



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

HUGO DE ANDRADE ARAÚJO

TRANSIÇÕES DE FASE DO MODELO DE FORAGING E DIFUSÃO ANÔMALA

Recife
2013

HUGO DE ANDRADE ARAÚJO

**Transições de Fase do Modelo de Foraging e Difusão
Anômala**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Recife
2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB4-572

A663t Araújo, Hugo de Andrade.
Transições de fase do modelo de Foraging e difusão anômala / Hugo de Andrade Araújo. – Recife: O Autor, 2013.
98 f.: fig., tab.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2013.
Inclui referências.

1. Física estatística. 2. Transformações de fase (Física estatística). I. Raposo, Ernesto Carneiro (Orientador). II. Título.

530.1595 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-40



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Hugo de Andrade Araújo

TRANSIÇÕES DE FASE DO MODELO DE FORAGING E DIFUSÃO ANÔMALA

A Banca Examinadora composta pelos Professores Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (Presidente e Orientador), Paulo Roberto de Araújo Campos, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Adriano Mesquita Alencar, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

Aprovado Reprovado Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em sete de fevereiro de dois mil e treze.

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Presidente e Orientador

Prof. Paulo Roberto de Araújo Campos

Prof. Adriano Mesquita Alencar

À minha mãe, Ana

Agradecimentos

Primeiramente, a meu orientador Ernesto Raposo, sem o qual esse trabalho, não seria possível. Obrigado por ter me ensinado tanto, sempre de forma paciente e dedicada, não só no campo acadêmico mas também como ter senso crítico e profissionalismo.

A minha família, por ter sempre me apoiado nos momentos difíceis, e por ter sempre vibrado nos momentos felizes. Vocês tornaram a superação de cada obstáculo muito mais fácil, vocês são meu porto seguro. Devo tudo a vocês.

A todos do laboratório, que me deram um número enorme de dicas, opiniões e sugestões. Em especial, Leonardo Medeiros, Prof. René Montenegro, Karlla Lima, Eglânio Pessoa e Luiz Silva. Desde dos primeiros períodos da IC até hoje, vocês estavam lá pra me ajudar. Obrigado.

Aos amigos que fiz no DF. Amizades que tenho certeza durarão muitos anos. Em especial, Allan Genú, pelas conversas intermináveis e por tudo que você me ensinou, Rebeca Holanda, por ser sempre tão carinhosa, Tiago Araújo, por muitas vezes me dar uma dose de bom senso, Tiago Anselmo, pela sua gentileza inabalável, Thiago Sobral, por melhorar meu senso crítico com os Encontros Fractais, Leonardo Medeiros, por tudo que você me ensinou, Brenda Penante, pelo seu humor ácido e suas inúmeras provas de amizade, Tiago Saraiva e Rafael Liberalquino, por me ensinarem tanto de música e física, Luiz Eduardo Queiroz, pelas conversas sempre animadoras.

A todos da Associação de Kendo do Recife, onde descobri bons amigos e aprendi de verdade o que é dedicação. Luís César, Gustavo Gouveia, Júlio Campos, Yusuke Moryia, Manuela Carvalho, Anderson Lopes, Antônio Paim, Cléber Moraes, Cleano Cavalcante e Ricardo Neves, meu muito obrigado. Vocês não imaginam como me ajudaram.

Eu tô te explicando pra te confundir, Eu tô te confundindo pra te esclarecer
-TOM ZÉ

Resumo

Nesta Dissertação estudamos a dinâmica energética das buscas aleatórias aplicadas ao problema de *foraging*, em que animais buscam por comida ou parceiros em ambientes escassos. Discutiremos, inicialmente, um modelo estatístico de caminhadas aleatórias utilizando as distribuições de Lévy para os tamanhos dos passos de busca, as quais têm sido reportadas na literatura como estratégias de eficiência ótima para o problema. Em seguida vamos incluir no modelo ganhos e perdas de energia na caminhada aleatória de busca, e abordaremos a dinâmica energética do processo de busca unidimensional com extremos absorventes. Vamos discutir a transição de fase que o buscador experimenta de um estado ativo (“vivo”), típico de ambientes com abundância de recursos, para um estado estático absorvente (“morto”), onde a busca é encerrada pela falta de energia oriunda do encontro de recursos. Obteremos os expoentes críticos relativos a essa transição através de abordagens teóricas, tais como o método de primeira passagem para o estado de energia nula, e numéricas, baseadas na hipótese de escala. Mostraremos a independência destes expoentes com a forma funcional da função gasto de energia. Por fim, faremos uma breve revisão da literatura sobre a equação de Fokker-Planck canônica e também sobre as suas versões utilizando derivadas fracionárias, numa preparação para uma futura abordagem, durante o programa de Doutorado, do problema da busca aleatória envolvendo difusões anômalas (por exemplo, superdifusão) via equações diferenciais.

Palavras-chaves: Caminhadas Aleatórias. Distribuição de Lévy. *Foraging*. Transições de fase. Equação de Fokker-Planck

Abstract

In this work we study the energy dynamics of random searches applied to the foraging problem, in which animals search for food or mates in scarce environments. Firstly, we discuss a statistical model of random search walks using the Lévy distribution of step lengths, which has been reported in the literature as an optimal solution to the problem. In the sequence we include in the model energy gains and losses during the search walk, and discuss the energy dynamics of the search process in a one dimensional space with absorbing boundaries. We discuss the phase transition that the searcher experiences from an active (“alive”) state, typical of environments abundant in resources, to a static absorbed (“dead”) one, in which the search is terminated due to the lack of energy obtained from the encounters. We obtain the critical exponents for this transition through both theoretical (such as the first-passage method to the state of zero energy) and numerical approaches, based on the scale hypothesis. We show the independence of the exponents with the functional form of the energy cost. Finally, we provide a brief review of the literature on the canonical Fokker-Planck equation and also on its version using fractional derivatives, in a preparation for a future approach of the random search problem involving anomalous diffusion (e.g., superdiffusion) through differential equations during the Ph.D. program.

Keywords: Random Walks. Lévy Distribution. Foraging. Phase Transition. Fokker-Planck Equation

Lista de figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 – Representação das áreas das integrais na Eq. (1.52). | 27 |
| Figura 2.1 – Representação esquemática da trajetória de caminhantes aleatórios realizando (a) movimento browniano e (b) vôos de Lévy. Note a presença de grandes passos para distribuição de Lévy, os quais geram uma maior difusão do caminhante pelo espaço. | 34 |
| Figura 2.2 – Representação esquemática do modelo de busca em duas dimensões. Em (a) observamos o caminhante se deslocando para um sítio dentro de seu raio de visão e em (b) mostramos o sorteio dos passos e a procura contínua pelos sítios dentro do raio de visão r_v | 36 |
| Figura 2.3 – Produto da distância média entre os sítios, λ , e a eficiência da busca, η , em função do parâmetro μ da distribuição de Lévy, para diferentes valores de λ numa busca unidimensional. Os resultados foram obtidos (a) analiticamente e (b) por simulação numérica. | 37 |
| Figura 2.4 – Representação esquemática do espaço de busca para um caminhante unidimensional. | 39 |
| Figura 2.5 – Eficiência da busca, η , em função do parâmetro μ da distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos, no caso de busca destrutiva. São mostrados os resultados analíticos com discretização do espaço de busca (linha sólida) e de simulação numérica das regras do modelo (símbolos), utilizando os parâmetros $\lambda = 1000$, $r_v = l_0 = 1$, $\Delta x = 0.5$, $x_0 = \lambda/2$ e simulações mediadas sobre 10^7 caminhadas. Observamos que a eficiência máxima ocorre para caminhadas balísticas com $\mu \rightarrow 1$ | 46 |
| Figura 2.6 – Eficiência da busca, η , em função do parâmetro μ da distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos, no caso de busca não-destrutiva. São mostrados os resultados analíticos com discretização do espaço de busca (linha sólida) e de simulação numérica das regras do modelo (símbolos), utilizando os parâmetros $\lambda = 1000$, $r_v = l_0 = 1$, $\Delta x = 0.5$, $x_0 = r_v + 1$ e simulações mediadas sobre 10^7 caminhadas. Observamos que a eficiência máxima ocorre para caminhadas superdifusivas com $\mu \approx 2$ | 47 |

| | |
|---|----|
| Figura 3.1 – Comparação das curvas numéricas para $\langle L \rangle(x)$ em função da posição inicial x com a aproximação utilizada para os cálculos analíticos, para diversos valores de μ , $\lambda = 1000$ e $r_v = 1$. Destacamos a boa concordância para $\mu < 2$, onde $A(\lambda, \mu) = 1$, e a necessidade do ajuste para $\mu > 2$, onde $A(\lambda, \mu) \neq 1$ | 52 |
| Figura 3.2 – Energia acumulada normalizada, ψ , em função de $\rho = g/\lambda$, para as abordagens analíticas e numéricas do caso linear. A simulação (CB+CS) indica uma média sobre 10^4 buscas que são interrompidas pelo encontro de N_f sítios ou por atingir um valor nulo de energia acumulada. A simulação (CB) indica uma média sobre 10^4 buscas que são interrompidas apenas pelo encontro de N_f sítios. Resultados obtidos para $\mu = 1.1, 1.5, 2.01, 2.5, 2.9$, e parâmetros $g = 100, r_v = 1, \alpha = 1, l_0 = 1$ e $N_f = 1000$ | 56 |
| Figura 3.3 – Taxa de sobrevivência, $\Gamma(n, \chi)$, em função de $\chi = \lambda/g$, para diversos valores n e μ , no caso numérico de custo energético linear. Os parâmetros utilizados foram $g=100, r_v=1, l_0=1$, e $\alpha=1$, sendo realizadas médias sobre 500 réplicas de buscas de 30000 sítios. | 62 |
| Figura 3.4 – Taxa de sobrevivência, $\Gamma(n, \lambda)$, em função de $\chi = \lambda/g$, para diversos valores de n e três valores de μ , no caso numérico de custo energético quadrático. Os parâmetros utilizados foram $g=300, r_v=1, l_0=1$, e $\alpha=0.01$, sendo realizadas médias sobre 100 réplicas de buscas de 30000 sítios. | 64 |
| Figura 3.5 – Função auxiliar K em função de $\chi=\lambda/g$ para vários valores de μ , com $n_0 = 400$ e $n=1000, 5000, 10000, 15000, 20000, 25000, 30000$, no caso numérico de custo energético linear. Para todos os valores de μ obtemos $\beta/\mu \approx 0.5$. Foram usados como parâmetros $g=100, r_v = l_0=1$ e $\alpha=1$, sendo realizadas médias sobre 500 réplicas de buscas de 30000 sítios. | 65 |
| Figura 3.6 – Função auxiliar K em função de $\chi=\lambda/g$ para dois valores de μ , com $n_0 = 400$ e diversos valores de n , no caso numérico de custo energético quadrático. Para todos os valores de μ obtemos $\beta/\mu \approx 0.5$. Foram usados como parâmetros $g=300, r_v=1, l_0=1$ e $\alpha=0.01$, sendo realizadas médias sobre 100 réplicas de buscas de 30000 sítios. | 66 |
| Figura 3.7 – Gráfico log-log da função auxiliar h em função de n/n_0 para $n_0=400$ e diversos valores de μ , no caso numérico de custo energético linear, levando a $\nu \approx 2$. A curva azul representa o caso $\chi = \chi_c$. Os parâmetros utilizados foram $g=100, r_v=1, l_0=1$ e $\alpha=1$, sendo realizadas médias sobre 500 réplicas de buscas de 30000 sítios. | 67 |

| | |
|--|----|
| Figura 3.8 – Gráfico log-log da função auxiliar h em função de n/n_0 para $n_0=400$ e dois valores de μ , no caso numérico de custo energético quadrático, levando a $\nu \approx 2$. A curva azul representa o caso $\chi = \chi_c$. Os parâmetros utilizados foram $g=300$, $r_v=1$, $l_0=1$ e $\alpha=0.01$, sendo realizadas médias sobre 100 réplicas de buscas de 30000 sítios. | 68 |
| Figura 4.1 – Gráfico esquemático de uma CTRW: as linhas contínuas representam os deslocamentos espaciais do caminhante aleatório, enquanto as linhas tracejadas mostram o tempo de espera. | 79 |
| Figura 4.2 – Análise temporal da função $(1/P(0,t))^2$ para $D_1 = D_\mu = 1$, com (a) $\mu=1/2$ e (b) $\mu = 3/2$ | 92 |

Sumário

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 15 |
| 1.1 | Transições de Fase e Hipótese de Escala | 17 |
| 1.2 | Teorema do Limite Central | 20 |
| 1.3 | Teorema do Limite Central Generalizado | 23 |
| 1.4 | O Problema de Primeira Passagem | 25 |
| 2 | Buscas Aleatórias | 32 |
| 2.1 | Distribuição de Lévy | 32 |
| 2.2 | Modelo de Busca | 34 |
| 2.3 | Eficiência das buscas | 36 |
| 2.4 | Análise do Modelo Unidimensional | 38 |
| 3 | Dinâmica Energética | 48 |
| 3.1 | Modelos de Busca | 48 |
| 3.2 | Taxa de Sobrevivência | 58 |
| 3.3 | Análise Numérica | 61 |
| 4 | Difusão Anômala | 69 |
| 4.1 | Equação de Fokker-Planck | 69 |
| 4.1.1 | Solução da Equação de Fokker-Planck | 72 |
| 4.1.2 | Difusividade | 78 |
| 4.2 | Da CTRW à Equação de Fokker-Planck Fracionária | 79 |
| 4.2.1 | Caso difusivo | 81 |
| 4.2.2 | Caso Subdifusivo | 83 |
| 4.2.3 | Caso Superdifusivo | 85 |
| 4.3 | Verificação do comportamento dinâmico anômalo | 86 |
| 4.3.1 | Derivada fracionária temporal e subdifusão | 86 |
| 4.3.2 | Derivada espacial fracionária e superdifusão | 89 |
| 5 | Conclusões e Perspectivas | 94 |

Referências¹ 96

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

1 Introdução

Seja um conjunto de objetos distribuídos aleatoriamente cuja localização não nos é conhecida. Qual é a forma mais eficiente de buscá-los? Pode-se dizer que esta é uma formulação matemática para um problema originalmente biológico, também conhecido como o problema de *foraging* [1]: porque os indivíduos se movimentam de uma dada maneira ao realizar uma busca por elementos cuja localização é desconhecida, particularmente no caso em que tais elementos encontram-se escassamente distribuídos? Que vantagem eles ganham a partir deste tipo de comportamento? Estas perguntas são o foco de estudo da *movement ecology*. Apesar da motivação de origem biológica ou ecológica, o estudo dessa área também leva naturalmente a tópicos e conceitos pertencentes ao domínio da Física Estatística, tais como os processos estocásticos e a teoria de caminhadas aleatórias, dentre outros. Estas conexões devem-se em parte ao fato de que a análise das trajetórias de vários grupos de animais em processos de busca por recursos em ambientes escassos revela um comportamento claramente não-gaussiano [2, 3, 4, 5]. Esta característica por sua vez remete ao Teorema do Limite Central Generalizado e a processos de difusão anômala, como descritos a seguir.

Historicamente, a abordagem ao problema de *foraging* parte na segunda metade da década de 1960 da chamada *optimal foraging theory* [1]. Esta teoria tenta levar em conta vários ingredientes, tais como diversas classes de predadores, habilidades de predação, tempo para matar e ingerir a presa, etc., na elaboração de uma estratégia que maximize o ganho energético. O grande número de parâmetros deste formalismo dificultava a elaboração de previsões ou a realização de testes de campo [1].

A partir dos anos 1990, a colaboração interdisciplinar entre físicos e biólogos levou à introdução de novas abordagens, principalmente com o uso de técnicas de Física Estatística que possibilitaram um grande avanço na área. Nesse contexto, vários modelos teóricos foram propostos [1, 6]. Dentre eles, citamos as caminhadas aleatórias com correlação (*correlated random walks*) [7], os modelos de buscas intermitentes (*intermittent searches*) [8] e os vãos ou caminhadas de Lévy (*Lévy flights or walks*) [9, 10]. Todos eles são baseados na premissa de que os animais, por não terem um conhecimento total do ambiente ao seu redor, se movimentam como caminhantes aleatórios.

Mais especificamente, nas *correlated random walks* é introduzida uma correlação entre a direção dos passos [7] numa tentativa de reproduzir o comportamento animal de

manter-se em uma dada direção, ou seja, de seguir em frente. Essa correlação é dita de curto alcance pois, para tempos muito grandes, maiores que o tempo característico do sistema, os passos se tornam decorrelacionados e a estatística da caminhada obedece o Teorema do Limite Central (ver a seguir), sendo regido por uma distribuição Gaussiana de densidades de probabilidades de distâncias ao ponto de partida.

Por outro lado, as buscas ou caminhadas intermitentes são caracterizadas pela existência de duas fases [8]: uma fase onde ocorre a realocação do caminhante via saltos maiores, tipicamente sem a ocorrência de busca, e outra na qual é de fato realizada a busca, geralmente caracterizada por passos de tamanhos menores. O tempo de permanência em cada fase é uma variável importante para a otimização da busca. Como exemplo, temos as caminhadas brownianas compostas (*composite Brownian walks*) [11].

Os vôos ou caminhadas de Lévy utilizam por sua vez a distribuição de Lévy, ou mais precisamente a sua forma assintótica do tipo lei de potência, para reger o sorteio dos tamanhos dos passos [9, 10]. Por ser uma lei de potência, $P(l) \propto l^{-\mu}$, essa distribuição pode possuir momentos divergentes, o que implica em superdifusão. Este comportamento pode ser controlado através do expoente μ da lei de potência da função densidade de probabilidade dos tamanhos de passos. De fato, como veremos a seguir, para valores pequenos, $\mu \rightarrow 1$, o movimento do buscador é balístico, enquanto que para $\mu \geq 3$ temos um comportamento difusivo. Deste modo, o expoente μ permite o controle da convergência, ou não, para o Teorema do Limite Central.

Neste trabalho vamos focar no estudo das *Lévy walks* [9] como estratégias de busca devido ao grande número de espécies que parecem utilizar esse padrão de movimentação como um modo eficiente de encontro de recursos em ambientes escassos [10]. Do ponto de vista analítico, a forma funcional simples da distribuição do tipo lei de potência também nos permitirá explorar várias características do problema, incluindo a difusividade do caminhante aleatório. Além disso, o fato do Teorema do Limite Central Generalizado garantir que distribuições convergem para a distribuição de Lévy dá a sua utilização um caráter mais geral [1]. Assim, vamos analisar na presente Dissertação como se dá a dinâmica energética de um caminhante utilizando a distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos da busca, mostrando que existe a transição de uma fase “vivo” para uma fase “morto” e calculando os expoentes críticos para uma função de gasto energético genérica, de ambas as formas analítica e numérica, generalizando desse modo os trabalhos anteriores do nosso grupo de pesquisa [12].

É importante ressaltar que o modelo de *foraging* e as buscas aleatórias não têm interesse apenas para a movimentação animal em busca por recursos. Ele pode ser aplicado também em esforços de guerra [13], processos de aprendizado e memória [14], processos envolvendo DNA [15], movimento ocular [16], etc. A discussão realizada aqui será pautada pela motivação biológica, mas tentaremos nos manter gerais o suficiente para podermos aplicá-la também em outras situações, a partir do uso de conceitos e

ideias originalmente desenvolvidos no contexto da Física Estatística.

Nas próximas seções vamos discutir alguns tópicos que servirão de base para a nossa discussão, alguns deles já citados nessa breve Introdução. Inicialmente, descreveremos suscintamente o processo de transições de fase e a hipótese de escala que usaremos para o cálculo dos expoentes críticos associados à transição mencionada. Em seguida, vamos discutir o Teorema do Limite Central e a sua versão generalizada, os quais vão ser úteis não só para a operacionalização do problema mas também para introduzir as próprias distribuições de Lévy, base do nosso estudo. Por fim, vamos resolver o problema de Polya, ou problema de primeira passagem (*first passage problem*), que nos será útil no cálculo da taxa de sobrevivência do buscador (*forager*) e de um dos expoentes críticos da transição.

1.1 Transições de Fase e Hipótese de Escala

O estudo das transições de fase revolucionou a Física Estatística ao permitir a análise de sistemas ditos interagentes em processos caracterizados por mudanças importantes nas propriedades do sistema ao passar por um ponto crítico. Estas interações entre os componentes microscópicos do sistema geram uma série de fenômenos muito interessantes como o (anti)ferromagnetismo, a condensação de gases, o derretimento de líquidos, a superfluidez do hélio, a transição normal-supercondutora, etc [17].

As transições de fase podem ser entendidas como transformações de um sistema macroscópico de um estado para outro quando um de seus parâmetros de controle (por exemplo, a temperatura) atinge um determinado valor crítico. A transição é geralmente tipificada por uma quantidade denominada parâmetro de ordem. Este nome se deve ao fato de que na transição tipicamente ocorre uma quebra de simetria [18], com o sistema passando de uma fase simétrica (dita “ordenada”) para uma fase assimétrica (ou “desordenada”).

Uma característica importante desse tipo de fenômeno é a divergência de determinadas quantidades no ponto crítico, tais como a susceptibilidade magnética e o calor específico na transição ferromagnética. Essa divergência normalmente é do tipo lei de potência em função da “distância” ao ponto crítico, sendo o expoente da lei de potência denominado expoente crítico. O cálculo dos expoentes críticos e de relações entre eles tem sido um dos focos da área desde os seus primórdios [17]. De fato, tanta atenção se deve ao fato de que um grande número de sistemas distintos compartilha o mesmo conjunto de expoentes críticos, definindo as chamadas classes de universalidade. Por exemplo, o modelo de Ising e as soluções líquido-gás possuem os mesmos expoentes, pertencendo, portanto, à mesma classe de universalidade [18].

Um dos fundamentos do estudo dos expoentes críticos se concentra na chamada hipótese de escala [18]. Ela se baseia no fato que o comprimento de correlação, uma

medida da distância típica de interação entre os componentes microscópicos do sistema, diverge na transição. Isso significa que na criticalidade existem estruturas de todos os tamanhos ou escalas possíveis no sistema. No caso da transição ferromagnética, por exemplo, têm-se domínios magnéticos com tamanhos que variam do espaçamento da rede ao próprio comprimento macroscópico do sistema. Ao mesmo tempo que este resultado dificulta o cálculo detalhado de grandezas termodinâmicas, já que todas as escalas de comprimento devem ser levadas em consideração, ele também nos diz que bem próximo do ponto crítico o sistema é invariante por uma mudança de escala. Este fato nos leva às chamadas relações de escala para os potenciais termodinâmicos. Por exemplo, para a energia livre de Gibbs,

$$G(\epsilon, H) = tG(t^s \epsilon, t^r H). \quad (1.1)$$

Antes de demonstrar como utilizar a hipótese de escala para o cálculo de expoentes críticos, vamos relembrar algumas propriedades de funções homogêneas que nos serão úteis a seguir [19]. Inicialmente, uma função $f(r)$ é dita homogênea se para todo valor de t temos que

$$f(tr) = g(t)f(r). \quad (1.2)$$

Esta definição implica que basta saber o valor de $f(r)$ em apenas um ponto, digamos $r = r_0$, e a forma funcional de $g(t)$ para saber o valor da função em qualquer outro ponto. Seja, por exemplo, um ponto r_1 . Podemos sempre dizer que $r_1 = t_1 r_0$ e, então,

$$f(r_1) = f(t_1 r_0) = g(t_1)f(r_0). \quad (1.3)$$

Mas isso pode ser feito para qualquer ponto r_1 , e assim reconstruímos toda a função. Vamos agora analisar a função $g(t)$. Note primeiramente que

$$\begin{aligned} f(tcr) &= g(t)f(cr) = g(t)g(c)f(r) \\ &= g(tc)f(r) \quad \therefore \quad g(tc) = g(t)g(c). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Admitindo que g é uma função diferenciável,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g(tc) = tg'(tc) = \frac{\partial}{\partial \mu} [g(t)g(c)] = g(t)g'(c). \quad (1.5)$$

Usando $c = 1$ e definindo $g'(1) = p$,

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{d}{dt} \ln g(t) = \frac{p}{t} \quad \Rightarrow \quad \ln g(t) = p \ln t + d. \quad (1.6)$$

Assim, escrevemos

$$g(t) = e^d t^p \quad \Rightarrow \quad g'(t) = e^d p t^{p-1}, \quad (1.7)$$

ou ainda,

$$g'(1) = e^d p = p \quad \therefore \quad d = 0 \quad \Rightarrow \quad g(t) = t^p. \quad (1.8)$$

Uma forma mais geral desse tipo de função é a seguinte:

$$f(t^a x, t^b y, \dots) = t f(x, y, \dots), \quad (1.9)$$

a qual é denominada função homogênea generalizada. A forma funcional destas funções sofre algumas restrições, que mostraremos a seguir analisando o caso de duas variáveis,

$$f(tx, ty) = t^p f(x, y). \quad (1.10)$$

De fato, escolhendo $t = 1/y$ obtemos

$$f(x/y, 1) = y^{-p} f(x, y) \therefore f(x, y) = y^p f(x/y, 1) = y^p F(x/y). \quad (1.11)$$

Por outro lado, escolhendo $t = 1/x$,

$$f(1, y/x) = x^{-p} f(x, y) \therefore f(x, y) = x^p f(1, y/x) = x^p J(y/x). \quad (1.12)$$

Observamos portanto que a própria forma funcional das funções homogêneas leva ao comportamento de lei de potência. Se a função for um potencial termodinâmico, como na Eq. (1.1), podemos obter uma série de relações entre os expoentes críticos através de simples derivações. Vejamos a seguir um exemplo de como proceder para obter os expoentes [19].

Podemos reescrever a Eq. (1.1) de uma forma ligeiramente diferente:

$$tG(\epsilon, H) = G(t^s \epsilon, t^r H), \quad (1.13)$$

onde $\epsilon = T - T_c$ representa a distância ao ponto crítico que ocorre à temperatura T_c . Derivando a equação acima com respeito a H , temos

$$t \frac{\partial}{\partial H} G(\epsilon, H) = \frac{\partial}{\partial H} G(t^s \epsilon, t^r H) = t^r \frac{\partial}{\partial (t^r H)} G(t^s \epsilon, t^r H), \quad (1.14)$$

ou

$$tM(\epsilon, H) = t^r M(t^s \epsilon, t^r H). \quad (1.15)$$

Numa transição ferromagnética, M e H representam, respectivamente, a magnetização do sistema e o campo magnético aplicado. Tomando agora o caso $H = 0$,

$$M(\epsilon, 0) = t^{r-1} M(t^s \epsilon, 0). \quad (1.16)$$

Como dito anteriormente, as equações acima são válidas para todo t . Para $t = (-1/\epsilon)^{1/s}$, obtemos

$$M(\epsilon, 0) = -\epsilon^{(1-r)/s} M(-1, 0). \quad (1.17)$$

Mas sabemos ainda que no limite $\epsilon \rightarrow 0$ devemos ter $M(\epsilon, 0) \sim (-\epsilon)^\beta$ [19]. Logo, o expoente crítico da magnetização (parâmetro de ordem da transição ferromagnética) é dado por

$$\beta = \frac{1-r}{s}. \quad (1.18)$$

Por outro lado, se fizermos agora $\epsilon = 0$ na Eq. (1.15), encontramos

$$tM(0, H) = t^{r-1}M(0, t^r H). \quad (1.19)$$

Com $t = H^{-1/r}$, ficamos com

$$M(0, H) = t^{(1-r)/r}M(0, t^r H). \quad (1.20)$$

Lembrando agora que, para $H \rightarrow 0$, $M(0, H) \sim H^{1/\delta}$, então o expoente crítico associado ao campo magnético no ponto crítico vale

$$\delta = \frac{r}{1-r} \quad (1.21)$$

Derivando a Eq. (1.13) duas vezes com relação a H , obtemos

$$t\chi_T(\epsilon, H) = t^{2r}\chi_T(t^s\epsilon, t^r H). \quad (1.22)$$

De forma similar, podemos obter o expoente γ' associado ao comportamento crítico da susceptibilidade magnética χ_T , onde $\chi_T(\epsilon, 0) \sim (-\epsilon)^{-\gamma'}$, isto é,

$$\gamma' = \frac{2r-1}{s}. \quad (1.23)$$

Podemos eliminar r e s das equações acima e obter a famosa igualdade de Widom [19]:

$$\gamma' = \beta(\delta - 1). \quad (1.24)$$

São diversas as relações que podem ser obtidas da forma similar à empregada acima [19]. No nosso caso específico, vamos associar ao problema de *foraging* duas fases distintas (buscador vivo e buscador morto), utilizando a hipótese de escala, o cálculo da taxa de sobrevivência e as simulações numéricas para a determinação dos expoentes críticos da transição entre estes dois estados.

1.2 Teorema do Limite Central

Vamos discutir nesta seção um dos teoremas de maior importância da Física Estatística. O Teorema do Limite Central garante que a soma de um grande número de variáveis aleatórias com média e variância finitas é distribuída por uma função

gaussiana. Este fato justifica porque esse tipo de distribuição é verificada em inúmeros fenômenos e é tão amplamente estudada. O Teorema do Limite Central nos será útil quando formos estudar a dinâmica energética de caminhadas aleatórias e tentarmos determinar como se distribui a energia do caminhante ao longo da busca. Vamos a seguir deduzir este resultado conforme feito em [20].

Seja x a soma de um conjunto de variáveis aleatórias s_i , regidas por uma distribuição de probabilidade $w(s)$. Estamos interessados em saber qual a distribuição de probabilidade, $P(x)$, que rege a variável x . Se cada uma das variáveis é estatisticamente independente das demais, a probabilidade de ocorrência de uma sequência de valores de N destas variáveis, com cada uma pertencente ao intervalo $[s_i, s_i + ds_i]$, é dada pelo produto da probabilidade de ocorrência de cada termo da sequência, isto é

$$w(s_1)ds_1w(s_2)ds_2\dots w(s_N)ds_N. \quad (1.25)$$

Para obter a probabilidade de que x esteja no intervalo $[x, x + dx]$, temos de somar sobre todos as sequências consistentes com esta condição, de modo que

$$P(x)dx = \iint_{x \in [x, x+dx]} \dots \int w(s_1)w(s_2)\dots w(s_N)ds_1ds_2\dots ds_N. \quad (1.26)$$

Surge então o problema de como realizar as integrais acima levando em conta os limites de integração e a restrição sobre a soma x . Vamos primeiramente remover essa dependência dos limites e colocá-la no integrando utilizando uma função delta de Dirac:

$$P(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)w(s_2)\dots w(s_N) \left[\delta \left(\sum_{i=1}^N s_i - x \right) dx \right] ds_1ds_2\dots ds_N. \quad (1.27)$$

Precisamos incluir o termo dx acima para manter correta a dimensionalidade da equação, visto que a delta de Dirac tem dimensão de dx^{-1} . Usando a representação integral da função delta,

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk, \quad (1.28)$$

obtemos

$$\begin{aligned} P(x) &= \iint \dots \int w(s_1)w(s_2)\dots w(s_N) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\sum_{i=1}^N s_i - x)} dk ds_1ds_2\dots ds_N \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)e^{iks_1} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(s_2)e^{iks_2} ds_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_N)e^{iks_N} ds_N \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ikx} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(s)e^{iks} ds \right)^N}_{\equiv \hat{Q}(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ikx} \hat{Q}^N(k). \end{aligned} \quad (1.29)$$

A equação acima nos permite, portanto, encontrar $P(x)$ a partir de transformadas de Fourier de $w(s)$.

Vamos agora analisar o comportamento de $P(x)$ no limite $N \gg 1$,

$$\begin{aligned}\hat{Q}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(s) e^{iks} ds = \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iks)^n}{n!} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} w(s) s^n ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle s^n \rangle = 1 + ik \langle s \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s^2 \rangle + \dots\end{aligned}\quad (1.30)$$

Inicialmente, estudemos o comportamento da integral que define $\hat{Q}(k)$. Tomando um intervalo $[a, b]$ no qual w varia lentamente, ou seja $|\frac{dw}{ds}|(b-a) \ll w$, mas que contém várias oscilações, de modo que $(b-a)k \gg 1$, então

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b w(s) e^{iks} ds \right| &= \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{e^{iks}}{ik} \left(-\frac{dw}{ds} \right) ds \right| \\ &\leq \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \left| \int_a^b \frac{e^{iks}}{ik} \left(-\frac{dw}{ds} \right) ds \right| \leq \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \int_a^b \left| \frac{e^{iks}}{ik} \right| \left| \frac{dw}{ds} \right| ds \\ &\ll \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \left| \frac{w(a)}{(b-a)} \right| \int_a^b \left| \frac{e^{iks}}{ik} \right| ds = \left| w(s) \frac{e^{iks}}{ik} \Big|_a^b \right| + \left| \frac{w(a)}{k} \right|\end{aligned}\quad (1.31)$$

Assim, se fizermos $k \gg 1$ podemos estender o intervalo $[a, b]$ para o intervalo $(-\infty, \infty)$ e, da equação acima, $\hat{Q}(k) \xrightarrow{k \gg 1} 0$. Por isso, vamos usar tomar o limite de $k \ll 1$, de modo que, admitindo que $w(s)$ possui primeiros momentos finitos,

$$\begin{aligned}\ln \hat{Q}^N(k) &= N \ln \hat{Q}(k) = N \ln \left[1 + ik \langle s \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s^2 \rangle + \dots \right] \\ &\simeq N \left[ik \langle s \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s^2 \rangle - \frac{1}{2} (ik \langle s \rangle)^2 \right] + N \left[ik \langle s \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle (\Delta s)^2 \rangle \right].\end{aligned}\quad (1.32)$$

Aqui, usamos que

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \dots \quad y \ll 1 \quad \langle (\Delta s)^2 \rangle = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2, \quad (1.33)$$

e assim

$$\hat{Q}^N(k) = e^{N[ik \langle s \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle (\Delta s)^2 \rangle]}, \quad (1.34)$$

de modo que

$$\begin{aligned}P(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \hat{Q}^N(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(-x + N \langle s \rangle) - \frac{1}{2} N k^2 \langle (\Delta s)^2 \rangle} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{N \langle (\Delta s)^2 \rangle}} e^{-\frac{(N \langle s \rangle - x)^2}{2N \langle (\Delta s)^2 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}},\end{aligned}\quad (1.35)$$

onde o primeiro e o segundo momentos de $P(x)$ são dados em função do primeiro e do segundo momentos de $w(s)$ através de

$$m = N\langle s \rangle \qquad \sigma^2 = N\langle (\Delta s)^2 \rangle, \qquad (1.36)$$

com o uso do resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-au^2+bu} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}. \qquad (1.37)$$

Temos então que a variável x é regida por uma distribuição de probabilidade gaussiana, $P(x)$, como visto acima. Este resultado é bastante geral, pois não foram feitas restrições para a forma funcional de $w(s)$, exceto pelo fato desta possuir primeiros momentos finitos. Os resultados desta seção podem ser condensados no chamado Teorema do Limite Central, cuja prova formal não será dada aqui. De fato, a dedução mostrada acima nos será suficiente.

Teorema 1 (Teorema do Limite Central). *Seja S um conjunto de N variáveis distribuídas aleatoriamente segundo uma função densidade de probabilidades $w(s)$, com média $\langle s \rangle$ e variância $\langle (\Delta s)^2 \rangle$ finitas. Para $N \gg 1$ a distribuição de probabilidade para a soma dos elementos desse conjunto, $x = \sum_{i=1}^N s_i$, converge para uma distribuição gaussiana,*

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1.38)$$

com média $m = N\langle s \rangle$ e variância $\sigma^2 = N\langle (\Delta s)^2 \rangle$.

1.3 Teorema do Limite Central Generalizado

Na seção anterior, discutimos o Teorema do Limite Central. Ele estabelece que a soma de variáveis aleatórias com a mesma distribuição de probabilidade, com média e variância finitas, converge para uma gaussiana. Contudo, existe uma versão mais geral desse teorema onde não requeremos a finitude dos primeiros momentos da distribuição. É o chamado Teorema do Limite Central Generalizado [21]. Vamos discuti-lo de forma breve nesta seção.

Nos trabalhos de Paul Lévy [22], foi mostrado que a distribuição de probabilidade que rege a soma de variáveis aleatórias é, de forma geral, estável (*stable distribution*) [21]. De fato, uma distribuição é dita estável se, para uma sequência de variáveis aleatórias regidas por ela, a distribuição de um dos elementos é, a menos de um fator de escala, a mesma distribuição da soma dos elementos. Matematicamente, escrevemos que

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \stackrel{d}{=} c_n x + d_n. \qquad (1.39)$$

Acima, o símbolo $\stackrel{d}{=}$ significa que as duas expressões são regidas pela mesma função de probabilidade. Gaussianas obedecem esta propriedade, como pode ser visto da Eq. (1.29):

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(m-s)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow Q(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}} e^{iks} ds, \quad (1.40)$$

de modo que

$$\begin{aligned} Q(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)s^2 + s\left(ik + \frac{m}{2\sigma^2}\right)} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2\sigma^2}} e^{(ik + \frac{m}{\sigma^2})^2 / 4 \cdot \frac{1}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} e^{\sigma^2 \left(ik + \frac{m}{\sigma^2}\right)^2 / 2} = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} + ikm} \quad \therefore \quad Q^N(k) = e^{\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2} + ikm\right)N}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dke^{-ikx} e^{\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2} + ikm\right)N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dke^{-k^2 \left(\frac{N\sigma^2}{2}\right) + k(im\frac{N}{2} - ix)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{N\sigma^2/2}} e^{(iNm - ix)^2 / 2N\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi N\sigma^2}} e^{-(Nm - x)^2 / 2N\sigma^2}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

A mudança de escala é realizada fazendo $\sigma^2 \rightarrow N\sigma^2$. Contudo, esse não é o único tipo de função que obedece essa propriedade. De forma geral, uma distribuição estável pode ser descrita pela sua função característica $\phi(k)$, onde

$$\phi(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx = \begin{cases} \exp(-|k|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sgn}(k)]) & \alpha \neq 1; \\ \exp(-|k| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sgn}(k) \log(|k|)]) & \alpha = 1. \end{cases} \quad (1.43)$$

Acima, $0 < \alpha \leq 2$ e $-1 \leq \beta \leq 1$ e $\text{sgn}(k)$ é a função sinal. O parâmetro β controla a simetria de $\phi(k)$: para $\beta = 0$ temos uma função simétrica em k com respeito ao ponto $k = 0$ e então

$$\phi(k) = e^{-|k|^\alpha}. \quad (1.44)$$

Um exemplo da função característica acima é o limite $\alpha = 1$, que corresponde ao caso particular da distribuição de Cauchy,

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}. \quad (1.45)$$

O caso geral, expresso na Eq. (1.44), define a chamada distribuição de Lévy, que discutiremos em detalhes no próximo capítulo. Uma característica das distribuições

estáveis importante para o presente trabalho é o seu comportamento assintótico do tipo lei de potência:

$$P(\pm x) \sim \alpha \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi} (1 \pm \beta) x^{-(\alpha+1)} \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.46)$$

Temos então o seguinte resultado: ao se retirar a exigência de convergência dos primeiros momentos presente no Teorema do Limite Central, a soma de variáveis aleatórias deixa de ter sua probabilidade de ocorrência regida por uma função gaussiana e passa a ser descrita mais geralmente pela distribuição de Lévy. Apenas esse fato já seria suficiente para motivar o interesse nesse tipo de função. Além disso, no entanto, o seu comportamento assintótico do tipo lei de potência, comumente também chamado de longa cauda, permite observar facilmente a divergência de alguns momentos da distribuição. Essa característica vai nos motivar a utilizá-la no modelo para buscas aleatórias devido ao fato de podermos prontamente (isto é, mediante a variação de um único parâmetro α ou $\mu = \alpha + 1$) passar do regime difusivo para o superdifusivo, como veremos adiante.

1.4 O Problema de Primeira Passagem

Nesta seção vamos discutir o problema de Polya, ou problema de primeira passagem (*first passage problem*) [23]. Ele nos será útil para analisar a dependência da taxa de sobrevivência dos caminhantes com o número de passos realizados durante a busca por recursos, dependência esta que também auxiliará no cálculo de um dos expoentes críticos da transição de fase associada à busca aleatória por recursos.

No problema de Polya, queremos saber sob que condições um caminhante aleatório retorna ao ponto inicial de sua caminhada. Para resolvê-lo, vamos ad admitir um caminhante aleatório ou *random walker* (RW) se deslocando num espaço homogêneo e invariante por translação. Adiante, ficará claro o porquê desta imposição.

Temos aqui duas quantidades importantes:

$P_n(j)$: probabilidade de que o RW esteja na posição j no passo n ;

$f_n(j)$: probabilidade de que o RW esteja na posição j , **pela primeira vez**, no passo n .

As duas probabilidades acima podem ser relacionadas pela equação

$$P_n(j) = \sum_{k=1}^n f_k(j) P_{n-k}(0) \quad (j \neq 0). \quad (1.47)$$

Esta equação pode ser entendida da seguinte forma: a probabilidade de que o RW esteja na posição j no n -ésimo passo é igual à probabilidade de que ele chegue em j no passo k e retorne para j após um número $n - k$ de passos. Utilizamos $P_{n-k}(0)$ para

representar o retorno do RW à posição j . Isto se deve pela propriedade de invariância translacional e “temporal” das caminhadas. De fato, a probabilidade de ocorrência de uma sequência de passos que saia de j e retorne a j é a mesma de uma que saia da origem e retorne à origem, se os números de passos forem os mesmos.

Notamos ainda que o termo $n = k$ na equação acima representa uma caminhada onde o RW só passa por j uma vez, no momento em que a caminhada acaba. Similarmente, para o caso $j = 0$,

$$P_n(0) = \delta_{n,0} + \sum_{k=1}^n f_k(0)P_{n-k}(0). \quad (1.48)$$

O delta de Kronecker acima garante que a probabilidade de que o caminhante esteja na origem no “passo 0” é igual a 1.

Definindo a seguir as funções geratrizes [23],

$$P(j;z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(j)z^n, \quad f(j;z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(j)z^n, \quad (1.49)$$

vamos multiplicar a Eq. (1.47) por z^n e somar sobre n para obter

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n z^n f_k(j)P_{n-k}(0). \quad (1.50)$$

A partir daí, temos que

$$P(j;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n z^n f_k(j)P_{n-k}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z^n f_k(j)P_{n-k}(0). \quad (1.51)$$

Acima somamos o termo $k = 0$, já que $f_0(j) = 0$, pois o caminhante começa na origem e $j \neq 0$.

Façamos agora a seguinte analogia: dada a seguinte igualdade entre as integrais,

$$\int_0^{\infty} \int_0^y dx dy = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} dy dx, \quad (1.52)$$

justificada pela igualdade da área dos domínios de integração (ver a Fig. 1.1), vamos fazer o mesmo com o somatório, de modo a obter

$$\begin{aligned} P(j;z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^n f_k(j)P_{n-k}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^k f_k(j)z^{n-k}P_{n-k}(0); \quad m=n-k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z^k f_k(j)z^m P_m(0) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k(j) \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(0) = f(j;z)P(0;z), \end{aligned} \quad (1.53)$$

de modo que

$$P(j;z) = f(j;z)P(0;z). \quad (1.54)$$

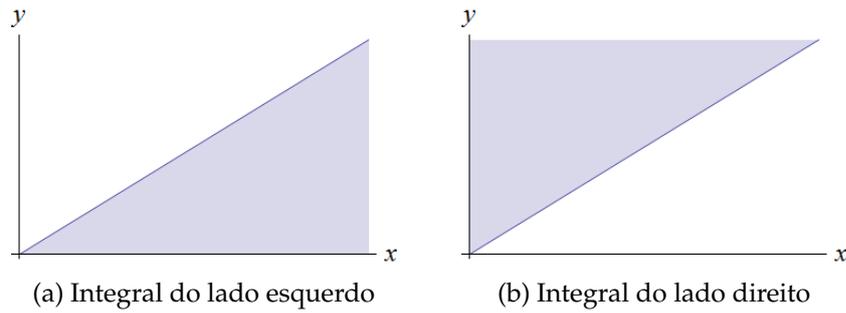


Figura 1.1 – Representação das áreas das integrais na Eq. (1.52).

Fazendo o mesmo para a Eq. (1.48),

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n z^n f_k(0)P_{n-k}(0), \quad (1.55)$$

tal que

$$\begin{aligned} P(0;z) &= z^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z^n f_k(0)P_{n-k}(0) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^n f_k(0)P_{n-k}(0) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^k f_k(0)z^{n-k}P_{n-k}(0) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z^k f_k(0)z^m P_{n-k}(0) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k(0) \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{n-k}(0) = 1 + f(0;z)P(0;z). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Assim, obtemos que

$$f(0;z) = 1 - \frac{1}{P(0;z)}. \quad (1.57)$$

Cabe aqui uma observação. Utilizamos acima o fato de que $f_0(0) = 0$. Isto pode gerar alguma estranheza já que admitimos um caminhante saindo da origem. Este problema, contudo, não existe pois na “primeira passagem” do $f_n(0)$ não contamos a posição inicial da caminhada.

Precisamos agora obter uma expressão para $P_n(j)$ e, conseqüentemente, para $P(j;z)$. No entanto, a partir do Teorema do Limite Central,

$$P_n(j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} \hat{P}^n(\omega) d\omega, \quad (1.58)$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(j;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(j)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} \hat{P}^n(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega j} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \hat{P}^n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} \frac{1}{1 - z\hat{P}(\omega)} d\omega. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Acima usamos o fato de que $\hat{P}(\omega) < 1$ e que só faz sentido falar de $z = 1$ para as funções geratrizes a fim de garantir que o termo dentro do somatório tenha módulo menor que 1, pois

$$\begin{aligned} |\hat{P}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |P(x)e^{i\omega x}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |P(x)| |e^{i\omega x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |P(x)| dx = 1. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Seja agora $G(z) \equiv \sum_{x=0}^{\infty} P(x)z^x$, de modo que

$$\begin{aligned} G'(z) &= \sum_{x=1}^{\infty} xP(x)z^{x-1} = \sum_{x=0}^{\infty} xP(x)z^{x-1} \quad \therefore G'(1) = \langle x \rangle \\ G''(z) &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)P(x)z^{x-2} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)P(x)z^{x-2} \quad \therefore G''(1) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle, \end{aligned} \quad (1.61)$$

com

$$\sigma^2 \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2.$$

Podemos então calcular a dependência do retorno do RW é origem com o número de passos. Seja inicialmente $F_n(0)$ a probabilidade de que o caminhante *não* retorne na origem no passo n . Temos então que

$$F_n(0) = 1 - \sum_{k=0}^n f_k(0). \quad (1.62)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} F_{n-1}(0) - F_n(0) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(0) - \left(1 - \sum_{k=0}^n f_k(0) \right) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(0) - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} f_k(0) + f_n(0) = f_n(0) \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\therefore F_{n-1}(0) - F_n(0) = f_n(0) \quad (1.64)$$

Mais uma vez, multiplicando a Eq. (1.64) por z^n e somando em n ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F_{n-1}(0) - F_n(0)] z^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) z^n, \quad (1.65)$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}(0) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} F_n(0) z^n - F_0(0) + F_0(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) z^n - f_0(0) + f_0(0) \\ \sum_{m=0}^{\infty} F_m(0) z^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(0) z^n + F_0(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) z^n - f_0(0) \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned}
zF(0;z) - F(0;z) + F_0(0) &= f(0;z) - f_0(0) \\
(z-1)F(0;z) &= f(0;z) - \underbrace{(F_0 + f_0)}_{=1, \text{vide equação (1.62)}}
\end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\therefore F(0;z) = \frac{1 - f(0;z)}{1 - z}. \tag{1.68}$$

Da Eq. (1.57), escrevemos

$$F(0;z) = \frac{1}{1-z} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{P(0;z)} \right) \right] = \frac{1}{(1-z)P(0;z)}. \tag{1.69}$$

Precisamos agora calcular $P(0;z)$ e relacionar $F(0;z)$ com $F_n(0)$. Para $P(0;z)$, temos

$$P(0;z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega 0} \frac{1}{1 - z\hat{P}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - z\hat{P}(\omega)} d\omega. \tag{1.70}$$

Como o integrando diverge para $\omega = 0$ e $z = 1$,

$$\hat{P}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{i0x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1, \tag{1.71}$$

vamos aproximar a integral acima pela integral da expansão de $\frac{1}{1 - z\hat{P}(\omega)}$ ao redor de $\omega = 0$:

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(i\omega x)^t}{t!} dx \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^t}{t!} \int_{-\infty}^{\infty} x^t P(x) dx = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^t}{t!} \langle x^t \rangle = 1 + i\omega \langle x \rangle - \frac{\omega^2}{2} \langle x^2 \rangle + \dots
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Para distribuições de passo $P(x)$ simétricas, temos que $\langle x \rangle = 0$ e $\langle x^2 \rangle = \sigma^2$. Daí, no limite de $\omega \rightarrow 0$,

$$\hat{P}(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega^2 \sigma^2}{2}. \tag{1.73}$$

Com isso, obtemos

$$P(0;z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - z\hat{P}(\omega)} d\omega \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{1 - z + \frac{z\sigma^2\omega^2}{2}} d\omega. \tag{1.74}$$

Aqui, ϵ é um número pequeno de modo que integramos a expansão da função perto de zero num intervalo próximo da origem:

$$\begin{aligned}
P(0;z) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-z)z\sigma^2}{2}}} \left\{ \arctan \left(\epsilon \sqrt{\frac{z\sigma^2}{2(1-z)}} \right) - \arctan \left(-\epsilon \sqrt{\frac{z\sigma^2}{2(1-z)}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{\frac{(1-z)z\sigma^2}{2}}} \arctan \left(\epsilon \sqrt{\frac{z\sigma^2}{2(1-z)}} \right) \simeq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{\frac{(1-z)z\sigma^2}{2}}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2(1-z)z}},
\end{aligned} \tag{1.75}$$

uma vez que

$$\int \frac{1}{a+bx^2} dx = \frac{\arctan\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{b}}, \quad \arctan\left(\epsilon\sqrt{\frac{z\sigma^2}{2(1-z)}}\right) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad (1.76)$$

de modo que

$$F(0; z) = \frac{1}{(1-z)P(0; z)} = \frac{1}{(1-z)\frac{1}{\sigma\sqrt{2(1-z)z}}} = \sigma\sqrt{\frac{2z}{1-z}}. \quad (1.77)$$

Temos acima uma expressão para $F(0; z)$, mas na verdade estamos interessados em $F_n(0)$, que nos dá a relação entre a probabilidade de retorno e o número de passos. Para obter $F_n(0)$, vamos usar um dos Teoremas Tauberianos [23, 24], que enunciaremos a seguir sem provar.

Teorema 2. *Seja $q_n \geq 0$ e suponha que*

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$$

converge para $0 \leq s < 1$. Se L é uma função que varia lentamente no limite infinito, isto é $\frac{L(tx)}{L(t)} \rightarrow 1$ para $t \rightarrow \infty$, e $0 \leq \rho < \infty$, então as duas relações abaixo implicam uma na outra.

$$Q(s) \sim \frac{1}{(1-s)^\rho} L\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad s \rightarrow 1^-$$

$$q_0 + q_1 + \dots + q_{n-1} \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^\rho L(n), \quad n \rightarrow \infty$$

E mais, se a sequência é monotônica e $0 \leq \rho < \infty$, então, equivalentemente,

$$q_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n), \quad n \rightarrow \infty$$

Podemos então estabelecer a relação

$$Q(s) = F(0; z) = \sigma\sqrt{\frac{2z}{1-z}} = \frac{1}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \sigma\sqrt{2s} = \frac{1}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \underbrace{\sigma\sqrt{2} \left[-\left(\frac{1}{1-s}\right)^{-1} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}}_{L\left(\frac{1}{1-s}\right)}, \quad (1.78)$$

e como a função L varia lentamente,

$$\frac{L\left(\frac{x}{1-s}\right)}{L\left(\frac{1}{1-s}\right)} = \frac{\sigma\sqrt{2} \left[\left(\frac{-x}{1-s}\right)^{-1} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2} \left[\left(\frac{-1}{1-s}\right)^{-1} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{1 + \left(\frac{1-s}{-x}\right)}{s} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{-x + 1 - s}{-xs} \right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty, s \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x} \right]^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (1.79)$$

A partir deste resultado obtemos que

$$F_n(0) \sim \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} n^{-1/2} \sigma \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{1/2} = \sigma \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{1/2}. \quad (1.80)$$

Finalmente, para achar a probabilidade de retorno à origem basta fazer $1 - F_n(0)$. Contudo, podemos ver que a sua dependência com o número de passos, ou com o tempo, é a mesma mostrada na equação acima, essencialmente $\sim 1/n^{1/2}$ no limite assintótico de grandes números de passos. Nos capítulos seguintes, estabeleceremos um mapeamento da energia acumulada do *forager* ao longo da busca num RW tal como o descrito acima. Tal mapeamento permitirá relacionar o problema de primeira passagem e os resultados obtidos nesta seção com o cálculo da taxa de sobrevivência do buscador.

2 Buscas Aleatórias

Neste capítulo, vamos discutir importantes propriedades do limite assintótico do tipo lei de potência da distribuição de Lévy, tais como a superdifusão e a divergência dos seus primeiros momentos, já citadas anteriormente. Em seguida, introduziremos o modelo de buscas aleatórias que será utilizado durante a maior parte deste trabalho, e que tem como base a consideração de uma distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos do buscador. Finalmente, realizaremos o cálculo da eficiência das buscas aleatórias unidimensionais para qualquer distribuição de tamanho de passos. Como veremos, a eficiência será dada pelo inverso da distância média percorrida entre dois encontros sucessivos de sítios-alvos, quantidade esta para a qual demonstraremos uma expressão formal, assim como o procedimento de discretização espacial que permite a obtenção de valores numéricos via *softwares* como o Matlab.

2.1 Distribuição de Lévy

Como visto na Seção 1.3, a distribuição de Lévy no limite assintótico de grandes valores da variável aleatória possui um decaimento do tipo lei de potência. No modelo de buscas aleatórias estudado nessa Dissertação vamos considerar como a distribuição de passos para o *forager* uma função da forma

$$P(l) = \begin{cases} A \frac{1}{|l|^\mu}, & l \geq l_0; \\ 0, & l \leq l_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde A denota a constante de normalização e l_0 corresponde a um tamanho mínimo de passo para o caminhante, o qual garante a não-divergência da distribuição para $l \rightarrow 0$. O parâmetro μ é tal que para $1 < \mu \leq 3$ o caminhante apresenta dinâmica superdifusiva (o caso $\mu \rightarrow 1$ corresponde à dinâmica balística, com $\mu = 2$ representando a distribuição de Cauchy). A dinâmica normal (browniana) ocorre para $\mu > 3$. Assim, observamos que variando um único parâmetro (μ) da distribuição, podemos estudar buscadores com as mais variadas dinâmicas e realizar uma comparação entre as suas eficiências de busca. Para $\mu < 1$ a função acima não é normalizável.

Podemos calcular a constante A através da normalização,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} P(l)dl = \int_{-\infty}^{-l_0} A \frac{1}{|l|^\mu} dl + \int_{l_0}^{\infty} A \frac{1}{|l|^\mu} dl = 2A \int_{l_0}^{\infty} l^{-\mu} dl = 2A \frac{l^{1-\mu}}{1-\mu} \Big|_{l_0}^{\infty} \\ &= 2A \frac{-l_0^{1-\mu}}{1-\mu} \implies A = \frac{\mu-1}{2} l_0^{\mu-1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

de modo que

$$P(l) = \frac{(\mu-1)l_0^{\mu-1}}{2} \frac{1}{|l|^\mu}, \quad \text{para } l \geq l_0. \quad (2.3)$$

A partir de agora, todas as vezes que nos referirmos à “distribuição de Lévy” nesta Dissertação é à função acima com longa “cauda” do tipo lei de potência que estaremos fazendo menção (esta função também é conhecida na literatura como distribuição de Pareto).

Analisando os dois primeiros momentos da distribuição acima, vemos que, primeiramente,

$$\langle l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} lP(l)dl = \int_{-\infty}^{-l_0} A \frac{l}{|l|^\mu} dl + \int_{l_0}^{\infty} A \frac{l}{|l|^\mu} dl = -A \int_{l_0}^{\infty} l^{1-\mu} dl + A \int_{l_0}^{\infty} l^{1-\mu} dl = 0. \quad (2.4)$$

De fato, o primeiro momento é nulo devido à simetria par da distribuição com respeito ao eixo $l = 0$, a qual no contexto das buscas reflete o fato de que é equiprovável para o caminhante escolher um tamanho de passo $|l|$ para a esquerda ($|l| = -l$) ou para a direita ($|l| = +l$).

Para o segundo momento, entretanto, temos que

$$\langle l^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} l^2 P(l) dl = \int_{-\infty}^{-l_0} A \frac{l^2}{|l|^\mu} dl + \int_{l_0}^{\infty} A \frac{l^2}{|l|^\mu} dl = 2A \int_{l_0}^{\infty} \frac{l^2}{|l|^\mu} dl = 2A \int_{l_0}^{\infty} l^{2-\mu} dl. \quad (2.5)$$

Para $1 < \mu \leq 3$ a integral acima diverge. Por outro lado, se considerarmos $\mu > 3$ então

$$\langle l^2 \rangle = 2A \frac{l^{3-\mu}}{3-\mu} \Big|_{l_0}^{\infty} = 2 \frac{(\mu-1)l_0^{\mu-1}}{2} \frac{-l_0^{3-\mu}}{\mu-3} = \frac{\mu-1}{\mu-3} l_0^2. \quad (2.6)$$

Como discutido no capítulo anterior, vemos então que a distribuição de Lévy com $1 < \mu \leq 3$ não obedece o Teorema do Limite Central, mas apenas a sua versão generalizada, pois o seu segundo momento diverge. Contudo, no regime $\mu > 3$ os dois primeiros momentos convergem e o Teorema do Limite Central é válido. Nesse caso, como mostramos na Seção 1.2 a soma das variáveis aleatórias após um grande número de sorteios é distribuída segundo a função gaussiana

$$P(x) = \sqrt{\frac{\mu-3}{2\pi N(\mu-1)l_0^2}} \exp\left(\frac{-(\mu-3)x^2}{2(\mu-1)l_0^2}\right). \quad (2.7)$$

Além da superdifusividade, o comportamento do tipo lei de potência para uma distribuição de probabilidade leva a uma outra propriedade interessante que é a invariância de escala, a qual denota uma simetria sob mudança de escala, ou seja, a forma da função não muda ao multiplicarmos seu argumento por uma constante. Matematicamente, temos $P(\gamma l) = \gamma^{-\mu} P(l)$. Isto faz com que não exista uma escala típica de comprimento que contenha os eventos ditos estatisticamente significativos, tal como ocorre com a distribuição gaussiana. No caso da distribuição de lei de potência com $1 < \mu \leq 3$ precisamos levar em consideração todas as escalas de comprimento para realizar uma descrição estatisticamente adequada dos eventos. Isto fica claro na Fig. 2.1 ao compararmos as trajetórias de caminhantes aleatórios usando a distribuição de Lévy de tamanhos de passos com aqueles que utilizam uma gaussiana. Observamos, de fato, um número muito maior de “passos longos” para o caminhante de Lévy, originários da longa cauda da distribuição, o que faz nesse caso com que o caminhante “varra” uma área muito maior do espaço de busca.

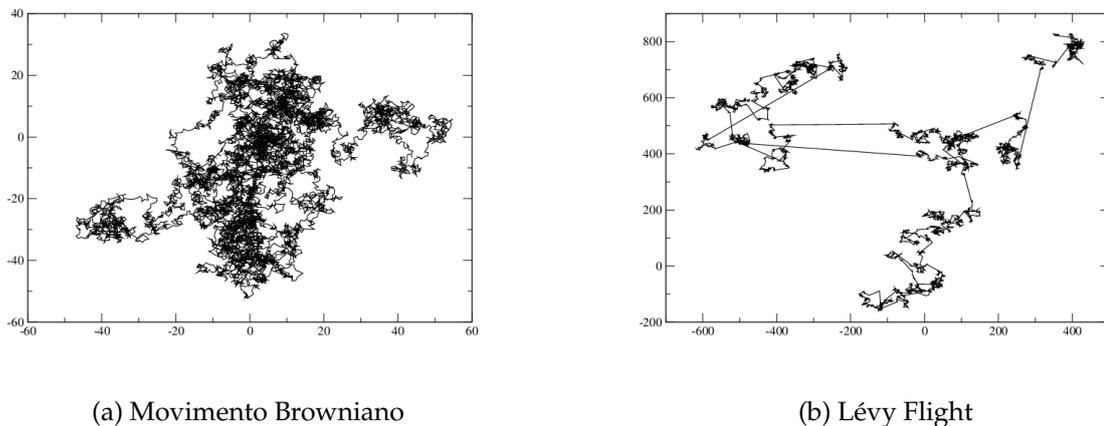


Figura 2.1 – Representação esquemática da trajetória de caminhantes aleatórios realizando (a) movimento browniano e (b) vôos de Lévy. Note a presença de grandes passos para distribuição de Lévy, os quais geram uma maior difusão do caminhante pelo espaço.

2.2 Modelo de Busca

Vamos discutir a seguir um modelo básico de buscas aleatórias que adotaremos para estudar o problema de *foraging*. No capítulo seguinte introduziremos neste modelo um balanço de ganhos e perdas energéticas ao longo da busca, os quais se mostrarão fundamentais na análise da dinâmica energética das estratégias eficientes de buscas.

Consideremos inicialmente um caminhante aleatório buscando por um conjunto de sítios-alvos distribuídos aleatoriamente com uma distância média λ entre eles. Nosso

caminhante será dotado de um raio de visão, r_v , dentro do qual é possível detectar os sítios. O algoritmo de busca é descrito da seguinte forma [10].

1. Se existir um sítio-alvo localizado até uma distância r_v do caminhante, ele se move em linha reta para o sítio mais próximo.
2. Se não existir nenhum sítio a uma distância mínima r_v , o *forager* escolhe uma direção aleatoriamente e uma distância l_j a partir de uma distribuição de probabilidade $P(l_j)$. Ele então se move para uma nova posição, buscando continuamente por sítios dentro do raio de visão r_v ao longo do trajeto.
3. Se não ocorre a detecção após percorrer a distância l_j , são selecionados uma nova direção e um novo comprimento de passo e a busca recomeça.
4. Caso ocorra um encontro antes do passo l_j terminar, o caminhante trunca o passo e se dirige para o sítio como explicado na regra 1.

Já vimos que a forma da função $P(l)$ determina o tipo de difusão presente. Mas para tentar tornar o modelo mais realista, precisamos levar em consideração a disponibilidade e o tipo de sítio em questão. Por um lado, a disponibilidade de recursos é dada pela razão entre os parâmetros λ e r_v . Por exemplo, se tivermos $\lambda \simeq r_v$, o caminhante vai se mover frequentemente de forma balística em direção aos sítios, uma vez que será raro não encontrar um sítio dentro do seu raio de visão. Esta situação corresponde a buscas em ambientes com alta disponibilidade de recursos, em que raramente uma busca de fato aleatória é necessária. Vale mencionar que a concentração dos sítios é inversamente proporcional a λ . Já para $\lambda \gg r_v$ o sorteio de passos se torna a forma dominante da dinâmica da busca, sendo este o cenário em que a forma da distribuição de passos se torna mais importante. Esta situação corresponde a ambientes com recursos limitados. É neste regime de recursos escassos, em que as buscas aleatórias se tornam mais relevantes, que nós vamos focar o presente trabalho.

Por outro lado, quanto aos tipos de sítios, estes podem se regenerar ou desaparecer completamente após serem encontrados pelo caminhante, caracterizando [1] as chamadas caminhadas não-destrutivas ou destrutivas, respectivamente. Nas buscas não-destrutivas um sítio pode ser revisitado várias vezes, representando a não saciedade do *forager* ou uma extinção temporária do recurso. Na busca destrutiva, uma vez consumido o sítio não fica mais disponível para futuros encontros. Nesse caso, para manter a densidade de sítios constantes, um outro sítio é criado em uma posição sorteada aleatoriamente.

Nesse contexto, uma pergunta certamente relevante é a seguinte: qual é a estratégia mais eficiente na busca pelos sítios? Por estratégia, neste trabalho entendemos a escolha da distribuição de tamanhos de passos de busca, $P(l_j)$. A resposta para essa pergunta obviamente depende do tipo de busca, destrutiva ou não, da densidade de sítios, do tamanho do raio de visão, etc. Vamos em seguida discutir esta questão em mais detalhes.

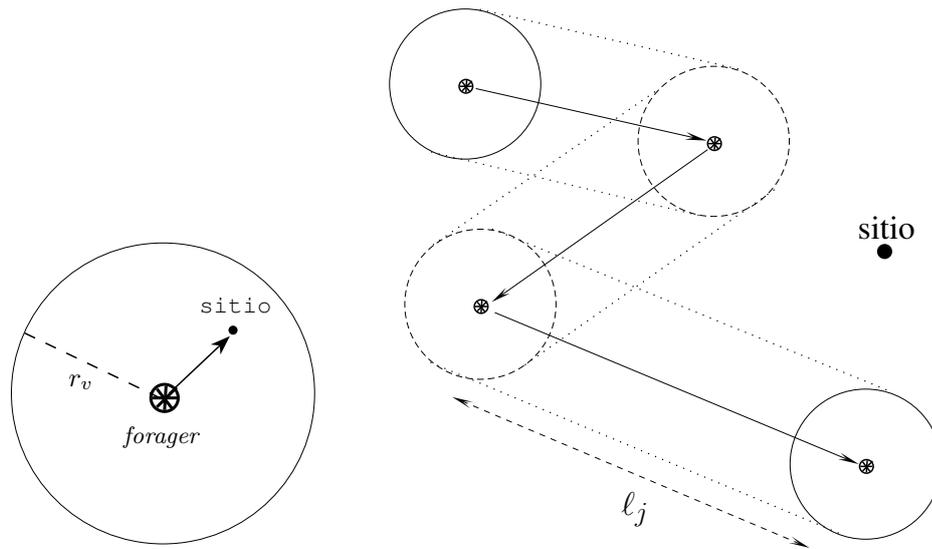


Figura 2.2 – Representação esquemática do modelo de busca em duas dimensões. Em (a) observamos o caminhante se deslocando para um sítio dentro de seu raio de visão e em (b) mostramos o sorteio dos passos e a procura contínua pelos sítios dentro do raio de visão r_v [12].

2.3 Eficiência das buscas

Podemos definir a eficiência das buscas, η , como a razão entre o número de sítios visitados, N_f , e a distância total percorrida pelo *forager*. Esta última quantidade, por sua vez, pode ser escrita como o produto do número de sítios encontrados pela distância média percorrida no encontro de dois sítios sucessivos, $\langle L \rangle$, de modo que

$$\eta = \frac{N_f}{N_f \langle L \rangle} = \frac{1}{\langle L \rangle}. \quad (2.8)$$

A partir do resultado acima, vemos que a eficiência da busca fica determinada ao se conhecer a expressão para $\langle L \rangle$.

Uma primeira tentativa [10] de cálculo da distância média entre dois encontros sucessivos, $\langle L \rangle$, que discutiremos brevemente a seguir, é a que considera uma aproximação à “campo médio”. Nesse caso, inicialmente considera-se $\langle L \rangle$ como o produto aproximado do número médio de passos dados para encontrar dois sítios sucessivos, $\langle n \rangle$, e o tamanho médio de passo, $\langle l \rangle$,

$$\eta = \frac{1}{\langle n \rangle \langle l \rangle}. \quad (2.9)$$

Nessa aproximação leva-se em conta que todos os passos de tamanho maior que λ são truncados, ou seja, a aproximação principal está em admitir que como a distância entre dois sítios é no máximo λ então não existiriam passos efetivamente maiores que λ . Desse modo, o cálculo da média $\langle l \rangle$ é particionado em duas integrais, correspondendo

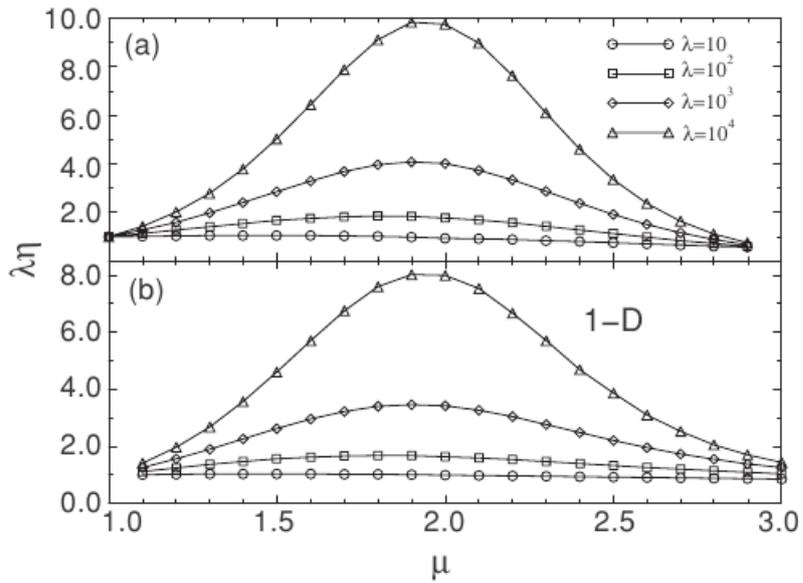


Figura 2.3 – Produto da distância média entre os sítios, λ , e a eficiência da busca, η , em função do parâmetro μ da distribuição de Lévy, para diferentes valores de λ numa busca unidimensional. Os resultados foram obtidos (a) analiticamente e (b) por simulação numérica [10].

aos intervalos $|l| < \lambda$ e $|l| \geq \lambda$:

$$\langle l \rangle \approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} l^{1-\mu} dl + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} l^{-\mu} dl}{\int_{r_v}^{\infty} l^{-\mu} dl} = \left(\frac{\mu-1}{2-\mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}. \quad (2.10)$$

Por outro lado, no limite de recursos esparsos, $\lambda \gg r_v$, a forma assintótica do número médio de passos entre dois encontros sucessivos é dada por [10]

$$\langle n_d \rangle \sim (\lambda/r_v)^{\mu-1}, \quad \text{para } 1 < \mu < 3, \quad (2.11)$$

$$\langle n_d \rangle \sim (\lambda/r_v)^2, \quad \text{para } \mu \geq 3, \quad (2.12)$$

no caso destrutivo, e por

$$\langle n_{nd} \rangle \sim (\lambda/r_v)^{(\mu-1)/2}, \quad \text{para } 1 < \mu < 3, \quad (2.13)$$

$$\langle n_{nd} \rangle \sim \lambda/r_v, \quad \text{para } \mu \geq 3, \quad (2.14)$$

no caso não-destrutivo.

Substituindo os resultados acima na Eq. (2.9), obtemos uma expressão aproximada para a eficiência da busca com distribuição de Lévy de tamanhos de passos. A maximização de η é obtida derivando-se a sua expressão em função de μ . Obtém-se [10] que o expoente que maximiza a eficiência para o caso não-destrutivo é dado por

$\mu_{opt} = 2 - \delta$, com $\delta \approx 1/[\ln(\lambda/r_v)]^2$, resultado este confirmado pela simulação numérica como visto na Fig. 2.3. Para buscas destrutivas, o máximo de eficiência é obtido para o caso balístico, $\mu \rightarrow 1$. Esses resultados podem ser interpretados da seguinte forma: no caso destrutivo, após o encontro de um sítio o caminhante precisa atravessar uma grande distância até o próximo sítio no regime de escassez de recursos. Por isso a maior eficiência é obtida para pequenos valores de μ , que justamente permitem que passos maiores sejam realizados em média. Já para o caso não-destrutivo, após o encontro de um sítio o caminhante ainda permanece próximo a ele. A forma mais eficiente de busca deve, portanto, combinar passos curtos para retornar ao sítio recém encontrado e passos longos que permitam alcançar regiões onde se encontram sítios distantes. Daí emerge um valor intermediário para μ , isto é $\mu \approx 2$, como a solução de maior eficiência.

2.4 Análise do Modelo Unidimensional

Nesta seção realizaremos o cálculo exato da distância média percorrida entre dois encontros sucessivos, $\langle L \rangle$, a qual, como vimos, é igual ao inverso da eficiência da busca. Tal cálculo exato só é conhecido em uma dimensão, e foi originalmente desenvolvido por Buldyrev e colaboradores [25, 26]. Para tanto, consideraremos uma busca conforme o modelo introduzido na Seção 2.2, utilizando uma distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos de busca. Os sítios-alvos encontram-se distribuídos ao longo de um segmento unidimensional, espaçados de λ e ocupando as posições $x = i\lambda$, com i inteiro. Como, por exemplo, a busca no intervalo $0 \leq x \leq \lambda$ é estatisticamente indistinguível da busca nos intervalos $i \leq x \leq (i+1)\lambda$, então será suficiente para efeito de cálculo analisar o que se passa com a distância média percorrida entre o encontro de dois sítios no intervalo $0 \leq x \leq \lambda$ (ver a Fig. 2.4). Consideramos que o *forager* parte de uma posição x_0 , com $r_v < x_0 < \lambda - r_v$ devido ao raio de visão do buscador (lembramos que o sítio é detectado quando o buscador encontra-se a uma distância r_v dele, dirigindo-se em seguida balisticamente até ele, de acordo com a regra 1 do modelo). O ponto de partida da caminhada vai ter um importante papel na nossa análise, pois vai caracterizar o tipo de busca realizada. As buscas não-destrutivas são tipificadas por um ponto de partida próximo ao sítio previamente encontrado, de modo que, por exemplo, $x_0 = r_v + \epsilon$, com $\epsilon \rightarrow 0$. Já nas buscas destrutivas o sítio encontrado é destruído, de modo que no regime de recursos escassos mesmo os sítios mais próximos encontram-se em média bastante distantes. No caso do presente modelo unidimensional, vamos considerar a máxima distância possível para os dois sítios mais próximos, isto é $x_0 = \lambda/2$ para a busca destrutiva.

O nosso objetivo a seguir é realizar o cálculo exato em uma dimensão da distância média entre dois encontros sucessivos percorrida por um caminhante partindo de uma posição x_0 , a qual denotaremos por $\langle L \rangle(x_0)$. O cálculo será realizado de forma geral,

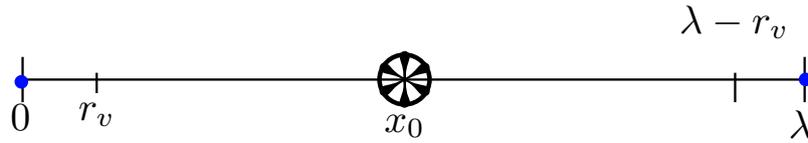


Figura 2.4 – Representação esquemática do espaço de busca para um caminhante unidimensional [12].

para qualquer distribuição de tamanhos de passos de busca, $P(l)$. Como mencionamos, o nosso objetivo final é focarmos numa distribuição de Lévy para $P(l)$.

Inicialmente, observamos que a distância total percorrida em uma caminhada onde o sítio é encontrado após n passos é dada por

$$L_n = \sum_{i=1}^n |l_i|, \quad (2.15)$$

onde $|l_i|$ é o comprimento do i -ésimo passo. Tomando a média sobre as caminhadas que partem dessa mesma posição inicial e encontram um sítio após n passos, temos que

$$\langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |l_i| \rangle. \quad (2.16)$$

Definindo como P_n a probabilidade de que o sítio seja encontrado no n -ésimo passo, podemos escrever $\langle L \rangle$ na forma

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \langle L_n \rangle. \quad (2.17)$$

Precisamos, então, determinar uma expressão para P_n .

Se denotarmos por $\rho_n(x_n)$ a probabilidade de que o caminhante esteja na intervalo $[x_n, x_n + dx_n]$ no n -ésimo passo, a probabilidade de que o sítio **não** tenha sido encontrado até o n -ésimo passo é dada por

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n. \quad (2.18)$$

Podemos então escrever a probabilidade de que o sítio seja encontrado num passo n' , com $n' \geq n + 1$, como

$$P_{n' \geq n+1} = 1 - \tilde{P}_n. \quad (2.19)$$

Desse modo, a probabilidade de encontro no n -ésimo passo torna-se

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n' \geq n+1} - P_{n' \geq n} = 1 - \tilde{P}_n - (1 - \tilde{P}_{n-1}) = \tilde{P}_{n-1} - \tilde{P}_n \\ &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Notamos que $P_n > 0$, pois $\rho_{n-1}(x) > \rho_n(x)$, já que a probabilidade de encontrar o sítio aumenta com o número de passos. Assim,

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] \langle L_n \rangle(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_{n-1}(x) \langle L_n \rangle(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_m(x) \langle L_{m+1} \rangle(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Usando o fato de que, por definição, a distância percorrida em uma caminhada de 0 passos, é zero, isto é $\langle L_0 \rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_m(x) \langle L_{m+1} \rangle(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) [\langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

A partir da Eq. (2.15),

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) (\langle |l_1| \rangle + \langle |l_2| \rangle + \dots + \langle |l_n| \rangle + \langle |l_{n+1}| \rangle) \\ &\quad - (\langle |l_1| \rangle + \langle |l_2| \rangle + \dots + \langle |l_n| \rangle), \end{aligned} \quad (2.23)$$

de modo que

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle |l_{n+1}| \rangle. \quad (2.24)$$

Notamos agora que como a média do módulo de passos não depende do número do passo, dada a independência estatística dos passos, mas somente da posição a partir da qual o caminhante executa o passo, então escrevemos

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle |l| \rangle(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(x) \langle |l| \rangle(x). \quad (2.25)$$

Mas da definição de ρ_n segue-se que

$$\rho_n(x_n) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(x_n - x_{n-1}) \rho_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1}, \quad (2.26)$$

ou seja, a probabilidade de que o caminhante esteja numa posição x_n após n passos, com $r_v < x_n < \lambda - r_v$, é igual ao produto da probabilidade de que o caminhante esteja numa posição $r_v < x_{n-1} < \lambda - r_v$ no passo $n - 1$ pela probabilidade de que ele dê um passo de tamanho $|x_n - x_{n-1}|$ que o leve à posição x_n . Usando a recursividade na equação acima,

$$\rho_n(x_n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_i P(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0), \quad (2.27)$$

onde $\rho_0(x_0)$ é a probabilidade de que o caminhante esteja na posição x_0 no início da caminhada, que tomaremos como uma função delta de Dirac. De fato, se a posição inicial é, digamos, $x_0 = a$, então $\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - a)$. Assim, obtemos

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_n \left[\prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_i P(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0) \langle |l| \rangle(x_n). \quad (2.28)$$

Definindo em seguida o operador integral

$$\mathcal{L}[f(x)](\xi) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(\xi - x) f(x) dx, \quad (2.29)$$

ao aplicarmos para a função $\rho_n(x_n)$ obtemos

$$\mathcal{L}[\rho_n(x_n)](x_{n+1}) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(x_{n+1} - x_n) \rho_n(x_n) dx_n = \rho_{n+1}(x_{n+1}), \quad (2.30)$$

de modo que

$$\rho_n(x_n) = \mathcal{L}[\rho_{n-1}(x_{n-1})] = \mathcal{L}[\mathcal{L}[\rho_{n-2}(x_{n-2})]] = \dots = \mathcal{L}^n[\rho_0(x_0)](x). \quad (2.31)$$

Assim, podemos escrever

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n[\rho_0(x_0)](x) \langle |l| \rangle(x). \quad (2.32)$$

Notamos ainda que a norma do operador integral tem a unidade como limitante superior, pois

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[\rho_n(x)](\alpha)| &= \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(\alpha - x) \rho_n(x) dx \right| \leq \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |P(\alpha - x) \rho_n(x)| dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |P(\alpha - x)| |\rho_n(x)| dx \leq \max[P(\alpha - x)] \underbrace{\int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x) dx}_{=1} = \max[P(\alpha - x)] \leq 1. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Acima usamos o fato de que as densidades de probabilidade têm valores sempre maiores ou iguais a zero para retirar o módulo e que

$$\int f(x)g(x)dx \leq \max[f] \int g(x)dx. \quad (2.34)$$

Esta propriedade da norma do operador \mathcal{L} permite escrever que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n[f(x)] = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}[f(x)], \quad (2.35)$$

onde $\mathbb{1}$ é o operador identidade e $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ é o operador inverso de $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$. Portanto, temos que

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}[\rho_0(x_0)](x) \langle |l| \rangle(x) \quad (2.36)$$

Se expressarmos a forma integral do operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}$ com o seu núcleo denotado por $K(x, x_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, x_0) \rho_0(x_0) \langle |l| \rangle(x) dx_0 dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, x_0) \delta(x_0 - \alpha) \langle |l| \rangle(x) dx_0 dx = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \alpha) \langle |l| \rangle(x) dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Desse modo, podemos finalmente escrever que

$$\langle L \rangle(\alpha) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}[\langle |l| \rangle(x)](\alpha). \quad (2.38)$$

A equação acima expressa um resultado formal para a quantidade essencial que procuramos determinar. De fato, como vimos, a eficiência da busca é dada por $\eta = 1/\langle L \rangle$. Contudo, apesar deste resultado matemático formal não se conhecem ainda [30,31] meios de se obter expressões analíticas explícitas e exatas para $\langle L \rangle$. Por esse motivo, realizaremos mais adiante uma discretização do espaço de busca com o objetivo de obter resultados numéricos para a Eq. (2.38) via o *software* Matlab.

É interessante observar ainda que se aplicarmos o operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$ na equação acima, encontramos

$$(\mathbb{1} - \mathcal{L})[\langle L \rangle](x) = (\mathbb{1} - \mathcal{L})(\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}[\langle |l| \rangle(x)] = \langle |l| \rangle(x), \quad (2.39)$$

de modo que

$$\langle L \rangle(x) = \mathcal{L}[\langle L \rangle(x)] + \langle |l| \rangle(x). \quad (2.40)$$

Na sua forma integral esta equação é expressa como

$$\langle L \rangle(x) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(x - \alpha) \langle L \rangle(\alpha) d\alpha + \langle |l| \rangle(x). \quad (2.41)$$

A equação acima é dita uma equação integral de Fredholm do segundo tipo [27]. Um método de solução para essas equações são as chamadas séries de Dyson [28], onde substituímos recursivamente a equação nela própria a fim de obter uma solução em série do tipo

$$u(x) = f(x) + \beta \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad (2.42)$$

levando a

$$u(x) = f(x) + \beta \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \beta^2 \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) f(t) dt_1 dt + \dots \quad (2.43)$$

No entanto, essa série não converge para todo valor de β . Para tanto, a condição $|\beta| M(b - a) < 1$ deve ser satisfeita, onde M é tal que $|K(x, t)| < M$. Especificamente, para a nossa equação integral temos que $M = P(l_0) = (\mu - 1)/2l_0$ e $\beta = A = (\mu - 1)l_0^{\mu-1}/2$. Assim, para que a série seja convergente precisamos ter

$$(\lambda - 2r_v) < \frac{4}{(\mu - 1)^2 l_0^{\mu-2}}, \quad (2.44)$$

o que claramente não é possível, já que assumimos $\lambda \gg r_v$ e $\lambda \gg l_0$.

Por outro lado, a solução formal da Eq. (2.42) para todo valor de β é dada por

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b D(x,t;\lambda) f(t) dt, \quad (2.45)$$

onde

$$\begin{aligned} D(\lambda) = & 1 - \beta \int_a^b K(t,t) dt + \frac{\beta^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \\ & - \frac{\beta^3}{3!} \int_a^b \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_3) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_3,t_1) & \dots & K(t_3,t_3) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 dt_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} D(x,t;\lambda) = & \beta K(x,y) - \beta^2 \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t) \\ K(t,y) & K(t,t) \end{vmatrix} dt \\ & + \frac{\beta^3}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t_1) & K(x,t_2) \\ K(t_1,y) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,y) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

Contudo, não vamos utilizar essa abordagem para determinar $\langle L \rangle$ devido à dificuldade de calcular os termos da série para a distribuição de Lévy. Vamos, então, utilizar a seguinte análise baseada na discretização do espaço de busca.

Inicialmente, ao invés de um contínuo de valores para as possíveis posições do buscador, $r_v \leq x \leq \lambda - r_v$, consideramos um intervalo com posições discretizadas x_i . Desse modo, a integral na Eq. (2.38) torna-se um somatório, tal que

$$\begin{aligned} \langle L \rangle(\alpha) = & (\mathbb{1} - \mathcal{L})^{-1}[\langle |l| \rangle(x)](\alpha) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} K(\alpha - x) \langle |l| \rangle(x) dx \\ & \Rightarrow \sum_{i=1}^N K(\alpha, x_i) \langle |l| \rangle(x_i) \Delta x_i, \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou seja,

$$\langle L \rangle(x_j) = \sum_{i=1}^N K(x_j, x_i) \langle |l| \rangle(x_i) \Delta x_i. \quad (2.49)$$

Podemos escrever a equação acima na forma matricial,

$$\overrightarrow{\langle L \rangle} = \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X} \overrightarrow{\langle |l| \rangle}, \quad (2.50)$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_i) & \cdots & K(x_1, x_j) & \cdots & K(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_i, x_1) & \cdots & K(x_i, x_i) & \cdots & K(x_j, x_j) & \cdots & K(x_j, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_j, x_1) & \cdots & K(x_j, x_i) & \cdots & K(x_j, x_j) & \cdots & K(x_j, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N, x_1) & \cdots & K(x_N, x_i) & \cdots & K(x_N, x_j) & \cdots & K(x_N, x_N) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

e

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \Delta x_i & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \Delta x_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \Delta x_N \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Escrevendo explicitamente, temos

$$\begin{pmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \\ \vdots \\ \langle L_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(x_1, x_1)\Delta x_1 & \cdots & K(x_1, x_i)\Delta x_i & \cdots & K(x_1, x_N)\Delta x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_i, x_1)\Delta x_1 & \cdots & K(x_j, x_i)\Delta x_i & \cdots & K(x_j, x_N)\Delta x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N, x_1)\Delta x_1 & \cdots & K(x_N, x_i)\Delta x_i & \cdots & K(x_N, x_N)\Delta x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle |l_1| \rangle \\ \vdots \\ \langle |l_j| \rangle \\ \vdots \\ \langle |l_n| \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

A partir do resultado acima, podemos obter a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos por um buscador partindo da posição x_j calculando a j -ésima linha do produto da matriz $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{X}$ pelo vetor $\overline{\langle |l| \rangle}$. É necessário, portanto, determinar a matriz \mathbf{K} . Para tanto, precisamos calcular a versão discretizada do operador $(\mathbb{1} - \mathcal{L})$ de forma similar à prescrição descrita acima, para em seguida invertermos esta matriz.

Além disso, precisamos calcular também o vetor coluna cujos elementos correspondem às médias dos passos individuais partindo das posições discretizadas x_0 , isto é, $\langle |l| \rangle(x_0)$. A partir da Fig. 2.4, podemos ver que

$$\begin{aligned} \langle |l| \rangle(x_0) &= \int_{r_v}^{x_0 - l_0} (x_0 - x)P(x - x_0)dx + \int_{x_0 + l_0}^{\lambda - r_v} (x - x_0)P(x - x_0)dx + \\ &+ (x_0 - r_v) \int_{-\infty}^{r_v} P(x - x_0)dx + (\lambda - r_v - x_0) \int_{\lambda - r_v}^{\infty} P(x - x_0)dx. \end{aligned} \quad (2.54)$$

De fato, a primeira e a segunda integrais representam um passo respectivamente dado para a esquerda e para a direita que não encontra um sítio. Já a terceira e a quarta

integrais representam um passo respectivamente dado para a esquerda e direita e que é truncado devido ao encontro dos sítios localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$. Para o caso específico da distribuição de Lévy, encontramos

- para $r_v + l_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v - l_0$,

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \begin{cases} \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{l_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((x_0 - r_v)/l_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{l_0}{2} [1 + \ln((x_0 - r_v)/l_0)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.55)$$

estes resultados expressos na forma discreta, onde fazemos $\lambda = M\Delta x$, $r_v = \nu\Delta x$, $l_0 = q\Delta x$ e $x = i\Delta x$, tornam-se

$$\langle |\ell| \rangle_i = \begin{cases} \frac{(M-i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(M-i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x}{2} [1 + \ln((i-\nu)/q)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.56)$$

- para $r_v < x_0 \leq r_v + l_0$:

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \begin{cases} \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{l_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/l_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{l_0}{2} [1 + \ln((\lambda - x_0 - r_v)/l_0)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.57)$$

e no caso discreto,

$$\langle |\ell| \rangle_i = \begin{cases} \frac{(i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[1 + \frac{((M-i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ \frac{(i-\nu)\Delta x}{2} + \frac{q\Delta x}{2} [1 + \ln((M-i-\nu)/q)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.58)$$

- para o intervalo $\lambda - r_v - l_0 \leq x_0 < \lambda - r_v$:

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \begin{cases} \frac{l_0(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[2 + \frac{((x_0 - r_v)/l_0)^{2-\mu}}{1-\mu} + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/l_0)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ l_0 [1 + \ln([(\lambda - x_0 - r_v)(x_0 - r_v)]^{1/2}/l_0)], & \text{se } \mu = 2; \end{cases} \quad (2.59)$$

e no caso discreto,

$$\langle |\ell| \rangle_i = \begin{cases} \frac{q\Delta x(1-\mu)}{2(2-\mu)} \left[2 + \frac{((i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} + \frac{((M-i-\nu)/q)^{2-\mu}}{1-\mu} \right], & \text{se } 1 < \mu \leq 3, \text{ e } \mu \neq 2, \\ q\Delta x [1 + \ln([(M-i-\nu)(i-\nu)]^{1/2}/q)], & \text{se } \mu = 2. \end{cases} \quad (2.60)$$

A fim de testarmos a abordagem acima de discretização espacial para o cálculo da distância percorrida entre dois encontros sucessivos, realizamos a comparação entre os resultados para a eficiência em função do parâmetro μ obtidos tanto pela método da discretização (via Matlab) quanto pela simulação numérica das caminhadas aleatórias utilizando as regras de busca exatamente como definidas neste capítulo. Os resultados para os casos de buscas não-destrutiva e destrutiva, respectivamente mostrados das

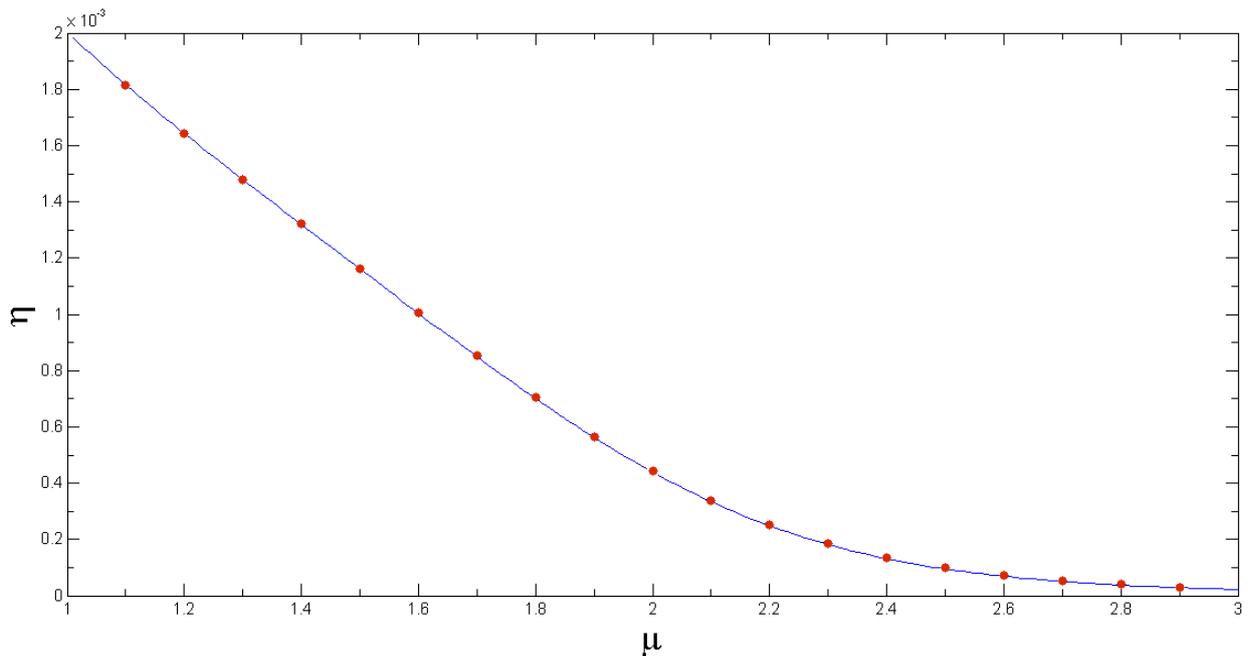


Figura 2.5 – Eficiência da busca, η , em função do parâmetro μ da distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos, no caso de busca destrutiva. São mostrados os resultados analíticos com discretização do espaço de busca (linha sólida) e de simulação numérica das regras do modelo (símbolos), utilizando os parâmetros $\lambda = 1000$, $r_v = l_0 = 1$, $\Delta x = 0.5$, $x_0 = \lambda/2$ e simulações mediadas sobre 10^7 caminhadas.

Figs. 2.5 e 2.6, demonstram uma ótima concordância em ambos os casos. Em particular, observamos também os resultados para a máxima eficiência dos casos destrutivo e não-destrutivo, respectivamente $\mu \rightarrow 1$ e $\mu \approx 2$, cujos mecanismos foram discutidos no presente capítulo.

No próximo capítulo introduziremos um ingrediente a mais nas buscas aleatórias, no sentido de tentar tornar a análise mais realista. De fato, a presença de um balanço de ganhos e perdas energéticas do *forager* ao longo do processo de busca revelará a presença de uma transição de fase em função da concentração de sítios-alvos, de um estado ativo (buscador “vivo”), em que a busca permanece indefinidamente num ambiente rico em recursos, para um estado irreversivelmente absorvente (buscador “morto”), que ocorre para concentrações de sítios abaixo de um determinado limiar crítico.

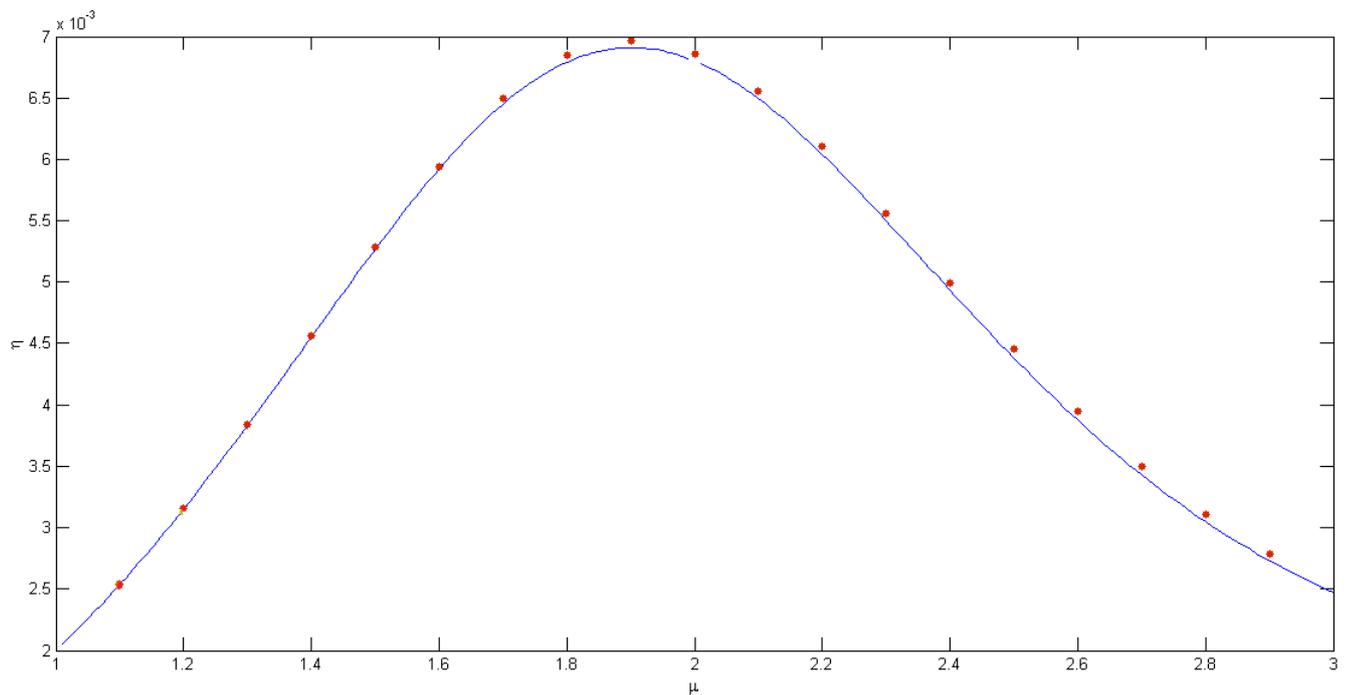


Figura 2.6 – Eficiência da busca, η , em função do parâmetro μ da distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos, no caso de busca não-destrutiva. São mostrados os resultados analíticos com discretização do espaço de busca (linha sólida) e de simulação numérica das regras do modelo (símbolos), utilizando os parâmetros $\lambda = 1000$, $r_v = l_0 = 1$, $\Delta x = 0.5$, $x_0 = r_v + 1$ e simulações mediadas sobre 10^7 caminhadas. Observamos que a eficiência máxima ocorre para caminhadas superdifusivas com $\mu \approx 2$.

3 Dinâmica Energética

Neste capítulo, vamos refinar o nosso modelo de buscas aleatórias ao passarmos a associar um estado de energia ao buscador (ou *forager*). Ao encontrar um sítio, o buscador receberá uma determinada quantidade de energia, ao passo que os seus deslocamentos implicarão em um custo energético. Com isso, é nosso objetivo tentarmos aproximar o problema estudado nesta Dissertação da realidade biológica subjacente ao contexto do *foraging* animal. Após definir o procedimento de busca, vamos discutir a transição da fase dinâmica do estado ativo (“vivo”), em que o buscador apresenta energia não-nula, para a fase irreversível absorvente (“morto”), em que sua energia é nula. Na literatura [29, 30] existem exemplos em que tipicamente é utilizada uma função com dependência linear da energia dissipada com o tamanho dos passos. Desse modo, aqui consideraremos inicialmente também uma função dissipação com esta forma linear para estabelecer alguns resultados. Contudo, em seguida vamos generalizar a função custo energético de modo que ela possa contemplar qualquer função analítica da distância média percorrida entre encontros sucessivos de sítios. Por outro lado, do ponto de vista numérico estudaremos também o caso em que a dissipação tem dependência quadrática com o tamanho dos passos. O nosso objetivo é, portanto, comparar os resultados analíticos e numéricos para os expoentes da transição, e testar a hipótese de universalidade com respeito à forma funcional da função custo energético do processo de busca aleatória. De fato, em ambos os casos demonstraremos a independência dos expoentes críticos da transição com a forma específica do gasto energético.

3.1 Modelos de Busca

Como mencionado acima, vamos nesta seção incrementar a nossa descrição do processo de buscas aleatórias introduzindo o ingrediente energia em sua dinâmica. No presente contexto, quando o *forager* encontrar um sítio, ele receberá uma quantidade de energia que denotaremos por g . O seu deslocamento, por sua vez, vai gerar um custo na forma de uma dissipação energética descrita por uma função analítica da distância percorrida. Iniciaremos o nosso estudo considerando a função custo energético com dependência linear com o tamanho dos passos [29, 30]. Em seguida, entretanto, vamos generalizar a função custo energético de modo que ela possa contemplar qualquer

função analítica da distância média percorrida entre encontros sucessivos de sítios. Por outro lado, do ponto de vista numérico estudaremos também o caso em que a dissipação tem dependência quadrática com o tamanho dos passos.

Como no capítulo anterior consideraremos um caminhante aleatório cuja densidade de probabilidade para a distribuição de passos é dada pelo limite assintótico (lei de potência) da distribuição de Lévy,

$$P(l) \sim l^{-\mu}, \quad 1 < \mu \leq 3. \quad (3.1)$$

Uma vez mais, enfatizamos que a nossa motivação principal neste trabalho é o cálculo da eficiência da estratégia de busca em ambientes escassos em recursos [1]. De fato, a acessabilidade dos recursos do ambiente é regulada pela relação entre o espaço de busca, o ganho de energia ao se encontrar os sítios e o consumo energético associado ao processo de busca, dentre outros processos vitais. Por exemplo, se o *forager* precisar percorrer grandes distâncias para acessar regiões ricas em sítios, a perda de energia no processo pode ser em média maior que o ganho. Isto nos dá uma intuição sobre a possível existência da transição de fase mencionada. Voltaremos a esse tema mais formalmente mais adiante.

Vamos agora descrever o nosso algoritmo de busca em uma dimensão com a introdução do ingrediente energia no processo.

1. A posição inicial do caminhante aleatório é sorteada aleatoriamente em um segmento de reta de tamanho λ , com sítios-alvos em suas extremidades (extremos absorventes).
2. No processo de busca aleatória, um passo de tamanho l é sorteado pela Eq. (3.1), com sentido aleatório para a esquerda ou para a direita. A cada passo, o caminhante perde uma energia $f(l)$.
3. O caminhante se movimenta buscando pelos sítios nos extremos do intervalo de forma contínua até que um deles entre no seu raio de visão, r_v . Ao fim de um passo, se não houver detecção de um sítio um novo passo é sorteado como especificado na regra 2.
4. Por outro lado, quando um sítio é detectado, ele é eliminado e um outro é introduzido a uma nova distância inicial aleatória do . A energia do caminhante é então acrescida de g e o processo recomeça até que um número pré-estabelecido de sítios, N_f , seja encontrado ou a energia acumulada do *forager* se torne nula.

No caso de uma função de custo energético com dependência linear com o tamanho do passo, $f(l_i) = \alpha|l_i|$, podemos escrever a energia acumulada do caminhante após n passos na forma [29, 30]

$$\epsilon_n = \sum_{i=1}^n g\delta_i - f(l_i) = \sum_{i=1}^n g\delta_i - \alpha|l_i|, \quad (3.2)$$

onde consideramos que o processo de busca se inicia com o *forager* dotado de energia g , i.e. $\epsilon_0 = g$, $|l_i|$ é o comprimento do i -ésimo passo, g e α são constantes que representam, respectivamente, o ganho de energia em um encontro e o coeficiente de dissipação de energia, e δ_i é tal que $\delta_i = 1$ ($\delta_i = 0$) se ocorre (não ocorre) o encontro do sítio no i -ésimo passo.

Se supusermos que após n passos são encontrados N_f sítios, então

$$\epsilon_n = N_f g - \alpha L_{N_f}, \quad (3.3)$$

onde

$$N_f = \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad L_{N_f} = \sum_{i=1}^n |l_i|. \quad (3.4)$$

Podemos ainda particionar a soma acima sobre o número total n de passos em N_f somas sobre o número de passos necessários para encontrar cada sítio. Assim, denotando por n_j o número de passos necessários até achar o j -ésimo sítio, escrevemos

$$\begin{aligned} L_{N_f} &= \sum_{i=1}^n |l_i| = \sum_{i=1}^{n_1} |l_i| + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |l_i| + \dots + \sum_{i=n_{N_f-1}+1}^{n_{N_f}} |l_i|, \\ &= L_1(x_1) + L_2(x_2) + \dots + L_{N_f}(x_{N_f}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $n_{N_f} = n$ e $L_j(x_j)$ denota o comprimento da caminhada entre o $(j-1)$ -ésimo e o j -ésimo encontro, tendo o *forager* partido da posição x_j após o encontro do $(j-1)$ -ésimo sítio.

Se tomarmos a média sobre as configurações em cada termo de soma na Eq. (3.3), ou seja, a média sobre todas as possíveis caminhadas que partem de uma certa sequência $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_f}\}$ de posições iniciais, escrevemos

$$\langle \epsilon_n \rangle = N_f g - \alpha \sum_{j=1}^{N_f} \langle L \rangle(x_j). \quad (3.6)$$

Podemos agora tirar uma média sobre as posições iniciais para obter uma energia média que dependa apenas do tamanho do número de sítios encontrados, do espaço de busca, λ , dos parâmetros de ganho e custo energéticos e da distribuição dos tamanhos dos passos. De acordo com a regra 1, $\pi(x_j)$ denota a densidade de probabilidade de que a posição inicial do caminhante em sua j -ésima busca seja $r_v < x_j < \lambda - r_v$ (lembramos que, devido ao raio de visão r_v do *forager*, os sítios nas posições $x = 0$ e $x = \lambda$ são respectivamente detectados assim que o *forager* alcança as posições $x = r_v$ e $x = \lambda - r_v$). Desse modo, temos que

$$\overline{\langle \epsilon_n \rangle} = N_f g - \alpha \overline{\langle L_{N_f} \rangle} = N_f g - \alpha \sum_{j=1}^{N_f} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \langle L \rangle(x_j) \pi(x_j) dx_j. \quad (3.7)$$

Se considerarmos a mesma distribuição de probabilidade $\pi(x_j) = \pi(x)$ para todos os encontros e o fato de que as caminhadas não são correlacionadas, então

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} \langle L \rangle(x_j) \pi(x_j) dx_j = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \langle L \rangle(x) \pi(x) dx, \quad (3.8)$$

de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} E \equiv \overline{\langle \epsilon_n \rangle} &= N_f g - \alpha \sum_{j=1}^{N_f} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \langle L \rangle(x) \pi(x) dx \\ &= N_f g - \alpha N_f \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \langle L \rangle(x) \pi(x) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Essa equação é a base dos trabalhos anteriores [29, 12]. Precisamos de uma expressão para $\overline{\langle L \rangle}$, de modo que possamos calcular a energia média do caminhante após N_f encontros. Apesar de termos calculado no capítulo anterior uma expressão formal [31] para $\langle L \rangle$, não existe até o presente momento uma forma analítica explícita para esta quantidade que possa ser substituída no integrando acima. Por isso, vamos nos valer a seguir da seguinte aproximação [31]:

$$\langle L \rangle(x) \approx \langle n \rangle(x) \langle l \rangle(x), \quad (3.10)$$

onde $\langle n \rangle(x)$ e $\langle l \rangle(x)$ denotam, respectivamente, o número médio de passos entre dois encontros sucessivos e o tamanho médio de um passo de uma caminhada iniciada na posição x . Consideraremos a seguir os resultados analíticos aproximados obtidos na Ref. [25, 26]:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle(x) &= \frac{2A(\lambda, \mu) \sin[\pi(\mu-1)/2]}{\pi(\mu-1)l_0^{\mu-1}} [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2} \\ \langle l \rangle(x) &= \frac{l_0^{\mu-1}}{2(2-\mu)} \left\{ [\lambda - x - r_v]^{2-\mu} + [x - r_v]^{2-\mu} - 2l_0^{2-\mu}(\mu-1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Na expressão para $\langle n \rangle$ introduzimos o fator $A(\lambda, \mu)$. De fato, $A(\lambda, \mu) = 1$ para $\mu \leq 2$, embora a sua introdução seja necessária para corrigir o resultado para $\langle n \rangle$ no regime $\mu > 2$, como pode ser visto na Fig. 3.1 em que a comparação com os resultados numéricos para $\langle n \rangle$ é apresentada. Por outro lado, como discutido no capítulo anterior, na expressão para $\langle l \rangle$ consideramos apenas o intervalo maior e mais relevante da busca, $r_v + l_0 \leq x \leq \lambda - r_v - l_0$.

A substituição da Eq. (3.11) na Eq. (3.9) permite a realização analítica da integração por exemplo no caso de uma distribuição uniforme de posições iniciais, $\pi(x) = 1/(\lambda - 2r_v)$, de modo a determinar a energia média acumulada pelo *forager* após N_f encontros de sítios [12]. Não repetiremos este cálculo aqui. Ao invés disso, iremos a seguir considerar uma generalização da Eq. (3.9) para incluir qualquer função analítica de custo energético, recuperando os resultados do caso linear [12] no limite apropriado.

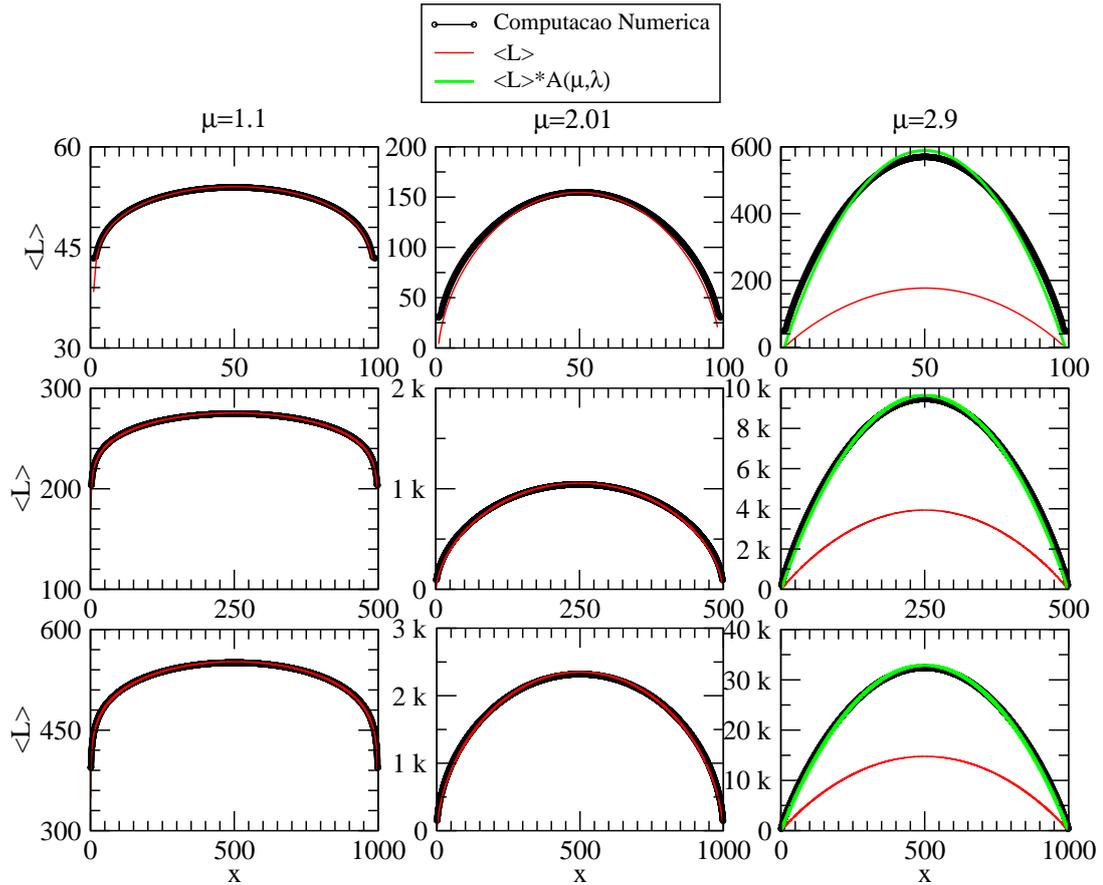


Figura 3.1 – Comparação das curvas numéricas para $\langle L \rangle(x)$ em função da posição inicial x com a aproximação utilizada para os cálculos analíticos, para diversos valores de μ . Destacamos a boa concordância para $\mu < 2$, onde $A(\lambda, \mu) = 1$, e a necessidade do ajuste para $\mu > 2$, onde $A(\lambda, \mu) \neq 1$ [30].

Antes de realizar esta generalização, contudo, cabe aqui um comentário. Como vimos, no caso anterior partimos de um custo linear para cada passo e conseguimos reorganizar a soma para contabilizar o gasto de cada caminhada, utilizando a aproximação da Eq. (3.10). Contudo, para um função de gasto não-linear esta reorganização não é possível tipicamente. Desse modo, para facilitar o tratamento analítico vamos considerar o custo energético descrito por uma função do comprimento médio das caminhadas entre dois encontros de sítios, e não dos tamanhos de passos individuais. Em contrapartida, no nosso estudo numérico apresentado no final deste capítulo será possível considerar um gasto energético quadrático nos tamanhos de passos individuais. Como consequência, diferentemente do caso de gasto linear em que podemos comparar diretamente a energia média após N_f encontros obtida analítica e numericamente, não será possível realizar a comparação direta entre as duas abordagens no caso de gasto não-linear. Contudo, o fato mais importante é que os expoentes críticos da transição de fase mencionada poderão ser calculados, de modo que os seus valores poderão ser

comparados em ambas abordagens analítica e numérica para ambos os casos linear e não-linear de custo energético, testando assim o seu grau de universalidade.

Iniciamos a generalização da Eq. (3.9) escrevendo

$$E = \epsilon_0 + N_f g - \alpha N_f \overline{f(\langle L \rangle)}, \quad (3.12)$$

onde f não é mais necessariamente uma função linear, e sim uma função analítica que admite expansão em série de Taylor. Desse modo, escrevemos

$$\begin{aligned} \overline{f(\langle L \rangle)} &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(\langle L \rangle)(x) \pi(x) dx = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \langle L \rangle^i(x) \pi(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \langle L \rangle^i(x) \pi(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \overline{\langle L \rangle^i}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Calculando em seguida os termos da série,

$$\overline{\langle L \rangle^m} = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \langle L \rangle^m(x) \pi(x) dx \simeq \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [A(\lambda, \mu) \langle n \rangle \langle l \rangle]^m \pi(x) dx. \quad (3.14)$$

Para o caso de uma distribuição uniforme de posições iniciais, $\pi(x) = 1/(\lambda - 2r_v)$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\langle L \rangle^m} &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \frac{dx}{\lambda - 2r_v} \left[A(\lambda, \mu) \frac{2 \sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\pi(\mu - 1) l_0^{\mu-1}} [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2} \right. \\ &\quad \left. \frac{l_0^{\mu-1}}{2(2 - \mu)} \left\{ [\lambda - x - r_v]^{2-\mu} + [x - r_v]^{2-\mu} - 2l_0^{2-\mu} (\mu - 1) \right\} \right]^m \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{\frac{1}{\lambda - 2r_v} \left[A(\lambda, \mu) \frac{\sin[\pi(\mu - 1)/2]}{\pi(\mu - 1)(2 - \mu)} \right]^m}^{\equiv K_m} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \left\{ [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2} \right. \\ &\quad \left. \left([\lambda - x - r_v]^{2-\mu} + [x - r_v]^{2-\mu} - 2l_0^{2-\mu} (\mu - 1) \right) \right\}^m \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &= K_m \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \left\{ [\lambda - x - r_v]^{(3-\mu)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2} + [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(3-\mu)/2} \right. \\ &\quad \left. - 2l_0^{2-\mu} (\mu - 1) [\lambda - x - r_v]^{(\mu-1)/2} [x - r_v]^{(\mu-1)/2} \right\}^m \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} &= K_m \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left([\lambda - x - r_v]^{\frac{3-\mu}{2}} [x - r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} + [\lambda - x - r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} [x - r_v]^{\frac{3-\mu}{2}} \right)^j \times \\ &\quad \left(-2l_0^{2-\mu} (\mu - 1) [\lambda - x - r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} [x - r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} \right)^{m-j} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$= K_m \sum_{j=0}^m \frac{m!(-2\mu+2)^{m-j}}{j!(m-j)!} l_0^{(2-\mu)(m-j)} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \left([\lambda-x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} [x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} \right)^{m-j} \times \\ \left([\lambda-x-r_v]^{\frac{3-\mu}{2}} [x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} + [\lambda-x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} [x-r_v]^{\frac{3-\mu}{2}} \right)^j \quad (3.19)$$

$$= K_m \sum_{j=0}^m \frac{m!(-2\mu+2)^{m-j}}{j!(m-j)!} l_0^{(2-\mu)(m-j)} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \left([\lambda-x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} [x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} \right)^{m-j} \times \\ \sum_{a=0}^j \binom{j}{a} \left([\lambda-x-r_v]^{\frac{3-\mu}{2}} [x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} \right)^a \left([\lambda-x-r_v]^{\frac{\mu-1}{2}} [x-r_v]^{\frac{3-\mu}{2}} \right)^{j-a}. \quad (3.20)$$

Utilizando a integral abaixo, válida para $\text{Re}(\alpha) > -1$ e $\text{Re}(\beta) > -1$, com $b > 0$ e $a > b$,

$$\int_a^b dx (a-x)^\alpha (x-b)^\beta = \frac{(a-b)^{1+\alpha+\beta} \Gamma(1+\alpha) \Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\alpha+\beta)}, \quad (3.21)$$

então

$$\overline{\langle L \rangle^m} = K_m \sum_{j=0}^m \frac{m!(-2\mu+2)^{m-j}}{j!(m-j)!} l_0^{(2-\mu)(m-j)} \sum_{a=0}^j \binom{j}{a} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\lambda-x-r_v]^{\frac{m(\mu-1)-2a(\mu-2)}{2}} \\ \times [x-r_v]^{\frac{m(\mu-1)-2j(\mu-2)+2a(\mu-2)}{2}} dx \quad (3.22)$$

$$= K_m \sum_{j=0}^m \frac{m!(-2\mu+2)^{m-j}}{j!(m-j)!} l_0^{(2-\mu)(m-j)} \sum_{a=0}^j \binom{j}{a} [\lambda-2r_v]^{1+m(\mu-1)-j(\mu-2)} \times \\ \frac{\Gamma\left[\frac{2+m(\mu-1)-2a(\mu-2)}{2}\right] \Gamma\left[\frac{2+m(\mu-1)-2j(\mu-2)+2a(\mu-2)}{2}\right]}{\Gamma[2+m(\mu-1)-j(\mu-2)]} \quad (3.23)$$

$$= K_m [\lambda-2r_v]^{1+m(\mu-1)} \sum_{j=0}^m \frac{m!(-2\mu+2)^{m-j}}{j!(m-j)!} l_0^{(2-\mu)(m-j)} (\lambda-2r_v)^{-j(\mu-2)} \sum_{a=0}^j \binom{j}{a} \\ \Gamma\left[\frac{2+m(\mu-1)-2a(\mu-2)}{2}\right] \Gamma\left[\frac{2+m(\mu-1)-2j(\mu-2)+2a(\mu-2)}{2}\right] \quad (3.24)$$

$$= \left[A(\lambda, \mu) \frac{[\lambda-2r_v]^{\mu-1} \sin[\pi(\mu-1)/2]}{\pi(\mu-1)(2-\mu)} \right]^m \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{l_0^{(2-\mu)(m-j)} (\lambda-2r_v)^{-j(\mu-2)}}{\Gamma(2+m(\mu-1)-j(\mu-2))} \times \\ (2-2\mu)^{m-j} \sum_{a=0}^j \binom{j}{a} \Gamma\left[\frac{2+m(\mu-1)-2a(\mu-2)}{2}\right] \times \\ \Gamma\left[\frac{2+m(\mu-1)-2j(\mu-2)+2a(\mu-2)}{2}\right]. \quad (3.25)$$

Substituindo a Eq. (3.25) nas Eqs. (3.12) e (3.13), temos uma expressão para a energia acumulada do *forager* após N_f encontros de sítios para qualquer forma analítica de custo

energético de busca em função da distância média percorrida entre encontros sucessivos. Inicialmente, vale comentar que ao considerarmos $A_i = \delta_{i,1}$ na Eq. (3.13), recuperamos exatamente o resultado obtido na Ref. [12] para o caso de custo energético linear. Além disso, de posse do resultado acima, podemos analisar a transição mencionada entre as fases ativa e absorvente. De fato, à medida em que a caminhada é executada, o *forager* segue ganhando e perdendo energia, podendo eventualmente chegar um momento em que a sua energia se anule. Essa dinâmica é controlada essencialmente pelo tamanho do espaço de busca, λ , ou $\lambda - 2r_v$, se tomarmos apenas o “tamanho útil”, pelo ganho energético após o encontro de cada sítio, g , e pelos parâmetros A_i que definem a função de gasto energético. É conveniente definir uma variável com dimensões de densidade linear de energia, $\rho = g/\lambda$, para melhor entender a influência relativa dos parâmetros g e λ . Observa-se que para valores elevados de ρ o caminhante terá altos valores de energia acumulada pois o ganho energético após o encontro de um sítio tipicamente compensa o gasto envolvido com a sua localização. Por outro lado, para pequenos valores de ρ a energia acumulada tende a ser menor, uma vez que o *forager* precisa se deslocar por maiores distâncias em média para encontrar um sítio. Eventualmente, para existirá um valor típico de ρ tal que o caminhante atinge o estado de energia acumulada nula. Vemos então que existe a possibilidade de ocorrência de uma transição de um estado ativo (“vivo”) de altos valores de ρ , no qual a busca pelos sítios permanece indefinidamente, para um estado absorvente (“morto”) de energia nula em baixos valores de ρ , em que a busca cessa de forma irreversível. A fronteira entre essas duas fases é delimitada por um valor crítico da densidade de energia, $\rho = \rho_c$, ou, se fixarmos o valor de g , por um valor crítico do espaçamento entre os sítios, $\lambda = \lambda_c$. Vale notar que a densidade de sítios dispostos num segmento linear é tipicamente inversamente proporcional à distância média entre os sítios. Assim, esta mesma transição de fase pode ser interpretada entre um estado ativo em um meio rico em recursos e um estado absorvente em um meio de baixa densidade de sítios-alvos.

Especificamente, quando a energia acumulada se anula na transição, temos que

$$E = 0 = N_f g - \alpha N_f \overline{f(\langle L \rangle)}(\lambda, \mu) \implies g = \alpha \overline{f(\langle L \rangle)}(\lambda_c, \mu), \quad (3.26)$$

ou, definindo o parâmetro ψ como uma energia acumulada normalizada,

$$\psi \equiv \frac{E}{N_f \alpha} = \frac{g}{\alpha} - \overline{f(\langle L \rangle)}(\lambda, \mu) = \overline{f(\langle L \rangle)}(\lambda_c, \mu) - \overline{f(\langle L \rangle)}(\lambda, \mu). \quad (3.27)$$

Notamos em particular que na Eq. (3.26) o valor da distância crítica entre os sítios, λ_c , fica determinado em função dos parâmetros relevantes do problema.

Observamos ainda que ψ pode ser entendido como um parâmetro de ordem, pois é nulo na transição e na fase absorvente e não-nulo (finito) na fase ativa. Este fato pode ser observado na Fig. 3.2, onde apresentamos a comparação entre os resultados analíticos e numéricos obtidos para o caso de custo energético linear.

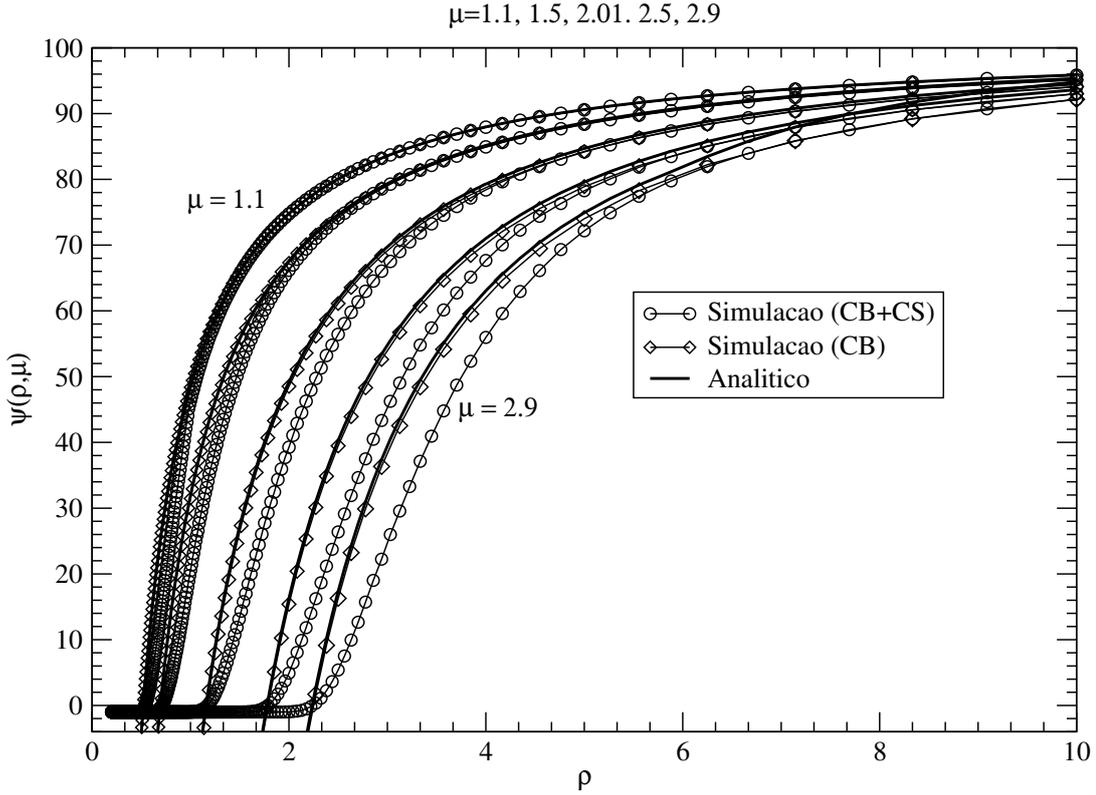


Figura 3.2 – Energia acumulada normalizada, ψ , em função de $\rho = g/\lambda$, para as abordagens analíticas e numéricas do caso linear [12]. A simulação (CB+CS) indica uma média sobre 10^4 buscas que são interrompidas pelo encontro de N_f sítios ou por atingir um valor nulo de energia acumulada. A simulação (CB) indica uma média sobre 10^4 buscas que são interrompidas apenas pelo encontro de N_f sítios. Resultados obtidos para $\mu = 1.1, 1.5, 2.01, 2.5, 2.9$, e parâmetros $g = 100, r_v = 1, \alpha = 1, l_0 = 1$ e $N_f = 1000$.

Voltando ao caso geral, calculamos a expressão para ψ :

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[A(\lambda, \mu) \frac{2 \sin[\pi(\mu-1)/2]}{\pi(\mu-1)(2-\mu)} \right]^m \sum_{j=0}^m \frac{m!(-2\mu+2)^{m-j}}{j!(m-j)!} l_0^{(2-\mu)(m-j)} \sum_{a=0}^j \binom{j}{a} \times$$

$$\left\{ [\lambda_c - 2r_v]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} - [\lambda - 2r_v]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} \right\} \frac{\Gamma \left[\frac{2+m(\mu-1)-2j(\mu-2)+2a(\mu-2)}{2} \right]}{\Gamma[2+m(\mu-1)-j(\mu-2)]} \times$$

$$\Gamma \left[\frac{2+m(\mu-1)-2a(\mu-2)}{2} \right] \quad (3.28)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sum_{j=0}^m B_{mj} \sum_{a=0}^j C_{mja} \left\{ [\lambda_c - 2r_v]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} - [\lambda - 2r_v]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} \right\} \quad (3.29)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sum_{j=0}^m B_{mj} \sum_{a=0}^j C_{mja} g^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} \left\{ \left[\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} - \left[\frac{\lambda - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} \right\}. \quad (3.30)$$

Podemos agora analisar o comportamento do parâmetro de ordem próximo à transição de fase, isto é, para $\lambda \rightarrow \lambda_c$. Definindo a distância ao ponto crítico (já levando em conta o raio de visão r_v),

$$\epsilon \equiv \frac{\lambda - 2r_v}{g} - \frac{\lambda_c - 2r_v}{g}, \quad (3.31)$$

escrevemos que

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sum_{j=0}^m B_{mj} \sum_{a=0}^j C'_{mja} \left\{ \left[\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} - \left[\epsilon + \frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} \right\} \quad (3.32)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sum_{j=0}^m B_{mj} \sum_{a=0}^j C'_{mja} \left\{ \left[\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} - \left[\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} - \epsilon [m(\mu-1) - j(\mu-2)] \left[\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)-1} \right\}, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

Assim,

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sum_{j=0}^m B_{mj} \sum_{a=0}^j C''_{mja} \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.34)$$

onde

$$D_m = A_m \left[\frac{A(\lambda, \mu) \sin[\pi(\mu-1)/2]}{\pi(\mu-1)(2-\mu)} \right]^m, \quad B_{mj} = \frac{m!(2-2\mu)^{m-j}}{j!(m-j)!} l_0^{(2-\mu)(m-j)}, \quad (3.35)$$

e

$$C''_{mja} = -[m(\mu-1) - j(\mu-2)] g^{m(\mu-1)-j(\mu-2)} \binom{j}{a} \left[\frac{\lambda_c - 2r_v}{g} \right]^{m(\mu-1)-j(\mu-2)-1}. \quad (3.36)$$

Como discutimos no Cap. 1, nas proximidades do ponto crítico o parâmetro de ordem tem um comportamento na forma [19]

$$\psi \sim \epsilon^\beta, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

Assim, comparando esta expressão com a Eq. (3.34) identificamos o expoente crítico $\beta = 1$, idêntico ao obtido no caso de uma função de gasto energético linear [29, 30]. Este

resultado é uma primeira evidência analítica de universalidade dos expoentes críticos desta transição. Vale ressaltar, entretanto, que a universalidade de fato se dá apenas no nível dos expoentes críticos: como esperado, os valores específicos do parâmetro crítico λ_c variam consideravelmente dependendo da forma funcional da função de custo energético. (Fazendo uma analogia com uma transição ferromagnética de equilíbrio, poderíamos dizer que embora as temperaturas críticas T_c da transição em materiais distintos possam ser bem diferentes entre si, devido a diferentes valores do acomplamento de troca entre os spins em cada material, o expoente β que rege o comportamento do parâmetro de ordem magnetização próximo a T_c é o mesmo em todos os casos.) Ainda nesse contexto, mostraremos posteriormente que o mesmo resultado ($\beta = 1$) também é obtido numericamente ao simularmos uma caminhada aleatória com um custo energético quadrático no comprimento dos passos.

De posse do expoente crítico β , vamos a seguir obter um segundo expoente ao estudar a taxa de sobrevivência do *forager*.

3.2 Taxa de Sobrevivência

Estamos interessados nesta seção em calcular a taxa de sobrevivência do caminhante aleatório na busca por sítios num segmento unidimensional. Como vimos no Cap. 1, esta taxa está associada à probabilidade do caminhante estar “vivo” (isto é, com energia acumulada positiva) após um dado número de passos ou após um certo instante de tempo, e permite, portanto, entender como se dá a dinâmica temporal da energia do *forager*.

Para estudar a taxa de sobrevivência, vamos realizar a seguir um mapeamento da energia acumulada do buscador em uma nova caminhada aleatória, em que os passos na verdade correspondem à energia líquida acumulada entre dois encontros sucessivos de sítios-alvos. Em outras palavras, ao invés da posição x_{N_f} em um eixo espacial x de um caminhante aleatório após N_f passos dados, teremos a energia acumulada E_{N_f} em um eixo de energia após N_f encontros de sítios. Nesse contexto, a “morte” do *forager* é mapeada no “caminhante de energia” passando pela origem do eixo, $E = 0$, pela primeira vez. Temos, então, um problema de primeira passagem, discutido em detalhes no Cap. 1, incluindo o cálculo da taxa de sobrevivência após n passos, F_n . Naquele contexto, calculamos a probabilidade de retorno à origem pela primeira vez. Agora, temos um buscador saindo de uma “posição” $\epsilon_0 = g$ e que passa pela origem na transição. Se usarmos a propriedade de simetria translacional, podemos calcular a probabilidade de um caminhante saindo da origem chegar na posição $-\epsilon_0$ e definir esta como a situação de “morte”.

Recuperando os resultados da Seção 1.4 para a função geratriz da probabilidade de

que o caminhante aleatório esteja na posição j pela primeira vez, temos que

$$F(j;z) = \frac{1 - f(j;z)}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \left(1 - \frac{P(j;z)}{P(0;z)} \right) = \frac{P(0;z) - P(j;z)}{P(0;z)(1 - z)}. \quad (3.38)$$

Acima usamos uma versão análoga à Eq. (1.68), mas para um posição j genérica (ao invés da posição $j = 0$), e substituímos a expressão para $f(j;z)$ da Eq. (1.54).

Temos ainda que

$$P(0;z) - P(j;z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1 - e^{-i\omega j}}{1 - z\hat{P}(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1 - \cos(i\omega j)}{1 - z\hat{P}(\omega)}. \quad (3.39)$$

Para passar acima da função exponencial para o cosseno, usamos o fato de que a distribuição de probabilidade do caminhante é simétrica. Por isso, $\hat{P}(\omega)$ é uma função par, que ao ser integrada com o termo de seno da exponencial num intervalo simétrico dá zero. Mais uma vez, expandindo o integrando ao redor de $\omega = 0$, obtemos

$$P(0;z) - P(j;z) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} d\omega \frac{1 - \left(1 - \frac{(\omega j)^2}{2}\right)}{1 - z\hat{P}(\omega \rightarrow 0)} = \frac{j^2}{4\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} d\omega \frac{\omega^2}{1 - z\hat{P}(\omega \rightarrow 0)}. \quad (3.40)$$

Temos agora de expressar a distribuição de probabilidade do “caminhante aleatório” de energia. Podemos partir da expressão para a energia acumulada e escrever

$$E = N_f g - \alpha \sum_{i=1}^{N_f} f(\langle L \rangle(x_i)) \Rightarrow E - N_f g = \sum_{i=1}^{N_f} -\alpha f(\langle L \rangle(x_i)) = \sum_{i=1}^{N_f} s_i. \quad (3.41)$$

Como dito anteriormente, a equação acima mostra que a energia líquida acumulada entre dois encontros sucessivos de sítios pode ser vista como o passo de um caminhante aleatório em um espaço de energia, uma vez que os custos energéticos entre dois encontros se comportam como variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Em outras palavras, a energia líquida acumulada entre dois encontros sucessivos também pode ser caracterizada por uma distribuição de probabilidades. Uma vez especificada a forma funcional para f , a energia despendida é uma função do deslocamento médio entre dois encontros, $\langle L \rangle$, que por sua vez depende da posição inicial do buscador e da distribuição de passos. Nesse sentido, como o *forager* realiza as suas buscas em um espaço limitado, então necessariamente $\langle L \rangle$ é finito, de modo que para funções de gasto bem comportadas, como as que assumimos aqui, a energia líquida acumulada entre dois encontros de sítios também é finita, bem como os momentos que caracterizam a sua distribuição. Então, para um número grande de encontro de sítios, podemos usar o resultado do Teorema do Limite Central, que, como vimos na Seção 1.2, assegura que

$$P(E, N_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 N_f}} e^{-(E - N_f + \alpha N_f \overline{f(\langle L \rangle)})^2 / 2N_f\sigma^2}. \quad (3.42)$$

Acima, a variância da distribuição gaussiana é dada por

$$\sigma^2 = \overline{(s - \bar{s})^2} = \overline{s^2} - \bar{s}^2 = \alpha^2 \left[\overline{f^2(\langle L \rangle(x_i))} - \overline{f(\langle L \rangle(x_i))}^2 \right]. \quad (3.43)$$

Um outro resultado que vamos usar é a expansão de $\hat{P}(\omega)$, isto é

$$\hat{P}(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} + \dots \quad (3.44)$$

Nesse caso, σ é dado pela expressão acima. Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} P(0; z) - P(j; z) &= \frac{j^2}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} d\omega \frac{\omega^2}{1 - z + \frac{z\omega^2\sigma^2}{2}} = \frac{j^2}{4\pi} \left[\frac{4\delta}{z\sigma^2} - \frac{2\sqrt{1-z}}{\left(\frac{z\sigma^2}{2}\right)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{\delta j^2}{\pi z \sigma^2} - \frac{j^2 \sqrt{2-2z}}{\pi (z\sigma^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Acima usamos que

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A dx \frac{x^2}{a + bx^2} &= \frac{x}{b} - \frac{\sqrt{a} \arctan\left(\frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{a}}\right)}{b^{3/2}} \Big|_{-A}^A = \frac{2A}{b} - \frac{2\sqrt{a} \arctan\left(\frac{\sqrt{bA}}{\sqrt{a}}\right)}{b^{3/2}} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{2A}{b} - \frac{2\sqrt{a} \pi}{b^{3/2} 2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por outro lado, da Eq. (1.77), temos

$$\begin{aligned} F(j; z) &= \frac{P(0; z) - P(j; z)}{P(0; z)(1-z)} = \left[\frac{\delta j^2}{\pi z \sigma^2} - \frac{j^2 \sqrt{2-2z}}{\pi (z\sigma^2)^{3/2}} \right] \sigma \sqrt{\frac{2z}{1-z}} \\ &= \frac{\delta j^2 \sqrt{2}}{\sqrt{z(1-z)} \sigma} - \frac{2j^2}{\pi \sigma^2 z} = \frac{1}{(1-z)^{1/2}} \left[\frac{\delta j^2 \sqrt{2}}{\sqrt{z} \sigma} - \frac{2j^2}{\pi \sigma^2 z} \left(\frac{1}{1-z} \right)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Assim, reescrevendo

$$\begin{aligned} F(j; z) &= \frac{1}{(1-z)^{1/2}} \left\{ \frac{\delta j^2 \sqrt{2}}{\sigma} \left[1 - \left(\frac{1}{1-z} \right)^{-1} \right]^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2j^2}{\pi \sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{1-z} \right)^{-1} \right]^{-1} \left[\frac{1}{1-z} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

percebemos que o termo entre chaves é uma função de $1/(1-z)$ que varia muito lentamente (vide Secção 1.4). Nesse caso, o teorema tauberiano nos permite então escrever que

$$F_n(j) \sim \frac{1}{\Gamma(1/2)} n^{-1/2} \left[\frac{\delta j^2 \sqrt{2}}{\sigma} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{1/2} - \frac{2j^2}{\pi \sigma^2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \right]. \quad (3.49)$$

Temos então um comportamento assintótico do tipo lei de potência para a taxa de sobrevivência após n passos e também para a probabilidade de passagem pela primeira vez pelo ponto de energia acumulada nula, representado nesse caso por $j = -\epsilon_0 = -g$, no limite $n \gg 1$:

$$\Gamma(\lambda, n) \equiv F_n(j = -g) \sim n^{-1/2}, \quad n \gg 1. \quad (3.50)$$

A dependência com λ indicada na equação acima está implícita no cálculo da variância σ da distribuição do custo energético entre dois encontros, que naturalmente depende de λ . Lembramos ainda que, no presente contexto, n passos realizados pelo caminhante aleatório do Cap. 1 são análogos ao encontro de n sítios pelo buscador. Como veremos na seção seguinte, ao utilizarmos a hipótese de escala e escrevermos

$$\Gamma(\lambda, n) \sim n^{-\beta/\nu}, \quad n \gg 1, \quad (3.51)$$

imediatamente identificamos os resultados para os expoentes $\beta = 1$ (calculado na seção anterior) e $\nu = 2$, válidos para qualquer que seja a forma funcional da função de custo energético.

3.3 Análise Numérica

Nesta seção vamos apresentar a análise numérica realizada para o cálculo dos expoentes críticos da transição nas situações em que a função de custo energético é linearmente ($f(l) \propto l$) e quadraticamente ($f(l) \propto l^2$) proporcional ao comprimento do passo individual. O caso linear, estudado por Ribeiro-Neto e colaboradores [29, 30], servirá principalmente para efeito de comparação com os nossos resultados para a dependência quadrática.

Simulamos a busca por um número N_f de sítios exatamente conforme as regras do algoritmo descrito na Seção 3.1, para uma distribuição uniforme de posições iniciais, $\pi(x) = 1/(\lambda - 2r_v)$. A taxa de sobrevivência $\Gamma(\lambda, n)$ é calculada numericamente como a fração do número de caminhantes que permanecem com energia acumulada maior que zero após n encontros de sítios, em um espaço de busca λ . As Figs. 3.3 e 3.4 ilustram $\Gamma(\lambda, n)$ nos casos de custo energético linear e quadrático, respectivamente. A transição de fase descrita anteriormente pode ser claramente notada em ambos os casos. Em particular, observa-se também a forte dependência do parâmetro crítico $\chi = 1/\rho = \lambda/g$ não apenas com a forma funcional do custo energético, como também com outros parâmetros do problema (tal como, por exemplo, com o expoente μ da distribuição de Lévy do tamanho dos passos do buscador). Uma outra observação relevante é que a taxa de sobrevivência Γ , assim como a energia acumulada normalizada, ψ , também pode ser interpretada como um parâmetro de ordem da transição [29, 30]. De fato, assim como ψ , a taxa de sobrevivência é nula na fase absorvente e é finita na fase ativa, apresentando valor de saturação igual a 1 em ambientes extremamente ricos em recursos, $\chi \rightarrow 0$.

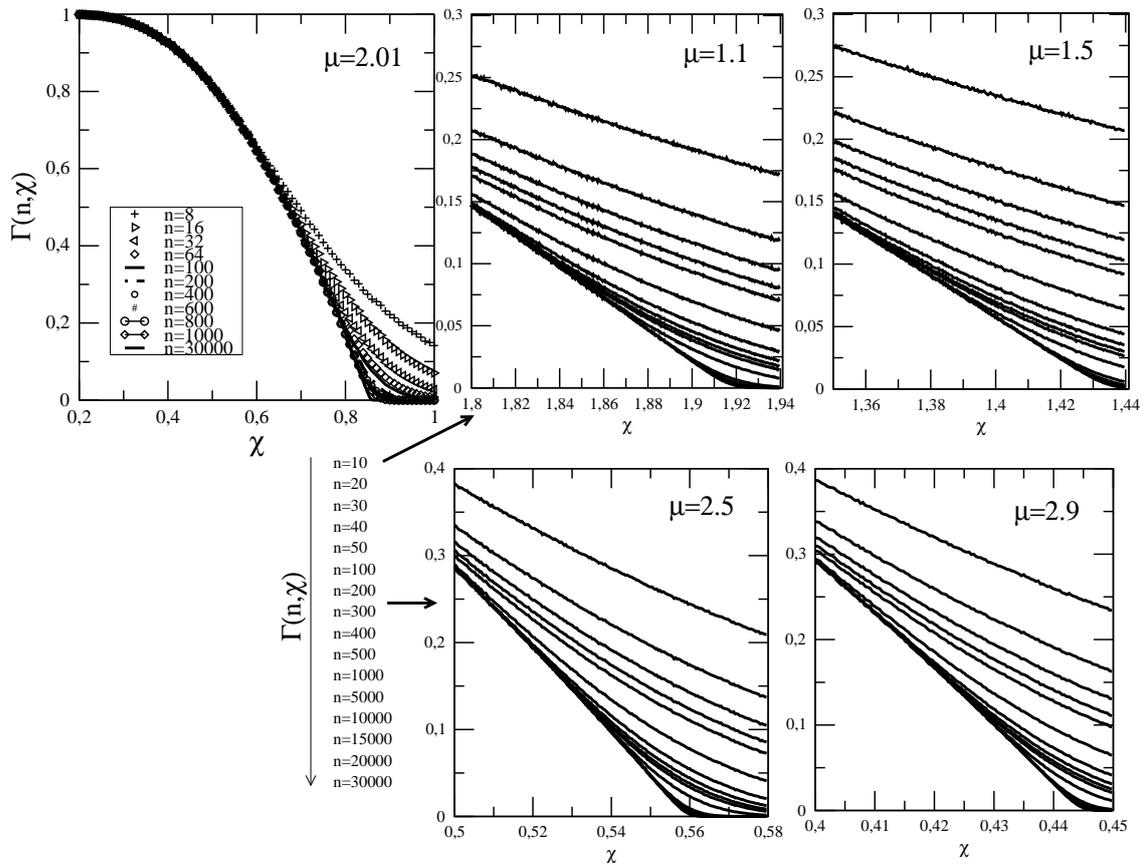


Figura 3.3 – Taxa de sobrevivência, $\Gamma(n, \chi)$, em função de $\chi = \lambda/g$, para diversos valores n e μ , no caso numérico de custo energético linear. Os parâmetros utilizados foram $g=100$, $r_v=1$, $l_0=1$, e $\alpha=1$, sendo realizadas médias sobre 500 réplicas de buscas de 30000 sítios[12].

Para calcular os expoentes críticos numericamente, vamos considerar a hipótese de escala, discutida na Seção 1.1, para escrever a taxa de sobrevivência na forma [29]

$$\Gamma(\lambda, n) = n^{-\beta/v} f \left[n^{1/v} (\lambda - \lambda_c) \right]. \quad (3.52)$$

Definindo uma primeira função auxiliar [29] como

$$K(n, n_0, \lambda) \equiv \frac{\ln [\Gamma(\lambda, n) / \Gamma(\lambda, n_0)]}{\ln [n / n_0]}, \quad (3.53)$$

podemos obter o comportamento crítico do sistema. De fato, uma vez que

$$K(n, n_0, \lambda) = \frac{\ln[\Gamma(\lambda, n)/\Gamma(\lambda, n_0)]}{\ln[n/n_0]} = \frac{1}{\ln[n/n_0]} \ln \left\{ \frac{n^{-\beta/v} f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]}{n_0^{-\beta/v} f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]} \right\} \quad (3.54)$$

$$= \frac{\ln[n^{-\beta/v}] + \ln\{f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\} - \ln[n_0^{-\beta/v}] - \ln\{f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}}{\ln[n/n_0]} \quad (3.55)$$

$$= \frac{-\beta/v \{\ln[n] - \ln[n_0]\} + \ln\{f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\} - \ln\{f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}}{\ln[n/n_0]}. \quad (3.56)$$

temos então que, no ponto crítico, ou seja, para $\lambda = \lambda_c$,

$$K(n, n_0, \lambda_c) = \frac{-\beta/v \{\ln[n] - \ln[n_0]\} + \ln\{f[0]\} - \ln\{f[0]\}}{\ln[n/n_0]} = -\beta/v. \quad (3.57)$$

Em outras palavras, as diferentes curvas para diferentes “tempos”, ou seja, diferentes números de sítios encontrados, se encontram no mesmo ponto exatamente no valor crítico $\lambda = \lambda_c$ (ou $\chi = \chi_c$), como pode ser visto nas Figs. 3.5 e 3.6. Os resultados numéricos encontrados levam à uma razão entre os expoentes $\beta/v = 1/2$, em perfeito acordo com os resultados analíticos das seções anteriores obtidos para qualquer forma funcional da função de custo energético. Notamos ainda que este valor também não depende do expoente μ da distribuição de Lévy dos tamanhos dos passos, muito embora o parâmetro crítico λ_c apresente forte dependência com μ .

Podemos definir [29] ainda uma segunda função auxiliar h , tal que

$$h(n, n_0, \lambda) \equiv \frac{[\partial \ln \Gamma(\lambda, n) / \partial \lambda]}{\partial \ln[\Gamma(\lambda, n_0)] / \partial \lambda} = \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \{n^{-\beta/v} f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}}{\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \{n_0^{-\beta/v} f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}} \quad (3.58)$$

$$= \frac{\frac{1}{n^{-\beta/v} f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]} n^{-\beta/v} n^{1/v} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}}{\frac{1}{n_0^{-\beta/v} f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]} n_0^{-\beta/v} n_0^{1/v} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}} \quad (3.59)$$

$$= \frac{n^{1/v} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}}{f[n^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]} \frac{f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]}{n_0^{1/v} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{f[n_0^{1/v}(\lambda - \lambda_c)]\}}. \quad (3.60)$$

Similarmente, no ponto crítico, $\lambda = \lambda_c$, temos

$$h(n, n_0, \lambda_c) = \frac{n^{1/v} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{f[0]\}}{f[0]} \frac{f[0]}{n_0^{1/v} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{f[0]\}} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{1/v} \quad (3.61)$$

$$\therefore \ln h(n, n_0, \lambda_c) = \frac{1}{v} \ln \frac{n}{n_0}.$$

Assim, no ponto crítico a função h em função de n é uma reta num gráfico log-log, com inclinação dada pelo inverso do expoente v . A partir das Figs. 3.7 e 3.8, vemos que $v = 2$, corroborando, uma vez mais, o resultado analítico apresentado na seção anterior.

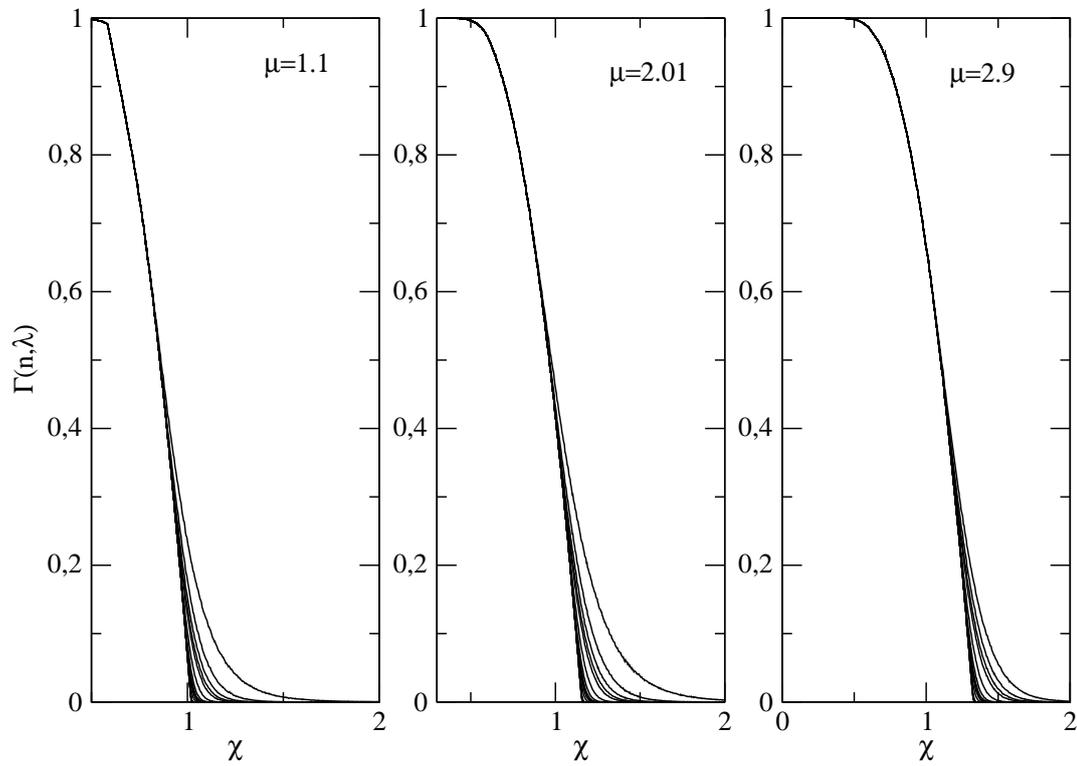


Figura 3.4 – Taxa de sobrevivência, $\Gamma(n, \lambda)$, em função de $\chi = \lambda/g$, para diversos valores n e três valores de μ , no caso numérico de custo energético quadrático. Os parâmetros utilizados foram $g=300$, $r_v=1$, $l_0=1$, e $\alpha=0.01$, sendo realizadas médias sobre 100 réplicas de buscas de 30000 sítios.

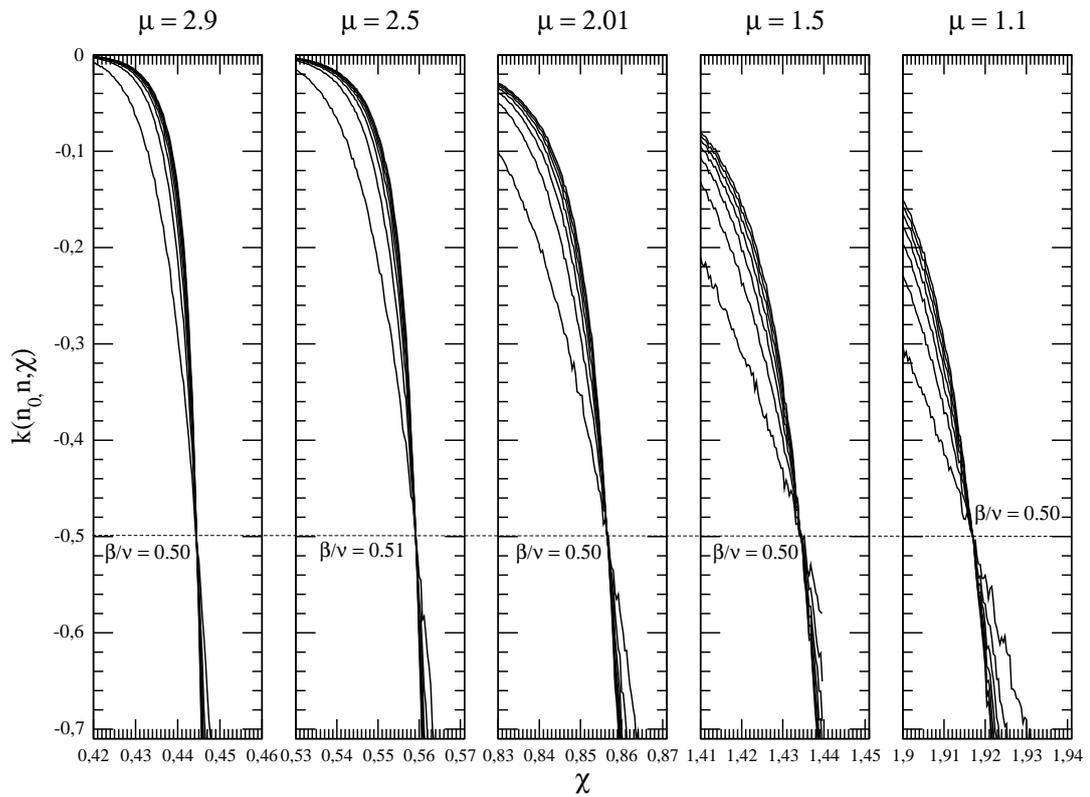


Figura 3.5 – Função auxiliar K em função de $\chi = \lambda/g$ para vários valores de μ , com $n_0 = 400$ e $n = 1000, 5000, 10000, 15000, 20000, 25000, 30000$, no caso numérico de custo energético linear. Para todos os valores de μ obtemos $\beta/\mu \approx 0.5$. Foram usados como parâmetros $g=100$, $r_v = l_0=1$ e $\alpha=1$, sendo realizadas médias sobre 500 réplicas de buscas de 30000 sítios [12].

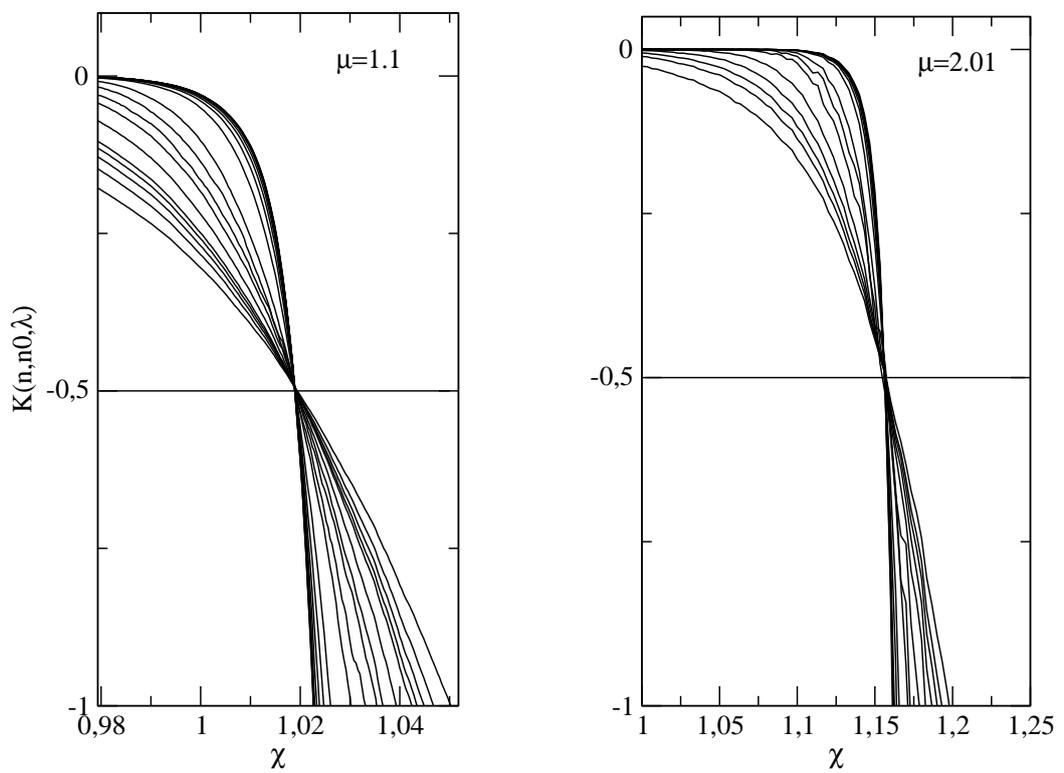


Figura 3.6 – Função auxiliar K em função de $\chi = \lambda/g$ para dois valores de μ , com $n_0 = 400$ e diversos valores de n , no caso numérico de custo energético quadrático. Para todos os valores de μ obtemos $\beta/\mu \approx 0.5$. Foram usados como parâmetros $g=300$, $r_v=1$, $l_0=1$ e $\alpha=0.01$, sendo realizadas médias sobre 100 réplicas de buscas de 30000 sítios.

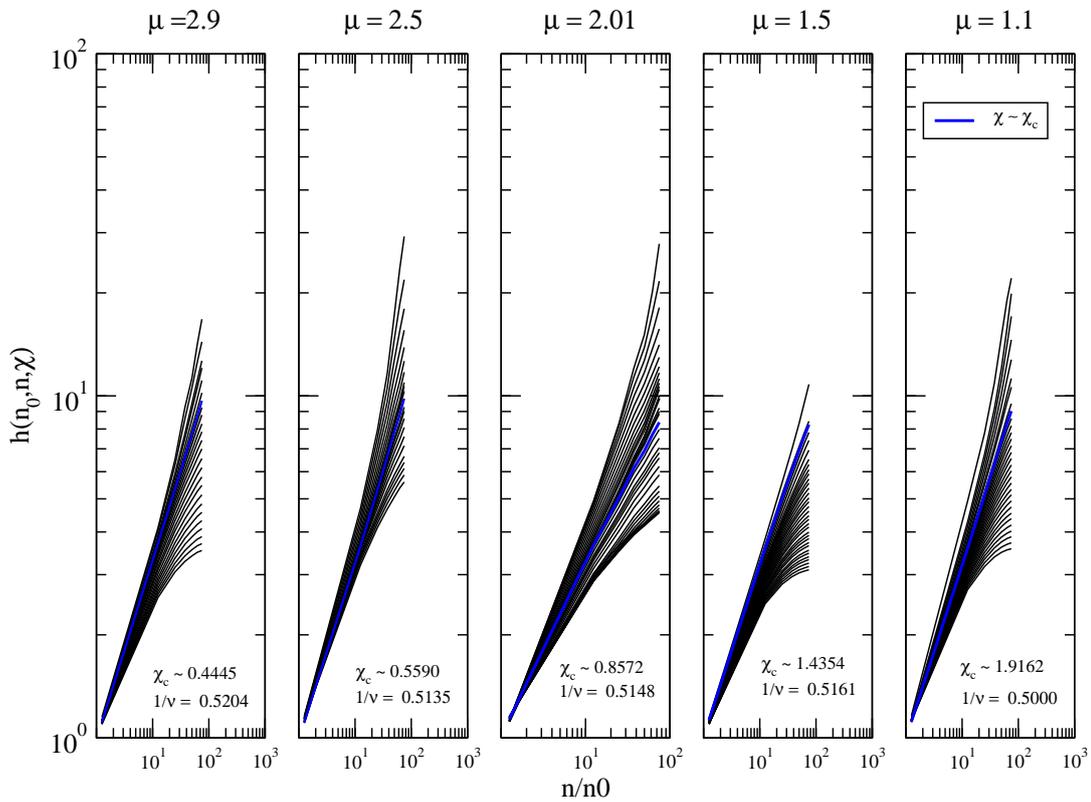


Figura 3.7 – Gráfico log-log da função auxiliar h em função de n/n_0 para $n_0=400$ e diversos valores de μ , no caso numérico de custo energético linear, levando a $\nu \approx 2$. A curva azul representa o caso $\chi = \chi_c$. Os parâmetros utilizados foram $g=100$, $r_\nu=1$, $l_0=1$ e $\alpha=1$, sendo realizadas médias sobre 500 réplicas de buscas de 30000 sítios [12].

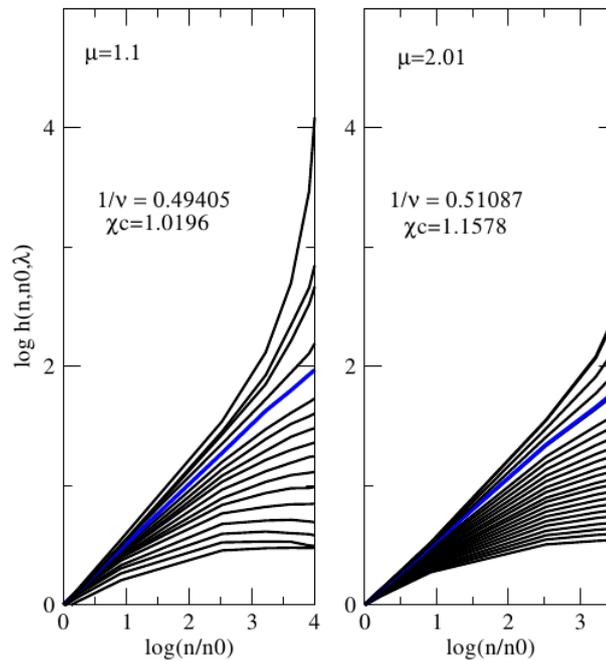


Figura 3.8 – Gráfico log-log da função auxiliar h em função de n/n_0 para $n_0=400$ e dois valores de μ , no caso numérico de custo energético quadrático, levando a $\nu \approx 2$. A curva azul representa o caso $\chi = \chi_c$. Os parâmetros utilizados foram $g=300$, $r_v=1$, $l_0=1$ e $\alpha=0.01$, sendo realizadas médias sobre 100 réplicas de buscas de 30000 sítios.

Em suma, podemos concluir a partir dos estudos realizados neste capítulo que os expoentes críticos associados à transição de fase entre os estados em que o buscador se encontra ativo e absorvido são extremamente robustos não apenas quanto à forma específica da distribuição de tamanhos dos passos (representada aqui pelo expoente μ da distribuição de Lévy), mas também quanto à forma funcional do custo energético de locomoção. De fato, ao estudarmos do ponto de vista analítico o caso geral de dependência da função de custo energético com a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos e ao comparar numericamente os resultados obtidos utilizando dependências lineares e quadráticas do custo energético com o tamanho dos passos, obtemos exatamente o mesmo conjunto de expoentes críticos, resultado este indicativo da universalidade da transição.

4 Difusão Anômala

Este capítulo constitui uma análise exploratória, na forma de uma revisão da literatura, da equação de Fokker-Planck canônica e também de suas versões utilizando derivadas fracionárias. A principal intenção aqui é preparar o terreno para uma futura abordagem durante o programa de Doutorado do problema da busca aleatória via equações diferenciais. Assim, podemos dizer que um dos nossos objetivos futuros é exatamente o de tentar resolver o problema abordado na presente Dissertação (busca unidimensional com condições de contorno determinadas por extremos absorventes) utilizando a técnica alternativa de solução de equações diferenciais fracionárias. Como veremos a seguir, tais equações levam naturalmente a processos de difusão anômala (super e subdifusão), tais como os discutidos anteriormente neste trabalho. Informamos ainda que toda a discussão apresentada aqui já se encontra publicada em algum livro ou periódico, e será devidamente referenciada no momento apropriado.

4.1 Equação de Fokker-Planck

Iniciamos a nossa discussão considerando a equação canônica de Fokker-Planck, a qual veremos estar conectada à dinâmica normal (difusiva ou browniana) de um caminhante aleatório.

Consideremos inicialmente o problema clássico do movimento browniano, em que uma partícula se difunde devido às flutuações térmicas associadas aos choques com outras partículas geralmente de menor extensão. O nosso objetivo a seguir é calcular como a probabilidade $P(v, t)dv$ de encontrar esta partícula com uma velocidade entre v e $v + dv$ varia no tempo. Vamos assumir que $P(v, t)$ pode ser completamente determinada sabendo que, num tempo t_0 anterior, a partícula encontrava-se com velocidade v_0 . Em outras palavras, escrevemos que

$$P(v, t)dv = P(v, t|v_0, t_0)dv = P(v, s|v_0)dv, \quad s \equiv t - t_0. \quad (4.1)$$

A mudança $t \rightarrow s$ acima é feita uma vez que, como não existe dependência com a origem temporal do sistema, então $P = P(s, v)$. Ou seja, vamos calcular a probabilidade de encontrar a partícula com uma velocidade v sabendo que, em s unidades de tempo anteriores, ela se encontrava com uma velocidade v_0 . Notamos ainda que para um inter-

valo de tempo $\tau > s$ a variação na densidade de probabilidade P é igual ao decréscimo devido a partículas com velocidade no intervalo $[v, v + dv]$ mudarem a sua velocidade para $[v_1, v_1 + dv_1]$ mais o acréscimo dado por partículas com velocidade no intervalo $[v_1, v_1 + dv_1]$ que mudam para v . Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s} \tau \cdot dv &= - \int_{v_1} P(v, s|v_0) dv \cdot P(v_1, \tau|v) dv_1 + \int_{v_1} P(v, \tau|v_1) dv \cdot P(v_1, s|v_0) dv_1 \\ &= -P(v, s|v_0) dv \int_{v_1} P(v_1, \tau|v) dv_1 + dv \int_{v_1} P(v, \tau|v_1) P(v_1, s|v_0) dv_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

de modo que

$$\frac{\partial P}{\partial s} \tau = -P(v, s|v_0) \underbrace{\int_{v_1} P(v_1, \tau|v) dv_1}_{=1, \text{ por normalização}} + \int_{v_1} P(v, \tau|v_1) P(v_1, s|v_0) dv_1, \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s} \tau &= -P(v, s|v_0) + \int_{-\infty}^{\infty} P(v, \tau|v_1) P(v_1, s|v_0) dv_1 \quad v_1 = v - \xi \\ &= -P(v, s|v_0) - \int_{\infty}^{-\infty} P(v, \tau|v - \xi) P(v - \xi, s|v_0) d\xi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Expandindo em seguida o integrando em série de Taylor, obtemos

$$P(v - \xi, s|v_0) P(v, \tau|v - \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} [P(v, s|v_0) P(v + \xi, \tau|v)]. \quad (4.5)$$

Daí ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s} \tau &= -P(v, s|v_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} [P(v, s|v_0) P(v + \xi, \tau|v)] d\xi, \\ \frac{\partial P}{\partial s} \tau &= -P(v, s|v_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(v, s|v_0) P(v + \xi, \tau|v) \xi^n d\xi \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

a qual leva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s} \tau &= -P(v, s|v_0) + P(v, s|v_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} P(v + \xi, \tau|v) d\xi}_{=1, \text{ por normalização}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(v, s|v_0) P(v + \xi, \tau|v) \xi^n d\xi \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s} &= \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} \left[P(v, s|v_0) \int_{-\infty}^{\infty} P(v + \xi, \tau|v) \xi^n d\xi \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} [P(v, s|v_0) M_n]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aqui, definimos

$$M_n \equiv \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} P(v + \xi, \tau|v) \xi^n d\xi = \frac{\langle (\Delta v)^n \rangle}{\tau}. \quad (4.9)$$

Pode-se mostrar [20] que, quando $\tau \rightarrow 0$, ou seja, considerando um intervalo curto entre colisões, então $\langle (\Delta v)^n \rangle \rightarrow 0$ mais rápido que τ para $n > 2$. Vamos então utilizar apenas os dois primeiros termos no somatório acima, de modo que

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial v}[M_1 P(v, s|v_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2}[M_2 P(v, s|v_0)]. \quad (4.10)$$

Para os coeficientes M_1 e M_2 temos

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\langle \Delta v \rangle}{\tau} = \frac{1}{\tau} \langle v - v_1 \rangle = \frac{1}{\tau} \langle v(t + \tau) - v(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle v \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{\langle (\Delta v)^2 \rangle}{\tau} = \frac{1}{\tau} \langle (v - v_1)^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \langle v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \langle v^2(t + \tau) + v^2(t) - 2v(t + \tau)v(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \left\langle v^2(t + \tau) + v^2(t) - 2v(t) \left[v(t) + \tau \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_t \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \left\langle v^2(t + \tau) + v^2(t) - 2v(t + \tau) \left[v(t) + \tau \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_t \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por outro lado, podemos realizar também a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle (v - \bar{v})^2 \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} [v^2 - 2v\bar{v} + \bar{v}^2] \right\rangle = \left\langle \frac{\partial v^2}{\partial t} - 2\bar{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial t}}_{=0} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\tau} [v^2(t + \tau) - v^2(t)] - \frac{2\bar{v}}{\tau} [v(t + \tau) - v(t)] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \langle [v^2(t + \tau) - v^2(t)] \rangle - \frac{2\bar{v}}{\tau} \left\langle [v(t) + \tau \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_t - v(t)] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \langle v^2(t + \tau) - v^2(t) \rangle - 2\bar{v} \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_t = M_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Os resultados acima permitem a interpretação das quantidades M_1 e M_2 . De fato, M_1 é uma “aceleração” da partícula, sendo comumente chamada de *drift coefficient*, estando associada a uma força F externa ao sistema, tal como, por exemplo, a força de atrito ou a viscosidade. Já a grandeza M_2 é chamada de *diffusion coefficient*, D , e conecta-se com a dinâmica da variância no tempo. Com estas considerações, a Eq. (4.10) torna-se

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial v}[F P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2}[D P]. \quad (4.14)$$

Se agora fizermos a associação $v \rightarrow x$ e usarmos o fato que $ds = dt$, chegamos à forma mais conhecida da equação de Fokker-Planck [20]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[F P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[D P]. \quad (4.15)$$

Observamos acima que se fizermos $F = 0$ obtemos a famosa equação de difusão:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[D P]. \quad (4.16)$$

4.1.1 Solução da Equação de Fokker-Planck

Vamos agora resolver a equação de Fokker-Planck, Eq. (4.15), para o caso de condições absorventes nos extremos $x = a$ e $x = b$ do intervalo dentro do qual o caminhante aleatório evolui [32], isto é,

$$P(a, t) = P(b, t) = 0, \quad (4.17)$$

com a condição inicial

$$P(x, t = 0) = \delta(x - x_0). \quad (4.18)$$

Primeiramente, vamos analisar o chamado caso estacionário, ou seja, quando $P(x, t) = P_s(x)$. Nessa situação,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F(x)P_s(x)] - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [D(x)P_s(x)] &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left\{ F(x)P_s(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [D(x)P_s(x)] \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

de modo que

$$F(x)P_s(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [D(x)P_s(x)] = J, \quad (4.20)$$

onde a constante J é conhecida como corrente de probabilidade, em analogia à equação de continuidade para fluidos.

Vamos agora multiplicar a Eq. (4.20) por $\frac{1}{\psi(x)}$, onde $\psi(x)$ é uma função genérica que nos ajudará a resolver o problema, como veremos em seguida:

$$\frac{F(x)P_s(x)}{\psi(x)} - \frac{1}{2\psi(x)} \frac{d}{dx} [D(x)P_s(x)] = \frac{J}{\psi(x)}. \quad (4.21)$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$\int_a^x dx' \frac{F(x')P_s(x')}{\psi(x')} - \int_a^x dx' \frac{1}{2\psi(x')} \frac{d}{dx'} (D(x')P_s(x')) = \int_a^x dx' \frac{J}{\psi(x')}, \quad (4.22)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_a^x dx' \frac{F(x')P_s(x')}{\psi(x')} - \frac{D(x)P_s(x)}{2\psi(x)} + \frac{D(a)P_s(a)}{2\psi(a)} \\ + \int_a^x dx' \frac{D(x')P_s(x')}{2(-\psi^2(x'))} \frac{d\psi(x')}{dx'} = \int_a^x dx' \frac{J}{\psi(x')}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{D(a)P_s(a)}{2\psi(a)} - \int_a^x dx' \frac{J}{\psi(x')} + \int_a^x dx' \frac{F(x')P_s(x')}{\psi(x')} \\ + \int_a^x dx' \frac{D(x')P_s(x')}{2(-\psi^2(x'))} \frac{d\psi(x')}{dx'} = \frac{D(x)P_s(x)}{2\psi(x)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Em seguida vamos impor que $\psi(x)$ satisfaça a seguinte condição:

$$\begin{aligned} -\frac{D(x')P_s(x')}{2\psi^2(x')} \frac{d\psi(x')}{dx'} + \frac{F(x')P_s(x')}{\psi(x')} &= 0, \\ \frac{P_s(x')}{\psi(x')} \left\{ \frac{D(x')P_s(x')}{2\psi(x')} \frac{d\psi(x')}{dx'} + F(x') \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

tal que

$$\frac{2F(x')}{D(x')} = \frac{d\psi(x')}{\psi(x')dx'} = \frac{d}{dx'} \ln(\psi(x')) \implies \psi(x) = \exp \left\{ \int_a^x dx' \frac{2F(x')}{D(x')} \right\}. \quad (4.26)$$

Utilizando a função $\psi(x)$ acima, a Eq. (4.24) torna-se

$$\frac{D(x)P_s(x)}{2\psi(x)} = \frac{D(a)P_s(a)}{2\psi(a)} - \int_a^x dx' \frac{J}{\psi(x')}, \quad (4.27)$$

a qual leva a

$$P_s(x) = \frac{2\psi(x)}{D(x)} \left\{ \frac{D(a)P_s(a)}{2\psi(a)} - \int_a^x dx' \frac{J}{\psi(x')} \right\}. \quad (4.28)$$

Impondo agora condições de contorno periódicas, $P_s(a)=P_s(b)$, em conformidade com a Eq. (4.17), encontramos

$$\frac{2\psi(a)}{D(a)} \left\{ \frac{D(a)P_s(a)}{2\psi(a)} - \underbrace{\int_a^a dx' \frac{J}{\psi(x')}}_{=0} \right\} = \frac{2\psi(b)}{D(b)} \left\{ \frac{D(a)P_s(a)}{2\psi(a)} - \int_a^b dx' \frac{J}{\psi(x')} \right\}, \quad (4.29)$$

ou ainda,

$$P_s(a) = P_s(a) \frac{\psi(b)D(a)}{\psi(a)D(b)} - \frac{2J\psi(b)}{D(b)} \int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')}, \quad (4.30)$$

tal que

$$\begin{aligned} J &= P_s(a) \left\{ \frac{\psi(b)D(a)}{\psi(a)D(b)} - 1 \right\} \left\{ \frac{2\psi(b)}{D(b)} \int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')} \right\}^{-1} \\ &= \frac{P_s(a)D(b)}{2\psi(b)} \left\{ \frac{\psi(b)D(a) - D(b)\psi(a)}{\psi(a)} \right\} \left\{ \int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

e

$$J = \frac{P_s(a)}{2} \left\{ \frac{D(a)}{\psi(a)} \frac{D(b)}{\psi(b)} \right\} \left\{ \int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')} \right\}^{-1}. \quad (4.32)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (4.28),

$$P_s(x) = \frac{2\psi(x)}{D(x)} \left\{ \frac{D(a)P_s(a)}{2\psi(a)} - \int_a^x dx' \frac{1}{\psi(x')} \frac{P_s(a)}{2} \left[\frac{D(a)}{\psi(a)} \frac{D(b)}{\psi(b)} \right] \left[\int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')} \right]^{-1} \right\} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\psi(x)P_s(a)}{D(x)} \left\{ \int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')} \right\}^{-1} \\ &\quad \left\{ \frac{D(a)}{\psi(a)} \int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')} - \left[\frac{D(a)}{\psi(a)} - \frac{D(b)}{\psi(b)} \int_a^x dx' \frac{1}{\psi(x')} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

de modo que

$$P_s(x) = \frac{\psi(x)P_s(a)}{D(x)} \left\{ \int_a^b dx' \frac{1}{\psi(x')} \right\}^{-1} \left\{ \frac{D(a)}{\psi(a)} \int_x^b dx' \frac{1}{\psi(x')} + \frac{D(b)}{\psi(b)} \int_a^x dx' \frac{1}{\psi(x')} \right\}. \quad (4.35)$$

Agora que conhecemos a solução estacionária da Eq. (4.15), vamos em seguida buscar a solução dependente do tempo. Vamos inicialmente definir uma função $q(x, t)$ tal que

$$P(x, t) = P_s(x)q(x, t). \quad (4.36)$$

Substituindo na Eq. (4.15), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}[P_s(x)q(x, t)] = -\frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_s(x)q(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_s(x)q(x, t)]. \quad (4.37)$$

Analisando cada um dos termos acima, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[P_s(x)q(x, t)] &= P_s(x) \frac{\partial}{\partial t}[q(x, t)], \\ \frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_s(x)q(x, t)] &= q(x, t) \frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_s(x)] + F(x)P_s(x) \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_s(x)q(x, t)] &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}[D(x)P_s(x)] \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ q(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_s(x)] + D(x)P_s(x) \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Substituindo agora na Eq. (4.37), obtemos

$$\begin{aligned} P_s(x) \frac{\partial}{\partial t}[q(x, t)] &= q(x, t) \overbrace{\left\{ -\frac{d}{dx}[F(x)P_s(x)] + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}[D(x)P_s(x)] \right\}}^{=0, \text{ caso estacionário}} \\ &+ \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \left\{ -F(x) + \frac{\partial}{\partial x}[D(x)P_s(x)] \right\} \\ &+ \frac{1}{2} D(x)P_s(x) \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

de modo que

$$\begin{aligned} P_s(x) \frac{\partial}{\partial t}[q(x, t)] &= \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \left\{ -F(x) + \frac{\partial}{\partial x}[D(x)P_s(x)] \right\} \\ &+ \frac{1}{2} D(x)P_s(x) \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Utilizando agora a Eq. (4.20), notamos que

$$\begin{aligned} P_s(x) \frac{\partial}{\partial t}[q(x, t)] &= \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} F(x)P_s(x) - 2J \frac{\partial q(x)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2} D(x)P_s(x) \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Observamos ainda que no caso das chamadas condições de contorno absorventes, quando $P(a,t) = P(b,t) = 0$, temos $J = 0$, pois

$$\begin{aligned} P(a,t) = P(b,t) = 0 &= P_s(a)q(a,t) = P_s(b)q(b,t) \\ \therefore P_s(a) = P_s(b) = 0 &\implies J = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

conforme a Eq. (4.20). Logo, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t}[q(x,t)] = \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}F(x) + \frac{1}{2}D(x)\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}. \quad (4.44)$$

Vamos procurar soluções da equação acima na forma

$$P(x,t) = P_\lambda(x)e^{-\lambda t}, \quad q(x,t) = Q_{\lambda'}(x)e^{-\lambda' t}. \quad (4.45)$$

Substituindo as expressões acima na Eq. (4.44), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[Q_{\lambda'}(x)e^{-\lambda' t}] &= F(x)\frac{\partial}{\partial x}[Q_{\lambda'}(x)e^{-\lambda' t}] + \frac{1}{2}D(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}[Q_{\lambda'}(x)e^{-\lambda' t}] \\ -\lambda'Q_{\lambda'}(x)e^{-\lambda' t} &= F(x)e^{-\lambda' t}\frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} + \frac{1}{2}D(x)e^{-\lambda' t}\frac{\partial^2 Q_{\lambda'}}{\partial x^2} \\ -\lambda'Q_{\lambda'}(x) &= F(x)\frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} + \frac{1}{2}D(x)\frac{\partial^2 Q_{\lambda'}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Similarmente na Eq. (4.15), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[P_\lambda(x)e^{-\lambda t}] &= \frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_\lambda(x)e^{-\lambda t}] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_\lambda(x)e^{-\lambda t}] \\ -\lambda[P_\lambda(x)e^{-\lambda t}] &= e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_\lambda(x)] + \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_\lambda(x)] \\ -\lambda P_\lambda(x) &= \frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_\lambda(x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_\lambda(x)]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Multiplicando a Eq. (4.46) por $-P_\lambda$ e a Eq. (4.47) por $Q_{\lambda'}$, encontramos

$$\begin{aligned} \lambda'Q_{\lambda'}P_\lambda &= -F(x)P_\lambda\frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} - \frac{1}{2}D(x)P_\lambda\frac{\partial^2 Q_{\lambda'}}{\partial x^2}, \\ -\lambda Q_{\lambda'}P_\lambda &= -Q_{\lambda'}\frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_\lambda(x)] + \frac{1}{2}Q_{\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_\lambda(x)]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Somando agora as duas equações e integrando em x no intervalo $[a,b]$, obtemos

$$\begin{aligned} (\lambda' - \lambda) \int_a^b Q_{\lambda'}(x)P_\lambda(x)dx &= \int_a^b P_\lambda(x) \left\{ -F(x)\frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} - \frac{1}{2}D(x)P_\lambda\frac{\partial^2 Q_{\lambda'}}{\partial x^2} \right\} dx \\ &+ \int_a^b Q_{\lambda'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[F(x)P_\lambda(x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P_\lambda(x)] \right\} dx, \end{aligned} \quad (4.49)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
(\lambda' - \lambda) \int_a^b Q_{\lambda'}(x)P_{\lambda}(x)dx &= - \int_a^b \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \left\{ -F(x)P_{\lambda}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [D(x)P_{\lambda}(x)] \right\} dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} [P_{\lambda}D(x)] + \int_a^b Q_{\lambda'} \frac{\partial}{\partial x} [P_{\lambda}F(x)] dx - F(x)P_{\lambda}Q_{\lambda'} \Big|_a^b \\
&- D(x)P_{\lambda} \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \Big|_a^b + Q_{\lambda'} \left\{ -F(x)P_{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [D(x)P_{\lambda}] \right\} \Big|_a^b.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Reorganizando os termos, escrevemos

$$\begin{aligned}
(\lambda' - \lambda) \int_a^b Q_{\lambda'}(x)P_{\lambda}(x)dx &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} [P_{\lambda}D(x)] - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} [P_{\lambda}D(x)] \\
&- F(x)P_{\lambda}Q_{\lambda'} \Big|_a^b + \int_a^b dx Q_{\lambda'} \frac{\partial}{\partial x} [F(x)P_{\lambda}] + F(x)P_{\lambda} \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \\
&+ \left[Q_{\lambda'} \left\{ -F(x)P_{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [D(x)P_{\lambda}] \right\} - \frac{1}{2} P_{\lambda}D(x) \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \right] \Big|_a^b,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
(\lambda' - \lambda) \int_a^b Q_{\lambda'}(x)P_{\lambda}(x)dx &= Q_{\lambda'} \left\{ -F(x)P_{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [D(x)P_{\lambda}] \right\} \Big|_a^b \\
&- \frac{1}{2} P_{\lambda}D(x) \frac{\partial Q_{\lambda'}}{\partial x} \Big|_a^b.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Mas como $P(a,t) = P(b,t) = 0$, então

$$P_{\lambda}(a) = P_{\lambda}(b) = Q_{\lambda'}(a) = Q_{\lambda'}(b) = 0. \tag{4.53}$$

Logo,

$$(\lambda' - \lambda) \int_a^b Q_{\lambda'}(x)P_{\lambda}(x)dx = 0. \tag{4.54}$$

A equação acima, no caso em que $\lambda \neq \lambda'$, implica que a integral é nula. Por outro lado, no caso $\lambda = \lambda'$ precisamos ter a integral não-nula, pois caso contrário teríamos de ter P_{λ} ou $Q_{\lambda'}$ nulo, e então $P(x)$ também seria nulo. Se usarmos a normalização apropriada, escrevemos

$$\int_a^b P_{\lambda}(x)Q_{\lambda'}(x)dx = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \lambda', \\ 1, & \lambda = \lambda'. \end{cases} \tag{4.55}$$

Com isso, as funções P_{λ} e $Q_{\lambda'}$ formam um conjunto de funções ortogonais. Isso nos motiva a expandir $P(x,t)$ da seguinte forma:

$$P(x,t) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} P_{\lambda}(x) e^{-\lambda t}, \tag{4.56}$$

com as constantes A_λ podendo ser obtidas da relação de ortogonalidade com os $Q_{\lambda'}$:

$$\int_a^b Q_{\lambda'} P(x,0) dx = \int_a^b Q_{\lambda'} \sum_{\lambda} A_{\lambda} P_{\lambda} = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \int_a^b Q_{\lambda'} P_{\lambda} = A_{\lambda'}. \quad (4.57)$$

Assim, o algoritmo para resolver a equação de Fokker-Planck consiste em substituir a expansão da Eq. (4.56), obtendo uma equação diferencial para P_{λ} , e usar a ortogonalidade com os $Q_{\lambda'}$ e a normalização para obter as constantes necessárias.

Os resultados obtidos até agora são válidos para o caso geral da Eq. (4.15). Vamos demonstrar em seguida a utilização desse método no caso em que os coeficientes $F(x)$ e $D(x)$ são constantes. Nessa situação, temos que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -F \frac{\partial P}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} P(x,0) = \delta(x - x_0), \\ P(0,t) = P(L,t) = 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Usando a Eq. (4.56), escrevemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\lambda} A_{\lambda} P_{\lambda}(x) e^{-\lambda t} \right) = -F \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\lambda} A_{\lambda} P_{\lambda}(x) e^{-\lambda t} \right) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{\lambda} A_{\lambda} P_{\lambda}(x) e^{-\lambda t} \right), \quad (4.59)$$

ou ainda,

$$\sum_{\lambda} A_{\lambda} e^{-\lambda t} \left(-F \frac{\partial P_{\lambda}}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P_{\lambda}}{\partial x^2} + \lambda P_{\lambda} \right) = 0, \quad (4.60)$$

de onde obtemos

$$-F \frac{\partial P_{\lambda}}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P_{\lambda}}{\partial x^2} + \lambda P_{\lambda} = 0. \quad (4.61)$$

Resolvendo a equação diferencial, chegamos a

$$P_{\lambda}(x) = e^{xF/2D} \left(C_1 e^{\frac{\sqrt{F^2 - 4D\lambda}}{2D} x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{F^2 - 4D\lambda}}{2D} x} \right). \quad (4.62)$$

Impondo agora as condições de contorno, $P(0,t) = P(L,t) = 0$, ou seja, $P_{\lambda}(0) = P_{\lambda}(L)$, temos que

$$0 = P_{\lambda}(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2, \quad (4.63)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 = P_{\lambda}(L) &= C_1 e^{LF/2D} \left(e^{\frac{\sqrt{F^2 - 4D\lambda}}{2D} L} - e^{-\frac{\sqrt{F^2 - 4D\lambda}}{2D} L} \right) = 2C_1 e^{LF/2D} \sinh \left(\frac{\sqrt{F^2 - 4D\lambda}}{2D} L \right) \\ \therefore \frac{\sqrt{F^2 - 4D\lambda}}{2D} L &= im\pi \Rightarrow \lambda = \frac{F^2}{4D} + \frac{Dm^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow \sinh \left(\frac{\sqrt{F^2 - 4D\lambda}}{2D} x \right) = i \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Logo, obtemos

$$P(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-t \left[\frac{F^2}{4D} + \frac{Dm^2\pi^2}{L^2} \right]} e^{\frac{Fx}{2D}} \sin \left(\frac{m\pi x}{L} \right). \quad (4.65)$$

Resolvendo agora a Eq. (4.46), que no caso de $F(x)$ e $D(x)$ constantes é a mesma equação para P_λ se levamos F em $-F$, então

$$Q_\lambda = Ke^{-\frac{Fx}{2D}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (4.66)$$

Da relação de ortogonalidade, escrevemos

$$A_m = \int_0^L Q_\lambda P(x,0) dx = \int_0^L Ke^{-\frac{Fx}{2D}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \delta(x-x_0) dx = Ke^{-\frac{Fx_0}{2D}} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right), \quad (4.67)$$

tal que a solução da equação de Fokker-Planck com extremos absorventes é finalmente dada por

$$P(x,t) = Ke^{-t\frac{F^2}{4D}} e^{-\frac{F(x-x_0)}{2D}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-t\frac{Dm^2\pi^2}{L^2}} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (4.68)$$

A constante K é determinada a partir da condição de normalização:

$$1 = \int_0^L P(x,0) dx = Ke^{-\frac{F(x-x_0)}{2D}} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{KL}{2} \therefore K = \frac{2}{L}. \quad (4.69)$$

4.1.2 Difusividade

A equação canônica de Fokker-Planck possui uma característica muito importante: as soluções $P(x,t)$ acima são difusivas no sentido de que $\langle x^2(t) \rangle \sim t$, conforme esperado para um caminhante aleatório browniano.

Para demonstrar este fato, inicialmente multiplicamos a Eq. (4.58) por x^2 e em seguida integramos, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial P}{\partial t} dx = -F \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial P}{\partial x} dx + D \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx, \quad (4.70)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \langle x^2(t) \rangle}{\partial t} = D \left\{ x^2 \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2xP \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx P(x,t) \right\} + F \left\{ x^2 P \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t) dx \right\}. \quad (4.71)$$

Admitindo que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 P(x,t) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \frac{\partial P}{\partial x}$, ou seja, que $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ são bem definidos, então

$$\frac{\partial \langle x^2(t) \rangle}{\partial t} = 2D + 2F \langle x(t) \rangle. \quad (4.72)$$

Observamos que se a partícula se difunde num ambiente homogêneo, $P(x,t)$ é uma função par e $\langle x \rangle$ é zero. Logo,

$$\langle x^2(t) \rangle = 2Dt, \quad (4.73)$$

como esperado.

Por outro lado, se quisermos tratar sistemas com difusão anômala, será necessário reformular a equação de Fokker-Planck, introduzindo ingredientes que não constam na formulação canônica apresentada acima. Como veremos na seção a seguir, uma tentativa nesse sentido [33, 34] se dá no contexto do cálculo envolvendo derivadas fracionárias [35, 36].

4.2 Da CTRW à Equação de Fokker-Planck Fracionária

Como o nome desta seção sugere, vamos deduzir em seguida a equação de Fokker-Planck fracionária partindo de uma generalização [34] do modelo de caminhadas aleatórias conhecido como caminhada aleatória de tempo contínuo (*continuous time random walk* - CTRW) [23]. Este modelo é caracterizado pela introdução de um tempo generalizado de espera entre os passos do caminhante, não sendo portanto mais possível o mapeamento perfeito entre o número de passos e o tempo. Como veremos a seguir, esta característica confere a possibilidade de dinâmicas anômalas (isto é, sub ou superdifusão) à caminhada aleatória, as quais são distintas da dinâmica normal (browniana) discutida na seção anterior à luz da equação de Fokker-Planck com derivadas canonicamente definidas.

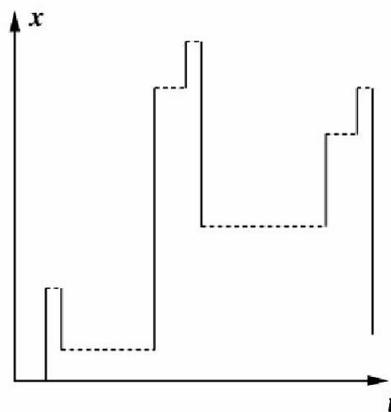


Figura 4.1 – Gráfico esquemático de uma CTRW: as linhas contínuas representam os deslocamentos espaciais do caminhante aleatório, enquanto as linhas tracejadas mostram o tempo de espera [34].

Vamos iniciar a formulação do problema da CTRW a partir da definição de duas distribuições de probabilidade, $\psi(t)$ e $P(r)$, que vão reger respectivamente o tempo de espera entre os passos consecutivos do caminhante e o próprio tamanho dos passos. Como deduziremos a seguir, será a partir destas duas distribuições que surgirá a difusão anômala do caminhante aleatório. De fato, em processos subdifusivos o tempo médio entre passos, T , diverge, enquanto que processos superdifusivos são caracterizados pela variância no tamanho dos passos, σ , divergente [34].

O nosso objetivo primeiro é achar uma forma de representar a função $P(r, t)$, que dá probabilidade de encontrar o caminhante na posição r no instante de tempo t . Podemos escrever que

$$P(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) \int_0^t \psi_n(\tau) \Psi(t - \tau) d\tau. \quad (4.74)$$

A equação acima pode ser entendida da seguinte forma. Inicialmente, notamos que $P_n(r)$ é a probabilidade do caminhante estar na posição r no n -ésimo passo. Por outro lado, $\psi_n(\tau)$ é a probabilidade de que o n -ésimo passo seja executado no tempo τ e $\Psi(t - \tau)$ é a probabilidade do caminhante permanecer parado durante um tempo maior que $t - \tau$. Ou seja, estamos somando todos os deslocamentos que levam a r em um tempo τ , fazendo o caminhante esperar $t - \tau$.

Em seguida, vamos transformar a Eq. (4.74) para o espaço de Fourier-Laplace, onde ela possui uma forma mais tratável:

$$\hat{P}(r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) \int_0^{\infty} dt e^{-st} \int_0^t \psi_n(\tau) \Psi(t - \tau) d\tau. \quad (4.75)$$

Pelo teorema da convolução,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\hat{g}(s)\} = f * g(t) = \int_0^t f(t - x)g(x)dx, \quad (4.76)$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{P}(r, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) \int_0^{\infty} dt e^{-st} \psi_n(\tau) \int_0^{\infty} e^{-st} \Psi(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) \hat{\psi}_n(s) \hat{\Psi}(s). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Calculando $\hat{\psi}_n(s)$ e $\hat{\Psi}(s)$, escrevemos

$$\Psi(t) = \int_t^{\infty} \psi(\tau) d\tau \Rightarrow \hat{\Psi}(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} \int_t^{\infty} \psi(\tau) d\tau, \quad (4.78)$$

tal que

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(s) &= \frac{e^{-st}}{(-s)} \int_t^{\infty} \psi(\tau) d\tau \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{(-s)} (-\psi(t)) dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \psi(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} \psi(t) dt = \frac{1}{s} \{1 - \hat{\psi}(s)\}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Note, entretanto, que da mesma forma que ψ rege o tempo entre passos, $\psi_n(t)$ pode ser interpretado como a distribuição da soma dos tempos de espera de todos os passos até o n -ésimo. Além disso, é possível escrever ainda que

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(s) &= \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-st} dt = \langle e^{-st} \rangle \Rightarrow \hat{\psi}_n(s) = \langle e^{-st} \rangle = \langle e^{-s(t_1+t_2+\dots+t_n)} \rangle \\ &= \prod_{j=1}^n \langle e^{-st_j} \rangle = \hat{\psi}^n(s). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Acima usamos o fato de que os passos são estatisticamente independentes e por isso a média do produto é igual ao produto das médias, assim como a média também é independente da ordem numérica do passo.

Usando o Teorema do Limite Central, podemos expressar $P_n(r)$ na forma

$$P_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} \hat{P}^n(\omega) d\omega. \quad (4.81)$$

Assim, voltando à Eq. (4.77) escrevemos

$$\begin{aligned} \hat{P}(r,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} \hat{P}^n(\omega) d\omega \hat{\psi}^n(s) \frac{1}{s} \{1 - \hat{\psi}(s)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{P}(\omega) \hat{\psi}(s))^n d\omega. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Usando o fato de que $|\hat{P}(\omega)| \leq 1$ e $|\hat{\psi}(s)| \leq 1$, então

$$\begin{aligned} |\hat{P}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |P(x) e^{i\omega x}| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |P(x)| |e^{i\omega x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |P(x)| dx = 1 \end{aligned} \quad (4.83)$$

e

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(s)| &= \left| \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |\psi(t) e^{-st}| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |\psi(t)| |e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |\psi(t)| dt = 1. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Desse modo,

$$\hat{P}(r,s) = \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{s} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} \frac{d\omega}{1 - \hat{P}(\omega) \hat{\psi}(s)}, \quad (4.85)$$

o que leva a

$$\hat{P}(\omega,s) = \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \hat{P}(\omega) \hat{\psi}(s)}. \quad (4.86)$$

A Eq. (4.86) é o ponto de partida para deduzirmos a equação de Fokker-Planck fracionária. O que faremos a seguir é partir das equações para $\psi(t)$ e $P(x)$, que admitiremos conhecidas, para calcularmos as transformadas $\hat{\psi}(s)$ e $\hat{P}(\omega)$ e substituímos na Eq. (4.86). Finalmente, transformando de volta para o espaço (x,t) obteremos uma equação diferencial fracionária para $P(x,t)$.

4.2.1 Caso difusivo

Vamos inicialmente resolver um exemplo conhecido para demonstrar o método geral. Seja um caminhante aleatório que tenha $P(x)$ e $\psi(t)$ com momentos bem definidos. Por

exemplo, uma distribuição gaussiana de passos e uma distribuição exponencial para os tempos de espera,

$$P(x) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-x^2/4\sigma^2}, \quad \psi(t) = \frac{1}{\tau} e^{t/\tau}. \quad (4.87)$$

Tomando as transformadas de Laplace e Fourier,

$$\hat{P}(\omega) = e^{-(\omega\sigma)^2}, \quad \psi(s) = \frac{1}{1 + \tau s}. \quad (4.88)$$

Estamos interessados no limite em que $s \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$, pois estes correspondem aos limites $t \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow \infty$ quando qualquer tipo de transiente já foi superado. Temos, então,

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega, s) &= \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \hat{P}(\omega)\hat{\psi}(s)} = \frac{1 - (1 - \tau s)}{s} \frac{1}{1 - (1 - \tau s)(1 - \omega^2\sigma^2)} \\ &\simeq \frac{\tau}{\omega^2\sigma^2 + \tau s} = \frac{1}{s + \frac{\omega^2\sigma^2}{\tau}}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Tirando a transformada inversa de Fourier e Laplace da expressão acima e usando as propriedades

$$\mathcal{F}^{-1}\{(i\omega)^n \hat{f}(\omega)\} = \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}, \quad \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(x),$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\hat{f}(s) - f(0)\} = f'(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t),$$

escrevemos

$$s\hat{P}(\omega, s) + \frac{\omega^2\sigma^2}{\tau}\hat{P}(\omega, s) = 1, \quad (4.90)$$

de onde

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{s\hat{P}(\omega, s) + \frac{\omega^2\sigma^2}{\tau}\hat{P}(\omega, s)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\{1\}, \quad (4.91)$$

de modo que

$$s\hat{P}(x, s) - \frac{\omega^2}{\tau} \frac{\partial^2 \hat{P}(x, s)}{\partial x^2} = \delta(x). \quad (4.92)$$

Aplicando o operador inverso de ambos os lados da equação,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s\hat{P}(x, s) - \frac{\omega^2}{\tau} \frac{\partial^2 \hat{P}(x, s)}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{\delta(x)\}, \quad (4.93)$$

tal que

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \mathcal{L}^{-1}\{P(x, 0)\} - \frac{\omega^2}{\tau} \frac{\partial^2 \hat{P}(x, t)}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t). \quad (4.94)$$

Usando agora a condição inicial $P(x, 0) = \delta(x)$, encontramos

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \delta(x)\delta(t) - \frac{\omega^2}{\tau} \frac{\partial^2 \hat{P}(x, t)}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t), \quad (4.95)$$

de modo que

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\omega^2}{\tau} \frac{\partial^2 \hat{P}(x,t)}{\partial x^2}. \quad (4.96)$$

Chegamos então à famosa equação de difusão, já discutida na seção anterior, que corresponde ao caso particular da equação de Fokker-Planck e está associada a distribuições com momentos finitos.

Nas próximas subseções vamos mostrar que se tomarmos distribuições com momentos divergentes geramos equações envolvendo derivadas fracionárias associadas a processos de difusão anômala.

4.2.2 Caso Subdifusivo

As derivadas fracionárias surgem de uma extensão ou generalização do conceito de derivada. De fato, originalmente temos derivadas “inteiras”, d^n/dx^n , com n inteiro. Ao estender n para um número real, introduzimos o conceito de derivada fracionária [35, 36, 37]. Não existe, entretanto, uma definição única para estas derivadas. De fato, a grande variedade de definições é oriunda das tentativas de manter as diferentes propriedades das derivadas canônicas ao se fazer a generalização.

Como exemplo, vamos partir da mesma distribuição de passos do caso anterior, porém agora com uma distribuição de tempos de espera $\psi(t)$ com momentos divergentes. Um possível exemplo é a distribuição de Lévy para $\psi(t)$ [1]. Distribuições com esta forma fazem com que o caminhante fique um tempo muito grande parado, pois $\langle t \rangle \rightarrow \infty$, esperando para dar um novo passo. Nesse caso, teríamos, então,

$$P(x) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-x^2/4\sigma^2}, \quad \psi(t) \sim \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha+1}, \quad (4.97)$$

ou ainda,

$$\hat{P}(\omega) = e^{-\omega^2\sigma^2} \sim 1 - \omega^2\sigma^2, \quad \hat{\psi}(s) = e^{(-s\tau)^\alpha} \sim 1 - (s\tau)^\alpha. \quad (4.98)$$

Novamente, tomamos os limites $s \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow 0$, e substituindo na Eq. (4.86), ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega, s) &= \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \hat{P}(\omega)\hat{\psi}(s)} = \frac{1 - (1 - (s\tau)^\alpha)}{s} \frac{1}{1 - (1 - \omega^2\sigma^2)(1 - (s\tau)^\alpha)} \\ &= \frac{(s\tau)^\alpha}{s} \frac{1}{(s\tau)^\alpha + \omega^2\sigma^2} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \omega^2 s^{-\alpha} K_\alpha}, \quad K_\alpha \equiv \frac{\sigma^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

de onde obtemos

$$\hat{P}(\omega, s) + K_\alpha \hat{P}(\omega, s) \omega^2 s^{-\alpha} = \frac{1}{s}. \quad (4.100)$$

Tirando as transformadas inversas de Laplace e Fourier e usando mais essa propriedade

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = \Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (4.101)$$

chegamos a

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{P}(\omega, s) + K_\alpha \hat{P}(\omega, s) \omega^2 s^{-\alpha}\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}, \quad (4.102)$$

de onde

$$\hat{P}(x, s) - K_\alpha s^{-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{P}(x, s) = \frac{1}{s} \delta(x). \quad (4.103)$$

Assim como no exemplo anterior, aplicamos o operador inverso de ambos os lados,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{P}(x, s) - K_\alpha s^{-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{P}(x, s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \delta(x), \quad (4.104)$$

para encontrar

$$P(x, t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{-K_\alpha s^{-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{P}(x, s)\right\} = \Theta(t) \delta(x). \quad (4.105)$$

Acima, $\Theta(t)$ é a função teta de Heaviside. Entretanto, como sempre temos $t \geq 0$ então $\Theta(t) = 1$.

A seguir, usando a seguinte propriedade da definição de derivada de Riemann-Liouville,

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\beta f(t)\} = s^\beta \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad \alpha > 0, \quad (4.106)$$

escrevemos

$$P(x, t) - {}_0D_t^{-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) = \delta(x), \quad (4.107)$$

ou ainda,

$${}_0D_t^\alpha P(x, t) - {}_0D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) = {}_0D_t^\alpha \delta(x), \quad (4.108)$$

de modo que

$${}_0D_t^\alpha P(x, t) - K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) = {}_0D_t^\alpha \delta(x). \quad (4.109)$$

Calculando a derivada da delta de Dirac [37],

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha \delta(x) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{-\alpha} \delta(x) du \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\delta(x)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \int_0^t \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{-\alpha} du \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\delta(x)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha+1} \int_0^1 (1-v)^{-\alpha} dv \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\delta(x)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha+1} B(1, 1-\alpha). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Acima, $B(x, y)$ é a função beta [38], de modo que, explicitamente,

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha \delta(x) &= \frac{d}{dt} \frac{\delta(x)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha+1} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \\ &= \frac{\delta(x)\Gamma(1)(1-\alpha)t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\ &= \frac{\delta(x)\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (4.111)$$

a qual finalmente leva ao resultado

$$\therefore {}_0D_t^\alpha P(x,t) - K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) = \frac{\delta(x)\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}. \quad (4.112)$$

A equação acima representa a equação de Fokker-Planck com derivada fracionária no tempo e derivada espacial canônica.

4.2.3 Caso Superdifusivo

Vamos agora considerar um novo exemplo que representa o contrário do caso estudado da subseção anterior, isto é, uma caminhada aleatória com distribuição de passos superdifusiva, novamente a de Lévy, e uma distribuição de tempos de espera poissoniana. Com isso, teremos $\langle x^2 \rangle \rightarrow \infty$ e $\langle t \rangle$ finito. Nesse contexto, consideramos

$$\psi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad P(x) \sim \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu+1}, \quad (4.113)$$

com

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{1+s\tau} \simeq 1 - s\tau, \quad \hat{P}(\omega) = e^{-(|\omega|\sigma)^\mu} \simeq 1 - (|\omega|\sigma)^\mu. \quad (4.114)$$

Substituindo na Eq. (4.86), encontramos

$$\begin{aligned} \therefore \hat{P}(\omega, s) &= \frac{1 - \hat{\psi}(s)}{s} \frac{1}{1 - \hat{P}(\omega)\hat{\psi}(s)} = \frac{1 - (1 - s\tau)}{s} \frac{1}{1 - (1 - s\tau)(1 - (|\omega|\sigma)^\mu)} \\ &= \frac{s\tau}{s} \frac{1}{s\tau + (|\omega|\sigma)^\mu} = \frac{1}{s + \frac{(|\omega|\sigma)^\mu}{\tau}} = \frac{1}{s + K_\mu |\omega|^\mu}, \quad K_\mu \equiv \frac{\sigma^\mu}{\tau}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

de onde obtemos

$$1 = \hat{P}(\omega, s)s + \hat{P}(\omega, s)K_\mu |\omega|^\mu. \quad (4.116)$$

Novamente, considerando as transformadas inversas de Laplace e Fourier e usando as mesmas propriedades dos casos anteriores,

$$\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{P}(\omega, s)s + \hat{P}(\omega, s)K_\mu |\omega|^\mu\}, \quad (4.117)$$

com

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{P}(\omega, t) + \hat{P}(\omega, t)K_\mu |\omega|^\mu, \quad (4.118)$$

passando por

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t} \hat{P}(\omega, t) + \hat{P}(\omega, t)K_\mu |\omega|^\mu\right\}, \quad (4.119)$$

e levando a

$$\delta(t)\delta(x) = \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + \mathcal{F}^{-1}\{\hat{P}(\omega, t)K_\mu |\omega|^\mu\}. \quad (4.120)$$

Neste ponto, existe uma divergência de definições de derivadas fracionárias entre físicos e matemáticos. A definição de Riesz possui a propriedade $\mathcal{F}\{D_x^\alpha f\} = |\omega|^\alpha \mathcal{F}\{f\}$ quando definida por matemáticos [35, 36, 37], e $\mathcal{F}\{D_x^\alpha f\} = -|\omega|^\alpha \mathcal{F}\{f\}$, quando expressa por físicos [34, 39]. Esta diferença é causada pelo intenção de que no limite $\alpha = 2$, referente à estatística browniana (ver o Cap. 1), a equação de difusão normal seja recuperada. Neste capítulo da Dissertação, vamos optar por utilizar a definição dos físicos. Nesse caso,

$$\delta(t)\delta(x) = \frac{\partial}{\partial t}P(x,t) - D_x^\mu(P(x,t)K_\mu), \quad (4.121)$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = D_x^\mu(P(x,t)K_\mu). \quad (4.122)$$

A equação acima representa a equação de Fokker-Planck com derivada fracionária no espaço e derivada temporal canônica.

4.3 Verificação do comportamento dinâmico anômalo

Na seção anterior, partimos do modelo da CTRW e deduzimos as equações de Fokker-Planck fracionárias no tempo e no espaço. Vamos agora de fato mostrar que esse tipo de equação consegue exprimir a dinâmica anômala (não browniana) do caminhante aleatório [39].

4.3.1 Derivada fracionária temporal e subdifusão

Vamos partir de uma equação de Fokker-Planck levemente diferente, com derivada temporal fracionária e derivada espacial canônica:

$$\tau_1 \frac{\partial P}{\partial t} + \tau_\gamma \frac{\partial^\gamma P}{\partial t^\gamma} = D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (4.123)$$

Multiplicando a equação acima por x^2 e integrando, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \left(\tau_1 \frac{\partial P}{\partial t} + \tau_\gamma \frac{\partial^\gamma P}{\partial t^\gamma} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (4.124)$$

Em seguida, procedendo da mesma forma que na Seção 4.1.2, encontramos

$$\tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle + \tau_\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \frac{\partial^\gamma P}{\partial t^\gamma} = 2D_1. \quad (4.125)$$

No cálculo que se segue vamos usar a definição de Caputo para as derivadas fracionárias [35], embora a equivalência entre as diferentes definições destas derivadas não será mostrada aqui, pois foge ao escopo deste trabalho. Nesse contexto, ao contrário

do que ocorre em algumas definições, na derivada fracionária de Caputo a derivada de constantes é nula. Escrevemos, portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \frac{\partial^\gamma P}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P = \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \langle x^2 \rangle, \quad (4.126)$$

tal que

$$\tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle + \tau_\gamma \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \langle x^2 \rangle = 2D_1. \quad (4.127)$$

Tomando a transformada de Laplace da equação acima, obtemos

$$\tau_1 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle \right\} + \tau_\gamma \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \langle x^2 \rangle \right\} = 2D_1 \mathcal{L} \{1\}, \quad (4.128)$$

de modo que

$$\tau_1 \left[s \mathcal{L} \left\{ \langle x^2 \rangle \right\} - \langle x^2 \rangle (0) \right] + \tau_\gamma \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \langle x^2 \rangle \right\} = 2D_1 \frac{1}{s}. \quad (4.129)$$

Em seguida, usando como condicional inicial que $P(x,0) = \delta(x)$, temos que $\langle x^2 \rangle (0) = 0$. Calculando a transformada de Laplace da derivada de Caputo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \langle x^2 \rangle \right\} &= s^\gamma \mathcal{L} \left\{ \langle x^2 \rangle \right\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\gamma-1-k} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \langle x^2 \rangle (O^+) \\ &= s^\gamma \mathcal{L} \left\{ \langle x^2 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Então temos

$$\tau_1 s \mathcal{L} \left\{ \langle x^2 \rangle \right\} + \tau_\gamma s^\gamma \mathcal{L} \left\{ \langle x^2 \rangle \right\} = 2D_1 \frac{1}{s}, \quad (4.131)$$

isto é,

$$\mathcal{L} \left\{ \langle x^2 \rangle \right\} = \frac{2D_1}{s} \frac{1}{\tau_1 s + \tau_\gamma s^\gamma}, \quad (4.132)$$

de modo que, finalmente,

$$\langle x^2 \rangle = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2D_1}{s} \frac{1}{\tau_1 s + \tau_\gamma s^\gamma} \right\}. \quad (4.133)$$

A seguir, vamos analisar separadamente os casos $1 < \gamma < 2$ e $0 < \gamma < 1$.

- Caso 1: $1 < \gamma < 2$. Inicialmente, expressamos a equação acima na forma

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2D_1}{\tau_\gamma} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\gamma+1}} \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{\tau_\gamma} s^{1-\gamma}} \right\}. \quad (4.134)$$

Usando o teorema da convolução, Eq. (4.76), com $\hat{f}(s) = \frac{1}{s^{\gamma+1}}$ e $\hat{g}(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{\tau_\gamma} s^{1-\gamma}}$,

encontramos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\gamma+1}} \right\} = \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}, \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}} \right\} = t^q, \quad (4.135)$$

e

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{\tau_\gamma} s^{1-\gamma}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} \right)^n s^{n(1-\gamma)} \right\}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_\gamma} s^{1-\gamma} < 1, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} \right)^n \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{n(1-\gamma)} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} \right)^n \frac{t^{n(\gamma-1)-1}}{\Gamma(n(\gamma-1))},
\end{aligned} \tag{4.136}$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle(t) &= \frac{2D_1}{\tau_\gamma} \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} \right)^n \int_0^t dx \frac{(t-x)^\gamma x^{n(\gamma-1)-1}}{\Gamma(n(\gamma-1))} \\
&= \frac{2D_1}{\tau_\gamma} \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} \right)^n \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n(\gamma-1))t^{n(\gamma-1)+\gamma}}{\Gamma(n(\gamma-1)+\gamma+1)\Gamma(n(\gamma-1))} \\
&= \frac{2D_1}{\tau_\gamma} t^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} \right)^n \frac{t^{n(\gamma-1)}}{\Gamma(n(\gamma-1)+\gamma+1)} = \frac{2D_1}{\tau_\gamma} t^\gamma E_{\gamma-1, \gamma+1} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} t^{\gamma-1} \right),
\end{aligned} \tag{4.137}$$

onde $E_{\alpha, \beta}(x)$ é a função de Mittag-Leffler generalizada, definida [40] como

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{4.138}$$

Usamos também o seguinte resultado:

$$\int_0^t x^b (t-x)^a dx = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} t^{a+b+1}, \quad \text{Re}(a) > -1, \quad \text{Re}(b) > -1, \quad t > 0. \tag{4.139}$$

O comportamento de $\langle x^2 \rangle$ pode ser obtido tomando os limites assintóticos da função de Mittag-Leffler [40], de modo que

$$\langle x^2 \rangle(t) = \frac{2D_1}{\tau_\gamma} t^\gamma E_{\gamma-1, \gamma+1} \left(\frac{-\tau_1}{\tau_\gamma} t^{\gamma-1} \right) \approx \begin{cases} \frac{2D_1 t^\gamma}{\tau_\gamma \Gamma(\gamma+1)}, & t \ll 1; \\ \frac{2D_1}{\tau_1} t, & t \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{4.140}$$

- Caso 2: $0 < \gamma < 1$. Nesta situação, inicialmente escrevemos

$$\langle x^2 \rangle(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2D_1}{s} \frac{1}{\tau_1 s + \tau_\gamma s^\gamma} \right\} = \frac{2D_1}{\tau_1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + s^{\gamma-1} \frac{\tau_\gamma}{\tau_1}} \right\}. \tag{4.141}$$

Usando mais uma vez o teorema da convolução, Eq. (4.76), com $\hat{f}(s) = \frac{1}{s^2}$ e $\hat{g}(s) =$
 $\frac{1}{1 + \frac{\tau_\gamma}{\tau_1} s^{\gamma-1}}$, encontramos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t \tag{4.142}$$

e

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\tau_\gamma}{\tau_1} s^{\gamma-1}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_\gamma}{\tau_1} \right)^n s^{n(\gamma-1)} \right\}; \quad \frac{\tau_\gamma}{\tau_1} s^{\gamma-1} < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_\gamma}{\tau_1} \right)^n \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{n(\gamma-1)} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_\gamma}{\tau_1} \right)^n \frac{t^{-1+n(1-\gamma)}}{\Gamma(n(1-\gamma))}.
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Então, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle(t) &= \frac{2D_1}{\tau_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_\gamma}{\tau_1} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n(1-\gamma))} \int_0^t (t-x)x^{-1+n(1-\gamma)} dx \\
&= \frac{2D_1}{\tau_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_\gamma}{\tau_1} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n(1-\gamma))} \frac{\Gamma(2)\Gamma(n(1-\gamma))}{\Gamma(n(1-\gamma)+2)} t^{n(1-\gamma)} \\
&= \frac{2D_1}{\tau_1} t E_{1-\gamma,2} \left(-\frac{\tau_\gamma}{\tau_1} t^{(1-\gamma)} \right).
\end{aligned} \tag{4.144}$$

Expandindo a função de Mittag-Leffler, determinamos que

$$\langle x^2 \rangle(t) \approx \begin{cases} \frac{2D_1 t}{\tau_1}, & t \ll 1; \\ \frac{2D_1}{\Gamma(1+\gamma)\tau_\gamma} t^\gamma, & t \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{4.145}$$

Observamos que existe uma diferença no comportamento dinâmico do sistema dependendo do valor de γ . De fato, o caráter subdifusivo se mostra presente em $\langle x^2 \rangle$ quando $0 < \gamma < 1$. Por outro lado, como pode ser visto em [25], e de acordo também com a nossa dedução da equação fracionária, a relação entre o expoente μ da distribuição de Lévy considerada nos capítulos anteriores dessa Dissertação e o expoente γ definido acima é $\mu = \gamma + 1$. Logo, o sistema é subdifusivo para uma distribuição de tempos de espera tal que $1 < \mu < 2$, a qual ocorre justamente quando o caráter divergente destes tempos é mais acentuado [1].

4.3.2 Derivada espacial fracionária e superdifusão

Vamos agora analisar a equação de Fokker-Planck com derivada fracionária no espaço e derivada canônica no tempo, a qual veremos dar origem a uma dinâmica de caráter superdifusivo.

Vamos partir da equação

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + D_\mu \frac{\partial^\mu P}{\partial x^\mu}. \tag{4.146}$$

Tirando a transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} \right\} &= \mathcal{F} \left\{ D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + D_\mu \frac{\partial^\mu P}{\partial x^\mu} \right\}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} \{ P(x,t) \} &= -D_1 \omega^2 \mathcal{F} \{ P(x,t) \} + D_\mu \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^\mu P}{\partial x^\mu} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.147}$$

Usando novamente a versão modificada da derivada de Riesz, em que

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} \right\} = -|\omega|^\mu \mathcal{F} \{f\}, \quad (4.148)$$

encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} \{P(x,t)\} = \left[-D_\mu |\omega|^\mu - D_1 \omega^2 \right] \mathcal{F} \{P(x,t)\}, \quad (4.149)$$

de onde temos

$$\mathcal{F} \{P(x,t)\} = \mathcal{F} \{P(x,0)\} e^{[-D_\mu |\omega|^\mu - D_1 \omega^2]t}, \quad (4.150)$$

ou ainda,

$$P(x,t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{P(x,0)\} e^{[-D_\mu |\omega|^\mu - D_1 \omega^2]t} \right\}. \quad (4.151)$$

Agora, a partir do teorema da convolução,

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{f}(s) \hat{g}(s) \right\} = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z)dz, \quad (4.152)$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) = e^{[-D_\mu |\omega|^\mu - D_1 \omega^2]t} &\Rightarrow g(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{[-D_\mu |\omega|^\mu t - D_1 \omega^2 t]} \right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{f^{(1)}\} \mathcal{F} \{f^{(2)}\} \right\}, \end{aligned} \quad (4.153)$$

onde

$$f^{(1)}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-D_1 \omega^2 t} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2D_1 t}} \exp \left\{ \frac{-x^2}{4D_1 t} \right\}; \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\exp \left\{ \frac{-\omega^2}{4\alpha} \right\}}{\sqrt{2\alpha}} \right\} = e^{-\alpha x^2} \quad (4.154)$$

e

$$f^{(2)}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-D_\mu |\omega|^\mu t} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-D_\mu |\omega|^\mu t} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) e^{-D_\mu |\omega|^\mu t}. \quad (4.155)$$

Logo, encontramos

$$\begin{aligned} g(t) = f^{(1)} * f^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(x-z) f^{(2)}(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{2D_1 t}} \exp \left\{ \frac{-(x-z)^2}{4D_1 t} \right\} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \cos(\omega z) e^{-D_\mu |\omega|^\mu t}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Voltemos agora à Eq. (4.151). Utilizando $P(x,0) = \delta(x)$ e lembrando que $\mathcal{F} \{\delta(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, obtemos

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{[-D_\mu |\omega|^\mu - D_1 \omega^2]t} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(t), \quad (4.157)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} P(x,t) &= \frac{1}{\pi \sqrt{2D_1 t}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left\{ \frac{-(x-z)^2}{4D_1 t} \right\} \int_0^{\infty} d\omega \cos(\omega z) e^{-D_\mu |\omega|^\mu t} \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{2D_1 t}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left\{ \frac{-(x-z)^2}{4D_1 t} \right\} \int_0^{\infty} d\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega z)^{2n}}{(2n)!} e^{-D_\mu |\omega|^\mu t}, \end{aligned} \quad (4.158)$$

o que leva a

$$\begin{aligned}
P(x,t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2D_1t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left\{\frac{-(x-z)^2}{4D_1t}\right\} z^{2n} \int_0^{\infty} d\omega e^{-D_\mu|\omega|^\mu t} \omega^{2n} \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2D_1t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{\mu} \Gamma\left(\frac{2n+1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{D_\mu t}\right)^{\frac{2n+1}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left\{\frac{-(x-z)^2}{4D_1t}\right\} z^{2n}.
\end{aligned} \tag{4.159}$$

Observamos ainda que a integral acima pode ser interpretada como os momentos $\langle |z|^{2n} \rangle$ relativos a uma distribuição gaussiana [41], isto é,

$$\begin{aligned}
\langle |x|^p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx \\
&= \Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right) \sigma^p \frac{(\sqrt{2})^p}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{-p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-\mu^2}{2\sigma^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.160}$$

Acima, ${}_1F_1(\alpha, \beta, x)$ é a função hipergeométrica confluyente de Kummer [41, 38]. Fazendo a identificação $\mu = x$ e $\sigma^2 = 2D_1t$, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left\{\frac{-(x-z)^2}{4D_1t}\right\} z^{2n} = 2\sqrt{\pi} (D_1t)^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1+2n)}{\Gamma(1+n)} {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{-x^2}{4D_1t}\right), \tag{4.161}$$

e então

$$P(x,t) = \frac{1}{\mu\pi (D_\mu t)^{\frac{1}{\mu}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{\mu})}{\Gamma(1+n)} \left(\frac{D_1}{D_\mu^{2/\mu}}\right)^n t^{n-\frac{2n}{\mu}} \sqrt{2\pi} {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, \frac{-x^2}{4D_1t}\right). \tag{4.162}$$

Notamos que no caso $D_\mu = 0$ a Eq. (4.146) se torna a equação de difusão, como esperado, cuja solução é a distribuição gaussiana. Nesse caso, $\langle x^2 \rangle(t)$ e $\frac{1}{P(0,t)^2}$ possuem o mesmo comportamento. Como $\langle x^2 \rangle(t)$ diverge para a equação acima [39], vamos analisar o comportamento de $\frac{1}{P(0,t)^2}$ para D_μ não nulo. Os resultados obtidos concordam com a análise da quantidade $\langle |x|^\delta \rangle(t)$ tipicamente usada nesses casos [34]. Assim,

$$P(0,t) = \frac{1}{\mu\pi (D_\mu t)^{\frac{1}{\mu}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{\mu})}{\Gamma(1+n)} \left(\frac{D_1}{D_\mu^{2/\mu}}\right)^n t^{n-\frac{2n}{\mu}} \underbrace{\sqrt{2\pi} {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, 0\right)}_{=1}. \tag{4.163}$$

Temos então que para $\mu < 2$, ou seja, $n - \frac{2n}{\mu} < 0$, o limite assintótico $t \rightarrow \infty$ é obtido pelo primeiro termo da série, de modo que

$$P(0,t) \sim \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\mu}} \quad \therefore \quad \left(\frac{1}{P(0,t)}\right)^2 \sim t^{2/\mu}. \tag{4.164}$$

O comportamento para $t \ll 1$ é obtido graficamente, como mostra a Fig. 4.2, levando ao resultado

$$\left(\frac{1}{P(0,t)}\right)^2 \sim t. \tag{4.165}$$

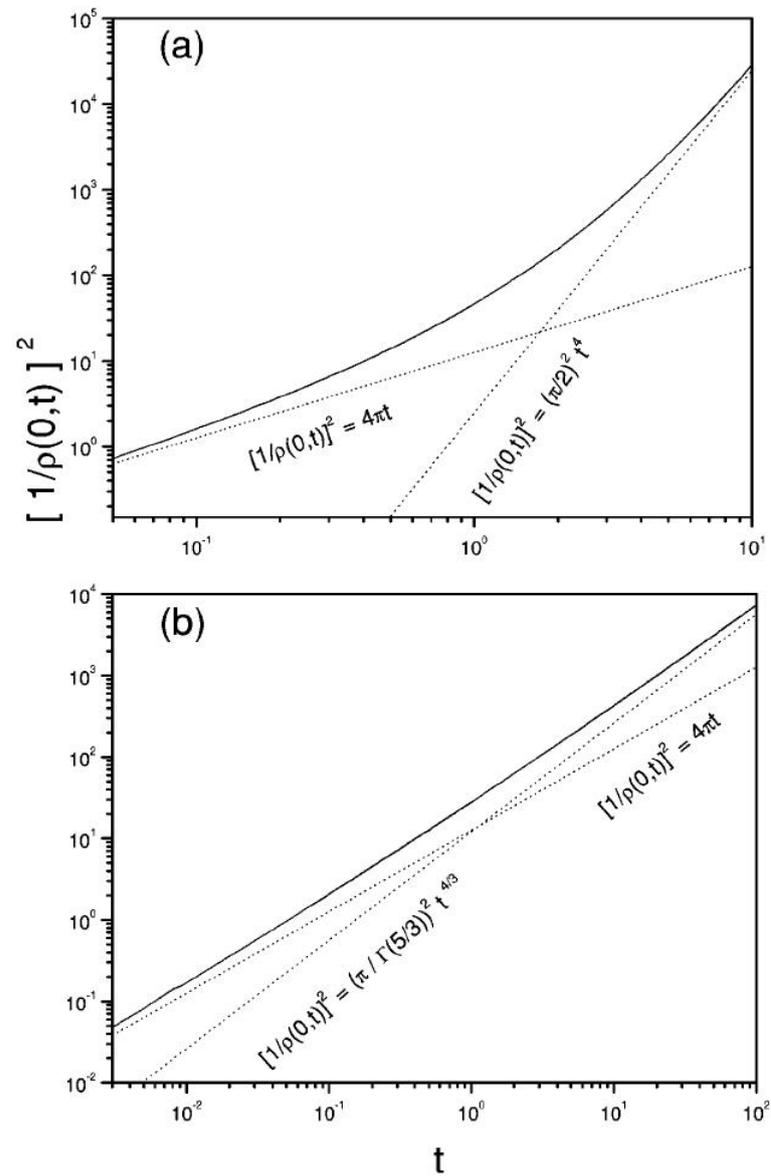


Figura 4.2 – Análise temporal da função $(1/P(0,t))^2$ para $D_1 = D_\mu = 1$, com (a) $\mu=1/2$ e (b) $\mu = 3/2$ [34].

Por fim, observamos acima um comportamento superdifusivo para a dinâmica do sistema no caso de uma distribuição do tipo lei de potência de Lévy de tamanhos dos passos, similarmente ao resultado obtido para o caso subdifusivo com uma distribuição similar de tempos de espera. Isto é um forte indício de que reformulações da equação de Fokker-Planck em termos de derivadas fracionárias podem ser utilizadas para caracterizar difusões anômalas. Este resultado constituiu de fato a motivação original para este capítulo. Como comentado, pretendemos fazer uso das técnicas aprendidas e exploradas no presente capítulo para abordar o problema ainda sem solução geral do caminhante aleatório com dinâmica anômala (de preferência superdifusiva) via a equação diferencial de Fokker-Planck fracionária no espaço, dentro de um intervalo unidimensional com condições de contorno absorventes nos extremos representando os sítios-alvos. Este desafio será explorado no programa de Doutorado que se seguirá na sequência ao presente trabalho.

5 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho discutimos a dinâmica energética das buscas aleatórias aplicadas ao problema de *foraging*, em que animais buscam por comida ou parceiros em ambientes escassos em recursos. Discutimos a transição de fase que o buscador experimenta de um estado ativo (“vivo”), típico de ambientes com abundância de recursos, para um estado estático absorvente (“morto”), onde a busca é encerrada pela falta de energia oriunda do encontro de recursos.

Ao estudarmos a dinâmica da busca próxima à transição considerando uma distribuição de Lévy para os tamanhos dos passos da busca, obtivemos os expoentes críticos através de abordagens teóricas, tais como o método de primeira passagem para o estado de energia nula, e numéricas, baseadas na hipótese de escala aplicada aos resultados de simulação numérica utilizando as regras do modelo de busca. De fato, conseguimos calcular analiticamente um parâmetro de ordem representado pela normalização da energia acumulada do buscador. Tal cálculo permitiu a determinação do expoente crítico β . Por outro lado, através de um mapeamento da caminhada de busca em um novo caminhar aleatório no espaço de energias, conseguimos calcular a taxa de sobrevivência do *forager* via métodos do problema de primeira passagem. A partir da aplicação da hipótese de escala a esta transição, este cálculo permitiu a determinação do expoente crítico ν . Estes expoentes foram confirmados numericamente a partir da aplicação da hipótese de escala e de funções auxiliares.

Uma questão relevante tratada neste trabalho foi a da universalidade destes expoentes críticos com respeito a parâmetros específicos do problema e à forma funcional da função de custo energético da busca. Assim, do ponto de vista numérico, nossa análise considerou custos energéticos variando linear e quadraticamente com o tamanho do passo. Por outro lado, do ponto de vista analítico generalizamos o modelo para considerar gastos energéticos de uma forma genérica em função da distância média percorrida entre dois encontros sucessivos, enquanto que a literatura apresenta apenas o caso linear. Obtivemos exatamente o mesmo conjunto de expoentes críticos, indicando de fato uma universalidade da transição com relação à forma específica da distribuição de tamanhos dos passos (representada aqui pelo expoente μ da distribuição de Lévy) e quanto à forma funcional do custo energético de locomoção.

Como perspectivas para esse trabalho, temos a realização de algumas abordagens

distintas e inéditas para o problema de *foraging*. A primeira será a tentativa de obter os expoentes críticos aqui discutidos, e também outros, via teoria de campos e grupo de normalização. Essa abordagem enfrenta a dificuldade de ser necessária uma descrição hamiltoniana para as caminhadas aleatórias. Entretanto, acreditamos que, se vencida esta barreira, poderemos estudar as buscas aleatórias inclusive em ambientes de dimensionalidade maior, de modo a se aproximar mais realisticamente do problema considerado. Uma segunda abordagem será tentar provar analiticamente que a distribuição de Lévy é a estratégia de busca mais eficiente através de uma extremização da eficiência aqui apresentada, ou equivalentemente da energia ganha pelo caminhante, via cálculo variacional. Por fim, temos o estudo das buscas unidimensionais via equações diferenciais fracionárias, que conseguem modelar processos superdifusivos, tais como os vôos de Lévy. De fato, esta abordagem já foi iniciada com uma breve análise na presente Dissertação da literatura referente à equação de Fokker-Planck e a sua versão fracionária.

Referências¹

- [1] G.M.Viswanathan, M. Luz, E.P.Raposo, and H.E.Stanley, *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*. Cambridge University Press, 2011.
- [2] D.W.Sims, E.J.Southall, N.E.Humphries, *et al.*, “Scaling laws of marine predator search behavior,” *Nature*, vol. 451, pp. 1098–1102, 2008.
- [3] N.E.Humphries, N. Queiroz, J.R.M.Dyer, *et al.*, “Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators,” *Nature*, vol. 465, pp. 1066–1069, 2010.
- [4] L.Seuront, A.Duponchel, and C.Chapperon, “Heavy-tailed distributions in the intermittent motion behavior of the intertidal gastropod *littorina littorea*,” *Physica A*, vol. 385, pp. 573–582, 2007.
- [5] H. Knegt, G.M.Hengeveld, F. Langeveld, W. Boer, and K.P.Kirkman, “Patch density determines movement patterns and foraging efficiency of large herbivores,” *Behavioral Ecology*, vol. 18, pp. 1065–1072, 2007.
- [6] M. da Luz, A.Grosberg, E.P.Raposo, and G.M.Viswabathan[editors], “The random search problem: Trends and perspectives,” *Journal of Physics A[special issue]*, vol. 42, no. 43, 2009.
- [7] F.Bartumeus, M. da Luz, G.M.Viswanathan, and J.Catalan, “Animal search strategies: A quantitative random-walk analysis,” *Ecology*, vol. 86, pp. 3078–3087, 2005.
- [8] O.Bénichou, C.Loverdo, M.Moreau, and V. R, “Two-dimensional intermittent search processes: An alternative to lévy flight strategies,” *Physical Review E*, vol. 74, no. 020102, 2006.
- [9] G.M.Viswanathan, V.Afanasyev, S.V.Buldyrev, E.J.Murphy, P.A.Prince, H.E.Stanley, and and, “Lévy flight search patterns of wandering albatrosses,” *Nature*, vol. 381, no. 413, 1996.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

- [10] G.M.Viswanathan, S.V.Buldyrev, S.Havlin, M. Luz, E.P.Raposo, and H.E.Stanley, "Optimizing the success of random searches," *Nature*, vol. 401, pp. 911–914, 1999.
- [11] S.Benhamou, "How many animals really do the lévy walk?," *Ecology*, vol. 88, pp. 1962–1969, 2007.
- [12] P.J.Ribeiro-Neto, *Análise da Dinâmica Energética de Buscas Aleatórias*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
- [13] P.M.Morse and G.E.Kimball, *How to hunt a submarine*, vol. 4 of *The World of Mathematics*. Simon and Schestor, 1956.
- [14] T.Rhodes and M.T.Turvey, "Human memory retrieval as lévy foraging," *Physica A*, no. 385, pp. 255–260, 2007.
- [15] M.A.Lomholt, T.Ambjornsson, and R.Metzler, "Optimal target search on a fast-folding polymer chain with volume exchange," *Physical Review Letters*, vol. 95, no. 260603, 2005.
- [16] R.Engbert, "Microsaccades: A microcosm for research on oculomotor control, attention, and visual perception," *Progress in Brain Research*, no. 154, pp. 177–192, 2006.
- [17] R.K.Pathria, *Statistical Mechanics*. Butterworth Heinemann, 2 ed., 1996.
- [18] J.Tobochnik, "Resource letter cpppt-1: Critical point phenomena and phase transitions," *American Journal of Physics*, vol. 69, no. 3, 2001.
- [19] H.E.Stanley, *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 1971.
- [20] F.Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill, 1965.
- [21] J. P. Nolan, *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhauser, 2012. In progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/~jpnolan.
- [22] J. Klafter, M. F. Shlesinger, and G. Zumofen, "Beyond brownian motion," *Physics Today*, vol. 49, no. 2, 1996.
- [23] G.H.Weiss, *Aspects and Applications of the Random Walk*. Random Materials and Processes, North-Holland, 1994.
- [24] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. II. John Willey and Sons Inc., 1971.

- [25] S.V.Buldyrev, S.Havlin, A.Ya.Kazakov, M. Luz, E.P.Raposo, and G.M.Vishwanathan, "Average time spent by Lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries," *Physical Review E*, vol. 64, no. 041108, 2001.
- [26] S. Buldyrev, M. Gitterman, S. Havlin, A. Y. Kazakov, M. da Luz, E. Raposo, H. Stanley, and G. Viswanathan, "Properties of lévy flights on an interval with absorbing boundaries," *Physica A*, vol. 302, pp. 148–161, 2001.
- [27] W.V.Lovitt, *Linear Integral Equation*. Dover, 1st ed., 1950.
- [28] J.J.Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, 1st ed., 1993.
- [29] C. L. Faustino, M. L. Lyra, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan, and M. G. E. da Luz, "The universality class of random searches in critically scarce environments," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 97, no. 5, p. 50005, 2012.
- [30] P. J. Ribeiro-Neto, E. P. Raposo, H. A. Araújo, C. L. Faustino, M. G. E. da Luz, and G. M. Viswanathan, "Dissipative lévy random searches: Universal behavior at low target density," *Phys. Rev. E*, vol. 86, p. 061102, 2012.
- [31] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, M. C. Santos, H. E. Stanley, and G. M. Viswanathan, "Dynamical robustness of lévy search strategies," *Physical Review Letters*, vol. 91, no. 24, p. 240601, 2013.
- [32] C.W.Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and Mathematical Sciences*. Springer, 2nd ed., 1997.
- [33] E.Barkai, R.Metzler, and J.Klafter, "From continuous time random walks to the fractional fokker-planck equation," *Physical Review E*, vol. 61, no. 1, 2000.
- [34] R.Metzler and J.Klafter, "The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach," *Physics Reports*, vol. 339, pp. 1–77, 2000.
- [35] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava, and J.J.Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [36] R.Hilfer, ed., *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, 2006.
- [37] K.B.Oldham and J.Spanier, *The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, vol. 111 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1974.
- [38] J.Spanier and K.B.Oldham, *An Atlas of Functions*. Hemisphere Publishing Corporation, 1987.

- [39] E.K.Lenzi, R.S.Mendes, and C.Tsallis, "Crossover in diffusion equation: Anomalous and normal behaviors," *Physical Review E*, vol. 67, no. 031104, 2003.
- [40] H.J.Haubold, A.M.Mathai, and R.K.Saxena, "Mittag-leffler functions and their applications," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2011, no. 298628, 2011.
- [41] A.Winkelbauer, "Moments and absolute moments of the normal distribution," *arXiv:1209.4340v1*.