



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Wilmer Yecid Córdoba Camacho

**CONFIGURAÇÕES DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES
MULTIBANDAS ARTIFICIALMENTE ENGENHEIRADOS**

Recife
2014

Wilmer Yecid Córdoba Camacho

**CONFIGURAÇÕES DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES
MULTIBANDAS ARTIFICIALMENTE ENGENHEIRADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física do Departamento de Física da Universidade
Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. José Albino Oliveira de Aguiar

Recife
2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB4-532

C796c Córdoba Camacho, Wilmer Yecid.
Configurações de Vórtices em supercondutores multibandas artificialmente engenheirados / Wilmer Yecid Córdoba Camacho. – Recife: O Autor, 2014.
88 f.: fig., tab.

Orientador: José Albino Oliveira de Aguiar.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2014.
Inclui referências.

1. Supercondutores. 2. Vórtices e aglomerados. I. Aguiar, José Albino de Oliveira (Orientador). II. Título.

537.623 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-17



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+ + 55 81) 2126-7640 / 2126-8449
<http://www.ufpe.br/ppg fisica> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Wilmer Yecid Córdoba Camacho

CONFIGURAÇÕES DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES MULTIBANDAS ARTIFICIALMENTE ENGENHEIRADOS

A Banca Examinadora composta pelos Professores José Albino Oliveira de Aguiar (Presidente e Orientador), Sérgio Wladimir da Silva Apolinário, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Edson Sardella, do Departamento de Física da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Campus Bauru, consideram o candidato:

(X) Aprovado

() Reprovado

() Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em catorze de agosto de dois mil e catorze.

Prof. José Albino Oliveira de Aguiar
Presidente e Orientador

Prof. Sérgio Wladimir da Silva Apolinário

Prof. Edson Sardella

*Dedico este trabalho a toda minha família.
Em especial a meus pais:
Ana Eufracia Camacho e José Amado Córdoba*

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante esta caminhada.

Agradecer a todas as pessoas que contribuíram para meu sucesso e para meu crescimento como pessoa. *"Sou o resultado da confiança e da força de cada um de vocês"*.

Agradecer ao Prof. Dr. José Albino Aguiar por seu apoio e confiança na orientação deste trabalho. Também agradeço ao Dr. Rogério Mendes da Silva, pois sem sua importante co-orientação desde o início deste trabalho de pesquisa até a sua conclusão final, esta dissertação não seria possível.

Agradeço aos professores do Departamento de Física da UFPE, em especial aos professores Fernando R. de Luna Parisio, Maurício Domingues Coutinho, Antônio Murilo Santos, Clécio Clemente e Arkady Shanenko pela importante contribuição que deram para minha formação acadêmica, através das disciplinas de pós-graduação.

Aos colegas de laboratório SuperLab e a todos os meus amigos da UFPE pelas boas conversas nas horas vagas, nas horas de comida no RU e pelos vários momentos de diversão que compartilhamos.

Aos meus amigos que têm estado sempre presentes na minha vida, especialmente a meu amigo e colega Alejandro quem foi a pessoa que sempre confie e que compartilhe muitos momentos agradáveis aqui no Recife, a todos meus amigos da comunidade Colombiana em Recife e algumas outras pessoas conhecidas no percurso do meu mestrado. A todos eles agradeço pelos muitos momentos de lazer e pelas longas e divertidas conversas que sempre tivemos, e pela companhia que me fizeram durante o tempo em que estive longe da minha casa.

À minha família, pelo apoio incondicional e confiança em todos os momentos principalmente no tempo meu mestrado, em especial a minha mãe Ana Eufracia meu pai José Córdoba, meus irmãos, meu sobrinho, tios, primos e cunhadas que, embora distantes, não deixaram de apoiar-me e incentivar-me para a conclusão deste trabalho.

Aos membros da banca professor Edson Sardella e Sérgio Apolinário pela leitura crítica desta tese, por comparecerem à minha defesa e por darem sugestões importantes para o aprimoramento deste trabalho.

Resumo

Desde a descoberta da supercondutividade em MgB2 tem havido muito interesse no estudo, tanto teórico como experimental, de materiais supercondutores com multibandas. Os estudos teóricos têm sido desenvolvidos utilizando principalmente a teoria de Ginzburg-Landau. Esses estudos revelaram que é possível observar configurações exóticas de vórtices, como por exemplo, vórtices não-compostos e vórtices fracionários.

Neste trabalho, utilizamos o modelo de Ginzburg-Landau de duas componentes e a formulação de Lawrence-Doniach como base para a simulação computacional de um supercondutor multibanda artificialmente engenheirado. O sistema estudado é composto por duas camadas supercondutoras mesoscópicas com geometria quadrada, uma do tipo-I e a outra do tipo-II, separadas por um material isolante. As camadas são ligadas entre si por acoplamentos Josephson e magnético, e encontram-se submetidas a um campo magnético estático externo aplicado perpendicularmente a elas.

Foram calculadas as configurações de vórtices e a magnetização do sistema em função do campo magnético aplicado, da temperatura, da intensidade do acoplamento entre camadas (bandas) e do tamanho do quadrado. Observa-se que, diferentemente de um quadrado mesoscópico com uma única banda, em baixas temperaturas os vórtices não se organizam em uma rede de Abrikosov, ao contrário, são formados aglomerados de vórtices e configurações que não acompanham a simetria do sistema. Atribui-se esse comportamento à interação entre vórtices, que neste caso pode assumir uma forma não-usual devido à competição entre as duas camadas (bandas) supercondutoras consideradas. Utilizando-se um procedimento de resfriamento com campo (FC, do inglês field cooling) observa-se que a temperatura é um parâmetro que controla a interação vórtice-vórtice. Para altas temperaturas e altas vorticidades, as configurações de vórtices têm como influências principais a simetria quadrada da amostra e a interação repulsiva entre vórtices. Já, para temperaturas baixas a interação entre vórtices torna-se não-monotônica sendo repulsiva em curto alcance e atrativa em longo alcance promovendo a formação de um estado de agregado de vórtices confinado pela geometria quadrada da amostra. Observa-se também que o aparecimento deste estado de aglomerado de vórtices depende da densidade de vórtices sendo que para baixas densidades ocorre um efeito de superfície que atrai os vórtices para as bordas da amostra. Para densidades intermediárias ocorre o estado de aglomerado

RESUMO

de vórtices e para altas densidades de vórtices observa-se uma tendência de formação de uma estrutura hexagonal para a rede de vórtices.

Palavras-chaves: Bicamada supercondutora. Lawrence-Doniach. Ginzburg-Landau. Vórtices. Interação não-monotônica. Aglomerados.

Abstract

Since the discovering of superconductivity in the MgB₂ compound, there has been a great theoretical and experimental interest on the properties of multiband superconductors. Most of theoretical studies are based on the Ginzburg-Landau theory and some of them predicts exotic vortex structures as non-composite and fractional vortex states.

In this work, within the two-component Ginzburg-Landau approach based on the Lawrence-Doniach model, we carried out computational simulations of an artificially engineered multiband superconductor. Our system comprises two square superconducting mesoscopic layers separated by a thin insulator. One layer is a type-I whereas the other layer is a type-II superconductor. The layers are coupled by Josephson and magnetic coupling and are immersed in a static magnetic field applied parallel to them.

The vortex configurations and the system magnetization were calculated as a function of the applied magnetic field, temperature, magnitude of Josephson coupling and the sample size. We found for low temperatures that, differently of a single-band type-II mesoscopic square, the vortex lattice is not organized in an Abrikosov lattice but in a vortex cluster that does not follow the sample geometry. This behavior is due to the vortex-vortex interaction that assumes a non-usual shape as a consequence of the competition between the two superconducting layers (bands) considered. By a field cooling (FC) procedure we observed that the temperature is a control parameter for the vortex-vortex interaction. For high temperatures and vorticities, the vortex configurations are strongly influenced by the sample square symmetry and the repulsive vortex-vortex interaction. For lower temperatures the non-monotonic vortex-vortex interaction, short-range repulsive and long-range attractive, promotes a vortex cluster state confined by the square sample geometry. The appearance of this vortex cluster phase depends on the vortex density: for low vortex density a surface effect takes place attracting the vortices to the sample borders, for moderate densities a vortex cluster arrangement is favored and, finally, for high densities there is a tendency to form an hexagonal vortex lattice.

Keywords: superconducting bilayers. Lawrence-Doniach. Ginzburg-Landau. Non-monotonic interaction. cluster.

Lista de Figuras

2.1	<i>Dependência da resistividade do Mercúrio com a temperatura encontrada por H.K. Onnes em 1911 [1].</i>	18
2.2	<i>Estado Meissner numa esfera supercondutora. (a) condutor perfeito, (b) amostra em estado supercondutor apantalhando o campo externo independente do camaninho.</i>	19
2.3	<i>Cronologia do descobrimento de materiais supercondutores e suas temperaturas críticas [2].</i>	21
2.4	<i>Comprimento de penetração de London.</i>	24
2.5	<i>Comportamento do parâmetro de ordem na interface metal normal/supercondutor.</i>	29
2.6	<i>Diagrama de fase $H - T$ para supercondutores volumétricos dos tipos I e II</i>	31
2.7	<i>Magnetização em função do campo magnético aplicado para supercondutores volumétricos dos tipos I e II</i>	31
2.8	<i>(a) Estrutura de um vórtice isolado mostrando o comportamento espacial do parâmetro de ordem. Em (b) temos a representação espacial da densidade de elétrons n_s e do campo interno $\mathbf{h}$ em um supercondutor.</i>	34
2.9	<i>Rede de vórtices de Abrikosov.</i>	38
2.10	<i>Rede bi-dimensional de um arranjo hexagonal de núcleo de vórtices prevista por Abrikosov obtida através da técnica de decoração de Bitter. [3]</i>	38
3.1	<i>Esquema da malha definindo as variáveis discretas.</i>	49
4.1	<i>Sistema de bicamada supercondutora considerado: duas camadas supercondutoras separadas por uma camada isolante na presença de um campo magnético externo aplicado na direção z.</i>	56
4.2	<i>Diagrama de fase $H_a \times T$ para o acoplamento $m_{\perp} = 15m_1$ para os tamanhos de amostras considerados nesta dissertação. As regiões com diferentes cores identificam o comportamento da amostra com o campo aplicado quando a temperatura é diminuída. A região de cor amarela indica o estado normal, a de cor rosa indica o estado de vórtice gigante, a de cor marrom indica os estados Vórtice-Antivórtice e a de cor laranja os estados com multivórtices.</i>	61

LISTA DE FIGURAS

- 4.3 *Densidade de pares de Cooper para cada uma das camadas supercondutoras da amostra. Acima está a camada I (supercondutor do tipo II), e abaixo está a camada II (supercondutor do tipo I).* 62
- 4.4 *Densidade de pares Cooper (em cima) e distribuição de fase (em baixo) para o estado com vorticidade $L = 3$ para uma amostra de $(25 \times 25)\xi_{10}^2$, (a) $T = 0.8T_{c1}$ e $H_a = 0.06H(0)_{c2,1}$, (b) $T = 0.88T_{c1}$ e $H_a = 0.06H(0)_{c2,1}$. Com respeito à fase, uma mudança de azul para vermelho em um caminho fechado indica uma variação de π para $-\pi$.* 64
- 4.5 *Evolução da estrutura de vórtices para o tamanho $(15 \times 15)\xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuimos a temperatura de $T = 0.5T_{c1}$ até $T_{min} = 0.1T_{c1}$, para 2, 6, 7, 9, 11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.11, 0.26, 0.31, 0.37, 0.44$, respectivamente.* 67
- 4.6 *Evolução da estrutura de vórtices para o tamanho $(20 \times 20)\xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuimos a temperatura de $T = 0.6T_{c1}$ até $T_{min} = 0.1T_{c1}$, para 2, 6, 7, 9, 11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.06, 0.15, 0.18, 0.21, 0.25$, respectivamente.* 68
- 4.7 *Evolução da estrutura de vórtices para tamanho $(25 \times 25)\xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuimos a temperatura de $T = 0.7T_{c1}$ até $T_{min} = 0.1T_{c1}$, para 2, 6, 7, 9, 11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.04, 0.1, 0.11, 0.14, 0.16$, respectivamente.* 69
- 4.8 *Evolução da estrutura de vórtices para o tamanho $(30 \times 30)\xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuimos a temperatura de $T = 0.7T_{c1}$ até $T_{min} = 0.1T_{c1}$, para 2, 6, 7, 9, 11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.03, 0.07, 0.074, 0.094, 0.11$, respectivamente.* 70
- 4.9 *Configurações para um, dois e três vórtices para as amostras A, B, C, D e E, mostrando a interação não-monotônica entre os vórtices para as amostras A, B e C enquanto que para D e E é observado uma atração dos vórtices pela superfície.* 71
- 4.10 *Relação da distância media com respeito à temperatura para as amostras A, B, C e D com $L = 2$ gráfico (a), $L = 3$ gráfico (b), $L = 4$ gráfico (c), $L = 6$ gráfico (d), $L = 7$ gráfico (e) e $L = 11$ gráfico (f), para o sistema bicamada.* 74

LISTA DE FIGURAS

- 4.11 *Evolução da estrutura de vórtices no supercondutor do tipo-II, para o tamanho $(20 \times 20)\xi^2$, quando aumentamos o campo aplicado (H_a), e diminuimos a temperatura, para 6, 7, 9, 11.* 76
- 4.12 *Evolução da estrutura de vórtices no supercondutor do tipo-II, para o tamanho $(30 \times 30)\xi^2$, quando aumentamos o campo aplicado (H_a), e diminuimos a temperatura, para 6, 7, 9, 11.* 77
- 4.13 *Relação da distância média entre vórtices com respeito à temperatura para as amostras (a) B e (b) D para um supercondutor do tipo II em um processo FC.* 78
- 4.14 *Cálculos de magnetização em função da temperatura para seis diferentes estados de vorticidade $L = 2, 3, 4, 6, 7$ e 11. Cada um dos gráficos corresponde a um valor de L . O campo magnético aplicado correspondente a cada curva é mostrado no canto superior único direito de cada painel.* 79
- 4.15 *Ajuste linear e parabólico (cor Azul) para a curva de Magnetização para $L = 4$ na amostra C, e comparação entre as curvas de Magnetização e Distância Média.* 80
- 4.16 *$M \times H_a$ para as amostras A, B, C e D, para temperaturas $T = 0.6, 0.42, 0.1$. No canto superior direito é mostrado uma aplicação da região perto de $H_a = 0$, onde fica evidente como varia a vorticidade de cada amostra em relação ao campo aplicado.* 81
- 4.17 *Evolução da estrutura de vórtices quando aumentamos $m_\perp$, ou seja, diminuimos o acoplamento eletrônico entre as camadas, para um campo magnético aplicado $H_a = 0.1H(0)_{c2,1}$; os painéis de (a)-(h) mostram a densidade dos pares de Cooper para a camada I (tipo II) para $m_\perp/m_1 = 1, 5, 11, 16, 21, 31, 41, 50$ respectivamente.* 82
- 4.18 *Evolução da estrutura de vórtices quando aumentamos $m_\perp$, ou seja, diminuimos o acoplamento eletrônico entre as camadas, para um campo magnético aplicado $H_a = 0.2H(0)_{c2,1}$; os painéis de (a)-(h) mostram a densidade dos pares de Cooper para a camada I (tipo II) para $m_\perp/m_1 = 1, 5, 11, 16, 21, 31, 41, 50$ respectivamente.* 83
- 4.19 *Evolução da estrutura de vórtices quando aumentamos $m_\perp$, ou seja, diminuimos o acoplamento eletrônico entre as camadas, para um campo magnético aplicado $H_a = 0.3H(0)_{c2,1}$; os painéis de (a)-(h) mostram a densidade dos pares de Cooper para a camada I (tipo II) para $m_\perp/m_1 = 1, 5, 11, 16, 21, 31, 41, 50$ respectivamente.* 83
- 4.20 *Variação da distância média entre os vórtices para três estados diferentes dentro da amostra $(30 \times 30)\xi_{10}^2$, para vários acoplamentos $m_1 \leq m_\perp \leq 50m_1$.* 84

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros característicos dos materiais utilizados nas simulações.	60
4.2	Faixas de temperatura para cada uma das amostras e valor do campo magnético onde se tem a presença de vórtices gigantes.	63
4.3	Faixa de temperaturas e valor do campo magnético para cada uma das amostras onde se tem a presença de estados vórtice-antivórtice.	65

Conteúdo

1	Introdução	15
2	Introdução à Supercondutividade	18
2.1	História da supercondutividade	18
2.2	Teoria de London	21
2.3	Teoria de Ginzburg-Landau	24
2.4	Comprimentos característicos	27
2.4.1	Comprimento de Coerência ξ	27
2.4.2	Comprimento de Penetração de London λ_L	29
2.4.3	O Parâmetro de Ginzburg-Landau κ	30
2.5	Tipos de supercondutores	30
2.6	Quantização de fluxo	32
2.7	Estado de vórtices	33
2.7.1	Energia de um vórtice	35
2.7.2	Interação entre vórtices	35
2.7.3	Vórtices em Supercondutores Macroscópicos	37
2.8	Supercondutividade Mesoscópica	38
2.9	Modelo de Lawrence-Doniach para supercondutores multicamadas	39
2.9.1	O limite anisotrópico de GL	40
2.9.2	Crossover para o comportamento bi-dimensional	41
3	Método das Variáveis de Ligação para as Equações Ginzburg-Landau (GL)	43
3.1	Dedução das equações de GL de equilíbrio	43
3.1.1	Condições de contorno para os casos mais gerais	46
3.2	Método das Variáveis de Ligação	47
3.2.1	Descrição do método para as equações GL	47
3.2.2	Discretização das equações GL	49
3.2.3	Condições de contorno	53
3.2.4	Expressões para a magnetização e a integral do fluxóide	54

CONTEÚDO

4	Sistema Bicamada tipo I/tipo II	55
4.1	Introdução	55
4.2	Descrição do sistema	55
4.3	Metologia (Detalhes da Simulação)	59
4.4	Resultados	60
4.4.1	Parte I	60
4.4.1.1	Diagramas de Fases	60
4.4.1.2	Comportamento da Magnetização	76
4.4.2	Parte II	82
4.4.2.1	Variação do acoplamento Josephson entre as camadas supercondutoras	82
5	Conclusões	85
	Referências	87

CAPÍTULO 1

Introdução

Um material supercondutor é aquele que apresenta, simultaneamente, duas propriedades: baixíssima resistência à passagem de corrente elétrica e diamagnetismo perfeito. No entanto, a existência da supercondutividade é restringida por três parâmetros principais: a temperatura crítica T_c , a corrente crítica I_c e o campo magnético crítico H_c . A partir disto, uma grande quantidade de trabalhos em pesquisa foi dirigida para um aprimoramento desses parâmetros críticos devido a sua importância em aplicações tecnológicas dos supercondutores. Uma consequência direta com respeito a estes parâmetros foi a recente descoberta de supercondutores de alta temperatura crítica, T_c , comumente conhecidos como HTS (do inglês *High Temperature Superconductor*), ou seja, materiais que retêm propriedades supercondutoras a temperaturas relativamente elevadas. A partir de então, houve um drástico ressurgimento do interesse em supercondutividade na física, ciência dos materiais, engenharia e em outras comunidades científicas em geral.

As características típicas de alguns supercondutores de alta T_c , bem como o interesse no desenvolvimento de novos dispositivos supercondutores, têm levado a uma grande atenção voltada às propriedades supercondutoras de sistemas com estrutura em camadas, que compreendem camadas alternadas de supercondutores (tipo-I ou tipo-II) e materiais não supercondutores, onde com respeito aos planos paralelos de cada camada, o material é isotrópico. No entanto, existe uma presença forte de anisotropia quando se compara as propriedades dos materiais em campo magnético externo e perpendicular. Pode-se consultar a referência [4] para informações de supercondutores organizados em camadas. Estes tipos de camadas, em princípio, encontram-se acopladas por tunelamento Josephson, sendo que este tipo de efeito Josephson em supercondutores possui diversas aplicações como, por exemplo, em dispositivos supercondutores de interferência quântica SQUID (do inglês *Superconducting Quantum Interference Device*), entre muitas outras.

Em princípio a estrutura em camadas da amostra supercondutora introduz efeitos importantes sobre a estrutura e o comportamento de vórtices magnéticos, os quais por sua vez podem influenciar fortemente as propriedades da amostra.

O modelo proposto por Ginzburg e Landau [5] tornou-se geralmente aceito como um mo-

delo macroscópico para a supercondutividade em supercondutores isotrópicos e homogêneos. No entanto, este modelo não pode explicar a anisotropia dos supercondutores em camadas. Em seu lugar, foram propostos modelos alternativos. Um deles é o modelo de Ginzburg-Landau anisotrópico, que é também referido como o modelo de massa efetiva. Neste modelo, o efeito macroscópico da estrutura em camadas é calculado separadamente, de modo que a natureza anisotrópica do material aparece apenas sob a forma de um tensor de massa com valores principais diferentes. O modelo em si é apenas uma ligeira variante do modelo de Ginzburg-Landau. Outro modelo para supercondutores em forma de camada é o modelo de Lawrence-Doniach introduzido em [6]; ver também [7], [8] e [9]. Neste modelo, a amostra é tratada como uma pilha de planos de supercondutores, cada par é separado por um material normal (não supercondutor). Além disso, este modelo assume que o acoplamento entre as camadas de supercondutores é semelhante ao que ocorre numa junção Josephson. Mais uma vez, pode-se consultar [8] e as referências aqui citadas para uma discussão completa destes modelos e a circunstância física necessária para a sua validade.

O presente trabalho foca num tipo de amostra com estrutura bicamada de dimensões mesoscópicas, onde combinamos dois supercondutores de diferentes tipo para cada camada, uma camada é do tipo-I e a outra camada do tipo-II encontrando-se separados por um material isolante que se encontra acoplado por tunelamento Josephson na presença de um campo magnético aplicado uniforme. O estudo destes tipos de sistemas podem ser tratados aplicando-se o modelo Lawrence-Doniach, em simulações computacionais.

Mostraremos aqui que o comportamento deste tipo de sistema bicamada depende do valor de campo externo aplicado, da força de acoplamento, da temperatura e do tamanho da amostra, sendo o comportamento da rede de vórtices diferente daquela observada em um supercondutor convencional mesoscópico. Encontramos por exemplo estados de aglomerados de vórtices formados por causa da interação não-monotônica entre os vórtices. Estes estados basicamente surgem devido à competição entre as camadas tipo-I e do tipo-II.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

No **Capítulo 2** realizamos a revisão de alguns fundamentos da supercondutividade partindo de um breve resumo histórico de como apareceu o fenômeno da supercondutividade até a descoberta atual dos chamados supercondutores de alta temperatura crítica. Revisamos também as teorias fenomenológicas que descrevem a supercondutividade e o modelo de Lawrence-Doniach que vai ser uma das bases para o desenvolvimento deste trabalho. Toda a parte exposta neste capítulo foi composta a partir de estudos realizados em diversos livros de supercondutividade, como o Tinkham [7] e o Ketterson&Song [9], além de dissertações de mestrado de outros pesquisadores na área ([10],[11],[12]).

No **capítulo 3** apresentamos as equações de Ginzburg-Landau para um supercondutor em

um campo magnético aplicado, além disso, apresentaremos estas equações em uma forma adimensional. Dentro deste capítulo introduzimos o método de integração numérica a ser utilizado neste trabalho.

No **capítulo 4** estudamos o sistema bicamada escolhido como problema desta dissertação, dando-lhe a respectiva análise teórica, expressando seu funcional conforme o modelo de Lawrence-Doniach, minimizando este funcional obtemos as equações para os parâmetros de ordem e o potencial vetor que serão integradas numericamente. Dentro deste capítulo encontraremos a metodologia escolhida para solucionar estas equações, discutiremos os detalhes das simulações numéricas que aqui foram utilizadas e, em seguida, apresentamos os diferentes resultados e suas respectivas discussões, para duas situações específicas: no primeiro problema observamos como é o comportamento da rede de vórtices quando temos o sistema bicamada em quatro tamanhos diferentes, em que para cada uma das amostras sofre um resfriamento com campo aplicado (processo *Field Cooling*), no segundo problema vamos ver como é o comportamento da rede de vórtices para a amostra de maior tamanho considerada quando fazemos uma mudança do valor de acoplamento entre as camadas.

No **capítulo 5** apresentamos as conclusões, considerações finais e perspectivas para a continuidade deste trabalho de pesquisa.

Introdução à Supercondutividade

2.1 História da supercondutividade

O estado supercondutor foi descoberto em Leiden, Holanda, em 1911 por Heike Kamerlingh Onnes, que foi o primeiro pesquisador a obter sucesso na liquefação do hélio em 1908, atingindo uma temperatura de aproximadamente 4 K. H.K. Onnes continuou seu trabalho pesquisando o comportamento de alguns materiais nessa faixa de temperatura, sendo que três anos depois, em 1911, descobriu que uma amostra de mercúrio apresentava resistividade elétrica nula para a temperatura de 4.2 K. Foi dessa forma que ocorreu a descoberta do primeiro supercondutor [1]. Esse resultado foi apresentado por Onnes em um artigo publicado em uma revista científica holandesa em Maio de 1911 e em 1912 recebeu, o prêmio Nobel da Física por este trabalho e pela liquefação do hélio.

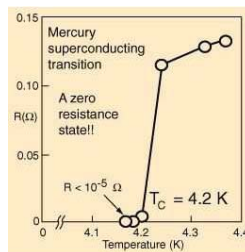


Figura 2.1 Dependência da resistividade do Mercúrio com a temperatura encontrada por H.K. Onnes em 1911 [1].

Na figura (2.1), vemos um de seus resultados publicados que mostra a resistência elétrica da amostra caindo abruptamente a níveis muito próximos de zero quando a temperatura, ao ser reduzida, chegava ao marco de 4.2 K. A caída abrupta é um indício da existência de uma transição de fase, além disso, à temperatura onde se apresenta este fenômeno é denominada de temperatura crítica, T_c .

Mais tarde Onnes encontrou resultados similares em outros materiais como o chumbo e o estanho assim como suas ligas, e em 1914 mostrou que é possível estabelecer uma corrente permanente num anel de chumbo no estado supercondutor. Neste experimento demonstrou que

a resistividade dos supercondutores diminui praticamente a zero e que ao não ter dissipação a corrente pode seguir circulando numa espira supercondutora por muito tempo. Atualmente sabemos que a corrente num anel supercondutor poderia manter-se sem mudanças durante 10^{10} anos [7].

Dos resultados obtidos é claro que para muitos materiais existe uma temperatura crítica (T_c), na qual ocorre uma transição de fase entre dois estados diferentes. Acima de T_c os materiais supercondutores se encontram no estado normal e apresentam resistência elétrica não-nula enquanto que abaixo de T_c aparece o estado supercondutor que não apresenta resistência elétrica. Ao ocorrer a transição de fase muitas grandezas termodinâmicas do sistema mudam abruptamente, como por exemplo, o calor específico.

Outro passo importante na compreensão das propriedades do estado supercondutor viria a ser publicada em 1933, por Walther Meissner e Robert Ochsenfeld [13]. Quando aplicado um campo magnético externo H_c em um supercondutor submetido a uma temperatura abaixo de T_c , se observava que a amostra comportava-se como um material diamagnético perfeito, independente do histórico magnético, ou seja, independente de se aplicar campo magnético antes ou posteriormente à variação de T . Em ambos os casos, o supercondutor comportava-se da mesma forma. Tal propriedade não era esperada considerando um condutor perfeito, pois neste caso, o efeito somente seria observado no caso do campo magnético ser aplicado após a redução da temperatura abaixo de T_c . Ao efeito de expulsão de campo magnético, ou seja, o comportamento diamagnético do supercondutor, chama-se efeito Meissner.

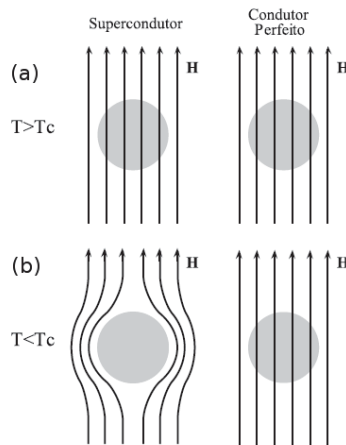


Figura 2.2 Estado Meissner numa esfera supercondutora. (a) condutor perfeito, (b) amostra em estado supercondutor apantalhando o campo externo independente do camaninho.

Um dos primeiros modelos que surgiram para explicar o fenômeno da supercondutividade foi o proposto pelos irmãos London [14] em 1935, que é conhecida como teoria London. Nesta

teoria considera-se o modelo simples de dois fluidos, a teoria descreve o efeito Meissner, provando a existência de um comprimento característico λ , que é conhecido hoje como comprimento de penetração de London, que descreve a espessura de penetração do campo magnético aplicado paralelamente à superfície do supercondutor. Muito embora a teoria conseguisse descrever o fenômeno, a mesma não era capaz de explicá-lo microscopicamente. Nos anos 1950 surgiu uma teoria fenomenológica mais formal que foi a proposta por Ginzburg e Landau [5], que nasceu a partir da teoria geral de Landau com respeito às transições de fase de segunda ordem, nesta teoria se introduz uma função de onda complexa que é conhecida como parâmetro de ordem, por sua natureza complexa, o valor deste parâmetro não possuía significado físico, no entanto, sua norma ao quadrado representa a densidade de elétrons supercondutores. Estas duas teorias que são chamadas de fenomenológicas vão ser descritas mais adiante.

Em 1957, Bardeen, Cooper e Schieffer propõem uma teoria microscópica para a supercondutividade, conhecida como teoria BCS, onde é assumida a formação de pares de elétrons ligados que carregam a supercorrente e a existência de um gap de energia entre os estados normal e supercondutor. Os resultados de Ginzburg e Landau são bem descritos no formalismo da teoria BCS [15]. No mesmo ano, utilizando a teoria de Ginzburg-Landau, Alexei A. Abrikosov mostrou que existe uma segunda classe de supercondutores denominados supercondutores do tipo II [16]. Em supercondutores do tipo II, quando um campo magnético suficientemente forte é aplicado no material, o supercondutor pode diminuir sua energia livre criando regiões normais em seu interior, permitindo a penetração de campo nessas regiões, ou seja, existe um novo estado de mínima energia onde o campo penetra na amostra em forma de filamentos de fluxo quantizado ou linhas de fluxo denominadas vórtices, assim o material perde as propriedades supercondutoras nas regiões onde existe penetração de fluxo e mantém a supercondutividade nas regiões remanentes. Como, para este caso, há coexistência de fases normais e supercondutoras, chamou-se este estado de estado misto.

A maior temperatura de transição de supercondutores não havia ultrapassado os 23.2 K, até que, em 1986, J. G. Bednors e K.A. Muller descobriram a presença de supercondutividade em materiais cerâmicos, com $T > 30\text{K}$ [17]. Seguindo essa descoberta foram encontrados em diversos materiais cerâmicos, temperaturas de transição elevadas, surgindo assim uma nova classificação dos agora conhecidos supercondutores HTS (High Temperature Superconductors). Esta descoberta levou Bednors e Muller a ganhar o premio Nobel de Física em 1987. Na figura (2.3) temos a evolução cronológica do descobrimento dos materiais HTS.

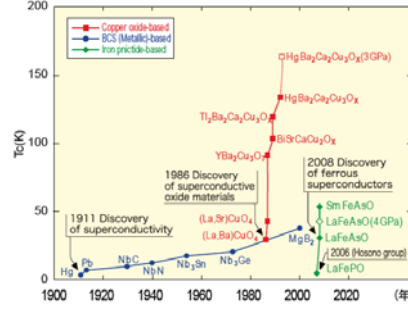


Figura 2.3 Cronologia do descobrimento de materiais supercondutores e suas temperaturas críticas [2].

2.2 Teoria de London

Os irmãos H. e F. London [14] propuseram uma teoria baseada em argumentos fenomenológicos para explicar as propriedades dos materiais supercondutores observadas experimentalmente. Inicialmente eles propuseram uma teoria que explicasse as duas principais propriedades dos supercondutores do tipo-I: o efeito Meissner e a indução magnética. A dedução original [10] desta teoria baseia-se no modelo de Drude-Lorentz para descrição do movimento dos elétrons em um metal. O modelo é equivalente à Lei de Newton para a velocidade $\mathbf{v}$ de um elétron de massa m e carga e na presença de um campo elétrico $\mathbf{E}$ com um arrastamento viscoso proporcional a $\frac{\mathbf{v}}{\tau}$,

$$m \left(\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v} \right) = e \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

Para um condutor perfeito, $\tau \rightarrow \infty$. Introduzindo a densidade de corrente $\mathbf{j} = n_s e \mathbf{v}$, onde n_s é a densidade de elétrons condutores, podemos reescrever a equação (2.1) como:

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) é conhecida como a primeira equação de London. Aplicando o rotacional a ambos os lados da equação (2.2), encontramos,

$$\frac{d}{dt} (\nabla \times \mathbf{j}_s) = \frac{n_s e^2}{m} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

e usando a lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{h}) = 0. \quad (2.5)$$

Esta notação é usual, e tem como objetivo ressaltar o fato de que a indução magnética varia rapidamente com a posição no interior de um material supercondutor. Juntando a equação (2.5) com a lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad (2.6)$$

obtem-se as condições que determinam os campos magnéticos e densidades de corrente num condutor perfeito. Estas condições são compatíveis com $\mathbf{h}$ arbitrário desde que independente do tempo, pois das equações (2.5) e (2.6) observamos que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{h}) = 0. \quad (2.7)$$

Este resultado, no entanto, não é satisfatório para descrever o efeito Meissner. Assim, é necessário restringir as soluções da equação (2.5) [ou (2.7)] somente àquelas em que, não apenas a derivada temporal, mas a própria expressão entre parênteses seja nula, pois não temos a existência de vórtices.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{h} = 0 \quad (2.8)$$

Esta é a mais importante das equações da teoria de London, e que caracteriza a eletrodinâmica dos supercondutores, diferenciando-os de hipotéticos condutores perfeitos. A escolha da solução representada pela equação (2.8) (também chamada de segunda equação de London) justifica-se simplesmente porque ela conduz ao efeito Meissner. Também podemos escrever:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{h} = 0, \quad (2.9)$$

onde foi usada a igualdade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = -\nabla^2 \mathbf{h} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$. Como o divergente de $\mathbf{h}$ é nulo, pela lei de Gauss do magnetismo, a equação (2.9) é simplificada como

$$\nabla^2 \mathbf{h} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{h}, \quad (2.10)$$

onde

$$\lambda_L = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.11)$$

é chamado de comprimento de penetração de London, o qual se constitui num dos parâmetros característicos mais importantes do estado supercondutor.

Uma derivação alternativa da equação (2.10) é motivada pela ideia de que o movimento dos elétrons comporta-se coletivamente como um superfluido [10]. Foi assim que os irmãos London fizeram uma outra proposta baseada num modelo de dois fluidos, onde um deles se

comporta como um material sem viscosidade, e o outro como um material viscoso. Assume-se que a energia livre do sistema possui três componentes:

$$F = F_N + E_{kin} + E_{mag}, \quad (2.12)$$

onde F_N é a energia associada ao estado normal, E_{kin} é a energia cinética associada ao movimento do superfluido e E_{mag} é a energia associada ao campo magnético.

Podemos escrever as duas últimas contribuições energéticas como:

$$E_{mag} = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r, \quad (2.13)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}^2 d^3r, \quad (2.14)$$

onde $\rho(\mathbf{r})$ é a densidade de massa do superfluido. Escrevendo $\rho = nm$, $\mathbf{v} = \frac{1}{ne}\mathbf{j}$, e usando a lei de Ampère (2.6), podemos reescrever a equação (2.14) na seguinte forma:

$$E_{kin} = \frac{1}{8\pi} \int \frac{mc^2}{4\pi ne^2} |\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r, \quad (2.15)$$

onde n agora é interpretada como a densidade de super-eléctrons, n_s . A expressão total para a energia livre do sistema torna-se:

$$F = F_N + \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r + \frac{1}{8\pi} \int \lambda_L^2 |\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})|^2 d^3r. \quad (2.16)$$

Os elétrons supercondutores ajustam seu movimento de forma a minimizar a energia livre total. Usando cálculo variacional para minimizar a energia total, precisamos solucionar a equação $\delta(E_{kin} + E_{mag}) = 0$. Obtemos então:

$$\delta F = \int \{ \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \lambda_L^2 (\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{h}(\mathbf{r})) \} d^3r = 0. \quad (2.17)$$

Integrando o segundo termo por partes, obtemos:

$$\int (\mathbf{h}(\mathbf{r}) + \lambda_L^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r})) \cdot \delta \mathbf{h}(\mathbf{r}) d^3r = 0. \quad (2.18)$$

Como a variação $\delta \mathbf{h}$ é arbitrária, temos que o argumento da integral precisa ser nulo, obtendo assim a equação de London que foi a mesma deduzida anteriormente (2.8),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{h} = 0. \quad (2.19)$$

Consideraremos um supercondutor semi-infinito como referencial, adotando que para $x > 0$ o material supercondutor e para $x < 0$ o vácuo, onde se aplica um campo magnético externo

na direção $\hat{z}$. Levando em conta estas considerações na equação (2.19), este problema torna-se unidimensional e a equação adquire a forma:

$$\frac{d^2 h_z}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} h_z = 0. \quad (2.20)$$

A solução desta equação pode ser facilmente obtida:

$$h(x) = h_0 \exp^{-x/\lambda_L} \hat{z}. \quad (2.21)$$

Observa-se que a penetração de campo magnético superficial no supercondutor decai exponencialmente com relação ao comprimento de penetração λ_L , ou seja, o campo magnético local decai significativamente a uma distância equivalente a λ_L , como se observa na figura (2.4).

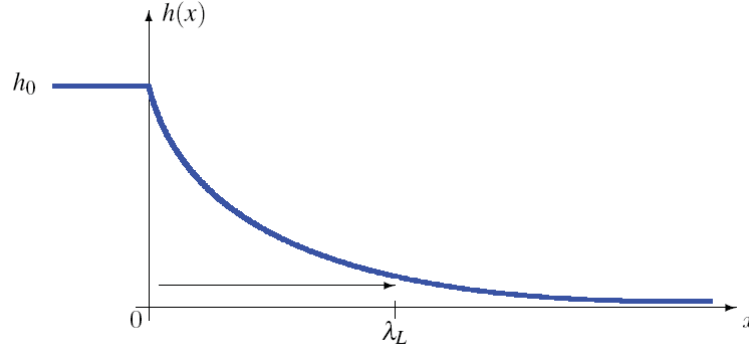


Figura 2.4 Comprimento de penetração de London.

2.3 Teoria de Ginzburg-Landau

A Teoria de Ginzburg-Landau (GL) da supercondutividade foi desenvolvida como uma extensão da teoria de Landau para transição de fase de segunda ordem para supercondutores, em 1950 [5]. Esta teoria descreve a energia livre de transição supercondutor/normal através de um parâmetro de ordem, denotado por ψ . No estado normal, acima da temperatura crítica do supercondutor, ψ é zero, enquanto que no estado supercondutor, abaixo da temperatura crítica, ψ é diferente de zero. Portanto presume-se que:

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{se } T > T_c. \\ \neq 0, & \text{se } T < T_c. \end{cases} \quad (2.22)$$

Ginzburg-Landau postularam que o parâmetro de ordem deveria ser uma função complexa, análoga uma função de onda macroscópica para o supercondutor, em que $|\psi|^2$ representa a densidade local dos elétrons superconductores n_s (pares de Cooper).

A energia livre associada ao estado supercondutor, próxima da transição de fase, que ocorre à temperatura crítica T_c , pode ser expressa em termos de uma expansão em potências do parâmetro de ordem o qual é pequeno na transição supercondutor/normal. Portanto, a teoria está baseada em uma expansão da energia livre em potências do parâmetro de ordem. Como o parâmetro de ordem pode ser complexo, apenas a forma $\psi^* \psi = |\psi|^2$ deve entrar na expressão da energia livre. Assim podemos escrever a energia livre supercondutora, F_s , da seguinte forma:

$$F_s = F_N + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) pode ser interpretada como a expansão da densidade de energia livre em potências de $|\psi|^2$ para um supercondutor homogêneo próximo da temperatura crítica e na ausência de campo magnético, $T_{c0} = T_c(H_0 = 0)$; F_N é a densidade de energia livre do supercondutor no estado normal: α e β são coeficientes fenomenológicos da expansão que dependem do material. O coeficiente α é negativo para $T < T_{c0}$ e depende da temperatura de tal modo que $\alpha \propto (T - T_c)$. Já o coeficiente β não depende de outros parâmetros físicos.

Na equação (2.23) a densidade de pares de Cooper corresponde ao mínimo de energia livre à temperatura T_{c0} e pode ser encontrada com a minimização da energia livre tal como mostraremos a seguir.

Da equação (2.23) podemos escrever,

$$(2\alpha|\psi| + 2\beta|\psi|^3)\delta|\psi| = 0. \quad (2.24)$$

Com $\delta|\psi|$ sendo uma variação arbitrária, podemos escrever:

$$2\alpha|\psi| + 2\beta|\psi|^3 = 0. \quad (2.25)$$

A equação (2.25) nos leva a

$$|\psi|^2 = \frac{-\alpha}{\beta}. \quad (2.26)$$

Portanto, considerando a equação (2.26) podemos escrever a densidade dos pares de Cooper como:

$$\begin{cases} |\psi_0| = 0, & T \geq T_{c0}, \\ |\psi_0|^2 = \frac{-\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{\beta}, & T < T_{c0}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Para descrever situações onde o estado supercondutor é heterogêneo devemos considerar $\psi = \psi(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{r}$ designa posição e integrar em todo o volume da amostra supercondutora.

Assim a expressão da energia livre torna-se:

$$F_S = F_N + \int_V \left\{ \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\mathbf{r})|^4 \right\}. \quad (2.28)$$

Porém, na equação da energia total não está presente a energia cinética associada à velocidade dos pares de Cooper. Para incluir tal energia, Ginzburg e Landau adicionaram o seguinte termo:

$$\int_V \frac{1}{2m^*} |-i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r})|^2 d^3r = \int_V \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 d^3r, \quad (2.29)$$

onde, $m^* = 2m_e$, m_e é a massa do elétron. A escolha do coeficiente $\frac{\hbar^2}{2m^*}$ torna a equação (2.29) parecida com a energia cinética em mecânica quântica. Para uma partícula carregada, com carga $e^* = 2e$, em um campo magnético com potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ o operador densidade de momento linear deve ser modificado como mostra a equação a seguir:

$$-i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} = -i\hbar \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right). \quad (2.30)$$

Incorporando esta modificação obtemos:

$$\int_V \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 d^3r = \int_V \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 d^3r. \quad (2.31)$$

Esta equação representa a energia cinética dos elétrons supercondutores ou pares de Cooper. A energia magnética está representada pela seguinte relação:

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{h}^2 d^3r = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 d^3r \quad (2.32)$$

Combinando as contribuições da energia cinética, equação (2.31), da energia magnética, equação (2.32), e do condensado, equação (2.28), obtemos finalmente a expressão da energia livre na teoria de Ginzburg-Landau:

$$F_S = F_N + \int_V \left\{ \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \right\} d^3r. \quad (2.33)$$

A integração é efetuada em todo o espaço ocupado pela amostra, e F_S é funcional de $\psi(\mathbf{r})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Utilizando o método variacional, realizando expansões no complexo conjugado do parâmetro de ordem $\psi^* \rightarrow \psi^* + \delta\psi^*$ e no potencial vetor $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$, onde $\delta\psi^*$ e $\mathbf{A}$ são

infinitesimais, inserindo estas expansões na densidade de energia livre da equação (2.33), desprezando os termos de segunda ordem ou maiores em $\delta\psi^*$ e $\delta\mathbf{A}$ obtemos um sistema de duas equações diferenciais acopladas para ψ e $\mathbf{A}$, que são as chamadas equações de GL. Temos que:

$$\alpha\psi(\mathbf{r}) + \beta|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(-\nabla + \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{J}_S = -\frac{ie^*\hbar}{2m^*c} (\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})) + \frac{e^{*2}}{m^*c^2} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (2.35)$$

O parâmetro de ordem obedece a seguinte condição de contorno a qual é associada ao caso em que o supercondutor está imerso em um meio isolante ou no vácuo:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\left(-i\nabla - \frac{e^*}{c\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right] = 0, \quad (2.36)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor normal em cada uma das superfícies do material. A expressão acima implica que nenhuma supercorrente pode passar através da fronteira da amostra.

As equações de GL foram obtidas sobre a base de argumentos termodinâmicos e tem similaridades com as equações mecânico quânticas. A equação (2.34) tem a forma da equação de Schrödinger com o autovalor de energia dado por $-\alpha$ e o termo $\beta|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r})$ atua como um potencial repulsivo. A equação (2.35) é a descrição mecânico quânticas da corrente supercondutora, onde $\mathbf{J}_S$ é a supercorrente induzida no supercondutor pelo campo aplicado. Observe que, assumindo $|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r})$ independente de $\mathbf{r}$ pode-se recuperar a teoria de London.

A condição de contorno para o potencial vetor $\mathbf{A}$ é aquela em que o campo magnético local muito distante da interface supercondutor/vácuo é igual ao campo magnético aplicado,

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_a \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.37)$$

2.4 Comprimentos característicos

Existem dois comprimentos característicos¹, no contexto da teoria GL. O primeiro, chamado comprimento de coerência ξ é uma medida que caracteriza a variação espacial do parâmetro de ordem no interior do vórtice. O segundo é definido como o comprimento de penetração de London λ e mede a variação espacial do campo magnético dentro do supercondutor.

2.4.1 Comprimento de Coerência ξ

Consideremos um caso simples de um supercondutor na ausência de campo magnético aplicado. Porém, introduzimos uma inhomogeneidade no parâmetro de ordem próxima aos

¹ver referencias [12] e [11]

contornos deste. Considerando somente um supercondutor em $x > 0$, cuja fronteira situa-se exatamente no plano yz , na ausência de campo magnético, isto é, $\mathbf{A} = 0$, a primeira equação de GL (2.34) resume-se a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0. \quad (2.38)$$

No estado supercondutor, α é negativo. Podemos escrever $\alpha = -|\alpha|$. Substituindo na equação acima temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} - |\alpha|\psi + \beta\psi^3 = 0. \quad (2.39)$$

Introduzindo a mudança de variável: $\psi^2 = \frac{|\alpha|}{\beta} f^2$, de onde obtemos que:

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0. \quad (2.40)$$

O coeficiente da segunda derivada tem unidades de quadrado de comprimento e é definido por:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}, \quad (2.41)$$

o qual é conhecido como comprimento de coerência.

Em nossa análise, é importante lembrar que estamos trabalhando com um supercondutor semi-infinito, conforme descrito no início desta seção. Portanto, podemos admitir como condição de contorno que, para $x \rightarrow \infty$, temos $f^2 = 1$, pois no ponto longe da fronteira a amostra é totalmente supercondutora. Também podemos considerar que $f' = 0$ para $x \rightarrow \infty$.

Multiplicando a equação (2.40) por f' , e integrando o resultado e em seguida derivando em relação a x , obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{\xi^2 (f')^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} \right] = 0, \quad (2.42)$$

de onde encontramos que:

$$\xi^2 (f')^2 = \frac{1}{2} (1 - f^2)^2, \quad (2.43)$$

cujas solução é dada por:

$$f = \operatorname{arctanh} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right). \quad (2.44)$$

A figura (2.5) ilustra o comportamento desta função. Podemos ver facilmente que o parâmetro de ordem varia na superfície do supercondutor ao longo da distância ξ até tornar-se praticamente constante.

Uma vez que $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$, ou ainda, $\alpha(T) = -\alpha_0 T_c (1 - T/T_c)$, substituindo na relação do comprimento de coerência, obtemos uma relação dependente da temperatura:

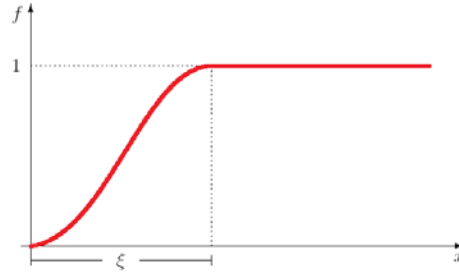


Figura 2.5 Comportamento do parâmetro de ordem na interface metal normal/supercondutor.

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha_0 T_c}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = \xi(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}. \quad (2.45)$$

2.4.2 Comprimento de Penetração de London λ_L

Em segundo lugar, consideramos a situação distinta da anterior onde o supercondutor encontra-se na presença de um campo magnético aplicado, onde este campo magnético é pequeno e não produz variações do parâmetro de ordem. Assim, pode-se considerar a segunda equação de GL (2.35) na forma,

$$\mathbf{J}_S = -\frac{(e^*)^2}{m^*c} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.46)$$

Substituindo esta equação na lei de Ampère, $\nabla \times \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_S$, obtemos,

$$\frac{m^*c^2\beta}{4\pi(e^*)^2|\alpha|} \nabla \times \mathbf{h} + \mathbf{A} = 0. \quad (2.47)$$

Aplicando o rotacional a ambos os lados da equação acima obtemos a equação de London:

$$\lambda_L^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \mathbf{h} = 0, \quad (2.48)$$

onde agora o comprimento de penetração de London depende da temperatura, e é dado por:

$$\lambda_L^2 = \frac{m^*c^2\beta}{4\pi(e^*)^2|\alpha|}. \quad (2.49)$$

Assim, para campos fracos, a teoria de Ginzburg-Landau se reduz à teoria de London. No regime de campos aplicados fortes, a função ψ , em geral, não é mais constante em todo o espaço. Ao contrário, depende das coordenadas espaciais e da intensidade do campo aplicado.

A dependência da temperatura novamente se dá através de α . Assim, o comprimento de penetração de London, assume a forma:

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{m^* c^2 \beta}{4\pi(e^*)^2 \alpha_0 T_c}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = \lambda(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}. \quad (2.50)$$

2.4.3 O Parâmetro de Ginzburg-Landau κ

O parâmetro de Ginzburg-Landau, κ , é definido como sendo a razão entre os comprimentos fundamentais λ_L e ξ ,

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi} = \frac{m^* c}{e^* \hbar} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}. \quad (2.51)$$

Embora os comprimentos fundamentais dependam da temperatura, κ não depende. Além disso, este parâmetro é de fundamental importância na classificação dos supercondutores, que será discutida mais adiante.

2.5 Tipos de supercondutores

Os supercondutores são geralmente classificados como sendo do tipo I ou tipo II. Esta distinção é baseada em seu comportamento com o campo magnético aplicado.

Para explicar isso, consideramos um cilindro longo imerso em um campo magnético paralelo. Quando este é feito de um material de tipo I, o campo vai ser completamente expelido até que o campo aplicado exceda algum valor H_c crítico, em que a supercondutividade é destruída. Isto acontece através de uma transição de fase de primeira ordem. Em contraste, quando o material é do tipo II, a expulsão total persiste até um campo crítico H_{c1} , quando uma pequena quantidade de fluxo magnético entra no supercondutor em forma de vórtices, e a supercondutividade sobrevive em toda parte, exceto no interior dos núcleos dos vórtices. Aumentado o campo magnético, gradualmente mais vórtices continuam entrando, até que o campo aplicado alcance o valor do campo crítico superior, H_{c2} para o qual a supercondutividade é destruída. Há ainda um terceiro campo crítico H_{c3} , que ocorre em uma fina camada de largura λ próxima à superfície do supercondutor. Neste intervalo de campo, $H_{c2} < H < H_{c3}$, permanecem correntes supercondutoras na superfície da amostra, ainda que a rede de vórtices tenha sido destruída no interior do supercondutor. Estas fases podem ser vista no diagrama representado na figura (2.6).

Ambos os tipos de supercondutores também têm diferenças no comportamento da magnetização como função do campo externo. A magnetização de um supercondutor está definida como $4\pi\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mathbf{H}_a$, onde $\mathbf{B} = \langle \mathbf{h} \rangle$. Como já vimos anteriormente, para $H < H_c$, o

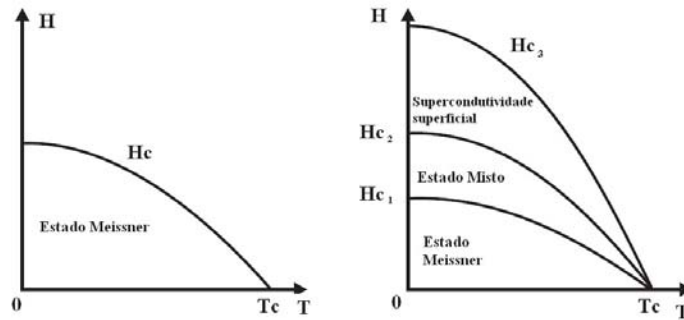


Figura 2.6 Diagrama de fase $H - T$ para supercondutores volumétricos dos tipos I e II

supercondutor está no estado Meissner e todo o fluxo magnético é expelido de seu interior, $B = 0$ e $-4\pi M = H_a$. Para altos campos o supercondutor está no estado normal, $B = H_a$ e $M = 0$. Os supercondutores do tipo II permanecem no estado Meissner até $H = H_{c1}$. Na região $H_{c1} < H < H_{c2}$ a magnetização M diminui à medida que o campo aumenta até chegar a zero em H_{c2} . Este comportamento pode ser observado na figura (2.7).



Figura 2.7 Magnetização em função do campo magnético aplicado para supercondutores volumétricos dos tipos I e II

No contexto da teoria GL, a distinção entre os dois tipos de supercondutores é simplesmente determinada pelo valor de κ . Quando $\kappa < 1/\sqrt{2}$ o material supercondutor é do tipo I e quando $\kappa > 1/\sqrt{2}$ é do tipo II. Além disso, a energia de interface de um supercondutor/metal normal é positiva para um supercondutor do tipo-I, e negativa para um supercondutor do tipo-II.

Todos os campos críticos podem ser expressos em termos das escalas de comprimento fundamentais da teoria GL. O campo em que um supercondutor tipo I abruptamente torna-se material normal é dado por:

$$H_c = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda\xi}, \quad (2.52)$$

o qual é chamado de campo crítico termodinâmico, pois corresponde a uma densidade de energia igual à densidade de energia de condensação do estado supercondutor, na ausência de um campo magnético.

No caso dos supercondutores do tipo II, o estado Meissner existe somente para campos menores que um valor crítico $H_{c1} < H_c$, onde,

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}. \quad (2.53)$$

Acima deste campo, o fluxo magnético consegue penetrar parcialmente no supercondutor na forma de vórtices. Quanto mais intenso o campo, mais vórtices conseguem penetrar o supercondutor, até que o campo atinge o valor do campo crítico superior,

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2}. \quad (2.54)$$

Acima deste valor existe uma porção da superfície de espessura ξ onde a supercondutividade sobrevive até um valor de campo H_{c3} . O terceiro campo crítico H_{c3} , o campo crítico termodinâmico H_c e o campo crítico superior H_{c2} estão relacionados por [9]:

$$H_{c3} = 2.4\kappa H_c = 1.69H_{c2}. \quad (2.55)$$

2.6 Quantização de fluxo

A quantização do fluxo garante que este no interior da amostra seja sempre um múltiplo inteiro de um quantum de fluxo. A condição de quantização de fluxo magnético pode ser facilmente obtida por meio da segunda equação de Ginzburg-Landau (2.35). Se introduzirmos o parâmetro de ordem na forma $\psi = |\psi|e^{i\phi}$, onde $|\psi|$ representa a magnitude e ϕ a fase do parâmetro de ordem, temos que a supercorrente pode ser escrita como:

$$\mathbf{J}_S = \frac{e^*\hbar}{m^*} |\psi|^2 \nabla\phi - \frac{(e^*)^2}{m^*c} \mathbf{A} |\psi|^2, \quad (2.56)$$

a qual também podemos escrever como:

$$\mathbf{A} = \frac{c\hbar}{e^*} \nabla\phi - \frac{m^*c\mathbf{J}_S}{(e^*)^2 |\psi|^2}. \quad (2.57)$$

Integrando a equação acima em um caminho fechado C , o qual limita uma superfície bilateral S , pelo teorema de Stokes, temos que:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \Phi, \quad (2.58)$$

$$\frac{\hbar c}{e^*} \oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} - \frac{m^* c}{(e^*)^2} \oint_C \frac{\mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{r}}{|\psi|^2} = \Phi. \quad (2.59)$$

Uma vez que o módulo do parâmetro de ordem é uma função unívoca, a fase então deve mudar em múltiplos de 2π a cada volta no contorno fechado. Assim:

$$\oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n, \quad (2.60)$$

e, conseqüentemente:

$$\Phi + \frac{m^* c}{(e^*)^2} \oint_C \frac{\mathbf{J}_s}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{r} = n\Phi_0. \quad (2.61)$$

A equação expressa a condição de que o fluxo penetrado e a integral de linha envolvendo a densidade de corrente é quantizada. Para supercondutores macroscópicos, de dimensões muito maiores que o comprimento λ , $d \gg \lambda$, então o segundo membro da relação (2.61) é desprezível, pois podemos considerar $\mathbf{J}_s = 0$ ao longo de C , assim, temos que:

$$\Phi = n \frac{\hbar c}{e^*} = n\Phi_0, \quad (2.62)$$

onde Φ_0 representa um quantum de fluxo, e n pode ser chamado de número quântico de fluxo, determinando o número de quanta de fluxo que atravessam uma determinada área. A quantização do fluxo magnético permite a medida precisa de campos magnéticos e suas variações através da contagem de quanta de fluxo magnético em SQUIDS.

2.7 Estado de vórtices

Em supercondutores tipo II, na região entre H_{c1} e H_{c2} chamada de estado misto, o campo penetra gradualmente o interior do material na forma de linhas de fluxo magnético. Devido às propriedades diamagnéticas ocorre a formação de um vórtice de supercorrentes em torno de cada uma dessas linhas de campo, concentrando o fluxo no seu interior e isolando-o do resto do material. Devido à presença do campo, o interior do vórtice é normal (não-supercondutor) e as outras regiões do material permanecem com as suas propriedades supercondutoras normais. Dessa forma, em cada vórtice existe uma interface entre uma região normal e outra supercondutora. Este panorama está esquematizado na figura (2.8). Nesta figura observa-se que o fluxo magnético no interior do vórtice decai gradualmente na direção radial até se anular, enquanto a densidade de elétrons supercondutores aumenta também a partir do interior mas bem mais rapidamente. A região normal no interior do vórtice possui um raio de ξ e a região onde o campo decai possui o raio de λ que é tomado como o próprio raio do vórtice. O fluxo magnético de cada vórtice é quantizado, e o quantum de fluxo é dado por $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{e^*}$. Este fluxo é garantido por correntes circulando ao seu redor que, naturalmente, decaem em um comprimento característico igual a λ .

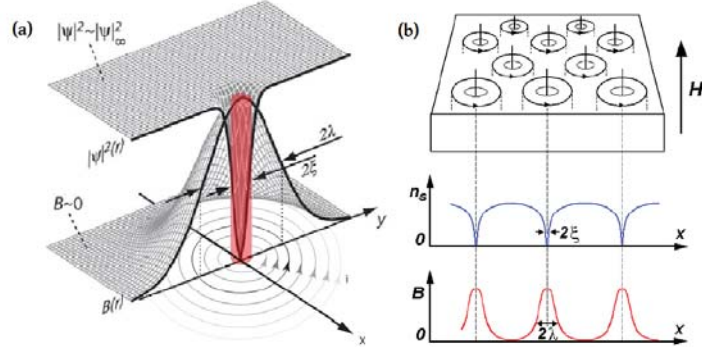


Figura 2.8 (a) Estrutura de um vórtice isolado mostrando o comportamento espacial do parâmetro de ordem. Em (b) temos a representação espacial da densidade de elétrons n_s e do campo interno $\mathbf{h}$ em um supercondutor.

Uma estimativa da forma do campo magnético em torno de um vórtice pode ser feita a partir do limite de London. Neste limite $\xi \ll \lambda$ onde pode-se considerar que $|\psi|^2$ é constante em todo o espaço exceto no seu núcleo, onde só a fase é relevante na variação espacial de ψ . Assim, tomando o rotacional da segunda equação de GL (2.35), e da expressão da lei da Ampère (2.6), e levando em conta a condição topológica da fase temos:

$$\nabla \times \nabla \phi = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}), \quad (2.63)$$

de onde obtemos a equação de London:

$$-\lambda^2 \nabla^2 \mathbf{h} + \mathbf{h} = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}) \hat{z}. \quad (2.64)$$

A solução desta equação pode ser determinada usando a técnica de transformada de Fourier, em coordenadas cilíndricas, considerando $h_z = h \hat{z}$ temos que:

$$h_z = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \hat{z}, \quad (2.65)$$

onde $K_0(r/\lambda)$ é a função de Bessel modificada de ordem zero [18]. A função $K_0(r/\lambda)$ decai como $e^{-r/\lambda}/\sqrt{r}$ para $r \gg \lambda$ e diverge logicamente $\ln(\lambda/r)$ para $r \rightarrow 0$. Verifica-se então que h_z diverge no núcleo do vórtice, divergência esta que tem origem na suposição que $\xi \rightarrow 0$ na teoria de London. Fisicamente, a uma distância da ordem do raio do núcleo ξ , $|\psi| \rightarrow 0$.

Assim, a equação (2.65) descreve a estrutura do vórtice no limite de London em $r > \xi$ e $\lambda \gg \xi$, de fato,

$$h_z \rightarrow \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \left(\frac{\pi\lambda}{2r}\right)^{1/2} e^{r/\lambda}; \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.66)$$

$$h_z \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right); \quad \xi \ll r \ll \lambda. \quad (2.67)$$

2.7.1 Energia de um vórtice

A energia total, por unidade de comprimento de um vórtice isolado pode ser calculada a partir do campo magnético microscópico, sendo parte da energia associada ao campo megnético local e parte associada à corrente que circula ao redor do vórtice,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int (h^2 + \lambda_L (\nabla \times \mathbf{h})^2) dS. \quad (2.68)$$

Usando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{h})) = (\nabla \times \mathbf{h})^2 - \mathbf{h} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}))$ a equação (2.68) se transforma em

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{h} + \lambda_L \nabla \times \nabla \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} dS + \frac{\lambda_L^2}{8\pi} \oint (\mathbf{h} \times \nabla \times \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.69)$$

e usando a equação (2.64), admitindo que $h_z = h\hat{z}$, obtemos:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Phi_0}{8\pi} \int h_z \delta(\mathbf{r}) dS + \frac{\lambda_L^2}{8\pi} \oint (\mathbf{h} \times \nabla \times \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.70)$$

Estamos considerando a integração para $r \gg \xi$, portanto, a primeira integral do lado direito é zero. O segundo termo vai a zero no infinito, mas existe uma contribuição na integração da área que contorna o núcleo do vórtice. Assim, a integral resulta em:

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_L^2}{8\pi} \left[h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right]_{\xi}. \quad (2.71)$$

Utilizando a equação (2.67), obtemos:

$$\varepsilon_1 \sim \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln k. \quad (2.72)$$

Segue da equação (2.72) que a energia de um vórtice isolado é positiva, implicando que vórtices não ocorrem espontaneamente. Desta forma, sem um campo magnético externo vórtices não podem existir no interior de supercondutores do tipo II.

2.7.2 Interação entre vórtices

Vamos considerar a interação entre dois vórtices. O campo magnético local em um ponto $\mathbf{r}$ é a sobreposição linear dos campos magnéticos correspondentes aos dois vórtices, assim podemos escrever

$$h(\mathbf{r}) = h_1(\mathbf{r}) + h_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{12}), \quad (2.73)$$

onde supomos que o vórtice 1 está na origem e o outro na posição $\mathbf{r}_{12}$.

A energia total pode ser deduzida de forma semelhante à obtida por um vórtice, porém será a soma da energia individual de cada vórtice mais a contribuição de um termo de interação

$$\varepsilon_T = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_{12}, \quad (2.74)$$

onde a energia de interação pode ser representada por um quantum de fluxo multiplicado pelo campo criado por um vórtice na posição do outro

$$\varepsilon_{12} = \frac{\Phi_0}{4\pi} h(|\mathbf{r}_{12}|). \quad (2.75)$$

Usando a relação (2.65), temos

$$\varepsilon_{12} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda_L^2} K_0 \left(\frac{r_{12}}{\lambda_L} \right). \quad (2.76)$$

A interação é positiva e, portanto, os fluxóides repelem-se entre si. Este comportamento de repulsão mútua tem um papel importante no comportamento coletivo dos vórtices e na formação de redes.

O potencial de interação entre os vórtices tem sido tema de estudo há muitos anos ([19],[20]). No supercondutor do tipo I, $\kappa < 1/\sqrt{2}$, a interação entre os vórtices é puramente atrativa, o que resulta na fusão de domínios normais macroscópicos no estado intermediário. Em contraste, em um supercondutor do tipo II, $\kappa > 1/\sqrt{2}$, a interação é puramente repulsiva, de modo que os vórtices formam uma estrutura estável de algumas linhas de fluxo no estado misto. No valor crítico, a teoria de GL (que é matematicamente semelhante ao modelo Abelian de Higgs em física de partículas) prevê que a interação dos vórtices é exatamente zero. No entanto, as experiências com κ próximo do valor crítico $\kappa = 1/\sqrt{2}$ (chamado também de ponto de Bogomol'nyi) mostraram padrões complexos que consistem em domínios de estado misto com domínios Meissner livre de vórtices.

Isso é derivado de um potencial de interação entre os vórtices não-monotônico, ou seja, que é repulsivo em uma curta separação e atrativo em longo alcance. Tal perfil de interação pode ser explicado teoricamente, levando em conta diferentes mecanismos, tais como correções de baixa temperatura ou flutuações e anisotropia da rede de vórtices [20].

No entanto, em 2005 Babaev e Speight *et al* [21], propuseram que em um supercondutor com dois componentes desacoplados, o potencial entre os vórtices pode ser não-monotônico quando um componente do parâmetro de ordem é do tipo I, enquanto o outro é do tipo II, prevendo assim o chamado estado semi-Meissner, que é um estado com regiões localizadas de densidades de vórtices altas e baixas, decorrentes de interações repulsivas de curto alcance, e interações atrativas de longo alcance entre os vórtices. Este comportamento foi visualizado por Moshchalkov *et al* [22], na forma de tiras e aglomerados de vórtices em amostras de alta pureza

do supercondutor MgB_2 , conhecido como o primeiro supercondutor de duas bandas. Moshchalkov *et al* [22] nomearam este material como supercondutor do tipo-1.5 ([23],[24],[25]).

Tais configurações de vórtices provenientes do comportamento atrativo de longo alcance são claramente muito importantes no campo da supercondutividade, mas também levam a uma interface entre a física de estado sólido e matéria condensada mole, onde sistemas com interações competitivas são de permanente interesse.

Até a presente data, o interesse sobre as interações entre os vórtices em supercondutores de duas bandas não foi conclusivamente resolvida, embora nos últimos anos se tem havido uma onda de atividades (pesquisas) neste domínio.

Cálculos com a teoria de GL já produziram potenciais de interação entre os vórtices não-monotônico [26], igualmente quando uma das bandas é inativa (neste caso, embora os componentes do parâmetro de ordem variam na mesma escala de comprimento característico numa longa distância, as suas variações são diferentes a uma distância finita a partir do núcleo do vórtice).

Chaves e Komendová *et al* [27], descrevem uma abordagem semi-analítica para a teoria de GL de duas bandas, que prevê o comportamento magnético de vórtices supercondutores de duas bandas. Eles mostram que o caráter da interação entre os vórtices de curto alcance é determinado pelo sinal da energia na interface entre os domínios normal-supercondutor, em analogia com a diferenciação estabelecida entre os supercondutores do tipo II e do tipo I. No entanto, demonstram que a interação de longo alcance é determinada pelo parâmetro de GL κ^* , de um supercondutor volumétrico. Este estudo abre a possibilidade de interações vórtice-vórtice não-monotônica que é dependente da temperatura e pode ainda ser ajustado por alterações do material em escala microscópica.

Dao *et al* [25] encontraram diferentes tipos de possíveis interações vórtice-vórtice e várias configurações de vórtices interessantes, mas não fornecem um critério universal a priori para a determinação do tipo de interação entre os vórtices.

2.7.3 Vórtices em Supercondutores Macroscópicos

Em 1957 Abrikosov [16] usando as equações de GL propôs que no estado misto a penetração de fluxo magnético dava-se num arranjo de tubos de fluxo onde cada um deles carrega um quantum de fluxo $\Phi_0 = hc/2e = 2.07 \times 10^{-7} \text{G} \cdot \text{cm}^2$. Abrikosov interpretou sua solução como um arranjo periódico de vórtices a qual pode ser vista na figura (2.9). Este tipo de rede é conhecida atualmente como rede de Abrikosov.

Abrikosov previa que na região de altos campos magnéticos a rede de vórtices tinha a forma de uma rede quadrada e para baixos campos configuração da rede de vórtices tornava-

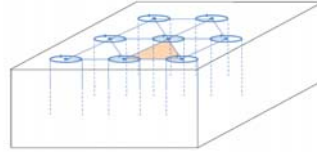


Figura 2.9 Rede de vórtices de Abrikosov.

se triangular. Assim, poderia haver uma transição de fase estrutural dentro do estado misto. Porém, posteriormente, foi mostrado que o arranjo de forma triangular (figura (2.9)) seria mais estável em todo estado misto. Esta rede foi observada mais tarde por meio de um experimento de decoração magnética [3], conforme pode ser visto na figura (2.10) e em algumas outras referências como por exemplo ([28],[29]).

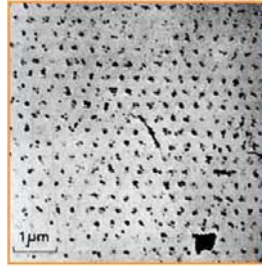


Figura 2.10 Rede bi-dimensional de um arranjo hexagonal de núcleo de vórtices prevista por Abrikosov obtida através da técnica de decoração de Bitter. [3]

2.8 Supercondutividade Mesoscópica

Os supercondutores mesoscópicos são materiais com dimensões da ordem dos comprimentos característicos, i.e, o comprimento de penetração, λ , e/ou o comprimento de coerência ξ . Tais sistemas apresentam diversos comportamentos exóticos e, por conta disso e de outros aspectos, tais materiais vem sendo estudados tanto experimental quanto teoricamente.

Nestes tipos de amostras, as propriedades do supercondutor são influenciadas principalmente pelos efeitos de confinamento, onde as interações entre os vórtices e as correntes de superfície começam ser comparáveis com a interação dos vórtices entre si. O efeito mais imediato é que os vórtices deixam de se acomodar em uma rede de Abrikosov. Assim, as propriedades magnéticas vão depender fortemente do tamanho e geometria da amostra ([30], [31], [32]).

Outra característica deste tipo de sistema é que devido à variedade de configurações que os vórtices podem adotar dentro da amostra, podemos ter estados com configurações de vórtices

gigantes [33], [34], sendo que este tipo de estado forma-se principalmente onde o confinamento imposto pela geometria é tão forte que para o sistema é mais favorável criar um único vórtice com vários quanta de fluxo, caracterizado por um mínimo na densidade de pares de Cooper. Além de estados de vórtices gigantes podem-se encontrar estados com configurações de vórtice-antivórtice, sendo este tipo de estado atribuído ao confinamento produzido pelo efeito do tamanho da amostra.

Uma rede de vórtices confinados também pode sofrer transições de estados metaestáveis para estados estáveis (mínima energia) ao se variar alguma grandeza termodinâmica [35].

2.9 Modelo de Lawrence-Doniach para supercondutores multicamadas

No modelo de Lawrence-Doniach [6], assume-se que o material é constituído por um arranjo de supercondutores bi-dimensionais acoplados por tunelamento Josephson. O tunelamento ocorre através de camadas isolantes que separam os planos supercondutores. Desta forma, é considerado um parâmetro de ordem bi-dimensional no contexto da teoria de Ginzburg-Landau (GL).

Como na teoria de GL convencional, é definido um funcional da energia livre para a pilha de camadas supercondutoras sendo que para o caso particular sem campo magnético aplicado tem-se [6],[7]:

$$F = \sum_n \int s \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left(\left| \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right|^2 \right) + \frac{\hbar^2}{2m_c^2 s} |\psi_n - \psi_{n-1}|^2 \right] dS. \quad (2.77)$$

Na equação acima, a soma em n corresponde ao número de camadas e a integral é realizada sobre a superfície dos planos supercondutores. O parâmetro s é a modulação do sistema e representa a soma da espessura da camada supercondutora com a espessura da camada isolante. Neste funcional existem dois pontos a se destacar: o primeiro se refere às massas que são distintas de acordo com a orientação, m_{ab} (ou $m_{||}$) é a massa efetiva do elétron no plano supercondutor (assumindo que não existe anisotropia no plano) e m_c (ou $m_{\perp}$) é a massa efetiva do elétron na orientação perpendicular aos planos. O segundo ponto é a derivada na direção z ser considerada discreta devido ao número finito de camadas. Considerando o parâmetro de ordem dado por $\psi_n = |\psi_n| e^{i\varphi_n}$, e assumindo que o módulo quadrado do parâmetro de ordem é o mesmo para todas as camadas, pode-se reescrever o último termo na forma,

$$\frac{\hbar^2}{m_c^2 s} |\psi_n|^2 [1 - \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1})],$$

que torna claro a equivalência deste termo a uma energia de acoplamento Josephson (ΔF) entre

as camadas. De acordo com a teoria de GL para uma junção Josephson,

$$\Delta F = \frac{\hbar}{2e} I_c [1 - \cos(\Delta\phi)]$$

onde I_c é a corrente crítica da junção.

Através do procedimento padrão de minimização do funcional da energia livre em relação aos parâmetros ψ^* e $\mathbf{A}$, pode-se escrever as equações de LD para este caso. No caso simples apresentado acima a primeira equação de GL toma a forma:

$$\alpha\psi_n + \beta|\psi_n|^2\psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_c s^2} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) = 0. \quad (2.78)$$

O último termo é a forma discreta da segunda derivada. Considerando o caso geral em que existe um vetor potencial magnético, então a equação de GL completa toma a forma:

$$\alpha\psi_n + \beta|\psi_n|^2\psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_c s^2} (\psi_{n+1} e^{-2ieA_z s/\hbar c} - 2\psi_n - \psi_{n-1} e^{2ieA_z s/\hbar c}) = 0. \quad (2.79)$$

Considerando que ∇ é um operador e $\mathbf{A}$ é vetor bi-dimensionais.

2.9.1 O limite anisotrópico de GL

A equação (2.79) apresenta uma complicação devido a derivada discreta na direção perpendicular aos planos. Entretanto, considerando um caso em que o comprimento de coerência é muito maior do que a modulação dos planos é possível aproximar a derivada discreta para uma derivada contínua. Ou seja,

$$\frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{s} \simeq \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.80)$$

Neste limite, (2.79) pode ser reescrita em uma forma mais simples dada por:

$$\alpha\psi_n + \beta|\psi_n|^2\psi_n - \frac{\hbar^2}{2} \left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{1}{m} \right) \cdot \left(\nabla - i\frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi_n = 0. \quad (2.81)$$

Agora ∇ e $\mathbf{A}$ são quantidades tridimensionais, e a anisotropia está simplesmente ligada ao tensor de massa recíproca ($1/m$). Os valores principais correspondentes são $1/m_a$, $1/m_b$ e $1/m_c$. Considerando novamente que a anisotropia nos planos seja desprezível, então $1/m_a = 1/m_b = 1/m_{ab}$. Sendo fraco o acoplamento entre as camadas isso implica em $m_c \gg m_{ab}$.

Desde que o acoplamento é diferente nas duas orientações, o comprimento de coerência também irá apresentar valores diferentes. De acordo com o modelo de GL, ξ , fica dado por:

$$\xi_i = \frac{\hbar^2}{2m_i |\alpha(T)|}, \quad (2.82)$$

onde o índice i denota as direções a , b e c , quando $i = 1, 2$ e 3 , respectivamente.

Considerando que para um supercondutor isotrópico $H_{c2} = \Phi_0/2\pi\xi^2$, então a extensão para o caso anisotrópico implica que os campos críticos superiores apresentarão valores diferentes para cada orientação. As equações (2.83) e (2.84) correspondem ao campo aplicado perpendicular e paralelamente ao plano ab .

$$H_{c2\perp} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{\parallel}^2}, \quad (2.83)$$

$$H_{c2\parallel} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{\parallel}\xi_{\perp}}. \quad (2.84)$$

Deste modo observa-se que $H_{c2\parallel} \gg H_{c2\perp}$, onde que $\xi_{\parallel} \gg \xi_{\perp}$. O campo crítico inferior, por outro lado, apresenta comportamento oposto pois $H_{c1} \propto 1/\lambda^2$.

São definidas as seguintes relações para o fator de anisotropia γ :

$$\gamma = \left(\frac{m_{\perp}}{m_{\parallel}}\right)^{1/2} = \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\parallel}} = \frac{\xi_{\parallel}}{\xi_{\perp}} = \left(\frac{H_{c2\parallel}}{H_{c2\perp}}\right) = \left(\frac{H_{c1\perp}}{H_{c1\parallel}}\right) \quad (2.85)$$

2.9.2 Crossover para o comportamento bi-dimensional

A medida em que se aproxima de T_c , o comprimento de coerência aumenta de acordo com a temperatura (2.45),

$$\xi(T) = \xi_0 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}, \quad (2.86)$$

de modo que este será sempre grande o suficiente de modo que a aproximação de GL seja válida para multicamadas. Porém, quando a temperatura é reduzida, o comprimento de coerência vai diminuindo e caso o valor do comprimento de coerência seja da ordem ou menor do que a distância interplanar, a aproximação de GL falha, abaixo de uma certa temperatura T^* . Quando é reduzida a temperatura, novos comportamentos são esperados quando a aproximação contínua 3D é substituída pelo comportamento bidimensional das camadas individuais. De acordo com o modelo de LD, o campo crítico superior diverge na temperatura T^* , para o qual $\xi(T^*) = s/\sqrt{2}$. Abaixo desta temperatura, cada camada é considerada como um supercondutor bi-dimensional de espessura zero, tendo um campo crítico infinito. Certamente esta divergência não é física, mas está relacionada com a limitação da teoria em não considerar os mecanismos de quebra de pares de Cooper.

Para entender a origem da divergência em $T = T^*$, considera-se a equação dada por (2.79), a qual apresenta a verificação discreta do parâmetro de ordem. Para determinar H_{c2} a partir desta equação, obtem-se a versão linearizada de (2.79) com o mais baixo autovalor para a determinação do maior valor do campo magnético. Tomando o campo na direção y e considerando

o calibre tal que $A_z = Hx$, então a equação (2.79) torna a forma ([7],[9]),

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m_{ab}}{m_c s^2} \left[1 - \cos \frac{2\pi H s x}{\Phi_0} \right] \psi = \frac{1}{\xi_{ab}} \psi. \quad (2.87)$$

A equação (2.87) corresponde a uma equação de Schrödinger para um movimento eletrônico em um potencial com uma componente periódica e outra componente harmônica. Para baixos campos aplicados, a equação (2.87) se reduz a uma equação semelhante à do oscilador harmônico e o resultado da teoria de GL anisotrópica é verificada. Para campos mais altos é necessário explorar as soluções da equação acima que representem um acoplamento mais fraco entre as camadas. Neste caso, o problema de autovalores dado pela equação (2.87), corresponde a um partícula em um potencial periódico. A teoria de perturbação para H grande permite obter a seguinte solução para o campo crítico superior ([7],[9]).

$$H_{c2,ab}(T) = \frac{[(\Phi_0/2\pi s^2)(m_{ab}/m_c)]^{1/2}}{[1 - s^2/2\xi_c^2(T)]^{1/2}}. \quad (2.88)$$

A equação acima mostra que quando a temperatura é reduzida e $H_{c2\parallel}(T)$ aumenta, existe uma temperatura T^* definida pela relação:

$$\xi_{\perp}(T^*) = s/\sqrt{2}, \quad (2.89)$$

Na qual o campo crítico $H_{c2\parallel}(T)$ diverge. Este resultado pode ser interpretado da seguinte forma: Para $T^* < T < T_c$ o comprimento de coerência $\xi_{\perp}(T)$ estende-se sobre muitas camadas e o comportamento previsto pela aproximação anisotrópica de GL é válido. Para $T < T^*$, onde $\xi_{\perp}(T^*) < s/\sqrt{2}$, os núcleos dos vórtices podem efetivamente ajustar-se entre as camadas supercondutoras suprimindo os efeitos orbitais. Neste caso a supercondutividade fica confinada nos planos supercondutores.

Método das Variáveis de Ligação para as Equações Ginzburg-Landau (GL)

Neste capítulo descrevemos como se obtém as equações de GL e também descrevemos o método utilizado para resolver numericamente estas equações. Estas são equações não-lineares que não possuem soluções analíticas e para as quais é necessária a implementação de métodos numéricos para se obter soluções aproximadas. Assim, o método das variáveis de ligação ([36],[36],[37]) descrito neste capítulo é um passo importante para a implementação do método numérico para a solução das equações GL. Em nosso caso as equações GL são discretizadas em uma malha bidimensional para a posterior aplicação do método de diferenças finitas.

3.1 Dedução das equações de GL de equilíbrio

Nesta seção deduzimos as equações de GL a partir do funcional de energia livre dado por:

$$F = \int_V \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_a)^2 \right] dV, \quad (3.1)$$

Onde $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{H}_a$, é o campo magnético aplicado. Uma forma conveniente de se manipular o funcional F e consequentemente as equações GL pode ser obtida ao se adimensionalizar este funcional. Isto é feito através da introdução de uma escala de comprimento ξ , da escala para o parâmetro de ordem ψ_0 , da escala do potencial vetor A_0 , da escala do campo magnético H_{c2} e da escala para a energia livre F_0 . Transformamos as variáveis como:

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r}/\xi, \\ \nabla' = \xi \nabla, \\ \psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r})/\psi_0, \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}') = \mathbf{A}(\mathbf{r})/A_0, \\ \mathbf{H}'(\mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{r})/H_{c2}, \end{cases} \quad (3.2)$$

com

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{-\hbar^2/2m\alpha}, \\ \psi_0 = \sqrt{-\alpha/\beta}, \\ A_0 = c\hbar/2e\xi, \\ H_{c2} = c\hbar/2e\xi^2, \\ F_0 = V\alpha^2/\beta, \end{cases} \quad (3.3)$$

Dentro da teoria de GL convencional, a dependência com a temperatura advém da variável $\alpha = \alpha_0(1 - T/T_c)$, onde α_0 é um número negativo e T_c é a temperatura crítica. Isto faz com que o comprimento de coerência dependa da temperatura como $\xi \propto (1 - T/T_c)^{-1/2}$. Substituindo (3.2) no funcional (3.1) obtemos a expressão da energia livre em unidades adimensionais, $F' = \frac{F}{\xi^3 F_0}$, que adquire a seguinte forma:

$$F = \frac{1}{V} \int \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + |(-i\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 + \kappa^2(\mathbf{H} - \mathbf{H}_a)^2 \right] dV, \quad (3.4)$$

onde κ é o parâmetro de GL e $\kappa^2 = \frac{H_{c2}^2}{8\pi F_0} = \frac{m^2 c^2 \beta}{8\pi \hbar^2 e^2}$.

As equações de GL e suas condições de contorno se obtêm variando F com relação a ψ^* e a $\mathbf{A}$,

$$\delta F = F(\psi + \delta\psi; \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) - F(\psi; \mathbf{A}) = 0. \quad (3.5)$$

A primeira equação de GL se obtém variando a energia livre com relação ψ^* . Considerando os termos proporcionais a $\delta\psi^*$ e desprezando os termos de ordem superior, temos:

$$\delta|\psi|^2 = |\psi + \delta\psi|^2 - |\psi|^2 = \psi\delta\psi^* + \psi^*\delta\psi + |\delta\psi|^2 \approx \psi\delta\psi^*, \quad (3.6)$$

$$\delta|\psi|^4 = |\psi + \delta\psi|^4 - |\psi|^4 \approx 2\psi|\psi|^2\delta\psi^*, \quad (3.7)$$

$$\delta|\Pi\psi|^2 = |\Pi(\psi + \delta\psi)|^2 - |\Pi\psi|^2 \approx (\Pi\psi) \cdot (\Pi^*\delta\psi^*). \quad (3.8)$$

Aqui introduzimos o operador momento canônico adimensional $\Pi = (-i\nabla - \mathbf{A})$. Por tanto, a variação de F com relação a ψ torna-se,

$$F(\psi + \delta) - F(\psi) = \int \left[-\psi\delta\psi^* + |\psi|^2\psi\delta\psi^* + (\Pi\psi)(\Pi^*\delta\psi^*) \right] dV + c.c = 0. \quad (3.9)$$

O último termo da equação (3.9) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} (\Pi\psi) \cdot (\Pi^*\delta\psi^*) &= (\Pi\psi) \cdot ([i\nabla - \mathbf{A}]\delta\psi^*) \\ &= i(\Pi\psi) \cdot (\nabla\delta\psi^*) - (\Pi\psi) \cdot \mathbf{A}\delta\psi^* \\ &= i\nabla \cdot (\delta\psi^*\Pi\psi) - i\delta\psi^*\nabla \cdot \Pi\psi - (\Pi\psi) \cdot \mathbf{A}\delta\psi^* \\ &= i\nabla \cdot (\delta\psi^*\Pi\psi) - \delta\psi^*\Pi^2\psi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo este termo na expressão para δF , obtemos:

$$\int [-\psi \delta \psi^* + |\psi|^2 \psi \delta \psi^* + i \nabla \cdot (\delta \psi^* \Pi \psi) - \delta \psi^* \Pi^2 \psi] dV + c.c = 0. \quad (3.11)$$

Utilizando o teorema de Gauss $[\int \nabla \cdot (\delta \psi^* \Pi \psi) dV = \oint \mathbf{n} \cdot (\delta \psi^* \Pi \psi) dS]$, onde $\mathbf{n}$ é o versor normal à superfície S , pode-se ver que a integral (3.11) composta por uma integral de volume e uma integral de superfície resulta em zero, como pode ser visto ao tomarmos S arbitrariamente distante. Assim temos que,

$$\int \delta \psi^* (-\psi + |\psi|^2 - \Pi^2 \psi) dV = 0. \quad (3.12)$$

$$i \oint \delta \psi^* (\mathbf{n} \cdot \Pi \psi) dS = 0. \quad (3.13)$$

Como a variação $\delta \psi^*$ é arbitrária, os termos acima entre parênteses devem ser zero, resultando na primeira equação de GL:

$$-\psi + |\psi|^2 - \Pi^2 \psi = 0, \quad (3.14)$$

e na condição de contorno:

$$\mathbf{n} \cdot (\Pi \psi)|_S = 0. \quad (3.15)$$

A equação (3.15) nos diz que nenhuma supercorrente pode passar através do contorno da amostra.

A segunda equação de GL pode ser obtida minimizando-se a energia livre com respeito a $\mathbf{A}$. Aqui os termos que dependem do potencial vetor no funcional da energia livre se tornam, depois da variação em $\mathbf{A}$, em :

$$\begin{aligned} \delta |\Pi \psi|^2 &= (\Pi^* - \delta \mathbf{A}) \psi^* \cdot (\Pi - \delta \mathbf{A}) \psi - |\Pi \psi|^2 \\ &\approx -\Pi^* \psi^* \cdot \delta \mathbf{A} \psi - \delta \mathbf{A} \psi^* \cdot \Pi \psi \\ &\approx -2\delta \mathbf{A} \cdot \Re(\psi^* \Pi \psi), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \delta (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a)^2 &= ((\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a) + \nabla \times \delta \mathbf{A})^2 - (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a)^2 \\ &\approx 2(\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $\Re$ indica a parte real de um número complexo. Substituindo (3.16) e (3.17) na expressão δF :

$$\delta F = \int [-2\delta \mathbf{A} \cdot \Re(\psi^* \Pi \psi) + 2\kappa^2 (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A})] dV = 0. \quad (3.18)$$

Podemos reescrever o segundo termo, utilizando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$, com $\mathbf{a} = \delta \mathbf{A}$ e $\mathbf{b} = (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a)$:

$$\begin{aligned} \int [-2\delta \mathbf{A} \cdot \Re(\psi^* \Pi \psi) \\ + 2\kappa^2 (\nabla \cdot (\delta \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a)) + \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a))] dV = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando o teorema de Gauss podemos transformar a integral de volume onde aparece o divergente em uma integral de superfície

$$\int \nabla \cdot [\delta \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a)] dV = \oint d\mathbf{S} \cdot [\delta \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a)]. \quad (3.20)$$

Para distâncias à superfície suficientemente grandes temos que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}_a$, e portanto a integral de superfície anula-se. Assim, a equação (3.20) torna-se

$$2 \int \delta \mathbf{A} \cdot [-\Re(\psi^* \Pi \psi) + \kappa^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_a)] = 0, \quad (3.21)$$

Como $\delta \mathbf{A}$ é arbitrário o termo entre parênteses deve ser igual a zero. Assim obtemos a segunda equação de GL:

$$\mathbf{J}_s = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{A}) = \frac{1}{\kappa^2} \Re(\psi^* \Pi \psi). \quad (3.22)$$

Sabendo-se que $\mathbf{J}_s$ é a corrente elétrica devida ao condensado eletrônico e escolhendo o calibre de Coulomb, onde $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, a equação (3.22) se reduz a:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\kappa^2} \Re(\psi^* \Pi \psi). \quad (3.23)$$

Assim, o conjunto das equações de GL estáticas são dadas pelas equações (3.14) e (3.23) sendo as condições de contorno para o parâmetro de ordem a equação (3.15) e para o campo magnético, $\mathbf{H}_a \times \mathbf{n}|_S = (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}|_S$ no infinito. Desta maneira, obtemos as equações de GL já introduzidas na seção 2.3, e deduzidas aqui na forma adimensional.

3.1.1 Condições de contorno para os casos mais gerais

A condição de contorno dada pela equação (3.15) minimiza a energia livre superficial e implica que a corrente supercondutora normal à superfície se anula. Porém, utilizando a teoria microscópica pode-se demonstrar que esta equação só é válida no caso de uma interface supercondutor-vácuo [38]. De Gennes, utilizando a teoria microscópica, generalizou esta condição para uma interface entre um supercondutor e um metal normal e entre um supercondutor com a temperatura crítica mais alta. Temos que:

$$(\Pi \psi)|_S = (-i\nabla - \mathbf{A})\psi|_S = \frac{i}{b}\psi, \quad (3.24)$$

onde b é o comprimento de extrapolação superficial que leva em conta a supressão do parâmetro de ordem superficial.

3.2 Método das Variáveis de Ligação

Uma vez que geralmente as equações GL não apresentam soluções analíticas, os métodos numéricos ganham bastante importância na obtenção de soluções aproximadas para estas equações, que são equações diferenciais acopladas não-lineares. Uma solução analítica não é viável exceto para poucas situações triviais. Mas, por outro lado, podemos solucionar estes tipos de equações numericamente. Para resolver esse sistema de equações é usado um método numérico de diferenças finitas (FDM) [36] conhecido como o método de variáveis de ligação [39]. Este método introduz uma aproximação discreta das equações TDGL, na qual, mediante variáveis de ligação, a invariância de calibre é intrinsecamente preservada.

O método FDM consiste em utilizar uma malha geralmente retangular $N_x \times N_y$ com células de dimensões $a_x \times a_y$; este método também pode ser empregado para malhas com outros formatos. Quanto menor for os valores de a_x e a_y melhor será o resultado, ou seja, mais próximo da solução exata. As equações GL são resolvidas considerando-se as condições iniciais para o parâmetro de ordem ψ e o potencial vetor $\mathbf{A}$, e as condições de contorno que dependem de cada problema a ser estudado.

Para resolver as equações GL é necessária a substituição de variáveis contínuas por discretas equivalentes. Para garantir a consistência do método, é necessário definir em quais pontos da malha quais quantidades físicas serão calculadas. Como as equações GL são equações diferenciais que apresentam invariância de calibre, é necessário um certo cuidado, ao discretizarmos tais equações, pois pode ocorrer a quebra dessa invariância (quebra de simetria) e os resultados poderão não ser satisfatórios (não-físicos). O uso das variáveis de ligação que apresentaremos mais adiante garante a invariância de calibre no processo de discretização [39].

Para resolver as equações de GL, utilizamos o método de relaxamento. Isto significa que podemos adicionar uma dependência temporal artificial para o parâmetro de ordem $\partial\psi/\partial t$ e para o potencial vetor $\partial A/\partial t$, para o lado direito das equações (3.14 e ??) e deixar sistema evoluir no "tempo" até que seja encontrada uma solução estacionária.

3.2.1 Descrição do método para as equações GL

Considera-se o caso de um supercondutor infinito em uma das coordenadas espaciais, ou seja a discretização das coordenadas ocorrerá em duas dimensões. As incógnitas deste problema são o parâmetro de ordem $\psi(x,y)$ e potencial vetor $\mathbf{A}$ que neste caso seria restrito as componentes $A_x(x,y)$ e $A_y(x,y)$. Neste caso, definem-se campos auxiliares $\mathcal{U}^x$ e $\mathcal{U}^y$. Assim esses campos

são expressos na seguinte forma:

$$\mathcal{U}^x(x, y) = \exp \left(-i \int_{x_0}^x A^x(\xi, y) d\xi \right), \quad (3.25)$$

$$\mathcal{U}^y(x, y) = \exp \left(-i \int_{y_0}^y A^y(x, \eta) d\eta \right). \quad (3.26)$$

Onde o ponto (x_0, y_0) é arbitrário. Com a introdução destes campos pode-se garantir a invariância de calibre das equações de GL. Agora, as incógnitas do problema serão o parâmetro de ordem e os campos $\mathcal{U}^x$ e $\mathcal{U}^y$.

Como aplicação direta do método das variáveis de ligação para a integração das equações GL consideramos uma malha retangular de $N_x \times N_y$ com células unitárias com dimensões $a_x \times a_y$ como ilustra a figura (3.1). A região supercondutora da amostra é delimitada pela linha tracejada dentro da malha. A região delimitada pelas linhas tracejada e sólida, e o exterior é considerado como vácuo. De fato, toda a amostra é considerada do mesmo material supercondutor. Os pontos onde cada quantidade física é calculada estão devidamente indicados na figura. Nos vértices das células unitárias (pontos verdes) calculamos o parâmetro de ordem ψ . Cada um destes vértices está ligado a seus vizinhos horizontais por meio de uma variável auxiliar U_x (quadros vermelhos) e a seus vizinhos verticais por uma outra variável U_y (quadros vermelhos). Essas variáveis estão relacionadas ao potencial vetor do sistema entre vértices vizinhos, e é calculada usando uma versão discreta dos campos auxiliares descritos nas equações (3.25) e (3.26), como veremos a seguir.

Pode-se observar na figura (3.1) que a rede fica formada por células quadradas adjacentes, cada uma delas formada por um quadrado com 4 parâmetros de ordem nos vértices e 4 variáveis auxiliares ligando os vértices. Entre as variáveis de parâmetro de ordem pode-se fazer uma integral de caminho das variáveis auxiliares. Ao se completar a integral em todo o quadrado, se tem calculado o fluxo magnético no centro da célula. Fluxo que é associado a uma outra variável auxiliar, $L_{i,j}$, avaliado no centro de cada célula. Estendendo o processo a toda a rede pode-se calcular o fluxo magnético na superfície supercondutora associada à rede de variáveis.

No que segue abaixo, listamos as variáveis discretas que usaremos na discretização das equações GL, bem como indicamos os pontos onde elas serão calculadas:

- $\psi_{i,j}$, com $1 \leq i \leq N_x + 1$, $1 \leq j \leq N_y + 1$, associados aos nós ou vértices da malha. O valor de $\psi_{i,j}$ corresponde ao valor do parâmetro de ordem na posição (x_i, y_i) ,
- $U_{i,j}^x$, variável de ligação na direção x , com $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y + 1$, associado à ligação horizontal da malha,
- $U_{i,j}^y$, variável de ligação na direção y , com $1 \leq i \leq N_x + 1$, $1 \leq j \leq N_y$, associado à ligação vertical da malha,

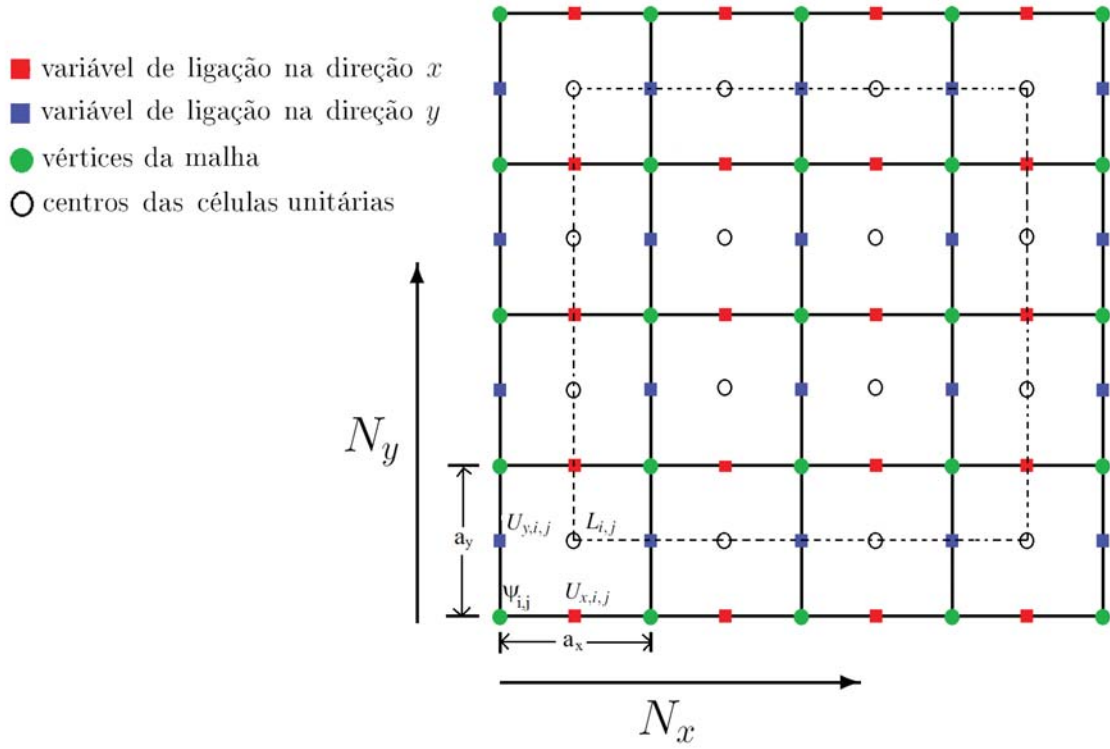


Figura 3.1 Esquema da malha definindo as variáveis discretas.

- $L_{i,j}$, com $1 \leq i \leq N_x$, $1 \leq j \leq N_y$, associados aos centros das células unitárias.

Estas considerações iniciais são suficientes para iniciarmos o processo de discretização das equações.

3.2.2 Discretização das equações GL

Para discretizar as equações de GL primeiro escrevemos estas equações em termos dos campos auxiliares e depois disso vamos deixar elas na forma discreta.

Para discretizar as equações GL é importante notar que os análogos discretos para $\mathcal{U}^x$ e $\mathcal{U}^y$ podem ser obtidos das relações:

$$\mathcal{U}_{i,j}^x = \prod_{k=1}^{i-1} U_{k,j}^x, \quad \mathcal{U}_{i,j}^y = \prod_{k=1}^{j-1} U_{i,k}^y. \quad (3.27)$$

Considere dois pontos adjacentes (x_i, y_j) e (x_{i+1}, y_{j+1}) , de onde podemos obter para as

variáveis de ligação:

$$U_{i,j}^x = \mathcal{U}_{i,j}^x \mathcal{U}_{i+1,j}^x, \quad (3.28)$$

$$= \exp \left(-i \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_x(\xi, y_j) d\xi \right). \quad (3.29)$$

Analogamente, ao longo da vertical temos a definição:

$$U_{i,j}^y = \mathcal{U}_{i,j}^y \mathcal{U}_{i,j+1}^y, \quad (3.30)$$

$$= \exp \left(-i \int_{y_j}^{y_{j+1}} A_y(x_i, \eta) d\eta \right). \quad (3.31)$$

A dependência temporal é aqui omitida, já só estamos interessados em as soluções estáticas.

Usando a regra do ponto médio para integração simples, também podemos escrever:

$$U_{i,j}^x = \exp(-iA_{x,i,j}a_x), \quad U_{i,j}^y = \exp(-iA_{y,i,j}a_y), \quad (3.32)$$

onde $A_{x,i,j} = A_x(x_i + a_x, y_j)$ e $A_{y,i,j} = A_y(x_i, y_j + a_y/2)$.

Agora, as equações GL precisam ser discretizadas para serem adaptadas de acordo com o método das variáveis de ligação. Em princípio vamos iniciar com os termos $(-i\nabla - \mathbf{A})^2|_\mu \psi$ e $(-i\nabla - \mathbf{A})|_\mu \psi$, das equações (3.14) e (3.23), onde $\mu = (x, y)$.

Partindo da relação (3.25), pode-se obter

$$\nabla_\mu \mathcal{U}^\mu = -i\mathcal{U}^\mu \mathbf{A}_\mu \quad (3.33)$$

Substituindo-se na derivada, com $\psi = \psi(x, y)$;

$$\begin{aligned} \nabla_\mu [\mathcal{U}^\mu \psi] &= \psi \nabla_\mu \mathcal{U}^\mu + \mathcal{U}^\mu \nabla_\mu \psi, \\ &= -i\psi \mathcal{U}^\mu \mathbf{A}_\mu + \mathcal{U}^\mu \nabla_\mu \psi. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Esta equação, por sua vez, conduz à expressão:

$$\nabla_\mu [\mathcal{U}^\mu \psi] = i\mathcal{U}^\mu (-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu) \psi, \quad (3.35)$$

o que conduz a,

$$(-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu) \psi = -i\mathcal{U}^\mu \nabla_\mu [\mathcal{U}^\mu \psi]. \quad (3.36)$$

Assim para cada uma das coordenadas obtemos:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right) \psi = -i\mathcal{U}^x \frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{U}^x \psi], \quad (3.37)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} - A_y \right) \psi = -i\mathcal{U}^y \frac{\partial}{\partial y} [\mathcal{U}^y \psi]. \quad (3.38)$$

Agora, aplicando a derivada à equação (3.36) tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu)\psi &= \nabla(-i\tilde{\mathcal{U}}^\mu\nabla_\mu[\mathcal{U}^\mu\psi]) \\ &= \tilde{\mathcal{U}}^\mu(\mathbf{A}_\mu\nabla_\mu[\mathcal{U}\psi] - i\nabla_\mu^2[\mathcal{U}\psi]).\end{aligned}\quad (3.39)$$

Substituindo a equação (3.35) na expressão anterior obtemos,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu)\psi &= \tilde{\mathcal{U}}^\mu(i\mathbf{A}_\mu\mathcal{U}^\mu(-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu)\psi - i\nabla_\mu^2[\mathcal{U}\psi]) \\ &= i\mathbf{A}_\mu(-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu)\psi - i\tilde{\mathcal{U}}^\mu\nabla_\mu^2[\mathcal{U}\psi] \\ -i\nabla_\mu(-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu)\psi - \mathbf{A}_\mu(-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu)\psi &= -\tilde{\mathcal{U}}^\mu\nabla_\mu^2[\mathcal{U}\psi] \\ -\nabla_\mu^2\psi + i(\nabla_\mu\mathbf{A}_\mu + \mathbf{A}_\mu\nabla_\mu)\psi + \mathbf{A}_\mu^2\psi &= -\tilde{\mathcal{U}}^\mu\nabla_\mu^2[\mathcal{U}\psi] \\ (-i\nabla_\mu - \mathbf{A}_\mu)^2 &= -\tilde{\mathcal{U}}^\mu\nabla_\mu^2[\mathcal{U}\psi].\end{aligned}\quad (3.40)$$

Assim podemos escrever a relação acima como:

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2\psi|_\mu = -\tilde{\mathcal{U}}^x\partial_{xx}^2(\tilde{\mathcal{U}}^x\psi) - \tilde{\mathcal{U}}^y\partial_{yy}^2(\tilde{\mathcal{U}}^y\psi). \quad (3.41)$$

Uma aproximação de segunda ordem em (x_i, y_j) nos leva à seguinte relação:

$$\begin{aligned}(-i\nabla - \mathbf{A})^2\psi|_{(x_i, y_j)} &= -\tilde{\mathcal{U}}_{i,j}^x \left(\frac{\mathcal{U}_{i+1,j}^x\psi_{i+1,j} - 2\mathcal{U}_{i,j}^x\psi_{i,j} + \mathcal{U}_{i-1,j}^x\psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) \\ &\quad - \tilde{\mathcal{U}}_{i,j}^y \left(\frac{\mathcal{U}_{i,j+1}^y\psi_{i,j+1} - 2\mathcal{U}_{i,j}^y\psi_{i,j} + \mathcal{U}_{i,j-1}^y\psi_{i,j-1}}{a_y^2} \right)\end{aligned}\quad (3.42)$$

Usando a relação (3.28) e (3.30), obtém-se o termo de energia cinética na sua forma discreta:

$$\begin{aligned}(-i\nabla - \mathbf{A})^2\psi|_{(x_i, y_j)} &= - \left(\frac{U_{i,j}^x\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x\psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{U_{i,j}^y\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i,j-1}^y\psi_{i,j-1}}{a_y^2} \right).\end{aligned}\quad (3.43)$$

O cálculo da integral de caminho do potencial vetor numa célula unitária da malha tem como resultado o fluxo magnético. De fato, considere um domínio $\mathcal{D} = \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}\}$, que é exatamente uma célula unitária. Seja $\partial\mathcal{D}$ os contornos de $\mathcal{D}$. Então temos que:

$$\begin{aligned}\exp\left(-i\int h_z dx dy\right) &= \exp\left(-i\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\right) \\ &= U_{x,i,j}U_{y,i+1,j}\bar{U}_{x,i,j+1}\bar{U}_{y,i,j} \\ &\equiv L_{i,j},\end{aligned}\quad (3.44)$$

onde considerou-se que o campo magnético é aplicado na direção z . Por outro lado, usando a regra do ponto médio para integração dupla, temos que:

$$\begin{aligned} \exp\left(-i \int h_z dx dy\right) &= \exp(-ih_{z,i,j} a_x a_y) \\ &= 1 - ih_{z,i,j} a_x a_y, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $h_{z,i,j} = h_z(x_i + a_x/2, y_j + a_y/2)$. Desta última equação obtemos o campo magnético nos pontos centrais da malha:

$$h_z(x_i + a_x/2, y_j + a_y/2) = -\frac{i}{a_x a_y} \ln(L_{i,j}). \quad (3.46)$$

Assim, o rotacional do campo magnético pode ser expresso em função da variável $L_{i,j}$ como:

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{i}{a_x a_y^2} (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1), \quad (3.47)$$

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{i}{a_x^2 a_y} (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1). \quad (3.48)$$

Para-se obter o equivalente discretizado do termo da corrente supercondutora, equação (3.23), usa-se a equação (3.15). Calculando as derivadas em $(x_i + \frac{a_x}{2}, y_i), (x_i, y_i + \frac{a_y}{2})$, esta relação pode ser escrita como:

$$\Re[\bar{\psi}(-i\nabla - \mathbf{A})_x \psi]|_{x_i + \frac{a_x}{2}, y_j} = \Im \left[\bar{\psi}_{i,j} \mathcal{U}_{i,j}^x \frac{\mathcal{U}_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - \mathcal{U}_{i,j}^x \psi_{i,j}}{a_x} \right], \quad (3.49)$$

Após alguns procedimentos matemáticos esta relação assume sua forma discreta:

$$\Re[\bar{\psi}(-i\nabla - \mathbf{A})_x \psi]|_{x_i + \frac{a_x}{2}, y_j} = \frac{1}{a_x} \Im(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}), \quad (3.50)$$

similarmente para a componente y ,

$$\Re[\bar{\psi}(-i\nabla - \mathbf{A})_y \psi]|_{x_i, y_j + \frac{a_y}{2}} = \frac{1}{a_y} \Im(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}). \quad (3.51)$$

Com estas duas equações temos a forma discreta do termo $\nabla \times \mathbf{H}$ em termos da variável $L_{i,j}$.

Por último, para a discretização da derivada temporal artificial introduzidas para o parâmetro de ordem ψ e para o potencial vetor que foi substituído pela variável de ligação $U_{i,j}^\mu$, usamos o esquema de Euler:

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\psi_n^{t+\Delta t} - \psi_n^t}{\Delta t}, \quad \frac{\partial U_n^\mu}{\partial t} = \frac{(U_n^\mu)^{t+\Delta t} - (U_n^\mu)^t}{\Delta t}. \quad (3.52)$$

onde $n = i, j$ e $\mu = x, y$. Coletando os resultados anteriores. Finalmente podemos escrever a equação discretizada, para a primeira equação de GL:

$$\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial t} = -\psi_{i,j} + |\psi_{i,j}|^2 \psi_{i,j} + \left(\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) + \left(\frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i,j-1}^y \psi_{i,j-1}}{a_y^2} \right) \quad (3.53)$$

e similarmente para a segunda equação:

$$\frac{\partial U_{i,j}^x}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2 a_x} \mathcal{I}(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}) - \frac{i U_{i,j}^x}{a_x a_y^2} (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1) \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial U_{i,j}^y}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2 a_y} \mathcal{I}(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}) - \frac{i U_{i,j}^y}{a_x^2 a_y} (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1) \quad (3.55)$$

O método de Euler é uma aproximação de primeira ordem no tempo e é necessário usar passos de tempo suficientemente pequenos para garantir a estabilidade do método. O tamanho do passo temporal depende do tamanho do intervalo espacial. Uma regra prática para a seleção de Δt é [36]:

$$\Delta t < \frac{a_n^2}{2\kappa^2} \quad (3.56)$$

3.2.3 Condições de contorno

Uma vez calculados os valores para os pontos interiores, as variáveis nos pontos da superfície são calculados usando as condições de contorno (3.15).

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [(-i\nabla - \mathbf{A})\psi_n] = \frac{i}{b} \psi_n \Big|_s, \quad (3.57)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{n}}|_s = \mathbf{H}_a \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.58)$$

Para $b \rightarrow \infty$, simula-se uma interface supercondutor/vácuo, a qual significa que as supercorrentes não podem fluir fora do supercondutor. Assim, considerando a fronteira perpendicular ao eixo μ , a condição (3.57) implica que $(-i\partial_\mu - A_\mu)\psi = -i\bar{\mathcal{U}}^\mu \partial_\mu (\mathcal{U}^\mu \psi) = 0$. Por sua vez, a condição (3.58) implica que $L_{i,j} = \exp(-ia_x a_y H_a)$. Descrevendo mais detalhadamente as condições de contorno, considerando $i = 1$ com a fronteira esquerda, $i = N_x + 1$ a fronteira direita, $j = 1$ a fronteira inferior e $j = N_y + 1$ como a fronteira superior, podemos escrever a condição

de contorno para o campo magnético da seguinte maneira:

$$U_{1,j}^y = e^{ia_x a_y H a} U_{1,j}^x U_{2,j}^y \bar{U}_{1,j+1}^x, \quad (3.59)$$

$$U_{N_x+1,j}^y = e^{-ia_x a_y H a} U_{N_x,j+1}^x U_{N_x,j}^y \bar{U}_{N_x,j}^x, \quad (3.60)$$

$$U_{i,1}^x = e^{-ia_x a_y H a} \bar{U}_{i+1,1}^y U_{i,2}^x U_{i,1}^y, \quad (3.61)$$

$$U_{i,N_y+1}^x = e^{ia_x a_y H a} \bar{U}_{i,N_y}^y U_{i,N_y}^x U_{i+1,N_y}^y. \quad (3.62)$$

Para o parâmetro de ordem ψ :

$$\psi_{i,1} = U_{i,1}^y \psi_{i,2}, \quad (3.63)$$

$$\psi_{1,j} = U_{1,j}^x \psi_{2,j}, \quad (3.64)$$

$$\psi_{i,N_y+1} = \bar{U}_{i,N_y}^y \psi_{i,N_y}, \quad (3.65)$$

$$\psi_{N_x+1,j} = \bar{U}_{N_x,j}^x \psi_{N_x,j}. \quad (3.66)$$

Estas relações aplicam-se a todos os pontos das bordas da malha, exceto os cantos. Para os vértices da amostra podemos aproximar o parâmetro de ordem, calculando as médias aritméticas dos dois parâmetros de ordem mais próximos. Entretanto, estes valores do parâmetro de ordem não são usados nas relações de recorrência. É importante também ressaltar que antes de usarmos estas condições de contorno, precisamos atualizar os valores das variáveis de ligação no interior da malha. Isto pode ser feito por meio das equações (3.28), uma vez que nestes pontos as componentes do potencial vetor já foram atualizadas através das relações de recorrência (3.54-3.55).

3.2.4 Expressões para a magnetização e a integral do fluxóide

À medida que as equações para o parâmetro de ordem e para o potencial vetor são integradas, podemos utilizar a solução para estas variáveis no cálculo de grandezas físicas como por exemplo a magnetização e a integral do fluxóide. As expressões destas duas grandezas na forma discretizada são definidas abaixo.

A magnetização calcula-se de forma usual [7]:

$$M_z = \frac{\langle B_z - H_a \rangle}{4\pi} \approx - \frac{\sum \alpha \arg(U_{\alpha,n}) / a_i a_j - H_a}{4\pi}. \quad (3.67)$$

Calculamos a integral do fluxóide como a circulação do gradiente da fase do parâmetro de ordem [40]:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\Phi_0} \oint \nabla \phi ds \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha \in \Gamma} \arg(\bar{\psi}_\alpha \psi_{\alpha+1}) \quad (3.68)$$

onde α percorre, no sentido anti-horário, a fronteira do domínio supercondutor Γ ou qualquer outro domínio de interesse contido completamente dentro do supercondutor.

Sistema Bicamada tipo I/tipo II

4.1 Introdução

A compreensão do comportamento dos vórtices em supercondutores é interessante, desde a primeira nucleação de vórtices até sua total acomodação dentro da amostra. Isto depende de uma série de fatores, tais como: campo magnético aplicado e temperatura, geometria e tamanho da amostra, tipo de material, dentre outros. Além do mais, a variedade de configurações e ordenamento que os vórtices podem apresentar dentro do supercondutor mesoscópico são muito diferentes à apresentada pela rede de Abrikosov, sendo que um dos fatores que leva a isso é a geometria da amostra, que influencia fortemente o arranjo dos vórtices [35]. Neste trabalho escolhemos para nosso estudo amostras mesoscópicas com geometria quadrada para cada seção transversal, a qual é fácil de se obter experimentalmente.

Neste capítulo apresentamos em detalhe o sistema que estudamos bem como o modelo que descreve este tipo de sistema e os resultados obtidos.

O capítulo é distribuído como se segue: na seção 4.2 apresentamos o sistema e o modelo utilizado neste trabalho; na seção 4.3 detalhamos a metodologia utilizada para a realização dos diferentes cálculos computacionais e as grandezas física de interesse calculadas, e por último; na seção 4.4, mostramos e discutimos os resultados obtidos para cada uma das simulações.

4.2 Descrição do sistema

Em nosso trabalho estudamos um sistema de multicamadas supercondutoras no regime mesoscópico, constituído de uma camada supercondutora do tipo-II com espessura d_1 e uma camada supercondutora do tipo I com espessura d_2 , separadas por um material isolante muito fino de espessura s , na presença de um campo magnético aplicado H_a orientado na direção $\hat{z}$ (ver figura 4.1).

Consideramos amostras supercondutoras quadradas cuja espessura total da amostra ($d_1 + d_2 + s$) é muito menor do que a aresta de todos os quadrados supercondutores estudados neste

trabalho.

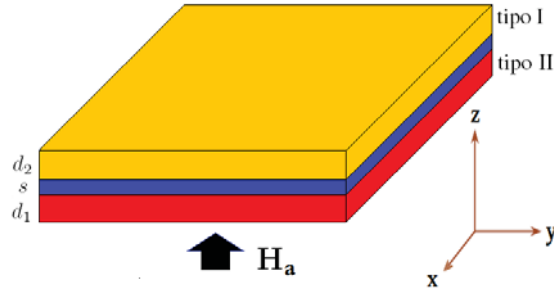


Figura 4.1 Sistema de bicamada supercondutora considerado: duas camadas supercondutoras separadas por uma camada isolante na presença de um campo magnético externo aplicado na direção z .

Este tipo de sistema pode ser estudado teoricamente pela teoria de Ginzburg-Landau (GL) complementada pelo acoplamento de Lawrence-Doniach (LD), conhecido na literatura como o modelo Lawrence-Doniach (LDGL), visto no Capítulo 2. Neste modelo, a energia livre é composta pela contribuição individual de cada camada, pelo termo de acoplamento LD e pela energia do campo magnético. A energia livre pode ser expressa da seguinte forma:

$$F_S = F_N + \sum_{n=1,2} d_n \int_S \left[\alpha_n |\Psi_n(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta_n |\Psi_n(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m_n} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \Psi_n(\mathbf{r}) \right|^2 \right] dS + \quad (4.1)$$

$$+ s \int_S \eta |p \Psi_2(\mathbf{r}) - \Psi_1(\mathbf{r})|^2 dS + \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{h} - \mathbf{H}_a)^2 dV.$$

Observa-se aqui que os condensados de pares de Cooper nas duas camadas são indexados por $n = 1, 2$ e descritos pelo parâmetro de ordem $\psi_n(\mathbf{r})$, assumindo este ser uniforme ao longo da espessura da camada d_n ; $\mathbf{H}_a$ denota o campo magnético aplicado e $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$ é o campo total local que contém a resposta do supercondutor. Os coeficientes $\alpha_n = -\alpha_{0n}(1 - T/T_{cn})$ e β_n são os coeficientes que vêm da teoria de GL, onde T_{cn} representa as temperaturas críticas de cada uma das camadas. A massa dos pares de Cooper em cada uma das camadas é representada por m_n . A variável η representa o acoplamento LD e é expressa como $\eta = \hbar^2/(2m_\perp s^2)$, em que $m_\perp$ é a massa efetiva dos pares de Cooper para o tunelamento entre as camadas e s é a espessura do material isolante. Finalmente, a variável $p = \exp(-i \frac{2e}{\hbar c} \int_0^s A_z dz)$ é o fator de fase que assegura a invariância de calibre.

Note que a última integral do funcional é considerada sobre todo o espaço, enquanto as duas primeiras integrais são assumidas uniformes ao longo da espessura do supercondutor e do espaçamento entre as camadas. Estas são integradas sobre a projeção da superfície em cada uma das camadas.

Minimizando o funcional de energia, com relação ao parâmetro de ordem ψ_n e ao potencial vetor $\mathbf{A}$ e fazendo $p = 1$ [41], obtemos as diferentes equações de LDGL para cada ψ_n e para $\mathbf{A}$.

Para os parâmetros de ordem obtemos:

$$\frac{1}{2m_1} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi_1 + \alpha\Psi_1 + \beta|\Psi_1|^2\Psi_1 + \frac{s\eta}{d_1}(\Psi_1 - \Psi_2) = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2m_2} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi_2 + \alpha\Psi_2 + \beta|\Psi_2|^2\Psi_2 + \frac{s\eta}{d_2}(\Psi_2 - \Psi_1) = 0, \quad (4.3)$$

e para o potencial vetor temos:

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = - \sum_{n=1,2} \frac{e}{m_n} \Re \left[\Psi_n^* \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \Psi_n \right]. \quad (4.4)$$

No calibre de Lorentz, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, e a equação para as supercorrentes se reduz a três equações diferenciais parciais de Poisson. Em outras palavras, temos que resolver três equações, uma para cada direção espacial. Se o fator de fase p é a unidade, temos que $A_z = 0$, o que implica que excluimos a corrente na direção z , ou seja, $j_z = 0$. Note que, assim, as supercorrentes vão fluir apenas dentro das respectivas camadas e, portanto, podem ser espacialmente separadas, ou seja, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, o que implica em:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4.5)$$

Para se trabalhar melhor com estas equações (4.2-4.4) é mais conveniente escrevê-las de uma forma adimensional como foi feito no capítulo anterior para as equações GL. Aqui, as equações LDGL adimensionais são obtidas da seguinte maneira:

- As distâncias são medidas em unidades do comprimento de coerência de um dos supercondutores. Neste caso, escolhemos o supercondutor da camada I como referência, $\xi_n(T) = \frac{\hbar}{|2m_n\alpha_n(T)|^{1/2}} = \frac{\xi_{j0}}{\sqrt{1-T/T_{cn}}}$.
- Os parâmetros de ordem são medidos em unidades de $\psi_{n0} = \psi_{n0}(T=0, \eta=0, \mathbf{H}=0) = \sqrt{-\frac{\alpha_{n0}}{\beta_n}}$.
- O potencial vetor é medido em unidades de $\frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{10}} = \frac{c\hbar}{e^*\xi_{10}}$ onde, $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{e^*}$.
- A energia livre do sistema é medida em unidades de $V\alpha_{10}^2/\beta_1$, onde V é o volume da amostra.
- A temperatura é medida em unidades de T_{c1} .

Em resumo, temos para as variáveis adimensionais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \xi_{10} \mathbf{r}', \\ \nabla = \frac{1}{\xi_{10}} \nabla', \\ \Psi_n(\mathbf{r}) = \psi'_n(\mathbf{r}') \psi_{n0}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{c\hbar}{2e\xi_{10}} \mathbf{A}'(\mathbf{r}'), \\ T = T' T_{c1}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(0)_{c2,1} \mathbf{H}'(\mathbf{r}'), \\ \Delta F = \frac{V\alpha_{10}^2}{\beta_1} F'. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

A seguir, passaremos a usar essas novas variáveis adimensionais, mas omitiremos o símbolo (') para simplificar a notação. Substituindo estas variáveis nas equações LDGL temos:

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi_1 - (1 - T) \psi_1 + |\psi_1|^2 \psi_1 + \frac{s\eta}{d_1 \alpha_{10}} \psi_1 - \frac{s\eta \delta}{d_1 \alpha_{10}} \psi_2 = 0, \quad (4.7)$$

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi_2 - \zeta(1 - T T_{cr}) \psi_2 + \zeta |\psi_2|^2 \psi_2 + \frac{s\zeta \eta}{d_2 \alpha_{20}} \psi_2 - \frac{\zeta s \eta}{\alpha_{20} \delta d_2} \psi_1 = 0. \quad (4.8)$$

Aqui foram definidas as variáveis $\delta = \frac{\psi_{20}}{\psi_{10}}$, $\zeta = \left(\frac{\xi_{10}}{\xi_{20}}\right)^2$, $T_{cr} = \frac{T_{c1}}{T_{c2}}$, $\tau_1 = (1 - T)$, $\tau_2 = (1 - T T_{cr})$ e $\Pi = (-i\nabla - \mathbf{A})$ (operador de momento canônico adimensional), para dar uma melhor apresentação a estas equações. Assim, as equações para o parâmetro de ordem assumem a forma:

$$-(\tau_1 - \frac{m_1}{m_\perp} \frac{\xi_{10}^2}{s d_1}) \psi_1 + |\psi_1|^2 \psi_1 + \Pi^2 \psi_1 - \frac{m_1}{m_\perp} \frac{\delta \xi_{10}^2}{s d_1} \psi_2 = 0, \quad (4.9)$$

e

$$-\left(\zeta \tau_2 - \frac{m_2}{m_\perp} \frac{\xi_{10}^2}{s d_2}\right) \psi_2 + \zeta |\psi_2|^2 \psi_2 + \Pi^2 \psi_2 - \frac{m_2}{m_\perp} \frac{\xi_{10}^2}{s d_2 \delta} \psi_1 = 0. \quad (4.10)$$

Para as supercorrentes obtemos:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\kappa_1^2} \Re(\psi_1^* \Pi \psi_1) + \frac{\zeta}{\kappa_2^2} \Re(\psi_2^* \Pi \psi_2) = \frac{1}{\kappa_1^2} \mathbf{J}_1 + \frac{\zeta}{\kappa_2^2} \mathbf{J}_2, \quad (4.11)$$

onde κ_1 e κ_2 são os respectivos parâmetros de GL para cada uma das camadas supercondutoras. A razão entre estes dois parâmetros relaciona-se com as variáveis já definidas anteriormente, através de:

$$\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} = \frac{m_1 \delta^2}{m_2 \zeta}. \quad (4.12)$$

Além do parâmetro de ordem e do potencial vetor, também calculamos a energia livre em

unidades adimensionais, a qual é expressa como:

$$\begin{aligned}
 \frac{F}{F_0} = & d_1 \int \left[-(1-T)|\psi_1|^2 + \frac{1}{2}|\psi_1|^4 + |(-i\nabla - \mathbf{A})\psi_1|^2 \right] dS \\
 & + \frac{\zeta^2 \kappa_1^2 d_2}{\kappa_2^2} \int \left[-(1 - \frac{TT_{c1}}{T_{c2}})|\psi_2|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2|^4 + \frac{1}{\zeta} |(-i\nabla - \mathbf{A})\psi_2|^2 \right] dS \\
 & + \frac{m_1}{sm_{\perp}} \int |\psi_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sqrt{\zeta \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2}} \psi_2|^2 dS + \kappa_1 \int (\mathbf{h} - H_a)^2 dV.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

As equações LDGL vistas anteriormente são um conjunto de equações diferenciais acopladas não-lineares. Uma solução analítica não é viável, exceto para poucas situações triviais. Buscaremos então resolver numericamente estas equações usando o método apresentado no capítulo 3, onde mapeamos os parâmetros de ordem ψ_1 e ψ_2 e o potencial vetor $\mathbf{A}$ em uma malha discreta dentro da amostra.

4.3 Metologia (Detalhes da Simulação)

As diferentes simulações realizadas neste trabalho seguiram os passos apresentados abaixo.

- Foram realizadas quatro simulações, para amostras de tamanhos diferentes. As amostras têm as seguintes dimensões $15\xi_{10} \times 15\xi_{10}$, $20\xi_{10} \times 20\xi_{10}$, $25\xi_{10} \times 25\xi_{10}$ e $30\xi_{10} \times 30\xi_{10}$, com células unitárias de tamanho $0.1\xi_{10} \times 0.1\xi_{10}$. Assim, temos malhas com 150×150 , 200×200 , 250×250 e 300×300 células unitárias.
- Para cada uma das simulações o estado inicial do sistema é o estado normal, ou equivalente, o parâmetro de ordem ψ_n é igual a zero, em todos os pontos da malha.
- Todos os cálculos nesta dissertação foram realizados segundo o processo de resfriamento com campo (FC, do inglês *field cooling*), onde para cada valor do campo magnético aplicado e partindo de $T = T_{c1}$, a amostra é resfriada diminuindo-se a temperatura em intervalos de $\Delta T = 0.01T_{c1}$ até um mínimo de $T_{min} = 0.1T_{c1}$. Assim a coleta de dados é feita para cada uma das temperaturas para um campo $\mathbf{H}_a$ específico. Consideramos um conjunto de campos $\mathbf{H}_a$, aplicados dentro de um intervalo de $\mathbf{H}_a = 0$ até $\mathbf{H}_a = 0.8H(0)_{c2,1}$. O incremento de $\mathbf{H}_a$ foi $\Delta\mathbf{H}_a = 0.01H(0)_{c2,1}$.
- Para cada valor de campo magnético o sistema é relaxado até se atingir um estado estacionário, o qual pode corresponder a um estado estacionário termodinâmico. O processo de relaxação é avaliado a partir das mudanças do parâmetro de ordem em todos os pontos

da malha. A cada 400 passos de integração, calculamos a variação da média do parâmetro de ordem da camada 1, $|\langle |\psi_{i,j}^{n_t+1}| \rangle - \langle |\psi_{i,j}^{n_t}| \rangle|$, onde n_t é o numero de passos. Se a variação for menor do que 10^{-5} [34], considera-se que o sistema alcançou um estado de equilíbrio e a simulação segue para o próximo conjunto de parâmetros. Nesta dissertação usa-se $\Delta n_t = 0.001$.

- Os materiais supercondutores escolhidos para cada camada foram: Nb para a camada I e o Sn para a camada II, com espessuras de $d_1 = 5\xi_{10}$ e $d_2 = 5\xi_{10}$, sendo a espessura do material isolante igual a $s = 0.05\xi_{10}$, os parâmetros característicos destes materiais são melhor resumidos na tabela (4.1).

material	ξ [nm]	λ [nm]	T_c [K]	κ
Nb	38	39	9.2	1.03
Sn	230	34	3.7	0.15

Tabela 4.1 Parâmetros característicos dos materiais utilizados nas simulações.

4.4 Resultados

Esta seção de resultados foi dividida em duas partes, com a motivação de observar como o comportamento da rede de vórtices muda com respeito ao tamanho da amostra e com relação ao acoplamento Josephson.

Na **Parte I**, estudamos o comportamento da rede de vórtices para os quatro tamanhos escolhidos, onde para cada um construímos um digrama de fase $H_a \times T$ para as configurações de vórtices. Mostramos também nesta seção o comportamento da distância média entre os vórtices com relação à diminuição da temperatura, e por último, apresentamos as curvas de magnetização.

Na **Parte II**, mostramos como o acoplamento Josephson afeta a rede de vórtices para a amostra de tamanho $(30 \times 30)\xi_{10}^2$.

4.4.1 Parte I

4.4.1.1 Diagramas de Fases

Nesta seção vamos classificar de uma forma compreensível os diferentes estados de vórtices encontrados em nossas simulações computacionais de um supercondutor bicamada. Na figura

(4.2) são apresentados os digramas de fases, relativos a cada um dos tamanhos de quadrados supercondutores considerados, obtidos através do processo FC.

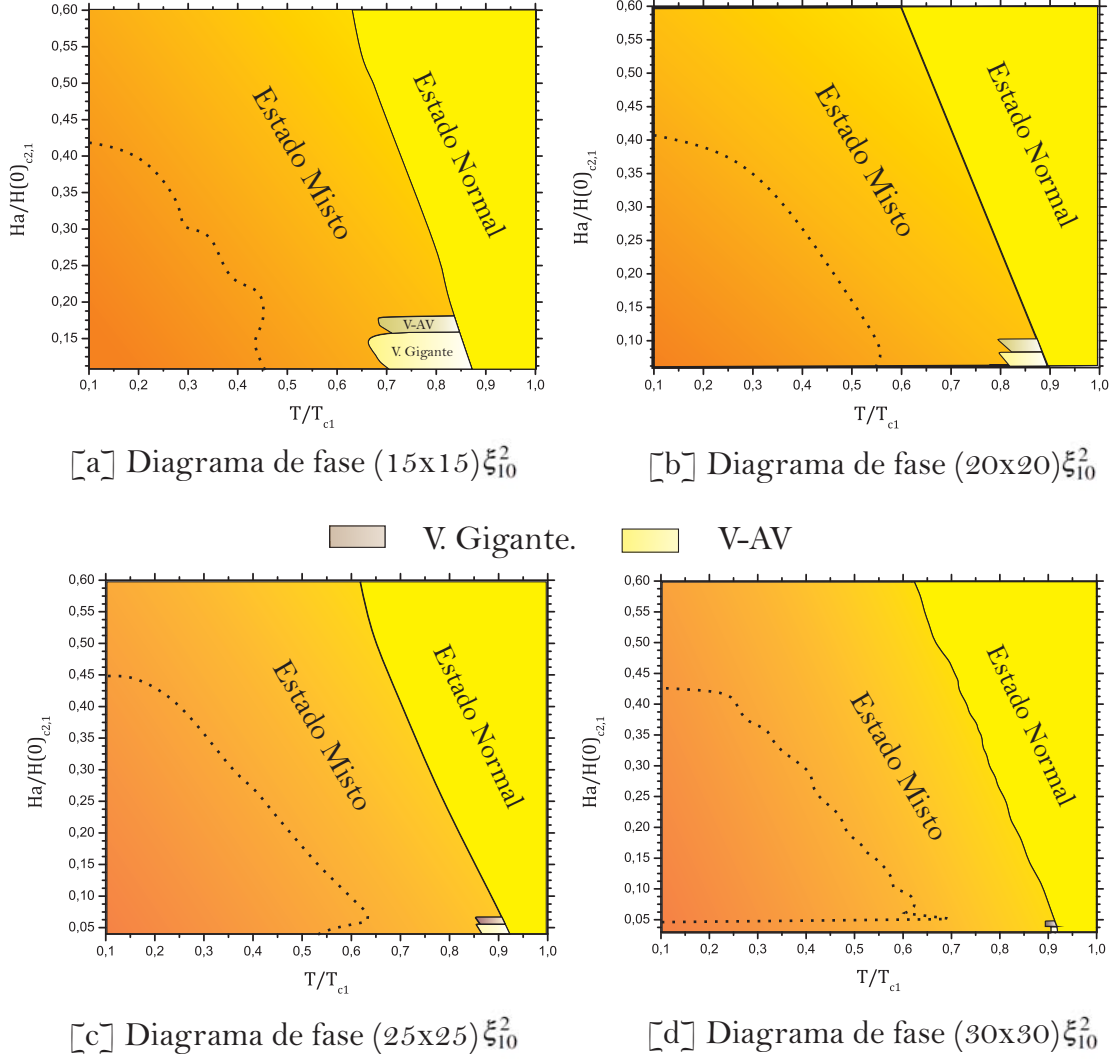


Figura 4.2 Diagrama de fase $H_a \times T$ para o acoplamento $m_{\perp} = 15m_1$ para os tamanhos de amostras considerados nesta dissertação. As regiões com diferentes cores identificam o comportamento da amostra com o campo aplicado quando a temperatura é diminuída. A região de cor amarela indica o estado normal, a de cor rosa indica o estado de vórtice gigante, a de cor marrom indica os estados Vórtice-Antivórtice e a de cor laranja os estados com multivórtices.

Cada ponto no diagrama corresponde a uma configuração de vórtices estável, para cada valor de vorticidade, L . Constatamos que todas as configurações são formadas por vórtices de ambas as camadas que compartilham o mesmo eixo, ou seja, não observamos vórti-

ces não-compósitos ou fracionários previstos para certos sistemas de dois componentes ([42], [43],[44]). Por isso, neste capítulo mostraremos nos gráficos somente a distribuição de $|\psi_1|^2$, visto que a distribuição de $|\psi_2|^2$ é semelhante àquela apresentada por $|\psi_1|^2$. Um esquema de uma configuração de vórtices pode ser vista na figura (4.3). Neste esquema, são apresentadas as densidades de pares de Cooper para cada camada em separado para uma vorticidade de $L = 2$.

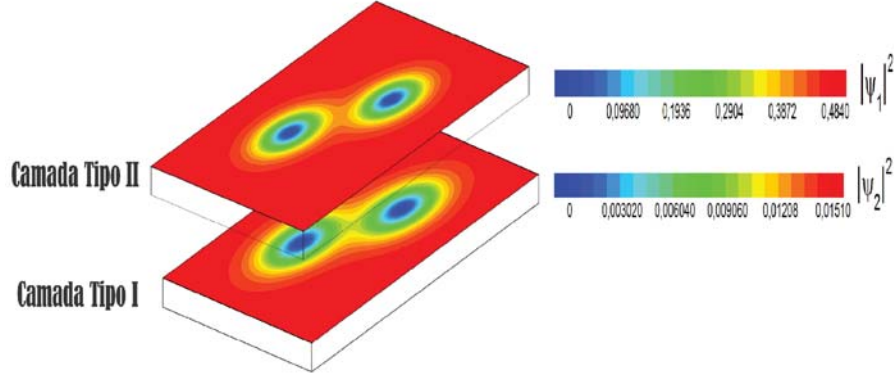


Figura 4.3 Densidade de pares de Cooper para cada uma das camadas supercondutoras da amostra. Acima está a camada I (supercondutor do tipo II), e abaixo está a camada II (supercondutor do tipo I).

Em cada diagrama foram excluídas as configurações com um só vórtice. Aquí só consideramos as configurações com $L \geq 2$, onde nosso interesse foi observar o comportamento destes vórtices variando-se a temperatura.

Os diagramas de fases foram constituídos para um acoplamento entre as camadas de $m_{\perp} = 15m_1$. Este valor de $m_{\perp}$ é considerado um acoplamento forte como será visto mais adiante. Nestes diagramas pode-se identificar, além do estado normal, quatro fases diferentes para as configurações de equilíbrio: uma pequena região que identificamos como sendo estados de vórtices gigantes, outra pequena região de estados vórtice-antivórtice e uma região de multivórtices subdividida em duas fases de vórtices. Estas duas fases de vórtices presentes na região de multivórtices se distinguem pelo comportamento da distância média entre os vórtices em função da temperatura, T , que é crescente em uma das fases ao se diminuir T e decrescente na outra fase. O aumento desta distância média é relacionado a interação repulsiva entre os vórtices, enquanto a diminuição da distância média é devido a presença de uma interação não-monotônica, repulsiva em curto alcance e atrativa em longo alcance. Cada uma das transições entre as fases estão indicadas por curvas no diagrama.

A região onde observamos vórtices gigantes (VG), é uma região que se apresenta para campos pequenos e vorticidade $L = 2$. Este tipo de vórtice se forma em supercondutores onde o confinamento imposto pela geometria é tão forte que é energeticamente mais favorável o

aparecimento de um único vórtice com vários quantum de fluxo, caracterizado por um mínimo na densidade de pares de Cooper e uma múltipla mudança de 2π na fase do parâmetro de ordem ([33],[45],[34]).

Por outro lado, note que esta região vai diminuindo à medida que o tamanho da amostra aumenta. Isto se deve ao menor efeito de confinamento sobre os vórtices ao se aumentar o tamanho da amostra, o que favorece a forte interação repulsiva entre os mesmos. As faixas de campo aplicado e temperatura onde os estados de vórtice gigante são observados, podem ser vistos na tabela (4.2).

Tamanho	Campo Aplicado	Faixa de temperatura
$(15 \times 15) \xi_{10}^2$	$0.11 H(0)_{c2,1}$	$(0.87-0.71)T_{10}$
	$0.12 H(0)_{c2,1}$	$(0.87-0.69)T_{10}$
	$0.13 H(0)_{c2,1}$	$(0.87-0.69)T_{10}$
	$0.14 H(0)_{c2,1}$	$(0.86-0.68)T_{10}$
	$0.15 H(0)_{c2,1}$	$(0.85-0.67)T_{10}$
$(20 \times 20) \xi_{10}^2$	$0.06 H(0)_{c2,1}$	$(0.90-0.82)T_{10}$
	$0.08 H(0)_{c2,1}$	$(0.90-0.81)T_{10}$
	$0.09 H(0)_{c2,1}$	$(0.89-0.80)T_{10}$
$(25 \times 25) \xi_{10}^2$	$0.04 H(0)_{c2,1}$	$(0.91-0.87)T_{10}$
	$0.05 H(0)_{c2,1}$	$(0.90-0.85)T_{10}$
$(30 \times 30) \xi_{10}^2$	$0.03 H(0)_{c2,1}$	$(0.91-0.90)T_{10}$

Tabela 4.2 Faixas de temperatura para cada uma das amostras e valor do campo magnético onde se tem a presença de vórtices gigantes.

Além dos estados de vórtice gigante temos outra fase em cada um dos diagramas, onde observamos configurações vórtice-antivórtice (V-AV). Estes tipos de configurações são comuns em sistemas mesoscópicos, principalmente em amostras supercondutoras quadradas sujeitas a um campo externo ([40],[46],[47],[48]). Esta região possui vorticidade $L = 3$, sendo a configuração formada por quatro vórtices e um antivórtice.

A configuração encontrada aqui para estes estados é composta de quatro vórtices formando um quadrado (vorticidade positiva) e um antivórtice no meio do quadrado (vorticidade negativa), como pode ser visto na figura (4.4). Este tipo de configuração com simetria quadrada é uma consequência do confinamento produzido pelo tamanho e geometria da amostra.

Os estados V-AV são contraintuitivos e bastante difíceis de se explicar em termos habituais. No entanto, através da análise da teoria de GL linear, Chibotaru *et al* [49] previram a sua estabilidade em supercondutores quadrados. Ou seja, na teoria linear, a geometria da amostra

traduz-se diretamente sobre os estados dos vórtices. Como consequência, para vorticidade $L = 3$, temos três quantum de fluxo capturados pela amostra. Entretanto para este tipo de estado, a configuração mais favorável é aquela com quatro vórtices formando um quadrado com um antivórtice no meio do que aquela com três vórtices a formar uma configuração triangular.

Para uma melhor visualização construímos o gráfico da densidade de pares de Cooper, com vorticidade $L = 3$ para duas temperaturas diferentes, uma abaixo e outra acima da temperatura de nucleação de V-AV (T_{V-AV}) (ver figura 4.4). Para $T < T_{V-AV}$, temos o estado misto ou estado multivórtices que é um estado estável e onde se pode distinguir cada um dos três vórtices na configuração triangular usual de Abrikosov. No entanto, para $T > T_{V-AV}$, observamos dentro de cada uma das configurações, cinco mínimos, correspondentes a quatro vórtices (cor branca) e ao antivórtice no centro (cor preta).

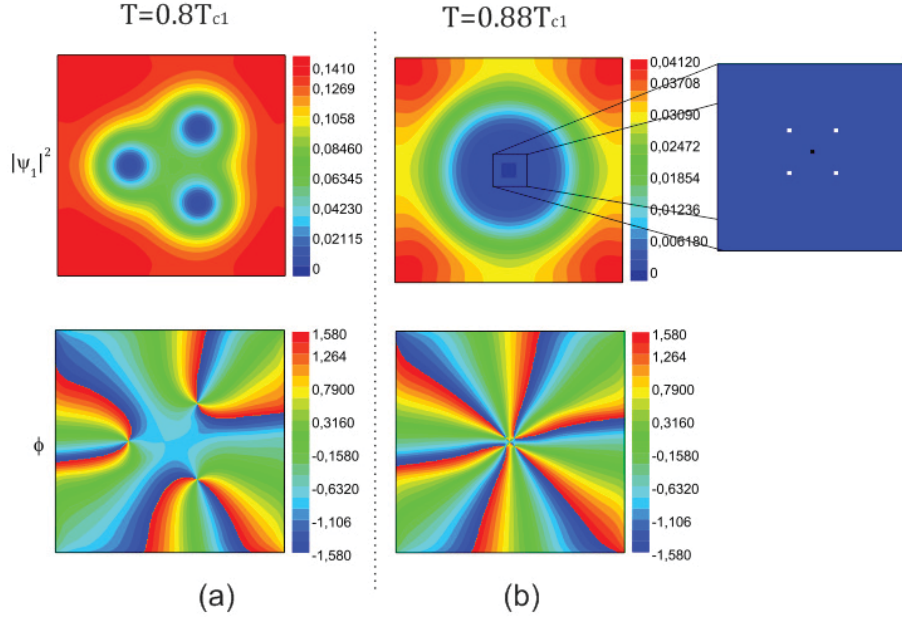


Figura 4.4 Densidade de pares Cooper (em cima) e distribuição de fase (em baixo) para o estado com vorticidade $L = 3$ para uma amostra de $(25 \times 25)\xi_{10}^2$, (a) $T = 0.8T_{c1}$ e $H_a = 0.06H(0)_{c2,1}$, (b) $T = 0.88T_{c1}$ e $H_a = 0.06H(0)_{c2,1}$. Com respeito à fase, uma mudança de azul para vermelho em um caminho fechado indica uma variação de π para $-\pi$.

Para identificar os diferentes vórtices na amostra, usamos o seguinte critério. Para calcular as diferentes posições (x_i, y_j) de cada um dos vórtices, calculamos a vorticidade em cada ponto da malha computacional com a seguinte expressão:

$$\arg(\psi_{i,j}^* \psi_{i,j+1}) + \arg(\psi_{i,j+1}^* \psi_{i+1,j+1}) + \arg(\psi_{i+1,j+1}^* \psi_{i+1,j}) + \arg(\psi_{i+1,j}^* \psi_{i,j}) = 2\pi N. \quad (4.14)$$

Onde $\psi_{i,j} = \psi(x_i, y_j)$ é o parâmetro de ordem complexo discretizado e $\arg(\psi)$ é o argumento desse número complexo que pertence ao intervalo $(\pi, -\pi)$ [40]. N na equação (4.14) mede a vorticidade no ponto da malha. Para $N = 1$ temos um vórtice, $N = -1$ um antivórtice e para $N = 0$ não há vórtice na célula. Assim, encontramos com facilidade este tipo de configuração. Para efeito de confirmação verificamos também a fase do parâmetro de ordem, mostrado na figura (4.4), já que o gradiente da fase indica a direção da corrente. As mudanças de fase no sentido horário de azul para vermelho indicam a presença de vórtices enquanto que o contrário indica a presença de antivórtices.

Vemos que à medida que o tamanho da amostra vai aumentando este tipo de confinamento vai diminuindo. Na tabela (4.3) expressamos os campos para os quais encontramos os estados V-AV.

Tamanho	Campo Aplicado	Faixa de temperatura
$(15 \times 15)\xi_{10}^2$	$0.16 H(0)_{c2,1}$	$(0.85-0.71)T_{10}$
	$0.17 H(0)_{c2,1}$	$(0.84-0.70)T_{10}$
	$0.18 H(0)_{c2,1}$	$(0.83-0.68)T_{10}$
$(20 \times 20)\xi_{10}^2$	$0.09 H(0)_{c2,1}$	$(0.87-0.82)T_{10}$
	$0.18 H(0)_{c2,1}$	$(0.87-0.80)T_{10}$
$(25 \times 25)\xi_{10}^2$	$0.06 H(0)_{c2,1}$	$(0.89-0.86)T_{10}$
$(30 \times 30)\xi_{10}^2$	$0.04 H(0)_{c2,1}$	$(0.91-0.90)T_{10}$

Tabela 4.3 Faixa de temperaturas e valor do campo magnético para cada uma das amostras onde se tem a presença de estados vórtice-antivórtice.

A região que chamamos de "Estado Misto" nos diagramas da figura (4.2) se refere a configurações somente formadas para vórtices com $L > 1$. Esta região pode ser subdividida em duas fases distintas que discutiremos a seguir. Para uma melhor fluência da discussão que se segue identificaremos as amostras de tamanho $(15 \times 15)\xi_{10}^2$, $(20 \times 20)\xi_{10}^2$, $(25 \times 25)\xi_{10}^2$ e $(30 \times 30)\xi_{10}^2$ pelas letras A, B, C e D, respectivamente.

Para o estudo da região com baixa densidade de vórtices, em cada uma das amostras A, B, C e D, foram escolhidos cinco estados diferentes, com vorticidades $L = 2, 6, 7, 9, 11$. Estes estados foram escolhidos de uma forma conveniente, sendo que qualquer outra escolha não mudaria drasticamente nossa discussão. Para cada um destes valores de L queremos ver principalmente como a rede de vórtices se comporta dentro de cada amostra à medida que a temperatura diminui. A escolha de comparar os estados com o mesmo valor de L em todas as amostras teve como motivação investigar de que forma o tamanho influencia no comportamento da rede de vórtices.

Uma observação geral do comportamento de cada uma das redes de vórtices ao se aplicar o processo FC mostra que a temperatura tem uma influência direta sobre a simetria da rede e principalmente sobre as forças de interação entre os vórtices, já que durante todo o processo a rede sofre mudanças, produzindo assim uma variedade de estados metaestáveis. Estes estados metaestáveis são o produto do reordenamento dos vórtices na procura de diminuir a energia do sistema. Dentro deste processo de procura da mínima energia, alguns destes estados de equilíbrio preservam algumas simetrias do quadrado (simetrias com relação aos eixos que passam pelo meio dos lados do quadrado e pelos eixos diagonais).

O comportamento de cada uma das redes aqui encontradas para alguns valores de L em cada uma das amostras A, B, C e D são apresentados nas figuras de (4.5) até (4.8). Em cada figura foram escolhidos os estados mais representativos, para mostrar como é a mudança da rede ao se diminuir T .

Iniciaremos a análise das configurações de vórtices fixando o valor de L e comparando as respectivas configurações para os diversos tamanhos de amostra A, B, C e D. Para alguns valores de L , as configurações de vórtices não dependem substancialmente do tamanho da amostra.

Comparando-se o caso $L = 2$ para os diversos tamanhos de amostra considerados nas figuras (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8), nota-se que esta apresenta um comportamento particular dependendo destes tamanhos. Primeiramente vemos que a configuração que os vórtices adotam é simétrica com relação a uma das diagonais do quadrado. Para amostras A, B e C os dois vórtices tendem primeiro a se repelir para temperaturas suficientemente altas e a se atrair ao se diminuir a temperatura, formando dímeros no centro de cada amostra. Por sua vez, para amostras de dimensões maiores que ou igual a D, nota-se na figura (4.8) e (4.9) que os vórtices, ao invés de se atrair para baixas temperaturas, preferem permanecer bem próximos a superfície aumentando até a distância de separação entre os mesmos. Este é principalmente um efeito de superfície, onde os vórtices tendem a ser atraídos para as bordas do supercondutor, já sendo observado em simulações computacionais de supercondutores de dois componentes como pode ser visto no trabalho de Geurts *al et* [43]. Aqui, vemos que este efeito de superfície ocorre para $L = 1, 2$ e 3 (baixa densidade de vórtices). Já para $L = 1$ este efeito ocorre para todos os tamanhos de amostra consideradas e para $L = 2, 3$ a ocorrência deste efeito depende do tamanho da amostra. Isto está resumido na figura (4.9).

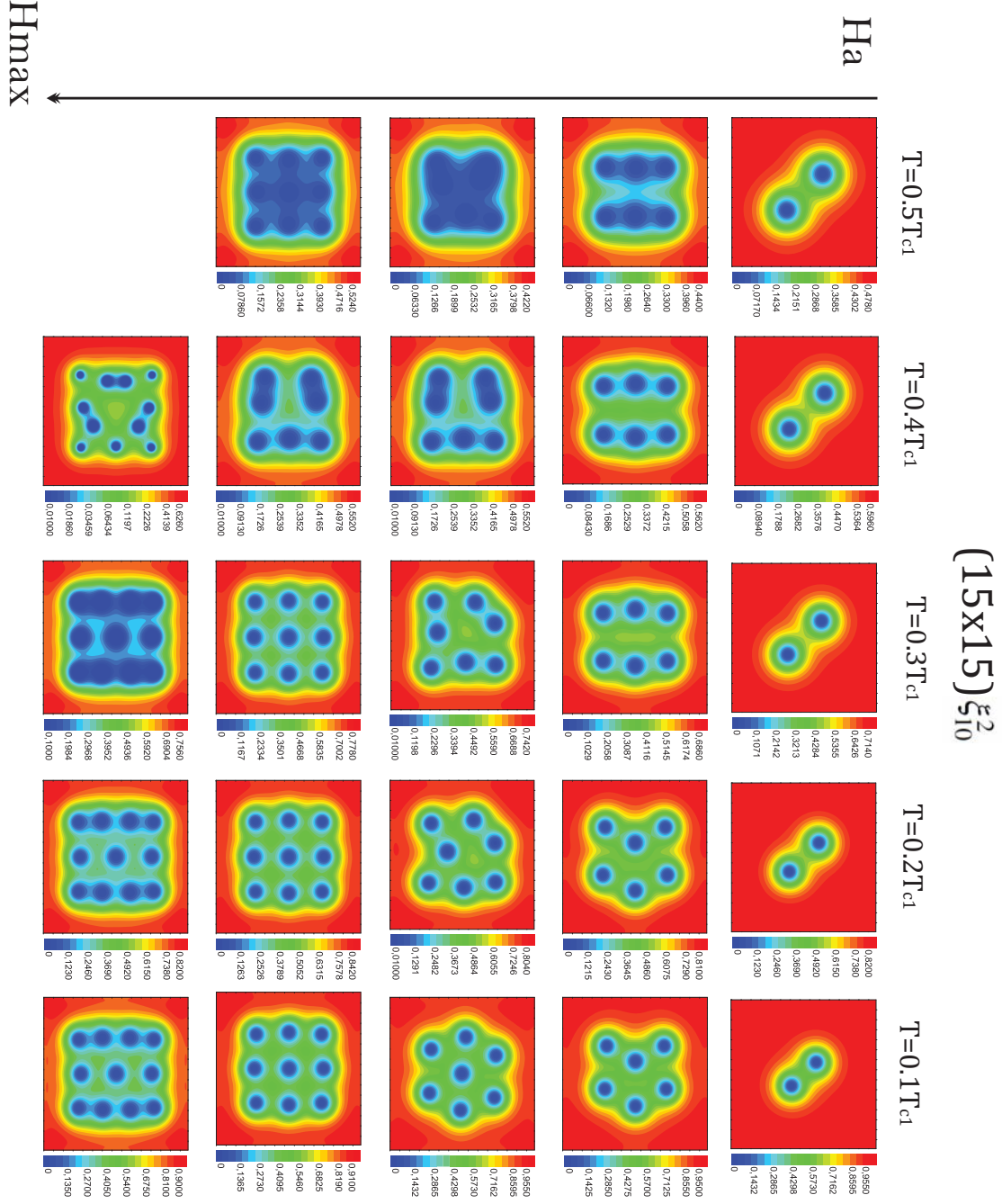


Figura 4.5 Evolução da estrutura de vórtices para o tamanho $(15 \times 15) \xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuimos a temperatura de $T = 0.5T_{c1}$ até $T_{min} = 0.1T_{c1}$, para 2,6,7,9,11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.11, 0.26, 0.31, 0.37, 0.44$, respectivamente.

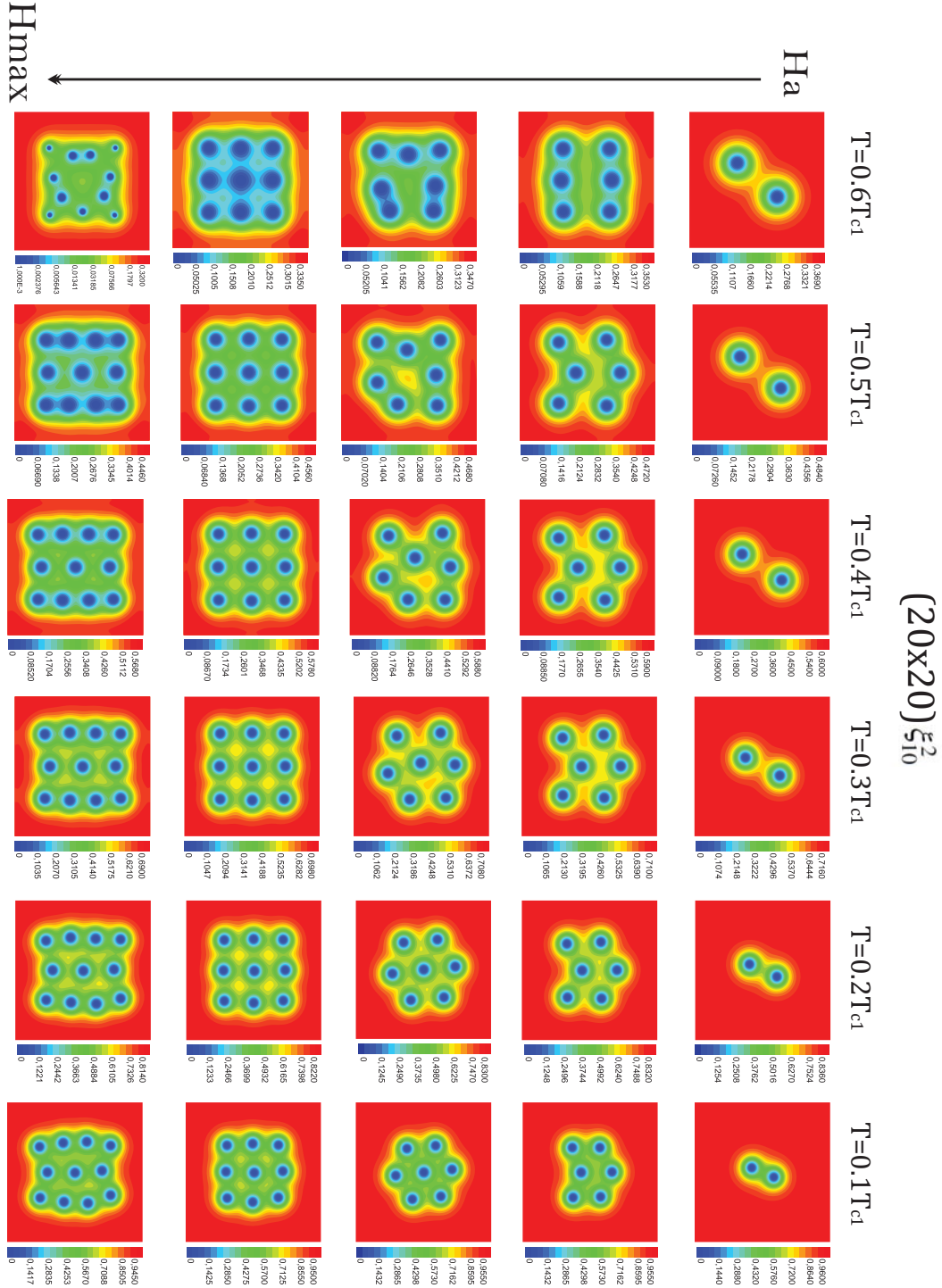


Figura 4.6 Evolução da estrutura de vórtices para o tamanho $(20 \times 20)\xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuimos a temperatura de $T = 0.6T_{c1}$ até $T_{min} = 0.1T_{c1}$, para 2,6,7,9,11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.06, 0.15, 0.18, 0.21, 0.25$, respectivamente.

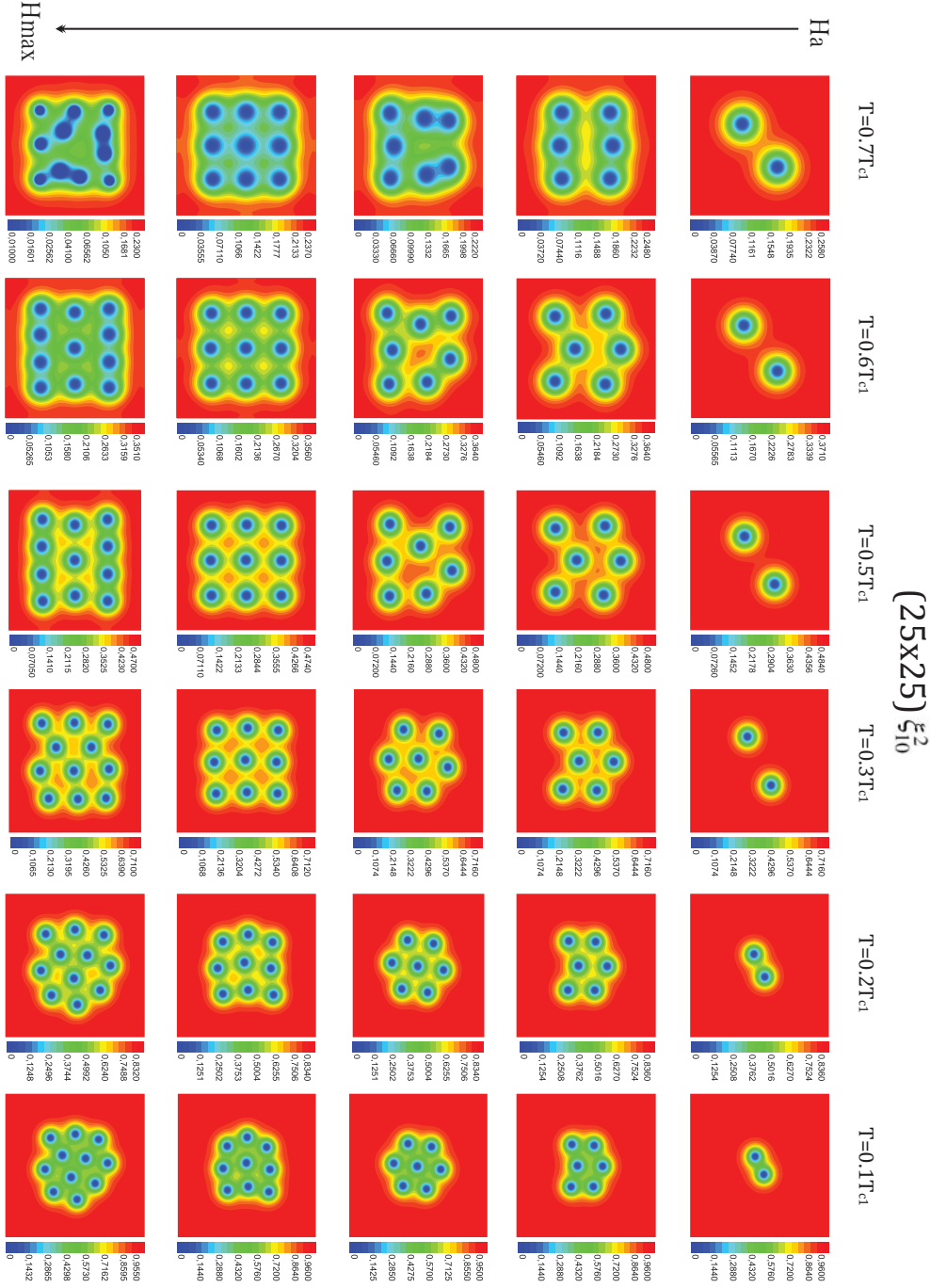


Figura 4.7 Evolução da estrutura de vórtices para tamanho $(25 \times 25)\xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuimos a temperatura de $T = 0.7T_{c1}$ até $T_{min} = 0.1T_{c1}$, para 2, 6, 7, 9, 11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.04, 0.1, 0.11, 0.14, 0.16$, respectivamente.

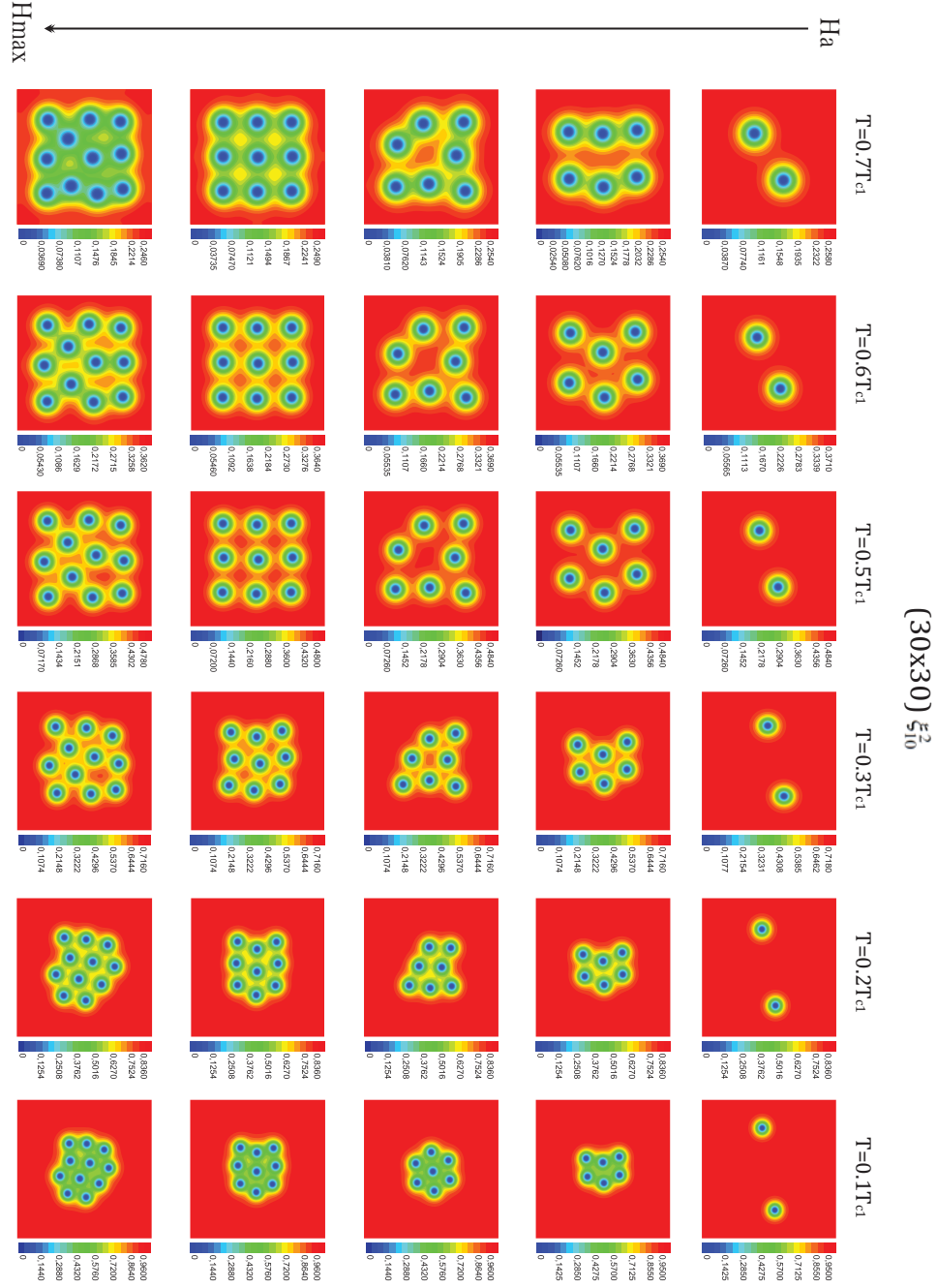


Figura 4.8 Evolução da estrutura de vórtices para o tamanho $(30 \times 30)\xi_{10}^2$, quando aumentamos o campo aplicado $(H)_a$, e diminuímos a temperatura de $T = 0.7T_{c1}$ até $T_{\min} = 0.1T_{c1}$, para 2,6,7,9,11 vórtices. A densidade de pares de Cooper para a camada I é mostrada para campos $H_a = 0.03, 0.07, 0.074, 0.094, 0.11$, respectivamente.

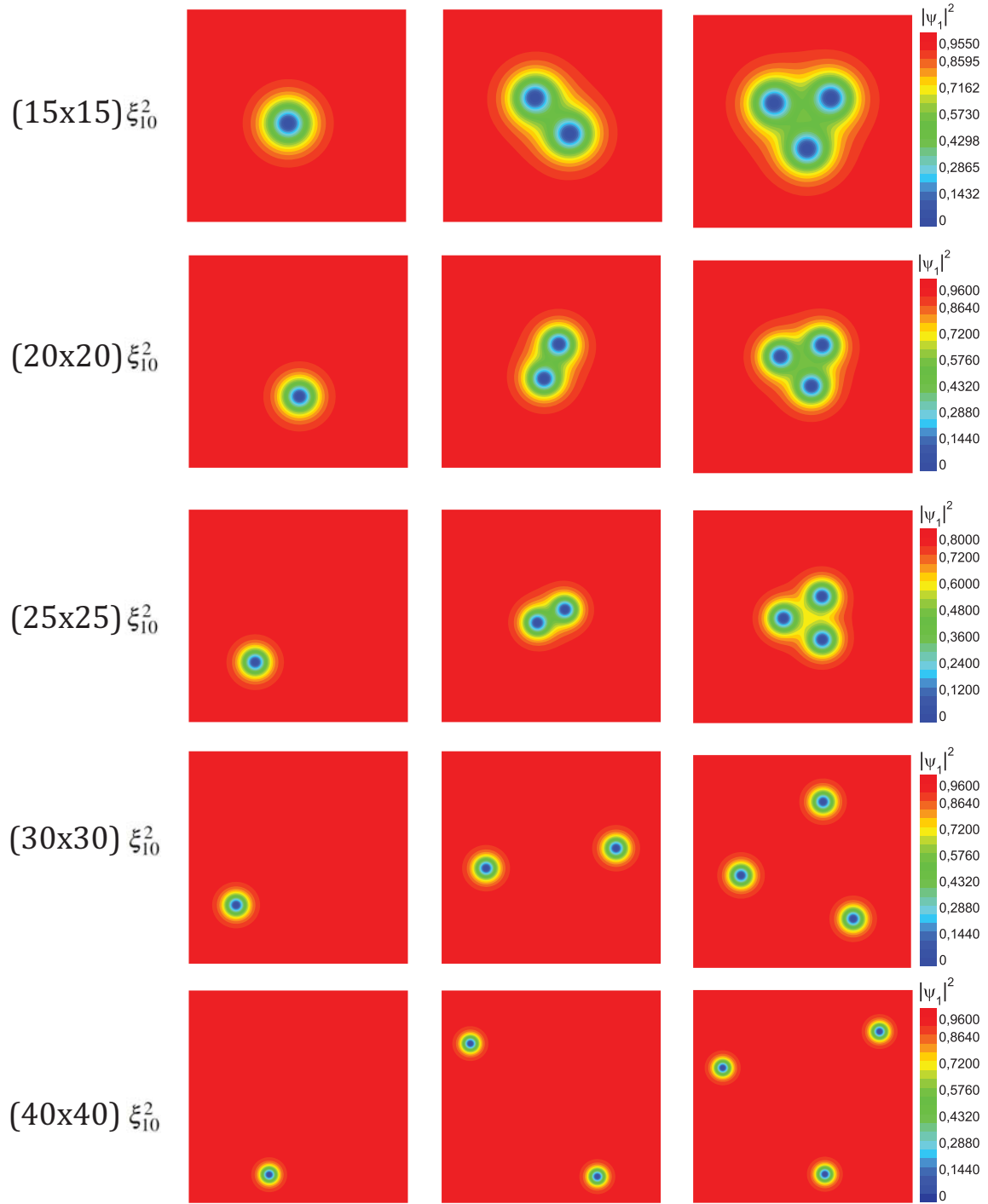


Figura 4.9 Configurações para um, dois e três vórtices para as amostras A, B, C, D e E, mostrando a interação não-monotônica entre os vórtices para as amostras A, B e C enquanto que para D e E é observado uma atração dos vórtices pela superfície.

Para o caso $L = 6$, notamos primeiramente que para os diferentes tamanhos o comportamento dos vórtices é muito semelhante. Observamos que em cada uma das amostras a rede de vórtices pode assumir duas configurações: inicialmente, uma onde os vórtices estão alinhados com relação a um dos eixos em grupos de três, sendo esta configuração simétrica em relação aos eixos que passam pelo meio dos lados do quadrado, e outra para valores mais baixos de T onde eles adotam uma configuração em forma de zigue-zague, havendo assim uma quebra de simetria da configuração dos vórtices com relação à simetria da amostra, onde agora a rede só é simétrica com relação a um dos eixos. Esta última configuração é preservada até o sistema alcançar a mínima temperatura. Para os tamanhos B, C e D observamos que os vórtices sentem uma forte interação atrativa, formando assim uma espécie de aglomerado em relação ao centro de cada amostra, mas este aglomerado mantém a mesma simetria da forma de zigue-zague.

Para $L = 7$, notamos que o sistema passa por vários estados de equilíbrio, mas com um comportamentos semelhantes para as quatro amostras. Primeiro a rede adota uma configuração simétrica em relação a um dos eixos perpendiculares ao lado do quadrado. Posteriormente tem-se uma configuração simétrica com relação a uma das diagonais do quadrado. Por fim, a rede adota uma configuração na forma de hexágono com um vórtice no centro. Igualmente como acontece no caso anterior, $L = 6$ vemos que esta rede, na verdade, forma um aglomerado, pois como pode ser inferido principalmente das figuras (4.6), (4.7) e (4.8) a distância média diminui ao se diminuir T .

Para $L = 9$, a rede de vórtices possui uma simetria quadrada, seguindo a geometria da amostra. À medida que T diminui esta simetria tende a ser preservada para os tamanhos A e B. Entretanto, para os tamanhos C e D, ocorre uma quebra de simetria da rede com respeito à amostra, já que para baixas temperaturas os vórtices tendem a formar aglomerados que possuem uma simetria hexagonal.

Para $L = 11$, inicialmente a rede de vórtices tem um comportamento similar para as amostras A e B, sendo simétrica em relação a um eixo perpendicular a um dos lados do quadrado. Para a amostra C, inicialmente, o eixo de simetria da rede é uma das diagonais do quadrado. A configuração inicial da amostra D não possui uma simetria definida. Ao se diminuir T as configurações assumem uma simetria com relação a ambos os eixos perpendiculares aos lados do quadrado. Para as amostras A e B, esta simetria se conserva até se chegar a T_{min} . Para a amostra C, a rede assume uma nova configuração para $T \sim T_{min}$. Tanto para C como para D, observamos que a configuração de vórtices continua mudando principalmente por efeito da atração dos vórtices, perdendo assim sua simetria do quadrado, e levando os vórtices à formação de um aglomerado que simetria hexagonal.

Algumas das configurações encontradas neste trabalho já foram observadas em alguns outros trabalhos teóricos e experimentais principalmente as obtidas para $L = 2, \dots, 10$ como as

reportadas por H.J. Zhao *et al* [35], e Chau Yu liu *et al* [50].

Em cada um dos diagramas de fase expostos anteriormente a região que é marcada como estado misto foi dividida em duas fases, sendo estas fases separadas por uma linha tracejada. A partir desta linha tem-se a presença da interação não-monotônica (repulsiva em curto alcance e atrativa em longo alcance) entre os vórtices induzindo a formação de aglomerados.

Para melhor caracterização desta região de multivórtices, com respeito a forma de interação entre os vórtices, nós calculamos a distância média (R) entre os vórtices em função da temperatura para vários valores de L . A figura (4.10) ilustra os gráficos de $R \times T$ para os valores de vorticidade $L = 2, 3, 4, 6, 7$ e 11. Cada curva em cada gráfico corresponde a um dos tamanhos de amostras A, B, C ou D.

Com estes tipos de gráficos é fácil ver como é o comportamento dos vórtices à medida que as distintas amostras são resfriadas, e principalmente, vemos como as distintas interações afetam a distância média entre os vórtices. A distância média crescente ao se diminuir T é relacionada à interação repulsiva entre os vórtices, enquanto que a distância média decrescente ao se diminuir T é devida à presença de uma interação não-monotônica. Estes gráficos para vários valores de L foram uma ferramenta muito importante na classificação das distintas fases em cada um dos diagramas de fase.

No geral, quase todas as curvas na figura (4.10), possuem uma parte relacionada ao estado normal onde não há a presença de vórtices e que corresponde a $R = 0$, uma parte onde R aumenta ao se diminuir a temperatura e uma outra parte onde R diminui ao se diminuir T . Note que T faz o papel de um parâmetro que regula o tipo de interação entre vórtices. Para altos valores de T a interação entre vórtices é predominantemente repulsiva, o que leva ao aumento da distância entre os vórtices. Para baixos valores de T a interação não-monotônica entre os vórtices predomina devido a uma maior competição entre as bicamadas supercondutoras nesta região de temperatura.

É importante notar na figura (4.10) que o efeito exposto acima é mais pronunciado nas amostras maiores, Para a amostra menor, como pode-se perceber na mesma figura, a curva $R \times T$ é quase constante, sendo menos evidenciadas as regiões onde R aumenta ou diminui. Isto se deve ao forte confinamento imposto por esta amostra aos vórtices. Isto gera uma alta densidade de vórtices que favorece a interação repulsiva entre estes mais do que nas amostras de maior tamanho. Note que R , para $T \sim T_{min}$, é independente do tamanho B, C ou D indicando que a posição de equilíbrio dos vórtices para amostras maiores ou iguais a B é independente do tamanho destas, mas depende somente da forma da interação não-monotônica entre os vórtices.

As exceções ao comportamento discutido acima ocorrem para uma densidade de vórtices muito baixa, onde aparentemente um efeito de superfície se torna importante, Na figura (4.10-a) e (4.10-b) vemos que para $L = 2$ e $L = 3$ respectivamente, a distância entre vórtices continua

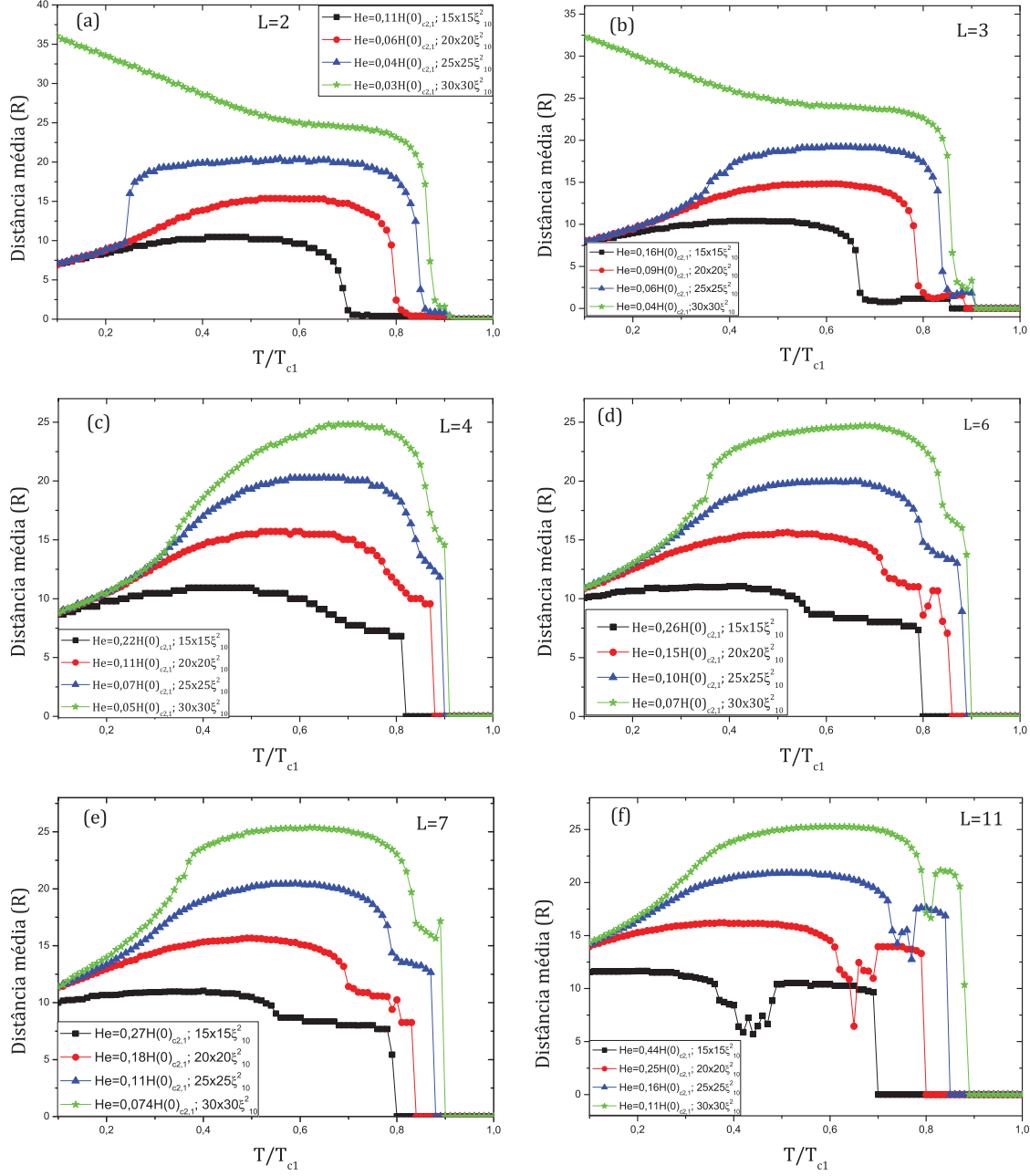


Figura 4.10 Relação da distância media com respeito à temperatura para as amostras A, B, C e D com $L = 2$ gráfico (a), $L = 3$ gráfico (b), $L = 4$ gráfico (c), $L = 6$ gráfico (d), $L = 7$ gráfico (e) e $L = 11$ gráfico (f), para o sistema bicamada.

crescendo ao se diminuir T . Na figura (4.9) mostramos que os vórtices, na verdade, procuram sua posição de equilíbrio perto das bordas da bicamada supercondutora.

Na figura (4.10-f), as curvas $R \times T$ para $L=11$ apresentam reentrâncias que não estão presentes nos outros casos. Observamos, tanto para este valor de L , quanto para outros maiores que uma acomodação dos vórtices ocorre para altas temperaturas. Primeiro uma quantidade de vórtices $N_v < L$ é nucleada após o estado normal. Estes vórtices entram e se acomodam dentro da amostra e a distância entre vórtices aumenta em uma pequena faixa de T . Assim que a temperatura decresce ainda mais, os demais vórtices entram até que $N_v = L$ é alcançado. A reentrância observada nestas curvas acontece por conta desta entrada de vórtices que diminui a distância média entre estes, pois a sua densidade aumenta bruscamente após esta entrada.

Para efeito de comparação, simulamos um quadrado supercondutor do tipo-II (do tamanho das amostras B e D) cujos parâmetros são iguais àqueles da camada I da bicamada supercondutora (ver tabela (4.1)). No caso da bicamada supercondutora, temos como ingredientes principais que influenciam as configurações de equilíbrio, o efeito de confinamento produzido pelas correntes de blindagem, e a forma de interação entre os vórtices que, como vimos anteriormente, têm a temperatura como um parâmetro de controle. No caso de um supercondutor convencional do tipo-II a interação entre vórtices é sempre repulsiva, independente do valor de T .

Algumas configurações de vórtices para $L = 6, 7, 9$ e 11 , para as amostras supercondutoras do tipo-II de tamanhos B e D são apresentadas nas figuras (4.11) e (4.12), respectivamente. Basicamente, todas as configurações mostradas nas figuras (4.11) e (4.12) foram encontradas para as amostras B e D (ver figuras (4.6) e (4.8)) em bicamadas supercondutoras a altas temperaturas. Isto confirma que para valores altos de T a interação entre os vórtices é predominantemente repulsiva no sistema de bicamadas supercondutoras. Por outro lado, ao compararmos as curvas $R \times T$ obtidas para a bicamada supercondutora (ver figura (4.13)), constatamos uma grande diferença no comportamento das curvas para temperaturas relativamente baixas. Enquanto que para as bicamadas supercondutoras, em geral, as curvas decrescem após um valor de R máximo, para o supercondutor do tipo-II as curvas permanecem constantes para um grande intervalo de temperatura que se estende até T_{min} .

Portanto, conclui-se que os diferentes estados de equilíbrio de vórtices resultam de uma competição entre a interação dos vórtices com as correntes de blindagem (que na verdade representam o efeito da geometria da amostra) e o potencial de interação entre os vórtices, que no caso de supercondutores do tipo-II a interação é repulsiva e para o caso das bicamadas estudadas, o potencial de interação tem um comportamento não-monotônico para uma certa faixa de temperatura.

Observe que na curva $R \times T$ para a amostra com tamanho $(30 \times 30)\xi_{10}^2$ (gráfico 4.13-b), o comportamento da curva para $L = 2$, é muito semelhante obtidas para a bicamada (ver gráfico 4.10-a). Este tipo de comportamento pode ser devido a perda de precisão computacional ao se

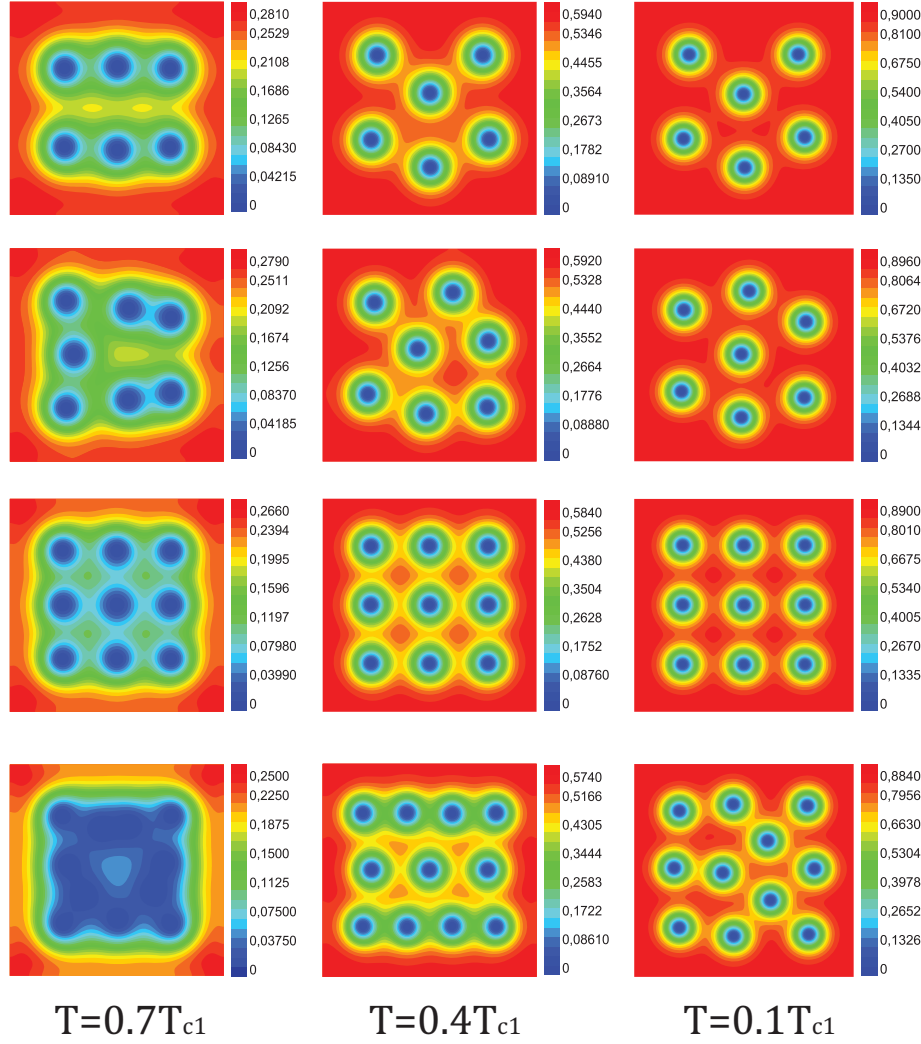


Figura 4.11 Evolução da estrutura de vórtices no supercondutor do tipo-II, para o tamanho $(20 \times 20)\xi^2$, quando aumentamos o campo aplicado (H_a), e diminuimos a temperatura, para 6, 7, 9, 11.

aumentar o tamanho da amostra.

4.4.1.2 Comportamento da Magnetização

Nesta seção descrevemos a magnetização em função de T para vários valores de H_a ao se aplicar o processo FC nas amostras de bicamadas supercondutoras, comparando-a com os resultados para $R \times T$ correspondente ao mesmo processo. Para cada curva mostrada na figura (4.10) exibiremos a sua curva correspondente $M \times T$. A importância da discussão de $M \times T$ se deve ao fato da magnetização ser uma grandeza mais fácil de ser medida experimentalmente

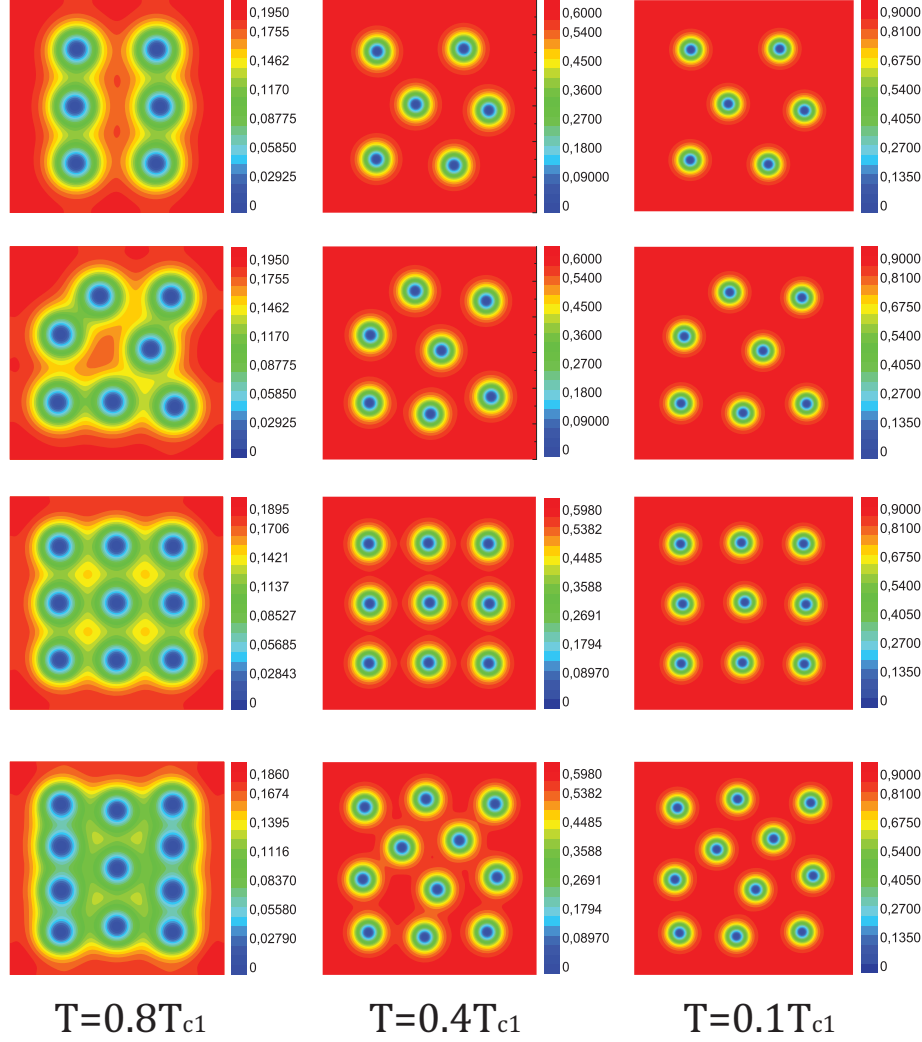


Figura 4.12 Evolução da estrutura de vórtices no supercondutor do tipo-II, para o tamanho $(30 \times 30)\xi^2$, quando aumentamos o campo aplicado (H_a), e diminuimos a temperatura, para 6, 7, 9, 11.

do que a distância média entre vórtices.

As curvas $M \times T$ mostradas na figura (4.14), em geral, possuem pelo menos dois regimes distintos. O primeiro destes tem uma forma aparentemente parabólica e é encontrado após o estado normal ao se diminuir T . O outro regime está relacionado a um comportamento linear de $M \times T$ que ocorre a partir de uma certa temperatura T' . Comparando este valor de T' com o valor de T onde ocorre os máximos da distância média entre vórtices, notamos uma correlação entre estes dois valores de T . Isto pode indicar que para um sistema de bicamadas supercondutoras esta mudança de comportamento de $M \times T$ de aproximadamente parabólica para linear está associada à mudança do tipo de interação entre vórtices, de repulsiva para

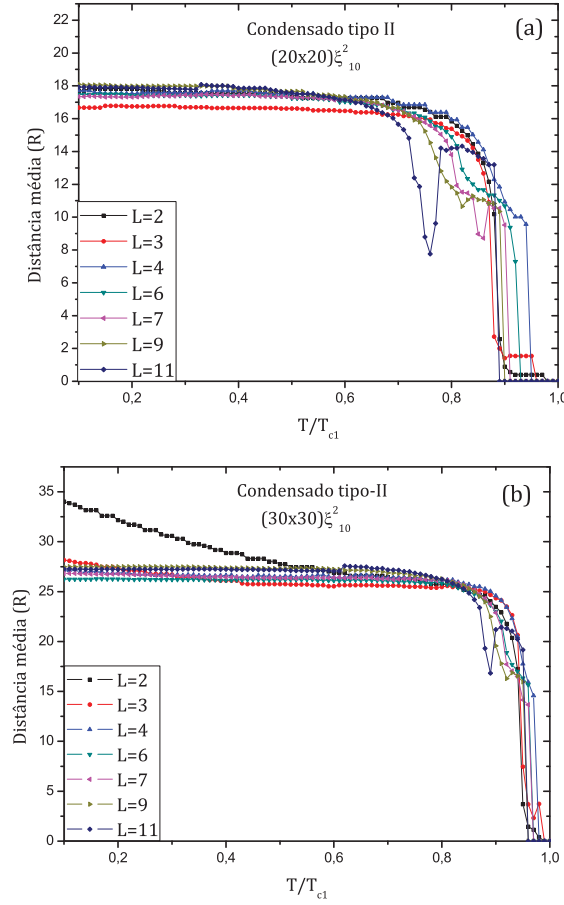


Figura 4.13 Relação da distância média entre vórtices com respeito à temperatura para as amostras (a) B e (b) D para um supercondutor do tipo II em um processo FC.

uma interação não-monotônica onde os vórtices formam um aglomerado. Escolhendo uma das curvas que aparecem na figura (4.14) (escolhendo a curva para $L = 4$, para a amostra C), fizemos um ajuste parabólico perto da temperatura de nucleação da supercondutividade e um ajuste linear perto de T_{min} , como pode ser visto na figura (4.15). Nosso intuito foi clarificar a discussão colocada acima. Note que, aproximadamente, a temperatura de crossover entre os dois principais regimes de $M(T)$ é bem próxima da temperatura onde R_{max} ocorre para o mesmo L e tamanho de amostra considerados.

Um outro aspecto importante, mas que não está relacionado à mudança da forma de interação entre os vórtices, é uma ligeira mudança de concavidade na região onde os vórtices se repelem. Isto pode ser visto, por exemplo, na curva para a amostra B da figura (4.14-d). Esta mudança de concavidade é devido à mudança da configuração de vórtices, ver figura (4.10)

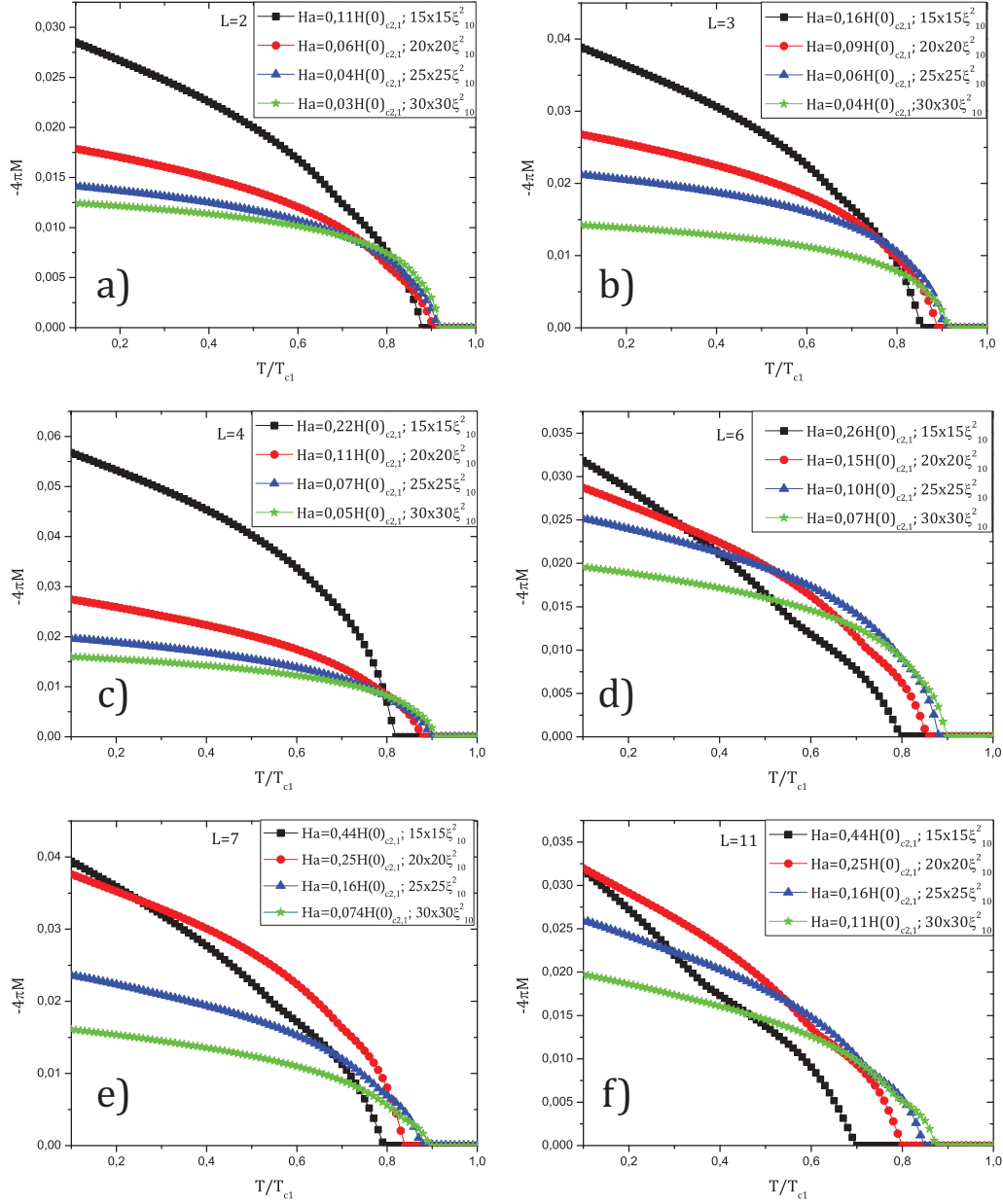


Figura 4.14 Cálculos de magnetização em função da temperatura para seis diferentes estados de vorticidade $L = 2, 3, 4, 6, 7$ e 11 . Cada um dos gráficos corresponde a um valor de L . O campo magnético aplicado correspondente a cada curva é mostrado no canto superior único direito de cada painel.

para o caso $L = 6$, por exemplo.

Tendo como base os dados para $M(T)$ segundo o processo FC para vários valores de campo aplicado, extraímos a dependência $M(H)$ para T fixo. Os gráficos da figura (4.16) são separa-

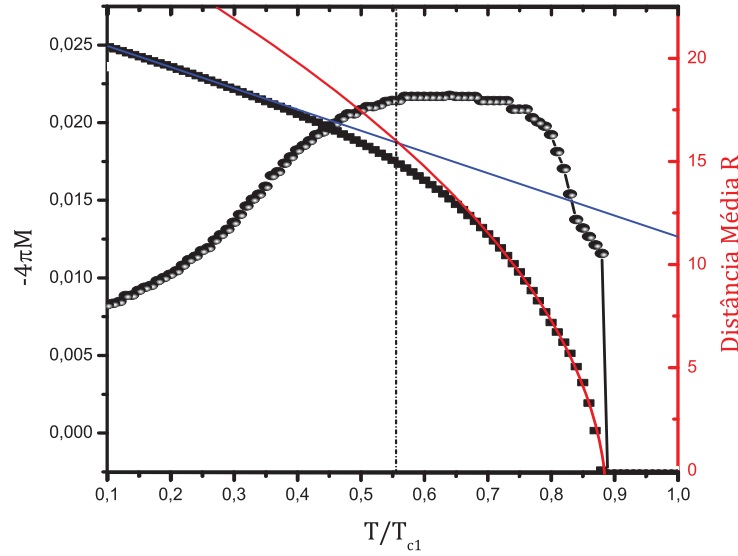


Figura 4.15 Ajuste linear e parabólico (cor Azul) para a curva de Magnetização para $L = 4$ na amostra C, e comparação entre as curvas de Magnetização e Distância Média.

dos segundo o tamanho da amostra sendo que (a),(b),(c) e (d) nesta figura correspondem aos tamanhos A, B, C e D, respectivamente.

A região linear de $M(H)$ perto da origem corresponde ao estado Meissner, sendo que esta região é menor para amostras maiores, mostrando que as amostras menores impõe uma maior resistência à presença de vórtices. O comportamento "serrilhado" de $M(H)$ é característico de amostras mesoscópicas onde estas descontinuidades são relacionadas à entrada de vórtices na amostra. Em nosso caso não construímos uma história magnética para $M(H)$ pois utilizamos o processo FC para obtenção das grandezas físicas. Mas estas descontinuidades em $M(H)$ encontradas, principalmente na figura (4.16-a), são também uma consequência da mudança do número de vórtices dentro da amostra. Isto pode ser visto no inset desta figura que associa a cada intervalo linear de $M(H)$ um valor de L .

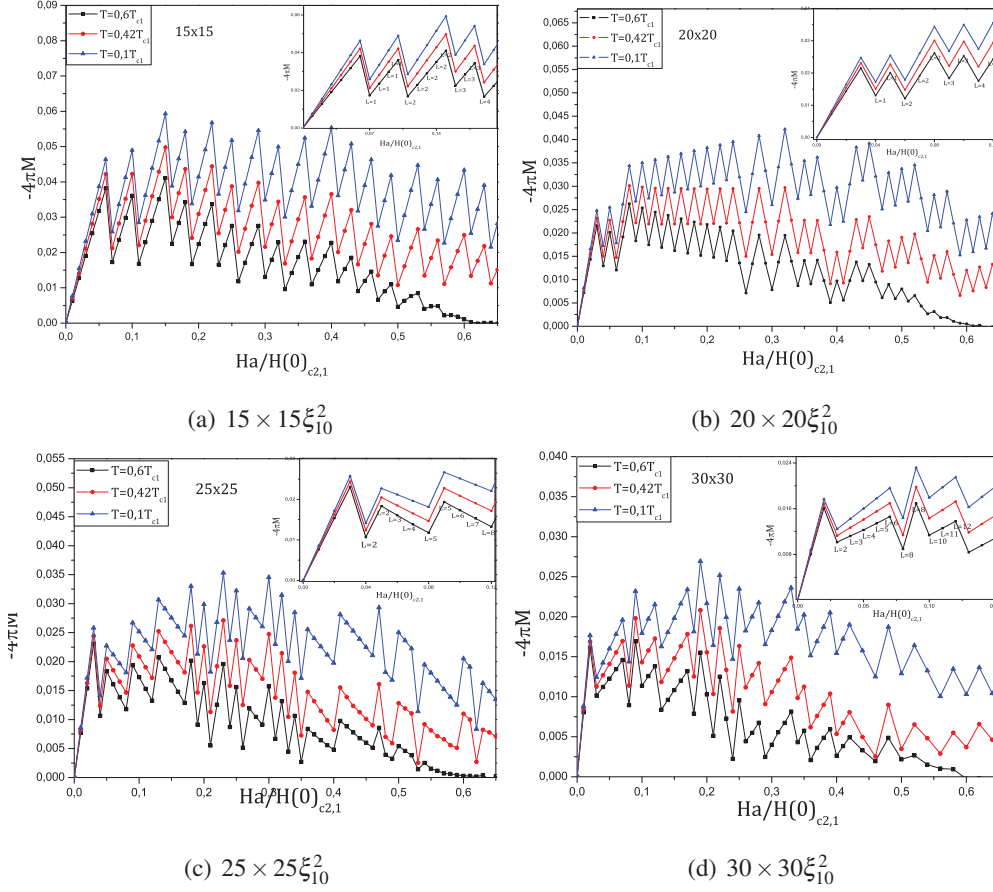


Figura 4.16 $M \times H_a$ para as amostras A, B, C e D, para temperaturas $T = 0.6, 0.42, 0.1$. No canto superior direito é mostrada uma aplicação da região perto de $H_a = 0$, onde fica evidente como varia a vorticidade de cada amostra em relação ao campo aplicado.

4.4.2 Parte II

4.4.2.1 Variação do acoplamento Josephson entre as camadas supercondutoras

Nesta seção veremos como se modifica a estrutura dos vórtices ao se variar o acoplamento eletrônico entre as camadas. Para realizar este estudo tomamos a amostra D, de tamanho $(30 \times 30)\xi_{10}^2$, com uma variação do termo $m_{\perp}$, num intervalo de $m_1 \leq m_{\perp} \leq 50m_1$, sob o mesmo processo FC para três valores diferentes de campo magnético aplicado $H_a = 0.1, 0.2, 0.3H(0)_{c2,1}$.

Nas figuras (4.17-4.19), mostramos como varia a configuração de vórtices à medida que mudamos o termo de acoplamento entre as camadas. As configurações aqui mostradas são as correspondentes à camada I (supercondutor do tipo-II). Esta evolução das configurações vai desde um acoplamento forte até um acoplamento mais fraco, já que o termo de acoplamento que impõe o modelo de Lawrence-Doniach depende do inverso da massa efetiva.

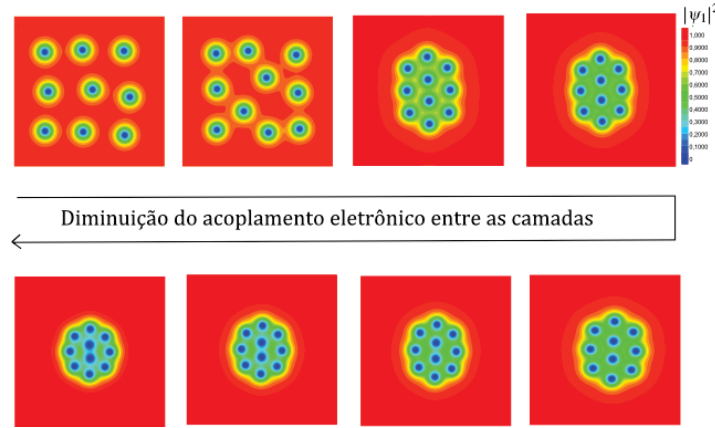


Figura 4.17 Evolução da estrutura de vórtices quando aumentamos $m_{\perp}$, ou seja, diminuimos o acoplamento eletrônico entre as camadas, para um campo magnético aplicado $H_a = 0.1H(0)_{c2,1}$; os painéis de (a)-(h) mostram a densidade dos pares de Cooper para a camada I (tipo II) para $m_{\perp}/m_1 = 1, 5, 11, 16, 21, 31, 41, 50$ respectivamente.

Vemos que quando temos o acoplamento eletrônico forte, observamos uma distribuição homogênea da rede de vórtices pela amostra, indicando assim o forte caráter repulsivo entre vórtices, este comportamento é semelhante para os três campos estudados e é regido pelo comportamento da camada do tipo-II, que tende a formar a rede de Abrikosov. À medida em que se aumenta o valor de $m_{\perp}$ (diminuindo o acoplamento eletrônico), encontramos que estes tipos de configurações vão mudando, provocando uma transição de configurações de vórtices de uma rede homogênea para uma configuração de aglomerado, havendo uma mudança de simetria.

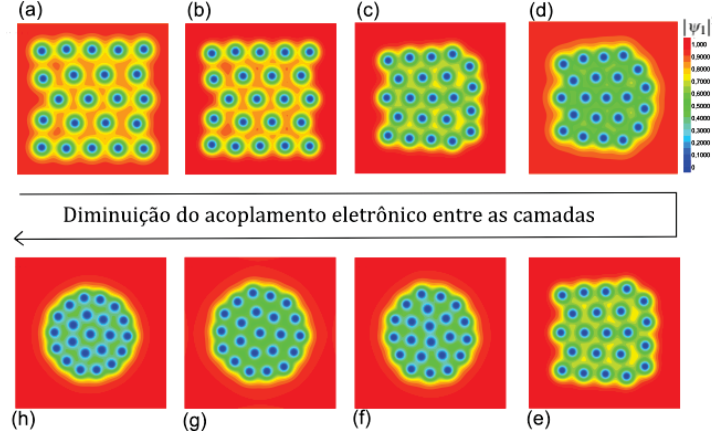


Figura 4.18 Evolução da estrutura de vórtices quando aumentamos $m_{\perp}$, ou seja, diminuimos o acoplamento eletrônico entre as camadas, para um campo magnético aplicado $H_a = 0.2H(0)_{c2,1}$; os painéis de (a)-(h) mostram a densidade dos pares de Cooper para a camada I (tipo II) para $m_{\perp}/m_1 = 1, 5, 11, 16, 21, 31, 41, 50$ respectivamente.

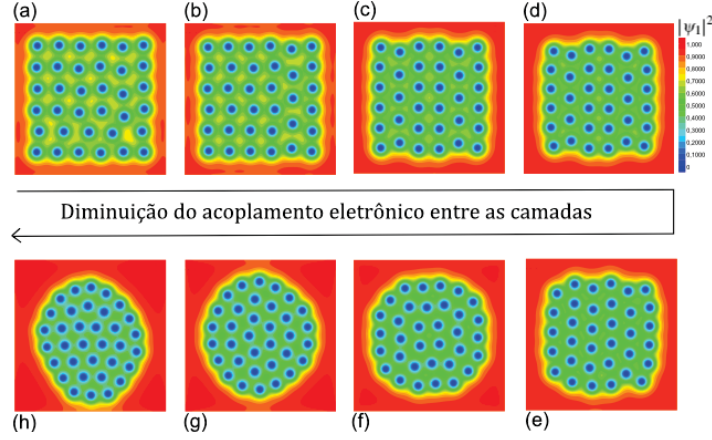


Figura 4.19 Evolução da estrutura de vórtices quando aumentamos $m_{\perp}$, ou seja, diminuimos o acoplamento eletrônico entre as camadas, para um campo magnético aplicado $H_a = 0.3H(0)_{c2,1}$; os painéis de (a)-(h) mostram a densidade dos pares de Cooper para a camada I (tipo II) para $m_{\perp}/m_1 = 1, 5, 11, 16, 21, 31, 41, 50$ respectivamente.

Igualmente, podemos ver como é que varia a distância entre os vórtices para cada campo aplicado quando diminuimos a temperatura. Na figura (4.20) a distância entre os vórtices, R , em função da temperatura é apresentada para vários valores de $m_{\perp}$. Para $m_{\perp}$ muito baixo, a forma de $R \times T$ é semelhante àquela encontrada para supercondutor do tipo-II mostrada na figura (4.13-b). Enquanto que para valores altos de $m_{\perp}$ e baixas temperaturas, esta distância média, R , é consideravelmente menor do que a encontrada para valores muito baixos de $m_{\perp}$.

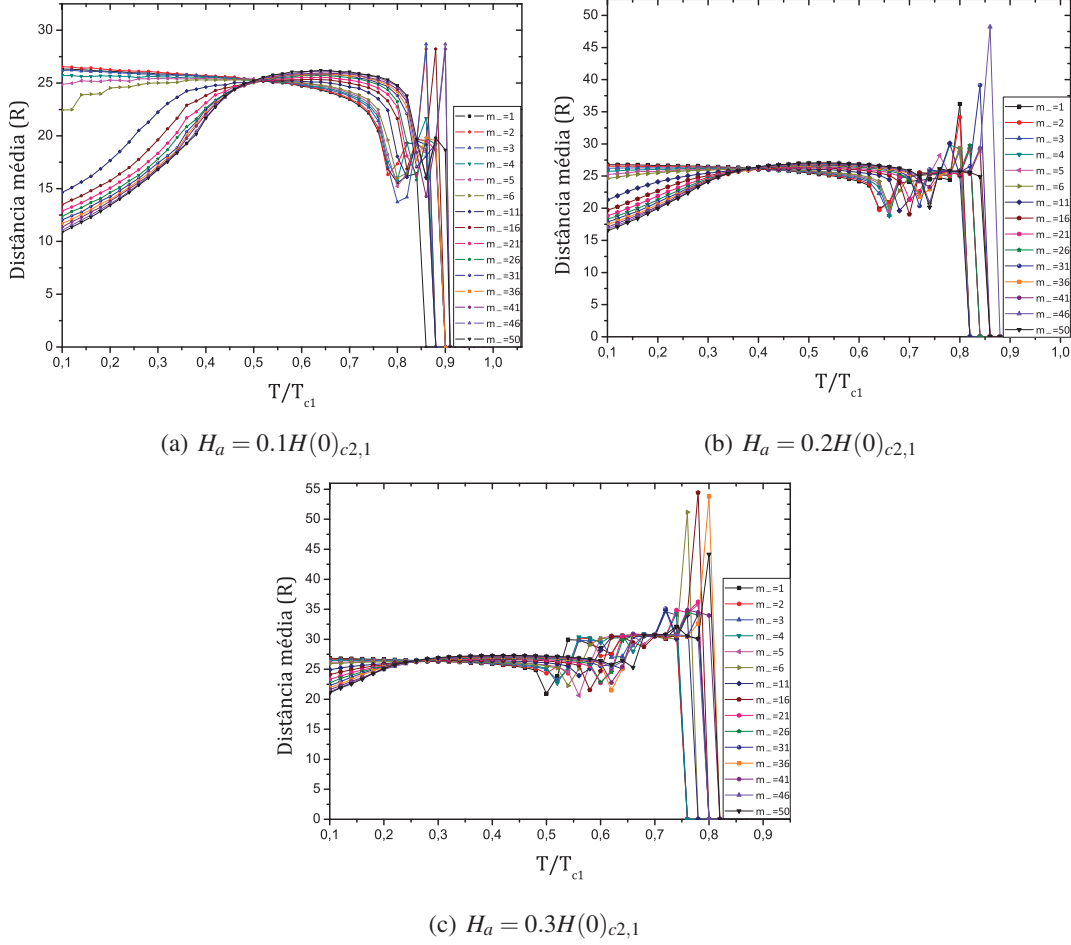


Figura 4.20 Variação da distância média entre os vórtices para três estados diferentes dentro da amostra $(30 \times 30)\xi_{10}^2$, para vários acoplamentos $m_1 \leq m_{\perp} \leq 50m_1$.

Também vemos na figura (4.20) que as curvas tendem a se agrupar em dois conjuntos distintos ao se diminuir H_a , e que, ao se aumentar H_a , as curvas $R \times T$ tendem também para a forma encontrada para o supercondutor do tipo-II. Isto mostra que acoplamentos eletrônicos fortes ou densidades de vórtices altas favorecem o comportamento de supercondutores do tipo-II nas bicamadas supercondutoras. Por sua vez, densidades de vórtices moderadas e baixo acoplamento eletrônico entre as camadas favorece o acoplamento magnético entre estas que parece reforçar as características dos supercondutores do tipo-I na bicamada supercondutora, levando à formação de aglomerados.

CAPÍTULO 5

Conclusões

Neste trabalho foi estudado um sistema supercondutor bicamada composto de uma camada supercondutora do tipo-I e de uma camada supercondutora do tipo-II separadas por um material isolante, através de simulações computacionais para quatro amostras quadradas de tamanhos mesoscópicos diferentes.

Utilizamos o modelo de Lawrence-Doniach, que tem sido um dos modelos utilizados para trabalhar sistemas multicamadas em supercondutores, para se obter as diferentes equações de LDGL para cada ψ_n e para A . Por meio do método das variáveis de ligação, estas equações foram discretizadas em duas dimensões, para assim se implementar o algoritmo computacional usado no cálculo das grandezas físicas de interesse.

Através do processo de resfriamento com campo (FC) obtivemos diagramas de fases (onde cada ponto destes diagramas representa um estado estável de vórtices) para quatro tamanhos de amostras quadradas supercondutoras. Em cada diagrama foram identificadas quatro fases distintas além do estado normal. Foram identificadas as fases de vórtices gigantes e de vórtices-antivórtice, cuja região de aparecimento destas fases é altamente influenciada pelo confinamento imposto pela amostra, já que esta região diminui ao se aumentar o tamanho da amostra.

Dentro da região nomeada de estado misto, a distância média entre vórtices em função da temperatura mostrou que esta região pode ser dividida em duas sub-regiões, uma sub-região onde a distância média entre os vórtices aumenta e outra onde a distância média diminui ao se diminuir T . À primeira sub-região associamos uma interação repulsiva entre os vórtices enquanto que à segunda sub-região associamos uma interação repulsiva de curto alcance e atrativa em longo alcance.

Para baixas vorticidades, observamos que para as amostras A, B e C para $L = 2$ e 3 os vórtices tendem primeiro a se repelir para temperaturas suficientemente altas e a se atrair ao se diminuir a temperatura. Por sua vez, para amostras de dimensões maiores ou iguais que D, nota-se que os vórtices, ao invés de se atrair para baixas temperaturas, preferem permanecer bem próximos à superfície aumentando até a distância de separação entre os mesmos. Este é um efeito de superfície, onde os vórtices tendem a ser atraídos para as bordas do supercondutor.

Para o comportamento da magnetização com relação à temperatura, identificamos pelo menos dois regimes distintos. O primeiro destes tem uma forma aparentemente parabólica e é encontrado após o estado normal ao se diminuir T . O outro regime está relacionado a um comportamento linear a partir do valor de T onde ocorre os máximos da distância média entre os vórtices. Isto pode indicar que para um sistema de bicamadas supercondutoras esta mudança de comportamento de $M \times T$ de aproximadamente parabólica para linear está associada à mudança do tipo de interação entre vórtices, de repulsiva para uma interação não-monotônica onde os vórtices formam um aglomerado.

Finalmente, fez-se uma análise de como o acoplamento Josephson entre as camadas influencia as características supercondutoras da bicamada, levando a concluir que para valores de acoplamento eletrônico forte a amostra apresenta o comportamento de um supercondutor do tipo-II, enquanto que diminuindo-se o acoplamento eletrônico, foi encontrada uma transição de configurações de vórtices de uma rede homogênea para uma configuração de aglomerado de vórtices, indicando a forte influência da camada do tipo-I em toda a bicamada.

Referências

- [1] H. K. Onnes. The resistance of pure mercury at helium temperatures. *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* **12** (1911):120+.
- [2] H. Hosono. An accidental discovery breathes new life into superconductivity research! *JST Breakthrough Report* **Vol. 7**, (2013):28–29.
- [3] U. Essmann and H. Trauble. The direct observation of individual flux lines in type II superconductors. *Physics Letters* **24A** (1967):526.
- [4] Y. Iye. How anisotropic are the cuprate high T_c superconductors. *Comments Cond. Mat. Phys.* **16** (1992):877–891.
- [5] Ginzburg V. L. and Landau L. On the theory of superconductivity. *Zhurnal Eksperimentalnoi I Teoreticheskoi Fiziki* **20** (1950):1064–1082.
- [6] W. Lawrence and S. Doniach. In: *Proceedings of the Twelfth International Conference on Low Temperature Physics*. Academic Press of Japan, Kyoto, 1971.
- [7] M. Tinkham. *Introduction to superconductivity*, 2nd ed. McGraw-Hill, Inc. New York., 1996.
- [8] Q. Du and P. Gray. Numerical Algorithms of the Lawrence–Doniach Model for Layered Superconductors and their Parallel Implementation. *SIAM J. Sci. Comput.* **20** (1999):2122.
- [9] J. B. Ketterson and S. N. Song. *Introduction to superconductivity*. Cambridge University Press, 1996.
- [10] Antonio Rodrigues de Castro Romaguera. *VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES COM INDENTAÇÃO E EM GEOMETRIAS CONFINADAS*, recife: ufpe, 2003.
- [11] Fábio Rogeri. *DINÂMICA DE VÓRTICES EM FILMES FINOS SUPERCONDUTORES DE SUPERFÍCIE VARIÁVEL*, bauru, 20103.
- [12] Mauro Cesar Videira Pascolati. *ESTUDO DE FILMES SUPERCONDUTORES DE ESPESSURA FINITA EM FORMA DE SQUID*, bauru, 2010.

- [13] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer eekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften* **21** (1933).
- [14] F. London and H. London. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **149** (1935):71.
- [15] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.* **108** (1957):1175–1204.
- [16] A. A. Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* **5** (1957):1174–1182.
- [17] J.G. Bednorz and K.A. Muller. Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System. *Z. Phys. B Condensed Matter* **64** (1986):189–193.
- [18] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1970.
- [19] L. Kramer. Thermodynamic Behavior of Type-II Superconductors with Small κ near the Lower Critical Field. *Phys. Rev. B* **3** (1971):3821–3825.
- [20] L. Jacobs and C. Rebbi. Interaction energy of superconducting vortices. *Phys. Rev. B* **19** (1979):4486–4494.
- [21] E. Babaev and M. Speight. Semi-Meissner state and neither type-I nor type-II superconductivity in multicomponent superconductors. *Phys. Rev. B* **72** (2005):180502.
- [22] V. Moshchalkov, M. Menghini, T. Nishio, Q. H. Chen, A. V. Silhanek, V. H. Dao, L. F. Chibotaru, N. D. Zhigadlo, and J. Karpinski. Type-1.5 Superconductivity. *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009):117001.
- [23] T. Nishio, V. H. Dao, Q. Chen, L. F. Chibotaru, K. Kadowaki, and V. V. Moshchalkov. Scanning SQUID microscopy of vortex clusters in multiband superconductors. *Phys. Rev. B* **81** (2010):020506.
- [24] E. Babaev, J. Carlström, and M. Speight. Type-1.5 Superconducting State from an Intrinsic Proximity Effect in Two-Band Superconductors. *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010):067003.
- [25] V. H. Dao, L. F. Chibotaru, T. Nishio, and V. V. Moshchalkov. Giant vortices, rings of vortices, and reentrant behavior in type-1.5 superconductors. *Phys. Rev. B* **83** (2011):020503.

- [26] A. Chaves, F. M. Peeters, G. A. Farias, and M. V. Milošević. Vortex-vortex interaction in bulk superconductors: Ginzburg-Landau theory. *Phys. Rev. B* **83** (2011):054516.
- [27] A. Chaves, L. Komendová, M. V. Milošević, J. S. Andrade, G. A. Farias, and F. M. Peeters. Conditions for nonmonotonic vortex interaction in two-band superconductors. *Phys. Rev. B* **83** (2011):214523.
- [28] P. L. Gammel, D. J. Bishop, G. J. Dolan, J. R. Kwo, C. A. Murray, L. F. Schneemeyer, and J. V. Waszczak. Observation of Hexagonally Correlated Flux Quanta In YBa₂Cu₃O₇. *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987):2592–2595.
- [29] L. Ya. Vinnikov, J. Karpinski, S. M. Kazakov, J. Jun, J. Andereg, S. L. Bud’ko, and P. C. Canfield. Vortex structure in MgB₂ single crystals observed by the Bitter decoration technique. *Phys. Rev. B* **67** (2003):092512.
- [30] R. Zadorosny, E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho, and W. A. Ortiz. Crossover between macroscopic and mesoscopic regimes of vortex interactions in type-II superconductors. *Phys. Rev. B* **85** (2012):214511.
- [31] V. R. Misko, V. M. Fomin, J. T. Devreese, and V. V. Moshchalkov. Stable Vortex-Antivortex Molecules in Mesoscopic Superconducting Triangles. *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003):147003.
- [32] B. Xu, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Magnetic properties of vortex states in spherical superconductors. *Phys. Rev. B* **77** (2008):144509.
- [33] B. J. Baelus, A. Kanda, N. Shimizu, K. Tadano, Y. Ootuka, K. Kadowaki, and F. M. Peeters. Multivortex and giant vortex states near the expulsion and penetration fields in thin mesoscopic superconducting squares. *Phys. Rev. B* **73** (2006):024514.
- [34] E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho, and W. A. Ortiz. Temperature-dependent vortex motion in a square mesoscopic superconducting cylinder: Ginzburg-Landau calculations. *Phys. Rev. B* **74** (2006):014512.
- [35] H. J. Zhao, V. R. Misko, F. M. Peeters, V. Oboznov, S. V. Dubonos, and I. V. Grigorieva. Vortex states in mesoscopic superconducting squares: Formation of vortex shells. *Phys. Rev. B* **78** (2008):104517.
- [36] T. Winiecki and C.S. Adams. A Fast Semi-Implicit Finite-Difference Method for the {TDGL} Equations. *Journal of Computational Physics* **179** (2002):127 – 139.

- [37] C. Bolech G. C. Buscaglia and A. López. On the numerical solution of the time-dependent Ginzburg-Landau equations in multiply connected domains. *Connectivity and Superconductivity* (2000).
- [38] P.G. de Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*, 2nd ed. Addison-Wesley, Co. Inc. New York., 1989.
- [39] Q. Du, M. D. Gunzburger, and J. S. Peterson. Solving the Ginzburg-Landau equations by finite-element methods. *Phys. Rev. B* **46** (1992):9027–9034.
- [40] A. S. Mel’nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, and P. P. Vysheslavtsev. Vortex states and magnetization curve of square mesoscopic superconductors. *Phys. Rev. B.* **65** (2002):140503.
- [41] M. V. Komendová, L. Milosevic and F. M., Peeters. Soft vortex matter in a type-I/type-II superconducting bilayer. *Phys. Rev. B* **88** (2013):094515.
- [42] E.F Babaev. Vortices with Fractional Flux in Two-Gap Superconductors and in Extended Faddeev Model. *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002):067001.
- [43] R. Geurts, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Vortex matter in mesoscopic two-gap superconducting disks: Influence of Josephson and magnetic coupling. *Phys. Rev. B* **81** (2010):214514.
- [44] V. H. Dao L. F. Chibotaru and A. Ceulemans. Thermodynamically stable noncomposite vortices in mesoscopic two-gap superconductors. *Europhys. Lett.* **78** (2007):47001.
- [45] A. Kanda, B. J. Baelus, F. M. Peeters, K. Kadowaki, and Y. Ootuka. Experimental Evidence for Giant Vortex States in a Mesoscopic Superconducting Disk. *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004):257002.
- [46] T. Mertelj and V. V. Kabanov. Vortex-antivortex configurations and its stability in a mesoscopic superconducting square. *Phys. Rev. B* **67** (2003):134527.
- [47] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx, and V. V. Moshchalkov. Vortex Entry and Nucleation of Antivortices in a Mesoscopic Superconducting Triangle. *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001):1323–1326.
- [48] B. J. Baelus and F. M. Peeters. Dependence of the vortex configuration on the geometry of mesoscopic flat samples. *Phys. Rev. B* **65** (2002):104515.

- [49] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx, and V. V. Moshchalkov. Symmetry-induced formation of antivortices in mesoscopic superconductors. *Nature* **408** (2000).
- [50] Chao-Yu Liu, G. R. Berdiyrov, and M. V. Milošević. Vortex states in layered mesoscopic superconductors. *Phys. Rev. B* **83** (2011):104524.
- [51] M.V. Milosevic and R. Geurts. The Ginzburg–Landau theory in application. *Physica C: Superconductivity* **470** (2010):791 – 795.
- [52] Q. Du. Finite element methods for the time-dependent Ginzburg-Landau model of superconductivity. *Computers and Mathematics with Applications* **27** (1994):119 – 133.
- [53] T.D. Peninga. *Strangeness in dense hadronic matter*, tesis doctoral (doctor en matemáticas y ciencias naturales). Facultad de Matemáticas y Ciencias Naturales, Universidad de Goningen, Holanda., 2007.
- [54] A.Vagov, A.A.Shanenko, M.V.Milosevic, V.M.Axt, V.M.Vinokur, and F.M.Peeters. Critical superconductors. *arXiv:1311.5624* (2013).