

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

DISTRIBUIÇÃO COMPOSTA POISSON-TRUNCADA GAMA:
PROPRIEDADES E MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

JONAS WEVERSON DE ARAÚJO SILVA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Recife
2016

JONAS WEVERSON DE ARAÚJO SILVA

DISTRIBUIÇÃO COMPOSTA POISSON-TRUNCADA GAMA:
PROPRIEDADES E MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

ORIENTADOR: PROF. DR. LEANDRO CHAVES RÊGO
CO-ORIENTADOR: PROF. DR. ABRAÃO DAVID COSTA DO NASCIMENTO

Área de Concentração: Probabilidade

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Estatística do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Estatística**.

Recife
2016

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586d Silva, Jonas Weverson de Araújo.
Distribuição composta Poisson-Truncada Gama: propriedades e métodos de estimação / Jonas Weverson de Araújo Silva. – 2016.
74 f.: il., fig., tab.

Orientador: Leandro Chaves Rêgo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2016.
Inclui referências.

1. Probabilidades. 2. Distribuição de probabilidades. I. Rêgo, Leandro Chaves (orientador). II. Título.

519.2

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2016-034

JONAS WEVERSON DE ARAÚJO SILVA

**DISTRIBUIÇÃO COMPOSTA POISSON-TRUNCADA GAMA: PROPRIEDADES E
MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. PhD. Leandro Chaves Rêgo
UFPE

Prof. PhD. Gauss Moutinho Cordeiro (Examinador Interno)
UFPE

Prof. Dr. Rodrigo Bernardo da Silva (Examinador Externo)
UFPB

Dedico esta dissertação

Aos meus pais, Maria do Livramento e José Zito.

Aos meus irmãos, José Wellington, Jobe Wallison e Wendson.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter chegado até aqui, por todos os benefícios concebido, pela fé, saúde, força e perseverança. E por mais esta conquista.

Aos meus pais, Maria do Livramento e José Zito, que sempre me apoiaram e incentivaram a continuar nesta jornada. Por estarem sempre ao meu lado, me dando todo amor, carinho e força.

Aos meus irmãos, José Wellington, Joabe Wallison e Wendson que sempre acreditaram em mim.

Ao Professor Leandro Chaves, meu orientador, pelo apoio, paciência, infinita disponibilidade de atendimento, pelo encorajamento e transmissão de conhecimentos.

Ao Professor Abraão Nascimento, meu co-orientador, pelos enriquecedores conselhos e sugestões, pelas proveitosas discussões e incentivo nas horas de inquietação.

Aos meus amigos de mestrado: Francisco Hildemar, Pedro Monteiro, Telma de Souza, Terezinha Késsia, Wanessa Weridiana, Laura Vicuña, Rodrigo Gonçalves, Fernanda Clotilde, Stênio Rodrigues, Raphaela Lima e Rodrigo Alves. Em especial, ao primeiro amigo e irmão que fiz em Recife, Francisco Hildemar, por estar sempre disposto a me ajudar e, por estar ao meu lado no momento de aperto, sempre oferecendo seu apoio. A Pedro Monteiro e Telma de Souza, por terem compartilhado todos os dramas e alegrias dessa trajetória, marcando presença constante, amizades que vou levar para o resto da vida.

Agradeço ao meu amigo Eduardo da Cruz, por sua amizade, generosidade e companheirismo.

As minhas amigas Flávia da Silva e Jéssyka Ribeiro que estiveram comigo nos momentos mais difíceis. Vocês foram fundamentais na construção de mais uma etapa da minha vida. Agradeço a Deus por esta amizade.

Aos meus amigos de graduação Keytt Amaral, Jamilly Rocha, Nilson Damião e Anna Karla pelo apoio, incentivo, e por sempre estar disposto a servir e a ouvir seus amigos.

Aos professores da Pós Graduação: Audrey Helen, Francisco Cribari, Gauss Cordeiro e Leandro Chaves pelos ensinamentos repassados durante o curso.

À Valéria, secretária do programa, por ser essa pessoa dedicada e atenciosa, que sempre teve muito cuidado no momento de me orientar em burocracias acadêmicas.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E, finalmente, aos membros da banca examinadora pela abertura de visão a novos trabalhos a partir desta dissertação.

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização deste sonho.

Muito obrigado.

“Os que confiam no Senhor serão como o monte de Sião, que não se abala, mas permanece para sempre.”

Salmos 125:1

Resumo

Nas últimas décadas, diversas novas distribuições de probabilidade vêm sendo estudadas e aplicadas a conjuntos de dados reais. Especificamente, modelos de mistura entre distribuições têm sido empregados em aplicações cujos dados resultantes requerem modelos com alta flexibilidade. Neste trabalho, uma nova distribuição chamada *Composta Poisson-Truncada Gama* é proposta. Este modelo tem três parâmetros e sua densidade é dada por uma mistura infinita de densidades gamas com pesos definidos pela probabilidade de massa da distribuição Poisson-Truncada. Algumas propriedades estatísticas são estudadas: função de risco, função característica, função geradora de momentos, momentos e função geradora de cumulantes. Três métodos de estimação são propostos e analisados para a nova distribuição: por momentos, por máxima verossimilhança via algoritmo EM e pela função característica empírica. Além disso, apresentamos um estudo de simulação via Monte Carlo em que comparamos estes três métodos de estimação. Finalmente, uma aplicação a dados reais de uma imagem SAR é realizada. Resultados decorrentes dos estudos de simulação sugerem que o método de estimação por máxima verossimilhança via algoritmo EM tem uma melhor performance. Além disso, a análise dos dados reais indicam que o modelo proposto pode superar distribuições estendidas da literatura.

Palavras-chave: Distribuição Composta Poisson-Truncada Gama. Função Característica Empírica. Algoritmo EM. Momentos.

Abstract

In recent decades, many new probability distributions have been studied and applied to real data sets. Specifically, mixture models between distributions have been used in applications whose resulting data requires models with high flexibility. In this work, a new distribution called Compound Poisson-Truncated Gamma is proposed. This model has three parameters and its density is given by an infinite mixture of gamma densities, where the weights are given by the probability mass function of the Poisson-Truncated distribution. Some statistical properties are studied: risk function, characteristic function, moment generating function, moments and cumulants generating function. Three estimation methods are proposed and analyzed for the new distribution: by moments, by maximum likelihood via EM algorithm and by empirical characteristic function. In addition, we present a Monte Carlo simulation study where we compare these three estimation methods. Finally, an application to real data of a SAR image is performed. Results from the simulation study suggest that the method of maximum likelihood estimation via EM algorithm has a better performance. Moreover, the analysis of real data indicates that the proposed model can overcome extended distributions from the literature.

Keywords: Compound Poisson-Truncated Gamma Distribution. Empirical Characteristic Function. EM algorithm. Moments.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Função densidade da distribuição Composta Poisson-Truncada Gama . . . | 22 |
| 2.2 | Função taxa de falha da distribuição Composta Poisson-Truncada Gama . | 24 |
| 3.1 | Histograma e densidade empírica e ajustada referente aos dados de Foulum. | 68 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------|---|----|
| 3.1 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ . . | 40 |
| 3.2 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ . . | 40 |
| 3.3 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α . . | 41 |
| 3.4 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α . . | 41 |
| 3.5 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β . . | 42 |
| 3.6 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β . . | 42 |
| 3.7 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ . . | 45 |
| 3.8 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ . . | 45 |
| 3.9 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α . . | 46 |
| 3.10 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α . . | 46 |
| 3.11 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β . . | 47 |
| 3.12 | Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β . . | 47 |
| 3.13 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ | 50 |
| 3.14 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ | 51 |
| 3.15 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α | 52 |
| 3.16 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α | 53 |
| 3.17 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β | 54 |
| 3.18 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β | 55 |
| 3.19 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ | 58 |
| 3.20 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ | 59 |
| 3.21 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α | 60 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.22 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α | 61 |
| 3.23 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β | 62 |
| 3.24 | Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β | 63 |
| 3.25 | Conjunto de dados de Foulum | 65 |
| 3.26 | Descrição do conjunto de dados de Foulum | 65 |
| 3.27 | Parâmetros estimados ao conjunto de dados de Foulum | 66 |
| 3.28 | Valores das estatísticas do AIC, AICc, BIC e KS para alguns modelos ajustados aos dados de Foulum | 68 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 14 |
| 2 | Apresentação do Modelo | 17 |
| 2.1 | Distribuição Composta N | 17 |
| 2.2 | Modelos <i>Baseline</i> | 18 |
| 2.2.1 | Distribuição de Poisson-Truncada no zero | 18 |
| 2.2.2 | Distribuição Gama | 19 |
| 2.3 | Distribuição Composta Poisson-Truncada | 20 |
| 2.4 | Momentos | 24 |
| 3 | Métodos de Estimação e Resultados Numéricos | 28 |
| 3.1 | Método dos Momentos | 28 |
| 3.2 | Estimação de Máxima Verossimilhança via Algoritmo EM | 30 |
| 3.3 | Método por Função Característica Empírica | 35 |
| 3.4 | Simulações | 37 |
| 3.4.1 | Simulações com chutes iniciais corretos | 38 |
| 3.4.2 | Simulações com chute inicial obtido pelo método dos momentos | 48 |
| 3.5 | Aplicação | 64 |
| 4 | Considerações Finais | 69 |
| | Referências | 71 |

Capítulo 1

Introdução

O avanço dos recursos de captura de dados tem possibilitado a descrição de novos fenômenos. Entretanto, este acesso impõe a necessidade de modelos de incerteza capazes de descrever dados de alta complexidade (como, por exemplo, dados multimodais). Nos últimos anos, vários modelos têm sido propostos no sentido de preencher esta lacuna.

De acordo com McLachlan e Peel (2000), modelos de misturas têm sido aplicados em diversas áreas. Por exemplo, no reconhecimento de padrões e visão computacional, estudados por Bouguila e Ziou (2006) e Yang e Liu (2002). Na segmentação de imagens, abordados por Mignotte *et al.* (2000) e Yang e Krishnan (2004). A viabilidade da aplicação destes modelos tem aumentado com a sofisticação de recursos computacionais. Uma motivação física do uso da abordagem de misturas é apresentado por Vargas (2011), no qual considera um modelo de misturas de distribuições independentes do tipo Poisson para a amostra de tremores de terra com magnitude maior ou igual a 7 que ocorreu no mundo entre 1900-2006.

Segundo Zucchini e MacDonald (2009) a variável aleatória X satisfaz o modelo de mistura de distribuição independente se sua função densidade (ou massa) de probabilidade satisfaz a equação:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i f_i(x),$$

em que n é o número de distribuições envolvidas associadas a um valor $0 \leq \delta_i \leq 1$, $1 \leq i \leq n$, denominado de peso das misturas tal que $\sum_{i=1}^n \delta_i = 1$. Portanto $f_X(\cdot)$ satisfaz as propriedades de função densidade de probabilidade ou função massa de probabilidade.

Karlis e Xekalaki (2005) apresentaram um tipo importante de mistura de distribuições denominada Composta N , em que uma variável aleatória S é formada pela soma de N variáveis aleatórias, em que N também é uma variável aleatória; ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^N X_i. \tag{1.1}$$

Karlis e Xekalaki (2005) apresentaram ainda um caso particular da composta N que é a distribuição Composta Poisson em que consideram N como sendo a distribuição de Poisson. Após o surgimento dessa família de distribuições, várias outras distribuições foram geradas a exemplo de Willmot (1993) que propôs a distribuição Poisson Gama Truncada e Al-Awadhi e Ghitany (2001) que estudaram a distribuição Poisson Lomax.

Araújo (2015) propôs uma sub-família da distribuição Composta N em que considera N como sendo a distribuição Poisson-Truncada no zero. Ao contrário da distribuição Composta Poisson que sempre tem probabilidade no zero, a distribuição Composta Poisson-Truncada é contínua se todas as variáveis aleatórias X tiverem uma distribuição contínua. Araújo (2015) apresentou ainda um caso especial dessa sub-família em que se considera X uma variável aleatória seguindo a distribuição normal, no qual denominou-se por distribuição Composta Poisson-Truncada Normal (CPTN).

Uma motivação física para adotar N como Poisson-Truncada, é que em processamento de imagens SAR, a área iluminada pode ser descrita fisicamente por

$$\sum_{k=1}^n F_k,$$

em que n é uma realização da Poisson-Truncada e $F_k \in \mathbb{C}$ (Delignon e Pieczynski, 2002). Substituindo F_k por sua intensidade $\|F_k\|^2$, o modelo proposto nesta dissertação é obtido naturalmente.

Este trabalho objetiva apresentar uma nova distribuição denominada Composta Poisson-Truncada Gama (CPTG), em que os X'_i s em (1.1) são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*iid*) com distribuição gama. Além disso, derivamos algumas propriedades estatísticas dessa distribuição. Apresentamos evidências empíricas de que a distribuição proposta pode ser muito flexível, embora seja definida em três parâmetros. Este último fato coloca o modelo CPTG em vantagem com respeito aos modelos de misturas usuais, sobre os quais o número de parâmetros aumenta com as distribuições misturadas. Este fato decorre do resultado de que a soma de gamas resulta na distribuição gama. Neste trabalho, deduzimos e discutimos (via simulação Monte Carlo) três métodos de estimação: estimação via momentos, via algoritmo (*Expectation Maximization*) EM e por minimização da função característica. Para o último procedimento de estimação, fornecemos evidências numéricas para o melhor intervalo de discretização do suporte da função característica para o caso da distribuição CPTG.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentamos a distribuição Composta N e a sub-família Composta Poisson-Truncada. Em seguida, apresentamos a distribuição que estamos propondo, a Composta Poisson-Truncada Gama, e algumas de suas propriedades estatísticas, tais como: a função densidade de probabilidade, a função de risco, a função característica, a função geradora de momentos, momentos e a função geradora de cumulantes.

No Capítulo 3, é feito um estudo teórico que embasa todos os métodos de estimação

que utilizamos para o desenvolvimento desse trabalho. Os métodos abordados são o método dos momentos, método de máxima verossimilhança via algoritmo EM e o método da função característica empírica. Além disso, apresentamos um estudo de simulação via Monte Carlo e uma aplicação a dados reais da distribuição CPTG. Finalmente, no Capítulo 4, descrevemos as considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Apresentação do Modelo

2.1 Distribuição Composta N

Considere a variável aleatória

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

em que N é uma variável aleatória inteira positiva e assumamos que X_1, \dots, X_n consiste em uma *amostra aleatória* (variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas) de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade (fdp) f e X_i independente de N ($X_i \perp N$). A distribuição de N é definida por uma função de probabilidade $P(N = n)$ com suporte contido em $\{1, 2, \dots\}$. (por simplicidade, estamos considerando N assumindo valores apenas positivos). Uma variável aleatória escrita dessa forma é denominada *Composta N* e tem função de distribuição acumulada (fda) dada por

$$\begin{aligned} F_S(x) = P(S \leq x) &= P\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^N X_i \leq x \mid N = n\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(x) P(N = n), \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que $F_{S_n}(x)$ é a fda da soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição igual a de X , diga-se S_n . Derivando a expressão (2.1), obtém-se a seguinte fdp:

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{S_n}(x) P(N = n),$$

em que $f_{S_n}(x)$ é a fdp da soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição

igual a de X .

2.2 Modelos *Baseline*

No que segue, apresentaremos uma rápida discussão de duas distribuições *baseline*.

2.2.1 Distribuição de Poisson-Truncada no zero

Uma variável N segue o modelo de Poisson-Truncada no zero de parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de probabilidade é expressa por

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!(e^\lambda - 1)}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida. Uma variável que segue esta distribuição será denotada por $N \sim PT(\lambda)$. Esta distribuição é amplamente utilizada em fenômenos de contagem, especificamente quando o zero não faz parte do espaço amostral (vê, por exemplo, Tippett (1932), Bliss *et al.* (1948), Moore (1952), Cohen (1960)).

A função geradora de momentos (fgm) de uma variável aleatória X é definida por

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}), \quad -t_0 < t < t_0,$$

em que $\mathbb{E}(\cdot)$ é o operador de valor esperado. A função geradora de momentos pode ser reescrita como $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j \mathbb{E}(X^j)}{j!}$, isto é, uma combinação infinita dos momentos da variável aleatória X . Qualquer momento de r pode ser obtido a partir da identidade:

$$\mathbb{E}(X^r) = \left. \frac{d^r M_x(t)}{dt^r} \right|_{t=0}. \quad (2.2)$$

Para $N \sim PT(\lambda)$, a função geradora de momentos é dada por

$$\begin{aligned} M_N(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!(1 - e^{-\lambda})} = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})} [\exp(\lambda e^t) - 1] = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} [\exp(\lambda e^t) - 1] \\ &= \frac{e^{\lambda e^t} - 1}{e^\lambda - 1}. \end{aligned}$$

A esperança e a variância desta distribuição são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda - 1} \quad \text{e} \quad \text{Var}(N) = \frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda - 1} \left[1 - \frac{\lambda}{(e^\lambda - 1)} \right].$$

Outra importante quantidade tipo momento de uma variável aleatória X é a função característica (fc), definida por $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. Segundo Magalhães (2006), se a fgm existe e é conhecida, ela pode ser usada para calcular a fc, em que $\phi_X(t) = M_X(it)$, em que $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária e $t \in \mathbb{R}$, correspondendo a uma alteração no domínio e na imagem da função geradora. O principal ganho da função característica em relação à função geradora de momentos é que ela sempre existe para qualquer t real, Roussas (1997) e Magalhães (2006). Todas as propriedades da função geradora de momentos, podem ser estendidas para a função característica. Diante deste resultado, temos

$$\phi_N(t) = M_N(it) = \mathbb{E}(e^{itN}) = \frac{e^{\lambda e^{it}} - 1}{e^\lambda - 1}. \quad (2.3)$$

2.2.2 Distribuição Gama

Uma variável aleatória X com distribuição gama com parâmetros $\alpha > 0$ (parâmetro de forma) e $\beta > 0$ (parâmetro de escala), é denotada por $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ e tem fdp dada por

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} I_{(0,\infty)}(x)$$

e fda dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)} I_{(0,\infty)}(x),$$

em que $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ é a função gama incompleta.

Essa distribuição tem como suas principais aplicações à análise de tempo de vida de produtos e é modelo para o ruído em intensidades de radar (Nascimento *et al.*, 2010). No primeiro contexto, ela foi utilizada por Brown e Flood (1947) para ajustar o tempo de vida de copos de vidro em uma cafeteria. Também foi utilizada para ajustar o tempo de vida de dispositivos eletrônicos (Birnbaum e Saunders, 1958).

Seja $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, sua fgm é dada por

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta-t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

A esperança e a variância desta distribuição são dadas por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com distribuição gama de escala comum. Observe que a $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$ com fgm dada por

$$\begin{aligned} M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \mathbb{E}(e^{t \sum_{i=1}^n X_i}) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{t X_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{t X_i}) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}. \end{aligned}$$

Caso as variáveis aleatórias X_i sejam identicamente distribuídas com parâmetros α e β , tem $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n\alpha, \beta)$.

A função característica da distribuição gama é dada por

$$\phi_X(t) = M_X(it) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha, \quad (2.4)$$

e a fc de $\sum_{i=1}^n X_i$ é expressa por

$$\phi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = M_{\sum_{i=1}^n X_i}(it) = \mathbb{E}(e^{it \sum_{i=1}^n X_i}) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{n\alpha}.$$

2.3 Distribuição Composta Poisson-Truncada

Araújo (2015) propôs uma sub-família da distribuição Composta N em que considera N como sendo a distribuição Poisson-Truncada no zero. Esta distribuição é contínua se todas as variáveis aleatórias X tiverem uma distribuição contínua e é denotada por distribuição Composta Poisson-Truncada cuja fda é dada por

$$\begin{aligned} F_S(x) = P(S \leq x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(x) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{S_n}(x) \left[\frac{\lambda^n}{n!(e^\lambda - 1)} \right] \\ &= \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} F_{S_n}(x). \end{aligned}$$

e fdp por

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{S_n}(x) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{S_n}(x) \left[\frac{\lambda^n}{n!(e^\lambda - 1)} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f_{S_n}(x), \quad \text{com } \lambda > 0.$$

Considerando $N \sim PT(\lambda)$ e $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, obtemos a distribuição Composta Poisson-Truncada Gama (CPTG), denotada por $S \sim CPTG(\lambda, \alpha, \beta)$, cuja fda é dada por

$$F_S(x) = \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \gamma(n\alpha, \beta x)}{n! \Gamma(n\alpha)},$$

e fdp expressa por

$$f_S(x) = \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \beta^{n\alpha} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x}}{n! \Gamma(n\alpha)} = \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^\alpha)^n x^{n\alpha-1} e^{-\beta x}}{n! \Gamma(n\alpha)}.$$

resultando em uma mistura infinita de densidades gamas com pesos definidos pela probabilidade de massa da distribuição Poisson-Truncada.

A Figura 2.1 ilustra diferentes formas da distribuição CPTG. Em 2.1(a) fixamos $\alpha = 20$ e $\beta = 6$ e notamos que valores maiores de λ tendem a gerar curva que tem forma típica da densidade da normal. Quando fixamos $\lambda = 3$ e $\beta = 6$ em 2.1(b) notamos que, conforme os valores de α aumentam, a densidade torna-se mais flexível gerando um número maior de modas. Por fim, na Figura 2.1(c) quando fixamos $\lambda = 3$ e $\alpha = 20$ observamos um rápido crescimento na densidade quando se aumenta β e a densidade decai mais rápido para zero.

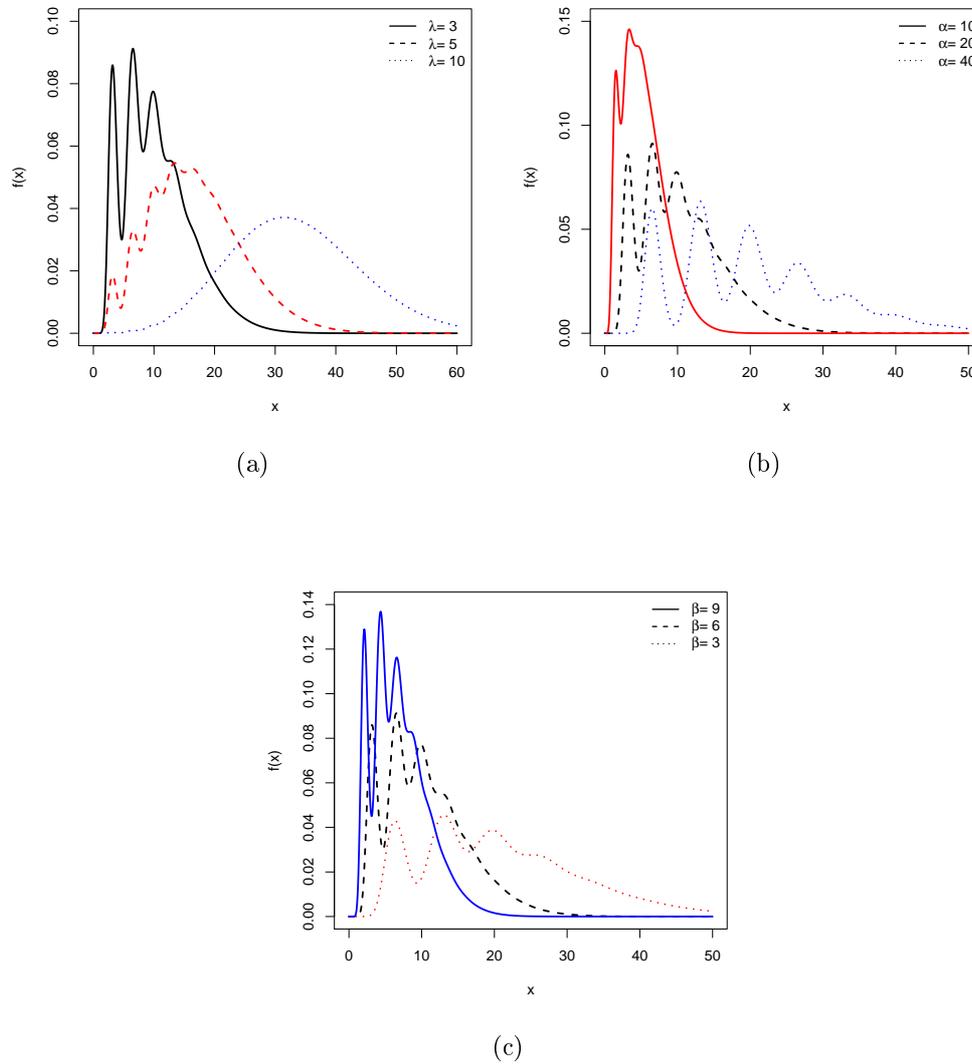
Uma função de interesse em análise de sobrevivência é a função de sobrevivência. Ela é expressa por

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(x) dx,$$

e representa a probabilidade do elemento sobreviver pelo menos até o tempo t . Seja T uma variável aleatória não negativa e contínua que representa o tempo de sobrevivência de um elemento. A função de sobrevivência é o complemento da função de distribuição, isto é, $S(t) = 1 - P(T < t) = 1 - F(t)$. Assim, a distribuição CPTG possui a seguinte função de sobrevivência

$$S(x) = 1 - F_S(x) = 1 - \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \gamma(n\alpha, \beta x)}{n! \Gamma(n\alpha)}.$$

Figura 2.1: Função densidade da distribuição Composta Poisson-Truncada Gama



Fonte: Autoria própria.

Outra função muito importante neste campo é a função de risco ou função taxa de falha definida por

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)},$$

em que $f(t) = F'(t)$. A função de risco é interpretada como a taxa de falha no instante t , dado que a falha não ocorreu antes de t . Representa pois, o risco eminente de uma falha ocorrer em t . A seguir, apresentamos a função de risco da distribuição CPTG:

$$h_S(x) = \frac{f_S(x)}{S(x)} = \frac{\left(\frac{1}{e^\lambda - 1}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\beta^\alpha)^n x^{n\alpha-1} e^{-\beta x}}{n!\Gamma(n\alpha)}}{1 - \left(\frac{1}{e^\lambda - 1}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \gamma(n\alpha, \beta x)}{n!\Gamma(n\alpha)}}.$$

Segundo Colosimo e Giolo (2006), a função de risco é utilizada como instrumento natural de estimação de modelos, isto é, a forma da função de taxa de falha define um possível modelo probabilístico para o tempo de sobrevivência. Na Figura 2.2, está representado o gráfico da função de risco da distribuição CPTG. Note que em 2.2(a), a função de risco pode assumir forma decrescente. Em 2.2(b), forma unimodal ou bimodal, já em 2.2(c), a função de risco pode assumir forma de banheira invertida, com um longo intervalo constante.

Segundo Fine (2006), se N é uma variável aleatória inteira não negativa, $S = \sum_{i=0}^N X_i$, $\{X_i, i \geq 1\}$ são *iid* com função característica comum ϕ_X , $X_0 = 0$, e elas são independentes de N que é descrita pela função característica ϕ_N , então

$$\phi_S(t) = \phi_N(-i \log \phi_X(t)). \tag{2.5}$$

Assim, aplicando as expressões (2.3) e (2.4) em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \phi_S(t) &= \phi_N(-i \log \phi_X(t)) \\ &= \frac{e^{\lambda e^{i[-i \log(\frac{\beta}{\beta-it})^\alpha]} - 1}}{e^\lambda - 1} = \frac{e^{\lambda e^{[\log(\frac{\beta}{\beta-it})^\alpha]} - 1}}{e^\lambda - 1} = \frac{e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-it})^\alpha} - 1}{e^\lambda - 1}. \end{aligned}$$

Além disso, obtemos a fgm da distribuição que é dada por

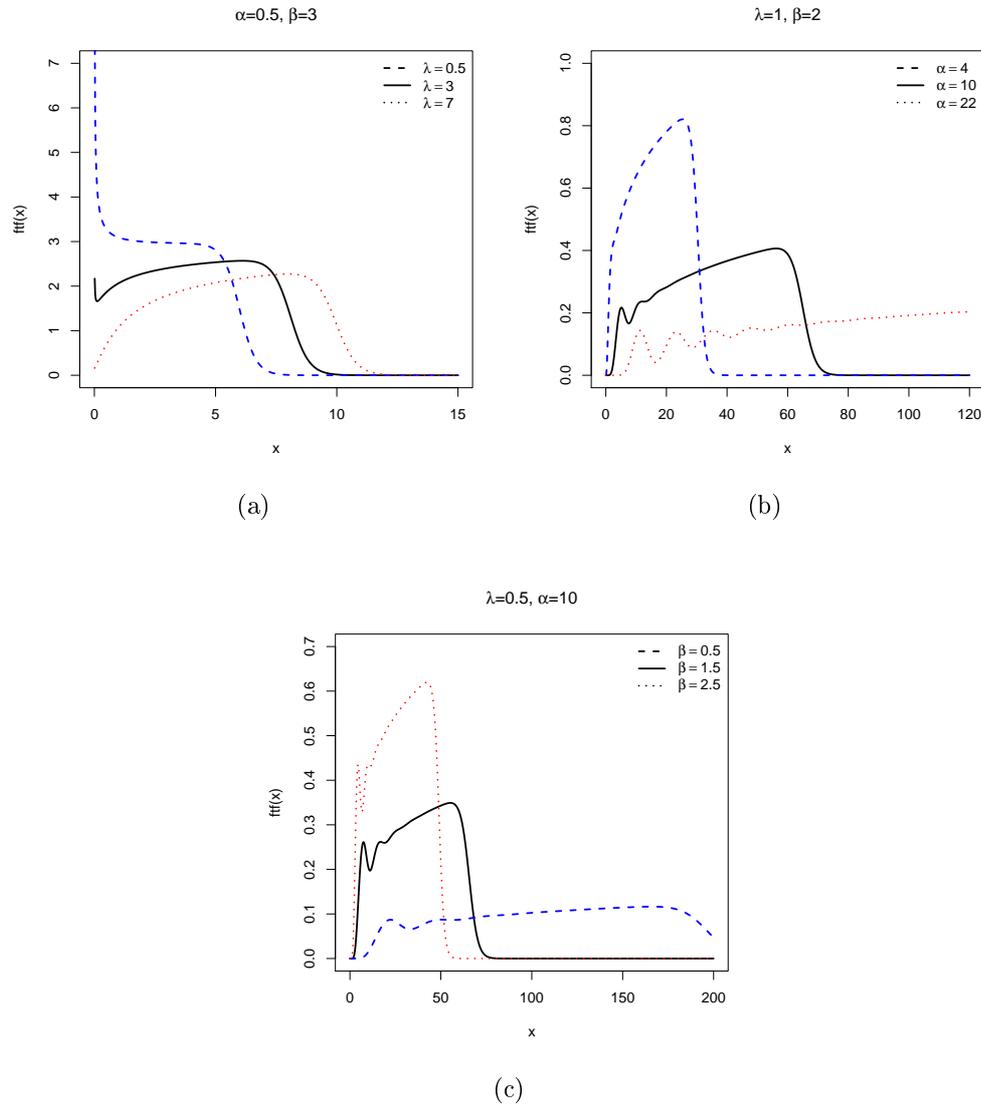
$$M_S(t) = \frac{e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-it})^\alpha} - 1}{e^\lambda - 1}.$$

Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos $M_X(t)$. A função geradora de cumulantes (fgc) de uma variável aleatória contínua X denotada por $\mathbb{K}_X(t)$, é definida como

$$\mathbb{K}_X(t) = \log M_X(t).$$

Portanto, a fgc da distribuição CPTG é dada por

Figura 2.2: Função taxa de falha da distribuição Composta Poisson-Truncada Gama



Fonte: Autoria própria.

$$\mathbb{K}_S(t) = \log M_S(t) = \log \left(\frac{e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} - 1}{e^\lambda - 1} \right).$$

2.4 Momentos

De acordo com a definição (2.2), vamos obter os três primeiros momentos da distribuição CPTG. Os resultados serão posteriormente utilizados para estimação de parâmetros pelo método dos momentos, conforme descrito na Seção 3.1.

- Primeiro momento:

$$\begin{aligned}
M'_S(t) &= \frac{1}{e^\lambda - 1} \left[e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \lambda \alpha \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha-1} \frac{\beta}{(\beta-t)^2} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha}{e^\lambda - 1} \left[e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^{\alpha+1}} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} \left[e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \frac{1}{(\beta-t)^{\alpha+1}} \right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$M'_S(0) = \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} \left(\frac{e^\lambda}{\beta^{\alpha+1}} \right) = \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta(e^\lambda - 1)},$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(S) = \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta(e^\lambda - 1)}.$$

• Segundo momento:

$$\begin{aligned}
M''_S(t) &= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} \left[e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \frac{\alpha + 1}{(\beta-t)^{\alpha+2}} + \frac{1}{(\beta-t)^{\alpha+1}} \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{(\beta-t)^{\alpha+1}} e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \left[\frac{\alpha + 1}{(\beta-t)^{\alpha+2}} + \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{(\beta-t)^{2\alpha+2}} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \left[(\alpha + 1)(\beta-t)^{-\alpha-2} + \lambda \alpha \beta^\alpha (\beta-t)^{-2\alpha-2} \right].
\end{aligned}$$

Daí,

$$M''_S(0) = \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha e^\lambda}{e^\lambda - 1} \left(\frac{(\alpha + 1)\beta^\alpha + \lambda \alpha \beta^\alpha}{\beta^{2\alpha+2}} \right) = \frac{\lambda \alpha \beta^{2\alpha} e^\lambda}{e^\lambda - 1} \left(\frac{(\alpha + 1) + \lambda \alpha}{\beta^{2\alpha+2}} \right),$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(S^2) = \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)} [(\alpha + 1) + \lambda \alpha].$$

A variância é obtida em função das equações do primeiro e segundo momentos, assim

$$\begin{aligned}
\text{Var}(S) &= \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}^2(S) \\
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)} [(\alpha + 1) + \lambda \alpha] - \left(\frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta(e^\lambda - 1)} \right)^2 \\
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)} \left[(\alpha + 1) + \lambda \alpha - \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{(e^\lambda - 1)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)} \left[\frac{(e^\lambda - 1)[(\alpha + 1) + \lambda \alpha] - \lambda \alpha e^\lambda}{(e^\lambda - 1)} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)^2} [(e^\lambda - 1)[(\alpha + 1) + \lambda \alpha] - \lambda \alpha e^\lambda] \\
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)^2} (e^\lambda \alpha + e^\lambda + \lambda \alpha e^\lambda - \alpha - 1 - \lambda \alpha - \lambda \alpha e^\lambda) \\
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)^2} [e^\lambda(\alpha + 1) - \alpha(1 + \lambda) - 1].
\end{aligned}$$

• Terceiro momento:

$$\begin{aligned}
M_S'''(t) &= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} \left[e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} [(\alpha + 1)(-\alpha - 2)(\beta - t)^{-\alpha-3}(-1)] \right. \\
&\quad \left. + \lambda \alpha \beta^\alpha (-2\alpha - 2)(\beta - t)^{-2\alpha-3}(-1) \right] + \left(\frac{(\alpha + 1)(\beta - t)^\alpha + \lambda \alpha \beta^\alpha}{(\beta - t)^{2\alpha+2}} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\lambda \alpha \beta^\alpha e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha}}{(\beta - t)^{\alpha+1}} \right) \\
&= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} \left[e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \left(\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\beta - t)^{\alpha+3}} + \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha (2\alpha + 2)}{(\beta - t)^{2\alpha+3}} \right) + \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha}}{(\beta - t)^{3\alpha+3}} \right. \\
&\quad \left. \times [(\alpha + 1)(\beta - t)^\alpha + \lambda \alpha \beta^\alpha] \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{e^\lambda - 1} e^{\lambda(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha} \left[\left(\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\beta - t)^{\alpha+3}} + \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha (2\alpha + 2)}{(\beta - t)^{2\alpha+3}} \right) + \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha}{(\beta - t)^{3\alpha+3}} \right. \\
&\quad \left. \times [(\alpha + 1)(\beta - t)^\alpha + \lambda \alpha \beta^\alpha] \right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
M_S'''(0) &= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha e^\lambda}{e^\lambda - 1} \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{\beta^{\alpha+3}} + \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha (2\alpha + 2)}{\beta^{2\alpha+3}} + \lambda \alpha \beta^\alpha \frac{(\alpha + 1)\beta^\alpha + \lambda \alpha \beta^\alpha}{\beta^{3\alpha+3}} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha \beta^\alpha e^\lambda}{e^\lambda - 1} \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\beta^{5\alpha+6}) + \lambda \alpha (2\alpha + 2)(\beta^{5\alpha+6})}{\beta^{6\alpha+9}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda \alpha [(\alpha + 1) + \lambda \alpha](\beta^{5\alpha+6})}{\beta^{6\alpha+9}} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{e^\lambda - 1} \beta^{5\alpha+6} \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) + \lambda \alpha (2\alpha + 2) + \lambda \alpha [(\alpha + 1) + \lambda \alpha]}{\beta^{5\alpha+9}} \right] \\
&= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{e^\lambda - 1} \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) + \lambda \alpha [(2\alpha + 2) + (\alpha + 1) + \lambda \alpha]}{\beta^3} \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbb{E}(S^3) = \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^3(e^\lambda - 1)} [(\alpha + 1)(\alpha + 2) + \lambda \alpha(3\alpha + \lambda \alpha + 3)].$$

Portanto,

$$\begin{cases} \mathbb{E}(S) = \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta(e^\lambda - 1)} \\ \mathbb{E}(S^2) = \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)} [(\alpha + 1) + \lambda \alpha] \\ \mathbb{E}(S^3) = \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^3(e^\lambda - 1)} [(\alpha + 1)(\alpha + 2) + \lambda \alpha(3\alpha + \lambda \alpha + 3)]. \end{cases}$$

Capítulo 3

Métodos de Estimação e Resultados Numéricos

Neste capítulo, apresentamos três métodos para a estimação dos parâmetros da distribuição CPTG: Método dos Momentos (MM), Método de Máxima Verossimilhança via algoritmo EM (MV via EM) e Método da Função Característica Empírica (FCE). Em seguida, é feito um estudo de simulação via Monte Carlo referente a cada um dos métodos citados acima. E, por último, apresentamos uma aplicação da distribuição proposta a dados reais.

3.1 Método dos Momentos

O método dos momentos foi proposto em 1900 por Karl Pearson e é um dos métodos de estimação mais simples e antigos. O mesmo tem sido utilizado desde o século XVIII e consiste na solução de um sistema de equações (em grande maioria, não lineares), resultante de igualar momentos populacionais com os respectivos momentos amostrais.

Seja $m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$, para $r \geq 1$, o r -ésimo momento amostral de uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n . Seja $\mu_r = \mathbb{E}[X^r]$ o r -ésimo momento populacional. O método dos momentos consiste na obtenção de estimadores para $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ resolvendo-se as equações

$$m_r = \mu_r \quad \text{para } r = 1, \dots, k.$$

Aplicando o método dos momentos para o nosso modelo:

Sabemos,

$$\begin{cases} \mathbb{E}(S) &= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta(e^\lambda - 1)} \\ \mathbb{E}(S^2) &= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^2(e^\lambda - 1)} [(\alpha + 1) + \lambda \alpha] \\ \mathbb{E}(S^3) &= \frac{\lambda \alpha e^\lambda}{\beta^3(e^\lambda - 1)} [(\alpha + 1)(\alpha + 2) + \lambda \alpha(3\alpha + \lambda \alpha + 3)]. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \mathbb{E}(S)|_{(\lambda,\alpha,\beta)=(\hat{\lambda},\hat{\alpha},\hat{\beta})} = \bar{S} \\ \mathbb{E}(S^2)|_{(\lambda,\alpha,\beta)=(\hat{\lambda},\hat{\alpha},\hat{\beta})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^2 \\ \mathbb{E}(S^3)|_{(\lambda,\alpha,\beta)=(\hat{\lambda},\hat{\alpha},\hat{\beta})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{S} = \frac{\hat{\lambda}\hat{\alpha}e^{\hat{\lambda}}}{\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)} & (3.1) \\ \bar{S}^2 = \frac{\hat{\lambda}\hat{\alpha}e^{\hat{\lambda}}}{\hat{\beta}^2(e^{\hat{\lambda}} - 1)} [(\hat{\alpha} + 1) + \hat{\lambda}\hat{\alpha}] & (3.2) \\ \bar{S}^3 = \frac{\hat{\lambda}\hat{\alpha}e^{\hat{\lambda}}}{\hat{\beta}^3(e^{\hat{\lambda}} - 1)} [(\hat{\alpha} + 1)(\hat{\alpha} + 2) + \hat{\lambda}\hat{\alpha}(3\hat{\alpha} + \hat{\lambda}\hat{\alpha} + 3)]. & (3.3) \end{cases}$$

Da Equação (3.1), temos

$$\bar{S} = \frac{\hat{\lambda}\hat{\alpha}e^{\hat{\lambda}}}{\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\bar{S}\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)}{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{S}^2 &= \frac{\hat{\lambda}\bar{S}\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)e^{\hat{\lambda}}}{\hat{\beta}^2(e^{\hat{\lambda}} - 1)\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}} \left[\left(\frac{\bar{S}\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)}{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}} + 1 \right) + \hat{\lambda} \left(\frac{\bar{S}\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)}{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}} \right) \right] \\ &= \frac{\bar{S}}{\hat{\beta}} \left(\frac{\bar{S}\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1) + \hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}}{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}} + \frac{\hat{\lambda}\bar{S}\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)}{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}} \right) \\ &= \frac{\bar{S}}{\hat{\beta}} \left(\frac{\bar{S}\hat{\beta}(e^{\hat{\lambda}} - 1)(1 + \hat{\lambda}) + \hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}}{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}} \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\hat{\beta}[\bar{S}^2\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}} - (\bar{S})^2(e^{\hat{\lambda}} - 1)(1 + \hat{\lambda})] = \bar{S}\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}.$$

Ou seja,

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{S}\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}}{\bar{S}^2\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}} - (\bar{S})^2(e^{\hat{\lambda}} - 1)(1 + \hat{\lambda})}.$$

Portanto,

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{S}}{\bar{S}^2 - \bar{S}^2(1 - e^{-\hat{\lambda}})(\hat{\lambda}^{-1} + 1)}. \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.4), obtemos

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{S}^2(e^{\hat{\lambda}} - 1)}{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}[\bar{S}^2 - \bar{S}^2(1 - e^{-\hat{\lambda}})(1 + \hat{\lambda}^{-1})]}. \quad (3.6)$$

Dessa forma, substituindo as equações (3.5) e (3.6) em (3.3), obtemos uma equação não-linear envolvendo apenas o parâmetro λ . Cada solução positiva desta equação é uma estimativa $\hat{\lambda}$ para λ . Substituindo $\hat{\lambda}$ em (3.5) e (3.6), obtemos as estimativas de momentos, para α e β , respectivamente. Para cada terno de estimativas positivas, podemos calcular a função log-verossimilhança e escolhermos como solução o terno de estimativas positivas com maior função de log-verossimilhança. No algoritmo 1, encontram-se os passos desta estimação.

Algoritmo 1: Algoritmo para o método dos momentos.

Passo 1: Encontre todas as soluções $\hat{\lambda}_i$, para $i = 1, \dots, k$, da equação (3.3) e substitua nas expressões para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, de acordo com (3.5) e (3.6);

Passo 2: Se o conjunto de soluções positivas no passo 1 for vazio, pare a função e informe que não existe solução;

Passo 3: Para i variando de 1 a k : se $\hat{\lambda}_i > 0$ e $\hat{\alpha}_i > 0$ e $\hat{\beta}_i > 0$, então calcule a função de log-verossimilhança;

Passo 4: Retorne como solução o terno do passo 3 com a maior log-verossimilhança.

3.2 Estimação de Máxima Verossimilhança via Algoritmo EM

O algoritmo EM apresentado por Dempster *et al.* (1977) é um processo iterativo para estimar parâmetros via máxima verossimilhança, na presença de dados incompletos.

Muitas vezes a maximização da função de verossimilhança é analiticamente problemática, e o algoritmo EM pode ser utilizado como uma alternativa. Segundo Casella e Berger (2010), o EM é um algoritmo que seguramente converge para o estimador de máxima verossimilhança (EMV) e tem como base a ideia de substituir uma difícil maximização da verossimilhança por uma sequência de maximizações mais fáceis, cujo limite é a resposta para o problema original. A demonstração da convergência do EM foi apresentada por Wu (1983) em que assegura a convergência para um ponto estacionário, que pode ser um máximo local ou um ponto de sela.

Antes de introduzir o algoritmo EM, consideremos uma discussão rápida sobre função de verossimilhança e estimador de máxima verossimilhança, conforme apresentado por Bolfarine e Sandoval (2001).

Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com

função de densidade (ou de probabilidade) $f(x|\theta)$, com $\theta \in \Theta$, em que Θ é o espaço paramétrico. A função de verossimilhança de θ correspondente à amostra aleatória observada é dada por

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

O estimador de máxima verossimilhança de θ pode ser definido como

$$\arg \max_{\theta \in \Theta} [\ell(\theta)]$$

em que

$$l(\theta; \mathbf{x}) = \log L(\theta; \mathbf{x}).$$

Sejam $S = \sum_{i=1}^N X_i$, $N \sim \text{PT}(\lambda)$, $X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ em que são *iid* e independentes de N . Suponha que observa-se uma amostra de tamanho n de S . Logo S é observável e N é não observável; ou seja, observa-se $\underline{S} = \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$, mas não observa $\underline{N} = \underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)^\top$. Sendo o conjunto de dados completos $c = (\underline{x}, \underline{k})$ o conjunto \underline{x} ampliado por \underline{k} , sua função de verossimilhança é $f_{S,N}(\underline{x}, \underline{k}; \theta) = L^c(\theta|\underline{N}, \underline{S})$. Cada iteração do algoritmo EM é composta pelos seguintes passos:

- Passo E (Esperança): Calcule $Q(\theta|\theta_0, \underline{S}) := \mathbb{E}_{\theta_0}[\log L^c(\theta|\underline{N}, \underline{S})]$ em que \mathbb{E}_{θ_0} é o valor esperado com respeito a $\underline{N}|\theta_0, \underline{S}$.
- Passo M (Maximização): Encontre um $\hat{\theta}$ que maximiza $Q(\theta|\theta_0, \underline{S})$, ou seja

$$\arg \max_{\theta \in \Theta} Q(\theta|\theta_0, \underline{S}).$$

Estes passos devem ser repetidos até se atingir uma convergência, adotando como um critério de parada $\|\theta_{i+1} - \theta_i\| < \varepsilon$ em que $\|\cdot\|$, é uma função denominada Norma, que a cada vetor de um espaço vetorial ela associa um número real não-negativo, e ε é um valor pré-especificado maior que zero.

Seja $\theta = (\lambda, \alpha, \beta)$. Para o passo E, tem-se

$$Q = Q(\theta|\theta_0, \underline{S}) = \mathbb{E}_{\theta_0}[\log L^c(\theta|\underline{N}, \underline{S})] = \mathbb{E}_{\theta_0}[\log f_{\underline{N}, \underline{S}}(\underline{k}, \underline{x}|\theta)],$$

em que \mathbb{E}_{θ_0} é o valor esperado com respeito a $\underline{N}|\theta_0, \underline{S}$. Então,

$$Q = \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left[\log \left(\prod_{i=1}^n f_{\underline{S}|\underline{N}}(x_i|k_i, \theta) P(N = k_i|\theta) \right) \right] P(\underline{N} = \underline{k}|\theta_0, \underline{S})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left[\log \left(\prod_{i=1}^n f_{S_{k_i}}(x_i|\theta) P(N = k_i|\theta) \right) \right] \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\theta_0, S = x_j) \\
 &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\log f_{S_{k_i}}(x_i|\theta) + \log P(N = k_i|\theta) \right) \right] \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\theta_0, S = x_j) \\
 &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\alpha k_i \log(\beta) - \log \Gamma(\alpha k_i) + (\alpha k_i - 1) \log(x_i) - \beta x_i + k_i \log(\lambda) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \log(e^\lambda - 1) - \log(k_i!) \right) \right] \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\theta_0, S = x_j).
 \end{aligned}$$

No passo M, deve-se estimar o valor de θ que maximiza Q . Derivando Q em relação a λ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{d\lambda} &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{\lambda} - \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \right) \right] \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\theta_0, S = x_j) \\
 &= -\frac{ne^\lambda}{e^\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} k_i \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\theta_0, S = x_j) \\
 &= -\frac{ne^\lambda}{e^\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dQ}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \Rightarrow \frac{ne^{\hat{\lambda}}}{e^{\hat{\lambda}} - 1} = \frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i).$$

Ou seja,

$$\frac{\hat{\lambda}e^{\hat{\lambda}}}{e^{\hat{\lambda}} - 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) \Leftrightarrow \frac{\hat{\lambda}}{1 - e^{-\hat{\lambda}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i).$$

Derivando agora Q em relação a β , temos

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{d\beta} &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha k_i}{\beta} - x_i \right) \right] \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\theta_0, S = x_j) \\
 &= -n\bar{x} + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^n \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} k_i \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\theta_0, S = x_j) \\
 &= -n\bar{x} + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i).
 \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\beta} \Big|_{(\alpha,\beta)=(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = 0 &\Rightarrow \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) = n\bar{x} \Rightarrow \\ \hat{\beta} &= \frac{\hat{\alpha}}{n\bar{x}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por último, derivando Q em relação ao parâmetro α , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\alpha} &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(k_i \log(\beta) - k_i \frac{\Gamma'(\alpha k_i)}{\Gamma(\alpha k_i)} + k_i \log(x_i) \right) \right] \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \theta_0, S = x_j) \\ &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(\log(\beta) \sum_{i=1}^n k_i - \sum_{i=1}^n k_i \psi(\alpha k_i) + \sum_{i=1}^n k_i \log(x_i) \right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \theta_0, S = x_j), \end{aligned}$$

em que $\psi(\alpha k_i) = \frac{\Gamma'(\alpha k_i)}{\Gamma(\alpha k_i)}$ é a função digama. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\alpha} &= \log(\beta) \sum_{i=1}^n \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} k_i \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \theta_0, S = x_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} k_i \psi(\alpha k_i) \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \theta_0, S = x_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} k_i \log(x_i) \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \theta_0, S = x_j) \\ &= \log(\beta) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N | \theta_0, S = x_i) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N \psi(\alpha N) | \theta_0, S = x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \mathbb{E}(N | \theta_0, S = x_i). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\alpha} \Big|_{(\alpha,\beta)=(\hat{\alpha},\hat{\beta})} = 0 &\Rightarrow \\ \log(\hat{\beta}) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N | \theta_0, S = x_i) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N \psi(\hat{\alpha} N) | \theta_0, S = x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \mathbb{E}(N | \theta_0, S = x_i) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\log(\hat{\beta}) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N\psi(\hat{\alpha}N)|\theta_0, S = x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i)\mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i).$$

Ou seja,

$$\log(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N\psi(\hat{\alpha}N)|\theta_0, S = x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i)\mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i)}. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \log \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) &- \log \sum_{i=1}^n (x_i) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) \\ &+ \log \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N\psi(\hat{\alpha}N)|\theta_0, S = x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i)\mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N\psi(\hat{\alpha}N)|\theta_0, S = x_i) - \log \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) - c = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^n \log(x_i)\mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) - \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) \right] \\ &\times \left[\log \sum_{i=1}^n (x_i) - \log \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N|\theta_0, S = x_i) &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} k_i f_{S k_i}(x_i|\theta_0) P(N = k_i|\theta_0)}{f_S(x_i|\theta_0)} \\ &= \frac{\sum_{k_i=1}^{\infty} k_i \frac{\beta_0^{\alpha_0 k_i}}{\Gamma(\alpha_0 k_i)} x_i^{\alpha_0 k_i - 1} e^{-\beta_0 x_i} \frac{\lambda_0^{k_i}}{(e^{\lambda_0} - 1) k_i!}}{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_0^{\alpha_0 j}}{\Gamma(\alpha_0 j)} x_i^{\alpha_0 j - 1} e^{-\beta_0 x_i} \frac{\lambda_0^j}{(e^{\lambda_0} - 1) j!}} \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{E}(N\psi(\hat{\alpha}N)|\theta_0, S = x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} k_i \psi(\hat{\alpha} k_i) f_{S k_i}(x_i|\theta_0) P(N = k_i|\theta_0)}{f_S(x_i|\theta_0)}.$$

Portanto, substituindo o valor de $\hat{\alpha}$ na expressão (3.7), encontraremos o valor de $\hat{\beta}$. A fim de encontrar os estimadores, utilizou-se o seguinte algoritmo.

Algoritmo 2: Algoritmo para o método EM.

Passo 1: Escolha um chute inicial $\underline{\theta}_0 = (\lambda_0, \alpha_0, \beta_0)^\top$;

Passo 2: Faça $k = 1$;

1.1. Encontre λ_k tal que $\frac{\lambda_k}{1-e^{-\lambda_k}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_{k-1}, S = x_i)$;

1.2. Encontre α_k tal que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N\psi(\alpha_k N)|\theta_{k-1}, S = x_i) - \log \alpha_k \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_{k-1}, S = x_i) - c = 0,$$

em que

$$c = \sum_{i=1}^n \log(x_i) \mathbb{E}(N|\theta_{k-1}, S = x_i) - \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_{k-1}, S = x_i) \right] \\ \times \left[\log \sum_{i=1}^n (x_i) - \log \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_{k-1}, S = x_i) \right];$$

1.3. Encontre β_k tal que $\beta_k = \frac{\alpha_k}{n\bar{x}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(N|\theta_{k-1}, S = x_i)$;

Passo 3: Se $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| + |\alpha_k - \alpha_{k-1}| + |\beta_k - \beta_{k-1}| < \varepsilon$ em que ε é com nível de precisão pré-estabelecido, retorne $(\lambda_k, \alpha_k, \beta_k)^\top$ como vetor de estimativas. Caso contrário, faça $k = k + 1$ e volte ao passo 2.

3.3 Método por Função Característica Empírica

Pesquisas relacionadas a estimação usando o método por função característica empírica (FCE) vêm sendo objeto de estudo por vários pesquisadores. Parzen (1962) foi pioneiro com uma ideia de usar a FCE para fins de inferência. O método da FCE para o caso *iid* tem sido estudado por Paulson *et al.* (1975), Feuerverger e McDunnough (1981), Tran (1998), Yu (2004), entre outros.

A ideia geral para a estimativa usando este método é minimizar a distância entre a FCE e a função característica (FC). A FCE mantém todas as informações da amostra, enquanto que a FC contém informações dos parâmetros. Vale enfatizar que uma das vantagens de usar a FC é que ela é uniformemente limitada, e portanto, deve conduzir a uma maior estabilidade numérica. Assim, pode-se explorar a FCE para estimar os parâmetros de um modelo.

Suponha que a fda de X é $F(x; \underline{\theta})$ que depende de um vetor k -dimensional de parâmetros $\underline{\theta}$. A FC é definida por

$$c(r; \theta) = \mathbb{E}[\exp(irX)] = \int \exp(irx) dF(x; \theta),$$

e a FCE expressa por

$$c_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(irX_j) = \int \exp(irx) dF_n(x),$$

em que $i = \sqrt{-1}$ e $\{X_j\}_{j=1}^n$ é uma sequência *iid*, $F_n(x)$ é a fda empírica e o r é a variável de transformação. O suporte de r pode ser considerado de duas formas no contexto de estimação com base na minimização entre a FC e a FCE: (1) de modo contínuo, em que se utiliza a seguinte função de distância

$$D(\theta; x) = \int_{-\infty}^{\infty} |c_n(r) - c(r)|^2 g(r) dr,$$

em que $g(r)$ uma função de peso contínua, ou (2) discretizado o suporte da função característica. Neste estudo, daremos ênfase a forma discreta. Para este fim, defina

$$V_n = (Re[c_n(r_1)], \dots, Re[c_n(r_q)], Im[c_n(r_1)], \dots, Im[c_n(r_q)])^\top$$

e

$$V_{\hat{\theta}} = (Re[c(r_1; \hat{\theta})], \dots, Re[c(r_q; \hat{\theta})], Im[c(r_1; \hat{\theta})], \dots, Im[c(r_q; \hat{\theta})])^\top$$

em que $Re[\cdot]$ e $Im[\cdot]$ são a parte real e imaginária de um número complexo, avaliando os q pontos r_1, r_2, \dots, r_q .

Assim, para um determinado conjunto de pontos r_1, r_2, \dots, r_q um estimador eficiente de θ , que vamos designar por $\hat{\theta}$ como estimador da FCE, pode ser encontrado através da minimização de $(V_n - V_{\hat{\theta}})' Q(\hat{\theta})(V_n - V_{\hat{\theta}})$, em que $Q(\hat{\theta}) = I$. Vale enfatizar, que este método foi usado por Cojocarú e Doray (2013) para estimar os parâmetros da distribuição generalizada normal laplace.

De acordo com Quandt e Ramsey (1978), temos que escolher q pontos de tal forma que o número de pontos seja maior ou igual ao número de parâmetros a serem estimados. Porém, a escolha dos pontos ótimos não é uma tarefa fácil, pois para utilizarmos este método, temos que atribuir valores tanto para os pontos quanto para os parâmetros, cujos valores são desconhecidos.

Para estimar os parâmetros da distribuição CPTG, minimizamos a distância $(V_n - V_{\hat{\theta}})' Q(\hat{\theta})(V_n - V_{\hat{\theta}})$ obtida, utilizando a função `optim()` da plataforma R.

O algoritmo 3 descreve os passos desta estimação.

Algoritmo 3: Algoritmo para o método FCE.

Passo 1: Escolha um chute inicial $\underline{\theta} = (\lambda, \alpha, \beta)$;

Passo 2: Escolha também um conjunto de pontos r_1, r_2, \dots, r_q ;

Passo 3: Determine a parte real e imaginária da FC e FCE;

Passo 4: Calcule os valores de V_n e $V_{\underline{\theta}}$;

Passo 5: Encontre o argumento que minimiza a distância $(V_n - V_{\underline{\theta}})'Q(\underline{\theta})(V_n - V_{\underline{\theta}})$.

3.4 Simulações

Nesta seção, apresentamos um estudo de simulação Monte Carlo para quantificar o desempenho dos três métodos de estimação discutidos anteriormente para os parâmetros da distribuição CPTG. As simulações foram feitas para pequenas e grandes amostras $N = (50, 100, 150)$ e $N = (500, 1000, 2000)$. Como critérios de comparação, utilizamos as medidas viés, erro quadrático médio (EQM) e erro de ajuste. A descrição computacional do estudo de simulação é feita na forma do Algoritmo 4. Adicionalmente, substituindo $N_1 = 50$, $N_2 = 100$ e $N_3 = 150$ por $N_1 = 500$, $N_2 = 1000$ e $N_3 = 2000$ no item 1.1 do Passo 1, tem-se a adaptação do Algoritmo ao caso de grandes amostras.

Primeiramente, foi feito um estudo de simulação no qual comparamos o método MV via EM e o método FCE. Nessa simulação, cada réplica das estimativas foi obtida aplicando os algoritmos (2) e (3) com chute inicial igual ao valor verdadeiro do vetor de parâmetros. O objetivo deste estudo é responder à pergunta "Qual método funcionará melhor diante de bons chutes?". Adotamos 1000 réplicas Monte Carlo. Para tal estudo, inicialmente fixamos α e β e variamos λ , na forma dos casos $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ e $(\lambda, \alpha, \beta) = (2, 1, 4)$ e mais dois vetores $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ e $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$. Para análise da variação apenas de α consideramos: $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ e $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 3, 2)$ e depois consideramos mais estes dois vetores $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ e $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 2, 4)$. Finalmente, variamos β em $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ e $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ e depois $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ e $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 4)$.

Para escolher a melhor sequência r no método FCE foram feitos vários estudos em busca do melhor conjunto de pontos. Como uma conclusão deste estudo, notamos que para a maioria dos casos, obteve-se o melhor funcionamento para $r = seq(0.001, 30, len = 100)$. A seguir apresentamos os efeitos da variação dos parâmetros da CPTG.

Algoritmo 4: Algoritmo para simulação.

Passo 1: Para cada $i = 1, \dots, 1000$:

1.1. Gere $N_1 = 50$ realizações de $X \sim CPTG(\lambda, \alpha, \beta)$, $\theta = (\lambda, \alpha, \beta)^\top$,

$y_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{50})^\top$;

Crie outros dois vetores de tamanhos $N_2 = 100$ e $N_3 = 150$, dados por

$y_2 = (x_1, x_2, \dots, x_{100})^\top$ e $y_3 = (x_1, x_2, \dots, x_{150})^\top$;

1.2. Com base em y_1 , y_2 e y_3 , obtenha as estimativas $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ e $\hat{\theta}_3$;

1.3. Caso não se obtenha estimativa válida, descarte a amostra e volte ao item 1.1;

1.4. Registre o seguinte vetor de informações:

$$m_i^\top = \left[\hat{\lambda}_{1i}, \hat{\lambda}_{2i}, \hat{\lambda}_{3i}, (\hat{\lambda}_{1i} - \lambda)^2, (\hat{\lambda}_{2i} - \lambda)^2, (\hat{\lambda}_{3i} - \lambda)^2, \hat{\alpha}_{1i}, \hat{\alpha}_{2i}, \hat{\alpha}_{3i}, (\hat{\alpha}_{1i} - \alpha)^2, \right. \\ (\hat{\alpha}_{2i} - \alpha)^2, (\hat{\alpha}_{3i} - \alpha)^2, \hat{\beta}_{1i}, \hat{\beta}_{2i}, \hat{\beta}_{3i}, (\hat{\beta}_{1i} - \beta)^2, (\hat{\beta}_{2i} - \beta)^2, (\hat{\beta}_{3i} - \beta)^2, \\ \left. \frac{\sum_{k=1}^{50} [f(x_k, \hat{\theta}_{1i}) - f(x_k, \theta)]}{50}, \frac{\sum_{k=1}^{100} [f(x_k, \hat{\theta}_{2i}) - f(x_k, \theta)]}{100}, \right. \\ \left. \frac{\sum_{k=1}^{150} [f(x_k, \hat{\theta}_{3i}) - f(x_k, \theta)]}{150} \right]$$

Passo 2: $M = [m_1 | m_2, \dots, | m_{1000}]^\top$;

Passo 3: Retorne o vetor de médias das colunas da matriz M .

3.4.1 Simulações com chutes iniciais corretos

Pequenas Amostras

As Tabelas 3.1 a 3.6, exibem os resultados da simulação para pequenas amostras para os métodos MV via EM e FCE. Os valores de parâmetros considerados nas Tabelas 3.1 e 3.2 são (1, 1, 4) e (2, 1, 4), e, (1, 1, 2) e (4, 1, 2). Nas Tabelas 3.3 e 3.4, consideramos (1, 1, 2) e (1, 3, 2), e, (1, 1, 4) e (1, 2, 4). E já nas Tabelas 3.5 e 3.6, os valores considerados são (1, 1, 2) e (1, 1, 4), e, (4, 1, 2) e (4, 1, 4).

- Efeitos da variação de λ

A Tabela 3.1 apresenta o menor erro de ajuste para o maior valor de λ . O mesmo acontece na Tabela 3.2. Observamos na Tabela 3.1 que no método MV via EM, quando $\lambda = 1$, o EQM de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é menor do que quando $\lambda = 2$. Já na Tabela 3.2, isto acontece no método FCE para λ pequeno. Nota-se na Tabela 3.1, que as estimativas dos parâmetros são mais precisas no método MV via EM, isto acontece para os dois vetores de parâmetros. O caso se repete na Tabela 3.2.

- Efeitos da variação de α

A Tabela 3.3 mostra que o método MV via EM estimou melhor os parâmetros do que o método FCE. O mesmo pode ser visto na Tabela 3.4. Quando comparamos o método MV via EM para os dois vetores apresentados na Tabela 3.3, o EQM referente aos três parâmetros é menor para o menor valor de α . O mesmo acontece na Tabela 3.4. Fazendo a mesma comparação com o método FCE, percebe-se que o $EQM(\hat{\lambda})$ é menor no segundo vetor e o EQM de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é menor no primeiro vetor. O mesmo acontece na Tabela 3.4. O erro de ajuste foi menor para o maior valor de α , isto para as duas tabelas.

- Efeitos da variação de β

As Tabelas 3.5 e 3.6 exibem menor erro de ajuste para o menor valor de β . A Tabela 3.5, apresenta menor EQM de $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ no caso do menor valor de β com exceção o EQM de $\hat{\alpha}$ para tamanho de amostra $N = 50$ no método FCE. Já na Tabela 3.6, para todos os tamanhos de amostras, o menor EQM é quando consideramos o menor valor de β . Na Tabela 3.5, o método MV via EM produziu estimativas menos viesadas do que o método FCE. As estimativas para β no método FCE é melhor para tamanho de amostra $N = 100$, este método também não apresenta boas estimativas para λ , para amostra de tamanho $N = 50$. A Tabela 3.6, mostra que o método FCE apresenta estimativas bastante viesadas para os três parâmetros com exceção de α quando consideramos amostras de tamanhos $N = 100$ e $N = 150$ no primeiro vetor. Notamos também que o método MV via EM estima muito bem os parâmetros. O pior caso acontece ao estimar o maior valor de β .

Portanto, para pequenas amostras, percebemos que os dois métodos convergiram bem para o verdadeiro valor do parâmetro. Em senso comparativo, percebemos que o método MV via EM obteve melhor resultado do que o segundo método. A seguir, faremos o mesmo estudo para grandes amostras.

Tabela 3.1: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|---------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9910 | 0,9924 | 0,9906 | 0,6481 | 0,7617 | 1,0474 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0606 | 1,0435 | 1,0414 | 1,0682 | 1,0198 | 0,9949 |
| $\hat{\beta}$ | 4,1761 | 4,1640 | 4,1677 | 4,2350 | 4,0992 | 4,2248 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0053 | 0,0025 | 0,0017 | 0,9236 | 0,9346 | 0,8310 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0223 | 0,0108 | 0,0079 | 0,1451 | 0,0849 | 0,0608 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4415 | 0,2032 | 0,1559 | 0,8142 | 0,5388 | 0,5583 |
| Erro de ajuste | 0,0494 | 0,0243 | 0,0166 | 0,1062 | 0,0598 | 0,0398 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (2, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 2,0137 | 1,9994 | 2,0024 | 2,1526 | 2,2246 | 2,2925 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0476 | 1,0323 | 1,0301 | 1,0107 | 0,9756 | 0,9776 |
| $\hat{\beta}$ | 4,1668 | 4,1405 | 4,1465 | 4,1546 | 3,9639 | 3,8615 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0110 | 0,0059 | 0,0041 | 2,1633 | 2,0005 | 1,7932 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0323 | 0,0150 | 0,0097 | 0,1648 | 0,14696 | 0,1229 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,6411 | 0,3181 | 0,1910 | 1,4613 | 0,7494 | 0,5533 |
| Erro de ajuste | 0,0163 | 0,0084 | 0,0055 | 0,0361 | 0,0201 | 0,0143 |

Tabela 3.2: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9955 | 0,9934 | 0,9930 | 0,8109 | 1,0035 | 1,1306 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0600 | 1,0411 | 1,0405 | 1,0405 | 0,9987 | 0,9831 |
| $\hat{\beta}$ | 2,0837 | 2,0798 | 2,0800 | 2,2108 | 2,1195 | 2,1434 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0052 | 0,0025 | 0,0016 | 0,8948 | 0,8095 | 0,7543 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0220 | 0,0092 | 0,0068 | 0,1460 | 0,0683 | 0,0438 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,1073 | 0,0493 | 0,0374 | 0,2598 | 0,1559 | 0,1551 |
| Erro de ajuste | 0,0120 | 0,0059 | 0,0040 | 0,0242 | 0,0138 | 0,0095 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 4,0729 | 4,0338 | 4,0136 | 4,6744 | 4,5183 | 4,3775 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0337 | 1,0242 | 1,0217 | 1,1090 | 1,0721 | 1,0383 |
| $\hat{\beta}$ | 2,0450 | 2,0442 | 2,0529 | 2,2059 | 2,2120 | 2,1702 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0278 | 0,0135 | 0,0079 | 2,2864 | 1,6371 | 1,4008 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0290 | 0,0106 | 0,0047 | 0,5677 | 0,3012 | 0,2242 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,1475 | 0,0506 | 0,0313 | 0,4761 | 0,3440 | 0,2340 |
| Erro de ajuste | 0,0007 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0019 | 0,0009 | 0,0005 |

Tabela 3.3: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9955 | 0,9934 | 0,9930 | 0,8109 | 1,0035 | 1,1306 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0600 | 1,0411 | 1,0405 | 1,0405 | 0,9987 | 0,9831 |
| $\hat{\beta}$ | 2,0837 | 2,0798 | 2,0800 | 2,2108 | 2,1195 | 2,1434 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0052 | 0,0025 | 0,0016 | 0,8948 | 0,8095 | 0,7543 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0220 | 0,0092 | 0,0068 | 0,1460 | 0,0683 | 0,0438 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,1073 | 0,0493 | 0,0374 | 0,2598 | 0,1559 | 0,1551 |
| Erro de ajuste | 0,0120 | 0,0059 | 0,0040 | 0,0242 | 0,0138 | 0,0095 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 3, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9874 | 0,9908 | 0,9882 | 1,0477 | 1,1034 | 1,0939 |
| $\hat{\alpha}$ | 3,3021 | 3,1554 | 3,1265 | 3,7829 | 3,4716 | 3,3667 |
| $\hat{\beta}$ | 2,2015 | 2,1181 | 2,0881 | 2,7820 | 2,5547 | 2,4902 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0075 | 0,0037 | 0,0024 | 0,4336 | 0,3685 | 0,2958 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,2887 | 0,1435 | 0,0877 | 0,9304 | 0,5328 | 0,4161 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,1274 | 0,0596 | 0,0377 | 1,0020 | 0,9184 | 0,7756 |
| Erro de ajuste | 0,0007 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0024 | 0,0010 | 0,0006 |

Tabela 3.4: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9910 | 0,9924 | 0,9906 | 0,6481 | 0,7617 | 1,0474 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0606 | 1,0435 | 1,0414 | 1,0682 | 1,0198 | 0,9949 |
| $\hat{\beta}$ | 4,1761 | 4,1640 | 4,1677 | 4,2350 | 4,0992 | 4,2248 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0053 | 0,0025 | 0,0017 | 0,9236 | 0,9346 | 0,8310 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0223 | 0,0108 | 0,0079 | 0,1451 | 0,0849 | 0,0608 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4415 | 0,2032 | 0,1559 | 0,8142 | 0,5388 | 0,5583 |
| Erro de ajuste | 0,0494 | 0,0243 | 0,0166 | 0,1062 | 0,0598 | 0,0398 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 2, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9869 | 0,9853 | 0,9845 | 1,0447 | 0,9656 | 0,9885 |
| $\hat{\alpha}$ | 2,2051 | 2,1405 | 2,1264 | 2,3067 | 2,1397 | 2,0983 |
| $\hat{\beta}$ | 4,3839 | 4,2575 | 4,2469 | 4,8480 | 4,4816 | 4,4781 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0071 | 0,0036 | 0,0024 | 0,5285 | 0,4784 | 0,4058 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,1427 | 0,0642 | 0,0434 | 0,2937 | 0,1033 | 0,0709 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,5883 | 0,2534 | 0,1793 | 2,0597 | 1,7982 | 1,6529 |
| Erro de ajuste | 0,0065 | 0,0030 | 0,0020 | 0,0139 | 0,0062 | 0,0042 |

Tabela 3.5: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9955 | 0,9934 | 0,9930 | 0,8109 | 1,0035 | 1,1306 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0600 | 1,0411 | 1,0405 | 1,0405 | 0,9987 | 0,9831 |
| $\hat{\beta}$ | 2,0837 | 2,0798 | 2,0800 | 2,2108 | 2,1195 | 2,1434 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0052 | 0,0025 | 0,0016 | 0,8948 | 0,8095 | 0,7543 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0220 | 0,0092 | 0,0068 | 0,1460 | 0,0683 | 0,0438 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,1073 | 0,0493 | 0,0374 | 0,2598 | 0,1559 | 0,1551 |
| Erro de ajuste | 0,0120 | 0,0059 | 0,0040 | 0,0242 | 0,0138 | 0,0095 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9910 | 0,9924 | 0,9906 | 0,6481 | 0,7617 | 1,0474 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0606 | 1,0435 | 1,0414 | 1,0682 | 1,0198 | 0,9949 |
| $\hat{\beta}$ | 4,1761 | 4,1640 | 4,1677 | 4,2350 | 4,0992 | 4,2248 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0053 | 0,0025 | 0,0017 | 0,9236 | 0,9346 | 0,8310 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0223 | 0,0108 | 0,0079 | 0,1451 | 0,0849 | 0,0608 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4415 | 0,2032 | 0,1559 | 0,8142 | 0,5388 | 0,5583 |
| Erro de ajuste | 0,0494 | 0,0243 | 0,0166 | 0,1062 | 0,0598 | 0,0398 |

Tabela 3.6: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 4,0729 | 4,0338 | 4,0136 | 4,6744 | 4,5183 | 4,3775 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0337 | 1,0242 | 1,0217 | 1,1090 | 1,0721 | 1,0383 |
| $\hat{\beta}$ | 2,0450 | 2,0442 | 2,0529 | 2,2059 | 2,2120 | 2,1702 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0278 | 0,0135 | 0,0079 | 2,2864 | 1,6371 | 1,4008 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0290 | 0,0106 | 0,0047 | 0,5677 | 0,3012 | 0,2242 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,1475 | 0,0506 | 0,0313 | 0,4761 | 0,3440 | 0,2340 |
| Erro de ajuste | 0,0007 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0019 | 0,0009 | 0,0005 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 4,0697 | 4,0308 | 4,0131 | 4,8756 | 4,7116 | 4,6080 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0346 | 1,0273 | 1,0223 | 0,9772 | 0,9764 | 0,9528 |
| $\hat{\beta}$ | 4,1428 | 4,1390 | 4,1475 | 4,1764 | 4,2771 | 4,1912 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0295 | 0,0137 | 0,0085 | 2,5849 | 2,0465 | 1,7453 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0352 | 0,0139 | 0,0094 | 0,6442 | 0,3079 | 0,2393 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,7223 | 0,2706 | 0,1806 | 1,8911 | 1,3168 | 0,9177 |
| Erro de ajuste | 0,0030 | 0,0014 | 0,0009 | 0,0078 | 0,0036 | 0,0023 |

Grandes Amostras

Faremos agora o mesmo estudo para grandes amostras. Os valores de parâmetros considerados nas Tabelas 3.7 e 3.8 são $(1, 1, 4)$ e $(2, 1, 4)$, e, $(1, 1, 2)$ e $(4, 1, 2)$. Nas Tabelas 3.9 e 3.10, consideramos $(1, 1, 2)$ e $(1, 3, 2)$, e, $(1, 1, 4)$ e $(1, 2, 4)$. E já nas Tabelas 3.11 e 3.12, os valores considerados são $(1, 1, 2)$ e $(1, 1, 4)$, e, $(4, 1, 2)$ e $(4, 1, 4)$.

- Efeitos da variação de λ

A Tabela 3.7 apresenta menor erro de ajuste para o maior valor de λ . O mesmo acontece na Tabela 3.8. Quando comparamos o método MV via EM na Tabela 3.7, nota-se que o EQM dos três parâmetros é menor, para o menor valor de λ com exceção do EQM de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para tamanho de amostras $N = 2000$. Fazendo a mesma comparação na Tabela 3.8, percebe-se que o EQM de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é menor para o maior valor de λ , enquanto que o EQM de $\hat{\lambda}$ é menor no primeiro vetor. Em relação ao método FCE, a Tabela 3.7 apresenta menor EQM para $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$ para o maior valor de λ e, menor EQM para $\hat{\alpha}$ para o menor valor de λ , diferente da Tabela 3.8, que apresenta menor EQM para o menor valor de λ com exceção do $EQM(\hat{\beta})$. Tanto na Tabela 3.7 quanto em 3.8, os dois métodos resultaram em boas estimativas para os parâmetros.

- Efeitos da variação de α

Os dois métodos apresentados na Tabela 3.9, exibem boas estimativas para os dois vetores de parâmetros. Vale-se destacar que, no método FCE as estimativas do parâmetro β para o maior valor de α , quando $N = 500$ e $N = 1000$, apresentam estimativas com um viés expressivo quando comparadas com as demais; porém nota-se, quando aumentamos o tamanho de amostra, a estimativa de β tende para o verdadeiro valor. A Tabela 3.10 também apresenta boas estimativas para os parâmetros, por exemplo, quando consideramos uma amostra de tamanho $N = 500$, as estimativas para o parâmetro β apresentam um viés expressivo, mas conforme aumentamos o tamanho de amostras, elas vão se aproximando do verdadeiro valor do parâmetro. O erro de ajuste foi menor para o segundo vetor de parâmetros. Isto pode ser visto tanto na Tabela 3.9 quanto em 3.10. Quando aumentamos o valor de α na Tabela 3.9, os EQMs de $\hat{\lambda}$ e $\hat{\alpha}$ são menores para o menor valor de α no método MV via EM e, no método FCE os EQMs de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são menores para o menor valor de α . O mesmo acontece na Tabela 3.10.

- Efeitos da variação de β

A Tabela 3.11 apresenta menor erro de ajuste para o primeiro vetor de parâmetros. Já na Tabela 3.12, apresenta-se o menor erro de ajuste para o menor valor de β , com exceção no método MV via EM para tamanho de amostra $N = 2000$. Tanto na Tabela 3.11 quanto em 3.12, percebe-se que quando aumentamos o valor de β , o EQM referente aos três parâmetros é menor no primeiro vetor, isto acontece nos dois métodos de estimação.

Observa-se na Tabela 3.11, que os dois métodos estimam bem os parâmetros, contudo o método MV via EM apresenta melhores estimativas para os dois vetores de parâmetros. O mesmo ocorre na Tabela 3.12.

Portanto, para grandes amostras, percebemos também que os dois métodos convergiram bem para o verdadeiro valor do parâmetro. Em senso comparativo, nota-se que o método MV via EM obteve melhor resultado do que o método FCE.

Tabela 3.7: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9910 | 0,9915 | 0,9937 | 0,9208 | 0,9996 | 1,0178 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0044 | 1,0014 | 0,9999 | 0,9905 | 0,9921 | 0,9972 |
| $\hat{\beta}$ | 3,9962 | 3,9960 | 3,9919 | 3,8578 | 3,9031 | 4,0033 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0005 | 0,0003 | 0,0001 | 0,6549 | 0,4471 | 0,1929 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0015 | 0,0007 | 0,0003 | 0,0116 | 0,0055 | 0,0031 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0372 | 0,0184 | 0,0076 | 0,5305 | 0,4531 | 0,3122 |
| Erro de ajuste | 0,0046 | 0,0023 | 0,0011 | 0,0170 | 0,0077 | 0,0042 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (2, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,9974 | 1,9979 | 1,9973 | 2,1323 | 2,0591 | 2,0378 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0004 | 1,0009 | 1,0009 | 0,9718 | 0,9916 | 0,9952 |
| $\hat{\beta}$ | 3,9931 | 3,9952 | 4,0000 | 3,7953 | 3,9076 | 3,9937 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0011 | 0,0005 | 0,0003 | 0,5110 | 0,2124 | 0,0939 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0017 | 0,0008 | 0,0002 | 0,0362 | 0,0178 | 0,0078 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0434 | 0,0187 | 0,0053 | 0,2069 | 0,0957 | 0,0452 |
| Erro de ajuste | 0,0017 | 0,0007 | 0,0003 | 0,0065 | 0,0035 | 0,0018 |

Tabela 3.8: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro λ

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|---------|--------|------------|--------|---------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9929 | 0,9928 | 0,9945 | 0,9850 | 1,0405 | 1,0318 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0035 | 1,0012 | 0,9998 | 0,9860 | 0,9933 | 0,9945 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9981 | 1,9979 | 1,9960 | 1,9381 | 1,9797 | 2,0161 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,5745 | 0,3721 | 0,1640 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0012 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0085 | 0,0046 | 0,0025 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0091 | 0,0032 | 0,0016 | 0,1422 | 0,1233 | 0,0800 |
| Erro de ajuste | 0,0011 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0034 | 0,0017 | 0,0008 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 3,9961 | 3,9947 | 3,9944 | 4,1811 | 4,1305 | 4,1135 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9986 | 0,9982 | 0,9993 | 0,9901 | 0,9825 | 0,9835 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9921 | 1,9947 | 1,9951 | 2,0315 | 2,0181 | 2,0224 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0021 | 0,0011 | 0,0005 | 0,8959 | 0,5689 | 0,3276 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0009 | 0,0002 | 0,0001 | 0,1221 | 0,0819 | 0,0572 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0061 | 0,0016 | 0,0007 | 0,0988 | 0,0595 | 0,0470 |
| Erro de ajuste | 0,00005 | 0,00002 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0001 | 0,00005 |

Tabela 3.9: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|---------|---------|------------|--------|---------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9929 | 0,9928 | 0,9945 | 0,9850 | 1,0405 | 1,0318 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0035 | 1,0012 | 0,9998 | 0,9860 | 0,9933 | 0,9945 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9981 | 1,9979 | 1,9960 | 1,9381 | 1,9797 | 2,0161 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,5745 | 0,3721 | 0,1640 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0012 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0085 | 0,0046 | 0,0025 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0091 | 0,0032 | 0,0016 | 0,1422 | 0,1233 | 0,0800 |
| Erro de ajuste | 0,0011 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0034 | 0,0017 | 0,0008 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 3, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9936 | 0,9947 | 0,9958 | 1,0635 | 1,0395 | 1,0317 |
| $\hat{\alpha}$ | 3,0123 | 3,0032 | 2,9991 | 3,0637 | 3,0543 | 3,0389 |
| $\hat{\beta}$ | 2,0062 | 2,0007 | 1,9970 | 2,1661 | 2,1074 | 2,0718 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0008 | 0,0004 | 0,0002 | 0,1485 | 0,1032 | 0,0587 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0150 | 0,0086 | 0,0021 | 0,1488 | 0,0898 | 0,0515 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0075 | 0,0034 | 0,0009 | 0,3449 | 0,2242 | 0,1292 |
| Erro de ajuste | 0,0001 | 0,00002 | 0,00001 | 0,0002 | 0,0001 | 0,00005 |

Tabela 3.10: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro α

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9910 | 0,9915 | 0,9937 | 0,9208 | 0,9996 | 1,0178 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0044 | 1,0014 | 0,9999 | 0,9905 | 0,9921 | 0,9972 |
| $\hat{\beta}$ | 3,9962 | 3,9960 | 3,9919 | 3,8578 | 3,9031 | 4,0033 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0005 | 0,0003 | 0,0001 | 0,6549 | 0,4471 | 0,1929 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0015 | 0,0007 | 0,0003 | 0,0116 | 0,0055 | 0,0031 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0372 | 0,0184 | 0,0076 | 0,5305 | 0,4531 | 0,3122 |
| Erro de ajuste | 0,0046 | 0,0023 | 0,0011 | 0,0170 | 0,0077 | 0,0042 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 2, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9899 | 0,9921 | 0,9930 | 0,9912 | 0,9833 | 1,0033 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,9996 | 2,0041 | 1,9983 | 1,9533 | 1,9682 | 1,9680 |
| $\hat{\beta}$ | 4,0037 | 4,0053 | 3,9950 | 4,1003 | 4,0297 | 4,0186 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0007 | 0,0004 | 0,0002 | 0,1814 | 0,1245 | 0,0923 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0076 | 0,0034 | 0,0012 | 0,0261 | 0,0124 | 0,0071 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0349 | 0,0159 | 0,0072 | 0,6954 | 0,5029 | 0,3456 |
| Erro de ajuste | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0012 | 0,0006 | 0,0003 |

Tabela 3.11: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|--------|--------|------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9929 | 0,9928 | 0,9945 | 0,9850 | 1,0405 | 1,0318 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0035 | 1,0012 | 0,9998 | 0,9860 | 0,9933 | 0,9945 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9981 | 1,9979 | 1,9960 | 1,9381 | 1,9797 | 2,0161 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,5745 | 0,3721 | 0,1640 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0012 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0085 | 0,0046 | 0,0025 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0091 | 0,0032 | 0,0016 | 0,1422 | 0,1233 | 0,0800 |
| Erro de ajuste | 0,0011 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0034 | 0,0017 | 0,0008 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 0,9910 | 0,9915 | 0,9937 | 0,9208 | 0,9996 | 1,0178 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,0044 | 1,0014 | 0,9999 | 0,9905 | 0,9921 | 0,9972 |
| $\hat{\beta}$ | 3,9962 | 3,9960 | 3,9919 | 3,8578 | 3,9031 | 4,0033 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0005 | 0,0003 | 0,0001 | 0,6549 | 0,4471 | 0,1929 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0015 | 0,0007 | 0,0003 | 0,0116 | 0,0055 | 0,0031 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0372 | 0,0184 | 0,0076 | 0,5305 | 0,4531 | 0,3122 |
| Erro de ajuste | 0,0046 | 0,0023 | 0,0011 | 0,0170 | 0,0077 | 0,0042 |

Tabela 3.12: Simulações para os métodos MV via EM e FCE variando o parâmetro β

| Estimações | Método MV via EM | | | Método FCE | | |
|--|------------------|---------|---------|------------|--------|---------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 3,9961 | 3,9947 | 3,9944 | 4,1811 | 4,1305 | 4,1135 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9986 | 0,9982 | 0,9993 | 0,9901 | 0,9825 | 0,9835 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9921 | 1,9947 | 1,9951 | 2,0315 | 2,0181 | 2,0224 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0021 | 0,0011 | 0,0005 | 0,8959 | 0,5689 | 0,3276 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0009 | 0,0002 | 0,0001 | 0,1221 | 0,0819 | 0,0572 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0061 | 0,0016 | 0,0007 | 0,0988 | 0,0595 | 0,0470 |
| Erro de ajuste | 0,00005 | 0,00002 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0001 | 0,00005 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 4)$ | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 3,9947 | 3,9913 | 3,9932 | 4,2550 | 4,2073 | 4,1239 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9986 | 0,9981 | 0,9994 | 0,9537 | 0,9782 | 0,9861 |
| $\hat{\beta}$ | 3,9849 | 3,9898 | 3,9902 | 4,0092 | 4,0291 | 4,0210 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,0025 | 0,0012 | 0,0005 | 1,0240 | 0,6390 | 0,3899 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0013 | 0,0003 | 0,0001 | 0,1405 | 0,0966 | 0,0673 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0319 | 0,0116 | 0,0029 | 0,4376 | 0,2701 | 0,1938 |
| Erro de ajuste | 0,0002 | 0,0001 | 0,00004 | 0,0008 | 0,0004 | 0,0002 |

3.4.2 Simulações com chute inicial obtido pelo método dos momentos

Agora vamos apresentar um estudo de simulação utilizando o método dos momentos com chute inicial igual ao parâmetro verdadeiro no qual foi aplicado o algoritmo (1), utilizamos as estimativas de momento como chute inicial para o MV via EM e FCE nas estimações do método MV via EM com momentos e FCE com momentos, respectivamente. Os vetores de parâmetros considerados são os mesmos apresentados anteriormente.

Pequenas Amostras

As Tabelas 3.13 a 3.6, exibem os resultados da simulação para pequenas amostras. Os valores de parâmetros considerados nas Tabelas 3.13 e 3.14 são $(1, 1, 4)$ e $(2, 1, 4)$, e, $(1, 1, 2)$ e $(4, 1, 2)$. Nas Tabelas 3.15 e 3.16, consideramos $(1, 1, 2)$ e $(1, 3, 2)$, e, $(1, 1, 4)$ e $(1, 2, 4)$. E já nas Tabelas 3.17 e 3.18, os valores considerados são $(1, 1, 2)$ e $(1, 1, 4)$, e, $(4, 1, 2)$ e $(4, 1, 4)$.

- Efeitos da variação de λ

A Tabela 3.13 mostra que em todos os métodos e para todos os tamanhos de amostra o erro de ajuste é menor quando aumentamos o valor de λ . O mesmo pode ser observado na Tabela 3.14. Na Tabela 3.13, as estimativas referente a λ e α pelo método dos momentos permaneceram as mesmas para os dois vetores de parâmetros. Quando aumentamos o valor de λ não obtemos boas estimativas para o parâmetro β , isto pode ser visto nas Tabelas 3.13 e 3.14. Quando $\lambda = 1$, obtemos menor viés e EQM e isso acontece apenas no método FCE com Momentos da Tabela 3.13, diferente da Tabela 3.14 que acontece com todos os métodos. Um fato que vale enfatizar na Tabela 3.14 é, quando aumentamos o valor de λ , o $EQM(\hat{\lambda})$ assume um valor muito alto nos dois primeiros métodos; no método da FCE com momentos, embora esse valor diminua, o viés continua expressivo.

- Efeitos da variação de α

A Tabela 3.15, mostra que, quando $\alpha = 1$ o viés e EQM de $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são menores do que quando $\alpha = 3$, isto nos dois primeiros métodos. O mesmo pode ser visto na Tabela 3.16. Ainda na Tabela 3.15, pode-se observar no método dos momentos que conforme aumentamos o valor da amostra, os valores das estimativas de β se aproximam do verdadeiro, o que não acontece nos demais métodos, o mesmo acontece com o λ . Quando $\alpha = 3$ o método MV via EM com momentos não produz boas estimativas para λ . A Tabela 3.16 mostra que, quando $\alpha = 1$ o $EQM(\hat{\lambda})$ continua sendo o mesmo para os três tamanhos de amostras no método FCE com momentos, o mesmo pode ser visto na Tabela 3.15 para o mesmo método, sendo que quando $N = 150$ esse valor decai.

- Efeitos da variação de β

Note nas Tabelas 3.17 e 3.18, que o erro de ajuste é menor em todos os métodos e para todos os tamanhos de amostra no caso de menor valor de β . Quando fixamos λ e α na Tabela 3.17, $EQM(\hat{\lambda})$ e $EQM(\hat{\alpha})$ permanecem iguais para $\beta = 2$ e $\beta = 4$. O mesmo fato pode ser visto na Tabela 3.18, na qual consideramos outros vetores de parâmetros. Vale ressaltar que o $EQM(\hat{\lambda})$ assumiu valor muito alto para todos os tamanhos de amostras no método dos momentos e no MV via EM com momentos, mesmo apresentando um EQM ainda alto, o método FCE com momentos foi o que obteve menor viés para λ , este fato pode ser observado na Tabela 3.18, em que fixamos $\lambda = 4$ e $\alpha = 1$. Para o maior valor de β da Tabela 3.17, o método FCE com momentos apresenta resultados mais satisfatórios para o parâmetro β do que os demais métodos, o método dos momentos foi o que mais produziu estimativas viesadas, este fato acontece para todos os tamanhos de amostras.

Portanto, para este estudo de simulação, percebemos que em senso comparativo, o método MV via EM com momentos obteve melhor resultado do que os demais métodos.

Tabela 3.13: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3268 | 1,3134 | 1,3716 | 1,3113 | 1,2940 | 1,3632 | 1,0660 | 1,2548 | 1,4923 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8279 | 0,8731 | 0,8875 | 0,9745 | 0,9872 | 0,9720 | 0,9324 | 0,9293 | 0,9074 |
| $\hat{\beta}$ | 3,5289 | 3,7460 | 3,9412 | 4,1018 | 4,0845 | 4,3089 | 4,1826 | 4,0468 | 4,1318 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3312 | 0,2827 | 0,2930 | 0,3260 | 0,2793 | 0,2909 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0617 | 0,0331 | 0,0263 | 0,0487 | 0,0237 | 0,0174 | 0,1615 | 0,1106 | 0,0756 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,8711 | 0,4687 | 0,3759 | 0,7022 | 0,3993 | 0,4390 | 1,1677 | 0,6472 | 0,5998 |
| Erro de ajuste | 0,0683 | 0,0379 | 0,0265 | 0,0587 | 0,0338 | 0,0266 | 0,0997 | 0,0574 | 0,0393 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (2, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3268 | 1,3134 | 1,3716 | 1,3148 | 1,2940 | 1,3663 | 2,4429 | 3,0749 | 2,9974 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8279 | 0,8731 | 0,8875 | 0,9734 | 0,9857 | 0,9712 | 0,9378 | 0,7513 | 0,7362 |
| $\hat{\beta}$ | 2,6467 | 2,8095 | 2,9559 | 3,0739 | 3,0610 | 3,2222 | 3,6641 | 3,3947 | 3,4998 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3312 | 0,2827 | 0,2930 | 0,3240 | 0,2801 | 0,2913 | 2,9632 | 3,5119 | 2,8363 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0617 | 0,0331 | 0,0263 | 0,0487 | 0,0238 | 0,0176 | 0,2191 | 0,2129 | 0,1774 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4900 | 0,2637 | 0,2115 | 0,3946 | 0,2201 | 0,2417 | 1,4927 | 1,0203 | 0,7025 |
| Erro de ajuste | 0,0384 | 0,0213 | 0,0149 | 0,0330 | 0,0189 | 0,0149 | 0,0360 | 0,0189 | 0,0143 |

Tabela 3.14: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|---------|---------|-----------------|---------|---------|------------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3268 | 1,3134 | 1,3716 | 1,3188 | 1,2949 | 1,3682 | 1,2444 | 1,2579 | 1,3753 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8279 | 0,8731 | 0,8875 | 0,9729 | 0,9817 | 0,9687 | 0,9491 | 0,9388 | 0,9342 |
| $\hat{\beta}$ | 1,7645 | 1,8730 | 1,9706 | 2,0472 | 2,0381 | 2,1420 | 2,1681 | 2,0383 | 2,0547 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3312 | 0,2827 | 0,2930 | 0,3286 | 0,2799 | 0,2917 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9216 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0617 | 0,0331 | 0,0263 | 0,0478 | 0,0236 | 0,0176 | 0,1592 | 0,0821 | 0,0556 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,2178 | 0,1172 | 0,0940 | 0,1749 | 0,0951 | 0,1057 | 0,3044 | 0,1586 | 0,1737 |
| Erro de ajuste | 0,0171 | 0,0095 | 0,0066 | 0,0148 | 0,0083 | 0,0065 | 0,0232 | 0,0138 | 0,0092 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 2,2913 | 6,0467 | 6,5358 | 1,9501 | 6,0545 | 6,5532 | 2,9413 | 4,2921 | 4,6805 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,5844 | 0,5697 | 0,4911 | 1,6521 | 0,5697 | 0,4994 | 1,7742 | 1,1159 | 0,9203 |
| $\hat{\beta}$ | 1,4779 | 1,4349 | 1,5001 | 1,4030 | 1,3745 | 1,4770 | 1,9052 | 1,8008 | 1,8445 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 11,3390 | 14,8439 | 11,4093 | 14,6670 | 14,8674 | 13,1269 | 6,6256 | 5,7754 | 3,1814 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,7634 | 0,6808 | 0,5398 | 0,7836 | 0,6815 | 0,5368 | 0,8822 | 0,6730 | 0,3879 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4927 | 0,4469 | 0,3931 | 0,4784 | 0,4906 | 0,3897 | 0,6178 | 0,4605 | 0,3207 |
| Erro de ajuste | 0,0014 | 0,0008 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0008 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0010 | 0,0006 |

Tabela 3.15: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3268 | 1,3134 | 1,3716 | 1,3188 | 1,2949 | 1,3682 | 1,2444 | 1,2579 | 1,3753 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8279 | 0,8731 | 0,8875 | 0,9729 | 0,9817 | 0,9687 | 0,9491 | 0,9388 | 0,9342 |
| $\hat{\beta}$ | 1,7645 | 1,8730 | 1,9706 | 2,0472 | 2,0381 | 2,1420 | 2,1681 | 2,0383 | 2,0547 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3312 | 0,2827 | 0,2930 | 0,3286 | 0,2799 | 0,2917 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9216 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0617 | 0,0331 | 0,0263 | 0,0478 | 0,0236 | 0,0176 | 0,1592 | 0,0821 | 0,0556 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,2178 | 0,1172 | 0,0940 | 0,1749 | 0,0951 | 0,1057 | 0,3044 | 0,1586 | 0,1737 |
| Erro de ajuste | 0,0171 | 0,0095 | 0,0066 | 0,0148 | 0,0083 | 0,0065 | 0,0232 | 0,0138 | 0,0092 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 3, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,7032 | 1,7065 | 1,6215 | 0,1777 | 0,1726 | 0,1698 | 1,6190 | 1,5197 | 1,3686 |
| $\hat{\alpha}$ | 2,5687 | 2,6537 | 2,7269 | 2,6078 | 2,5973 | 2,5877 | 3,7120 | 3,5026 | 3,4159 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9968 | 2,1678 | 2,2752 | 1,3985 | 1,3109 | 1,2611 | 3,1296 | 2,8208 | 2,6746 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,7983 | 0,6767 | 0,5864 | 0,6953 | 0,6964 | 0,6956 | 0,7565 | 0,5404 | 0,3780 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,7701 | 0,5667 | 0,3911 | 0,2049 | 0,1766 | 0,1813 | 4,8554 | 1,3541 | 0,6707 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4184 | 0,4046 | 0,3905 | 0,4923 | 0,5557 | 0,6136 | 1,3614 | 1,0340 | 0,8287 |
| Erro de ajuste | 0,0012 | 0,0007 | 0,0005 | 0,0010 | 0,0006 | 0,0004 | 0,0025 | 0,0011 | 0,0006 |

Tabela 3.16: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3268 | 1,3134 | 1,3716 | 1,3113 | 1,2940 | 1,3632 | 1,0660 | 1,2548 | 1,4923 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8279 | 0,8731 | 0,8875 | 0,9745 | 0,9872 | 0,9720 | 0,9324 | 0,9293 | 0,9074 |
| $\hat{\beta}$ | 3,5289 | 3,7460 | 3,9412 | 4,1018 | 4,0845 | 4,3089 | 4,1826 | 4,0468 | 4,1318 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3312 | 0,2827 | 0,2930 | 0,3260 | 0,2793 | 0,2909 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0617 | 0,0331 | 0,0263 | 0,0487 | 0,0237 | 0,0174 | 0,1615 | 0,1106 | 0,0756 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,8711 | 0,4687 | 0,3759 | 0,7022 | 0,3993 | 0,4390 | 1,1677 | 0,6472 | 0,5998 |
| Erro de ajuste | 0,0683 | 0,0379 | 0,0265 | 0,0587 | 0,0338 | 0,0266 | 0,0997 | 0,0574 | 0,0393 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 2, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,6492 | 1,6695 | 1,6428 | 1,2432 | 1,4700 | 1,5097 | 1,5354 | 1,3870 | 1,3236 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,6926 | 1,7432 | 1,7865 | 2,1087 | 2,0951 | 2,0929 | 2,1297 | 2,0529 | 2,0560 |
| $\hat{\beta}$ | 4,0567 | 4,1441 | 4,3852 | 4,0201 | 4,4455 | 4,7920 | 5,1283 | 4,7197 | 4,6520 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,6084 | 0,5719 | 0,5246 | 0,7020 | 0,6040 | 0,5567 | 0,7921 | 0,5862 | 0,4597 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,3236 | 0,1861 | 0,1292 | 0,2175 | 0,1342 | 0,1014 | 0,5347 | 0,2072 | 0,1184 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 1,0753 | 0,7921 | 0,7049 | 0,8957 | 1,1411 | 1,2753 | 2,5080 | 1,7354 | 1,5539 |
| Erro de ajuste | 0,0081 | 0,0046 | 0,0035 | 0,0089 | 0,0046 | 0,0035 | 0,0137 | 0,0065 | 0,0044 |

Tabela 3.17: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3268 | 1,3134 | 1,3716 | 1,3188 | 1,2949 | 1,3682 | 1,2444 | 1,2579 | 1,3753 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8279 | 0,8731 | 0,8875 | 0,9729 | 0,9817 | 0,9687 | 0,9491 | 0,9388 | 0,9342 |
| $\hat{\beta}$ | 1,7645 | 1,8730 | 1,9706 | 2,0472 | 2,0381 | 2,1420 | 2,1681 | 2,0383 | 2,0547 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3312 | 0,2827 | 0,2930 | 0,3286 | 0,2799 | 0,2917 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9216 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0617 | 0,0331 | 0,0263 | 0,0478 | 0,0236 | 0,0176 | 0,1592 | 0,0821 | 0,0556 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,2178 | 0,1172 | 0,0940 | 0,1749 | 0,0951 | 0,1057 | 0,3044 | 0,1586 | 0,1737 |
| Erro de ajuste | 0,0171 | 0,0095 | 0,0066 | 0,0148 | 0,0083 | 0,0065 | 0,0232 | 0,0138 | 0,0092 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3268 | 1,3134 | 1,3716 | 1,3148 | 1,2940 | 1,3663 | 1,0660 | 1,2548 | 1,4923 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8279 | 0,8731 | 0,8875 | 0,9734 | 0,9857 | 0,9712 | 0,9324 | 0,9293 | 0,9074 |
| $\hat{\beta}$ | 2,6467 | 2,8095 | 2,9559 | 3,0739 | 3,0610 | 3,2222 | 4,1826 | 4,0468 | 4,1318 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3312 | 0,2827 | 0,2930 | 0,3240 | 0,2801 | 0,2913 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0617 | 0,0331 | 0,0263 | 0,0487 | 0,0238 | 0,0176 | 0,1615 | 0,1106 | 0,0756 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4900 | 0,2637 | 0,2115 | 0,3946 | 0,2201 | 0,2417 | 1,1677 | 0,6472 | 0,5998 |
| Erro de ajuste | 0,0384 | 0,0213 | 0,0149 | 0,0330 | 0,0189 | 0,0149 | 0,0997 | 0,0574 | 0,0393 |

Tabela 3.18: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|---------|---------|-----------------|---------|---------|------------------|--------|--------|
| | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 | 50 | 100 | 150 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 2,2913 | 6,0467 | 6,5358 | 1,9501 | 6,0545 | 6,5532 | 2,9413 | 4,2921 | 4,6805 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,5844 | 0,5697 | 0,4911 | 1,6521 | 0,5697 | 0,4994 | 1,7742 | 1,1159 | 0,9203 |
| $\hat{\beta}$ | 1,4779 | 1,4349 | 1,5001 | 1,4030 | 1,3745 | 1,4770 | 1,9052 | 1,8008 | 1,8445 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 11,3390 | 14,8439 | 11,4093 | 14,6670 | 14,8674 | 13,1269 | 6,6256 | 5,7754 | 3,1814 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,7634 | 0,6808 | 0,5398 | 0,7836 | 0,6815 | 0,5368 | 0,8822 | 0,6730 | 0,3879 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4927 | 0,4469 | 0,3931 | 0,4784 | 0,4906 | 0,3897 | 0,6178 | 0,4605 | 0,3207 |
| Erro de ajuste | 0,0014 | 0,0008 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0008 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0010 | 0,0006 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 2,2913 | 6,0467 | 6,5358 | 1,7986 | 6,0517 | 6,5479 | 2,9153 | 4,3461 | 4,6843 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,5844 | 0,5697 | 0,4911 | 1,6815 | 0,5750 | 0,5043 | 1,8335 | 1,0818 | 0,9107 |
| $\hat{\beta}$ | 2,9558 | 2,8699 | 3,0001 | 2,7792 | 2,7076 | 2,8825 | 3,8996 | 3,5356 | 3,6768 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 11,3390 | 14,8439 | 11,4093 | 14,7817 | 14,9122 | 14,6942 | 6,4357 | 5,8639 | 3,5262 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,7634 | 0,6808 | 0,5398 | 0,7939 | 0,6823 | 0,5419 | 0,9027 | 0,6863 | 0,4381 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 1,9710 | 1,7876 | 1,5725 | 1,8508 | 1,9736 | 1,5886 | 2,6052 | 1,7973 | 1,3461 |
| Erro de ajuste | 0,0054 | 0,0032 | 0,0021 | 0,0052 | 0,0031 | 0,0022 | 0,0090 | 0,0039 | 0,0025 |

Grandes Amostras

Dando continuidade à análise das simulações, as Tabelas 3.19 a 3.24 apresentam informações para os tamanhos de amostra 500, 1000 e 2000, respectivamente. Os valores de parâmetros considerados nas Tabelas 3.19 e 3.20 são $(1, 1, 4)$ e $(2, 1, 4)$, e, $(1, 1, 2)$ e $(4, 1, 2)$. Nas Tabelas 3.21 e 3.22, consideramos $(1, 1, 2)$ e $(1, 3, 2)$, e, $(1, 1, 4)$ e $(1, 2, 4)$. E já nas Tabelas 3.23 e 3.24, os valores considerados são $(1, 1, 2)$ e $(1, 1, 4)$, e, $(4, 1, 2)$ e $(4, 1, 4)$.

- Efeitos da variação de λ

As Tabelas 3.19 e 3.20 exibem os resultados obtidos nas simulações quando variamos o parâmetro λ . Podemos observar na Tabela 3.19 que, quanto ao vetor paramétrico $(1, 1, 4)$, o $EQM(\hat{\alpha})$ continua sendo menor para todos os métodos de estimação comparado ao vetor $(2, 1, 4)$. Quando aumentamos o valor de λ as estimativas dos parâmetros α e β se mostram mais viesadas. Quando $\lambda = 1$ o método FCE com momentos exibe resultados mais precisos, já quando $\lambda = 2$, os dois primeiros métodos são os que apresentam melhor desempenho. Nota-se na Tabela 3.20, que as melhores estimações do segundo vetor para λ, α e β foram no método FCE com momentos. Quando o tamanho de amostra é $N = 500$ no segundo vetor, o $EQM(\hat{\lambda})$ nos dois primeiros métodos não apresentam resultados satisfatórios, mas, conforme aumentamos o tamanho de amostras, o método que apresenta estimativas menos viesadas é FCE com momentos. Observe que tanto na Tabela 3.19 quanto em 3.20, o erro de ajuste é menor para o maior o valor de λ .

- Efeitos da variação de α

As Tabelas 3.21 e 3.22 mostram que o erro de ajuste é menor para todos os métodos no caso de maior valor de α . Analisando o método MV via EM com momentos na Tabela 3.21, percebemos que o EQM de $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é menor quando α for menor. Ainda referente a Tabela 3.21, para o maior valor de α o método FCE com momentos apresenta melhor *performance* para todos os três tamanhos de amostras. Considerando λ e α para o vetor paramétrico $(1, 1, 4)$, da Tabela 3.22, obtemos estimativas bastante precisas no método FCE com momentos, já quanto ao parâmetro β , este método não estimou bem. Mas quando $\alpha = 2$, este método foi o que melhor estimou β . Ainda analisando a Tabela 3.22, conforme aumentamos o tamanho de amostras no método dos momentos, as estimativas de λ, α e β convergem para o verdadeiro valor.

- Efeitos da variação de β

Quando aumentamos o valor de β na Tabela 3.23, foi possível notar no método dos momentos, que as estimativas de λ e α são as mesmas para os dois vetores de parâmetros. Este fato pode ser visto também na Tabela 3.24. É interessante mencionar que o mesmo aconteceu para pequenas amostras quando variamos esses mesmos parâmetros. Podemos

notar nas Tabelas 3.23 e 3.24, que o erro de ajuste foi menor para o menor valor de β . Nos dois primeiros métodos da Tabela 3.24, o $EQM(\hat{\lambda})$ assume valor muito alto. O método FCE com momentos, é o que apresenta melhor resultado tanto para λ quanto para os demais parâmetros. Conforme aumentamos o tamanho de amostras neste método, o EQM é cada vez menor.

Portanto, para grandes amostras, verifica-se em senso comparativo, que o método MV via EM com momentos obteve melhor resultado do que os demais métodos.

Tabela 3.19: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3464 | 1,2917 | 1,2687 | 1,3437 | 1,2891 | 1,2687 | 1,0405 | 1,0781 | 1,0665 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9073 | 0,9166 | 0,9321 | 0,9572 | 0,9597 | 0,9687 | 0,9714 | 0,9787 | 0,9881 |
| $\hat{\beta}$ | 3,8721 | 3,9696 | 4,0143 | 4,1162 | 4,1565 | 4,1686 | 3,6265 | 3,6721 | 3,7644 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,2510 | 0,1894 | 0,1399 | 0,2490 | 0,1870 | 0,1391 | 0,7484 | 0,5509 | 0,2699 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0148 | 0,0102 | 0,0066 | 0,0074 | 0,0053 | 0,0032 | 0,0148 | 0,0071 | 0,0038 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,2158 | 0,1303 | 0,0945 | 0,2483 | 0,2007 | 0,1617 | 0,6214 | 0,5359 | 0,3826 |
| Erro de ajuste | 0,0152 | 0,0097 | 0,0060 | 0,0116 | 0,0069 | 0,0041 | 0,0160 | 0,0077 | 0,0043 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (2, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 2,3109 | 2,1974 | 2,0686 | 2,3087 | 2,1971 | 2,0690 | 3,0736 | 2,6071 | 2,2224 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,8587 | 0,9147 | 0,9662 | 0,9104 | 0,9516 | 0,9879 | 0,6845 | 0,8124 | 0,9378 |
| $\hat{\beta}$ | 3,1907 | 3,4429 | 3,7772 | 3,2031 | 3,4486 | 3,8082 | 3,3492 | 3,6118 | 3,7995 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 1,9213 | 0,6377 | 0,2540 | 1,9120 | 0,6355 | 0,2537 | 2,3693 | 0,8011 | 0,2241 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,1249 | 0,0607 | 0,0297 | 0,0893 | 0,0469 | 0,0221 | 0,1389 | 0,0631 | 0,0196 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,7076 | 0,3337 | 0,0805 | 0,7361 | 0,3461 | 0,0838 | 0,5572 | 0,2654 | 0,1012 |
| Erro de ajuste | 0,0065 | 0,0042 | 0,0028 | 0,0066 | 0,0040 | 0,0025 | 0,0067 | 0,0043 | 0,0022 |

Tabela 3.20: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro λ

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3464 | 1,2917 | 1,2687 | 1,3437 | 1,2909 | 1,2697 | 1,1237 | 1,0773 | 1,0753 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9073 | 0,9166 | 0,9321 | 0,9515 | 0,9546 | 0,9655 | 0,9709 | 0,9843 | 0,9881 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9360 | 1,9848 | 2,0071 | 2,0541 | 2,0751 | 2,0744 | 1,8014 | 1,8461 | 1,9042 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,2510 | 0,1894 | 0,1399 | 0,2506 | 0,1897 | 0,1399 | 0,6735 | 0,4845 | 0,2058 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0148 | 0,0102 | 0,0066 | 0,0077 | 0,0056 | 0,0034 | 0,0117 | 0,0060 | 0,0029 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0540 | 0,0326 | 0,0236 | 0,0579 | 0,0471 | 0,0363 | 0,1570 | 0,1379 | 0,0959 |
| Erro de ajuste | 0,0038 | 0,0024 | 0,0015 | 0,0029 | 0,0018 | 0,0010 | 0,0033 | 0,0017 | 0,0009 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 6,7824 | 6,8129 | 6,0218 | 6,7776 | 6,8080 | 6,0213 | 4,8178 | 4,8412 | 4,5679 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,4414 | 0,4422 | 0,5270 | 0,4410 | 0,4433 | 0,5325 | 0,8020 | 0,7756 | 0,8353 |
| $\hat{\beta}$ | 1,3784 | 1,4572 | 1,5607 | 1,3670 | 1,4578 | 1,5818 | 1,6576 | 1,8068 | 1,8596 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 14,3059 | 8,5739 | 4,1035 | 14,6290 | 8,6179 | 4,1111 | 2,8032 | 1,1016 | 0,5243 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,4934 | 0,3447 | 0,2427 | 0,4809 | 0,3424 | 0,2373 | 0,2507 | 0,1248 | 0,0797 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4167 | 0,3046 | 0,1997 | 0,4190 | 0,3010 | 0,1862 | 0,2011 | 0,1025 | 0,0686 |
| Erro de ajuste | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |

Tabela 3.21: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|---------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|---------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3464 | 1,2917 | 1,2687 | 1,3437 | 1,2909 | 1,2697 | 1,1237 | 1,0773 | 1,0753 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9073 | 0,9166 | 0,9321 | 0,9515 | 0,9546 | 0,9655 | 0,9709 | 0,9843 | 0,9881 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9360 | 1,9848 | 2,0071 | 2,0541 | 2,0751 | 2,0744 | 1,8014 | 1,8461 | 1,9042 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,2510 | 0,1894 | 0,1399 | 0,2506 | 0,1897 | 0,1399 | 0,6735 | 0,4845 | 0,2058 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0148 | 0,0102 | 0,0066 | 0,0077 | 0,0056 | 0,0034 | 0,0117 | 0,0060 | 0,0029 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0540 | 0,0326 | 0,0236 | 0,0579 | 0,0471 | 0,0363 | 0,1570 | 0,1379 | 0,0959 |
| Erro de ajuste | 0,0038 | 0,0024 | 0,0015 | 0,0029 | 0,0018 | 0,0010 | 0,0033 | 0,0017 | 0,0009 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 3, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,4323 | 1,2987 | 1,1798 | 0,1648 | 0,1627 | 0,1619 | 1,1245 | 1,0643 | 1,0403 |
| $\hat{\alpha}$ | 2,8554 | 2,9623 | 3,0041 | 2,4747 | 2,4287 | 2,3949 | 3,0727 | 3,0627 | 3,0515 |
| $\hat{\beta}$ | 2,2845 | 2,2645 | 2,1845 | 1,1391 | 1,1086 | 1,0954 | 2,1914 | 2,1243 | 2,0863 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3050 | 0,1296 | 0,0623 | 0,6991 | 0,7014 | 0,7024 | 0,1577 | 0,1038 | 0,0587 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,1311 | 0,0637 | 0,0347 | 0,2759 | 0,3263 | 0,3661 | 0,1594 | 0,0910 | 0,0514 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,2218 | 0,1571 | 0,0862 | 0,7561 | 0,7979 | 0,8182 | 0,3782 | 0,2255 | 0,1290 |
| Erro de ajuste | 0,0002 | 0,0001 | 0,00005 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,00005 |

Tabela 3.22: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro α

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3464 | 1,2917 | 1,2687 | 1,3437 | 1,2891 | 1,2687 | 1,0405 | 1,0781 | 1,0665 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9073 | 0,9166 | 0,9321 | 0,9572 | 0,9597 | 0,9687 | 0,9714 | 0,9787 | 0,9881 |
| $\hat{\beta}$ | 3,8721 | 3,9696 | 4,0143 | 4,1162 | 4,1565 | 4,1686 | 3,6265 | 3,6721 | 3,7644 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,2510 | 0,1894 | 0,1399 | 0,2490 | 0,1870 | 0,1391 | 0,7484 | 0,5509 | 0,2699 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0148 | 0,0102 | 0,0066 | 0,0074 | 0,0053 | 0,0032 | 0,0148 | 0,0071 | 0,0038 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,2158 | 0,1303 | 0,0945 | 0,2483 | 0,2007 | 0,1617 | 0,6214 | 0,5359 | 0,3826 |
| Erro de ajuste | 0,0152 | 0,0097 | 0,0060 | 0,0116 | 0,0069 | 0,0041 | 0,0160 | 0,0077 | 0,0043 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 2, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,5302 | 1,3746 | 1,2117 | 1,5114 | 1,3637 | 1,2069 | 1,0517 | 1,0252 | 1,0135 |
| $\hat{\alpha}$ | 1,8056 | 1,8741 | 1,9247 | 2,0204 | 2,0470 | 2,0460 | 1,9497 | 1,9661 | 1,9665 |
| $\hat{\beta}$ | 4,3269 | 4,3600 | 4,2445 | 4,8949 | 4,7295 | 4,4666 | 4,0939 | 4,0077 | 3,9937 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,3400 | 0,1763 | 0,0841 | 0,3148 | 0,1705 | 0,0812 | 0,1846 | 0,1255 | 0,0932 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0520 | 0,0241 | 0,0111 | 0,0277 | 0,0161 | 0,0082 | 0,0292 | 0,0131 | 0,0076 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4293 | 0,3115 | 0,1700 | 1,2053 | 0,8501 | 0,4013 | 0,7359 | 0,5100 | 0,3527 |
| Erro de ajuste | 0,0016 | 0,0009 | 0,0004 | 0,0012 | 0,0007 | 0,0003 | 0,0012 | 0,0006 | 0,0003 |

Tabela 3.23: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3464 | 1,2917 | 1,2687 | 1,3437 | 1,2909 | 1,2697 | 1,1237 | 1,0773 | 1,0753 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9073 | 0,9166 | 0,9321 | 0,9515 | 0,9546 | 0,9655 | 0,9709 | 0,9843 | 0,9881 |
| $\hat{\beta}$ | 1,9360 | 1,9848 | 2,0071 | 2,0541 | 2,0751 | 2,0744 | 1,8014 | 1,8461 | 1,9042 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,2510 | 0,1894 | 0,1399 | 0,2506 | 0,1897 | 0,1399 | 0,6735 | 0,4845 | 0,2058 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0148 | 0,0102 | 0,0066 | 0,0077 | 0,0056 | 0,0034 | 0,0117 | 0,0060 | 0,0029 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,0540 | 0,0326 | 0,0236 | 0,0579 | 0,0471 | 0,0363 | 0,1570 | 0,1379 | 0,0959 |
| Erro de ajuste | 0,0038 | 0,0024 | 0,0015 | 0,0029 | 0,0018 | 0,0010 | 0,0033 | 0,0017 | 0,0009 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (1, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 1,3464 | 1,2917 | 1,2687 | 1,3437 | 1,2891 | 1,2687 | 1,0405 | 1,0781 | 1,0665 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,9073 | 0,9166 | 0,9321 | 0,9572 | 0,9597 | 0,9687 | 0,9714 | 0,9787 | 0,9881 |
| $\hat{\beta}$ | 3,8721 | 3,9696 | 4,0143 | 4,1162 | 4,1565 | 4,1686 | 3,6265 | 3,6721 | 3,7644 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 0,2510 | 0,1894 | 0,1399 | 0,2490 | 0,1870 | 0,1391 | 0,7484 | 0,5509 | 0,2699 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,0148 | 0,0102 | 0,0066 | 0,0074 | 0,0053 | 0,0032 | 0,0148 | 0,0071 | 0,0038 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,2158 | 0,1303 | 0,0945 | 0,2483 | 0,2007 | 0,1617 | 0,6214 | 0,5359 | 0,3826 |
| Erro de ajuste | 0,0152 | 0,0097 | 0,0060 | 0,0116 | 0,0069 | 0,0041 | 0,0160 | 0,0077 | 0,0043 |

Tabela 3.24: Simulações para os métodos: MM, MV via EM com momentos e FCE com momentos variando o parâmetro β

| Estimações | Momentos | | | EM com Momentos | | | FCE com Momentos | | |
|--|----------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------------------|--------|--------|
| | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 | 500 | 1000 | 2000 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 2)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 6,7824 | 6,8129 | 6,0218 | 6,7776 | 6,8080 | 6,0213 | 4,8178 | 4,8412 | 4,5679 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,4414 | 0,4422 | 0,5270 | 0,4410 | 0,4433 | 0,5325 | 0,8020 | 0,7756 | 0,8353 |
| $\hat{\beta}$ | 1,3784 | 1,4572 | 1,5607 | 1,3670 | 1,4578 | 1,5818 | 1,6576 | 1,8068 | 1,8596 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 14,3059 | 8,5739 | 4,1035 | 14,6290 | 8,6179 | 4,1111 | 2,8032 | 1,1016 | 0,5243 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,4934 | 0,3447 | 0,2427 | 0,4809 | 0,3424 | 0,2373 | 0,2507 | 0,1248 | 0,0797 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 0,4167 | 0,3046 | 0,1997 | 0,4190 | 0,3010 | 0,1862 | 0,2011 | 0,1025 | 0,0686 |
| Erro de ajuste | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |
| $(\lambda, \alpha, \beta) = (4, 1, 4)$ | | | | | | | | | |
| $\hat{\lambda}$ | 6,7824 | 6,8129 | 6,0218 | 6,7794 | 6,8080 | 6,0213 | 4,6919 | 4,7562 | 4,6084 |
| $\hat{\alpha}$ | 0,4414 | 0,4422 | 0,5270 | 0,4413 | 0,4441 | 0,5325 | 0,8344 | 0,7996 | 0,8279 |
| $\hat{\beta}$ | 2,7568 | 2,9145 | 3,1214 | 2,7436 | 2,9236 | 3,1679 | 3,3411 | 3,6724 | 3,7219 |
| $EQM(\hat{\lambda})$ | 14,3059 | 8,5739 | 4,1035 | 14,5284 | 8,5802 | 4,1111 | 2,9582 | 1,0860 | 0,6116 |
| $EQM(\hat{\alpha})$ | 0,4934 | 0,3447 | 0,2427 | 0,4844 | 0,3462 | 0,2378 | 0,2861 | 0,1228 | 0,0894 |
| $EQM(\hat{\beta})$ | 1,6667 | 1,2186 | 0,7987 | 1,6724 | 1,2040 | 0,7590 | 0,8861 | 0,4082 | 0,2750 |
| Erro de ajuste | 0,0012 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0012 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0004 | 0,0002 |

3.5 Aplicação

Para ilustrar a utilidade da distribuição CPTG, será utilizado um conjunto de dados reais, ao qual serão ajustadas diversas outras distribuições, além do modelo CPTG. A aplicação refere-se a uma imagem SAR (*Synthetic Aperture Radar* - SAR) extraída da imagem de *Foulum* (Dinamarca) e obtida pelo sensor EMISAR (Lee e Pottier, 2009), construído pelo *Electro Magnetics Institute* (EMI) na *Technical University of Denmark*.

O radar é um sensor ativo que transmite um sinal de energia eletromagnética, iluminando a superfície ou alvo e registra as respostas retornadas da superfície. Como um sensor ativo, os radares independem do sol e de suas condições e podem operar de dia ou de noite (Henderson *et al.*, 1998).

O sistema SAR trata-se de uma técnica de radar especial, que permite aos utilizadores obterem imagens de radar de alta resolução a grandes distâncias. Este sistema atua na faixa de microondas, e por isto, possuem algumas vantagens com relação aos sistemas óticos, como a independência à luz solar, e a fatores climáticos e maior penetração na cobertura vegetal da superfície observada. A desvantagem desse tipo de imagem ocorre com a presença do ruído *speckle* que é inerente ao seu processo de aquisição e gera um aspecto granuloso na imagem, dificultando a sua interpretação e análise. O aparecimento do *speckle* em tais imagens se deve à interferência coerente do sinal refletido a partir das muitas unidades elementares da área sob estudo. Isto é, quando um radar ilumina uma superfície áspera, o sinal retornado consiste de ondas refletidas pelos muitos elementos dentro de uma célula de resolução, denominados de *scatters*.

Um aspecto a ser considerado na aquisição de imagens é a polarização. A polarização descreve a orientação do campo elétrico de uma onda eletromagnética. Na captura de imagens PolSAR (*Polarimetric Synthetic Aperture Radar* - PolSAR), três canais são levados em consideração: a saber, HH (Horizontal-Horizontal), HV (Horizontal-Vertical) \approx VH (Vertical-Horizontal) e VV (Vertical-Vertical). As direções pulsos de onda emitidos e recebidos estão indicadas pela primeira e segunda letra. Por exemplo, a componente HV indica a transmissão de uma onda polarizada na horizontal e o recebimento da onda polarizada na vertical pelo radar (Mather e Tso, 2009).

O conjunto de dados apresentado na Tabela 3.25 é composto por 131 valores de intensidades referentes ao canal de polarização HH de uma imagem da região de *Foulum* (Dinamarca) [<https://earth.esa.int/web/polsarpro/airborne-data-sources>]. A descrição desses dados está representada na Tabela 3.26.

Podemos notar na Tabela 3.26 que a Mediana $<$ Média aponta que a curva da distribuição tem assimetria a direita, o que é confirmado pela assimetria positiva. O C_v aponta que os dados apresentam uma grande dispersão em torno da média levando indícios de um conjunto de dados heterogêneo. Já a curtose aponta para uma função de distribuição mais alta (afunilada) e concentrada que a distribuição normal. Diz-se desta função de probabilidade que é *leptocúrtica*, ou que a distribuição tem caudas pesadas.

Tabela 3.25: Conjunto de dados de Foulum

| | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0,01894287 | 0,01935418 | 0,02396332 | 0,02647153 | 0,02082554 | 0,01911615 |
| 0,02293175 | 0,03228633 | 0,03474018 | 0,03384829 | 0,02407404 | 0,02296903 |
| 0,02721631 | 0,03141554 | 0,03752478 | 0,02784315 | 0,04168270 | 0,04891223 |
| 0,02856023 | 0,02839673 | 0,03598676 | 0,04629390 | 0,05547253 | 0,05395810 |
| 0,03879451 | 0,02941171 | 0,02338895 | 0,02777823 | 0,04783208 | 0,03824020 |
| 0,03232158 | 0,03402714 | 0,05611064 | 0,07915612 | 0,03754972 | 0,03101604 |
| 0,03501506 | 0,03453897 | 0,05705985 | 0,05515739 | 0,04647379 | 0,06612180 |
| 0,05260086 | 0,02942552 | 0,03763689 | 0,05229843 | 0,06204657 | 0,08059592 |
| 0,05190274 | 0,02861129 | 0,04111884 | 0,06560329 | 0,06084920 | 0,03424702 |
| 0,02792585 | 0,04164984 | 0,05508701 | 0,09429808 | 0,09665179 | 0,08470160 |
| 0,08028217 | 0,05686707 | 0,04585500 | 0,04230256 | 0,03445653 | 0,04063699 |
| 0,04832320 | 0,06187658 | 0,06816631 | 0,05449910 | 0,05385335 | 0,04675854 |
| 0,02833025 | 0,01992964 | 0,02185369 | 0,02363688 | 0,02051137 | 0,02317232 |
| 0,02260664 | 0,02931118 | 0,02775543 | 0,01802599 | 0,01570864 | 0,01149687 |
| 0,01250427 | 0,01528162 | 0,02017052 | 0,02358412 | 0,02585229 | 0,03893850 |
| 0,04768521 | 0,07643031 | 0,05274564 | 0,02667463 | 0,03024757 | 0,03427167 |
| 0,04638059 | 0,08566783 | 0,10034920 | 0,07746060 | 0,07138552 | 0,05092829 |
| 0,10605280 | 0,12579180 | 0,09340851 | 0,07589816 | 0,04526951 | 0,06653712 |
| 0,06442861 | 0,03224484 | 0,04694617 | 0,03803634 | 0,02665159 | 0,02892729 |
| 0,03578667 | 0,05177016 | 0,04639203 | 0,05562469 | 0,06370583 | 0,05983544 |
| 0,05941767 | 0,04971199 | 0,04367883 | 0,04341392 | 0,03989288 | 0,04538165 |
| 0,04278920 | 0,06403044 | 0,12067840 | 0,10924980 | 0,05840242 | |

Tabela 3.26: Descrição do conjunto de dados de Foulum

| Média | Desvio Padrão | Mediana | Mínimo | Máximo | C_v | Assimetria | Curtose |
|---------|---------------|---------|---------|---------|---------|------------|---------|
| 0,04582 | 0,02293 | 0,04165 | 0,01150 | 0,12580 | 0,50045 | 1,16726 | 4,32383 |

Para esse conjunto de dados, comparamos o ajuste da distribuição CPTG aos ajustes de outras quatro distribuições alternativas, a saber: gama, Weibull, Weibull estendida (W.E) e Fréchet, cujas fdp's são dadas por:

- **Gama**

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} I_{(0,\infty)}(x), \quad \alpha > 0 \quad e \quad \beta > 0.$$

- Weibull

$$f(x) = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma\right] I_{(0,\infty)}(x), \quad \alpha > 0 \quad e \quad \gamma > 0.$$

- Weibull estendida

$$f(x) = \frac{\lambda\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma\right] I_{(0,\infty)}(x), \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0 \quad e \quad \lambda > 0.$$

- Fréchet

$$f(x) = \gamma\sigma^\gamma x^{-(\gamma+1)} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\gamma\right] I_{(0,\infty)}(x), \quad \sigma > 0 \quad e \quad \gamma > 0.$$

As estimativas de Máxima Verossimilhança (MV) para os parâmetros das distribuições gama e Weibull foram obtidas através da rotina `fitdistr()` do pacote `MASS` do `R`. Enquanto que para as distribuições Weibull estendida e Fréchet foi utilizada a função `goodness.fit()` do pacote `AdequacyModel` também presente na plataforma `R`.

A estimação dos parâmetros da distribuição CPTG foi feita pelo método MV via EM com momentos. Na Tabela 3.27 são listadas as estimativas dos modelos citados com os seus respectivos erros padrão (EP). Além disso, apresentamos ainda a média, o desvio padrão (DP) e o coeficiente de variação (CV) de cada modelo. Podemos notar através das Tabelas 3.26 e 3.27, que a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação estimados da CPTG são bem próximos dos valores empíricos.

Tabela 3.27: Parâmetros estimados ao conjunto de dados de Foulum

| Modelo | Parâmetro | Estimativa | EP | Média | DP | CV |
|---------|-----------|------------|---------|--------|--------|--------|
| CPTG | λ | 0,2812 | 0,1324 | | | |
| | α | 6,0389 | 1,3920 | 0,0458 | 0,0234 | 0,5111 |
| | β | 151,1882 | 30,9989 | | | |
| Gama | α | 4,4487 | 0,5304 | 0,0458 | 0,0217 | 0,4741 |
| | β | 97,0853 | 12,2529 | | | |
| Weibull | α | 0,0520 | 0,0022 | 0,0460 | 0,0226 | 0,4919 |
| | γ | 2,1397 | 0,1370 | | | |
| W.E | α | 0,1368 | 0,3094 | | | |
| | γ | 2,1389 | 0,1369 | 0,0460 | 0,0226 | 0,4921 |
| | λ | 7,9271 | 38,3625 | | | |
| Fréchet | γ | 2,0983 | 0,1322 | 0,0542 | 0,1355 | 2,4988 |
| | σ | 0,0320 | 0,0014 | | | |

Para verificar se o modelo proposto é apropriado, faremos uso de alguns critérios de seleção de modelos presentes na literatura, dentre eles: Critério de Informação de Akaike (AIC), Critério de Informação de Akaike corrigido (AICc) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC). Os mesmos satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} AIC &= -2 \log(L) + 2k. \\ AICc &= AIC + \frac{2k(k-1)}{(N-k-1)}. \\ BIC &= -2 \log(L) + k \log(N). \end{aligned}$$

em que $L(\theta; x)$ é a função de verossimilhança do modelo, k é o número de parâmetros e N é o número de observações. O modelo a ser selecionado (melhor modelo), é o que possuir menor AIC, AICc ou BIC. Outra estatística que utilizamos foi o teste *Kolmogorov-Smirnov* (KS)

O teste de *Kolmogorov-Smirnov* objetiva-se averiguar se uma amostra pode ser considerada como proveniente de uma população com uma determinada distribuição. Assim, consideremos as seguintes hipóteses: H_0 : Os dados seguem uma distribuição F x H_1 : Os dados não seguem uma distribuição F .

Este teste observa a máxima diferença absoluta entre a função de distribuição acumulada assumida para os dados, e a função de distribuição empírica dos dados. Como critério, comparamos esta diferença com um valor crítico, para um dado nível de significância. Considerando uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n de uma população com função de distribuição acumulada contínua F_X desconhecida. A estatística utilizada para o teste é:

$$D_n = \sup_x |F(x) - F_n(x)|$$

em que $F(x)$ e $F_n(x)$ representam a função acumulada e empírica dos dados. Esta função corresponde a distância máxima vertical entre os gráficos de $F(x)$ e $F_n(x)$ sobre a amplitude dos possíveis valores de x .

Neste caso, queremos testar a hipótese $F_X = F$ contra a hipótese alternativa $F_X \neq F$. Para isto, tomamos $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ as observações aleatórias ordenadas de forma crescente da população com função de distribuição contínua F_X . Como a função de distribuição empírica F_n é descontínua e a função de distribuição hipotética é contínua, vamos considerar duas outras estatísticas:

$$\begin{aligned} D^+ &= \sup_{x_{(i)}} |F(x_{(i)}) - F_n(x_{(i)})| \\ D^- &= \sup_{x_{(i)}} |F(x_{(i)}) - F_n(x_{(i-1)})| \end{aligned}$$

para calcularmos a estatística de *Kolmogorov-Smirnov*. Essas estatísticas medem as distâncias (vertical) entre os gráficos das duas funções, teórica e empírica, nos pontos $x_{(i-1)}$ e $x_{(i)}$. Com isso, podemos utilizar como estatística de teste:

$$D_n = \max(D^+, D^-)$$

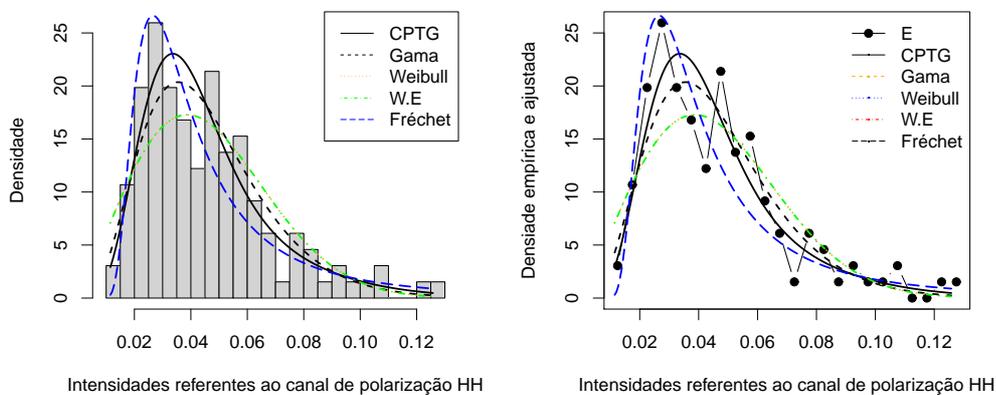
Se D_n é maior que o valor crítico, rejeitamos a hipótese H_0 dos dados com $(1 - \alpha)100\%$ de confiança. Caso contrário, não rejeitamos a hipótese H_0 .

Os resultados apresentados na Tabela 3.28 indicam que a distribuição CPTG tem os menores valores para AIC, AICc e KS entre todos os modelos ajustados, provendo, portanto, um melhor ajuste aos dados de Foulum. Na Figura 3.1 observa-se que para as diferentes distribuições ajustadas aos dados, a distribuição proposta apresenta um melhor ajuste se comparada a outros modelos probabilísticos alternativos. Portanto, esta análise mostra evidências que a distribuição CPTG é adequada para esses dados.

Tabela 3.28: Valores das estatísticas do AIC, AICc, BIC e KS para alguns modelos ajustados aos dados de Foulum

| Modelos | AIC | AICc | BIC | KS | |
|-------------|------------------|-----------------|------------------|---------------|---------------|
| | | | | Estatística | p -valor |
| CPTG | -649,3585 | -649,264 | -640,7329 | 0,0528 | 0,8588 |
| Gama | -648,2717 | -648,2405 | -642,5213 | 0,0576 | 0,7768 |
| Weibull | -635,7022 | -635,671 | -629,9518 | 0,0707 | 0,5296 |
| W.E | -633,7023 | -633,5133 | -625,0767 | 0,0709 | 0,5251 |
| Fréchet | -632,8965 | -632,8027 | -627,1461 | 0,0752 | 0,4484 |

Figura 3.1: Histograma e densidade empírica e ajustada referente aos dados de Foulum.



(a)

(b)

Fonte: Autoria própria.

Capítulo 4

Considerações Finais

Nesta dissertação, propomos uma nova distribuição denominada Composta Poisson-Truncada Gama (CPTG) e estudamos algumas de suas propriedades. No Capítulo 1, discutimos o avanço e a importância de se trabalhar com modelos de misturas. Vimos que estes modelos vêm sendo aplicados em diversas áreas do conhecimento.

No Capítulo 2, apresentamos a distribuição Composta N e, um caso particular da mesma, a distribuição Composta Poisson. Após o surgimento dessa família de distribuições, vimos que várias outras distribuições foram geradas. Além disso, apresentamos uma sub-família da distribuição Composta N que é a distribuição Composta Poisson-Truncada no zero. Posteriormente, apresentamos a distribuição que propomos, a Composta Poisson-Truncada Gama e, algumas de suas propriedades estatísticas, tais como: a função densidade de probabilidade, a função de risco, a função característica, a função geradora de momentos, as expressões tipo momentos e a função geradora de cumulante.

No Capítulo 3, fizemos um estudo teórico que embasa todos os métodos de estimação que utilizamos para o desenvolvimento desse trabalho. Deduzimos e discutimos (via simulação Monte Carlo) três métodos de estimação: estimação via momentos, MV via algoritmo EM e por minimização da função característica. Para o último procedimento de estimação, fornecemos evidências numéricas para o melhor intervalo de discretização do suporte da função característica para o caso da distribuição CPTG. Apresentamos ainda, toda descrição computacional dos métodos através dos Algoritmos 1-4.

Foi feito um estudo de simulação Monte Carlo para quantificar o desempenho dos três métodos de estimação proposto para os parâmetros da distribuição CPTG. As simulações foram feitas para pequenas e grandes amostra $N = (50, 100, 150)$ e $N = (500, 1000, 2000)$. Como critérios de comparação, utilizamos as medidas viés, erro quadrático médio (EQM) e erro de ajuste. Adotamos 1000 réplicas Monte Carlo. Para tal estudo, inicialmente fixamos α e β e variamos λ . Em seguida, fixamos λ e β e variamos α , e por último, fixamos λ e α e variamos β .

Foram feitos dois estudos de simulações. Primeiro, comparamos o método MV via EM e o método FCE com chute inicial igual ao valor verdadeiro do vetor de parâmetros. E percebemos, que tanto para pequenas quanto para grandes amostras, os dois métodos

convergir bem para o verdadeiro valor do parâmetro. Em senso comparativo, nota-se que o método MV via EM obteve melhor resultado do que o método FCE.

Quanto ao segundo estudo de simulação, foi utilizado o método dos momentos com chute inicial igual ao parâmetro verdadeiro, utilizamos as estimativas de momento como chute inicial para o MV via EM e FCE nas estimações do método MV via EM com momentos e FCE com momentos, respectivamente. Os vetores de parâmetros considerados foram os mesmos apresentados no primeiro estudo. Verifica-se tanto para pequenas quanto para grandes amostras, que no geral, o método MV via EM com momentos foi melhor do que os demais métodos.

Apresentamos uma aplicação a processamento de imagens SAR. Nesta aplicação, o modelo CPTG foi comparado com outros quatro modelos, gama, Weibull, Weibull estendida e Fréchet. Vimos através das medidas de bondade de ajuste consideradas, que o modelo CPTG superou os demais.

Portanto, a distribuição proposta pode ser muito flexível, embora seja definida em três parâmetros. Este último fato coloca o modelo CPTG em vantagem com respeito aos modelos de misturas usuais, sobre os quais o número de parâmetros aumenta com as distribuições misturadas. Este fato decorre do resultado de que a soma de gamas resulta na distribuição gama. Vimos também, que a função de risco pode assumir diferentes formas tais como: decrescente, forma unimodal ou bimodal e banheira invertida, com um longo intervalo constante. Logo, como trabalhos futuros, destacamos duas frentes, a saber: correção do viés dos estimadores da distribuição proposta; derivação de mais propriedades estatísticas para o modelo CPTG e de um modelo de regressão.

Finalmente, eu e meus orientadores agradecemos a Agência Espacial Europeia que tem distribuído softwares e fontes de conjuntos de dados na forma do software `Po1SARpro` (Polarimetric SAR Data Processing and Educational-Po1SARpro).

Referências

AL-AWADHI, S. A.; GHITANY, M. E. Statistical properties of Poisson-Lomax Distribution and its application to repeated accidents data. *Journal of Applied Statistical Science*, v.10, n.4, p. 365-372, 2001.

ARAÚJO, R. L. B. *Família Composta Poisson-Truncada: Propriedades e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) - Dissertação de Mestrado em Estatística, Universidade Federal de pernambuco, Recife, 2015.

BIRNBAUM, Z.; SAUNDERS, S. C. A statistical model for life-length of materials. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v.53, n.281, p. 151-160, 1958.

BLISS, C. I. Estimation of the mean and its error from incomplete Poisson distributions. *Connecticut Agricultural Experiment Station*, p. 1-12, 1948.

BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. *Introdução a inferência estatística*, SBM, v.2, 2001.

BOUGUILA, N.; ZIOU, D. A hybrid SEM algorithm for high-dimensional unsupervised learning using a finite generalized Dirichlet mixture. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v.15, n.9, p. 2657-2668, 2006.

BROWN, G. W.; FLOOD, M. M. Tumbler mortality. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v.42, n.240, p. 562-574, 1947.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Inferência estatística* - tradução da 2a edição norte americana, Centage Learning, 2010.

COHEN, A. C. Estimating the parameter in a conditional Poisson distribution. *Biometrics*, JSTOR, v.16, n.2, p. 203-211, 1960.

COJOCARU, I. G.; DORAY, L. G. Inference for the Generalized Normal Laplace Distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v.42, n.9, p. 1989-1997, 2013.

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. Análise de sobrevivência aplicada. *ABE-Projeto Fisher*, Edgard Blucher, 2006.

DELIGNON, Y.; PIECZYNSKI, W. Modeling non-Rayleigh speckle distribution in SAR images. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, IEEE, v.40, n.6, p. 1430-1435, 2002.

DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*, JSTOR, v.39, n.1, p. 1-38, 1977.

FEUERVERGER, A.; MCDUNNOUGH, P. On the efficiency of empirical characteristic function procedures. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, JSTOR, v.43, n.1, p.20-27, 1981.

FINE, T. L. *Probability and Probabilistic Reasoning for Electrical Engineering*, Prentice Hall, 2006.

HENDERSON, F. M.; LEWIS, A. J. Principles and applications of imaging radar. *Manual of remote sensing*, John Wiley & Sons, v.2, p. 1-6, 1998.

KARLIS, D.; XEKALAKI, E. Mixed Poisson Distributions. *International Statistical Review*, Wiley Online Library v.73, n.1, p. 35-58, 2005.

LEE, J. S.; POTTIER, E. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*, CRC press, 2009.

MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. [S.1.]: Edusp, 2006.

MARINHO, P. R. D.; PEREIRA, M. B.; Dias, C. R. B. AdequacyModel: Adequacy of probabilistic models and generation of pseudo-random numbers. *Biblioteca para linguagem de programação R*, 2012.

MATHER, P.; TSO, B. *Classification methods for remotely sensed data*, CRC press, 2009.

MCLACHLAN, G. J.; PEEL, D. *Finite mixture models*. New York: John Wiley & Sons, p. 419, 2000.

- MIGNOTTE, M. et al. Sonar image segmentation using an unsupervised hierarchical MRF model. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v.9, n.7, p. 1216-1231, 2000.
- MOORE, P. G. The estimation of the Poisson parameter from a truncated distribution. *Biometrika*, Biometrika Trust, v.39, n.3-4, p. 247-251, 1952.
- NASCIMENTO, A. D. C.; CINTRA, R. J.; FRERY, A. C. Hypothesis Testing in Speckled Data With Stochastic Distances. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v.48, n.1, p. 373-385, 2010.
- PARZEN, E. On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, JSTOR, v.33, p. 1065-1076, 1962.
- PAULSON, A. S.; HOLCOMB, E. W.; LEITCH, R. A. The estimation of the parameters of the stable laws. *Biometrika*, v.62, n.1, p.163-170, 1975.
- QUANDT, R. E.; RAMSEY, J. B. Estimating mixtures of normal distributions and switching regressions. *Journal of the American statistical Association*, Taylor & Francis, v.73, n.364, p. 730-738, 1978.
- ROUSSAS, G. G. *A course in mathematical statistics*. [S.1.]: Academic Press, 1997.
- TIPPETT, L. H. C. A modified method of counting particles. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, JSTOR, v. 13, p. 434-446, 1932.
- TRAN, K. C. Estimating mixtures of normal distributions via empirical characteristic function. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v.17, n.2, p.167-183, 1998.
- VARGAS, R. N. *Inferência Estocástica e Modelos de Mistura de Distribuições*. Dissertação (Mestrado) - Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.
- WILLMOT, G. E. On recursive evaluation of mixed Poisson probabilities and related quantities. *Scandinavian Actuarial Journal*, Taylor & Francis n.2, 114-133, 1993.
- WU, C. J. On the convergence properties of the EM algorithm. *The Annals of statistics*, JSTOR, v.11, n.1, p. 95-103, 1983.
- YANG, X.; KRISHNAN, S. M. Image segmentation using finite mixtures and spatial in-

formation. *Image and Vision Computing*, Elsevier, v.22, n.9, p. 735-745, 2004.

YANG, X.; LIU, J. Mixture density estimation with group membership functions. *Pattern Recognition Letters*, Elsevier, v.23, n.5, p. 501-512, 2002.

YU, J. Empirical characteristic function estimation and its applications. *Econometric Reviews*, Taylor & Francis, v.23, n.2, 2004.

ZUCCHINI, W.; MACDONALD, I. L. *Hidden Markov Models for Time Series: an introduction using R*. Londres: Chapman & Hall. p. 6, 2009.