



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - UFPE

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ÁREA DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE DINÂMICA DE SUPORTES PARA
ANTENAS EM TORRES METÁLICAS PARA
TELECOMUNICAÇÕES**

Recife

2015

Ives José Adriano dos Santos

**ANÁLISE DINÂMICA DE SUPORTES PARA ANTENAS EM TORRES METÁLICAS
PARA TELECOMUNICAÇÕES**

**Dissertação de mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil, área de Estruturas, da Universidade
Federal de Pernambuco, como requisito
parcial para obtenção do título de mestre em
ciências**

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Ribeiro

**Co-orientador: Prof. Dr. Pablo Aníbal Lopez-
Yáñez**

Recife

2015

Catálogo na fonte

Biblioteca Margareth Malta, CRB-4 / 1198

S237a Santos, Ives José Adriano dos.

Análise dinâmica de suportes para antenas em torres metálicas para telecomunicações / Ives José Adriano dos Santos. - Recife, 2015.

157 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

Coorientador: Prof. Dr. Pablo A. Lopez-Yáñez.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2015.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Civil. 2. Torres de telecomunicações. 3. Análise dinâmica. 4. Efeitos Aerodinâmicos do Vento. 5. Estruturas de Aço. I. Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira. (Orientador). II. Lopez-Yáñez, Pablo Anibal. (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.) BCTG/2016-122



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

**ANÁLISE DINÂMICA DE SUPORTES PARA ANTENAS EM
TORRES METÁLICAS PARA TELECOMUNICAÇÕES**

Defendida por

Ives José Adriano dos Santos

Considera o candidato APROVADO

Recife, 11 de dezembro de 2015

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro - UFPE
(orientador)

Prof. Dr. Pablo Aníbal López-Yáñez - UFPE
(coorientador)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pablo Aníbal López-Yáñez - UFPE
(coorientador)

Prof. Dr. Roberto Leal Pimentel - UFPB
(examinador externo)

Prof. Dr. Alex Maurício Araújo - UFPE
(examinador externo)

***Ao meu filho Miguel, à minha
esposa Michelle, ao meu pai
Israel, à minha mãe Célia, à minha
irmã Cristiane, dedico este
trabalho com todo meu amor e
carinho.***

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Paulo Marcelo, pelas orientações e generosa compreensão durante a realização deste trabalho;

Ao Professor Pablo A. Lopez-Yanez, por ter me acompanhado e orientado nesta jornada, oferecendo conhecimentos preciosos e inestimáveis, os quais se tornaram os pilares fundamentais da minha carreira profissional, de hoje e sempre;

Aos meus pais, por me apoiar em cada decisão que tomei na vida, por me tornar o homem que hoje sou, por demonstrar amor e carinho infindáveis, sem nunca esmorecer nesta batalha que é a vida;

À minha querida esposa Michelle, e meu amado filho Miguel, meus tesouros, minha razão de ser e existir, pelos quais busco ser uma pessoa melhor, agradeço pelo carinho e compreensão, por todos os minutos em que estive ausente me dedicando ao trabalho e aos estudos;

À minha irmã, Cristiane, pelo apoio e incentivo durante minha formação, que este trabalho lhe sirva de inspiração em sua própria jornada;

Aos meus colegas de mestrado, em especial Elilde Medeiros, Edson Carlos, Cleyton Menezes, e Douglas Mateus, pelas horas em que estudamos juntos e compartilhamos valiosos conhecimentos.

RESUMO

Santos, Ives José Adriano dos. **Análise dinâmica de suportes para antenas em torres metálicas para telecomunicações.** Recife, 2015. 151p. (Mestrado em Engenharia Civil, área de Estruturas) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco, 2015.

Na última década, o crescimento da telefonia celular no Brasil venceu os limites das grandes capitais, levando a rede a cobrir municípios antes desprovidos de tal tecnologia. A transmissão do sinal pode ocorrer de diversas formas, mas, de fato, a mais comumente utilizada é por meio de antenas sustentadas por torres metálicas.

Na prática, as antenas são instaladas em qualquer momento após a montagem da torre, mesmo anos após sua construção, sem qualquer verificação estrutural e, por vezes, excedendo a capacidade de carga nominal. Além disso, na maioria dos casos, não são levados em conta certos cuidados com relação ao posicionamento de suportes e das próprias antenas. Portanto, é comum encontrarmos antenas instaladas de forma inadequada, sendo colocadas fora da silhueta da torre. Este posicionamento, aliado com a ação dinâmica ocasionada pelo vento, pode trazer problemas graves à estrutura. Neste trabalho, são apresentados dois casos reais de torres metálicas que sofreram danos estruturais devido ao problema em questão.

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar uma solução de amortecimento para as vibrações causadas pelo vento em antenas para telecomunicações. A proposta visa utilizar elastômeros, como o Neoprene, entre a cantoneira do montante e as abraçadeiras dos suportes, reduzindo assim o período de vibração e, conseqüentemente, os efeitos da fadiga.

Palavras-chave: Torres de telecomunicações, Análise dinâmica, Efeitos Aerodinâmicos do Vento, Estruturas de Aço.

ABSTRACT

Santos, Ives José Adriano dos. **Dynamic analysis of supports for antennas on metal towers for telecommunications.** Recife, 2015. 151p. (Master Degree in Civil Engineering, Structural area) - Federal University of Pernambuco, Recife, Pernambuco, 2015.

In the last decade, the growth of mobile telephony in Brazil won the boundaries of the great capitals, leading the network to cover cities before devoid of such technology. The signal transmission can occur in various ways, but, in fact, the most commonly used is through antennas supported by steel towers.

In practice, the antennas are installed at any time after assembly of the tower, even years after its construction, without any structural verification and sometimes exceeding the rated load capacity. Moreover, in most cases, care is not taken into account in relation to the positioning brackets and their antennas. Therefore, it is common to find antennas installed improperly, being placed outside the tower silhouette. This positioning, combined with dynamic action brought by the wind, can bring serious problems to the structure. In this work, we present two real cases of metal towers that have suffered structural damage due to the problem at hand.

The objective of this work is to present a solution for damping the vibrations caused by the wind in telecommunications antennas. The proposal to use elastomers, such as neoprene, between the bracket and the tower column, thus reducing the vibration period and, consequently, the effects of fatigue.

Keywords: Telecommunications towers, Dynamic analysis, Aerodynamic Wind effect, Steel structures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Torre metálica 40m, Cabrobó,	20
Figura 1.2 - Fratura por fadiga ocorrida no montante da torre.....	21
Figura 1.3 - Peças fraturadas próximas à fratura por fadiga do montante.	22
Figura 1.4 - Torre metálica 60m, Taquaritinga do Norte, PE, torcida devido à antena.	22
Figura 2.1 - Modelo esquemático de torre estaiada (fonte: autor).....	28
Figura 2.2 - Esquema de fundação para torre estaiada, vista superior.	29
Figura 2.3 - Modelo esquemática de torre autoportante com 42m de altura. (fonte: autor).....	33
Figura 2.4 - Modelo esquemático do primeiro módulo de torre autoportante (fonte: autor).....	35
Figura 2.5 - Vista superior da seção transversal (fonte: autor).....	36
Figura 2.6 - Modelo esquemático do primeiro módulo de torre autoportante tubular, seção estreita (fonte: autor).....	37
Figura 2.7 - Base de torre autoportante triangular.....	39
Figura 2.8 - Torre autoportante com antenas.....	40
Figura 2.9 - Antena posicionada em suporte de face.	43
Figura 2.10 - Suportes de canto com antenas de grande porte.	44
Figura 2.11 - Vista superior do topo da torre.....	45
Figura 2.12 - Representação tridimensional da torre com suporte de canto (fonte: autor).....	46
Figura 2.13 - Detalhe do suporte de canto.	47
Figura 3.1 - Representação do sistema massa mola com amortecimento viscoso. ...	51
Figura 3.2 - Representação de forças no sistema massa-mola amortecido.....	54
Figura 3.3 - Gráfico de amortecimento crítico, supercrítico e subcrítico (fonte: Autor).	59
Figura 4.1- Histórico estimado de velocidade do vento.....	63
Figura 4.2 - Diagrama de isopletas segundo NBR 6123.	64
Figura 4.3 - Rajadas equivalentes (Franco (2003)).	72
Figura 5.1 - Montante fraturado devido à fadiga.....	76

Figura 5.2 - Gráfico tensão x deformação para aços mais comuns. (Fonte: Pfeil, Walter, Estruturas de Aço: dimensionamento prático / Walter Pfeil, Michèle Pfeil. – 8. Ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2009)	77
Figura 5.3 - Trecho inicial dos diagramas tensão x deformação dos aços mais comuns. (Fonte: Pfeil, Walter, Estruturas de Aço: dimensionamento prático / Walter Pfeil, Michèle Pfeil. – 8. Ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2009)	78
Figura 5.4 - Amplitude de tensões no carregamento cíclico (fonte: Autor).....	80
Figura 5.5 - Esquema de fixação inadequado do suporte de canto.	82
Figura 5.6 - Esquema de fixação adequado do suporte de canto.	83
Figura 5.7 - Gráfico Tensão x Número de Ciclos para material genérico (fonte: Internet).....	84
Figura 6.1 - Modelo proposto para solução do problema de vibração.....	87
Figura 6.2 - Modelo matemático representando a estrutura real.....	88
Figura 6.3 - Graus de liberdade.....	89
Figura 6.4 – Gráfico deslocamento horizontal (u_2) com amortecimento do Elastômero (Neoprene)	96
Figura 6.5 – Gráfico rotação (θ_2) com amortecimento do Neoprene	96
Figura 6.6 – Comparação entre gráficos, deslocamento horizontal (u_2) sem o Neoprene (em vermelho) e com o Neoprene (em azul)	97
Figura 6.7 – Comparação entre gráficos, rotação (θ_2) sem Neoprene (em vermelho) e com Neoprene (em azul)	99
Figura 7.1 - Esquema explicativo da integral de convolução (fonte: Chopra-Dynamics Of Structures-Theory And Applications To Earthquake Engineering, 1995).....	101
Figura 7.2 - Gráfico de carga dinâmica do vento variando aleatoriamente no tempo.	105
Figura 7.3 - Gráfico de deslocamento u_2 , apenas com amortecimento natural.	107
Figura 7.4 - Gráfico de deslocamento u_2 , com amortecimento por elastômero (neoprene).....	107
Figura 7.5 - Gráfico da rotação θ_2 , apenas com amortecimento natural.....	108
Figura 7.6 - Gráfico da rotação θ_2 , com amortecimento por elastômero (neoprene).	108

LISTA DE SÍMBOLOS

Matrizes e vetores

$[C]$ Matriz de amortecimento da estrutura

$\{F\}$ Vetor de forças aplicadas

$\{F(t)\}$ Vetor de forças em função do tempo

$[K]$ Matriz de rigidez da estrutura

$[M]$ Matriz de massa da estrutura

$\{u\}$ Vetor de deslocamentos da estrutura

$\{\dot{u}\}$ Vetor de velocidades da estrutura

$\{\ddot{u}\}$ Vetor de acelerações da estrutura

Letras romanas minúsculas

c Coeficiente de amortecimento viscoso

c_a Coeficiente aerodinâmico

c_A Coeficiente de amortecimento referente ao aço

c_N Coeficiente de amortecimento referente ao neoprene

c_{nr} Correção de amplitude da componente ressonante

f Frequência natural

f_r Frequência de incidência das rajadas

f_D Força de amortecimento

$g(\tau)$ Função auxiliar para integração numérica de Simpson

k Coeficiente de rigidez

m	Massa
n_f	Número de funções harmônicas
$p(t)$	Pressão flutuante do vento
q_p	Pressão de pico segundo NBR 6123
p_0	Carregamento inicial para o Método de Wilson
p_k	Amplitude do k-ésimo harmônico
r_k	Número do harmônico cuja frequência coincide com 1ª modo de vibração
t	Tempo
u	Deslocamento
\dot{u}	Velocidade, ou primeira derivada do deslocamento
\ddot{u}	Aceleração, ou segunda derivada do deslocamento
\ddot{u}_0	Aceleração inicial
\dot{u}_0	Velocidade inicial
u_0	Deslocamento inicial
u_h	Deslocamento para a parcela homogênea
v	Velocidade média do vento
v_3	Velocidade de pico para o período de 3 segundos, na cota z
v_{600}	Velocidade de pico para o período de 600 segundos, na cota z
$v(t)$	Velocidade flutuante do vento, em função do tempo
z	Cota onde é medida a velocidade básica do vento

Letras romanas maiúsculas

A	Área da projeção vertical da estrutura
C_a	Coefficiente de arrasto
C_{oh}	Correlação espacial de velocidades
E	Módulo de elasticidade longitudinal do aço
$E[p^2]$	Valor quadrático médio
$F(t)$	Força em função do tempo
F_E	Força estática
F_0	Amplitude ou valor máximo da força do vento
$fS(f)$	Espectro de potência de Davenport
J	Momento de inércia de massa
$S_p(z, f)$	Espectro cruzado de pressões
T	Período
V_0	Velocidade básica do vento, segundo NBR 6123
\bar{V}	Velocidade média do vento
$V(t)$	Velocidade total do vento em função do tempo

Letras gregas minúsculas

δt	Incremento de tempo
δu	Incremento de deslocamento
$\delta \dot{u}$	Incremento de velocidade
$\delta \ddot{u}$	Incremento de aceleração

λ	Comprimento de onda
ρ	Massa específica do ar
σ^2	Variância
σ_m	Tensão média
σ_s	Amplitude de tensões
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima
$\sigma_{m\acute{i}n}$	Tensão mínima
θ	Rotação ou deslocamento angular
$\dot{\theta}$	Velocidade de rotação ou velocidade angular
$\ddot{\theta}$	Aceleração de rotação ou aceleração angular
ω	Frequência natural angular
ω_n	Frequência natural angular para o enésimo modo de vibração
ω_d	Frequência natural angular amortecida
ζ	Razão de amortecimento

Letras gregas maiúsculas

Δ	Função de dissipação
$\Delta\sigma$	Intervalo de tensão cíclica
Δt	Intervalo de tempo
Δz	Diferença entre as cotas máxima e mínima da área de incidência do vento
Δz_{ok}	Altura de rajada equivalente

ξ	Energia cinética
τ	Período para integração numérica de Simpson
U	Energia potencial de deformação
V	Potencial das forças

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	18
1.1.	Generalidades	18
1.2.	Objetivos e Metodologia	19
1.3.	Casos reais de torres danificadas por antenas em posição inadequada	20
1.4.	Situação do assunto	23
1.5.	Estrutura do trabalho	26
2.	TORRES METÁLICAS PARA TELECOMUNICAÇÕES	27
2.1.	Principais características	27
2.2.	Torre estaiada	28
2.2.1.	Módulos soldados	30
2.2.2.	Estais	30
2.2.3.	Fundações	31
2.3.	Torre autoportante	32
2.3.1.	Elementos estruturais	34
2.3.2.	Fundações	38
2.4.	Carregamento em torres para telecomunicações	39
2.4.1.	Antenas	39
2.4.2.	Cabeamento	41
2.4.3.	Plataformas	41
2.5.	Suportes para antena	42
2.5.1.	Suporte de face	42
2.5.2.	Suporte de canto	42
3.	ANÁLISE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	48
3.1.	Introdução	48
3.2.	Caracterização de um sistema dinâmico	49
3.3.	Sistemas de um grau de liberdade	51
3.4.	Força de amortecimento	52
3.5.	Sistema massa-mola amortecido	53
3.6.	Frequência natural, angular e período	54
3.7.	Combinação de respostas estática e dinâmica	56
3.8.	Métodos para solução da equação diferencial	56
3.8.1.	Solução clássica para sistema não amortecido	57
3.9.	Vibração livre não amortecida	58

3.10. Vibração livre com amortecimento viscoso	58
3.11. Vibração harmônica ou periódica com amortecimento viscoso	60
3.12. Vibração arbitrária com amortecimento viscoso	60
3.13. Solução do sistema em vibração livre com amortecimento viscoso.....	61
4. AÇÃO DINÂMICA DO VENTO.....	63
4.1. Vibrações causadas pelas rajadas de vento	64
4.2. Processo de Davenport (fator de rajada).....	65
4.3. Método do vento sintético	66
4.3.1. Resumo de aplicação do método	67
4.3.2. Espectro de potência	68
4.3.3. Decomposição das pressões flutuantes	69
4.3.4. Correlação espacial de velocidades	71
4.3.5. O método sistematizado	73
4.4. Considerações finais acerca da ação dinâmica do vento neste trabalho	75
5. FADIGA DE METAIS SUBMETIDOS A CARREGAMENTOS CÍCLICOS.....	76
5.1. Propriedades mecânicas básicas	77
5.1.1. Rigidez.....	78
5.1.2. Resistência mecânica.....	78
5.1.3. Ductilidade	79
5.1.4. Tenacidade.....	79
5.1.5. Resiliência	79
5.2. Carregamento cíclico	79
5.3. Amplitude de tensão.....	81
5.4. Número de ciclos.....	83
5.5. Formação da fratura por fadiga.....	85
6. ANÁLISE MATEMÁTICA PARA VIBRAÇÃO LIVRE	86
6.1. Solução proposta para problema dinâmico	86
6.2. Modelo matemático	87
6.3. Montagem das equações diferenciais	88
6.4. Sistema de equações	90
6.5. Condensação estática	91
6.6. Solução do sistema de equações diferenciais.....	93
6.7. Amortecimento não-clássico.....	93
6.8. Resultados gráficos	94
7. ANÁLISE MATEMÁTICA PARA VIBRAÇÃO FORÇADA	100

7.1. Solução do sistema de equações diferenciais.....	100
7.1.1. Método de Wilson: cálculos iniciais	102
7.1.2. Método de Wilson: cálculos para cada passo de tempo (i).....	102
7.2. Ação dinâmica do vento pelo Método do Vento Sintético	104
7.3. Resultados da vibração forçada arbitrária	105
8. CONCLUSÃO.....	109
REFERÊNCIAS.....	112
APÊNDICE A - CÁLCULOS DA ANÁLISE MATEMÁTICA - VIBRAÇÃO LIVRE..	115
A.1. Carga de vento aplicada.....	115
A.2. Dados do suporte	115
A.3. Dados do elastômero (Neoprene)	116
A.4. Montagem da equação diferencial	116
A.5. Coeficiente de rigidez e condensação estática.....	119
A.6. Amortecimento não-clássico	121
A.7. Solução do sistema condensado	124
APÊNDICE B - CÁLCULOS DA ANÁLISE MATEMÁTICA - VIBRAÇÃO FORÇADA	
130	
B.1. Velocidade básica do vento (segundo NBR 6123).....	130
B.2. Fatores topográfico, rugosidade e estatístico	130
B.3. Velocidade característica do vento	130
B.4. Coeficiente de arrasto para a antena	130
B.5. Força estática do vento.....	130
B.6. Cálculo da resposta dinâmica do vento, pelo método simplificado da NBR 6123	130
B.7. Intensidade da turbulência	131
B.8. Espectro de Potências de Davenport.....	131
B.9. Determinação da função de flutuação de velocidade.....	132
B.10. Código escrito no software Mathcad para solução do Método de Wilson	132

1. INTRODUÇÃO

1.1. Generalidades

No Brasil, as torres metálicas são principalmente usadas para telecomunicações e linhas de transmissão, sendo as primeiras (objeto deste estudo) responsáveis por sustentar antenas de tamanhos variados, permitindo, em alguns casos, que tais equipamentos tenham “visadas” para transmissão do sinal.

Com o avanço do sistema de telecomunicações brasileiro, não apenas da telefonia, mas também da internet, as torres não apenas se tornaram mais numerosas, mas também cada vez mais próximas de centros urbanos e residências.

As torres metálicas para telecomunicações podem ser classificadas como estaiadas ou autoportantes. O primeiro tipo é uma estrutura simples, com seção transversal única da base ao topo, possuindo geralmente 300 ou 400mm de largura. Sua sustentação é proporcionada por cabos de aço, chamados estais, que são ancorados ao solo por bases de concreto armado. Para garantir estabilidade, os cabos de aço devem ser lançados a uma boa distância da base central, o que significa que as torres estaiadas, apesar de terem uma estrutura relativamente “enxuta”, ocupam uma grande área. A perda de um destes cabos geralmente ocasiona o colapso da estrutura.

O segundo tipo, mais utilizado em carregamentos de grande porte, é a torre autoportante. Esta é uma estrutura, como o próprio nome já diz, capaz de sustentar-se “por conta própria”, ou seja, sem o auxílio de cabos de aço. Este tipo de torre geralmente possui uma estrutura mais robusta que a torre estaiada, mas, por dispensar cabos de aço, ocupa uma área menor.

As torres, de forma geral, podem ser usadas apenas para retransmitir o sinal de uma localidade para outra, e/ou para distribuí-lo numa determinada área de cobertura. Em alguns casos as torres são instaladas em áreas ermas, rurais e afastadas de comunidades, muitas vezes até de difícil acesso. Em outros, contudo, são instaladas em centros urbanos para facilitar a distribuição do sinal e o acesso para manutenção e/ou instalação de equipamentos.

Na prática, a empresa responsável pelo projeto e instalação da torre não é a mesma que instala as antenas. Assim, muitas vezes, o posicionamento das antenas não corresponde às hipóteses de carga previstas no projeto estrutural. Na maioria dos casos, as antenas são colocadas fora da silhueta da torre, criando uma área exposta ao vento que provoca esforços de torção para os quais a torre possivelmente não foi dimensionada. Este posicionamento inadequado ocorre por diversas razões, sendo a mais comum a necessidade de “visada” entre antenas de micro-ondas. Em outros casos, o número excessivo de antenas numa mesma altura também força o posicionamento inadequado.

Embora os esforços de torção causados por antenas afastadas da torre sejam pequenos, os efeitos dinâmicos associados à vibração são relevantes. Neste trabalho apresentam-se dois casos reais onde as torres quase foram levadas ao colapso devido ao posicionamento inadequado das antenas. O objetivo é propor um sistema de amortecimento passivo, composto por borrachas de Neoprene.

Apresenta-se uma análise matemática da vibração dinâmica, sendo feita uma análise comparativa com e sem amortecimento, bem como os demais resultados decorrentes desta solução.

1.2. Objetivos e Metodologia

O objetivo deste trabalho consiste na solução do problema dinâmico causado pela vibração das antenas expostas à ação do vento. Para tanto, foi elaborado um modelo matemático com base na equação diferencial que rege o movimento da antena em vibração livre, ou seja, deslocada pelo vento e em seguida deixada vibrando em torno de sua posição inicial.

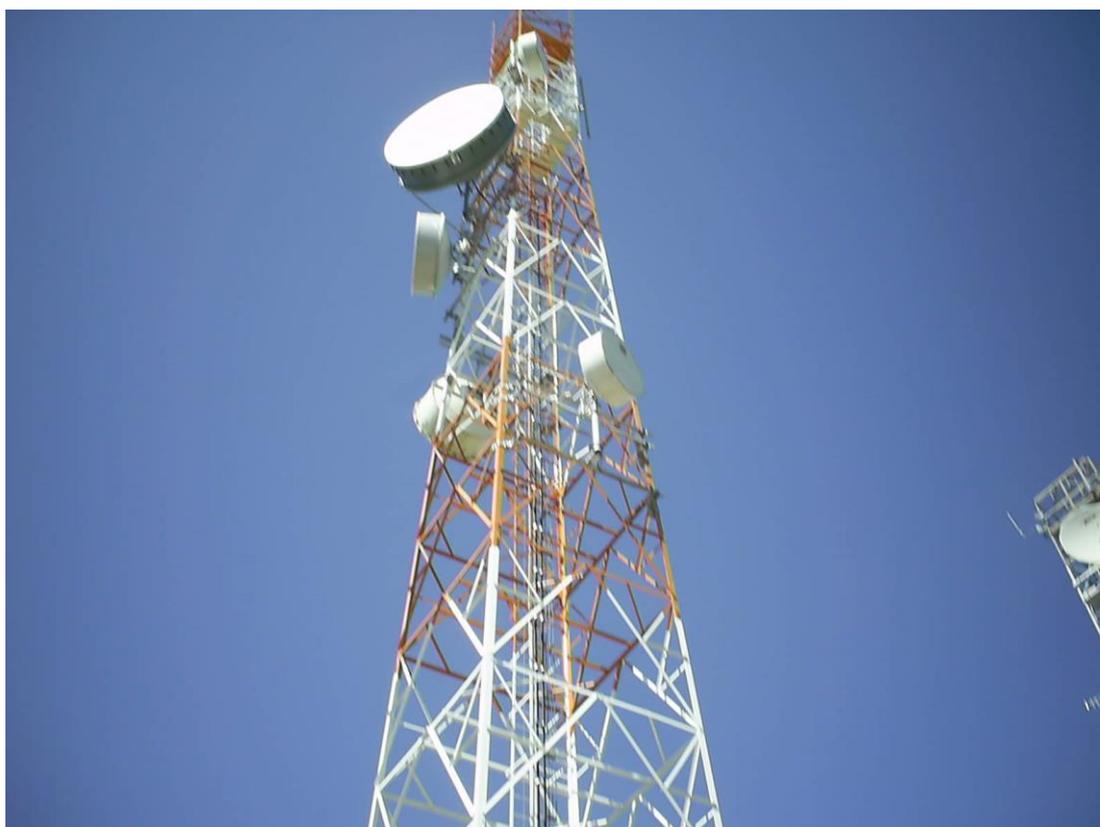
São apresentados os fundamentos teóricos relacionados à dinâmica das estruturas e à fadiga, responsável pela fratura de elementos estruturais expostos ao carregamento cíclico. Também apresenta-se a análise matemática para o sistema com vibração forçada, ou seja, considerando as rajadas dinâmicas do vento.

1.3. Casos reais de torres danificadas por antenas em posição inadequada

A seguir são apresentados dois casos reais, motivadores deste trabalho, de torres que quase foram levadas ao colapso devido ao posicionamento inadequado das antenas.

O primeiro caso trata de uma torre de 40m, com capacidade de carga de 38m² de área exposta ao vento (ÁEV), instalada em Cabrobó, interior do Estado de Pernambuco. Nesta torre, percebem-se várias antenas posicionadas fora da silhueta da estrutura, produzindo uma área exposta ao vento longe do eixo geométrico, como se percebe na figura 1.1.

Figura 1.1 - Torre metálica 40m, Cabrobó, PE



(Fonte: o autor)

Estas antenas provocam esforços de torção para os quais a torre pode não ter sido dimensionada. Submetida ao efeito dinâmico causado pelo vento, o montante da torre foi levada à fratura por fadiga.

Além da torção, a cantoneira também foi submetida à uma tensão residual causada pelas abraçadeiras do suporte. Estas abraçadeiras devem possuir um “afastador” para apoiar o lado interno da cantoneira. Contudo, muitos suportes não possuem tal peça e, portanto, aplicam pressão nas abas da cantoneira, distorcendo sua conformação original. Um modelo esquemático desta ligação é apresentado no capítulo 5.

Figura 1.2 - Fratura por fadiga ocorrida no montante da torre.



(Fonte: o autor)

Na figura 1.2, percebe-se o local onde ocorreu a fratura por fadiga. A cantoneira torcida em ambas direções, devido à vibração, rompeu exatamente no ponto de pressão aplicada pelo suporte de antena. Outras peças próximas à fratura também foram danificadas, como se percebe na figura 1.3.

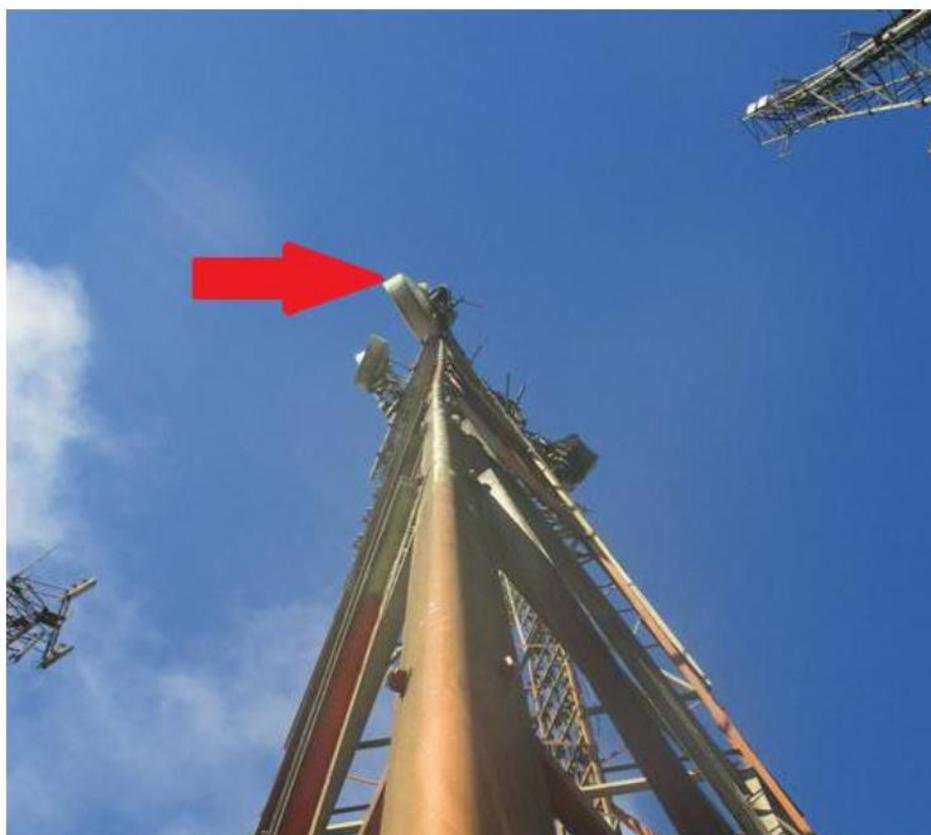
O segundo caso real diz respeito a uma torre de 60m, instalada em Taquaritinga do Norte, também em Pernambuco. A estrutura também foi projetada para 38m² AEV (área exposta ao vento), e, até a data em que este trabalho foi escrito, encontra-se com 54m² AEV, uma sobrecarga de aproximadamente 16m² AEV. Esta torre sofreu um efeito de torção global, diferente do caso anterior, que sofreu uma torção local. Neste caso toda a torre foi distorcida por causa de um antena afastada, como se percebe na figura 1.4.

Figura 1.3 - Peças fraturadas próximas à fratura por fadiga do montante.



(Fonte: o autor)

Figura 1.4 - Torre metálica 60m, Taquaritinga do Norte, PE, torcida devido à antena.



(Fonte: o autor)

Para ambos os casos, espera-se que a proposta de um sistema de amortecimento minimize os problemas causados, pois o período de vibração será reduzido e, desta forma, é ampliada a vida útil da estrutura frente ao problema da fratura por fadiga.

1.4. Situação do assunto

A fim de proporcionar acesso ao leitor interessado, seguem abaixo descrições resumidas de alguns trabalhos relacionados com torres metálicas treliçadas feitos nas últimas décadas.

Em 1984, Jensen e Folkestad desenvolveram um estudo sobre a importância das medições de campo para a análise do comportamento dinâmico de torres. O estudo descreveu técnicas de instrumentação necessárias para a extração de valores importantes tanto para a análise de integridade estrutural, quanto para a análise das condições de serviço das torres.

Em 1994, Kahla realizou análises numéricas sobre efeitos dinâmicos presentes em torres metálicas estaiadas. Foram utilizados elementos não-lineares de cabo para representação dos estais e elementos de pórtico espacial para a representação da torre propriamente dita. Foram analisados, inclusive, os efeitos produzidos pelo galope dos cabos.

Ghazalyt e Khaiatz, em 1995, publicaram um estudo de caso de projetos de torres estaiadas para telecomunicações. O trabalho discutiu os vários aspectos não-lineares envolvidos na análise de simulação computacional desse tipo de estrutura. Foi analisado um modelo tridimensional de uma torre de 600m de altura.

O efeito de fadiga em torres metálicas foi estudado por Mikitarenko e Perelmuter, em 1998. Para tanto, foi elaborado um modelo para representação do histórico das tensões atuantes nos elementos estruturais da torre. As análises realizadas consideraram diferentes níveis de amortecimento. O principal objetivo era avaliar a vida útil das estruturas perante as vibrações provocadas pelo vento.

Em 1998, Wahba, Madugula e Monforton desenvolveram um estudo sobre modelos numéricos aplicados à análise de torres estaiadas para telecomunicações. Nesse trabalho foi ressaltada a importância da consideração dos efeitos de não-

linearidade, presentes mesmo quando os carregamentos considerados são os de serviço.

Também em 1998, Madugula e Wahba propuseram dois diferentes modelos de elementos finitos para a simulação dinâmica de torres estaiadas. O trabalho contou com uma análise modal experimental de modelos reduzidos das estruturas. Os autores chegaram a bons resultados ao comparar seus modelos experimentais aos modelos numéricos desenvolvidos.

Carril (2000), em sua tese de doutorado, estudou a resposta dinâmica de torres metálicas treliçadas para telecomunicações na direção do vento, comparando o método de Davenport, o método do Vento Sintético e a NBR 6123. Em seu trabalho, propôs uma modificação no Método do Vento Sintético, a qual consiste na determinação da variação da velocidade média do vento em função da altura e classe de rugosidade do terreno.

Em 2001, Repetto e Solari se dedicaram ao estudo do fenômeno de fadiga em estruturas esbeltas. O resultado deste trabalho foi um artigo no qual foi proposto um modelo matemático para a correta previsão do número de ciclos de carga suportado por essas estruturas.

Jasim e Galeb, em 2001, fizeram algumas considerações sobre a otimização das estruturas de telecomunicações. Além da otimização das seções transversais dos elementos, as coordenadas dos nós também foram consideradas variáveis de projeto, o que configura a otimização geométrica da estrutura.

Chen e Xu propuseram, em 2001, um método racional para avaliação da resposta dinâmica de estruturas esbeltas amortecidas artificialmente. Foi desenvolvido um sistema capaz de estimar a eficiência dos aparelhos amortecedores com base em dois modelos numéricos diferentes.

Em 2001, Rao e Kalyanaraman realizaram análises e simulações computacionais não-lineares em painéis de torres de aço treliçadas. Foram considerados tanto os efeitos de não-linearidade geométrica quanto os da plasticidade, ou seja, não-linearidade do material. Os resultados das análises foram comparados com ensaios experimentais, o que permitem a calibração do modelo. Com base nessas análises, tornou-se possível a determinação dos esforços nos contraventamentos secundários, dados esses que não podem ser obtidos via análise linear.

Menin, em 2002, estudou torres metálicas estaiadas para antenas de rádio, avaliando seus comportamentos estático e dinâmico. Na análise estática, foram comparados modelos matemáticos lineares e não-lineares. A análise dinâmica empregou o método de simulação de Monte Carlo, permitindo a inclusão dos efeitos da parcela flutuante do vento.

Em 2002, Silva et al., publicaram um estudo sobre o dimensionamento de uma torre para telecomunicações com 75m de altura, no qual a estrutura foi analisada por diferentes técnicas de modelagem. Os resultados mostraram que a modelagem mais usual, ou seja, elementos finitos de treliça, pode levar a um dimensionamento inadequado. Isto se deve ao fato de que este modelo considera somente esforços axiais, deixando de avaliar esforços de flexão, corte e torção.

Lazanha (2003) apresentou um modelo numérico para avaliar o efeito dinâmico induzido pelo vento, com a ajuda do método de Monte Carlo, para obtenção dos harmônicos da simulação aleatória. A integração de Newmark foi aplicada para calcular cada função de carregamento, uma vez que a estrutura analisada possuía comportamento não-linear.

Em 2006, Oliveira, M. I. R., em sua dissertação de mestrado, realizou uma análise sobre torres de transmissão de energia submetidas aos efeitos dinâmicos induzidos pelo vento. O trabalho contou com a elaboração de um modelo em elementos finitos, o qual considerou a turbulência do vento como um carregamento aleatório ao longo do tempo.

Merce, R. N., et al (2007), publicaram um estudo sobre análise de torres metálicas submetidas à ação do vento, realizando uma comparação entre os métodos de Davenport, simulação de Monte Carlo e o método discreto da NBR 6123. Os resultados da análise dinâmica utilizando os três métodos apresentaram uma variação entre 20% e 35% com relação à análise estática.

Em 2012, Bronzatto, A. F. L, apresentou, em sua dissertação de mestrado, um estudo sobre os esforços de vento em estruturas esbeltas para telecomunicações, realizando uma análise entre os resultados obtidos por meio de uma análise estática com aqueles calculados pela análise dinâmica. O estudo considerou a ação dinâmica do vento, e os resultados foram obtidos com auxílio do software STRAP v. 12.5.

1.5. Estrutura do trabalho

No segundo capítulo são descritas as principais características de torres metálicas para telecomunicações, tanto para torres estaiadas quanto para torres autoportantes. Também são apresentados os modelos mais comuns de suportes para antenas encontrados atualmente.

No terceiro capítulo é apresentado um resumo sobre a dinâmica das estruturas, explicando questões como modos de vibração, frequências, montagem do sistema de equações diferenciais e soluções para alguns casos mais comuns.

No capítulo quatro são abordados os efeitos dinâmicos provocados pelo vento. São estudadas as recomendações da NBR 6123 (1988) e o modelo estatístico de Davenport, no qual o vento é considerado como uma combinação de uma velocidade média e flutuações em torno desta média, ou seja, rajadas.

No capítulo cinco são abordados os fundamentos teóricos que englobam a fadiga de peças submetidas a carregamentos cíclicos. Estes conceitos são importantes para entender porque os montantes da torre podem sofrer fraturas mesmo que submetidos a esforços relativamente pequenos.

No sexto capítulo é apresentado o modelo matemático do problema em questão considerando a vibração livre, com a montagem da equação diferencial e o procedimento adotado para sua resolução. É feita a comparação dos resultados obtidos com e sem amortecimento.

O sétimo capítulo apresenta a solução para o problema sob vibração forçada, ou seja, considerando as rajadas. São apresentados os resultados calculados para simular a ação dinâmica do vento, apresentando um comparativo entre os sistemas com e sem amortecimento.

Por fim, o oitavo capítulo apresenta as conclusões e considerações finais do trabalho, bem como propostas para futuros estudos nesta linha de pesquisa.

2. TORRES METÁLICAS PARA TELECOMUNICAÇÕES

2.1. Principais características

As torres metálicas para telecomunicações são estruturas espaciais treliçadas, geralmente compostas por barras feitas em perfis laminados de aço carbono. O tipo de perfil mais utilizado é a cantoneira em L de abas iguais, embora outros modelos laminados e de chapa dobrada também possam ser empregados. Certas torres utilizam perfis tubulares, em alguns casos somente para os montantes, em outros para toda a estrutura. A ligação entre os elementos pode ser parafusada ou soldada.

Os tipos mais comuns de seção transversal são: quadrada e triangular. Enquanto o segundo é geralmente mais econômico, o primeiro é comumente mais utilizado devido à facilidade para encontrar perfis laminados tipo cantoneira L de abas iguais, os quais são utilizados nos montantes da torre. Este tipo de perfil é laminado com uma abertura de 90 graus entre suas faces, o que permite o posicionamento das quatro faces num polígono quadrangular. Já para a seção transversal triangular, são necessários perfis que permitam um ângulo de 60 graus entre as faces, o que geralmente só é obtido com perfis de chapa dobrada ou tubos, com chapas soldadas.

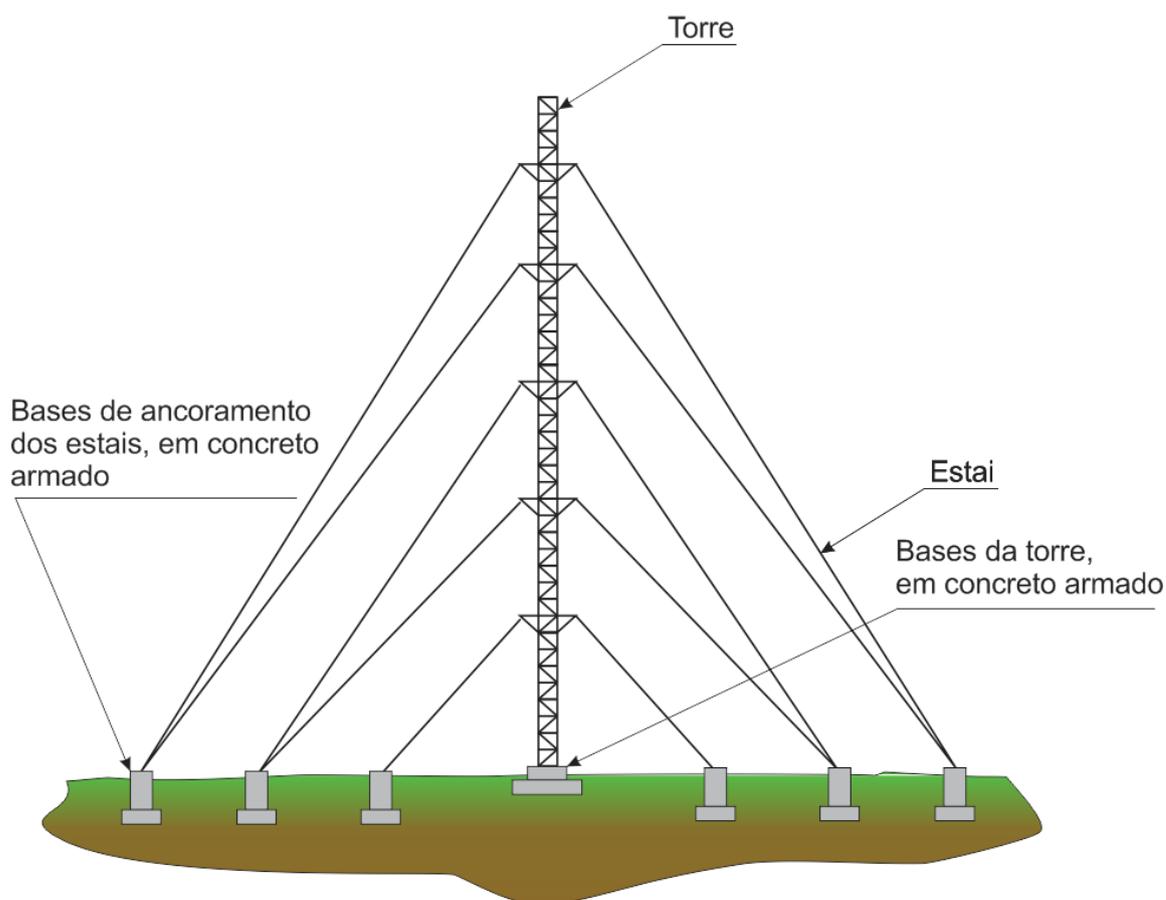
Por fim, independente da seção transversal, as torres podem ser estaiadas ou autoportantes. No primeiro caso, são necessários cabos de aço ancorados em bases de concreto afastadas da base da torre, sem os quais a estrutura da torre não se mantém estável. No segundo, a torre se sustenta por “conta própria”, dispensando as ancoragens e reduzindo a área útil de instalação. Embora ambos os tipos sejam descritos neste capítulo, a torre autoportante será o objeto de estudo desta dissertação.

2.2. Torre estaiada

Conforme explicado anteriormente, as torres estaiadas são estruturas esbeltas, sustentadas por estais. Por possuir uma seção transversal única e muito estreita em todo seu comprimento, a torre estaiada necessita da ancoragem de cabos de aço para limitar seus deslocamentos horizontais.

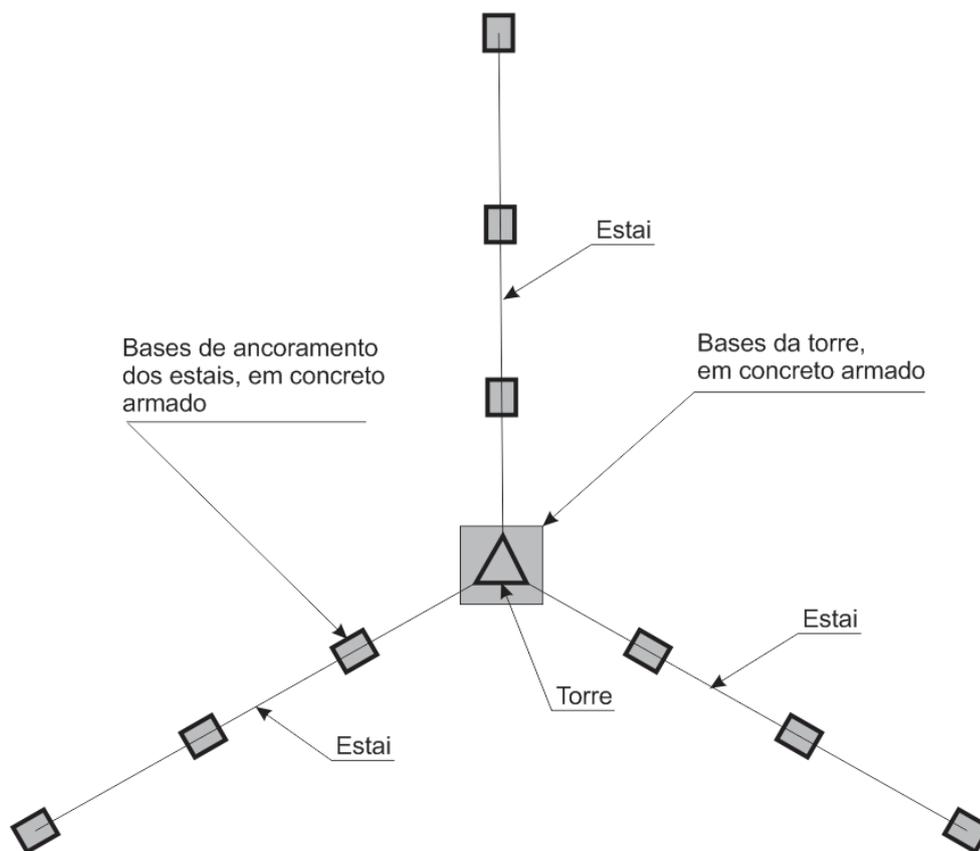
Exatamente por possuir uma geometria muito esbelta, a torre estaiada é bem mais econômica que sua contraparte autoportante, possuindo menos peso e geralmente contando com mais agilidade tanto na fabricação quanto na montagem. Isto reduz significativamente o custo final da estrutura, podendo chegar às vezes a 50% de uma torre autoportante para a mesma capacidade de carga.

Figura 2.1 - Modelo esquemático de torre estaiada.



(Fonte: o autor)

Figura 2.2 - Esquema de fundação para torre estaiada, vista superior.



(Fonte: o autor)

Assim, fica evidente que a principal vantagem da torre estaiada é o seu baixo custo. Sua principal desvantagem, contudo, se deve ao fato de que as bases de ancoragem devem manter uma boa distância da base da torre, pois sua principal função é restringir o deslocamento horizontal ao longo da estrutura, e assim mantê-la estável. A distância das bases de ancoragem geralmente varia entre 50% a 75% da altura em que o respectivo estai é ligado à torre. Ou seja, uma torre de 40m de altura, com um estai fixado em seu topo, terá sua base de ancoragem mais distante no mínimo a 20m da base da torre.

Esta condição requer uma área livre muito grande para a instalação da torre, e nem sempre tal condição é atendida, principalmente com as torres cada vez mais próximas dos centros urbanos. Assim, em muitos casos as torres autoportantes se tornam a única opção, devido à limitação de área disponível.

Além disso, uma última limitação da torre estaiada é que sua seção estreita oferece pouco espaço para a instalação de antenas. Uma torre estaiada padrão geralmente tem entre 300mm a 500mm de largura, enquanto uma torre autoportante tem no mínimo 1000mm de largura no topo, e sua seção transversal se alarga até a base. Isto resulta numa maior área útil na própria torre para a instalação de antenas no mesmo nível.

2.2.1. Módulos soldados

As torres estaiadas geralmente são fabricadas em módulos soldados, com tamanhos mais comuns de 3m e 6m. Os montantes são as barras verticais geralmente feitas em tubos, cantoneiras L de abas iguais ou barras redondas maciças. A seção transversal pode ser triangular ou quadrada, sendo o primeiro modelo mais comum para torres estaiadas, pois também reduz a necessidade de uma linha de ancoramento e estais.

Aos montantes de cada módulo são soldados os treliçamentos, geralmente feitos em barras redondas com diâmetros que sofrem pouca variação. Estas barras geralmente seguem um treliçamento tipo "Z", embora o treliçamento tipo "K" também possa ser usado. Para este tipo de torre raramente se utiliza um treliçamento tipo "X", devido ao aumento dos custos de fabricação. As barras do treliçamento também servem como escada tipo marinheiro.

As ligações dos módulos geralmente são feitas com parafusos, que ligam perfis soldados às extremidades de cada módulo.

2.2.2. Estais

Sendo o principal elemento de sustentação das torres estaiadas, os cabos de aço dos estais geralmente possuem diâmetro variando entre 1/2" e 3/4". São fixados

aos módulos por meio de sapatilhas e clips, geralmente a cada 12m de torre. Nas bases de concreto são deixadas âncoras com argolas nas quais são colocados esticadores. Estas peças permitem aplicar a tensão desejada ao cabo.

Tratam-se de elementos de geometria não-linear, cuja análise estrutural nem sempre é simples. Seu formato natural é a catenária, sendo perceptível visualmente para cabos de grandes comprimentos. Este pode ser um fator crítico durante a montagem, pois é improvável que os operários que a conduzem possuam conhecimentos necessários para saber que não é possível esticar o cabo até deixá-lo “reto”. A força necessária para eliminar a catenária é infinita, e o que acontece na prática é que a tensão aplicada à torre e ao cabo pode ser bem superior àquela definida em projeto, podendo levar a estrutura ao colapso.

Os elementos componentes dos estais requerem manutenção constante, visto que nem sempre são aplicados materiais de primeira qualidade e que se deterioram em pouco tempo. Assim, deve-se observar o estado de conservação dos estais e dos elementos de ligação, para, quando for necessário, substituir as partes desgastadas.

2.2.3. Fundações

As torres estaiadas exigem uma grande área útil para ancoragem dos estais, e tal ancoragem é feita preferencialmente em bases de concreto armado. A base central, onde fica localizada a torre, geralmente é composta por um bloco simples, sendo solicitado quase que exclusivamente com carregamento axial.

Já as bases de estais, devem receber uma atenção maior no tocante ao projeto, pois sofrem, simultaneamente, grandes esforços laterais e de arrancamento. Assim, deve-se verificar se o solo suportará a pressão lateral exercida pela base de ancoragem, bem como, se a mesma não será arrancada ou tombada pelo estai.

Infelizmente, torres estaiadas são geralmente tratadas como estruturas “simples demais”, e muitas vezes são executadas sem qualquer acompanhamento de um engenheiro (muito menos estrutural), e as bases de estais terminam sendo feitas

apenas com uma haste de aço cravada no solo. Esta prática geralmente causa o colapso da estrutura.

2.3. Torre autoportante

Sendo a solução estrutural atualmente mais utilizada para telecomunicações, a torre autoportante é em resumo uma treliça espacial com um tronco piramidal em aproximadamente 80% de sua extensão, culminando com um tronco reto até o topo da estrutura, conforme ilustrado na figura 2.3.

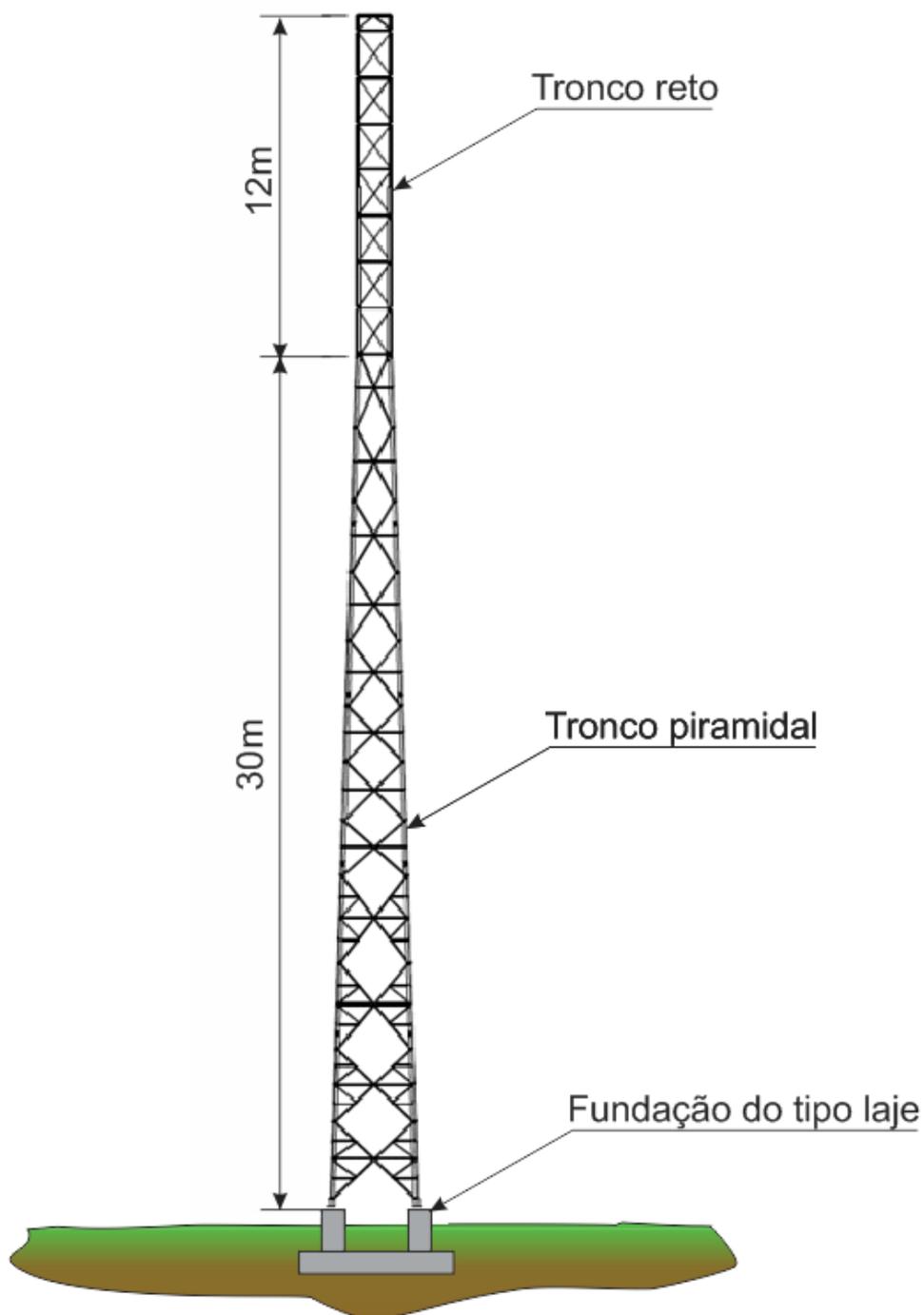
Na verdade, para um rápido esclarecimento, mesmo as torres que possuem ligações parafusadas com somente um parafuso para cada ligação não permitem rotações livres nas três direções e, essencialmente, não podem ser chamadas de treliças espaciais, mais sim de pórticos espaciais, pois seus elementos sofrem momentos fletores e esforços cortantes. Embora seja uma simplificação razoavelmente aceitável, pois estes esforços são muito pequenos se comparados aos esforços axiais sofridos pelas peças, SILVA et al (2002) comprovaram que esta prática pode levar a um dimensionamento inadequado, sendo recomendado considerar a torre como um pórtico espacial, onde cada elemento possui 12 graus de liberdade.

Nem todas torres autoportantes devem ter obrigatoriamente um tronco piramidal, embora seja uma prática recomendada, pois os esforços maiores estão na base, e portanto, a resistência maior deve estar lá, e o que for empregado a mais para cima, será um desperdício de material.

A figura 2.3 ilustra modelo de torre autoportante com 42m de altura, com seção transversal quadrada, feita em perfis de cantoneiras de abas iguais. A seção transversal pode ser quadrada ou triangular, geralmente com todas as faces iguais. Em termos de custos finais, a torre triangular é mais barata que a torre quadrada, contudo, sua fabricação geralmente é dificultada devido ao perfil dos montantes, que deve ser em chapa dobrada ou em tubos com chapas soldadas. Ambos os tipos requerem pelo menos uma etapa de fabricação a mais do que as cantoneiras

laminadas, o que torna estes perfis mais caros individualmente e, por vezes, muito difíceis de se achar no comércio local.

Figura 2.3 - Modelo esquemática de torre autoportante com 42m de altura.



(Fonte: o autor)

Mesmo possuindo bases consideravelmente mais largas que os modelos estaiados, as torres autoportantes ocupam uma área útil bem menor. Para uma rápida comparação, a torre ilustrada na figura 2.3 necessitaria de uma área de aproximadamente 4,5m x 4,5m, enquanto uma torre estaiada com a mesma altura precisaria de uma área circular com pelo menos 20m de raio.

2.3.1. Elementos estruturais

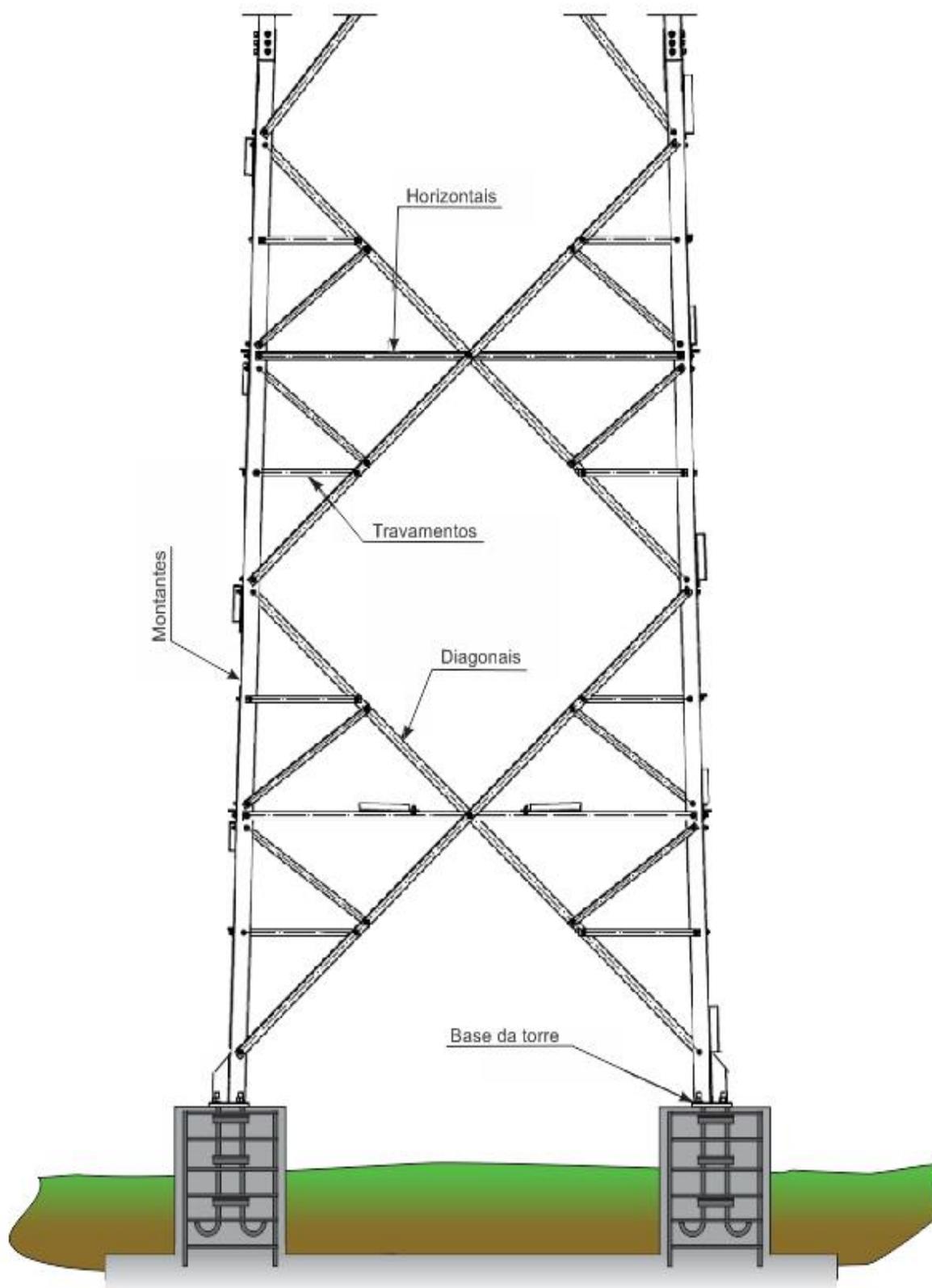
A fim de facilitar a compreensão da leitura desta dissertação, neste parágrafo serão abordados os elementos estruturais mais comuns em torres autoportantes. Vale ressaltar que cada projetista adota a nomenclatura que deseja, mas aquela seguida neste capítulo será a mesma adotada para o restante do trabalho.

Assim, começamos nomeando os montantes, por “M”, que são basicamente as “colunas” da torre. Geralmente são feitos em cantoneiras de abas iguais, quando a torre tem seção transversal quadrada, ou em perfis de chapa dobrada ou tubulares com chapas soldadas, quando a seção transversal é triangular. São os elementos mais solicitados da torre, e por isso, apresentam as maiores dimensões e resistências. A figura 2.4 apresenta um modelo esquemático.

Em seguida nomeamos as diagonais principais, por “D”, que são os elementos primordiais da treliça. As diagonais travam o deslocamento horizontal da torre, limitando-o a própria deformação de cada trecho. Geralmente são projetadas com geometria em “X”, “K” ou “Z”. A torre em questão para este trabalho possui geometria em “X”, sendo o modelo mais comum e eficiente para torres autoportantes.

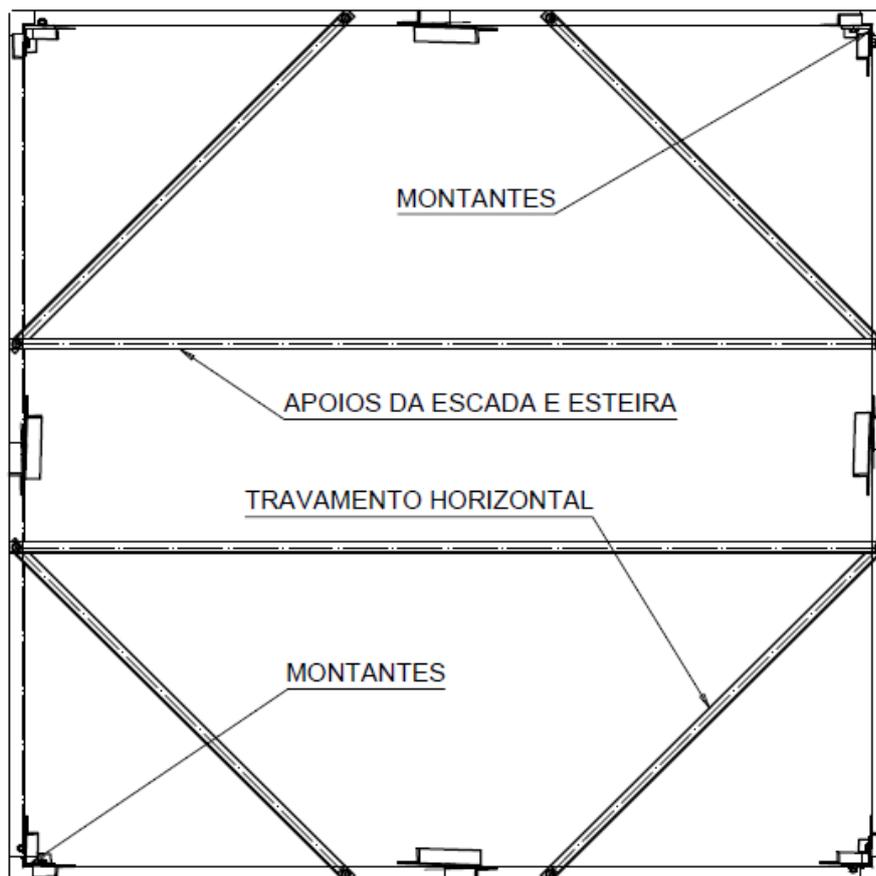
As peças horizontais, designadas por “T”, são geralmente posicionadas no centro do treliçamento em “X”, a fim de reduzir o comprimento de flambagem dos montantes. São componentes da treliça menos solicitados que as diagonais, e alguns modelos de torres não as utilizam. São úteis para sustentar o contraventamento horizontal e as peças que suportam a escada, como é visto na figura 2.5.

Figura 2.4 - Modelo esquemático do primeiro módulo de torre autoportante.



(Fonte: o autor)

Figura 2.5 - Vista superior da seção transversal.



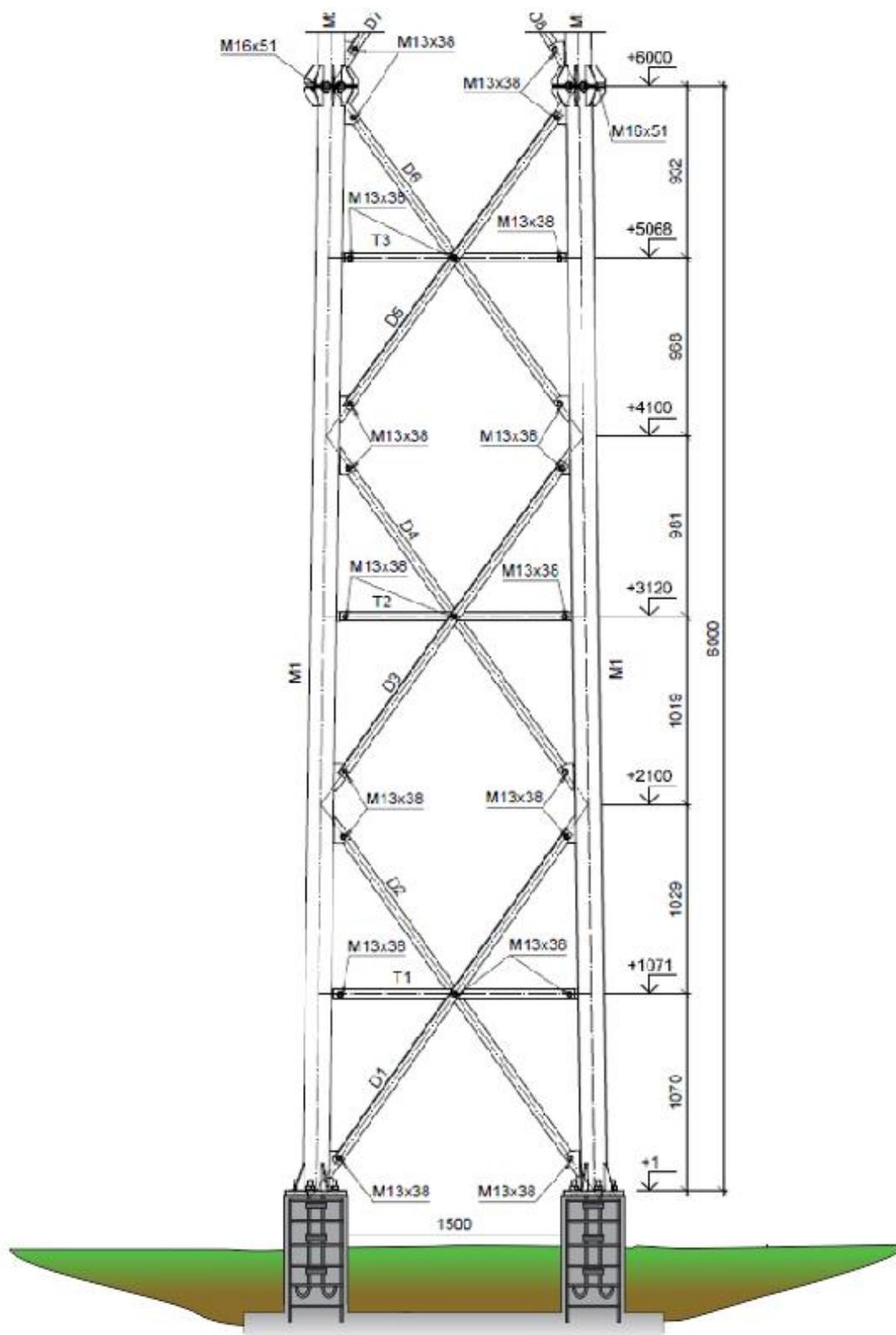
(Fonte: o autor)

Por fim, geralmente são utilizadas peças auxiliares para reduzir os comprimentos livres das peças principais. Estas peças são chamadas de travamentos, ou contraventamentos, e também são opcionais em torres menores, embora fortemente recomendadas.

A figura 2.6 apresenta o primeiro trecho de uma torre autoportante tubular de seção estreita, com a indicação de cotas e legenda das peças e parafusos.

Também são utilizados elementos secundários que não tem função estrutural, mas devem ser considerados na análise das cargas, sendo estes: escadas, esteira de cabos, e plataformas.

Figura 2.6 - Modelo esquemático do primeiro módulo de torre autoportante tubular, seção estreita.



(Fonte: o autor)

2.3.2. Fundações

Torres autoportantes requerem fundações mais pesadas que os modelos com estais, contudo, ocupam áreas relativamente menores. Os tipos mais utilizados para fundações de torres são tubulões a céu aberto e lajes de fundação.

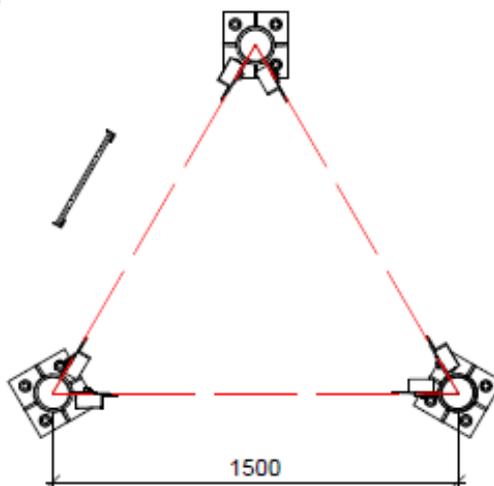
O primeiro tipo é geralmente mais econômico, e de boa funcionalidade na maioria dos solos, com profundidades entre 3 e 6m, e diâmetro mínimo de 700mm para permitir a passagem de uma pessoa. Contudo, sua execução nem sempre é fácil, pois existe o risco de desabamento das paredes durante a escavação. Acidentes com fatalidades por vezes ocorrem neste tipo de fundação, e por isso é muitas vezes evitado.

A fundação tipo laje é uma boa solução para torres, uma vez que são combinados os esforços de tração e compressão num mesmo elemento estrutural. Ou seja, a medida que, sob ação do vento, certos montantes tentam arrancar a fundação do solo, os montantes comprimidos a empurram para baixo. É um elemento, contudo, que requer mais aço e uma armação adequada, para resistir aos esforços de flexão e o momento de tombamento.

Neste trabalho, não será abordada a interação solo-estrutura, e portanto, as fundações serão consideradas como “engastes” diante dos esforços estáticos e dinâmicos. Uma análise dinâmica que envolve a fundação se faz imprescindível no caso de ações sísmicas, as quais não são estudadas no presente momento.

A figura 2.7 apresenta o gabarito de fundação da torre ilustrada na figura 2.5, mostrando as placas de base e sua disposição sobre o terreno.

Figura 2.7 - Base de torre autoportante triangular.



(Fonte: o autor)

2.4. Carregamento em torres para telecomunicações

2.4.1. Antenas

A principal função das torres para telecomunicações é a sustentação de antenas e equipamentos necessários à irradiação e/ou ao recebimento de sinais, quer sejam para rádio, televisão ou telefonia.

Existem diferentes tipos e formatos de antenas, embora as mais comuns (e que produzem maiores solicitações) são as circulares, pois possuem grande área exposta ao vento, se comparada com antenas setoriais estreitas. Seu peso deve ser adicionado à análise estrutural, contudo, a carga de vento gerada pela antena é significativamente mais relevante para o comportamento da estrutura.

Ao se elaborar o projeto estrutural de uma torre, é bem provável que o projetista tenha fácil acesso à quantidade de antenas e suas respectivas dimensões. Em alguns casos, quando o proprietário da torre realiza um estudo mais preciso, também é possível saber a altura exata de instalação de cada antena. Assim, ao se realizar o projeto, podem-se inserir as cargas de forma correta, no local aproximado onde as cargas reais irão acontecer.

Figura 2.8 - Torre autoportante com antenas



(Fonte: o autor)

Na prática, a verdade é que isto quase nunca ocorre. Com a popularização dos provedores de internet, e a expansão da telefonia celular, os proprietários de torres cada vez mais desconhecem os fundamentos para projetar tais estruturas. E, desta forma, é comum que o projetista conheça apenas um dado chamado “área exposta ao vento”, ou AEV. Ou seja, ele considerará que a torre possui um “painel” com a determinada área exposta ao vento, sobre o qual incidirá a pressão do vento, produzindo uma carga horizontal.

Ele, certamente, também não saberá a quantidade de antenas e nem as alturas de instalação. Assim, faz-se por bem considerar a área exposta ao vento no ponto mais alto da torre.

Além das antenas previstas em projeto (ou AEV prevista em projeto), outro caso bem comum é a adição de novas antenas após instalação da torre. Isto pode ocorrer a qualquer momento, e não se pode determinar com brevidade as alturas, tipos e dimensões das antenas que serão instaladas.

2.4.2. Cabeamento

Os cabos representam tanto uma área exposta ao vento quanto um carregamento vertical considerável. É comum fixar todos os cabos da estrutura numa esteira vertical, a qual geralmente é integrada à escada, para facilitar a instalação dos cabos, pois um operário pode descer pela escada e fixar os cabos sem a necessidade de deixar a segurança do guarda-corpo.

O peso dos cabos é distribuído ao longo da esteira, e esta estrutura, que geralmente é leve, é fixada à torre em vários pontos. Assim, o peso também é distribuído ao longo da torre. A área dos cabos exposta ao vento também é distribuída por metro linear de torre.

2.4.3. Plataformas

Em torres antigas é comum encontrar grandes plataformas externas, com chapas de piso pesadas, guarda-corpo robusto, e estrutura auxiliar para sustentar vários suportes de antenas. Os projetos mais modernos tendem a ser mais “enxutos”, colocando as plataformas dentro da torre, assim reduzindo a área de chapa e a quantidade de peças de apoio.

Seja como for projetada, plataformas geralmente aplicam cargas verticais que se somam ao peso próprio dos elementos da torre. Como não é habitual o trabalho cotidiano de pessoas numa torre, não se faz necessário carregar uma plataforma com cargas permanentes elevadas. Estas plataformas devem ser capazes de suportar um certo número de indivíduos durante uma manutenção e/ou instalação de equipamentos, mas este pode ser considerado um carregamento que ocorre poucas vezes.

2.5. Suportes para antena

2.5.1. Suporte de face

O suporte face é assim conhecido por posicionar a antena dentro de uma das faces da torre. Geralmente é composto por duas cantoneiras com tamanho suficiente para serem fixadas de um montante ao outro, com vários furos em seu comprimento. Estes furos permitem a instalação do suporte da antena em qualquer ponto dentro da face da torre.

Mesmo estando na face, é possível que a antena seja rotacionada a fim de se obter o alinhamento correto. Na figura 2.9, pode-se observar uma antena posicionada num suporte de face, com rotação aplicada em relação ao plano inclinado da torre.

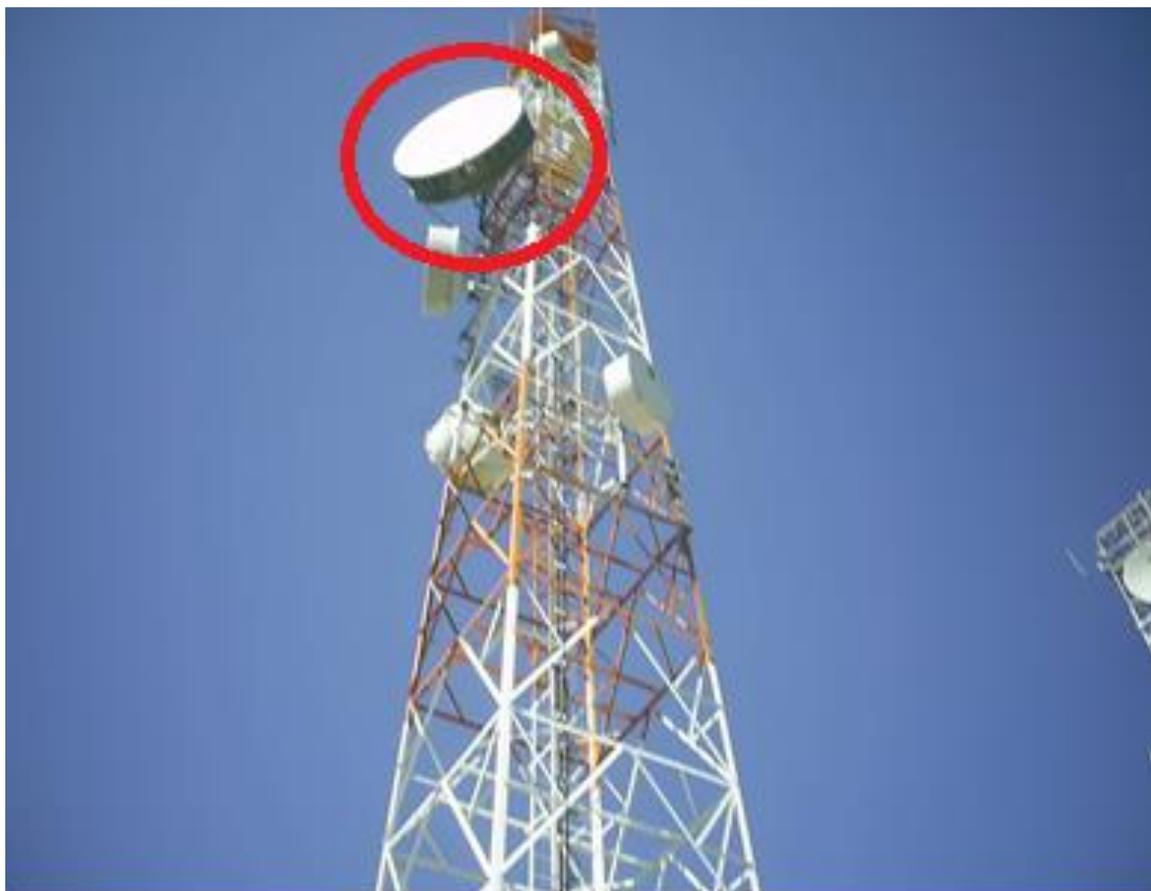
A figura 2.9 apresenta justamente a torre real do primeiro caso, tratada no item 1.3, desta dissertação. Fica evidente que, mesmo com um suporte paralelo à face da torre, a rotação da antena a coloca numa posição excêntrica, gerando esforços de torção não previstos em projeto.

O suporte de face, contudo, é mais seguro com relação ao efeito de torção local, pois como os esforços são distribuídos para dois montantes, não ocorre torção localizada e, portanto, o risco de fratura por fadiga é minimizado. O problema de torção global na torre, contudo, ainda ocorre.

2.5.2. Suporte de canto

Geralmente utilizados para antenas pequenas, os suportes de canto são fixados a um único montante da torre por meio de abraçadeiras, permitindo seu posicionamento em qualquer altura. As abraçadeiras fixam um suporte tubular à cantoneira de montante, com afastamento que varia entre 300 a 500mm.

Figura 2.9 - Antena posicionada em suporte de face.

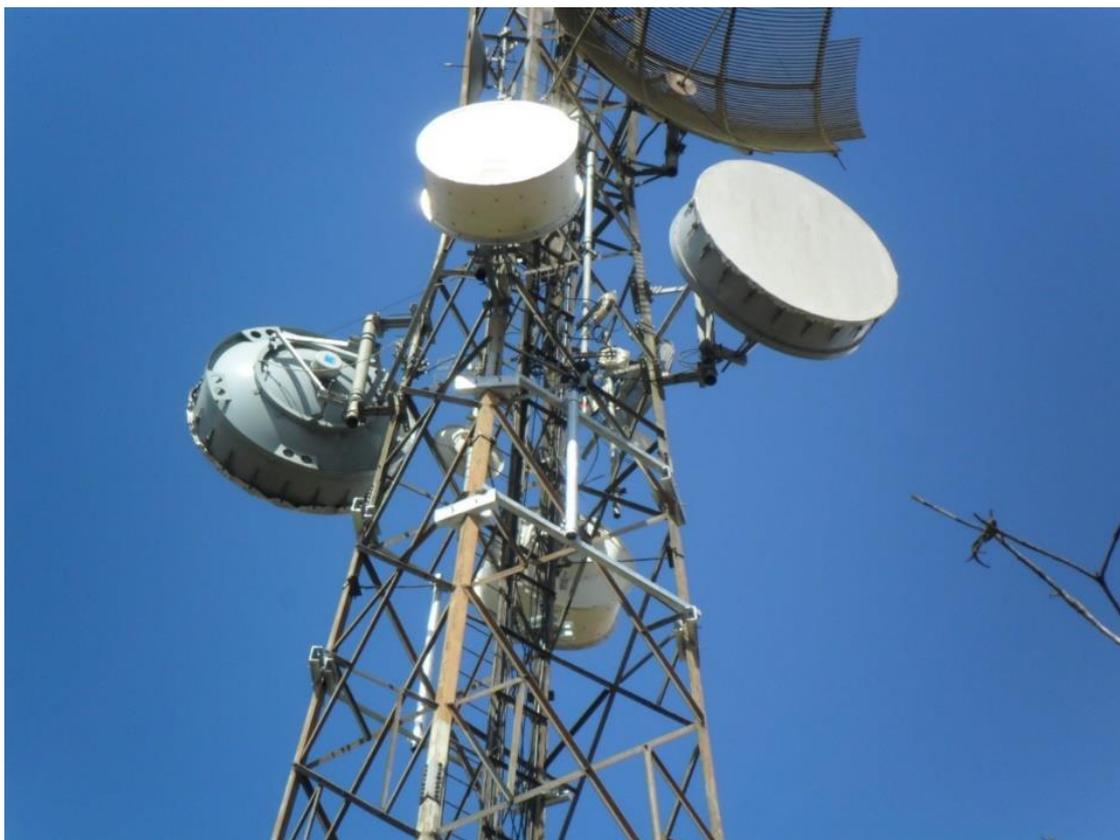


(Fonte: o autor)

Quando utilizados para sustentar antenas pequenas, os suportes de canto tem pouca influência no comportamento estrutural. Contudo, em alguns casos são utilizados para antenas grandes, com 2 ou 3m de diâmetro, como pode-se ver na figura 2.10.

Quando antenas de grande porte são fixadas aos suportes de canto, geralmente são colocadas cantoneiras de travamento ligando as antenas a pontos secundários da torre. Estas peças, contudo, muitas vezes são esbeltas demais para impedir a vibração da antena, e mesmo que esta vibração seja suprimida a ponto de permitir a transmissão do sinal, pode não ser suficiente para eliminar o risco de fraturas por fadiga.

Figura 2.10 - Suportes de canto com antenas de grande porte.

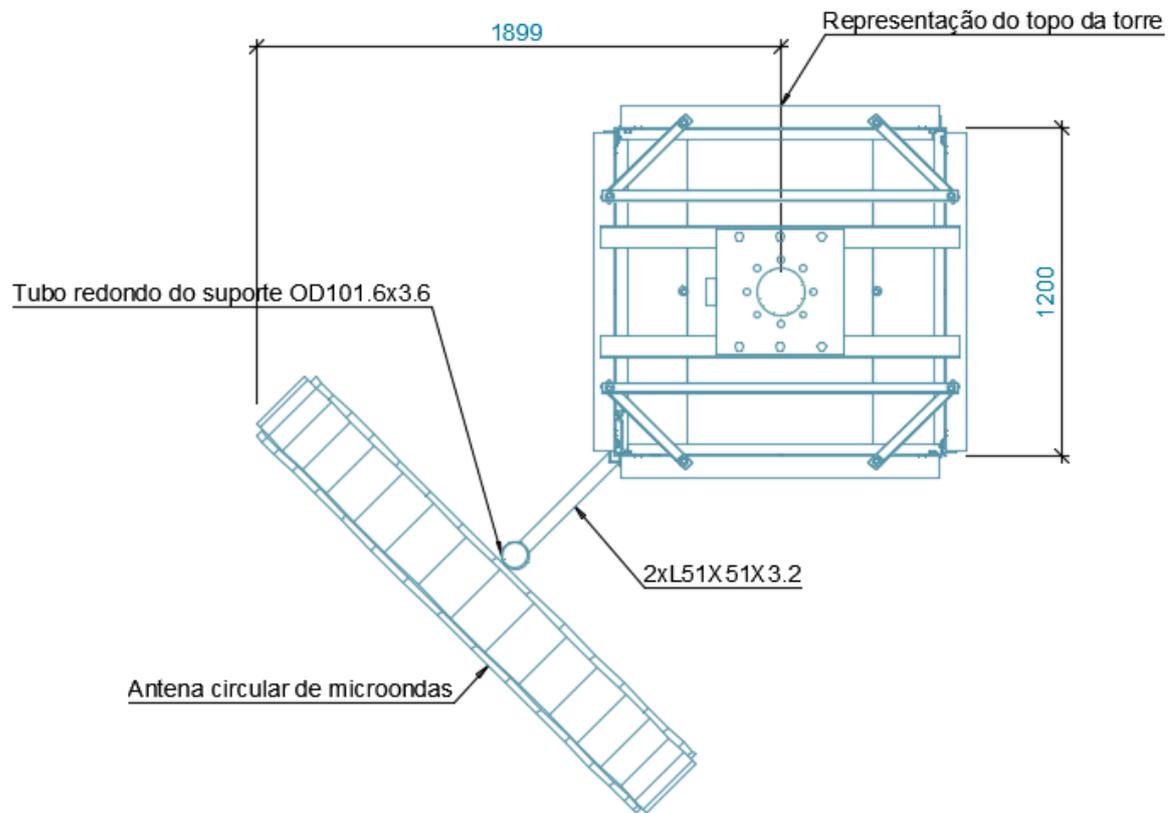


(Fonte: o autor)

Por serem mais práticos, leves e econômicos, os suportes de canto são muito mais utilizados que os de face. Por agravarem o problema de torção localizada, são foco deste trabalho e, portanto, deste ponto em diante, o estudo em questão trata apenas dos suportes de canto.

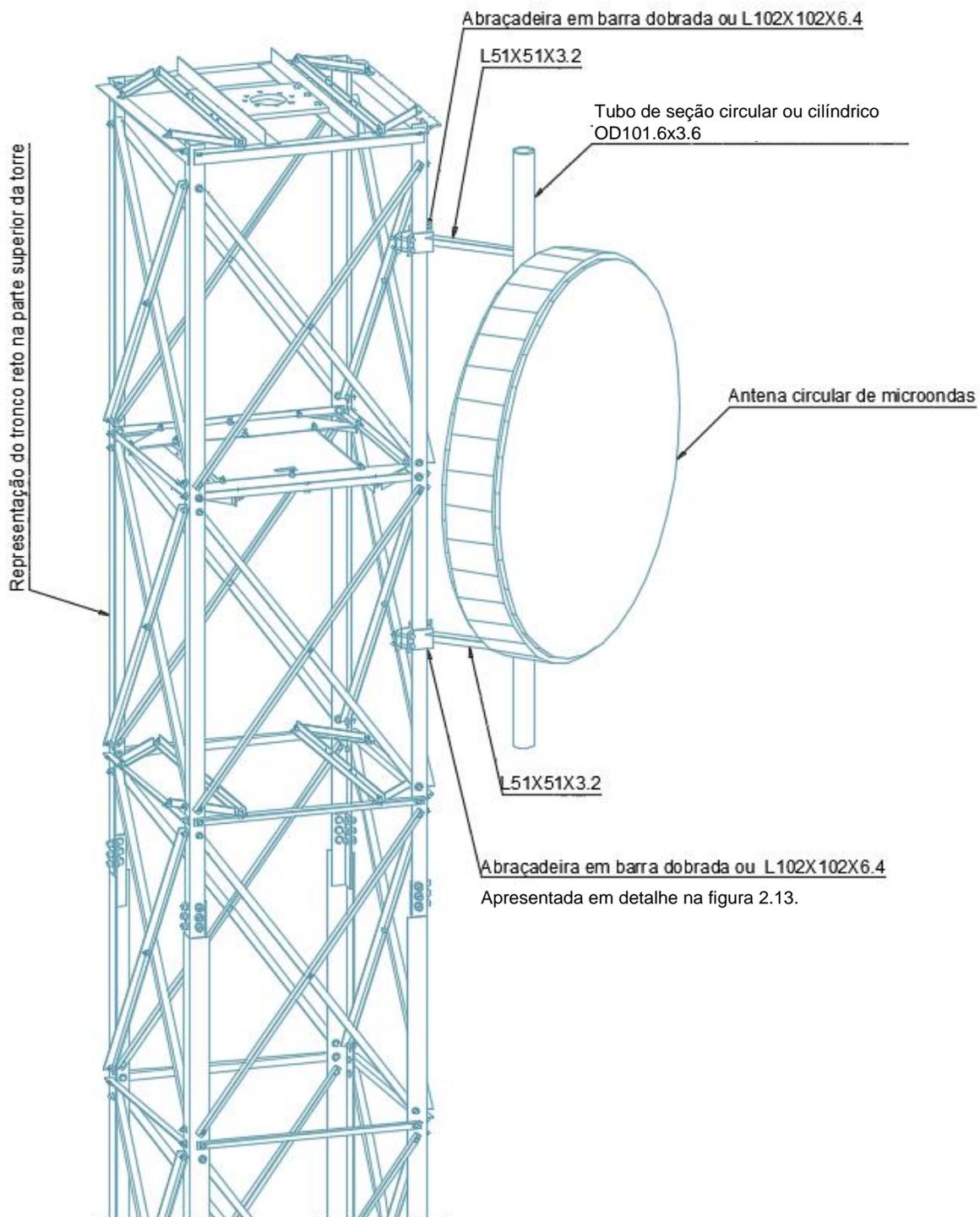
A figura 2.12 apresenta um modelo tridimensional de torre com um suporte de canto para uma antena de grande porte. Na figura 2.11 pode-se visualizar a ligação vista de cima, com apresentação de cotas onde fica evidente a excentricidade causada pelo afastamento da antena.

Figura 2.11 - Vista superior do topo da torre.



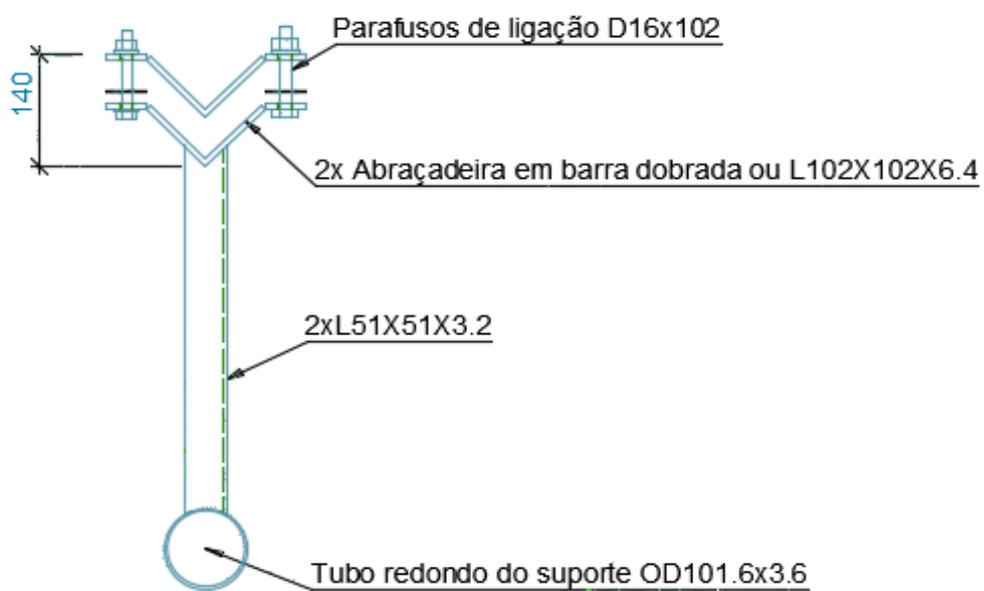
(Fonte: o autor)

Figura 2.12 - Representação tridimensional da torre com suporte de canto.



(Fonte: o autor)

Figura 2.13 - Detalhe do suporte de canto.



(Fonte: o autor)

3. ANÁLISE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

3.1. Introdução

O estudo dinâmico das estruturas tem como objetivo analisar tensões e deslocamentos desenvolvidos por um dado sistema estrutural quando o mesmo está sujeito à um carregamento dinâmico arbitrário. Define-se um carregamento como “dinâmico” quando o mesmo possui variação de magnitude, direção e/ou posição ao longo do tempo.

Em geral, a resposta estrutural a qualquer carregamento dinâmico é expressa basicamente em termos de deslocamentos da estrutura. Então, uma análise determinística conduz diretamente aos deslocamentos ao longo do tempo, também chamada de “time-history”, a partir de um carregamento conhecido e também variável no tempo. Outras respostas importantes, como tensões, deformações, forças internas, etc., são geralmente obtidas numa segunda fase da análise.

Na análise linear de uma estrutura, é conveniente distinguir entre os componentes estáticos e dinâmicos de um conjunto de carregamentos aplicados, e avaliar a resposta a cada tipo de carregamento separadamente, e então superpor os efeitos a fim de se obter a solicitação final.

A análise dinâmica de um problema estrutural difere da abordagem mediante carregamento estático em dois aspectos importantes:

A primeira diferença a ser percebida é a variabilidade no tempo que o problema dinâmico apresenta. Devido ao fato de tanto o carregamento quanto a resposta da estrutura variarem no tempo, é evidente que o problema dinâmico não tem uma única solução, ao contrário do problema estático. O projetista deve, então, estabelecer uma sucessão de soluções correspondentes a todo o período de interesse. Isto posto, percebe-se claramente que uma análise dinâmica é mais complexa e demorada que uma análise estática.

O outro aspecto fundamental é o fato de que em uma estrutura sujeita a um carregamento estático, os esforços internos e flechas assumidas dependem somente do carregamento imposto, e podem ser calculados por equilíbrio estático de forças. Por outro lado, se o carregamento é aplicado dinamicamente, os deslocamentos resultantes da estrutura não dependem somente da solicitação, mas também das forças de inércia que se opõem às acelerações que as produzem.

Em resumo, se as forças de inércia representarem uma porção significativa do carregamento total equilibrado pelos esforços internos elásticos, então o caráter dinâmico do problema deve ser considerado na solução da estrutura. Entretanto, se os movimentos são tão lentos que as forças de inércia se apresentam muito pequenas, a análise da resposta da estrutura para qualquer instante pode ser realizada simplesmente mediante análise estática.

3.2. Caracterização de um sistema dinâmico

Conforme explicado anteriormente, a principal diferença entre um sistema estático e um dinâmico é a resposta da estrutura em face a um carregamento que varia ao longo do tempo. Num sistema estático, como isto não é levado em consideração, as acelerações e velocidades são nulas. Ou seja, considera-se que o carregamento não varia em magnitude, sentido ou posição, e assim as deformações não possuem variações no tempo.

Portanto, com acelerações e velocidades nulas, a equação para a solução estática da estrutura considera apenas as constantes de rigidez dos elementos, os deslocamentos nodais, e as forças aplicadas.

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (3.1)$$

Onde:

$[K]$ = matriz de rigidez da estrutura

$\{u\}$ = vetor de deslocamentos da estrutura

$\{F\}$ = vetor de forças aplicadas

Ou seja, a matriz de rigidez contém as propriedades geométricas e dos materiais que compõe a estrutura. Quando são aplicados os carregamentos, no vetor de Forças, a estrutura sofre deformações, medidas como “deslocamentos nodais”, os quais são apresentados no vetor de deslocamentos.

Quando analisamos a estrutura, do ponto de vista dinâmico, as acelerações e velocidades passam a ter relevância e, desta forma, não são mais igualadas a zero, deixando a seguinte equação diferencial completa.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (3.2)$$

Onde:

$[M]$ = matriz de massa da estrutura

$\{\ddot{u}\}$ = vetor de acelerações da estrutura

$[C]$ = matriz de amortecimento da estrutura

$\{\dot{u}\}$ = vetor de velocidades da estrutura

$[K]$ = matriz de rigidez da estrutura

$\{u\}$ = vetor de deslocamentos da estrutura

$\{F(t)\}$ = vetor de forças em função do tempo

Alternativamente, para análises mais simples, desprezando-se as forças de amortecimento, e assim a equação 3.2 pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (3.3)$$

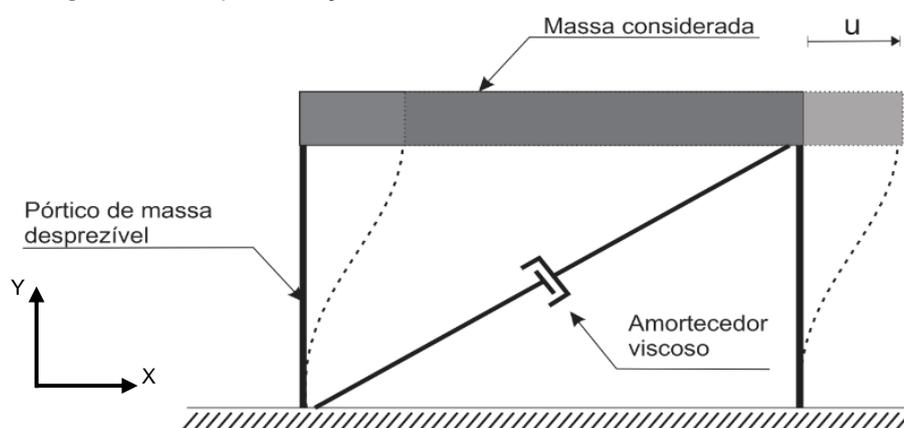
3.3. Sistemas de um grau de liberdade

Para estruturas simples, onde há apenas uma massa e uma única direção para o deslocamento, podemos classificar o sistema como de “um grau de liberdade” (ou em inglês, SDF, Single Degree of Freedom)

Como exemplo de sistema de um grau de liberdade tem-se o pêndulo, onde a massa está concentrada na extremidade e há apenas um deslocamento angular a ser considerado. Um outro exemplo pode ser representado por uma estrutura mais usual, como uma caixa d’água. Independente de quantas colunas a sustentem, podemos considerar como um sistema de um grau de liberdade, onde a massa está concentrada no reservatório, e a análise pode considerar deslocamentos horizontais, verticais ou rotacionais. A figura 3.1 ilustra este caso.

CHOPRA, 1995, ressalta que o número de deslocamentos independentes requeridos para definir o movimento de cada massa com relação à posição inicial é o que define o número de graus de liberdade do sistema para uma análise dinâmica. Embora mais graus de liberdade sejam necessários para definir as propriedades de rigidez do sistema, este não será necessariamente o número de graus de liberdade do sistema dinâmico. Por exemplo, tomando um pórtico com colunas e vigas para sustentação de uma laje, podemos considerar que a massa está concentrada na laje. Contudo, para determinar corretamente a rigidez, perante o deslocamento horizontal, é preciso levar em conta o deslocamento horizontal e as duas rotações nas extremidades da viga, ou seja, são pelo menos três graus de liberdade para o problema estático.

Figura 3.1 - Representação do sistema massa mola com amortecimento viscoso.



(Fonte: Chopra, *Dynamic of Structures*, 1995)

O sistema dinâmico, contudo, pode ser classificado como sendo de apenas um grau de liberdade, já que a massa encontra-se concentrada na laje e existe apenas um deslocamento a ser considerado.

Na maioria dos casos práticos, as estruturas reais não podem ser idealizadas como um sistema de um grau de liberdade, já que a massa está distribuída em toda estrutura. Neste caso, os deslocamentos de cada massa são relevantes para a resposta final da estrutura, e a estes chamamos de “Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade”, que são abordados mais adiante.

3.4. Força de amortecimento

O processo pelo qual as vibrações livres diminuem gradualmente de amplitude é chamado de amortecimento. Quando amortecido, a energia de vibração do sistema é dissipada por diversos mecanismos, sendo o mais comum o amortecimento natural. Em outras palavras, grande parte da energia é dissipada pelo atrito interno quando o sólido é deformado.

Na prática, estruturas reais possuem diversos outros meios para dissipação de energia, como o atrito entre ligações metálicas, abertura e fechamento de microfissuras no concreto, e o atrito entre a estrutura e elementos não estruturais como paredes. É muito difícil identificar ou descrever matematicamente cada um destes mecanismos dissipadores de energia.

Assim, o amortecimento em estruturas é costumeiramente idealizado, e para um sistema de um grau de liberdade, uma solução satisfatória é a utilização de amortecimento viscoso. O coeficiente de amortecimento é selecionado de tal forma que a energia cinética seja dissipada de forma equivalente a um mecanismo de amortecedor viscoso.

A força de amortecimento é relacionada com a velocidade num sistema que tem amortecimento viscoso, sendo esta relação expressa pela seguinte equação:

$$f_D = c \dot{u} \quad (3.4)$$

Onde:

f_D = Força de amortecimento

c = coeficiente de amortecimento viscoso

\dot{u} = velocidade

O coeficiente de amortecimento viscoso possui unidades de força x tempo/comprimento. Diferente da rigidez da estrutura, o coeficiente de amortecimento não pode ser calculado a partir das dimensões de seus elementos estruturais. Isto não é uma surpresa, pois, como dito anteriormente, não é possível identificar todos os mecanismos que dissipam a energia nas estruturas reais.

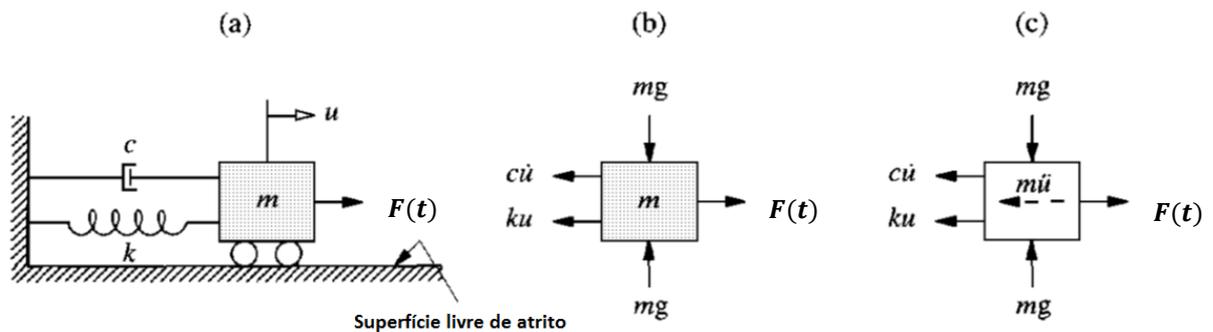
O amortecimento viscoso equivalente tem como objetivo modelar a dissipação de energia dentro do limite elástico da estrutura. Fora do regime elástico de deformações, o coeficiente de amortecimento pode variar com a amplitude das deformações. Esta não linearidade das propriedades de amortecimento é comumente desconsiderada na análise dinâmica. Esta simplificação é satisfatória selecionando-se coeficientes de amortecimento apropriados para a amplitude de deformação esperada, usualmente tomada como o limite de deformação elástica da estrutura.

3.5. Sistema massa-mola amortecido

O sistema clássico para um grau de liberdade é idealizado como um sistema massa-mola, conforme apresentado na figura 3.1. Considerando uma simplificação onde a mola e o amortecedor tem massa desprezíveis, e há apenas massa concentrada num objeto que se desloca numa única direção, digamos eixo X, por exemplo, tem-se, um sistema de um grau de liberdade (SDF).

Na figura 3.2 mostram-se as forças atuando na massa, entre as quais estão: a força elástica, exercida pela mola; a força de amortecimento resistente ao movimento, modelada como um amortecedor viscoso.

Figura 3.2 - Representação de forças no sistema massa-mola amortecido.



(Fonte: Chopra, *Dynamic of Structures*, 1995)

A partir deste sistema, é possível formular a Equação Diferencial que rege o movimento, utilizando a segunda lei de movimento de Newton, ou o princípio de D'Alambert, assim podemos escrever:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (3.5)$$

3.6. Frequência natural, angular e período

Antes de partir para a solução das equações diferenciais, devemos observar algumas relações entre frequências e períodos de vibração. Numa análise modal, existem "n" modos de vibração, cada qual com suas frequências naturais e períodos. Geralmente, os primeiros modos, correspondentes às menores frequências, são os mais relevantes, pois possuem as maiores amplitudes.

A frequência angular (ou frequência natural angular) é uma relação entre a rigidez ao movimento e a massa, expressa pela seguinte equação:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (3.6)$$

Onde:

ω = frequência angular do movimento, em radianos por segundo;

K = rigidez da estrutura na direção do movimento;

m = massa.

O período diz respeito ao tempo necessário para que a vibração complete um ciclo, apresentado em segundos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.7)$$

Onde:

T = período, em segundos;

ω = frequência angular do movimento, em radianos por segundo;

Por fim, a frequência natural do sistema, expressada em Hertz, é calculada como o inverso do período, e é fornecida pela seguinte equação:

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.8)$$

Onde:

f = frequência natural, em hertz;

T = período, em segundos.

3.7. Combinação de respostas estática e dinâmica

Numa aplicação prática é preciso determinar as forças na estrutura, incluindo aquelas que existem antes da excitação dinâmica, bem como aquelas oriundas das vibrações. Para um sistema linear, o total de forças pode ser determinado por combinação de resultados de duas análises distintas: a análise estática da estrutura, devida às cargas de utilização, variação de temperatura, peso próprio, etc.; e, em segundo lugar, a resposta dinâmica devida à variação ao longo do tempo. A superposição direta dos resultados destas duas análises é válida somente para sistemas lineares.

Para análises não lineares não é possível ser feita a superposição dos efeitos. A análise dinâmica de tais sistemas deve reconhecer as forças e deformações que já existem na estrutura antes da excitação dinâmica. Isto é necessário para estabelecer a rigidez inicial e as propriedades elasto-mecânicas da estrutura antes de se iniciar a análise dinâmica.

3.8. Métodos para solução da equação diferencial

A equação diferencial de movimento para um sistema linear com um grau de liberdade (SDF) sujeito a forças externas é de segunda ordem, e pode ser escrita da seguinte conforme a equação 3.5.

As condições iniciais são descritas pelo deslocamento inicial $u(0)$ e pela velocidade inicial $\dot{u}(0)$, ambas no tempo zero, especificadas para definir o problema. Tipicamente, o estudo se inicia com a estrutura em repouso, então o deslocamento e velocidade iniciais são iguais a zero.

3.8.1. Solução clássica para sistema não amortecido

A solução completa da equação diferencial linear é a soma das soluções homogênea $u_c(t)$ e da particular $u_p(t)$, ou seja, $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$. Uma vez que a equação diferencial é de segunda ordem, duas constantes de integração estão envolvidas. Elas aparecem na função complementar e são resolvidas a partir do conhecimento das condições iniciais.

De forma geral, a solução adotada para a função homogênea é:

$$u_h(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \quad (3.9)$$

E a solução particular será dada por:

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k} \quad (3.10)$$

A solução completa será dada pela soma das duas equações, 3.9 e 3.10:

Considerando um sistema com as seguintes condições iniciais $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$, no instante $t(0) = 0$. Para estas condições, as constantes A e B podem ser determinadas mediante:

$$A = -\frac{F_0}{k} \quad B = 0$$

Então, satisfeitas estas condições iniciais, substituindo na equação 3.10 temos:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos\omega_n t) \quad (3.11)$$

A equação 3.11 representa a técnica mais utilizada na solução de equações diferenciais para vibrações livres e excitadas por forças externas.

3.9. Vibração livre não amortecida

Em alguns casos, a vibração ocorre de forma livre, ou seja, o sistema sofre uma deformação inicial devida a uma solicitação externa e, num dado momento, tal solicitação se torna nula. Ou seja, o sistema é tirado de sua posição de equilíbrio estático e suas massas sofrem deslocamentos $u(0)$ e velocidades $\dot{u}(0)$ no tempo zero, definido como o instante em que o movimento se inicia.

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

Submetida a estas condições iniciais, a equação diferencial homogênea terá a seguinte solução padrão:

$$u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t \quad (3.12)$$

Onde a frequência angular natural é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.13)$$

3.10. Vibração livre com amortecimento viscoso

Assim como no parágrafo anterior, este efeito é causado quando um sistema sofre uma deformação inicial e em seguida é deixado em vibração livre. Contudo, desta vez considerando o amortecimento viscoso equivalente, onde a Equação Diferencial Ordinária (EDO) será dada por:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (3.14)$$

Que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{u}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{u}_i + \omega_i^2u_i = 0 \quad (3.15)$$

Onde o coeficiente de amortecimento é dado pela seguinte expressão:

$$\zeta_i = \frac{c_i}{2m_i\omega_i} = \frac{c_i}{c_{cr_i}} \quad (3.16)$$

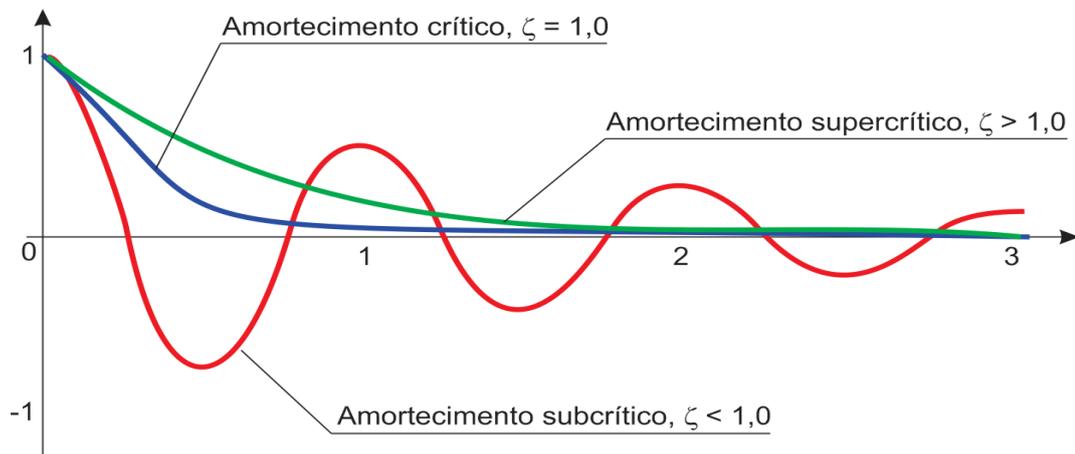
De fato, o amortecimento pode ser classificado em três tipos: crítico, supercrítico e subcrítico. Esta classificação é determinada pela seguinte relação:

Para, $\frac{c_i}{c_{cr_i}} = 1$, tem-se amortecimento crítico;

Para, $\frac{c_i}{c_{cr_i}} > 1$, tem-se amortecimento supercrítico;

Para, $\frac{c_i}{c_{cr_i}} < 1$, tem-se amortecimento subcrítico.

Figura 3.3 - Gráfico de amortecimento crítico, supercrítico e subcrítico.



(Fonte: o autor)

Para esta dissertação, é utilizado o amortecimento subcrítico, que representa a condição mais provável para o amortecimento proveniente dos elementos estruturais. Em estruturas feitas predominantemente de aço, por exemplo, é aceitável adotar um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,02$, ou 2%.

A solução padrão para o sistema com vibração livre com amortecimento subcrítico é dada pela função:

$$u_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t} \left[(u_0 \cos(\omega_{di} t) + \frac{\ddot{u}_0 + (\zeta_i \omega_i u_0)}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t)) \right] \quad (3.17)$$

Onde a frequência natural amortecida pode ser dada pela função:

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (3.18)$$

3.11. Vibração harmônica ou periódica com amortecimento viscoso

Diferente do caso anterior, vibrações forçadas podem ocorrer quando o sistema estrutural é submetido a uma força harmônica ou periódica. Neste caso, a estrutura vibra de acordo com a variação da força ao longo do tempo, e geralmente é modelada como uma função senoidal, do tipo $F(t) = F_0 \text{sen} \omega t$, onde F_0 é a amplitude ou valor máximo da força, e ω é a frequência de excitação.

Assim, a equação diferencial que governa a vibração harmônica do sistema com amortecimento será dada por:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F_0\} \text{sen} \omega t \quad (3.19)$$

Neste trabalho, contudo, não nos aprofundaremos na questão das vibrações harmônicas ou periódicas, uma vez que a força predominante que atua em torres para telecomunicações é o vento, com um padrão aleatório.

3.12. Vibração arbitrária com amortecimento viscoso

Em muitos casos práticos, a excitação dinâmica não pode ser classificada como harmônica ou periódica, como é o caso do vento. Nestes casos, a análise se interessa

na resposta do sistema diante de uma força que varia ao longo do tempo de forma arbitrária.

Neste caso, a equação diferencial pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (3.20)$$

Sujeita às condições iniciais:

$$u_i(0) = 0 \quad \dot{u}_i(0) = 0$$

No desenvolvimento da solução geral, $F(t)$ é interpretada como uma sequência de impulsos com duração infinitesimal, e a resposta do sistema a esta força é a soma das respostas individuais destes impulsos. Estas respostas individuais podem ser convenientemente reescritas em termos da resposta do sistema para um impulso único.

Mais adiante, nesta dissertação, é visto como resolver o sistema estrutural a fim de encontrar a resposta dinâmica causada pela vibração livre (quando o vento atua e em seguida deixa de existir) e também pela vibração arbitrária causada pelas rajadas do vento.

3.13. Solução do sistema em vibração livre com amortecimento viscoso

Conforme explicado anteriormente, este trabalho tem foco na vibração livre da antena, ou seja, quando o vento atua e, em seguida, tem sua pressão reduzida a zero. Assim, o sistema é retirado de sua condição inicial e fica em vibração livre em torno da posição indeformada.

No capítulo 6 é apresentada a análise matemática do problema, onde é visto como foi adaptada a questão do amortecimento não clássico, composto pelos dois materiais envolvidos (aço e neoprene). Também é apresentado o esquema utilizado

para redução do número de graus de liberdade do sistema utilizando uma condensação estática.

Por hora, é estabelecida a solução adotada para o sistema em vibração livre, descrita pela equação 3.21.

$$u_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t} \left[(u_0 \cos(\omega_{di} t) + \frac{\ddot{u}_0 + (\zeta_i \omega_i u_0)}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t)) \right] \quad (3.21)$$

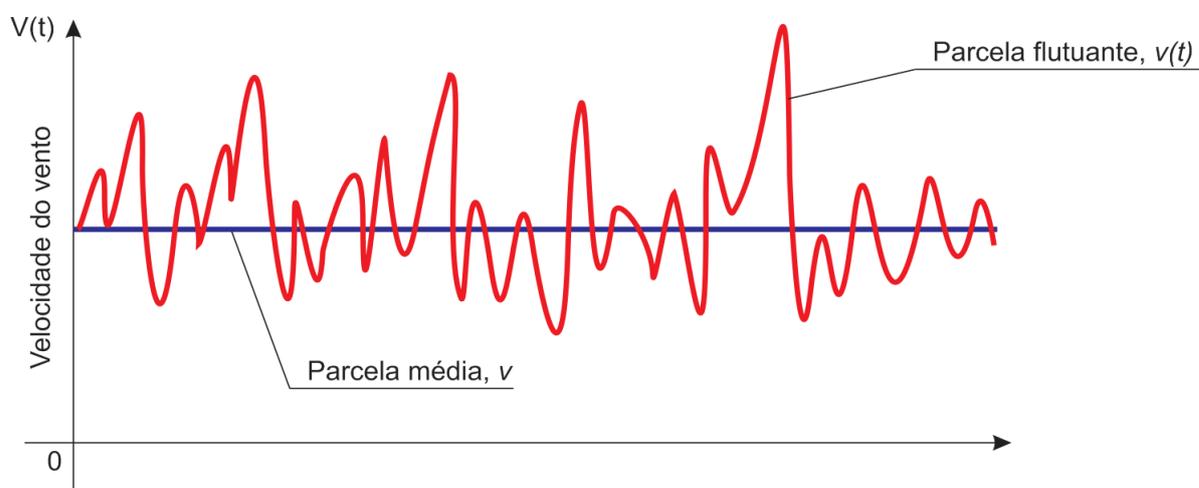
4. AÇÃO DINÂMICA DO VENTO

É razoável dizer que a ação mais importante a se considerar no projeto estrutural de torres para telecomunicações é aquela oriunda do vento. Embora as cargas provocadas pelo vento possam ser simplificadas e tomadas como cargas estáticas de pressão, seu comportamento é mais semelhante a uma função temporal aleatória. Esta interpretação sugere a utilização de modelos dinâmicos capazes de representar a natureza não determinística do problema.

Desta forma, pode-se expressar a velocidade do vento com uma função temporal constituída por uma parte média e uma flutuante:

$$V(t) = v + v(t) \quad (4.1)$$

Figura 4.1- Histórico estimado de velocidade do vento.



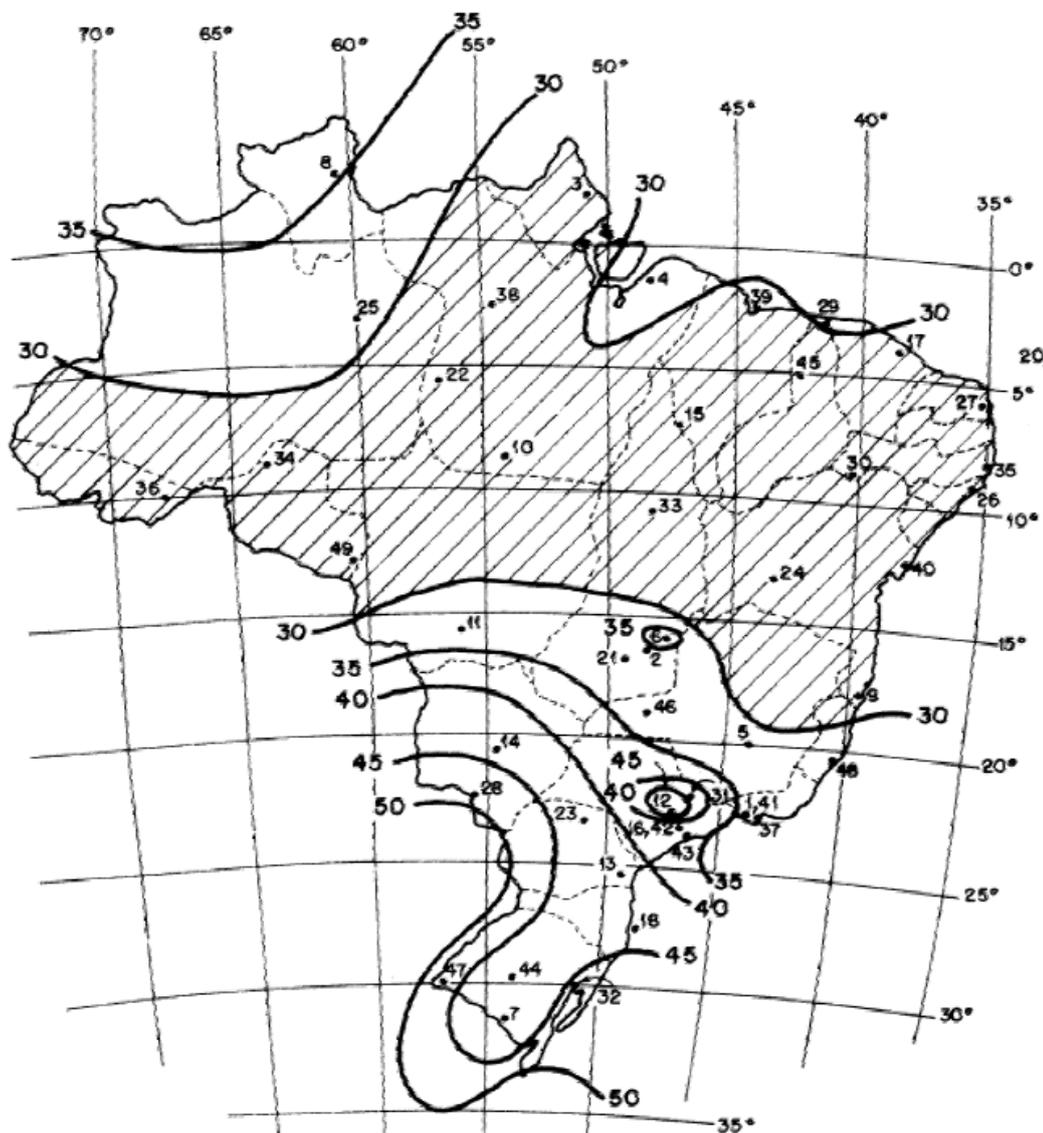
(Fonte: o autor)

A velocidade média do vento tem seu valor dependente de dados meteorológicos, sendo comumente medida com base em uma hora de observação, ou seja, trata-se da velocidade média horária.

Não havendo dados específicos para um determinado local, é possível estimar a velocidade média através das isopletas contidas na NBR 6123. Para todo o território

nacional, são fornecidas as curvas de velocidade de rajada de 3s, medidas a 10m de altura e associada a uma probabilidade anual de ocorrência de 2%.

Figura 4.2 - Diagrama de isopletas.



(Fonte: NBR 6123)

4.1. Vibrações causadas pelas rajadas de vento

Um dos primeiros métodos para determinação dos efeitos dinâmicos das rajadas foi apresentado por RAUSCH, baseado em estudos estatísticos e incorporado à norma alemã da época.

Segundo RAUSCH, quando surge uma rajada de vento a pressão dinâmica média, \bar{q} , cresce subitamente até um valor q_r , permanece constante em um pequeno intervalo de tempo e volta a cair para \bar{q} . RAUSCH afirma que, com base nas observações existentes, não se pode concluir que exista uma periodicidade das rajadas, e nem que sua duração seja sempre a mesma.

Ou seja, o vento não pode ser considerado como originando uma força periódica, que possa causar efeitos perigosos de ressonância. Trata-se de uma série de cargas e descargas com valores e durações variáveis, separadas por intervalos desiguais de tempo.

É interessante assinalar que, na época, só se pensava em problemas de vibrações excessivas causadas por um vento com várias rajadas em um regime supostamente periódico. Pensava-se apenas em um fenômeno determinístico e não aleatório. Só muito mais tarde, na década de 60, é que Davenport introduziu na engenharia estrutural conceitos já utilizados na engenharia mecânica, elétrica e de comunicações: os conceitos de admitância mecânica e espectro de energia.

Esta concepção, então vigente, está claramente exposta no que escreveu, em 1934, Vandepierre, “Nós não dizemos que a frequência do vento não possa causar algum acidente devido à ressonância, mas nós pensamos que este fato, se ele acontecer, é puramente fortuito, imprevisível e é o resultado de um acaso extraordinário, escapando assim a todo cálculo.”

4.2. Processo de Davenport (fator de rajada)

A resposta longitudinal da maioria das estruturas expostas ao vento deve-se principalmente à componente longitudinal da turbulência do vento incidente, superposta ao deslocamento médio causado pela velocidade média do vento.

Uma conceituação física pode ser obtida com o conceito de comprimento de onda, o qual é definido por:

$$\lambda = \frac{\bar{V}}{f_r} = \bar{V} T \quad (4.2)$$

Onde:

\bar{V} = velocidade média do vento

f_r = frequência de incidência de rajadas

T = período, ou o inverso da frequência

O comprimento de onda é uma medida linear que indica as dimensões dos turbilhões que produzem cargas flutuantes na frequência f .

BLESSMANN, ressalta o conceito de escala da turbulência, a qual indica as dimensões dos maiores turbilhões em uma certa altura sobre o terreno. Também aponta que, para ser inteiramente efetivo e gerar um campo de pressões plenamente desenvolvido, o turbilhão tem que ser bem maior que a estrutura em questão.

Foi Davenport quem teve o mérito de adaptar à engenharia estrutural conceitos já conhecidos e em uso na engenharia mecânica e na de comunicações. Conforme suas próprias palavras: “Este modo de considerar as cargas das rajadas foi uma consequência natural de dois desenvolvimentos anteriores, primeiro o processo estatístico de Taylor para definir a turbulência, e, segundo, o desenvolvimento de processos similares na resposta de filtros eletrônicos a ruído aleatório no campo de comunicações. O método pareceu obviamente adequado para a carga de rajadas nas estruturas de engenharia civil”.

O método de Davenport abriu portas para diversos outros métodos similares baseados em conceitos probabilísticos, dentre os quais o Método do Vento Sintético, o qual será visto a seguir.

4.3. Método do vento sintético

Tendo como premissa os conceitos fundamentais estatísticos e as simulações numéricas, o Método do Vento Sintético confere elevado grau de semelhança ao comportamento real do vento, sendo, portanto, utilizado como referência em diversos

trabalhos acadêmicos, como os de Carril Junior (2000), de Menin (2002), de Lazanha (2003), de Obata, S. H. (2009), entre outros.

Segundo Obata, S. H. (2009), a simulação de Monte Carlo no Método do Vento Sintético utiliza uma série de dados aleatórios, executando transformadas de Fourier para as pressões flutuantes. Desta forma, são geradas amostras representativas com as propriedades estatísticas do vento. Esse procedimento tem como ponto de partida um espectro de potência, em que pode ser aplicado o processo de Davenport, a partir do qual se estabelece a pressão média e a pressão flutuante do vento.

É feita a decomposição da parcela flutuante em um número finito de funções harmônicas proporcionais à frequência ressonante da estrutura, com ângulos de fase variando aleatoriamente. Para cada parcela de pressão flutuante é aplicado o esforço do vento, tendo como base o conceito de correlação espacial, como se elas fossem transformadas em rajadas equivalentes, isto é, essa aplicação será realizada ao longo do tempo de duração da rajada, e em um ponto desfavorável da estrutura. Utilizando-se de funções de correlação horizontal e vertical, são obtidos valores para os demais pontos da estrutura. Este conceito é baseado na premissa de que não há incidência do vento em um determinado instante em vários pontos com amplitudes máximas.

Então, é obtido o espectro de resposta em que se determinam os valores de esforços ou deslocamentos máximos de cada aplicação, sendo o valor característico da resposta determinado estatisticamente pelo Teorema de Gumbel.

4.3.1. Resumo de aplicação do método

Franco (1993), propôs modelar as pressões flutuantes do vento através de um conjunto de “m” funções harmônicas, utilizando 11 funções ($m = 11$) e atribuindo valores aleatoriamente definidos para as fases dessas funções. Desta forma, foi possível obter respostas no domínio do tempo para deslocamentos, velocidades, acelerações e esforços solicitantes. As amplitudes dos harmônicos foram determinadas decompondo o espectro de potência das pressões flutuantes do vento em “m” partes, correspondentes às “m” funções, uma das quais com período coincidente com o período fundamental da estrutura analisada.

4.3.2. Espectro de potência

O método adota o espectro de potência proposto por Davenport, e determinado pela seguinte expressão:

$$\frac{fS(f)}{\sigma^2} = \frac{2X_1^2}{3(1 + X_1^2)^{\frac{4}{3}}} \quad (4.3)$$

Onde $S(f)$ é o espectro de potência, σ^2 representa a variância, e X_1 é obtido pela seguinte expressão:

$$X_1 = \frac{1200f}{\bar{V}(10)} \quad (4.4)$$

E $\bar{V}(10)$ representa a velocidade média horária para a cota z igual a dez metros em terreno aberto, e f representa a frequência em Hertz.

Utilizando-se a lei de potência proposta pela norma brasileira, a velocidade $\bar{V}(10)$ pode ser representada por:

$$\bar{V}(10) = 0,69V_0 \quad (4.5)$$

Onde V_0 é a velocidade básica da região, fornecida pela NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações (1988). Lanza (2003), tomando como base o trabalho de Franco (1993), utilizou a expressão de Davenport com uma ligeira modificação, passando a calcular a variável X_1 :

$$X_1 = \frac{1220f}{\bar{V}(10)} \quad (4.6)$$

Conforme apresentou Lanza (2003), pode-se representar o espectro cruzado de pressões com razoável precisão utilizando a seguinte expressão:

$$S_p(z, f) = (\rho c_a \bar{V}(z))^2 S(f) \quad (4.7)$$

Onde ρ é a massa específica do ar, e c_a é o coeficiente aerodinâmico. Assim, a equação 4.7 indica que, em qualquer ponto da estrutura o espectro de pressões pode ser considerado proporcional ao espectro de velocidades.

4.3.3. Decomposição das pressões flutuantes

Conforme explicado anteriormente, pode-se considerar que a pressão flutuante $p(t)$ constitui um processo aleatório, ergódico, gaussiano de média nula; podendo ser representada por uma integral de Fourier. Utilizando os termos de Fourier em um plano complexo e as frequências em Hz, podemos representar a pressão flutuante pela seguinte expressão:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) \cos[2\pi ft - \theta(f)] df \quad (4.8)$$

Onde f é a frequência em Hz, e as demais parcelas podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

$$C(f) = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)} \quad (4.9)$$

$$\theta(f) = \arctan \frac{B(f)}{A(f)} \quad (4.10)$$

$$A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cos[2\pi ft] dt \quad (4.11)$$

$$B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \text{sen}[2\pi ft] dt \quad (4.12)$$

Para um processo cuja média é igual a zero, como é o caso da parcela flutuante do vento, o valor quadrático médio assume o mesmo valor da variância, assim podemos definir:

$$E[p^2] = \sigma^2(p) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p^2(t) dt \quad (4.13)$$

Conforme apresentou Lanza (2003), na aplicação a uma função não-periódica para a qual exista a integral de Fourier, a equação 4.13 assume a seguinte forma:

$$\sigma^2(p) = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} C^2(f) df \quad (4.14)$$

No mesmo trabalho é mostrado que, quando $T \rightarrow \infty$, a variância ou valor quadrático médio podem ser escritos como:

$$\sigma^2(p) = \int_0^{\infty} S(f) df \quad (4.15)$$

Assim, percebe-se que a frequência f corresponde a uma contribuição elementar para o valor quadrático médio, e este, inerentemente, corresponde à área sob a curva do espectro de potência, $S(f)$. Esta propriedade, de associar a cada frequência uma contribuição para a avaliação total da parcela flutuante do vento, torna-se especialmente importante para a implantação do processo do vento sintético, como se vê a seguir.

Pode ser adotada uma conveniente simplificação para o método, utilizando um número finito de n funções harmônicas como uma aproximação para representação de $p(t)$. As funções devem ser convenientemente escolhidas de modo que o intervalo de frequências adotado realmente contenha o intervalo de interesse, que vai de aproximadamente $1,7 \times 10^{-3}$ Hz (600s) a 2 Hz (0,5s) ou mais, de modo a capturar os modos mais altos.

Assim, temos as seguintes expressões:

$$p(t) \cong \sum_{k=1}^m C_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_r r_k} t - \theta_k\right) \quad (4.16)$$

$$C_k = \sqrt{2 \int S(f)_k df} \quad (4.17)$$

$$r_k = 2^{k-r} \quad (4.18)$$

Onde r_k é o número do harmônico cuja frequência coincide com a frequência do primeiro modo de vibração livre da estrutura, e T_r é o período associado a este harmônico.

Os valores de C_k são calculados pela integração da função de densidade espectral em cada um dos n intervalos de frequência escolhidos. Evidentemente, esta operação pode ser realizada utilizando-se o espectro natural $S(f)$ e uma escala natural de frequências. No entanto, a mesma proporção entre as áreas, que é o aspecto de real importância para a simulação, pode ser obtida empregando-se o espectro reduzido associado a uma escala logarítmica de frequências.

Desta forma, podemos finalmente definir a amplitude de cada um dos harmônicos como sendo:

$$p_k = \frac{C_k}{\sum_{k=1}^m C_k} p(t) \quad (4.19)$$

4.3.4. Correlação espacial de velocidades

Baseado nos estudos de Davenport, Lanza (2003), apresenta a correlação espacial de velocidades, que pode ser descrita em função da distância entre dois pontos d e a frequência de rajada f , assim escrevendo a expressão:

$$Coh(d, f) = e^{-\hat{f}} \quad (4.20)$$

Onde:

$$\hat{f} = \frac{f \sqrt{C_z^2 (z_1 - z_2)^2 + C_y^2 (y_1 - y_2)^2}}{\bar{V}(10)} \quad (4.21)$$

As coordenadas y_1, y_2, z_1 e z_2 apresentadas na equação 4.21, referem-se a dois pontos na face da estrutura atingida pelo vento, sendo esta face perpendicular à direção do fluxo. Na mesma equação, C_y e C_z , são os coeficientes de decaimento exponencial determinados experimentalmente. Seguindo o modelo adotado por Lanza (2003), que baseou seu trabalho de pesquisa nas orientações propostas por Franco (1993), os valores para estes coeficientes serão adotados como: $C_y = 12$ e $C_z = 7$, produzindo distribuições de carregamento a favor da segurança.

Como as torres metálicas para telecomunicações são estruturas predominantemente verticais, também é possível adotar uma segunda simplificação a

favor da segurança, utilizando apenas a correlação vertical de velocidades, desta forma:

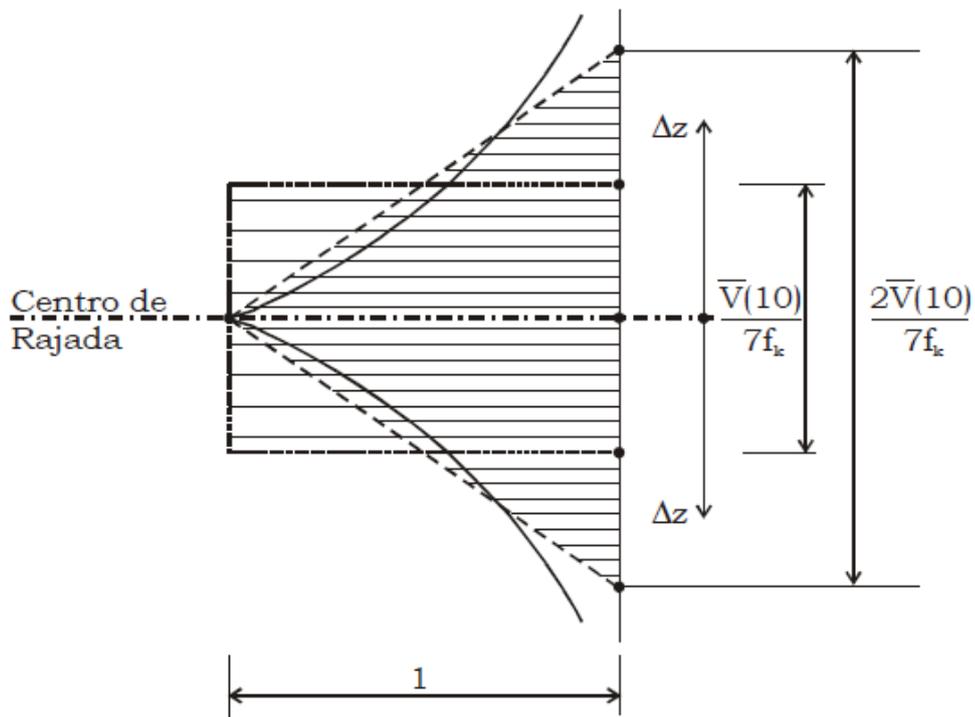
$$Coh(\Delta z, f_k) = \exp\left(-\frac{7\Delta z f_k}{\bar{V}(10)}\right) \quad (4.22)$$

Onde,

$$\Delta z = z_1 - z_2 \quad (4.23)$$

Em seu trabalho, Franco (1993) propôs o conceito de tamanho de rajada, definindo como a dimensão de uma rajada perfeita correlacionada capaz de induzir um efeito na estrutura bastante similar ao produzido pela equação 4.22. Este modelo é apresentado também por Lazanha (2003), e encontra-se ilustrado na figura 4.3.

Figura 4.3 - Rajadas equivalentes.



(Fonte: Franco, 2003)

Igualando-se as resultantes das pressões, é obtida uma boa aproximação da equivalência de efeitos, cujo coeficiente de correlação será expressado por:

$$Coh(p)(\Delta z, f_k) = \left[\exp\left(-\frac{7\Delta z f_k}{\bar{V}(10)}\right) \right]^2 = \exp\left(-\frac{14\Delta z f_k}{\bar{V}(10)}\right) \quad (4.24)$$

Desta forma é possível determinar a altura de rajada equivalente, utilizando a equação 4.25:

$$\Delta z_{ok} = 2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{14\Delta z f_k}{\bar{V}(10)}\right) d(\Delta z) = \frac{\bar{V}(10)}{7f_k} \quad (4.25)$$

De acordo com as considerações acima, percebe-se que a frequência de rajada f_k , cujo coeficiente de correlação é apresentado pela curva exponencial dupla da figura 4.3, pode, aproximadamente, ser representada pela rajada perfeitamente correlacionada de altura Δz_{ok} .

4.3.5. O método sistematizado

Conforme descrito anteriormente, a pressão total do centro de uma rajada suposta estacionária P_T é a soma de uma componente constante P , que corresponde ao vento médio, e uma parcela flutuante p . Esta última pode ser decomposta em n funções harmônicas de amplitudes $c_k p$, sendo que a soma dos coeficientes c_k possui valor 1.

O método utilizado para definir a parcela flutuante da pressão total é o mesmo proposto pela lei de potência, descrita na NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações, de acordo com as seguintes expressões:

$$v_{600} = 0,69 b_{600} V_0 \left(\frac{z}{10}\right)^{P_{600}} \quad (4.26)$$

$$v_3 = b_3 V_0 \left(\frac{z}{10}\right)^{P_3} \quad (4.27)$$

Onde a parcela v_{600} é a velocidade para o período de 600s na cota z , e v_3 é a velocidade de pico para o período de 3s na cota z . Os valores b e p são parâmetros meteorológicos definidos pela NBR 6123 em função da classe de rugosidade do terreno e do período.

A pressão de pico pode ser definida como:

$$q_p = 0,613v_3^2 \quad (4.28)$$

A pressão média ou estática é calculada por:

$$P = 0,613v_{600}^2 \quad (4.29)$$

Isto posto, pode-se calcular a pressão flutuante como sendo:

$$p = q_p - P \quad (4.30)$$

De acordo com a norma técnica supracitada, a força estática atuante em um certo ponto da estrutura é definida por:

$$F_E = C_a A P \quad (4.31)$$

Onde C_a é o coeficiente de arrasto, e A é a área da projeção vertical da estrutura que contribui para a geração de força no ponto considerado.

A força dinâmica, por sua vez, é dividida em componentes harmônicos, como:

$$F_D = \sum_{k=1}^n C_a A_k p c_k \cos(2\pi f_k t - \theta_k) \quad (4.32)$$

De acordo com Franco (1993), para a adoção do método é preciso atender alguns critérios, sendo estes abaixo listados:

- $n_f \geq 11$;
- O período de uma das funções deve coincidir com o período fundamental da estrutura;
- Os períodos das funções restantes devem ser múltiplos ou submúltiplos do período fundamental por um fator 2.

Ainda é mencionado pelo autor que, quando $n_f = 11$, torna-se necessário corrigir a amplitude da componente ressonante. Neste caso, a contribuição da

componente ressonante é superestimada por um fator dois, então, para correção, basta reduzi-la pela metade:

$$c_{nr} = \frac{c_r}{2} \quad (4.33)$$

Para garantir que a soma dos coeficientes permaneça unitária, são necessárias as seguintes operações:

$$c_{n(r-1)} = c_{(r-1)} + \frac{c_r}{4} \quad (4.34)$$

$$c_{n(r+1)} = c_{(r+1)} + \frac{c_r}{4} \quad (4.35)$$

4.4. Considerações finais acerca da ação dinâmica do vento neste trabalho

Conforme apresentado neste capítulo, a ação dinâmica do vento para este trabalho será balizada pelo Método do Vento Sintético. Nos capítulos 6 e 7, a análise dinâmica do suporte de antena será feita em duas hipóteses.

A primeira, no capítulo 6, considera a vibração livre, quando o vento atua sobre a antena, provocando um deslocamento, e então é reduzido a zero. Assim, a antena fica vibrando em torno de sua posição indeformada, aplicando torção ao montante da torre. Nesta hipótese o vento atuará de forma estática.

A segunda hipótese, apresentada no capítulo 7, considera as rajadas, ou seja, o comportamento dinâmico. Para tanto, são utilizados os conceitos apresentados neste capítulo, gerando uma série de valores de pressão ao longo do tempo.

5. FADIGA DE METAIS SUBMETIDOS A CARREGAMENTOS CÍCLICOS

Materiais metálicos submetidos a carregamentos cíclicos sofrem o efeito conhecido como fadiga, sendo esta responsável por rupturas de peças e, em casos mais graves, colapsos estruturais.

O estudo da fadiga é vasto e, em muitos casos, experimental ou empírico, e por si só já representaria um trabalho exclusivo sobre o tema. Nesta dissertação, contudo, veremos apenas conceitos básicos sobre a fadiga de metais, a fim de compreender o ocorrido com as torres estudadas, em particular o primeiro caso real, descrito no item 1.3 deste documento.

Na torre em questão, uma cantoneira de montante sofreu uma fratura completa, rompendo-se de uma aba à outra, conforme foi visto na figura 1.2, aqui apresentada novamente, como figura 5.1.

Figura 5.1 - Montante fraturado devido à fadiga.

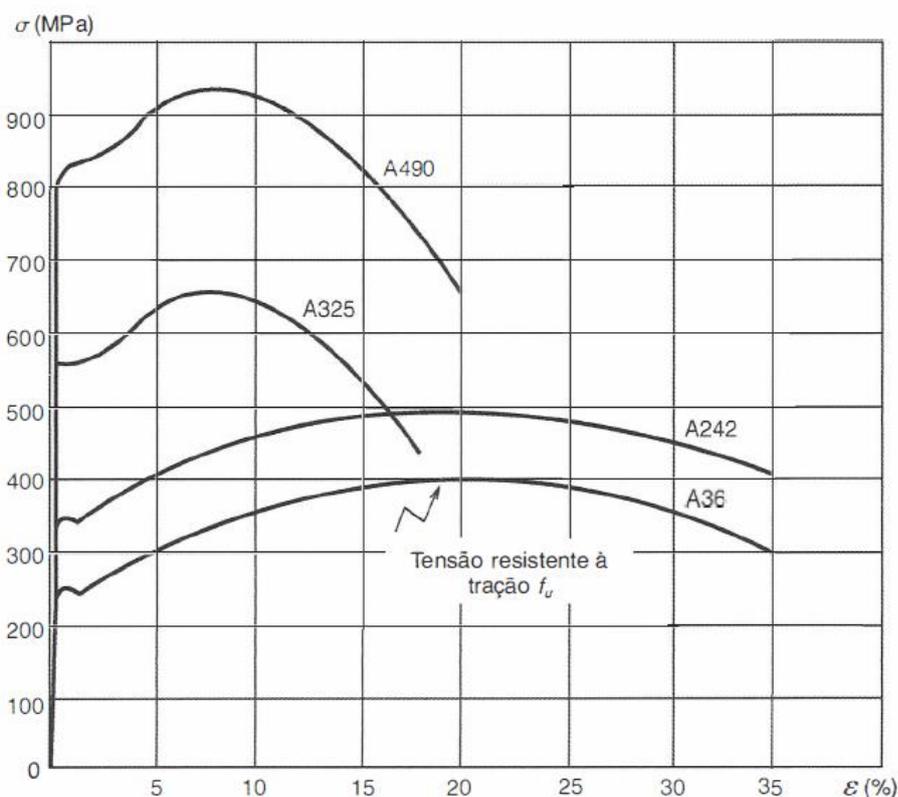


(Fonte: o autor)

5.1. Propriedades mecânicas básicas

O desempenho de um determinado componente metálico diante da fadiga está diretamente relacionado com as propriedades do material que o constitui. Para o trabalho em questão, trataremos do aço ASTM A36, ou MR250 em nossa nomenclatura nacional. As figuras 5.2 e 5.3 apresentam os gráficos de tensão x deformação para os tipos de aço mais comuns, incluindo o aço do estudo em questão, o ASTM A36.

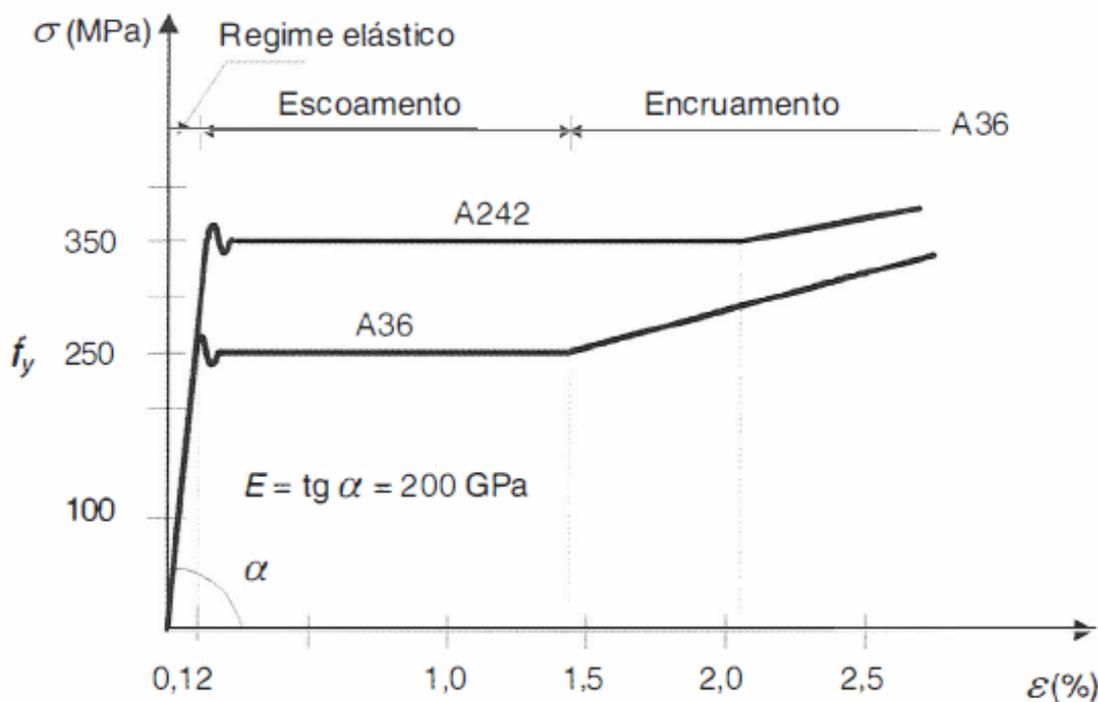
Figura 5.2 - Gráfico tensão x deformação para aços mais comuns.



(Fonte: Pfeil, Walter, *Estruturas de Aço: dimensionamento prático* / Walter Pfeil, Michèle Pfeil. – 8. Ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2009)

As propriedades mecânicas geralmente são obtidas por meio de um ensaio de tração, pois trata-se de um procedimento relativamente simples e de realização rápida. Através do referido ensaio, é possível obter informações sobre a rigidez, a resistência mecânica, a ductilidade, a tenacidade e a resiliência.

Figura 5.3 - Trecho inicial dos diagramas tensão x deformação dos aços mais comuns.



(Fonte: Pfeil, Walter, *Estruturas de Aço: dimensionamento prático* / Walter Pfeil, Michèle Pfeil. – 8. Ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2009)

5.1.1. Rigidez

A rigidez é indicada pelo módulo de elasticidade do material, e depende fundamentalmente das forças de ligação interatômicas. Um material com alta rigidez se deforma pouco na região elástica, assim, quanto maior for o módulo de elasticidade, maior será a rigidez.

5.1.2. Resistência mecânica

É a propriedade de um material de resistir a cargas que lhe são impostas durante sua utilização, sem deformar excessivamente ou fraturar. Está relacionada com a dureza.

5.1.3. Ductilidade

Trata-se da propriedade que representa o grau de deformação plástica que um material suporta até o momento de sua fratura. Materiais que suportam pouca ou nenhuma deformação no processo de ensaio de tração são considerados “materiais frágeis”.

5.1.4. Tenacidade

É a energia mecânica, ou seja, o impacto necessário para levar um material à ruptura. A tenacidade é uma medida de quantidade de energia que um material pode absorver antes de fraturar.

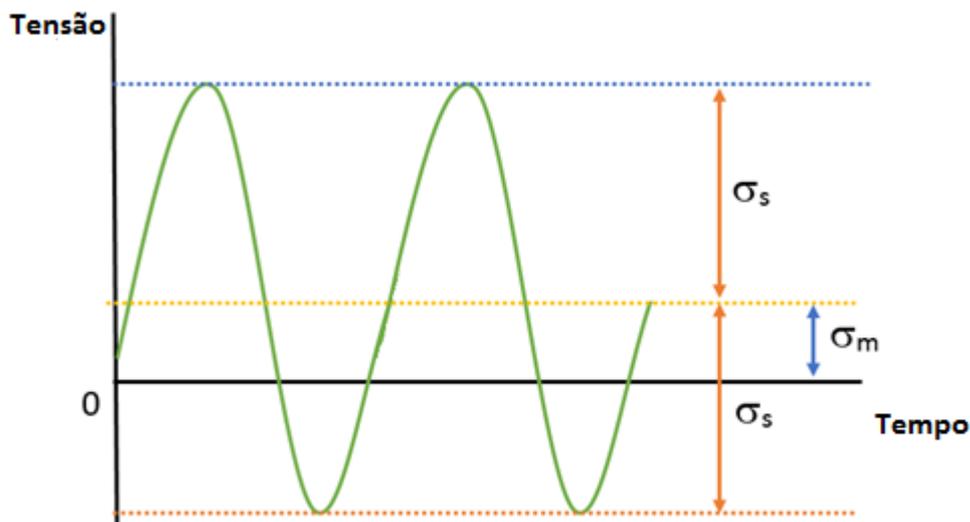
5.1.5. Resiliência

A resiliência refere-se à propriedade de acumular energia elástica quando exigidos ou submetidos a tensões, sem ocorrer ruptura. Após a tensão cessar, pode ou não haver uma deformação residual causada pela histerese do material.

5.2. Carregamento cíclico

Como explicado anteriormente, quando tratamos de um metal, a fadiga representa o enfraquecimento progressivo e localizado como resultado da aplicação de cargas dinâmicas. Um carregamento classificado como cíclico, é, essencialmente, dinâmico, pois é aplicado com uma variação de cargas ao longo do tempo. A figura 5.4 ilustra o modelo de carregamento cíclico, com uma variação de tensão ao longo do tempo.

Figura 5.4 - Amplitude de tensões no carregamento cíclico.



(Fonte: Autor)

No estudo em questão, o carregamento cíclico ocorre devido à ação dinâmica do vento e a vibração da antena. Podemos classificar o problema em duas hipóteses: a primeira trata da vibração livre, quando o vento deforma a antena com pressão quase constante, e em seguida desaparece, deixando a antena em vibração livre; a segunda hipótese prevê a ação dinâmica das rajadas de vento, utilizando métodos probabilísticos, onde o vento total será composto por uma parcela média e uma parcela flutuante. Em ambos os casos, a antena vibra e aplica torção na cantoneira do montante da torre.

É interessante observar que a ação do vento, por si só, não pode ser considerada um carregamento cíclico padrão. Isto porque, para uma estrutura, o vento sopra quase que predominantemente em uma direção. Ou seja, a força provocada pela pressão do vento vai em uma direção, mas não retorna, em outras palavras, o vento “empurra” e não “puxa” a estrutura. Então, enquanto o vento soprar, mesmo que apresentando pequenas variações de intensidade, não há carregamento no sentido contrário.

Contudo, a vibração causada pelo vento, quer seja ela livre ou forçada por rajadas, deforma a estrutura tanto na direção do carregamento, quanto na direção

oposta. Neste caso, a vibração provoca uma torção cíclica na cantoneira de montante, atuando em ambas direções em torno da posição indeformada.

5.3. Amplitude de tensão

Conforme apresentado na figura 5.4, a amplitude de tensão é representada pela diferença entre as tensões máxima e mínima, e pode ser calculada pela equação 5.1.

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad (5.1)$$

A partir do mesmo gráfico, percebe-se que a tensão média é dada pela média algébrica das tensões máxima e mínima no ciclo, ou seja:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad (5.2)$$

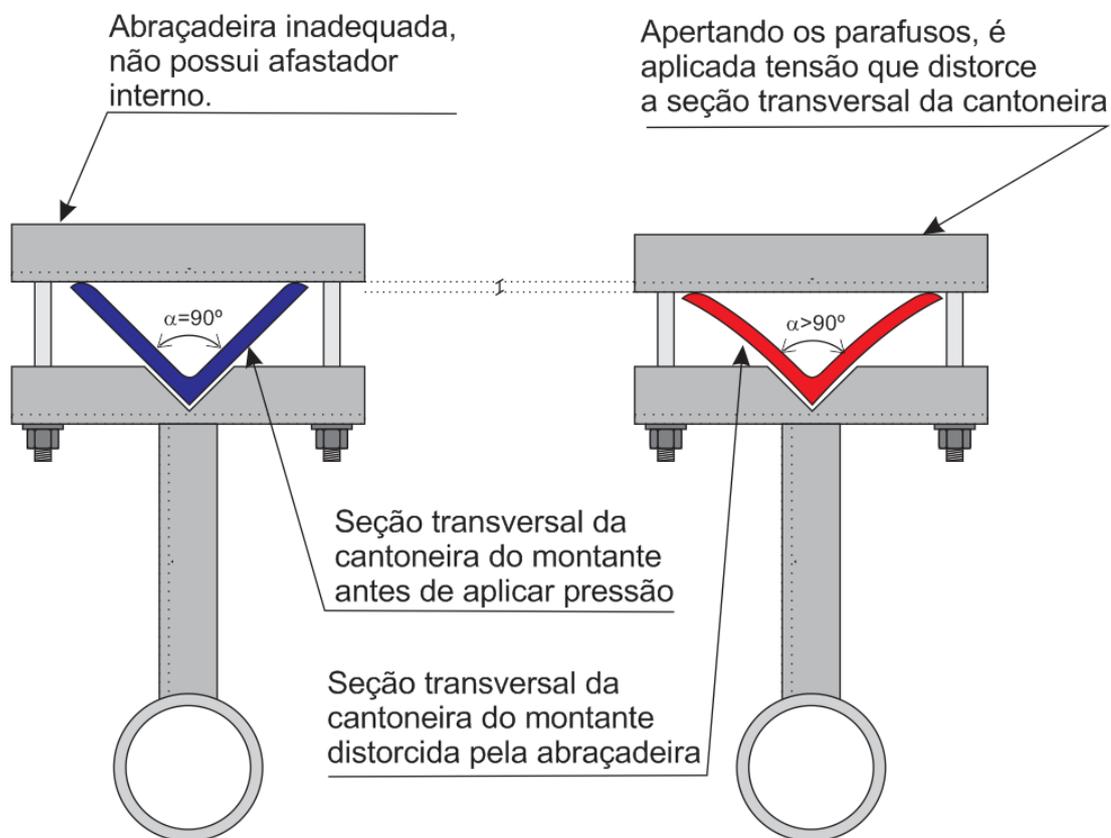
O intervalo de tensão cíclica (alternada), também chamado de variação de tensão, é representado por:

$$\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n} \quad (5.3)$$

Até o momento, consideramos apenas as tensões provocadas pelo carregamento cíclico, contudo, outros fatores podem agravar o problema da fadiga do material como, por exemplo, tensões residuais.

Como o objetivo deste trabalho é analisar dinamicamente o problema e propor uma solução de amortecimento, não será aprofundado o estudo das tensões residuais. Entretanto, vale a pena ressaltar que, no caso dos suportes de antena de canto, objeto desta análise, a pressão aplicada pela abraçadeira do suporte resulta em tensões adicionais à cantoneira do montante.

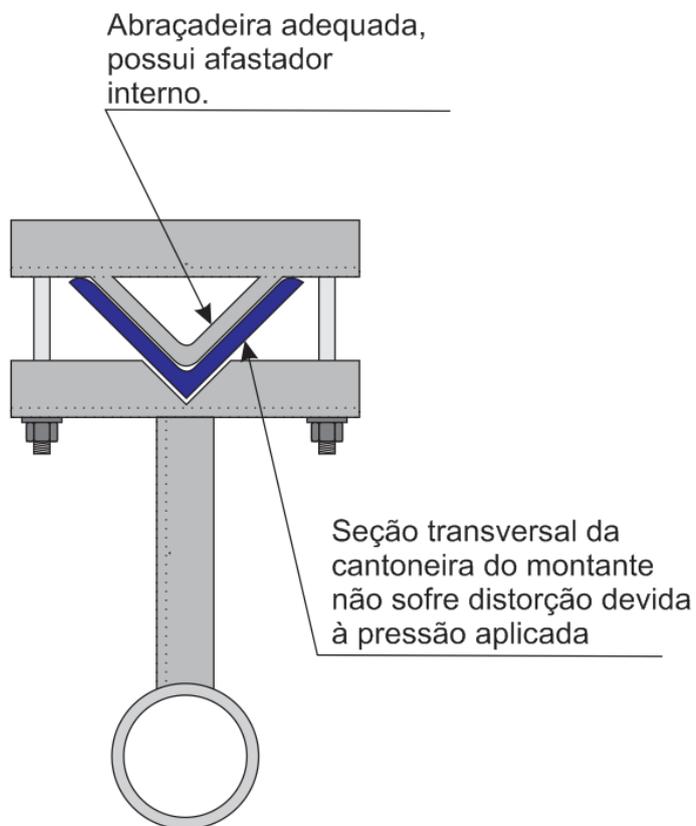
Figura 5.5 - Esquema de fixação inadequado do suporte de canto.



(Fonte: o autor)

A figura 5.5 apresenta um esquema de fixação inadequado para suportes de canto, onde a braçadeira posterior tem contato apenas com as abas do montante da torre. Este é o tipo mais comum de suportes encontrado em torres, e ainda que seu formato não seja exatamente o que ilustra a figura supracitada, o princípio é o mesmo. Desta forma, é aplicada uma tensão quando a abraçadeira é apertada, deixando as abas do montante já solicitadas. Como a vibração aplica uma torção à peça, o ponto onde este esforço é máximo é exatamente na aba, que já sofre tensões residuais.

Figura 5.6 - Esquema de fixação adequado do suporte de canto.



(Fonte: o autor)

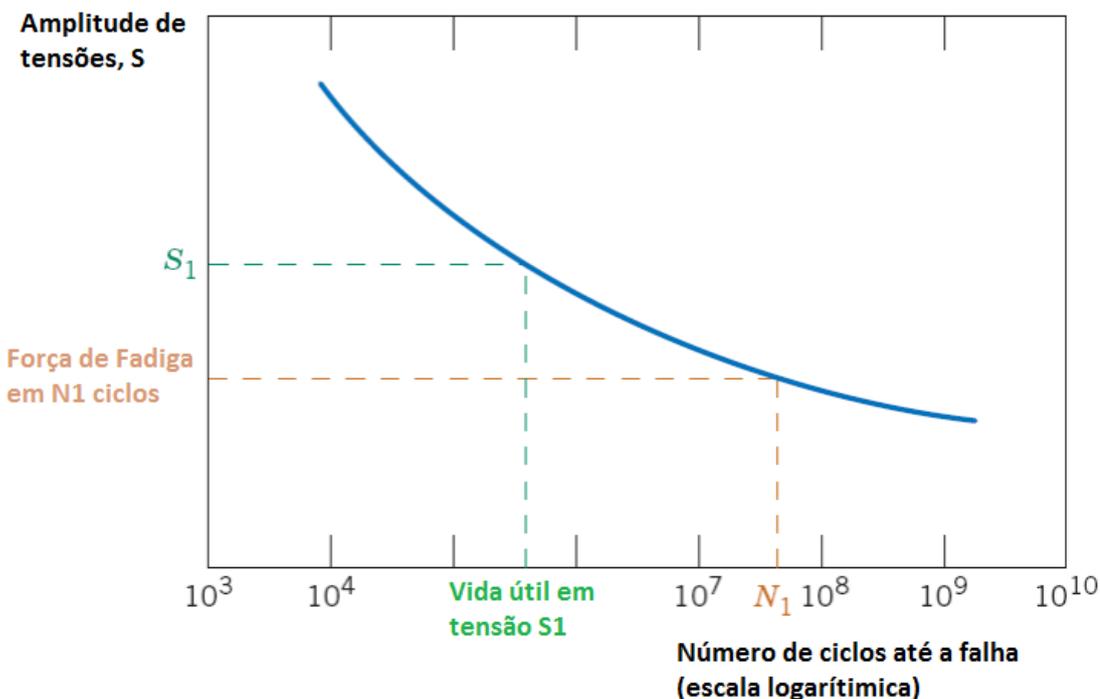
Já na figura 5.6, fica evidente que a distribuição de tensões devida à pressão da abraçadeira é bem distribuída. Neste esquema, a abraçadeira posterior se apoia em toda a área interna do montante.

5.4. Número de ciclos

Para termos uma ideia do tempo de vida útil de uma estrutura submetida a um carregamento que varia com o tempo, pode-se estimar o número de ciclos até a falha. Esta, contudo, não é uma tarefa simples, e muitas vezes atingida somente por ensaios experimentais e/ou métodos empíricos.

O resultado destes ensaios permite montar a curva de tensão em função do números de ciclos até a falha por fadiga do material, conforme apresentado na figura 5.7.

Figura 5.7 - Gráfico Tensão x Número de Ciclos para material genérico.



(Fonte: internet)

Para a maioria dos aços carbono, a falha ocorre por volta de 10^7 ciclos, o que representa uma fadiga de alto ciclo, com uma tensão nominal atuante geralmente elástica. Contudo, na presença de deformações predominantemente plásticas, a fadiga é de baixo ciclo, com fratura ocorrendo em menos de 10^4 ciclos.

Para que deformações plásticas ocorram, as tensões atuantes devem ser mais altas e, portanto, também haverá um aumento na amplitude de tensões, fator diretamente ligado à redução da vida útil (ou número de ciclos até a falha) da estrutura.

Para este trabalho, entretanto, a definição de ciclos é meramente informativa, pois é muito difícil determinar um padrão para os ciclos de carregamentos causados pelo vento. As vibrações ocorrem de forma completamente aleatória, sendo improvável que se consiga estimar o tempo em que ocorra a falha por fadiga. Portanto, o objetivo deste trabalho não é determinar o número de ciclos até a falha da peça,

mas sim reduzir as amplitudes e o tempo de vibração por meio do amortecimento do sistema. Com isto, a estrutura leva mais tempo para atingir o ponto de falha por fadiga, desta forma, ganha mais tempo de vida útil.

5.5. Formação da fratura por fadiga

Quando um carregamento cíclico atinge o número de ciclos máximo suportado diante da amplitude de tensões aplicadas, a estrutura começa a falhar, ou seja, surge a fratura por fadiga. Esta falha inicia-se com a formação de microtrincas que, inicialmente, coalescem ou crescem propagando-se até atingir a tenacidade à fratura do material.

Conforme explicado acima, para esta dissertação não é aprofundado o estudo da fratura, pois o objetivo não é determinar quando ela acontece e/ou calcular a resistência necessária da peça para evita-la. O objetivo é reduzir a vibração por meio do amortecimento, e, desta forma, reduzir o número de ciclos do carregamento, aumentando a vida útil da estrutura.

6. ANÁLISE MATEMÁTICA PARA VIBRAÇÃO LIVRE

Conforme explicado anteriormente, para o problema em questão são consideradas duas hipóteses de carga. A primeira considera a vibração livre da antena, quando o vento atua com uma pressão aproximadamente constante e em seguida deixa de atuar. Isto provoca um deslocamento na antena, e quando o vento deixa de existir, a estrutura fica em vibração livre em torno de sua posição indeformada. A análise matemática para este caso é vista neste capítulo.

A segunda hipótese considera a ação dinâmica do vento ocasionada pelas rajadas. Neste caso, considera-se que o vento atue com uma pressão média e, em torno desta, ocorram variações devidas a uma pressão flutuante. Assim, a antena sofre vibrações ao longo do tempo de acordo com o carregamento aleatório resultante das rajadas. Para o cálculo da ação dinâmica do vento são usados os conceitos apresentados no capítulo 4 desta dissertação, com foco no Método do Vento Sintético. A análise matemática para esta hipótese é abordada no capítulo 7.

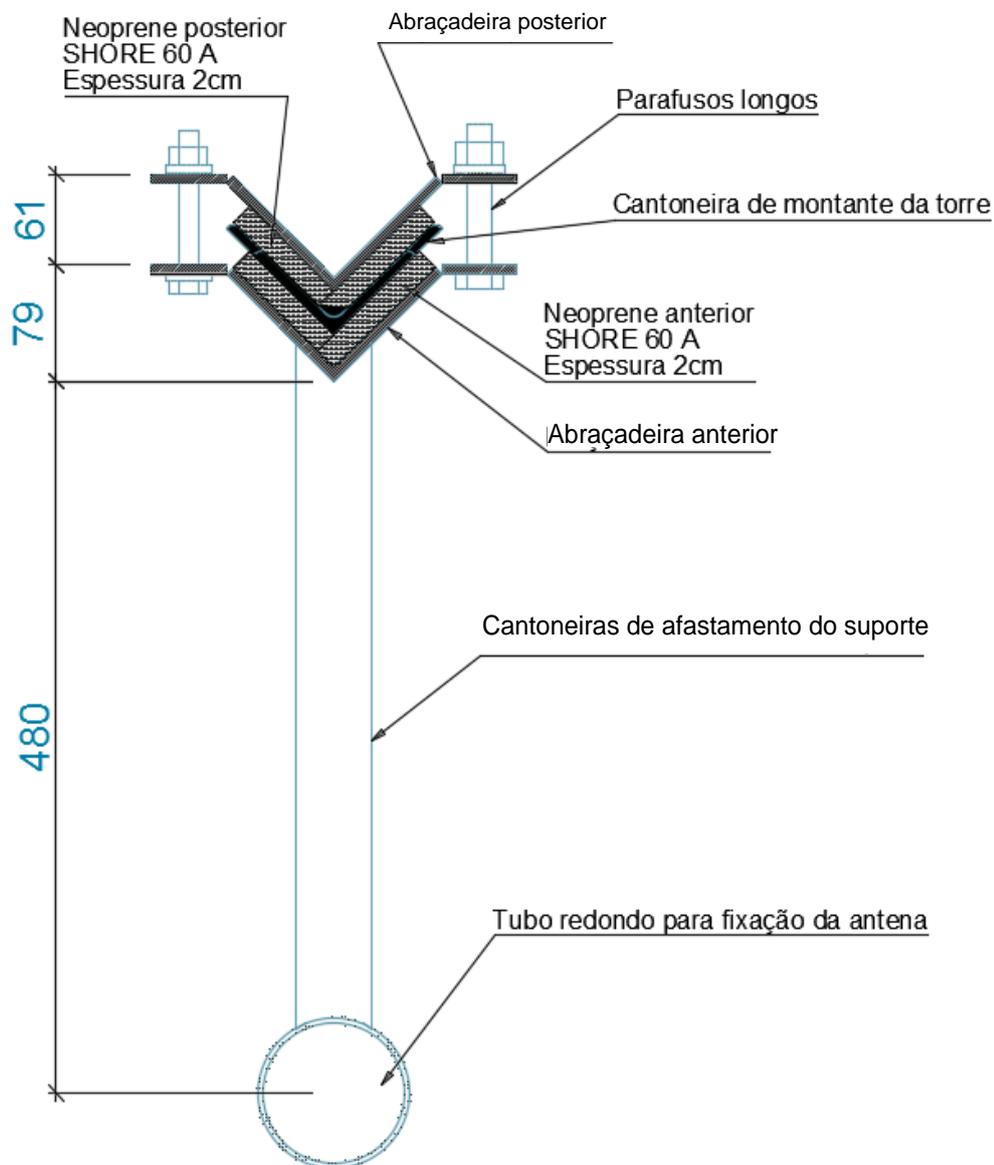
6.1. Solução proposta para problema dinâmico

Para resolver o problema analisado, propõe-se a colocação de borrachas de Neoprene (ou elastômero equivalente) entre as abraçadeiras do suporte e a cantoneira do montante, absorvendo a energia envolvida na vibração. Na figura 6.1 apresenta-se o esquema proposto para a solução.

São colocadas quatro borrachas entre a cantoneira de montante e as abraçadeiras do suporte, sendo estas pressionadas pelos parafusos de união das abraçadeiras. O elastômero utilizado é do tipo Neoprene, com dureza Shore 60 A, com espessura de 2cm para cada borracha.

Esta modificação certamente demandará parafusos mais longos para o suporte, além dos custos com o elastômero, contudo, diante do estrago que as vibrações podem causar à estrutura, este com certeza é um investimento necessário e relativamente barato.

Figura 6.1 - Modelo proposto para solução do problema de vibração.

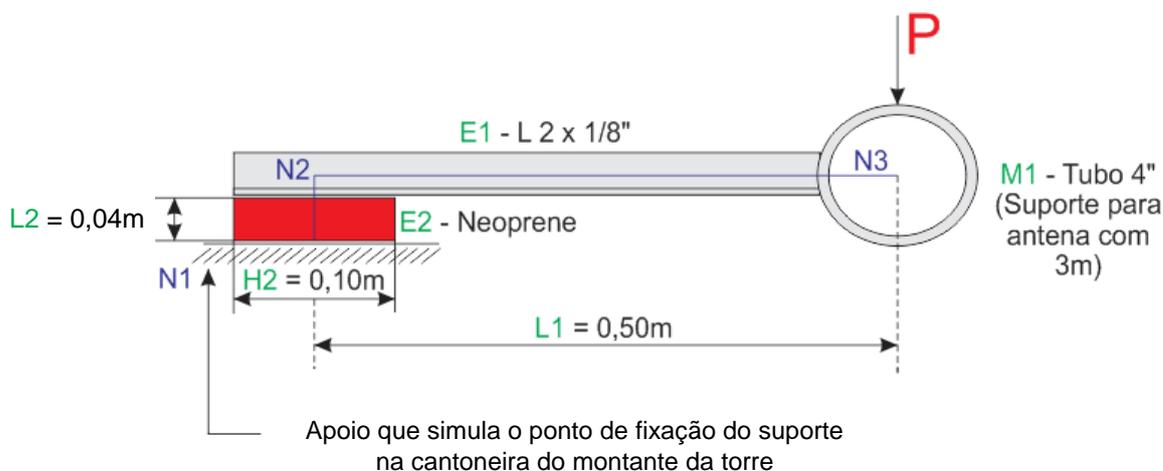


(Fonte: o autor)

6.2. Modelo matemático

A fim de reproduzir as condições de apoio da estrutura real, é apresentado um modelo matemático que busca representar da melhor forma possível o comportamento dinâmico do sistema. Para tanto, considera-se o modelo proposto pela figura 6.2:

Figura 6.2 - Modelo matemático representando a estrutura real.



(Fonte: o autor)

A cantoneira do montante é considerada como um apoio fixo, classificado como "N1", pois o objetivo é avaliar o deslocamento do suporte de antena, para então calcular o momento torsor aplicado ao montante. Fixados a este apoio estão os elastômeros, representados no modelo matemático pelo elemento "E2", com uma altura total de 4cm, contabilizando 2cm de cada camada. Acima da camada de elastômero, no nó "N2", está fixado o elemento "E1", que representa as duas cantoneiras de afastamento do tubo, ambas de 2" x 1/8" (50,8mm x 3,2mm).

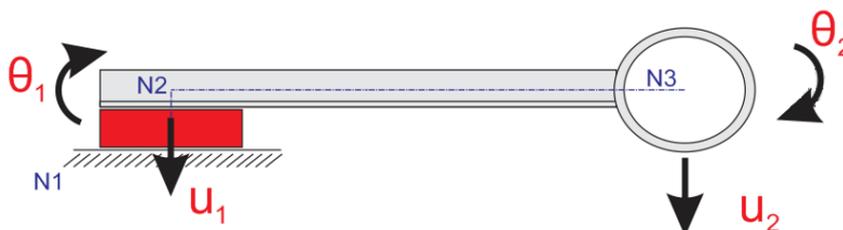
Por fim, o nó "N3", representa o ponto de fixação da massa oriunda da antena, bem como o ponto de aplicação da carga de vento. Utilizando um referencial global de coordenadas, o deslocamento de interesse é horizontal.

6.3. Montagem das equações diferenciais

O problema em questão, por ter sido simplificado à uma estrutura com quatro graus de liberdade, é resolvido de forma analítica. Para problemas mais complexos, recomenda-se a utilização do método dos elementos finitos, considerando as matrizes de massa e amortecimento, bem como as variáveis dinâmicas (acelerações e velocidades).

Para a montagem das equações diferenciais que regem os deslocamentos da estrutura, é utilizado o método de energia de Lagrange. Desta forma, o problema terá os seguintes graus de liberdade, apresentados pela figura 6.3:

Figura 6.3 - Graus de liberdade.



(Fonte: o autor)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial U}{\partial u} = - \frac{\partial V}{\partial u} \quad (6.1)$$

Realizando as derivadas, podem-se montar as equações de energia, a partir das quais é montado o sistema de equações. Na equação 6.2 encontra-se a expressão referente à energia cinética. Na equação 6.3 é apresentada a expressão composta pelas funções de dissipação. Na equação 6.4 observa-se a expressão relativa à energia potencial de deformação. Por fim, na equação 6.5 é descrita a expressão do potencial das forças. Desta forma, tem-se:

$$\xi = \frac{m_2 \dot{u}_2^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\theta}_2^2}{2} \quad (6.2)$$

$$\Delta = \frac{c_1 \dot{u}_1^2}{2} + \frac{c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2}{2} + \frac{c_3 \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{c_4 (u_2 - u_1)^2}{2} \quad (6.3)$$

$$U = \frac{k_1 u_1^2}{2} + \frac{k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2}{2} + \frac{k_3 \theta_2^2}{2} + \frac{k_4 (u_2 - u_1)^2}{2} \quad (6.4)$$

$$V = -F(t)u_2 \quad (6.5)$$

6.4. Sistema de equações

No sistema idealizado, são considerados quatro graus de liberdade, contudo, a massa da antena é bem superior à massa do resto do sistema e, assim, é considerada apenas uma massa “ m_2 ” no nó “N3”. Desta forma, os graus de liberdade u_1 e θ_1 não estão relacionados com nenhuma massa e, portanto, não apresentam energia cinética nas equações.

Após realizadas as derivadas, podem-se organizar as equações diferenciais, ficando as equações 6.7 e 6.9 relacionadas com a massa, e as equações 6.6 e 6.8 apenas com amortecimento e rigidez.

$$c_1\dot{u}_1 + c_4\dot{u}_1 - c_4\dot{u}_2 + k_1u_1 + k_4u_1 - k_4u_2 = 0 \quad (6.6)$$

$$m_2\ddot{u}_2 + c_4\dot{u}_2 - c_4\dot{u}_1 + k_4u_2 - k_4u_1 = F(t) \quad (6.7)$$

$$c_2\dot{\theta}_1 - c_2\dot{\theta}_2 + c_3\dot{\theta}_1 + k_2\theta_1 - k_2\theta_2 + k_3\theta_2 = 0 \quad (6.8)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + c_2\dot{\theta}_2 - c_2\dot{\theta}_1 + k_2\theta_2 - k_2\theta_1 = 0 \quad (6.9)$$

Onde:

$$J_2 = \int_v (r_2)^2 dm_2 \quad (6.10)$$

Levando as equações 6.7 e 6.9 para a primeira e segunda linha, respectivamente, e as equações 6.6 e 6.8 para a terceira e quarta linha, respectivamente, pode-se organizar matricialmente, resultando no seguinte sistema:

$$[M_{ij}]\{\ddot{u}_i\} + [C_{ij}]\{\dot{u}_i\} + [K_{ij}]\{u_i\} = \{F(t)_i\} \quad (6.11)$$

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\ddot{u}_i\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad \{\dot{u}_i\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad \{u_i\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -c_2 \\ -c_4 & 0 & c_1 + c_4 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_4 & 0 & -k_4 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_4 & 0 & k_1 + k_4 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

6.5. Condensação estática

Trata-se de um método utilizado para eliminar da análise dinâmica os graus de liberdade relacionados apenas com a rigidez da estrutura; contudo, todos os graus de liberdade são incluídos na análise estática.

Ou seja, para o problema em questão, a massa da antena é muito maior que a massa do elastômero e, como estamos considerando a cantoneira do montante como um apoio e não um elemento, os graus de liberdade u_1 e θ_1 , relacionados ao nó “N2”, não tem massa associada. Assim, apenas os graus de liberdade u_2 e θ_2 , relacionados ao nó “N3”, possuem massa, aqui denominada “ m_2 ”. Entretanto, as propriedades mecânicas de amortecimento e rigidez referentes aos graus de liberdade u_1 e θ_1 devem ser consideradas, e isto se torna possível por meio da condensação estática.

Utiliza-se um sub índice “ d ” para classificar as equações que possuem massa, e um sub índice “ e ” para aquelas que não possuem. As acelerações, as velocidades e os deslocamentos condensados serão representados pela letra “ D ”.

$$[M_c] = \begin{bmatrix} M_{dd} & M_{de} \\ M_{ed} & M_{ee} \end{bmatrix} \quad [C_c] = \begin{bmatrix} C_{dd} & C_{de} \\ C_{ed} & C_{ee} \end{bmatrix} \quad [K_c] = \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{de} \\ K_{ed} & K_{ee} \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{D}_c\} = \begin{Bmatrix} \ddot{D}_d \\ \ddot{D}_e \end{Bmatrix} \quad \{\dot{D}_c\} = \begin{Bmatrix} \dot{D}_d \\ \dot{D}_e \end{Bmatrix} \quad \{D_c\} = \begin{Bmatrix} D_d \\ D_e \end{Bmatrix}$$

Sabendo que M_{ee} é igual a zero, ficamos com um sistema de equações composto pelas expressões 6.12 e 6.13:

$$M_{dd}\ddot{D}_d + C_{dd}\dot{D}_d + C_{de}\dot{D}_e + K_{dd}D_d + K_{de}D_e = F_d \quad (6.12)$$

$$C_{ed}\dot{D}_d + C_{ee}\dot{D}_e + K_{ed}D_d + K_{ee}D_e = 0 \quad (6.13)$$

Considerando o sistema não amortecido, a partir da equação 6.13 podem-se obter os deslocamentos referentes à condensação estática, conforme apresentado na equação 6.15:

$$K_{ed}D_d + K_{ee}D_e = 0 \quad (6.14)$$

$$D_e = -K_{ee}^{-1}K_{ed}D_d \quad (6.15)$$

Substituindo a equação 6.15 na equação 6.14 e considerando a mesma com aceleração e velocidade nulas, podemos encontrar a matriz de rigidez do sistema condensado:

$$K_m = K_{dd} - K_{ed}^T K_{ee}^{-1} K_{ed} \quad (6.16)$$

Um procedimento semelhante pode ser seguido com a matriz de amortecimento, a fim de encontrar o amortecimento referente ao sistema condensado. Sabendo que as forças dissipativas são dadas pela seguinte equação:

$$F_c = C_{ij}\dot{u}_i \quad (6.17)$$

Pode-se fazer uma condensação estática semelhante àquela empregada na matriz de rigidez:

$$C_m = C_{dd} - C_{ed}^T C_{ee}^{-1} C_{ed} \quad (6.18)$$

Por fim, o sistema condensado a ser resolvido é:

$$M_{dd}\ddot{D}_d + C_m\dot{D}_d + K_m D_d = F_d \quad (6.19)$$

6.6. Solução do sistema de equações diferenciais

A seguir, é feita a solução do sistema de equações diferenciais. Para esta análise matemática, considera-se o sistema sob vibração livre. Ou seja, o vento deforma a estrutura e, em seguida, deixa de atuar, permitindo que a estrutura parta de sua posição deformada e vibre até parar devido ao amortecimento. Assim, o sistema resolvido é:

$$M_{dd}\ddot{D}_d + C_m\dot{D}_d + K_m D_d = 0 \quad (6.20)$$

A solução do sistema sob vibração livre amortecida será adotada como:

$$u_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t} (u_0 \cos(\omega_{di} t) + \frac{\dot{u}_0 + (\zeta_i \omega_i u_0)}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t)) \quad (6.21)$$

6.7. Amortecimento não-clássico

O amortecimento, conforme explicado no parágrafo 3.4, desta dissertação, pode ser entendido como a propriedade da estrutura para dissipar energia e, assim, reduzir a amplitude dos deslocamentos ao longo do tempo. Na prática, é muito difícil determinar com exatidão a contribuição de amortecimento de cada elemento estrutural (como ligações metálicas, microfissuras no concreto, etc.). Uma aproximação razoável é tratar este comportamento como um amortecimento viscoso.

Entretanto, para o problema em questão, é analisada a contribuição de amortecimento de dois materiais distintos: o aço e o elastômero. Não se pode utilizar um ou outro coeficiente de amortecimento, já que, na verdade, ambos materiais contribuem para a dissipação de energia. Portanto, é utilizado o conceito de

amortecimento não-clássico, onde é feita uma intercessão num ponto comum da matriz de amortecimento, assim considerando as propriedades de cada material.

Para tanto, é utilizado o amortecimento de Rayleigh, fazendo uma intercessão entre as propriedades de amortecimento no nó “N2”, ficando a equação 6.22 referente ao amortecimento do aço, e a equação 6.23 referente ao amortecimento do elastômero:

$$c_A = \alpha_{0A}m + \alpha_{1A}k \quad (6.22)$$

$$c_N = \alpha_{0N}m + \alpha_{1N}k \quad (6.23)$$

Desta forma, compondo a matriz de amortecimento completa, considerando as contribuições de ambos materiais, e procedendo com a condensação estática, obtém-se a seguinte matriz de amortecimento condensada, cujos cálculos detalhados para obtenção são apresentados no anexo A desta dissertação.

$$C_m = \begin{bmatrix} 545,47 & 0 \\ 0 & 172,11 \end{bmatrix}$$

Percebe-se que a matriz de amortecimento, assim como as de massa e rigidez, já está desacoplada, e, desta forma, podem-se atribuir os valores de sua diagonal principal diretamente aos dois deslocamentos considerados na condensação estática. Assim, pode-se determinar o coeficiente de amortecimento relacionado com cada deslocamento:

$$\zeta_1 = \frac{C_{m_{1,1}}}{2 M_{dd_{1,1}} \omega_1} \quad (6.24)$$

$$\zeta_2 = \frac{C_{m_{2,2}}}{2 M_{dd_{2,2}} \omega_2} \quad (6.25)$$

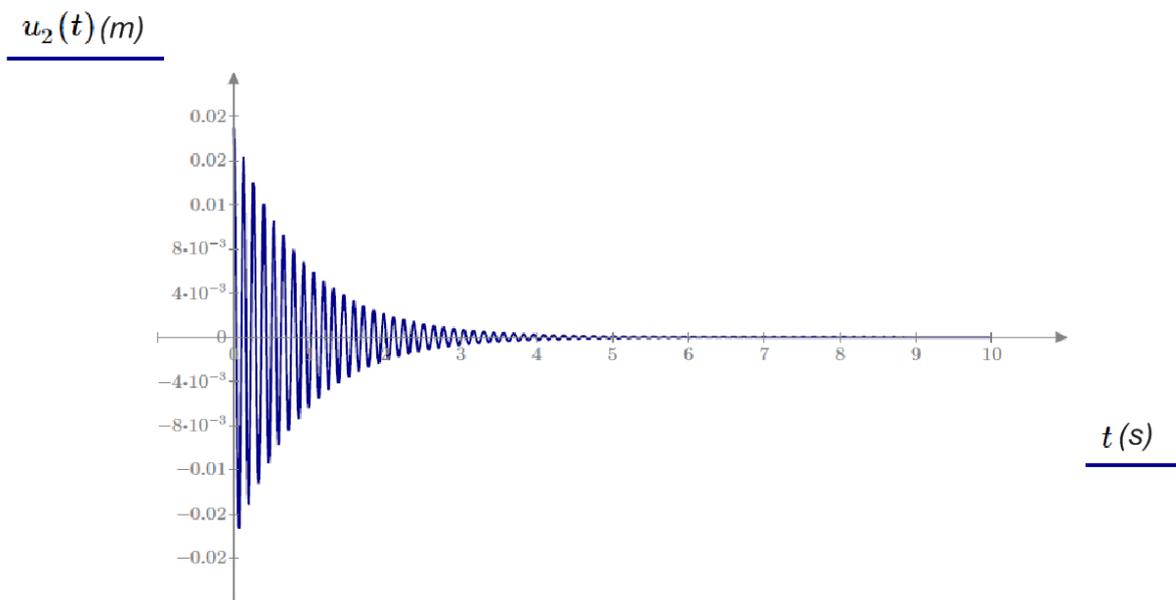
6.8. Resultados gráficos

A seguir, as figuras 6.4 e 6.5 apresentam os resultados gráficos para os deslocamentos considerados, ficando os cálculos completos apresentados no anexo “A”, desta dissertação. O principal objetivo desta análise gráfica é comparar o tempo

de vibração da estrutura amortecida pelo elastômero (solução proposta) e da estrutura original, ou seja, apenas com amortecimento natural do aço. Conforme foi explicado no capítulo 5, a redução do período de vibração implica numa redução direta dos ciclos de carregamento e, assim, prolonga a vida útil da estrutura.

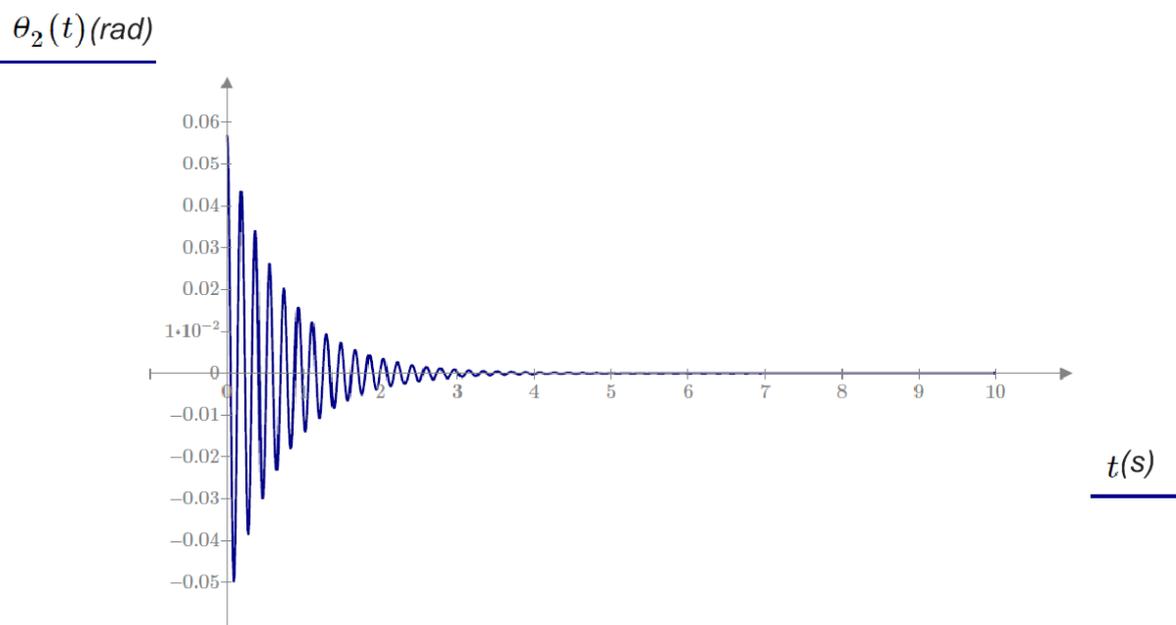
Tomando os coeficientes de amortecimento calculados, podem-se resolver as equações diferenciais ordinárias, obtendo-se resultados para o deslocamento horizontal (u_2), na figura 6.4, e a rotação na extremidade do suporte (θ_2), na figura 6.5.

Figura 6.4 – Gráfico deslocamento horizontal (u_2) com amortecimento do Elastômero (Neoprene)



(Fonte: o autor)

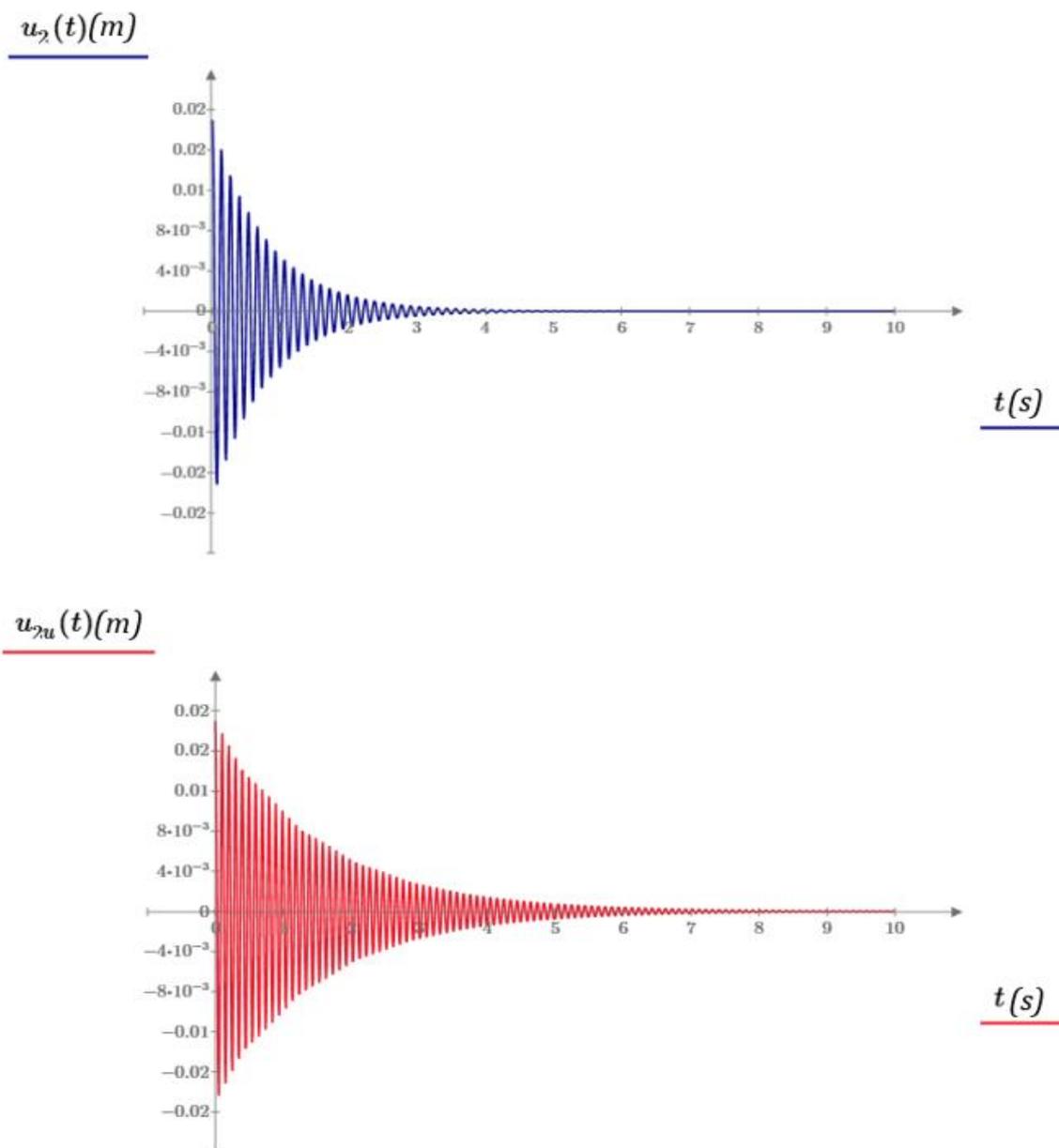
Figura 6.5 – Gráfico rotação (θ_2) com amortecimento do Neoprene



(Fonte: o autor)

Na figura 6.6 apresenta-se uma comparação entre a situação amortecida pelo elastômero (neoprene) e o esquema original, apenas com amortecimento natural do aço. Percebe-se que, ao utilizar o elastômero, a vibração chega a praticamente zero pouco antes de 4 segundos. Entretanto, a estrutura sem o sistema de amortecimento continua vibrando além dos 4 segundos, vindo a zerar por volta dos 6 segundos.

Figura 6.6 – Comparação entre gráficos, deslocamento horizontal (u_2) com o Neoprene (em azul), e sem o Neoprene (em vermelho).



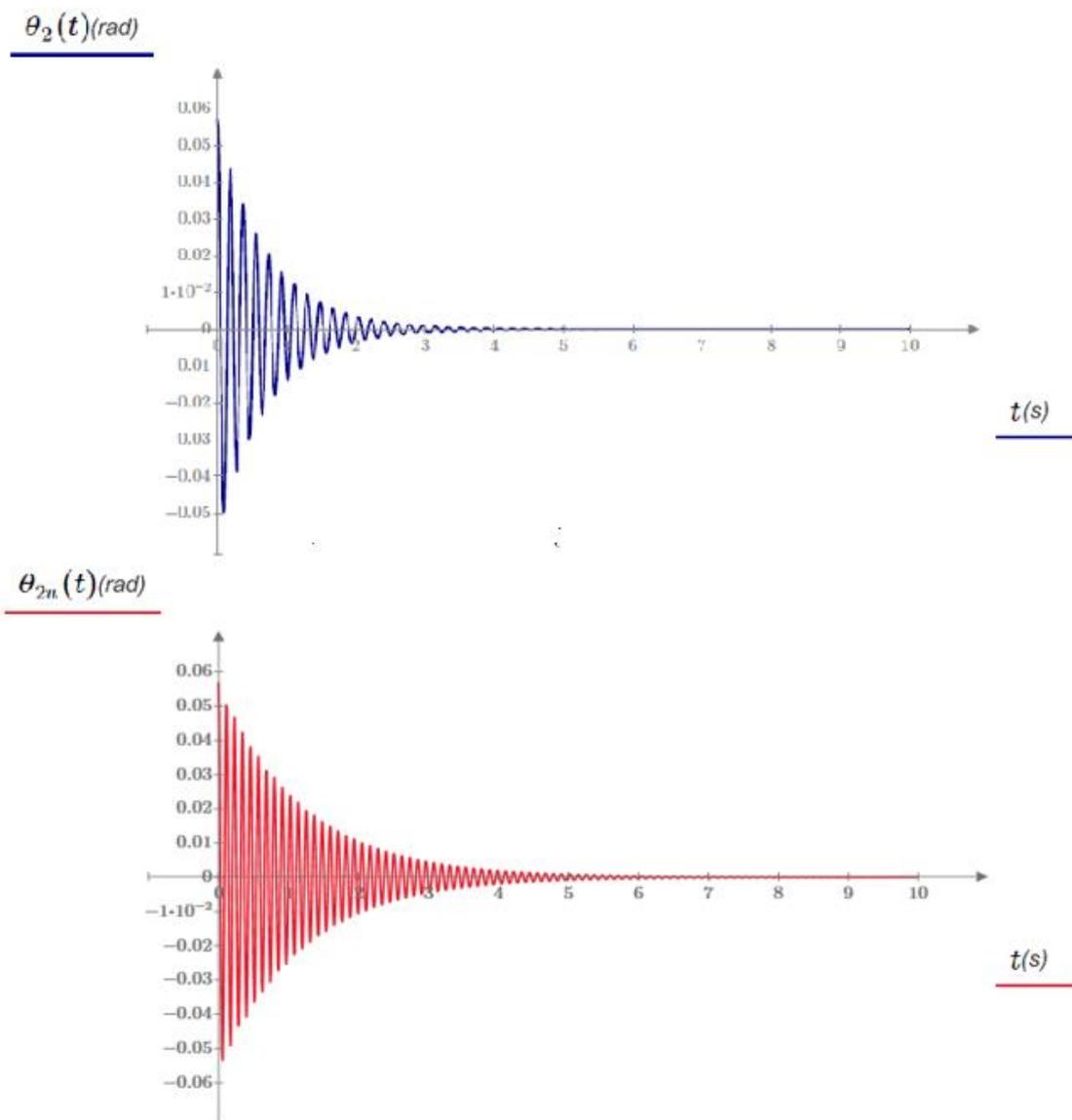
(Fonte: o autor)

Ainda que esta diferença pareça pequena, é importante ressaltar que não é possível prever quantos ciclos de carregamentos serão aplicados à estrutura, uma vez que o vento age de forma completamente aleatória. Assim, estes 2 segundos de redução no período de vibração podem representar um ganho considerável na vida útil da estrutura.

Também é possível fazer uma comparação entre os resultados da rotação θ_2 , como pode-se ver na figura 6.7. Neste caso, a diferença no período de vibração é mais perceptível, devido à diferença entre as propriedades de amortecimento dos materiais envolvidos.

No sistema amortecido com Neoprene a vibração é encerrada por volta dos 5 segundos. Já o sistema que conta apenas com o amortecimento natural do aço, continua vibrando além dos 9 segundos, uma diferença de aproximadamente 4 segundos.

Figura 6.7 – Comparação entre gráficos, rotação (θ_2) com Neoprene (em azul), e sem Neoprene (em vermelho).



(Fonte: o autor)

7. ANÁLISE MATEMÁTICA PARA VIBRAÇÃO FORÇADA

Neste capítulo é apresentada a análise matemática considerando a ação dinâmica do vento. Diferente do capítulo anterior, agora o vento atua como uma força aleatória, composta por uma parcela média (pressão constante) e uma parcela flutuante (rajada), esta última variando ao longo do tempo.

O modelo matemático adotado é o mesmo do capítulo anterior, assim utiliza-se a mesma equação diferencial, montada pelo método de energia de Lagrange, novamente ilustrada na equação 7.1.

$$[M_{dd}]\{\ddot{D}_d\} + [C_m]\{\dot{D}_d\} + [K_m]\{D_d\} = \{F(t)\} \quad (7.1)$$

Onde:

M_{dd} : Parcela dinâmica da matriz de massa (ver item 6.5);

\ddot{D}_d : Acelerações referentes aos deslocamentos u_2 e θ_2 ;

C_m : Matriz de amortecimento condensada (ver item 6.5);

\dot{D}_d : Velocidades referentes aos deslocamentos u_2 e θ_2 ;

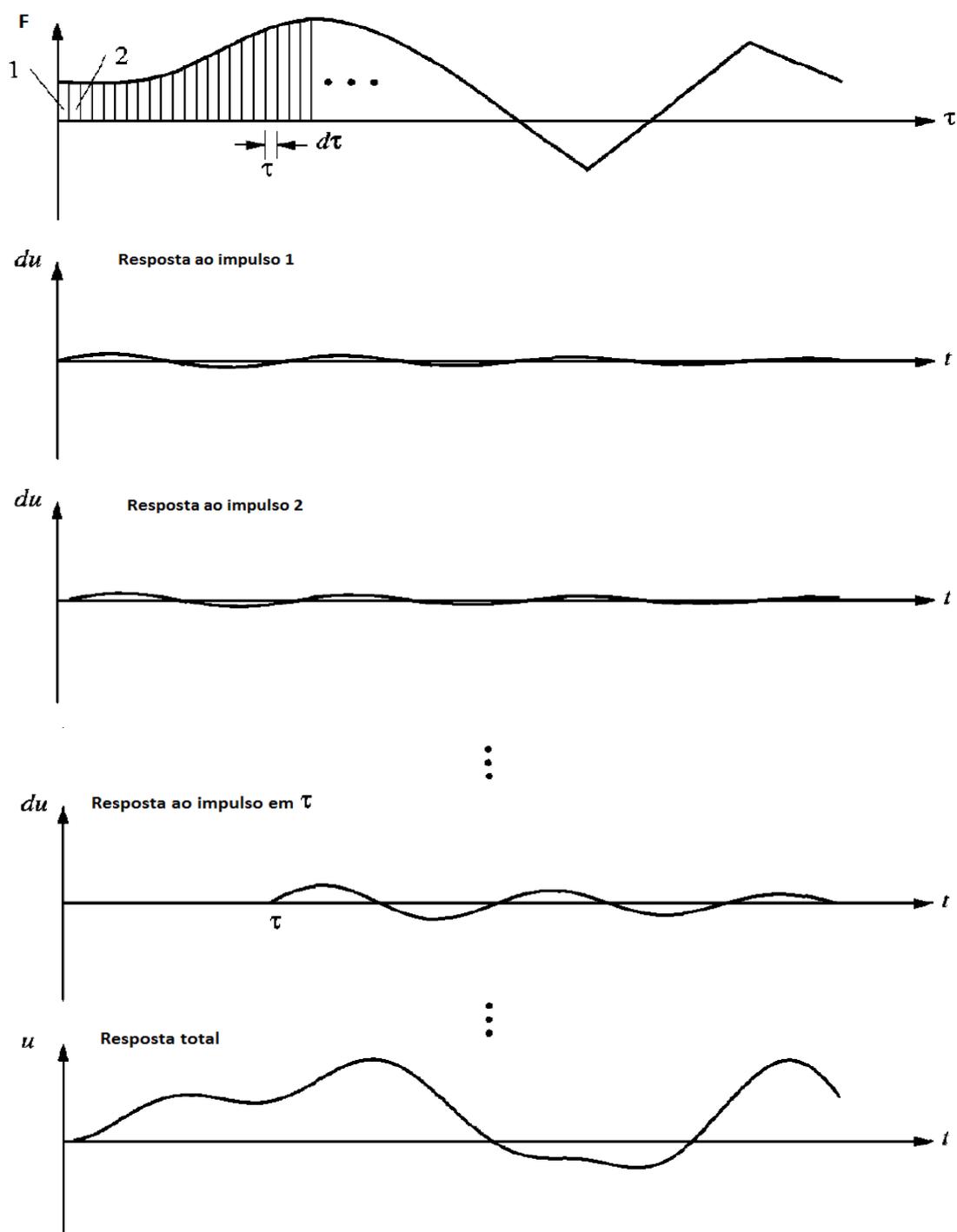
K_m : Matriz de rigidez condensada (ver item 6.5);

D_d : Deslocamentos u_2 e θ_2 , associados com a massa.

7.1. Solução do sistema de equações diferenciais

Para o problema em questão, como a força varia aleatoriamente em relação ao tempo, foi adotado um método numérico com variação ao longo do tempo (*time-stepping method*). Em resumo, a variação da força $F(\tau)$ ao longo do tempo pode ser representada como uma sequência infinitesimal de impulsos curtos, conforme representado na figura 7.1.

Figura 7.1 - Esquema explicativo da integral de convolução



(fonte: Chopra-Dynamics Of Structures-Theory And Applications To Earthquake Engineering, 1995)

Foi adotado o método de Wilson, desenvolvido por E. L. Wilson, consistindo em uma modificação do método da aceleração média, o qual é condicionalmente estável, tornando-o incondicionalmente estável. Esta modificação é baseada na consideração

de que a aceleração varia linearmente durante um período de tempo $\delta t = \theta \Delta t$. Trata-se de um método poderoso, capaz de resolver sistemas não-lineares e de múltiplos graus de liberdade.

A seguir é apresentado um roteiro resumido para aplicação do Método de Wilson para integração direta e solução do problema. Para a estrutura em questão, é desenvolvido um código no software Mathcad, o qual encontra-se apresentado no Anexo “B”, desta dissertação.

7.1.1. Método de Wilson: cálculos iniciais

- Encontrar a aceleração inicial por meio da equação 7.2:

$$m\ddot{u}_0 = p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0 \quad (7.2)$$

- Selecionar o período de tempo adequado Δt e o ângulo θ ;
- Calcular o parâmetros “a” e “b”, utilizando as equações 7.3 e 7.4:

$$a = \frac{6}{\theta \Delta t} m + 3c \quad (7.3)$$

$$b = 3m + \frac{\theta \Delta t}{2} c \quad (7.4)$$

7.1.2. Método de Wilson: cálculos para cada passo de tempo (i)

- Calcular o incremento de carga pela equação 7.5:

$$\delta \hat{p}_i = \theta(\Delta p_i) + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i \quad (7.5)$$

- Calcular a matriz de rigidez tangencial, utilizando a equação 7.6:

$$\hat{k}_i = k_i + \frac{3}{\theta \Delta t} c + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} m \quad (7.6)$$

- Calcular o incremento de deslocamento, por meio da equação 7.7:

$$\delta u_i = \hat{k}_i^{-1} * \delta \hat{p}_i \quad (7.7)$$

- Em seguida, calcula-se os incrementos de velocidade e aceleração, utilizando as equações 7.8 a 7.11:

$$\delta \ddot{u}_i = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \delta u_i - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \quad (7.8)$$

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\theta} \delta \ddot{u}_i \quad (7.9)$$

$$\Delta \dot{u}_i = (\Delta t) \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \Delta \ddot{u}_i \quad (7.10)$$

$$\Delta u_i = (\Delta t) \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6} \Delta \ddot{u}_i \quad (7.11)$$

- Os incrementos são adicionados aos valores de deslocamento, velocidade e aceleração calculados no passo anterior, conforme apresentado nas equações 7.12 a 7.14:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad (7.12)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i \quad (7.13)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i \quad (7.14)$$

O Anexo “B” desta dissertação apresenta o código escrito no software Mathcad para resolução do sistema pelo Método de Wilson.

7.2. Ação dinâmica do vento pelo Método do Vento Sintético

A seguir são apresentados os resultados calculados para a ação dinâmica do vento, utilizando o Método do Vento Sintético. Os cálculos realizados para obtenção dos resultados são apresentados no Anexo “B”, desta dissertação.

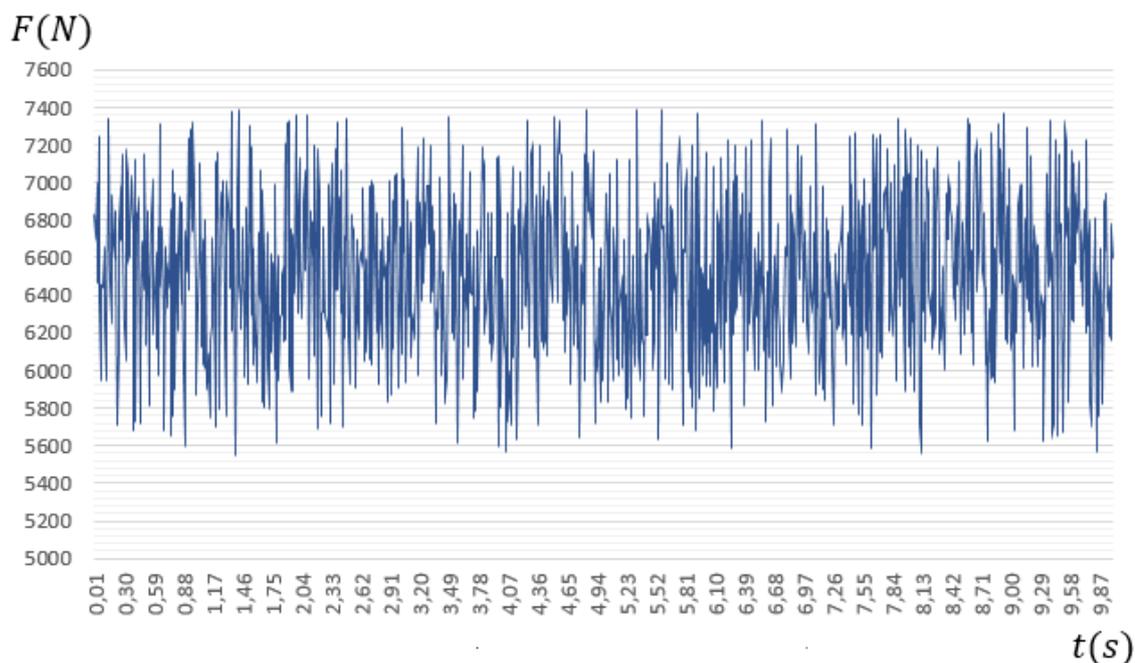
k	T _k (seg)	f _k (Hz)	X _{1k}	S(f) _k	C _k	p _k	c _k	Δz _k
1	0,0597	11,6806	567,6247	0,0303	0,2461	3,45	0,0007	0,44
2	0,1300	7,5800	368,3535	0,0623	0,3529	4,95	0,0010	0,69
3	0,7207	0,9862	47,9261	1,8630	1,9303	27,05	0,0056	5,27
4	1,5700	0,6400	31,1011	3,8270	2,7666	38,77	0,0080	8,12
5	2,4193	0,2938	14,2761	13,9392	5,2800	73,99	0,0153	17,69
6	3,7281	0,1348	6,5530	49,8141	9,9814	139,87	0,0288	38,55
7	5,7450	0,0619	3,0080	163,5274	18,0847	253,43	0,0522	83,97
8	8,8529	0,0284	1,3807	392,3899	28,0139	392,57	0,0809	182,94
9	13,6421	0,0130	0,6338	476,2427	30,8624	432,49	0,0892	398,54
10	21,0222	0,0060	0,2909	307,7161	24,8079	347,65	0,0717	868,23
11	32,3948	0,0027	0,1335	153,7423	17,5352	245,73	0,0507	1891,49

Tabela 7-1 - Resultados das 11 funções harmônicas, ação dinâmica do vento.

Utilizando-se a equação 4.32, neste capítulo apresentada novamente e renumerada como 7.15, podem-se gerar valores de pressão do vento variando ao longo do tempo. Desta forma, multiplicando pela área exposta ao vento da antena, pode-se encontrar valores de carga dinâmica que representam a flutuação do vento. Ou seja, em torno de um carregamento médio, ocorrem as variações das rajadas.

$$F_D = \sum_{k=1}^n C_a A_k p c_k \cos(2\pi f_k t - \theta_k) \quad (7.15)$$

Figura 7.2 - Gráfico de carga dinâmica do vento variando aleatoriamente no tempo.



(Fonte: o autor)

Na figura 7.2 apresenta-se a função de carregamento dinâmico ao longo de 10 segundos. Os ângulos de fase foram determinados aleatoriamente entre 0 e 2π , a fim de simular o comportamento arbitrário do vento.

7.3. Resultados da vibração forçada arbitrária

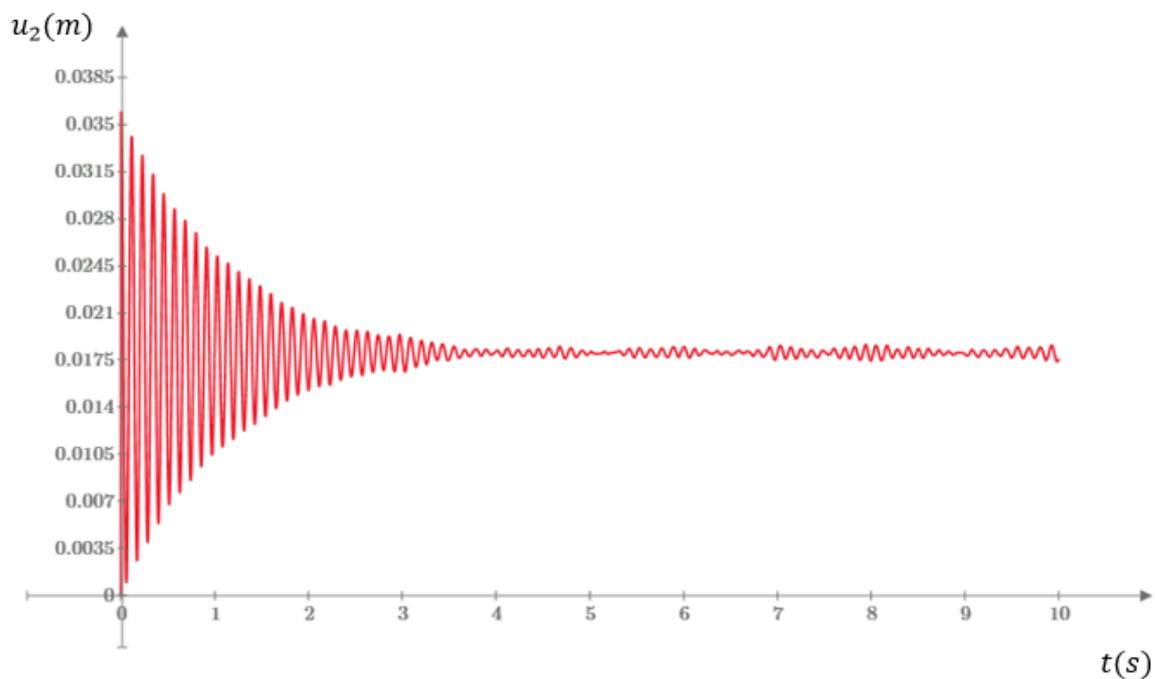
Resolvendo o sistema pelo Método de Wilson, obtém-se a resposta da estrutura para o deslocamento horizontal (u_2) e a rotação na extremidade do suporte (θ_2). Neste caso, o tempo total da análise é de 10 segundos, e para a força dinâmica do vento são gerados 10000 valores, calculados a cada 0,001 segundos. Para os deslocamentos, o intervalo de tempo adotado para a integração direta pelo Método de Wilson é de 0,001 segundos.

Comparando os gráficos das figuras 7.3 e 7.4, percebe-se que o deslocamento u_2 sofre uma redução de amplitude devido ao amortecimento. No primeiro caso (em

vermelho) a vibração é amortecida somente pelo amortecimento natural do aço, chegando a zero por volta de 6 segundos. Já para o esquema com amortecimento do elastômero (neoprene), apresentado na figura 7.4 (em azul), a vibração chega a zero por volta de 4 segundos. Isto representa uma redução de aproximadamente 2 segundos no período de vibração após aplicação da rajada de vento. Além disso, percebe-se uma redução na amplitude médias dos deslocamentos, ou seja, a estrutura vibra por menos tempo e ainda com deslocamentos cada vez menores, devido ao sistema de amortecimento com elastômero.

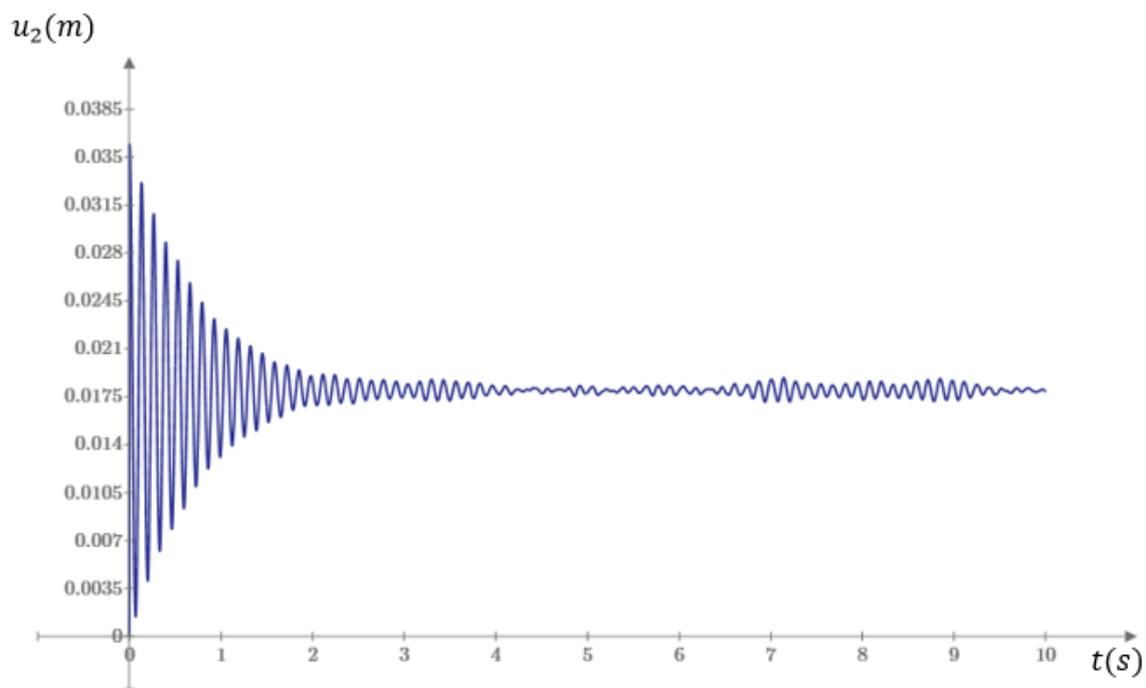
Para a rotação na extremidade do suporte, as figuras 7.5 e 7.6 também apresentam os resultados para as duas situações, sendo a primeira somente para o amortecimento natural, e a segunda para o amortecimento com o elastômero. Da mesma forma que para o deslocamento citado no parágrafo anterior, houve uma redução de tempo de vibração, bem como uma evidente redução nas amplitudes de deslocamento e, conseqüentemente, na amplitude de tensões responsável por causar a fadiga do material.

Figura 7.3 - Gráfico de deslocamento u_2 , apenas com amortecimento natural.



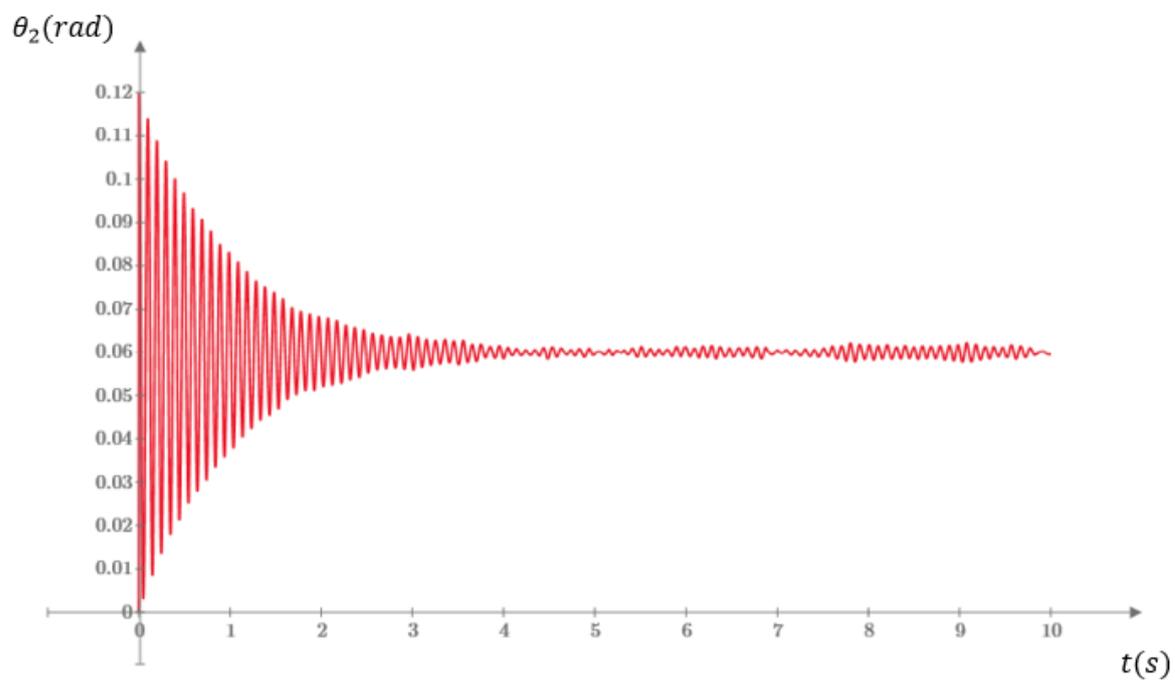
(Fonte: o autor)

Figura 7.4 - Gráfico de deslocamento u_2 , com amortecimento por elastômero (neoprene).



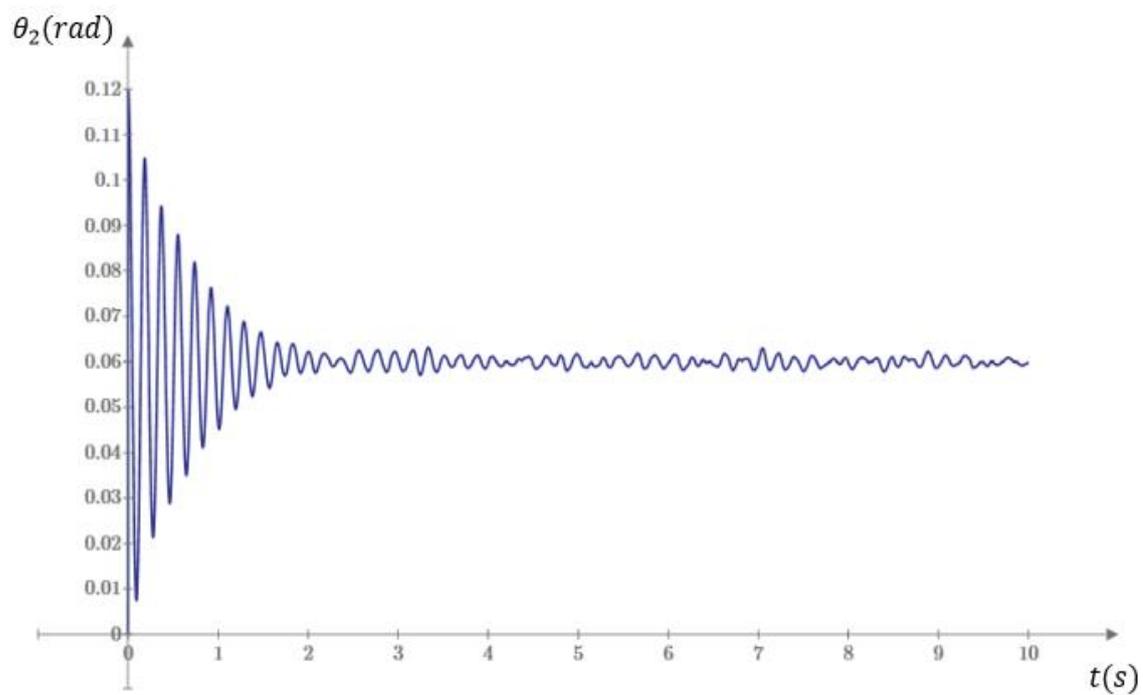
(Fonte: o autor)

Figura 7.5 - Gráfico da rotação θ_2 , apenas com amortecimento natural.



(Fonte: o autor)

Figura 7.6 - Gráfico da rotação θ_2 , com amortecimento por elastômero (neoprene).



(Fonte: o autor)

8. CONCLUSÃO

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e considerações finais acerca do presente trabalho. Também são propostos temas para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

O objetivo deste trabalho é buscar uma solução de amortecimento para o problema de vibração causada por antenas para telecomunicações em torres metálicas. A importância de tal estudo fica evidenciada nos casos reais apresentados no capítulo 1, desta dissertação, onde torres metálicas sofreram sérios danos devido ao posicionamento inadequado de antenas.

No caso da torre de Cabrobó, a cantoneira do montante sofreu uma fratura por fadiga. Outras cantoneiras auxiliares próximas à fratura também foram danificadas, partindo-se na região dos furos. Por sorte, a estrutura não sofreu colapso, pois os três montantes restantes absorveram os esforços.

Buscando solucionar o problema, propõe-se um sistema de amortecimento com elastômeros, como o neoprene. Aplicando as borrachas entre as abraçadeiras do suporte e a cantoneira do montante, é possível reduzir o período de vibração e as amplitudes dos deslocamentos. O estudo considera a utilização de borrachas de Neoprene 60 Shore A, com 2cm de espessura.

São apresentados conceitos básicos sobre dinâmica das estruturas, a partir dos quais foi realizada análise matemática do problema, com uma formulação analítica, na qual calculam-se os deslocamentos na extremidade do suporte. Um dos desafios do trabalho foi encontrar uma matriz de amortecimento capaz de representar as propriedades dos materiais envolvidos, ou seja, aço e neoprene. Como são materiais com propriedades de amortecimento muito diferentes, não é possível utilizar um ou outro, e, desta forma, utilizou-se o amortecimento não-clássico proposto por Rayleigh. Além disso, uma vez que a massa está concentrada na extremidade do suporte (referente à antena), também é utilizada uma condensação estática para reduzir os graus de liberdade do sistema.

A análise foi feita em duas partes, sendo a primeira apresentada no capítulo 6, e considera a vibração livre, ou seja, o vento atua como uma força estática. A segunda parte, apresentada no capítulo 7, engloba a ação dinâmica do vento, gerando uma série aleatória de cargas que representa as rajadas.

Analisando o caso da vibração livre, foram obtidos resultados satisfatórios com relação à redução do período de vibração e amplitude dos deslocamentos. Desta forma, os esforços de torção aplicados à cantoneira do montante são reduzidos, prolongando a vida útil da peça e, possivelmente, eliminando o risco de fratura por fadiga.

Para o caso da vibração forçada, que considera a ação dinâmica do vento, os resultados também apresentaram redução do período de vibração e amplitude dos deslocamentos. Para esta análise, foi considerado que o vento atua com uma velocidade média e, em torno desta, atua uma velocidade flutuante. Assim, utilizando o Método do Vento Sintético, foi possível elaborar uma série temporal. Para solução foi utilizada integração direta pelo Método de Wilson, com auxílio do software Mathcad.

Em face aos resultados matemáticos, fica evidente que o sistema de amortecimento proposto é eficiente e viável. Sua utilização pode prevenir acidentes e/ou danos na estrutura da torre e seus equipamentos.

O sistema de amortecimento proposto, contudo, requer um nível de manutenção mais elevado, para o qual as empresas que gerenciam torres possivelmente não estão preparadas. É de se esperar que as borrachas de neoprene se desgastem bem antes que a estrutura metálica, e, portanto, devem ser substituídas periodicamente. É comum que torres metálicas para telecomunicações recebam manutenção periódica a cada cinco anos, período que pode ser superior ao desgaste do neoprene.

Como proposta para trabalhos futuros, tem-se:

- Realizar uma análise experimental do sistema de amortecimento. Pode-se montar um protótipo, em escala reduzida, com torre metálica e suporte para antena. O sistema é colocado em vibração por meio de um motor elétrico e são feitas medições para deslocamentos e acelerações;

- Estudar as condições de manutenção e durabilidade do sistema, estimando, assim, um período para manutenção preventiva que pode consistir, ou não, na troca das borrachas de neoprene;
- Analisar os custos para o sistema de amortecimento proposto, buscando preços e fornecedores no mercado nacional;
- Buscar meios para conscientizar as empresas que gerenciam torres para telecomunicações sobre a importância de um sistema de amortecimento. O problema de vibração em torres é categoricamente ignorado por muitos profissionais do ramo, e poucas empresas adotariam o sistema mesmo que o custo seja baixo.

LISTA DE REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Forças devido ao vento em edificações – NBR 6123**. Rio de Janeiro, 1988. 80p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios – NBR 8800**. Rio de Janeiro, 1986. 200p.
- BLESSMANN, J. **O vento na engenharia estrutural**. Porto Alegre: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995. 168p.
- BLESSMANN, J. **Introdução ao estudo das ações dinâmicas do vento – 2ª ed.** Porto Alegre: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005. 282 p.
- BRONZATTO, A. F. L. **Esforços de vento em estruturas esbeltas para telecomunicações: comparação entre as análises estática e dinâmica propostas pela NBR 6123/1988**. 2012. 81p. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2012.
- CARRIL JR., C. F. **Análise numérica e experimental do efeito dinâmico do vento em torres metálicas treliçadas para telecomunicações**. 2000. 143p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2000.
- CHOPRA, Anil K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. 2. Ed. United States of America: Prentice-Hall, 1995. 844p.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 2 ED. Tokyo: McGraw Hill, 1993. 634p.
- CHEN, W. L. Q. Z. H.; XU, Y. L., **Dynamic Analysis of Wind-excited Truss Towers With Friction Dampers**, Computers and Structures, vol. 79, p. 2817-2831, 2001.
- DAVENPORT, A. G., **The application of statistical concepts to the wind loading of structures**. Proceedings/Institution of Civil Engineers, v 19. P 449-72, Aug 1961.
- EL-GHAZALYT, H. A.; AL-KHAIATZ, H. A., **Analysis and Design of Guyed Transmission Towers – Case Study in Kuwait**, Computers and Structures, vol 55, p. 413-431, 1995.

FRANCO, M. **Direct along wind dynamic analysis of tall structures**. Boletim Técnico, São Paulo, EPUSP, BT/PEF/9303, 1993.

JASIM, N. A.; GALEB, A. C., **Optimum Design of Square Free-standing Communication Towers**, Journal of Constructional Steel Research, vol. 58, p.413-425, 2002.

JENSEN, J.J; FOLKESTAD, G., **Dynamic Behavior of Transmission Towers: Field Measurements**, Engineering Structures, vol. 6, p. 288-296, 1984.

KAHLA, N. B., **Dynamic Analysis of Guyed Towers**, Engineering Structures, vol. 16, p. 293-301, 1994.

LAZANHA, E. C., **Análise dinâmica elasto-plástica de estruturas metálicas sob excitação aleatória do vento**. 2003, 160p. Dissertação de Mestrado – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

MADUGULA, M. K. S.; WAHBA, Y. M. F., **Dynamic Response of Guyed Masts**, Engineering Structures, vol. 20, p. 1097-1101, 1998.

MARCE, R. N., GUIMARÃES, M. J. R., DOZ, G. N., e BRITO, J. L. V., **Análise de torres metálicas submetidas à ação do vento: um estudo comparativo**, Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Passo Fundo, v.4, n. 1, p. 61-81, 2007.

MENIN, R. C. G., **Análise Estática e Dinâmica de Torres Metálicas Estaiadas**, Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM-009^a/2002, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 2002.

OLIVEIRA, M. I. R. de, **Análise estrutural de torres de transmissão de energia submetidas aos efeitos dinâmicos induzidos pelo vento**, Dissertação de Mestrado – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia, Rio de Janeiro, 2006.

PERELMUTER, A. V.; MIKITARENKO, M. A., **Safe Fatigue Life of Steel Towers Under the Actions of Wind Vibrations**, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol 74-76, p. 1091-1100, 1998.

RAUSCH, E. **Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgabe.** Berlin; VDI Verlag GmbH, 1973.

RAO, N. P.; KALYANARAMAN, V., **Non-linear Behavior of Lattice Panel of Angle Towers**, Journal of Constructional Steel Research, vol. 57, p. 1337-1357, 2001.

SILVA, J. G. S. da, VELLASCO, P. C. G. da S., ANDRADE, S. A. L. de, OLIVEIRA, M. I. R. de, **An Evaluation of Structural Steel Design Systems for Transmission and Telecommunication Towers**, Light Structures in Civil Engineering, In: International IASS Symposium, Varsóvia, p. 162-165, 2002.

VANDEPERRE, L. J. **L'action du vent sur les bâtiments.** Annales Travaux Publiques de Belge. 1934.

APÊNDICE A - CÁLCULOS DA ANÁLISE MATEMÁTICA - VIBRAÇÃO LIVRE

Neste anexo são apresentados os cálculos desenvolvidos para a análise matemática da vibração livre, realizados com auxílio do software Mathcad.

A.1. Carga de vento aplicada

Carga de vento aplicada ao suporte (considerando antena com diâmetro de 3m):

$$\begin{aligned}
 V_0 &:= 30 \frac{m}{s} & S1 &:= 1 & S2 &:= 1.1 & S3 &:= 1.1 & V_k &:= V_0 \cdot S1 \cdot S2 \cdot S3 = 36.3 \frac{m}{s} \\
 q &:= 0.613 \cdot V_k^2 = 807.74 \frac{N}{m^2} & q_1 &:= 807.74 \frac{N}{m^2} & D_{antena} &:= 3 \text{ m} & CA &:= 1.2 \\
 A_{antena} &:= \frac{\pi \cdot D_{antena}^2}{4} = 7.07 \text{ m}^2 & P_1 &:= CA \cdot A_{antena} \cdot q_1 = 698.66 \text{ kgf} \\
 A_{suporte} &:= 0.306 \text{ m}^2 + 2 \cdot (0.0255 \text{ m}^2) = 0.36 \text{ m}^2 & P_2 &:= CA \cdot A_{suporte} \cdot q_1 = 35.29 \text{ kgf} \\
 P &:= P_1 + P_2 = 733.94 \text{ kgf} & M &:= (P_1 \cdot 0.5 \text{ m}) + (P_2 \cdot 0.25 \text{ m}) = 358.15 \text{ kgf} \cdot \text{m} \\
 P &= (7.2 \cdot 10^3) \text{ N} & P_A &:= 7.2 \cdot 10^3 & M_P &:= P \cdot 0.5 \text{ m} = (3.6 \cdot 10^3) \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

A.2. Dados do suporte

Dados do suporte:

Massa aproximada da antena e suporte:	$M_s := 250 \text{ kg}$
Material do suporte:	$ASTM - A36$
Módulo de elasticidade:	$E_s := 200000 \text{ MPa}$
Comprimento (afastamento da torre):	$L_s := 500 \text{ mm}$
Perfil utilizado no afastamento (E1):	2 x Cantoneira L 2" x 1/8" (51 x 51 x 3,2mm)
Momento de inércia (direção do vento)	$I_s := (7.9 \text{ cm}^4) = (7.9 \cdot 10^{-8}) \text{ m}^4$
Coefficiente de amortecimento:	$\zeta_s := 0.02$

A.3. Dados do elastômero (Neoprene)

Dados do elastômero para amortecimento:

Dureza do elastômero:	60ShoreA
Massa específica:	$\rho_e := 1230 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Coefficiente de poisson:	$\nu_e := 0.5$
Dimensões da borracha (largura, comprimento e espessura):	$a_e := 10 \text{ cm} \quad b_e := 10 \text{ cm} \quad t_e := 4 \text{ cm}$
Área da borracha:	$A_e := a_e \cdot b_e = 0.01 \text{ m}^2$
Massa aproximada do neoprene:	$M_e := \rho_e \cdot A_e \cdot t_e = 0.49 \text{ kg}$
Fator de forma da borracha:	$S_e := \frac{a_e \cdot b_e}{2 \cdot t_e \cdot (a_e + b_e)} = 0.63$
Módulo de elasticidade ao cisalhamento (60 Shore A):	$G_e := 1.05 \text{ MPa}$
Correção de compressibilidade (60 Shore A):	$k_e := 0.55$
Módulo de elasticidade à compressão:	$E_e := 3 \cdot G_e \cdot (1 + 2 \cdot k_e \cdot S_e^2) = 4.5 \text{ MPa}$
Coefficiente de amortecimento:	$\zeta_e := 0.10$
Momento de inércia:	$I_e := \frac{a_e \cdot b_e^3}{12} = 833.33 \text{ cm}^4$
Raio de giração:	$i_e := \sqrt{\frac{I_e}{A_e}} = 2.89 \text{ cm}$

A.4. Montagem da equação diferencial

Utilizando o balanço de energia proposto por Lagrange, pode-se encontrar a equação diferencial referente ao movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dv} \right) - \frac{d\xi}{du} + \frac{d\Delta}{dv} + \frac{dU}{du} = - \left(\frac{dV}{du} \right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Energia cinética:} & \xi = \frac{m \cdot v^2}{2} \\ \text{Função dissipativa:} & \Delta = \frac{c \cdot v^2}{2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Energia potencial de deformação:} & U = \frac{k \cdot u^2}{2} \\ \text{Potencial de forças externas:} & V = -F(t) \end{array}$$

Organizando as funções de acordo com o tipo de energia, tem-se:

$$\begin{array}{ll} \text{Energia cinética:} & \xi = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + \frac{J \cdot \Theta_2^2}{2} \\ \text{Energia potencial de deformação:} & U = \frac{k_1 \cdot u_1^2}{2} + \frac{k_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)^2}{2} + \frac{k_3 \cdot \theta_1^2}{2} + \frac{k_4 \cdot (u_2 - u_1)^2}{2} \end{array}$$

Onde:	ξ	>>>	Energia cinética
	Δ	>>>	Função dissipativa (amortecimento)
	U	>>>	Energia potencial de deformação
	V	>>>	Potencial das forças externas
	$F(t)$	>>>	Forças externas em função do tempo
	m	>>>	Massa do sistema (antena)
	J	>>>	Momento de inércia de massa
	v	>>>	Velocidade (primeira derivada do deslocamento)
	Θ	>>>	Velocidade angular (primeira derivada da rotação)
	c	>>>	Coefficiente de amortecimento
	k	>>>	Coefficiente de rigidez
	u	>>>	Deslocamento (translação)
	θ	>>>	Deslocamento (rotação)

Fazendo as derivadas, tem-se uma equação diferencial para cada deslocamento, sendo duas relacionadas com a massa da antena (ou dinâmicas) e duas não relacionadas (ou estáticas):

$$1^{\text{a}} \text{ EQ } (u_1): \quad c_1 \cdot v_1 + c_4 \cdot v_1 - c_4 \cdot v_2 + k_1 \cdot u_1 + k_4 \cdot u_1 - k_4 \cdot u_2 = 0$$

$$2^{\text{a}} \text{ EQ } (u_1): \quad m \cdot a_2 + c_4 \cdot v_2 - c_4 \cdot v_1 + k_4 \cdot u_2 - k_4 \cdot u_1 = F(t)$$

$$3^{\text{a}} \text{ EQ } (\theta_1): \quad c_2 \cdot \Theta_1 - c_2 \cdot \Theta_2 + c_3 \cdot \Theta_1 + k_2 \cdot \theta_1 - k_2 \cdot \theta_2 + k_3 \cdot \theta_1 = 0$$

$$4^{\text{a}} \text{ EQ } (\theta_1): \quad J \cdot \alpha_2 + c_2 \cdot \Theta_2 - c_2 \cdot \Theta_1 + k_2 \cdot \theta_2 - k_2 \cdot \theta_1 = 0$$

a	>>>	Aceleração (segunda derivada do deslocamento)
α	>>>	Aceleração angular (segunda derivada da rotação)

Organizando matricialmente, temos:

$$[M]\{A\} + [C]\{V\} + [K]\{D\} = F$$

$[M]$	>>>	Matriz de massa
$[C]$	>>>	Matriz de amortecimento
$[K]$	>>>	Matriz de rigidez
$\{A\}$	>>>	Vetor de acelerações
$\{V\}$	>>>	Vetor de velocidades
$\{D\}$	>>>	Vetor de deslocamentos

Massa aproximada: $m_a := 250 \text{ kg}$

Eixo de rotação: $r := 0.5 \text{ m}$

Momento de inércia da massa: $J_a := \int r^2 dm_a \rightarrow 62.5 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}$

$$M = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -c_2 \\ -c_4 & 0 & c_1 + c_4 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_4 & 0 & -k_4 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_4 & 0 & k_1 + k_4 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a condensação estática, pode-se organizar o sistema para obter as equações dinâmicas, levando em conta a rigidez e amortecimento dos demais graus de liberdade. Assim, classificam-se as equações dinâmicas por um sub-índice "d" e as estácas por um sub-índice "e".

$$M_{dd} = \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & J_a \end{bmatrix} \quad M_{de} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{ed} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{ee} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{dd} = \begin{bmatrix} c_4 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad C_{de} = \begin{bmatrix} -c_4 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad C_{ed} = \begin{bmatrix} -c_4 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad C_{ee} = \begin{bmatrix} c_1 + c_4 & 0 \\ 0 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$K_{dd} = \begin{bmatrix} k_4 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad K_{de} = \begin{bmatrix} -k_4 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad K_{ed} = \begin{bmatrix} -k_4 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad K_{ee} = \begin{bmatrix} k_1 + k_4 & 0 \\ 0 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{dd} & M_{de} \\ M_{ed} & M_{ee} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{dd} & C_{de} \\ C_{ed} & C_{ee} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{de} \\ K_{ed} & K_{ee} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, tem-se:

$$M_{dd} \cdot A_d + C_{dd} \cdot V_d + C_{de} \cdot V_e + K_{dd} \cdot D_d + K_{de} \cdot D_e = F_d \quad \text{EQ 1}$$

$$C_{ed} \cdot V_d + C_{ee} \cdot V_e + K_{ed} \cdot D_d + K_{ee} \cdot D_e = 0 \quad \text{EQ 2}$$

Considerando o sistema não amortecido, pode-se obter a matriz de rigidez referente aos deslocamentos dinâmicos:

$$K_{ed} \cdot D_d + K_{ee} \cdot D_e = 0$$

$$D_e = -K_{ee}^{-1} \cdot K_{ed} \cdot D_d$$

Substituindo na EQ 2, encontra-se a matriz de rigidez condensada:

$$K_{mdd} = K_{dd} - K_{ed}^T \cdot K_{ee}^{-1} \cdot K_{ed}$$

A.5. Coeficiente de rigidez e condensação estática

A seguir são calculados os coeficientes de rigidez a fim de preencher a matriz calculada acima:

- k_1 >>> Rigidez à compressão do neoprene
- k_2 >>> Rigidez à rotação das cantoneiras do suporte
- k_3 >>> Rigidez à rotação do neoprene
- k_4 >>> Rigidez à flexão das cantoneiras do suporte

$$k_1 := 2 \cdot \left(\frac{E_e \cdot A_e}{t_e} \right) = (2.25 \cdot 10^6) \frac{N}{m} \quad k_2 := 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot E_s \cdot I_s}{L_s^2} \right) \cdot 1 \quad m = (2.53 \cdot 10^5) N \cdot m$$

Fatores numéricos baseados na forma plana (quadrada, neste caso):

$$S_{f1} := 1 \quad S_{f2} := 0.75$$

$$\text{Rigidez à rotação do neoprene: } k_3 := 2 \cdot \left(3 \cdot G_e \cdot i_e^2 \cdot \left(S_{f1} + \frac{0.062 \cdot a_e^2 \cdot S_{f2}}{t_e^2} \right) \cdot \frac{A_e}{t_e} \right) = (1.69 \cdot 10^3) N \cdot m$$

$$k_4 := 2 \cdot \left(\frac{3 \cdot E_s \cdot I_s}{L_s^3} \right) = (7.58 \cdot 10^5) \frac{N}{m}$$

Montando a matriz de rigidez, e realizando a condensação estática, obtém-se o seguinte resultado:

$$K := \begin{bmatrix} k_4 & 0 & -k_4 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_4 & 0 & k_1+k_4 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7.58 \cdot 10^5) \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} & -7.58 \cdot 10^5 \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} \\ 0 \frac{kg}{s^2} & (2.53 \cdot 10^5) J & 0 \frac{kg}{s^2} & -2.53 \cdot 10^5 J \\ -7.58 \cdot 10^5 \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} & (3.01 \cdot 10^6) \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} \\ 0 \frac{kg}{s^2} & -2.53 \cdot 10^5 J & 0 \frac{kg}{s^2} & (2.54 \cdot 10^5) J \end{bmatrix}$$

$$K_{dd} := \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7.58 \cdot 10^5) \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} \\ 0 \frac{kg}{s^2} & (2.53 \cdot 10^5) J \end{bmatrix}$$

$$K_{de} := \begin{bmatrix} K_{1,3} & K_{1,4} \\ K_{2,3} & K_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.58 \cdot 10^5 \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} \\ 0 \frac{kg}{s^2} & -2.53 \cdot 10^5 J \end{bmatrix}$$

$$K_{ed} := \begin{bmatrix} K_{3,1} & K_{3,2} \\ K_{4,1} & K_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.58 \cdot 10^5 \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} \\ 0 \frac{kg}{s^2} & -2.53 \cdot 10^5 J \end{bmatrix}$$

$$K_{ee} := \begin{bmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} \\ K_{4,3} & K_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3.01 \cdot 10^6) \frac{kg}{s^2} & 0 \frac{kg}{s^2} \\ 0 \frac{kg}{s^2} & (2.54 \cdot 10^5) J \end{bmatrix}$$

$$k_1 = (2.25 \cdot 10^6) \frac{N}{m} \quad k_2 = (2.53 \cdot 10^5) N \cdot m \quad k_3 = (1.69 \cdot 10^3) N \cdot m \quad k_4 = (7.58 \cdot 10^5) \frac{N}{m}$$

$$K_{dd} := \begin{bmatrix} 7.58 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 2.53 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad K_{ed} := \begin{bmatrix} -7.58 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -2.53 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K_{de} := \begin{bmatrix} -7.58 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -2.53 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad K_{ee} := \begin{bmatrix} 3.01 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 2.54 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$Km_{dd} := K_{dd} - K_{ed}^T \cdot K_{ee}^{-1} \cdot K_{ed} = \begin{bmatrix} 5.67 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 7.22 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

Assim, reescrevemos o sistema de equações diferenciais, considerando o mesmo não amortecido, e temos:

$$M_{dd} \cdot A_d + Km_{dd} \cdot D_d = F_d$$

$$M_{dd} := \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & J_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \text{ kg} & 0 \text{ kg} \\ 0 \text{ kg} & 62.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{bmatrix} \quad M_{dd} := \begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 62.5 \end{bmatrix}$$

Calculando a matriz dinâmica inversa temos:

$$r_1 := \sqrt{M_{dd_1,1}} = 15.81 \quad r_2 := \sqrt{M_{dd_2,2}} = 7.91 \quad M_{ddr} := \begin{bmatrix} 15.81 & 0 \\ 0 & 7.91 \end{bmatrix}$$

$$Z_{dd} := \frac{1}{M_{ddr}} \cdot Km_{dd} \cdot \frac{1}{M_{ddr}} = \begin{bmatrix} 2.27 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 1.15 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Desta forma, obtemos os quadrados das frequências naturais, sendo possível encontrar as mesmas:

$$\omega_1 := \sqrt{Z_{dd_2,2}} = 33.97 \quad \omega_2 := \sqrt{Z_{dd_1,1}} = 47.63$$

$$\omega_1 := 33.97 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \omega_2 := 47.63 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T_1 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} = 0.18 \text{ s} \quad T_2 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_2} = 0.13 \text{ s}$$

$$f_1 := \frac{1}{T_1} = 5.41 \text{ Hz} \quad f_2 := \frac{1}{T_2} = 7.58 \text{ Hz}$$

A.6. Amortecimento não-clássico

Utilizando o amortecimento de Rayleigh, pode-se encontrar a matriz de amortecimento a partir de coeficientes de proporcionalidade das matrizes de massa e rigidez:

$$c = \alpha_0 \cdot m + \alpha_1 \cdot k$$

Esta formulação é idealizada para amortecimento clássico, o que não é o caso deste problema. Portanto, são calculados os coeficientes de proporcionalidade para os dois tipos de materiais presentes (aço e neoprene), assim formando uma matriz de amortecimento não-clássica.

Para tanto, são determinados os coeficientes de amortecimento esperados para os dois primeiros modos de vibração de cada material, de acordo com a tabela a seguir:

Fatores de amortecimento ζ , comumente utilizados	
Material	Fator de amortecimento estimado
Mola de aço	0,005
Aço estrutural	0,02
Borracha natural	0,05
Neoprene	0,10
Elastômero Barry LT	0,15

Tabela A-1 - Fatores de amortecimento comumente utilizados

$\zeta_A := 0.02$	>>>	Coeficiente de amortecimento para o aço
$\zeta_N := 0.1$	>>>	Coeficiente de amortecimento para o neoprene
$\omega_1 = 47.63 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	>>>	frequência não amortecida do primeiro modo de vibração
$\omega_2 = 33.97 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	>>>	frequência não amortecida do segundo modo de vibração
$\alpha_{0A} := \zeta_A \cdot \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = 0.79 \frac{1}{\text{s}}$		$\alpha_{1A} := \zeta_A \cdot \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} = (4.9 \cdot 10^{-4}) \text{ s}$
$\alpha_{0N} := \zeta_N \cdot \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = 3.97 \frac{1}{\text{s}}$		$\alpha_{1N} := \zeta_N \cdot \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} = (2.45 \cdot 10^{-3}) \text{ s}$

Considerando a matriz de amortecimento inicial, ou seja, antes da condensação estática, classificam-se os coeficientes C1, C2, C3 e C4 de acordo com o tipo de material e o respectivo grau de liberdade:

c_1	>>>	Amortecimento à compressão do neoprene
c_2	>>>	Amortecimento à rotação das cantoneiras do suporte
c_3	>>>	Amortecimento à rotação do neoprene
c_4	>>>	Amortecimento à flexão das cantoneiras do suporte

$$C = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -c_2 \\ -c_4 & 0 & c_1 + c_4 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad C_A = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -c_2 \\ -c_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad C_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$C = C_A + C_N$$

$$M := \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = M_A + M_N$$

$$M_A := \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_N := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} k_4 & 0 & -k_4 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ -k_4 & 0 & k_1+k_4 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} k_1 &= (2.25 \cdot 10^6) \frac{N}{m} \\ k_2 &= (2.53 \cdot 10^5) N \cdot m \\ k_3 &= (1.69 \cdot 10^3) N \cdot m \\ k_4 &= (7.58 \cdot 10^5) \frac{N}{m} \\ k_1+k_4 &= (3.01 \cdot 10^6) \frac{N}{m} \\ k_2+k_3 &= (2.54 \cdot 10^5) N \cdot m \end{aligned}$$

$$K_A := \begin{bmatrix} 7.58 \cdot 10^5 & 0 & -7.58 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 2.53 \cdot 10^5 & 0 & -2.53 \cdot 10^5 \\ -7.58 \cdot 10^5 & 0 & 7.58 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -2.53 \cdot 10^5 & 0 & 2.53 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad K_N := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.25 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.69 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

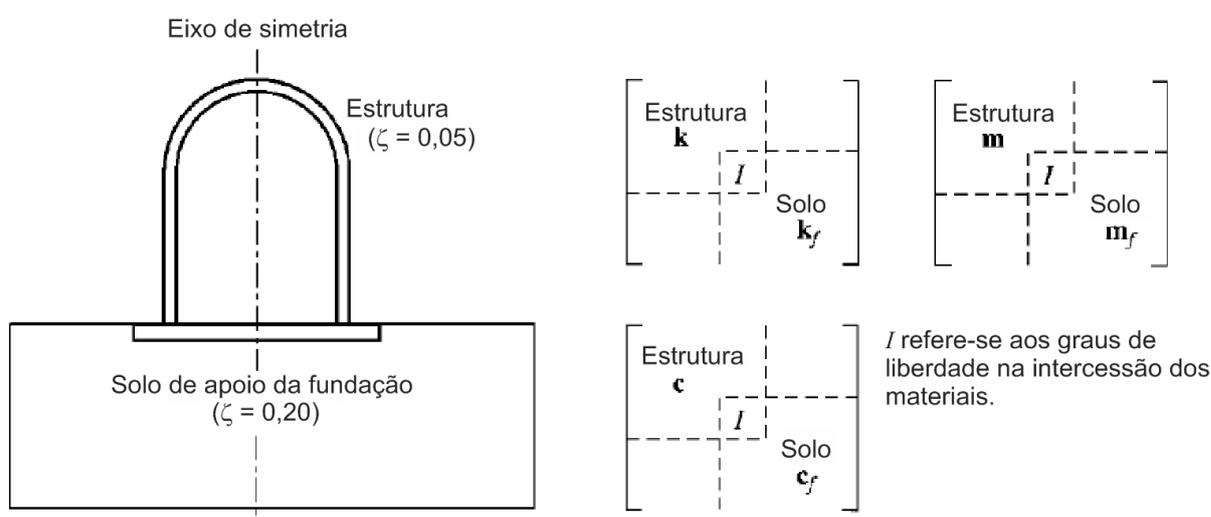


Figura A-1 - Exemplo de amortecimento não-clássico entre solo e estrutura.

$$C_A := \alpha_{0A} \cdot M_A + \alpha_{1A} \cdot K_A = \begin{bmatrix} 568.92 & 0 & -371.42 & 0 \\ 0 & 173.35 & 0 & -123.97 \\ -371.42 & 0 & 371.42 & 0 \\ 0 & -123.97 & 0 & 1.24 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$C_N := \alpha_{0N} \cdot M_N + \alpha_{1N} \cdot K_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.51 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.14 \end{bmatrix}$$

$$C := C_A + C_N = \begin{bmatrix} 568.92 & 0 & -371.42 & 0 \\ 0 & 173.35 & 0 & -123.97 \\ -371.42 & 0 & 5.88 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & -123.97 & 0 & 1.24 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a matriz de amortecimento é semelhante à matriz de rigidez, será utilizado o mesmo procedimento pelo qual foi realizada a condensação estática anterior. Assim são considerados os fatores de amortecimento de todos os graus de liberdade, embora sejam calculados somente os deslocamentos associados à massa.

$$C_{dd} := \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 568.92 & 0 \\ 0 & 173.35 \end{bmatrix} \quad C_{de} := \begin{bmatrix} C_{1,3} & C_{1,4} \\ C_{2,3} & C_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -371.42 & 0 \\ 0 & -123.97 \end{bmatrix}$$

$$C_{ed} := \begin{bmatrix} C_{3,1} & C_{3,2} \\ C_{4,1} & C_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -371.42 & 0 \\ 0 & -123.97 \end{bmatrix} \quad C_{ee} := \begin{bmatrix} C_{3,3} & C_{3,4} \\ C_{4,3} & C_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.88 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 1.24 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$Cm_{dd} := C_{dd} - C_{ed}^T \cdot C_{ee}^{-1} \cdot C_{ed} = \begin{bmatrix} 545.47 & 0 \\ 0 & 172.11 \end{bmatrix}$$

A.7. Solução do sistema condensado

A seguir são calculados os coeficientes de amortecimento para os graus de liberdade dinâmicos do sistema condensado:

$$M_{dd} = \begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 62.5 \end{bmatrix} \quad Cm_{dd} = \begin{bmatrix} 545.47 & 0 \\ 0 & 172.11 \end{bmatrix} \quad Km_{dd} = \begin{bmatrix} 5.67 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 7.22 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \omega_1 := 47.63 \\ \omega_2 := 33.97 \end{array}$$

$$\zeta_1 := \frac{Cm_{dd_{1,1}}}{2 \cdot M_{dd_{1,1}} \cdot \omega_1} = 0.0229 \quad \zeta_2 := \frac{Cm_{dd_{2,2}}}{2 \cdot M_{dd_{2,2}} \cdot \omega_2} = 0.04053$$

Num primeiro momento, será considerado o sistema sob vibração livre, ou seja, a força do vento deforma o sistema e e então se torna nula, deixando-o vibrar livremente. Assim, $F(t) = 0$.

$$M_{dd} \cdot A_d + Cm_{dd} \cdot V_d + Km_{dd} \cdot D_d = 0$$

$$1^{\text{a}} \text{ EQ (u2):} \quad a_2 + 2 \cdot \zeta_1 \cdot \omega_1 \cdot v_2 + \omega_1^2 \cdot u_2 = 0$$

$$2^{\text{a}} \text{ EQ (u2):} \quad \alpha_2 + 2 \cdot \zeta_2 \cdot \omega_2 \cdot \Theta_2 + \omega_2^2 \cdot \theta_2 = 0$$

A partir do carregamento de vento calculado pode-se determinar a deformação estática do sistema, sendo este o deslocamento inicial do qual se inicia a vibração livre amortecida.

$$u_{02} := \frac{P \cdot I_s^3}{3 \cdot E_s \cdot I_s} = 0.01898 \text{ m} \quad u_{02} := 0.01898 \quad \theta_{02} := \frac{P \cdot I_s^2}{2 \cdot E_s \cdot I_s} = 0.06$$

As velocidades iniciais serão tomadas como nulas, então:

$$v_{02} := 0 \quad \Theta_{02} := 0$$

Calculando as frequências amortecidas tem-se:

$$\omega_{d1} := \omega_1 \cdot \sqrt{1 - \zeta_1^2} = 47.6175 \qquad \omega_{d2} := \omega_2 \cdot \sqrt{1 - \zeta_2^2} = 33.9421$$

A solução para o sistema livre amortecido é adotada como:

$$u_2(t) := \exp(-\zeta_1 \cdot \omega_1 \cdot t) \cdot \left(u_{02} \cdot \cos(\omega_{d1} \cdot t) + \frac{v_{02} + (\zeta_1 \cdot \omega_1 \cdot u_{02})}{\omega_{d1}} \cdot \sin(\omega_{d1} \cdot t) \right)$$

$$\theta_2(t) := \exp(-\zeta_2 \cdot \omega_2 \cdot t) \cdot \left(\theta_{02} \cdot \cos(\omega_{d2} \cdot t) + \frac{\Theta_{02} + (\zeta_2 \cdot \omega_2 \cdot \theta_{02})}{\omega_{d2}} \cdot \sin(\omega_{d2} \cdot t) \right)$$

Abaixo encontram-se representados graficamente os resultados para o deslocamento u_2 metros, em função do tempo:

$$t_{final} := 10 \qquad t := 0, 0.01 \dots t_{final}$$

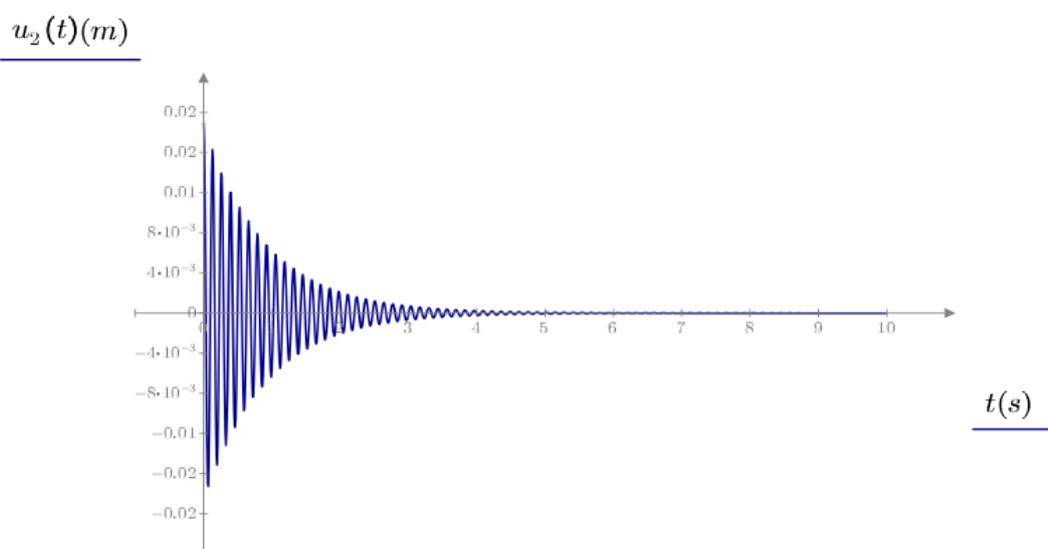


Figura A-2 - Deslocamento u_2 com sistema de amortecimento pelo Neoprene.

Também é possível representar os resultados da rotação θ_2 em radianos, em função do tempo.

$$t_{final} := 10 \qquad t := 0, 0.01 \dots t_{final}$$

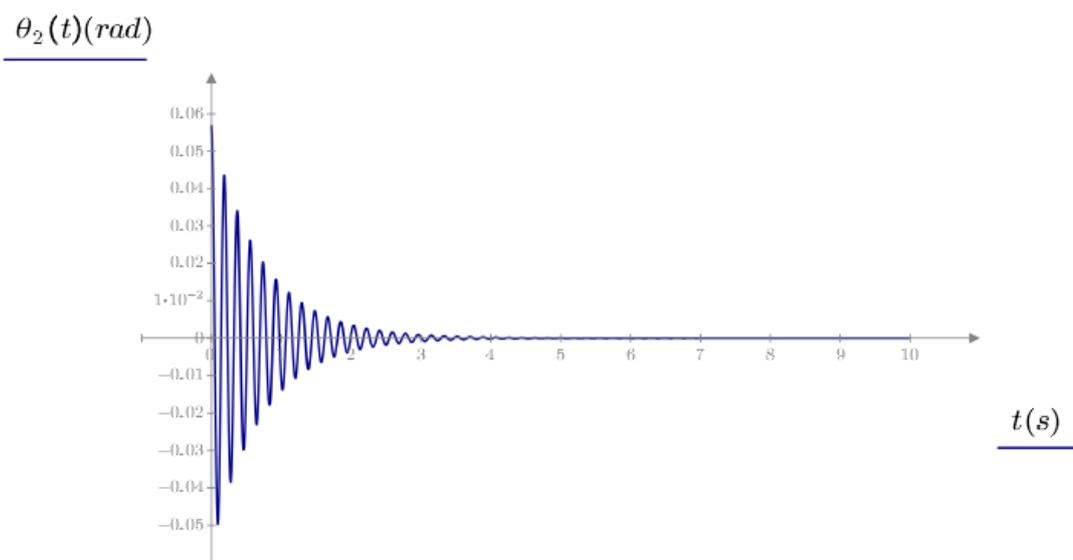


Figura A-3 - Rotação θ_2 com sistema de amortecimento pelo Neoprene.

Comparando a solução com o sistema sem o neoprene, tem-se:

$$\zeta := 0.02$$

$$\omega_{d1} := \omega_1 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} = 47.6205 \qquad \omega_{d2} := \omega_2 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} = 33.9632$$

A solução para o sistema livre amortecido é adotada como:

$$u_{2u}(t) := \exp(-\zeta \cdot \omega_1 \cdot t) \cdot \left(u_{02} \cdot \cos(\omega_{d1} \cdot t) + \frac{v_{02} + (\zeta \cdot \omega_1 \cdot u_{02})}{\omega_{d1}} \cdot \sin(\omega_{d1} \cdot t) \right)$$

$$\theta_{2u}(t) := \exp(-\zeta \cdot \omega_2 \cdot t) \cdot \left(\theta_{02} \cdot \cos(\omega_{d2} \cdot t) + \frac{\Theta_{02} + (\zeta \cdot \omega_2 \cdot \theta_{02})}{\omega_{d2}} \cdot \sin(\omega_{d2} \cdot t) \right)$$

Representando graficamente, tem-se abaixo os resultados de deslocamento u_2 para o sistema que conta apenas com amortecimento do aço, apresentados em metros, em função do tempo:

$$t_{final} := 10 \qquad t := 0, 0.01 .. t_{final}$$

$u_{2u}(t)(m)$

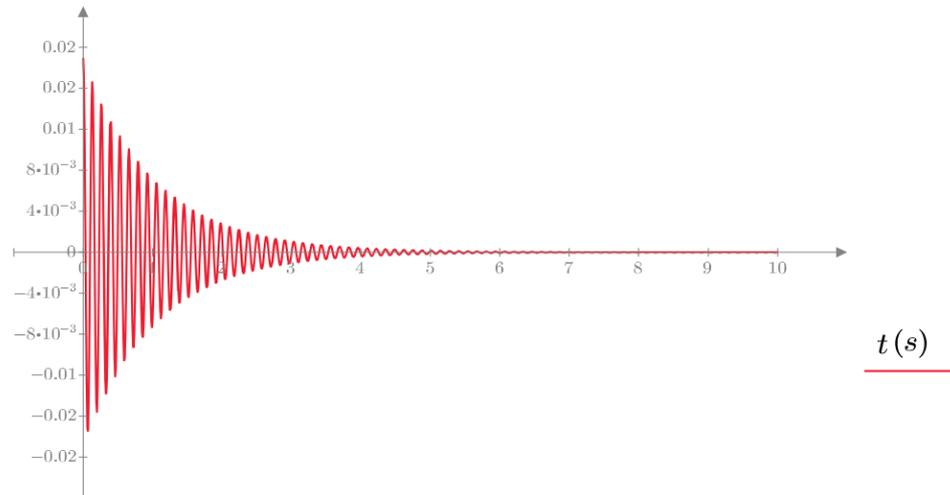


Figura A-4 - Deslocamento u_2 apenas com amortecimento natural do aço.

Também pode-se representar graficamente a rotação θ_2 em radianos, em função do tempo.

$t_{final} := 10$

$t := 0, 0.01 \dots t_{final}$

$\theta_{2u}(t)(rad)$

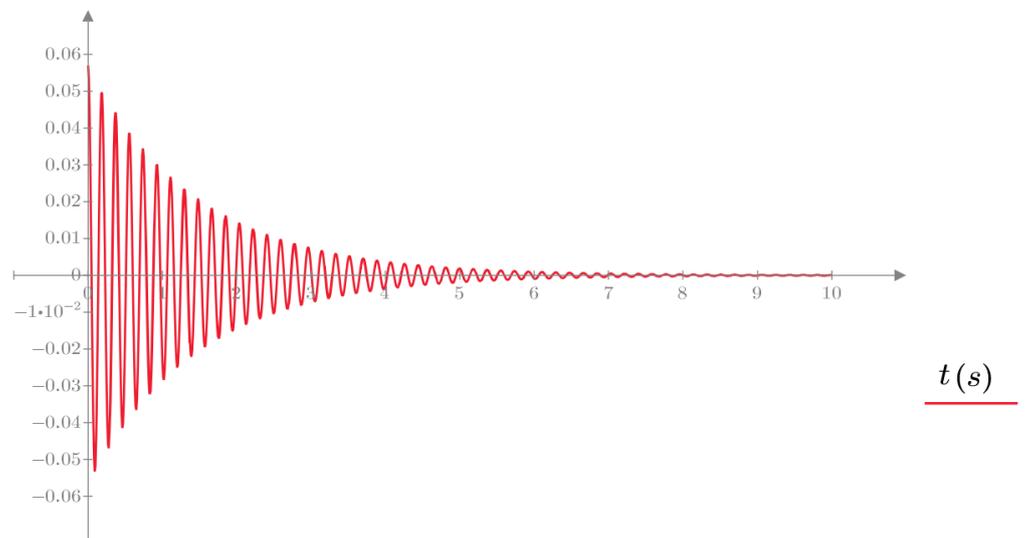
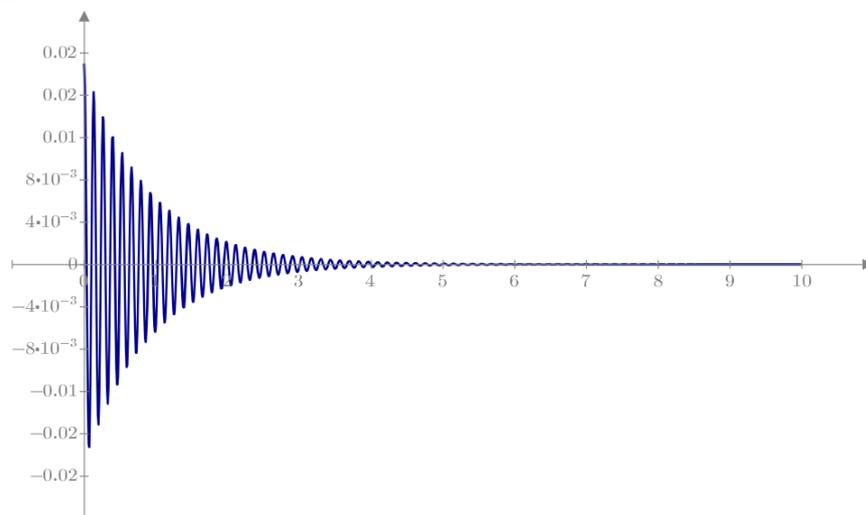


Figura A-5 - Rotação θ_2 apenas com amortecimento natural do aço.

$$t_{final} := 10$$

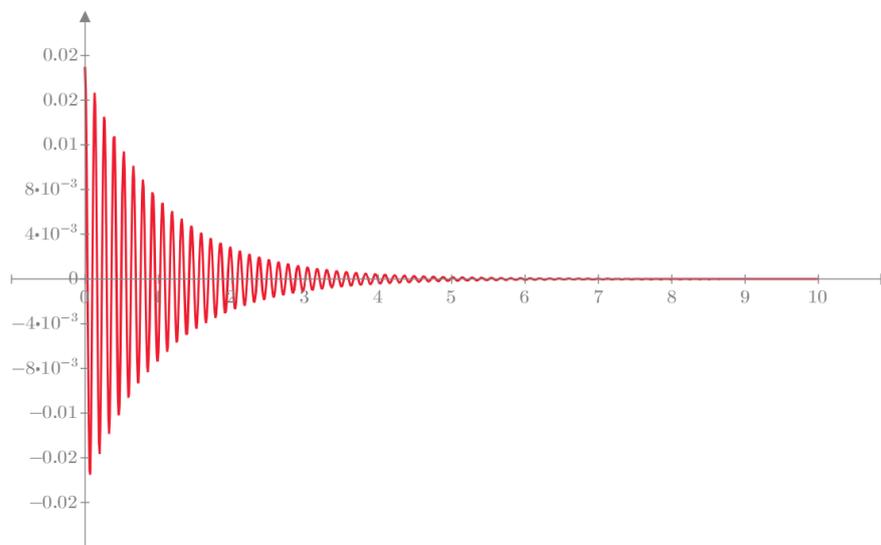
$$t := 0, 0.01 .. t_{final}$$

$$u_2(t)(m)$$



$$t(s)$$

$$u_{2u}(t)(m)$$



$$t(s)$$

Figura A-6 – Comparação entre deslocamentos u_2 , o primeiro com neoprene, o segundo com amortecimento natural apenas.

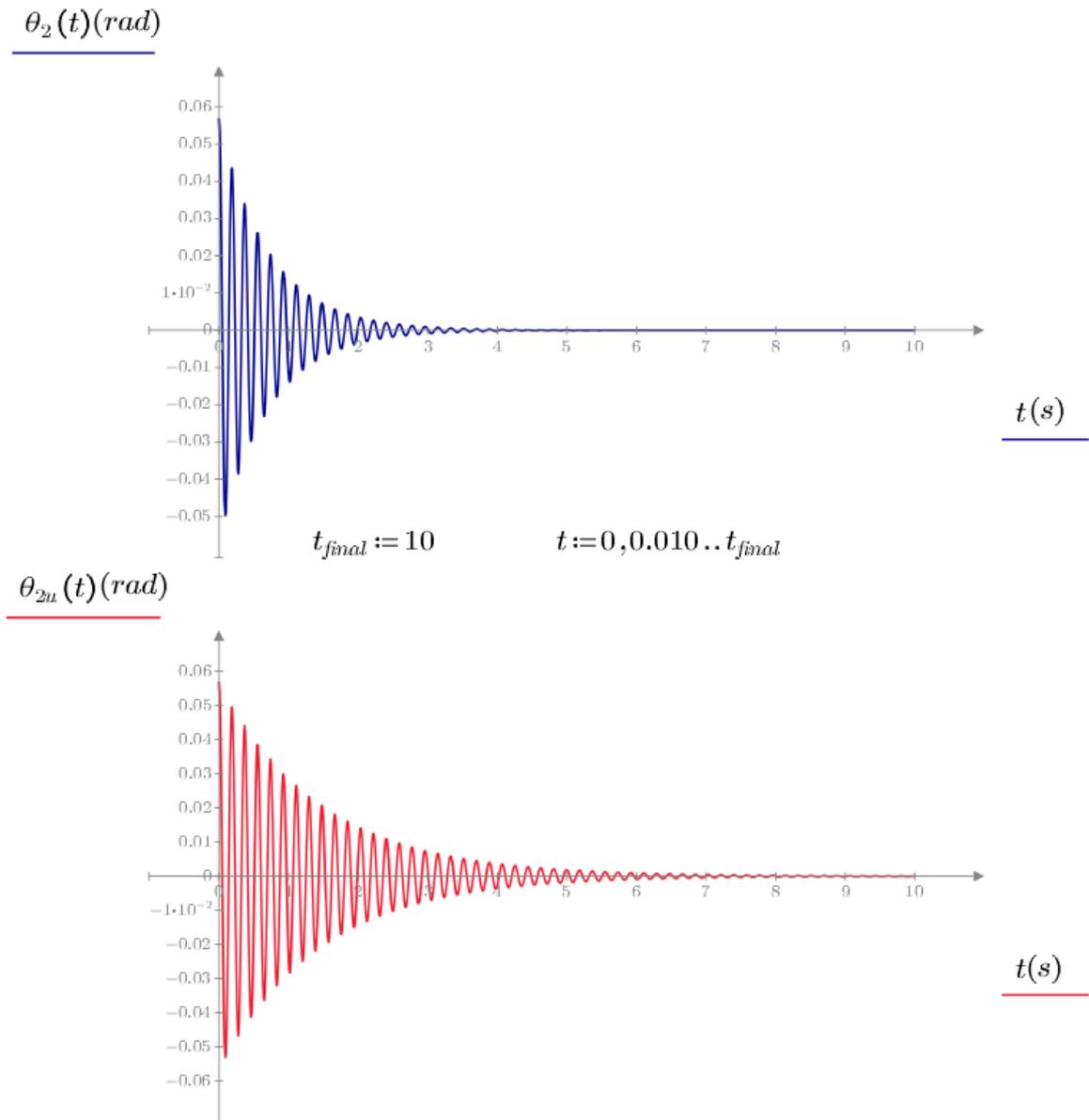


Figura A-7 – Comparação entre rotações θ_2 , o primeiro com neoprene, o segundo com amortecimento natural apenas.

APÊNDICE B - CÁLCULOS DA ANÁLISE MATEMÁTICA - VIBRAÇÃO FORÇADA

Neste anexo são apresentados os cálculos desenvolvidos para a análise matemática da vibração forçada, realizados com auxílio do software Microsoft Excel.

B.1. Velocidade básica do vento (segundo NBR 6123)

$$V_0 = 30 \text{ m/s}$$

B.2. Fatores topográfico, rugosidade e estatístico

$$S_1 = 1 \quad (\text{Terreno plano ou fracamente acidentado})$$

$$S_2 = 1,102557 \quad (\text{Categoria II, Classe B, considera torre com 40m de altura})$$

$$S_3 = 1,1 \quad (\text{Edificações cuja ruína possam dificultar o socorro e acesso})$$

O fator S_2 é calculado de acordo com a altura da edificação, no caso, 40m, pois consideraremos a antena na altura máxima.

$$S_2 = b F_r (z/10)^p,$$

$$b = 1 \quad H = 40 \text{ m}$$

$$F_r = 0,98$$

$$p = 0,085$$

B.3. Velocidade característica do vento

$$V_k = 36,38439 \text{ m/s}$$

B.4. Coeficiente de arrasto para a antena

É adotado um coeficiente de arrasto de 1,4 para a antena circular.

$$CA = 1,4$$

B.5. Força estática do vento

$$q_E = 811,5041 \text{ N/m}^2$$

B.6. Cálculo da resposta dinâmica do vento, pelo método simplificado da NBR 6123

$$q_D = 1959,949 \text{ N/m}^2$$

$$z_r = 10 \text{ m} \quad (\text{Altura de referência})$$

$$z = 40 \text{ m} \quad (\text{Cota do elemento analisado})$$

$$\gamma = 1,7 \quad (\text{Obtido a partir da tabela 19 da NBR 6123})$$

$$\zeta = 0,008 \quad (\text{Obtido a partir da tabela 19 da NBR 6123})$$

$$b = 1 \quad (\text{Obtido a partir da tabela 20 da NBR 6123})$$

$$p = 0,15 \quad (\text{Obtido a partir da tabela 20 da NBR 6123})$$

B.7. Intensidade da turbulência

É adotada como 0,58 constante com a altura, e, no caso, a cota de interesse é de 40m.

$$q_M = 823,1787 \text{ N/m}^2 \quad (\text{Pressão média do vento})$$

$$q_F = 1136,771 \text{ N/m}^2 \quad (\text{Pressão flutuante do vento, ou rajadas})$$

B.8. Espectro de Potências de Davenport

Na análise matemática para vibração livre, foram calculados os períodos dos dois primeiros modos de vibração referentes à estrutura do suporte. A seguir são reproduzidos os seus valores:

$$T_1 = 0,13 \text{ seg} \quad (\text{Período do primeiro modo de vibração})$$

$$T_2 = 0,18 \text{ seg} \quad (\text{Período do segundo modo de vibração})$$

Atribuindo o primeiro modo de vibração à quarta função, e o segundo modo de vibração à segunda função, pode-se calcular um intervalo logarítmico constante e então determinar os períodos das 11 funções harmônicas.

$$f_1 = 7,58 \text{ Hz} \quad (\text{Frequência natural do primeiro modo de vibração})$$

$$f_2 = 5,41 \text{ Hz} \quad (\text{Frequência natural do segundo modo de vibração})$$

Intervalo -0,070665

$$\frac{fS(f)}{\sigma^2} = \frac{2X_1^2}{3(1+X_1^2)^{\frac{4}{3}}} \quad X_1 = \frac{1220f}{\bar{V}(10)}$$

k	T _k (seg)	f _k (Hz)	X _{1k}	S(f) _k	C _k	p _k	c _k	Δz _k
1	0,1927	5,0277	244,3236	0,1234	0,4969	265,16	0,0547	1,03
2	0,1800	5,4100	262,9014	0,1093	0,4674	249,45	0,0514	0,96
3	0,1392	7,0444	342,3240	0,0704	0,3751	200,20	0,0413	0,74
4	0,1300	7,5800	368,3535	0,0623	0,3529	188,34	0,0388	0,69
5	0,1208	8,1156	394,3831	0,0556	0,3334	177,92	0,0367	0,64
6	0,1123	8,6891	422,2520	0,0496	0,3150	168,08	0,0347	0,60
7	0,1043	9,3031	452,0902	0,0443	0,2975	158,78	0,0327	0,56
8	0,0970	9,9605	484,0370	0,0395	0,2811	150,00	0,0309	0,52
9	0,0901	10,6644	518,2413	0,0353	0,2655	141,70	0,0292	0,49
10	0,0837	11,4180	554,8626	0,0315	0,2508	133,86	0,0276	0,46
11	0,0778	12,2248	594,0717	0,0281	0,2370	126,46	0,0261	0,43

B.9. Determinação da função de flutuação de velocidade

$$F_D(t) = \sum_{k=1}^n C_a A_k p c_k \cos(2\pi f_k t - \theta_k)$$

$$t_{\text{inicial}} = 0,01 \quad \text{seg}$$

$$\tau = 0,01 \quad \text{seg}$$

$$t_{\text{final}} = 10 \quad \text{seg}$$

B.10. Código escrito no software Mathcad para solução do Método de Wilson

$$n := 10000 \quad \omega := 47.63 \quad f := 7.58 \quad pk := 1959.95 \quad ck := 0.0367$$

$$u_0 := 0.018 \quad \hat{u}_0 := 0 \quad u_i := 0.018 \quad i := 1..n \quad \Delta t := 0.001$$

$$\theta := 1.42 \quad t_i := \Delta t \cdot i \quad F_0 := 0 \quad CA := 1.4$$

$$\alpha_i := \text{rnd}(2 \cdot \pi) \quad F_{var} := 3 \cdot CA \cdot pk \cdot ck \cdot \cos((2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) - \alpha)$$

$$M_E := 250 \quad C_E := 545.47 \quad K_E := 5.67 \cdot 10^5$$

$$\ddot{u}_0 := M_E^{-1} \cdot (F_0 - (C_E \cdot \hat{u}_0) - (K_E \cdot u_0)) \quad \ddot{u}_0 = -40.824$$

$$a := \left(\frac{6}{\theta \cdot \Delta t} \cdot M_E \right) + 3 \cdot C_E \quad b := (3 \cdot M_E) + \left(\frac{\theta \cdot \Delta t}{2} \cdot C_E \right)$$

```

δ := for i ∈ 1..n
  if i = 1
    ui ← u0
    ũi ← ũ0
    üi ← ü0
    Δpi ← F0
    δpi ← (θ · Δpi) + a · ũi + b · üi
    Kti ← KE + (3 / (θ · Δt) · CE) + (6 / ((θ · Δt)2 · ME)
    δui ← Kti-1 · δpi
    δüi ← (6 / ((θ · Δt)2 · δui) - (6 / (θ · Δt) · ũi) - 3 · üi
    Δüi ← 1 / θ · δüi
    Δũi ← (Δt · üi) + (Δt / 2 · Δüi)
    Δui ← (Δt · ũi) + ((Δt)2 / 2 · üi) + ((Δt)2 / 6 · Δüi)
    ui+1 ← ui + Δui
    ũi+1 ← ũi + Δũi
    üi+1 ← üi + Δüi
    δi ← (ui+1) + ui
  else if i > 1
    Fi ← Fvari
    Δpi ← Fi - Fi-1
    δpi ← (θ · Δpi) + a · ũi + b · üi
    Kti ← KE + (3 / (θ · Δt) · CE) + (6 / ((θ · Δt)2 · ME)
    δui ← Kti-1 · δpi
    δüi ← (6 / ((θ · Δt)2 · δui) - (6 / (θ · Δt) · ũi) - 3 · üi
    Δüi ← 1 / θ · δüi
    Δũi ← (Δt · üi) + (Δt / 2 · Δüi)
    Δui ← (Δt · ũi) + ((Δt)2 / 2 · üi) + ((Δt)2 / 6 · Δüi)
    ui+1 ← ui + Δui

```

$$\begin{array}{l}
 \hat{u}_{i+1} \leftarrow \hat{u}_i + \Delta \hat{u}_i \\
 \ddot{u}_{i+1} \leftarrow \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i \\
 \delta_i \leftarrow (u_{i+1}) + u_i \\
 \delta
 \end{array}$$

$$t := \text{for } i \in 1..n = \begin{array}{l} 0 \\ 0.001 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.006 \\ 0.007 \\ 0.008 \\ 0.009 \\ 0.01 \\ 0.011 \\ \vdots \end{array}$$

k	t _k (seg)	θ _k (rad)	P(t) _k (N/m ²)	F(t) _k (N)
1	0,01	2,20	2290,57	6871,72
2	0,02	6,09	1995,97	5987,90
3	0,03	2,76	2265,03	6795,08
4	0,04	1,57	2052,58	6157,73
5	0,05	5,09	2278,15	6834,44
6	0,06	1,38	2002,46	6007,38
7	0,07	2,76	2375,98	7127,94
8	0,08	2,51	1939,38	5818,14
9	0,09	3,46	1987,04	5961,13
10	0,10	0,88	2064,82	6194,46
11	0,11	1,76	2045,84	6137,52
12	0,12	0,88	2210,91	6632,74
13	0,13	2,95	2087,82	6263,47
14	0,14	6,28	2151,14	6453,43
15	0,15	0,94	2244,46	6733,38
16	0,16	5,28	2062,74	6188,22
17	0,17	4,34	2342,90	7028,71
18	0,18	4,71	2328,06	6984,17
19	0,19	0,69	2060,09	6180,26
20	0,20	4,46	2446,48	7339,43
21	0,21	3,64	1998,02	5994,05
22	0,22	1,26	1949,12	5847,36

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
23	0,23	2,07	1999,92	5999,77
24	0,24	1,51	2103,17	6309,51
25	0,25	3,20	1928,43	5785,29
26	0,26	4,08	1964,62	5893,86
27	0,27	5,15	2177,17	6531,50
28	0,28	2,70	2328,74	6986,22
29	0,29	5,22	2210,55	6631,66
30	0,30	0,63	1975,17	5925,52
31	0,31	6,03	2056,07	6168,22
32	0,32	3,52	2105,09	6315,26
33	0,33	1,01	2166,70	6500,09
34	0,34	3,33	1953,66	5860,97
35	0,35	1,95	2032,22	6096,66
36	0,36	4,34	2143,85	6431,55
37	0,37	6,28	2280,90	6842,71
38	0,38	5,72	2198,54	6595,61
39	0,39	5,65	1976,68	5930,05
40	0,40	3,02	2170,56	6511,68
41	0,41	5,91	1924,28	5772,85
42	0,42	5,28	2370,49	7111,47
43	0,43	4,15	2340,95	7022,84
44	0,44	2,32	1908,59	5725,77
45	0,45	2,58	2143,22	6429,67
46	0,46	4,21	2085,44	6256,32
47	0,47	0,88	2234,14	6702,42
48	0,48	2,32	2037,80	6113,41
49	0,49	4,71	2168,16	6504,48
50	0,50	4,02	2069,65	6208,95
51	0,51	0,63	2193,28	6579,83
52	0,52	2,58	2118,89	6356,67
53	0,53	4,40	2390,88	7172,64
54	0,54	2,26	2226,12	6678,35
55	0,55	1,26	1966,27	5898,80
56	0,56	2,39	2236,06	6708,19
57	0,57	4,78	2123,74	6371,21
58	0,58	3,83	2043,97	6131,91
59	0,59	2,45	2118,65	6355,95
60	0,60	5,65	2037,39	6112,17
61	0,61	3,14	2331,52	6994,57
62	0,62	1,45	2197,59	6592,77
63	0,63	6,22	1937,30	5811,91
64	0,64	3,96	2315,10	6945,30
65	0,65	3,77	2402,65	7207,96

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
66	0,66	1,01	1914,77	5744,31
67	0,67	3,02	2135,72	6407,16
68	0,68	3,64	2209,15	6627,46
69	0,69	1,57	2346,45	7039,34
70	0,70	3,64	2143,25	6429,74
71	0,71	5,91	2045,79	6137,36
72	0,72	4,21	2051,68	6155,03
73	0,73	5,91	1933,85	5801,56
74	0,74	0,82	2189,66	6568,98
75	0,75	2,45	2125,66	6376,97
76	0,76	5,84	2265,04	6795,11
77	0,77	5,34	2289,87	6869,60
78	0,78	1,19	2255,85	6767,54
79	0,79	5,91	2390,44	7171,31
80	0,80	6,28	2064,88	6194,64
81	0,81	3,52	2011,23	6033,68
82	0,82	5,34	1994,81	5984,42
83	0,83	4,84	2013,42	6040,27
84	0,84	6,03	2031,52	6094,55
85	0,85	5,84	2189,17	6567,51
86	0,86	1,76	2094,00	6282,00
87	0,87	5,28	2233,82	6701,46
88	0,88	5,22	2326,11	6978,32
89	0,89	1,32	1866,43	5599,30
90	0,90	3,27	2031,77	6095,32
91	0,91	3,52	2217,47	6652,41
92	0,92	5,09	2281,35	6844,05
93	0,93	3,33	1865,14	5595,43
94	0,94	2,58	2291,16	6873,49
95	0,95	3,27	2021,53	6064,60
96	0,96	5,09	2185,88	6557,65
97	0,97	3,08	2417,01	7251,02
98	0,98	4,21	2240,97	6722,90
99	0,99	0,69	2236,00	6708,00
100	1,00	5,59	2300,66	6901,97
101	1,01	1,95	2165,53	6496,60
102	1,02	0,69	2046,43	6139,28
103	1,03	4,21	2342,55	7027,65
104	1,04	5,97	2417,26	7251,79
105	1,05	4,84	2067,95	6203,86
106	1,06	2,39	2113,99	6341,96
107	1,07	0,82	2357,39	7072,16
108	1,08	4,90	2244,94	6734,81

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
109	1,09	1,38	2253,16	6759,47
110	1,10	1,26	2248,93	6746,80
111	1,11	3,20	2284,19	6852,56
112	1,12	3,83	2225,69	6677,06
113	1,13	5,84	2111,80	6335,41
114	1,14	3,58	2170,56	6511,67
115	1,15	4,65	2316,80	6950,40
116	1,16	5,34	2218,34	6655,01
117	1,17	2,01	2345,12	7035,37
118	1,18	3,64	2145,81	6437,44
119	1,19	5,65	2101,25	6303,74
120	1,20	5,97	1969,11	5907,32
121	1,21	2,70	2199,64	6598,91
122	1,22	1,01	2105,16	6315,49
123	1,23	0,88	2133,15	6399,44
124	1,24	4,21	2411,57	7234,72
125	1,25	0,69	2294,60	6883,79
126	1,26	2,70	2177,16	6531,49
127	1,27	3,58	2064,34	6193,02
128	1,28	1,70	2160,53	6481,58
129	1,29	6,03	1996,16	5988,49
130	1,30	1,95	2109,84	6329,51
131	1,31	2,95	2399,89	7199,68
132	1,32	4,27	2344,18	7032,53
133	1,33	4,52	2144,46	6433,39
134	1,34	5,59	2042,14	6126,41
135	1,35	4,90	2150,90	6452,69
136	1,36	5,47	2106,04	6318,11
137	1,37	1,32	2255,95	6767,86
138	1,38	2,89	2075,50	6226,50
139	1,39	5,53	2317,94	6953,81
140	1,40	5,84	2194,92	6584,77
141	1,41	2,39	2180,92	6542,76
142	1,42	0,75	2117,00	6351,00
143	1,43	1,26	2026,90	6080,70
144	1,44	6,16	2227,53	6682,59
145	1,45	2,95	2192,43	6577,29
146	1,46	1,51	2220,52	6661,55
147	1,47	5,40	2382,19	7146,56
148	1,48	6,03	2058,74	6176,22
149	1,49	4,27	2158,54	6475,62
150	1,50	2,39	2277,94	6833,82
151	1,51	3,39	2023,47	6070,42

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
152	1,52	5,78	2117,72	6353,15
153	1,53	3,02	2262,79	6788,36
154	1,54	5,22	2239,10	6717,30
155	1,55	2,64	2171,18	6513,54
156	1,56	2,26	2338,81	7016,42
157	1,57	5,09	2158,98	6476,95
158	1,58	1,70	2156,63	6469,88
159	1,59	2,39	1934,16	5802,48
160	1,60	5,47	2312,46	6937,38
161	1,61	1,51	2164,46	6493,37
162	1,62	1,76	2086,96	6260,89
163	1,63	4,52	2032,98	6098,93
164	1,64	5,28	1990,73	5972,18
165	1,65	3,02	2023,63	6070,88
166	1,66	5,47	1895,24	5685,73
167	1,67	1,26	1977,37	5932,12
168	1,68	2,64	2135,10	6405,29
169	1,69	6,03	2170,45	6511,34
170	1,70	6,16	2237,26	6711,78
171	1,71	1,32	2277,24	6831,72
172	1,72	4,71	2355,83	7067,48
173	1,73	1,57	2089,13	6267,40
174	1,74	3,77	1969,18	5907,54
175	1,75	1,95	2267,45	6802,36
176	1,76	2,70	2209,99	6629,96
177	1,77	5,91	2185,61	6556,84
178	1,78	4,46	2300,57	6901,71
179	1,79	3,20	2306,92	6920,76
180	1,80	3,46	2261,91	6785,74
181	1,81	5,47	2244,64	6733,91
182	1,82	5,15	2459,03	7377,09
183	1,83	2,20	2043,65	6130,94
184	1,84	2,76	2141,32	6423,95
185	1,85	6,03	2044,74	6134,22
186	1,86	1,01	2404,75	7214,25
187	1,87	6,28	2205,07	6615,21
188	1,88	4,21	2285,29	6855,86
189	1,89	5,59	2012,28	6036,85
190	1,90	4,02	2210,46	6631,37
191	1,91	3,77	2062,13	6186,38
192	1,92	5,78	1962,51	5887,53
193	1,93	0,63	2262,18	6786,53
194	1,94	5,47	2224,85	6674,54

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
195	1,95	2,01	2155,86	6467,59
196	1,96	2,70	1910,23	5730,68
197	1,97	1,51	2324,24	6972,72
198	1,98	3,64	1996,97	5990,90
199	1,99	3,90	1978,46	5935,38
200	2,00	2,70	2437,98	7313,93
201	2,01	3,96	2077,52	6232,56
202	2,02	2,45	2098,19	6294,58
203	2,03	5,15	2044,62	6133,86
204	2,04	1,32	2208,38	6625,14
205	2,05	4,34	2184,90	6554,71
206	2,06	4,84	2128,40	6385,19
207	2,07	1,70	2186,65	6559,95
208	2,08	2,58	1938,98	5816,93
209	2,09	5,22	1974,89	5924,66
210	2,10	4,65	1977,96	5933,87
211	2,11	3,08	2121,97	6365,92
212	2,12	1,32	2178,86	6536,59
213	2,13	5,34	1896,06	5688,19
214	2,14	4,34	2401,11	7203,33
215	2,15	3,58	2250,10	6750,31
216	2,16	5,22	2085,23	6255,68
217	2,17	1,01	2290,89	6872,68
218	2,18	3,83	1984,38	5953,13
219	2,19	2,76	1943,42	5830,27
220	2,20	6,28	2250,87	6752,60
221	2,21	2,51	2111,30	6333,90
222	2,22	4,15	2187,82	6563,45
223	2,23	6,28	2221,81	6665,43
224	2,24	5,09	2092,51	6277,52
225	2,25	6,03	2246,56	6739,68
226	2,26	5,09	2374,97	7124,92
227	2,27	5,53	2241,92	6725,76
228	2,28	4,65	2135,31	6405,92
229	2,29	2,07	2036,08	6108,24
230	2,30	5,91	2250,28	6750,85
231	2,31	5,65	2090,24	6270,72
232	2,32	4,34	2123,54	6370,62
233	2,33	1,26	2088,27	6264,80
234	2,34	5,97	1902,57	5707,70
235	2,35	3,77	1988,40	5965,20
236	2,36	3,46	2293,97	6881,92
237	2,37	1,32	2125,42	6376,27

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
238	2,38	5,65	2258,49	6775,48
239	2,39	2,07	2242,22	6726,65
240	2,40	1,32	2233,43	6700,29
241	2,41	1,45	2152,79	6458,36
242	2,42	5,84	2233,11	6699,34
243	2,43	0,63	2194,17	6582,52
244	2,44	2,39	2211,92	6635,77
245	2,45	1,95	2193,12	6579,37
246	2,46	4,78	1941,67	5825,02
247	2,47	3,71	2132,03	6396,09
248	2,48	5,40	1912,29	5736,88
249	2,49	4,78	2286,90	6860,69
250	2,50	3,46	2094,99	6284,97
251	2,51	2,01	1963,78	5891,35
252	2,52	4,65	2182,69	6548,07
253	2,53	0,69	2401,33	7204,00
254	2,54	4,15	1888,58	5665,75
255	2,55	3,20	2115,02	6345,07
256	2,56	3,90	1876,19	5628,56
257	2,57	0,75	2004,15	6012,44
258	2,58	3,46	2231,99	6695,97
259	2,59	4,78	2173,67	6521,00
260	2,60	5,78	2142,75	6428,25
261	2,61	3,46	2192,38	6577,15
262	2,62	6,22	2299,61	6898,82
263	2,63	1,07	1929,85	5789,55
264	2,64	4,27	2238,66	6715,99
265	2,65	3,58	2058,07	6174,20
266	2,66	4,90	2241,64	6724,93
267	2,67	1,57	2320,82	6962,47
268	2,68	6,22	2223,27	6669,82
269	2,69	3,64	2142,58	6427,73
270	2,70	3,14	2335,94	7007,83
271	2,71	5,78	1988,68	5966,03
272	2,72	2,26	2043,80	6131,39
273	2,73	2,01	2137,85	6413,55
274	2,74	4,59	2328,14	6984,41
275	2,75	1,63	1882,21	5646,62
276	2,76	4,46	2082,66	6247,99
277	2,77	5,15	2061,18	6183,54
278	2,78	4,84	1941,83	5825,50
279	2,79	4,02	2067,83	6203,49
280	2,80	2,45	2403,69	7211,08

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
281	2,81	4,27	2107,82	6323,47
282	2,82	3,20	2367,05	7101,15
283	2,83	2,07	2013,62	6040,86
284	2,84	2,14	1946,61	5839,83
285	2,85	4,65	2364,41	7093,23
286	2,86	2,70	2032,83	6098,49
287	2,87	3,58	2307,06	6921,17
288	2,88	2,95	2198,76	6596,27
289	2,89	1,82	2003,40	6010,19
290	2,90	2,14	2136,37	6409,12
291	2,91	6,03	2149,33	6447,98
292	2,92	4,15	1995,86	5987,58
293	2,93	5,78	1882,16	5646,48
294	2,94	3,71	2191,64	6574,91
295	2,95	3,58	2106,53	6319,59
296	2,96	6,28	2262,87	6788,61
297	2,97	2,51	2231,78	6695,34
298	2,98	2,01	1881,58	5644,75
299	2,99	4,27	2178,52	6535,56
300	3,00	3,77	2199,16	6597,47
301	3,01	1,76	2081,40	6244,21
302	3,02	3,20	2038,04	6114,13
303	3,03	2,07	2100,38	6301,14
304	3,04	4,90	2106,78	6320,35
305	3,05	1,88	2388,71	7166,14
306	3,06	0,69	2256,45	6769,36
307	3,07	0,88	2244,19	6732,57
308	3,08	2,70	1947,29	5841,88
309	3,09	5,40	2297,68	6893,05
310	3,10	4,46	2310,33	6930,98
311	3,11	2,51	1927,52	5782,56
312	3,12	5,91	2222,11	6666,33
313	3,13	2,76	1982,83	5948,50
314	3,14	3,90	2064,86	6194,59
315	3,15	5,53	1865,10	5595,31
316	3,16	1,82	2391,46	7174,38
317	3,17	3,71	2173,20	6519,61
318	3,18	1,13	2015,77	6047,32
319	3,19	4,08	2211,30	6633,89
320	3,20	2,51	2120,90	6362,69
321	3,21	2,70	2044,47	6133,42
322	3,22	3,52	2223,67	6671,02
323	3,23	4,40	2084,74	6254,23

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
324	3,24	3,90	1901,33	5703,98
325	3,25	2,83	2346,40	7039,19
326	3,26	1,26	2123,93	6371,78
327	3,27	2,39	2429,58	7288,75
328	3,28	1,63	2350,40	7051,20
329	3,29	1,45	2205,16	6615,47
330	3,30	3,14	2136,32	6408,95
331	3,31	5,91	2075,66	6226,99
332	3,32	5,09	2304,69	6914,07
333	3,33	5,91	2443,12	7329,37
334	3,34	3,64	1998,01	5994,02
335	3,35	5,47	2240,99	6722,98
336	3,36	5,65	2181,73	6545,19
337	3,37	3,33	2053,08	6159,24
338	3,38	1,32	2374,37	7123,10
339	3,39	4,02	2157,97	6473,91
340	3,40	6,28	1908,16	5724,48
341	3,41	4,59	2152,09	6456,28
342	3,42	2,01	2147,43	6442,30
343	3,43	5,09	2305,66	6916,99
344	3,44	3,58	2129,55	6388,64
345	3,45	3,77	2180,86	6542,57
346	3,46	5,47	2074,43	6223,28
347	3,47	3,27	2184,62	6553,85
348	3,48	4,15	2038,32	6114,97
349	3,49	5,28	2010,28	6030,83
350	3,50	2,95	2434,20	7302,61
351	3,51	5,97	2196,18	6588,54
352	3,52	4,34	2055,25	6165,75
353	3,53	3,39	2236,10	6708,29
354	3,54	1,70	2030,41	6091,24
355	3,55	4,08	2248,99	6746,97
356	3,56	4,59	2331,47	6994,40
357	3,57	5,15	2024,17	6072,50
358	3,58	5,78	2044,86	6134,59
359	3,59	1,26	2310,30	6930,89
360	3,60	5,97	2122,45	6367,36
361	3,61	6,09	2282,21	6846,63
362	3,62	1,45	2139,16	6417,48
363	3,63	5,15	2085,90	6257,71
364	3,64	2,01	2065,83	6197,49
365	3,65	1,51	2139,29	6417,88
366	3,66	6,16	2373,58	7120,73

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
367	3,67	2,14	2074,16	6222,49
368	3,68	5,78	2225,60	6676,81
369	3,69	4,40	2295,88	6887,65
370	3,70	5,34	2155,80	6467,39
371	3,71	2,83	2196,73	6590,18
372	3,72	5,59	2188,20	6564,60
373	3,73	5,65	2137,00	6411,00
374	3,74	6,16	1946,08	5838,24
375	3,75	2,76	2380,09	7140,26
376	3,76	2,76	2043,49	6130,47
377	3,77	4,65	2153,85	6461,56
378	3,78	4,65	2395,58	7186,75
379	3,79	2,89	2000,82	6002,46
380	3,80	2,76	2072,88	6218,63
381	3,81	2,07	2013,93	6041,80
382	3,82	1,82	2367,70	7103,10
383	3,83	3,64	2072,56	6217,69
384	3,84	0,75	2076,20	6228,61
385	3,85	5,47	2142,35	6427,04
386	3,86	1,19	1995,80	5987,39
387	3,87	2,70	2071,84	6215,51
388	3,88	3,52	2238,16	6714,47
389	3,89	5,34	2093,60	6280,80
390	3,90	0,69	1973,47	5920,41
391	3,91	4,65	2048,66	6145,99
392	3,92	4,52	2259,53	6778,58
393	3,93	4,21	1921,48	5764,44
394	3,94	4,46	2228,49	6685,47
395	3,95	4,46	2190,44	6571,31
396	3,96	1,32	2188,40	6565,21
397	3,97	2,01	2272,49	6817,48
398	3,98	0,69	1955,28	5865,83
399	3,99	3,77	2212,10	6636,31
400	4,00	4,59	2265,47	6796,40
401	4,01	1,13	2061,87	6185,61
402	4,02	5,34	2333,16	6999,49
403	4,03	5,72	2173,79	6521,38
404	4,04	2,64	2114,75	6344,25
405	4,05	1,63	2155,76	6467,29
406	4,06	3,52	2239,77	6719,32
407	4,07	2,58	2226,23	6678,70
408	4,08	0,63	2178,55	6535,64
409	4,09	5,34	2014,55	6043,64

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
410	4,10	3,52	2305,44	6916,32
411	4,11	4,40	2347,42	7042,27
412	4,12	3,33	2115,43	6346,30
413	4,13	2,32	2145,93	6437,79
414	4,14	5,65	2251,00	6753,00
415	4,15	5,72	2301,92	6905,76
416	4,16	1,76	2339,73	7019,19
417	4,17	6,28	2395,08	7185,24
418	4,18	4,27	1939,64	5818,93
419	4,19	2,76	2412,10	7236,30
420	4,20	3,20	2329,12	6987,37
421	4,21	0,75	1915,00	5744,99
422	4,22	4,96	2073,82	6221,46
423	4,23	5,72	2221,13	6663,40
424	4,24	6,28	2092,14	6276,43
425	4,25	4,96	2122,12	6366,35
426	4,26	2,95	2000,34	6001,01
427	4,27	5,15	2283,32	6849,95
428	4,28	5,09	1941,76	5825,27
429	4,29	4,96	2124,55	6373,64
430	4,30	2,39	2383,47	7150,41
431	4,31	3,77	2006,63	6019,90
432	4,32	3,58	2205,40	6616,21
433	4,33	2,95	2335,30	7005,90
434	4,34	5,22	2375,47	7126,40
435	4,35	0,63	2264,35	6793,06
436	4,36	4,15	2333,56	7000,68
437	4,37	6,03	2080,71	6242,14
438	4,38	3,58	1991,32	5973,96
439	4,39	5,59	2090,07	6270,21
440	4,40	3,39	1940,36	5821,08
441	4,41	1,13	2272,69	6818,06
442	4,42	1,32	2207,85	6623,54
443	4,43	0,63	2283,41	6850,23
444	4,44	4,34	2127,72	6383,15
445	4,45	5,40	2106,28	6318,85
446	4,46	0,63	2007,84	6023,52
447	4,47	4,71	2125,65	6376,95
448	4,48	0,75	2014,46	6043,39
449	4,49	3,08	2198,45	6595,35
450	4,50	4,15	1980,29	5940,87
451	4,51	4,15	1874,00	5622,00
452	4,52	3,96	2229,61	6688,83

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
453	4,53	4,46	1956,90	5870,69
454	4,54	3,08	2184,42	6553,26
455	4,55	2,14	2259,86	6779,57
456	4,56	2,76	2320,97	6962,90
457	4,57	4,90	2296,99	6890,96
458	4,58	4,15	2121,22	6363,65
459	4,59	3,52	2342,34	7027,02
460	4,60	2,32	1914,38	5743,15
461	4,61	2,83	1926,55	5779,64
462	4,62	2,58	2207,57	6622,71
463	4,63	5,34	2089,66	6268,97
464	4,64	4,96	2238,26	6714,78
465	4,65	0,75	2284,23	6852,68
466	4,66	3,02	2295,99	6887,97
467	4,67	3,46	2073,67	6221,02
468	4,68	2,20	2089,12	6267,36
469	4,69	0,63	1995,27	5985,80
470	4,70	2,45	2147,10	6441,31
471	4,71	4,78	2218,69	6656,06
472	4,72	5,59	2245,31	6735,92
473	4,73	1,32	2299,55	6898,64
474	4,74	6,22	2039,59	6118,76
475	4,75	3,27	2209,91	6629,72
476	4,76	3,02	2093,04	6279,11
477	4,77	4,59	2209,46	6628,39
478	4,78	1,63	2301,73	6905,20
479	4,79	2,64	2279,76	6839,27
480	4,80	1,26	1867,99	5603,96
481	4,81	4,34	2449,19	7347,57
482	4,82	0,63	1949,52	5848,57
483	4,83	3,33	2257,28	6771,84
484	4,84	4,52	2237,65	6712,95
485	4,85	2,14	2169,25	6507,76
486	4,86	2,26	2136,79	6410,38
487	4,87	2,45	2052,62	6157,86
488	4,88	5,47	2032,98	6098,93
489	4,89	3,39	2246,16	6738,49
490	4,90	4,15	2129,83	6389,50
491	4,91	1,01	2118,24	6354,71
492	4,92	4,96	2099,26	6297,79
493	4,93	0,63	2311,35	6934,06
494	4,94	0,88	2150,23	6450,70
495	4,95	4,71	2106,88	6320,63

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
496	4,96	5,65	2191,18	6573,53
497	4,97	0,63	2347,90	7043,71
498	4,98	5,78	2122,53	6367,60
499	4,99	2,26	2069,22	6207,66
500	5,00	3,71	2241,53	6724,59
501	5,01	4,78	2275,42	6826,25
502	5,02	2,07	2120,11	6360,34
503	5,03	1,13	1927,15	5781,45
504	5,04	5,40	2213,97	6641,90
505	5,05	6,22	2192,51	6577,53
506	5,06	2,64	1905,84	5717,53
507	5,07	3,39	2207,45	6622,36
508	5,08	1,57	2312,67	6938,01
509	5,09	1,19	2377,15	7131,46
510	5,10	5,91	1963,75	5891,26
511	5,11	5,34	2256,59	6769,77
512	5,12	4,46	2198,10	6594,30
513	5,13	1,07	2254,62	6763,85
514	5,14	2,70	2134,98	6404,94
515	5,15	3,52	2089,43	6268,30
516	5,16	2,95	2293,39	6880,17
517	5,17	5,15	2225,20	6675,61
518	5,18	3,58	2263,78	6791,35
519	5,19	4,15	2038,27	6114,81
520	5,20	1,57	2271,11	6813,34
521	5,21	3,14	2224,52	6673,55
522	5,22	0,94	2389,39	7168,18
523	5,23	5,91	2064,11	6192,32
524	5,24	1,01	2265,93	6797,78
525	5,25	4,71	2369,03	7107,08
526	5,26	1,95	2082,26	6246,79
527	5,27	5,15	2102,74	6308,22
528	5,28	1,82	2148,97	6446,90
529	5,29	4,34	2126,89	6380,68
530	5,30	3,52	2072,52	6217,57
531	5,31	3,71	1884,92	5654,75
532	5,32	2,14	2192,26	6576,79
533	5,33	2,14	2085,95	6257,84
534	5,34	3,96	2018,25	6054,74
535	5,35	1,63	2143,29	6429,86
536	5,36	4,27	2025,29	6075,87
537	5,37	4,46	2131,87	6395,60
538	5,38	3,27	2171,14	6513,41

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
539	5,39	5,53	2068,36	6205,09
540	5,40	5,97	2344,98	7034,93
541	5,41	5,28	2270,20	6810,61
542	5,42	2,64	2181,24	6543,73
543	5,43	3,27	2254,39	6763,18
544	5,44	5,78	2151,09	6453,26
545	5,45	0,94	2096,55	6289,65
546	5,46	2,70	2087,10	6261,29
547	5,47	3,64	2321,83	6965,50
548	5,48	2,64	2044,04	6132,12
549	5,49	5,84	1965,11	5895,33
550	5,50	1,07	1894,88	5684,65
551	5,51	1,13	2205,99	6617,96
552	5,52	4,96	2239,57	6718,71
553	5,53	4,34	2205,37	6616,10
554	5,54	0,82	2437,69	7313,08
555	5,55	0,88	2221,42	6664,26
556	5,56	4,08	2116,68	6350,03
557	5,57	1,45	2293,86	6881,59
558	5,58	1,38	2127,27	6381,81
559	5,59	1,38	2305,20	6915,60
560	5,60	2,64	2230,41	6691,24
561	5,61	5,09	2332,79	6998,38
562	5,62	1,45	2083,95	6251,85
563	5,63	2,83	2126,60	6379,81
564	5,64	5,47	2129,80	6389,41
565	5,65	0,69	2084,17	6252,51
566	5,66	2,45	2204,27	6612,81
567	5,67	1,32	2425,22	7275,67
568	5,68	1,57	2203,88	6611,64
569	5,69	6,28	2201,16	6603,49
570	5,70	2,39	2091,00	6272,99
571	5,71	5,84	2145,66	6436,98
572	5,72	5,03	2021,22	6063,65
573	5,73	3,39	2063,02	6189,06
574	5,74	1,13	1919,00	5757,00
575	5,75	5,15	2092,69	6278,07
576	5,76	0,94	2332,56	6997,67
577	5,77	5,47	2261,17	6783,52
578	5,78	4,52	2076,23	6228,68
579	5,79	2,89	2253,73	6761,18
580	5,80	0,63	2357,73	7073,19
581	5,81	3,02	2315,75	6947,25

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
582	5,82	1,57	2039,93	6119,78
583	5,83	1,32	2171,01	6513,02
584	5,84	4,96	2238,91	6716,73
585	5,85	4,71	2385,68	7157,04
586	5,86	2,45	1873,64	5620,92
587	5,87	5,22	2310,82	6932,47
588	5,88	2,70	2007,47	6022,42
589	5,89	2,32	1953,97	5861,92
590	5,90	6,22	2242,46	6727,38
591	5,91	4,02	2270,84	6812,53
592	5,92	1,26	2184,39	6553,16
593	5,93	4,21	2056,64	6169,91
594	5,94	5,78	2029,95	6089,85
595	5,95	2,89	2203,23	6609,70
596	5,96	4,40	2072,54	6217,63
597	5,97	5,03	2117,72	6353,16
598	5,98	5,53	2177,72	6533,15
599	5,99	0,88	2127,64	6382,93
600	6,00	4,71	2063,61	6190,84
601	6,01	2,58	2039,69	6119,07
602	6,02	1,82	2329,79	6989,36
603	6,03	2,07	2409,42	7228,26
604	6,04	1,38	2005,53	6016,58
605	6,05	4,52	2299,10	6897,29
606	6,06	5,78	2225,65	6676,96
607	6,07	4,34	2340,43	7021,30
608	6,08	5,03	2092,02	6276,07
609	6,09	1,57	2008,13	6024,39
610	6,10	6,22	2186,36	6559,07
611	6,11	5,22	2268,07	6804,20
612	6,12	2,07	2180,42	6541,26
613	6,13	3,77	2194,16	6582,49
614	6,14	2,26	2189,61	6568,84
615	6,15	2,51	2101,32	6303,97
616	6,16	5,40	1916,26	5748,77
617	6,17	0,82	2028,68	6086,05
618	6,18	2,83	2318,21	6954,64
619	6,19	6,09	2274,77	6824,30
620	6,20	2,07	2085,98	6257,94
621	6,21	2,26	1876,87	5630,62
622	6,22	2,76	2158,48	6475,43
623	6,23	1,88	2186,55	6559,65
624	6,24	1,07	2091,87	6275,61

k	t _k (seg)	θ _k (rad)	P(t) _k (N/m ²)	F(t) _k (N)
625	6,25	1,95	2352,04	7056,13
626	6,26	4,15	2036,16	6108,47
627	6,27	3,83	2180,75	6542,26
628	6,28	0,94	2284,91	6854,74
629	6,29	4,46	2043,70	6131,09
630	6,30	1,01	1888,16	5664,47
631	6,31	0,69	2026,07	6078,21
632	6,32	6,28	2117,37	6352,12
633	6,33	5,09	2395,55	7186,66
634	6,34	5,03	2111,91	6335,72
635	6,35	5,15	2252,02	6756,05
636	6,36	6,28	2272,62	6817,85
637	6,37	1,63	2116,64	6349,92
638	6,38	0,69	2031,78	6095,33
639	6,39	5,09	2112,28	6336,85
640	6,40	3,14	2241,24	6723,73
641	6,41	1,88	2273,36	6820,09
642	6,42	6,03	2262,25	6786,76
643	6,43	5,03	2091,44	6274,33
644	6,44	1,57	1974,47	5923,40
645	6,45	3,14	2231,12	6693,37
646	6,46	3,14	2063,72	6191,15
647	6,47	5,09	2052,30	6156,90
648	6,48	1,19	2081,76	6245,29
649	6,49	0,94	2270,84	6812,53
650	6,50	0,82	1966,40	5899,21
651	6,51	4,59	2014,12	6042,37
652	6,52	5,91	2130,32	6390,95
653	6,53	2,58	2241,88	6725,63
654	6,54	1,13	2087,74	6263,23
655	6,55	4,84	2271,92	6815,75
656	6,56	0,69	2063,49	6190,46
657	6,57	4,27	2053,65	6160,95
658	6,58	4,71	1936,38	5809,13
659	6,59	3,39	2243,75	6731,24
660	6,60	0,63	2269,50	6808,50
661	6,61	3,20	2051,67	6155,02
662	6,62	6,16	1873,94	5621,83
663	6,63	3,02	2218,09	6654,26
664	6,64	0,88	2070,97	6212,91
665	6,65	4,27	2197,20	6591,60
666	6,66	3,90	2346,19	7038,57
667	6,67	2,26	1984,36	5953,07

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
668	6,68	3,90	1996,66	5989,98
669	6,69	5,65	2075,44	6226,32
670	6,70	0,82	2371,74	7115,22
671	6,71	3,20	2122,10	6366,31
672	6,72	2,14	2328,15	6984,46
673	6,73	5,65	1881,33	5644,00
674	6,74	2,70	2235,31	6705,93
675	6,75	3,64	2422,24	7266,72
676	6,76	2,32	1959,50	5878,51
677	6,77	1,13	1909,70	5729,10
678	6,78	3,64	2244,48	6733,44
679	6,79	1,26	1973,61	5920,83
680	6,80	1,76	2243,79	6731,36
681	6,81	6,09	2364,68	7094,03
682	6,82	2,45	2039,75	6119,25
683	6,83	1,70	2315,47	6946,40
684	6,84	3,20	2360,25	7080,76
685	6,85	1,51	2238,02	6714,06
686	6,86	1,32	2082,72	6248,16
687	6,87	2,07	1965,01	5895,03
688	6,88	2,95	2197,57	6592,70
689	6,89	1,38	2026,96	6080,87
690	6,90	3,14	2218,03	6654,08
691	6,91	1,51	2051,31	6153,93
692	6,92	5,84	2070,98	6212,94
693	6,93	1,19	2126,66	6379,99
694	6,94	3,90	2010,74	6032,23
695	6,95	2,58	2122,36	6367,07
696	6,96	5,22	1932,36	5797,08
697	6,97	1,51	2204,76	6614,29
698	6,98	4,59	2116,31	6348,94
699	6,99	3,83	2232,11	6696,34
700	7,00	2,76	2293,94	6881,82
701	7,01	2,51	1985,64	5956,93
702	7,02	5,53	2301,33	6903,98
703	7,03	0,69	2233,91	6701,72
704	7,04	3,39	2231,36	6694,08
705	7,05	0,94	2460,17	7380,50
706	7,06	6,28	2192,58	6577,73
707	7,07	4,08	1991,15	5973,44
708	7,08	2,26	2053,87	6161,61
709	7,09	5,53	2013,84	6041,51
710	7,10	4,96	2007,52	6022,56

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
711	7,11	4,65	2143,32	6429,96
712	7,12	0,88	1986,97	5960,91
713	7,13	2,64	2236,99	6710,96
714	7,14	1,19	2101,91	6305,74
715	7,15	3,83	2076,26	6228,77
716	7,16	5,53	2309,42	6928,25
717	7,17	4,46	2117,16	6351,49
718	7,18	5,72	2262,39	6787,17
719	7,19	1,07	2380,00	7140,00
720	7,20	4,52	2128,94	6386,83
721	7,21	2,76	2317,48	6952,45
722	7,22	4,59	2245,70	6737,10
723	7,23	0,94	2083,23	6249,69
724	7,24	0,94	2163,89	6491,68
725	7,25	3,90	2216,68	6650,05
726	7,26	0,63	2136,20	6408,60
727	7,27	1,76	2018,52	6055,56
728	7,28	3,71	2143,44	6430,31
729	7,29	3,27	2277,86	6833,57
730	7,30	0,69	2232,07	6696,22
731	7,31	3,39	2259,62	6778,87
732	7,32	4,15	2273,96	6821,89
733	7,33	1,95	2283,15	6849,45
734	7,34	3,39	2307,68	6923,05
735	7,35	2,39	2092,35	6277,06
736	7,36	4,78	2089,74	6269,22
737	7,37	5,72	2218,54	6655,61
738	7,38	2,20	2077,10	6231,31
739	7,39	3,52	2055,53	6166,58
740	7,40	5,34	1900,85	5702,56
741	7,41	5,53	1970,71	5912,13
742	7,42	2,70	2241,24	6723,72
743	7,43	3,27	2153,55	6460,65
744	7,44	5,97	2044,66	6133,99
745	7,45	5,34	2068,45	6205,35
746	7,46	3,77	2157,57	6472,71
747	7,47	2,89	2095,21	6285,62
748	7,48	2,20	2014,66	6043,97
749	7,49	3,83	1948,90	5846,71
750	7,50	3,52	2028,41	6085,23
751	7,51	1,51	2139,66	6418,99
752	7,52	3,33	2201,83	6605,49
753	7,53	3,96	2291,74	6875,21

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
754	7,54	1,95	2352,29	7056,87
755	7,55	6,03	2263,17	6789,51
756	7,56	1,76	2183,77	6551,31
757	7,57	5,91	2322,73	6968,20
758	7,58	4,40	2097,36	6292,09
759	7,59	3,14	2063,63	6190,88
760	7,60	6,28	2228,40	6685,20
761	7,61	0,75	2072,54	6217,62
762	7,62	2,39	2278,83	6836,48
763	7,63	2,45	2116,56	6349,68
764	7,64	3,90	2279,15	6837,44
765	7,65	4,96	2145,46	6436,37
766	7,66	4,52	2092,27	6276,82
767	7,67	0,82	2198,81	6596,42
768	7,68	4,15	2203,29	6609,88
769	7,69	2,64	2184,96	6554,89
770	7,70	3,90	2278,11	6834,32
771	7,71	3,20	2222,08	6666,23
772	7,72	4,21	1924,83	5774,50
773	7,73	1,26	2390,45	7171,34
774	7,74	4,78	2043,88	6131,63
775	7,75	2,20	2139,73	6419,20
776	7,76	0,88	2260,77	6782,32
777	7,77	3,71	2238,05	6714,14
778	7,78	0,82	2173,68	6521,04
779	7,79	5,97	1895,42	5686,25
780	7,80	2,07	2172,76	6518,28
781	7,81	3,83	2333,74	7001,23
782	7,82	3,02	1944,05	5832,15
783	7,83	5,09	2165,49	6496,47
784	7,84	5,72	2049,14	6147,42
785	7,85	2,20	2115,96	6347,89
786	7,86	2,89	2135,26	6405,79
787	7,87	6,09	1989,00	5966,99
788	7,88	0,94	1982,95	5948,85
789	7,89	3,08	2105,31	6315,93
790	7,90	2,83	2419,46	7258,38
791	7,91	0,63	2056,77	6170,30
792	7,92	3,90	2216,22	6648,67
793	7,93	4,46	2073,36	6220,08
794	7,94	6,09	2255,90	6767,69
795	7,95	1,63	2108,30	6324,89
796	7,96	5,03	2107,17	6321,50

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
797	7,97	3,58	2069,34	6208,02
798	7,98	3,08	2146,30	6438,91
799	7,99	6,22	2035,96	6107,89
800	8,00	3,90	2088,61	6265,84
801	8,01	2,32	2173,72	6521,17
802	8,02	6,16	2275,49	6826,46
803	8,03	3,14	2325,71	6977,13
804	8,04	5,97	2158,92	6476,76
805	8,05	0,75	2152,03	6456,09
806	8,06	0,82	2294,05	6882,14
807	8,07	6,16	2321,08	6963,23
808	8,08	1,57	2153,94	6461,83
809	8,09	4,52	1975,92	5927,76
810	8,10	1,19	2370,07	7110,20
811	8,11	3,08	2264,65	6793,94
812	8,12	5,72	2061,40	6184,20
813	8,13	6,28	1999,90	5999,71
814	8,14	0,94	2215,50	6646,49
815	8,15	4,90	2092,36	6277,07
816	8,16	2,32	1998,43	5995,28
817	8,17	4,21	2171,37	6514,12
818	8,18	5,28	2227,46	6682,37
819	8,19	5,47	2392,33	7177,00
820	8,20	3,27	2179,49	6538,47
821	8,21	3,96	2015,91	6047,73
822	8,22	3,14	2046,77	6140,32
823	8,23	1,32	2073,17	6219,51
824	8,24	3,77	2278,26	6834,79
825	8,25	5,84	2064,88	6194,65
826	8,26	5,91	2076,28	6228,83
827	8,27	4,40	2455,43	7366,28
828	8,28	4,02	2307,89	6923,68
829	8,29	1,01	2361,71	7085,13
830	8,30	2,45	1953,43	5860,30
831	8,31	3,08	2256,87	6770,61
832	8,32	5,65	2050,52	6151,55
833	8,33	5,34	2044,88	6134,63
834	8,34	3,83	1965,47	5896,41
835	8,35	4,21	2044,35	6133,04
836	8,36	2,39	2366,77	7100,30
837	8,37	1,76	2176,19	6528,58
838	8,38	3,14	2356,28	7068,85
839	8,39	6,28	2334,88	7004,65

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
840	8,40	4,21	2090,13	6270,39
841	8,41	1,07	1997,03	5991,08
842	8,42	1,70	2241,91	6725,72
843	8,43	4,34	1977,07	5931,21
844	8,44	3,08	2038,64	6115,91
845	8,45	4,27	2031,64	6094,93
846	8,46	6,28	2263,26	6789,79
847	8,47	1,95	2076,49	6229,48
848	8,48	3,14	2196,07	6588,20
849	8,49	5,34	2009,45	6028,34
850	8,50	5,59	2078,93	6236,80
851	8,51	4,84	2445,65	7336,96
852	8,52	5,72	2275,50	6826,51
853	8,53	4,46	1981,18	5943,54
854	8,54	5,59	2266,39	6799,16
855	8,55	2,64	2353,06	7059,18
856	8,56	6,03	2198,03	6594,08
857	8,57	4,46	2056,05	6168,16
858	8,58	3,58	2091,65	6274,94
859	8,59	1,38	2013,86	6041,57
860	8,60	5,91	2082,22	6246,65
861	8,61	4,21	2070,74	6212,21
862	8,62	2,39	2062,34	6187,01
863	8,63	2,39	1967,20	5901,60
864	8,64	2,39	2050,27	6150,81
865	8,65	2,20	2178,11	6534,34
866	8,66	5,78	2007,55	6022,66
867	8,67	1,70	2313,26	6939,79
868	8,68	2,83	2175,78	6527,33
869	8,69	5,40	1876,71	5630,13
870	8,70	4,27	2362,70	7088,09
871	8,71	5,09	2218,92	6656,75
872	8,72	3,71	2325,15	6975,45
873	8,73	2,51	1961,37	5884,12
874	8,74	3,64	2262,13	6786,40
875	8,75	5,40	2244,46	6733,39
876	8,76	4,84	2179,55	6538,64
877	8,77	4,15	2174,75	6524,25
878	8,78	2,64	1973,23	5919,68
879	8,79	4,40	2246,08	6738,24
880	8,80	5,91	2092,75	6278,26
881	8,81	5,72	2172,61	6517,83
882	8,82	1,76	2085,87	6257,61

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
883	8,83	5,03	2236,39	6709,16
884	8,84	2,70	2205,00	6614,99
885	8,85	5,09	2341,41	7024,23
886	8,86	3,90	2331,41	6994,23
887	8,87	5,03	2392,23	7176,68
888	8,88	2,26	2251,56	6754,67
889	8,89	3,90	1901,40	5704,21
890	8,90	3,96	2068,14	6204,43
891	8,91	4,15	2229,00	6687,01
892	8,92	1,38	2338,72	7016,15
893	8,93	4,46	2057,44	6172,32
894	8,94	1,07	2037,33	6111,99
895	8,95	1,57	2038,78	6116,33
896	8,96	5,72	2371,65	7114,96
897	8,97	3,77	2285,57	6856,72
898	8,98	5,09	2175,74	6527,23
899	8,99	3,02	2141,86	6425,57
900	9,00	1,51	2379,87	7139,62
901	9,01	0,75	2322,35	6967,06
902	9,02	3,64	1979,48	5938,45
903	9,03	1,63	2076,45	6229,34
904	9,04	6,28	2125,07	6375,21
905	9,05	4,34	2248,13	6744,39
906	9,06	5,91	2042,23	6126,70
907	9,07	0,82	2232,91	6698,74
908	9,08	6,28	2089,59	6268,78
909	9,09	4,34	2018,93	6056,80
910	9,10	2,95	2095,72	6287,17
911	9,11	4,96	2023,02	6069,05
912	9,12	2,26	2091,48	6274,43
913	9,13	2,45	2354,81	7064,44
914	9,14	4,15	2056,79	6170,37
915	9,15	5,65	1889,50	5668,49
916	9,16	2,95	2443,71	7331,14
917	9,17	4,96	2286,87	6860,62
918	9,18	4,40	2303,25	6909,75
919	9,19	6,09	2136,80	6410,39
920	9,20	2,14	2155,89	6467,68
921	9,21	3,39	1975,11	5925,33
922	9,22	5,28	2051,98	6155,95
923	9,23	4,21	1923,50	5770,50
924	9,24	5,65	2307,70	6923,11
925	9,25	4,15	1916,43	5749,29

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
926	9,26	1,70	2084,79	6254,37
927	9,27	3,39	2269,83	6809,49
928	9,28	3,58	2385,75	7157,25
929	9,29	1,13	1913,14	5739,42
930	9,30	5,03	2230,95	6692,84
931	9,31	3,46	2305,64	6916,91
932	9,32	1,51	1911,30	5733,90
933	9,33	2,64	2033,79	6101,36
934	9,34	4,71	2096,71	6290,12
935	9,35	2,76	2252,28	6756,85
936	9,36	5,09	2018,80	6056,41
937	9,37	4,52	2044,34	6133,03
938	9,38	2,51	2163,13	6489,39
939	9,39	4,27	2347,54	7042,61
940	9,40	1,19	1941,83	5825,49
941	9,41	2,01	1947,47	5842,40
942	9,42	1,76	2253,19	6759,56
943	9,43	0,82	2257,66	6772,97
944	9,44	3,58	2030,72	6092,16
945	9,45	6,09	2120,96	6362,89
946	9,46	4,02	2213,06	6639,18
947	9,47	2,83	2299,92	6899,76
948	9,48	3,39	2320,93	6962,79
949	9,49	1,95	2319,31	6957,94
950	9,50	1,51	2323,79	6971,37
951	9,51	4,21	2167,15	6501,45
952	9,52	5,15	2021,04	6063,13
953	9,53	1,70	1971,55	5914,66
954	9,54	4,46	2309,51	6928,54
955	9,55	1,70	1881,98	5645,94
956	9,56	4,96	2048,04	6144,11
957	9,57	4,52	2302,30	6906,89
958	9,58	1,76	2109,72	6329,15
959	9,59	6,09	2242,78	6728,34
960	9,60	1,32	2188,90	6566,70
961	9,61	4,96	2107,17	6321,50
962	9,62	5,47	2224,49	6673,48
963	9,63	0,75	2039,35	6118,05
964	9,64	2,89	2373,86	7121,57
965	9,65	3,46	2069,69	6209,08
966	9,66	4,71	2130,24	6390,72
967	9,67	4,08	2105,87	6317,61
968	9,68	0,63	2077,68	6233,05

k	t_k (seg)	θ_k (rad)	P(t)_k (N/m²)	F(t)_k (N)
969	9,69	1,82	2168,12	6504,37
970	9,70	5,91	2218,56	6655,68
971	9,71	5,34	2220,08	6660,23
972	9,72	1,26	2335,85	7007,55
973	9,73	4,40	1981,51	5944,54
974	9,74	2,51	2128,25	6384,74
975	9,75	2,39	2146,39	6439,17
976	9,76	3,83	2227,31	6681,93
977	9,77	2,76	2004,53	6013,60
978	9,78	4,84	2440,37	7321,10
979	9,79	3,83	2141,57	6424,70
980	9,80	4,96	2178,52	6535,56
981	9,81	4,71	2237,15	6711,44
982	9,82	4,59	1875,95	5627,84
983	9,83	4,15	2133,46	6400,38
984	9,84	4,34	2010,05	6030,14
985	9,85	4,84	2290,00	6869,99
986	9,86	1,07	2220,78	6662,34
987	9,87	3,58	2430,76	7292,27
988	9,88	5,22	2368,83	7106,49
989	9,89	6,16	2190,00	6570,01
990	9,90	2,14	1876,92	5630,75
991	9,91	5,47	2329,28	6987,83
992	9,92	0,94	2373,53	7120,59
993	9,93	1,45	2129,57	6388,71
994	9,94	5,28	2155,99	6467,98
995	9,95	5,15	1870,28	5610,84
996	9,96	3,46	2201,43	6604,30
997	9,97	1,38	2129,19	6387,58
998	9,98	5,28	2161,78	6485,35
999	9,99	2,95	2377,12	7131,35
1000	10,00	0,88	1955,21	5865,63