



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - CCEN
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fillipe Cesar Oliveira da Silva

ESTUDO COMPUTACIONAL DE VÓRTICES EM DISCOS
SUPERCONDUTORES NA PRESENÇA DE CAMPO
MAGNÉTICO EXTERNO E DIPOLO MAGNÉTICO

RECIFE

2015

FILLIPE CESAR OLIVEIRA DA SILVA

**ESTUDO COMPUTACIONAL DE VÓRTICES EM DISCOS
SUPERCONDUTORES NA PRESENÇA DE CAMPO
MAGNÉTICO EXTERNO E DIPOLO MAGNÉTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral

RECIFE

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB4-572

S586e Silva, Fillipe Cesar Oliveira da.
Estudo computacional de vórtices em discos supercondutores na presença de campo magnético externo e dipolo magnético / Fillipe Cesar Oliveira da Silva. – Recife: O Autor, 2015.
154 f.: fig., tab.

Orientador: Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2015.
Inclui referências.

1. Supercondutividade. 2. Dipolos magnéticos. 3. Campos magnéticos.
I. Cabral, Leonardo Ribeiro Eulálio (Orientador). II. Título.

537. 623 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-41

FILLIPE CESAR OLIVEIRA DA SILVA

**ESTUDO COMPUTACIONAL DE VÓRTICES EM DISCOS SUPERCONDUTORES
NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO E DIPOLO MAGNÉTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 30/07/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clécio Clemente de Souza Silva
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Edson Sardella
Examinador Externo
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho" - Campus Bauru

Dedicatória

Aos meus pais, Hilda e Evaldo, por fundamentarem quem eu sou, por estarem comigo e me apoiarem em todos os momentos e pela compreensão da minha ausência durante esses anos.

A Stella, por estar presente nas infinitas etapas, antes mesmo dessa caminhada árdua começar, e por ter sempre acreditado e incentivado para o fim dessa jornada. Estaremos juntos para todo o sempre.

Aos meus irmãos, Danillo e Vanessa, pelas diversões e confusões de sempre.

Aos meus avós, Pedrão (*in memoriam*) e Maria, por serem um espelho para mim.

As minhas tias, Maria e Francisca, pelo apoio nos momentos mais difíceis desse processo.

Ao meu tio, Jair (*in memoriam*), por toda a ajuda prestada para o começo da vida acadêmica, nunca hesitando em ajudar o próximo.

Agradecimentos

A meu professor, Leonardo Cabral, por ter me acolhido durante o período de incertezas, pela confiança depositada em mim para a realização desse trabalho e por todos os ensinamentos desde o tempo da graduação.

Ao professor Clécio Clemente, pelas sugestões e discussões nos seminários de grupo e encontros no laboratório.

Aos meus colegas do Departamento de Física, Mário, Ricardo, Tiago, Wellington, Alyson, Raoni, Lucas, Pedro, Gabriel e Tiago Ceará, pelos incentivos, ajudas e debates sobre Física Geral, além dos momentos de lazer. Aqueles que eu esqueci de mencionar, é porque faltou paciência de escrever o nome de todos, mas sintam-se agradecidos.

Ao Departamento de Física por ter fornecido as condições necessárias para a realização do trabalho.

Às agências de fomento CNPq, CAPES e FACEPE.

Imprevisibilidade de comportamento
O leito não-linear segue
Para dentro do universo
(Afrociberdelia - Chico Science)

Resumo

O avanço tecnológico tem permitido a construção de sistemas supercondutores de baixas dimensionalidades, da ordem do comprimento de coerência, ξ , e/ou comprimento de penetração, λ . Esses sistemas são chamados de supercondutores mesoscópicos, onde se é capaz de alcançar correntes e campos críticos mais elevados. Dependendo do tamanho do supercondutor mesoscópico, configurações de moléculas de vórtices são obtidas tanto experimentalmente, como teoricamente usando a teoria de GL e a teoria de London. Nesse trabalho, utilizaremos o método variacional aplicado à teoria de Ginzburg-Landau e a teoria de London para estudar vórtices em discos supercondutores finos em campo magnético externo homogêneo e confinados em um potencial produzido por um dipolo magnético, respectivamente.

Estudamos, inicialmente, discos supercondutores mesoscópicos imersos em um meio isolante na presença de um campo magnético uniforme perpendicular ao plano do disco. Desprezamos os efeitos de desmagnetização e expandimos o parâmetro de ordem em funções ortonormais do operador energia cinética. Para a obtenção de vórtices gigantes, representamos o parâmetro de ordem por apenas uma autofunção. Para estados de multivórtices, o parâmetro de ordem é representado como uma expansão de duas autofunções, com vorticidades distintas. Observamos o comportamento da variação da energia livre em função do campo magnético aplicado, para diversos tamanhos de discos supercondutores, acompanhando seus estados mais favoráveis.

Na segunda parte da dissertação, estudamos a disposição dos vórtices e antivórtices confinados em um disco supercondutor através de campo magnético não homogêneo

gerado por um dipolo magnético na direção do eixo de simetria do disco, que possibilita a coexistência de vórtices e antivórtices, com diferentes configurações possíveis. Para obtermos os estados com menor energia dentre as possibilidades testadas, utilizamos como parâmetro de controle três variáveis: a distância radial ao eixo de simetria do dipolo, r_0 , a altura do dipolo em relação ao disco, z_0 , e a magnitude do dipolo magnético, m_0 . Buscamos o valor da magnitude do dipolo no qual o estado sem vórtices deixa de ser o metaestável, permitindo a existência de estados com vórtices. Os resultados mostram uma competição entre o potencial de confinamento, efeitos produzidos pela borda do supercondutor e a interação entre vórtices, para manter os vórtices e antivórtices no interior do disco.

Palavras-chave: Vórtices. Antivórtices. Ginzburg-Landau. London.

ABSTRACT

Technological breakthroughs have allowed the construction of superconducting systems in low dimensionalities, which are of the order of the coherence length, ξ , and/or of the penetration depth, λ . These systems are called mesoscopic superconductors, which are capable of achieving high critical current and fields. Depending on the size of the mesoscopic superconducting, configurations of vortices molecules are obtained either experimentally or theoretically using the GL theory and the theory of London. In the present work, we apply the variational method to the Ginzburg-Landau theory and also the London theory to study vortices in thin superconductors disks submitted to an inhomogeneous magnetic field and confined to a potential produced by a magnetic dipole, respectively.

We studied initially mesoscopic superconducting disks immersed in a insulation mean in the presence of a uniform magnetic field which is perpendicular to the plane of the disk. We neglect the demagnetization effects and expand the order parameter in orthonormal functions of the kinetic energy operator. To obtain giant vortices, the order parameter has only one eigenfunction. For multivortex states, the order parameter consists of two eigenfunctions, with different vorticities. We study the behaviour of free energy variation due to the applied magnetic field for different sizes of superconductor disks, and for different vortex states. In the second part of the dissertation, we study the arrangement of vortices and antivortices in a superconducting disk submitted to a non-homogeneous magnetic field generated by an out-plane magnetic dipole, which allows the coexistence of vortices and antivortices on different configurations. To get the states with lowest energy among the tested

possibilities, we used three variables as control parameters: the radial distance from the disk symmetry axis to the dipole axis of symmetry, r_0 , the height of the dipole relative to the disc, z_0 , and the magnitude of the magnetic dipole, m_0 . We seek the value of the magnitude of the dipole in which the state with no vortices ceases to be the most stable one, allowing the existence of states with vortices. The results show a competition among the confinement potential, effects produced by the edge of the superconductor, and the interaction between vortices to keep the vortices and antivortices within the disc.

Keywords: Vortices. Antivortices. Ginzburg-Landau. London.

Lista de Abreviaturas

κ	parâmetro de Ginzburg-Landau
λ	comprimento de penetração de London
n_s	densidade de elétrons supercondutores por volume
EDO	Equação Diferencial Ordinária
GL	Ginzburg-Landau
HTS	supercondutores de alta temperatura
LB	<i>lowest band</i>
LI	Linearmente Independente
STM	microscópio de varredura-tunelamento

Lista de Figuras

1.1	Resistividade do mercúrio em função da temperatura absoluta, que marcou a descoberta da supercondutividade. Figura extraída da Ref.[1].	18
1.2	Efeito Meissner em um supercondutor esférico abaixo da temperatura crítica e um campo magnético constante.	20
1.3	Temperatura crítica de diferentes supercondutores em função do ano de sua descoberta. Figura extraída da Ref.[2].	22
1.4	Gráfico do fluxo magnético normalizado pelo campo externo em função da posição, em unidades de λ , no vácuo ($x < 0$) e em supercondutor ($x > 0$).	27
1.5	Variação da diferença de densidade de energia livre entre o estado supercondutor e o estado normal em função de ψ , para os parâmetros fenomenológicos $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$, assumindo que não há campos e gradientes e que $\psi(\mathbf{r})$ varia lentamente no espaço.	30
1.6	Ilustração da dependência espacial do parâmetro de ordem ψ próxima à interface de um supercondutor e de um metal normal, onde b corresponde ao comprimento de extrapolação. Figura extraída da Ref.[2].	31
1.7	Interface entre o supercondutor e o metal normal, indicando o comportamento do parâmetro de ordem ψ e do campo $h(x)$, expressando o significado físico dos comprimentos $\xi(T)$ e $\lambda(T)$. Figura extraída da Ref.[3].	32
1.8	Campos críticos em função da temperatura para supercondutores do tipo-I(a) e do tipo-II(b). Figura extraída da Ref.[2].	35
1.9	(a) Esquema representativo da solução das equações de Ginzburg-Landau (GL) para uma rede periódica de vórtices quadrática e triangular(hexagonal). A linha pontilhada destaca a célula unitária. (b) Rede de Abrikosov a um campo magnético de 1T em uma amostra de NbSe ₂ . Figuras extraídas das Refs.[3] e [4], respectivamente.	36
1.10	Estrutura de um vórtice isolado, destacando, à esquerda, a corrente circular que gera o fluxo do vórtice; à direita, a densidade de elétrons supercondutores. Figura extraída da Ref.[5].	38

2.1	Figura representativa de um disco supercondutor livre de defeitos com raio R e espessura d	54
2.2	Comportamento da função $\mathcal{T} = \mathcal{T}(H_{ext}, R', L_n, \lambda_{L_n})$ para um disco de raio $R = 5\xi$, na presença de um campo externo $H_{ext} = 0.85H_{c2}$ e para cinco valores distintos de vorticidades $L = 0, 1, 2, 3$ e 4	67
2.3	Comportamento da função radial, $f_{\zeta, L_n}(\rho')$, para os valores de vorticidade $L_n = 0, 1, 2, 3$, e 4 . Os resultados são obtidos considerando os autovalores (a) λ_{0, L_n} , (b) λ_{1, L_n} e (c) λ_{2, L_n}	68
2.4	Variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} . A figura mostra o estados de menor energia para discos com diferentes valores de raio: (a) $R = 1.00\xi$, (b) $R = 1.50\xi$, (c) $R = 2.25\xi$, (d) $R = 2.50\xi$ (e) $R = 3.00\xi$, (f) $R = 3.25\xi$, (g) $R = 3.50\xi$ e (h) $R = 3.75\xi$. Em destaque mostramos os valores da vorticidade do parâmetro de ordem Ψ	71
2.5	A figura mostra a variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} para um disco de raio $R = 4.00\xi$, onde se alcança o primeiro estado de multivórtice com o estado $(0, 4)$. O disco supercondutor de raio $R = 4.00\xi$, só permite estado de vórtice gigante com vorticidade até $L = 11$	72
2.6	A figura mostra a variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} para um disco de raio $R = 4.8\xi$. Nessa estrutura novos estados de multivórtices são obtidos com menor variação de energia $\Delta\mathcal{G}'$, estados como: $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(0, 5)$, $(0, 6)$ e $(0, 7)$	74
2.7	Variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} , para um disco supercondutor de raio $R = 6.0\xi$, mostrando: (a) abordagem realizada nessa Dissertação e (b) resultado obtido por Baelus <i>et al</i> [6]. (c)-(f) Configurações obtidas para $H_{ext} = 0.60H_{c2}$, em comparação com os resultados mostrado por (b). A barra lateral indica o valor de $ \Psi ^2$, em toda a superfície do disco e do centro de cada vórtice saem linhas que representam o argumento do parâmetro de ordem.	76
2.8	Variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} , para um disco supercondutor de raio $R = 8.0\xi$. Mantendo o limite de $H_{ext} = 1.00H_{c2}$, os estados de multivórtices são predominantes, apresentado os menores valores de $\Delta\mathcal{G}'$	77
2.9	Diferença entre as variações das energias livres dos estados $(2, 10)$ e $(1, 10)$ para um disco supercondutor de raio $R = 8.0\xi$. Abaixo da linha tracejada horizontal, o estado $(2, 10)$ é energeticamente mais favorável.	78

2.10	Exemplos de configurações dos estados de menor energia em um disco supercondutor de raio $R = 8.0\xi$. No topo da figura, mostramos a dependência da variação da energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo H_{ext} . Os estados apresentados são: (a) (0), $H_{ext} = 0.05H_{c2}$; (b) (1), $H_{ext} = 0.12H_{c2}$; (c) (2), $H_{ext} = 0.19H_{c2}$; (d) (0, 3), $H_{ext} = 0.22H_{c2}$; (e) (0, 4), $H_{ext} = 0.25H_{c2}$; (f) (0, 5), $H_{ext} = 0.30H_{c2}$; (g) (1, 6), $H_{ext} = 0.33H_{c2}$; (h) (1, 7), $H_{ext} = 0.36H_{c2}$; (i) (1, 8), $H_{ext} = 0.41H_{c2}$; (j) (1, 9), $H_{ext} = 0.45H_{c2}$; (k) (2, 10), $H_{ext} = 0.50H_{c2}$; e (l) (1, 10), $H_{ext} = 0.65H_{c2}$	80
3.1	Figura representativa do disco fino supercondutor livre de defeitos com raio R e espessura d na presença de um dipolo magnético permanente $\mathbf{m}_0 = m_0 \hat{z}$ localizado em $\mathbf{r}_0 = (r_0, 0, z_0)$. A mancha escura representa o k -ésimo vórtice com posição $\mathbf{r}_k = (r_k, \phi_k, 0)$	83
3.2	Estado de menor energia contendo vórtices e antivórtices em sua estrutura para os parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.05$ e $m_0 = 2.2$. Estrutura classificada como (1, 5 : 2), onde os dois antivórtices estão alinhados com a estrutura interna, formada por vórtices.	93
3.3	Estados de menor energia contendo vórtices e antivórtices para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.05$. As configurações mostradas apresentam os estados: (a) (1, 6 : 3) com $m_0 = 2.7$, (b) (2, 6 : 5) com $m_0 = 5.0$ e (c) (1, 8 : 4) com $m_0 = 6.5$	95
3.4	Algumas das configurações obtidas para os parâmetros: $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.1$. As configurações mostradas apresentam vórtices nos estados: (a) (2, 6) com $m_0 = 4.9$, e (b) (2, 7) com $m_0 = 8.1$	98
3.5	Estados de menor energia contendo vórtices e antivórtices para os parâmetros: $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.1$. As configurações mostradas apresentam os estados: (a) (3, 6 : 1) em $m_0 = 5.8$, (b) (1, 7 : 4) em $m_0 = 7.5$ e (c) (2, 8 : 2) em $m_0 = 9.2$	99
3.6	Exemplos de estados de menor energia obtidos, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.3$ e (a) $m_0 = 10.00$, (b) $m_0 = 13.75$ e (c) $m_0 = 20.00$	101
3.7	Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.3$, (a) $m_0 = 19.00$ e (b) $m_0 = 25.25$	102
3.8	Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.5$ e (a) $m_0 = 16.75$, (b) $m_0 = 31.75$ e (c) $m_0 = 34.50$	104
3.9	Estado (1, 5 : 2) com os parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.05$ e $m_0 = 2.6$. O estado destacado deixa de apresentar os antivórtices alinhados a estrutura interna, constituída apenas de vórtices.	108

3.10	Estado (2, 6 : 3) com os parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.1$ e $m_0 = 6.8$. Configuração com duas camadas de vórtices e uma terceira camada formada por três antivórtices.	108
3.11	Estado de menor energia para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.3$ e $m_0 = 26.50$. O estado, classificado como (4, 9), apresenta duas camadas de vórtices formando um quadrilátero.	111
3.12	Estado (3, 8), alcançado como configuração de menor energia para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.5$ e $m_0 = 36.75$	113
3.13	Algumas das configurações para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.3$. As configurações mostram os estados: (a) (1, 4) em $m_0 = 11.50$, (b) (1, 5) em $m_0 = 13.25$, (c) (3, 7) em $m_0 = 19.25$ e (d) (1, 5, 8) em $m_0 = 30.25$	119
3.14	Configuração de menor energia para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$, $z_0 = 0.5$ e $m_0 = 27.50$. O estado (2, 6)* apresenta dois vórtices na camada interna, mas os seis outros vórtices que compõem a camada externa formam um hexágono não regular.	121
3.15	Algumas das configurações para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.5$. As configurações mostram os estados: (a) (3, 7) em $m_0 = 34.25$, (b) (4, 8) em $m_0 = 42.00$, (c) (4, 9) em $m_0 = 46.00$ e (d) (5, 9) em $m_0 = 49.50$	122
3.16	Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$, $z_0 = 0.7$ e (a) $m_0 = 42.00$, (b) $m_0 = 62.00$ e (c) $m_0 = 75.25$	124
3.17	Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.5$, $z_0 = 0.3$ e (a) $m_0 = 21.00$, (b) $m_0 = 30.25$ e (c) $m_0 = 45.25$	129
3.18	Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.5$, $z_0 = 0.5$ e (a) $m_0 = 54.25$, (b) $m_0 = 57.50$ e (c) $m_0 = 65.50$	130
3.19	Algumas configurações de menor energia para os conjuntos de parâmetros: $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.7$. Destacamos o que ocorre com a estrutura a medida que a magnitude aumenta, causando a redução da influência da borda sob os vórtices para um mesmo estado. Mostramos os estados: (a) e (b), (4); (c) e (d), (4, 8), e (e) e (f), (5, 9), em sua primeira e última aparição.	132

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Revisão Histórica	18
1.2	Teoria de London	23
1.3	Teoria de Ginzburg-Landau	27
1.4	Tipos de supercondutores	33
1.5	Rede de Abrikosov e Quantização do fluxo magnético	34
1.6	Teoria BCS	37
1.7	Supercondutores extremos tipo-II, Interações entre linhas de vórtices e Equação de Movimento	39
1.7.1	Estrutura e Energia de vórtice no limite de $\kappa \gg 1$	42
1.7.2	Campos Críticos H_{c1} e H_{c2}	43
1.7.3	Interações entre Linhas de vórtices	44
1.8	Interações de Vórtices em Filmes Finos	48
2	Método Variacional aplicado à Teoria de Ginzburg-Landau a Discos em Campo Magnético Externo	50
2.1	Formalismo Teórico	53
2.2	Autovalor do operador Energia Cinética	62
2.3	Variação de Energia Livre e Estados de Vórtices	69
3	Configurações de Vórtices em um disco de Supercondutor na pre- sença de um Dipolo Magnético	81
3.1	Vórtices em Discos Supercondutores na presença de Dipolo Magnético Permanente	82
3.1.1	Forças Atuantes	84
3.1.2	Interações Vórtice-Vórtice e Vórtice-Dipolo	84
3.1.3	Energia do Sistema	86
3.2	Procedimento Numérico e Simulação Computacional	88
3.3	Configurações com menor Energia	90
3.3.1	Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.0$	92

3.3.2	Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.1$	106
3.3.3	Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.3$	115
3.3.4	Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.5$	125
4	Conclusões	134
	Referências	139

Capítulo 1

Introdução

1.1 Revisão Histórica

Descoberto em 1911, pelo Físico holandês Heike Kamerlingh Onnes na Universidade de Leiden, enquanto estudavam o comportamento da resistividade de materiais em baixas temperaturas [1], o fenômeno da *supercondutividade* consiste no aparecimento de resistência elétrica nula e na expulsão de campos magnéticos de alguns materiais quando colocados abaixo de uma determinada temperatura.

Antes da descoberta da supercondutividade, ocorria no mundo uma disputa para se chegar a mais baixa temperatura, motivado pela busca ao “zero absoluto”. Pelo avanço das pesquisas, vários gases passaram a ser liquefeitos, como por exemplo, oxigênio (90.2K), nitrogênio (77.3K), até que o hidrogênio (20.4K) foi liquefeito em 1896 por Sir James Dewar. Apesar do hélio ter sido descoberto em 1868, pelo francês Pierre Janssen, através das linhas espectrais da luz solar, ele só foi isolado em 1895 por Sir William Ramsay. A partir de 1885, Onnes começou a coletar o hélio e em 1908, foi o primeiro a conseguir liquefazê-lo a uma temperatura de 4.22K, alcançando temperaturas de até 1.04K. O procedimento era tão difícil que durante quinze anos

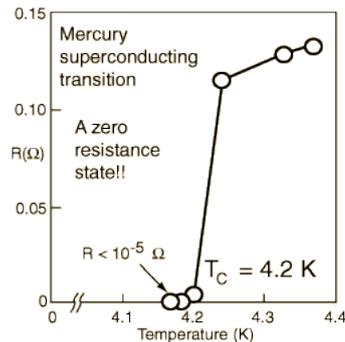


Figura 1.1: Resistividade do mercúrio em função da temperatura absoluta, que marcou a descoberta da supercondutividade. Figura extraída da Ref.[2].

a universidade de Leiden era a única universidade do mundo a deter tal técnica. Com a liquefação do hélio e seus estudos sobre as propriedades da matéria a baixas temperaturas, Onnes foi laureado com o prêmio Nobel de Física em 1913.

A supercondutividade foi descoberta em 8 de abril de 1911, três anos após Onnes liquefazer o hélio. Onnes observou que ao submeter o mercúrio a temperaturas abaixo de 4.2K, a sua resistência elétrica caía abruptamente a zero. O fenômeno de resistência nula é denominado de supercondutividade, que também é encontrado em outros tipos de metais, como chumbo e estanho. Esse efeito ocorre quando a temperatura é reduzida até uma abaixo da temperatura crítica T_c , característica de cada material, tornando-se mais sensíveis com anéis supercondutores

A *condutividade perfeita* é o primeiro marco de um supercondutor. Um outro marco é o *diamagnetismo perfeito*, descoberto em 1933 por W. Meissner e R. Ochsenfeld [3]. Durante suas pesquisas eles observaram que abaixo da temperatura crítica, o material supercondutor expelle quase todo o fluxo magnético da amostra até um determinado campo crítico H_c , que está relacionado termodinamicamente com a energia livre entre o estado normal e o estado supercondutor a campo nulo. Tal fenômeno ficou conhecido como efeito Meissner (Fig.1.2).

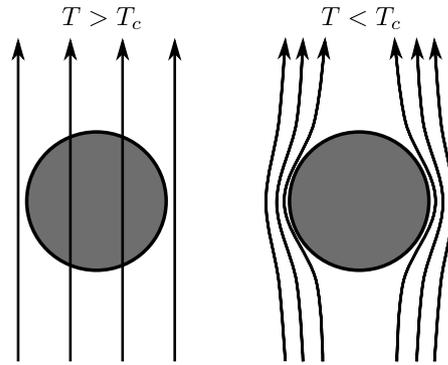


Figura 1.2: Efeito Meissner em um supercondutor esférico abaixo da temperatura crítica e um campo magnético constante.

Como novo fenômeno físico, a supercondutividade buscou ser explicada por diversos cientistas. No entanto, apenas duas décadas depois surgiu a primeira teoria fenomenológica para descrever a supercondutividade. Posteriormente, com a descoberta de estados contendo vórtices, a teoria desenvolvida pelos irmãos Fritz e Heinz London (teoria de London) [4], apesar de ser uma teoria macroscópica, consegue descrever bem o comportamento do estado supercondutor e estados de vórtices de supercondutores do tipo-II, tratando vórtices como partículas pontuais, desprezando suas dimensões, incluindo a condutividade perfeita e o efeito Meissner. Nessa teoria definiu-se também um comprimento de penetração no qual relaciona a espessura em que o campo magnético penetra e se anula no interior do supercondutor.

Em 1950 Vitaly Ginzburg e Lev Landau propuseram uma teoria fenomenológica baseada na teoria de transição de fase de segunda ordem de Landau [5]. A teoria de Ginzburg-Landau (GL) fornece uma descrição macroscópica do supercondutor introduzindo uma pseudo-função de onda complexa [6] $\psi(\mathbf{r})$ e um potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, como parâmetros, introduzindo duas características essenciais: o comprimento de penetração, $\lambda(T)$, que associa com comprimento de penetração de London e o com-

primento de coerência, $\xi(T)$, associado a variação espacial do parâmetro $\psi(\mathbf{r})$. De forma concisa, a teoria fornece um parâmetro, dado pela razão entre os comprimentos característicos, $\kappa \equiv \lambda/\xi$, que é definido como parâmetro de GL. O parâmetro κ permite classificar os supercondutores em dois tipos: tipo-I, $\kappa < 1/\sqrt{2}$, e tipo-II, $\kappa > 1/\sqrt{2}$; mostrando que para $\kappa \rightarrow \infty$ obtêm-se a teoria de London. Os supercondutores do tipo-II apresentam dois campos críticos H_{c1} e H_{c2} , recuperando o estado normal para campos acima do valor de H_{c2} . Para valores abaixo de H_{c1} , obtêm-se o efeito Meissner.

Usando a teoria de GL, Alexei Abrikosov, em 1957, demonstra experimentalmente e teoricamente a existência de um novo estado supercondutor, um estado misto (ou fase de Shubnikov), entre os campos H_{c1} e H_{c2} [7]. Entre esses campos, $H_{c2} > H > H_{c1}$, o supercondutor permite a penetração do campo magnético quantizado formando estruturas, chamadas de vórtices, em uma rede triangular, conhecida como rede de Abrikosov. Apesar da descoberta de vórtices em supercondutores, Landau não foi adepto à essa ideia, realizada pelo seu orientando, sendo favorável à publicação apenas quando Richard Feynman publica seu trabalho sobre vórtices em superfluidos [8].

As duas teorias citadas, London e GL, não fornecem uma explicação microscópica do fenômeno da supercondutividade. Foi então que em 1957, John Bardeen, Leon Cooper, e John Schrieffer realizaram uma teoria microscópica (teoria BCS) da supercondutividade [9], ganhando o prêmio Nobel de Física em 1972. A teoria BCS é baseada na interação entre elétrons e fônons para o aparecimento do estado supercondutor, a partir da qual pode-se obter a teoria GL quando $T \approx T_c$ [10].

A teoria desenvolvida por Bardeen, Cooper e Schrieffer explica satisfatoriamente as

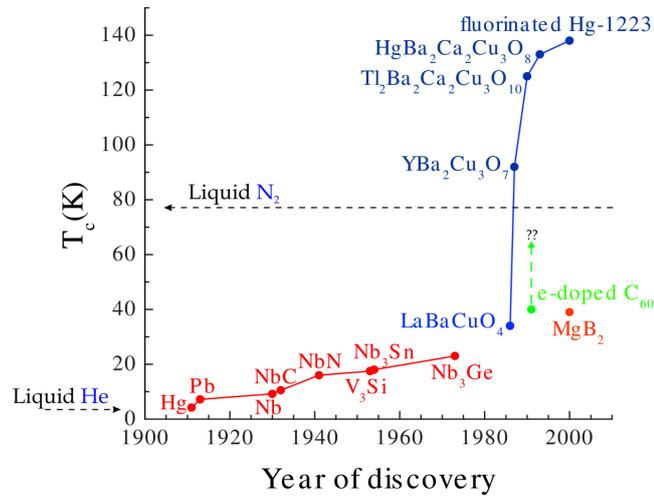


Figura 1.3: Temperatura crítica de diferentes supercondutores em função do ano de sua descoberta. Figura extraída da Ref.[11].

propriedades de supercondutores a baixas temperaturas. A aplicabilidade tecnológica não era praticável devido a limitação da temperatura alcançada pelos supercondutores. Até 1986 a maior temperatura crítica obtida foi para a liga metálica Nb₃Ge (22.3K) [12]. Ainda no mesmo ano, Alex Müller e Georg Bednorz descobriram um novo campo da supercondutividade, o que proporcionou a obtenção de supercondutores cerâmicos (compostos de Ba – La – Cu – O) [13, 14], com $T_c = 35\text{K}$ [15]. No ano seguinte, 1987, novos compostos de Y – Ba – Cu – O foram sintetizados com $T_c = 95\text{K}$ [16], acima do ponto de ebulição do nitrogênio (77K), usado agora para resfriar as amostras. A descoberta dessa nova classe de supercondutores laureia Müller e Bednorz com o prêmio Nobel, em 1987. Nos anos seguintes novos compostos surgiram, como Tl₂Ba₂Ca₂Cu₃O₁₀ ($T_c = 125\text{K}$) e HgBa₂Ca₂Cu₃O₈ ($T_c = 133\text{K}$) [17]. A descoberta de amostras com temperatura crítica acima de 133K foi alcançada apenas no ano 2000, em amostras de fluorado de Hg – 1223 ($T_c = 138\text{K}$) [18], como mostra a Fig.1.3. A teoria BCS não é capaz de explicar totalmente o fenômeno para supercon-

dutores de alta temperatura (HTS), onde o mecanismo elétron-fônons é questionada.

1.2 Teoria de London

Depois de mais de 20 anos da descoberta da supercondutividade, foi proposta a primeira teoria bem sucedida para descrever o fenômeno. A teoria desenvolvida pelos irmãos London em 1935 [4], trata-se de uma teoria fenomenológica que descreve o estado supercondutor, introduzindo comprimento de penetração de London (λ), usado nas teorias subsequentes. Após a descoberta do estado misto, a teoria de London pode ser adaptada para descrever estado de vórtices.

Partindo do modelo de Drude para a condutividade elétrica, aplicando a segunda lei de Newton para descrever o movimento do elétron, teremos

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - m \frac{\mathbf{v}}{\tau}, \quad (1.1)$$

sendo \mathbf{v} a velocidade de deriva dos portadores, m a massa do portador, q a carga dos portadores ($q = -e$ em condutores), e τ um tempo de relaxação fenomenológico que está associado ao tempo em que a dispersão dos defeitos conduziria a velocidade de deriva dos elétrons a zero. Se tratarmos de um metal normal, com velocidade de deriva constante, sujeito a um campo elétrico uniforme e constante no tempo, a solução estacionária da Eq.(1.1) resulta em $\mathbf{v} = e\mathbf{E}\tau/m$. Se n for o número de elétrons condutores por unidade de volume, podemos escrever a densidade de corrente como

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}, \quad (1.2)$$

i.e., lei de Ohm, onde σ é a condutividade do metal (inversamente proporcional a resistividade, ρ).

A teoria de London pressupõe que o supercondutor seja composto por dois fluidos: elétrons normais, obedecendo a lei de Ohm, e elétrons supercondutores, que não apresentam resistência ao movimento. Para descrevermos a condutividade perfeita, ou resistividade nula, o segundo termo da Eq.(1.1) deve ser zero. Com isso teremos

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q^* \mathbf{E} = -e^* \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

onde m^* , \mathbf{v}_s e q^* ($q^* = -e^*$) são, respectivamente, a massa efetiva, a velocidade e a carga efetiva dos portadores de carga. Supondo que podemos escrever a condutividade perfeita resultando de uma densidade de elétrons supercondutores por volume (n_s), define-se uma densidade de supercorrente dada por $\mathbf{j}_s = -e^* n_s \mathbf{v}_s$. Tomando a derivada em relação ao tempo desta equação, obtemos

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = -e^* n_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}, \quad (1.4)$$

substituindo a Eq.(1.3) na Eq.(1.4), encontramos

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{(e^*)^2 n_s}{m^*} \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

ou ainda

$$\mathbf{E} = \mu_0 \frac{d}{dt} (\lambda^2 \mathbf{j}_s), \quad (1.6)$$

onde

$$\lambda = \left[\frac{m^*}{\mu_0 n_s (e^*)^2} \right]^{1/2}, \quad (1.7)$$

é um parâmetro fenomenológico que fornece a distância em que campos magnéticos devem entrar no supercondutor, chamado comprimento de penetração de London. As Eqs.(1.5) e (1.6) são conhecidas como a primeira equação de London e descreve

a condutividade perfeita, mostrando que qualquer campo elétrico aplicado resultará em carga elétrica acelerada.

Para chegarmos à segunda equação de London, a que se refere ao efeito Meissner [3], partiremos da lei de Faraday-Lenz ($\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{h} / \partial t$). Fazendo uso da 1ª equação de London e um campo magnético local \mathbf{h} , temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{\mathbf{h}}{\mu_0 \lambda^2} \right) = 0, \quad (1.8)$$

que é satisfeita para quaisquer valores de \mathbf{j}_s e \mathbf{h} constantes no tempo. No entanto, ela não garante o efeito Meissner, pois se um campo magnético é aplicado à amostra no seu estado normal, ele permanecerá em seu interior mesmo no estado supercondutor. Para garantir que o efeito Meissner ocorra, i.e., a expulsão do fluxo magnético dentro do supercondutor, deve-se estabelecer que

$$\nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{\mathbf{h}}{\mu_0 \lambda^2} = 0. \quad (1.9)$$

Usando a lei de Ampère-Maxwell ($\nabla \times \mathbf{h} = \mu_0 \mathbf{j}_s$) e tomando o rotacional, teremos

$$\nabla^2 \mathbf{h} = \frac{\mathbf{h}}{\lambda^2}. \quad (1.10)$$

As Eqs.(1.9) e (1.10) são conhecidas como a segunda equação de London. Podemos ainda escrever a 2ª equação de London em termo do potencial vetor \mathbf{A} , usando o gauge de London:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{A} \cdot \hat{n} \Big|_S = 0, \quad (1.12)$$

onde \hat{n} é o versor perpendicular à superfície da amostra. Com isso teremos que a 2ª equação de London escrita como

$$\mathbf{A} = -\mu_0 \lambda^2 \mathbf{j}_s, \quad (1.13)$$

que também resulta em

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = 0, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{j}_s \cdot \hat{n} \Big|_S = 0. \quad (1.15)$$

Note que a Eq.(1.13) contém as duas equações de London, Eqs.(1.9) e (1.10). Tomando a derivada em relação ao tempo e o rotacional da Eq.(1.13) teremos, respectivamente, a 1ª e a 2ª equação de London.

Pensemos agora em uma amostra semi-infinita supercondutora, se estendendo de $x = 0$ até o infinito, em um sistema cartesiano. Aplicando um campo magnético paralelo à superfície, $\mathbf{h} = h\hat{k}$, e usando as condições de contorno, $h(x = 0) = h_0$ e $h(x \rightarrow \infty) = 0$ (está última devido o campo se anular no interior da amostra), teremos como solução da Eq.(1.10):

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x < 0 \\ h_0 e^{-x/\lambda}, & x > 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

ou seja, a equação de London resulta em um decaimento exponencial no interior do supercondutor (ver Fig.1.4), mostrando que o fluxo magnético decresce consideravelmente em distância da ordem de λ . Isso evidencia que o comprimento de penetração de London define valores para distâncias em que campos magnéticos decaem consideravelmente no supercondutor.

O comprimento de penetração λ apresenta uma dependência com a temperatura, uma vez que λ depende da densidade de elétrons supercondutores e por sua vez, depende de T . Empiricamente, temos que λ é aproximadamente

$$\lambda(T) \approx \lambda(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}, \quad (1.17)$$

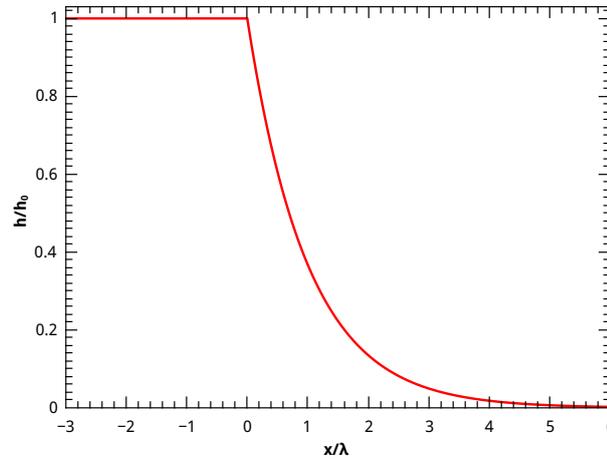


Figura 1.4: Gráfico do fluxo magnético normalizado pelo campo externo em função da posição, em unidades de λ , no vácuo ($x < 0$) e em supercondutor ($x > 0$).

onde

$$\lambda(0) = \left[\frac{m^*}{\mu_0 n_s (e^*)^2} \right]^{1/2}. \quad (1.18)$$

Os valores típicos de λ são da ordem de 50 a 500 nm [19]. A teoria fenomenológica dos irmãos London explica, satisfatoriamente, a condutividade perfeita e o efeito Meissner em supercondutores do tipo-II, mas não pressupõe a existência de vórtices. Na forma assim proposta, a teoria considera a densidade de elétrons supercondutores, n_s , sendo uniforme, não prevendo a destruição da supercondutividade por um campo crítico e uma densidade de corrente crítica. Revisitaremos a teoria de London incorporando a presença de vórtices nos próximos capítulos.

1.3 Teoria de Ginzburg-Landau

Em 1950 V.L. Ginzburg e L. D. Landau desenvolveram uma teoria fenomenológica [5] para descrever a supercondutividade denominada Teoria de Ginzburg-Landau (GL).

Nesta teoria, considera-se que partículas carregadas se comportam como um fluido quântico e são descritas por uma pseudofunção de onda $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\phi(\mathbf{r})}$, sendo $|\psi(\mathbf{r})|^2 \propto n_s$. Na teoria de GL, diferentemente da teoria de London, n_s pode depender de \mathbf{r} .

A teoria de GL é baseada na teoria de Landau para transições de fase de 2ª ordem [20] e na introdução de um parâmetro de ordem complexo $\psi(\mathbf{r})$, que é nulo quando $T > T_c$. Para temperaturas próximas de T_c ($T \lesssim T_c$), a energia livre pode ser expandida em uma série de potências de $\psi(\mathbf{r})$. Com isso, podemos escrever a energia livre de um supercondutor, em função do parâmetro de ordem ψ e do potencial vetor \mathbf{A} , como sendo

$$\mathcal{F}_s[\psi, \mathbf{A}] = \mathcal{F}_n + \int d^3r \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{\mu_0 \mathbf{h}^2}{2} \right], \quad (1.19)$$

onde \mathcal{F}_s e \mathcal{F}_n são as energias livres do estado supercondutor e do estado normal, respectivamente; o primeiro e o segundo termo do integrando correspondem à expansão da energia livre pela teoria de Landau, sendo α e β parâmetros fenomenológicos da expansão associados à energia de condensação do supercondutor. Assumimos $\alpha = \alpha_0(T - T_c)$, onde α_0 é uma constante positiva, e β como uma outra constante positiva dependente apenas do material supercondutor. O terceiro termo da integral corresponde à energia cinética $\mathbf{P}^2/(2m^*)$, onde $\mathbf{P} = (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})$ é o momento cinético; $\hbar = h/(2\pi)$, onde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J/s é a constante de Planck, \mathbf{A} é o potencial vetor que está relacionado com o campo magnético local por $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$, m^* e e^* são, respectivamente, a massa e a carga efetivas dos portadores, e μ_0 é a constante de permeabilidade magnética no vácuo. Por fim, o quarto e último termo da integral corresponde à energia do campo magnético dentro e fora do supercondutor.

Fazendo uma análise da importância dos parâmetros fenomenológicos α e β , con-

sideremos o caso em que não temos campos e gradientes, além de pequenas variações espaciais de $\psi(\mathbf{r})$. Com isso, a variação da densidade de energia livre entre o estado supercondutor e o estado normal é dada por:

$$f_s - f_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4. \quad (1.20)$$

Notemos que para obtermos um mínimo global de energia livre o parâmetro β deve ser positivo. Se $\beta < 0$, o mínimo ocorreria para valores grandes do parâmetro de ordem, que não é de interesse. Sendo $\beta > 0$ podemos ter $\alpha(T > T_c) > 0$ ou $\alpha(T < T_c) < 0$. Para o caso de termos $\alpha > 0$, ocorrerá apenas um mínimo de energia $\psi = 0$, para $T > T_c$, e dois mínimos de energia em $|\psi|^2 = |\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$, quando $\alpha < 0$ (ver Fig.(2.7)). Definimos ψ_∞ como sendo o parâmetro de ordem em um supercondutor infinito em campo nulo. Para expelirmos um campo magnético H_0 ou mantê-lo do lado externo de um supercondutor, é necessária uma energia magnética de $\mu_0 H_0^2/2$. Se o campo aplicado é superior ao campo crítico, H_c , o estado normal é recuperado. Com isso, a energia de condensação do estado supercondutor, i.e., a diferença entre as energias do estado supercondutor e do estado normal, à mesma temperatura e campo nulo, se relaciona com a energia magnética por [6]

$$f_s - f_n = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \implies \mu_0 H_c = \alpha^2/\beta, \quad (1.21)$$

onde H_c , campo crítico termodinâmico, é o campo crítico para supercondutores do tipo-I, que é definido empiricamente como

$$H_c(T) \approx H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (1.22)$$

A fim de obtermos as equações de GL, devemos minimizar a Eq.(1.19) em relação ψ e \mathbf{A} [21]. A minimização em termos de ψ fornece

$$\alpha\psi(\mathbf{r}) - \beta|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})^2\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.23)$$

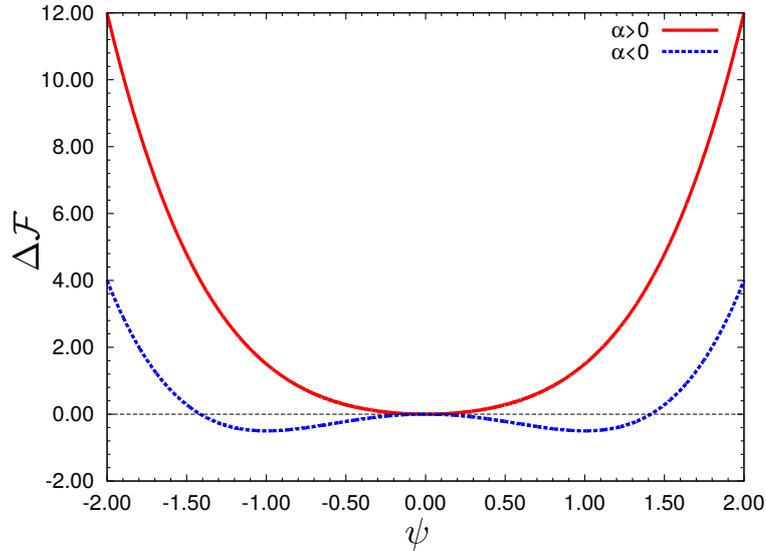


Figura 1.5: Variação da diferença de densidade de energia livre entre o estado supercondutor e o estado normal em função de ψ , para os parâmetros fenomenológicos $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$, assumindo que não há campos e gradientes e que $\psi(\mathbf{r})$ varia lentamente no espaço.

enquanto que a minimização em relação a \mathbf{A} resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_s &= \frac{-ie^*\hbar}{2m^*} [\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})] - \frac{(e^*)^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} \\ &= \frac{e^* |\psi(\mathbf{r})|^2}{m^*} (\hbar\nabla\phi - e^* \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde \mathbf{j}_s é a densidade de corrente supercondutora. A primeira equação de GL é similar, a menos do termo não linear $\beta|\psi|^2\psi$, que atua como um potencial repulsivo, à equação de Schrödinger para uma partícula de massa m^* , carga $q = e^*$, com autovalor de energia $-\alpha$ e $\psi(\mathbf{r})$ sendo a função de onda. Considerando $\psi(\mathbf{r}) = \text{cte}$, a Eq.(1.24) se reduz à Eq.(1.13), que corresponde à equação de London.

Consideremos uma amostra finita em contato com o vácuo, tendo como condição de contorno que nenhuma corrente atravessa a fronteira do supercondutor. Teremos

$$\hat{n} \cdot (-i\hbar\nabla - 2e^* \mathbf{A}) \psi(\mathbf{r}) |_{\partial V} = 0, \quad (1.25)$$

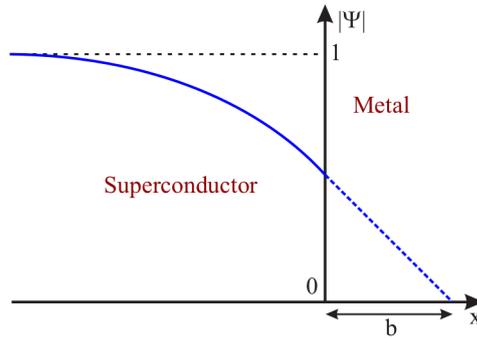


Figura 1.6: Ilustração da dependência espacial do parâmetro de ordem ψ próxima à interface de um supercondutor e de um metal normal, onde b corresponde ao comprimento de extrapolação. Figura extraída da Ref.[11].

onde \hat{n} é o vetor unitário perpendicular à superfície ∂V do supercondutor. Se o supercondutor estiver em contato com um meio qualquer, a Eq.(1.25) pode ser generalizada, conforme mostrado por de Gennes [21], por

$$\hat{n} \cdot (-i\hbar\nabla - 2e^*\mathbf{A})\psi(\mathbf{r})|_{\partial V} = \frac{i\hbar}{b}\psi(\mathbf{r})|_b, \quad (1.26)$$

onde b é definido como comprimento de extrapolação, uma vez que mede a distância na qual o parâmetro de ordem torna-se zero, conforme mostra a Fig.(1.6). O seu valor exato é determinado por meio de uma extrapolação à forma adjacente ao supercondutor, podendo ser classificado em três categorias:

- vácuo ou isolante: $b \rightarrow \infty$,
- metais normais: $b > 0$, e ferromagneto: $b \rightarrow 0$,
- camada supercondutora com uma maior T_c : $b < 0$,

A teoria de Ginzburg-Landau introduz dois comprimentos característicos: o comprimento de penetração $\lambda(T)$, dado pela Eq.(1.17), e o comprimento de coerência $\xi(T)$. O comprimento de coerência $\xi(T)$ está associado à variação do parâmetro de

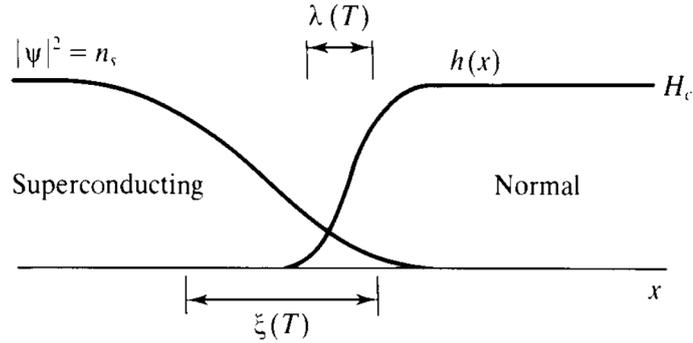


Figura 1.7: Interface entre o supercondutor e o metal normal, indicando o comportamento do parâmetro de ordem ψ e do campo $h(x)$, expressando o significado físico dos comprimentos $\xi(T)$ e $\lambda(T)$. Figura extraída da Ref.[6].

ordem, enquanto que o comprimento de penetração $\lambda(T)$, está associado à variação do campo magnético no interior da amostra, Fig.(1.7).

Retomemos o caso em que não há campo ou corrente aplicada ao supercondutor, onde $\mathbf{A} = 0$. Para o caso mais simples, unidimensional, podemos considerar que o parâmetro de ordem é real, $\psi = \psi^*$. Sendo assim a Eq.(1.23) é reescrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \beta\psi^3 + \alpha\psi = 0. \quad (1.27)$$

Observe que quando $\psi = \text{cte}$, no interior do supercondutor, recuperamos o resultado $\psi^2 = -\alpha/\beta$. Se ψ varia espacialmente, definimos $\psi' \equiv \psi/\psi_\infty$ e $\xi^2 \equiv \hbar^2/(2m^*|\alpha|)$, encontramos

$$\xi^2 \frac{d^2\psi'}{dx^2} - \psi'^3 + \psi' = 0, \quad (1.28)$$

onde $\xi^2 \equiv \hbar^2/(2m^*|\alpha|)$ é o comprimento de coerência. Para $T \approx T_c$, podemos reescrever ξ como

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} = \frac{\xi^2(0)}{1-t}, \quad (1.29)$$

onde $t = T/T_c$. A solução da Eq.(1.28) é

$$\psi' = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right). \quad (1.30)$$

Se considerarmos baixas temperaturas e campos magnéticos fracos, tal que $|\psi|^2 \approx |\psi_\infty|^2$, podemos recuperar a teoria de London, transformando a Eq.(1.24) em

$$\mathbf{j}_s = -\frac{(e^*)^2|\psi|^2}{m^*}\mathbf{A}, \quad (1.31)$$

que corresponde a segunda equação de London, Eq.(1.13), com $n_s = |\psi|^2$. Tomando o rotacional de ambos os lados da equação anterior e usando a lei de Ampère, obtemos

$$-\lambda^2\nabla^2\mathbf{H} + \mathbf{H} = 0, \quad (1.32)$$

com λ

$$\lambda^2 = \frac{m^*}{\mu_0(e^*)^2|\psi|^2} = \frac{m^*\beta}{\mu_0(e^*)^2|\alpha|} = \frac{\lambda^2(0)}{1-t}. \quad (1.33)$$

A última igualdade é válida apenas para $T \approx T_c$, e $\lambda_L(0)$ é o comprimento de penetração à $T = 0$.

Da teoria de GL se define o parâmetro de Ginzburg-Landau (κ) como

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}. \quad (1.34)$$

Notemos que apesar de $\lambda(T)$ e $\xi(T)$ dependerem da temperatura, κ não depende.

1.4 Tipos de supercondutores

O parâmetro de Ginzburg-Landau permite a classificação de materiais supercondutores em dois tipos: supercondutores do tipo-I e do tipo-II, dependendo de como eles

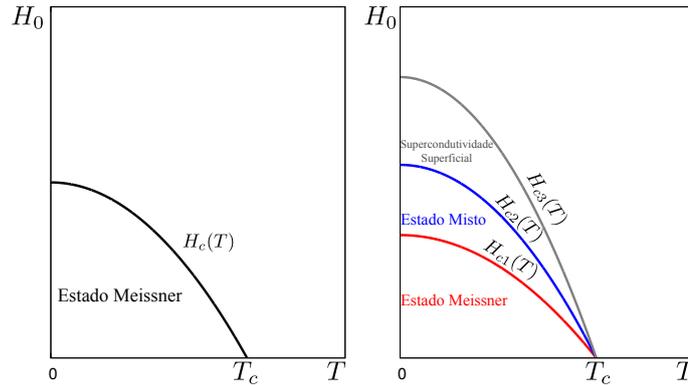


Figura 1.8: Campos críticos em função da temperatura para supercondutores do tipo-I(a) e do tipo-II(b).

respondem a um campo magnético \mathbf{H}_0 aplicado. O valor de κ que delimita se um supercondutor é do tipo-I ou do tipo-II é $\kappa = 1/\sqrt{2}$, de modo que

$$\begin{aligned} \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} &\rightarrow \text{tipo - I} \\ \kappa > \frac{1}{\sqrt{2}} &\rightarrow \text{tipo - II} \end{aligned}$$

Em supercondutores do tipo-I, a transição entre o estado supercondutor e o estado normal ocorre de forma repentina em $H = H_c$, quando aumentamos o campo magnético aplicado H_0 . Enquanto $H_0 < H_c$, observa-se o efeito Meissner.

Em supercondutores do tipo-II temos dois campos críticos: H_{c1} e H_{c2} . O efeito Meissner é observado quando $H_0 < H_{c1}$. Para $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$, um novo estado supercondutor se apresenta através da penetração parcial do campo magnético aplicado, chamado de estado misto.

Na região $H_{c2} < H_0 < H_{c3}$, o interior da amostra está no estado normal, enquanto que a supercondutividade é observada em uma estreita camada na borda do supercondutor. A Fig.(1.8) mostra os diagramas de fase H-T para supercondutores do tipo-I e do tipo-II.

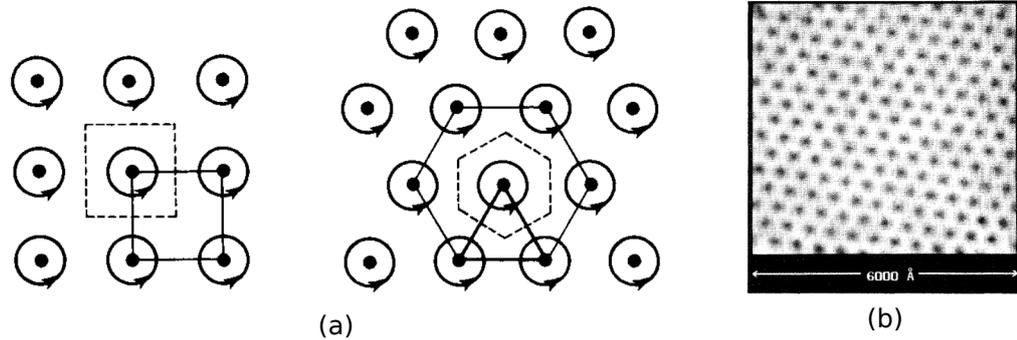


Figura 1.9: (a) Esquema representativo da solução das equações de GL para uma rede periódica de vórtices quadrática e triangular(hexagonal). A linha pontilhada destaca a célula unitária. (b) Rede de Abrikosov a um campo magnético de 1T em uma amostra de NbSe₂. Figuras extraídas das Refs.[6] e [23], respectivamente.

1.5 Rede de Abrikosov e Quantização do fluxo magnético

A penetração parcial do fluxo magnético no interior de supercondutores do tipo-II, promove a formação de estruturas chamadas vórtices. Alexei Alexeevich Abrikosov observou que quando os vórtices se inserem no interior do supercondutor; eles se ordenam de forma periódica em todo o material [7], de forma que arranjos de menor energia ocorrem para redes quadradas. Em 1964, Kleiner *et al* [22] mostraram que redes triangulares possuem uma energia mais baixa para supercondutores homogêneos e livres de imperfeições, tornando-as levemente mais estáveis. A rede com energia mais favorável, nesse caso a rede triangular, é chamada de rede de Abrikosov. Na Fig.(1.9)(a) mostramos um diagrama esquematizando as soluções periódicas em redes quadrada e triangular(hexagonal), e em um supercondutor NbSe₂, Fig.(1.9)(b), observada através de um microscópio de varredura-tunelamento (STM) a 1.8K e 1T [23]. Para sistemas de baixa dimensionalidade, a simetria da rede de vórtices de Abrikosov pode ser afetada pelos contornos da amostra.

O fluxo magnético que penetra no supercondutor é quantizado, ou seja, é um múltiplo inteiro do *quantum* de fluxo magnético Φ_0 . Para obtermos essa quantização podemos usar o parâmetro de ordem supercondutor como sendo $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\phi(\mathbf{r})}$, onde $|\psi(\mathbf{r})|$ é constante, e a Eq.(1.24), de modo que

$$\mathbf{j}_s = \frac{e^*\hbar}{m^*}|\psi|^2\nabla\phi(\mathbf{r}) - \frac{(e^*)^2}{m^*}|\psi|^2\mathbf{A}. \quad (1.35)$$

Escolhendo uma trajetória fechada C , delimitando uma superfície S , dentro da região supercondutora, e calculando a integral de linha do potencial vetor, temos

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \Phi, \quad (1.36)$$

onde Φ é o fluxo magnético que atravessa a região de superfície S . Reescrevendo a Eq.(1.35) como:

$$\mathbf{A} = \frac{\hbar}{e^*}\nabla\phi(\mathbf{r}) - \frac{m^*}{(e^*)^2|\psi|^2}\mathbf{j}_s, \quad (1.37)$$

e substituindo a equação acima na Eq.(1.36), teremos

$$\frac{\hbar}{e^*} \oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} - \frac{m^*}{(e^*)^2} \oint_C \frac{\mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{l}}{|\psi(\mathbf{r})|^2} = \Phi. \quad (1.38)$$

Se tomarmos um contorno na região supercondutora, distante o suficiente para que $\oint \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$, a condição $\Delta\phi = 2\pi\nu$, com $\nu = 0, 1, 2, \dots$, deve ser satisfeita, para garantir a unicidade de ψ em um circuito fechado. Com isso o fluxo magnético no interior do supercondutor é dado por:

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{e^*} \oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar 2\pi\nu}{e^*} = \nu\Phi_0, \quad (1.39)$$

onde

$$\Phi_0 = \frac{h}{e^*} \quad (1.40)$$

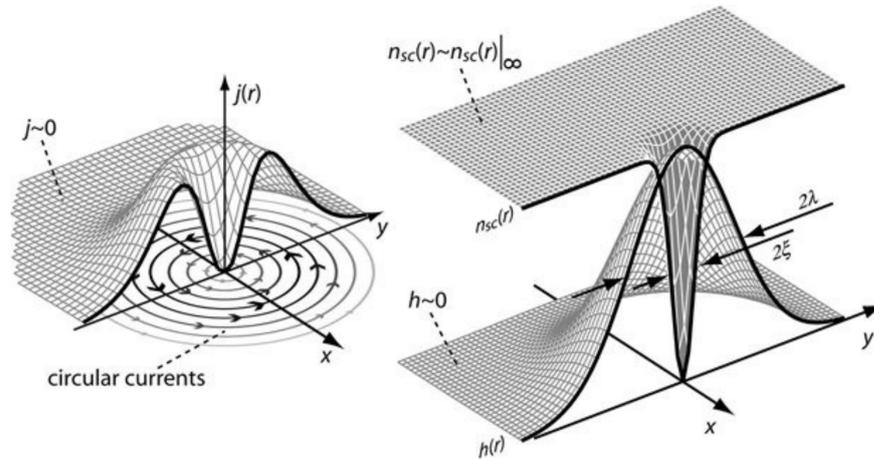


Figura 1.10: Estrutura de um vórtice isolado, destacando, à esquerda, a corrente circular que gera o fluxo do vórtice; à direita, a densidade de elétrons supercondutores. Figura extraída da Ref.[26].

é o *quantum* de fluxo magnético e $e^* = 2e$. De forma simultânea e independente, o valor do *quantum* de fluxo magnético em supercondutores foi confirmado por R. Doll *et al* [24] e Deaver *et al* [25], como sendo $2.07 \cdot 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

Os vórtices são estruturas compostas por um núcleo normal de raio ξ com correntes supercondutoras circulando em volta, estendendo-se por um comprimento λ . Possuem formato tubular ao longo do supercondutor e carrega um *quantum* de fluxo magnético, tal que o valor máximo do fluxo é alcançado no centro do vórtice. Em contrapartida, o parâmetro de ordem associado à densidade de elétrons supercondutores assume o valor nulo no centro do núcleo. Na Fig.(1.10) mostramos a estrutura de um vórtice isolado, destacando a corrente circular que gera o fluxo do vórtice, à esquerda, e a densidade dos elétrons supercondutores, n_s , indo a zero no centro do vórtice e o aumento do campo, $h(\mathbf{r})$, à direita.

1.6 Teoria BCS

Em 1957, 46 anos após a descoberta da supercondutividade, foi desenvolvida uma teoria capaz de explicar o fenômeno da supercondutividade microscopicamente, baseada na interação do gás de elétrons com ondas elásticas da rede cristalina. Proposto por John Bardeen, Leon Cooper e John Schrieffer, a teoria BCS [9] é mais complexa do que a teoria de Ginzburg-Landau (a qual nos fornece a estrutura dos vórtices e seus parâmetros críticos).

Em 1956, Cooper mostra que para temperaturas muito baixas, o gás de Fermi torna-se instável em relação a uma interação atrativa entre os elétrons [27]. A teoria de BCS sugere que a supercondutividade está associada a um estado condensado de pares de elétrons, que formam os chamados pares de Cooper. Em um metal, os elétrons em seu estado fundamental ocupam os níveis de energia até o nível de Fermi $E_F = \hbar^2 k_F^2 / (2m^*)$, onde \mathbf{k}_F está relacionado com o momento de Fermi, $\mathbf{p}_F = \hbar \mathbf{k}_F$, e m^* é a massa efetiva do par de Cooper. Os pares de Cooper estão situados na superfície de Fermi e possuem momento e spins opostos.

Sabemos que a interação Coulombiana atua de forma repulsiva, então uma outra interação deve ser responsável pela atração dos elétrons dos pares de Cooper. A atração ocorre devido a interação elétron-fônon, e se torna relevante a baixas temperaturas. Um exemplo simples dessa interação atrativa pode ser feita observando o movimento de um elétron em uma rede cristalina. Ao se movimentar, um elétron produz deformações na rede, provocando uma interação atrativa para um segundo elétron, que vem em seguida. A teoria de BCS descreve o estado de condensação dos pares de elétrons, introduzindo uma função de onda macroscópica para os elétrons. A teoria prevê que há um gap de energia entre o estado fundamental e os estados

excitados, dado por [6]

$$E_g = 2\Delta(T), \quad (1.41)$$

onde

$$\Delta T(T) \approx \begin{cases} 1.74\Delta(0)\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}, & \text{para } T \approx T_c \\ \Delta(0), & T \ll T_c, \end{cases} \quad (1.42)$$

onde $\Delta(T)$ é a energia relacionada com a criação dos pares de Cooper, sendo $\Delta(0) \approx 1.76k_B T_c$ e E_g é a energia necessária para quebrar o par de Cooper. Posteriormente, L. P. Gor'kov [28] mostra que para temperaturas próximas à temperatura crítica T_c , as equações fenomenológicas de Ginzburg-Landau podem ser obtidas através da teoria BCS, incluindo os parâmetros fenomenológicos.

1.7 Supercondutores extremos tipo-II, Interações entre linhas de vórtices e Equação de Movimento

A grande maioria dos supercondutores do tipo-II são considerados supercondutores extremos, pois apresentam $\kappa \gg 1$, ou seja, $\lambda \gg \xi$. Pelo fato de ξ ser muito pequeno, é uma aproximação razoável considerar o parâmetro de ordem $|\psi|^2$ constante na parte externa ao núcleo do vórtice. Tomando o rotacional de ambos os lados da Eq.(1.35), teremos

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2} \nabla \times \nabla\phi - \frac{1}{\mu_0\lambda^2} \mathbf{h}. \quad (1.43)$$

Negligenciando os efeitos de desmagnetização, vamos considerar que uma linha de vórtice encontra-se alinhada ao eixo z . Portanto, a integral do termo $\nabla \times \nabla\phi$ sobre

o plano x - y contendo a linha de vórtice, com ν_i *quanta* de fluxo, é dada por

$$\int d^2r \nabla \times \nabla \phi = \oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\nu_i, \quad (1.44)$$

similarmente à Eq.(1.39). Para um vórtice i , localizado em $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$

$$\nabla \times \nabla \phi = 2\pi\nu_i \hat{z} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 2\pi\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i), \quad (1.45)$$

onde definimos $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \equiv \hat{z} \nu_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ como a vorticidade. Reescrevendo a Eq.(1.43)

como

$$\lambda^2 \nabla \times \mathbf{j}_s + \mathbf{h} = \hat{z} \frac{\Phi_0 \nu_i}{\mu_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.46)$$

que se trata da Eq.(1.9) com o termo extra devido ao vórtice. Usando $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, o gauge de London, a equação acima pode ser reescrita como

$$\lambda^2 \mathbf{j}_s + \mathbf{A} = \frac{\Phi_0 \nu_i}{2\pi\mu_0} \hat{z} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \quad (1.47)$$

equivalente à Eq.(1.13) com o termo devido ao vórtice.

Generalizando as Eqs.(1.46) e (1.47) para o caso de termos N_v linhas de vórtices, teremos, respectivamente,

$$\lambda^2 \nabla \times \mathbf{j}_s + \mathbf{h} = \hat{z} \frac{\Phi_0}{\mu_0} \sum_{i=1}^{N_v} \nu_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.48)$$

$$\lambda^2 \mathbf{j}_s + \mathbf{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0} \hat{z} \times \sum_{i=1}^{N_v} \nu_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}. \quad (1.49)$$

Usando a aproximação de London, a energia livre de Gibbs \mathcal{G}_s de uma linha de vórtice é dada pela energia cinética das correntes e da energia magnética gerada pelo vórtice [21], com isso

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s &= \int d^3r \left[\frac{n_s m^* |\mathbf{v}_s|^2}{2} + \frac{\mu_0 (\mathbf{h} - \mathbf{H}_{ext})^2}{2} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2} \int d^3r [\lambda^2 |\mathbf{j}_s|^2 + (\mathbf{h} - \mathbf{H}_{ext})^2] \end{aligned} \quad (1.50)$$

sendo \mathbf{H}_{ext} um campo magnético externo. Considerando λ muito maior do que as dimensões da amostra, podemos negligenciar os efeitos de desmagnetização, o que resulta em $\mathbf{h} \approx \mathbf{H}_{ext}$, reduzindo a equação acima a

$$\mathcal{G}_s = \frac{\mu_0}{2} \int d^3r \lambda^2 |\mathbf{j}_s|^2. \quad (1.51)$$

Consideremos agora dois vórtices, i e j , onde a corrente induzida pelo j -ésimo vórtice interage com o i -ésimo vórtice de modo que, como os vórtices são linhas de fluxo magnético, as correntes supercondutoras em torno do j -ésimo vórtice exercem uma força sobre o i -ésimo vórtice. Como ambos os vórtices estão alinhados paralelamente ao eixo z , então podemos escrever a força por unidade de comprimento que um vórtice i sofre devido a um vórtice j por [6]

$$\mathbf{f}^j(\mathbf{r}_i) = \mathbf{j}_s^j(\mathbf{r}_i) \times \hat{z}\Phi_0 \quad (1.52)$$

onde \mathbf{j}_s^j é o corrente induzida pelo j -ésimo na posição do i -ésimo vórtice. Notemos que da Eq.(1.52) os vórtices estão orientados na mesma direção, i.e., na direção do eixo z , a força entre eles é repulsiva, uma vez que $\mathbf{j}_s^j(\mathbf{r}_i)$ depende de ν_i . Para o caso de termos uma interação entre vórtice ($\nu > 0$) e antivórtice ($\nu < 0$), a força entre eles é atrativa, que é equivalente à consideramos vórtices em sentidos opostos. Generalizando a Eq.(1.52), de modo que definimos $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ como sendo a soma de todas as correntes em uma determinada posição \mathbf{r} do vórtice, então a força por unidade de comprimento que esse vórtice sofre é dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \hat{z}\Phi_0. \quad (1.53)$$

1.7.1 Estrutura e Energia de vórtice no limite de $\kappa \gg 1$

Da Eq.(1.48), substituindo a equação de Ampère, teremos

$$-\lambda^2 \nabla^2 \mathbf{h} + \mathbf{h} = \frac{\Phi_0}{\mu_0} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i). \quad (1.54)$$

Usando transformada de Fourier para resolver a equação acima, considerando $\mathbf{h} = h(\mathbf{r})\hat{z}$, temos [29]

$$h(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0 \nu_i}{\lambda^2} \frac{1}{k^2 + \lambda^{-2}}. \quad (1.55)$$

Tomando a transformada inversa, a solução exata para a Eq.(1.54), em um supercondutor infinito, é dada por

$$h(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} b_z(\mathbf{r}) = \frac{\nu_i \Phi_0}{2\pi \lambda^2} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\lambda} \right), \quad (1.56)$$

onde $K_0(r)$ é a função de Bessel modificada de ordem zero. A função de Bessel decai exponencialmente como $e^{-r/\lambda}$, para longas distâncias ($r \gg \lambda$) e diverge logaritmicamente com $\ln(r/\lambda)$, quando $r \rightarrow 0$, onde $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$. O fato físico dessa divergência é que ocorre um *cut off* em $r \sim \xi$, levando $|\psi|^2$ a zero, eliminando a divergência gerada pela solução. Em forma de equações, teremos

$$h(r) \rightarrow \frac{\nu_i \Phi_0}{2\pi \lambda^2} \left(\frac{\pi \lambda}{2r} \right)^{1/2} e^{-r/\lambda} \quad r \rightarrow \infty \quad (1.57)$$

$$h(r) \approx \frac{\nu_i \Phi_0}{2\pi \lambda^2} \left[\ln \left(\frac{\lambda}{r} \right) + 0.12 \right] \quad \xi \ll r \ll \lambda \quad (1.58)$$

A energia livre por unidade de comprimento, ϵ_v , de uma linha de vórtice, sofre contribuição da energia cinética das correntes e da energia magnética do campo gerado pelo vórtice. Negligenciando a parcela do núcleo, a energia ϵ_v , integrada no plano x - y , será dada por (considerando o vórtice na origem)

$$\epsilon_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r>\xi} d\mathbf{r} (\lambda^2 |\nabla \times \mathbf{h}|^2 + \mathbf{h}^2). \quad (1.59)$$

Usando a identidade vetorial [30]

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{h},$$

na Eq.(1.59), onde $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{h}$, a integral poderá ser dividida em duas parcelas, como mostrado abaixo:

$$\epsilon_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r < \xi} d\mathbf{r} (\mathbf{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2\mu_0 \lambda^2} \oint d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{h} \times \nabla \times \mathbf{h}). \quad (1.60)$$

O primeiro termo não contribui para ϵ_v , uma vez que excluimos o núcleo do vórtice, Eq.(1.54). Tomando dois caminhos circulares, na segunda integral, centrados no núcleo do vórtice, sendo um de raio infinito e outro de raio ξ , Eq.(1.60) resulta em

$$\epsilon_v = \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \left[\left(h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right) \Big|_{r=\xi} - \left(h \frac{dh}{dr} 2\pi r \right) \Big|_{r=\infty} \right]. \quad (1.61)$$

Usando as Eqs.(1.57) e (1.58), temos que o segundo termo se anula, o que nos permite reescrever ϵ_v como

$$\epsilon_v = \frac{(\nu_i \Phi_0)^2}{4\pi \mu_0 \lambda^2} \ln \kappa. \quad (1.62)$$

Notemos que ϵ_v é proporcional a ν_i^2 , o que torna a existência de um vórtice com 2 *quanta* de fluxo desfavorável, uma vez que é mais favorável termos dois vórtices com um *quantum* de fluxo cada (em supercondutores volumétricos).

1.7.2 Campos Críticos H_{c1} e H_{c2}

Para $H < H_{c1}$ temos apenas o efeito Meissner, i.e., teremos a condutividade perfeita onde nenhuma parcela do campo aplicado penetra no supercondutor, como mostra a Fig.(1.2). Quando o campo crítico H_{c1} é atingido, o estado misto tem início, podendo haver a formação de estruturas de vórtices. No entanto, não nos

perguntamos qual a relação desse campo inferior, H_{c1} , com o surgimento do primeiro vórtice. O campo H_{c1} está associado à energia necessária para a formação de um vórtice. Em H_{c1} o valor da energia livre de Gibbs assume o mesmo valor para o estado Meissner e para o primeiro vórtice dentro e fora da amostra. Da termodinâmica $G = F - H \int h dV$. Na ausência de fluxo, temos $G_s = F_s$, logo

$$F_s = F_s + \epsilon_v L - H_{c1} \int h dV = F_s + \epsilon_v L - H_{c1} \Phi_0 L, \quad (1.63)$$

onde L é o comprimento da linha do vórtice na amostra. Logo,

$$H_{c1} = \frac{\epsilon_v}{\Phi_0}, \quad (1.64)$$

com ϵ_v sendo a energia do vórtice por unidade de comprimento dada pela Eq.(1.62).

Partindo da primeira equação de Ginzburg-Landau(GL), Eq.(1.23), e considerando um supercondutor infinito na presença de um campo uniforme externo H direcionado, por exemplo, na direção \hat{z} , teremos uma equação semelhante a equação de Schrödinger para uma partícula de carga $e^* = 2e$ e massa $m^* = 2m$, que é reduzida a uma equação do oscilador harmônico simples quântico. Dos autovalores de energia, teremos que máximo para o campo H é de H_{c2} [6], onde

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\xi^2(T)} = \sqrt{2}\kappa H_c(T). \quad (1.65)$$

1.7.3 Interações entre Linhas de vórtices

Consideremos agora dois vórtices, i e j , onde a corrente induzida pelo j -ésimo vórtice interage com o i -ésimo vórtice de modo que, como os vórtices são linhas de fluxo magnético, isso resulta em uma força que o j -ésimo vórtice exerce sobre i -ésimo vórtice. Como ambos os vórtices estão alinhados paralelamente ao eixo z , então

podemos escrever a força por unidade de comprimento que um vórtice i sofre devido a um vórtice j [6]

$$\mathbf{f}^{ij}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{j}_s^j(\mathbf{r}_i) \times \hat{\mathbf{z}}\nu_i\Phi_0 \quad (1.66)$$

onde $\mathbf{j}_s^j(\mathbf{r}_0)$ é a corrente induzida pelo j -ésimo na posição do i -ésimo vórtice. Como

$$\mathbf{j}_s^j(\mathbf{r}_i) \propto \nu_j \quad \longrightarrow \quad \mathbf{f}^{ij} \propto \nu_i\nu_j,$$

teremos duas possibilidades para o produto $\nu_i\nu_j$, o que determinará qual o tipo de interação entre as estruturas:

$$\nu_i\nu_j > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{repulsão}$$

$$\nu_i\nu_j < 0 \quad \longrightarrow \quad \text{atração}$$

A corrente gerada por um vórtice é $\mathbf{j}_s = \nabla \times \mathbf{h}$, sendo $\mathbf{h} = h(r)\hat{\mathbf{z}}$, então $\mathbf{j}_s = -(\partial\mathbf{h}/\partial r)\hat{\phi}$, com isso teremos, usando a Eq.(1.56)

$$\mathbf{j}_s^j = \hat{r}_{ij}\Phi_0 \frac{\partial h^j(\mathbf{r}_i)}{\partial r_i} = \frac{\nu_j\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} K_1\left(\frac{r_{ij}}{\lambda}\right), \quad (1.67)$$

onde $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ e $K_1(r)$ é a função de Bessel modificada de primeira ordem.

Identificamos a energia de interação como sendo

$$\epsilon_{vv}(r_{ij}) = \frac{\nu_i\nu_j\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} K_0\left(\frac{r_{ij}}{\lambda}\right). \quad (1.68)$$

Quando o vórtice se movimenta, há uma força viscosa que se opõe a esse movimento, $-\eta\mathbf{v}$, resultado dos espalhamentos dos elétrons normais no interior do núcleo.

Logo, podemos escrever a equação de movimento de um vórtice como

$$\eta\mathbf{v} = \mathbf{f} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{z}}\Phi_0. \quad (1.69)$$

Como os vórtices se movem com uma velocidade \mathbf{v} , carregando um fluxo Φ_0 , então ele induzirá um campo elétrico dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}. \quad (1.70)$$

Das duas últimas expressões, obtemos

$$\mathbf{E} = \rho_{ff}\mathbf{j}, \quad \rho_{ff} = \frac{B\Phi_0}{\eta}, \quad (1.71)$$

onde ρ_{ff} é a resistividade elétrica de *flux flow*, termo associado ao movimento contínuo do fluxo magnético. O termo ρ_{ff} acarreta em uma dissipação de energia no movimento do vórtice, o que resulta na perda da característica de *resistividade elétrica nula*. A maneira usada para contornar o problema, sem que haja dissipação, é fixar os vórtices através de uma força de ancoragem. De maneira geral, a Eq.(1.69) continua sendo válida, com \mathbf{f} sendo a soma das forças atuando sobre o vórtice.

O coeficiente de viscosidade pode ser determinado a partir de uma abordagem de supercondutividade local, onde o núcleo do vórtice, $r \approx \xi$, encontra-se no estado normal e que $l \ll \xi$, onde l é o livre caminho médio dos elétrons no núcleo do vórtice. Isto fornece um coeficiente de viscosidade dado por [31]

$$\eta \approx \frac{\Phi_0 \mu_0 H_{c2}}{\rho_n}, \quad (1.72)$$

onde ρ_n é a resistividade normal a uma determinada temperatura.

Como discutido anteriormente, quando um vórtice se movimenta no interior do supercondutor, ele faz com que ocorra um processo de dissipação de energia, acarretando perdas de suas propriedades supercondutoras, como por exemplo, a resistência nula. Para contornar esse problema, é interessante aumentarmos o valor da corrente crítica do material. Tal processo é possível se os vórtices estiverem sujeitos a uma

ancoragem(*pinning*) no interior da amostra. Inicialmente essa ancoragem era feita através de defeitos naturais. Processos mais recentes são usados como efeitos de ancoragem, como por exemplo, irradiação por prótons e neutros e bombardeamento de feixes de íons pesados [32, 33]. Para um melhor efeito, os *pinning* são posicionados de forma regular na amostra. Redes de *pinning* podem ser formadas através de defeitos estruturais em forma de colunas [33], buracos na amostra [34], amostras parcialmente perfuradas [35] e pontos magnéticos [36, 37, 38, 39, 40].

Para aumentar a ancoragem em filmes supercondutores, tem-se utilizado muito a técnica com uma rede regular de buracos, onde diferentes estados dinâmicos são observados [35]. Dependendo do tamanho e da intensidade do *pinning*, novas fases são obtidas, incluindo vórtices e super-redes compostos, com configurações de dímeros e trímeros [41].

Posicionando um material magnético, próximo o suficiente da amostra, o estado do supercondutor pode sofrer alterações [42, 43, 44, 45]. O efeito de ancoragem resultante de materiais magnéticos mostrou-se eficiente. Comparado ao defeitos colunares, mencionado anteriormente, a ancoragem por materiais magnéticos é cerca de 100 vezes maior [46]. À medida que o momento magnético do material é aumentado, estados com uma maior quantidade de *quanta* tornam-se energeticamente mais favoráveis [47]. Estudos recentes revelam que a ancoragem através de estruturas magnéticas simples [48, 49, 50, 51] e múltiplas [52, 53, 54, 40] mostram-se eficientes para substituir a presença e ausência de buracos, respectivamente, como forma de ancoragem na amostra.

Em um dos trabalhos que compõem esta dissertação usaremos como processo de ancoragem pontos magnéticos, que podem ser modelados através de um dipolo

magnético [44, 45]. Estaremos interessados em obter configurações de vórtice-vórtice e vórtice-antivórtice, onde estaremos no limite de filmes finos.

1.8 Interações de Vórtices em Filmes Finos

No regime de filmes finos, $d \ll \lambda$, onde d é a espessura do filme. Neste caso é preciso redefinir um comprimento de penetração efetivo apropriado para filmes finos. Este comprimento de penetração efetivo, que relaciona o comprimento de penetração com a espessura do filme, é dado por [55, 56]

$$\Lambda = \frac{\lambda^2}{d}. \quad (1.73)$$

Agora, a determinação do tipo de supercondutor não dependerá apenas do parâmetro de GL κ , mas também de d , o que pode proporcionar um estado misto mesmo com $\kappa < 1/\sqrt{2}$ [55].

Dada a espessura $d \ll \lambda$, campos e correntes são considerados praticamente constantes ao longo da espessura do filme, onde os vórtices são considerados pontuais e podemos tratar o problema como bidimensional. A corrente \mathbf{j} integrada sobre espessura será dada por

$$\mathbf{J} = \int dz \mathbf{j} \cong \mathbf{j}d, \quad (1.74)$$

onde \mathbf{J} é a corrente lamelar.

Considerando a presença de vórtices no supercondutor, a segunda equação de London no calibre de London, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, pode ser reescrita como

$$\Lambda \mathbf{J}_s + \mathbf{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0} \hat{z} \times \sum_{i=1}^{N_v} \nu_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}. \quad (1.75)$$

Já a força que atua sobre o vórtice, de modo geral, é dada por

$$\mathbf{F}^i(\mathbf{r}_i) = \mathbf{J}(\mathbf{r}_i) \times (\Phi_0 \hat{z}). \quad (1.76)$$

Capítulo 2

Método Variacional aplicado à Teoria de Ginzburg-Landau a Discos em Campo Magnético Externo

A evolução em nanofabricações e em técnicas de medidas proporcionaram a retomada dos estudos de supercondutores mesoscópicos, levando a constatações experimentais em amostras pequenas e finas, com tamanhos comparáveis ao comprimento de coerência, ξ , e ao comprimento de penetração, λ . Supercondutores mesoscópicos, quando submetidos a um campo magnético externo, sofrem influência das condições de contorno, tamanho e geometria da amostra, o que pode acarretar em diferentes estados supercondutores e transições entre eles. As propriedades magnéticas dos discos mesoscópicos têm sido previstos de forma teórica [57, 58, 59, 60, 61] e comprovadas experimentalmente [62, 63]. A geometria cilíndrica, em forma de discos, tem atraído os olhares do meio científico [64, 57, 59, 65, 66, 63, 58, 67, 68, 61, 69, 60, 70].

Uma grande parte dos estudos relacionados a discos mesoscópicos faz uso da teoria

de Ginzburg-Landau, GL, assumindo algumas condições de contorno a fim de simplificar o problema em estudo. O motivo de simplificar as equações de GL é pelo fato delas serem não lineares e acopladas, dificultando o seu tratamento. Alguns estudos teóricos consideram discos de espessura $d \ll \xi$ [71, 61, 67, 68, 69, 72, 73, 74, 75], onde é resolvida apenas a primeira equação de GL e a segunda pode ser negligenciada. Estudos com discos de espessura finita podem ser encontrados nas Refs.[57, 58, 59, 60, 76, 77], onde são levados em consideração os efeitos de desmagnetização.

Quando o raio do disco, R , é da ordem ou menor do que ξ , nenhum vórtice encontra-se presente no supercondutor, havendo apenas o estado Meissner. Para valores intermediários, $\xi < R < 2\xi$, há uma sobreposição dos vórtices, sendo obtidos apenas estruturas de vórtices gigantes. Nesses sistemas são observados saltos na magnetização das transições entre os estados com diferentes vorticidades [57, 58]. Para valores maiores, $R > 2\xi$, a interação vórtice-vórtice supera a interação vórtice-fronteira, proporcionando a formação de estados de múltiplos vórtices [78]. A formação de estruturas com a mesma vorticidade total e suas transições foi verificada experimentalmente e teoricamente por Geim *et al* [79].

A abordagem à formação de vórtices em amostras mesoscópicas pode ser feita através da teoria de London, onde os vórtices são tratados como partículas pontuais [80], como também da teoria de GL, dependendo do tamanho da amostra. Quando usada a teoria de GL, a transição entre os estados de vórtices com vorticidades diferentes aparece como sendo um ponto de sela na energia livre entre dois estados de vórtices gigantes, para discos e anéis supercondutores pequenos, enquanto que em sistemas maiores, como ponto de sela entre estados de multivórtices ou entre vórtice gigante e dois estados de multivórtices [71, 81]. O ponto de sela na energia livre

representa a barreira de energia que separa dois estados diferentes de vórtices.

Dependendo do tamanho do disco supercondutor mesoscópico, configurações de camadas de vórtices são obtidas experimentalmente [82, 83] e teoricamente, usando a teoria de GL e a teoria de London [84, 59]. Na Ref.[85] são investigadas configurações de anéis de vórtices usando a teoria de GL não linear, mostrando a existência de vários tipos de configurações para um certo valor de vorticidade L . É considerado um disco de supercondutor de raio $R = 6\xi$ e $d \ll \xi$, onde são obtidas as seguintes configurações: estado com $L = 0$ (ou simplesmente o estado Meissner); estado com um único vórtice no centro do disco, $L = 1$; estados de multivórtices, onde todos os vórtices se encontram dispostos em uma única camada ocorre para $2 \leq L \leq 8$; estados onde se apresenta um vórtice no centro e uma camada de vórtices em torno dele são observados estáveis para $6 \leq L \leq 11$; estados com dois vórtices no interior, envolvidos por uma camada de vórtices, são possíveis para $10 \leq L \leq 14$, onde os dois vórtices no interior podem se combinar formando um vórtice gigante com vorticidade $L = 2$; estados com três vórtices no interior e outros na parte externa, podem ser estáveis para $12 \leq L \leq 14$; o estado de vórtice gigante, onde todos os vórtices são combinados em um vórtice maior no centro é obtido para $12 \leq L \leq 24$. A diferença das energias livres entre os estados com diferentes vorticidades é muito maior do que os estados com a mesma vorticidade e configurações diferentes. Na medida em que aumenta-se o raio do disco supercondutor mais anéis de vórtices surgem, assim como a quantidade de configurações possíveis.

Grigorieva *et al* [83] observa experimentalmente que apenas um tipo de arranjo é encontrado para $L \leq 5$, como previsto na Ref.[85]. Os vórtices são adicionados na primeira camada de forma gradativa até $L = 6$, quando um vórtice aparece no

centro da estrutura, formando o estado $(1, 5)$. A estrutura com um vórtice central se mantém até $L = 9$, quando um segundo vórtice é acrescentado no interior da amostra, gerando o estado $(2, 7)$, e assim por diante. Uma terceira camada aparece em $L = 17$, com um vórtice central seguido por uma camada contendo três vórtices. Configurações contendo três camadas de vórtices aparecem até $L = 32$, surgindo a quarta camada em $L = 33$. Para valores de $L > 40$, a interação vórtice-vórtice supera a interação vórtice-fronteira próximo do centro [84]. Para valores maiores na vorticidade, diferentes configurações são obtidas para um mesmo L , resultado que não apenas configurações estáveis, mas também em estados metaestáveis. Essas estruturas também são encontradas em outros tipos de sistemas, como em partículas confinadas em um potencial parabólico [86], em partículas coloidais [87] e em dusty plasmas [88].

Cabral, Baelus e Peeters mostram [84] que a rede triangular de Abrikosov pode ser observada próxima ao centro de discos supercondutores mesoscópicos na presença de muitos vórtices, envolvida por vórtices em anéis concêntricos. Na medida em que o número de vórtices aumenta, a interação vórtice-vórtice supera a interação vórtice-fronteira próximo do centro da amostra, resultando na rede de Abrikosov, enquanto os outros vórtices são rearranjados em anéis cada vez mais próximos da extremidade do disco, apresentando defeitos na estrutura triangular quando o campo externo aumenta.

2.1 Formalismo Teórico

Consideremos um disco supercondutor mesoscópico, livre de defeitos, com raio R e espessura d (ver Fig.(2.1)), imerso em um meio isolante na presença de um campo magnético perpendicular ao plano do disco e uniforme $\mathbf{H} = (0, 0, H_{ext})$. Para discos

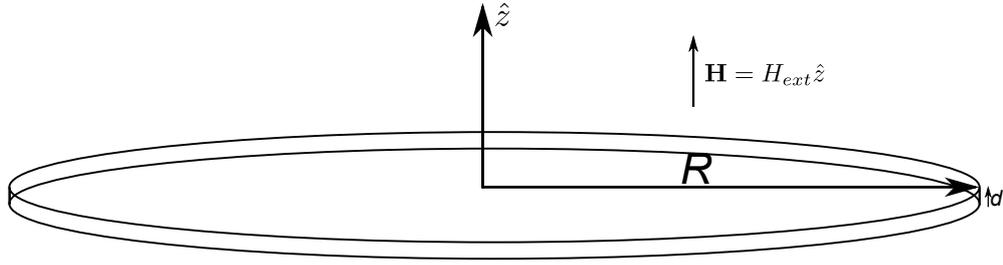


Figura 2.1: Figura representativa de um disco supercondutor livre de defeitos com raio R e espessura d .

finos, $Rd \ll \lambda^2$, podemos desprezar os efeitos de desmagnetização, que são induzidas pelas correntes de blindagem. Com isso, podemos escrever o funcional de GL como

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_n + \int_V d^3r \left(\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi|^2 \right) \quad (2.1)$$

onde \mathcal{G} , \mathcal{G}_n são as energias livres do estado supercondutor e do estado normal, respectivamente, ψ é o parâmetro de ordem complexo, $e^* = 2e$ e $m^* = 2m$ correspondem, respectivamente, à carga e à massa do par de Cooper, $\mathbf{A} = H_{ext}\rho\hat{e}_\phi/2$ é o potencial vetor de um campo magnético uniforme em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , α e β são os coeficientes de GL que dependem tanto da temperatura, como do supercondutor e V é o volume do supercondutor.

Normalizamos grandezas de modo que

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho}{\xi} \quad \rightarrow \quad \nabla = \frac{\nabla'}{\xi} \\ \Phi_0 &= \frac{h}{e^*} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \frac{\mathbf{A}}{\Phi_0/2\pi\xi}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e utilizamos $\alpha^2/\beta = H_c^2\mu_0$, $\Psi = \psi/\psi_\infty$, onde $|\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$ corresponde ao parâmetro de ordem em um supercondutor infinito a campo nulo. Na interface supercondutor-

vácuo($\partial V'$), temos a condição de contorno

$$\hat{n} \cdot (i\nabla' + \mathbf{A}') \Psi \Big|_{\partial V'} = 0, \quad (2.3)$$

onde \hat{n} é o vetor normal à superfície $\partial V'$. Aplicando as normalizações na Eq.(2.1), o funcional por unidade de volume pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G} &= \frac{H_c^2 \mu_0 d'}{\xi^2 V'} \int d^2\rho' \left[-|\Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4 + |(-i\nabla' - \mathbf{A}') \Psi|^2 \right] \\ \Delta\mathcal{G}' &= 2 \int d^2\rho' \left[-|\Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4 + |(i\nabla' + \mathbf{A}') \Psi|^2 \right] \\ \Delta\mathcal{G}' &= 2 \int d^2\rho' \left[-|\Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4 - \Psi^* \hat{\mathcal{L}} \Psi \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\Delta\mathcal{G}' = \Delta\mathcal{G} / (H_c^2 \mu_0 d' / 2\xi^2 V')$ é a diferença entre as energias do estado supercondutor e do estado normal, enquanto que $\hat{\mathcal{L}} = (\nabla' - i\mathbf{A}')^2$ é o operador energia cinética para o par de Cooper, ambos normalizados.

Minimizando a Eq.(2.2) em relação a Ψ^* e \mathbf{A}' e fazendo uso do calibre de London, $\nabla' \cdot \mathbf{A}' = 0$, obtemos as equações de GL,

$$(i\nabla' + \mathbf{A}')^2 \Psi = (1 - |\Psi|^2) \Psi, \quad (2.5a)$$

$$\frac{1}{2i} (\Psi^* \nabla' \Psi - \Psi \nabla' \Psi^*) - |\Psi|^2 \mathbf{A}' = -\kappa^2 \nabla'^2 \mathbf{A}'. \quad (2.5b)$$

Todas as unidades são medidas em unidades do comprimento de coerência, $\xi = \hbar / \sqrt{2m^* |\alpha|}$, o parâmetro de ordem em unidades de $\psi_\infty = \sqrt{-|\alpha|/\beta}$, o potencial vetor em $\Phi_0 / 2\pi\xi$, $\kappa = \lambda/\xi$ é o parâmetro de GL.

Para obtermos estados com vórtices, devemos ter no mínimo $R \gtrsim \xi$ [78]. Sabe-se que vórtices gigantes sempre apresentam simetria cilíndrica em amostras com simetrias circulares. Para se obter qualquer configuração com vórtices, deve-se resolver o sistema com as duas equações não-lineares acopladas de GL, que permitirá determi-

nar a distribuição do parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{r})$ e do campo magnético dentro e fora do supercondutor.

Os efeitos de desmagnetização podem ser desprezados para $Rd \ll \lambda^2$. Neste caso não é preciso resolver a segunda equação de GL para obtermos \mathbf{A}' , pois $\mathbf{A}' \approx \mathbf{A}'_{ext}$. O interesse é resolver a primeira equação de GL. No entanto, ao invés de resolvermos a primeira equação de forma exata, faremos uso de um método variacional, que consiste em primeiro resolver o problema de autovalores:

$$\hat{\mathcal{L}}\varphi_n = \lambda_{L_n}\varphi_n, \quad (2.6)$$

para depois expandir o nosso parâmetro de ordem Ψ nas autofunções ortonormais do operador energia cinética [57, 59, 61]:

$$\Psi = \sum_n c_n \varphi_n = \sum_n c_n e^{iL_n\phi} f_{L_n}(\rho), \quad (2.7)$$

onde $c_n \equiv |c_n|e^{i\phi_n}$ é o coeficiente complexo do parâmetro de ordem, ϕ_n é à fase do coeficiente, L_n a vorticidade da autofunção n , ϕ a sua fase, $f_{L_n}(\rho)$ é a função radial associada à autofunção e ρ é a coordenada radial. Substituindo a expressão acima na equação do funcional de GL, Eq.(2.2), a diferença entre as energias livres do estado supercondutor e do estado normal pode ser escrita em termos dos coeficientes complexos c_n

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G}' &= 2 \int d^2\rho' \left[-|\Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4 - \Psi^* \hat{\mathcal{L}}\Psi \right] \\ &= 2 \int d^2\rho' \left[-\sum_{n,j} c_n c_j^* \varphi_n \varphi_j^* + \frac{1}{2} \sum_{n,k,j,l} c_n c_k c_j^* c_l^* \varphi_n \varphi_k \varphi_j^* \varphi_l^* - \sum_{n,j} \lambda_{L_n} c_n c_j^* \varphi_j \varphi_j^* \right] \\ &= -2 \sum_{n,j} (1 + \lambda_{L_n}) c_n c_j^* \int d^2\rho' \varphi_n \varphi_j^* + \sum_{n,k,j,l} c_n c_k c_j^* c_l^* \int d^2\rho' \varphi_n \varphi_k \varphi_j^* \varphi_l^* \\ &= -2 \sum_{n,j} (1 + \lambda_{L_n}) c_n c_j^* \mathcal{A}_n^j + \sum_{n,k,j,l} c_n c_k c_j^* c_l^* \mathcal{A}_{n,k}^{j,l}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A}_n^j = \int d^2\rho' \varphi_n \varphi_j^*$ e $\mathcal{A}_{n,k}^{j,l} = \int d^2\rho' \varphi_n \varphi_k \varphi_j^* \varphi_l^*$. Para encontrar o mínimo da energia livre, devemos minimizar o funcional de GL com respeito ao módulo $|c_n|$ e à fase ϕ_n . No entanto, para soluções com apenas uma e duas componentes, i.e., $\{L\}$ e $\{L_1, L_2\}$, respectivamente, o funcional é invariante com respeito a fase, sendo preciso minimizar apenas em relação ao módulo $|c_n|$ [61, 68]. Finalmente, é feita uma minimização do funcional $\Delta\mathcal{G}'$ em relação a c_m^* , i.e., $\partial\Delta\mathcal{G}'/\partial c_m^* = 0$, onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\mathcal{G}'}{\partial c_m^*} &= -\sum_{n,j} (1 + \lambda_{L_n}) c_n \mathcal{A}_n^j \delta_{j,m} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n,k,l} c_n c_k c_l^* \mathcal{A}_{n,k}^{j,l} \delta_{j,m} + \frac{1}{2} \sum_{n,k,j} c_n c_k c_j^* \mathcal{A}_{n,k}^{j,l} \delta_{l,m} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notemos que

$$\mathcal{A}_{n,k}^{j,l} = \int d^2\rho' \varphi_n \varphi_k \varphi_j^* \varphi_l^* = \int d^2\rho' \varphi_n \varphi_k \varphi_l^* \varphi_j^* = \mathcal{A}_{n,k}^{l,j}, \quad (2.10)$$

logo, a Eq.(2.9) pode ser reescrita como:

$$-\sum_n (1 + \lambda_{L_n}) c_n \mathcal{A}_n^m + \sum_{n,k,j} c_n c_k c_j^* \mathcal{A}_{n,k}^{j,m} = 0. \quad (2.11)$$

A Eq.(2.11) permite obter os coeficientes c_n que irão minimizar a energia livre do sistema. Para uma única autofunção, o funcional da energia é invariante com respeito a fase, ϕ_1 , que nos leva a minimizar apenas pelo coeficiente $|c_n|$. Além da minimização da energia livre, é necessário obter as expressões que condicionam a estabilidade da solução, $\partial^2\Delta\mathcal{G}'/(\partial c_n^2)$ e $\partial^2\Delta\mathcal{G}'/(\partial c_n \partial c_k)$. Em princípio, c_n pode ser complexo, mas devido à invariância do funcional com respeito à fase ϕ_n , assumimos que c_n são reais.

Para obtermos os estados de vórtices gigantes, escrevemos nosso parâmetro de ordem composto apenas por uma autofunção, i.e.,

$$\Psi = c_1 \varphi_1, \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq.(2.12) na Eq.(2.11), com $n = k = j = 1$, teremos

$$-(1 + \lambda_{L_1}) \mathcal{A}_1^m + |c_1|^2 \mathcal{A}_{1,1}^{1,m} = 0$$

Como só temos uma única autofunção, então

$$|c_1|^2 = \frac{\Lambda_1 \mathcal{A}_1^1}{\mathcal{A}_{1,1}^{1,1}}, \quad (2.13)$$

onde $\Lambda_1 = (1 + \lambda_{L_1})$, λ_{L_1} é o autovalor associado à autofunção φ_1 . Conhecendo a expressão para c_1 , podemos reescrever a variação de energia livre em termos das integrais

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}'_1 &= -2\Lambda_1 |c_1|^2 \mathcal{A}_1^1 + |c_1|^4 \mathcal{A}_{1,1}^{1,1} \\ &= -\Lambda_1^2 \frac{(\mathcal{A}_1^1)^2}{\mathcal{A}_{1,1}^{1,1}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde o índice 1 na expressão $\Delta \mathcal{G}'_1$ indica a variação de energia livre para apenas uma autofunção. Como critério de estabilidade do sistema, a Eq.(2.14) deve satisfazer a condição $\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_1}{\partial c_1^2} > 0$

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_1}{\partial c_1^2} = -4\Lambda_1 \mathcal{A}_1^1 + 12c_1^2 \mathcal{A}_{1,1}^{1,1} > 0. \quad (2.15)$$

Para estados de multivórtices, consideramos o parâmetro de ordem composto por duas autofunções:

$$\Psi = \sum_{n=1}^2 c_n \varphi_n = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2. \quad (2.16)$$

Da Eq.(2.11), teremos

$$-\underbrace{\sum_{n=1}^2 (1 + \lambda_{L_n}) c_n \mathcal{A}_n^m}_I + \underbrace{\sum_{n,k,j=1}^2 c_n c_k c_j^* \mathcal{A}_{n,k}^{j,m}}_{II} = 0, \quad (2.17)$$

abrindo os termos da expressão anterior:

$$I : \sum_{n=1}^2 (1 + \lambda_{L_n}) c_n \mathcal{A}_n^m = \Lambda_1 c_1 \mathcal{A}_1^m + \Lambda_2 c_2 \mathcal{A}_2^m, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} II : \sum_{n,k,j=1}^2 c_n c_k c_j^* \mathcal{A}_{n,k}^{j,m} &= c_1 |c_1|^2 \mathcal{A}_{1,1}^{1,m} + c_2 |c_1|^2 \mathcal{A}_{2,1}^{1,m} + c_2 |c_1|^2 \mathcal{A}_{1,2}^{1,m} + \\ &+ c_1^* c_2^2 \mathcal{A}_{2,2}^{1,m} + c_2^* c_1^2 \mathcal{A}_{1,1}^{2,m} + c_1 |c_2|^2 \mathcal{A}_{2,1}^{2,m} + \\ &+ c_1 |c_2|^2 \mathcal{A}_{1,2}^{2,m} + c_2 |c_2|^2 \mathcal{A}_{2,2}^{2,m}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

reescrevendo a Eq.(2.17), obtemos

$$\begin{aligned} & - (\Lambda_1 c_1 \mathcal{A}_1^m + \Lambda_2 c_2 \mathcal{A}_2^m) + c_1 |c_1|^2 \mathcal{A}_{1,1}^{1,m} + c_2 |c_1|^2 (\mathcal{A}_{2,1}^{1,m} + \mathcal{A}_{1,2}^{1,m}) + \\ & + c_1^* c_2^2 \mathcal{A}_{2,2}^{1,m} + c_2^* c_1^2 \mathcal{A}_{1,1}^{2,m} + c_1 |c_2|^2 (\mathcal{A}_{2,1}^{2,m} + \mathcal{A}_{1,2}^{2,m}) + c_2 |c_2|^2 \mathcal{A}_{2,2}^{2,m} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Recordando da expressão para φ_n :

$$\varphi_n = e^{iL_n \phi} f_{L_n}(\rho), \quad (2.21)$$

e substituindo a equação acima nas expressões de \mathcal{A}_n^m e $\mathcal{A}_{n,k}^{j,l}$, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^m &= \int d^2 \rho' \varphi_n \varphi_m^* = \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(L_m - L_n)\phi} \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_n} f_{L_m} \\ &= 2\pi \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_n} f_{L_m} \delta_{L_n, L_m} = 2\pi \mathcal{R}_n^m \delta_{L_n, L_m} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{A}_{n,k}^{j,m} = 2\pi \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_n} f_{L_k} f_{L_j} f_{L_m} \delta_{L_n + L_k, L_j + L_m} = 2\pi \mathcal{R}_{n,k}^{j,m} \delta_{L_n + L_k, L_j + L_m}, \quad (2.23)$$

onde $\mathcal{R}_n^m = \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_n} f_{L_m}$ e $\mathcal{R}_{n,k}^{j,m} = \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_n} f_{L_k} f_{L_j} f_{L_m}$ são as integrais radiais das autofunções. Como todos os termos possuem um fator de 2π , então a Eq.(2.20) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & - (\Lambda_1 c_1 \mathcal{R}_1^m \delta_{L_1, L_m} + \Lambda_2 c_2 \mathcal{R}_2^m \delta_{L_2, L_m}) + c_1 |c_1|^2 \mathcal{R}_{1,1}^{1,m} \delta_{L_1, L_m} + \\ & + c_2 |c_1|^2 (\mathcal{R}_{2,1}^{1,m} + \mathcal{R}_{1,2}^{1,m}) \delta_{L_2, L_m} + c_1^* c_2^2 \mathcal{R}_{2,2}^{1,m} \delta_{2L_2, L_1 + L_m} + \\ & + c_2^* c_1^2 \mathcal{R}_{1,1}^{2,m} \delta_{2L_1, L_2 + L_m} + c_1 |c_2|^2 (\mathcal{R}_{2,1}^{2,m} + \mathcal{R}_{1,2}^{2,m}) \delta_{L_1, L_m} + \\ & + c_2 |c_2|^2 \mathcal{R}_{2,2}^{2,m} \delta_{L_2, L_m} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como temos duas autofunções, φ_1 e φ_2 , logo teremos duas possibilidades para m :

- $m = 1$

$$\Lambda_1 c_1 \mathcal{R}_1^1 = c_1 |c_1|^2 \mathcal{R}_{1,1}^{1,1} + c_1 c_2^2 \mathcal{R}_{2,2}^{1,1} \delta_{2L_2, 2L_1} + c_2^* c_1^2 \mathcal{R}_{1,1}^{2,1} \delta_{2L_1, L_2 + L_1} + c_1 |c_2|^2 (\mathcal{R}_{2,1}^{2,1} + \mathcal{R}_{1,2}^{2,1})$$

- $m = 2$

$$\Lambda_2 c_2 \mathcal{R}_2^2 = c_2 |c_1|^2 (\mathcal{R}_{2,1}^{1,2} + \mathcal{R}_{1,2}^{1,2}) + c_1^* c_2^2 \mathcal{R}_{2,2}^{1,2} \delta_{2L_2, L_1 + L_2} + c_2^* c_1^2 \mathcal{R}_{1,1}^{2,2} \delta_{2L_1, 2L_2} + c_2 |c_2|^2 \mathcal{R}_{2,2}^{2,2}$$

Para o caso de $L_1 = L_2 = L$, o parâmetro de ordem pode ser reescrito como

$$\Psi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 = c_1 e^{iL\phi} f_{L_1}(\rho) + c_2 e^{iL\phi} f_{L_2}(\rho).$$

Como as vorticidades são iguais, então o autovalor usado também será o mesmo.

Sendo assim, as funções radiais são idênticas ($f_{L_1}(\rho) = f_{L_2}(\rho) = f_L(\rho)$). Logo

$$\Psi = (c_1 + c_2) e^{iL\phi} f_L(\rho) = c e^{iL\phi} f_L(\rho),$$

onde retornamos ao caso de uma única autofunção, Eq.(2.12). Como estamos interessados em estados de multivórtices, i.e., $L_1 \neq L_2$, teremos um sistema composto de duas equações, Eqs.(2.25a e 2.25b), da qual podemos obter os coeficientes c_1 e c_2 .

$$\Lambda_1 \mathcal{R}_1^1 = \mathcal{R}_{1,1}^{1,1} |c_1|^2 + (\mathcal{R}_{2,1}^{2,1} + \mathcal{R}_{1,2}^{2,1}) |c_2|^2, \quad (2.25a)$$

$$\Lambda_2 \mathcal{R}_2^2 = (\mathcal{R}_{2,1}^{1,2} + \mathcal{R}_{1,2}^{1,2}) |c_1|^2 + \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} |c_2|^2. \quad (2.25b)$$

Analisando a expressão para a parte radial da integral do sistema de equações, temos

$$\mathcal{R}_{2,1}^{2,1} = \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_2} f_{L_1} f_{L_2} f_{L_1} = \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_1} f_{L_2} f_{L_2} f_{L_1} = \mathcal{R}_{1,2}^{2,1},$$

$$\mathcal{R}_{2,1}^{1,2} = \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_2} f_{L_1} f_{L_1} f_{L_2} = \int_0^R d\rho' \rho' f_{L_1} f_{L_2} f_{L_1} f_{L_2} = \mathcal{R}_{1,2}^{1,2},$$

$$\therefore \mathcal{R}_{2,1}^{2,1} = \mathcal{R}_{1,2}^{2,1} = \mathcal{R}_{2,1}^{1,2} = \mathcal{R}_{1,2}^{1,2}.$$

Com isso podemos reescrever o sistema de equações como

$$\begin{aligned}\Lambda_1 \mathcal{R}_1^1 &= \mathcal{R}_{1,1}^{1,1} |c_1|^2 + 2\mathcal{R}_{1,2}^{1,2} |c_2|^2, \\ \Lambda_2 \mathcal{R}_2^2 &= 2\mathcal{R}_{1,2}^{1,2} |c_1|^2 + \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} |c_2|^2,\end{aligned}\tag{2.26}$$

que tem como solução:

$$|c_1|^2 = \frac{\Lambda_1 \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} - 2\Lambda_2 \mathcal{R}_{1,2}^{1,2} \mathcal{R}_2^2}{\mathcal{R}_{1,1}^{1,1} \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} - 4\mathcal{R}_{1,2}^{1,2} \mathcal{R}_{1,2}^{1,2}},\tag{2.27}$$

$$|c_2|^2 = \frac{\Lambda_2 \mathcal{R}_2^2 \mathcal{R}_{1,1}^{1,1} - 2\Lambda_1 \mathcal{R}_{1,2}^{1,2} \mathcal{R}_1^1}{\mathcal{R}_{1,1}^{1,1} \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} - 4\mathcal{R}_{1,2}^{1,2} \mathcal{R}_{1,2}^{1,2}}.\tag{2.28}$$

Com as expressões para c_1 e c_2 , podemos reescrever a variação de energia livre em termos das integrais

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{G}'_2 &= -4\pi \Lambda_1 |c_1|^2 \mathcal{R}_1^1 - 4\pi \Lambda_2 |c_2|^2 \mathcal{R}_2^2 + 2\pi |c_1|^4 \mathcal{R}_{1,1}^{1,1} + 2\pi |c_2|^4 \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} + \\ &\quad + 8\pi |c_1|^2 |c_2|^2 \mathcal{R}_{1,2}^{1,2},\end{aligned}\tag{2.29}$$

onde o índice 2 na expressão $\Delta \mathcal{G}'_2$ indica que é a variação de energia livre para duas autofunções.

Assumindo que as constantes c_1 e c_2 são reais [11], as condições de estabilidade devem satisfazer

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_1^2} > 0; \frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_2^2} > 0; \frac{\partial \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_1} \frac{\partial \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_2} - \left(\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_1 \partial c_2} \right) > 0.$$

Aplicando as condições de estabilidade na Eq.(2.29), nosso sistema deve satisfazer

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_1^2} = -8\pi \Lambda_1 \mathcal{R}_1^1 + 16\pi c_2^2 \mathcal{R}_{1,2}^{1,2} + 24\pi c_1 \mathcal{R}_{1,1}^{1,1} > 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_2^2} = -8\pi \Lambda_2 \mathcal{R}_2^2 + 16\pi c_1^2 \mathcal{R}_{1,2}^{1,2} + 24\pi c_2 \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} > 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_1} \frac{\partial \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_2} - \left(\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}'_2}{\partial c_1 \partial c_2} \right) &= 64\pi^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \mathcal{R}_1^1 \mathcal{A}_2^2 - 4\pi^2 \Lambda_1 \mathcal{R}_1^1 (48\mathcal{R}_{2,2}^{2,2} c_2^2 + 32\mathcal{R}_{1,2}^{1,2} c_1^2) \\ &\quad - 4\pi^2 \Lambda_2 \mathcal{R}_2^2 (48\mathcal{R}_{1,1}^{1,1} c_1^2 + 32\mathcal{R}_{1,2}^{1,2} c_2^2) \\ &\quad + 384\pi^2 \mathcal{R}_{1,2}^{1,2} (c_1^4 \mathcal{R}_{1,1}^{1,1} + c_2^4 \mathcal{R}_{2,2}^{2,2}) \\ &\quad + 4\pi^2 c_1^2 c_2^2 (144\mathcal{R}_{1,1}^{1,1} \mathcal{R}_{2,2}^{2,2} + 64\mathcal{R}_{1,2}^{1,2} \mathcal{R}_{1,2}^{1,2}) \\ &\quad - 32\pi c_1 c_2 \mathcal{R}_{1,2}^{1,2} > 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.2 Autovalor do operador Energia Cinética

Como já mencionado, deseja-se resolver o problema de autovalor

$$\hat{\mathcal{L}}\Psi = \lambda_{L_n} \Psi, \quad (2.33)$$

onde $\hat{\mathcal{L}} = (\nabla' - i\mathbf{A}')^2$ é o operador energia cinética, $\Psi = \sum_n c_n e^{iL_n \phi} f_{L_n}(\rho')$, é o parâmetro de ordem complexo, onde $f_{L_n}(\rho') = f_{L_n}$ é a função radial que depende apenas de ρ , c_n é um coeficiente constante e λ_{L_n} é o autovalor associados à autofunção n com vorticidade L_n [64]. Reescrevendo o operador energia cinética, abrindo o termo quadrático e substituindo na Eq.(2.33), teremos

$$\sum_n c_n (\nabla'^2 - i\nabla' \cdot \mathbf{A}' - i\mathbf{A}' \cdot \nabla' - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}') f_{L_n} e^{iL_n \phi} = \sum_n \lambda_{L_n} c_n f_{L_n} e^{iL_n \phi}. \quad (2.34)$$

Usando coordenadas polares, o potencial vetor, em um disco de raio R , pode ser escrito como

$$\mathbf{A}' = \frac{H_{ext} \rho'}{2} \hat{e}_\phi, \quad (2.35)$$

Desta forma, \mathbf{A}' é tangencial à borda do disco. Também em coordenadas polares, temos

$$\nabla' = \left[\hat{e}_{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} + \frac{\hat{e}_{\phi}}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (2.36)$$

$$\nabla'^2 = \frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) + \frac{1}{\rho'^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (2.37)$$

assim como

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}' f_{L_n} e^{iL_n \phi} = \frac{H_{ext}^2 \rho'^2}{4} f_{L_n} e^{iL_n \phi}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{A}' \cdot \nabla' f_{L_n} e^{iL_n \phi} = \frac{iL_n H_{ext}}{2} f_{L_n} e^{iL_n \phi}, \quad (2.39)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{A}' f_{L_n} e^{iL_n \phi} = \frac{iL_n H_{ext}}{2} f_{L_n} e^{iL_n \phi}, \quad (2.40)$$

$$\nabla'^2 f_{L_n} e^{iL_n \phi} = \left[\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \frac{L_n^2}{\rho'^2} \right] f_{L_n} e^{iL_n \phi}. \quad (2.41)$$

Voltando a equação de autovalores, Eq.(2.34), encontramos:

$$\begin{aligned} \sum_n c_n \left[\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \frac{L_n^2}{\rho'^2} + H_{ext} L_n - \frac{H_{ext}^2 \rho'^2}{4} \right] f_{L_n} e^{iL_n \phi} &= \sum_n c_n \lambda_{L_n} f_{L_n} e^{iL_n \phi}, \\ \sum_n c_n \left[\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \left(\frac{L_n^2}{\rho'^2} - H_{ext} L_n + \frac{H_{ext}^2 \rho'^2}{4} \right) \right] f_{L_n} e^{iL_n \phi} &= \sum_n c_n \lambda_{L_n} f_{L_n} e^{iL_n \phi}, \end{aligned}$$

$$\sum_n c_n \left[\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \left(\frac{L_n}{\rho'} - \frac{H_{ext} \rho'}{2} \right)^2 \right] f_{L_n} e^{iL_n \phi} = \sum_n c_n \lambda_{L_n} f_{L_n} e^{iL_n \phi}.$$

Usando a propriedade de ortogonalidade de $e^{iL_n \phi}$, multiplicamos a expressão acima por $e^{-iL_m \phi}$ e integramos no intervalo $0 \leq \phi \leq 2\pi$, onde chegamos à equação diferencial

$$\frac{d^2 f_{L_n}}{d\rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \frac{df_{L_n}}{d\rho'} - \left[\lambda_{L_n} + \left(\frac{L_n}{\rho'} - \frac{H_{ext} \rho'}{2} \right)^2 \right] f_{L_n} = 0, \quad (2.42)$$

que tem como condição de contorno

$$\left. \frac{df_{L_n}}{d\rho'} \right|_{\rho'=R'} = 0, \quad (2.43)$$

sendo $R' = R/\xi$.

Como solução tentativa (*ansatz*) da equação diferencial, Eq.(2.42), faz-se

$$f_{L_n}(\rho') = e^{\alpha(\rho')^2}(\rho')^\nu g_{L_n}(\rho'), \quad (2.44)$$

onde α , ν são constantes a serem determinadas e $g_{L_n}(\rho')$ é uma função, assim como $f_{L_n}(\rho')$, que depende apenas da posição ρ' . Substituindo a Eq.(2.44) na Eq.(2.42), teremos

$$\begin{aligned} & \rho' \frac{d^2 g_{L_n}}{d\rho'^2} + [4\alpha\rho'^2 + (2\nu + 1)] \frac{dg_{L_n}}{d\rho'} + \\ & \frac{1}{\rho'} \left[(4\alpha - \lambda_{L_n}) \rho' + \frac{(2\alpha\rho'^2 + \nu)^2 - (H_{ext}\rho'^2/2 - L_n)^2}{\rho'} \right] g_{L_n} = 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

escolhendo

$$\alpha = -\frac{H_{ext}}{4}, \quad (2.46)$$

$$\nu = L_n, \quad (2.47)$$

a Eq.(2.45) pode ser reescrita como

$$\rho \frac{d^2 g_{L_n}(\rho')}{d\rho'^2} + [(2L_n + 1) - H_{ext}\rho'^2] \frac{dg_{L_n}(\rho')}{d\rho'} + (H_{ext} + \lambda_{L_n}) \rho' g_n(\rho') = 0. \quad (2.48)$$

Supõe-se que a função $g_{L_n}(\rho')$ pode ser escrita como

$$g_{L_n}(\rho') = g_n(u = \gamma\rho'^2), \quad (2.49)$$

de modo que

$$\frac{\partial g_{L_n}(\rho')}{\partial \rho'} = \frac{\partial u}{\partial \rho} g'_n(u) = 2\gamma\rho' \frac{dg_n(u)}{du}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial^2 g_{L_n}(\rho')}{\partial \rho'^2} = 2\gamma \left[\frac{dg_n(u)}{du} + 2\gamma(\rho')^2 \frac{d^2 g_n(u)}{du^2} \right]. \quad (2.51)$$

Substituindo as Eqs.(2.49 - 2.51) na Eq.(2.48), e realizando algumas manipulações algébricas, teremos

$$u \frac{d^2 g_{L_n}(u)}{du^2} + \left[(L_n + 1) - \frac{H_{ext} u}{2\gamma} \frac{dg_{L_n}(u)}{du} - \frac{H_{ext} (1 + \lambda_{L_n}/H_{ext})}{4\gamma} g_{L_n}(u) \right] = 0. \quad (2.52)$$

Se $\gamma = H_{ext}/2$, então a Eq.(2.52) pode ser reescrita como

$$u \frac{d^2 g_{L_n}(u)}{du^2} + [(L_n + 1) - u] \frac{dg_{L_n}(u)}{du} - \frac{(1 + \lambda_{L_n}/H_{ext})}{2} g_{L_n}(u) = 0. \quad (2.53)$$

A Eq.(2.53) é uma equação diferencial ordinária hipergeométrica confluenta que tem como solução geral a expressão abaixo [89]:

$$g_{L_n}(u) = k_1 \mathcal{M}(a, c; u) + k_2 \mathcal{U}(a, c; u), \quad (2.54)$$

onde k_1 e k_2 são constantes e $\mathcal{M}(a, c; u)$ é a função hipergeométrica confluenta $\Phi(a, c; z)$ [90, 91]. $\mathcal{U}(a, c; u)$ é outra solução Linearmente Independente (LI) da Equação Diferencial Ordinária (EDO) hipergeométrica confluenta com os parâmetros

$$a = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right), \quad (2.55a)$$

$$c = L_n + 1, \quad (2.55b)$$

$$u = \frac{H_{ext}(\rho')^2}{2}. \quad (2.55c)$$

Das Eqs.(2.46),(2.47) e (2.54), temos a função radial $f_{L_n}(\rho)$

$$\begin{aligned} f_{L_n}(\rho') &= e^{\alpha(\rho')^2} (\rho')^\nu g_{L_n}(\rho') \\ &= e^{-H_{ext}(\rho')^2/4} (\rho')^{L_n} \left\{ k_1 \mathcal{M} \left[\frac{1}{2} (1 + \lambda_{L_n}/H_{ext}), L_n + 1; \frac{H_{ext}(\rho')^2}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \mathcal{U} \left[\frac{1}{2} (1 + \lambda_{L_n}/H_{ext}), L_n + 1; \frac{H_{ext}(\rho')^2}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Conhecendo as propriedades das funções hipergeométricas confluentes:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathcal{M}(a, c; u) \rightarrow \infty; \quad \mathcal{M}(a, c; 0) = 1 \quad (2.57)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathcal{U}(a, c; u) \rightarrow 0; \quad \mathcal{U}(a, c; 0) = \infty \quad c > 1, \quad (2.58)$$

e com $0 \leq \rho' \leq R'$, temos $k_2 = 0$. Portanto, fazemos uso da Eq.(2.57) e anexamos a constante k_1 na constante c_n . Sendo assim, a função radial é dada por

$$f_{L_n}(\rho') = e^{-H_{ext}(\rho')^2/4}(\rho')^{L_n} \mathcal{M} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right), L_n + 1; \frac{H_{ext}(\rho')^2}{2} \right] \quad (2.59)$$

ou, fazendo uma transformação de Kummer,

$$\mathcal{M}(a, c; u) = e^u \mathcal{M}(c - a, c; -u), \quad (2.60)$$

$f_{L_n}(\rho')$ pode também ser escrita como

$$f_{L_n}(\rho') = e^{H_{ext}(\rho')^2/4}(\rho')^{L_n} \mathcal{M} \left[L_n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right), L_n + 1; -\frac{H_{ext}(\rho')^2}{2} \right]. \quad (2.61)$$

Aplicando a condição de contorno, Eq.(2.43), na função radial do parâmetro de ordem Ψ , Eq.(2.59), tem-se

$$\left\{ -\frac{H_{ext}\rho'}{2}(\rho')^{L_n} \mathcal{M}[a, c; u(\rho')] \Big|_{\rho'=R'} + \frac{L_n(\rho')^{L_n}}{\rho'} \mathcal{M}[a, c; u(\rho')] \Big|_{\rho'=R'} + \right. \\ \left. + (\rho')^{L_n} \frac{d}{d\rho'} \mathcal{M}[a, c; u(\rho')] \Big|_{\rho'=R'} \right\} \exp\left(-\frac{H_{ext}(R')^2}{4}\right) = 0. \quad (2.62)$$

Usando mais uma das propriedades da função hipergeométrica confluyente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho'} \mathcal{M}[a, c; u(\rho')] &= \frac{du}{d\rho'} \frac{d}{du} \mathcal{M}[a, c; u] \\ &= H_{ext}\rho' \frac{a}{c} \mathcal{M}[a + 1, c + 1; u], \end{aligned} \quad (2.63)$$

e retornando à Eq.(2.62) e usando a Eq.(2.63), teremos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right) \mathcal{M} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right) + 1, L_n + 2; \frac{H_{ext}(R')^2}{2} \right] + \\ &+ \frac{(L_n + 1)}{2} \left(\frac{2L_n}{H_{ext}(R')^2} - 1 \right) \mathcal{M} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right), L_n + 1; \frac{H_{ext}(R')^2}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

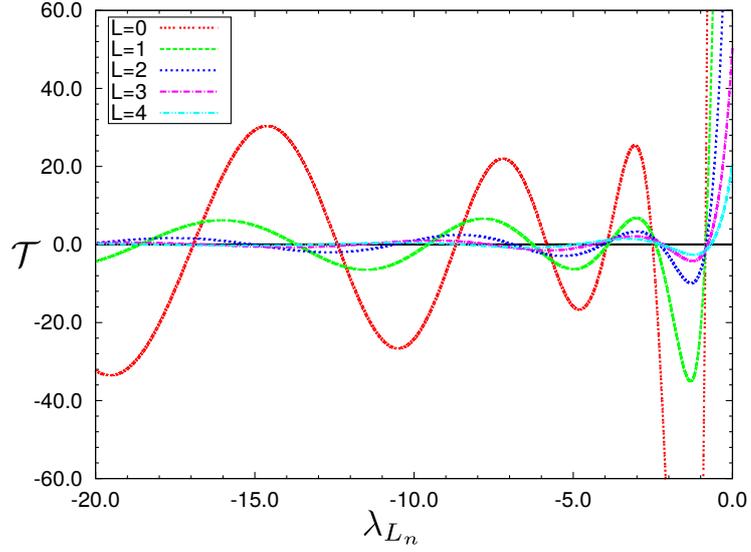


Figura 2.2: Comportamento da função $\mathcal{T} = \mathcal{T}(H_{ext}, R', L_n, \lambda_{L_n})$ para um disco de raio $R = 5\xi$, na presença de um campo externo $H_{ext} = 0.85H_{c2}$ e para cinco valores distintos de vorticidades $L = 0, 1, 2, 3$ e 4 .

Da expressão anterior definimos uma função $\mathcal{T} = \mathcal{T}(H_{ext}, R', L_n, \lambda_{L_n})$

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right) \mathcal{M} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right) + 1, L_n + 2; \frac{H_{ext}(R')^2}{2} \right] + \\ & \frac{(L_n + 1)}{2} \left(\frac{2L_n}{H_{ext}(R')^2} - 1 \right) \mathcal{M} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{L_n}}{H_{ext}} \right), L_n + 1; \frac{H_{ext}(\rho')^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde os “zeros” da função \mathcal{T} fornecerão um conjunto de autovalores $\{\lambda_{L_n}\} = \lambda_{0,L_n}, \lambda_{1,L_n}, \lambda_{2,L_n}, \dots$, associados a um determinado campo aplicado, H_{ext} , em um disco de raio R e um valor de vorticidade L . Sendo assim, queremos obter os autovalores associados a um determinado conjunto de parâmetros. Na Fig.(2.2) apresentamos o comportamento da função \mathcal{T} para um disco de raio $R = 5\xi$, na presença de um campo externo de $H_{ext} = 0.85H_{c2}$ e para 5 valores diferentes da vorticidade L_n , $L_n = 0, 1, 2, 3$ e 4 . A função \mathcal{T} apresenta um comportamento oscilante, diminuindo de amplitude, para valores negativos de λ_{L_n} e vorticidade $L_n > 0$.

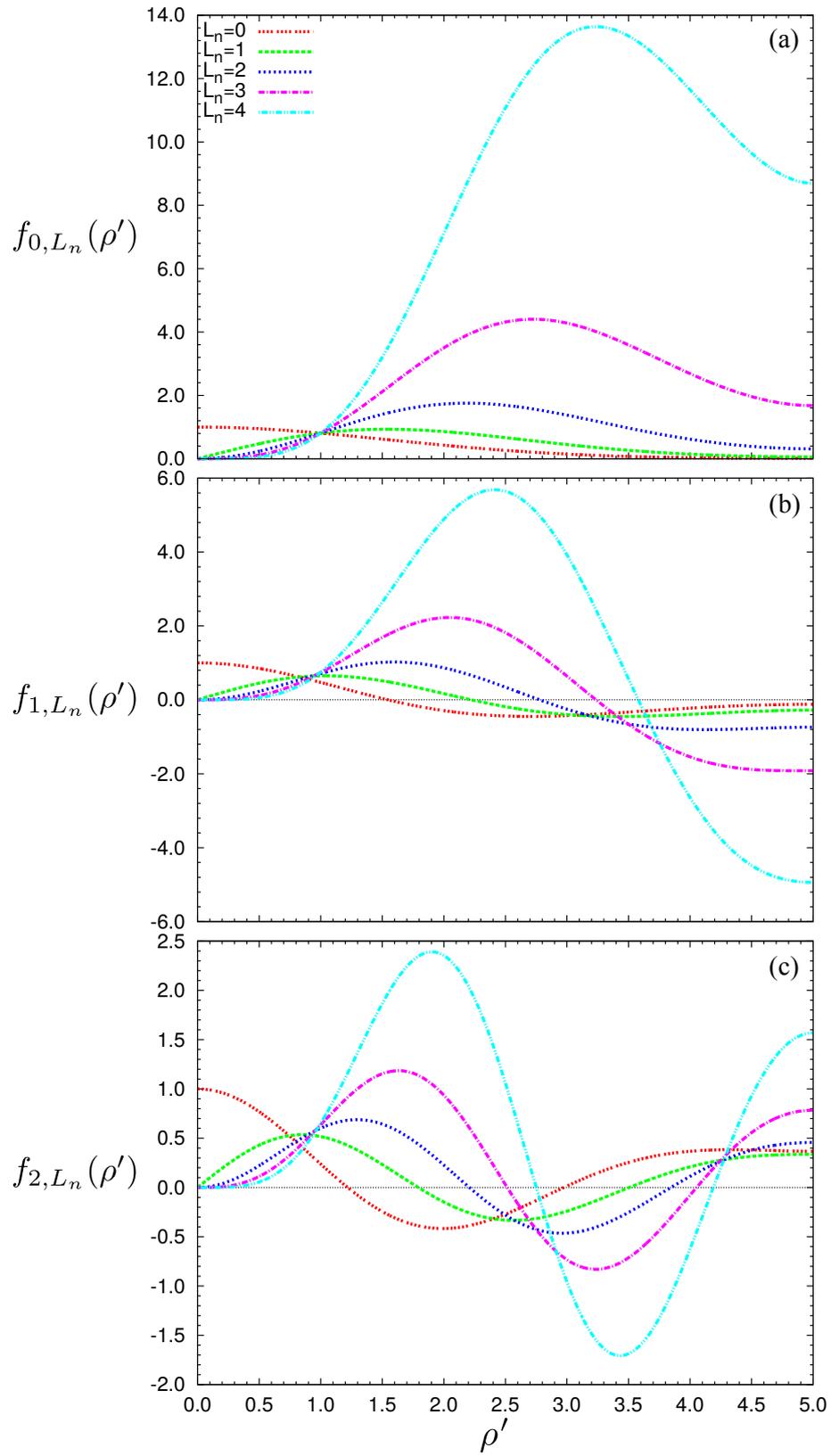


Figura 2.3: Comportamento da função radial, $f_{\zeta,L_n}(\rho')$, para os valores de vorticidade $L_n = 0, 1, 2, 3$, e 4 . Os resultados são obtidos considerando os autovalores (a) λ_{0,L_n} , (b) λ_{1,L_n} e (c) λ_{2,L_n} .

Conhecendo os autovalores gerados pela Eq.(2.65), passamos a avaliar o comportamento da função radial, Eq.(2.59), para diferentes valores de vorticidades e de autovalores. Notemos que, a solução gerada por \mathcal{T} nos fornece um conjunto de autovalores. Sendo assim, nossa função radial dependerá de qual autovalor estamos utilizando. Para uma melhor compreensão nossa função radial torna-se

$$f_{L_n}(\rho') \longrightarrow f_{\zeta, L_n}(\rho'), \quad (2.66)$$

onde ζ é um número inteiro, que indica os autovalores para um mesmo L_n em ordem crescente de valor absoluto, i.e., $|\lambda_{0, L_n}| < |\lambda_{1, L_n}| < |\lambda_{2, L_n}| < \dots$, no qual estaremos utilizando. A Fig.(2.3), mostra a função radial $f_{\zeta, L_n}(\rho')$ em um disco de raio $R' = 5\xi$ e na presença de um campo externo $H_{ext} = 0.85H_{c2}$, em três situações distintas. As Figs.(2.3) (a), (b) e (c) correspondem, respectivamente, aos autovalores: λ_{0, L_n} , λ_{1, L_n} e λ_{2, L_n} . Para $L_n > 0$, $f_{\zeta, L_n \neq 0}(\rho' = 0) = 0.0$, enquanto que para $L_n = 0$, $f_{\zeta, L_n = 0}(\rho' = 0) = 1.0$. O autovalor escolhido fornece ainda a quantidade de “zeros”, no domínio $0 < \rho' < R$, que a função radial terá, i.e, para o autovalor λ_{0, L_n} não teremos nenhum “zero”, para λ_{1, L_n} teremos um “zero”, para λ_{2, L_n} teremos dois “zero” e assim sucessivamente. Da Fig.(2.3) é possível verificar que a condição de contorno, Eq.(2.43), é satisfeita.

2.3 Variação de Energia Livre e Estados de Vórtices

Para a obtenção do parâmetro de ordem longe da interface, é suficiente consideramos uma expansão de Ψ em *lowest band* (LB), que é equivalente ao nível mais baixo da aproximação de Landau [20]. Sendo assim, consideramos que o parâmetro de ordem tem contribuição apenas do primeiro autovalor, i.e., $\lambda_{0, L}$. No entanto, próximo da

interface, a expansão LB deverá incluir níveis mais elevados de Landau [92]. Com isso, investigamos a formação dos estados de vórtices, além da variação de energia livre, $\Delta\mathcal{G}'$, para diversos tamanhos de discos supercondutores.

Como mencionado anteriormente, para obtermos estados de vórtices, devemos ter no mínimo $R \geq \xi$ [78]. Sendo assim, avaliamos o comportamento de $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado, H_{ext} , para oito discos com raios distintos, como mostrado na Fig.(2.4). Nosso parâmetro de ordem Ψ pode ser composto apenas por uma única autofunção, Eq.(2.12), que corresponde a estados de vórtices gigantes, ou por duas autofunções, Eq.(2.16), relacionadas aos estados de multivórtices. Deste modo, iniciamos a nossa investigação partindo de $R/\xi = 1.00$, procurando estados de vórtices gigantes ou estados de multivórtices. Até $R/\xi < 4.00$, apenas estados de vórtices gigantes foram obtidos.

Para $R/\xi = 1.00$, Fig.(2.4)(a), apenas o estado com vorticidade $L = 0$ é encontrado. Quando o raio do disco aumenta para $R = 1.50\xi$, o primeiro estado com vorticidade diferente de zero surge, como mostrado na Fig.(2.4)(b). Analisando a variação de energia livre, $\Delta\mathcal{G}'$, o estado com $L = 1$ torna-se mais favorável a partir de $H_{ext} = 1.73H_{c2}$. Como estamos variando o raio do disco, o intervalo de H_{ext} de existência dos estados de vórtices gigantes variam. Em $R = 2.25\xi$ e $R = 2.50\xi$, como expostos nas Figs.(2.4)(c) e (d), encontramos vórtices gigantes com vorticidades máximas de $L = 3$ e $L = 4$, respectivamente. Quando $R = 3.00\xi$, o estado com vorticidade $L = 5$ aparece no disco supercondutor, ilustrado na Fig.(2.4)(e). Aumentando o raio do disco para $R = 3.25\xi$, passamos a ter estados de vórtices gigantes com vorticidades $L = 6$ e $L = 7$, como mostrado na Fig.(2.4)(f). Nas Figs.(2.4)(g) e (h), aumentamos o raio do disco para $R = 3.50\xi$ e $R = 3.75\xi$, respectivamente,

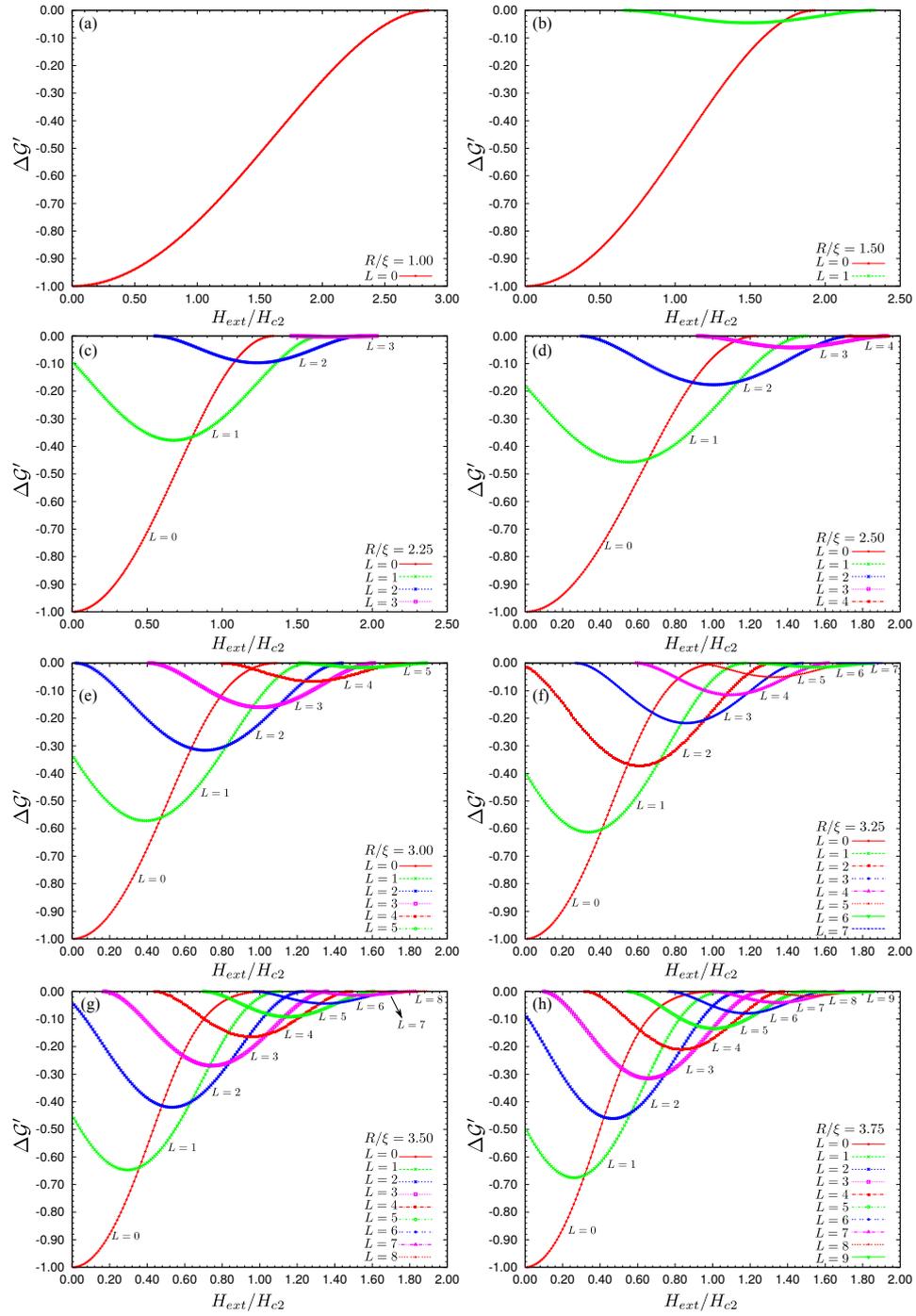


Figura 2.4: Variação de energia livre $\Delta G'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} . A figura mostra o estados de menor energia para discos com diferentes valores de raio: (a) $R = 1.00\xi$, (b) $R = 1.50\xi$, (c) $R = 2.25\xi$, (d) $R = 2.50\xi$ (e) $R = 3.00\xi$, (f) $R = 3.25\xi$, (g) $R = 3.50\xi$ e (h) $R = 3.75\xi$. Em destaque mostramos os valores da vorticidade do parâmetro de ordem Ψ .

alcançando os estados com vorticidades $L = 8$ e $L = 9$. Note que, à medida que a vorticidade aumenta, o intervalo que corresponde ao estado de menor energia é muito reduzido. Para todos os casos descritos acima, foram testados estados de vórtices gigantes e multivórtices, com campo externo máximo $H_{ext}^{max} = 3.0H_{c2}$.

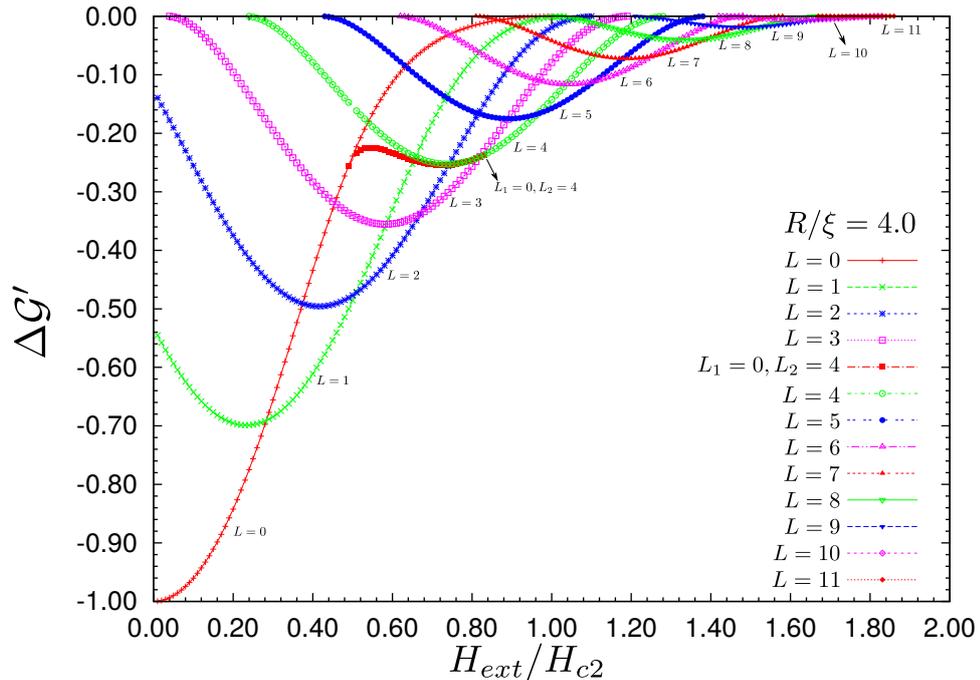


Figura 2.5: A figura mostra a variação de energia livre $\Delta G'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} para um disco de raio $R = 4.00\xi$, onde se alcança o primeiro estado de multivórtice com o estado $(0, 4)$. O disco supercondutor de raio $R = 4.00\xi$, só permite estado de vórtice gigante com vorticidade até $L = 11$.

A primeira aparição de estado de multivórtice, mesmo que por um breve intervalo de H_{ext} , ocorre em $R = 4.00\xi$, como mostrado na Fig.(2.5). Quando alcançamos estados de multivórtices, classificamos o estado de acordo com as vorticidades das autofunções. Para o sistema com $R = 4.00\xi$, o estado de multivórtice é alcançado para as vorticidades $L_1 = 0$ e $L_2 = 4$. A classificação para estados de multivórtices é feita de acordo com a vorticidade de suas autofunções. Para as vorticidades $L_1 = 0$

e $L_2 = 4$, classificamos o estado como $(0, 4)$, (L_1, L_2) . Visando alcançar mais estados de multivórtices, aumentamos o raio do disco supercondutor para $R = 4.8\xi$. Nessa nova estrutura, estados de vórtice gigantes são obtidos até $L = 16$, como mostrado na Fig.(2.6). Diferentemente da estrutura com $R = 4.00\xi$, os estados de vórtices gigantes com $L = 3, 4, 5$ e 6 , são atingidos, mas não apresentam menor energia $\Delta\mathcal{G}'$, quando comparados com os demais estados. Em compensação, obtemos mais estados de multivórtices: $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(0, 5)$, $(0, 6)$ e $(0, 7)$. Note que todos os estados de multivórtices mencionados, têm início na mesma curva correspondente ao seu estado com uma única autofunção, i.e, os estados $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(0, 5)$, $(0, 6)$ e $(0, 7)$ têm início na curva $L = 0$. Posteriormente, mostraremos outros estados de multivórtices que originam-se nas curvas dos vórtices gigantes.

A fim de analisar as configurações dos vórtices e o parâmetro de ordem em um disco supercondutor, comparamos nossos resultados com a literatura [64], considerando um disco supercondutor de raio $R = 6.0\xi$. Na Fig.(2.7), mostramos a variação de energia livre em função do campo externo aplicado H_{ext} , usando a nossa abordagem, Fig.(2.7)(a), e a abordagem de Baelus *et al* [64], Fig.(2.7)(b). O parâmetro de ordem por Baelus é composto por mais autofunções, além de não se limitar ao número mais baixo da aproximação de Landau. Avaliamos os valores de $\Delta\mathcal{G}'$, para estados de vórtices gigantes, com $L = 6$ e $L = 7$, assim como estados de multivórtices, com vorticidades: $(L_1 = 0, L_2 = 6)$, $(L_1 = 1, L_2 = 6)$, $(L_1 = 0, L_2 = 7)$ e $(L_1 = 1, L_2 = 7)$. Os resultados obtidos são aceitáveis, se comparado com os obtidos por Baelus *et al*. Nas Figs.(2.7)(c)-(f), mostramos as configurações encontradas após o processo de minimização da energia livre, descrito em seções anteriores, para os estados de multivórtices citados acima. Todas as configurações apresentadas na Fig.(2.7) são

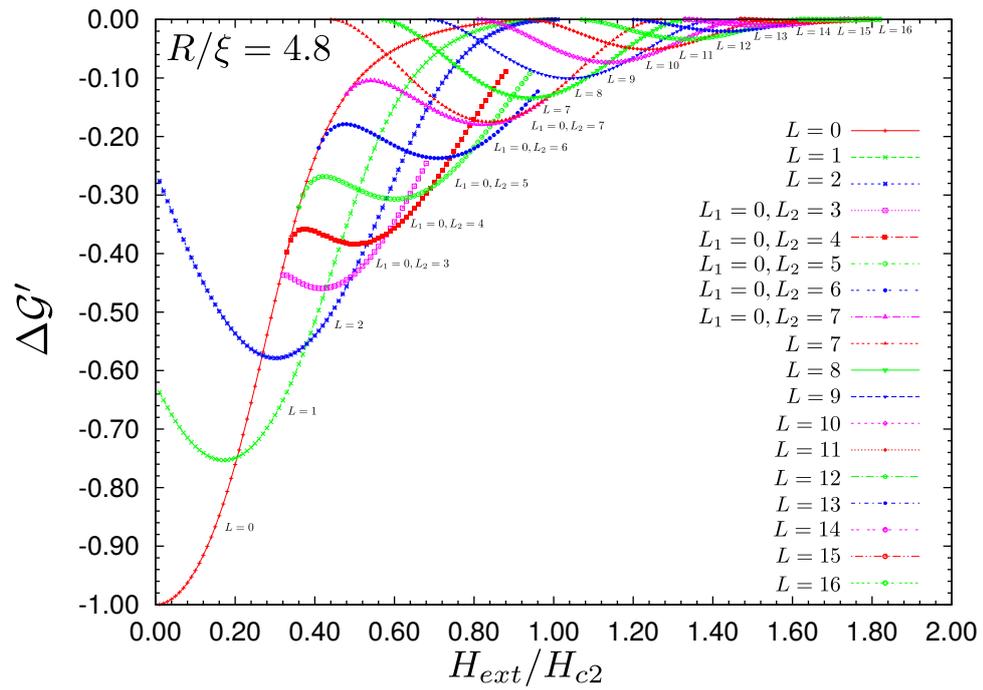


Figura 2.6: A figura mostra a variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} para um disco de raio $R = 4.8\xi$. Nessa estrutura novos estados de multivórtices são obtidos com menor variação de energia $\Delta\mathcal{G}'$, estados como: $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(0, 5)$, $(0, 6)$ e $(0, 7)$.

obtidas em $H_{ext} = 0.60H_{c2}$. A barra lateral, nas Figs.(2.7)(c)-(f), indica o valor do módulo do parâmetro de ordem ao quadrado, i.e., $|\Psi|^2$, em toda a superfície do disco. Do centro de cada vórtice saem linhas que representam curvas de níveis da fase do parâmetro de ordem.

A Fig.(2.7)(c) corresponde ao estado de multivórtices (0, 6), apesar de não apresentar vórtice no centro, contém uma camada com seis vórtices. Semelhante ao estado (0, 6), temos o estado (0, 7), Fig.(2.7)(e), que apresenta uma camada com sete vórtices, mas sem um vórtice central. Um vórtice central, circundado por cinco, estado (1, 6), e seis vórtices, estado (1, 7), como mostrado nas Figs.(2.7)(d) e (f), respectivamente, também são observados como estados estáveis. A quantidade de vórtices, na camada que circunda o vórtice interno, está associada à diferença entre as vorticidades L_2 e L_1 , dada por $L_2 - L_1$.

Aumentando o sistema para um disco supercondutor de raio $R = 8.0\xi$, variamos o campo externo aplicado até $H_{ext} = 1.00H_{c2}$ em busca de novos estados de multivórtices. Na Fig.(2.8), mostramos os estados que apresentam o menor valor da variação de energia $\Delta\mathcal{G}'$. Como observado em sistemas menores, os estados de multivórtices têm início na curva de energia da função de onda com menor vorticidade, i.e., os estados: (0, 3), (0, 4) e (0, 5) começam na curva com vorticidade $L = 0$. De forma análoga, os estados: (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9) e (1, 10), têm início na curva com $L = 1$ e o estado (2, 10) em $L = 2$. No estado (0, 3), temos um breve intervalo de H_{ext} , $0.09 < H_{ext}/H_{c2} < 0.12$, que não apresenta valores de $\Delta\mathcal{G}'$. Nesse intervalo, os coeficientes c_1 e c_2 , encontrados como solução para o conjunto das Eqs.(2.25a e 2.25b), não satisfazem as condições de estabilidade, Eqs.(2.30 - 2.32), resultando em estados não permitidos ou não estáveis. Da Fig.(2.8) observamos que as curvas

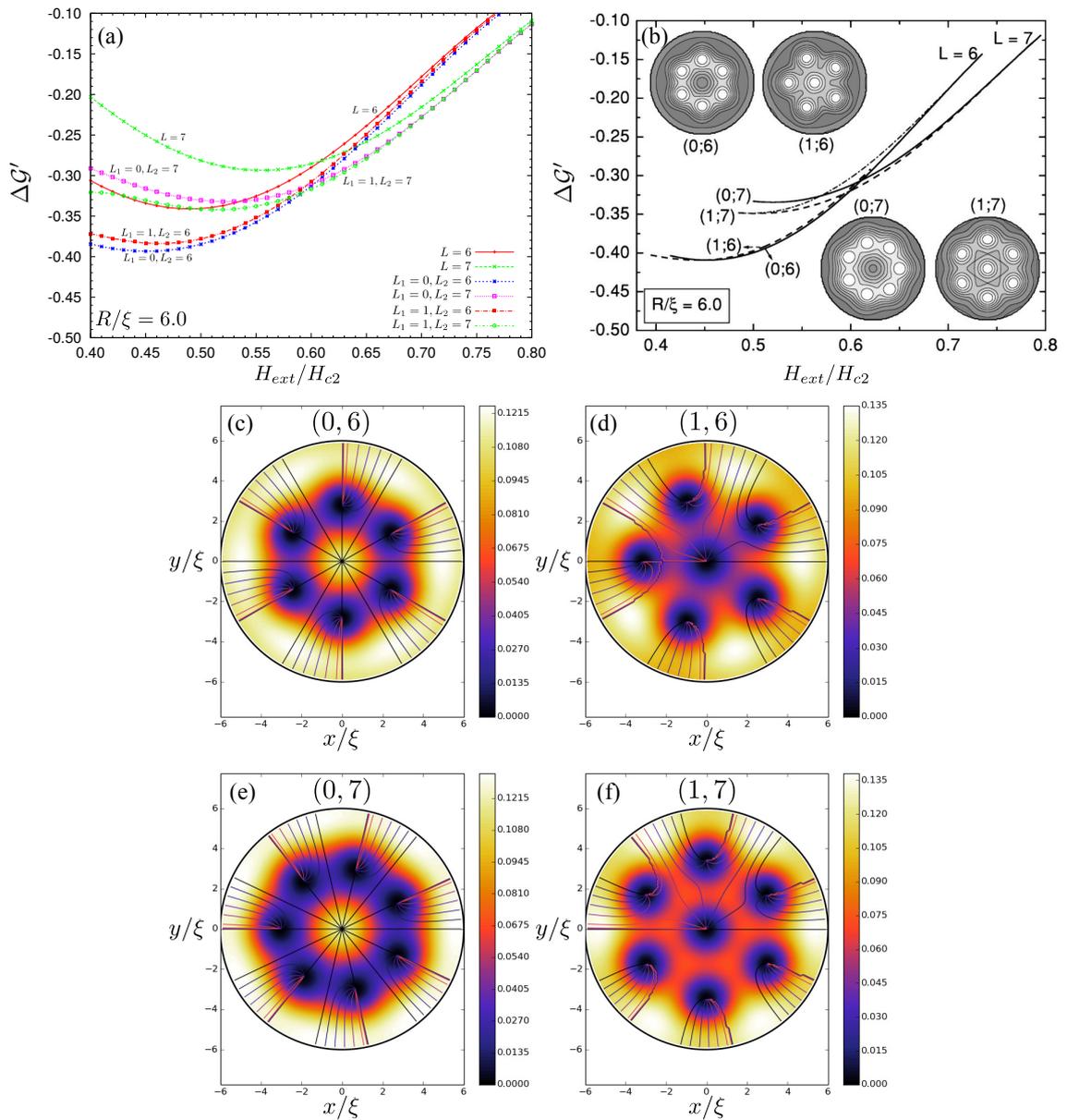


Figura 2.7: Variação de energia livre $\Delta G'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} , para um disco supercondutor de raio $R = 6.0\xi$, mostrando: (a) abordagem realizada nessa Dissertação e (b) resultado obtido por Baelus *et al* [64]. (c)-(f) Configurações obtidas para $H_{ext} = 0.60H_{c2}$, em comparação com os resultados mostrado por (b). A barra lateral indica o valor de $|\Psi|^2$, em toda a superfície do disco e do centro de cada vórtice saem linhas que representam o argumento do parâmetro de ordem.

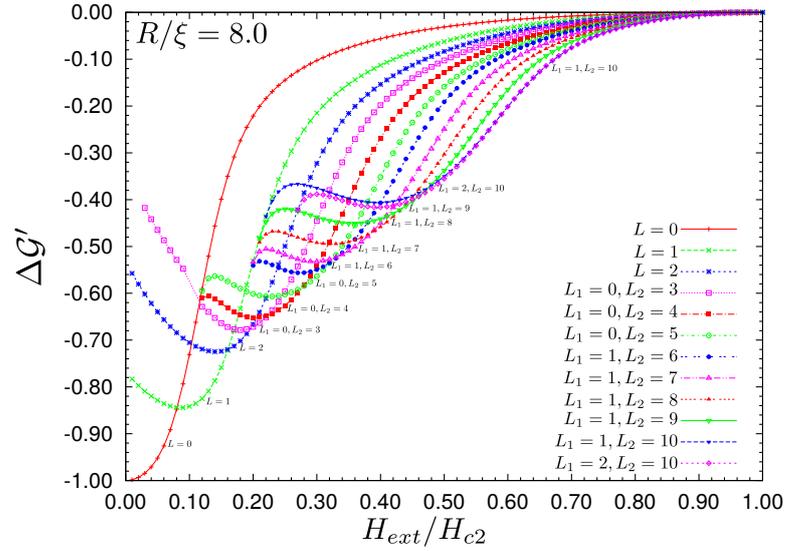


Figura 2.8: Variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo aplicado H_{ext} , para um disco supercondutor de raio $R = 8.0\xi$. Mantendo o limite de $H_{ext} = 1.00H_{c2}$, os estados de multivórtices são predominantes, apresentado os menores valores de $\Delta\mathcal{G}'$.

da variação de energia livre $\Delta\mathcal{G}'$, dos estados (1, 10) e (2, 10), são próximas. Até a magnitude $H_{ext} = 0.61H_{c2}$, o estado (2, 10) é ligeiramente mais favorável do que o estado (1, 10). No intervalo $0.62H_{c2} \leq H_{ext} \leq 0.73H_{c2}$, o estado (1, 10) torna-se mais favorável, acima de $H_{ext} = 0.73H_{c2}$ temos, novamente, $\Delta\mathcal{G}'_{(2,10)} < \Delta\mathcal{G}'_{(1,10)}$. Para uma melhor compreensão dessa mudança de estados favoráveis, mostramos na Fig.(2.9) a diferença entre as energias livres dos estados (2, 10) e (1, 10). Valores positivos dessa diferença de energia indicam que o estado (1, 10) é o mais favorável, enquanto que para valores negativos, é mais propício o estado (2, 10). Da Fig.(2.9), apesar de termos encontrado $\Delta\mathcal{G}'_{(2,10)} < \Delta\mathcal{G}'_{(1,10)}$, não podemos afirmar que as configurações (1, 10) e (2, 10) são, de fato, os estados de menor energia. Isso porque não obtivemos estados com oito ou nove vórtices na camada externa e dois vórtices centrais, além da diferença entre as energias serem da ordem de 10^{-4} .

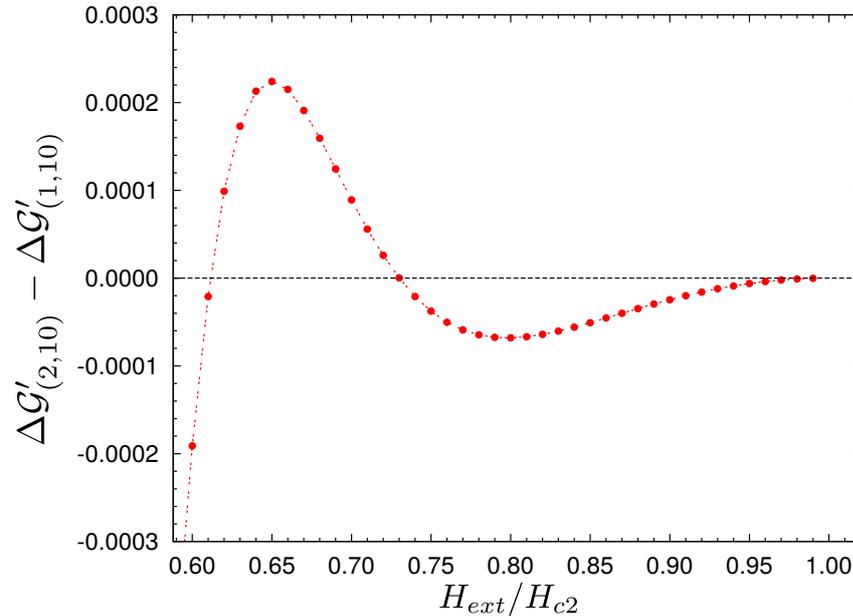


Figura 2.9: Diferença entre as variações das energias livres dos estados (2, 10) e (1, 10) para um disco supercondutor de raio $R = 8.0\xi$. Abaixo da linha tracejada horizontal, o estado (2, 10) é energeticamente mais favorável.

No atual sistema, $R = 8.0\xi$, até a magnitude de $H_{ext} = 1.00H_{c2}$, obtemos doze estados com menor energia, como pode ser observado na Fig.(2.8). Apenas três estados são constituídos por uma única autofunção, são os estados: (0), (1) e (2). Na Fig.(2.10)(a) apresentamos o estado (0) em um campo $H_{ext} = 0.05H_{c2}$. As Figs.(2.10)(b) e (c) mostram os estados (1), em $H_{ext} = 0.12H_{c2}$, e (2), $H_{ext} = 0.19H_{c2}$, respectivamente. Ambos os estados apresentam um único vórtice no centro do disco, mas com vorticidades diferentes. Na Fig.(2.10)(b) o estado tem vorticidade $L = 1$, enquanto que na Fig.(2.10)(c) o estado possui vorticidade $L = 2$, caracterizando um vórtice gigante. Os demais estados expostos são estados de multivórtices. Nas Fig.(2.10)(d)-(f), a vorticidade da primeira autofunção é $L_1 = 0$, o que determina a não existência de um vórtice no centro do disco. Em estados de multivórtices, o que determina a quantidade de vórtices, que compõe a camada externa, é a diferença

entre as vorticidades da segunda autofunção, L_2 , e a primeira, L_1 . Sendo assim, as Fig.(2.10)(d), (e) e (f) apresentam, respectivamente, três, quatro e cinco vórtices. Na Fig.(2.10)(g), representamos o estado $(1, 6)$, em $H_{ext} = 0.33H_{c2}$, contendo um vórtice no centro e outros cinco vórtices, compondo a camada externa. Analogamente, são os estados $(1, 7)$, $(1, 8)$ e $(1, 9)$, mostrados nas Fig.(2.10)(h-j), onde a quantidade de vórtices que cercam o vórtice central é dado por $L_2 - L_1$. Em $H_{ext} = 0.50H_{c2}$, exibimos o estado $(2, 10)$, como mostrado na Fig.(2.10)(k), contendo um vórtice gigante, com vorticidade $L_1 = 2$, contornado por oito vórtices. Como mencionado anteriormente, o estado $(1, 10)$ é energeticamente mais favorável para intensidade do campo externo mais elevado, $H_{ext} > 0.60H_{c2}$. A Fig.(2.10)(l), destaca o estado $(1, 10)$, em $H_{ext} = 0.65H_{c2}$. Quando o parâmetro de ordem é composto por duas autofunções, obtemos estruturas formadas apenas por uma camada externa e um vórtice central.

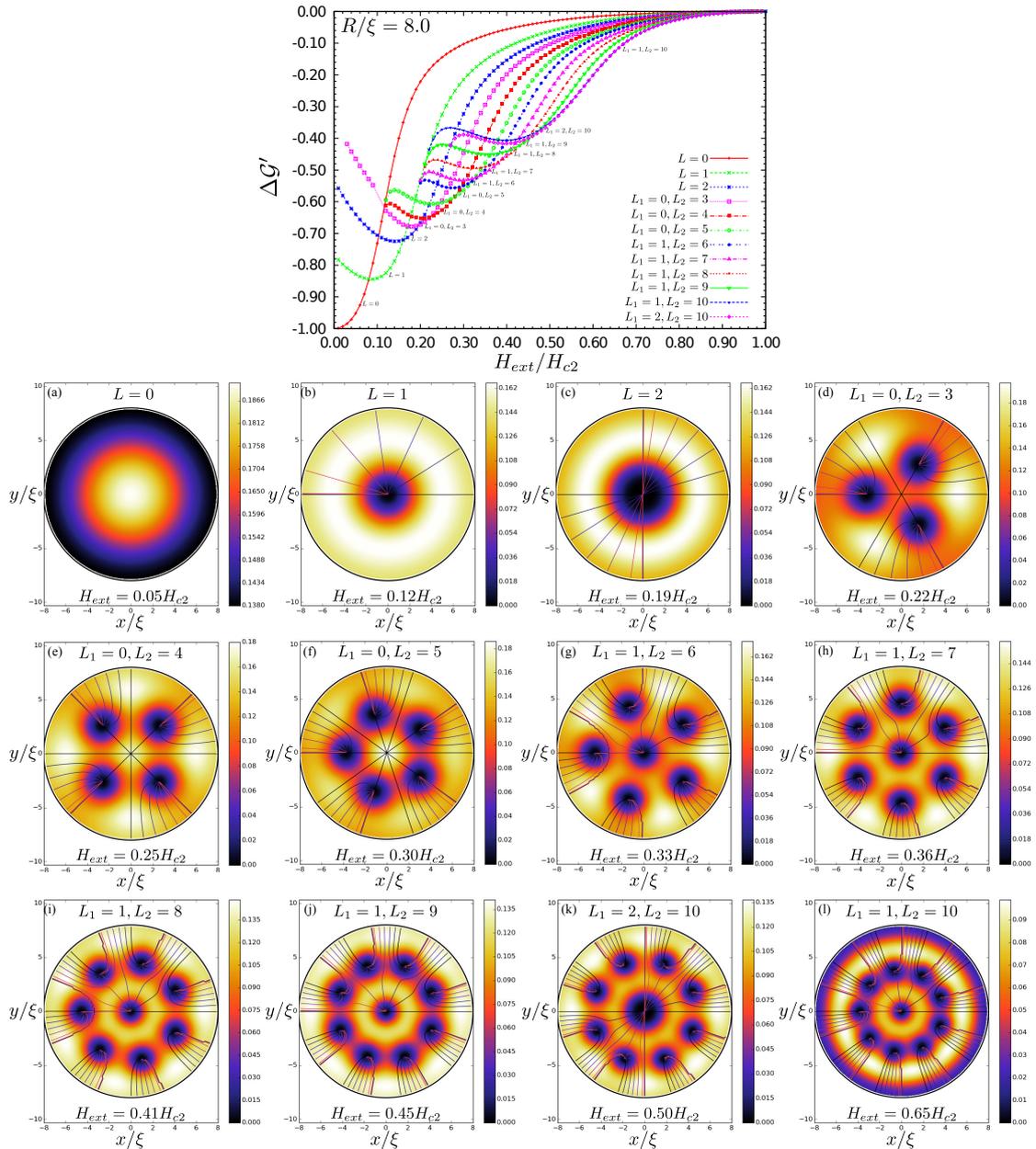


Figura 2.10: Exemplos de configurações dos estados de menor energia em um disco supercondutor de raio $R = 8.0\xi$. No topo da figura, mostramos a dependência da variação da energia livre $\Delta\mathcal{G}'$ em função do campo externo H_{ext} . Os estados apresentados são: (a) (0), $H_{ext} = 0.05H_{c2}$; (b) (1), $H_{ext} = 0.12H_{c2}$; (c) (2), $H_{ext} = 0.19H_{c2}$; (d) (0, 3), $H_{ext} = 0.22H_{c2}$; (e) (0, 4), $H_{ext} = 0.25H_{c2}$; (f) (0, 5), $H_{ext} = 0.30H_{c2}$; (g) (1, 6), $H_{ext} = 0.33H_{c2}$; (h) (1, 7), $H_{ext} = 0.36H_{c2}$; (i) (1, 8), $H_{ext} = 0.41H_{c2}$; (j) (1, 9), $H_{ext} = 0.45H_{c2}$; (k) (2, 10), $H_{ext} = 0.50H_{c2}$; e (l) (1, 10), $H_{ext} = 0.65H_{c2}$.

Capítulo 3

Configurações de Vórtices em um disco de Supercondutor na presença de um Dipolo Magnético

O avanço no desenvolvimento de materiais supercondutores depende do conhecimento de suas propriedades supercondutoras: temperatura crítica, campos magnéticos críticos e correntes críticas. Por essa razão, buscam-se supercondutores com valores elevados desses parâmetros. Supercondutores do tipo-II se destacam por apresentarem parâmetros críticos mais elevados do que os supercondutores do tipo-I. Como vimos anteriormente, supercondutores do tipo-II apresentam um estado misto, entre os campos $H_{c1} < H < H_{c2}$, caracterizado pelos vórtices. Entretanto, ao aplicarmos uma corrente ao supercondutor no estado misto, os vórtices podem se mover, movimento este que acarreta em um processo dissipativo, podendo haver a perda do estado supercondutor.

A disposição dos vórtices nos supercondutores mesoscópicos dependem das dimensões e da geometria da amostra, além das interações e dos tipos de confinamentos

em que estão sujeitos. Agora, se um campo magnético não homogêneo é aplicado ao supercondutor, por exemplo, um campo gerado por um dipolo magnético, estados de multivórtices contendo vórtices e antivórtices [37, 93] são possíveis. Por exemplo, é possível a coexistência de vórtices e antivórtices em filmes finos quando na presença de dipolos magnéticos. A interação entre vórtice ou anti-vórtice em um filme supercondutor na presença de um dipolo magnético é investigada usando a aproximação de London na Ref.[94]. O dipolo induz um potencial de confinamento que pode favorecer a coexistência de vórtices e antivórtices, com diferentes configurações possíveis. A orientação do dipolo em relação ao filme produz potenciais de confinamento dependentes desta orientação. Quando o dipolo é paralelo ao filme, vórtices se posicionam próximos a uma extremidade do dipolo e antivórtices à outra extremidade. Posicionando um magneto de forma perpendicular em um disco supercondutor, configurações de vórtices e antivórtices podem também ser induzidas na amostra [95].

Nesse capítulo, com o interesse em estudar configurações estáveis contendo vórtices e antivórtices, consideramos um disco fino supercondutor, de espessura $d < \xi$ e raio $R = 100\xi$ (para o qual podemos desprezar os efeitos de desmagnetização, i.e, $\Lambda = \lambda^2/d \gg R$) na presença de um dipolo magnético de momento $\mathbf{m}_0 = m_0\hat{z}$ paralelo ao eixo do disco, posicionado a uma distância radial r_0 do eixo de simetria do disco e a uma altura z_0 .

3.1 Vórtices em Discos Supercondutores na presença de Dipolo Magnético Permanente

A disposição dos vórtices nos supercondutores depende das dimensões e da geometria da amostra. Para sistemas com dimensões da ordem de ξ , a formação de um vórtice

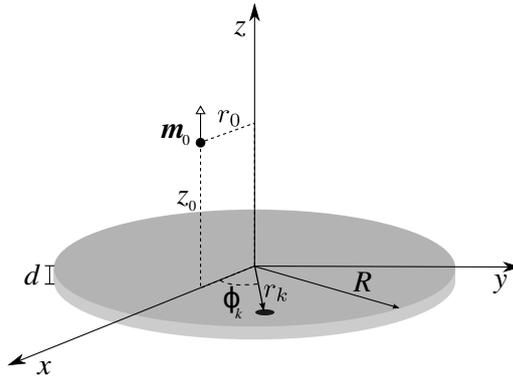


Figura 3.1: Figura representativa do disco fino supercondutor livre de defeitos com raio R e espessura d na presença de um dipolo magnético permanente $\mathbf{m}_0 = m_0 \hat{z}$ localizado em $\mathbf{r}_0 = (r_0, 0, z_0)$. A mancha escura representa o k -ésimo vórtice com posição $\mathbf{r}_k = (r_k, \phi_k, 0)$.

gigante pode ser mais favorável que estados de multivórtices [57, 81, 82], onde o vórtice gigante passa a carregar mais de um quantum de fluxo. Por outro lado, se um campo magnético não homogêneo é aplicado ao supercondutor, por exemplo, um campo gerado por um dipolo magnético, estados de multivórtices contendo vórtices e antivórtices [37, 93] são possíveis.

Estados supercondutores distintos contendo vórtices apresentam diferentes configurações de vórtices e podem ter valores de energia livre diferentes [81] para um dado conjunto de parâmetros. Essas estruturas possuem vorticidade total L , o qual está relacionada com a quantidade total de *quanta* de fluxo presente na amostra, i.e, está relacionado com a quantidade de vórtices e/ou antivórtices [57]. A vorticidade total é definida como sendo $L = \sum_{i=1}^{N_v} \nu_i$, onde N_v é o número de vórtices no supercondutor e ν_i é a vorticidade do i -ésimo vórtice. O valor da vorticidade ν_i do vórtice está associado ao número de *quanta* de fluxo magnético que ele carrega. Note que, se estamos tratando de um estado de multivórtices, onde todos são vórtices, teremos $L = N_v$; mas se estamos em um estado onde temos vórtices e antivórtices, então $L \neq N_v$, uma

vez que a vorticidade do antivórtice é -1 . Para estados de vórtices gigantes, o valor de sua vorticidade é, em módulo, maior que 1.

3.1.1 Forças Atuantes

Da equação da força de Lorentz atuando sobre o k -ésimo vórtice, teremos

$$\mathbf{F}_k = \nu_k \Phi_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_k) \times \hat{z}. \quad (3.1)$$

Usando o princípio da superposição, pois a equação de London é linear, teremos

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_v} \mathbf{J}_j(\mathbf{r}) + \mathbf{J}^{dip}(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{J}_j(\mathbf{r})$ é a corrente produzida pelo j -ésimo vórtice e $\mathbf{J}^{dip}(\mathbf{r})$ é a corrente de blindagem gerada pelo dipolo magnético. Substituindo a Eq.(3.2) na Eq.(3.1), teremos

$$\mathbf{F}_k = \sum_{j=1}^{N_v} \mathbf{F}_{kj} + \mathbf{F}_k^{dip}, \quad (3.3)$$

sendo

$$\mathbf{F}_{kj} = \nu_k \Phi_0 \mathbf{J}_j(\mathbf{r}_k) \times \hat{z}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_k^{dip} = \nu_k \Phi_0 \mathbf{J}^{dip}(\mathbf{r}_k) \times \hat{z}, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{F}_{kj} é a força atuante no vórtice k devido ao vórtice j , \mathbf{F}_k^{dip} é a força que o vórtices k sofre devido ao dipolo magnético, e N_v é o número de vórtices na amostra.

3.1.2 Interações Vórtice-Vórtice e Vórtice-Dipolo

Estando no regime de filmes finos, e na ausência de superposição dos núcleos dos vórtices, a interação vórtice-vórtice é obtida pela aproximação de London, Eq.(1.75).

Para o nosso sistema de estudo(discos supercondutores) deve-se levar em consideração

que não temos correntes atravessando a borda do disco. Sendo assim, deve-se impor a condição de contorno

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \hat{r} \Big|_{\mathbf{r}=R} = 0, \quad (3.6)$$

sendo \hat{r} o vetor unitário na direção radial. Fazendo uso da função escoamento [96] para um vórtice i , $g(\mathbf{r}_i) = \nu_i G(\mathbf{r}_i)$, que pode ser compreendida como uma magnetização local, definimos a corrente \mathbf{J} como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \nabla \times (\hat{z}G) = -\hat{z} \times \nabla_{\perp} G, \quad (3.7)$$

onde $\nabla_{\perp} = \nabla - \hat{z}\partial/\partial z$. Pelo comportamento linear da equação de London, podemos escrever a função escoamento como a soma das contribuições devidas aos vórtices e ao dipolo:

$$G(\mathbf{r}) = G_v(\mathbf{r}) + G_{dip}(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

e as correntes como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_{dip}. \quad (3.9)$$

Para um dipolo pontual, localizado em \mathbf{r}_{dip} , o potencial vetor é dado por

$$\mathbf{A}_{dip} = \frac{\mu_0 \mathbf{m}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dip})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dip}|} + \nabla_{\perp} \chi, \quad (3.10)$$

onde χ é um calibre que satisfaz $\nabla_{\perp}^2 \chi = 0$ no interior do disco. A corrente de blindagem produzida pelo dipolo é

$$\mathbf{J}_{dip} = -\frac{\mathbf{A}_{dip}}{\mu_0 \Lambda}. \quad (3.11)$$

Logo, a função escoamento para G_{dip} é obtida resolvendo a equação [97]

$$\nabla_{\perp} G_{dip} = \frac{m_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dip})}{4\pi \Lambda (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dip}|^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{\hat{z} \times \nabla_{\perp} \chi}{\mu_0 \Lambda}, \quad (3.12)$$

onde a função calibre pode ser determinada usando a condição de contorno

$$\hat{\rho} \cdot \mathbf{J}_{dip}(R, \phi) = 0, \quad (3.13)$$

a qual gera uma dependência com a posição radial do dipolo.

Desconsiderando os efeitos de desmagnetização, a corrente de blindagem devida aos vórtices, \mathbf{J}_v , é dada apenas pelo lado direito da Eq.(1.75), mas deve-se levar em consideração as cargas imagens, posicionadas na parte externa do supercondutor, devendo satisfazer a condição de contorno,

$$\hat{\rho} \cdot \mathbf{J}_v(R, \phi) = 0. \quad (3.14)$$

Podemos então escrever a corrente \mathbf{J}_v como

$$\mathbf{J}_v = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\Lambda} \sum_{k=1}^N \nu_k \hat{z} \times \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^2} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^*|^2} \right], \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{r}_k^* = (R/r_k)^2 \mathbf{r}_k$ é a posição do vórtice imagem, considerando um disco supercondutor. Com isso, a função escoamento para vórtices é dada por

$$G_v = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\Lambda} \sum_{k=1}^N \nu_k \ln \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^*| r_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k| R} \right), \quad (3.16)$$

onde o termo r_k/R é usado para levar a função G_v a zero no raio do disco, i.e., $G_v(R, \phi) = 0$.

3.1.3 Energia do Sistema

Usando o formalismo de London, a energia livre de Gibbs de um sistema supercondutor é dada por:

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n + \frac{\mu_0}{2} \int d^3r [\lambda^2 |\mathbf{j}|^2 + |\mathbf{h} - \mathbf{H}_{ext}|^2], \quad (3.17)$$

onde \mathcal{G}_n é a energia livre de Gibbs do estado normal, \mathbf{j} é a densidade de corrente, \mathbf{h} é o campo magnético local, e \mathbf{H}_{ext} é o campo magnético produzido por fontes externas. Negligenciando a contribuição magnética, comparada com o termo cinético, desde que $\mathbf{h} \approx \mathbf{H}_{ext}$, a energia livre de Gibbs para um sistema de vórtice é calculada como

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_s - \mathcal{G}_n = & \frac{\mu_0\Lambda}{2} \int_{A_o} d^2r |\mathbf{J}_{dip}|^2 + \\ & + \frac{\mu_0\Lambda}{2} \int_{A_o} d^2r [|\nabla_{\perp} G_v|^2 - 2\mathbf{J}_{dip} \cdot (\hat{z} \times \nabla_{\perp} G_v)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde A_o é a área do disco de raio R . Usando

$$\nabla_{\perp}^2 G_v = -\frac{\Phi_0}{\mu_0\Lambda} \sum_{k=1}^N \nu_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (3.19)$$

e impondo que $G_{dip}(R, \phi) = 0$, encontramos

$$\Delta\mathcal{G} = \Delta\mathcal{G}' + \Delta\mathcal{G}_{dip}, \quad (3.20)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G}' &= \frac{\Phi_0}{2} \sum_{k=1}^N \nu_k [G_v(\mathbf{r}_k) + 2G_{dip}(\mathbf{r}_k)] \\ &= \frac{\Phi_0}{2} \sum_{k,j} \nu_k G_{vv}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) + \Phi_0 \sum_k \nu_k G_{dip}(\mathbf{r}_k), \end{aligned} \quad (3.21)$$

é a soma da energia vórtice-vórtice e a energia de interação entre vórtice e a corrente induzida pelo dipolo, e

$$\Delta\mathcal{G}_{dip} = \frac{\mu_0\Lambda}{2} \int_{A_o} d^2r |\mathbf{J}_{dip}|^2, \quad (3.22)$$

é a energia da corrente induzida pelo dipolo magnético. A função de escoamento do k -ésimo vórtice gerado pelo j -ésimo vórtice é dada por:

$$G_{vv}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) = \frac{\nu_j \Phi_0}{4\pi\mu_0\Lambda} \ln \left(\frac{1 + \tilde{r}_k^2 \tilde{r}_j^2 - 2\tilde{\mathbf{r}}_k \cdot \tilde{\mathbf{r}}_j}{|\tilde{\mathbf{r}}_k - \tilde{\mathbf{r}}_j|^2 + \tilde{\xi}_c^2} \right), \quad (3.23)$$

com $\tilde{r} = r/R$. O *cut-off* ξ_c é introduzido para evitar possíveis divergências. Nós usamos $\xi_c = \sqrt{2}\xi \ll R$. Como o $\Delta\mathcal{G}_{dip}$ depende apenas do momento magnético do dipolo e de sua posição, quando definidos a sua magnitude m_0 e sua altura z_0 , o termo permanece inalterado independente da distribuição dos vórtices e antivórtices no disco supercondutor. Estamos interessados na diferença entre as energias das diferentes configurações para determinados valores de m_0 e r_0 . Sendo assim, negligenciamos o termo proporcional a $\int_{A_0} d^2r |\mathbf{J}_{dip}|^2$ no cálculo da energia da configuração. Temos então que a força sobre o k -ésimo vórtice, $\mathbf{f}_k = -\nabla_{\perp k} \Delta G$, sendo o índice k corresponde a derivação em relação a ρ_k , é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= -\Phi_0 \nabla_{\perp i} \left[\sum_{j=1}^{N_v} \nu_k G_{dip}(\mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k}^N \nu_k G_{vv}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \right] \\ &= -\Phi_0 \nabla_{\perp i} g(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $g(\mathbf{r}_i)$ é potencial de confinamento do vórtice, que é escrito como

$$g(\mathbf{r}_i) = -\nu_i \left[G_{dip}(\mathbf{r}_i) + G_{self}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1; j \neq i}^{N_v} G_{vv}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \right], \quad (3.25)$$

onde

$$G_{self}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} G_{vv}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i) = \frac{\nu_i \Phi_0}{4\pi \mu_0 \Lambda} \ln \left(\frac{1 - \tilde{r}_i^2}{\tilde{\xi}_c} \right), \quad (3.26)$$

onde $\nu_i G_{self}(\mathbf{r}_i)$ é a auto energia do vórtice, fornecendo a interação com a sua imagem (ou a interação do vórtice com a borda da amostra).

3.2 Procedimento Numérico e Simulação Computacional

Com o objetivo de estudar a dinâmica de vórtices e antivórtices em discos supercondutores, integramos a equação de Bardeen-Stephen de movimento, Eq.(1.69), para

os vórtices. Para obtermos diferentes configurações de vórtices, distribuímos inicialmente N vórtices e antivórtices de forma aleatória no disco supercondutor. Dada a distribuição dos vórtices e antivórtices, integramos a equação de Barden-Stephen utilizando um intervalo de tempo Δt . Definimos a vorticidade total do sistema L , como sendo a soma das vorticidades dos vórtices e antivórtices, i.e.,

$$L = \sum_{i=1}^{N_v} \nu_i, \quad (3.27)$$

onde $\nu_i = 1$, para vórtices, e $\nu_i = -1$, para antivórtices. Durante a evolução temporal, se a distância entre vórtices e antivórtices for menor que ξ , eles se aniquilam, i.e., suas vorticidades tornam-se iguais a zero. Se a vorticidade total do sistema torna-se zero, a simulação é interrompida, salvando o estado (0), e uma nova configuração aleatória é sorteada. Para $L \neq 0$, a configuração encontrada é salva quando o módulo da maior velocidade dos vórtices for menor do que 10^{-8} ou quando atingimos o tempo de simulação igual a 100 (nas unidades de velocidade e tempo utilizados). Com a configuração salva, iniciamos uma nova simulação. O processo para obtenção das configurações são repetidos 20 vezes para cada conjunto dos parâmetros de controle: a magnitude do dipolo magnético, m_0 , a distância radial ao eixo de simetria do disco, r_0 , e a altura do dipolo em relação a superfície do disco, z_0 .

Na maioria das combinações dos parâmetros de controle, o passo de iteração, Δt , foi fixado em $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$. Quando o dipolo magnético está localizado próximo a superfície do supercondutor, com $z_0 = 0.05$, e magnitude $m_0 \geq 8.0$, a iteração adotada anteriormente não é suficiente para se alcançar configurações estáveis, sendo assim, adotamos $\Delta t = 2 \times 10^{-6}$ como passo de iteração. Nesse caso, a simulação é dividida em duas etapas: uma com $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$, no intervalo $0.0 \leq m_0 < 8.0$, e outra etapa com $\Delta t = 2 \times 10^{-6}$, no intervalo de magnitude $8.0 \leq m_0 < 10.0$. Quando

$z_0 > 0.05$, a simulação é realizada em uma única etapa, com $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$.

A partir do conjunto das configurações obtidas, salvamos, separadamente, o estado que apresenta menor energia, dentre as 20 possibilidades testadas para cada conjunto de parâmetros: r_0 , z_0 e m_0 . São esses os estados determinados e apresentados nessa dissertação.

3.3 Configurações com menor Energia

O estudo foi focado em sistemas pequenos, com no máximo 15 vórtices. A maioria das configurações com vórtices simples, $\nu_k = 1$, apresenta simetria de rotação, formando camadas concêntricas ao eixo do dipolo, localizado em $r_0 = 0.0$. Quando $r_0 \neq 0.0$ elas deixam de ser concêntricas. No entanto, a simetria de rotação da camada externa pode ser quebrada quando não há um número proporcional de vórtices compondo as camadas.

Temos como parâmetro de controle três variáveis: a distância radial ao eixo de simetria do dipolo, r_0 , a altura do dipolo em relação ao disco, z_0 , e a magnitude do dipolo magnético, m_0 . Investigamos o efeito do potencial de confinamento provocado pelo dipolo magnético procurando os valores dos parâmetros para os quais ocorram mudanças de vorticidade ou de configuração. Buscamos o valor da magnitude do dipolo no qual o estado (0) deixa de existir, permitindo a existência do estado misto. Essa magnitude definimos como M_c . Além da magnitude crítica, estamos interessados em obter configurações que possam apresentar vórtices e antivórtices em seu estado de menor energia, assim como as possíveis características destas configurações para os determinados conjuntos de parâmetros.

Iniciamos nossa análise para o caso de maior simetria, i.e, a situação onde o dipolo

encontra-se ao longo do eixo de simetria do disco, $r_0 = 0.0$, apresentando simetrias de rotação e reflexão. Em seguida passamos a deslocar o dipolo em rela o ao eixo de simetria, assumindo os valores $r_0 = 0.1, 0.3$ e 0.5 e diversos valores de z_0 . Localizando o dipolo em $r_0 \neq 0.0$, a estrutura formada perde a simetria de rota o, mas mant m a de reflexão. Quando o dipolo encontra-se muito próximo do disco, $z_0 \leq 0.1$, variamos a sua intensidade até um valor limite de $m_0 = 10.0$, enquanto que para z_0 maiores, chegamos, em alguns casos, até $m_0 = 100.0$. Aumentamos o valor da magnitude investigada em busca de estados contendo múltiplas camadas de vórtices. Quando temos estados contendo apenas vórtices, a simetria da amostra depende da quantidade de vórtices na camada interna, induzindo a simetria da camada externa. No entanto, quando encontramos antivórtices, a simetria do estado é regida pelo arranjo formado pelos antivórtices, induzindo a simetria da camada interna, composta apenas por vórtices.

A medida que dipolo afasta-se da superfície do disco supercondutor, a distância entre os vórtices cresce, o que permitirá a forma o de novos arranjos, contendo a mesma quantidade de vórtices, e novos estados. Para valores baixos de z_0 , alcançamos estados de menor energia contendo vórtices e antivórtices. A fim de estabelecer um valor crítico de z_0 , acima do qual apenas configura es com vórtices são observadas, estudamos alguns valores de z_0 , mantendo $r_0 = 0.0$. Estados de menor energia contendo antivórtices não são mais observados quando $z_0 \geq 0.21$, mas ainda são alcançados entre as tentativas realizadas. Apenas em $z_0 = 0.24$ estados com antivórtices não são mais observados. Nas se es seguintes comparamos as energias, das configura es alcançadas, para um mesmo conjunto de parâmetros (r_0, z_0, m_0) .

Classificamos as configura es de acordo com a quantidade de vórtices que en-

contramos em cada camada. Nas figuras mostramos os vórtices por pontos pretos e antivórtices como círculos vazados. Enfatizamos que os estados alcançados dependem da distribuição inicial dos vórtices e antivórtices na amostra, pois ao distribuímos os vórtices e antivórtices aleatoriamente no disco supercondutor, eles podem ficar próximos o suficiente e se aniquilarem. A seguir faremos uma explanação dos parâmetros estudados, assim como os resultados obtidos.

3.3.1 Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.0$

Para o caso do dipolo magnético alinhado ao eixo do disco, consideramos diversos valores do parâmetro z_0 , i.e., $z_0 = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.6$ e 0.7 . Mostraremos a seguir algumas das configurações obtidas para os parâmetros z_0 e observações pertinentes ao sistema.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.05$

Partindo de $m_0 = 0.0$ e variando a magnitude até $m_0 = 10.0$, em passos de 0.1 , deixamos de ter o estado Meissner em $m_0 = 0.5$. Nesse valor de m_0 temos a configuração (1) com apenas um vórtice, como configuração de menor energia. Aumentando gradativamente o valor de m_0 teremos, em $m_0 = 0.9$, a primeira configuração contendo dois vórtices, a configuração (2). Configurações contendo três vórtices são obtidas a partir de $m_0 = 1.4$. Quando a magnitude do dipolo alcança $m_0 = 1.7$, a primeira configuração com antivórtice é obtida.

A partir desse ponto, configurações com antivórtices também estão presentes como estados de menor energia, dentre as possibilidades testadas. Quando os estados apresentam antivórtices em sua estrutura, as disposições dos vórtices e antivórtices no interior do disco são diversificadas, não seguindo uma continuidade ou padronização.

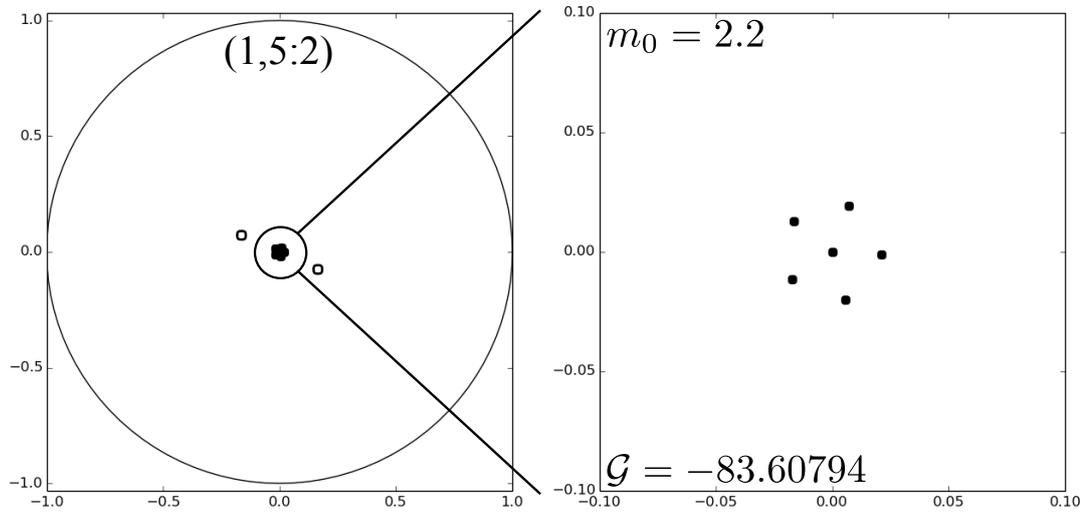


Figura 3.2: Estado de menor energia contendo vórtices e antivórtices em sua estrutura para os parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.05$ e $m_0 = 2.2$. Estrutura classificada como $(1, 5 : 2)$, onde os dois antivórtices estão alinhados com a estrutura interna, formada por vórtices.

Dentro do intervalo $1.7 \leq m_0 \leq 4.4$, as configurações contendo antivórtices prevalecem, mas encontramos dois estados que apresentam apenas vórtices. Esses dois estados são classificações como $(1, 4)$ e $(1, 7)$. A classificação $(1, 4)$ contém um vórtice interno e quatro vórtices compondo a camada externa. Analogamente, o estado $(1, 7)$ apresenta um vórtice central, circundado por sete vórtices.

Pela presença de antivórtices na estrutura a diversidade de estados é excessiva, sendo assim vários estados são possíveis para uma mesma quantidade de vórtices e antivórtices. Na Tabela(3.1) apresentamos os estados obtidos em seus respectivos intervalos de magnitude m_0 . Os estados que contêm antivórtices classificamos de forma semelhante aos estados apenas com vórtices, e.g., em $m_0 = 2.2$ o estado de menor energia apresenta um vórtice centrado, circundado por uma camada de cinco vórtices e dois antivórtices na extremidade da estrutura, como mostrado na Fig.(3.2),

onde classificamos o estado como $(1, 5 : 2)$.

A partir de $m_0 = 4.5$, até $m_0 = 8.1$, apenas configurações com antivórtices são encontradas. Para exemplificar alguns dos estados alcançados com antivórtices, apresentamos a Fig.(3.3) onde destacamos a estrutura interna formada apenas por vórtices. Na Fig.(3.3)(a) mostramos o estado formado por um vórtice centrado, com uma camada externa em forma de hexágono, composta apenas por vórtices, e na extremidade da estrutura três antivórtices formando um triângulo, onde classificamos o estado como $(1, 6 : 3)$. Antivórtices formando quadrados, Fig.(3.3)(b), e pentágonos, Fig.(3.3)(c), também são alcançados, apresentando apenas vórtices em sua estrutura interna. Na Fig.(3.3)(b), dois vórtices compõe a camada interna e outros seis formam duas linhas curvas as quais constituem a segunda camada, em uma estrutura classificada como $(2, 6 : 5)$. Na Fig.(3.3)(c) temos apenas um vórtice centrado, circundado por oito vórtices e quatro antivórtices na extremidade da estrutura, estado classificado como $(1, 8 : 4)$.

Quando m_0 atinge o valor de 8.2, são recuperados estados contendo apenas vórtices. Os estados mais comuns para $m_0 \geq 8.2$ apresentam apenas um vórtice central, envolvido por cinco ou seis outros vórtices, formando pentágonos e hexágonos, respectivamente. Esses estados são classificados como: $(1, 5)$ e $(1, 6)$. Outras configurações formando apenas pentágonos, (5) , e hexágonos, (6) , também são encontrados acima de $m_0 = 8.1$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.1$

A análise para $z_0 = 0.1$ é feita de maneira análoga à anterior. Partindo de $m_0 = 0.0$, em intervalos de 0.1, obtemos o valor crítico $M_c = 0.9$, para o aparecimento do estado com um vórtice. Até $m_0 = 1.5$ todas as configurações que obtemos apresentam

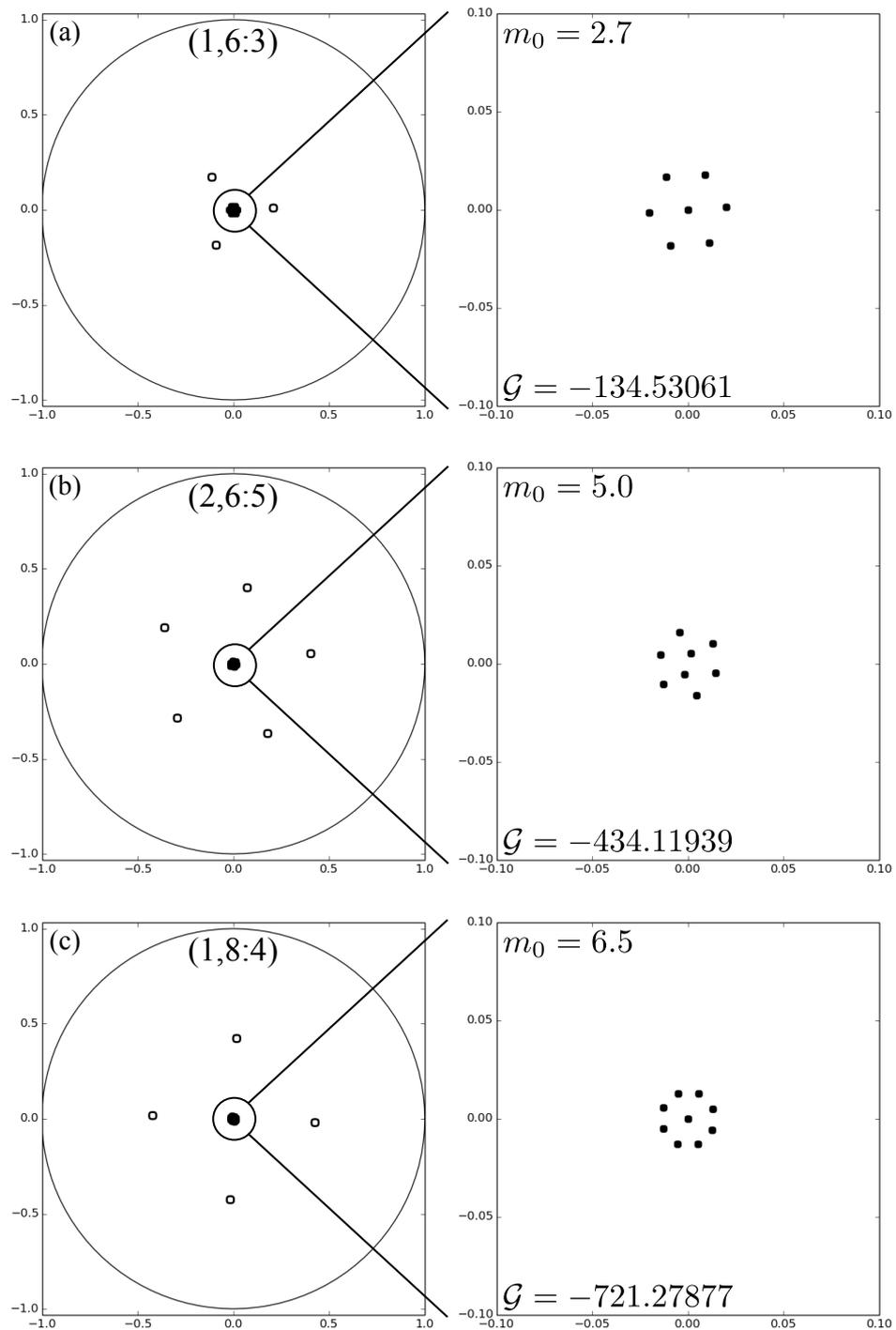


Figura 3.3: Estados de menor energia contendo vórtices e antivórtices para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.05$. As configurações mostradas apresentam os estados: (a) $(1, 6 : 3)$ com $m_0 = 2.7$, (b) $(2, 6 : 5)$ com $m_0 = 5.0$ e (c) $(1, 8 : 4)$ com $m_0 = 6.5$.

Magnitude	Configuração
$0.5 \leq m_0 \leq 0.8$	(1)
$0.9 \leq m_0 \leq 1.3$	(2)
$1.3 \leq m_0 \leq 1.6$	(3)
$1.7 \leq m_0 \leq 4.4$	(3), (1, 4), (1, 7), (4 : 1), (5 : 1), (5 : 2), (1, 5 : 1), (1, 5 : 2), (1, 5 : 3), (1, 6 : 1), (1, 6 : 2), (1, 6 : 3), (1, 6 : 4), (1, 7 : 4), (2, 6 : 2), (2, 6 : 3), (2, 7 : 2) e (2, 7, 3)
$4.5 \leq m_0 \leq 8.1$	(6 : 2), (1, 5 : 1), (1, 5 : 2), (1, 5 : 3), (1, 6 : 2), (1, 6 : 3), (1, 7 : 1), (1, 7 : 2), (1, 7 : 3), (1, 8 : 2), (1, 8 : 4), (2, 6 : 2), (2, 6 : 5), (2, 7 : 2), (2, 7, 3), (3, 7 : 1) e (3, 7 : 3)
$8.2 \leq m_0 \leq 10.0$	(5), (6), (1, 5), (1, 6)

Tabela 3.1: Classificações dos estados de menor energia para os parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.05$ e $0.0 \leq m_0 \leq 10.0$.

um único vórtice. Um segundo vórtice surge em $m_0 = 1.6$, permanecendo até $m_0 = 2.2$. No intervalo de $m_0 = 2.3$ até $m_0 = 3.5$, não temos uma configuração de menor energia bem definida. Nesse intervalo conseguimos obter configurações do tipo: (3), (4), (1, 4) e (5).

Para $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.1$, o primeiro estado com antivórtice ocorre em $m_0 = 3.6$, com o estado (1, 5 : 1). A partir desse ponto até $m_0 = 10.0$, são obtidas configurações contendo apenas vórtices ou vórtices e antivórtices. Alguns dos estados que apresentam apenas vórtices são: (3), (4), (5), (1, 5), (1, 6), (2, 6), (1, 7) e (2, 7). Configurações do tipo (2, 6) consistem em uma espécie de linha curva contendo três vórtices em cada lado e dois vórtices internos, conforme mostrada na Fig.(3.4)(a). Semelhante a configuração (2, 6), o estado (2, 7) apresenta um vórtice a mais na camada externa, formando uma espécie de elipse, como pode ser visto na Fig.(3.4)(b). Mostramos

na Tabela(3.2) os possíveis estados de menor energia em seus respectivos intervalos de magnitude do dipolo. A quantidade de estados contendo antivórtices é inferior ao caso anterior, em que o dipolo estava fixado mais próximo ao disco supercondutor, em $z_0 = 0.05$. Na Fig.(3.5) apresentamos três estados contendo vórtices e antivórtices.

Em $m_0 = 5.8$ alcançamos o estado contendo três vórtices compondo a camada interna, formando um triângulo, seis vórtices constituindo a segunda camada, mas sem estruturar um hexágono, e apenas um antivórtice na camada mais externa, classificamos o estado como $(3, 6 : 1)$, como ilustrado na Fig.(3.5)(a). Na Fig.(3.5)(b) exibimos o estado $(1, 7 : 4)$, possuindo apenas um vórtice interno, envolvido por uma camada de sete vórtices e quatro antivórtices na camada exterior. Na Fig.(3.5)(c) apresentamos o estado $(2, 8 : 2)$, que ocorre pela primeira vez em $m_0 = 9.2$, apresentando dois vórtices na primeira camada, cercado por outros oito vórtices, além de dois antivórtices na extremidade da estrutura.

Magnitude	Configuração
$0.9 \leq m_0 \leq 1.5$	(1)
$1.6 \leq m_0 \leq 2.2$	(2)
$2.3 \leq m_0 \leq 3.5$	(3), (4), (1, 4) e (5)
$3.6 \leq m_0 \leq 10.0$	(3), (4), (5), (1, 5), (1, 6), (2, 6), (1, 7) e (2, 7) (1, 5 : 1), (1, 5 : 2), (1, 6 : 1), (1, 7 : 1), (1, 7 : 2), (1, 7 : 4), (2, 6 : 1), (2, 6 : 2), (2, 6 : 3), (2, 7 : 1), (2, 7 : 2), (2, 7 : 3), (2, 8 : 2), (3, 6 : 1), (3, 6 : 2), (3, 6 : 3), (3, 7 : 2) e (4, 7 : 2)

Tabela 3.2: Classificações dos estados de menor energia para os parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.1$ e $0.0 \leq m_0 \leq 10.0$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.3$

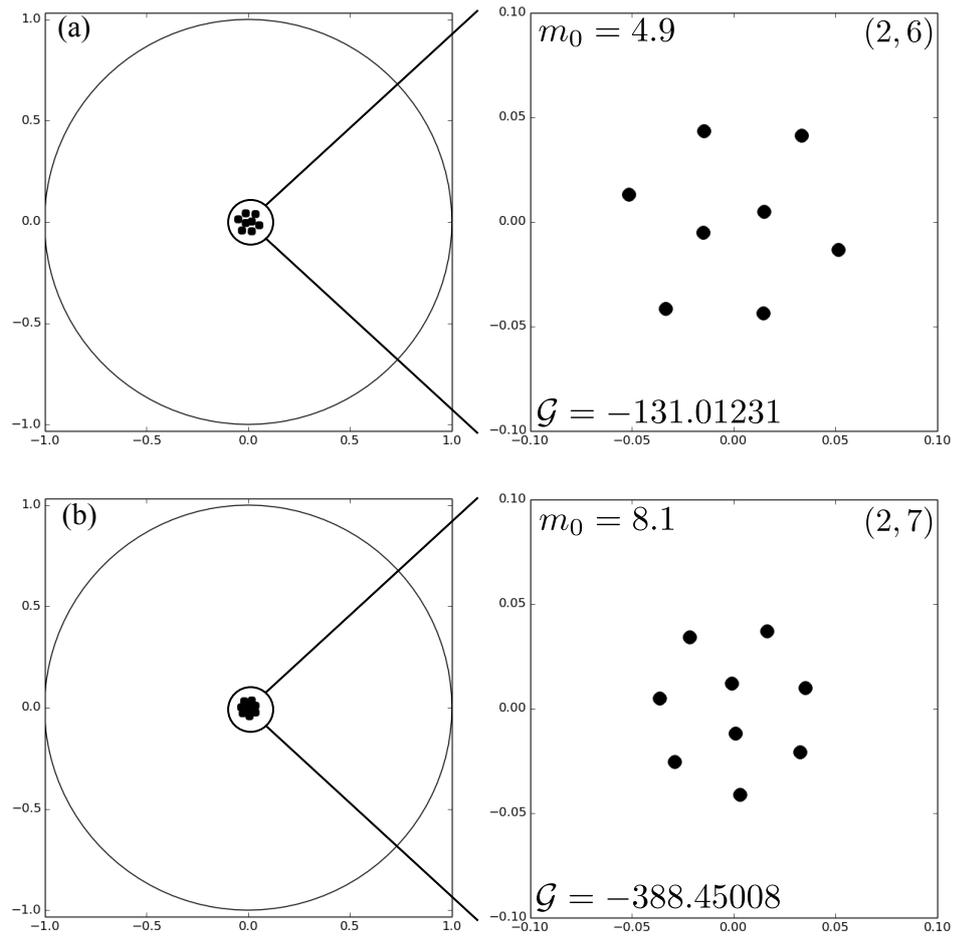


Figura 3.4: Algumas das configurações obtidas para os parâmetros: $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.1$. As configurações mostradas apresentam vórtices nos estados: (a) (2,6) com $m_0 = 4.9$, e (b) (2,7) com $m_0 = 8.1$.

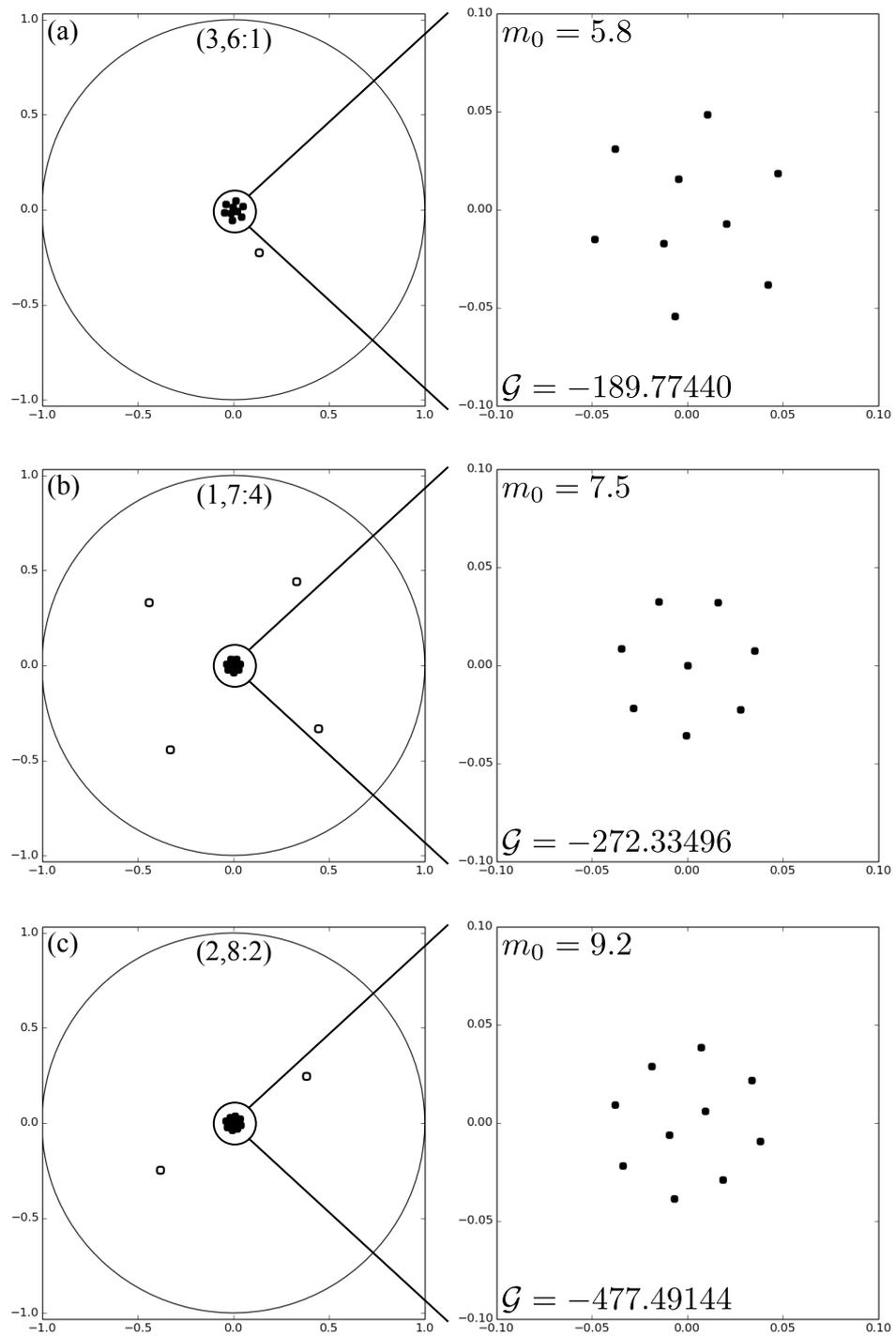


Figura 3.5: Estados de menor energia contendo vórtices e antivórtices para os parâmetros: $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.1$. As configurações mostradas apresentam os estados: (a) $(3,6 : 1)$ em $m_0 = 5.8$, (b) $(1,7 : 4)$ em $m_0 = 7.5$ e (c) $(2,8 : 2)$ em $m_0 = 9.2$.

Para os parâmetros de $z_0 \geq 0.3$, aumentamos a intensidade máxima da magnitude do dipolo até $m_0^{max} = 46.00$, variando em intervalos de 0.25. O m_0 crítico para o aparecimento do primeiro vórtice é de $m_0 = 2.75$, mantendo a configuração (1) até 4.25. Na Tabela(3.3), mostramos as classificações e os intervalos dos estados de menor energia. Estados com dois, três e quatro vórtices estão contidos em um curto intervalo de valores de momento magnético, $4.25 \leq m_0 < 5.25$, $5.25 \leq m_0 < 6.50$ e $6.50 \leq m_0 < 7.50$, respectivamente. No intervalo $7.50 \leq m_0 < 8.50$ e $8.50 \leq m_0 < 9.50$, são encontrados, respectivamente, estados com um vórtice no centro da estrutura e outros quatro e cinco vórtices externos.

Diferentemente dos casos anteriores, quando $z_0 < 0.3$, passamos a avaliar o efeito do confinamento provocado pelo dipolo para magnitudes mais elevadas. O aumento de m_0 proporciona uma maior quantidade de vórtices presos ao sistema, sendo possível alcançar estados com múltiplas camadas de vórtices. Estados contendo duas camadas de vórtices são alcançados apenas em $m_0 = 9.50$ com o estado (2, 5) de forma assimétrica, como mostra a Fig.(3.6)(a). Ainda no intervalo $8.50 \leq m_0 < 10.50$, obtemos estados classificados como (1, 6) com menor energia.

Em $m_0 = 19.00$ surge um estado contendo um vórtice central cercado por duas camadas de vórtices, como mostrado na Fig.(3.7)(a), com o estado (1, 6, 6) expressando a menor energia entre os estados testados. No período $12.00 \leq m_0 < 19.00$ obtemos os estados: (2, 6), (3, 6), (3, 7), (4, 6), (4, 7) e (4, 8). Os estado (3, 7) e (4, 7) não estão sujeitos a uma simetria, o que se deve as quatidades de vórtices na camada externa e interna serem não comensuráveis. A configuração (4, 6) apresenta quatro vórtices internos, formando um losango, envolvido por seis vórtices que formam um hexágono, conforme mostra a Fig.(3.6)(b). A situação onde temos (4, 8) apresenta

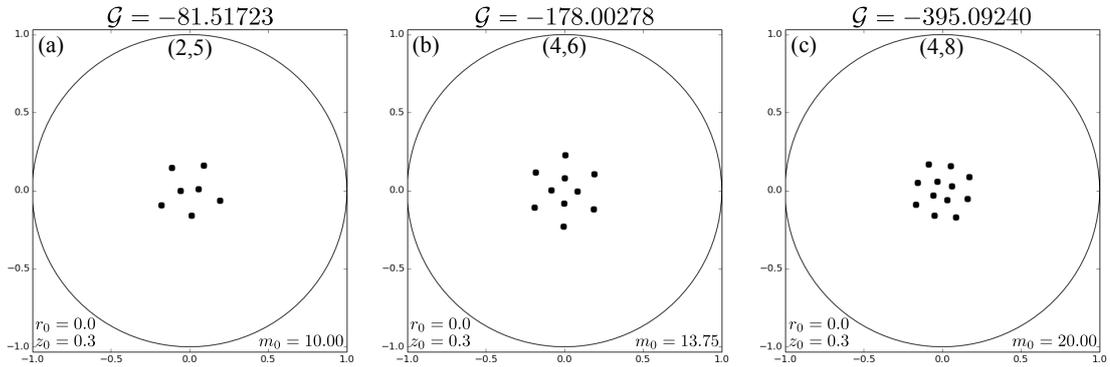


Figura 3.6: Exemplos de estados de menor energia obtidos, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.3$ e (a) $m_0 = 10.00$, (b) $m_0 = 13.75$ e (c) $m_0 = 20.00$.

uma estrutura quadrática na camada interna e forma um quadrilátero deformado na camada externa, como exposto na Fig.(3.6)(c).

Magnitude	Configuração
$2.75 \leq m_0 < 4.25$	(1)
$4.25 \leq m_0 < 5.25$	(2)
$5.25 \leq m_0 < 6.50$	(3)
$6.50 \leq m_0 < 7.50$	(4)
$7.50 \leq m_0 < 8.50$	(1, 4)
$8.50 \leq m_0 < 9.50$	(1, 5)
$8.50 \leq m_0 < 10.50$	(1, 6) e (2, 5)
$10.50 \leq m_0 < 12.00$	(2, 6)
$12.00 \leq m_0 < 19.00$	(2, 6), (3, 6), (3, 7), (4, 6), (4, 7) e (4, 8)
$19.00 \leq m_0 < 23.00$	(4, 7), (4, 8), (5, 8) e (1, 6, 6)
$23.00 \leq m_0 < 36.00$	(5, 8), (5, 9), (1, 5, 8), (1, 6, 8) e (1, 5, 9)
$36.00 \leq m_0 \leq 46.00$	(5, 9), (1, 5, 9) e (5, 10)

Tabela 3.3: Classificações dos estados com menor energia obtidos para os parâmetros $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.3$.

No intervalo $10.50 \leq m_0 < 23.00$, temos apenas estados de menor energia contendo duas camadas. Os estados finais dependem das condições iniciais da simulação,

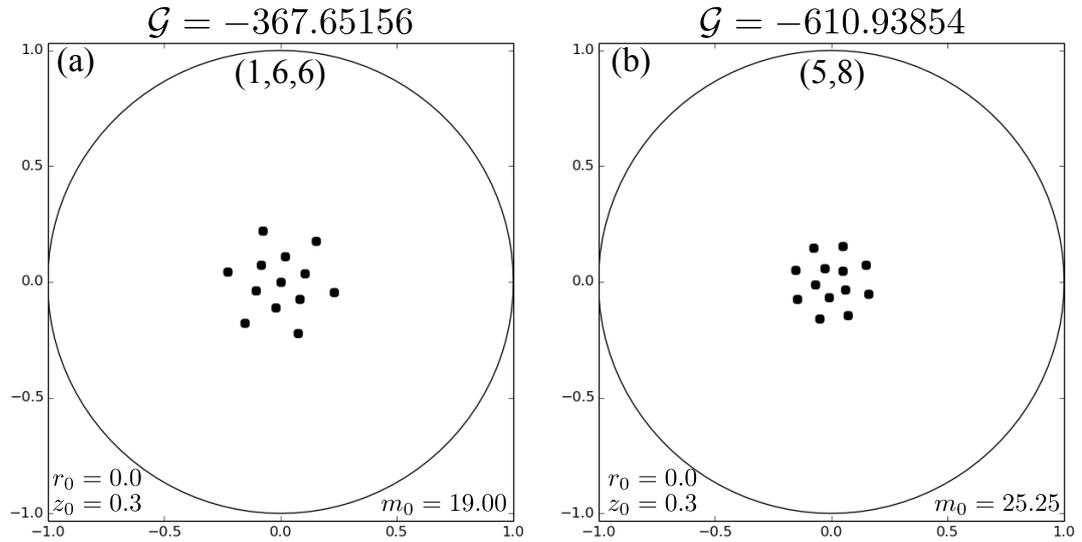


Figura 3.7: Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.3$, (a) $m_0 = 19.00$ e (b) $m_0 = 25.25$.

e.g., disposições e quantidades de vórtices e antivórtices no disco supercondutor. Com isso algumas das configurações podem não ser alcançadas, devido ao baixo número de tentativas. Algumas das configurações observadas anteriormente deixaram de ser alcançadas, os estados que ainda continuam recorrentes são: $(4,7)$ e $(4,8)$, no intervalo $19.25 \leq m_0 < 23.00$. Nesse mesmo período apenas um novo estado surge, $(5,8)$, apresentando um pentágono interno e oito vórtices na camada externa, como mostrado na Fig.(3.7)(b).

A partir de $m_0 = 23.00$ estados com duas camadas são encontrados com maior frequência, em alguns casos apresentando um vórtice no centro da estrutura. Em $m_0 = 26.75$ chegamos ao estado com a maior quantidade de vórtices que estabelecemos, $N = 15$, apresentando a configuração $(1,6,8)$. Até $m_0 = 36.00$ os estados de menor energia variam entre $(5,8)$, $(1,5,8)$, $(5,9)$, $(1,6,8)$ e $(1,5,9)$. No intervalo de $m_0 = 36.00$ até $m_0 = 46.00$ não observamos as configurações $(5,8)$, $(1,5,8)$ e $(1,6,8)$,

embora tenhamos o surgimento de um novo estado, classificado como (5, 10). Acima de $m_0 = 46.00$, não podemos afirmar os estados que apresentam a menor energia, pois temos um número máximo de vórtices iniciais.

• **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.5$

Nessa seção analisaremos o efeito do dipolo magnético posicionado a uma altura $z_0 = 0.5$ do disco. Como o dipolo está localizado a uma distância superior ao do caso analisado anteriormente, será necessário uma maior magnitude para que o estado (0) torne-se ausente. O momento magnético crítico para que um vórtice seja estável é de $M_c = 4.50$. Na Tabela(3.4), destacamos as possíveis configurações dos estados com menor energia, entre as 20 possibilidades testadas. Algumas das configurações apresentadas já foram obtidas anteriormente, sendo assim, daremos uma maior atenção aos novos estados observados. Apenas no intervalo $16.50 \leq m_0 < 27.75$ surge uma nova configuração de menor energia, (3, 5), não observada para valores de z_0 anteriores.

Na Fig.(3.8)(a) mostramos esse novo estado, (3, 5), com três vórtices na camada interna e 5 vórtices na segunda camada. No entanto, como comentado anteriormente, a quantidade de vórtices na camada interna não favorece uma simetria ao sistema, gerando um pentágono não regular. Além do estado (3, 5), novas configurações são atingidas, tais como: (5, 7), entre $m_0 = 29.75$ e $m_0 = 30.25$, e (1, 5, 7) e (1, 6, 7), entre $30.25 \leq m_0 < 35.00$. As configurações (1, 5, 7) e (1, 6, 7), Figs.(3.8)(b) e (c), apresentam simetria apenas na segunda camada. As configurações seguintes são similares as obtidas anteriormente, apresentando como diferença apenas o aumento da distância entre os vórtices, uma vez que o dipolo encontra-se posicionado mais longe da superfície do disco. Para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.5$; limitamos

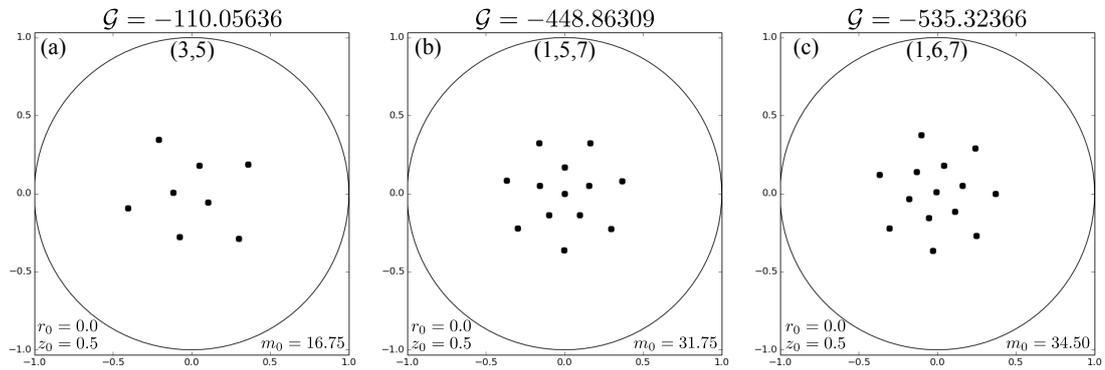


Figura 3.8: Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.0$, $z_0 = 0.5$ e (a) $m_0 = 16.75$, (b) $m_0 = 31.75$ e (c) $m_0 = 34.50$.

o estudo até $m_0 = 76.00$. Acima desse valor não podemos afirmar quais são os estados que apresentam a menor energia, pois limitamos o número máximo de vórtices em 15.

Magnitude	Configuração
$4.50 \leq m_0 < 6.50$	(1)
$6.50 \leq m_0 < 7.50$	(2)
$7.50 \leq m_0 < 8.75$	(3)
$8.75 \leq m_0 < 10.00$	(4)
$10.00 \leq m_0 < 12.00$	(1, 4)
$12.00 \leq m_0 < 14.75$	(1, 5)
$14.75 \leq m_0 < 16.50$	(2, 5)
$16.50 \leq m_0 < 27.75$	(3, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (3, 7) e (4, 7)
$27.75 \leq m_0 < 29.75$	(1, 5, 6)
$29.75 \leq m_0 < 30.25$	(5, 7)
$30.25 \leq m_0 < 35.00$	(1, 6, 6), (1, 5, 7) e (1, 6, 7)
$35.00 \leq m_0 < 38.25$	(5, 8), (1, 6, 7), (1, 6, 8) e (1, 5, 8)
$38.25 \leq m_0 < 46.50$	(1, 5, 8), (1, 6, 7), (1, 6, 8) e (1, 5, 9)
$46.50 \leq m_0 < 67.50$	(5, 9), (1, 5, 9) e (1, 6, 8)
$67.50 \leq m_0 \leq 76.00$	(5, 10) e (1, 5, 9)

Tabela 3.4: Classificações dos estados de menor energia encontrados para os parâmetros $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.5$.

• **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.7$

Para finalizar o estudo em relação ao dipolo em $r_0 = 0.0$, avaliamos a sua influência quando posicionado a uma altura $z_0 = 0.7$ do disco. Na Tabela(3.5), apresentamos os intervalos de magnitude de m_0 e as respectivas configurações obtidas. O estado (0) é superado quando m_0 atinge o valor de 6.25. Todas as configurações para esse conjunto de parâmetros são semelhantes as obtidas anteriormente, porém com maior distanciamento dos vórtices. Sendo assim, serão feitas algumas observações complementares às anteriores.

Para $m_0 < 14.25$, encontra-se uma estrutura simples composta apenas por quatro vórtices, formando uma única camada. A partir de $m_0 = 14.25$, um novo vórtice surge no interior da estrutura, de modo que temos a configuração (1, 4). Quando $m_0 = 18.25$ um outro vórtice passa a compor a segunda camada, formando o estado (1, 5). Com o aumento da magnitude m_0 , a estrutura (2, 5) passa por um breve intervalo como estado de menor energia, se reestruturando em (1, 6), formando um hexágono com um vórtice no centro. Como mencionado anteriormente, o estado (2, 6) mostra duas linhas curvas contendo três vórtices cada e dois vórtices internos. A diferença entre este e o estado encontrado em $z_0 = 0.1$ é a distância entre os vórtices, que estão mais distantes entre si, neste caso devido à posição do dipolo. Dando sequência, surgem as configurações (3, 6), (3, 7) e (4, 7). No intervalo $52.00 \leq m_0 < 65.50$, nós encontramos com maior frequência as configurações (1, 5, 8) e (1, 6, 8). Como já mencionado, os estados alcançados dependem de suas condições iniciais, logo os estados (1, 5, 8) e (1, 6, 8) podem não ser os mais favoráveis energeticamente. Pelo baixo número de tentativas para se obter o estado de menor energia, alguns dos estados finais podem não terem sido acessados. Apenas em $m_0 = 91.00$ obtemos a configuração (5, 10). A

partir de $m_0 = 85.00$ os estados com menor energia variam entre $(1, 5, 9)$ e $(5, 10)$, lembrando que limitamos a quantidade máxima de vórtices em 15.

Magnitude	Configuração
$6.25 \leq m_0 < 8.25$	(1)
$8.25 \leq m_0 < 9.50$	(2)
$9.50 \leq m_0 < 11.50$	(3)
$11.50 \leq m_0 < 14.25$	(4)
$14.25 \leq m_0 < 18.25$	(1, 4)
$18.25 \leq m_0 < 22.75$	(1, 5)
$22.75 \leq m_0 < 23.25$	(2, 5)
$23.25 \leq m_0 < 25.00$	(1, 6)
$25.00 \leq m_0 < 29.00$	(2, 8)
$29.00 \leq m_0 < 33.00$	(3, 6)
$33.00 \leq m_0 < 34.25$	(3, 7)
$34.25 \leq m_0 < 40.25$	(4, 7)
$40.25 \leq m_0 < 52.00$	(4, 7), (4, 8), (1, 5, 6), (5, 7), (1, 5, 7) e (1, 6, 7),
$52.00 \leq m_0 < 65.50$	(1, 6, 7), (1, 6, 8), (1, 5, 8) e (1, 5, 9)
$65.50 \leq m_0 < 85.00$	(5, 9), (1, 6, 8) e (1, 5, 9)
$85.00 \leq m_0 \leq 100.00$	(1, 5, 9) e (5, 10)

Tabela 3.5: Classificações dos estados de menor energia encontrados para os parâmetros $r_0 = 0.0$ e $z_0 = 0.7$.

3.3.2 Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.1$

Analisaremos agora o primeiro caso no qual o dipolo magnético deixa de estar centrado ao longo do eixo de simetria do disco. Mostraremos a seguir os estados de menor energia para $r_0 = 0.1$ e para os mesmos valores de z_0 do caso anterior, i.e., $z_0 = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.6$ e 0.7 .

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.05$

Retornando para o caso em que o dipolo está localizado mais próximo do disco, mas em $r_0 = 0.1$, obtemos novamente casos com vórtices e antivórtices em um grande

intervalo de m_0 . O primeiro estado com antivórtice ocorre em $m_0 = 1.4$. A magnitude crítica M_c é obtido em $m_0 = 0.4$. Até $m_0 = 2.8$, alguns casos isolados de configurações apresentando apenas vórtices são obtidos, e.g., o estado (4), em $m_0 = 1.6$, e o estado (1, 4), em $m_0 = 2.8$. Acreditamos que os resultados mencionados anteriormente sejam casos isolados, uma vez que a quantidade de tentativas, para se achar a configuração de menor energia, não seja grande o suficiente em alguns casos. No intervalo $1.4 \leq m_0 \leq 7.9$ alcançamos uma ampla variedade de estados contendo antivórtices, assim como no caso dos parâmetros $r_0 = 0.0$ e $r_0 = 0.05$. Quando o dipolo encontra-se deslocado em relação ao eixo de simetria do disco, nesse momento em $r_0 = 0.1$, os estados que apresentam dois antivórtices na camada externa não estão alinhados com a estrutura composta apenas por vórtices, como mostram as Figs.(3.2) e (3.5)(c). Exemplificamos o novo estado formado por dois antivórtices na Fig.(3.9), onde a estrutura interna apresenta um vórtice centrado, cercado por cinco vórtices e os dois antivórtices estão localizados na camada externa, mas não alinhados com os vórtices, formando o estado (1, 5 : 2).

Reencontramos estados contendo apenas vórtices acima de $m_0 = 8.0$, com as configurações: (5), (6), (1, 5) e (1, 6); ainda com alguns casos isolados com estados com antivórtices. Na Tabela(3.6), apresentamos os estados obtidos para $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.05$ em seus respectivos intervalos de magnitude m_0 . Para esse parâmetro limitamos nosso estudo para campos baixos, i.e, até $m_0 = 10.0$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.1$

Assim como nos casos em que $z_0 < 0.3$, partimos de $m_0 = 0.0$, em intervalos de 0.1, onde obtemos a magnitude crítica (abaixo da qual temos o estado Meissner), M_c , em $m_0 = 0.9$. Até $m_0 = 4.3$ apenas estados contendo vórtices são encontrados, com

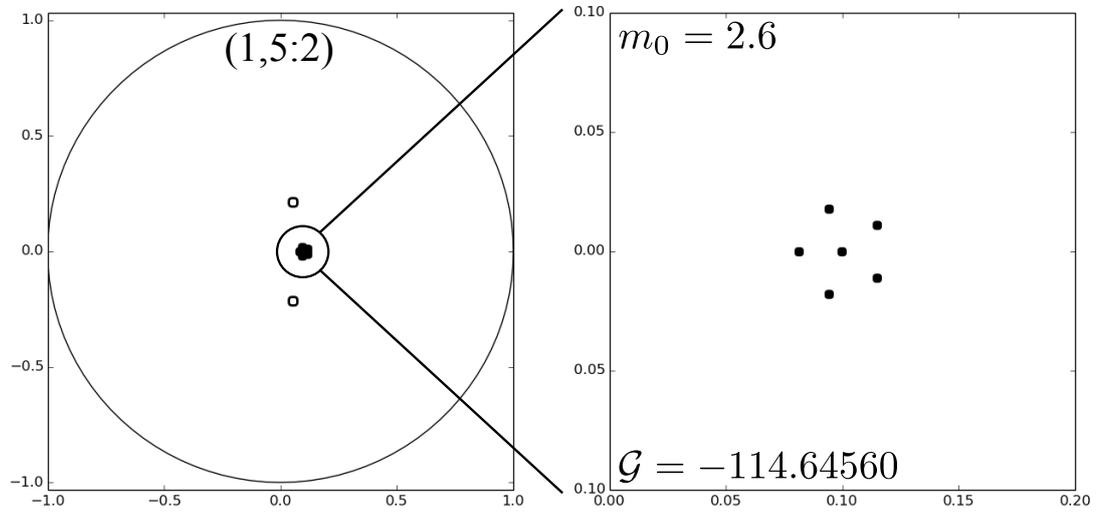


Figura 3.9: Estado $(1, 5 : 2)$ com os parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.05$ e $m_0 = 2.6$. O estado destacado deixa de apresentar os antivórtices alinhados a estrutura interna, constituída apenas de vórtices.

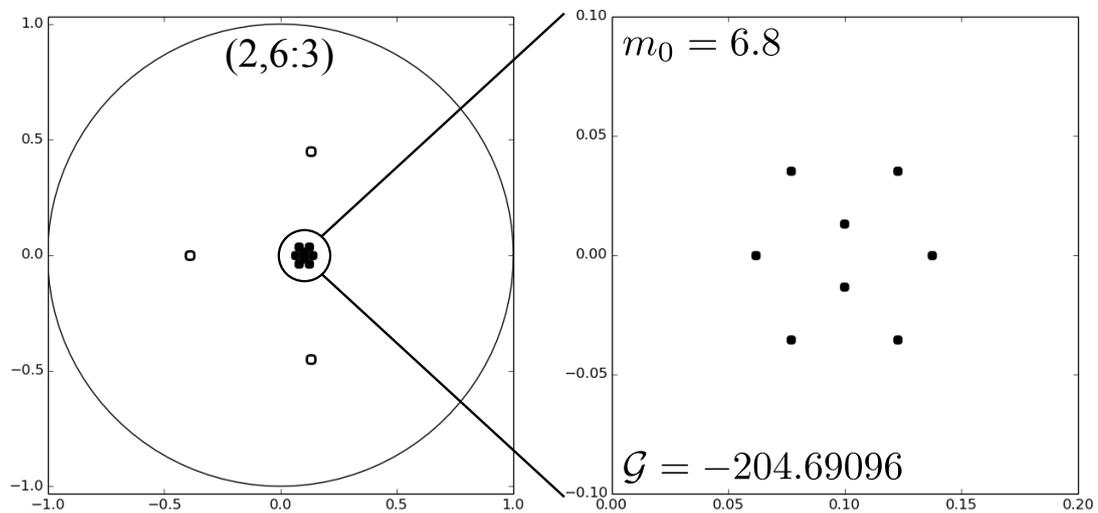


Figura 3.10: Estado $(2, 6 : 3)$ com os parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.1$ e $m_0 = 6.8$. Configuração com duas camadas de vórtices e uma terceira camada formada por três antivórtices.

Magnitude	Configuração
$0.4 \leq m_0 \leq 0.9$	(1)
$1.0 \leq m_0 \leq 1.3$	(2)
$1.4 \leq m_0 \leq 7.9$	(4), (1, 4) (3 : 1), (4 : 1), (5 : 1), (5 : 2), (1, 5 : 1), (1, 5 : 2), (1, 5 : 3), (1, 5 : 4), (1, 6 : 1), (1, 6 : 2), (1, 6 : 3), (1, 6 : 4), (1, 7 : 1), (1, 7 : 2), (1, 7 : 3), (1, 7 : 4), (1, 8 : 3), (2, 6 : 1), (2, 7 : 1), (2, 7 : 2), (2, 7 : 3), (2, 7 : 4), e (3, 7 : 1),
$8.0 \leq m_0 \leq 10.0$	(5), (6), (1, 5), (1, 6), (1, 6 : 2) e (1, 7 : 1)

Tabela 3.6: Classificações dos estados de menor energia obtidos para os parâmetros $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.05$.

um único vórtice ou formando camadas com até quatro vórtices. Foram obtidos configurações com vórtices e antivórtices como estados de menor energia até $m_0 = 10.0$. Em todo esse intervalo, $4.3 \leq m_0 \leq 10.0$, alguns estados contendo apenas vórtices são observados, como por exemplo: (4), (5), (1, 6) e (1, 7). No mesmo intervalo obtivemos um estado classificado como (2, 6 : 3), estado semelhante ao mostrado na Fig.(3.3)(a). Na Fig.(3.10) apresentamos o estado (2, 6 : 3), que apresenta duas camadas formadas por vórtices e uma terceira camada constituído por três antivórtices. Diferentemente do estado apresentado na Fig.(3.3)(a), em que os três antivórtices formam um triângulo que mantém a estrutura com vórtices centrados em seu interior, quando $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.1$ os três antivórtices não conseguem manter os vórtices no centro de sua camada triangular.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.3$

Magnitude	Configuração
$0.9 \leq m_0 \leq 1.7$	(1)
$1.8 \leq m_0 \leq 2.7$	(2)
$2.9 \leq m_0 \leq 4.2$	(3) e (4)
$4.3 \leq m_0 \leq 10.0$	(4), (5), (1, 6) e (1, 7) (5 : 1), (1, 5 : 1), (1, 5 : 2), (1, 6 : 1), (1, 6 : 2), (1, 7 : 1), (1, 7 : 2), (1, 7 : 3), (2, 6 : 2), (2, 6 : 3), (2, 7 : 2), (2, 7 : 3), e (2, 8 : 2)

Tabela 3.7: Classificações dos estados de menor energia obtidos para os parâmetros $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.1$

Para o conjunto $z_0 = 0.3$ e $r_0 = 0.1$, variamos a magnitude do dipolo de $m_0 = 0.00$ até $m_0 = 100.00$, em passos de 0.25. O primeiro vórtice surge em $m_0 = 3.00$. O estado misto com apenas um vórtice prevalece até $m_0 < 5.25$, quando um segundo vórtice aparece no sistema. Observamos as configurações com um e dois vórtices até $m_0 = 6.0$. Após isso, encontramos a configuração de dois vórtices com menor energia. Estados com três vórtices surgem como de menor energia em $m_0 = 7.75$, mantendo-se até $m_0 = 9.50$, quando quatro vórtices surgem formando quadriláteros. Configurações com um vórtice central, circundado por outros quatro vórtices, (1, 4), e em forma de pentágono, (5), são obtidos no intervalo $11.25 \leq m_0 < 13.00$.

Estados contendo um vórtice central e uma segunda camada formando um pentágono ou hexágono, são obtidos entre $m_0 = 13.00$ e $m_0 = 16.00$. Em seguida, para $16.00 \leq m_0 < 18.25$, a camada interna passa a ser composta por dois vórtices e seis ou sete vórtices na camada externa, estados classificados, respectivamente, como (2, 6) e (2, 7). Até o intervalo correspondente a $m_0 = 26.25$, todas as configurações listadas são similares as encontradas anteriormente. A novidade nesse intervalo é o estado (4, 9), mostrado na Fig.(3.11) que aparece em $m_0 = 26.50$, onde temos quatro

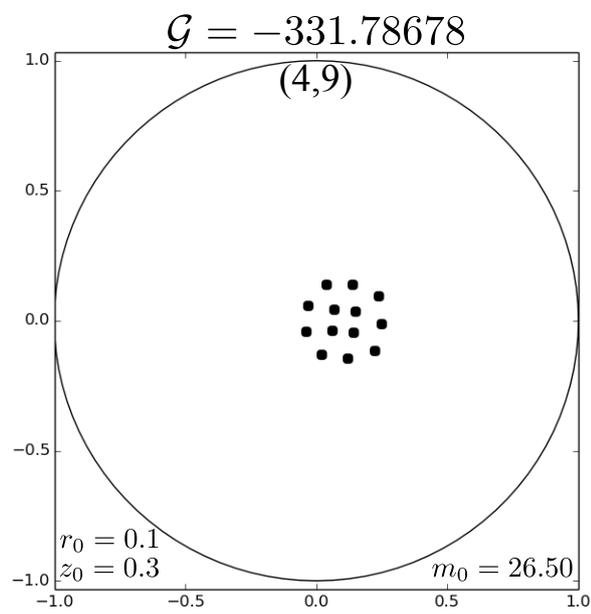


Figura 3.11: Estado de menor energia para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.3$ e $m_0 = 26.50$. O estado, classificado como (4, 9), apresenta duas camadas de vórtices formando um quadrilátero.

vórtices na camada interna e nove na externa. No intervalo $26.25 \leq m_0 < 30.00$, configurações contendo um vórtice central e duas camadas são alcançados com os estados $(1, 5, 8)$ e $(1, 5, 9)$. Com o aumento da magnitude do dipolo, os estados $(4, 9)$, $(5, 8)$ e $(1, 5, 8)$ deixam de ser obtidos a partir de $m_0 = 30$.

Magnitude	Configuração
$3.00 \leq m_0 < 5.25$	(1)
$5.25 \leq m_0 < 6.00$	(1) e (2)
$6.00 \leq m_0 < 7.75$	(2)
$7.75 \leq m_0 < 9.50$	(3)
$9.50 \leq m_0 < 11.25$	(4)
$11.25 \leq m_0 < 13.00$	(1, 4) e (5)
$13.00 \leq m_0 < 16.00$	(1, 5) e (1, 6)
$16.00 \leq m_0 < 18.25$	(2, 6) e (2, 7)
$18.25 \leq m_0 < 21.75$	(3, 6), (2, 7) e (3, 7)
$21.75 \leq m_0 < 22.75$	(3, 8) e (4, 7)
$22.75 \leq m_0 < 26.25$	(5, 8)
$26.25 \leq m_0 < 30.00$	(4, 9), (5, 8), (1, 5, 8), (5, 9) e (1, 5, 9)
$30.00 \leq m_0 < 36.25$	(5, 9) e (1, 5, 9)
$36.25 \leq m_0 < 42.75$	(5, 9), (5, 10) e (1, 5, 9)
$42.75 \leq m_0 \leq 50.00$	(5, 10) e (1, 5, 9)

Tabela 3.8: Classificações dos estados obtidos de energia mais baixa para os parâmetros $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.3$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.5$

Chegamos ao caso em que a distância à superfície do disco é $z_0 = 0.5$. Assim como em alguns casos anteriores, o valor de m_0 a partir do qual não mais se observa o estado Meissner não é bem definido pois o número de tentativas para cada conjunto de r_0 , z_0 e m_0 não foi grande o suficiente. Portanto, para dados valores de m_0 , o estado de menor energia é o estado com zero vórtices e para outros valores de m_0 encontramos configurações de menor energia contendo vórtices. Nos parâmetros em estudo, $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.5$, essa faixa na qual encontramos estados com zero e um vórtice é

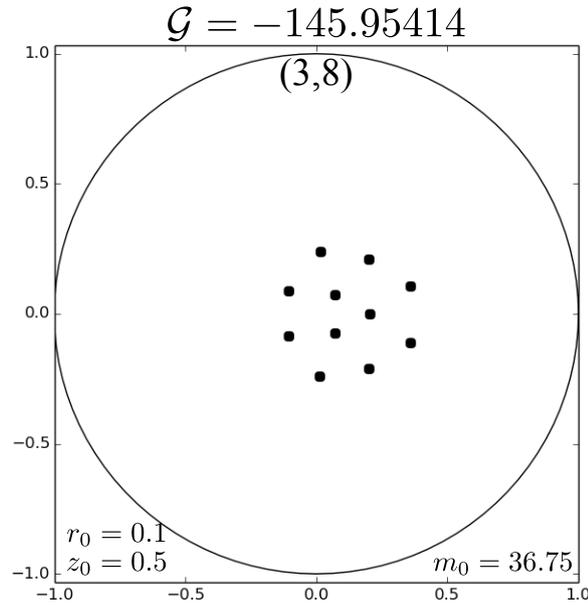


Figura 3.12: Estado (3, 8), alcançado como configuração de menor energia para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.1$, $z_0 = 0.5$ e $m_0 = 36.75$.

$4.75 \leq m_0 < 10.25$. De $m_0 = 10.25$ até $m_0 < 21.00$ a quantidade de vórtices nas configurações de energia mais baixa aparece de forma gradual, como mostra a Tabela(3.9). A presença de uma segunda camada ocorre no intervalo $21.00 \leq m_0 < 32.00$, com o estado (2, 6), que mantém a mesma simetria observada nos estudos para z_0 e r_0 menores. No mesmo intervalo, encontramos estados contendo uma única camada formando pentágonos e hexágonos. Em sequência encontramos estados com um vórtice no centro e cinco ou seis vórtices na segunda camada, como as configurações (1, 5) e (1, 6), respectivamente.

Temos uma quantidade muito alta de estados de baixa energia com energias próximas entre si, se considerarmos o breve intervalo de magnitude do dipolo, $32.00 \leq m_0 < 49.00$. Nesse intervalo encontramos estruturas classificadas como: (1, 6), (1, 7), (2, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (5, 8) e (1, 5, 8). Entre $m_0 = 49.00$ e $m_0 < 71.00$,

são observados apenas três configurações de menor energia, (5, 9), (5, 10) e (1, 5, 9). Assim como no caso $r_0 = 0.0$, as configurações encontradas permanecem sem alteração estrutural, a única diferença é a distância entre os vórtices, que se torna maior a medida que z_0 aumenta. Com esses parâmetros analisados, o único estado não obtido anteriormente é o (3, 8), contendo três vórtices na camada interna, formando um triângulo, cercado por outros oito vórtices, conforme mostra a Fig.(3.12).

Magnitude	Configuração
$4.75 \leq m_0 < 10.25$	(0) e (1)
$10.25 \leq m_0 < 11.75$	(1)
$11.75 \leq m_0 < 14.75$	(2)
$14.75 \leq m_0 < 18.25$	(3)
$18.25 \leq m_0 < 21.00$	(4)
$21.00 \leq m_0 < 32.00$	(5), (1, 5), (1, 6) e (2, 6)
$32.00 \leq m_0 < 49.00$	(1, 6), (1, 7), (2, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (5, 8) e (1, 5, 8)
$49.00 \leq m_0 \leq 71.00$	(5, 9), (5, 10) e (1, 5, 9)

Tabela 3.9: Classificações dos estados de menor energia obtidos para os parâmetros $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.5$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.7$

Para finalizar a análise para o primeiro caso do dipolo não centrado, $r_0 = 0.1$, analisamos o efeito do potencial de confinamento quando posicionado a uma distância de 0.7 da superfície do disco supercondutor. Diferentemente do encontrado em $r_0 = 0$, encontramos diversos estados com energia mais baixa entre $m_0 = 9.50$ e $m_0 = 17.25$, podendo ocorrer estados do tipo: (0), (1) e (2). O estado Meissner é superado em $m_0 = 9.5$, quando surge o primeiro vórtice. No intervalo $17.25 \leq m_0 < 20.75$, as configurações observadas apresentam um ou dois vórtices, como estados de menor energia. Quando atingimos a magnitude de $m_0 = 20.75$, até $m_0 = 25.25$, apenas configurações

com dois vórtices apresentam a energia mais baixa, entre as possibilidades testadas. As configurações são semelhantes às que já foram obtidas e discutidas anteriormente. Com o intuito de não deixar a leitura cansativa, na Tabela(3.10) expomos os estados obtidos em seus respectivos intervalos de magnitude de momento de dipolo.

Magnitude	Configuração
$9.50 \leq m_0 < 17.25$	(0), (1) e (2)
$17.25 \leq m_0 < 20.75$	(1) e (2)
$20.75 \leq m_0 < 25.25$	(2)
$25.25 \leq m_0 < 30.00$	(3)
$30.00 \leq m_0 < 34.75$	(4)
$34.75 \leq m_0 < 38.75$	(5)
$38.75 \leq m_0 < 43.00$	(5) e (1, 5)
$43.00 \leq m_0 < 52.25$	(1, 5), (1, 6), (3, 6) (3, 7), (2, 6) e (1, 7)
$52.25 \leq m_0 < 61.25$	(1, 6), (3, 8), (2, 6) (4, 8), (1, 7), (2, 7) (4, 7), (5, 8) e (3, 7)
$61.25 \leq m_0 < 65.00$	(4, 9), (2, 7), (5, 8) (3, 8), (4, 7) e (4, 8)
$65.00 \leq m_0 < 68.50$	(4, 8) e (4, 9)
$68.50 \leq m_0 < 77.50$	(4, 9), (5, 9), (5, 8) e (1, 5, 9)
$77.50 \leq m_0 \leq 100.00$	(1, 5, 9) e (5, 10)

Tabela 3.10: Classificações dos estados de menor energia obtidos para os parâmetros $r_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.7$.

3.3.3 Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.3$

Iniciamos a discussão quando o dipolo magnético encontra-se em $r_0 = 0.3$. Assim como nos casos anteriores, procuramos os estados de energia mais baixa para os valores $z_0 = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.6$ e 0.7 . Para evitar repetições, faremos destaques apenas nos estados recém-adquiridos e quando considerarmos pertinente.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.05$

Considerando os parâmetros $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.05$, encontramos o valor crítico da magnitude do dipolo, M_c , para o qual a configuração (1) aparece, em $m_0 = 0.5$. Como o dipolo se localiza próximo ao disco, configurações com antivórtices são mais comuns, comparadas com estados contendo apenas vórtices. Até $m_0 = 1.7$ são alcançadas apenas estados com vórtices, como mostra a Tabela(3.11). Em $m_0 = 1.8$ encontramos nosso primeiro estado contendo antivórtices em sua estrutura, estado classificado como (3 : 1). No período de $1.8 \leq m_0 \leq 10.0$, obtemos estados apenas com vórtices e com vórtices e antivórtices. No atual regime de estudo, $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.05$, não foram obtidos estados com duas camadas apresentando apenas vórtices. Nas configurações que apresentam apenas vórtices, os estados de energia mais baixa são: (5), (1, 6), (1, 5) e (1, 7). Estados com duas camadas são alcançados apenas com a presença de antivórtices, também no intervalo $1.8 \leq m_0 \leq 10.0$.

Magnitude	Configuração
$0.5 \leq m_0 \leq 0.9$	(1)
$1.0 \leq m_0 \leq 1.4$	(2)
$1.5 \leq m_0 \leq 1.7$	(3)
$1.8 \leq m_0 \leq 10.0$	(5), (1, 6), (1, 5) e (1, 7) (3 : 1), (4 : 1), (4 : 2), (5 : 1), (6 : 1), (6 : 3), (1, 4 : 1), (1, 5 : 1), (1, 5 : 2), (1, 6 : 1), (1, 6 : 2), (1, 6 : 3), (1, 7 : 2), (1, 7 : 3), (1, 8 : 2), (2, 6 : 2) e (3, 7 : 3)

Tabela 3.11: Classificações dos estados de menor energia obtidos para os parâmetros $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.05$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.1$

Distanciando o dipolo do disco supercondutor e fixando sua altura em $z_0 = 0.1$, estados que apresentam antivórtices ainda continuam presentes. No entanto, confi-

Magnitude	Configuração
$1.0 \leq m_0 \leq 1.7$	(1)
$1.8 \leq m_0 \leq 2.5$	(2)
$2.6 \leq m_0 \leq 3.1$	(3)
$3.2 \leq m_0 \leq 3.8$	(3) e (4)
$3.9 \leq m_0 \leq 4.7$	(4)
$4.8 \leq m_0 \leq 8.5$	(5), (6), (1, 5), (1, 6), (5 : 1), (1, 4 : 1), (1, 5 : 1), (1, 6 : 1), (1, 6 : 2), (1, 7 : 2) e (2, 6 : 2)
$8.6 \leq m_0 \leq 10.0$	(1, 5), (6), (1, 6) e (1, 7 : 1)

Tabela 3.12: Classificações dos estados de energia mais baixa para os parâmetros $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.1$.

gurações apenas com vórtices passam a ser obtidas com maior frequência. Na Tabela(3.12) são mostrados os estados encontrados em seus respectivos intervalos do parâmetro m_0 . O estado (0) torna-se ausente em $m_0 = 1.0$, quando o estado com um único vórtice apresenta a menor energia. O primeiro estado com antivórtice é atingido em $m_0 = 4.8$. No intervalo, $4.8 \leq m_0 \leq 8.5$, estados com vórtices são alcançados de forma isolada, formando estruturas do tipo (5), (1, 5), (1, 4), (1, 6) e (1, 7). Quando atingimos $m_0 = 8.6$, até $m_0 = 10.0$, apenas um estado com antivórtice é obtido: (1, 7 : 1). Nesse intervalo, os estados de menor energia variam entre: (6), (1, 6) e (1, 5). Os estados contendo dois antivórtices, e.g., (1, 6 : 2), (1, 7 : 2) e (2, 6 : 2), apresentam estruturas análogas à mostrada na Fig.(3.9), onde os dois antivórtices não estão alinhados com os vórtices internos.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.3$

Elevando a posição do dipolo para $z_0 = 0.3$, variamos a magnitude do dipolo, em intervalos de 0.25, até $m_0 = 53.50$. Não podemos afimar quais são os estados de menor energia acima do valor máximo, $m_0^{max} = 53.50$, uma vez que limitamos o

número de tentativas em 20 e a quantidade máxima de vórtices em 15. A magnitude crítica, M_c , é alcançada em $m_0 = 3.75$, mantendo seu estado com um único vórtice até $m_0 < 6.00$. Configurações contendo apenas uma camada ocorrem até 14.25. No intervalo $11.25 \leq m_0 < 14.25$, encontram-se configurações com duas camadas como estado de menor energia, (5), (1, 4) e (1, 5). À medida que o campo aumenta, observa-se um novo efeito nas estruturas. A partir desse conjunto de parâmetros, $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.3$, os vórtices são atraídos mais fortemente pela borda do disco supercondutor, fazendo com que a estrutura não seja regular. Para melhor exemplificar esse efeito, mostramos na Fig.(3.13) algumas configurações onde esse efeito se manifesta.

Na Fig.(3.13)(a) temos um vórtice no centro e quatro outros na segunda camada, (1, 4), em $m_0 = 11.50$. Diferente dos estados anteriores, a camada externa não forma uma estrutura quadrangular. A Fig.(3.13)(b) mostra a configuração (1, 5) em $m_0 = 13.25$, apresentando cinco vórtices na camada externa, formando um pentágono não regular, e um vórtice interno. Em $m_0 = 19.25$ encontramos o estado (3, 7), Fig.(3.13)(c), contendo três e sete vórtices na primeira e na segunda camada, respectivamente. Na Fig.(3.13)(d) apresentamos o estado (1, 6, 8), em $m_0 = 30.25$ que apresenta três camadas. Note que a quantidade de vórtices favorece uma estrutura simétrica e regular, mas como mencionado anteriormente, a interação com a borda do supercondutor faz com que ocorra uma distorção em sua configuração, como pode ser constatada. Com o aumento da magnitude do dipolo, as camadas internas podem não apresentar deformações constatáveis visualmente, mas as camadas externas devem mostrar tais efeitos, principalmente se a quantidade máxima de vórtices for acrescida. Lembramos que estudamos sistemas com, no máximo, 15 vórtices e antivórtices e para as magnitudes do dipolo acima de $m_0 = 53.50$, não podemos afirmar

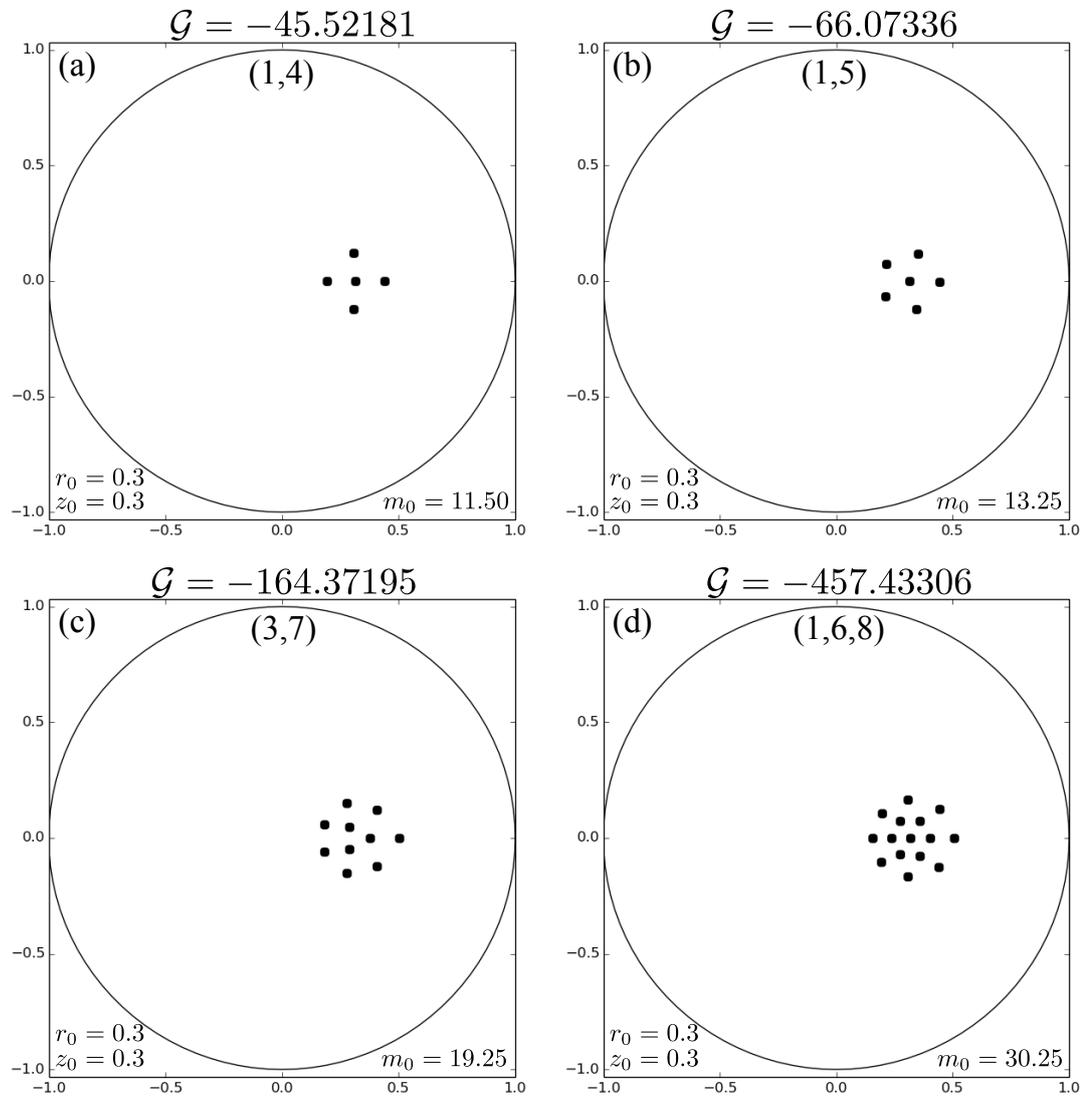


Figura 3.13: Algumas das configurações para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.3$. As configurações mostram os estados: (a) (1,4) em $m_0 = 11.50$, (b) (1,5) em $m_0 = 13.25$, (c) (3,7) em $m_0 = 19.25$ e (d) (1,5,8) em $m_0 = 30.25$.

quais são os estados de menor energia, devido ao baixo número de tentativas e pela baixa quantidade de vórtices iniciais.

Magnitude	Configuração
$3.75 \leq m_0 < 6.00$	(1)
$6.00 \leq m_0 < 7.50$	(2)
$9.25 \leq m_0 < 9.25$	(3)
$9.25 \leq m_0 < 11.25$	(4)
$11.25 \leq m_0 < 15.75$	(5), (1, 4), (1, 5) e (1, 6)
$15.75 \leq m_0 < 17.00$	(2, 6)
$17.00 \leq m_0 < 19.00$	(3, 6) e (2, 7)
$19.00 \leq m_0 < 20.50$	(3, 7)
$20.50 \leq m_0 < 22.25$	(4, 7)
$22.50 \leq m_0 < 24.00$	(4, 8)
$24.00 \leq m_0 < 25.50$	(4, 8)
$25.50 \leq m_0 < 29.75$	(5, 9) e (1, 5, 8)
$29.75 \leq m_0 \leq 53.50$	(5, 9), (1, 6, 8), (1, 5, 9) e (5, 10)

Tabela 3.13: Classificações dos estados de menor energia encontrados para os parâmetros $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.3$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.5$

Posicionando o dipolo magnético em $z_0 = 0.5$, obtemos o estado (1) em $m_0 = 4.75$. No entanto o estado (0) é obtido em alguns momentos, isso se deve ao baixo número de tentativas. A partir de $m_0 = 8.25$ o estado (1) é obtido consistentemente. Pelo fato de aumentarmos a altura do dipolo, o que provoca uma distância maior entre os vórtices, novas configurações podem ser rearranjadas. No intervalo $8.25 \leq m_0 < 21.75$ obtemos configurações apenas com uma camada. Os estados observados já foram descritos na secção anterior, $z_0 = 0.3$, onde os vórtices mais próximos da borda distorcem a estrutura deixando-a não regular.

A partir de $m_0 = 21.75$ começamos a ter estados com duas camadas. Em $m_0 = 27.50$ encontramos uma reestruturação dos vórtices no supercondutor. Quando classi-

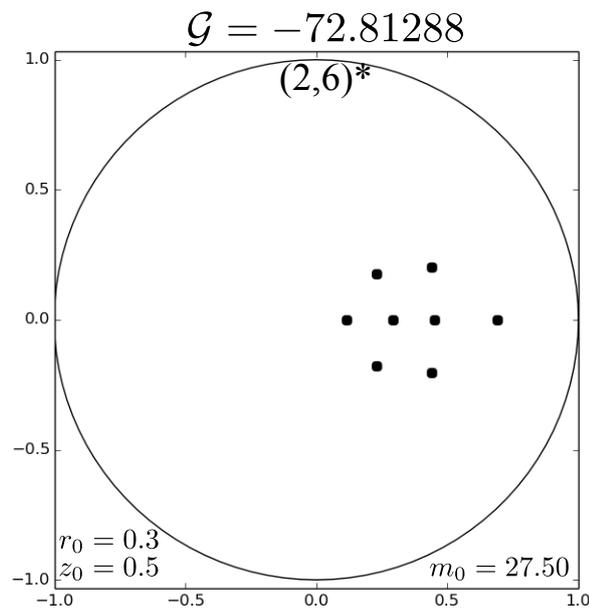


Figura 3.14: Configuração de menor energia para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$, $z_0 = 0.5$ e $m_0 = 27.50$. O estado $(2,6)^*$ apresenta dois vórtices na camada interna, mas os seis outros vórtices que compõem a camada externa formam um hexágono não regular.

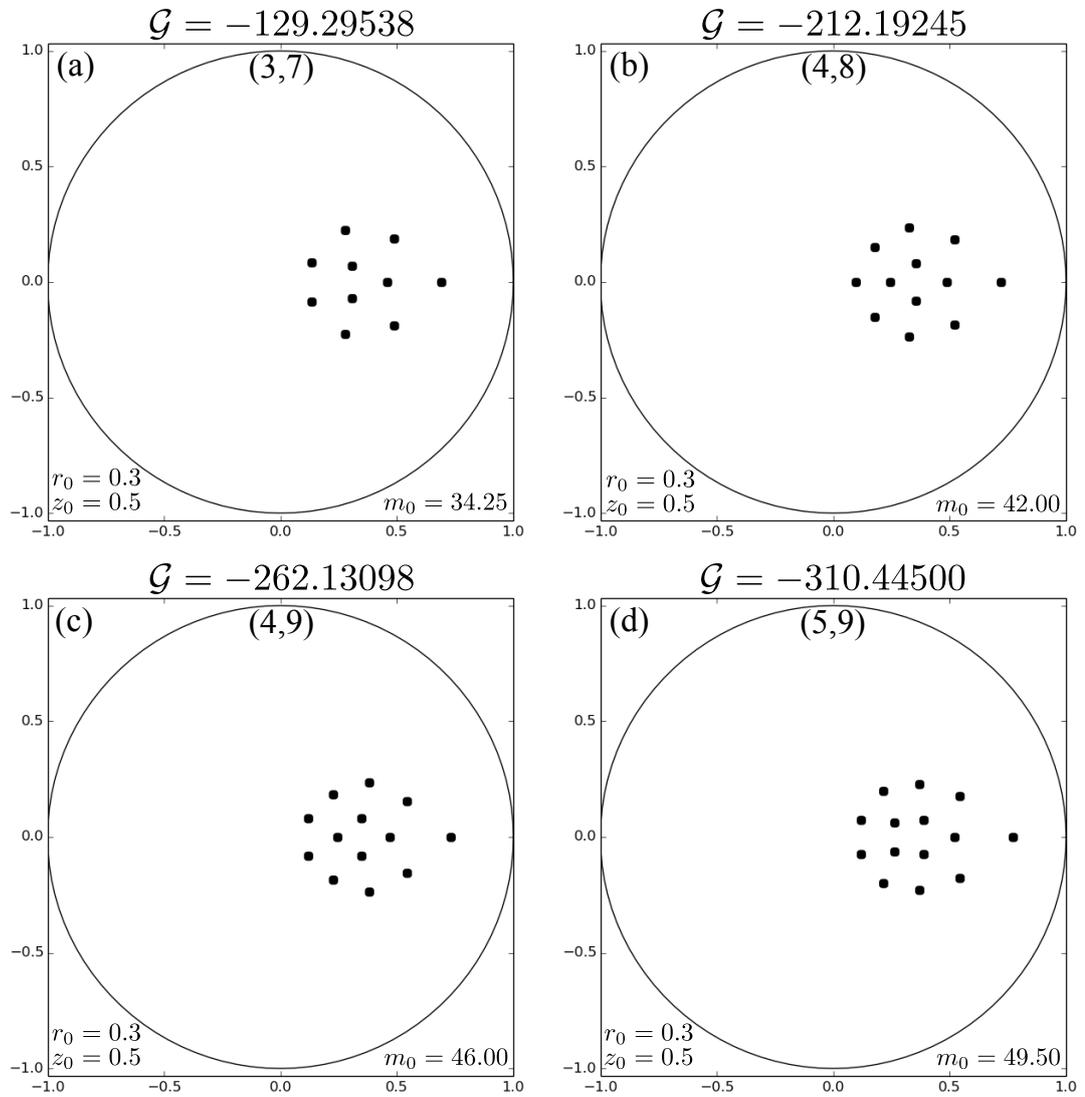


Figura 3.15: Algumas das configurações para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.5$. As configurações mostram os estados: (a) (3, 7) em $m_0 = 34.25$, (b) (4, 8) em $m_0 = 42.00$, (c) (4, 9) em $m_0 = 46.00$ e (d) (5, 9) em $m_0 = 49.50$.

ficamos o estado como $(2, 6)$, como mostra a Fig.(3.4)(b), discutimos que dois vórtices compõem a camada interna e outros seis formam a camada externa, distribuindo-se ao longo de duas linhas curvas. Agora, o dipolo encontra-se localizado em uma posição na qual o estado $(2, 6)$, observado anteriormente, se reorganiza em um estado $(2, 6)^*$. Esse novo estado possui os mesmos dois vórtices na camada interna, no entanto os seis vórtices que constituem a camada externa formam um hexágono não regular, mostrado na Fig.(3.14), uma vez que sofrem a influência maior da borda. No mesmo conjunto da Fig.(3.15)(a-d), mostramos outros exemplos de organização de vórtices. A terceira camada de vórtices surge apenas em $m_0 = 52.25$, com o estado $(1, 5, 9)$. Nesse momento, o efeito do potencial de confinamento do dipolo já supera o efeito causado pela borda, e os estados observados não apresentam mais a deformação apresentada previamente.

Magnitude	Configuração
$4.75 \leq m_0 < 8.25$	(0) e (1)
$8.25 \leq m_0 < 21.75$	(1), (2), (3), (4) e (5)
$21.75 \leq m_0 < 28.00$	(1, 5), (1, 6) e (2, 6)*
$28.00 \leq m_0 < 30.50$	(2, 6)*
$30.50 \leq m_0 < 34.25$	(2, 7)
$34.25 \leq m_0 < 38.25$	(3, 7)
$38.25 \leq m_0 < 42.00$	(3, 8)
$42.00 \leq m_0 < 46.00$	(4, 8)
$46.00 \leq m_0 < 49.50$	(4, 9)
$49.50 \leq m_0 < 52.25$	(5, 9)
$52.25 \leq m_0 < 66.50$	(5, 9) e (1, 5, 9)
$66.50 \leq m_0 \leq 77.25$	(1, 5, 9) e (5, 10)

Tabela 3.14: Classificações dos estados de menor energia encontrados para os parâmetros $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.5$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.7$

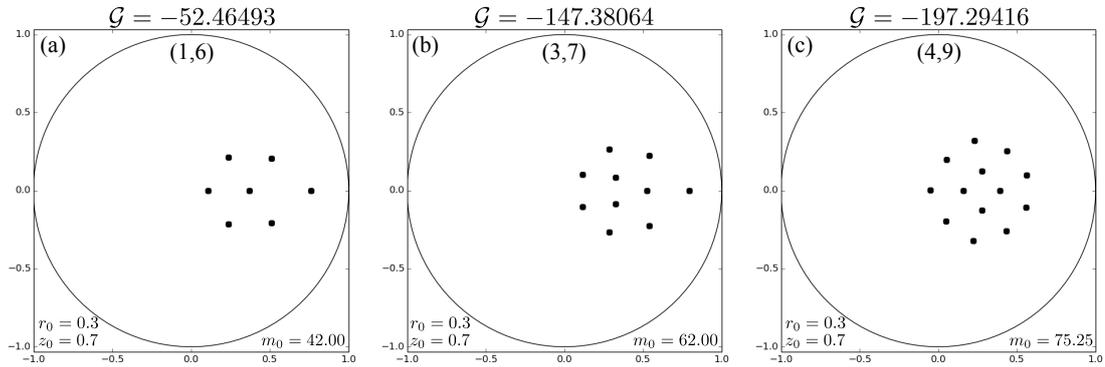


Figura 3.16: Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.3$, $z_0 = 0.7$ e (a) $m_0 = 42.00$, (b) $m_0 = 62.00$ e (c) $m_0 = 75.25$.

Elevando o dipolo até a máxima posição analisada, $z_0 = 0.7$, o efeito Meissner é cessado em $m_0 = 9.75$. Antes disso obtemos os estados (0) e (1) devido ao pequeno número de tentativas realizado. Devido ao posicionamento do dipolo, observamos o estado (1, 4), mas não com a configuração apresentada para valores baixos de z_0 . O fato do dipolo localizar-se muito elevado, faz com que o efeito de borda seja mais evidenciado, o que faz com que seja necessário aumentar a magnitude do dipolo para diminuir os efeitos da borda. Na Fig.(3.16) mostramos alguns dos estados de energia mais baixa presentes na Tabela(3.15), tais como: (1, 6), (3, 7) e (4, 9). Apesar de não apresentarem simetria de rotação, os estados, mostrados na Fig.(3.16), evidenciam uma simetria de reflexão, comum nos estados em que $r_0 \neq 0$. O estado (2, 6)*, discutido na secção anterior, é reencontrado. Mesmo com intensidade da magnitude do dipolo muito elevada, encontramos mais de um estado com energia baixa, que são os estados (1, 5, 9) e (5, 10).

Magnitude	Configuração
$9.75 \leq m_0 < 14.50$	(0) e (1)
$8.25 \leq m_0 < 16.00$	(1)
$16.00 \leq m_0 < 22.25$	(1) e (2)
$22.25 \leq m_0 < 24.75$	(2)
$24.75 \leq m_0 < 29.25$	(3) e (4)
$29.25 \leq m_0 < 33.50$	(4)
$33.50 \leq m_0 < 36.00$	(5)
$36.00 \leq m_0 < 37.00$	(1, 4) e (5)
$37.00 \leq m_0 < 42.00$	(1, 5)
$42.00 \leq m_0 < 49.50$	(1, 6)
$49.50 \leq m_0 < 53.75$	(2, 6)* e (1, 7)
$53.75 \leq m_0 < 55.25$	(1, 7)
$55.25 \leq m_0 < 62.00$	(2, 7)
$62.00 \leq m_0 < 68.00$	(3, 7), (3, 8), (4, 7) e (4, 8)
$68.00 \leq m_0 < 79.00$	(3, 9), (4, 9), (4, 8), (5, 8) e (5, 9)
$79.00 \leq m_0 \leq 100.00$	(1, 5, 9) e (5, 10)

Tabela 3.15: Classificações dos estados de menor energia obtidos para os parâmetros $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.7$.

3.3.4 Dipolo Magnético localizado em $r_0 = 0.5$

Chegamos no último caso analisado para a distância radial do dipolo. Assim como nos demais casos, avaliamos o efeito de ancoragem para os valores $z_0 = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.6$ e 0.7 , sempre em busca dos estados de menor energia.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.05$

Para o último valor de r_0 analisado, inciamos nossa avaliação posicionando o dipolo em $z_0 = 0.05$, posição mais próxima do disco supercondutor. Assim como nos casos anteriores, em que $z_0 = 0.05$, configurações com antivórtices são alcançadas em alguns valores da magnitude m_0 . No entanto, os estados com antivórtices não estão mais tão presentes. Isso ocorre pela proximidade com a borda do disco que não beneficia estados com vórtices e antivórtices. O estado (0) ocorre até $m_0 = 0.5$.

Apesar dos vórtices estarem próximos da borda do disco, o efeito de ancoragem do dipolo não permite a deformação gerada pela interação com a borda. Isso porque o dipolo localiza-se muito próximo a superfície do disco.

Configurações contendo antivórtices são alcançadas em $m_0 = 1.7$, com o estado (3 : 1). Até $m_0 = 4.6$, estados com antivórtices são atingidos com uma frequência elevada. Posteriormente, esses estados ficam esporádicos e sua última manifestação ocorre em $m_0 = 8.5$, com o estado (1, 5 : 1). Até $m_0 = 5.1$, configurações apenas com vórtices são alcançadas contendo uma única camada. Esses estados são: (1), (2), (3), (4) e (5).

Acima de $m_0 = 5.2$, novos estados envolvendo vórtices passam a ser visitados, e.g., os estados (4), (1, 4), (5), (1, 5) e (6). Devido à proximidade com a borda do supercondutor, o número de possíveis estados formados apenas por vórtices ou por vórtices e antivórtices, sofrem uma redução significativa, se comparada com os parâmetros anteriores que envolvem diferentes valores de r_0 e mesmo valor de z_0 . Na Tabela(3.16), mostramos os estados alcançados e seus respectivos intervalos de magnitude m_0 .

Magnitude	Configuração
$0.5 \leq m_0 \leq 0.8$	(1)
$0.9 \leq m_0 \leq 1.6$	(2)
$1.9 \leq m_0 \leq 5.1$	(2), (3), (4), (5) (3 : 1), (4 : 1), (5 : 1), (5 : 2), (6 : 1) e (1, 4 : 1)
$5.2 \leq m_0 \leq 10.0$	(4), (1, 4), (5), (1, 5), (6) (6 : 1), (1, 5 : 1) e (1, 6 : 1)

Tabela 3.16: Classificações dos estados de menor energia encontrados para os parâmetros $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.05$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.1$

Posicionando o dipolo em $z_0 = 0.1$, mantemos o limite da magnitude do dipolo em $m_0 = 10.0$. Nesse momento, obtemos apenas um estado contendo antivórtice. O efeito Meissner é superado em $m_0 = 1.1$. No intervalo $3.3 \leq m_0 \leq 3.8$, os estados passam por uma transição entre os estados (3) e (4), até se estabilizarem em $m_0 = 3.9$ com o estado (4). Na Tabela(3.17) apresentamos todos os estados com menor energia alcançados, entre as possibilidades testadas. O único estado observado com antivórtice ocorre em $m_0 = 4.9$, com o estado (5 : 1).

No mesmo intervalo, $4.7 \leq m_0 \leq 6.8$, temos apenas configurações com vórtices que exibem uma camada: (4), (1, 4) e (5). Acima de $m_0 = 6.9$, encontramos configurações variando entre os estados: (5), (1, 5) e (1, 6). Pela proximidade do dipolo com o disco supercondutor, deformidades nas estruturas não são encontradas.

Magnitude	Configuração
$1.1 \leq m_0 \leq 1.7$	(1)
$1.7 \leq m_0 \leq 2.3$	(2)
$2.4 \leq m_0 \leq 3.2$	(3)
$3.3 \leq m_0 \leq 3.8$	(3) e (4)
$3.9 \leq m_0 \leq 4.6$	(4)
$4.7 \leq m_0 \leq 6.8$	(4), (1, 4), (5) e (5 : 1)
$6.9 \leq m_0 \leq 10.0$	(5), (1, 5) e (1, 6)

Tabela 3.17: Configurações e classificações dos estados de energia mais baixa para os parâmetros $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.1$.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.3$

Estabelecendo a altura do dipolo em $z_0 = 0.3$, variamos a magnitude do dipolo de $m_0 = 0.00$ até $m_0 = 63.50$ em passos de 0.25, a fim de fazer uma análise para magnitudes mais elevadas. Observamos apenas o estado (0) até $m_0 = 3.00$. Entre $m_0 = 3.00$ e $m_0 = 4.00$ obtivemos os estados (0) e (1), enquanto que apenas o estado

(1) é observado acima de $m_0 = 4.00$. Para esse conjunto de parâmetros, $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.3$, não foi possível alcançar estados contendo antivórtices.

Na posição em que o dipolo se encontra, o efeito da borda do supercondutor já interfere de forma mais intensa na distribuição dos vórtices na amostra. Estruturas com uma única camada de vórtices se mantêm como estado de energia mais baixa até $m_0 = 11.50$, quando surge o estado (1, 4). A partir de $m_0 = 11.50$ os estados observados evoluem, geralmente, posicionando um vórtice a mais na camada externa até que seja favorável a inserção de mais um vórtice na camada interna. Para destacar o efeito de distorção provocada pela borda, exemplificamos a seguir alguns dos estados em que a distorção ocorre de forma mais ativa na Fig.(3.17).

Na Fig.(3.17)(a), apresentamos o estado (3, 7) sujeito a um momento de magnitude $m_0 = 21.00$, onde três vórtices compõem a camada interna e outros sete a camada externa. Na Fig.(3.17)(b) temos o estado (5, 9), onde um dos vórtices da segunda camada está totalmente deslocado da estrutura principal. No intervalo $45.25 \leq m_0 \leq 63.50$, um novo estado é alcançado em $m_0 = 45.25$. Configurações por duas camadas, apresentamos o estado (4, 10) que contém quatro vórtices na camada interna e outros dez na camada externa, como mostrado na Fig.(3.17)(c). Para valores elevados da magnitude do potencial de confinamento m_0 , é possível que a ausência de deformações nos estados seja observada pelo baixo número de vórtices no sistema e pelo baixo número de tentativas, o que pode ter ocasionado o não acesso de alguns estados.

- **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.5$

Na posição $z_0 = 0.5$, pelo baixo número de tentativas, os estados (0) e (1) são obtidos como de mais baixa energia até $m_0 = 8.25$. Estabelecemos então a magnitude crítica $M_c = 8.25$. Por nos distanciarmos mais da superfície do disco supercondutor,

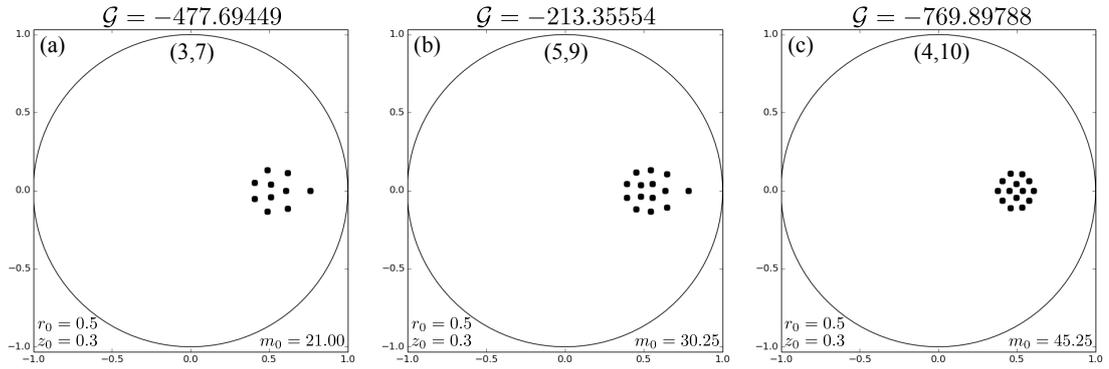


Figura 3.17: Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.5$, $z_0 = 0.3$ e (a) $m_0 = 21.00$, (b) $m_0 = 30.25$ e (c) $m_0 = 45.25$.

Magnitude	Configuração
$3.00 \leq m_0 < 4.00$	(0) e (1)
$4.00 \leq m_0 < 5.50$	(1)
$5.50 \leq m_0 < 7.25$	(2)
$7.25 \leq m_0 < 8.75$	(3)
$8.75 \leq m_0 < 10.25$	(4)
$10.25 \leq m_0 < 11.50$	(5)
$11.50 \leq m_0 < 11.75$	(1, 4)
$11.75 \leq m_0 < 14.00$	(1, 5)
$14.00 \leq m_0 < 16.50$	(1, 6)
$16.50 \leq m_0 < 18.50$	(2, 6)
$18.50 \leq m_0 < 20.75$	(2, 7)
$20.75 \leq m_0 < 23.25$	(3, 7)
$23.25 \leq m_0 < 25.50$	(3, 8)
$25.50 \leq m_0 < 28.00$	(4, 8)
$28.00 \leq m_0 < 30.25$	(4, 8), (4, 9) e (5, 9)
$30.25 \leq m_0 < 32.75$	(5, 9)
$32.75 \leq m_0 < 38.25$	(5, 9) e (1, 5, 9)
$38.25 \leq m_0 < 45.25$	(5, 9), (5, 10) e (1, 5, 9)
$45.25 \leq m_0 \leq 63.50$	(4, 10), (5, 9), (5, 10) e (1, 5, 9)

Tabela 3.18: Classificações dos estados de mais baixa energia encontrados para os parâmetros $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.3$.

os efeitos da borda nos estados de menor energia tornam-se mais nítidos.

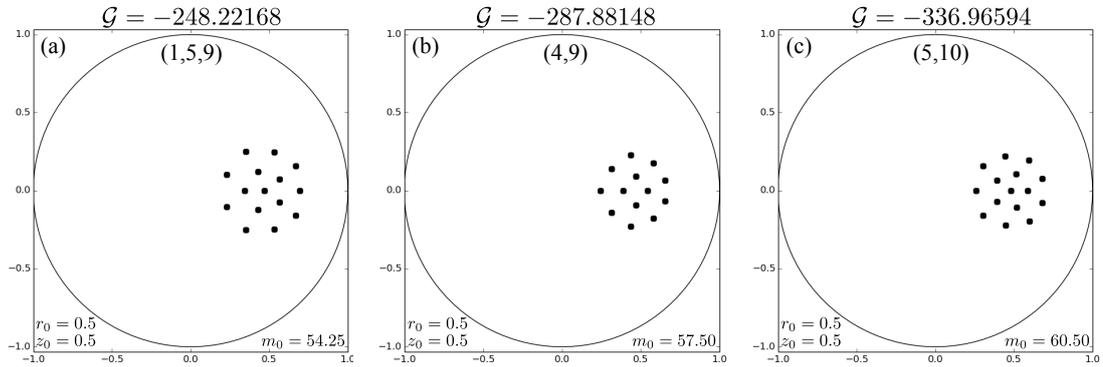


Figura 3.18: Estados de menor energia, contendo apenas vórtices, para o conjunto de parâmetros: $r_0 = 0.5$, $z_0 = 0.5$ e (a) $m_0 = 54.25$, (b) $m_0 = 57.50$ e (c) $m_0 = 65.50$.

Estados contendo apenas uma camada de vórtices prevalecem até $m_0 = 28.25$, quando o estado $(1, 5)$ torna-se mais favorável. Sequencialmente seguem os estados $(1, 6)$ e $(1, 7)$. Em $m_0 = 44.50$, o estado de menor energia passa do estado $(1, 7)$ para o estado $(2, 9)$, acrescentando dois vórtices à estrutura: um na camada interna e outro na camada externa. Configurações contendo um vórtice central e duas camadas externas com vórtices são obtidas como de menor energia em $m_0 = 54.25$, com o estado $(1, 5, 9)$.

No intervalo $53.75 \leq m_0 < 60.50$, os estados passam por uma deformidade oposta da debatida anteriormente. Agora os estados apresentam um alongamento na estrutura voltada para o centro do disco, não mais para a sua extremidade. O efeito provocado pela borda do disco aproxima mais vórtices para a extremidade do disco, como mostrado nas Figs.(3.18)(a) e (b). Acima de $m_0 = 60.50$, obtemos o estado $(5, 10)$, como mostra a Fig.(3.18)(c), além dos estados $(5, 9)$ e $(1, 5, 9)$. A magnitude máxima estudada para os atuais parâmetros, $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.5$, foi $m_0^{max} = 86.50$. Não podemos afirmar, para valores maiores que m_0^{max} , quais estados apresentam a menor energia, uma vez que limitamos o número de vórtices iniciais.

Magnitude	Configuração
$4.50 \leq m_0 < 8.00$	(0) e (1)
$8.00 \leq m_0 < 11.75$	(1)
$11.75 \leq m_0 < 14.25$	(2)
$14.25 \leq m_0 < 18.25$	(3)
$18.25 \leq m_0 < 23.75$	(4)
$23.75 \leq m_0 < 28.25$	(5)
$28.25 \leq m_0 < 34.00$	(1, 5)
$34.00 \leq m_0 < 40.00$	(1, 6)
$40.00 \leq m_0 < 44.50$	(1, 7)
$44.50 \leq m_0 < 50.50$	(2, 9)
$50.50 \leq m_0 < 53.75$	(2, 8)
$53.75 \leq m_0 < 60.50$	(4, 9), (5, 9) e (1, 5, 9)
$60.50 \leq m_0 \leq 86.50$	(5, 9), (5, 10) e (1, 5, 9)

Tabela 3.19: Classificações dos estados de menor energia para os parâmetros $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.5$.

• **Distância do Dipolo ao Disco:** $z_0 = 0.7$

Por fim, avaliamos o efeito de ancoragem provocado pelo dipolo quando posicionado em $z_0 = 0.7$. O estado Meissner é superado em $m_0 = 10.75$. O primeiro vórtice surge em $m_0 = 10.75$. Até um $m_0 = 56.50$ apenas estados contendo uma camada de vórtices são alcançados. Comparado com os conjuntos de parâmetros anteriores, estruturas com uma única camada são favorecidas mesmo com uma intensidade magnética alta. Apenas em $m_0 = 56.50$ estados com duas camadas de vórtices começam a ser de estados de menor energia. Até $m_0 = 77.75$ a quantidade máxima de vórtices alcançada, nas configurações com energia mais baixa, foram de 13 vórtices.

Quando posicionamos o dipolo em $z_0 = 0.7$ e $r_0 = 0.5$, obtemos uma grande variedade de estados possíveis, como mostrado no intervalo em $56.50 \leq m_0 < 77.75$ na Tabela(3.20). Os estados alcançados nesse intervalo variam constantemente, de modo que não podemos estipular um intervalo bem definido da magnitude para uma mesmo estado. Os possíveis estados obtidos estão listados na Tabela(3.20), que os

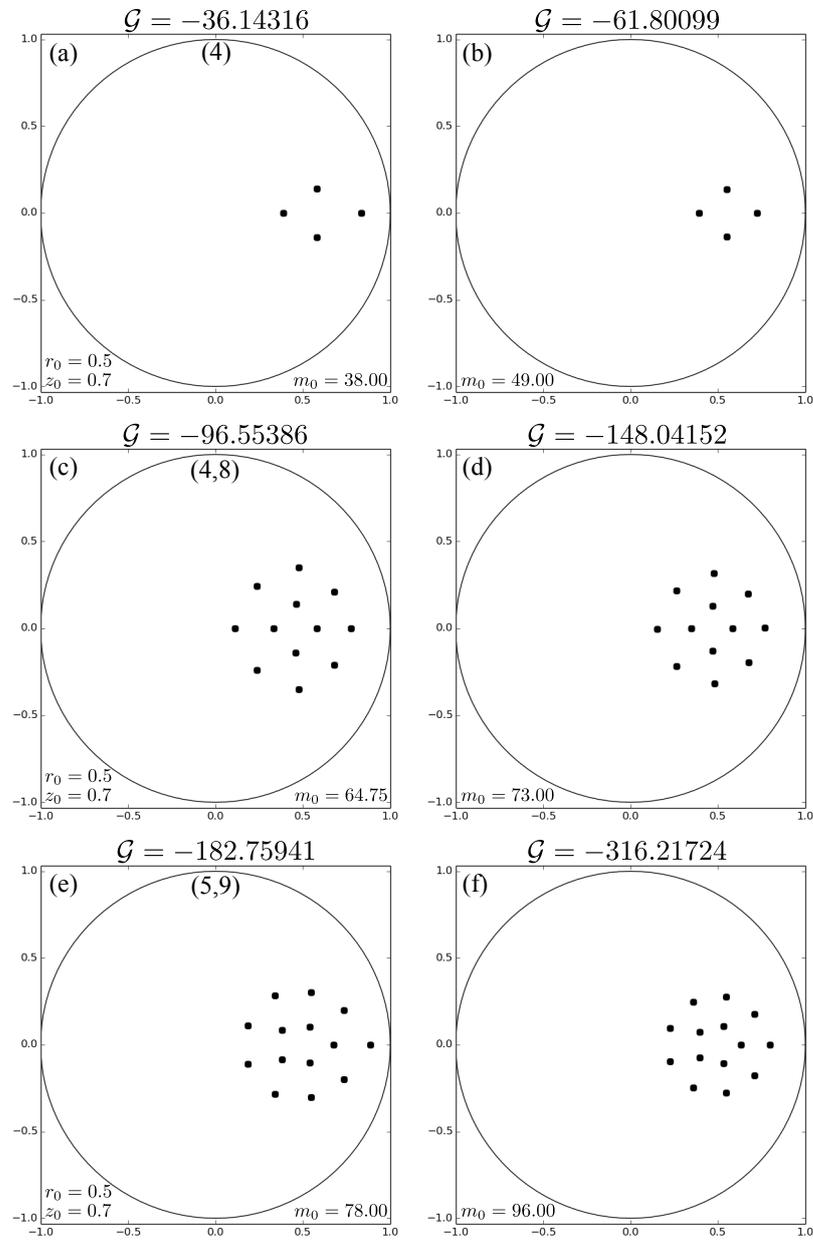


Figura 3.19: Algumas configurações de menor energia para os conjuntos de parâmetros: $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.7$. Destacamos o que ocorre com a estrutura a medida que a magnitude aumenta, causando a redução da influência da borda sob os vórtices para um mesmo estado. Mostramos os estados: (a) e (b), (4); (c) e (d), (4, 8), e (e) e (f), (5, 9), em sua primeira e última aparição.

Magnitude	Configuração
$9.50 \leq m_0 < 10.75$	(0) e (1)
$10.75 \leq m_0 < 20.25$	(1)
$20.25 \leq m_0 < 27.00$	(2)
$27.00 \leq m_0 < 38.00$	(3)
$38.00 \leq m_0 < 49.25$	(4)
$49.25 \leq m_0 < 56.50$	(5)
$56.50 \leq m_0 < 77.75$	(1, 5), (1, 6), (2, 6), (2, 7) (2, 8) (3, 7), (3, 8), (4, 8) e (4, 9)
$77.75 \leq m_0 \leq 100.00$	(5, 9), (1, 5, 8), (1, 5, 9) e (5, 10)

Tabela 3.20: Configurações e classificações dos estados de energia mais baixa para os parâmetros $r_0 = 0.5$ e $z_0 = 0.7$.

apresenta em seus respectivos intervalos de magnitude. Como estamos no último caso analisado, faremos um destaque para alguns dos estados obtidos, onde destacaremos a sua primeira e última aparição, a fim de mostrar a influência da intensidade do dipolo e do efeito da borda do supercondutor.

Na Fig.(3.19) destacamos três configurações de energia mais baixa em sua primeira e última aparição. Nas Figs.(3.19)(a) e (b), (c) e (d), e (e) e (f) exibimos a compactação dos vórtices nos estados (4), (4, 8) e (5, 9), respectivamente, devido a intensificação do momento magnético do dipolo m_0 . Os estados iniciais estão sofrendo uma grande influência da borda do disco, a qual é minimizada à medida em que a intensidade do dipolo é aumentada, acarretando em um potencial de confinamento mais efetivo.

Capítulo 4

Conclusões

Nessa dissertação estudamos vórtices em supercondutores mesoscópicos (i.e., supercondutores com dimensões da ordem do comprimento de coerência, ξ , e/ou comprimento de penetração, λ). Utilizamos o método variacional aplicado à teoria de Ginzburg-Landau (GL) e à teoria de London para estudar vórtices em discos supercondutores mesoscópicos. Consideramos, ainda, discos finos (onde $Rd \ll \lambda^2$), de modo que podemos desprezar os efeitos de desmagnetização.

Fizemos uso da teoria de Ginzburg-Landau para obtermos os estados de vórtices em discos supercondutores em campo magnético externo uniforme. Como consideramos discos supercondutores finos, $Rd \ll \lambda^2$, é preciso resolver apenas a primeira equação de GL. Ao invés de resolvermos a primeira equação, fizemos uso do método variacional para expandir o parâmetro de ordem, Ψ , como uma combinação linear das autofunções ortonormais do operador energia cinética $\hat{\mathcal{L}} = (\nabla' - i\mathbf{A})^2$. Para obtermos o mínimo da energia livre, é necessário minimizar o funcional de GL apenas em relação ao módulo dos coeficientes das autofunções na expansão do parâmetro de ordem, $|c_n|$. Além de encontrarmos os coeficientes que minimizam a energia livre, é preciso que esses coeficientes satisfaçam as condições de estabilidade.

As autofunções radiais que compõem o parâmetro de ordem, depende dos autovalores, λ_{ζ, L_n} , para um mesmo valor de vorticidade L . Em situações em que o parâmetro de ordem encontra-se longe da interface do disco supercondutor, é suficiente considerarmos uma expansão de Ψ em *lowest band*, fazendo com que a contribuição mais relevante seja a do primeiro autovalor, λ_{0, L_n} . Para os estados de vórtices gigantes, o nosso parâmetro de ordem é composto apenas por uma autofunção, enquanto que para estados de multivórtices, consideramos duas autofunções. Estados de vórtices aparecem em discos de raio R maior do que ξ . Para sistemas com dimensões da ordem de ξ , a formação de um vórtice gigante pode ser mais favorável que estados de multivórtices, onde o vórtice gigante passa a carregar mais de um *quantum* de fluxo. Com isso, iniciamos nossa investigação com $R = 1.00\xi$ aumentando o tamanho do disco para identificarmos a evolução do surgimento dos vórtices em seu interior. O primeiro estado de vórtice ocorre em $R = 1.50\xi$, enquanto que a partir de $R = 2.25\xi$ começamos a obter estados de vórtices gigantes com vorticidades: $L = 2$, $L = 3$ e $L = 4$. Até $R < 4.00\xi$, apenas estados de vórtices gigantes são obtidos. Por um breve intervalo de campo magnético H_{ext} , encontramos o primeiro estado de multivórtice para um disco de raio $R = 4.00\xi$, com o estado $(0, 4)$. Aumentando o raio do disco, novos estados de multivórtices surgem, e algumas vezes são mais favoráveis energeticamente do que os estados de vórtices gigantes, como são os casos quando $R = 4.8\xi$ e de $R = 8.0\xi$. Quando comparamos nossos resultados com a literatura, os resultados mostram-se aceitáveis para os valores da energia livre do sistema, parâmetro de ordem e distribuição dos vórtices no disco supercondutor. Ao nos limitarmos às duas autofunções, definimos que nossos estados de multivórtices terão apenas uma única camada de vórtice. Com isso, a parte interna desses estados será composta por: esta-

dos de vórtices gigantes, $L > 1$, estado de vortice simples, $L = 1$, ou nenhum vórtice, $L = 0$. Entretanto, se aumentássemos a quantidade de autofunções do parâmetro de ordem, poderíamos ter a formação de mais camadas de vórtices, elevando a quantidade de possíveis estados de multivórtices. Além de acrescentar mais autofunções no parâmetro de ordem, teríamos que considerar as contribuições dos demais autovalores do operador energia cinética $\hat{\mathcal{L}}$, o que forneceria um melhor valor para o cálculo da energia livre do sistema. Resultados da literatura [85] mostram que para certos valores de campo H_{ext} , os estados mais favoráveis apresentam mais de uma camada de vórtices.

No segundo estudo, investigamos configurações estáveis contendo vórtices e antivórtices, para um disco fino supercondutor de raio $R = 100\xi$. Avaliamos as configurações de menor energia para sistemas pequenos, com no máximo 15 vórtices e antivórtices. Resultados aceitáveis foram obtidos para a magnitude crítica M_c , magnitude na qual deixamos de obter o estado (0), onde M_c aumenta à medida que o dipolo se afasta da superfície do disco supercondutor. Para obtenção dos estados de menor energia iniciamos a nossa análise para o caso de maior simetria, i.e, a situação onde o dipolo encontra-se ao longo do eixo de simetria do disco, $r_0 = 0.0$, apresentando simetrias de rotação e reflexão. Em seguida passamos a deslocar o dipolo em relação ao eixo de simetria, assumindo os valores $r_0 = 0.1, 0.3$ e 0.5 e diversos valores de z_0 . As estruturas obtidas para $r_0 = 0.0$ são concêntricas ao eixo do dipolo, característica perdida quando $r_0 \neq 0.0$. A simetria de rotação, encontrada para vários parâmetros em estudo, pode ser quebrada quando o número de vórtices que compõe as camadas não são comensuráveis. Quando o dipolo se localiza em $r_0 \neq 0.0$, a estrutura formada perde a simetria de rotação, mas mantém a de reflexão em diversos

valores dos parâmetros de controle. Mesmo assim é possível que haja configurações sem simetria de reflexão. Nos estados contendo apenas vórtices, a simetria da amostra depende da quantidade de vórtices na camada interna, induzindo a simetria da camada externa. No entanto, quando encontramos antivórtices, a simetria do estado é regida pelo arranjo formado pelos antivórtices, induzindo a simetria da camada interna, composta apenas por vórtices. Para valores muito baixos do parâmetro de controle z_0 , encontramos, de forma recorrente, estados de menor energia contendo vórtices e antivórtices simultaneamente. Para estabelecermos um valor crítico de z_0 , acima do qual apenas configurações com vórtices são observadas, distanciamos o dipolo da superfície do disco supercondutor, mantendo $r_0 = 0.0$. Estados de menor energia contendo antivórtices não são mais observados quando $z_0 \geq 0.21$, mas ainda são alcançados entre as tentativas realizadas. Apenas em $z_0 = 0.24$ estados com antivórtices não são mais observados. Quando os estados apresentam antivórtices em sua estrutura, as disposições dos vórtices e antivórtices no interior do disco são diversificadas, não seguindo uma continuidade ou padronização, levando a um alto número de estados possíveis para uma mesma quantidade de vórtices e antivórtices. A partir de $z_0 \geq 0.3$, aumentamos a magnitude máxima do dipolo magnético para proporcionar uma maior quantidade de vórtices presos ao sistema, permitindo alcançar estados com múltiplas camadas de vórtices. Apesar de aumentarmos o valor máximo da magnitude do dipolo, a partir de determinados valores de m_0 não podemos afirmar quais estados apresentam menor energia, isso porque limitamos o número de vórtices iniciais, impossibilitando o surgimento de novos estados. Ao submeter o sistema aos parâmetros de controle: $r_0 = 0.3$ e $z_0 = 0.3$, os vórtices são atraídos mais fortemente à borda do disco supercondutor, fazendo com que a estrutura não

seja regular. Em diversos estados a quantidade de vórtices favorece uma estrutura simétrica e regular, mas devido à interação com a borda do supercondutor, ocorrem distorções em sua configuração. Essas distorções nas estruturas ocorrem devido a competição entre o potencial de confinamento, gerado pelo dipolo magnético, e o efeito causado pela borda do disco supercondutor. Quanto mais distante da superfície e quanto mais próximo da borda do supercondutor, mais evidente torna-se o efeito. Com o aumento da magnitude do dipolo, as camadas internas podem não apresentar deformações constatáveis visualmente, mas as camadas externas podem mostrar tais efeitos, principalmente se a quantidade máxima de vórtices for acrescida. Ao distanciarmos o dipolo da superfície do disco supercondutor, a distância entre os vórtices aumenta, possibilitando que algumas configurações encontradas em casos anteriores sejam rearranjadas.

Referências

- [1] ONNES, H. K. The resistance of pure mercury at helium temperatures. *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden*, v. 12, p. 120+, 1911.
- [2] ONNES, H. K. *Akad. Van Wetenschappen (Amsterdam)*, v. 14, p. 818, 1911.
- [3] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer e fekt bei eintritt der supraleitfahigkeit. *Naturwinssenschaft*, v. 21, p. 787–788, 1933.
- [4] F. and H. London. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 149, p. 71–88, Mar 1935.
- [5] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. On the theory of superconductivity. *Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz.*, v. 20, p. 1064, 1950.
- [6] TINKHAM, M. *Introduction to Superconductivity: Second Edition*. [S.l.]: Dover Publications, 2004. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486435039.
- [7] ABRIKOSOV, A. A. Eon the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP*, v. 5, n. 6, p. 1174, 1957.
- [8] FEYNMAN, R. P. Superfluidity and superconductivity. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 29, p. 205–212, Apr 1957.

- [9] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 108, p. 1175–1204, Dec 1957.
- [10] Gor'kov, L.P. and Eliashberg, G.M. Generalization of the Ginzburg-Landau Equations for Non-stationary Problems in the Case of Alloys with Paramagnetic Impurities. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, v. 27, p. 328, Ago 1968. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1968JETP...27..328G>>.
- [11] Milorad Milošević. *Vortex Matter in Mesoscopic Superconductor / Ferromagnet Heterosystems*. Tese (Doutorado) — Universiteit Antwerpen, Faculteit Wetenschappen, 2004.
- [12] GAVALER, J. R. Superconductivity in Nb-Ge films above 22 K. *Appl. Phys. Lett.*, Applied Physics Letters, v. 23, p. 480, Out 1973.
- [13] WU, M. et al. Superconductivity at 93 k in a new mixed-phase y-ba-cu-o compound system at ambient pressure. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 58, p. 908–910, Mar 1987. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.908>>.
- [14] HIKAMI, S.; HIRAI, T.; KAGOSHIMA, S. High transition temperature superconductor: Y-ba-cu oxide. *Japanese Journal of Applied Physics*, v. 26, n. 4A, p. L314, 1987. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1347-4065/26/i=4A/a=L314>>.

- [15] J. G. Bednorz and K. A. Müller . Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. *Phys. Rev. B., Zeitschrift für Physik B-Condensed Mater*, v. 64, p. 189–193, Nov 1986.
- [16] WU, M. K. et al. Superconductivity at 93 k in a new mixed-phase y-ba-cu-o compound system at ambient pressure. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 58, p. 908–910, Mar 1987.
- [17] SCHILLING, A. et al. Superconductivity above 130 K in the Hg-Ba-Ca-Cu-O system. *Nature*, v. 363, p. 56–58, 1993. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/363056a0>>.
- [18] PUTILIN, S. et al. Effect of fluorination and high pressure on the structure and properties of the Hg-bearing superconducting Cu mixed oxides. *Physica C: Superconductivity*, v. 338, n. 1–2, p. 52–59, 2000. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092145340000201X>>.
- [19] KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [20] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *Statistical Physics*. Elsevier Science, 2013. ISBN 9780080570464. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VzgJN-XPTRsC>>.
- [21] GENNES, P. D. *Superconductivity Of Metals And Alloys*. Westview Press, 1999. (Advanced Books Classics Series). ISBN 9780813345840. Disponível em: <http://books.google.co.il/books?id=ZMf_ticFcWYC>.
- [22] KLEINER, W.; ROTH, L.; AUTLER, S. Bulk solution of ginzburg-landau equations for type ii superconductors: Upper critical field region. *Phys. Rev.*,

- American Physical Society, v. 133, p. A1226–A1227, Mar 1964. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.133.A1226>>.
- [23] HESS, H. et al. Scanning-tunneling-microscope observation of the abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 62, p. 214–216, Jan 1989. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.214>>.
- [24] DOLL, R.; NÄBAUER, M. Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 7, p. 51–52, Jul 1961. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.7.51>>.
- [25] DEEVER, B.; FAIRBANK, W. Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 7, p. 43–46, Jul 1961. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.7.43>>.
- [26] MOSHCHALKOV, V.; FRITZSCHE, J. *Nanostructured Superconductors*. [S.l.]: World Scientific, 2011. ISBN 9789814343916.
- [27] COOPER, L. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 104, p. 1189–1190, Nov 1956. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.104.1189>>.
- [28] Gor'kov, L.P. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, v. 36, p. 1364–1367, Dec 1959.

- [29] SILVA, C. C. d. S. *Propriedades de Equilíbrio e de Transporte da Matéria de Vórtices em Nanoestruturas Supercondutoras*. Tese (Doutorado) — Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 2003.
- [30] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Third. [S.l.]: Wiley, 1998. Hardcover. ISBN 047130932X.
- [31] BARDEEN, J.; STEPHEN, M. J. Theory of the motion of vortices in superconductors. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 140, p. A1197–A1207, Nov 1965. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.140.A1197>>.
- [32] van Dover, R. B., Gyorgy, E. M., Schneemeyer, L. F., Mitchell, J. W., Rao, K. V., Puzniak, R. and Waszczak, J. V. Critical currents near 106 A cm⁻² at 77 K in neutron-irradiated single-crystal YBa₂Cu₃O₇. *Nature*, v. 342, p. 55, 1989. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/342055a0>>.
- [33] CIVALE, L. et al. Vortex confinement by columnar defects in YBa₂Cu₃O₇ crystals: Enhanced pinning at high fields and temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 67, p. 648–651, Jul 1991. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.648>>.
- [34] BAERT, M. et al. Composite flux-line lattices stabilized in superconducting films by a regular array of artificial defects. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 74, p. 3269–3272, Apr 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.3269>>.

- [35] RAEDTS, S. et al. Flux-pinning properties of superconducting films with arrays of blind holes. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 70, p. 024509, Jul 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.70.024509>>.
- [36] HOFFMANN, A.; PRIETO, P.; SCHULLER, I. K. Periodic vortex pinning with magnetic and nonmagnetic dots: The influence of size. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 61, p. 6958–6965, Mar 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.61.6958>>.
- [37] Milošević, M. and Peeters, F. Vortex-antivortex lattices in superconducting films with magnetic pinning arrays. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 93, p. 267006, Dec 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.267006>>.
- [38] MARTÍN, J. et al. Flux pinning in a superconductor by an array of submicrometer magnetic dots. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 1929–1932, Sep 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.1929>>.
- [39] JACCARD, Y. et al. Magnetic pinning of the vortex lattice by arrays of submicrometric dots. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 58, p. 8232–8235, Oct 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.58.8232>>.
- [40] M.V. Milošević and F.M. Peeters. Commensurate vortex configurations in thin superconducting films nanostructured by square lattice of magnetic dots. *Physica C: Superconductivity*, v. 404, n. 1–4, p. 246–250, 2004. ISSN 0921-

4534. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453404000863>>.
- [41] REICHHARDT, C.; GRØNBECH-JENSEN, N. Collective multivortex states in periodic arrays of traps. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 85, p. 2372–2375, Sep 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.2372>>.
- [42] MORGAN, D.; KETTERSON, J. Asymmetric flux pinning in a regular array of magnetic dipoles. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 3614–3617, Apr 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.3614>>.
- [43] BAEL, M. J. V. et al. Local observation of field polarity dependent flux pinning by magnetic dipoles. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 86, p. 155–158, Jan 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.155>>.
- [44] XU, J. H.; MILLER, J. H.; TING, C. S. Magnetic levitation force and penetration depth in type-ii superconductors. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 51, p. 424–434, Jan 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.51.424>>.
- [45] WEI, J. C. et al. Magnetic force acting on a magnetic dipole over a superconducting thin film. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 54, p. 15429–15437, Dec 1996. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.54.15429>>.

- [46] BULAEVSKII, L. N.; CHUDNOVSKY, E. M.; MALEY, M. P. Magnetic pinning in superconductor-ferromagnet multilayers. *Applied Physics Letters*, v. 76, n. 18, p. 2594–2596, 2000. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/76/18/10.1063/1.126419>>.
- [47] MARMORKOS, I. K.; MATULIS, A.; PEETERS, F. M. Vortex structure around a magnetic dot in planar superconductors. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 53, p. 2677–2685, Feb 1996. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.53.2677>>.
- [48] M.V. Milošević, M. V. and Peeters, F. M. Superconducting wigner vortex molecule near a magnetic disk. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 68, p. 024509, Jul 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.68.024509>>.
- [49] Milošević, M. V. and Peeters, F. M. Vortex matter in the presence of magnetic pinning centra. *Journal of Low Temperature Physics*, v. 130, p. 311–320, Feb 2003. ISSN 0921–4534.
- [50] M.V. Milošević, M. V. and Peeters, F. M. Interaction between a superconducting vortex and an out-of-plane magnetized ferromagnetic disk: Influence of the magnet geometry. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 68, p. 094510, Sep 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.68.094510>>.
- [51] CABRAL, L. R.; AGUIAR, J. A. Vortex configurations on a thin superconducting spherical shell in the presence of a magnetic dipole. *Physica C: Superconductivity*, v. 470, n. 19, p. 796–798, 2010. ISSN 0921–4534. Vortex Matter in

- Nanostructured Superconductors. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453410001383>>.
- [52] BERDIYOROV, G. R. et al. Stability and transition between vortex configurations in square mesoscopic samples with antidots. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 68, p. 174521, Nov 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.68.174521>>.
- [53] Milošević, M. V. and Peeters, F. M. Vortex pinning in a superconducting film due to in-plane magnetized ferromagnets of different shapes: The London approximation. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 69, p. 104522, Mar 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.69.104522>>.
- [54] BERDIYOROV, G. et al. The superconducting state in square mesoscopic samples with two and four antidots. *Physica C: Superconductivity*, v. 404, n. 1–4, p. 56–60, 2004. ISSN 0921–4534. Proceedings of the Third European Conference on Vortex Matter in Superconductors at Extreme Scales and Conditions. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453404000425>>.
- [55] FETTER, A. L.; HOHENBERG, P. C. The mixed state of thin superconducting films in perpendicular fields. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 159, p. 330–343, Jul 1967. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.159.330>>.
- [56] PEARL, J. Current distribution in superconducting films carrying quantized fluxoids. *Applied Physics Letters*, v. 5, n. 4, p. 65–66, 1964. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/5/4/10.1063/1.1754056>>.

- [57] SCHWEIGERT, V.; PEETERS, F. Phase transitions in thin mesoscopic superconducting disks. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 57, p. 13817–13832, Jun 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.57.13817>>.
- [58] DEO, P. et al. Magnetization of mesoscopic superconducting disks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 4653–4656, Dec 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.4653>>.
- [59] SCHWEIGERT, V.; PEETERS, F.; DEO, P. Vortex phase diagram for mesoscopic superconducting disks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 81, p. 2783–2786, Sep 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2783>>.
- [60] DEO, P. S.; PEETERS, F.; SCHWEIGERT, V. Mesoscopic superconducting disks. *Superlattices and Microstructures*, v. 25, n. 5–6, p. 1195–1211, 1999. ISSN 0749-6036. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749603699907346>>.
- [61] PALACIOS, J. J. Vortex matter in superconducting mesoscopic disks: Structure, magnetization, and phase transitions. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 58, p. R5948–R5951, Sep 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.58.R5948>>.
- [62] Geim, A. K., Dubonos, S. V., Grigorieva, I. V., Novoselov, K. S., Peeters, F. M. and Schweigert, V. A. Non-quantized penetration of magnetic field in the vortex state of superconductors. *Nature*, v. 407, p. 55–57, 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/35024025>>.

- [63] Geim, A. K., Grigorieva, I. V., Dubonos, S. V., Lok, J. G. S., Maan, J. C., Filippov, A. E. and Peeters, F. M. Phase transitions in individual sub-micrometre superconductors. *Nature*, v. 390, p. 259–262, 1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/36797>>.
- [64] BAEUS, B. J.; PEETERS, F. M.; SCHWEIGERT, V. A. Saddle-point states and energy barriers for vortex entrance and exit in superconducting disks and rings. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 63, p. 144517, Mar 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.63.144517>>.
- [65] BUISSON, O. et al. Magnetization oscillations of a superconducting disk. *Physics Letters A*, v. 150, n. 1, p. 36–42, 1990. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019090056T>>.
- [66] Chibotaru, Liviu F., Ceulemans, Arnout, Bruyndoncx, Vital and Moshchalkov, Victor V. Symmetry-induced formation of antivortices in mesoscopic superconductors. *Nature*, v. 408, p. 833–835, 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/35048521>>.
- [67] BENOIST, R.; ZWARGER, W. Critical fields of mesoscopic superconductors. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, v. 103, p. 377–381, 1997. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/32/i=41/a=307>>.
- [68] PALACIOS, J. Vortex matter in mesoscopic superconductors. *Physica B: Condensed Matter*, v. 256–258, n. 0, p. 610–617, 1998. ISSN 0921–4526. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921452698005705>>.

- [69] AKKERMANS, E.; MALLICK, K. Vortices in ginzburg-landau billiards. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 41, p. 7133, 1999. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/32/i=41/a=307>>.
- [70] BRAVERMAN, G. M.; GREDESKUL, S. A.; AVISHAI, Y. Mesoscopic superconducting disc with short-range columnar defects. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 59, p. 12039–12047, May 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.59.12039>>.
- [71] SCHWEIGERT, V.; PEETERS, F. Flux penetration and expulsion in thin superconducting disks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 83, p. 2409–2412, Sep 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.2409>>.
- [72] PALACIOS, J. J. Metastability and paramagnetism in superconducting mesoscopic disks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 84, p. 1796–1799, Feb 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.1796>>.
- [73] YAMPOLSKII, S. V.; PEETERS, F. M. Vortex structure of thin mesoscopic disks with enhanced surface superconductivity. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 62, p. 9663–9674, Oct 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.62.9663>>.
- [74] AKKERMANS, E.; MALLICK, K. Vortices in small superconducting disks. *Physica C: Superconductivity*, v. 332, n. 1–4, p. 250–254, 2000. ISSN 0921–4534. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453499006802>>.

- [75] AKKERMANS, E.; GANGARDT, D.; MALLICK, K. Dual point description of mesoscopic superconductors. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 62, p. 12427–12439, Nov 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.62.12427>>.
- [76] SCHWEIGERT, V.; PEETERS, F. Field-cooled vortex states in mesoscopic superconducting samples. *Physica C: Superconductivity*, v. 332, n. 1–4, p. 426–431, 2000. ISSN 0921–4534. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453499007170>>.
- [77] SCHWEIGERT, V. A.; PEETERS, F. M. Influence of the confinement geometry on surface superconductivity. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 60, p. 3084–3087, Aug 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.3084>>.
- [78] ROMAGUERA, A. R. d. C. *Propriedades da matéria de vórtices em supercondutores mesoscópicos tridimensionais*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [79] GEIM, A. K. et al. Fine structure in magnetization of individual fluxoid states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 85, p. 1528–1531, Aug 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.1528>>.
- [80] BUZDIN, A.; BRISON, J. Vortex structures in small superconducting disks. *Physics Letters A*, v. 196, n. 3–4, p. 267–271, 1994. ISSN 0375–9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960194912386>>.

- [81] NICODEMI, M.; JENSEN, H. Equilibrium and off-equilibrium dynamics in a model for vortices in superconductors. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 65, p. 144517, Apr 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.65.144517>>.
- [82] KANDA, A. et al. Experimental evidence for giant vortex states in a mesoscopic superconducting disk. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 93, p. 257002, Dec 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.257002>>.
- [83] GRIGORIEVA, I. V. et al. Direct observation of vortex shells and magic numbers in mesoscopic superconducting disks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, p. 077005, Feb 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.077005>>.
- [84] CABRAL, L. R. E.; BAELUS, B. J.; PEETERS, F. M. From vortex molecules to the abrikosov lattice in thin mesoscopic superconducting disks. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 70, p. 144523, Oct 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.70.144523>>.
- [85] BAELUS, B. J.; CABRAL, L. R. E.; PEETERS, F. M. Vortex shells in mesoscopic superconducting disks. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 69, p. 064506, Feb 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.69.064506>>.
- [86] LOZOVIK, Y. E.; RAKOCH, E. A. Energy barriers, structure, and two-stage melting of microclusters of vortices. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 57,

- p. 1214–1225, Jan 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.57.1214>>.
- [87] SCHWEIGERT, I. V.; SCHWEIGERT, V. A.; PEETERS, F. M. Radial-fluctuation-induced stabilization of the ordered state in two-dimensional classical clusters. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 84, p. 4381–4384, May 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4381>>.
- [88] LAI, Y.-J.; I, L. Packings and defects of strongly coupled two-dimensional coulomb clusters: Numerical simulation. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 60, p. 4743–4753, Oct 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.60.4743>>.
- [89] DINGLE, R. B. Some magnetic properties of metals. i. general introduction, and properties of large systems of electrons. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 211, n. 1107, p. 500–516, 1952. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/211/1107/500>>.
- [90] HASSANI, S. *Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields*. Springer New York, 2013. (Undergraduate Texts in Contemporary Physics). ISBN 9780387215624. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GWPgBwAAQBAJ>>.
- [91] DENNERY, P.; KRZYWICKI, A. *Mathematics for Physicists*. Dover Publications, 1996. (Dover Books on Physics Series). ISBN 9780486691930. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0GHIO78EX5YC>>.

- [92] PALACIOS, J. J. Vortex lattices in strong type-II superconducting two-dimensional strips. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 57, p. 10873–10876, May 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.57.10873>>.
- [93] Milošević, M. and Peeters, F. Vortex-antivortex nucleation in magnetically nanotextured superconductors: Magnetic-field-driven and thermal scenarios. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 94, p. 227001, Jun 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.227001>>.
- [94] Milošević, M. V. and Yampolskii, S. V. and Peeters, F. M. Magnetic pinning of vortices in a superconducting film: The (anti)vortex-magnetic dipole interaction energy in the London approximation. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 66, p. 174519, Nov 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.174519>>.
- [95] Milošević, M. V. and Berdiyrov, G. R. and Peeters, F. M. Stabilized vortex-antivortex molecules in a superconducting microdisk with a magnetic nanodot on top. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 75, p. 052502, Feb 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.75.052502>>.
- [96] BRANDT, E. H. The flux-line lattice in superconductors. *Rep. Prog. Phys.*, Reports on Progress in Physics, v. 58, p. 1465–1594, 1995. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0034-4885/58/11/003>>.
- [97] L. R. E. Cabral, Belisa R. C. H. T. de Aquino and Silva F. C. O. Thin superconducting disk in the presence of an arbitrarily placed out-plane point magnetic. Em preparação.