



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FRAGMENTAÇÃO DE OBJETOS PLANARES POR IMPACTO DE PROJÉTEIS

Rebeca Cardim Falcão

Recife - PE, Brasil
Março - 2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FRAGMENTAÇÃO DE OBJETOS PLANARES POR IMPACTO DE PROJÉTEIS

por

Rebeca Cardim Falcão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho (Orientador, DF-UFPE)

Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes (DF-UFPE)

Profa. Kaline Rabelo Coutinho (IF-USP)

Recife - PE, Brasil
Março - 2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D’Arc Leão Salvador CRB 4-572

F178f Falcão, Rebeca Cardim.
Fragmentação de objetos planares por impacto de projetéis / Rebeca Cardim Falcão. – Recife: O Autor, 2014.
52 f.: fig., tab.

Orientador: Fernando Roberto de Luna Parisio.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2014.
Inclui referências.

1. Física estatística. 2. Fragmentação. 3. Impacto pontual. I. Parisio, Fernando Roberto de Luna (Orientador). II. Título.

530.1595 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-51



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (+ + 55 81) 2126-7640 / 2126-8449
<http://www.ufpe.br/ppg fisica> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Rebeca Cardim Falcão

FRAGMENTAÇÃO DE OBJETOS PLANARES POR IMPACTO DE PROJÉTEIS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Fernando Roberto de Luna Parisio Filho (Presidente e Orientador), Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Kaline Rabelo Coutinho, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, consideram a candidata:

☒ Aprovada

☐ Reprovada

☐ Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em dezoito de março de dois mil e catorze.

Prof. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Presidente e Orientador

Prof. Marcelo Andrade de Filgueiras Gomes

Profa. Kaline Rabelo Coutinho

Para Clarinha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao professor Fernando Parisio pela execução desse projeto, por toda orientação e ensinamentos que me foram dados e que contribuíram na minha formação profissional.

Aos demais membros da banca examinadora, o professor Marcelo Gomes e a professora Kaline Coutinho, pela leitura e crítica deste trabalho.

Agradeço aos amigos que fiz durante toda essa jornada pela ajuda, pelos momentos de conversa e por todas as situações cômicas até desesperadas que tive o prazer de presenciar. Da graduação: André De'Carli e seu restaurante maravilhoso, Camila Stavola e o Mano, Cecília Veras e o futebol (todos), Fabio Lopes e o CPI, Florentino Gomes e suas conversas intermináveis, Kainã Terto nossa eterna 9^o mulher da turma e Larissa Passos, Laryysss!. Do mestrado: Francisco Rocha nosso popstar, João Fontana nosso chinês, Mário Rocha o do armário, Pablo de Castro nosso hipopocaré, Tiago Araújo nosso James e Victor Pedrosa e suas batatas. Destaque para Eglânio Pessoa, Hugo Andrade e Leonardo de Queiroz pela ajuda no Latex e pelas tentativas frustradas de recuperar os dados do meu Ubuntu (Kainã também) e para Julian Amado meu companheiro de sala que me ajudou em tudo isso e ainda tentou me ensinar russo.

Agradeço a Maurício Andrade e Oscar Moura pela leitura e torcida.

Agradeço em especial a Thaís Corrêa, minha terceira irmã, por todos os momentos de diversão e aprendizado que passamos durante esses 18 anos juntas e todo apoio que ela me deu sempre me incentivando e me encorajando, numa relação em que uma sempre serve de suporte para outra.

Agradeço a Flávia Vieira, Eloah Vieira, Tia Helo e Tio Jô, pelo carinho, apoio e torcida.

Agradeço ao professor e amigo Raul Montagne, pelo exemplo e por todos os conselhos de vida, ensinamentos e conversas maravilhosas que tive o prazer de presenciar.

A Cintia Duarte e Jonathan Oliveira, agradeço a torcida e carinho. Agradeço a sua filha Ana Cecília, minha afilhada, pela ternura que me faz sorrir e seu sorriso que me anima e encoraja.

Agradeço a minha família, em especial a Clarice Cardim, prima que esteve sempre presente e que me ajudou seja me ouvindo ou seja falando e a minha avó Olga por todas suas *vovices*.

Agradeço a Felipe Oriá pelos momentos maravilhosos que passamos juntos, pelos conselhos e pelo companherismo.

Por fim, os mais importantes: agradeço aos meus pais pelo amor incondicional e eterno apoio que tornou possível não só a produção desse trabalho como minha formação, às minhas irmãs, Lorena Falcão e Mirele Falcão, pelos vários momentos de risos e brigas,

AGRADECIMENTOS

destacando os 5 minutos de castigo (abraços), e pelas caminhadas que fizemos e faremos juntas.

"A liberdade ofende. Mulher de olhos brilhantes, Isadora é inimiga declarada da escola, do matrimônio, da dança clássica e de tudo aquilo que engaiole o vento. Ela dança porque dançando goza, e dança o que quer, quando quer e como quer, e as orquestras se calam frente à música que nasce de seu corpo."

—EDUARDO GALEANO (Retirado do conto *Isadora* do livro *Mulheres*.)

RESUMO

Neste trabalho abordamos a fragmentação de um disco fino e quebradiço (quase bi-dimensional) ocorrida pelo impacto pontual de um projétil. Este problema é tratado via estatística geométrica, onde linhas e círculos desempenharão o papel das rachaduras e serão distribuídas aleatoriamente sobre a superfície. A escolha das rachaduras será feita com a distribuição de probabilidade respectiva a cada ente geométrico: a linha ou o círculo. Estas distribuições foram obtidas a partir de uma análise da propagação e, principalmente, da dissipação da energia cedida pelo projétil. Ao construirmos o disco fragmentado, calculamos a área de cada fragmento e, então, chegamos à distribuição cumulativa das massas dos fragmentos maiores ou iguais a m , $P(m)$. Observamos que esta última está em grande concordância com os dados experimentais obtidos por T. Kadono et al, ou seja: $P(m) \sim m^{-\beta}$, onde $0.1 < \beta < 0.3$, no regime de pequenas massas.

Palavras-chave: Fragmentação. Leis de potência. Impacto pontual.

ABSTRACT

In this dissertation we address the fragmentation of a flat (two-dimensional) brittle disk occurred due to the punctual impact of a projectile. This problem is addressed via geometric statistics, where lines and circles represent the disk's cracks, randomly distributed over its surface. The distribution of cracks will be made through each geometric entity's respective probability distribution: the line or circle. These distributions were obtained from a propagation and dissipation analysis of energy transferred by the projectile. To construct the fragmented disk, calculations were made to obtain the area of each fragment and to plot the cumulative distribution of the fragments masses (greater than or equal to m). It was noted that the latter are in accordance with the experimental data obtained by T. Kadono et al, ie. $P(m) \sim m^{-\beta}$, where $0.1 < \beta < 0.3$, in the small mass regime.

Keywords: Fragmentation. Power law. Punctual impact.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Imagens fotográficas de placas de vidros quebradas	14
1.2	Ilustração da plano sendo atingido pelo projétil e o padrão formado. . . .	15
2.1	$N+1$ fragmentos de comprimento variável l gerados por N fraturas. . . .	16
2.2	Fragmento com tamanho entre l e $l + dl$	17
2.3	Fragmento com tamanho entre l e $l + dl$ em um segmento de reta de tamanho L	18
2.4	Cálculo da probabilidade de n fraturas caírem em l para $N = 3$	19
2.5	Plano transpassado por retas verticais e horizontais.	21
2.6	Área de um fragmento destacada.	21
3.1	Placa de vidro quebrada; desenho simulando o padrão do vidro quebrado.	25
3.2	Representação das variáveis aleatórias no disco.	25
3.3	Imagem do momento de impacto em um vidro.	26
3.4	Ilustração de um projétil atingindo um disco lateralmente.	27
3.5	Ilustração do momento de impacto.	28
3.6	Gráfico de $p(r) \times r$	30
3.7	Resultados de Kadono em [20].	32
4.1	Discos fragmentados pada cada caso citado acima.	34
4.2	Distribuição cumulativa de áreas maiores ou iguais a a	34
4.3	Ajuste das curvas da distribuição cumulativa e expoentes.	35
4.4	Ilustração e modelagem do impacto lateral.	36
4.5	Gráficos do log da distribuição para impacto frontal e lateral.	37
4.6	Ilustração da relação do N com N_r e N_c	38
4.7	Gráficos de $N_a \times a$ de $N = 240$ com $q = 1$	39
4.8	Gráficos de $N \times a$ de $N = 240$ com $q = 0.3$	40
4.9	Gráficos de $N \times a$ de $N = 240$ com $q = 0$	41
4.10	Gráficos de $N \times a$ para diferentes números de fragmentos com $q = 1$. . .	43
4.11	Gráficos de $N_a \times a$ para diferentes números de fragmentos com $q = 0.3$.	44
4.12	Gráficos de $N_a \times a$ para diferentes números de fragmentos com $q = 0$. . .	45
4.13	Gráficos de $\beta_l, \beta_f \times q$ para diferentes N	47

LISTA DE TABELAS

4.1	Número de fraturas radiais e circulares para cada número de fragmentos.	42
4.2	Número de fraturas radiais e circulares para cada número de fragmentos.	48

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução	13
Capítulo 2—Modelos Clássicos de Fragmentação	16
2.1 Modelo unidimensional de Lineau	16
2.1.1 Fragmentação de uma haste infinita	16
2.1.2 Fragmentação de uma haste finita.	18
2.2 Modelo Bidimensional de Mott e Linfoot	20
Capítulo 3—Modelo de um disco fragmentado por impacto pontual	24
3.1 Introdução ao Modelo	24
3.2 Propagação de Energia.	26
3.2.1 Distribuição dos ângulos das fraturas radiais.	26
3.2.2 Distribuição dos raios das fraturas circulares.	27
3.3 Experimento de Kadono	31
Capítulo 4—Resultados	33
4.1 Impacto Frontal	33
4.2 Impacto Lateral×Impacto Frontal:	36
4.3 Resultados para $N = 240$:	37
4.3.0.1 Sem dissipação ($q = 1$):	38
4.3.0.2 Com dissipação ($q = 0.3$):	39
4.3.0.3 Dissipação máxima $q = 0$:	40
4.4 Resultados para diferentes números de fragmentos:	41
4.4.1 Para $q = 1$:	42
4.4.2 Para $q = 0.3$:	44
4.4.3 Para $q = 0$:	45
4.4.3.1 Variando o coeficiente de restituição de 0 a 1:	46
Capítulo 5—Conclusão e Perspectivas	49
Referências Bibliográficas	51

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Fenômenos fora do equilíbrio são muito comuns na natureza. Porém, o tratamento desses fenômenos, seja analítico ou numérico, apresenta uma complexidade considerável. Apesar do avanço experimental e teórico, problemas de fragmentação são um exemplo claro disso. Parte da dificuldade em lidar com fragmentação se deve à existência de vários cenários possíveis. Afinal, as quantidades mensuráveis são sensíveis ao material do objeto fragmentado, à dimensão efetiva, à geometria intrínseca e à distribuição espaço-temporal e a intensidade da energia inicial cedida ao objeto.

O estudo da fragmentação foi intensificado no final da segunda guerra mundial pelo cientista inglês Nevill Francis Mott [1]. Seus estudos eram focados principalmente em munições explosivas, ou melhor, na fragmentação resultante da ruptura de bombas. Mott juntamente com Linfoot, outro importante cientista da época, fez várias análises e estudos que não foram publicados em jornais científicos, ficando restritos a relatórios internos de guerra do *Ministry of Supply* do Reino Unido. Inclusive, posteriormente, alguns desses serviram para testes experimentais da sua teoria de fragmentação.

Intuitivamente, observamos um ente matemático importante que irá nos permitir fazer uma análise da fragmentação de uma granada, ou de qualquer outro objeto, a distribuição de tamanho dos fragmentos. Esse tamanho pode ser: comprimento, área ou volume, quando o sistema for uni, bi e tridimensional, respectivamente. Generalizando, podemos trabalhar com a massa do fragmento, que servirá para todas as dimensões. A partir dessa distribuição poderemos dizer quantos fragmentos de massa entre m e $m + \Delta m$ foram obtidos. Chegar nessa distribuição era um dos objetivos de Mott.

Mott estudou a fragmentação em um sistema bidimensional, que foi criado a partir dos resultados obtidos com o caso unidimensional. Este último foi desenvolvido por Lineau. Ambos os modelos são discutidos no segundo capítulo deste trabalho: “Modelos Clássicos de Fragmentação”.

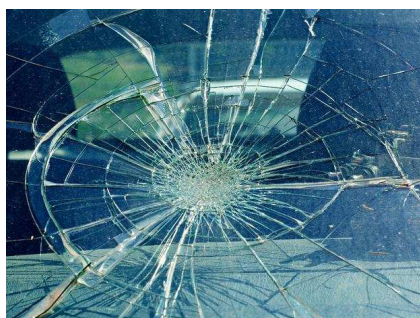
Os trabalhos de Mott foram primordiais para o desenvolvimento da teoria da fragmentação. Eles serviram de base para a compreensão deste fenômeno e, vale salientar, a partir deles começou-se a observar que as distribuições de massa dos fragmentos frequentemente obedeciam a leis de potência em certos limites da massa. Por este motivo, iniciaram-se os estudos acerca dos expoentes dessas leis. Um conhecimento buscado nos expoentes é sobre sua variação ou não, ou seja, sua dependência com o material do objeto fragmentado, com a geometria, com a energia cedida para o objeto ou até mesmo com a maneira em que essa energia era cedida, entre outros. Importantes resultados foram concluídos em alguns trabalhos, tais como a forte dependência do expoente com a geometria do objeto em detrimento da dependência com o material [2].

Ademais, outros resultados interessantes foram obtidos, como é o caso dos trabalhos [3] e [4], que chegaram em leis de potência compostas, ou seja, para cada regime de massa

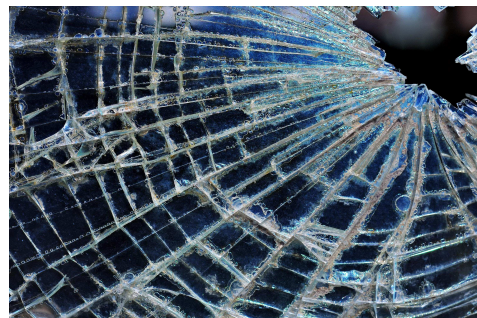
dos fragmentos, grandes e pequenas, foram obtidos diferentes expoentes dentro da mesma distribuição.

O surgimento da ideia central envolvida na nossa pesquisa se deve à dificuldade em conectar os modelos estatísticos geométricos [5] com as teorias de fragmentação de primeiros princípios. Em outras palavras, enquanto os primeiros envolvem o posicionamento aleatório de linhas ou curvas em uma superfície, no caso de fragmentação bidimensional, as segundas tentam incorporar e simular os processos físicos da propagação e nucleação das fraturas em uma classe específica de materiais. Poucos trabalhos seguiram por este caminho, um exemplo é o de Emily et al [6]. Nossa pesquisa buscou suprir a escassez de trabalhos conjugando conceitos estatísticos e vínculos físicos.

Adicione a isso a percepção de um certo padrão em um disco, ou mesmo uma placa de algum material quebradiço, fraturado por causa de um impacto pontual, seja ele feito por uma pedra ou por um projétil de qualquer espécie. Este padrão se assemelha bastante a uma teia de aranha, conforme as figuras 1.1.



(a) Janela de vidro de um carro quebrada. Retirada da referência [7]



(b) Janela de vidro quebrada retirada da referência [8]

Figura 1.1 (a) Podemos observar nessa imagem da janela de carro quebrada o padrão formado: círculos concêntricos, cujo centro é o ponto de impacto, e segmentos de reta que cruzam o ponto de impacto. (b) Visão em maior proximidade de uma janela de vidro quebrada.

Então, uma ideia nos saltou à mente: estudaríamos o fenômeno da fragmentação em um disco, cuja geometria é mais simples de ser trabalhada, por um impacto pontual. O padrão formado pelo impacto teria fraturas radiais e circulares, cujas distribuições de probabilidade seriam obtidas a partir dos princípios de propagação e amortecimento de energia.

Temos que quando o projétil atinge o disco quebradiço, obtemos um padrão geométrico como está ilustrado na figura 1.2.

Com base nessas observações, criamos um modelo que se utiliza desses entes geométricos, onde as circunferências concêntricas representam as rachaduras ou fraturas circulares e os segmentos de reta representam as fraturas radiais. Em outras palavras, este modelo contém os seguintes passos:

1. O sorteio das fraturas radiais, de acordo com uma distribuição a ser discutida.
2. O sorteio das fraturas circulares, de acordo com uma distribuição a ser discutida.

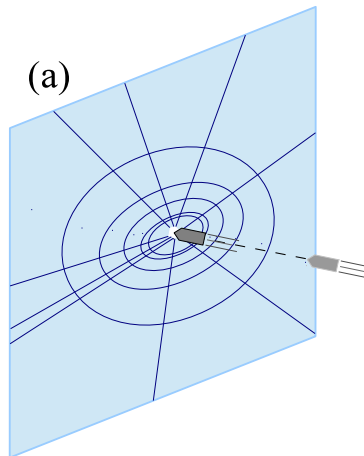


Figura 1.2 Ilustração de um projétil atingindo uma placa e o padrão formado pelo impacto.

3. Cálculo da área de cada fragmento formado pelas fraturas radiais e circulares sorteadas.
4. Construção do gráfico de distribuição de áreas.
5. Verificação do comportamento tipo lei de potência no regime de massas pequenas e determinação dos expoentes.

O ponto de partida essencial nesse modelo é o sorteio das rachaduras radiais e circulares. Esse sorteio é feito de acordo com distribuições diferentes, as quais serão detalhadas no capítulo três. Nele analisaremos o conceito de propagação de energia, o qual é utilizado para encontrar essas distribuições. Ou seja, a partir de um conceito físico, chegamos às distribuições que geram as fraturas. Portanto, nosso modelo está atrelado a uma descrição física e estatística do fenômeno de fragmentação.

Por fim, gostaríamos de salientar que, apesar de suas origens bélicas, o estudo de fragmentação possui muitas aplicações para além desse campo, entre as quais estão geociências [9], astrofísica [10], ciência forense [11], ciências dos materiais e, até mesmo, arqueologia [12].

CAPÍTULO 2

MODELOS CLÁSSICOS DE FRAGMENTAÇÃO

Neste capítulo mostraremos os primeiros modelos estatísticos de fragmentação que foram construídos via estatística geométrica [5]: uma abordagem que se utiliza de conceitos estatísticos na distribuição de fraturas.

2.1 MODELO UNIDIMENSIONAL DE LINEAU

Consideremos uma haste fina e longa de vidro ou de algum material quebradiço. Imaginemos que ela seja solta de alguma altura grande o suficiente e, ao colidir paralelamente ao chão, se fragmente em diversos pedaços. Como seria a distribuição das massas dos fragmentos? É possível chegar nessa distribuição analiticamente? Este problema foi abordado em detalhe por Lineau [1, 13] e, posteriormente, o experimento foi de fato realizado [14, 15], levando a uma concordância parcial.

Lineau modelou este problema da seguinte maneira: a partir de um segmento de reta de tamanho L são escolhidos aleatoriamente N pontos (fraturas), de forma que a probabilidade da fratura ocorrer em cada ponto da haste é a mesma [16]. Vide a figura 2.1.

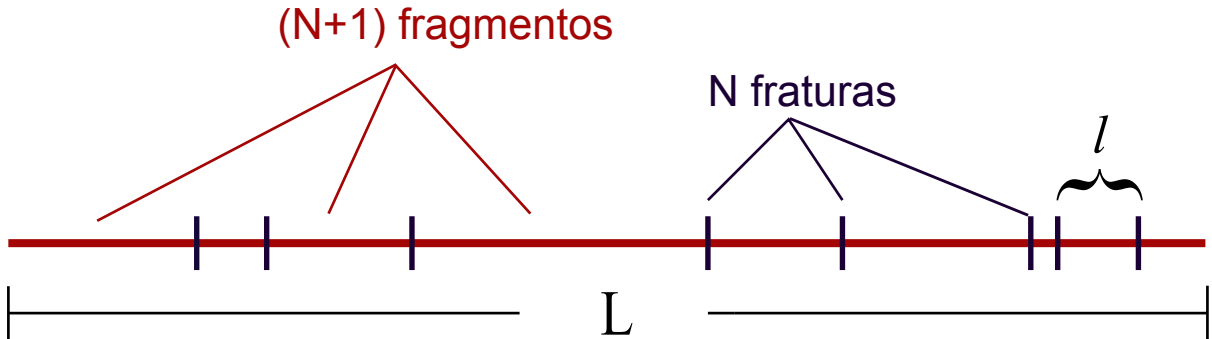


Figura 2.1 $N+1$ fragmentos de comprimento variável l gerados por N fraturas.

2.1.1 Fragmentação de uma haste infinita

Para o caso em que L é muito maior que o tamanho médio dos fragmentos $\langle l \rangle$, ou seja, quando existe um número grande de fragmentos, o modelo pode ser simplificado utilizando-se uma reta (infinita). Sabemos que a distribuição de pontos aleatórios em uma reta é dada pela distribuição de Poisson [17]:

$$P(N, l) = \frac{(l/\langle l \rangle)^N e^{-l/\langle l \rangle}}{N!}, \quad (2.1)$$

onde a equação (2.1) representa a distribuição de probabilidade de termos N fraturas em um intervalo de tamanho l da reta.

Lineau chegou na distribuição de probabilidade de fragmentos com tamanho menor ou igual a l , $F_{\leq}(l)$, utilizando o seguinte método.

Primeiramente, calcula-se a probabilidade de não existir nenhuma fratura em um tamanho l , $P(0, l)$, e a probabilidade de existir uma fratura no incremento subsequente dl , $P(1, dl)$, como indicado na Figura 2.2:



Figura 2.2 Fragmento com tamanho entre l e $l + dl$

São elas:

$$P(0, l) = e^{-l/\langle l \rangle}, \quad (2.2)$$

$$P(1, dl) = \frac{1}{\langle l \rangle} dl. \quad (2.3)$$

Multiplicando-se estas duas equações, já que os eventos são independentes, obtemos a densidade de probabilidade de fragmentos com tamanho entre l e $l + dl$:

$$f(l) = \frac{e^{-l/\langle l \rangle}}{\langle l \rangle} dl, \quad (2.4)$$

Integrando a (2.4) de 0 a l chegamos na distribuição de probabilidade de fragmentos com tamanho menor ou igual a l , ou seja:

$$F(l) = \int_0^l \frac{e^{-l'/\langle l \rangle}}{\langle l \rangle} dl'. \quad (2.5)$$

Obtemos:

$$F_{\leq}(l) = 1 - e^{-l/\langle l \rangle}, \quad (2.6)$$

Sabemos que a cumulativa para comprimentos maiores ou iguais a l é igual a distribuição de fragmentos com qualquer tamanho l , $\lim_{l \rightarrow \infty} F(l) = 1$, menos a distribuição de fragmentos com comprimentos menores ou iguais a l , isto é,

$$F_{\geq}(l) = e^{-l/\langle l \rangle}. \quad (2.7)$$

Esta última equação (2.7) trata da distribuição de fragmentos com comprimentos maiores ou iguais a l , a qual é de maior interesse para nós. Afinal, ao se fazer um experimento de fragmentação, a medição do tamanho do fragmento é feita do maior para o menor, visto que é o procedimento mais simples e preciso.

2.1.2 Fragmentação de uma haste finita.

Para o caso onde L não é muito maior que o tamanho médio dos fragmentos l , aplicamos o método utilizado anteriormente em um segmento de reta conforme foi descrito na figura 2.1. Segue abaixo uma ilustração simplificada:

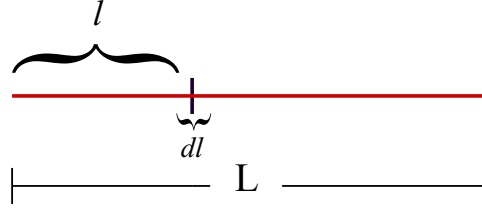


Figura 2.3 Fragmento com tamanho entre l e $l + dl$ em um segmento de reta de tamanho L .

Sabemos que a probabilidade de uma única fratura acontecer em um intervalo l do segmento de reta de tamanho L é igual a:

$$P_1(1, l) = \frac{l}{L}. \quad (2.8)$$

Portanto, a probabilidade da fratura não cair em l , dado que apenas uma fratura ocorreu, é:

$$P_1(0, l) = 1 - \frac{l}{L}.$$

Quando ocorrerem N fraturas, a probabilidade de nenhuma delas cair em um intervalo de tamanho l , ou seja, todas caírem fora do intervalo de tamanho l , será dada pela diferença entre $\sum_{n=0}^{n=N} P_N(n, l) = 1$ e $\sum_{n=1}^{n=N} P_N(1, l)$, onde o primeiro termo é igual a um, pois estamos considerando todo o espaço amostral, e, o segundo termo se refere à probabilidade de n fraturas caírem no comprimento l . Ainda podemos ter 1 fratura dentro do comprimento l e $N - 1$ fora, 2 fraturas dentro do comprimento l e $N - 2$ fora, e assim por diante. Também sabemos que temos N chances do primeiro caso ocorrer, ou seja, $\binom{N}{1}$, no segundo caso temos $\binom{N}{2}$ chances e essa regra segue até o N -ésimo termo. Ou seja, as chances de cada possibilidade acontecer são uma combinação do número total de fraturas N pelo número de fraturas que caem dentro do intervalo de tamanho l . Segue abaixo uma ilustração para auxiliar no entendimento do cálculo da probabilidade de n fraturas quaisquer caírem no intervalo de tamanho l .

N=3

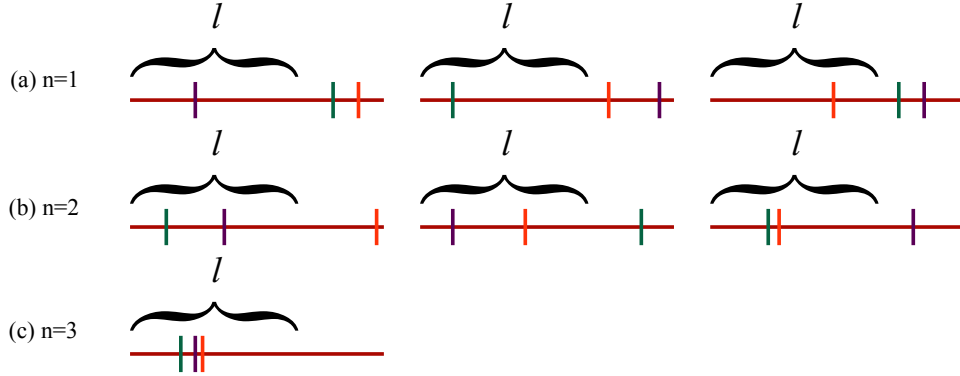


Figura 2.4 Para o caso de 3 fraturas, temos os seguintes eventos: (a) Uma fratura em l e as outras duas fora com três possibilidades para esse evento- a fratura azul dentro, a verde ou a laranja -; (b) Duas fraturas em l e a outra fora. Novamente podemos permutar as fraturas três vezes; (c) as três fraturas em l .

A equação (2.8) é justamente a probabilidade de uma única fratura ocorrer e cair no intervalo l . Como os eventos são independentes, temos que a probabilidade de duas únicas fraturas ocorrerem e caírem no intervalo l será $P_2(2, l) = \left(\frac{l}{L}\right)^2$ e para N fraturas: $P_N(N, l) = \left(\frac{l}{L}\right)^N$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 P_N(0, l) &= 1 - P_N(1, l) \\
 P_N(0, l) &= 1 - \frac{N!}{1!(N-1)!} \frac{l}{L} - \frac{N!}{2!(N-2)!} \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \cdots - \frac{N!}{N!(N-N)!} \left(\frac{l}{L}\right)^N \\
 P_N(0, l) &= \binom{N}{0} \left(\frac{l}{L}\right)^0 - \binom{N}{1} \frac{l}{L} - \binom{N}{2} \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \cdots - \binom{N}{N} \left(\frac{l}{L}\right)^N.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

De acordo com a passagem em (2.9) obtemos que:

$$P_N(0, l) = \left(1 - \frac{l}{L}\right)^N. \tag{2.10}$$

Agora calcularemos a probabilidade de uma única fratura cair em um intervalo infinitesimal dl dado que as N fraturas não ocorreram em l . Primeiramente, nosso segmento de reta terá tamanho $L - l$, e, a probabilidade de uma fratura ocorrer em um intervalo dl , dado que apenas uma fratura ocorreu, será: $P_1(1, dl) = \frac{dl}{L-l}$. Para o caso de N fraturas, obtemos então:

$$P_N(1, dl) = \frac{N!}{1!(N-1)!} \left(\frac{dl}{L-l}\right) = N \left(\frac{dl}{L-l}\right). \tag{2.11}$$

Analogamente à seção anterior, fazemos:

$$f(l)dl = P_N(0, l)P_N(1, dl) \quad (2.12)$$

$$F_{>}(l) = \int_l^\infty N \left(1 - \frac{l}{L}\right)^N \left(\frac{dl}{L-l}\right). \quad (2.13)$$

Efetuada a integração, obtemos a distribuição cumulativa de fragmentos com tamanho maior ou igual a l :

$$F_{>} = \left(1 - \frac{l}{L}\right)^N. \quad (2.14)$$

Vale salientar que podemos escrever a distribuição (2.14) da seguinte maneira:

$$F_{>} = e^{N \ln\left(1 - \frac{l}{L}\right)}. \quad (2.15)$$

Agora analisaremos esta equação para $L \gg l$ e $\langle l \rangle \ll L$ e veremos se ela é condizente ou não com a (2.7). Seja $\langle l \rangle = \frac{L}{N}$, substituindo em (2.15), obtemos:

$$F_{>} = e^{\frac{L}{\langle l \rangle} \ln\left(1 - \frac{l}{L}\right)}. \quad (2.16)$$

Sabemos que a expansão em série do termo com logaritmo é dada por:

$$\ln\left(1 - \frac{l}{L}\right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(-\frac{x}{y}\right)^k}{k}, \text{ para } \frac{l}{L} < 1. \quad (2.17)$$

Logo, expandindo a equação (2.16) e considerando apenas os termos de primeira ordem, obtemos:

$$F_{>} = e^{\frac{L}{\langle l \rangle} \left(-\frac{l}{L}\right)} = e^{-\frac{l}{\langle l \rangle}}, \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

que é justamente a distribuição obtida para uma reta (no caso $L \gg \langle l \rangle$) utilizando a distribuição de Poisson.

2.2 MODELO BIDIMENSIONAL DE MOTT E LINFOOT

Nessa seção iremos explorar um dos poucos modelos de fragmentação bidimensional resolvido analiticamente. Um outro bom exemplo é o trabalho de Parisio et al [18] sobre fragmentação mínima, onde vários eventos de uma rachadura em um retângulo são avaliados.

O modelo de Mott e Linfoot consiste de um plano particionado por retas verticas e horizontais distribuidas de modo aleatório uniforme [1]. Veja a figura 2.5:

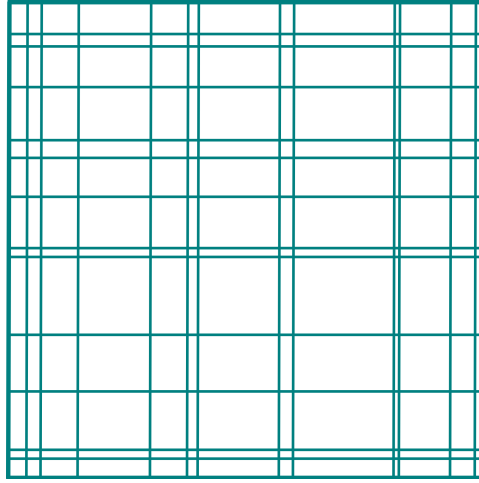


Figura 2.5 Plano transpassado por retas verticais e horizontais.

Mott e Linfoot calcularam a distribuição de massa dos fragmentos e se basearam, principalmente, no método desenvolvido por Lineau para o caso unidimensional. Iremos agora reproduzir este cálculo analítico.

Primeiramente, observamos que a área de um fragmento depende do espaçamento entre duas retas horizontais adjacentes y e entre duas retas verticais adjacentes x , conforme a figura 2.6.

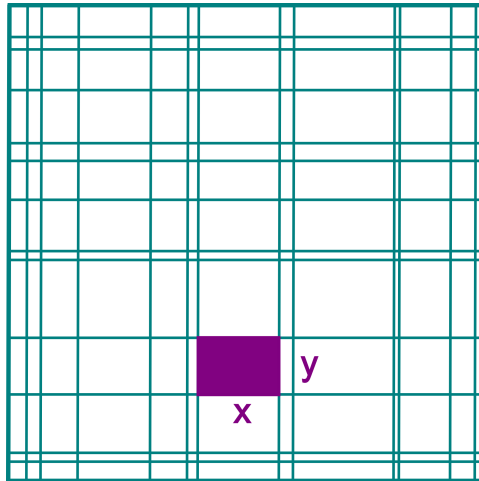


Figura 2.6 Área de um fragmento destacada.

Conforme vimos na seção anterior, a densidade de probabilidade de tamanhos dos fragmentos em uma reta é dada pela equação (2.4). Aplicando essa idéia para os espaçamentos entre as retas, ou seja, o tamanho l da (2.7) seria substituído pelo espaçamento das retas verticais x e horizontais y . Obteríamos, então:

$$f_x = \frac{1}{\langle x \rangle} e^{-\frac{x}{\langle x \rangle}}, \quad (2.20)$$

$$f_y = \frac{1}{\langle y \rangle} e^{-\frac{y}{\langle y \rangle}}, \quad (2.21)$$

onde estamos assumindo que o retângulo é suficientemente grande de forma a podermos usar as distribuições de Poisson.

Então, temos que f_x e f_y são as densidades de probabilidade dos espaçamentos entre x e $x + dx$ das retas verticais e y e $y + dy$ das horizontais. E, como vimos na figura 2.6, esses espaçamentos são os lados dos fragmentos retangulares. Portanto, a densidade de probabilidade de área dos fragmentos como função de x e y será igual a:

$$f_{xy} = \frac{1}{\langle x \rangle \langle y \rangle} e^{-\frac{x}{\langle x \rangle}} e^{-\frac{y}{\langle y \rangle}} \quad (2.22)$$

Sabemos que $a = xy$, então a distribuição de probabilidade cumulativa de áreas maiores ou iguais a a será dada por:

$$F_{>a} = \iint_{xy > a} \frac{1}{\langle x \rangle \langle y \rangle} e^{-\frac{x}{\langle x \rangle} - \frac{y}{\langle y \rangle}} dx dy. \quad (2.23)$$

Teremos então:

$$F_{>a} = \frac{1}{\langle x \rangle \langle y \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\langle x \rangle}} \left[\int_{\frac{a}{x}}^\infty e^{-\frac{y}{\langle y \rangle}} dy \right] dx, \quad (2.24)$$

ou melhor,

$$F_{>a} = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\langle x \rangle} \left(x + \frac{\langle x \rangle}{\langle y \rangle} \frac{a}{x} \right)} dx. \quad (2.25)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável nesta última integração: $x = \sqrt{\frac{a \langle x \rangle}{\langle y \rangle}} e^\theta$, obtemos:

$$F_{>a} = \sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} (e^\theta + e^{-\theta})} e^\theta d\theta, \quad (2.26)$$

substituindo as funções exponencias pelas hiperbólicas:

$$F_{>a} = \sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} \int_{-\infty}^\infty e^{-2\sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} \cosh(\theta)} (\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) d\theta. \quad (2.27)$$

Estamos trabalhando com limites de integração simétricos. Então, vale ressaltar que:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) \text{ for par.} \\ 2 \int_0^a f(x)dx, & \text{se } f(x) \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, o termo que contém $\sinh\theta$ é nulo e o termo do $\cosh\theta$ se torna o dobro da integral original com o limite de 0 a ∞ , ou seja:

$$F_{>a} = 2\sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} \int_0^\infty e^{-2\sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} \cosh(\theta)} \cosh(\theta) d\theta. \quad (2.28)$$

Podemos perceber a semelhança entre a equação (2.28) e a representação integral da função de Bessel modificada do segundo tipo [19]:

$$K_n(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh(\theta)} \cosh(n\theta) d\theta. \quad (2.29)$$

Concluimos que a distribuição de probabilidade de fragmentos de área maior ou igual a a é dada por:

$$F_{>a} = 2\sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} K_1 \left(2\sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} \right). \quad (2.30)$$

A densidade de probabilidade cumulativa será a derivada de $1 - F_{>a}$ em relação a a . Como a derivada da função de Bessel modificada para $n = 1$ obedece a seguinte relação $\frac{d(xK_1(x))}{dx} = -xK_0(x)$, temos:

$$f(a) = \frac{d}{da} (1 - F_{<a}) \quad (2.31)$$

$$(2.32)$$

logo:

$$f_a(a) = \frac{2}{\sqrt{a\langle x \rangle \langle y \rangle}} K_0 \left(2\sqrt{\frac{a}{\langle x \rangle \langle y \rangle}} \right) \quad (2.33)$$

Finalmente, obtemos a densidade de probabilidade de fragmentos com área entre a e $a + da$, cuja forma é dada pela equação (2.33).

Este capítulo serviu, principalmente, para introduzir o tema da estatística geométrica como ferramenta para modelagem de problemas de fragmentação, inclusive introduzindo os termos técnicos e os conceitos estatísticos necessários ao nosso estudo. Mais ainda, os modelos aqui apresentados e discutidos foram fundamentais para criação do nosso modelo numérico. O principal objetivo é a explicação minuciosa do modelo que, diferentemente desses apresentados, lida com conceitos estatísticos combinados à vínculos físicos.

CAPÍTULO 3

MODELO DE UM DISCO FRAGMENTADO POR IMPACTO PONTUAL

Neste capítulo iremos descrever nosso modelo explicitando as ideias vindas dos modelos clássicos discutidos no capítulo anterior e trazendo à luz as discussões do conceito de propagação e amortecimento de energia embutido nele, sendo isto um dos diferenciais deste trabalho.

Antes de começarmos a discussão sobre o nosso modelo, é importante citar os diferentes regimes vivenciados por objetos bidimensionais. Imagine uma placa de vidro, muito fina. Suponha que esta placa caia fazendo um ângulo qualquer com o chão e se fragmente. Podemos afirmar que o processo de fragmentação aconteceu em três dimensões, pois a placa pode curvar-se e/ou os fragmentos podem quicar e invadir a terceira dimensão. Não estamos considerando este tipo de evento neste trabalho. Na verdade, nosso modelo aborda um tipo de evento de fragmentação bidimensional, cujo processo se dá também em duas dimensões. Exemplos deste tipo de processo são o esmagamento de uma placa quebradiça, o impacto pontual de um projétil na lateral de um disco quebradiço com a condição que os fragmentos não saiam do disco, ambos da referência [20], e assim por diante.

3.1 INTRODUÇÃO AO MODELO

Ao observarmos janelas, portas, placas em geral, de vidro ou de algum outro material quebradiço atingidas por bolas ou pedras, percebemos um certo padrão formado quando o material se fragmenta e permanece na janela, assim como foi comentado na introdução. Esse padrão lembra uma teia de aranha e foi o principal responsável pelo surgimento da ideia que tivemos para criar uma modelagem para esse tipo de fragmentação.

As imagens da figura 3.1 ilustram a relação entre nosso modelo e a teia de aranha formada pela ruptura do vidro. Podemos observar, na primeira imagem, que temos fraturas relativamente bem definidas: as radiais e as circulares. Ilustramos isso na segunda imagem, onde as fraturas radiais são representadas pelos segmentos radiais e as circulares são representadas por círculos concêntricos e o disco central representa o local atingido pelo projétil, que consideramos material perdido, não entrando, portanto, na estatística dos fragmentos.

Considerando que o aparecimento das fraturas radiais não interfere no aparecimento das circulares e vice-versa, construímos uma metodologia que sorteia essas fraturas separadamente, e o sorteio de cada uma obedece à uma distribuição diferente, que iremos conhecer na próxima seção.

Para o sorteio das fraturas radiais, nossa variável aleatória é o ângulo θ definido entre a reta que representa a fratura radial e o eixo x que passa pelo ponto de impacto, o

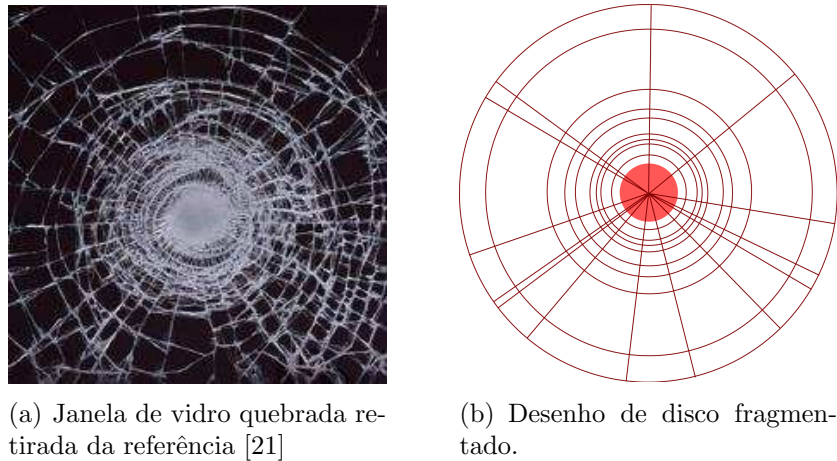


Figura 3.1 Placa de vidro quebrada; desenho simulando o padrão do vidro quebrado.

centro do disco. Assumimos que os valores de θ variam entre 0 e 2π . No caso das fraturas circulares, a variável aleatória será dada pelo raio r dos círculos. Definimos o raio do projétil r_0 , como o valor mínimo permitido para r . A depender da energia contida no projétil, a área atingida por ele ou fica recheada de fragmentos muito pequenos a ponto de serem negligenciados em experimentos ou fica vazia, ou seja, material perdido como dito anteriormente (isso pode ser observado na figura 3.1). O valor máximo de r será, obviamente, o raio do disco R . Observe a figura 3.2:

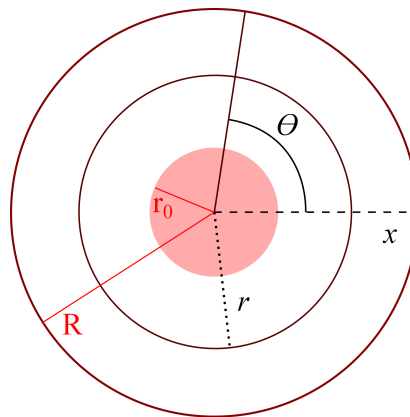


Figura 3.2 Ilustração de disco com as variáveis aleatórias θ e r em destaque, o valor máximo desta última R , o mínimo r_0 e o eixo x usado como referência para θ . A área sombreada representa o material perdido.

O próximo passo do programa consiste no cálculo da área de cada fragmento do disco,

que é dada por:

$$a = \frac{(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_i - \theta_{i-1})}{2}, \quad (3.1)$$

onde r_i , r_{i-1} e θ_i , θ_{i-1} são realizações vizinhas das variáveis aleatórias r e θ , respectivamente, e do cálculo da distribuição dos fragmentos de áreas maiores ou iguais a a , ou seja, $F_{>a}$.

Antes de analisarmos os resultados, iremos mostrar o conceito por trás da escolha da distribuição dos ângulos das fraturas radiais e da distribuição dos raios das fraturas circulares.

3.2 PROPAGAÇÃO DE ENERGIA.

3.2.1 Distribuição dos ângulos das fraturas radiais.

Para a escolha da distribuição dos ângulos das fraturas radiais, consideramos duas hipóteses. Primeira hipótese: a simetria do sistema, o disco atingido por um projétil no centro, nos sugere que não existe nenhuma preferência de direção das fraturas radiais. Segunda hipótese: acreditamos que as fraturas radiais são decididas no momento de impacto, portanto a dissipação da energia durante seu transporte pelo disco não alteraria as fraturas radiais e suas preferências direcionais, caso existissem. Podemos entender e observar melhor essas hipóteses na figura abaixo, que consiste em uma imagem fotográfica do momento de impacto:



Figura 3.3 Podemos notar que todas as fraturas radiais são determinadas no momento do impacto, e, obedecem à uma distribuição de probabilidade uniforme. Imagem retirada da referência [22]

Combinando essas duas hipóteses, percebemos claramente que a distribuição mais natural é a uniforme, ou seja, a distribuição de ângulos das fraturas radiais é dada simplesmente por:

$$f_\theta = \frac{\theta}{2\pi^2}. \quad (3.2)$$

Gostaríamos de enfatizar, entretanto, que nosso modelo foi comparado com os dados de um disco fragmentado por impacto lateral [20]. Neste caso haveria uma preferência na

direção das fraturas radiais implicando na invalidez da primeira hipótese acima. Contudo a segunda hipótese permanece válida.

Observando a figura 3.4, que ilustra um projétil atingindo um disco lateralmente, percebemos que o padrão formado é semelhante ao de um semidisco atingido em seu centro.

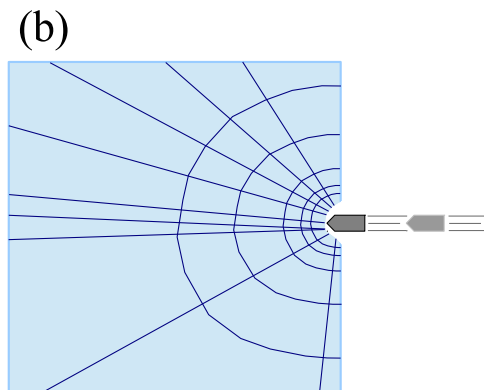


Figura 3.4 Ilustração de um projétil atingindo um disco lateralmente.

Com todas essas informações, sabemos que a distribuição dos ângulos das fraturas radiais terá que ter seu máximo em $\theta = 0$, pois o projétil está na direção da reta que faz um ângulo $\theta = 0$ em relação ao eixo x . Por causa disso, uma boa escolha é a seguinte:

$$g_{\theta} = -\frac{\cos(\theta)}{2}, \quad (3.3)$$

onde $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $-\frac{1}{2}$ é a constante de normalização.

3.2.2 Distribuição dos raios das fraturas circulares.

No caso das fraturas circulares, a escolha da distribuição dos raios é um pouco mais complexa. Vamos pensar o seguinte: seja $\mathcal{E}_0$ a energia cinética do projétil que é transferida para o disco no momento do impacto. Como será efetuado esse transporte? Sabemos que o transporte da energia cinética cedida pelo projétil é feito a partir de ondas mecânicas. Então, supomos que esse choque ocorrido entre o projétil e o disco geraria um pulso localizado de energia que iria transportá-la através do disco. Um ilustração desse fato segue na figura 3.5:

Seguindo este raciocínio, levamos em consideração duas hipóteses. A primeira é relativa a distribuição dos raios das fraturas circulares: consideramos que ela é proporcional, em primeira aproximação, à densidade linear de energia. Ou seja, $P(r) \propto \rho(r)$. Isso significa que a distribuição de probabilidade de termos uma fratura circular em r é proporcional à densidade de energia a uma distância r do ponto de impacto.

A segunda hipótese gira em torno da densidade de energia. Seja $\mathcal{E}_0$ a quantidade total de energia cedida pelo impacto do projétil com o disco. Parte dessa energia é utilizada

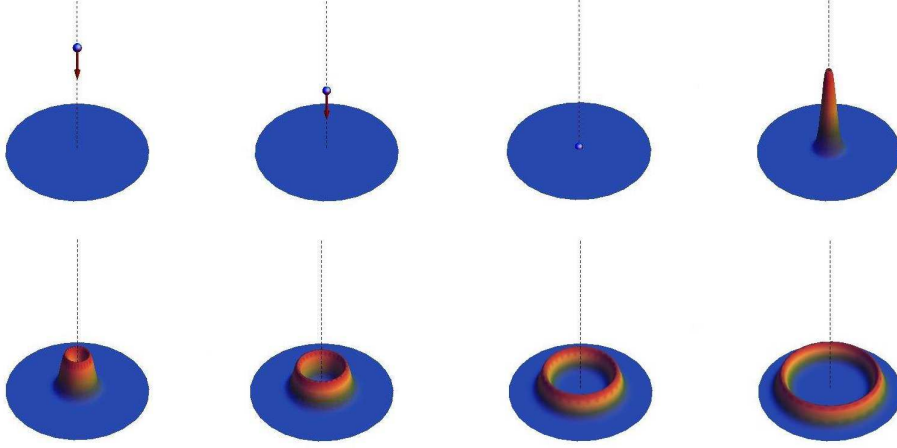


Figura 3.5 Ilustração do pulso de energia gerado no momento de impacto e sua propagação após o impacto.

na formação das fraturas radiais no instante do impacto. Logo:

$$\mathcal{E}_0 = E'_0 + E_0, \quad (3.4)$$

onde E'_0 é a energia perdida na formação das fraturas radiais.

Agora, suponha que estivéssemos em um caso completamente conservativo, onde não haveria dissipação de energia durante o seu transporte ao longo do disco. Então, isso significa que a energia contida no pulso seria igual a E_0 para qualquer r , o que nos leva a ter uma densidade de energia dada por:

$$\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}. \quad (3.5)$$

Pela primeira hipótese, notamos que nesse limite, que é um limite não físico, a distribuição dos raios das fraturas circulares seria proporcional a $1/r$.

Agora, indo para o limite físico, claramente sabemos que à medida em que o pulso se propaga, ele perde energia para o meio, em forma de som e/ou calor, por exemplo. Esta perda deverá ser proporcional à área englobada pela onda. De acordo com isso, temos:

$$E(r) = E_0 \left(A + \frac{B}{\pi r^2} \right), \quad (3.6)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas mais adiante.

Vale ressaltar que, no nosso modelo, consideramos que a energia perdida é proporcional à área englobada, e que, nessa dissipação, estão incluídas a perda pela formação de fraturas e a perda pela criação de fonons e calor. Porém, não colocamos o termo de energia perdida por fratura diretamente na equação, que varia a depender do material do disco. Este fato é considerado no nosso modelo pela escolha de um coeficiente que é

relacionado diretamente com a energia perdida e do número de fraturas circulares N_r . Em outras palavras, ao definirmos este coeficiente, estamos dizendo quanto da energia cedida pelo projétil é perdida na propagação do pulso e ao escolhermos um N_r , sabemos quantas fraturas são formadas a partir dessa perda, o que caracteriza o material do disco.

Atreladas a essa equação, temos as condições de contorno, que são:

$$\begin{cases} E(r_0) = E_0 \\ E(R) = qE_0, \text{ para } 0 \leq q \leq 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde q é o fator de restituição de energia, ou seja:

$$\begin{cases} q = 0 \Rightarrow E(R) = 0, \\ q = 1 \Rightarrow E(R) = E_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

No primeiro caso ($q = 0$) a energia se anula na borda do disco, enquanto que no limite conservativo ($q = 1$) a energia permanece E_0 na borda do disco.

Susbtituindo as condições de (3.7) na equação (3.6), temos:

$$\begin{cases} E(r_0) = E_0 \Rightarrow A + \frac{B}{\pi r_0^2} = 1 \\ E(R) = qE_0 \Rightarrow A + \frac{B}{\pi R^2} = q. \end{cases} \quad (3.9)$$

Resolvendo esse sistema, obtemos para A e B os seguintes valores:

$$\begin{cases} A = 1 - \frac{1-q}{1-\xi^2} \\ B = \frac{(1+q)\pi r_0^2}{1-\xi^2}, \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $\xi = \frac{r_0}{R}$, é a razão entre os raios do projétil e do disco.

Portanto, a energia se comporta de acordo com a equação abaixo:

$$E(r) = E_0 \left[1 - \frac{1-q}{1-\xi^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right]. \quad (3.11)$$

De acordo com a equação (3.11) a densidade linear de energia sobre o pulso será dada por:

$$\rho(r) = \frac{E(r)}{2\pi r} = \frac{E_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{1-q}{1-\xi^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^2}{r^3} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Voltando à nossa primeira hipótese, sabemos que: $P(r) \propto \rho(r)$, logo $P(r) = k\rho(r)$, onde $k \in \mathbb{R}$. Normalizando $P(r)$:

$$\int_{r_0}^R P(r) dr = 1, \text{ então:} \quad (3.13)$$

$$\int_{r_0}^R \rho(r) dr = \frac{1}{k}. \quad (3.14)$$

Então,

$$\begin{cases} k^{-1} = \frac{E_0}{2\pi} \int_{r_0}^R \left[1 - \frac{1-q}{1-\xi^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^2}{r^3} \right) \right] dr, \text{ logo} \\ k^{-1} = \frac{E_0}{2\pi} \left[\left(\frac{1-q}{2} \right) + \log(\xi) \left(\frac{1-q}{1-\xi^2} - 1 \right) \right]. \end{cases} \quad (3.15)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.15) em $P(r) = k\rho(r)$ e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte distribuição de probabilidade dos raios das fraturas circulares:

$$P(r) = \frac{1 - \xi^2 - (1-q) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)}{r \left[\left(\frac{1-q}{2} \right) + \log(\xi) \left(\frac{1-q}{1-\xi^2} - 1 \right) \right]}. \quad (3.16)$$

Na figura 3.6 encontra-se um gráfico dessa distribuição para vários valores de q .

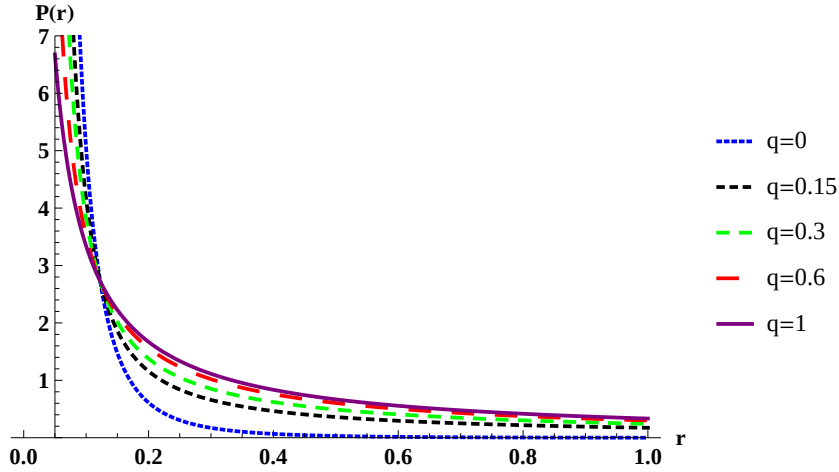


Figura 3.6 Gráfico de $p(r) \times r$ para os valores de $q = 0$, $q = 0.15$, $q = 0.3$, $q = 0.6$ e $q = 1$.

Podemos notar que para $q \rightarrow 0$, ou seja, para uma maior dissipação de energia temos maior probabilidade de fraturas com raios pequenos, implicando em fragmentos com menores massas. Portanto, podemos chegar a uma conclusão qualitativa de que obteremos mais fragmentos de massa pequena para perdas de energia mais acentuadas.

Com essas duas distribuições em mãos, a dos ângulos e a dos raios, podemos fazer o sorteio das fraturas radiais e circulares do nosso disco fragmentado e calcular a área de cada fragmento, o que irá nos permitir o cálculo da distribuição cumulativa de áreas dos fragmentos maiores ou iguais a a .

No próximo capítulo iremos explicar em maior detalhe nosso modelo, discutindo, inclusive, os passos da simulação e seus pontos relevantes, assim como mostraremos os resultados mais importantes.

3.3 EXPERIMENTO DE KADONO

Nessa última seção explicaremos um dos experimentos feitos por Kadono no trabalho [20], cujos resultados iremos comparar com os alcançados pela nossa simulação e então verificaremos se nosso modelo é eficaz na descrição deste fenômeno.

Neste trabalho, Kadono fez dois experimentos em discos planos:

1. O experimento "sanduíche": a fragmentação no disco foi causada pelo seu esmagamento.
2. O experimento do impacto lateral: a fragmentação no disco foi causada pelo impacto de um projétil na sua lateral.

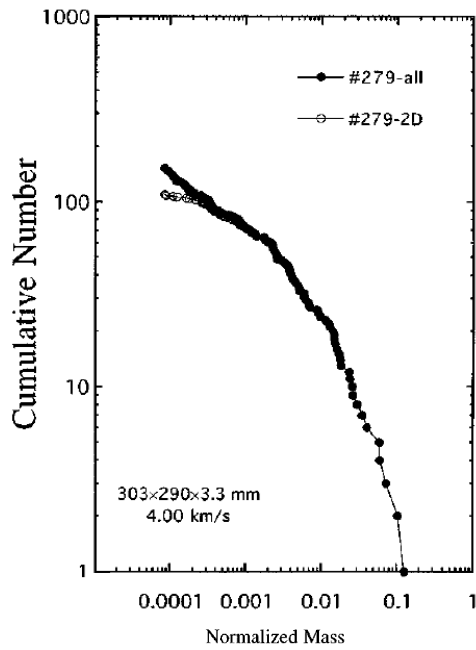
Nesta dissertação iremos nos ater ao segundo experimento, pois nosso modelo se refere à fragmentação causada por impacto pontual.

Kadono utilizou projetéis esféricos em alta velocidade ($\sim 4km/s$) para colidir na lateral de discos de gesso com diâmetros entre 95 a 308 mm e espessura entre 3.3 a 14 mm.

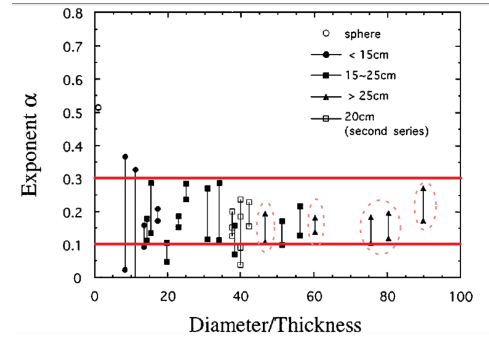
Depois que o projétil colidia no disco, ele recolhia os fragmentos e reconstruía o padrão das fraturas. Assim, foi possível reconhecer dois tipos de fraturas: as fraturas radiais que iniciavam no ponto de impacto e as fraturas perpendiculares às radiais. Como muitas das fraturas perpendiculares não atravessavam as radiais, foi considerado que as fraturas radiais se formavam antes das perpendiculares.

Ele fez duas séries do experimento: primeiro variou o diâmetro e a espessura dos discos e manteve a velocidade do projétil constante ($4 \pm 0,4km/s$). Depois manteve espessura do disco e diâmetro fixos (5 mm e 200 mm, respectivamente) e a velocidade do projétil variando entre: ($0,6 - 4,1km/s$).

Kadono observou um comportamento tipo lei de potência na distribuição de massas maiores ou iguais a m no regime de massas pequenas e calculou seus respectivos expoentes. Abaixo seguem os gráficos obtidos por Kadono, figuras 2(c) e 4 da referência [20]. A primeiro mostra a distribuição cumulativa do número de fragmentos maiores ou iguais a m e a segunda a relação entre os expoentes da lei de potência e a razão entre o diâmetro e a espessura do disco:



(a) Fig.2c do artigo de Kadono: Distribuição cumulativa do número de fragmentos com massa maior ou igual a m .



(b) Fig.4 Kadono: gráfico dos expoentes *versus* a razão entre o diâmetro e a espessura do disco.

Figura 3.7 Resultados de Kadono em [20]. As retas em vermelho representam os limites dos expoentes obtidos. Os pontos tracejados são os mais próximos dos quais iremos modelar.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

Nesta dissertação mostraremos os resultados das simulações feitas com os seguintes parâmetros como entrada:

1. **O raio da área atingida pelo projétil, r_0 , e o raio do disco, R que são os valores mínimo e máximo, respectivamente, permitidos para r , cuja razão será sempre igual a $\frac{r_0}{R} = 0.05$ nas simulações.**
2. **O número de fraturas radiais N_r , e circulares N_c , levando a um total de $N_r(N_c + 1)$ fragmentos, como mostrado mais a frente na figura 4.6.**
3. **Constante de restituição: q , que varia entre $0 \leq q \leq 1$.**

Outros valores para os parâmetros foram utilizados, porém todos os resultados obtidos foram similares. Por isso selecionamos apenas uma pequena região do nosso conjunto de parâmetros ($\frac{r_0}{R}$, N_r , N_c e q) para ser mostrada aqui como explicitado acima.

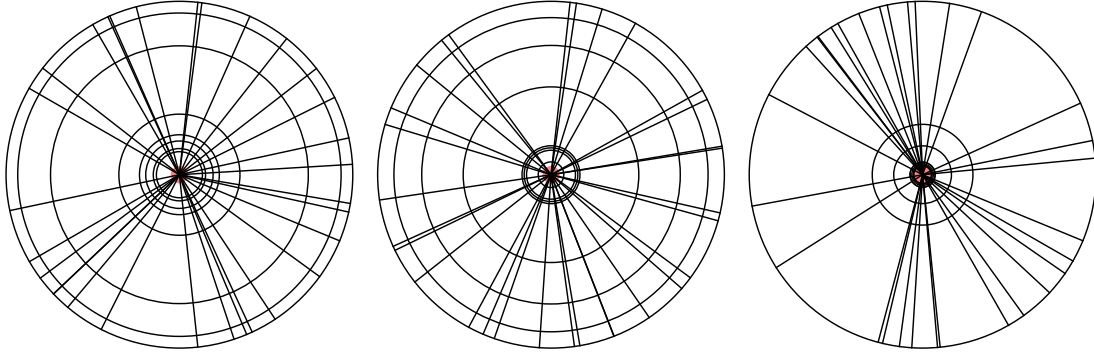
Vale ressaltar que, nesta simulação, consideramos um ensemble de 1000 discos fragmentados para cada conjunto de parâmetros (N_r , N_c e q). Portanto, calculamos a distribuição de área de acordo com os valores obtidos para os fragmentos nesse ensemble implicando na totalidade de $1000 \times N$ áreas (ou fragmentos), onde N é o número de fragmentos de cada ensemble.

4.1 IMPACTO FRONTAL

Antes de nos aventurarmos nas análises dos expoentes obtidos para cada conjunto de parâmetros utilizados, faremos uma breve discussão acerca da distribuição dos raios das fraturas circulares considerada neste trabalho. Primeiramente, analisaremos discos fragmentados por impacto frontal, cujo padrão será formado pelo sorteio de suas fraturas radiais e circulares de diferentes maneiras, conforme enumeradas abaixo:

1. Para efeito de comparação, inicialmente consideramos a distribuição uniforme para o sorteio ambas fraturas: radiais e circulares.
2. Agora utilizaremos a distribuição uniforme para as fraturas radiais e a distribuição obtida nessa pesquisa com $q = 1$ para as circulares, isto é, a dissipação de energia não é considerada.
3. Por fim, usamos a distribuição uniforme para as fraturas radiais e a distribuição obtida nessa pesquisa com $q = 0.3$ para as circulares, onde o termo de dissipação de energia é considerado.

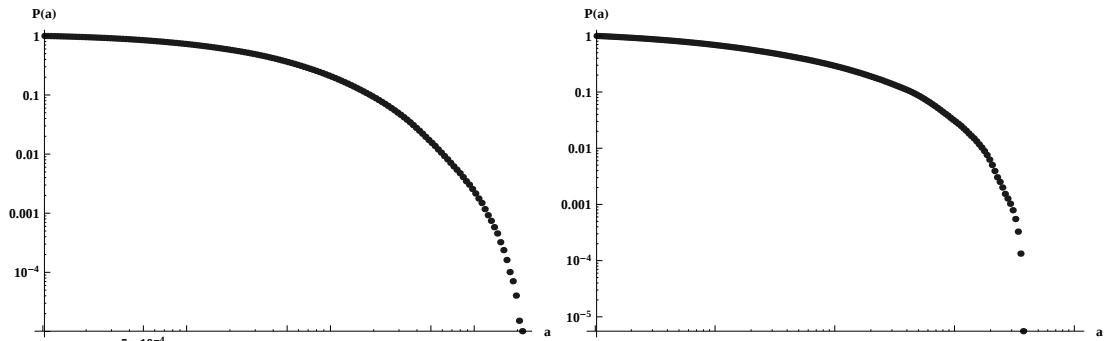
Segue abaixo o padrão formado nos discos para cada caso citado acima:



(a) 1º caso: distribuição uniforme para raios e círculos para $N_r = 30$ e $N = 240$.
 (b) 2º caso: sem considerar dissipação de energia para $N_r = 30$ e $N = 240$.
 (c) 3º caso: considerando dissipação de energia com $q = 0.3$ para $N_r = 30$ e $N = 240$

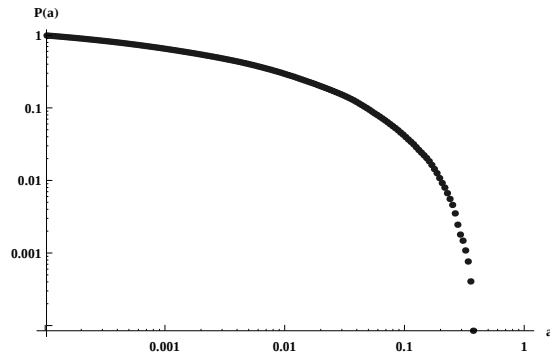
Figura 4.1 Discos fragmentados para cada caso citado acima.

Para cada caso, calculamos a distribuição cumulativa $F_{>a}$ e plotamos em um gráfico LogLog. Na figura 4.2 encontram-se esses gráficos.



(a) 1º caso: uniforme para ambas fraturas.

(b) 2º caso: sem dissipação de energia.



(c) 3º caso: dissipação de energia com $q = 0.3$.

Figura 4.2 Distribuição cumulativa de áreas maiores ou iguais a a .

Nosso próximo passo será a verificação do comportamento para massas pequenas. Na figura 4.2, podemos observar que na região de áreas pequenas é possível ajustar a curva em uma reta para uma variação de aproximadamente uma década dos valores da área. E, então, temos nosso expoente β , que é justamente o negativo do coeficiente angular dessa reta. Vide figura 4.3:

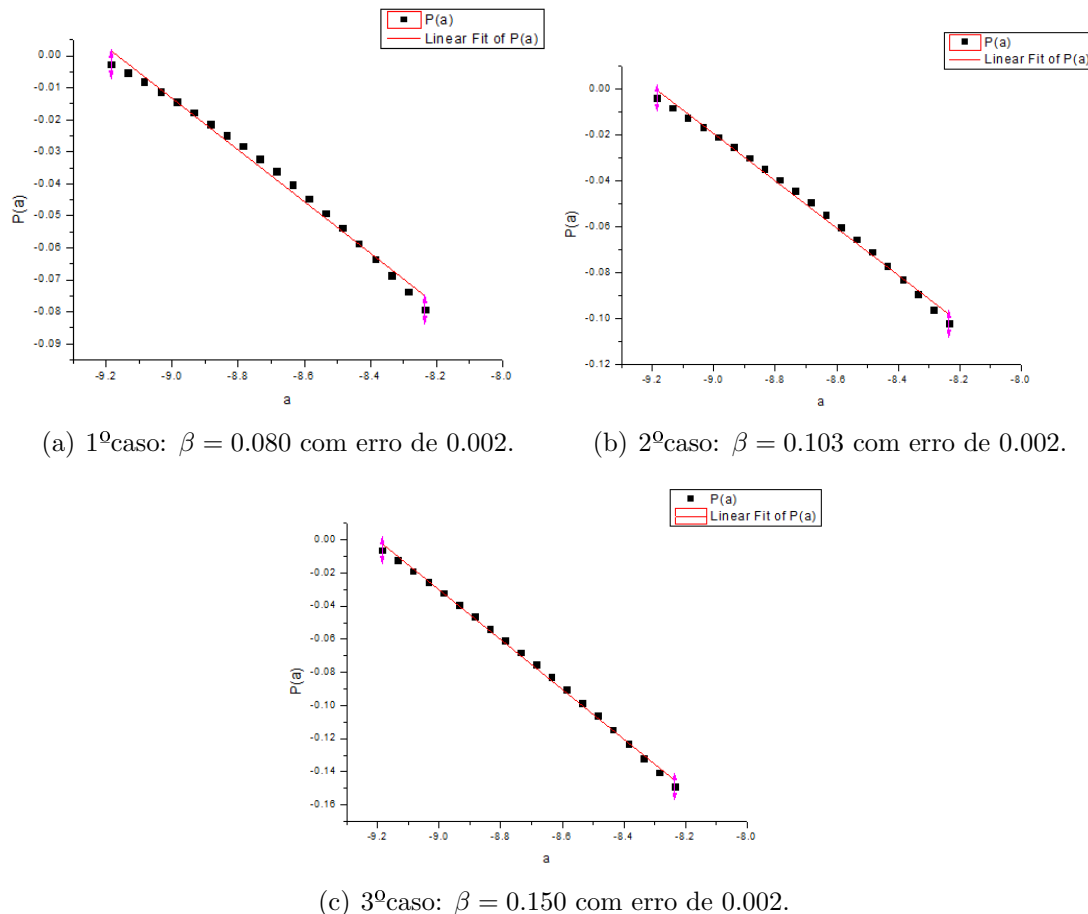


Figura 4.3 Ajuste das curvas da distribuição cumulativa e expoentes.

Para o caso em que a distribuição de fraturas circulares é uniforme obtemos um expoente¹ $\beta = 0.06 < 0.1$, ou seja, estamos fora do intervalo obtido experimentalmente por Kadono, $0.1 < \beta < 0.3$. No segundo caso, obtemos $\beta = 0.12$, que é maior que 0.1. Porém, como veremos adiante, para conseguirmos alcançar expoentes maiores que 0.2, ou seja, varrermos todo o intervalo de expoentes obtidos experimentalmente, necessitamos incluir a dissipação de energia, isto é, $q \neq 1$. Afinal, um maior expoente implica um maior número de fragmentos pequenos, e como vimos no capítulo passado a partir do gráfico 3.6, teremos uma maior quantidade de fragmentos pequenos quanto mais próxima de zero for a constante de restituição q .

¹O uso dos termos "lei de potência" e "expoente" é um abuso de linguagem pertencente à esta área de estudo. Podemos observar na figura 4.3 que nem todas as curvas obedecem estritamente a uma lei de potência.

4.2 IMPACTO LATERAL×IMPACTO FRONTAL:

Nosso próximo caso segue na figura 4.2, onde obtemos discos fragmentados por impacto lateral, ou seja, utilizando a distribuição dos ângulos das fraturas radiais dada pela equação (3.3) e a distribuição dos raios das fraturas circulares, obtidas nesse trabalho, com diferentes valores para o coeficiente de restituição, 0 e 0.3. Podemos observar que o projétil atinge o disco pelo lado esquerdo e as fraturas circulares, que agora são semicírculos, estão centradas no ponto de impacto.

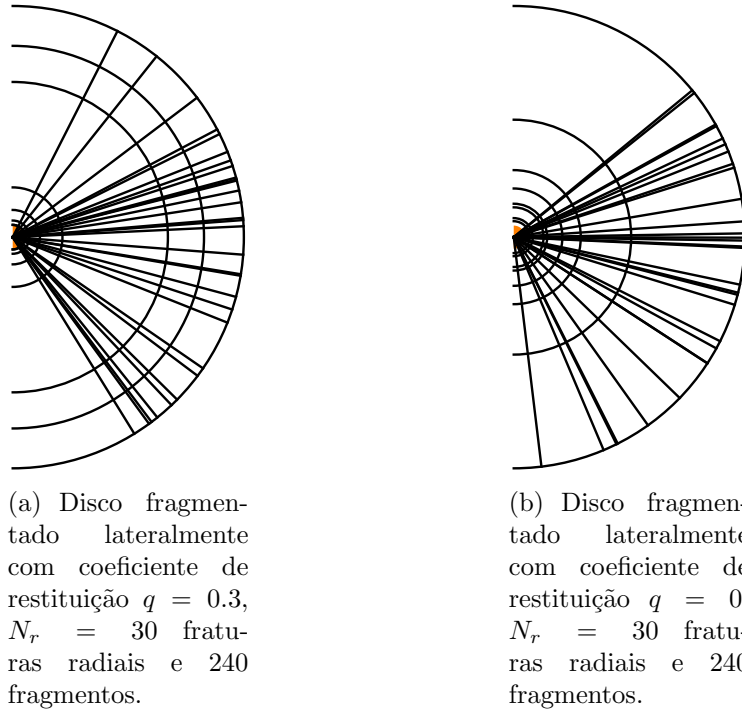


Figura 4.4 Discos fragmentados por impacto lateral com $q = 0$ e 0.3 .

A figura 4.5 contém gráficos loglog da distribuição cumulativa de números com área maior ou igual a a , N^2 , para o caso de impacto frontal (lateral) com um número de 240 fragmentos, onde 20 (19) fraturas são radiais e 11 circulares e a constante de restituição assume 3 valores distintos: $q = 0, 0.3$ e 1 . Percebemos que para massas pequenas o comportamento da curva é similar tanto para o impacto lateral quanto para o frontal. Calculamos o expoente para o impacto lateral β_l e para o impacto frontal β_f e obtemos valores próximos com uma máxima diferença de < 0.05 .

²Será utilizada a letra N para a distribuição cumulativa de números de fragmentos maior ou igual a a e para o número de fragmentos. Sempre que necessário será explicitado qual dos dois está sendo considerado.

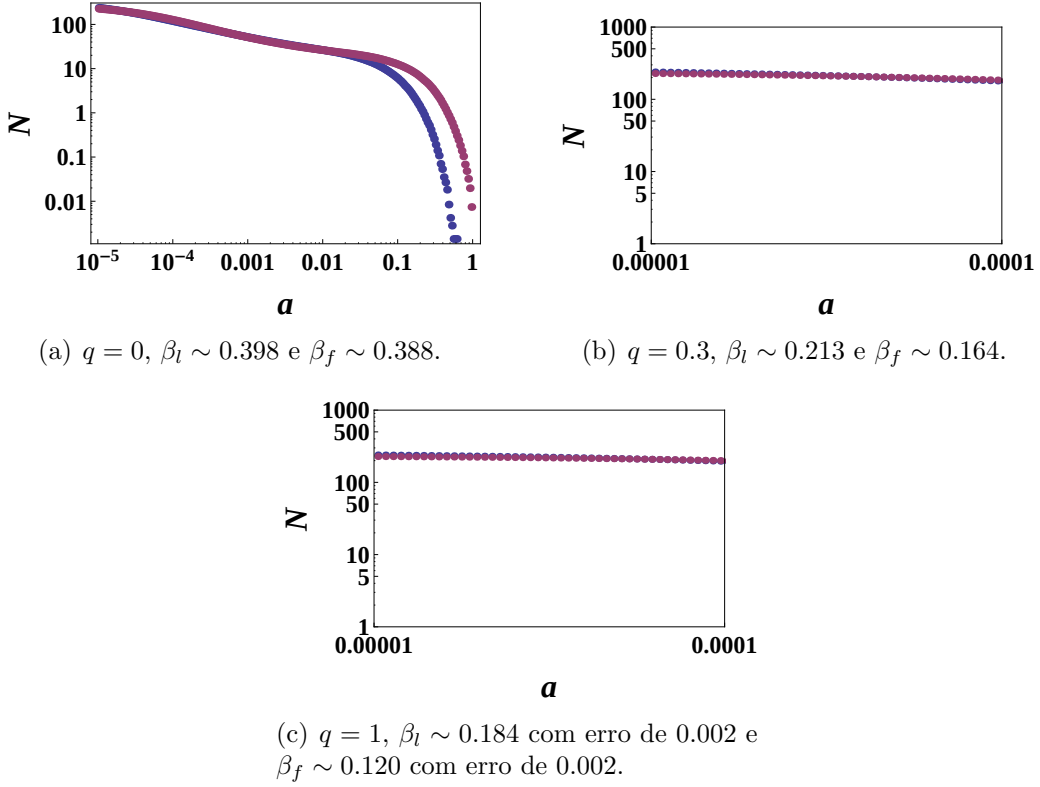


Figura 4.5 Gráficos do log da distribuição cumulativa da área para impacto frontal e lateral versus o log da área com 240 fragmentos, onde 20 fraturas são radiais e 11 circulares com a constante de restituição assumindo 3 valores diferentes: 0, 0,3 e 1, respectivamente.

Nas próximas seções iremos analisar os gráficos da distribuição cumulativa de números de fragmentos com área maior ou igual a a tanto para o impacto frontal como o lateral, e calcularemos seus respectivos expoentes, β_l e β_f .

Para o melhor entendimento do leitor elas serão divididas da seguinte maneira: primeiramente analisaremos os expoentes β_l e β_f para diferentes valores de q e N_r com um valor fixo de $N = 240$ (como N é fixo, os valores de N_c mudam ao variarmos N_r). Depois, repetiremos a análise para diferentes q e N .

A escolha de $N = 240$ se deve, primeiro, ao fato de que ele é o mais aproximado, dentre os trabalhados nesta pesquisa $N = (180; 240; 360; 420; 675; 900)$, à quantidade de fragmentos da figura 1(b) da referência [20]. Segundo, verificamos que o comportamento tanto dos gráficos como os expoentes não variam tanto com N o que será confirmado nas próximas seções.

4.3 RESULTADOS PARA $N = 240$:

Fixado o valor de N , temos que achar a relação entre esse valor com o número de fraturas radiais e circulares, ou seja: N_r e N_c . Se analisarmos cuidadosamente a figura abaixo 4.6, veremos que para n fraturas circulares, temos $n + 1$ fragmentos e, para n fraturas radiais, temos n fragmentos. Portanto, o número de fragmentos é dado por:

$$N = N_r (N_c + 1).$$

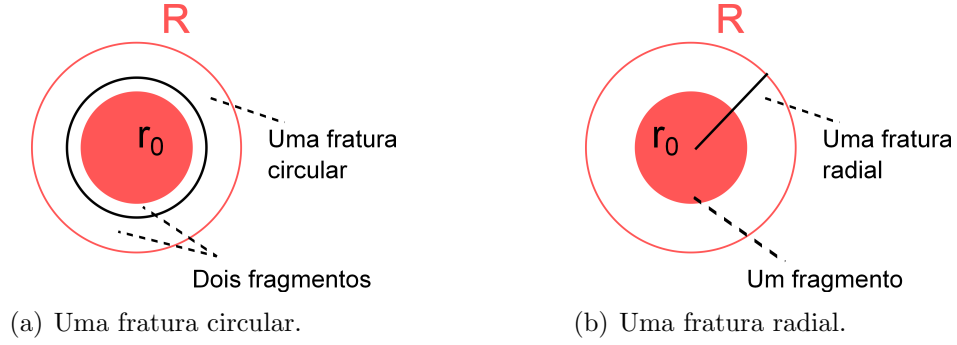


Figura 4.6 Ilustração do disco fragmentado por uma fratura circular e uma radial, respectivamente.

De um modo análogo obtemos para o caso lateral a relação entre os parâmetros N , N_r e N_c :

$$N = (N_r + 1)(N_c + 1).$$

Sabendo disso, achamos os divisores dois a dois do número de fragmentos 240 para acharmos as quantidades compatíveis de fraturas radiais e circulares. Como vimos na 1.1, o número de fraturas radiais, N_r , é maior que o número de fraturas circulares N_c . De acordo com o artigo [23] sabemos também que apenas fraturas radiais são formadas quando a energia é suficientemente baixa. Por exemplo, na figura 1 de [23] apenas a imagem (c) possui fraturas radiais e circulares e a velocidade do projétil é aproximadamente 66m/s, enquanto que nas outras imagens só há fraturas radiais e a velocidade do projétil é menor. Além do mais, temos o conhecimento de que se aumentarmos a energia do projétil, o número de fraturas circulares não aumenta a ponto de ficar próximo ou maior do que o número de fraturas radiais. Isso é devido ao fato de que quando a energia aumenta o suficiente, o projétil passa direto pelo disco sem criação de fraturas, formando-se apenas um buraco no ponto de impacto [24]. Portanto, utilizamos o seguinte critério de que $\frac{N_r}{10} \lesssim N_c \lesssim \frac{N_r}{2}$ e obtemos: $(N_r, N_c) = \{(19, 11), (23, 9), (29, 7), (39, 5)\}$ para o lateral e $(N_r, N_c) = \{(20, 11), (24, 9), (30, 7), (40, 5)\}$ para o frontal.³ Explicado as escolhas de parâmetros iremos analisar os resultados obtidos para vários valores de q para cada N_r acima.

4.3.0.1 Sem dissipação ($q = 1$): No caso do limite conservativo, onde não consideramos a dissipação de energia, obtemos os seguintes gráficos e expoentes:

³Nos gráficos sempre colocaremos o número de fraturas radiais N_r para o impacto frontal, pois no caso lateral é só subtrair 1.

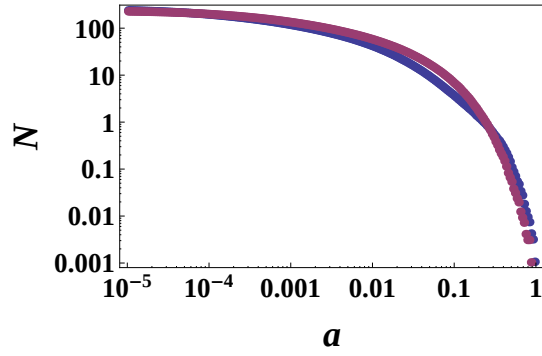
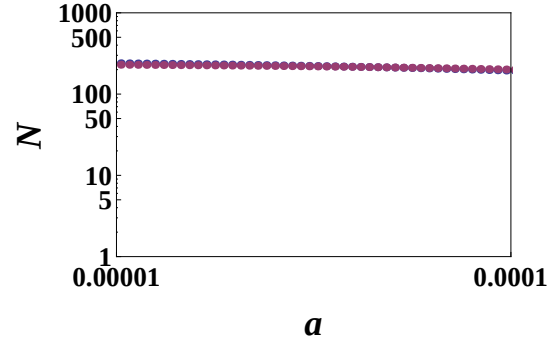
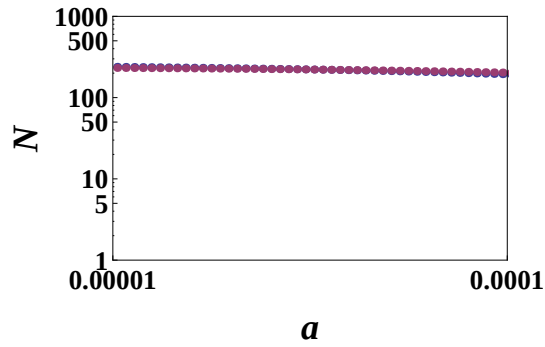
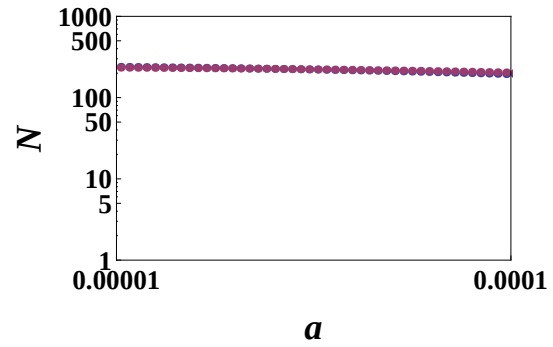
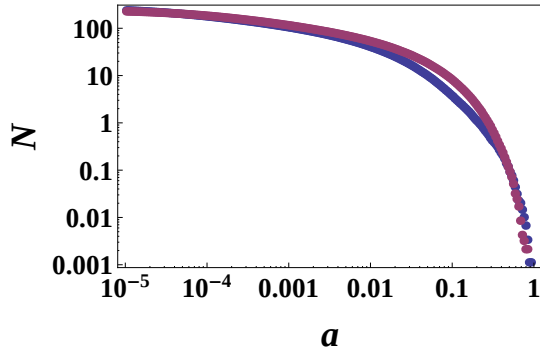
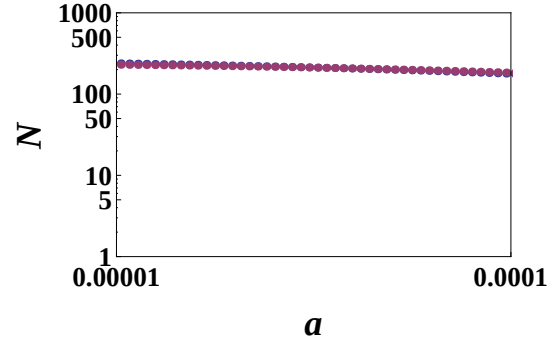
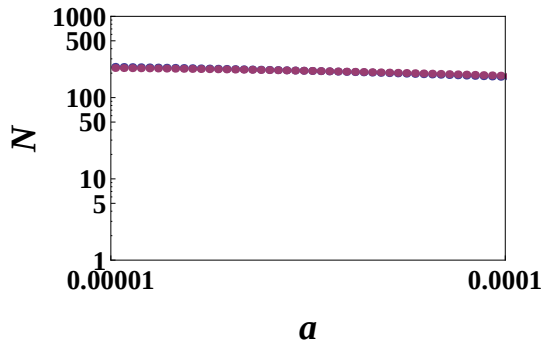
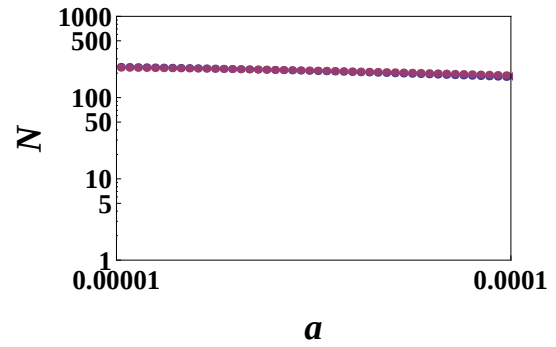
(a) $N_r = 20$, onde $\beta_l \sim 0.087$ e, $\beta_f \sim 0.056$.(b) $N_r = 24$, onde $\beta_l \sim 0.091$ e, $\beta_f \sim 0.058$.(c) $N_r = 30$, onde $\beta_l \sim 0.092$ e, $\beta_f \sim 0.056$.(d) $N_r = 40$, onde $\beta_l \sim 0.091$ e, $\beta_f \sim 0.059$.

Figura 4.7 Gráficos da distribuição de número fragmentos com área maior ou igual a a , $N \times a$ para $N = 240$ fragmentos com $q = 1$.

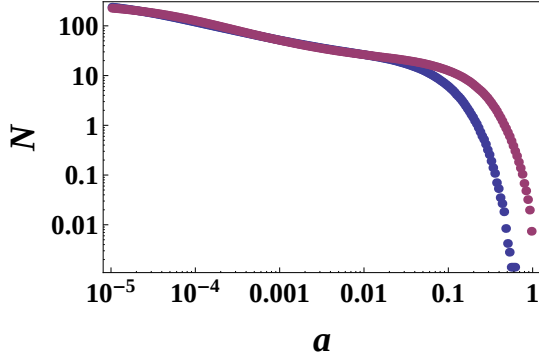
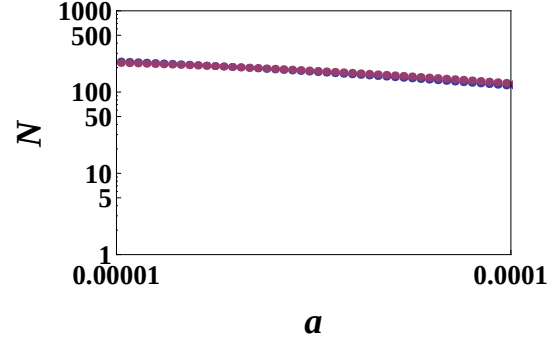
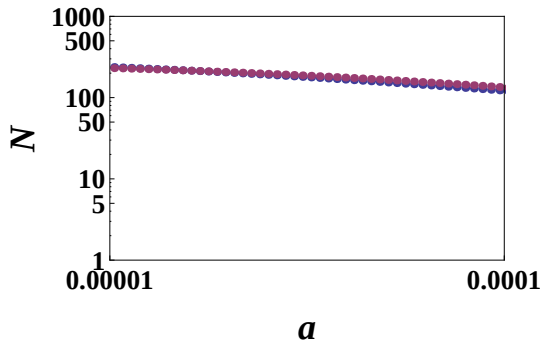
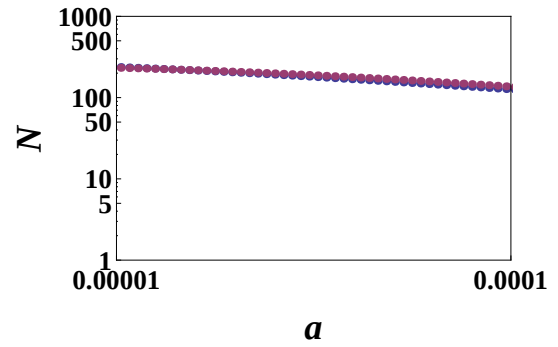
Observamos que os valores dos expoentes estão em torno de 0.1 para o impacto lateral, os quais estão de acordo com o experimento de Kadono. No caso do frontal, obtivemos expoentes por volta de 0.5.

4.3.0.2 Com dissipação ($q = 0.3$): Neste caso, o termo de dissipação da energia é considerado, porém nem toda energia cedida pelo projétil é dissipada durante sua propagação. Portanto, quando o pulso chega na borda do disco, ainda há energia. Seguem na figura 4.8 os gráficos:

(a) $N_r = 20$, onde $\beta_l \sim 0.128$ e, $\beta_f \sim 0.091$.(b) $N_r = 24$, onde $\beta_l \sim 0.130$ e, $\beta_f \sim 0.096$.(c) $N_r = 30$, onde $\beta_l \sim 0.125$ e, $\beta_f \sim 0.095$.(d) $N_r = 40$, onde $\beta_l \sim 0.128$ e, $\beta_f \sim 0.095$.**Figura 4.8** Gráficos de $N \times a$ para $N = 240$ fragmentos com $q = 0.3$.

Obtivemos $0.12 \lesssim \beta_l \lesssim 0.13$ e $0.09 \lesssim \beta_f \lesssim 0.1$. Comparando os expoentes da figura 4.8 com os da figura 4.7, percebemos um pequeno aumento, contudo os expoentes mais altos do intervalo de Kadono ainda não são alcançados.

4.3.0.3 Dissipação máxima $q = 0$: Quando o coeficiente de restituição é nulo, ou seja, quando toda a energia cedida pelo projétil é dissipada durante sua propagação, se anulando na borda do disco, obtemos os seguintes gráficos loglog representados na figura 4.9, da distribuição cumulativa de números de fragmento com área maior ou igual a a , N , para cada par de números de fraturas radiais e circulares:

(a) $N_r = 20$, onde $\beta_l \sim 0.307$ e, $\beta_f \sim 0.253$.(b) $N_r = 24$, onde $\beta_l \sim 0.302$ e, $\beta_f \sim 0.251$.(c) $N_r = 30$, onde $\beta_l \sim 0.297$ e, $\beta_f \sim 0.237$.(d) $N_r = 40$, onde $\beta_l \sim 0.281$ e, $\beta_f \sim 0.233$.**Figura 4.9** Gráficos de $N \times a$ para $N = 240$ fragmentos com $q = 0$.

Comparando os expoentes da figura 4.9 com os da figura 4.7 e com os da figura 4.8, percebemos que o aumento dos expoentes β_l e β_f foi maior. Portanto, quanto maior a energia dissipada, maior os expoentes β_l e β_f , implicando em uma maior quantidade de fragmentos de massas pequenas, o que é condizente com a realidade.

Ainda podemos adicionar o fato de que os expoentes para $q = 0$ alcançaram o final do intervalo de expoentes obtidos na literatura ($0.1 \leq \beta_f \leq 0.3$).

Analisando os expoentes para o impacto lateral, β_l , e frontal, β_f , observamos que eles são maiores para o impacto lateral, visto que os fragmentos resultantes serão menores nas simulações, pois utilizamos o mesmo número de fragmentos totais para o semidisco.

4.4 RESULTADOS PARA DIFERENTES NÚMEROS DE FRAGMENTOS:

Nesta seção analisaremos os resultados para diferentes quantidades de fragmentos, onde o número de fraturas radiais e circulares respectivos a cada número de fragmentos se encontram na tabela 4.1. Como queremos comparar os resultados quantitativa e qualitativamente, procuramos manter uma proporção aproximada entre N_r e N_c , $N_r \simeq 3N_c$, variando N . Primeiramente, mostraremos as distribuições cumulativas de áreas obtidas para cada valor de $q = 0, 0.3$ e 1 .

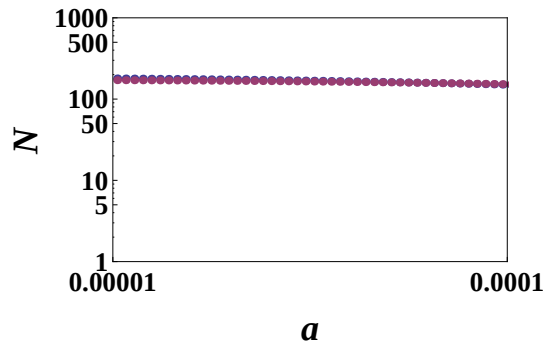
N	N_r	N_c
180	20	8
240	24	9
360	30	11
420	35	11
675	45	14
900	50	17

Tabela 4.1 Número de fraturas radiais e circulares para cada número de fragmentos.

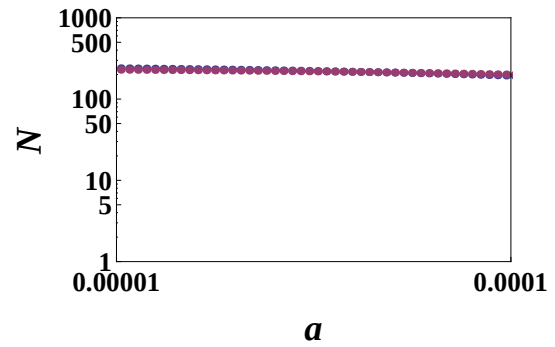
4.4.1 Para $q = 1$:

Utilizando os dados da tabela 4.1, construímos os gráficos da distribuição cumulativa de número de fragmentos com área maior ou igual a a para cada número de fragmentos com $q = 1$, verificamos a existência da lei de potência e calculamos o respectivo expoente β_l e β_f . Lembrando que neste caso a dissipação da energia cedida não está sendo considerada. Os gráficos se encontram na figura 4.10.

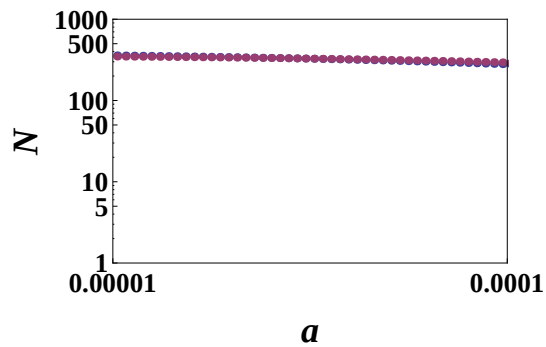
Observamos que quanto maior o número de fragmentos maior será o expoente, seja para o caso lateral ou frontal. Isso é condizente com a realidade, já que existirá uma maior quantidade de fragmentos com massa pequena para um maior número de fragmentos aumentando assim a inclinação da reta. Os expoentes estão em torno de 0.1 e no caso do impacto frontal eles chegam a ser consideravelmente menores 0.049 como já explicado para o caso de 240 fragmentos.



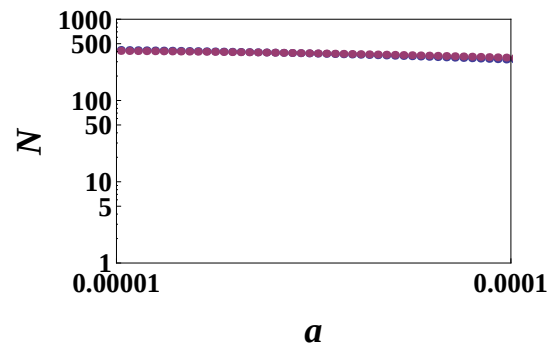
(a) $N_r = 20$, $N_c = 8$, $N = 180$, onde $\beta_l \sim 0.077$ e, $\beta_f \sim 0.049$.



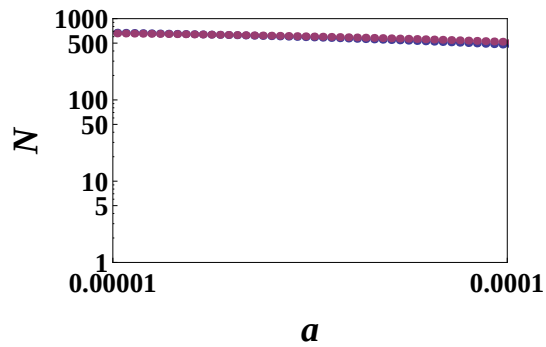
(b) $N_r = 24$, $N_c = 9$, $N = 240$, onde $\beta_l \sim 0.091$ e, $\beta_f \sim 0.058$.



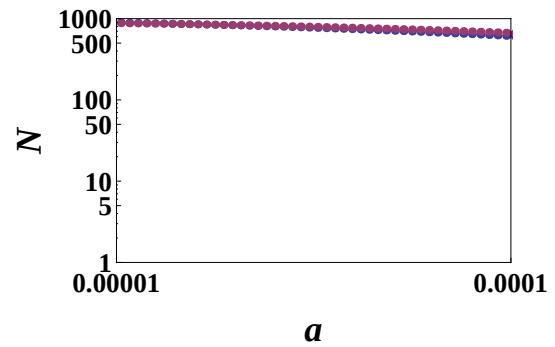
(c) $N_r = 30$, $N_c = 11$, $N = 360$, onde $\beta_l \sim 0.109$ e, $\beta_f \sim 0.072$.



(d) $N_r = 35$, $N_c = 11$, $N = 420$, onde $\beta_l \sim 0.119$ e, $\beta_f \sim 0.082$.



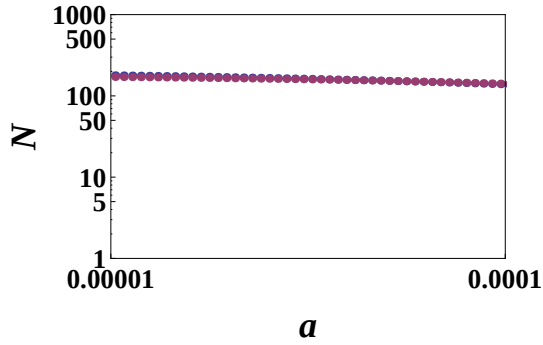
(e) $N_r = 45$, $N_c = 14$, $N = 675$, onde $\beta_l \sim 0.149$ e, $\beta_f \sim 0.103$.



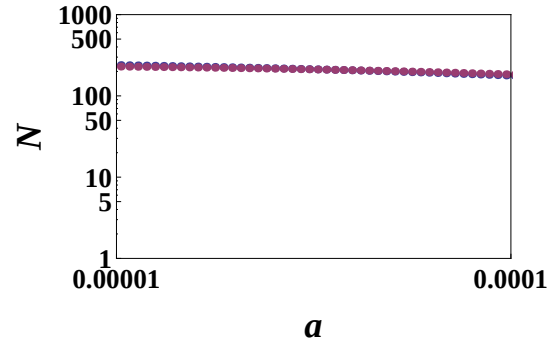
(f) $N_r = 50$, $N_c = 17$, $N = 900$, onde $\beta_l \sim 0.167$ e, $\beta_f \sim 0.118$.

Figura 4.10 Gráficos de $N \times a$ para cada par de fraturas radiais e circulares com $q = 1$.

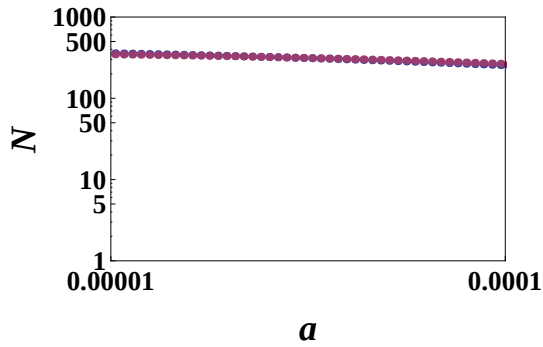
4.4.2 Para $q = 0.3$:



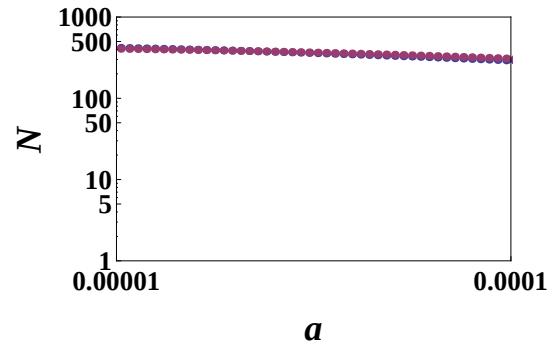
(a) $N_r = 20$, $N_c = 8$, $N = 180$, onde $\beta_l \sim 0.113$ e, $\beta_f \sim 0.081$.



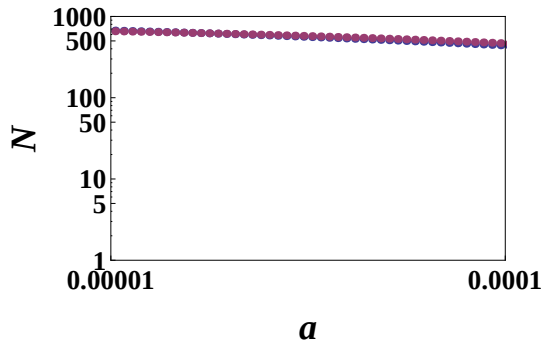
(b) $N_r = 24$, $N_c = 9$, $N = 240$, onde $\beta_l \sim 0.130$ e, $\beta_f \sim 0.096$.



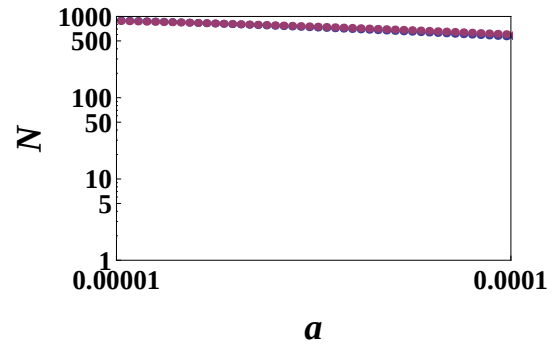
(c) $N_r = 30$, $N_c = 11$, $N = 360$, onde $\beta_l \sim 0.149$ e, $\beta_f \sim 0.116$.



(d) $N_r = 35$, $N_c = 11$, $N = 420$, onde $\beta_l \sim 0.158$ e, $\beta_f \sim 0.121$.



(e) $N_r = 45$, $N_c = 14$, $N = 675$, onde $\beta_l \sim 0.187$ e, $\beta_f \sim 0.149$.



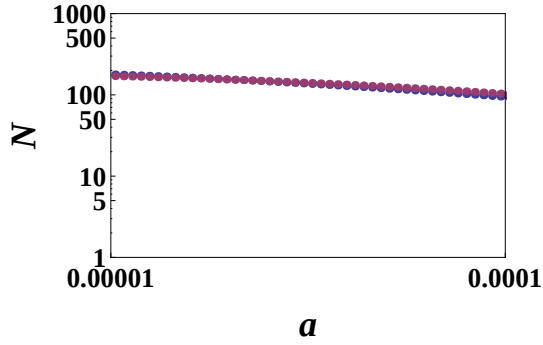
(f) $N_r = 50$, $N_c = 17$, $N = 900$, onde $\beta_l \sim 0.201$ e, $\beta_f \sim 0.165$.

Figura 4.11 Gráficos de $N_a \times a$ para cada par de fraturas radiais e circulares e $q = 0.3$.

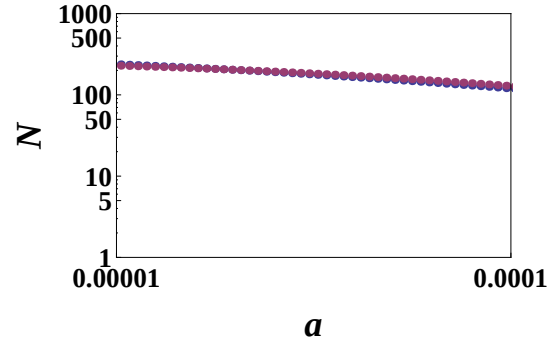
Notamos que houve um pequeno aumento no valor dos expoentes β_l e β_f da mesma maneira que ocorreu para $N = 240$. Este fato mostra como é similar o comportamento dos expoentes β_l e β_f para diferentes quantidades de fragmentos.

4.4.3 Para $q = 0$:

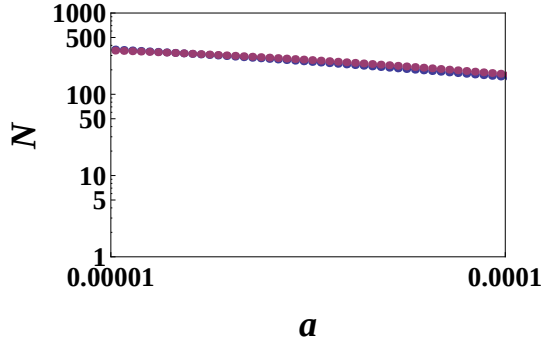
Seguem na figura 4.12 os gráficos:



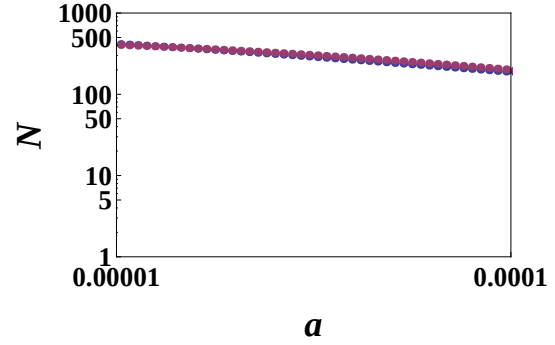
(a) $N_r = 20$, $N_c = 8$, $N = 180$, onde $\beta_l \sim 0.280$ e, $\beta_f \sim 0.212$.



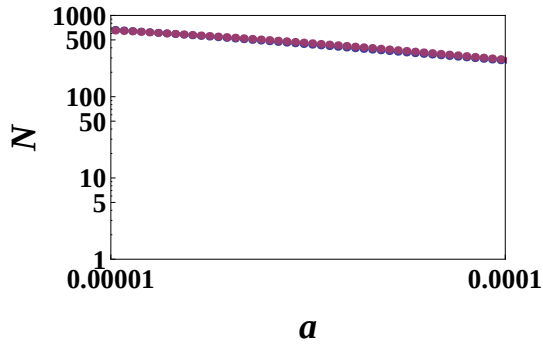
(b) $N_r = 24$, $N_c = 9$, $N = 240$, onde $\beta_l \sim 0.302$ e, $\beta_f \sim 0.251$.



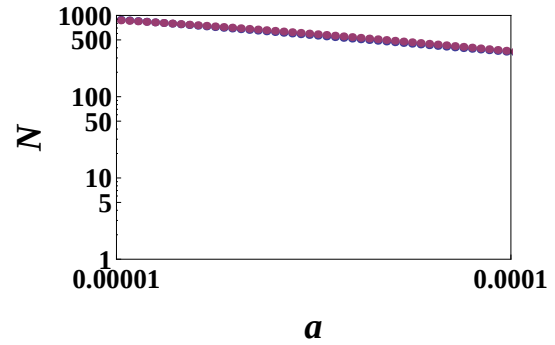
(c) $N_r = 30$, $N_c = 11$, $N = 360$, onde $\beta_l \sim 0.343$ e, $\beta_f \sim 0.292$.



(d) $N_r = 35$, $N_c = 11$, $N = 420$, onde $\beta_l \sim 0.350$ e, $\beta_f \sim 0.308$.



(e) $N_r = 45$, $N_c = 14$, $N = 675$, onde $\beta_l \sim 0.387$ e, $\beta_f \sim 0.364$.



(f) $N_r = 50$, $N_c = 17$, $N = 900$, onde $\beta_l \sim 0.405$ e, $\beta_f \sim 0.387$.

Figura 4.12 Gráficos de $N_a \times a$ para cada par de fraturas radiais e circulares e $q = 0$.

Observamos que os expoentes mais altos foram novamente alcançados com $q = 0$, quando é considerada a dissipação de toda energia cedida pelo projétil. Novamente resultados estão de acordo com os respectivos experimentos [20, 25].

4.4.3.1 Variando o coeficiente de restituição de 0 a 1: Nessa seção analisaremos a variação dos expoentes β_l e β_f com o coeficiente de restituição q . A construção desses gráficos será feita para vários valores de N e N_r de acordo com na tabela 4.2. Os gráficos seguem na figura 4.13.

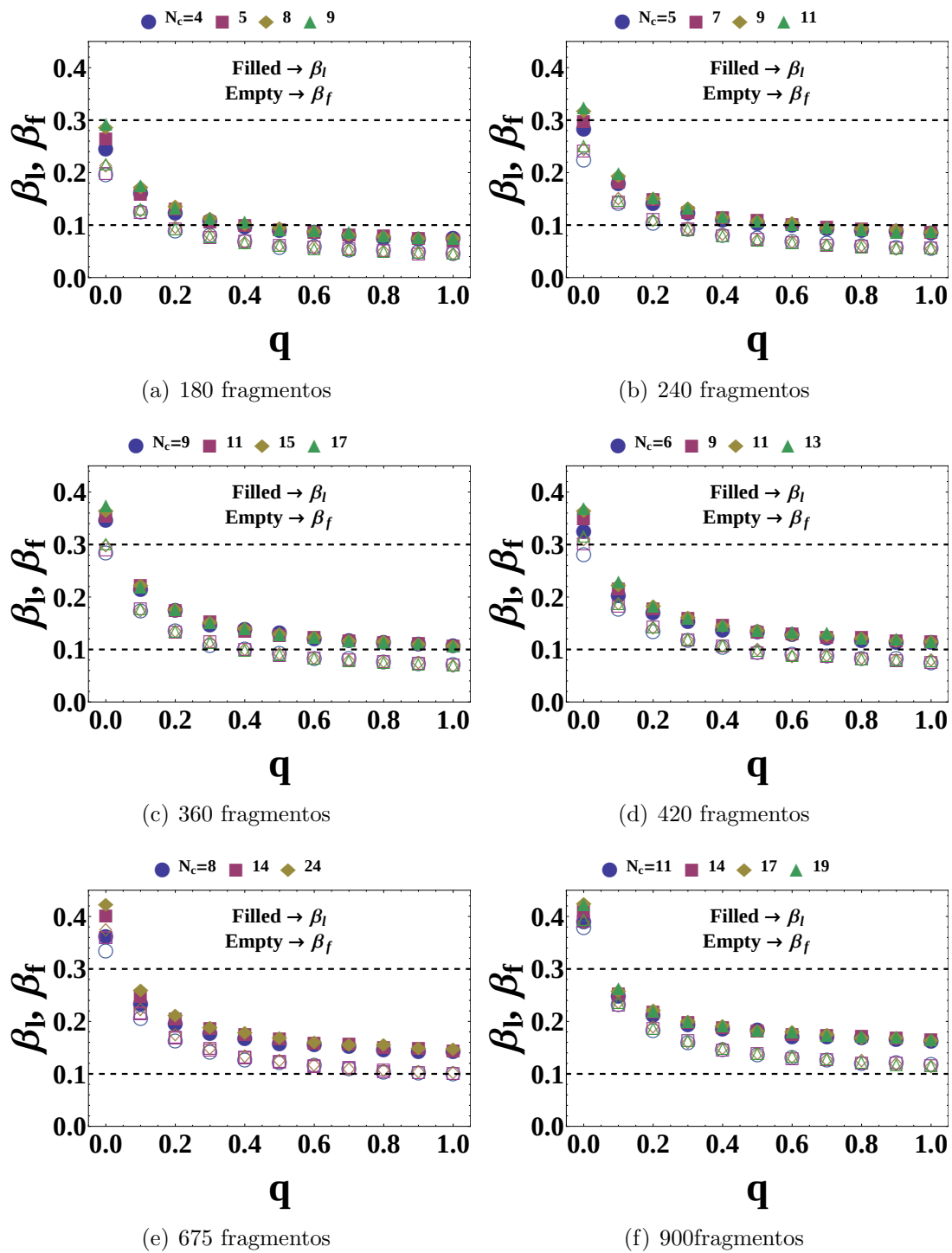


Figura 4.13 Gráficos do expoente $\beta_l, \beta_f \times q$ para diferentes números de fragmentos: 180, 240, 360, 420, 675 e 900, respectivamente, onde as retas tracejadas são os limites dos expoentes obtidos experimentalmente por Kadono.

N	(N_r, N_c)	(N_r, N_c)	(N_r, N_c)	(N_r, N_c)
180	(36,4)	(30,5)	(20,8)	(18,9)
240	(40,5)	(30,7)	(24,9)	(20,11)
360	(36,9)	(30,11)	(24,14)	(20,17)
420	(60,6)	(42,9)	(35,11)	(30,13)
675	(75,9)	(45,14)	(27, 24)	–
900	(75,11)	(60,14)	(50,17)	(45,19)

Tabela 4.2 Número de fraturas radiais e circulares para cada número de fragmentos.

Limite dos expoentes como esperado. Novamente, observamos que quando levamos em consideração a dissipação de energia, $q \neq 1$, os maiores expoentes são alcançados. Podemos concluir que o comportamento dos resultados obtidos para diferentes N são similares tanto qualitativa como quantitativamente.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

No capítulo 2 foram abordados os modelos clássicos de fragmentação para o caso unidimensional e bidimensional, onde obtivemos a distribuição de tamanhos e de áreas, respectivamente.

No capítulo 3 explicamos nosso modelo para um disco fragmentado por um impacto pontual em seu centro, que combinou conceitos estatísticos à vínculos físicos. O modelo se utilizou do conceito da propagação e dissipação de energia para a construção das distribuições de fraturas radiais e circulares. Obtidas as distribuições, analisamos o gráfico da distribuição das fraturas circulares e concluímos que quanto maior a dissipação de energia maior será a probabilidade de termos fraturas com raios menores, ou seja, mais fragmentos com massas pequenas.

No capítulo 4, detalhamos algumas questões importantes do programa e discutimos os principais resultados.

A modelagem que foi criada nessa pesquisa trouxe resultados em grande concordância com a literatura. Assim como atestou a importância da consideração da dissipação da energia cedida pelo projétil na distribuição das fraturas circulares, pois só alcançamos todo o intervalo esperado do expoente β , tal qual concluído por Kadono em [20] se este termo for incluído na distribuição dos círculos.

Ademais, obtivemos que quanto maior a energia perdida, ou seja, menor o q , maior será o valor do expoente β , afinal, teremos mais fragmentos com massas pequenas. Também foi visto que quanto maior o número de fraturas circulares, para uma dada quantidade de fragmentos, maior será o expoente β , pois haverá uma maior quantidade de fragmentos de áreas pequenas. Isto acontece pelo fato da área do fragmento variar mais com o raio r do que com o ângulo θ , tal como vimos na equação (3.1).

Uma das nossas principais conclusões é que a distribuição espacial do aporte de energia em problemas de fragmentação em 2-D desempenha um papel essencial. Em experimentos onde uma placa fina é uniformemente prensada os expoentes associados a pequenas massas obedeceram $0,5 < \beta < 0,7$, enquanto que placas que sofrem impacto pontual levam a $0,1 < \beta < 0,3$ [20].

Acreditamos que esta diferença se deve ao fato de que no primeiro caso a energia é uniformemente cedida a cada porção da placa, enquanto no segundo caso a energia mecânica precisa se propagar por distâncias macroscópicas, tornando o papel da dissipação mais proeminente.

Em decorrência dos resultados obtidos, observamos o quanto este modelo é preciso. Contudo, pretendemos testá-lo ainda mais para então aperfeiçoá-lo ao máximo, tentando sempre manter sua simplicidade.

O nosso próximo passo é:

- **Cálculo da dimensão fractal via box-counting:** No trabalho de [25] eles obtiveram uma relação da dimensão fractal com o expoente β tal qual é mostrada na figura 5 desse artigo, onde eles estudaram a fragmentação de placas finas de vidros causada por um impacto de alta velocidade, ou seja, alta energia. Esperamos que ao calcularmos a dimensão fractal dos discos fragmentados gerados pelo nosso modelo, a relação entre ela e o expoente β esteja de acordo com Kadono e Arakawa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. Grady, *Fragmentation of Shells and Rings: The Legacy of N.F. Mott*. Springer, 2006.
- [2] L. Oddershede, P. Dimon, and J. Bohr, “Self-organized criticality in fragmenting,” *Physical Review Letters*, vol. 71, no. 19, pp. 3107–3110, 1993.
- [3] A. Meibom and I. Balslev, “Composite power laws in shock fragmentation,” *Physical Review Letters*, vol. 76, no. 14, pp. 2492–2494, 1996.
- [4] Z. Tavassoli and G. Rodgers, “Models of fragmentation with composite power laws,” *Physics Letters A*, vol. 256, pp. 272–283, JUNE 1999.
- [5] M. G. Kendall and P. A. P. Moran, *Geometrical Probability*. Charles Griffin, 1963.
- [6] E. S. Ching, Y. Yiu, and K. Lo, “Energy dependence of mass distributions in fragmentation,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 265, no. 1-2, pp. 119–128, 1999.
- [7] <http://p2.trrsf.com/image/fget/cf/619/464/images.terra.com/2013/11/14/meuautomovelparabrisas3.jpg>.
- [8] <http://jornaldopovoparana.com/wp-content/uploads/2013/06/vidro.jpg>.
- [9] A. Bashkirov and A. Vityazev, “Statistical mechanics of fragmentation processes of ice and rock bodies,” *Planetary and Space Science*, vol. 44, no. 9, pp. 909–915, 1996.
- [10] E. Turtle and E. Pierazzo, “Thickness of a european ice shell from impact crater simulations,” *Science*, vol. 294, 2001.
- [11] J. Locke and J. A. Unikowski, “Breaking of flat glass - part 1: Size and distribution of particles from plain glass windows,” *Forensic Science International*, vol. 51, no. 2, pp. 251 – 262, 1991.
- [12] H. Shin, C. Doumas, T. Funkhouser, S. Rusinkiewicz, K. Steiglitz, A. Vlachopoulos, and T. Weyrich, “Analyzing and simulating fracture patterns of theran wall paintings,” *J. Comput. Cult. Herit.*, vol. 5, no. 3, pp. 10:1–10:14, 2012.
- [13] C. Lineau, “Random fracture of a brittle solid,” *Journal of Franklin Institute*, vol. 221, no. 4, pp. 485–494, 1936.

- [14] E. S. Ching, S. Lui, and K.-Q. Xia, “Energy dependence of impact fragmentation of long glass rods,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 287, no. 1-2, pp. 83–90, 2000.
- [15] T. Ishii and M. Matsushita, “Fragmentation of long thin glass rods,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 61, no. 10, pp. 3474–3477, 1992.
- [16] D. Grady, “Particle size statistics in dynamic fragmentation,” *Journal of Applied Physics*, vol. 68, no. 12, pp. 6099–6105, 1990.
- [17] E. Predrag and J. Slobodan, “Fragment mass distribution of naturally fragmenting warheads,” *FME Transactions*, vol. 37, no. 3, pp. 129–135, 2009.
- [18] F. Parisio and L. Dias, “Minimal fragmentation problem,” *Physical Review E*, vol. 84, no. 3, p. 035101, 2011.
- [19] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1972.
- [20] T. Kadono, “Fragment mass distribution of platelike objects,” *Physical Review Letters*, vol. 78, no. 8, pp. 1444–1447, 1997.
- [21] http://wong42.weebly.com/uploads/1/3/5/0/13506137/broken_glass.jpg.
- [22] <http://www.cliqueautomotivo.com.br/imagens/imagens-sobre-rodas/martelo-vidro.gif>.
- [23] N. Vandenberghe, R. Vermorel, and E. Villermaux, “Star-shaped crack pattern of broken windows,” *Physical Review Letters*, vol. 174302, pp. 1–5, April 2013.
- [24] J. Åström and J. Timonen, “Fracture of a brittle membrane,” *Physical Review Letters*, vol. 79, no. 19, pp. 3684–3687, 1997.
- [25] T. Kadono and M. Arakawa, “Crack propagation in thin glass plates caused by high velocity impact,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, pp. 035107–035108, Mar 2002.