ser simetrico em ψ, então $I_+ = I_- = I$ e $J_+ = J_-$ em (2.31).

A segunda simetria deve comutar com a primeira, a qual é dada por $\delta_\varepsilon = \varepsilon Q\Phi^i$. Logo $\left[\delta^1,\delta^2\right]\Phi^i$ deve ter a seguinte forma:

$$J^i_j\varepsilon_1^\alpha\varepsilon_2^\beta\{Q_\alpha,Q_\beta\}\Phi^j = -2iJ^i_j\varepsilon_1^\alpha\varepsilon_2^\beta\delta_{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi^j \tag{2.33}$$

onde foi usado a (2,2) álgebra (eq 2.12). O comutador se anula apenas para J=0, e isso deixa a simetria semelhante a eq 2.29.

Supersimetria (2,2) não é tão simples quanto a supersimetria (1,1), e a razão para isto é o fato de que $\{D_\pm,D_\pm\} = -P_\pm$ enquanto que $\{Q_\pm,Q_\pm\} = +P_\pm$. Portanto, quando definimos a simetria (1,1) pode-se colocar na frente de Q um tensor, o qual quadrado dele é igual identidade. Como não existe nenhuma perda em substituir esse operador pelo propríо operador identidade, no qual está definido em qualquer variedade. No entanto, para simetrias extras. É necessário usar o operador D, que corresponde a um tensor cujo quadrado é menos a identidade. Esta é a razão essencial do por que necesitamos da geometria complexa para a extensão de supersimetrias.

Representações de supersimetrias (p,p) com $p \geq 3$. Como no (2,2), tem que as todas as suas simetrias individualmente tem a forma
$\delta_\varepsilon\Phi^i = (I^a)^i_j\varepsilon D\Phi^j$ onde a $\in \{1,2,,...,p-1\}$. A parte algébrica da superalgebra impõe o vínculo.

$$I^aI^b + I^bI^a = 0 \tag{2.34}$$

Então diferentes tipos de I's anti-comutam entre si. Em particular, umas vez que temos duas simetrias extras dadas por I_1 e I_2, conseguimos uma terceira dada por $I_3 = I_1I_2$. Se I_1 e I_2 forem covariantemente constantes então I_3 também será, em particular I_3 é integrável. Essas 3 estruturas complexas formam uma algebra de quatérnios, e denotamos essas estruturas em M por estruturas Híper-Kähler. Porém é possível construir supersimetrias maiores que (4,4).

CAPÍTULO 3

Geometria Complexa Generalizada

Gates, Hull e Rocek em (5) descobriram que na presença do campo B, o modelo sigma (2,2) requer uma geometria diferente da Geometria Kähler no espaço alvo. Essa geometria foi chamada de Geometria Bi-Hermitiana. Em (6) Gualtieri mostrou que a Geometria Bi-Hermitiana é equivalente a uma geometria que ele mesmo chamou de Geometria Kähler Generalizada, a qual é apenas um caso particular da Geometria Complexa Generalizada.

Em (8) é mostrado que observáveis topológicos são dados através da cohomologia de algebroides de Lie associados a estrutruras complexas generalizadas torcidas. De fato, no capítulo 5, serão mostrados modelos A e B generalizados para supercordas utilizando o conceito de estruturas complexas generalizadas.

Geometria Complexa Generalizada (GCG) é uma geometria em $TM \oplus T^{*}M$, a qual se destaca pelo fato de generalizar a Geometria Complexa e Geometria Simplética, e por suas aplicações em Física, principalmente em teoria de cordas. Neste capítulo, o leitor será familiarizado com as definições básicas de GCG, as quais serão úteis para as futuras aplicações em física que serão feitas nesta dissertação. A principal referência para esse capítulo é (6)

Uma variedade complexa M' de dimensão complexa n, pode ser entendida como uma variedade real M de dimensão real 2n que satisfaz as seguintes propriedades:

- existe em M uma estrutura real $J : TM \mapsto TM$ que satisfaz $J^2 = -1$;

- $TM_+ \subset (TM)_{\mathbb{C}}$ é involutivo com relação ao colchete de Lie, onde TM_+ é o auto fibrado de auto valor +i da complexificação de J, i.e $J_{\mathbb{C}} : (TM)_{\mathbb{C}} \mapsto (TM)_{\mathbb{C}}$, onde $J_{\mathbb{C}}|_{TM} = J$.

Observando os casos mais simples, onde M=V é um espaço vetorial, não é preciso preocupar-se com o colchete de Lie. Portanto, uma variedade complexa, neste caso, é determinada apenas pela sua dimensão par e pela estrutura:

$$\begin{aligned} J &: V \mapsto V \\ J^2 &= -1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

a ap;icação J induz uma decomposição em V, do tipo $V_{\mathbb{C}} = L \oplus \overline{L}$, onde L é o auto espaço de J de auto valor +i, dim L=n/2 e $L \cap \overline{L} = 0$. Reciprocamente, L, com as propriedades citadas, induz uma estrutura J, então uma estrutura complexa pode ser definida como um subespaço L, onde:

$$
\begin{aligned}
&dim L = n/2 \\
&L \cap \overline{L} = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

o subespaço L, por sua vez, pode ser definido pela álgebra exterior de $V_{\mathbb{C}}$, basta tomar um $\phi \in \Lambda^{n/2}(V^*)$ tal que

$$
\begin{aligned}
&L = \{v \in V / \iota_x \phi = 0\} \\
&\phi \wedge \overline{\phi} \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Desta forma, o subespaço L é definido pelo ϕ da equação 3.3.
Conclui-se que, as três estruturas apresentadas são as estruturas algébricas equivalentes que toda variedade complexa deve ter:

- $J^2 = -1$;
- $L \subset V_{\mathbb{C}}$, tal que dim L=n/2 e $L \cap \overline{L} = 0$;
- $\phi \in \Lambda^{n/2}(V^*)$, tal que $\phi \wedge \overline{\phi} \neq 0$.

No decorrer do capítulo, mostrar-se-a que uma estrutura complexa generalizada irá extender cada uma das estruturas citadas, inclusive a parte diferencial onde o colchete de Lie é substituido pelo colchete de Courant.

3.1 Álgebra Linear de V ⊕ V*

Geometria Generalizada é o estudo de $TM \oplus T^*M$, onde M é uma variedade suave de dimensão n. Esta secção apresenta a álgebra linear de $TM \oplus T^*M$ e suas estruturas geométricas.

Dado o espaço vetorial V, é possível construir o espaço vetorial $V \oplus V^*$, o qual sugere duas formas bilineares naturais[1]:

$$< X + \xi, Y + \eta >_+ = \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)), \tag{3.4}$$

$$< X + \xi, Y + \eta >_- = \frac{1}{2}(\xi(Y) - \eta(X)), \tag{3.5}$$

onde X, Y ∈ V e ξ, η ∈ V*.

Seja X_1, X_2, Y ∈ V e η, ξ_1, ξ_2 ∈ V*:

$$
\begin{aligned}
< X_1 + \xi_1 + X_2 + \xi_2, Y + \eta >_+ &= \frac{1}{2}((\xi_1 + \xi_2)(Y) + (\eta)(X_1 + X_2)) \\
&= \frac{1}{2}((\xi_1)(Y) + (\eta)(X_1)) + \frac{1}{2}((\xi_2)(Y) + (\eta)(X_2)) \\
&=< X_1 + \xi_1, Y + \eta >_+ + < X_2 + \xi_2, Y + \eta >_+
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

[1]Observa-se que (3.4) e (3.5) são formas bilineares, não degeneradas.

(bilinearidade)

$$< Y+\eta, X+\xi >_{+}= \frac{1}{2}(\eta(X)+\xi(Y)) =< X+\xi, Y+\eta >_{+} \tag{3.7}$$

(simetria)

Em 3.6 e 3.7 as propriedades de bilinearidade e simetria de 3.4 foram verificadas. De maneira análoga verifica-se que 3.5 é bilinear e antissimétrica. Também é possível afirmar que as duas formas bilineares são não degeneradas:

$$< X+\xi, Y+\eta >_{+}= \begin{bmatrix} Y & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \xi \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$< X+\xi, Y+\eta >_{-}= \begin{bmatrix} Y & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \xi \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Logo, observa-se que as matrizes associadas a (3.4) e (3.5) são:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

A Formas de Sylvester de (3.4) é:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Isto implica que a signatura de (3.4) é (m,m), onde m é a dimensão de V e ambos são não degeneradas pois suas matrizes têm determinante diferentes de 0.

Estas formas bilineares têm uma orientação canônica, uma vez que a potência mais alta da álgebra exterior pode ser decomposta como:

$$\Lambda^{2m}(V \oplus V^*) = \Lambda^m V \otimes \Lambda^m V^*. \tag{3.13}$$

Tem-se, portanto, o par natural entre $\Lambda^k V^*$ e $\Lambda^k V$ dado por:

$$(v^*, u) = det(v_i^*(u_j)), \tag{3.14}$$

onde $v^* = v_1^* \wedge .. \wedge v_k^*$ e $u = u_1 \wedge .. \wedge u_k$. Desta forma, surge uma identificação natural: $\Lambda^{2m}(V \oplus V^*) = \mathbb{R}$, e o número $1 \in \mathbb{R}$ define uma orientação canônica em $V \oplus V^*$.

De agora em diante, todas vez que o texto se referir a forma bilinear canônica de $V \oplus V^*$ estará se referindo a forma 3.4.

3.1.1 Simetrias de $V \oplus V^*$

Esta secção abordará o comportamento de espaços maximalmente isotrópicos e suas descrições em termos de espinores puros. As simetrias de $V \oplus V^*$ também serão estudadas.

O grupo dos isomorfismos lineares que preservam a forma bilinear e a orientação é denotado por
SO$(V \oplus V^*)$ e sua álgebra de Lie correspondente:

$$\mathfrak{so}(V \oplus V^*) := \{T / < Tv, w > + < v, Tw >= 0\} \tag{3.15}$$

Um elemento qualquer desta álgebra é da forma:

$$\begin{bmatrix} A & \beta \\ B & D \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

onde D=-A* e B e β devem ser antisimétricas [2], ou seja B $\in \Lambda^2(V^*)$ e $\beta \in \Lambda^2(V)$.

Com essas observações, fica claro que $\mathfrak{so}(V \oplus V^*) = \Lambda^2(V \oplus V^*) = End(V) \oplus \Lambda^2 V^* \oplus \Lambda^2 V$.

Simetrias de $V \oplus V^*$ podem ser obtidas pela exponenciação dos elementos de $\mathfrak{so}(V \oplus V^*)$:

Exemplo 1: Transfomação B

Seja B $\in \Lambda^2(V^*)$, considerando-se

$$exp(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

a transformação exp(B) atua da seguinte forma: exp(B)(X+ξ)=X+ξ +$(\iota_X B)$.

Esse campo terá uma importante aplicação em Geometria Generalizada, pois ele preserva a projeção de $V \oplus V^*$ em V. Já em teoria de cordas, esse campo terá a interpretação de uma das simétrias da ação de cordas, como será mostrado nas secções seguintes.

Exemplo 2: Transfomação β

Similarmente, seja $\beta \in \Lambda^2(V)$, considerando

$$exp(B) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

a transformação β é outro exemplo de transformação ortogonal de $V \oplus V^*$ que manda $X + \xi$ em $X + \xi + \iota_\xi \beta$.

[2] B pode ser visto como uma 2-formas em $\Lambda^2 V^*$ via $B(X) = \iota_X B$ e β com uma 2-formas em $\Lambda^2 V$ via $\beta(\xi) = \iota_\xi \beta$

Exemplo 3: Ação GL(V)

Seja $A \in End(V)$, tem-se que

$$exp(A) = \begin{bmatrix} exp(A) & 0 \\ 0 & (exp(A^*))^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

que é outro exemplo de transformação ortogonal.

3.1.2 Subespaços Maximalmente Isotrópicos

Um dos objetos centrais da Geometria Generalizada são os subespaços maximalmente isotrópicos de $TM \oplus T^*M$, e para melhor entender esses objetos é preciso primeiro entender a álgebra linear desses objetos. Do ponto de vista físico, espaços maximalmente isótropicos são encontrados naturalmente em setores integravéis de Relatividade Geral (12), como também em sistemas mecânicos com vínculos não holonômicos.

Definiï¿½ï¿½o 3.1 (Subespaços Isotrópicos)**.** O subespaço $L < V + V^*$ é dito isotrópico quando <X,Y>=0 $\forall$ X,Y $\in$ L.

Definiï¿½ï¿½o 3.2 (Subespaços Maximalmente Isotrópicos)**.** O subespaço $L < V + V^*$ é dito maximalmente isotrópico[3] quando não existe L' isotrópico diferente de L tal que $L \subset L$'.

Os espaços maximalmente isotrópicos definidos em 3.2 também são denotados por estruturas de Dirac lineares. Alguns exemplos desses espaços esclarecem e ilustram a sua definção:

Exemplo 4

Seja $E \subset V$ um subespaço qualquer de V, então considerando o subespaço

$$E \oplus Ann(E) \subset V \oplus V^* \tag{3.20}$$

observa-se que o subespaço citado é maximalmente isotrópico.
Com efeito, dados $X + \xi, Y + \eta \in E \oplus Ann(E)$:

$$\begin{gathered} < X + \xi, Y + \eta >= \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)) = 0 \\ dim(E \oplus Ann(E)) = dim(E) + dim(Ann(E)) = dimV \end{gathered} \tag{3.21}$$

Exemplo 5

Dado E<V e $\omega \in \Lambda^2 E^*$. Define-se L(E,ω):={X+ξ $\in$ E$\oplus$V* / $\xi|_E = \iota_X \omega$}

[3] Será demonstrado mais adiante que a dimensão de um espaço maximalmente isotrópico é sempre igual a dimensão de V.

L(E,ω) é maximalmente isotrópico, pois dados $X+\xi, Y+\eta \in L(E,\omega)$ tem-se que

$$< X+\xi, Y+\eta >= \frac{1}{2}(\xi(Y)+\eta(X)) = \frac{1}{2}(\omega(X,Y)+\omega(Y,X)) = 0. \tag{3.22}$$

Observando que $L(E,\omega)\cap V^* = Ann(E)$, usando a aplicação projeção $\pi_V : V\oplus V^* \mapsto V$ e a restringindo a $L(E,\omega)$, pode-se calcular a $dim(L(E,\omega))$ como:

$$\begin{aligned} dim(L(E,\omega)) &= dimKer(\pi_V)+dimIm(\pi_V) \\ &= dim(L(E,\omega)\cap V^*)+dimE \\ &= dimAnn(E)+dimE = dimV. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Nota-se que todo espaço maximalmente isotrópico L é do tipo L(E, ω), como foi ilustrado no exemplo 5.

Proposiï¿½ï¿½o 3.1. *Todo espaço maximalmente isotrópico L é do tipo L(E, ω).*

Demonstração. Defina E como $E := \pi_V L$ e ω como $\omega(X,Y) = \alpha(Y)$, onde $X+\alpha \in L$ e $Y \in E$, note que ω não depende da escolha de α, uma vez que se $X+\alpha, X+\beta \in L$, tem-se que $(X+\alpha)-(X+\beta) \in L\cap V^* = Ann(E)$ implica que $\alpha(Y) = \beta(Y)\forall Y \in E$,usou-se o fato que $L\cap V^* = Ann(E)$, o qual é razoavelmente simples de demonstrar.

Observa-se que $\omega \in \Lambda^2 E^*$, pois os α's são lineares e ω é antissimétrico.

Por fim, conclui-se que $L(E,\omega)$ está bem definido e que $L \subset L(E,\omega)$ por construção. Como L é maximalmente isotrópico tem-se que $L = L(E,\omega)$ o que conclui a demonstração, pois $L(E,\omega)$ é maximalmente isotrópico como demonstrado no exemplo 5. □

Corolï¿½rio 3.1. *Todo espaço maximalmente isotrópico tem dimL=m, onde m=dimV=dimV*.*

Demonstração. dimL = dim$L(E,\omega)$ □

Definiï¿½ï¿½o 3.3. $\exp B(L(E,\omega)) := Im[\exp B(L(E,\omega))]$, onde $expB$ manda $X+\xi \mapsto X+\xi+\iota_X B$

3.1.3 Espinores em V⊕V*

Nessa secção será mostrado que subespaços maximalmente isotrópicos de V⊕V* são descritos por tipos especiais de espinores. Espinores são estruturas que surgem naturalmente em problemas físicos relacionados a férmions e nessa abordagem não será diferente. De fato, os espinores de $Cl(V\oplus V^*)$ estarão relacionados com os férmions de uma teoria de cordas, como será mostrado no capítulo 5.

Definiï¿½ï¿½o 3.4 (Álgebra de Clifford de V⊕V*)**.** A Álgebra de Clifford de V⊕V* CL(V⊕V*) é o quociente entre da álgebra tensorial $T(V\oplus V^*)$ com o ideal gerado por

$$< v,v >= v \bullet v \quad \forall v \in V\oplus V^* \tag{3.24}$$

CL(V$\oplus$V*) tem uma representação natural em $S = \Lambda^{\bullet}(V^*)$ dada por:

$$(X+\xi)\bullet\varphi = \iota_X\varphi + \xi\wedge\varphi \tag{3.25}$$

onde X+ξ $\in$ V$\oplus$V* e $\varphi \in \Lambda^{\bullet}$(V*)

Na signatura (n,n) a Álgebra de Clifford tem a forma volume ω satisfazendo ω^2=1, isto gera a decomposição S=$\Lambda^{\bullet}(V^*)$ = $S^+ \oplus S^-$ onde $S^{\pm}$ são os autoespaços $\pm$ de ω. Com efeito,

Dado uma base em V e_1,e_2,.....e_n e sua base dual de V* e^1,e^2,.....e^n,

tem-se que

$$\omega = (e_1+e^1)(e_2+e^2).....(e_n+e^n) \tag{3.26}$$

e então:

$$\omega^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(2n-1)(2n)}(-1)^n = 1 \tag{3.27}$$

Verifica-se também que $S^{\pm} = S^+ \oplus S^-$, ou equivalentemente

$$\Lambda^{\bullet}V^* = \Lambda^{Par}(V^*)\oplus\Lambda^{Impar}(V^*) \tag{3.28}$$

Enquanto que a decomposição $S^{\pm} = S^+ \oplus S^-$ não é preservada por toda à álgebra de Clifford, $S^{\pm}$ é uma representação irredutível do grupo spin, cuja a descrição em relação a álgebra de Clifford é dada por:

$$Spin(V\oplus V^*) = \{v_1...v_r | v_i \in V\oplus V^*, < v_i, v_i >= \pm 1, r = 2k\} \tag{3.29}$$

o qual é o espaço de recobrimento de $SO(V\oplus V^*)$ via o homomorfismo:

$$\begin{aligned} &\rho : Spin(V\oplus V^*) \mapsto SO(V\oplus V^*) \\ &\rho(x)(v) = xvx^{-1} \quad x \in Spin(V\oplus V^*), v \in V\oplus V^* \end{aligned} \tag{3.30}$$

e ainda tem-se um isomorfismo de álgebra de Lie $d_e\rho$

$$d_e\rho : \mathfrak{spin}(V\oplus V^*) \mapsto \mathfrak{so}(V\oplus V^*) \tag{3.31}$$

dado por $d_E\rho(x)(w) = xv - vx = [x,v]$, onde $\mathfrak{spin}(V\oplus V^*)$ e $\mathfrak{so}(V\oplus V^*)$ são álgebras de Lie associadas aos grupos $Spin(V\oplus V^*)$ e $SO(v\oplus V^*)$ respectivamente, e $x \in \mathfrak{so}(V\oplus V^*)$,$v \in V\oplus V^*$.

Seja $\{e_i\}$ uma base de V e $\{e^i\}$ a sua base dual, então é possível calcular a ação do campo B nos espinores.

Exemplo 6 (Transformação B)
Se $B = \frac{1}{2}B_{ij}e^i\wedge e^j, B_{ij} = -B_{ji}$, então B atua como uma 2-forma em $V\oplus V^*$ via $X+\xi \mapsto \iota_X B$, o que implica que sua imagem na álgebra de Clifford é $(d_e\rho)^{-1}(B) = \frac{1}{2}B_{ij}e^je^i$. De fato,

$$
\begin{aligned}
d_e\rho(\frac{1}{2}B_{ij}e^j e^i)(e_k) &= \frac{1}{2}B_{ij}(e^j e^i e_k - e_k e^j e^i) \\
&= \frac{1}{2}B_{ij}(e^j(\delta^i_j - e_k e^i) - (\delta^j_k - e^j e_k)e^i) \\
&= B_{kj}e^j = \iota_{e^j}B = B(e_k,.)
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Em particular, a imagem inversa de B atua nos espinores via

$$(d_e\rho)^{-1}(B)\varphi = \frac{1}{2}B_{ij}e^j \wedge e^i \wedge \varphi = -B \wedge \varphi \tag{3.33}$$

e tomando a exponencial tem-se que

$$exp(B)\varphi = e^{-B} \wedge \varphi = (1 - B + \frac{1}{2}B \wedge B + ..) \wedge \varphi \tag{3.34}$$

Observa-se também, que é possível definir uma forma bilinear nos espinores como sendo:

$$
\begin{aligned}
&(,) : S \otimes S \mapsto detV^* \\
&(s,t) = (\alpha(s) \wedge t)_{top}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

onde α manda $v_1 \otimes v_2 ... \otimes v_k$ em $v_k \otimes v_{k-1} ... \otimes v_1$ e $()_{top}$ é a componente de maior grau da forma.

3.1.4 Espinor Puro

Definiï¿½ï¿½o 3.5. Seja φ um espinor não nulo. Define-se um L_φ < V⊕V* como sendo

$$L_\varphi = \{v \in V \oplus V^*/v \bullet \varphi\} \tag{3.36}$$

Nota-se que L_φ é isotrópico:

$$2 < v,w > \varphi = (v \bullet w + w \bullet v)\varphi = 0, \tag{3.37}$$

,ou seja <v,w>=0 ∀ v,w ∈ L_φ.

Definiï¿½ï¿½o 3.6. Um espinor é dito puro quando L_φ é maximalmente isotrópico.

Exemplo 7
Seja $1 \in \Lambda^\bullet V^*$ o espinor unidade, o espaço nulo gerado por ele é:

$$\{X + \xi \in V \oplus V^*/(\iota_X + \xi \wedge)1 = 0\} = V \tag{3.38}$$

V é isotrópico e tem dimensão maxima (é da forma L(V,0)). É possível obter outro espaço isotrópico e maximal a partir de V.

Seja $B \in \Lambda^2 V^*$ e $\varphi = e^B \wedge 1 = e^B$, a partir disso obtem-se

$$N_\varphi = \{X - \iota_X B : X \in V\} = L(V, -B) \tag{3.39}$$

Chega-se ao ponto fulcral desta seção, que é exatamente descrever $L(E,\omega)$ em termos de espinores puros.

Lema 3.1. *Seja $E < V$ um subespaço de V de codimensão k. Então o espaço L(E,0)= E⊕Ann(E) está associado ao espinor forma volume do Ann(E), ou seja L_φ=L(E,0) onde φ é um a forma volume de Ann(E).*

Demonstração. Primeiro será mostrado que $L(E,0) \subset L_\varphi$.
Com efeito,
seja $X+\xi \in L(E,0)$ elemento qualquer de L(E,0) e $\{\theta^i\}$ base de Ann(E)
$\iota_X(\theta^1 \wedge .. \wedge \theta^k) = \sum_i \iota_X(\theta^i)\theta^1 \wedge .. \wedge \theta^k = 0$, pois $\iota_X(\theta^i) = 0\ \forall$ i.
$\xi \wedge \theta^1 \wedge .. \wedge \theta^k = \sum_{i=1}^k a_i \theta^i \wedge \theta^1 \wedge .. \wedge \theta^k = 0$, porque $\varphi \wedge \theta^i = 0$.

Mas foi mostrado que $L(E,0)$ é maximalmente isotrópico e como L_φ é isotrópico, tem-se que $L_\varphi = L(E,0)$.

□

A partir do lema 3.1 mostra-se que todo espaço maximalmente isotrópico está associado com uma linha de espinor puro.

Teorema 3.1. *Seja L(E,ω) um espaço maximalmente isotrópico. Então o espinor puro φ_L=cexp(B)φ é tal que $L_{\varphi_L} = L(E,\omega)$, onde φ é a forma volume de Ann(E) e $B \in \Lambda^2 V^*$ é uma 2-forma tal que $\iota^* B = \omega$, com $i : E \mapsto V$ sendo a inclusão.*

Demonstração. Nota-se que $L(E,\omega) = exp(B)L(E,0)$, pois $(\iota_X B + \xi) = \iota_X \omega$, portanto todo elemento de $L(E,\omega)$ é da forma $exp(B)(X+\xi) = X + \xi + \iota_X B$.
Nota-se também que através de alguns cálculos chega-se a:

$$\begin{aligned} X exp(B)\varphi &= exp(B)X\varphi - \iota_X B\varphi \\ \xi exp(B)\varphi &= exp(B)\xi\varphi \\ (X+\xi+\iota_X B)exp(B)\varphi &= exp(B)X\varphi - \iota_X B\varphi + \iota_X B\varphi + exp(B)\xi\varphi \end{aligned} \tag{3.40}$$

Conclui-se que $(X+\xi+\iota_X B)exp(B)\varphi = exp(B)(X+\xi)\varphi = 0$, sse φ anula qualquer elemento de L(E,0), o que prova o resultado. □

Por fim, exibe-se um resultado que se mostrará bastante útil no decorrer da dissertação, pois ele relaciona os dois espinores com seus espaços correspondentes.

Proposiï¿½ï¿½o 3.2. *(13) Os espaço maximalmente isotrópicos L e L' satisfazem L∩L'=0 se e somente se seus espinores puros satisfazem (φ,φ')≠0.*

3.2 Colchete de Courant, Algebroide de Lie, Estruturas de Dirac

3.2.1 Algebroide de Lie

Essa secção inicia-se com uma introdução aos algebroide de Lie, o qual consiste em uma classe de fibrados vetoriais com uma estrutura que se assemelha a de um fibrado tangente. Algebroides de Lie são particularmente úteis por pelo menos duas razões. Em primeiro lugar, eles fornecem um quadro suficientemente geral para acomodar um tratamento unificado de muitos tipos de geometria, incluindo Poisson, folheações, (pré) simplética, e como será visto, complexo e CR geometria, além de muitos novos tipos de geometria (generalizadas). Em segundo lugar, eles fornecem uma maneira de lidar, com estruturas que, à primeira vista parecem adquirir singularidades em determinado loco na variedade.

O colchete de Courant será introduzido em $TM \oplus T^*M$, descrevendo suas propriedades básicas, e mostrando que ele não consegue se encaixar no contexto da teoria de algebróide de Lie. De fato, quando as suas propriedades são sistematizadas, obtém-se os axiomas de um algebroide de Courant, introduzidas pela primeira vez em (14). A estrutura de um algebroide de Courant em $TM \oplus T^*M$ destaca-se por dois principais motivos: primeiro, ele fornece uma fonte de novos algebróides de Lie por restrição para subfibrados isotrópicos (como no caso de estruturas de Dirac, mencionado anteriormente). Em segundo lugar, o seu grupo natural de simetrias inclui não apenas difeomorfismos, mas também 2-formas fechadas, que é conhecido pelos os físicos como a ação do campo-B. Ainda do ponto de vista físico, os algebroides de Lie cumprem um papel fundamental, pois observáveis topológicos podem ser descritos por cohomologias dos algebroides de Lie.

Definiï¿½ï¿½o 3.7. Um fibrado vetorial real de posto m sobre a variedade M é uma variedade E com a projeção suave tal que:

- Cada fibra p^{-1}(x) tem estrutura de espaço vetorial de dimensão m.
- Para todo ponto x $\in$ M, $\exists$ vizinhança U e difeomorfismo ψ_U:p^{-1}(U)$\cong$U$\times\mathbb{R}^m$ tal que: ψ_U é um isomorfismo de p^{-1}(x) em {x}$\times\mathbb{R}^m$.
- Na interseção a função de transição é da forma:
  $$\psi_U \circ \psi_V^{-1}\text{:U}\cap\text{V}\times\mathbb{R}^m\mapsto\text{U}\cap\text{V}\times\mathbb{R}^m,$$
  onde (x,v)$\mapsto$(x,g_{uv}(x)v) é uma função suave em $U \cap V$ com valores no espaço das matrizes invertíveis $m \times m$.

Informalmente, pode-se pensar no fibrado vetorial como uma espécie de fibrado tangente, onde ao invés de se ter ponto a ponto um $\mathbb{R}^n$ tangente, tem-se um espaço vetorial tangente qualquer.

Analogamente aos campos definidos em um fibrado tangente, que são mapas do tipo $X : M \mapsto TM$ com $\pi \circ X = I$, também pode-se definir campos em um fibrado vetorial $X : M \mapsto E$, tal que $\pi \circ X = I$. o espaço dos campos E são chamados seções de E, que serão denotadas por

$\Gamma(E)$.

Definiï¿½ï¿½o 3.8. Um algebroide de Lie real $(L,[,],a)$ é um fibrado vetorial L sobre M, com um colchete [,] de Lie definido em Γ(L), e uma aplicação linear a chamada de âncora, que satisfaz:

- a:Γ(L):↦Γ(TM);
- a([X,Y])=[a(X),a(Y)] ∀ X,Y ∈ Γ(L);
- $[X,fY] = f[X,Y] + (a(X)f)Y \forall X,Y \in \Gamma(L)$.

Agora generalizando algumas estruturas no fibrado tangente, pode-se definir alguns objetos que existem naturalmente em algebroides de Lie. No fibrado tangente, o colchete de Lie pode ser estendido de maneira natural para campos multi-vetoriais $\Gamma(\Lambda^{\bullet}TM)$, que denota-se colchete de Schouten.

Definiï¿½ï¿½o 3.9. Seja L um algebroide de Lie. O colchete de Schouten atua nas seções $X_1 \wedge .. \wedge X_p \in \Gamma(\Lambda^p L)$,$Y_1 \wedge .. \wedge Y_p$ da seguinte maneira:

$$[X_1 \wedge .. \wedge X_p, Y_1 \wedge .. \wedge Y_p] = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \left[X_i, Y_j\right] \wedge X_1 \wedge .. \wedge \hat{X}_i ... X_p \wedge Y_1 \wedge .. \hat{Y}_j . \wedge Y_p \tag{3.41}$$

e $[X,f] = -[f,X] = a(X)f$ para $X \in \Gamma(L)$ e $f \in \Gamma(M)$.

Esses colchetes formam uma álgebra de Lie graduada, onde a componente de grau k é $\Gamma(\Lambda^{k+1}L)$:

$$\begin{aligned} [A,B] &= -(-1)^{(a-1)(b-1)}[B,A], \\ [A,[B,C]] &= [[A,B],C] + (-1)^{(a-1)(b-1)}[B,[A,C]], \end{aligned} \tag{3.42}$$

para todo $A \in \Gamma(\Lambda^a L), B \in \Gamma(\Lambda^b L), C \in \Gamma(\Lambda^c L)$.
Nota-se que a álgebra de Lie graduada é justamente a álgebra de supersimetria. Além disso, se $A \in \Gamma(\Lambda^a L)$, então $ad_A = [A,.]$ é a derivação de grau a-1 na multiplicação exterior em $\Gamma(\Lambda^{\bullet}L)$:

$$ad_A(B \wedge C) = ad_A(B) \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge ad_A(C). \tag{3.43}$$

O colchete de Shouten forma a superalgebra de Poisson.

Em adição ao colchete de Schouten de campos vetoriais, tem-se que as variedades suaves estão equipadas com o operador derivada exterior d, o qual é uma derivação de grau 1 da álgebra das formas diferenciais. O operador derivada exterior pode ser definido em termos de colchete de Lie, e por esta razão, é possível generalizá-lo para algebroides de Lie da seguinte forma:

Definiï¿½ï¿½o 3.10. Uma derivação do algebroide de Lie d_L é um operador linear de primeira ordem de $\Gamma(\Lambda^k L^*)$ em $\Gamma(\Lambda^{k+1} L^*)$ definido por:

$$\begin{aligned} d_L\sigma(X_0,X_1,..,X_k) = &\sum_i (-1)^i a(X_i)\sigma(X_0,X_1,,\hat{X}^i,..,X_k) \\ &+\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\sigma(\left[X_i,X_j\right],X_0,X_1,,\hat{X}^i,.,\hat{X}^j,.,X_k) \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde $\sigma \in \Gamma(\Lambda^k L^*)$ e $X_i \in \Gamma(L)$.

Essa derivação do algebroide de Lie define uma cohomologia, pois $d_L^2 = 0$. A cohomologia de d_L é chamada da cohomologia do algebroide de Lie, e será mostrado no capítulo 5 que essa cohomologia será isomorfa à cohomologia dos observáveis físicos.
Algebroides de lie induzem naturalmente folheações generalizadas em TM, no sentindo que será explicado posteriormente.

Definiï¿½ï¿½o 3.11. Uma pré-folheação para uma variedade M é uma coleção de subvariedades imersas e disjuntas de M, com as seguintes propriedades:

Propriedade 1: cada subvariedade da folheação (chamadas de folhas) são conexas.

Propriedade 2: a união das folhas cobrem a variedade M.

Propriedade 3: toda folha $l \subset M$ é tal que para qualquer ponto p $\in$ l tem vizinhança $U \subset M$, onde a componente conexa de $l \cap U$ é uma subvariedade mergulhada de M.

Se a dimensão das folhas variam a folheação é dita generalizada no sentido de Sussmann (15).

Obs: Na definição clássica de folheações, a propriedade 3 seria trocada pela propriedade da carta plana. Uma carta (U,ϕ) é dita plana se ϕ(U) é um cubo em $\mathbb{R}^n$ e se cada folha l ou não intersecta U ou ϕ(l$\cap$U) é uma união contável de k-fatias,da forma $x_{k+1} = 0, x_{k+2} = 0, ..., x_n = 0$.

Para efeito de visualização é possível imaginar que uma folheação clássica [4] é localmente um $\mathbb{R}^n$ fatiado por hiperplanos. E no caso caso das folheações no sentido de Sussman, pode ser interpretado com uma folheação padrão onde é permitido que a dimensão das folhas variem.

Definiï¿½ï¿½o 3.12. Uma distribuição em uma variedade M é um mapa que associa a cada m $\in$ M um Δ(m), onde Δ(m) é um subespaço vetorial de T_mM. Um conjunto de campos vetoriais geram Δ=$[X_1,X_2,...,X_k]$ se $\forall$ m $\in$ M, tem-se que Δ(m)=$[X_1(m),X_2(m),...,X_k(m)]$.

Definiï¿½ï¿½o 3.13. Um conjunto de campos D é dito tipo localmente finito se $\forall$ m $\in$ M, existem campos vetoriais $X_1,X_2,...,X_k \in$ D que satisfazem:

- $\{X_1(m),X_2(m),...,X_k(m)\}$ geram Δ_D(m),

[4] a menos casos exóticos, como algumas folheações para o toro.

- $\forall$ X $\in$ D, existe vizinhaça U de m e funções C^∞ em U, tal que: $\left[X, X^i\right] = \sum_j^k c_{ij}(m) X^j(m)$ $\forall$ m $\in$ U.

Teorema 3.2. *Se D é do tipo localmente finito, então M admite folheação generalizada no sentido de Sussman, cujo o plano tangente de m $\in l_m \subset M$ é precisamente $\Delta_D(m)$.*

Usando o Teorema 3.2, nota-se que um algebroide de Lie induz uma folheação em TM. De fato, tomando Δ_D=a(L) a sua imagem em L irá gerar campos vetoriais suaves em TM, pois a aplicação âncora é suave,, portanto basta escolher seções em L e em alguma vizinhança U de m, $X^1, X^2, ..., X^n \in \Gamma$(U,L), por conseguinte, tem-se que $a(X^1), a(X^2), ..., a(X^n)$ geram Δ_D. Usando o fato que a aplicação âncora é um homomorfismo:

$$\left[a(X^i), a(X^j)\right] = a(\left[X^i, X^j\right]) = a(\sum_k c_k^{ij} X^k) = \sum_k c_k^{ij} a(X^k) \tag{3.45}$$

para alguns $c_k^{ij} \in \Gamma(U)$, logo Δ_D é do tipo finito e satisfaz as hipóteses do teorema 3.2 e portanto:

Proposiï¿½ï¿½o 3.3. *Seja L um algebroide de Lie L em uma variedade suave M com a aplicação âncora, então Δ=a(L) é uma distribuição suave no sentido de Sussmann. Ou seja, M é localmente a união disjunta de subvariedades mergulhadas (chamadas folhas) tal que para todo ponto m $\in M$, o espaço tangente da folha que contém M é precisamente Δ(m).*

Analogamente é possível gerar folheações a partir de um algebroide de Lie complexo. Dado um algebroide de Lie complexo L, pode-se obter uma distribuição real observando a imagem da aplicação âncora sobre L, $E = a(L)$. Sabe-se que $E \subset TM \otimes \mathbb{C}$ e que E induz duas distribuições reais que são $E + \overline{E}$=$\Theta \otimes \mathbb{C}$ e $E \cap \overline{E}$=$\Delta \otimes \mathbb{C}$. Θ não precisa ser involutivo uma vez que:

$$[X_E + X_{\overline{E}}, Y_E + Y_{\overline{E}}] = [X_E, Y_E] + [X_E, Y_{\overline{E}}] + [X_{\overline{E}}, Y_E] + [X_{\overline{E}}, Y_{\overline{E}}] \tag{3.46}$$

e que $[X_E, Y_{\overline{E}}]$ e $[Y_E, X_{\overline{E}}]$ não precisam estar em Θ. Por outro lado, tem-se que Δ é involutivo. Mas isso não é suficiente para induzir uma folheação generalizada em TM, por que uma distribuição que admite uma folheação generalizada não basta ser real e involutiva, ela tem que ser uma distribuição suave também. O que satisfeito pois $E = a(L)$.

Proposiï¿½ï¿½o 3.4. *Seja L um algebroide de Lie complexo em uma variedade suave M com a aplicação âncora, tal que $E + \overline{E}$=TM$\otimes\mathbb{C}$, onde E=a(L). Seja Δ uma distribuição real definida por $\Delta \otimes \mathbb{C}$=$E \cap \overline{E}$, então Δ é uma distribuição suave integrável no sentido de Sussmann, definindo assim, uma folheação generalizada em M .*

Seguindo as mesmas hipóteses da Proposição 3.4 e tomando como hipótese uma distribuição Δ de posto constante, pode-se induzir uma estrutura complexa transversa nesta nova folheação no sentido que será explicado:

Uma distribuição complexa E$\subset$ TM$\otimes\mathbb{C}$ de posto constante de codimensão k na variedade real n-dimensional M é integrável se, em alguma vizinhança U para cada ponto m $\in$ M, existam funções complexas $f_1, f_2, .., f_k \in C^\infty$(U,$\mathbb{C}$) tal que $\{df_1, df_2, .., df_k\}$ são linearmente independentes para cada ponto em U e $\{df_1, df_2, .., df_k\}$ aniquila todos os campos vetoriais de E. Pelo teorema de Newlander-Nirenberg, sabe-se que E é integrável se as seguintes condições são satisfeitas:

- E é involutivo (fechado com relação ao colchete de Lie);
- dim$E\cap\overline{E}$ é constante;
- $E+\overline{E}$ é involutivo.

Então $f_1, f_2, .., f_k$ são coordenadas complexas e transversas para a folheação determinada por $E\cap\overline{E}$. Ou seja, para todo ponto m $\in$ M, existe uma vizinhaça U que é isomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^{n-2k}\times\mathbb{C}^k$, com uma distribuição complexa natural $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_{n-2k}}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial z_k}\}$.
Nas hipóteses da Proposição 3.4 tem-se que $E+\overline{E}$=TM$\otimes\mathbb{C}$, se são considerados apenas ponto regulares de M (pontos tal que dim$E\cap\overline{E}$ é constante), então obtém-se uma estrutura complexa transversa em M.

Proposiï¿½ï¿½o 3.5. *Seja L um algebroide de Lie complexo em uma variedade real n-dimensional M com a aplicação âncora, tal que $E+\overline{E}$=TM$\otimes\mathbb{C}$, onde E=a(L). Seja m $\in$ M ponto regular para o algebroide de Lie (pontos tal que dim$E\cap\overline{E}$ é constante), então em alguma vizinhança U de m, existem funções complexas $f_1, f_2, .., f_k \in C^\infty$(U,$\mathbb{C}$) tal que $\{df_1, df_2, .., df_k\}$ são linearmente independentes para cada ponto em U e $\{df_1, df_2, .., df_k\}$ aniquila todos os campos vetoriais de E.*

Folheações são objetos naturais em teorias físicas integravéis, como por exemplo alguns setores de Relatividade Geral, sistemas Hamiltonianos e em algumas compactificações em Teoria de Cordas, portanto, o entedimento de novas generalizações de Folheações podem ser uma ferramenta muito útil à física.

3.2.2 Colchete de Courant e Algebroide de Courant

O colchete de Courant é um colchete definido nas seções de $TM\oplus T^*M$ dado por:
$[X+\xi, Y+\eta]$=$[X,Y]+L_X\eta - L_Y\xi - \frac{1}{2}d(\iota_X\eta - \iota_Y\xi)$
onde X+ξ,Y+η $\in$ Γ(TM$\oplus$TM*)

$$\pi[A,B] = [\pi(A), \pi(B)] \tag{3.47}$$

Onde $\pi : TM\oplus T^*M \mapsto TM$ é a projeção em TM.
O colchete de Courant não é um colchete de Lie, pois eles falham em ser um colchete de Lie por termos que dependem da métrica, e esse resultado é a ideia central dessa seção.
Seja Jac o operador Trilinear definido por:

Jac(A,B,C)=$[[A,B],C]$+$[[B,C],A]$+$[[C,A],B]$ $\forall$ A,B,C $\in$ Γ(TM$\oplus$TM*).

Esse operador mede o quanto o colchete de Courant fala ao ser um colchete de lie.

Proposiï¿½ï¿½o 3.6. *Jac(A,B,C)=d(N_{ij}(A,B,C))*

onde N_{ij} é o operador de Nijenhuis

N_{ij}=$< [A,B], C >$+$< [B,C], A >$+$< [C,A], B >$

Demonstração. Para provar esse resultado será definido o colchete de Dorfman em $TM \oplus T^*M$ por:

$$(X+\xi)\circ(Y+\eta) = [X,Y] + L_X\eta - \iota_Y d\xi. \tag{3.48}$$

A diferença de dois colchetes é da forma

$$[A,B] = A\circ B - d < A,B > \tag{3.49}$$

nota-se que $[A,B] = \frac{1}{2}(A\circ B - B\circ A)$. Uma das vantagens do colchete de Dorfman é que ele satisfaz a regra de Leibniz

$$A\circ(B\circ C) = (A\circ B)\circ C + B\circ(A\circ C) \tag{3.50}$$

a qual pode ser provado facilmente uma vez que ($A = X+\xi, B = Y+\eta, C = Z+\zeta$)

$$\begin{aligned}(A\circ B)\circ C + B\circ(A\circ C) &= [[X,Y],Z] + [[X,Y],Z] + L_{[X,Y]}\zeta - \iota_Z d(L_X\eta - \iota_Y d\xi) + L_Y(L_X\zeta - \iota_Z d\xi) \\ &\quad - \iota_{[X,Y]}d\eta \\ &= [X,[Y,Z]] + L_X L_Y\zeta - L_X\iota_Z d\eta - L_Y\iota_Z d\xi + \iota_Z d\iota_Y d\xi \\ &= [X,[Y,Z]] + L_X(L_Y\zeta - \iota_Z d\eta) - \iota_{[Y,Z]}d\xi \\ &= A\circ(B\circ C)\end{aligned} \tag{3.51}$$

onde foi usado que a identidade de Jacobi e as formulas $L_X\alpha = (d\iota_X + \iota_X d)\alpha$, $[L_X,\iota_Y]\alpha = [\iota_X, L_Y]\alpha = \iota_{[X,Y]}\alpha$, para uma forma diferencial α . Nota-se que

$$\begin{aligned}[[A,B],C] &= [A,B]\circ C - d < [A,B],C > \\ &= (A\circ B - d < A,B >)\circ C - d < [A,B],C > \\ &= (A\circ B)\circ C - d < [A,B],C >\end{aligned} \tag{3.52}$$

onde foi usado que $df\circ C = 0$ para todo 1-forma do tipo exata ($\alpha = df$). E finalmente pode-se calcular Jac(A,B,C)

$$\begin{aligned}Jac(A,B,C) &= [[A,B],C] + p.c \\ &= \frac{1}{4}((A\circ B)\circ C - C\circ(A\circ B) - (B\circ A)\circ C + C\circ(B\circ A) + p.c) \\ &= \frac{1}{4}((A\circ B)\circ C - B\circ(A\circ C) - C\circ(A\circ B) - B\circ(A\circ C) + A\circ(B\circ C) + C\circ(B\circ A) + p.c) \\ &= \frac{1}{4}(A\circ(B\circ C) - B\circ(A\circ C) + p.c) \\ &= \frac{1}{4}((A\circ B)\circ C + p.c) \\ &= \frac{1}{4}([[A,B],C] + d < [A,B],C > + p.c) \\ &= \frac{1}{4}(Jac(A,B,C) + 3d(N_{ij}(A,B,C)))\end{aligned} \tag{3.53}$$

onde p.c é a denotação para permutação cíclica □

Proposiï¿½ï¿½o 3.7. *Seja $f \in C^\infty(M)$. Então o colchete de Courant satisfaz:*

$$[A, fB] = f[A,B] + (\pi(A)f)B - < A,B > df$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
[X+\xi, f(Y+\eta)] &= [X, fY] + L_X f\eta - L_{fY}\xi - \frac{1}{2}d(\iota_X(f\eta) - \iota_{fY}\xi) \\
&= f[X+\xi, Y+\eta] + (Xf)Y + (Xf)\eta - (\iota_Y\xi)df - \frac{1}{2}(\iota_X\eta - \iota_Y\xi)df \\
&= f[X+\xi, Y+\eta] + (Xf)(Y+\eta) - < X+\xi, Y+\eta > df
\end{aligned} \tag{3.54}$$

□

Proposiï¿½ï¿½o 3.8. *A diferenciação natural do produto interno pode ser expressa em termos do colchete de Courant como:*

$$\pi(A) < B,C > = < [A,B] + d < A,B >, C > + < B, [A,C] + d < A,C >> \tag{3.55}$$

Demonstração. Em termos dos colchetes de Dorfman, observa-se que provar a proposição 3.8 é equivalente a provar que:

$$\pi(A) < B,C > = < A \circ B, C > + < B, A \circ C > \tag{3.56}$$

Seja $A = X+\xi, B = Y+\eta, C = Z+\zeta$. Então tem-se que

$$\begin{aligned}
< A \circ B, C > + < B, A \circ C > &= \frac{1}{2}(\iota_{[X,Y]}\zeta + \iota_Z(L_X\eta - \iota_Y d\xi) + \iota_{[X,Z]}\eta + \iota_Y(L_X\zeta - \iota_Z d\xi)) \\
&= \frac{1}{2}(L_X\iota_Y\zeta + L_X\iota_Z\eta) \\
&= \frac{1}{2}\iota_X d(\iota_Y\zeta + \iota_Z\eta) \\
&= \pi(A) < B,C > .
\end{aligned} \tag{3.57}$$

□

Agora se torna natural o conceito de algebróide de Courant, o qual será definido abaixo.

Definiï¿½ï¿½o 3.14. ((16),Definição 2.1) Um algebroide de Courant é um fibrado vetorial E equipado com uma forma bilinear e um colchete anti-simétrico nas suas seções, e um mapa suave $\pi : E \mapsto TM$ chamado de âncora. Isso induz um operador diferencial natural $D : C^\infty(M) :\mapsto \Gamma(E)$ via definição $< Df, A > = \frac{1}{2}\pi(A)f$ $\forall$ f $\in C^\infty$(M) e $A \in \Gamma(E)$.
Essas estruturas precisam ser compatíveis com as seguintes propriedades:

- $\pi[A,B] = [\pi(A), \pi(B)]$ $\forall$ A,B $\in \Gamma$(E)
- Jac(A,B,C)=d(N_{ij}(A,B,C)) $\forall$ A,B $\in \Gamma$(E)
- $[A, fB] = f[A,B] + (\pi(A)f)B - <A,B> Df$ $\forall$ A,B $\in \Gamma$(E)
- $\pi \circ D = 0$,ou seja $<Df, Dg> = 0$ $\forall$ f,g $\in C^{\infty}(M)$
- $\pi(A) <B,C> = <[A,B] + d<A,B>, C> + <B, [A,C] + d<A,C>$

3.2.3 Simetrias do Colchete de Courant, O campo B

É bem conhecido que os difeomorfismos são todas as transformações que preservam o colchete de Lie, porém será visto nesta seção que o colchete de Courant tem mais simetrias.

Proposiï¿½ï¿½o 3.9. *Seja (f,F) um automorfismo no fibrado tangente $\pi : TM \mapsto M$ de uma variedade suave M, ou seja um par de difeomorfismos f:M$\mapsto$M e $F : TM \mapsto TM$, tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

e F é um mapa linear em cada fibra. Se F preserva o colchete de Lie, isto é $F[X,Y] = [F(X), F(Y)]$ $\forall$ X,Y $\in$ TM, então F=f_* que, é o mapa diferencial de f.

Demonstração. Nota-se que (f, f_*) é automorfismo do fibrado tangente que preserva o colchete de Lie [5]. Portanto, definindo $G = f_*^{-1} \circ F$, tem-se que o par (Id,G) é automorfismo que preserva o colchete de Lie, pois a composição de difeomorfismo é difeomorfismo e a composição vai preservar o colchete, já que

$$G[X,Y] = f_*^{-1} \circ F[X,Y] = f_*^{-1}[FX, FY] = [GX, GY]$$

para todo campo vetorial X,Y.
Em particular, para quaisquer campos vetoriais X,Y, e $h \in C^{\infty}(M)$ tem-se que $G[hX,Y] = [GhX, GY]$, ou expandindo

$$G[hX,Y] = G(h[X,Y] - Y(h)X) = hG[X,Y] - Y(h)G(X). \tag{3.58}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} G[hX,Y] &= h[GX, GY] - G(Y)(h)G(X) \\ &= hG[X,Y] - G(Y)(h)G(X) \end{aligned} \tag{3.59}$$

então Y(h)G(X)=G(Y)(h)G(X) para todo X,Y,h. E isto só pode ocorrer se G(Y)=Y para todo campo Y, ou seja G=Id, e portanto $F = f_*$. □

[5] corolário 8.31 livro do Jonh Lee (17).

Será visto logo a seguir que no caso $TM \oplus T^*M$, o campo e^B é uma simetria do colchete de Courant.

Proposiï¿½ï¿½o 3.10. *O mapa e^B é automorfismo do colchete de Courant sse dB=0*

Demonstração. Seja $X+\xi, Y+\eta \in C^\infty(TM \oplus T^*M)$ e B uma 2-forma suave, Então

$$\begin{aligned} \left[e^B(X+\xi), e^B(Y+\eta)\right] = & \\ &= [X+\xi+\iota_X B, Y+\eta+\iota_Y B] \\ &= [X+\xi+, Y+\eta] + [X, \iota_Y B] + [\iota_X B, Y] \\ &= [X+\xi+, Y+\eta] + L_X \iota_Y B - \frac{1}{2} d\iota_X \iota_Y B - L_Y \iota_X B + \frac{1}{2} d\iota_Y \iota_X B \\ &= [X+\xi+, Y+\eta] + L_X \iota_Y B - \iota_Y L_X B + \iota_Y \iota_X dB \\ &= [X+\xi+, Y+\eta] + \iota_{[X,Y]} B + \iota_Y \iota_X dB \\ &= e^B([X+\xi, Y+\eta]) + \iota_Y \iota_X dB \end{aligned} \tag{3.60}$$

Portanto, e^B é automorfismo de colchete de Courant sse $\iota_Y \iota_X dB = 0$ para todo X,Y, que acontece quando dB=0. □

A próxima proposição mostrará que todas as simetrias do colchete de Courant são os difeomorfismos e e^B.

Proposiï¿½ï¿½o 3.11. *Seja (f,F) um automorfismo ortogonal de $TM \oplus T^*M$ para a variedade suave M. Suponha que F preserva o colchete de Courant. Então F precisa ser a composição de um difeomorfismo de M e um campo B.*

Demonstração. Nota-se que se f é difeomorfismo, tem-se que o mapa

$$f_c = \begin{bmatrix} f_* & 0 \\ 0 & (f^*)^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

é um automorfismo ortogonal de $TM \oplus T^*M$ que preserva o colchete de Courant. Portanto definindo $G = f_c^{-1} \circ F$, tem-se que o par (Id,G) é automorfismo ortogonal preserva o colchete de Courant. Em particular, para qualquer seção $A, B \in C^\infty(TM \oplus T^*M)$ e $h \in C^\infty(M)$ tem-se que $G[hA, B] = [G(hA), G(B)]$, ou expandindo

$$\begin{aligned} G[hA,B] &= G(h[A,B] - (B_T h)A - <A,B> dh) \\ &= hG[A,B] - (B_T h)G(A) - <A,B> G(dh), \end{aligned} \tag{3.62}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} [G(hA), G(B)] &= h[G(A), G(B)] - (G(B)_T h)A - <G(A), G(B)> dh \\ &= h[G(A), G(B)] - (G(B)_T h)G(A) - <G(A), G(B)> dh. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Igualando os termos e usando ortogonalidade

$$(B_T h)A + < A, B > G(dh) = (G(B)_T h)G(A) + < G(A), G(B) > dh \quad (3.64)$$

Escolhendo A=X,B=Y, onde $X, Y \in C^\infty TM$ então <A,B>=0. Então, tem-se que $Y(h)G(X) = (G(Y)_T)$ para todo X,Y,h. Isto pode acontecer só se $G(Y)_T = Y$ para todo vetor, implicando que

$$G = \begin{bmatrix} 1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Usando isto, tem-se que a equação abaixo fica na forma de:

$$< A, B > G(dh) =< A, B > dh \quad (3.66)$$

no que implica em

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

E a ortogonalidade obriga

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{B} & 1 \end{bmatrix} = e^{\hat{B}} \quad (3.68)$$

e portanto $F = f_c \circ e^{\hat{B}}$. □

3.2.4 Aplicações do campo B no espaço de fase das cordas

Uma ampla classe de modelos sigma parte de uma descrição do espaço de fase. Para o folhas mundo $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$ o espaço de fase pode ser identificado com um fibrado cotangente T^*LM do espaço de loop $LM = \{X : S^1 \mapsto M\}$. Usando coordenadas locais $X^\mu(\sigma)$ e seus momentos conjugados $p_\mu(\sigma)$ e a forma simplética padrão em T^*LM, a qual é dada por

$$\omega = \int_{S^1} d\sigma \delta X^\mu \delta p_\mu \quad (3.69)$$

onde δ é o operador diferencial de de Rham em T^*LM e σ é a coordenada ao longo de S^1. A forma simplética (3.73) pode ser torcida por uma 3-forma $H \in \Omega^3(M)$,dH=0 e portanto ela torna-se a estrutura (3.54)

$$\omega = \int_{S^1} d\sigma \delta X^\mu \delta p_\mu + H_{\mu\nu\rho} \partial X^\mu \delta X^\nu \wedge X^\rho \quad (3.70)$$

onde $\partial = \partial_\sigma$ é a derivada com respeito a σ. Para ambas as formas simpléticas as transfomações são as canônicas:

$$X^\mu \mapsto X^\mu, \qquad p_\mu \mapsto p_\mu + b_{\mu\nu}\partial X^\nu \quad (3.71)$$

associado com a 2-forma fechada, b$\in \Omega^2(M)$,db=0. Nota-se que os difeomorfismos de M também são transformações canônicas. De fato o grupo das transformações canônicas locais para

T^*LM é o produto semi direto de Diff(M) e $\Omega^2_{fechado}(M)$. E portanto temos a seguinte proposição

Proposiï¿½ï¿½o 3.12. *O grupo das transformações canônicas locais para T^*LM é isomorfo ao grupo dos automorfismos ortogonais do colchete de Courant.*

3.2.5 Estruturas de Dirac

Observando as proposições 3.6, 3,7 e 3.8, verifica-se que o colchete de Courant falha ao ser um colchete de Lie por termos que dependem da métrica. Tomando um sub-fibrado L $\subset$ (TM$\oplus$TM*)$\otimes\mathbb{C}$ que seja involutivo com respeito ao colchete de Courant e seja isotrópico, então (L,$[,]$, π) define um algebroide de Lie.

- obs1:π é a projeção $\pi : TM \oplus T^*M \mapsto TM$ e funciona como a aplicação âncora do algebroide de Lie.
- obs2:a imagem de L por e^B tal que dB=0 é um algebroide de Lie .

Proposiï¿½ï¿½o 3.13. *Seja L um sub-fibrado maximalmente isotrópico de $TM \oplus T^*M$ (ou sua complexificação), então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *L é involutivo*
- *N_{ij}(A,B,C)=0 $\forall$ A,B,C $\in$ L*
- *Jac(A,B,C)=0 $\forall$ A,B,C $\in$ L*

Definiï¿½ï¿½o 3.15. (Estruturas de Dirac) Um sub-fibrado real maximalmente isotrópico L é chamado de estrutura quase de Dirac. Se a estrutura quase de Dirac L for involutiva, então L é chamada de estrutura de dirac.

Exemplo 1:Geometria Simplética
O fibrado tangente TM é maximalmente isotrópico e involutivo com relação ao colchete de Courant, logo TM é uma estrutura de Dirac. Tome então uma 2-forma $\omega \in \Omega^2_{Cl}$(M) então:

$$e^{\omega}(\text{TM})=\{X + \iota_X \omega / X \in TM\}$$

é outro sub-fibrado maximalmente isotrópico de $TM \oplus T^*M$ e é involutivo sse dω=0 segundo a prop 3.10. Logo e^{ω}(TM) com dω=0 é uma estrutura de Dirac. Ou seja a partir de uma variedade simplética é possivel obter uma estrutura de Dirac.

Exemplo 2: Geometria de Poisson
Note que o fibrado cotangente TM* também é uma estrutura de Dirac, tome então:

$$e^{\beta}(T^*M)=\{\iota_{\xi}\beta + \xi / \xi \in T^*M\}$$

nota-se que $e^{\beta}(T^*M)$ é maximalmente isotrópico, pois e^{β} é operador ortogonal assim como e^B:

$$N_{ij}(\iota_{df}\beta + df, \iota_{dg}\beta + dg, \iota_{dh}\beta + dh) = \{\{f,g\}h\} + \{\{g,h\}f\} + \{\{h,f\}g\} \tag{3.72}$$

onde $\{f,g\}$=β(df,dg), ou seja $e^{\beta}(T^*M)$ é involutivo sse $\{,\}$ satisfaz a identidade de Jacobi. Em outras palavras com uma estrutura de Poisson é possível obter uma estrutura de Dirac.

Exemplo 3: Geometria das Folheações
Seja Δ uma distribuição de posto constante $\Delta \subset$ TM então: $\Delta\oplus$ Ann(Δ) $\subset TM \oplus T^*M$ é subfibrado maximalmente isotrópico, pelo exemplo 4 da seção 3.1.2. Nota-se que se Δ é involutivo com relação ao colchete de Lie, então
$\Delta\oplus$ Ann(Δ) é involutivo com relação ao colchete de Courant. Então com uma distribuição integrável é possível obter uma estrutura de Dirac.

Exemplo 4: Geometria Complexa
Uma estrutura quase complexa J tal que $J : TM \mapsto TM$ determina uma distribuição complexa dada pelo autoespaço de autovalor -i, $T_{0,1} \subset TM \oplus T^*M$ de J. Tome o espaço maximalmente isotrópico

$$L = T_{0,1} \oplus Ann(T_{0,1}) = T_{0,1} \oplus T^*_{1,0} \tag{3.73}$$

Nota-se que: $[X+\xi, Y+\eta]$=$[X,Y]$+$\iota_X d\eta$+$\iota_Y d\xi$ e que se L é involutivo com relação ao colchete de Courant, então $T_{0,1}$ será involutivo quanto ao colchete de Lie. E reciprocamente se $T_{0,1}$ é involutivo, então d=$\bar{\partial}$+∂, o que implica em $[X+\xi, Y+\eta]$=$[X,Y]$+$\iota_X\bar{\partial}\eta$+$\iota_Y\partial\xi$. Logo L é involutivo com relação ao colchete de Courant. Ou seja a partir de uma geometria complexa pode-se construir uma estrutura de Dirac.

3.2.6 Colchete de Courant e T^*LM

O colchete de Courant pode ser obtido de T^*LM. Será observado uma relação entre o colchete de Courant e os parênteses de Poisson em $C^\infty(T^*LM)$, devido a (18).
Seja $v+\xi$ uma seção qualquer de $\Gamma(TM \oplus T^*M)$, uma corrente (um elemento de $C^\infty(T^*LM)$) é da forma

$$J_\varepsilon(v+\xi) = \int_{S_1} d\sigma\varepsilon(v^\mu p_\mu + \xi_\mu \partial X^\mu) \tag{3.74}$$

onde $\varepsilon \in C^\infty(S^1)$ é uma função teste. Usando a forma simplética de T^*LM, pode-se calcular o parênteses de Poisson de duas correntes

$$\{J_{\varepsilon 1}(A), J_{\varepsilon 2}(B)\} = -J_{\varepsilon 1\varepsilon 2}([A,B]_c) + \int_{S^1} d\sigma(\varepsilon 1)\partial_{\varepsilon 2} - \varepsilon 2)\partial_{\varepsilon 1}) < A,B > \tag{3.75}$$

onde A,B $\in \Gamma(TM \oplus T^*M)$ e $[,]_c$ é o colchete de Courant. Do lado direito da equação (3.79) tem-se o colchete de Courant e a forma bilinear natural de $TM \oplus T^*M$. É importante enfatizar o fato que o parêntese de Poisson é associativo enquanto que o colchete de Courant não.
Considerando uma estrutura de Dirac L e tomando A,B$\in \Gamma(L)$

$$\{J_{\varepsilon 1}(A), J_{\varepsilon 2}(B)\} = -J_{\varepsilon 1\varepsilon 2}([A,B]_c|_L) \tag{3.76}$$

onde $[,]_c|_L$ é a restrição do colchete de Courant a L. Devido a isotropia de L temos que o último termo do lado direito da equação 3.59 se anula e portanto $[,]_c|_L$ é o colchete de Lie em $\Gamma(L)$. Portanto existe uma relação natural entre estruturas de Dirac e a álgebras de corrente.

3.3 Estruturas complexas generalizadas

3.3.1 Álgebra Linear das estruturas complexas generalizadas

A seção será iniciada com uma motivação para a definição de estruturas complexas generalizadas, a qual terá um forte apelo às estruturas simpléticas e complexas.

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma estrutura complexa em V é um mapa J:V$\mapsto$V tal que J^2=-I, e uma estrutura simplética em V é uma 2-forma não degenerada ω $\in \Lambda^2$V. Por outro lado pode-se ver ω como um mapa ω:V$\mapsto$V* que manda ω:v$\mapsto\iota_v\omega$, com v $\in$ V. Com isso em mente pode-se interpretar ω como um isomorfismo ω:V$\mapsto$V* satisfazendo ω^*=-ω. Uma estrutura compelxa generalizada é uma estrutura que é complexa e simplética em V$\oplus$V*

Definiï¿½ï¿½o 3.16. Uma estrutura complexa generalizada em V é um endomorfismo J em V$\oplus$V* que satisfaz duas condições: Primeiro, J é complexo, ou seja J^2=-I, e segundo J é simplético, ou seja J*=-J.

Proposiï¿½ï¿½o 3.14. *Equivalentemente, pode-se definir uma estrutura complexa generalizada em V, como uma estrutura complexa em $V \oplus V^*$, a qual é também ortogonal com relação ao produto interno natural de $V \oplus V^*$.*

Demonstração. Se $J^2 = -Id$ e $J^* = -J$, então $J^*J = I$. Reciprocamente, se $J^2 = -I$ e $J^*J = Id$, temos que $J^* = -J$ □

As próprias estruturas complexas e simpléticas convencionais são exemplos naturais de estruturas complexas generalizadas no seguinte sentido.
Dada uma estrutura complexa J em V, é possível construir uma estrutura complexa generalizada da seguinte maneira:

$$J_J = \begin{bmatrix} -J & 0 \\ 0 & J* \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

Onde J_J é um endomorfismo de V$\oplus$V*. Nota-se que J_J^2=-I e que J_J^*=-J_J, logo J_J é uma estrutura complexa generalizada. Analogamente para o caso simplético, seja a estrutura:

$$J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.78}$$

onde ω é uma forma simplética. Verifica-se que J_ω^2=-I e J_ω^*=-J_ω. E novamente J_ω é uma estrutura complexa generalizada.

Um fato importante é que uma especificação de uma estrutura complexa generalizada é equivalente a uma especificação de um espaço maximalmente isotrópico de $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$.

Proposiï¿½ï¿½o 3.15. *Uma estrutura complexa generalizada em V é equivalente a especificação de um espaço maximalmente isotrópico* $L \subset (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ *tal que* $L \cap \bar{L} = \{0\}$

Demonstração. Se J é um estrutura complexa generalizada;

- Seja L o autoespaço de autovalor +i em $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$. Portanto se x,y$\in L$, <x,y>=<Jx,Jy> pela ortogonalidade e <Jx,Jy>=<ix,iy>=-<x,y>, logo <x,y>=0, ou seja L é isotrópico.

- J é um operador real e portanto os autovalores +i e -i tem a mesma multiplicidade. Nota-se que $L \cap \overline{L} = \{0\}$, e portanto

$$\begin{aligned} dim(L \oplus \overline{L}) &= dimL + dim\overline{L} - dim(L \cap \overline{L}) \\ &= 2dimL \end{aligned} \tag{3.79}$$

  observa-se que $L \oplus \overline{L} = (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ (J é diagonalizável), ou seja L é maximalmente isotrópico.

Reciprocamente dado L maximalmente isotrópico tal que $L \cap \overline{L} = \{0\}$;

- Tem-se que $(V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C} = L \oplus \overline{L}$ pelo argumento acima, e agora faz sentido definir $J : (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C} \mapsto (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ como sendo +iv para $v \in L$ e -iv para $v \in \overline{L}$.

- Observando que $V = \{u \in (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C} : u = v + \overline{v}, v \in (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}\}$.

- Nota-se que J deixa V invariante

$$J(v + \overline{v}) = iv - i\overline{v} = (iv) + (\overline{iv}) = w + \overline{w} \tag{3.80}$$

  Então $\hat{J} := J|_{(V \oplus V^*)}$ é uma transfomação real de $(V \oplus V^*)$ que está relacionada com J via $J(X + iY) = \hat{J}(X) + i\hat{J}(Y)$ onde $X, Y \in (V \oplus V^*)$

□

Isto que dizer que o estudo das estruturas complexas generalizadas é equivalente ao estudo de espaço maximalmente isotrópicos L tal que $L \cap \bar{L} = \{0\}$, e consequentemente podemos estudar L em termos de E,ε. Todo espaço maximalmente isotrópico é da forma L=L(E,ε). Como estamos impondo que $L \cap \bar{L} = \{0\}$ para que a estrutura seja complexa generalizada, então será dada outra condição sobre L(E,ε) para que este tenha uma identificação com uma estrutura complexa generalizada.

Proposiï¿½ï¿½o 3.16. *Um espaço maximalmente isotrópico L=L(E,ε) é tal que L$\cap\bar{L}$=$\{0\}$ se e somente se E+$\bar{E}$=V$\otimes\mathbb{C}$ e ε é tal que a 2-forma ω_Δ=Im(ε)$|_{E\cap\bar{E}}$ é não degenerada em $E\cap\bar{E}$=$\Delta\otimes\mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja L tal que $L\cap\overline{L}=\{0\}$. Então temos que $(V\oplus V^*)\otimes\mathbb{C}=L\oplus\overline{L}$, logo $E+\overline{E}=V\otimes\mathbb{C}$. Agora suponha que exista $X\neq 0\in\Delta\otimes\mathbb{C}$ tal que $(\varepsilon-\overline{\varepsilon})(X)=0$, então existe $\xi\in V^*\otimes\mathbb{C}$ tal que $X+\xi\in L\cap\overline{L}$, que é uma contradição, logo ω_Δ é não degenerada.

Reciprocamente, se $E+\overline{E}=V\otimes\mathbb{C}$ e que ω_Δ é não degenerada. Seja $X+\xi\in L\cap\overline{L}$,então $\xi|_E=\varepsilon(X)$ e $\xi|_{\overline{E}}=\overline{\varepsilon}(X)$, então $(\varepsilon-\overline{\varepsilon})(X)=0$(pois $X+\xi\in L\cap\overline{L}$). Usando o que fato de que ω_Δ é não degenerado tem-se que X=0, e consequentemente $\xi|_E=\varepsilon(X)=0$ e $\xi|_{\overline{E}}=\overline{\varepsilon}(X)=0$, e portanto $L\cap\overline{L}=\{0\}$. □

Proposiï¿½ï¿½o 3.17. *Um espaço vetorial V admite uma estrutura complexa generalizada se e somente se V tem dimensão par.*

Demonstração. Em $V\oplus V^*$, existem muitos espaços maximalmente isotrópicos, como por exemplo V e V^*.[6] Portanto, existe ao menos um vetor x de $V\oplus V^*$ que seja diferente do vetor nulo tal que <x,x>=0.

Mas se existe uma estrutura complexa generalizada J em $V\oplus V^*$ tem-se que por ortogonalidade

<Jx,Jx>=<x,x>=0 e <Jx,x>=-<x,Jx>=-<Jx,x>=0

E portanto $\{x,Jx\}$ gera um espaço isotrópico ($Jx\neq\lambda x$, pois os autovalores de J são ±i e $V\oplus V^*$ é um espaço real).

Como a dimensão de qualquer espaço maximalmente isotrópico é igual à dimensão de V, se dimV=2 está feito, caso contrário existe $\hat{x}$ tal que $\{x,Jx,\hat{x}\}$ é espaço isotrópico, mas $J\hat{x}$ será isotrópico com $\{x,Jx,\hat{x}\}$ e portanto $\{x,Jx,\hat{x},J\hat{x}\}$ será isotrópico. Então podemos adicionar pares isotrópicos até o momento de atingirmos a dimensão de V. O que nos leva a conclusão que a dimensão de V precisa ser par. □

Uma vez que uma estrutura complexa generalizada tem uma identificação com um espaço maximalmente isotrópico L tal que $L\cap\bar{L}$=$\{0\}$, tem-se que todo espaço maximalmente isotrópico tem uma identificação com um espinor puro. Podemos nos perguntar: o que um espinor puro precisa satisfazer para que ele tenha uma identificação com uma estrutura complexa generalizada.

Proposiï¿½ï¿½o 3.18. *Todo espaço maximalmente isotrópico em V$\oplus$V* corresponde a um espinor puro gerado por:*

$$\phi_L=exp(B+i\omega)\Omega,$$

onde B,ω são 2-formas reais e Ω=$\theta_1\wedge\theta_2\wedge\ldots\wedge\theta_k$ para algumas 1-formas linearmente independentes $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$. O inteiro k é chamado de tipo do espaço maximalmente isotrópico.

[6]Pode-se obter muitos outros aplicando operadores ortgonais, pois estes preservam a forma bilinear canônica e a dimensão do espaço.

O espaço maximalmente isotrópico se identifica com uma estrutura complexa generalizada sse $\omega^{n-k}\wedge\Omega\wedge\bar{\Omega}\neq 0$

Demonstração. Usando a proposição 3.2 e a versão complexa do Teorema 3.1 tem-se que $L\cap\overline{L}=\{0\}$ sse $(\varphi_L,\overline{\varphi}_L)\neq 0$,logo

$$\begin{aligned} 0 \neq (e^{B+i\omega}\Omega, e^{B-i\omega}\overline{\Omega}) &= (e^{2i\omega}\Omega,\overline{\Omega}) \\ &= \frac{(-1)^{2n-k}(2i)^{n-k}}{(n-k)!}\omega^{n-k}\wedge\Omega\wedge\overline{\Omega} \end{aligned} \tag{3.81}$$

o que prova o resultado. □

Exemplo 1:Tipo Simplético (k=0)
A estrutura complexa generalizada determinada por uma forma simplética ω é

$$J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

que determina uma espaço maximalmente isotrópico.

$$L = \{X - i\omega(X)/X \in V\otimes\mathbb{C}\} \tag{3.83}$$

que por sua vez determina o espinor puro:

$$\phi_L = e^{i\omega} \tag{3.84}$$

Sabe-se que ao aplicar o campo B em L, obtem-se outro espaço maximalmente isotrópico e consequentemente outra estrutura complexa generalizada e outro espinor puro do tipo $k=0$.

$$e^{-B}J_\omega e^{B} = \begin{bmatrix} -\omega^{-1}B & -\omega^{-1} \\ \omega + B\omega^{-1}B & B\omega^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

$$e^{-B}(L) = \{X - (B+i\omega)(X)/X \in V\otimes\mathbb{C}\} \tag{3.86}$$

$$\phi_{e^{-B}L} = e^{B+i\omega} \tag{3.87}$$

Nota-se que $\phi_{e^{-B}L} = e^{B+i\omega}$ é o espinor puro geral do tipo k=0, logo pode-se concluir que toda estrutura complexa generalizada do tipo k=0 é imagem do campo B sobre a estrutura simplética.

Observa-se que k=dimAnn(E), cuja dimensão máxima é n=dimV, pois dimV=dimE+dimAnn(E).

Exemplo 2: Tipo complexo (k=n)
A estrutura complexa generalizada determinada pela estrutura complexa J é:

$$J_J = \begin{bmatrix} -J & 0 \\ 0 & J* \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

que determina o espaço maximalmente isotrópico.

$$L = V_{0,1}\oplus V^*_{1,0} \tag{3.89}$$

onde $V_{1,0} = \overline{V_{0,1}}$ é auto-espaço de J, e o espinor puro correspondente é :

$$\phi_L = \Omega^{n,0} \tag{3.90}$$

onde $\Omega^{n,0}$ é o gerador das (n,0)-formas para o espaço complexo de dimensão n (V,J).

3.3.2 Estruturas quase complexas generalizadas

Na secção anterior foi definido a estrutura complexa generalizada em $V \oplus V^*$, e agora é necessário transportar essa noção para variedades. Para que o processo ocorra, ele será dividido em 2 partes: A primeira é a noção algébrica das estruturas generalizadas, e a segunda é a integrabilidade da estrutura. O ponto é que nessa subseção serão definidas as estruturas complexas em uma variedade M, ou melhor na soma direta do fibrado tangente com o fibrado cotangente $TM \oplus T^*M$.

Definiï¿½ï¿½o 3.17. Uma estrutura quase complexa generalizada em uma variedade M de dimensão 2n é equivalente a cada uma das seguintes definições.

- Uma estrutura quase complexa J em $TM \oplus T^*M$ ortogonal à forma bilinear canonica em $TM \oplus T^*M$, ou seja um mapa $J : TM \oplus T^*M \mapsto TM \oplus T^*M$ tal que J^2=-I e que seja ortogonal com relação ao produto interno <X+ξ,Y+η>=$\frac{1}{2}(\eta$(X)+ξ(Y))
- Um sub-fibrado maximalmente isotrópico L $\subset$ $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ tal que $L \cap \overline{L}$=$\{0\}$
- Um sub-fibrado de linha de espinor puro U $\subset$ $\Lambda^\bullet$TM*$\otimes\mathbb{C}$, chamado de fibrado de linha canônico, satisfazendo $(\phi, \overline{\phi})$ $\neq$0 para cada ponto x $\in$ M para qualquer gerador $\phi \in U_x$.

Obs: A existência de estruturas complexas generalizadas em uma variedade M se deve a fatores topológicos, os quais não serão mencionados nesta dissertação.

3.3.3 Condição Courant de integrabilidade

Sabe-se que a condição de integrabilidade de uma forma simplética ω é dω=0 e que para uma estrutura complexa J é $[T_{1,0}, T_{1,0}]$$\subset$$T_{1,0}$. Será mostrado que a condição dada abaixo irá interpolar as condições de integrabilidade complexas e simpléticas.

Definiï¿½ï¿½o 3.18. A estrutura quase complexa generalizada J é dita integrável quando o autoespaço L$\subset$ $TM \oplus T^*M$ de autovalor +i é involutivo com respeito ao colchete de Courant. Em outras palavras, uma estrutura quase complexa integrável é uma estrutura de Dirac complexa L tal que $L \cap \overline{L}$=$\{0\}$. Uma estrutura quase complexa integrável é chamada de uma estrutura complexa generalizada.

Nota-se que se o sub fibrado L $\subset$ $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$ é uma estrutura complexa generalizada (segunda a definição acima), então $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$=$L \oplus \overline{L}$, e portanto $E = \pi_{TM}(L)$ satisfaz as hipóteses da proposição 3.4. Tomando dimΔ constante teremos pela proposição 3.5 uma estrutura complexa transversa perto de um ponto regular de M dada por $\Delta$$\otimes$$\mathbb{C}$=$E \cap \overline{E}$.

Proposiï¿½ï¿½o 3.19. *Seja* $E \subset TM \otimes \mathbb{C}$ *um sub-fibrado e* $\varepsilon \in C^{\infty}(\Lambda^2 E^*)$. *Então o espaço maximalmente isotrópico* $L(E,\varepsilon)$ *define uma estrutura complexa generalizada se e somente se* E *é involutivo (com relação ao colchete de Courant) e* $d_E \varepsilon = 0$, *onde* $d_E : C^{\infty}(\Lambda^k E^*) \mapsto C^{\infty}(\Lambda^k E^*)$ *é definido por* $i^* \circ d = d_E \circ i^*$.

Observa-se que J_J e J_ω são casos de estruturas complexas generelizadas, pois ambos são estruturas quase complexas, ou seja satisfazem $J^2 = Id$ e $J^* = -J$. E também satisfazem a condição de integrabilidade, pois no caso complexo se $J : TM \mapsto TM$ é integravél, então $J_J : TM \oplus T^*M \mapsto TM \oplus T^*M$ também será integravél (exemplo 4) e no caso simplético podemos observar o exemplo 1 ou apenas usar a proposição e notar que $d\omega = 0$.

Agora será dado um exemplo de uma estrutura complexa generalizada que não é nem simplética, nem é complexo.

3.3.4 Interpolação entre estrutura complexa e simplética

Nesta secção será mostrado que é possível interpolar a geometria complexa com a simplética, desde de que a variedade M seja do tipo Hiper-Kähler. E portanto temos exemplos de uma estrutura complexa generalizada que é uma estrutura intermdiária entre as estruturas complexas e simpléticas.

Se M é do tipo Kähler, então M está equipada com uma estrutura complexa J e uma simplética ω do tipo (1,1), ou seja $\omega J = -J^*\omega$. E isto implica que:

$$\begin{bmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

em outras palavras, as estruturas complexas generalizadas correspondentes comutam.
Mas se supusermos que M é hiper-Kähler, isto que dizer que M tem 3 estruturas complexas tipo kähler I,J,K, as quais satisfazem a álgebra de quatérnios $IJ = K = -JI$ e que estão associados a 3 estruturas simpléticas $\omega_J, \omega_I, \omega_K$, as quaisl satisfazem $\omega_J J = -J^*\omega_J$,$\omega_K K = -K^*\omega_K$,$\omega_I I = -I^*\omega_I$. Por outro lado como $IJ = -JI$, então $\omega_J I = -I^*\omega_J$ e isto implica que as estruturas generalizadas J_{ω_J} e J_I anti-comutam. Portanto podemos gerar uma familia de estruturas quase complexas generalizadas devido à fórmula abaixo:

$$J_t = sen(tJ_I) + cos(tJ_{\omega_J}), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{3.92}$$

Proposiï¿½ï¿½o 3.20. *Seja M uma variedade Hiper-Kähler, então a estrutura complexa generalizada* $J_t = sen(tJ_I) + cos(tJ_{\omega_J})$ *é integrável* $\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *Portanto, a fórmula acima representa uma familia de estruturas complexas generalizadas que são uma interpolação de uma estrutura simplética e uma estrutura complexa.*

3.3.5 Teorema de Darboux generalizado

Nesta seção será enunciado um teorema que em certo sentido generaliza o teorema de Darboux e Newlander-Niremberg. E portanto temos uma visão mais clara de uma variedade que admite uma estrutura complexa generalizada, pois esta variedade pode ser vista localmente (em torno de pontos regulares) como um produto de um $\mathbb{C}^n$ e um $\mathbb{R}^{2k}$, que admite uma estrutura simplética.

Teorema 3.3. *(***Teorema de Darboux generalizado***)*
Em torno de pontos regulares de uma variedade complexa generalizada (que admite uma estrutura complexa generalizada) existe uma vizinhança que é equivalente via difeomorfismo e transformações do campo B, a um produto de um aberto de $\mathbb{C}^k$ e um conjunto aberto do espaço simplético canônico $(\mathbb{R}^{2n-2k}, \omega_0)$.

CAPÍTULO 4

Modelos sigmas supersimetricos gerais

No capítulo 2 foi construído o modelo sigma supersimétrico (2,2), o qual é invariante sobre paridade. No entanto, o modelo pode ser generalizado ignorando essa simetria, e esta abordagem já foi investigada por Gates, Hull e Rocek em (5). Esses novos modelos envolvem o campo B, e são unicamente definidos em variedades alvos que admitam uma estrutura bi-hermitiana, que serão equivalentes à estrutura Kähler generalizada. Neste capítulo serão reproduzidos os resultado de (5).

4.1 Modelos sigma (2,2) com o campo B

Uma vez que a simetria de paridade é quebrada, é permitido fazer duas modificações. A primeira é permitir um tensor anti-simétrico na ação (2.21):

$$S(\Phi) = \int d^2\sigma d\theta^+ d\theta^- (g_{ij} + b_{ij}) D_+\Phi^i D_-\Phi^j \tag{4.1}$$

onde a parte bosônica da integral é tomada sobre a folha-mundo Σ, a qual é igual a um cilindro. O termo que envolve b quebra a paridade, pois ao integrar sobre os Θ's obtém-se o termo $b_{ij}\partial_+\varphi^i\partial_-\varphi^j$. Nota-se que pela anti-simetria de b tem-se que este termo é proporcional ao termo $b_{ij}\partial_\tau\varphi^i\partial_\sigma\varphi^j$. Nota-se que o último termo não é invariante sobre a transformação de paridade $(\tau,\sigma)\mapsto(\tau,-\sigma)$.

Para definir (4.1) globalmente, não é necessário definir a 2-forma b globalmente em M. A única restrição em b é que a 3-forma H=db seja globalmente definida, e que $\int H/2\pi$ seja inteiro.

A proxima mudança é na forma da segunda supersimetria. No capítulo 2, foi visto que a segunda supersimetria era dada por:

$$\delta_\varepsilon\Phi^i = I^i_j\varepsilon^+ D_+\Phi^j + I^i_j\varepsilon^- D_-\Phi^j \tag{4.2}$$

onde I é uma estrutura complexa. A paridade, a qual os espinores permutam as suas componentes $\pm$, força que as duas estruturas complexas sejam iguais. Pode-se generalizar as estruturas citadas para:

$$\delta_\varepsilon\Phi^i = I^i_{+j}\varepsilon^+ D_+\Phi^j + I^i_{-j}\varepsilon^- D_-\Phi^j \tag{4.3}$$

com I± não necessariamente iguais. Precisa-se investigar se (4.2) satisfaz a (2,2)-superalgebra e deixa a ação (4.1) invariante. Observa-se,no entanto, que primeiro é necessário procurar por supersimetria on-shell. .

A equação de movimento pode ser calculada usando o princípio de pontos estacionários. Sobre uma pequena variação $\delta\Phi^i$ tem-se que a ação varia de acordo com:

$$\delta S = \int ((g_{ij,k} + bij,k)D_+\Phi^i D_-\Phi^j \delta\Phi^k + (g_{ij} + b_{ij})(D_+\delta\Phi^i D_-\Phi^j + D_+\Phi^i D_-\delta\Phi^j)) \quad (4.4)$$

onde foi ocultada a medida da integração $d^2\sigma d\theta^+ d\theta^-$. Usando a identidade $\int D_+(...)$=0, que é consequência de:

$$\int d\theta \frac{d}{d\theta} = 0 \quad (4.5)$$

observa-se que não existem termos de fronteiras nas integrais bosonicas ao assumir que o os campos se anulam no infinito. Nota-se que D± anti-comuta com as outras quantidades fermiônicas, então tem-se que:

$$\begin{aligned}\delta S = &\int ((g_{ij,k} + b_{ij,k})D_+\Phi^i D_-\Phi^j \delta\Phi^k - (g_{ij,k} + b_{ij,k})D_+\Phi^k \delta\Phi^i D_-\Phi^j \\ &- (g_{ij} + b_{ij})\delta\Phi^i D_+ D_-\Phi^j + (g_{ij,k} + b_{ij,k})D_-\Phi^k D_+\Phi^i \delta\Phi^j + (g_{ij} + b_{ij})D_+ D_-\Phi^i \delta\Phi^j \\ = &\int ((-2\Gamma_{ij,k} + H_{ij,k})D_+\Phi^i D_-\Phi^j + 2g_{jk} D_- D_+\Phi^j)\delta\Phi^k\end{aligned} \quad (4.6)$$

Para que isto seja verdade para qualquer variação infinitessimal $\delta\Phi^i$,Φ deve satisfazer a equação de movimento 4.7:

$$D_- D_+\Phi^k - \Gamma^{-k}_{ij} D_+\Phi^i D_-\Phi^j = 0 \quad (4.7)$$

onde $\Gamma^{\pm}_{jk} = \Gamma^i_{jk} \pm \frac{1}{2} g^{ri} H_{rjk}$ são simbolos de Christoffel para as conexões do tipo $\nabla^{\pm} = \nabla \pm \frac{1}{2} g^{-1} H$, e H=db. Convenciou-se também que n-formas são escritas como $\alpha = \frac{1}{n!}\alpha_{i1..in} dx^{i1} \wedge dx^{i2} \wedge .... \wedge dx^{in}$, então $H_{ijk} = b_{ij,k} + b_{ki,j} + b_{jk,i}$

Focando nos vínculos em $I_\pm$. Observa-se que $I^i_{\pm j}$ forma componentes de um tensor. Em outras palavras $I_\pm$ são seções em $TM \otimes T^*M$. Isso segue de (4.3) desde de que $\delta_\varepsilon\Phi$ e $D_\pm\Phi^i$ tenha o mesmo comportamento sob as mudanças de coordenadas. Agora será verificado se (4.2) satisfaz a superalgebra (2,2). Redefinindo as cargas supersimetricas $Q^1_\pm$ e $Q^2_\pm$ que são definidas via:

$$\delta^a_\varepsilon = \varepsilon Q^a, a = 1,2 \quad (4.8)$$

Os rótulos das simetrias são δ^1 e δ^2 para que seja possível distinguir as duas simetrias. Nota-se que em (4.8) os cálculos atuam de maneira semelhante às cargas Q^a que são implicitamente definidas em Φ^i. Isto implica que Q^a atua via regra da cadeia em qualquer função de Φ:

$$Q^a(f(\Phi)) = \frac{\partial f}{\partial \Phi^i} Q^a \Phi^i \tag{4.9}$$

E portanto temos a identidade:

$$\begin{aligned}\left[\delta^a_{\varepsilon_1}, \delta^b_{\varepsilon_2}\right] \Phi &= \delta^a_{\varepsilon 1}(\varepsilon_2 Q^b \Phi) - \delta^b_{\varepsilon 2}(\varepsilon_1 Q^a \Phi) \\ &= \varepsilon_2 Q^b(\delta^a_{\varepsilon 1})\Phi - \varepsilon_1 Q^a(\delta^b_{\varepsilon 2})\Phi \\ &= \varepsilon_2 Q^b(\varepsilon_1 Q^a \Phi) - \varepsilon_1 Q^a(\varepsilon_2 Q^b \Phi) \\ &= \varepsilon_1^\alpha \varepsilon_2^\beta \{Q^a_\alpha, Q^b_\beta\}\Phi\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde mais uma vez ε e Q foram forçados a serem objetos fermiônicos, portanto eles anti-comutam. De acordo com as equações (2.12) e (2.13) podemos escrever (4.10) como:

$$\left[\delta^a_{\varepsilon_1}, \delta^b_{\varepsilon_2}\right] \Phi^i = -2i\delta^{ab}(\varepsilon_1^+ \varepsilon_2^+ \partial_+ + \varepsilon_1^- \varepsilon_2^- \partial_-)\Phi^i \tag{4.11}$$

e isso impõem vínculos do lado direito e esquerdo. Isto é bem conhecido para a=b=1 e isso segue da definição de Q^1 no capítulo 2. Para a=b=2 nos temos:

$$\begin{aligned}\left[\delta^a_{\varepsilon_1}, \delta^b_{\varepsilon_2}\right] \Phi^i &= \delta^2_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2^+ I^i_{+j} D_+ \Phi^j + \varepsilon^- I^i_{-j} D_- \Phi^j) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \varepsilon_2^+ I^i_{+j,k}(\varepsilon_1^+ I^k_{+l} D_+ \Phi^l + \varepsilon_1^- I^k_{-l} D_- \Phi^l) D_+ \Phi^j + \varepsilon_2^+ I^i_{+j} D_+(\varepsilon_1^+ I^j_{+l} D_+ \Phi^j + \varepsilon_1^- I^j_{-l} D_- \Phi^l) \\ &= +\varepsilon_2^- I^i_{-j,k}(\varepsilon_1^+ I^k_{+l} D_+ \Phi^l + \varepsilon_1^- I^k_{-l} D_- \Phi^l) D_- \Phi^j + \varepsilon_2^- I^i_{-j} D_-(\varepsilon_1^+ I^j_{+l} D_+ \Phi^l + \varepsilon_1^- I^j_{-l} D_- \Phi^l) \\ &- (1 \leftrightarrow 2) \\ &= 2\varepsilon_1^+ \varepsilon_2^+ ((I^i_{+j,k} I^k_{+l} + I^i_{+k} I^k_{+l,j}) D_+ \Phi^l + I^i_{+j} I^j_{+l} D_+^2 \Phi^l) \\ &+ (\varepsilon_1^+ \varepsilon_2^- + \varepsilon_1^- \varepsilon_2^+)((I^i_{+j} I^j_{-l} - I^i_{-j} I^j_{+l}) D_+ D_- \Phi^l \\ &+ (I^i_{-j,k} I^k_{+l} + I^i_{-k} I^k_{+l,j} - I^i_{+l,k} I^k_{-j} - I^i_{+k} I^k_{-j,l}) D_- \Phi^j D_+ \Phi^l) \\ &+ 2\varepsilon_1^- \varepsilon_2^- ((I^i_{-j,k} I^k_{-l} + I^i_{-k} I^k_{-l,j}) D_- \Phi^j D_- \Phi^l + I^i_{-j} I^j_{-l} D_-^2 \Phi^l)\end{aligned} \tag{4.12}$$

Usando que D_+^2=i∂_+,e a definição do tensor de Nijenhuis.

$$N^\pm(X,Y) := N_{I_\pm}(X,Y) = [X,Y] - [I_\pm X, I_\pm Y] + I_\pm [I_\pm X, Y] + I_\pm [X, I_\pm Y] \tag{4.13}$$

em componentes

$$N^{\pm k}_{ij} = I^l_{\pm i} I^k_{\pm j,l} + I^k_{\pm l} I^l_{\pm i,j} - (i \leftrightarrow j) \tag{4.14}$$

pode-se escrever (4.7)

$$
\begin{aligned}
\left[\delta^2_{\varepsilon_1},\delta^2_{\varepsilon_2}\right]\Phi^i = {} & \varepsilon_1^+\varepsilon_2^+(2iI^i_{+j}I^j_{+l}\partial_+\Phi^l - N^{+i}_{jl}D_+\Phi^jD_+\Phi^l) \\
& +\varepsilon_1^-\varepsilon_2^-(2iI^i_{-j}I^j_{-l}\partial_-\Phi^l - N^{-i}_{jl}D_-\Phi^jD_-\Phi^l) \\
& +(\varepsilon_1^+\varepsilon_2^- +\varepsilon_1^-\varepsilon_2^+((I^i_{+j}I^j_{-l} - I^i_{-j}I^j_{+l})D_+D_-\Phi^l + \\
& (I^i_{-j,k}I^k_{+l} + I^i_{-k}I^k_{+l,j} - I^i_{+l,k}I^k_{-j} - I^i_{+k}I^k_{-j,l})D_-\Phi^jD_+\Phi^l)
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

A última expressão não é muito promissora, mas ela ajuda na interpretação da equação (4.7), pois podemos reescrevê-la em termos de $D_+D_-\Phi^l$, e pode-se substituir as derivadas pelas derivadas covariantes usando:

$$
I^i_{\pm j,k} = \nabla^\pm_k I^i_{\pm j} - \Gamma^{\pm i}_{kr} I^r_{\pm j} + \Gamma^{\pm r}_{kr} I^i_{\pm r} \tag{4.16}
$$

Ficará claro em breve o motivo de ∇^+ ser usado para I_+ e ∇_- para I_-

$$
\begin{aligned}
\left[\delta^2_{\varepsilon_1},\delta^2_{\varepsilon_2}\right]\Phi^i = {} & \varepsilon_1^+\varepsilon_2^+(2iI^i_{+j}I^j_{+l}\partial_+\Phi^l - N^{+i}_{jl}D_+\Phi^jD_+\Phi^l) \\
& +\varepsilon_1^-\varepsilon_2^-(2iI^i_{-j}I^j_{-l}\partial_-\Phi^l - N^{-i}_{jl}D_-\Phi^jD_-\Phi^l) \\
& +(\varepsilon_1^+\varepsilon_2^- +\varepsilon_1^-\varepsilon_2^+)\bullet \\
& \left[(\nabla^-_k I^i_{-j})I^k_{+l} - (\nabla^+_k I^i_{+l})I^k)_{-j} + I^i_{-k}(\nabla^+_j I^k_{+l})) - I^i_{+k}(\nabla^-_l I^k_{-j}))\right]\bullet D_-\Phi^jD_+\Phi^l.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

e a equação acima deve ser igual a (4.11) para ε_1 e ε_2 quaisquer, portanto obtem-se as seguintes condições sobre I.

- $I^2_\pm$=-1, então $I_\pm$ deve ser uma estrutura quase complexa em M. Isto impõe restrições topológicas em M, (M precisa ter dimensão par e ser orientável)
- $N^{\pm,}$=0, e isso implica que $I_\pm$ sejam ambos integráveis
- $(\nabla^-_k I^i_{-j})I^k_{+l} - (\nabla^+_k I^i_{+l})I^k)_{-j} + I^i_{-k}(\nabla^+_j I^k_{+l})) - I^i_{+k}(\nabla^-_l I^k_{-j}))$=0. Esta equação não parece impor uma restrinção clara para a geometria de M, mas a motivação desse ultimo vinculo ficará claro em breve.

O cálculo da álgebra completa não foi completado ainda, pois por exemplo, não verificamos o vínculo $\left[\delta^1_{\varepsilon_1},\delta^2_{\varepsilon_2}\right]$=0. Para deixar os cálculos mais curtos tomou-se $\varepsilon_1^- = \varepsilon_2^- = 0$, o caso geral é similar.

$$
\begin{aligned}
\left[\delta^1_{\varepsilon_1},\delta^2_{\varepsilon_2}\right]\Phi^i &= \delta^1_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2^+ I^i_{+j}D_+\Phi^j) - \delta^2_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1^+ Q_+\Phi^i) \\
&= \varepsilon_2^+ I^i_{+j,k}(\varepsilon_1^+ Q_+\Phi^i)D_+\Phi^j + \varepsilon_2^+ I^i_{+j}D_+(\varepsilon_1^+ Q_+\Phi^i) - \varepsilon_1^+ Q_+(\varepsilon_2^+ I^i_{+j}D_+\Phi^j) \\
&= \varepsilon_1^+\varepsilon_2^+(-I^i_{+j,k}Q_+\Phi^kD_+\Phi^j + I^i_{+j}D_+Q_+\Phi^j + I^i_{+j,k}Q_+\Phi^kD_+\Phi^j + I^i_{+j}Q_+D_+\Phi^j) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

desde de que $\{Q_+, D_+\} = 0$. Portanto as duas supersimetrias comutam, sem impor nada sobre o espaço alvo.

Além das relações algebricas, a ação deve ser invariante sobre as simetrias δ^2_ε, onde de novo, tomou-se ε^-=0 por razões esteticas. Os comutadores foram calculados em campos on shell, mas desta vez não será feito isso. De fato, os campos on shell são pela definição aqueles que a ação fica invariante sobre qualquer variação dele, então observando em particular a variação supersimetrica, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\delta^2_\varepsilon S = &\int ((g_{ij,k} + b_{ij,k})\varepsilon^+ I^k_{+l} D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j \\
&+ (g_{ij} + b_{ij}) D_+\Phi^i D_-(\varepsilon^+ I^j_{+k} D_+\Phi^k) \\
= &\int \varepsilon^+(-(g_{ij} + b_{ij}) I^k_{+l} + (g_{ki} + b_{kj}) I^k_{+j}) D^2_+\Phi^k D_-\Phi^j \\
&+ ((g_{ij,k} + b_{ij,k}) I^k_{+l} - (g_{kj} + b_{kj}) I^k_{+i,l} + (g_{ik} + b_{ik}) I^k_{+l,j} - (g_{ik,l} + b_{ik,l}) I^k_{+j} \\
&- (g_{ik} + b_{ik}) I^k_{+j,l}) D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

que deve se anular para todo ε^+ e para todo supercampo Φ^i. Na segunda igualdade foi usado a integração parcial. Observa-se que o termo $D^2_+\Phi^k D_-\Phi^j$=$i\partial_+\Phi^k D_-\Phi^j$ é independente do termo $D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j$, ou seja pode-se obter super campos para os quais a primeira expressão é 0, enquanto que a segunda não, e vice versa. Portanto as duas expressões em em (4.1.9) são separadamente 0. O primeiro termo dando 0 por anti-simetria:

$$(g + b)(I_+ v, w) + (g + b)(v, I_+ w) = 0 \tag{4.20}$$

Assim no segundo termo (4.1.9), rescrevendo as derivadas de g em termos dos simbolos de Christoffel e as derivadas de I_+ em termos das derivadas covariantes (com respeito a conexão de Levi-Civita sem torção) muitos dos termos se cancelam ou se anulam, porque eles estão contraídos com o termo $D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j$ o qual é anti simétrico em l e em i. Logo, depois da contração o segundo termo pode ser escrito como.

$$\begin{aligned}
0 &= (g_{ik}\nabla_j I^k_{+l} + b_{ij,k} I^k_{+l} - \partial_l(b_{ik} I^k_{+l}) - b_{kj} I^k_{+i,l}) D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j \\
&= (g_{ik}\nabla_j I^k_{+l} + (b_{ij,k} + b_{jk,i} + b_{ki,j}) I^k_{+l}) D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j \\
&= (g_{ik}\nabla_j I^k_{+l} + (\frac{1}{2} H_{ijk}) I^k_{+l} - (\frac{1}{2} H_{ljk}) I^k_{+i}) D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j \\
&= g_{ik}(\nabla_j I^k_{+l} + (\frac{1}{2} H^k_{jr}) I^k_{+l} - (\frac{1}{2} H^r_{jl}) I^k_{+i}) D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j \\
&= g_{ik}\nabla_j I^k_{+l} D_+\Phi^l D_+\Phi^i D_-\Phi^j
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Na segunda linha foi usado a identidade $b_{ik} I^k_{+j} = b_{jk} I^k_{+i}$, e na terceira linha foi usado a derivada covariante de I_+

$$\nabla^+_j I^k_{+l} = I^k_{+l,j} + \Gamma^{+k}_{jr} I^r_{+l} - \Gamma^{+r}_{jl} I^k_{+r} = \nabla^+_j I^k_{+l} + (\frac{1}{2} H^k_{jr}) I^r_{+l} - (\frac{1}{2} H^r_{jl}) I^k_{+r} \tag{4.22}$$

junto com a identidade

$$H_{ljk}I^k_{+i} = g_{sk}H^s_{lj}I^k_{+i} = -g_{ik}H^s_{lj}I^k_{+s} = g_{ik}H^s_{jl}I^k_{+s} \tag{4.23}$$

usando a anti-simétria de I_+ com respeito a g. Portanto, para a ação ser invariante, tem-se que

$$\nabla^+ I_+ = 0 \tag{4.24}$$

Um cálculo similar pode ser feito para I_-, mas pode-se extrair o resultado de (4.1). Comutando $D_+\Phi^i$ com D^j_Φ na ação e trocando de indices i com j, observa-se que a ação ganha um sinal negativo e b vai para -b. Então δ^2_εS é dada por (4.19) para ε^+=0 com -b ao invés de b e + ao invés de -, então o vínculo total é:

$$\nabla^\pm I_\pm = 0 \tag{4.25}$$

Nota-se que (4.25) implica na terceira condição para que a álgebra (2,2) seja satisfeita. Logo abaixo os resultados até aqui obtidos estarão sumarizados em um teorema.

Teorema 4.1. *(5) Seja (M,g) uma variedade Riemanniana equipada com uma 2-forma b, tal que db=H. O modelo sigma supersimetrico (1,1) em uma folha mundo Σ (um cilindro) com espaço alvo M, admite uma extensão para uma supersimtria on-shell (2,2) se e somente se M admite duas estruturas complexas integráveis $I_\pm$ que satisfazem as seguientes relações:*

- $g(I_\pm v, w) = -g(v, I_\pm w)$
- $b(I_\pm v, w) = -b(v, I_\pm w)$
- $\nabla^\pm I_\pm = 0$

4.2 Geometria Kähler Generalizada

A ideia central desta seção é mostrar que a estrutura requisitada para a hipótese do teorema 4.1 é equivalente a uma estrutura de uma geometria Kähler generalizada. O ponto central é que ao extender a supersimetria de (1,1) para (2,2) sem um campo B no background, o espaço alvo deve ser necessáriamente uma variedade kähler. Mas a partir do momento que existe um campo B no background, a geometria do espaço alvo deve ser Kähler generalizada, e é exatamente esta estrutura geométria que será estudada nesta seção.

4.2.1 Definições

Definiï¿½ï¿½o 4.1. Uma métrica generalizada em uma variedade suave M é um mapa $G : TM \oplus T^*M \mapsto TM \oplus T^*M$ tal que $G^* = G$, G^2= I e G é positivo definido[1].

[1] A forma bilinear definida por $\mathscr{G}$(v,w):=<v,Gw> é positiva definida em $TM \oplus T^*M$.

Definiï¿½ï¿½o 4.2. Uma estrutura Kähler generalizada é um par (J_1, J_2) de estruturas complexas generalizadas que comutam,e tal que G=-$J_1 J_2$ é uma métrica generalizada.

Exemplo 1: Geometria Kähler Seja (g, J, ω) uma estrutura Kähler, ou seja g é uma métrica Riemanniana, J é uma estrutura complexa, e ω é uma forma simplética tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[d, "-J"] \arrow[dr, "g"] & \\ TM \arrow[r, "\omega"] & T^*M \end{tikzcd}$$

Sejam J_J e J_ω as formas generalizadas geradas a partir das estruturas complexas e simpléticas

$$J_J = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -J* \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

$$J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Observa-se que J_J e J_ω comutam, e que

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

é uma metrica generalizada em $TM \oplus T^*M$. Então a geometria Kähler está contida na geometria kähler generalizada.

4.2.2 Torção e métrica generalizada

Dada a estrutura Kähler generalizada (J_1, J_2) tem-se que a forma geral da métrica generalizada é:

$$G = \begin{bmatrix} A & g^{-1} \\ \sigma & A^* \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

onde g e σ são métricas Riemannianas na variedade e A é endomorfismo de TM. A condição $G^2 = I$ implica que A é anti-simétrico com respeito a ambas as métricas Riemannianas, e definindo $b = -gA$, pode-se escrever G como:

$$G = \begin{bmatrix} -g^{-1}b & g^{-1} \\ g - bg^{-1}b & bg-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ b & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -b & I \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Proposiï¿½ï¿½o 4.1. *$C_\pm$ é o gráfico da aplicação $b \pm g : TM \mapsto T^*M$,*
ou seja $C_\pm = \{X + (b \pm g)(X)/X \in TM\}$.

Definiï¿½ï¿½o 4.3. A torção de uma estrutura kähler generalizada é uma 3-forma h=db.

4.2.3 Integrabilidade de Courant

As estruturas Kähler generalizadas são descritas através de sub-fibrados de $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$. Pois, nota-se que J_1 e J_2 decompõem $(TM \oplus T*M) \otimes \mathbb{C}$ em seus auto-espaços:

$$(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C} = L_1 \oplus \overline{L_1} = L_2 \oplus \overline{L_2} \tag{4.31}$$

Desde que J_1 e J_2 comutem, é possível decompor simultaneamente $(TM \oplus T*M) \otimes \mathbb{C}$. Denotando $L_1^{\pm}$ pelos auto-espaços $\pm$i de J_2, logo.

$$(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C} = L_1^+ \oplus L_1^- \oplus \overline{L_1^+} \oplus \overline{L_1^-}, \tag{4.32}$$

onde $L_2 = L_1^+ \oplus \overline{L_1^-}$. Sejam $C_{\pm}$ os auto espaços de G, os quais têm auto valores $\pm$ 1. Observa-se também que $C_{\pm} \otimes \mathbb{C} = L_1^{\pm} \oplus \overline{L_1^{\pm}}$

Definiï¿½ï¿½o 4.4. Seja L uma algebroide de Lie complexo com o colchete $[,]$, e a diferencial d_L:$C^\infty(\Lambda^k L^*) \mapsto C^\infty(\Lambda^{k+1} L^*)$ (definição 3.10). Se L=$L^+ + L^-$ então pode-se definir $\Lambda^{p,q}(L^*) = \Lambda^p(L^+)^* \otimes \Lambda^q(L^-)^*$, assim como os operadores

$$\begin{aligned} \partial_L^+ &= \pi_{p+1,q} \circ d_L : C^\infty(\Lambda^{p,q} L^*) \mapsto C^\infty(\Lambda^{p+1,q} L^*) \\ \partial_L^- &= \pi_{p,q+1} \circ d_L : C^\infty(\Lambda^{p,q} L^*) \mapsto C^\infty(\Lambda^{p,q+1} L^*) \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde $\pi_{p,q}$ é a projeção $\Lambda^{p+q} L^* \mapsto \Lambda^{p,q} L^*$. Se $L^{\pm}$ é fechado com relação ao colchete de Lie, então teremos a igualdade

$$d_L = \partial_L^+ + \partial_L^- \tag{4.34}$$

Proposiï¿½ï¿½o 4.2. *A estrutura Kähler generalizada na variedade 2n-dimensional é equivalente a especificação de dois sub-fibrados complexos L_1^+ e L_1^- em $(TM \oplus T*M) \otimes \mathbb{C}$ satisfazendo:*

- *$L_1^{\pm}$ são isotrópicos*
- *$L_1^+ \perp L_1^-$ e $L_1^+ \perp \overline{L_1^-}$, onde $\perp$ indica ortogonalidade com respeito ao produto interno*
- *$L_1^{\pm}$ é $\pm$ definido, no sentido de que*
  $$\pm < x, \bar{x} > > 0 \; \forall \; x \in L_1^{\pm}, \; x \neq 0$$

com $L_1^{\pm}$ integráveis com relação ao colchete de Courant e o mesmo para $L_1^+ \oplus L_1^-$

4.2.4 Relações com a geometria bi-hermitiana

Nota-se que C_+ é positivo definido e que TM é nulo, portanto a projeção $\pi : TM \oplus TM^* \mapsto TM$ induz os isomorfismos

$$\pi : C_{\pm} \mapsto TM \tag{4.35}$$

com os isomorfismos (4.35) é possível de maneira natural transportar a estrutura Kähler generalizada de $TM \oplus T^*M$ para TM, pois dada uma métrica generalizada G, obtém-se naturalmente métricas Riemannianas g e b em TM. Nota-se também que $J_1 = J_2$ em C_+ e $J_1 = -J_2$ em C_-, então é necessario apenas transportar J_1 para TM. Observa-se que J_1 induz duas estruturas quase complexas em TM que serão denotadas por $J_\pm$.

Definiï¿½ï¿½o 4.5. Seja $\omega_\pm$ uma 2-forma associada à estrutura quase complexa hermitiana $J_\pm$, em outras palavras:

$$\omega_\pm = gJ_\pm \qquad .$$

A tripla (g,J_+, J_-) é chamada de estrutura quase bi-hermitiana.

Proposiï¿½ï¿½o 4.3. *A estrutura Kähler generalizada (J_1, J_2) pode ser construída através da quadrupla (g,b,J_+, J_-).*

4.2.5 Condições de Integrabilidade

Definiï¿½ï¿½o 4.6. Uma estrutura quase bi-hermitiana (g,b,J_+, J_-) é chamada de estrutura bi-hermitiana quando J_+ e J_- são integráveis.

Proposiï¿½ï¿½o 4.4. *As estruturas complexas J_+ e J_-, que provêm de uma estrutura kähler generalizada, são integráveis e portanto (g,b,J_+, J_-) é estrutura bi-hermitiana.*

Teorema 4.2. *Seja (J_1, J_2) uma estrutura quase Kähler generalizada, associada à tripla (g,b,$J_\pm$), e seja h=db. Então todas as condições abaixo são equivalentes a uma estrutura Kähler generalizada.*

- *Os sub-fibrados $L_1^\pm$ são integráveis com relação ao colchete de Courant.*
- *$J_\pm$ é integrável e $d_-^c \omega_- = -d_+^c \omega_+ = h$, onde $d_\pm^c$=i($\overline{\partial_\pm}$-$\partial_\pm$)*
- *$\nabla^\pm J_\pm = 0$ e h é do tipo (2,1)+(1,2) com respeito a ambos $J_\pm$, onde $\nabla^\pm = \nabla + g^{-1}(H + db)$*

Usando os teoremas 4.1 e 4.2 desta seção, é possível obter o teorema central desta seção, o qual afirma que se uma variedade admite uma (2,2)-superalgebra[2], então a variedade M tem que admitir uma estrutura kähler generalizada.

Teorema 4.3. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana equipada com uma 2-forma b tal que db=H. O modelo sigma supersimetrico (1,1) em uma folha mundo Σ (um cilindro) com espaço alvo M, admite uma extensão para uma supersimtria on-shell (2,2) se e somente se M admite uma estrutura Kähler generalizada.*

---

[2]Extendida apartir de uma (1,1)-superalgebra.

CAPÍTULO 5

Modelo Topológico

Anteriormente, foram estudados modelos supersimétricos (2,2) definidos sobre uma folha-mundo no formato de um cilindro. Neste capítulo será utilizado o método das torções topológicas para estender o modelo sigma (2,2) para uma folha-mundo arbitrária. Sobre certas condições esse procedimento transforma o modelo sigma em uma teoria topológica de campos. Antes de discutir o método das torções, será feita uma breve discussão sobre o conceito de quantização, para poder explicar a definição de integral de trajetória, a qual é fundamental para o entendimento das teorias topológicas de cordas do ponto de vista físico.

5.1 Quantização

Quantização é o processo que transforma uma teoria clássica em uma teoria quântica. Será apresentada a teoria relativística de partículas pontuais que se movem através de um espaço-tempo, e em seguida será feita a extensão para Teoria de Cordas.

A evolução temporal de sistemas físicos são descritos pela lagrangeana, a qual é definida com uma função em TM. Nota-se que o tempo neste contexto é a variável da parametrização do caminho que a partícula percorreu no espaço-tempo. Como foi mencionado no capítulo 2, a ação S é um funcional no espaço de todos os caminhos em M, definidos por $S(\gamma) = \int_{[0,1]} L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) d\tau$, e isto determina a evolução do sistema. Muitas vezes é mais conveniente trocar o formalismo Lagrangeano pelo Hamiltoniano, isso é feito trocando TM por T^*M. Seja a aplicação momento $p : TM \mapsto T^*M$, dada por:

$$p_i(x,y) = \frac{\partial L}{\partial y^i} \tag{5.1}$$

onde x^i são coordenadas locais em M, y^i são coordenadas nas fibras de TM e p_i são coordenadas nas fibras de T^*M. Devido às regras de transformações e à regra da cadeia, pode-se verificar que p_i se transforma da maneira correta, logo o mapa p está globalmente definido. Nota-se que este mapa não é necessariamente um isomorfismo, já que $\frac{\partial p_i}{\partial y^j}$ pode ser singular.
O Hamiltoniano pode ser definido localmente como

$$H(x,p) := p_i y^i - L(x,y) \tag{5.2}$$

assumindo que pode-se expressar (5.2) em termos do momento p_i (onde assumiu-se que $\frac{\partial p_i}{\partial y^j}$ é não singular). O formalismo Hamiltoniano é vantajoso, pois T^*M é uma variedade simplética que tem a forma simplética dada por $\sum_i dp_i \wedge dx^i$. Observa-se que nos sistemas físicos existe a relação $\{x^i, p_j\} = \delta^i_j$, mas a forma de p depende da Lagrangeana e portanto o parêntese de Poisson é diferente para sistemas físicos distintos.

Na mecânica quântica, conceitos clássicos como determinismo perdem um pouco a sua importância. Ao invés de uma localização bem definida em M, tem-se que o estado da partícula é descrito por uma função de onda Ψ, a qual é uma função quadrado integrável, ou seja $\Psi \in L^2(M)$, normalizada no sentido de que $\int_M |\Psi|^2 = 1$. Não pode-se mais falar em posição da partícula, mas sim em probabilidade de encontra-lá em uma região do espaço $U \subset M$, esta probabilidade é dada por $\int_U |\Psi|^2$. Existem algumas abordagens de quantização como quantização canônica, e o formalismo de integral de trajetória. Por enquanto, será ilustrado um exemplo usando quantização canônica, ou seja trocaremos o espaço das configurações M pelo espaço de Hilbert $\mathbf{H} := L^2(M)$, e as funções em T^*M por operadores em $\mathbf{H}$. O conjunto dos operadores ilimitados, ou não definidos em todo o espaço de Hilbert é denotado por **O(H)**. O processo de quantização é descrito pelo mapa $C^\infty(T^*M) \mapsto \mathbf{O}(\mathbf{H})$ que manda f$\mapsto \overline{f}$ e que satisfaz

$$\overline{\{f,g\}} = -i\left[\overline{f},\overline{g}\right], \tag{5.3}$$

onde $\{,\}$ é o parêntense de Poison e [,] é o colchete de Lie. A motivação do número complexo -i do lado direito da equação 5.3 é devido aos operadores em **O(H)**, que devem ser hermitianos, $\overline{f}\dagger = \overline{f}$, então o comutador deve satisfazer $\left[\overline{f},\overline{g}\right]\dagger = -\left[\overline{f},\overline{g}\right]$. Se não houvesse o número imaginário i na equação acima, ocorreria que $\left[\overline{f},\overline{g}\right]\dagger = \overline{\{f,g\}}\dagger = \overline{\{f,g\}} = \left[\overline{f},\overline{g}\right]$, que é inconsistente. Dentro do formalismo canônico existem pontos vista diferentes como o formalismo de Schrödinger e o de Heisenberg. Na abordagem de Schödinger os operadores são fixos e os estados (funções de onda) evoluem no tempo, e a sua evolução temporal é governada pelas equações 5.4 e 5.5.

$$|\Psi(\tau_f)> = e^{-i\overline{H}(\tau_f-\tau_i)}|\Psi(\tau_i)> \tag{5.4}$$

$$i\frac{d}{\partial\tau}|\Psi(\tau)> = \overline{H}|\Psi(\tau)> \tag{5.5}$$

Na interpretação de Heisenberg os estados são independentes do tempo, enquanto que os operadores são dependentes do tempo e evoluem de acordo com a equação abaixo.

$$\frac{d}{d\tau}O = \frac{\partial}{\partial\tau}O + i\left[\overline{H},O\right] \tag{5.6}$$

A interpretação de Heisenberg se assemelha mais ao ponto de vista clássico, pois a evolução temporal dos observáveis é governada pelo Hamiltoniano e pelo parêntese de Poisson via

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial\tau} - \{H,f\} \tag{5.7}$$

Apesar das diferenças, o formalismo de Heisenberg e de Schrödinger carregam a mesma informação, uma vez que ambos concordam nos valores esperados. O valor esperado de um operador **O** em um estado Ψ é definido por

$$< O >_{\Psi} := < \Psi|O|\Psi >, \tag{5.8}$$

onde no exemplo citado é apenas $\int_M dx \Psi^*(x)(O\Psi)(x)$, e isso concorda com a interpretação de probabilidade do valor esparado.

Outra abordagem da mecânca quântica é via integral de trajetória, este método será introduzido no contexto da teoria clássica de partícula relativística, então para cada ponto x $\in$ M será correspondido a um estado |x> (note que |x> não pertence ao espaço de Hilbert). Mas ainda assim pode-se definir $|\Psi >$ como uma representação da função $\Psi \in L^2(M)$ definindo $< x|\Psi > := \Psi(x)$, e formalmente escreve-se como

$$|\Psi > = \int_M dx < x|\Psi > |x > = \int_M \Psi(x)|x > \tag{5.9}$$

o.
onde foi usado que $\int_M dx|x >< x| = 1$. Nota-se que |x> é o auto-estado do operador posição. Usando a identidade $\int_M dx|x >< x| = 1$ várias vezes e depois tomando o limite para o infinito [1] obtém-se a integral de trajetória.

$$< y|e^{-i\overline{H}\tau_f}\overline{O}_n(\tau_n)...\overline{O}_1(\tau_1)e^{i\overline{H}\tau_i}|x > = \int_{\phi(\tau_i)=x}^{\phi(\tau_f)=y} D[\phi]\, e^{iS(\phi)} O_n(\tau_n)...O_1(\tau_1) \tag{5.10}$$

a integral é tomada sobre todos os possíveis caminhos em M que começam em x e terminam em y, $\tau_n \geq ... \geq \tau_1$. Substituindo as eqs. 5.4 e 5.5 em 5.10 obtém-se que

$$\Psi(y, \tau_f) = \int_M dx \int_{\phi(\tau_i)=x}^{\phi(\tau_f)=y} D[\phi]\, e^{iS(\phi)} \Psi(x, \tau_i) \tag{5.11}$$

e neste sentido a integral de trajetória atua como um operador de evolução temporal da função de onda.

5.1.1 Cordas e operadores de estado

Serão considerados agora cordas fechadas movendo-se no espaço tempo, que é denotado por M. O espaço das configurações não é M, mas sim LM:=$\{\gamma : S^1 \mapsto M\}$, o espaço de todas as possíveis cordas fechadas em M. O espaço de fase pode ser definido como T^*LM, o qual tem suas fibras sobre o espaço dos *loops* de $T^*_\gamma LM := \Gamma(\gamma^* T^* M)$. Como foi feito anteriormente na quantização canônica, LM será trocado por **H**:= $L^2(LM)$.

Analogamente ao estado |x>, tem-se que para cada 'loop' γ existe uma correspondência com um estado $|\gamma >$, e obtém-se

$$|\Psi > = \int_{LM} d\gamma \Psi(\gamma)|\gamma > \tag{5.12}$$

[1] esse limite não é bem definido do ponto de vista matemático

e a amplitude de probabilidade é analogamente calculada como

$$< \gamma_f | e^{-iH(\tau_f - \tau_i)} | \gamma_i >= \int D[\phi]\, e^{iS} \tag{5.13}$$

a integral é definida sobre todos os caminhos em LM que começam em γ_i e terminam em γ_f. Cada caminho em M pode ser descrito como um caso particular de cobordismo[2] entre as imagens de γ_i e γ_f em M. Este tipo particular de cobordismo não tem um buraco dentro dele. Considerando todos os cobordismo entre γ_i e γ_f, verifica-se que a interação entre cordas ocorrem. Do ponto de vista de física de partículas pontuais é necessário impor termos na lagrangeana para criar a interação, enquanto que em cordas o cobordismo já possibilita a interação das cordas. Lembrando que cobordismo pode quebrar a simetria conforme e a supersimetria assim como os termos de interação na lagrangeana, no caso de física de partículas pontuais.

Os termos relevantes para a interação das cordas são

$$< \gamma_f^1, ...\gamma_f^n | e^{-iH(\tau_1 - \tau_0)} | \gamma_i^1, ...\gamma_i^m > \tag{5.14}$$

usando o formalismo de integral de trajetória, obtem-se que a integral é tomada sobre todas as superfícies Σ tal que sua fronteira é $\partial\Sigma = \Sigma_i \cup \overline{\Sigma_f}$, onde nesse caso a barra quer dizer orientação reversa e Σ_i e Σ_f são as uniões de γ_i e γ_f respectivamente. A ideia precisa da medida $D[\phi]$ depende da teoria adotada. Para supercordas fechadas, isto involve também uma integral sobre uma metríca h sobre a folha-mundo, assim como uma integral sobre os campos $\psi_\pm$. Intuitivamente está claro que o espaço dos cobordismos separa-se em diferentes componentes conexas, as quais estão relacionadas ao número de buracos da superfície abordada, logo a amplitude final é

$$< \gamma_f^1, ...\gamma_f^n | e^{-iH(\tau_f - \tau_i)} | \gamma_i^1, ...\gamma_i^m >= \sum_{g \geq 0} \int D[h_g]\, D[\phi]\, D[\psi_\pm]\, e^{iS(\phi, h_g, \psi_\pm)} \tag{5.15}$$

onde o somatório é sobre todos os generos, e cada integral de trajetória é sobre todos os cobordismos com g buracos neles. Temos duas sutilezas na equação 5.15. Primeiro, o termo $\tau_f - \tau_i$ não está bem definido, como no caso da coordenada global τ na folha-mundo, portanto não mencionaremos o operador de evolução temporal associado ao cobordismo. A amplitude de probabilidade será denotada por $< \gamma_f^1, ...\gamma_f^n | \gamma_i^1, ...\gamma_i^m >$. E segundo, é necesssário fazer uma rotação de Wick que manda $\tau \mapsto t = i\tau$, então iS vai em -S na integral de trajetória.

Agora no processo atual os estados são dados por funcionais de onda e não por estados $|\gamma>$, portanto calcula-se as amplitudes da forma

$$\begin{aligned} < \Psi_f^1, ..., \Psi_f^n | \Psi_i^1, ..., \Psi_i^m > = \int_{LM} d\gamma_f^1 .. d\gamma_f^n d\gamma_i^1 d\gamma_f^m (\Psi_f^1(\gamma_f^1))^* ... (\Psi_f^n(\gamma_f^n))^* \Psi_i^1(\gamma_i^1) ... \Psi_i^m(\gamma_i^m) \bullet \\ \bullet < \gamma_f^1, .., \gamma_f^n | \gamma_i^1, ..., \gamma_i^m > \end{aligned} \tag{5.16}$$

[2]um cobordismo entre duas variedades M e N é uma variedade compacta W tal que ∂W=M$\cup$N sendo que a união é disjunta

Felizmente, a simetria conforme da teoria permite simplificar a fórmula 5.16 para

$$\Psi(\tau_f,\gamma)=\int_{LM}d\gamma'\int_{\phi(\tau_i)=\gamma'}^{\phi(\tau_f)=\gamma}D\phi e^{-S(\phi)}\Psi(\tau_i,\gamma') \tag{5.17}$$

onde a integral sobre ϕ é tomada sobre todos os $\phi\in$ Map($S^1\times[\tau_i,\tau_f]$,M) restrigindo γ e γ' sobre as fronteiras. Cada cilindro é conformemente equivalente a aneís no plano complexo pelo mapa que leva (τ,σ) para $e^{\tau+i\sigma}$. Dentro do plano complexo a direção temporal é trocada pela direção radial, então o limite $\tau_i\mapsto-\infty$ corresponde à contração do círculo interno do anel em um ponto. Então a equação 5.17 torna-se

$$\Psi(\tau_f,\gamma)=\int D\psi e^{-S(\phi)}O_\psi(0) \tag{5.18}$$

onde O_ψ é um operador local, tal que no ponto 0 do plano substitui o fator $\Psi(\tau_i,\gamma')$ em 5.17. Nota-se que esse operador, além de ser um funcional sobre os campos ϕ pode depender também dos campos $\psi_\pm$, cuja contribuição foi suprimida na 5.17. Os estados assintóticos são estados que o limite das suas soluções na fronteira são tomados para o infinito, neste caso tomou-se um cilindro infinitamente longo. Do ponto de vista da integral de trajetória, a solução assintótica é a integral sobre um hemisfério com o operador colocado no topo, e onde o hemisfério é deformado em um cilindro infinito[3]. Esta identificação é chamada de correspondência operador-estado. Em particular pode-se tomar o operador local como a identidade, e denota-se o estado correspondente pelo vácuo |0>. Para um operador local geral O tem-se a correspondência com o estado é dada por |O>=O|0>. Estados assintóticos são importantes obejtos de estudo, pois em processos de espalhamentos esses estados são os únicos que podem ser detectados. A interação das cordas, que surgem a partir de todos os cobordismos não são diretamente detectáveis. Então os observáveis básicos que podem ser calculados em teoria de cordas são denotados por funções de correlação

$$<O_1..O_n>:=\sum_{g\geq 0}\int_{\Sigma_g}dx_1..dx_n<O_1(x_1)..O_n(x_n)>_g, \tag{5.19}$$

com Σ_g sendo uma superfície compacta, conexa e orientável de genus g, e o último termo da equação acima é definido por

$$<O_1(x_1)..O_n(x_n)>_g:=\int D[h]D[\phi]D[\psi_\pm]O_1(x_1)..O_n(x_n), \tag{5.20}$$

onde a integral sobre h é tomada sobre todas as possíveis métricas em Σ_g [4], a integral sobre ϕ é tomada sobre todos os mapas $\phi:\Sigma_g\mapsto M$, e a integral fermiônica nos campos $\psi_\pm$ é sobre todas as possíveis seções de $S_{\Sigma_g}\otimes\phi^*TM$ com S_{Σ_g} sendo o fibrado de spin de Σ_g.

Devido a invariância conforme, grande parte da integração sobre h [5] é simples de se obter, e depois de fixado o calibre de Fadeev-Popov, a integral se reduz para a integral sobre

[3] na verdade o hemisfério é deformado em um objeto que lembra um cilindro infinito, mas que diferente dele tem uma apenas uma fronteira

[4] métrica Riemanniana como aquela obtida após uma rotação de Wick

[5] denotada por direção das métricas conformemente equivalentes

todas as métricas conformemente inequivalentes, isto é precisamente o espaço das estruturas complexas em Σ_g. Isto acontece com o custo de termos extras que aparecem na ação, devido ao determinante de Jacobiano de certos campos, esses campos são chamados de campos fantasmas. Pode-se também interpretar o calibre de Fadeev-Popov de outra maneira. Um problema usual em Teoria de Cordas é o aparececimento de estados cuja a sua norma é negativa, e portanto probabilidade negativa de ocorrer. Um procedimento comum para contornar esse problema é perceber que ao computar a integral de trajétoria sobre a ação de Polyakov (será feito apenas o caso bosônico, por via de simplificação) estamos contando algumas configurações equivalentes mais de uma vez. A essência do procedimento é fixar um calibre (o de Fadeev-Popov) tal que manda a integral de trajetória $\int [dXdg] exp(-S)$ em $\int \frac{[dXdg]}{V_{Diff \times Weyl}} exp(-S)$. Através de alguns cálculos é possivel mostrar que $\frac{1}{V_{Diff \times Weyl}} = \Delta_{FP} = \int [dbdc] exp(-S_G)$, onde $S_G = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \nabla_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z c^{\bar{z}})$[6] é a ação fantasma e b,c são os campos fantasmas. Outro fato importante que ocorre nesse calibre é que a ação total fica na forma $S_P + S_G$ sob esta forma uma simetria global de calibre é manisfesta, e portanto obtém-se uma carga conversada (pelo teorema de Noether) e essa carga é exatamente a carga BRST que será discutida com mais detalhes nas próximas seções.

5.1.2 Teoria Topológica de Campos

A grande dificuldade da teoria de cordas reside nas integrais que são tomadas sobre todas as métricas da folha-mundo. Uma possível maneira de contornar isso é considerar a ações, cuja a integral de trajetória é como a Eq 5.20. Nota-se que não é necessário calcular a integral sobre todas as métricas, pois sua ação não depende das métricas. Teorias Quântica de Campos que depende apenas de quantidades globais são denotadas teorias topológicas de campo.

Teorias topológicas são classificadas em duas classes, a teoria tipo Schwarz e a tipo Witten. Informalmente a teoria tipo Schwarz é independente da métrica por que a métrica não aparece na ação. Um bom exemplo dessas teorias é a teoria de Chern-Simons.

Para modelos sigmas supersimétricos no entanto, o tipo relevante de teoria é a de Witten, ou equivalentemente denotada por teoria de campo cohomológica. Estas teorias têm a invariância topológica alcançada com o auxílio de uma simetria fermiônica nilpotente, e observáveis físicos que são invariantes sob essa simetria. Existem alguns modelos de cordas topológicas de Witten que se dividem em tipo A e tipo B (7), esses casos serão discutidos mais adiante como em casos especiais de modelos sigmas com o fluxo-H.

[6] aqui foi usado o calibre conforme na ação

5.2 Teoria de Campo Cohomológico

Sabe-se pelo teorema de Noether que a simetria de um estado quântico corresponde a uma carga conservada Q, a qual gera a simetria através do operador O via

$$\delta_\varepsilon O = \varepsilon\,[Q,O] \tag{5.21}$$

onde o colchete é graduado, assim como o operador que pode ser bosônico ou fermiônico, e o parâmetro ε ou é um objeto complexo ou é um objeto grassmanniano depedendo se a simetria é bosônica ou fermiônica. A teoria de campo cohomológica é uma teoria de campo com simetria fermiônica, cuja carga correspondente Q satisfaz os axiomas abaixo:

- Q é nilpotente: $Q^2 = 0$
- o vácuo é invariante Q|0>=0
- O tensor energia-momento é Q-exato:$T_{\alpha\beta} := \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = \left[Q, G_{\alpha\beta}\right]$ para algum operador $G_{\alpha\beta}$

A segunda propriedade pode ser entendida escrevendo a simetria gerada por Q como exp(εQ), com ε sendo uma simetria Grassmanniana disponível. A simetria é invariante, exp(εQ)|0>=|0> se e somente se Q|0>=0.

A terceira propriedade é usualmente assegurada por uma ação Q-exata que é independente da métrica,i.e

$$S = \{Q,V\} + S_{top} \tag{5.22}$$

para algum funcional V [7], e S_{top} é a parte topológica da ação, ou seja que independe da métrica. Neste caso verifica-se a Q-exatidão do tensor energia momento. O operador Q é chamado do operador BRST, o qual usualmente surge através de procedimentos BRST em teorias de calibre como foi mostrado na seção anterior.

Nota-se que se um operador pode ser escrito como $[Q,O]$, então todos os valores esperados envolvendo esse operador serão 0

$$< 0|O_1...O_r([Q,O])O_{r+1}..O_n|0 >= 0 \tag{5.23}$$

desde de que Q (anti-) comute com todos os operadores O_i, e assim eventualmente anule o vácuo. Sobre a variação com relação a métrica $\delta h\alpha\beta$, tem-se que

$$\frac{\delta}{\delta h^{\alpha\beta}} < O_1..O_n >= \int D[\phi]\,O_1..O_n\left(\frac{\delta}{\delta h^{\alpha\beta}}(-S)\right)e^{-S(\phi)} = - < O_1..O_n\left[Q, G_{\alpha\beta}\right] >= 0 \tag{5.24}$$

Portanto a teoria de campo cohomológica é uma teoria topológica de campo.

[7] $\{Q,V\} = \int d\sigma d\tau [Q,\tilde{V}]$, onde $V = \int d\sigma d\tau \tilde{V}$, e $\tilde{V}$ seria uma operador.

5.3 Construção de Teorias Topológicas

5.3.1 Torção

Nesta seção, serão construídas versões topologicas com torção de modelos sigma do tipo (2, 2) supersimétricos sem assumir $I_+ = I_-$.Na verdade, o caso, H = 0, $I_+ \neq I_-$ já foi analizado em (19). Foi mostrado lá que o espaço de observáveis locais da teoria topologica torcida podem ser identificados com a cohomologia de um certo algebroide de Lie associado a uma estrutura complexa generalizada.

Será feito nesta seção a abordagem pioneira em (20), que lidou com o caso em que M é uma variedade Kähler, com o campo H nulo, e $I_+ = I_-$. Se não existe a anomalia U(1) da R-simetria satisfazendo uma condição de integralidade [8], então pode-se mudar o spin de todos os campos para metade das suas R-cargas e obtendo assim uma teoria de campo topológica. No caso em que o espaço alvo é variedade Kähler, existem duas R-simetrias clássica do tipo U(1): R-simétrico vetorial $U(1)_V$ e a R-simetria axial $U(1)_A$. No nível quântico, $U(1)_V$ prossegue sendo uma simetria, enquanto que $U(1)_A$ sofre com a anomalia, a menos que M satisfaça a condição $c_1(TM) = 0$.

A torção pela R-simetria vetorial origina o modelo A, enquanto a torção da R-simetria axial (se estiver não anômala) produz o modelo B. Não é difícil verificar que a construção em (20) pode ser aplicada para o caso mais geral em mãos. As duas estruturas complexas $I_\pm$ induzem duas decomposições diferentes do fibrado tangente complexificado

$$TM_{\mathbb{C}} \cong T_+^{1,0} \oplus T_+^{0,1} \cong T_-^{1,0} \oplus T_-^{0,1} \tag{5.25}$$

Portanto os campos fermiônicos $\psi_\pm$ são separados em componentes holomorfas e anti-holomorfas:

$$\psi_+ = \frac{1}{2}(1 - iI_+)\psi_+ + \frac{1}{2}(1 + iI_+)\psi_+, \psi_- = \frac{1}{2}(1 - iI_-)\psi_- + \frac{1}{2}(1 + iI_-)\psi_- \tag{5.26}$$

Em um nível clássico, existem dois caminhos não equivalentes para descrever as R-cargas U(1) para os fermións (os bósons têm carga 0):

$$\begin{aligned} U(1)_V: \quad & q_V(\frac{1}{2}(1 - iI_+)\psi_+) = -1 \quad q_V(\frac{1}{2}(1 - iI_-)\psi_-) = -1 \\ U(1)_A: \quad & q_A(\frac{1}{2}(1 - iI_+)\psi_+) = -1 \quad q_A(\frac{1}{2}(1 - iI_-)\psi_-) = 1 \end{aligned} \tag{5.27}$$

A torção topológica é obtida através da mudança do spin dos férmions,por q_V/ 2 ou q_A / 2. As teorias topológicas correspondentes serão denotadas por modelos A e B generalizadas. Nota-se que trocar ao sinal de I_- manda-se um modelo no outro.

Até agora, a análise tem sido ao nível clássico. Para que os modelos A e B-modelos generalizados façam sentido como teorias quânticas de campo, deve-se exigir que a simetria U(1)

[8]Para qualquer estado a soma de spin e a metade da R-carga deve ser inteira.

utilizada na torção seja livre de anomalia. As anomalias são facilmente calculadas pelo teorema do índice de Atiyah-Singer, e o resultado das condições são:

$$\begin{aligned} U(1)_V: &\quad c_1(T_-^{1,0}) - c_1(T_+^{1,0}) = 0 \\ U(1)_A: &\quad c_1(T_-^{1,0}) + c_1(T_+^{1,0}) = 0 \end{aligned} \tag{5.28}$$

É possível expressar as condições de anomalias em termos das estruturas complexas generalizadas com torção. Lembrando que a (2, 2) supersimetria requer que M seja uma variedade Kähler generalizada com torção, ou seja M deve possuir duas estruturas complexas generalizadas comutativas (J_1, J_2) com torção (que são involutivas com relação ao colchete de Courant torcido) tal que a métrica $G = -J_1 J_2$ seja positiva definida em $TM \oplus T^*M$. Sejam $C_\pm$ os auto fibrados ± 1 de G. A projeção natural de $TM \oplus T^*M$ em TM induz um isomorfismo de fibrados $\pi_\pm : C_\pm \cong TM$. A estrutura complexa generalizada torcida J_1 induz duas estruturas complexas em TM, uma das estruturas vem do isomorfismo $\pi_+ : C_+ \mapsto TM$ e a outra vem de $\pi_- : C_- \mapsto TM$. Sejam L_1 e L_2 os i-auto fibrados de J_1 e J_2 respectivamente. Desde J_1 e J_2 comutem, temos as decomposições $L_1 = L_1^+ \oplus L_1^-$ e $L_2 = L_2^+ \oplus L_2^-$, onde os rótulos $\pm$ são devido aos autovalores $\pm$i da outra estrutura complexa generalizado torcida. Segue que

$$C_\pm \otimes \mathbb{C} = L_1^\pm \otimes \overline{L}_1^\pm \tag{5.29}$$

Agora a condição 5.27 pode ser escrita em termos de L_1 e L_2

$$\begin{aligned} U(1)_V: &\quad c_1(L_2) = 0 \\ U(1)_A: &\quad c_1(L_1) = 0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Parece natural chamar qualquer uma dessas condições de Calabi-Yau generalizada torcida (para J1 e J2, respectivamente). No entanto, este nome já está reservado para uma condição um pouco mais forte introduzida por Hitchin (21) e Gualtieri (6). A condição Hitchin-Gualtieri em J implica que $c_1(E) = 0$, mas a recripoca não é verdadeira, em geral. Fisicamente, o $c_1(E) = 0$ também não é suficiente para que a torção topológica a faça sentido. Será verificado nas seções seguintes que a torção topológica faz sentido se e somente se a condição Hitchin-Gualtieri for satisfeita. Como já foi mencionado, ao trocar o sinal de $I_\pm$ troca-se o modelo A generalizado pelo modelo B generalizado e vice-versa. Isto é consistente com a condição do cancelamento da anomalia, uma vez que o sinal de mudança relativa de $I_\pm$ é equivalente a troca J_1 e J_2.

5.3.2 Cohomologia BRST de operadores

A seguir serão descritos o operador BRST e os observáveis BRST-invariantes. Esta seção focará no modelo-B generalizado, uma vez que o modelo A pode ser obtido a partir dele, trocando o sinal da I_-. Como já foi discutido, (M, J_1) deve ser uma variedade Calabi-Yau generalizada torcida. Após a torção topológica, $(1 + iI_+)\psi_+$ e $(1 + iI_-)\psi_-$ tornam-se seções de $T_+^{0,1}$ e $T_-^{0,1}$ respectivamente (dos seus pullback na realidade). Por outro lado, $(1 - iI_+)\psi_+$ e $(1 - iI_-)\psi_-$ tornam-se campos da folha-mundo de spin 1 e eles não aparecem na variação BRST do campo ϕ. Pode-se obter dois operadores nilpotentes escalares dos geradores supersimétricos originais: $Q_L = (Q_+ + i\tilde{Q}_+)/2$ e $Q_L = (Q_- + i\tilde{Q}_-)/2$. A álgebra de supersimetria N=2 implica que

$Q_L^2 = 0$, $Q_R^2 = 0$ e $\{Q_L, Q_R\} = 0$. Define-se assim o operador BRST do modelo B generalizado como $Q_{BRST} = Q_L + Q_R$.
Para simplificar a notação os campos fermiônicos serão escritos na forma de (5.31)

$$\chi = \frac{1}{2}(1 + iI_+)\psi_+, \quad \lambda = \frac{i}{2}(1 + iI_-)\psi_- \tag{5.31}$$

Esses campos escalares se transformam com relação a Q_L e Q_R da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
&\{Q_L, \phi^a\} = \chi^a \\
&\{Q_L, \chi^a\} = 0 \\
&\{Q_L, \lambda^a\} = -\Gamma^a_{-bc}\chi^b\lambda^c \\
&\{Q_R, \phi^a\} = \lambda^a \\
&\{Q_R, \lambda^a\} = 0 \\
&\{Q_R, \chi^a\} = -\Gamma^a_{+bc}\lambda^b\chi^c
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Os observáveis locais dessa teoria topológica devem assumir a forma de

$$\mathscr{O}_f = f_{a_1..a_p;b_1..b_q}\chi^{a_1}..\chi^{a_p}\lambda^{b_1}..\lambda^{b_q}, \tag{5.33}$$

onde f é totalmente anti-simétrico em a's e b's. Nota-se que $\chi \in \Gamma(T_+^{0,1})$,$\lambda \in \Gamma(T_-^{0,1})$, ou seja f pode ser considerada uma secção de $\Omega_+^{0,p}(M) \otimes \Omega_-^{0,q}(M)$. Os índices $\pm$ são referentes a decomposição das formas diferenciais com relação à estrutura complexa. Em seguida, deve-se exigir que $\mathscr{O}_f$ seja aniquilado pelo operador BRST $Q_L + Q_R$. Para que seja possível escrever a ação do Q_L em $\mathscr{O}_f$, é conveniente considerar f como uma forma (0, p) para a estrutura complexa I_+, com valores em $\Omega_-^{0,q}(M)$. Um cálculo simples dá

$$\{Q_L, \mathscr{O}_f\} = \mathscr{O}_{\overline{D}_{(+)}f}, \tag{5.34}$$

onde $\overline{D}_{(+)}$ é a covariantização do operador de Dolbeaut $\overline{\partial}$ correspondente a I_+. A covariantização usa a conexão de $\Omega_-^{0,q}(M)$ que provém da conexão Γ_- em TM. Por outro lado, pode-se considerar f como uma forma (0, q) para I_-, tomando valores em

$$\{Q_R, \mathscr{O}_f\} = \mathscr{O}_{\overline{D}_{(-)}f}, \tag{5.35}$$

onde $\overline{D}_{(-)}$ é a covariantização do operador de Dolbeaut $\overline{\partial}$ correspondente a I_-. A covariantização usa a conexão de $\Omega_-^{0,q}(M)$ que provém da conexão Γ_+ em TM. O espaço dos observáveis locais tem uma bi-graduação natural via os movimentos para esquerda e para direita das R-cargas. Com respeito a isso, Q_L tem grau (1, 0), e Q_R tem grau (0, 1).
A cohomologia total desse espaço bi-complexo é o espaço físico dos observáveis em nossa teoria topológica, isto significa que as duas sequências de espectros convergem para cohomologia BRST $H^*_{Q_{BRST}}$.

5.3.3 Relação com as estruturas complexas generalizadas torcidas

No caso particular de H=0, o qual é objeto de estudo em (19), tem-se que a BRST complexa coincide com a cohomologia do algebroide de Lie L_1 que está associado à estrutura complexa generalizada J_1. No artigo (8), isso foi mostrado para qualquer que seja H.
Relembrando algumas definições básicas que já foram vistas no capítulo 3. Um algebroide de Lie, por definição é um fibrado vetorial real E sobre uma variedade M equipada com duas estruturas: o colchete de Lie [,] nas seções de E, um morfismo de fibrados a: E↦TM chamado de aplicação âncora. Essas estruturas devem satisfazer duas condições de compatibilidade:

- $a([s_1,s_2]) = [a(s_1, a(s_2)] \forall s_1, s_2 \in \Gamma(E)$
- $[fs_1,s_2] = f[s_1,s_2] - a(s_2)(f) \forall f \in C^\infty(M), \forall s_1,s_2 \in \Gamma(E).$

Um algebroide de Lie complexo é definido de maneira similar, trocando apenas E por um fibrado vetorial complexo, e TM por $TM_{\mathbb{C}}$.
Existe uma definição alternativa, e talvez mais intuitiva para algebroide de Lie. Para qualquer fibrado vetorial E, pode-se considerar a supervariedade ΠE, i.e o espaço total do fibrado E com suas fibras direcionais com variáveis ímpares de grau 1. Isto traz uma correspondência de um para um entre uma estrutura de algebroide de Lie em E e campos vetoriais ímpares Q de grau 1 em ΠE satisfazendo $\{Q,Q\} = 2Q^2 = 0$ (22). Essa correspondência será feita logo abaixo.
Sejam (x^b, ξ^μ) coordenadas locais em ΠE, onde x^b são coordenadas locais em M, e ξ^μ são coordenadas lineares na fibra. Qualquer campo vetorial ímpar de grau 1 em ΠE tem a forma de

$$Q = a^b_\mu \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^b} + c^\mu_{\nu\rho} \xi^\nu \xi^\rho \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \tag{5.36}$$

onde a^b_μ e $c^\mu_{\nu\rho}$ são funções localmente definidas em M. Seja e_μ base das seções de duais de E para as coordenadas ξ^μ. Definindo o mapa a: E ↦TM por

$$a(e_\mu) = a^b_\mu \frac{\partial}{\partial x^b} \tag{5.37}$$

e o colchete por

$$[e_\nu, e_\rho] = c^\mu_{\nu\rho} e_\mu \tag{5.38}$$

Pode-se mostrar que essas estruturas definem um algebroide de Lie em E se e somente se $Q^2 = 0$.
Identificando funções em ΠE com seções do fibrado graduado $\Lambda^\bullet E^*$, pode-se assim considerar Q como uma diferencial no espaço das seções do fibrado. Denotaremos por complexo canônico do algebroide de Lie a versão complexa do operador acima , e sua cohomologia será chamada de cohomologia do algebroide de Lie. Observa-se que no exemplo E = TM, a aplicação âncora é o mapa identidade, e o colchete de Lie em E é o colchete de Lie padrão. Nota-se que o operador complexo canônico de formas diferenciais em M, é diferencial de Rham, e a cohomologia do algebroide de Lie é simplesmente a cohomologia de Rham em M.

Para cada variedade complexa generalizada torcida (M, H, J) pode-se associar um algebroide de Lie complexo, tomando E pelo auto-fibrado de J com auto-valor -i. O colchete em E é induzido pelo colchete de Courant $TM \oplus T^*M$, e o mapa âncora é a projeção de $(TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}}$ para $TM_{\mathbb{C}}$. Será desmonstrado que o complexo BRST discutido acima é isomorfo ao algebroide de Lie complexo associado à variedade complexa generalizada torcida $(M, H, J = J_1)$. Para observar a relação entre os dois complexos, é natural definir novas coordenadas fermionicas:

$$\psi^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+^a + i\psi_-^a), \quad \rho_a = \frac{1}{\sqrt{2}} g_{ab}(\psi_+^b - i\psi^b) \tag{5.39}$$

uma vez que pode-se considerar ψ e ρ como campos fermiônicos que assumem valores no pull-back de $TM_{\mathbb{C}}$ e $TM_{\mathbb{C}}^*$ respectivamente. Suas relações de comutação são

$$\{\psi^a, \psi^b\} = \{\rho^a, \rho^b\} = 0, \quad \{\psi^a(\sigma), \psi^b(\sigma')\} = \delta_b^a \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.40}$$

A partir de agora é conviniente definir o campo fermiônico

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \rho \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

tomando valores em $(TM \oplus TM^*)_{\mathbb{C}}$. Em termos de Ψ, as relações de anticomutação ficam

$$\{\Psi^a(\sigma), \Psi^b(\sigma')\} = (q^{-1})^{\alpha\beta} \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.42}$$

onde q é produto escalar canônico em $(TM \oplus TM^*)_{\mathbb{C}}$.
Nota-se que

$$(1 + iJ_1)\Psi = \begin{bmatrix} \chi + \lambda \\ g(\chi - \lambda) \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

Portanto qualquer função que tenha coordenadas bosônicas e escalares fermiônicos χ,λ pode ser reescrista como funções de ΠE, onde E é o auto-fibrado de J_1 com auto-valor -i. Logo os espaços vetoriais graduados sobre os 2 complexos são naturalmente isomorfos. Basta provar agora que a diferencial Q_{BRST} coincide com a diferencial do Algebroide de Lie Q. Uma maneira de checar isso é por um cálculo direto, mas uma estratégia mais eficiente seria construir esse isomorfismo. Para fazer isso, primeiro precisa-se analizar o estado fundamental no setor R-R.

5.4 Estados fundamentais Ramond-Ramond

5.4.1 Cohomologia dos estados e formas diferenciais

Até então foi discutido a cohomologia BRST dos operadores em uma teoria torcida. Porém pode-se também considerar uma cohomologia BRST de estados. Em teoria topologica de campos, existe um isomorfismo operador-estado, então as duas cohomologias são identicas (23). Na STCC (super teoria conforme de campos), a cohomologia de operadores é interpretada

como um anel quiral, enquanto que a cohomologia dos estados é interpretada como o espaço dos estados de energia 0 no setor Ramond-Ramond. O isomorfimo entre esses dois espaços é dado pelo fluxo espectral.
Nesta seção irá ser calculado o espaço dos estados fundamentais no setor R-R. Existem muitas razões para isso:

Primeiro considere que o modelo sigma N=2 com fluxo H e com a carga $U(1)_A$ é anomalo, ou seja a condição da E.q 5.28 não está completa. Algumas teorias não podem receber a torção topológica, mas o anel quiral e o espaço fundamental do setor R-R estão sempre bem definidos, porém em geral eles não são isomorfos. No caso Kähler (H=0), o anel quiral é dado por $H^\bullet(\Lambda^\bullet TX)$, enquanto que o espaço fundamental R-R é $H^\bullet(\Omega_X^\bullet)$. Apenas no caso Calabi-Yau os dois espaços são naturalmente isomorfos.

Segundo, ao usar a aproximação de partícula pontual e ao trocar o modelo sigma 2d pela mecânica quântica supersimetrica [9], então o espaço de Hilbert da teoria pode ser visto identificado naturalmente com as formas diferenciais em X. As super cargas podem ser vistas como o operador diferencial nas formas, e podem ser facilmente calculadas. Pode-se verificar que esse operador é exatamente a diferencial associada à estrutura complexa generalizada torcida J_1 em (6). Portanto pode-se inferir sem que se faça um único cálculo que o anel quiral coincide com a cohomologia do algebroide de Lie associado a J_1. E esse é exatamente o resultado que foi afirmado na seção anterior, exceto pelo fato de que agora não foi preciso assumir a torção topológica.
Computando as cargas de Noether associadas com Q_+ e Q_- na aproximação de partícula pontual:

$$\begin{aligned} Q_+ &= \psi_+^a g_{ab}\dot{\phi}^b - \frac{i}{6}H_{abc}\psi_+^a\psi_+^b\psi_+^c \\ Q_- &= \psi_-^a g_{ab}\dot{\phi}^b + \frac{i}{6}H_{abc}\psi_-^a\psi_-^b\psi_-^c \end{aligned} \tag{5.44}$$

Seja $Q = Q_+ + iQ$ e $Q^* = Q_+ - iQ_-$. A álgebra de supersimétria implica que

$$Q^2 = Q^{*2} = 0 \quad \{Q, Q^*\} = 4\mathscr{H} \tag{5.45}$$

onde $\mathscr{H}$ é a Hamiltoniana da mecânica quântica supersimétrica:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}g_{ab}\dot{\phi}^a\dot{\phi}^b - \frac{1}{4}R^{(+)}_{abcd}\psi_+^a\psi_+^b\psi_-^c\psi_-^d \tag{5.46}$$

Pelo argumento padrão de Hodge-de Rham, os estados fundamentais supersimétricos estão em uma correspondência de um para um com elementos da cohomologia de Q.
A carga Q pode ser pensada como um operador nas formas diferenciais via quantização canônica. O espaço de fase clássico de um sistema quantum mecânico supersimétrico é $TM \oplus$

[9] Essa aproximação pode ser mostrada exata desde de que tome-se cuidado com os estados fundamentais do setor R-R.

$\Pi(TM \oplus T^*M)$, onde $\Pi(TM \oplus T^*M)$ é a paridade reversa de $TM \oplus T^*M$. As duas cópias fermiônicas de TM vêm de ψ_+ e ψ_-. A forma simplética de TM é a forma usual, enquanto que a forma simplética nas direções ímpares (as quais são simétricas) é dada pela métrica Riemanniana g:

$$\{\psi^a_\pm, \psi^b_\pm\}_{P.B} = -ig^{ab}, \quad \{\psi^a_\pm, \psi^b_\mp\}_{P.B} = 0 \tag{5.47}$$

A quantização canônica identifica o espaço de Hilbert com $L^2(S)$, o espaço das seções quadrado-integráveis do fibrado spin $S = S(TM \oplus T^*M)$. No caso, $TM \oplus T^*M$ tem uma polarização complexa natural, onde o fibrado de spin S pode ser identificado com $\Lambda^\bullet(T^*M)$. Em outras palavras, ao invés de $\psi_\pm$ usam-se coordenadas ψ e ρ, as quais podem ser quantizadas trocando ψ^a pelo produto exterior com dx^a, e ρ_b pela contração com o campo vetorial $\frac{\partial}{\partial x^b}$. Agora será discutido como as super cargas Q e Q^* atuam no espaço de Hilbert. Primeiro será considerado o caso H=0. Pelo procedimento padrão da quantização canônica, é razoavelmente fácil de mostrar que $Q = -i\sqrt{2}\psi^a\nabla_a$, onde ∇ é a derivada covariante nas seções do fibrado de spin $S(TM \oplus T^*M)$ que é induzida pela conexão de Levi-Civita em TM, e ψ^a atua como uma multiplicação de Clifford. Pelo isomorfismo $S(TM \oplus T^*M) \cong \Lambda^\bullet(T^*M)$, Q é identificado com d[10].
É uma afirmação conhecida que espaços de estados fundamentais em uma mecânica quântica supersimétrica com N=1 são isomorfos à cohomologia de de Rham do espaço alvo. Agora considerando o caso $H \neq 0$. Usando (5.39) e (5.44) é possivel mostrar que

$$\begin{aligned} Q &= -\sqrt{2}i\psi^a\nabla_a + \frac{\sqrt{2}i}{6}H_{abc}\psi^a\psi^b\psi^c \\ Q^* &= -\sqrt{2}ig_{ab}\rho_b\nabla_a + \frac{\sqrt{2}i}{6}H^{abc}\rho_a\rho_b\rho_c, \end{aligned} \tag{5.48}$$

a menos de um fator $-\sqrt{2}i$, Q é identificado com o operador de de Rham torcido

$$d_H = d - H\wedge \tag{5.49}$$

enquanto que Q^* é identificado com o adjunto. Portanto os estados fundamentais supersimétricos têm uma correspondência de um para um com a cohomologia de d_H. Esta afimação é bem conhecida (24).
Ainda falta identificar o operador BRST, Q_{BRST}, nesse contexto. A corrente R é dada por

$$J = -i\frac{i}{2}(\omega_+(\psi_+, \psi_+) + \omega_-(\psi_-, \psi_-)), \tag{5.50}$$

onde $(1 + iI_+)\psi_+$ e $(1 + iI_-)\psi_-$ têm carga +1, por causa da relação de anti-comutação. Para o nosso propósito, é mais conviniente expressar J em termos dos férmions ψ,ρ:

$$J = -\frac{i}{2}(\delta\omega(\psi, \psi) - \alpha(\rho, \rho) - 2 < \tilde{I}\psi, \rho >), \tag{5.51}$$

fazendo as devidas substituições

$$\psi^a \leftrightarrow dx^a\wedge, \quad \rho_a \leftrightarrow \iota_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \equiv \iota_a \tag{5.52}$$

[10] A diferencial de de Rham, a menos de um fator de -i$\sqrt{2}$.

Então a corrente R é identificada com o seguinte operador de formas diferenciais

$$J = -i(\delta\omega \wedge - \iota_\alpha - \iota_{\tilde{I}}) \tag{5.53}$$

onde ι_α é a contração com o bi-vetor de Poisson α, e $\iota_{\tilde{I}}$ é definido em bases coordenada por

$$\iota_{\tilde{I}} = \tilde{I}^a_b(dx^b \wedge) \circ \iota_a \tag{5.54}$$

Nota-se que $\delta\omega, \alpha$, e $\tilde{I}$ podem ser obtidas de J_1[11], e portanto o operador J depende apenas de J_1.
O operador BRST é dado por

$$Q_{BRST} = \frac{1}{2}(Q + [J, Q]). \tag{5.56}$$

Desde de que $Q = d_H$, agora está claro que Q_{BRST} depende apenas da 3 forma H e da estrutura complexa generalizada torcida J_1. Nas próximas duas subseções, será feita a relação do operador Q_{BRST} com o operador diferencial nas formas definidas em (6) bem como para o algebroide complexo de Lie canônico E.

5.4.2 Formas diferenciais em uma variedade complexa generalizada torcida

Para executar o próximo procedimento, precisa-se discutir algumas propriedades das variedades complexas generalizadas torcidas. Uma variedade complexa ordinária, o seu espaço das formas diferenciais é graduado por pares de números inteiros, o primeiro inteiro é o grau da forma, e o segundo é a diferença entre os índices holomorfos e anti-holomorfos. Pensando em formas diferenciais como funções na supervariedade ΠTM, então o primeiro inteiro é o auto-valor do operador diferencial

$$deg = \theta^a \frac{\partial}{\partial \theta^a} \tag{5.57}$$

enquanto que o segundo inteiro é auto-valor de

$$-i\iota_I = -iI^a_b \theta^b \frac{\partial}{\partial \theta^a}, \tag{5.58}$$

onde I^a_b é uma estrutura complexa. A existência da segunda gradação nos garante q decomposição do operador de de Rham d na diferencial exterior holomorfa ∂ e no operador diferencial exterior anti-holomorfo $\overline{\partial}$. Agora, segundo Gualtieri (6), é possível definir o análogo de $-i\iota_I, \partial$ e $\overline{\partial}$ para variedades complexas generalizadas torcidas.

11

$$J_1 = \begin{bmatrix} \tilde{I} & -\alpha \\ \delta\omega & -\tilde{I}^t \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

Observa-se que $TM \oplus T^*M$ atua em $\Omega^\bullet(M)$ via representação espinorial. Considere o sub-fibrado E em $(TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}}$, definido como um sub-fibrado de uma estrutura complexa generalizada torcida J com respeito ao auto-valor -i, e o seu complexo conjulgado $\overline{E}$. Desde de que E seja isotrópico com respeito à forma bilinear q, pode-se considerar elementos de E como operadores de aniquilação, e elementos de $\overline{E}$ como operadores de criação, que atuam no espaço de Fock fermiônico $\Omega^\bullet(M)$. Em outras palavras, a estrutura complexa J no fibrado vetorial $TM \oplus T^*M$ permite uma identificação entre a álgebra de Clifford gerada por $(TM \oplus T^*M)_{\mathbb{C}}$ com a álgebra fermiônica de criação e destruição gerada por $E \oplus \overline{E}$. Em cada fibra de $\Omega^\bullet(M)$ tem-se que o vetor de vácuo é definido por aquele que é aniquilado pelo sub-fibrado E (a menos de um fator mulpliticativo). Esses vetores de vácuo coincidem com o fibrado de linha complexo U_0 sobre M, o qual é sub-fibrado de $\Omega^\bullet(M)$. Denota-se isto de fibrado de linha canônico da variedade complexa generalizada torcida (M,J). Se J vem de uma estrutura complexa em M, então U_0 é o fibrado das formas do grau holomorfo mais alto. Mas em geral, U_0 não tem grau definido.

Mais geralmente, é possível decompor $\Omega^\bullet(M)$ na soma direta

$$U_0 \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_{2n} \tag{5.59}$$

onde U_0 linha canônica da variedade complexa generalizada torcida (M,J), e $U_k = (\Lambda^k \overline{E})U_0$. Isto é simplestmente a decomposição do espaço fermiônico de Fock nos subespaços com número de férmions. Portanto foi obtido uma graduação para o espaço das formas $\Omega^\bullet(M)$ por números não-negativos k. No caso, quando J vem de uma estrutura complexa I, essa graduação reduz-se em $i\iota_I + n$, onde n é a dimensão complexa de M.
O análogo do operador de de Rham d é o operador de de Rham torcido $d_H = d - H$. Analogamente com os operadores de Dolbeault ∂ e $\overline{\partial}$ são definidos como

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_H &= \pi_{k+1} \circ d_H : \Gamma(U_k) \mapsto \Gamma(U_{k+1}) \\ \partial_H &= \pi_{k-1} \circ d_H : \Gamma(U_k) \mapsto \Gamma(U_{k-1}) \end{aligned} \tag{5.60}$$

Nota-se que todas essas construções ainda fazem sentido ainda que J não seja integrável com respeito ao colchete de Courant torcido. Mas, uma vez que J é integrável no sentido acima, tem-se que $d_H = \partial_H + \overline{\partial}_H$ e vice versa.
A condição de generalizada de Calabi-Yau torcida que foi mencionada acima pode ser formulada em termos do fibrado de linha canônico U_0 (6). Logo uma variedade complexa generalizada torcida é chamada de uma variedade de Calabi-Yau torcida se existe uma seção Ω de U_0 que nunca se anula e é d_H fechada. Como $\partial_H \Omega = 0$ por definição, então a condição se reduz a:

$$\overline{\partial}_H \Omega = 0 \tag{5.61}$$

A parte topológica da condição de Calabi-Yau torcida (i,e a trivialidade topológica do fibrado de linha U_0) é equivalente a $c_1(E) = 0$. A condição 5.61 garante também que a corrente R, necessária para que torção topológica, seja não-anômala. A segunda parte (a existência de uma seção holomorfa torcida Ω) é muito importante também do ponto de vista físico, pois garante que não teremos uma anomalia BRST.
Um questionamento válido é se a segunda parte da condição de Calabi-Yau GT(generalizada

torcida) segue da primeira parte. A resposta para essa pergunta é não, e a intuição para essa resposta vem das variedades de Calabi-Yau ordinárias. Se $c_1(M) = 0$ e M não é simplesmente conexa, pode acontecer que o fibrado de linha canônico não seja o trivial como o fibrado holomorfo de linha. Nesse caso não existe uma seção holomorfa do fibrado de linha canônico que nunca se anula.

5.4.3 Cohomologia de estados e estrutura complexas generalizadas torcidas

Será mostrado que à cohomologia BRST de estado é isomorfa a cohomologia $\overline{\partial}_H$ nas formas diferenciais em variedades CGT(complexas generalizadas torcidas) (M, J_1). Irá ser feito o mesmo procedimento que foi feito anteriormente, será obtido uma fórmula explícita para a graduação do operador em $\Omega^\bullet(M)$, definida na seção anterior, em termos da estrutura CGT J_1. Seja $A = X + \xi \in \Gamma((TM \oplus TM^*)_\mathbb{C})$, nota-se que A pode ser pensada como um endomorfismo de $\Lambda^\bullet TM^*_\mathbb{C}$:

$$A \bullet \rho = \iota_X \rho + \xi \wedge \rho \tag{5.62}$$

Por outro lado, J_1 é um endomorfismo em $(TM \oplus TM^*)_\mathbb{C})$ com auto-valores +i e -i. Por definição, o operador de graduação $R(J_1)$ deve satisfazer

$$[R(J_1), A] = -iJ_1 A \quad \forall \in \Gamma(TM \oplus TM^*)_\mathbb{C}) \tag{5.63}$$

Esta condição determina $R(J_1)$ a menos de uma constante. Usando explicitamente a forma matricial de J_1,

$$J_1 A \bullet \rho = \iota_{\tilde{I}X} + \iota_{\alpha(\xi)} - \iota_X \delta\omega \wedge -\tilde{I}^t(\xi) \wedge \tag{5.64}$$

Agora pode-se verificar que

$$R(J_1) = -i(\delta\omega \wedge -\iota_\alpha - \iota_{\tilde{I}}) \tag{5.65}$$

Do resultado da última seção, pode-se observar a identificação de $Q \leftrightarrow d_H$, e a identificação do espaço de Hilbert com o espaço das formas diferenciais, o gerador da corrente R é identificado com J conforme abaixo

$$J \leftrightarrow R(J_1) + const \tag{5.66}$$

O operador BRST Q_{BRST} torna-se

$$\begin{aligned} Q_{BRST} = \frac{1}{2}(Q + [J, Q]) = \\ \frac{1}{2}(d_H + [R(J_1), d_H]) = \\ \overline{\partial}_H \end{aligned} \tag{5.67}$$

E isto é o resultado desejado.
Agora será possível mostrar que a cohomologia BRST dos operadores é isomorfa à cohomologia do algebroide de Lie de E. Lembrando do fato de que $\overline{\partial}_H$ é o módulo diferencial graduado sobre o algebroide de Lie complexo $(\Lambda^{\bullet}\overline{E})$ e a seguinte identidade é valida para qualquer seção s de $(\Lambda^{\bullet}\overline{E})$ e para qualquer forma diferencial:

$$\overline{\partial}_H(s\rho) = (d_L s)\rho + (-1)^{|s|}s(\overline{\partial}_H\rho) \tag{5.68}$$

Esta identidade é provada em (6) para H=0, mas a prova é valida para casos mais gerais, desde que o espaço das seções de $(\Lambda^{\bullet}\overline{E}, d_L)$ seja identificado com o espaço dos operadores, o espaço das formas diferenciais com o espaço de Hilbert da mecânica quântica supersimétrica, e $\overline{\partial}_H$ com a representação da carga BRST no espaço de Hilbert, portanto segue que

$$[Q_{BRST}, s] = d_L s \tag{5.69}$$

isto implica que a cohomologia de d_L é isomorfa à cohomologia BRST dos operadores.

5.5 Correlações topológicas e estrutura de Frobenius

Para uma teoria de campo N=2 e d=2 pode-se considerar um anel quiral, assim como a cohomologia das super cargas $Q_L + Q_R$ nos estados do setor Ramond, onde último é o módulo sobre o primeiro. Os dois espaços não são isomorfos em geral. Mas se a teoria admite uma torção topológica do tipo B, então os dois espaços são sempre isomorfos, em virtude da correspondência estado-operador em teoria topológica de campos. Mais precisamente, o espaço dos estados em TTC(teoria topológica de campos) 2d é uma álgebra com o produto escalar não degenerado tal que

$$(a, bc) = (ab, c) \tag{5.70}$$

essas álgebras são chamadas de Frobenius. Todas as correlações topológicas podem ser expressas em termos da estrutura de Frobenius no espaço dos estados. Por exemplo, a correlação de genus 0 é dada por

$$< a_1 ... a_n >_{g=0} = (a_1, a_2 ... a_n) \tag{5.71}$$

Considere um modelo sigma N=2, tal que a condição 5.28 é satisfeita, e a carga R $U(1)_A$ é não-anômala. Considere também, que a teoria admita torção topológica, e portanto o anel quiral[12] é uma álgebra supercomutativa de Frobenius. Para executar os cálculos nessa teoria, é necessário que a medida BRST seja invariante na integral de trajetória, e isto exige que o espaço alvo seja uma variedade de Calabi-Yau generalizada torcida, e esta condição é mais forte que 5.28.
Nota-se que o produto escalar de Frobenius (.,.) pode ser recuperado da função traço:

$$Tr(a) = (1, a) \tag{5.72}$$

[12]que é isomorfo à cohomologia do algebroide de Lie E_1

onde (a,b)=Tr(ab). O nome é traço é usado, por que Tr se anula nos comutadores (no caso graduado, se anula com os comutadores graduados). Seja Ω uma forma diferencial $\overline{\partial}_H$ fechada, em cujas componentes U_0, para a variedade CYGT(Calabi-Yau generalizada torcida), esta forma sempre existe.
Considere o automorfismo de fibrados $p : TM \oplus T^*M \mapsto TM \oplus T^*M$

$$p : (v, \xi) \mapsto (v, -\xi), \quad \forall v \in \Gamma(TM), \forall \xi \in \Gamma(T^*M). \tag{5.73}$$

Esse automorfismo leva a forma bilinear q em -q, e os colchetes de Courant torcidos por H para os colchetes de Courant torcidos por -H. Isto vem do seguinte fato, qualquer que seja a estrutura CGT J, tem-se que o mapa de fibrados J'=$p^{-1}Jp$ é também uma estrutura CGT, para o campo H'=-H. Além disso, tem-se que $(M, -H, J')$ é variedade de CYGT se e somente se (M,H,J) também é. Do ponto de vista físico, p corresponde a transformação de paridade da folha-mundo.
Observa-se a seguinte decomposição

$$\Lambda^{\bullet} T^*M \otimes \mathbb{C} = U'_0 \oplus U'_1 \oplus ... \oplus U'_{2n} \tag{5.74}$$

Seja Ω' uma forma diferencial $\overline{\partial}_{H'}$ fechada, onde suas componentes moram em U'_0. Afirmo que a função traço na cohomologia do algebroide de Lie é dada por

$$Tr(\alpha) \cong \int_M \Omega' \wedge \alpha \bullet \Omega \tag{5.75}$$

onde α é a seção de $\Lambda^{\bullet}(E_1^*)$ d_L fechada.

Para calcular essa fórmula, observa-se que o traço de Frobenius é calculado como a integral de trajetória na esfera de Riemann com o operador correspondente a α. Desde que estejamos lidando com uma teoria topológica, deve-se acoplar o campo de calibre U(1) com a corrente R. Este campo de calibre deve ser igual à conexão de spin, ou seja o seu fluxo sobre a esfera deve ser 2π. Vamos deformar a esfera em um 'cilindro longo sem fronteira', então o operador α fica em algum lugar na porção do meio do cilindro. O valor da integral de trajetória não muda com essa mudança, mas o cálculo fica consideravelmente mais fácil para mecânica quântica supersimétrica. A integral de trajetória em cada hemisfério nos dá um estado do setor Ramond-Ramond, o qual pode ser aproximado pela aproximação ponto-partícula pela função dos modos zero fermiônicos. Os modos zero bosônicos são simplesmente as coordenadas de M, enquanto modos zero são ψ^i, tomando valores em $TM_{\mathbb{C}}$. Logo os estados Ramond-Ramond são representados por funções em $\Pi TM_{\mathbb{C}}$, i.e formas diferenciais complexas.

Foi descrito acima como α atua nas formas diferenciais, falta agora identificar o caso particular dos estados R-R que surgem da integral de trajetória sobre cada hemisfério, e depois integrá-los sobre os modos zeros. Desde de que não inserimos nenhum operador em algum hemisfério, o estado fundamental R-R em questão é o fluxo espectral do único estado de vácuo do setor NS, e portanto na aproximação ponto-partícula é representado pela forma Ω definida acima. No entanto, existe uma sutileza relacionada a escolha da orientação. Esta sutileza surge, pois a identificação dos estados R-R com as formas diferencias depende da orientação: trocar os movimentos fermiônicos à esquerda pelos movimentos fermiônicos à direita é equivalente a executar a dualidade de Hodge nas formas. Em linguagem física, a dualidade de Hodge é simplemente a transformada de Fourier dos modos zero fermiônicos. Ao induzir as orientações de ambos os hemisférios com a orientação global da esfera de Riemann, então tem-se que as funções de onda de um hemisfério serão as funçoes dos modos zero fermionicas ψ^i, enquanto que a função de onda do outro hemisferio será os modos zero duais (no sentido de Fourier). Para calcular a integral de trajetória, primeiro aplique a transformada de Fourier no segundo estado, e apenas depois multiplique pela função de onda e integre sobre os modos zero. Alternativamente, pode-se escolher a orientação oposta para o segundo hemisfério, dessa forma não existe necessidade de usar a transformada de Fourier. Isso também requer que o sinal de H seja trocado, uma vez que a paridade não é invariante. Conclui-se que a função de onda a partir do segundo hemisfério é dada por Ω', e a integral de trajetória em questão é dada por

$$Tr(\alpha) \cong \int_M \Omega' \wedge \alpha \bullet \Omega \tag{5.76}$$

É necessário checar se essa fórmula é invariante BRST, i.e que se anula se $\alpha = d_L\beta$ para algum β. Com efeito, tem-se

$$Tr(d_L\beta) = \int_M \Omega' \wedge \overline{\partial}_H(\beta \bullet \Omega) = \int_M \Omega' \wedge [R(J_1), d_H](\beta \bullet \Omega) \tag{5.77}$$

Agora utilizando as identidades válidas para quaisquer que sejam γ, η:

$$\begin{aligned} \int_M \gamma \wedge d_H \eta &= -(-1)^{|\gamma|} \int_M (d'_H \gamma) \wedge \eta \\ \int_M \gamma \wedge R(J_1)\eta &= -\int_M (R(J'_1)\gamma) \wedge \eta \end{aligned} \tag{5.78}$$

onde H'=-H, e J'=$p_{-1}Jp$. Então

$$\begin{aligned} Tr(d_L\beta) &= -(-1)^{|\Omega'|} \int_M ((d_{H'} + [R(J'_1), d_{H'}])\Omega') \wedge \beta \bullet \Omega \\ &= -(-1)^{|\Omega'|} \int_M \overline{\partial}_{H'}\Omega' \wedge \beta \bullet \Omega = 0 \end{aligned} \tag{5.79}$$

Agora nota-se que esta fórmula reduz-se às expressões conhecidas no caso dos modelos A e B ordinários com H = 0 e $I_+ = I_-$. Para o modelo B ordinário, $J'_1 = J_1$,$\Omega' = \Omega$, e a forma Ω é simplesmente a forma diferencial holomorfa de grau mais alto em M. Logo a nossa fórmula para a função traço reduz-se à fórmula padrão para o modelo B (20). Para A-modelo, a situação é mais interessante. A estrutura complexa generalizada relevante é J_2, e tem-se que $J'_2 = -J_2$. e as formas Ω', Ω são dadas por

$$\Omega = e^{i\omega}, \quad \Omega' = e^{-i\omega} \tag{5.80}$$

O algebroide de Lie para o modelo A é isomorfo à $TM_{\mathbb{C}}$, portanto a cohomologia do algebroide de Lie é isomorfo a cohomologia de de Rham complexa. E a fórmula usual para o traço de Frobenius em $H^\bullet(M)$ é

$$Tr(\beta) = \int_M \beta, \quad ,\beta \in \Omega^\bullet(M), d\beta = 0. \tag{5.81}$$

Isso não parece concordar com nossa fórmula. Mas deve-se ter em mente que a identificação entre a cohomologia do algebroide de Lie e a cohomologia de de Rham não é trivial, como resultado, embora o fibrado $\Lambda^\bullet E_2^*$ seja isomorfo a $\Omega^\bullet(M)$, tem-se que a ação em $\Omega^\bullet(M)$ sobre si mesma de $\Lambda^\bullet E_2^*$ sobre $\Omega^\bullet(M)$ não é dado pelo produto exterior. Para descrever essa ação, identifique o espaço das seções de $\Omega^\bullet(M)$ com a supervariedade graduada ΠTM. Seja $\alpha \in \Omega^k(M)$, dado por

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{a_1..a_k} dx^{a_1} \wedge ... \wedge dx^{a_k}. \tag{5.82}$$

A ação que estamos procurando é obtida através da associação de α ao seguinte operador diferencial sobre ΠTM:

$$\frac{1}{k!}\alpha_{a_1..a_k} D^{a_1}...D^{a_k} \tag{5.83}$$

onde

$$D^a = \theta^a + i(\omega^{-1})^{ab}\frac{\partial}{\partial\theta^b}. \tag{5.84}$$

A descrição do modelo A em termos da ação em $\Omega^\bullet(M)$ nela mesma é dado pelo produto externo(mais correções quânticas, as quais foram omitidas no artigo base (8)).
A diferença entre a descrição do modelo A de (8) e a descrição usual é devido à identificação dos campos fermiônicos com os operadores sobre as formas diferenciais. Enquanto identificamos ψ^a com operadores "criação" dx^a e ρ^a com os operadores de "aniquilação", a identificação usual é diferente:

$$\psi_+^{\bar{i}} \mapsto dx^{\bar{i}}, \quad \psi_-^{i} \mapsto dx^{i}, \quad g_{\bar{i}j}\psi_+^{j} \mapsto \iota_{\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}}, \quad g_{\bar{j}i}\psi_+^{\bar{i}} \mapsto \iota_{\frac{\partial}{\partial x^{i}}} \tag{5.85}$$

Esta escolha está relacionada com a do artigo (8) por uma transformação de Bogolyubov. Na descrição usual do estado de vácuo com a menor carga R de $J_L - J_R$ é dado pela 0-forma constante em M. É fácil de ver que a transformação Bogolyubov mapeia isto para a forma não homogênea $e^{i\omega}$. A mesma transformação também mapeia o grau de uma forma diferencial para a graduação não usual em $\Omega^\bullet$(M) definida em (6). Assim, a nossa fórmula concorda com a padrão, após uma transformação Bogolyubov (e se as correções quânticas forem negligenciadas).

5.6 Cohomologia do anel quântico generalizado torcido

Até agora só foi discutida a estrutura do anel clássico sobre o espaço de observáveis topológicos. Em geral, a estrutura do anel real é deformado pelos efeitos quânticos. Um exemplo bem

conhecido é o modelo A padrão, cujo anel de observáveis são invariantes BRST (o anel cohomologia quântica) é uma deformação do anel cohomologia de Rham $H^{\bullet}(M,\mathbb{C})$ induzida pelos instantons da folha-mundo. Nesta seção, será realizada uma análise para um modelo sigma topológico torcido com H-fluxo, e serão identificados os instantons da folha-mundo que podem contribuir para a deformação da estrutura do anel. Esta seção é essencialmente uma extensão das analises feitas na seção 8.2 da (19) no caso de $H \neq 0$.
Como é bem conhecido, a integral de trajetória da (cohomológica) TCT pode ser localizada em torno das configurações de campo invariantes Q_{BRST} (20). Para o nosso modelo B generalizado, as variações BRST de alguns dos campos já são dados na Eq 5.39. Serão necesárias as seguintes transformações BRST para $(1-iI_{\pm})\psi_{\pm}$:

$$\begin{aligned} \{Q_{BRST}, \frac{1}{2}(1-iI_{+})\psi_{+}\} &= \frac{i}{2}(1-iI_{+})\partial_{+}\phi + \ldots \\ \{Q_{BRST}, \frac{1}{2}(1-iI_{+})\psi_{+}\} &= -\frac{1}{2}(1-iI_{-})\partial_{-}\phi + \ldots \end{aligned} \tag{5.86}$$

onde os pontos envolvem termos bilineares fermiônicos. As configurações invariantes BRST são dadas definindo os campos fermiônicos $\psi_{\pm}$ como nulos e exigindo que

$$\frac{1}{2}(1-iI_{+})\partial_{+}\phi = 0, \quad \frac{1}{2}(1-iI_{-})\partial_{-}\phi = 0 \tag{5.87}$$

Em termos da estrutura complexa generalizada, a equação acima é equivalente a

$$\frac{1}{2}(1-iJ_1)\begin{bmatrix} \partial_1\phi \\ g(\partial_0\phi) \end{bmatrix} = 0 \tag{5.88}$$

Esta é a mesma equação do instanton tal como a obtida no Exemplo de (19) no caso de H = 0, e os resultados de (19) para caso de (8). Para conveniência do leitor, foram resumidas abaixo. Para encontrar instantons euclideanos, foi feita a rotação de Wick $\partial_0 \mapsto i\partial_2$ de acordo com (19). A E.q 5.88 então conduz às seguintes equações

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}\partial_1\phi &= 0, & \partial_1\phi &= -\delta I\partial_2\phi \\ \tilde{\omega}\partial_2\phi &= 0, & \partial_2\phi &= \delta I\partial_1\phi \end{aligned} \tag{5.89}$$

Não é díficil de ver que as soluções das Eq 5.89 são mapas holomorfos generalizados torcidos com respeito a J_2. O significado preciso dessa afirmação é a seguinte. A diferencial dϕ é composta pelo mergulho natural $j : TM \mapsto TM \oplus T^{*}M$ definindo o mapa

$$j \circ d\phi : T\Sigma \mapsto TM \oplus T^{*}M$$

Eq. 5.89, em seguida, diz que $j \circ d\phi$ entrelaça a estrutura J_2 estrutura complexa na folha-mundo I_{Σ}. Isto é,

$$J_2(j \circ d\phi) = j \circ d\phi I_{\Sigma} \tag{5.90}$$

Soluções desta equação generalizam ambos os mapas holomorfos do modelo A e os mapas constantes do modelo B.
Em termos gerais, a estrutura do anel dos observáveis topológicos pode admitir correções quânticas não-triviais provenientes desses instantons da folha-mundo. Não vamos tentar descrever

estas correções mais precisamente aqui. Mas note que para uma estrutura CGT genérica J_2 a equação do instanton holomorfo generalizado torcido é muito mais restritiva do que a equação do instanton holomorfo usual. Com efeito, ele requer que a imagem de TΣ sobre $d\phi$ fique dentro do Núcleo do mapa $\tilde{\omega}$. Para uma J_2 qualquer e num ponto genérico de M a 2-forma $\tilde{\omega}$ é não degenerada, e por isso esta condição não permite instantons não constantes. Em outras palavras, todos os instantons não triviais devem estar contidos na subvariedade onde $\tilde{\omega}$ é degenerada. Os casos extremos são o modelo B-usual, onde $\tilde{\omega}$ é uma forma simpléctica e não há instantons não triviais, e o modelo A, onde $\tilde{\omega}$ é identicamente nula.

CAPÍTULO 6

Conclusão

Nesta dissertação foi estudada o setor topológico (2, 2) dos modelos sigma com fluxo H. Verificou-se que os resultados são muito convenientemente formulados em termos de estruturas complexas generalizadas torcidas. Por exemplo, a geometria do espaço espaço alvo de um modelo sigma (2,2) é a Kähler generalizada, e o anel quiral é isomorfo (no nível clássico) às cohomologias de um certo algebroide de Lie que está associado a uma estrutura complexa generalizada torcida. No nível quântico, os dois anéis são isomorfos como espaços vetoriais, mas as estruturas de anel podem ser diferentes devido a instantons da folha-mundo.

Espera-se que esta dissertação de mestrado tenha cumprido com o seu papel de explorar um assunto não trivial e ao mesmo tempo interessante, que certamente contribuiu muito para o aprendizado do autor sobre o assunto, e que possa futuramente servir para outros alunos.

Referências Bibliográficas

1 COLEMAN, S.; MANDULA, J. All possible symmetries of the s matrix. *Physical Review*, 1967, APS, v. 159, n. 5, p. 1251, 1967.

2 HAAG, R.; ŁOPUSZAŃSKI, J. T.; SOHNIUS, M. All possible generators of supersymmetries of the s-matrix. *Nuclear Physics B*, 1975, Elsevier, v. 88, n. 2, p. 257–274, 1975.

3 ZUMINO, B. Supersymmetry and kähler manifolds. *Physics Letters B*, 1979, Elsevier, v. 87, n. 3, p. 203–206, 1979.

4 ALVAREZ-GAUME, L.; FREEDMAN, D. Z. Geometrical structure and ultraviolet finiteness in the supersymmetric σ-model. *Communications in Mathematical Physics*, 1981, Springer, v. 80, n. 3, p. 443–451, 1981.

5 GATES, S.; HULL, C. M.; ROCEK, M. Twisted multiplets and new supersymmetric nonlinear σ-models. *Nuclear Physics B*, 1984, Elsevier, v. 248, n. 1, p. 157–186, 1984.

6 GUALTIERI, M. Generalized complex geometry. *arXiv preprint math/0401221*, 2004, 2004.

7 WITTEN, E. Mirror manifolds and topological field theory. *arXiv preprint hep-th/9112056*, 1991, 1991.

8 KAPUSTIN, A.; LI, Y. et al. Topological sigma-models with h-flux and twisted generalized complex manifolds. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2007, International Press of Boston, v. 11, n. 2, p. 269–290, 2007.

9 GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring theory: volume 1, Introduction, Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1987.

10 SIEGEL, W. Manifest lorentz invariance sometimes requires non-linearity. *Nuclear Physics B*, 1984, Elsevier, v. 238, n. 2, p. 307–316, 1984.

11 HATCHER, A. *Algebraic topology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.

12 HUGGETT, S. A.; TOD, K. P. *An introduction to twistor theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.

13 CHEVALLEY, C.; CARTIER, P.; CHEVALLEY, C. *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras: Collected Works, Volume 2*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1997.

14 COURANT, T. J. Dirac manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1990, v. 319, n. 2, p. 631–661, 1990.

15 FERNANDES, R. L. Lie algebroids, holonomy and characteristic classes. *Advances in Mathematics*, 2002, Elsevier, v. 170, n. 1, p. 119–179, 2002.

16 LIU, Z.-J. et al. Manin triples for lie bialgebroids. *J. Differential Geom*, 1997, v. 45, n. 3, p. 547–574, 1997.

17 LEE, J. *Introduction to topological manifolds*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.

18 ALEKSEEV, A.; STROBL, T. Current algebras and differential geometry. *Journal of High Energy Physics*, 2005, IOP Publishing, v. 2005, n. 03, p. 035, 2005.

19 KAPUSTIN, A. Topological strings on noncommutative manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2004, World Scientific, v. 1, n. 01n02, p. 49–81, 2004.

20 WITTEN, E. Mirror manifolds and topological field theory. *arXiv preprint hep-th/9112056*, 1991, 1991.

21 HITCHIN, N. Generalized calabi–yau manifolds. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 2003, Oxford Univ Press, v. 54, n. 3, p. 281–308, 2003.

22 GRACIA-SAZ, A.; MEHTA, R. A. Lie algebroid structures on double vector bundles and representation theory of lie algebroids. *Advances in Mathematics*, 2010, Elsevier, v. 223, n. 4, p. 1236–1275, 2010.

23 VONK, M. A mini-course on topological strings. *arXiv preprint hep-th/0504147*, 2005, 2005.

24 ROHM, R.; WITTEN, E. The antisymmetric tensor field in superstring theory. *Annals of Physics*, 1986, Elsevier, v. 170, n. 2, p. 454–489, 1986.

25 BERTLMANN, R. A. *Anomalies in quantum field theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 2000.

26 BIRMINGHAM, D. et al. Topological field theory. *Physics Reports*, 1991, Elsevier, v. 209, n. 4, p. 129–340, 1991.

27 LAWSON, H. B.; MICHELSOHN, M.-L. *Spin geometry*. [S.l.]: Oxford Univ Press, 1989.

28 CAVALCANTI, G. R. The decomposition of forms and cohomology of generalized complex manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 2006, Elsevier, v. 57, n. 1, p. 121–132, 2006.

29 DELIUS, G. W. et al. Supersymmetric sigma models with non-vanishing nijenhuis tensor and their operator product expansion. *Nuclear Physics B*, 1989, Elsevier, v. 324, n. 2, p. 523–531, 1989.

30 FINO, A.; TOMASSINI, A. et al. Non-kähler solvmanifolds with generalized kähler structure. *Journal of Symplectic Geometry*, 2009, International Press of Boston, v. 7, n. 2, p. 1–14, 2009.

31 SIMMS, D. F. hirzebruch, topological methods in algebraic geometry. with new appendix. translated from the 2nd german edition by rle schwarzenberger, with an additional section by a. borel.(springer-verlag, berlin-heidelberg-new york, 1966), xii+ 232 pp., dm 38. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 1968, Cambridge Univ Press, v. 16, n. 01, p. 85–85, 1968.

32 HITCHIN, N. et al. Brackets, forms and invariant functionals. *Asian Journal of Mathematics*, 2006, International Press of Boston, v. 10, n. 3, p. 541–560, 2006.

33 HULL, C. et al. Topological sigma models with h-flux. *Journal of High Energy Physics*, 2008, IOP Publishing, v. 2008, n. 09, p. 057, 2008.

34 KOSMANN-SCHWARZBACH, Y. Derived brackets. *Letters in Mathematical Physics*, 2004, Springer, v. 69, n. 1, p. 61–87, 2004.

35 WIT, B. de; NIEUWENHUIZEN, P. V. Rigidly and locally supersymmetric two-dimensional nonlinear σ-models with torsion. *Nuclear Physics B*, 1989, Elsevier, v. 312, n. 1, p. 58–94, 1989.

36 SALAM, A.; STRATHDEE, J. Superfields and fermi-bose symmetry. *Physical Review D*, 1975, APS, v. 11, n. 6, p. 1521, 1975.

37 SCHOTTENLOHER, M. *A mathematical introduction to conformal field theory*. [S.l.]: Springer, 2008.

38 OLVER, P. J.; POHJANPELTO, J. Differential invariant algebras of lie pseudo-groups. *Advances in Mathematics*, 2009, Elsevier, v. 222, n. 5, p. 1746–1792, 2009.

39 ZUCCHINI, R. The bihermitian topological sigma model. *Journal of High Energy Physics*, 2006, IOP Publishing, v. 2006, n. 12, p. 039, 2006.