



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - CCEN
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Ricardo Batista do Carmo

UM MAPA DISCRETO UNIDIMENSIONAL
PARA O SISTEMA DE RÖSSLER

RECIFE

2015

RICARDO BATISTA DO CARMO

**UM MAPA DISCRETO UNIDIMENSIONAL
PARA O SISTEMA DE RÖSSLER**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Flavio Menezes de Aguiar

Universidade Federal de Pernambuco

RECIFE

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB4-532

C287m Carmo, Ricardo Batista do.
Um mapa discreto unidimensional para o sistema de Rössler / Ricardo
Batista do Carmo. – Recife: O Autor, 2015.
82 f.: fig; tab.

Orientador: Flavio Menezes de Aguiar.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Física, 2015.
Inclui referências e apêndices.

1. Dinâmica não linear. 2. Caos determinístico. I. Aguiar, Flavio
Menezes (Orientador). II. Título.

515.252 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-09

RICARDO BATISTA DO CARMO

UM MAPA DISCRETO UNIDIMENSIONAL PARA O SISTEMA DE RÖSSLER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 02/03/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flavio Menezes de Aguiar
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Roberto Rios Leite
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcos César Santos Oriá
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha Família pelo apoio e compreensão ao longo dessa trajetória. Agradeço ao Prof. Flavio Aguiar por acreditar neste trabalho, pela experiência e sabedoria repassadas a mim. Sou grato aos Amigos Fillipe, Pedro, Tiago, Mário, Wellington, Gabriel, Alyson e Raoni pela ajuda e incentivo, e ao Departamento de Física pelo suporte. Este trabalho foi financiado parcialmente pela CAPES e pelo CNPq.

RESUMO

Centros de periodicidade e caos (CPCs) são pontos que podem aparecer quando projetamos certo expoente de Lyapunov λ em um plano de parâmetros de um sistema dinâmico dissipativo. Espirais de soluções periódicas ($\lambda < 0$) e caóticas ($\lambda > 0$) circulam alternadamente um CPC, como aquele no terço inferior direito na figura da folha de rosto. Nesta dissertação foi desenvolvido inicialmente um programa para o cálculo numérico do espectro de Lyapunov de um sistema dinâmico tridimensional (3D) genérico. Em seguida, CPCs foram procurados e achados nas soluções das equações de Rössler, que possuem três parâmetros, a , b , e c . Em particular, para $b = b_c = 0.17872$, o CPC foi encontrado no plano $a \times c$ com coordenadas $a = a_c = 0.17694$ e $c = c_c = 10.5706$. Fixando $a = a_c$ e tomando c como um parâmetro de controle no intervalo $3 < c < c_c$, uma sequência de dobramentos de período seguida por uma sequência de janelas de adição de período dentro da região caótica. Ajustes por funções simples de mapas de retorno de máximos locais em uma das variáveis dinâmicas do sistema de Rössler permitiram a elaboração de um mapa discreto unidimensional $M_r(x)$ no intervalo unitário, o qual faz a mímica sinóptica da dinâmica do fluxo. A razão de convergência para a sequência de adição de período foi estimada dos ciclos superestáveis do mapa como um valor pouco acima de 1.7, em bom acordo com o que se obtém do sistema de Rössler. Uma fórmula para a medida invariante foi obtida de um ajuste para a distribuição das iteradas em regime ergódico. O correspondente expoente de Lyapunov, 0.597, está em bom acordo com 0.588, valor obtido da média discreta de $\ln|M'_r(x_i)|$.

Palavras-chave: Dinâmica não linear. Caos. Expoente de Lyapunov.

ABSTRACT

A periodicity hub (PH) is the common center of periodic ($\lambda < 0$) and chaotic ($\lambda > 0$) spirals which show up when a characteristic Lyapunov exponent λ of a dissipative dynamical system is projected onto a planar subset of its parameter space. The color plate in a previous page of this document shows one such PH in the lower right third. In this work Lyapunov spectra of three-dimensional dynamical systems were numerically calculated with a standard algorithm which relies on repeated application of the Gram-Schmidt orthonormalization procedure on certain vectors in the phase space. PHs were then searched and found in the Rössler system, which has three parameters, namely, a, b , and c . In particular, for $b = b_h = 0.17872$, a PH was found in the ca -plane with coordinates $a = a_h = 0.17694$ and $c = c_h = 10.5706$. By fixing $a = a_h$ and taking c as a control parameter in the interval $3 < c < c_h$, a *complete* sequence, *i.e.*, a period-doubling sequence followed by a sequence of period-adding windows within the chaotic region, was observed. Fits to tens of return maps for local maxima in one of the dynamical variables allowed the construction of a one-parameter one-dimensional discrete map in the unit interval that synoptically mimics the dynamics of the flow. The convergence ratio for the period-adding sequence was estimated from the superstable cycles as 1.7, in good agreement with the value obtained from the Rössler system. At full ergodicity, a formula for the invariant measure was obtained from a fit to the distribution of the iterates. From that formula, we estimated a Lyapunov exponent of 0.597, which is in reasonable agreement with 0.588, the value obtained straightforwardly from the discrete iterates of the map.

Keywords: Nonlinear dynamics. Chaos. Lyapunov exponent.

Sumário

Introdução	8
1. Mapas discretos e fluxos	11
1.1 Mapas unidimensionais	11
1.2 Fluxos tridimensionais	20
2. Expoentes de Lyapunov	25
2.1 Expoente de Lyapunov em mapas unidimensionais	25
2.2 Espectro de Lyapunov em fluxos tridimensionais	28
2.3 Aplicação: O sistema de Rössler	34
2.3.1 Diagrama de fases periódicas e caóticas	35
2.3.2 A constante δ de Feigenbaum	39
2.3.3 Convergência da sequência de adição de período	41
3. O mapa	45
3.1 Tentando e errando	45
3.2 Uma proposta	49
3.2.1 Força bruta	53
3.2.2 Seguindo a intuição	59
3.2.3 A opção pelo fim	61
3.2.4 Uma medida conciliatória	67
Conclusões e perspectivas	70
Referências	72
Apêndice A Expoente de Lyapunov e medida invariante em mapas discretos unidimensionais	74
Apêndice B Parâmetros do mapa $M_r(x)$	79

Introdução

A década de 1980 foi um período caracterizado por um crescimento explosivo na pesquisa em dinâmica não linear, tanto teórica quanto experimental. Conceitos universais foram verificados em sistemas diversos como fluidos, reações químicas, circuitos eletrônicos, lasers, ondas de spin, avançando em outras áreas do conhecimento como biologia e economia [1]. Um ator de destaque nesta densa e fascinante história tem sido o mapa logístico $L_r(x) = rx(1 - x)$, onde r é um parâmetro de controle e $x \in [0,1]$ e $r \in (0,4]$. Assim, $L_r(x)$ é uma parábola com a concavidade para baixo, com raízes em $x = 0$ e $x = 1$, e máximo local $L_{máx} = r/4$ localizado em $x = 0.5$, independentemente de r . Várias propriedades das iterações

$$x_{n+1} = L_r(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{I.1})$$

foram caracterizadas naquele período [2, 3], e tem sido de interesse frequentemente renovado [4]. Uma figura de mérito deste e, de fato, qualquer mapa é o estado estacionário estabelecido a partir de uma semente ou condição inicial x_0 . É fácil verificar que

$$x_A^* = 0 \quad \text{e} \quad x_B^* = 1 - \frac{1}{r} \quad (\text{I.2})$$

são os pontos fixos (PFs) de (I.1), o primeiro para todo r , o segundo para $1 < r \leq 4$. Se esses PFs fossem estáveis para todo r , o mapa logístico seria um mapa chato,

sem maior interesse. A não linearidade quebra esta monotonia. Uma revisão mais detalhada de mapas e fluxos é feita no **Capítulo 1** desta dissertação. Aqui, a título de comparação, apresentamos na Fig. 0.1 o estado estacionário de (I.1) como uma função de r , ou seja, seu diagrama de bifurcação, para trajetórias típicas. Claramente, $x_A^* = 0$ perde sua estabilidade em $r = 1$ e x_B^* perde a sua em $r = 3$. A partir daí ocorre uma sequência de bifurcações de dobramentos de período que se acumulam em $r = r_\infty = 3.5699456\dots$. A região $r_\infty < r \leq 4$ é a chamada região caótica de (I.1). Ela é permeada de janelas periódicas, com destaque para aquela de período-3 (P3). Finalmente, todo o intervalo $[0,1]$ é coberto pelas iterações quando $r = 4$.

A questão endereçada nesta dissertação foi a seguinte: Haveria um mapa unidimensional no intervalo unitário com regiões qualitativamente similares àquelas do mapa logístico, mas que, dentro de alguma escala, janelas de P4, P5, P6, ... PN, P(N + 1), ... fossem exibidas ordenadamente e com o destaque daquela de P3, até acumularem em algum ponto ?

Esta questão foi motivada pelo comportamento do sistema dinâmico de Rössler [5], cujas equações são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{I.3}$$

onde a , b e c são parâmetros. (Há aqui um risco da variável $x(t)$ ser confundida com a variável independente x dos mapas. Entendemos que o contexto é suficientemente claro para que esta confusão não ocorra.) Este é um dos fluxos mais simples a exibir propriedades caóticas, associadas a oscilações aperiódicas como as da Fig. 0.2. Note

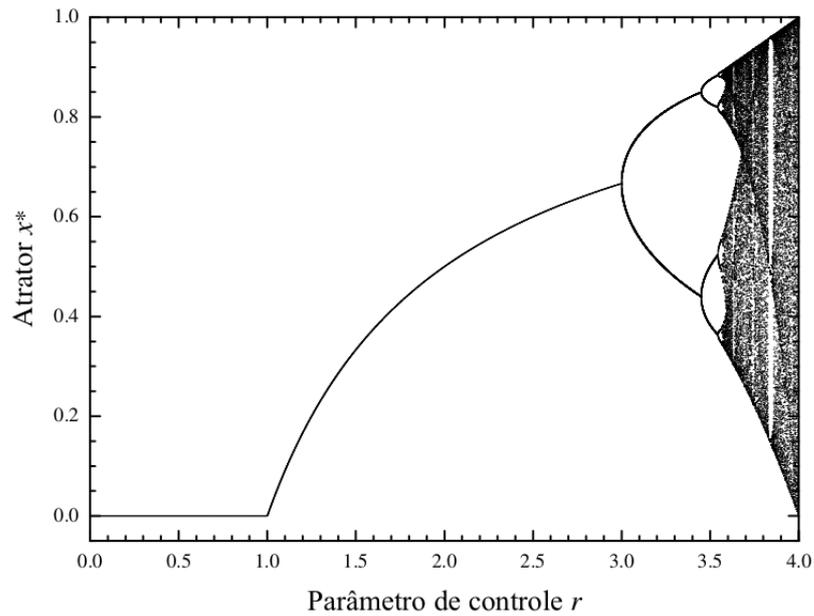


Figura 0.1: Diagrama de bifurcação do mapa logístico $L_r(x)$.

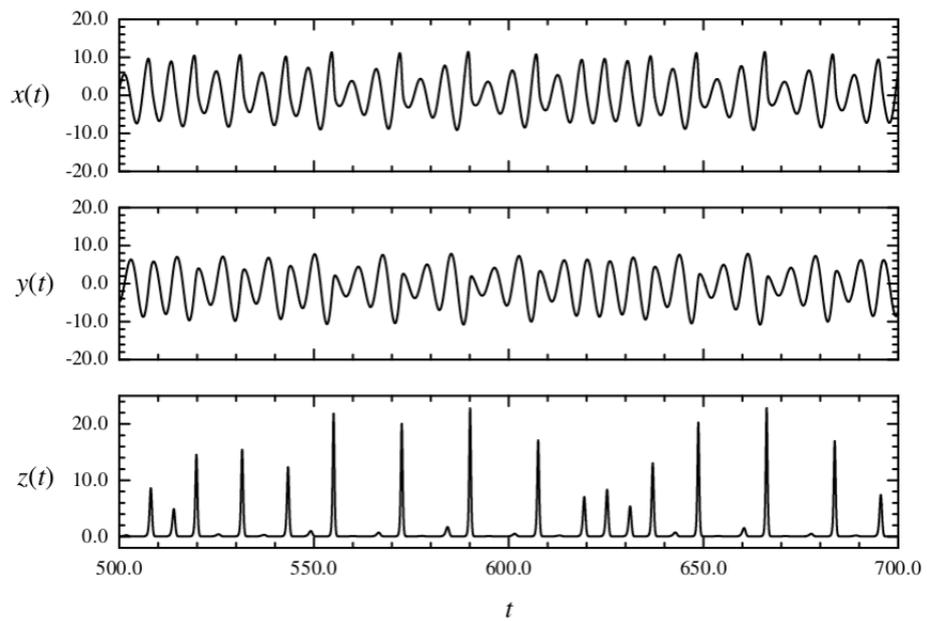


Figura 0.2: Solução numérica do sistema de Rössler para $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 5.7$.

que as variáveis $x(t)$ e $y(t)$ oscilam coerentemente em torno de zero, enquanto que a variável $z(t)$ assume valores não negativos na forma de picos agudos. Vários resultados publicados na literatura exibem a sequência de bifurcações de dobramentos de período, uma região caótica com destaque para a janela de P3, mas, de modo geral, um comportamento complexo e variado em valores maiores do parâmetro de controle c , para a e b fixos. O diagrama de fases de Lyapunov da seção 2.3.1 dessa dissertação justifica tal comportamento diverso. O centro de periodicidade e caos no terço inferior direito da mesma figura foi observado com a técnica descrita aqui no **Capítulo 2**, com os valores $a = 0.17694$, $b = 0.17872$ e $c = 10.5706$. Esses valores de a e b garantem, em princípio, uma sequência completa como descrita na questão acima, se tomarmos $c \leq 10.5706$ como parâmetro de controle. O resultado para máximos locais da série temporal de $x(t)$, obtidos a partir da integração numérica de (I.3), está no diagrama de bifurcação da Fig. 0.3.

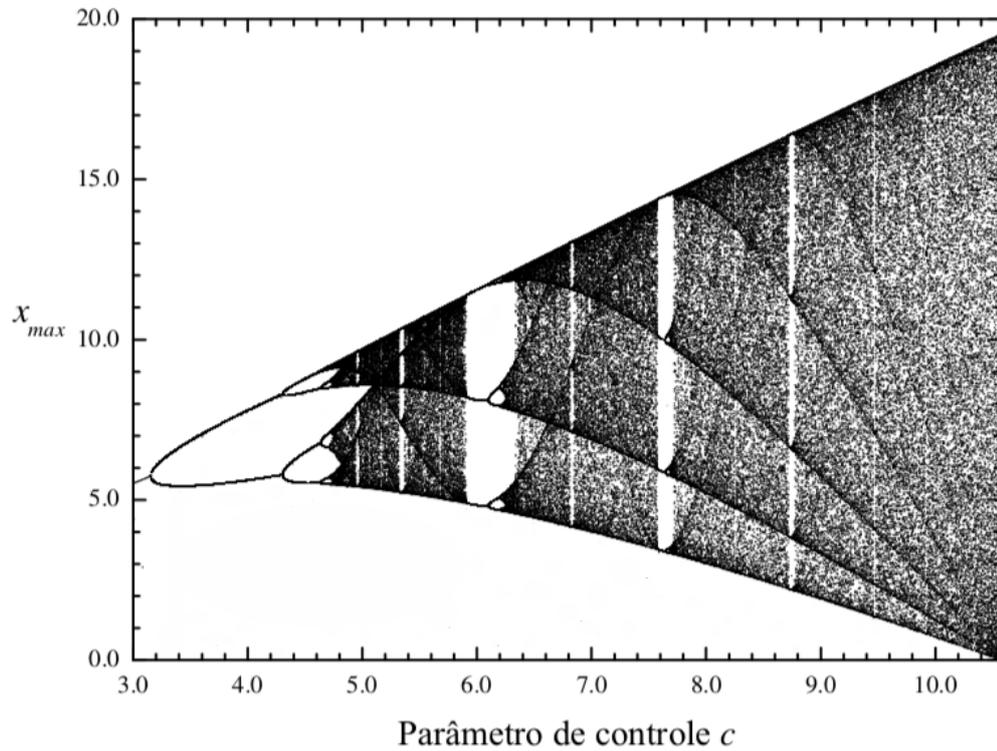


Figura 0.3: Diagrama de bifurcação de máximos locais da variável $x(t)$ do sistema de Rössler para $a = 0.17694$ e $b = 0.17872$, exibindo uma sequência completa de dobramentos e de adição de período.

O mapa de retorno dos máximos locais em $x(t)$, para qualquer c , exibe o perfil de uma função que, como o mapa logístico, possui um único máximo e dois pontos fixos. Diferentemente do mapa logístico, este máximo se desloca para a direita com o aumento do parâmetro de controle. Ademais, a função é assimétrica: seu crescimento à esquerda do máximo é mais lento que seu decaimento à direita. A etapa seguinte deste trabalho foi o de ajustar mapas de retorno para dezenas de valores de c , com a esperança de poder descrever toda a dinâmica desta sequência através de um mapa unidimensional $M_r(x)$. O processo de construção deste mapa está descrito no **Capítulo 3**, cujo resultado mais próximo do desejado está ilustrado abaixo no diagrama de bifurcação da Fig. 0.4.

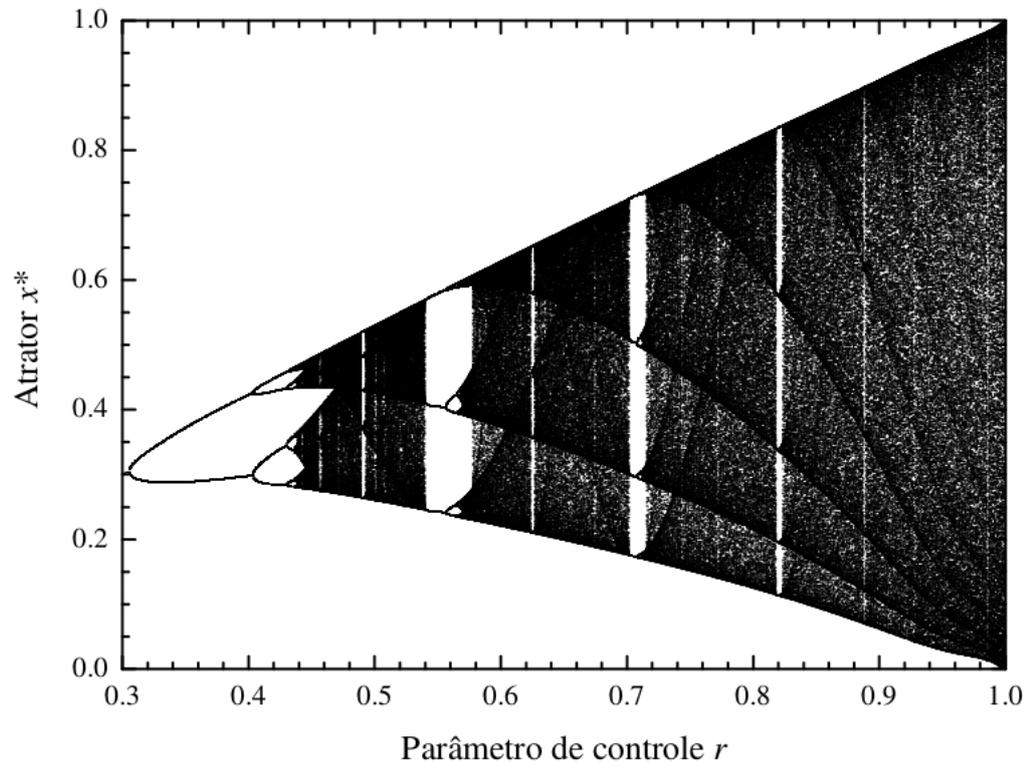


Figura 0.4: Diagrama de bifurcação do mapa $M_r(x)$ proposto nesta dissertação (Cap. 3).

A dissertação apresenta, em seguida, uma seção de Conclusões e Perspectivas.

O Apêndice A faz uma revisão do conceito de medida invariante em mapas unidimensionais. O Apêndice B apresenta detalhes de funções que compõem o mapa $M_r(x)$.

Em toda a dissertação adotamos a notação matemática quase universal no que se refere à separação da parte decimal de um número. Ou seja, diferentemente de nosso vernáculo, usaremos ponto para este fim, não vírgula.

Capítulo 1

Mapas discretos e fluxos

Neste capítulo revemos conceitos da teoria de sistemas dinâmicos dissipativos que são relevantes para a abordagem do nosso problema.

1.1 Mapas unidimensionais

Sistemas dinâmicos nos quais a variável tempo é tomada como discreta são conhecidos como equações de diferenças finitas, comumente chamadas de mapas discretos. Esses mapas podem ter dimensão N , mas neste trabalho estamos interessados em mapas unidimensionais (1D). Trataremos mapas 1D da forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.1)$$

onde x_n pertence a um dado intervalo nos números reais e $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é o tempo discreto. Os mapas iterados seguem a seguinte regra: dado um valor inicial x_0 , calculamos $x_1 = f(x_0)$, a partir de x_1 , calculamos $x_2 = f(x_1)$, e assim sucessivamente. Os valores obtidos $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ descrevem uma trajetória do sistema dinâmico.

Para demonstrar o quão complicada pode ser a dinâmica de um simples mapa não linear, vamos tomar o mapa logístico (I.1) como exemplo. A Fig. 1.1 mostra o gráfico

de $L_r(x)$ para um r em $(0,4]$, que é uma parábola com concavidade para baixo, raízes em $x = 0$ e $x = 1$, o valor máximo $r/4$ em $x = 0.5$. O aumento do parâmetro de controle r puxa o máximo para cima. Em $r = 4$, o valor máximo é 1 e o mapa varre todo intervalo unitário.

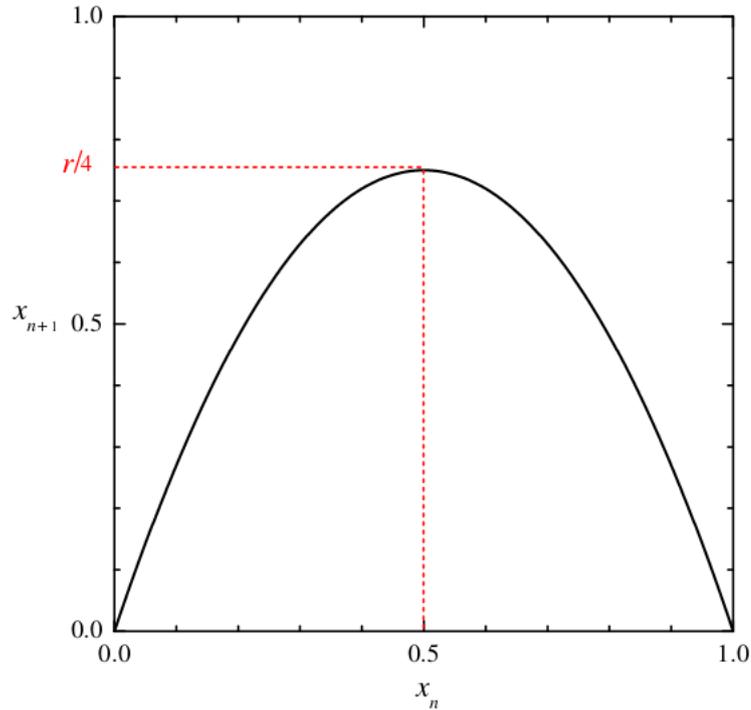


Figura 1.1: Gráfico do mapa logístico.

Como é bem conhecido, o mapa logístico apresenta comportamento caótico após uma série de dobramentos de período. No intervalo $0 < r < 1$, o ponto fixo $x_A^* = 0$ é absoluto e estável. A partir de $r = 1$, x_A^* torna-se instável e o ponto fixo x_B^* surge, permanecendo estável até $r = 3$. A Fig. 1.2 (a) mostra o gráfico x_n em função de n , por exemplo, para $r = 2.9$ e $x_0 = 0.2$. Vemos que após um transiente $\Delta n \sim 50$, as iterações que convergem para o PF $x_B^* = 1 - (2.9)^{-1} \sim 0.655\dots$ A Fig. 1.2 (b) mostra o correspondente mapa de retorno para o estado estacionário em x_B^* .

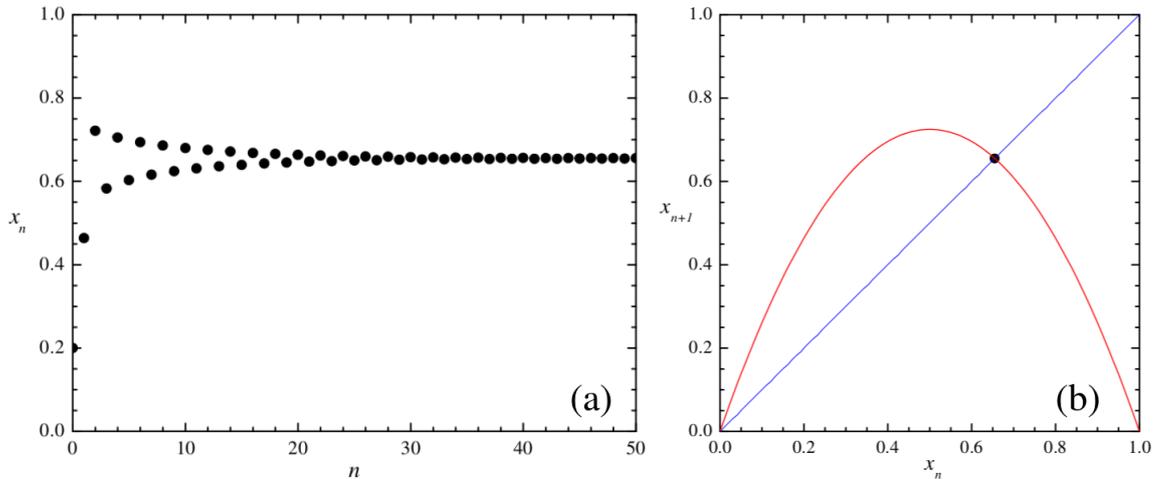


Figura 1.2: (a) Série temporal do mapa logístico para $r = 2.9$ e $x_0 = 0.2$. (b) Mapa de retorno para o estado estacionário de (a).

É possível mostrar [6] que para $3 < r < \sqrt{6} \simeq 3.449\dots$ x_A^* e x_B^* são instáveis, mas o sistema é atraído para dois pontos que são PFs da composta $L_r(L_r(x))$. Este é o chamado ciclo-2 ou período-2 (P2). A partir daqui, a análise é tipicamente numérica. Para $3.449\dots < r < 3.54409\dots$ temos P4, para $3.54409\dots < r < 3.5644\dots$ temos P8, para $3.5644\dots < r < 3.568759\dots$ temos P16, e assim por diante, até que esses dobramentos de período acumulem em $r = r_\infty = 3.5699456\dots$. Para valores maiores do que r_∞ , o sistema se comporta de forma aperiódica. A sequência não se estabelece nem em um ponto fixo, nem em uma órbita periódica. Estamos diante de uma versão do caos discreta no tempo. A Fig. 1.3 repete os diagramas da Fig 1.2 para um ciclo-2, a Fig. 1.4 para um ciclo-4 e a Fig. 1.5 para um estado estacionário caótico.

Para se ter uma visão geral do comportamento do sistema, é muito útil a construção de um diagrama de bifurcação, uma figura que mostra os pontos nos atratores em função dos respectivos valores de r . Na Fig. 1.6 mostramos o diagrama de bifurcação, obtido com simulações de 10^7 iterações para cada valor de r , onde foram

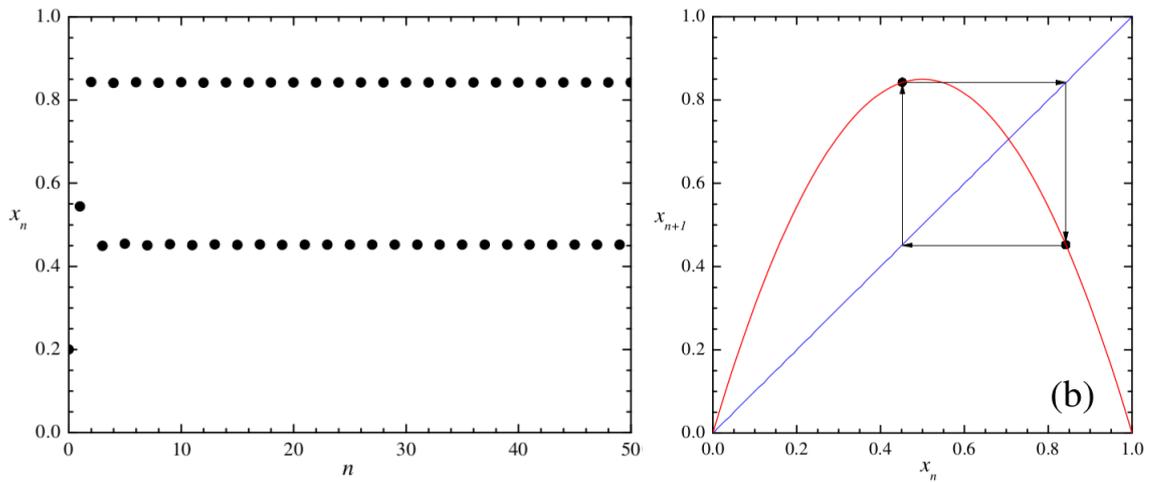


Figura 1.3: (a) Série temporal do mapa logístico para $r = 3.4$ e $x_0 = 0.2$. (b) Mapa de retorno para o estado estacionário de (a).

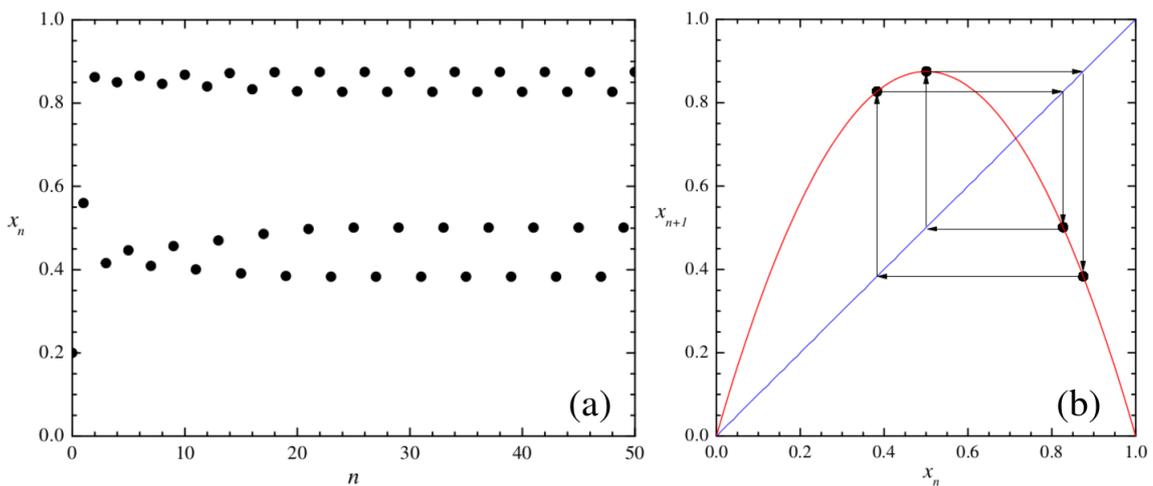


Figura 1.4: (a) Série temporal do mapa logístico para $r = 3.5$ e $x_0 = 0.2$. (b) Mapa de retorno para o estado estacionário de (a).

eliminados os 10^6 primeiros pontos. A Fig. 1.6 ilustra o resultado para 1100 diferentes valores de r entre 2.9 e 4.0. Do diagrama de bifurcação vemos que há uma mistura de regiões estáveis e regiões caóticas para $r_\infty < r < 4$, com destaque para a janela periódica de P3, que está próxima a $r = 3.83$.

A densidade de probabilidade de que um ponto x seja visitado em um tempo

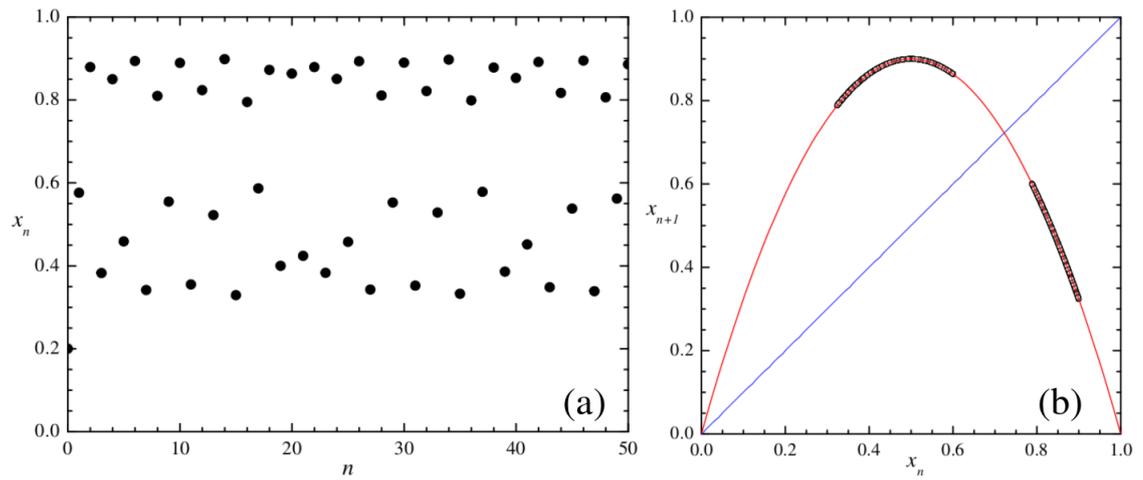


Figura 1.5: (a) Série temporal do mapa logístico para $r = 3.6$ e $x_0 = 0.2$. (b) Mapa de retorno para o estado estacionário caótico de (a).

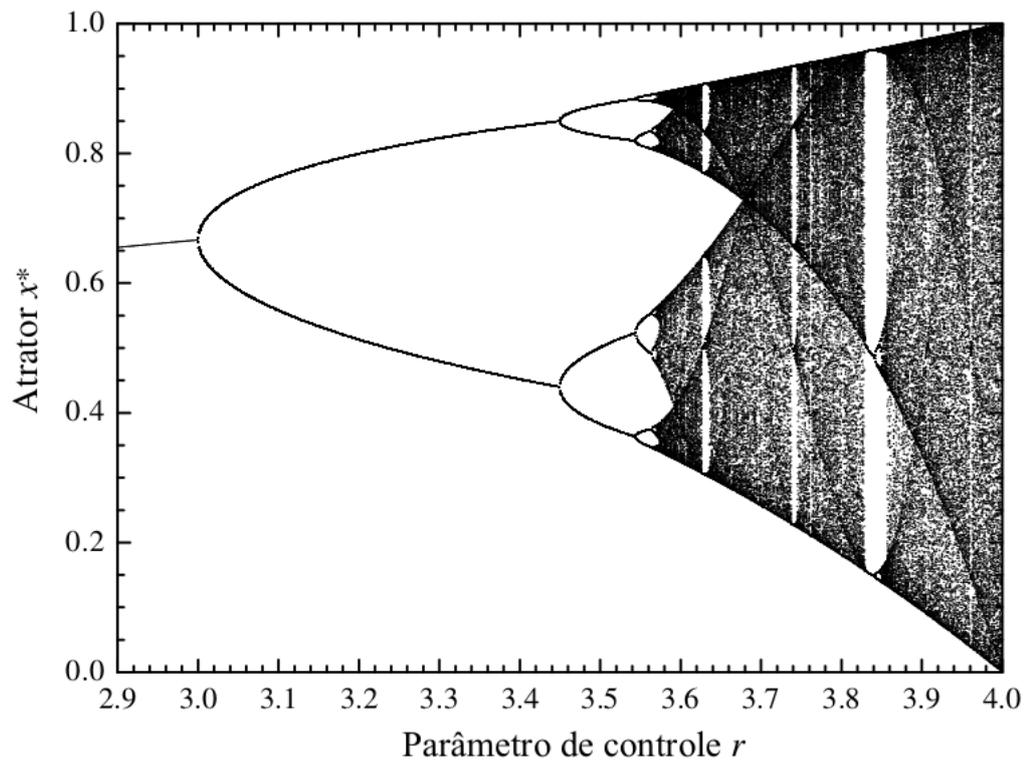


Figura 1.6: Diagrama de bifurcação para o mapa logístico.

infinitamente longo através das iterações de um mapa é conhecido como medida. Para sistemas ergódicos, esta medida não depende do tempo e é chamada de medida invariante $\mu(x)$. O histograma da Fig. 1.7 mostra o resultado de um experimento que realizamos com 10^6 de iterações no mapa logístico com $r = 4$. É neste valor de r em que $L_r(x_n)$ é ergódico. O resultado exibido na Fig. 1.7 indica que neste caso $\mu(x)$ é uma curva simétrica em que os pontos mais visitados são os extremos do intervalo, com média 0.5. No apêndice A é demonstrado analiticamente que a medida invariante para o mapa logístico em $r = 4$ é dada por

$$\mu_L(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}. \quad (1.2)$$

Esta curva é representada por uma linha sólida na Fig. 1.7. Observamos que nosso cálculo numérico está em bom acordo com a equação (1.2). A distribuição $\mu(x)$ é normalizada, ou seja,

$$\int_0^1 \mu(x)dx = 1. \quad (1.3)$$

O valor médio de uma grandeza $g(x)$ é dado por

$$\bar{g} = \int_0^1 g(x)\mu(x)dx. \quad (1.4)$$

Para $g(x) = x$, em particular, (1.2) e (1.4) confirmam que $\bar{x} = 0.5$. A média obtida em nosso cálculo numérico para 1 milhão de pontos foi $\bar{x} = 0.50019$, a qual está de acordo com o resultado obtido analiticamente.

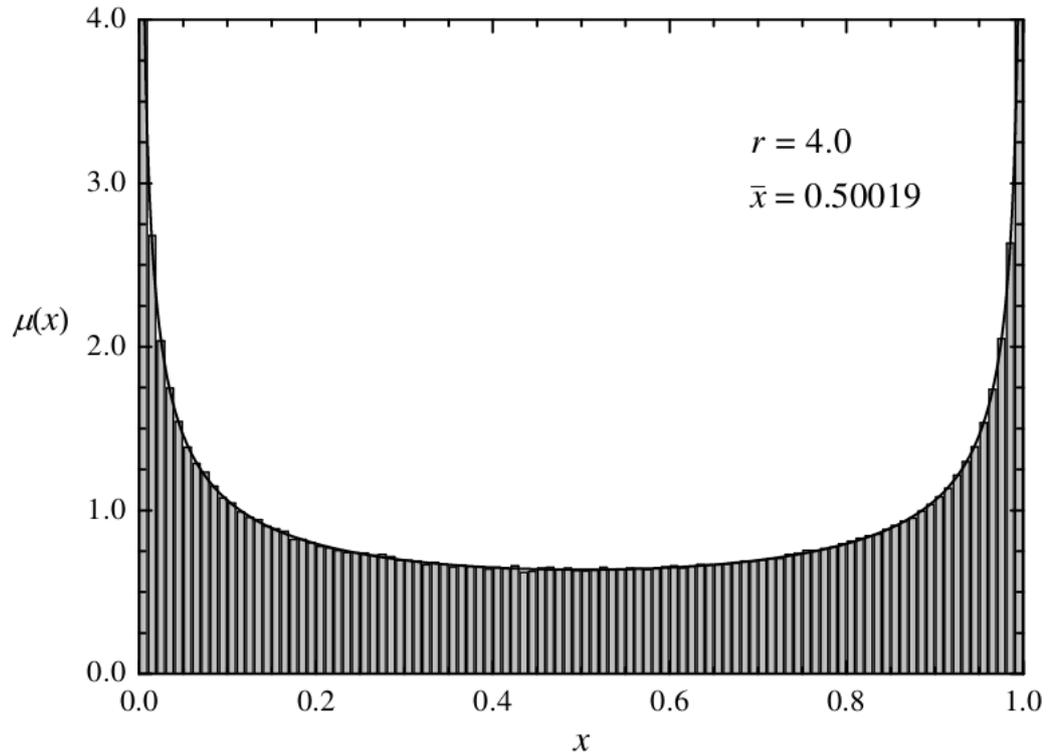


Figura 1.7: Distribuição de probabilidades para o mapa logístico em $r = 4$. Histograma: Experimento numérico, para o qual $\bar{x} = 0.50019$. Linha sólida: Gráfico da Eq. (1.2), a partir da qual obtemos o valor exato $\bar{x} = 0.5$.

1.2 Fluxos tridimensionais

Na primeira parte deste capítulo comentamos sobre a aplicabilidade dos mapas unidimensionais para modelar sistemas dinâmicos discretos e discutimos o fenômeno do dobramento de período com rota para o caos. Nesta seção usaremos equações que descrevem a evolução de sistemas dinâmicos contínuos, ou seja, dependem do tempo t continuamente. As equações que descrevem esses sistemas são as equações diferenciais, as quais são usadas amplamente na ciência e na engenharia. A trajetória do sistema evolui no espaço de fases, o qual é representado pelas variáveis x_i e \dot{x}_i , onde $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$. Um sistema autônomo geral de equações diferenciais de primeira ordem de

dimensão n é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{1.5}$$

onde as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e funções f_1, f_2, \dots, f_n são definidas a partir do problema em questão. Aqui estamos interessados em funções f_i não lineares. As propriedades das equações diferenciais não lineares podem diferir fortemente das lineares. Geralmente as equações diferenciais não lineares são mais difíceis de solucionar do que as lineares, requerendo métodos aproximativos ou numéricos para análise.

Nesta dissertação, estamos interessados particularmente no sistema de Rössler, o qual foi introduzido na década de 1970 como um protótipo simples para o caos em sistemas contínuos. O conjunto de equações diferenciais que descreve o sistema dinâmico de Rössler é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Como ilustração, mostraremos a seguir resultados de integração numérica desse sistema com os parâmetros originais, $a = b = 0.2$ e $c =$ parâmetro de controle. Para isso, utilizamos código de Runge-Kutta de quarta ordem com condições iniciais $x_0 = 1.0$, $y_0 = z_0 = 0$. Na Fig 1.8 (a) com $c = 2.0$ temos a curva x vs t , numa faixa de tempo pós transiente. Na Fig. 1.8 (b), usando os mesmos parâmetros e o mesmo intervalo de tempo, mostramos a projeção da trajetória no plano $y \times x$. Vemos que x evolui periodicamente, com período T , digamos.

Nas figuras 1.9, 1.10 e 1.11, mostramos resultados obtidos com $c = 3.0, 4.0$ e 5.0 , respectivamente. Essencialmente, observamos o dobramento de período nas curvas x

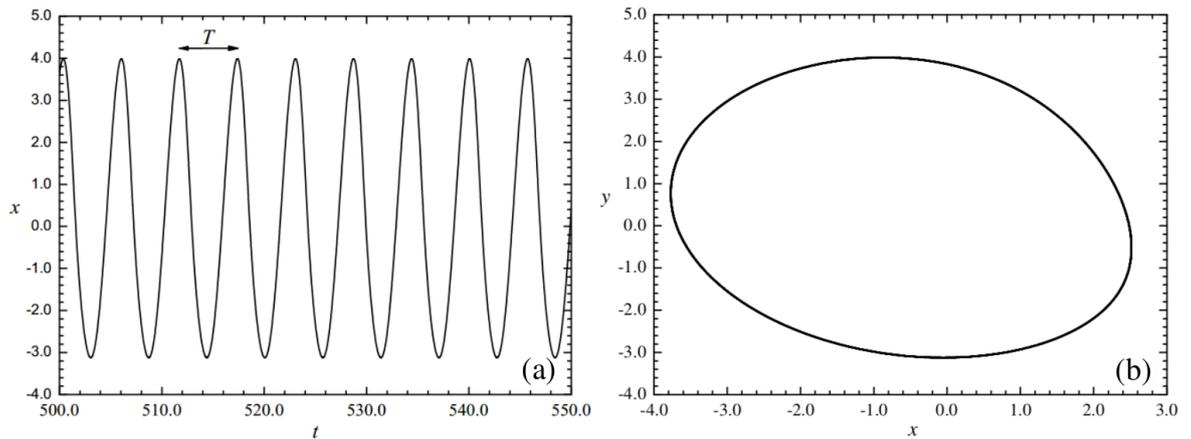


Figura 1.8: (a) Resultado numérico para $x(t)$ do sistema de Rössler com $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 2.0$. (b) Ciclo limite correspondente no plano $y \times x$.

vs t com o aumento de c de 2.0 para 3.0 e de 3.0 para 4.0. Quando $c = 5.0$, estamos no regime caótico. A Fig. 1.11 (a) mostra o comportamento aperiódico em x vs t , e a Fig. 1.11 (b) exhibe o atrator estranho no plano $y \times x$ após infinitos dobramentos de período. Para mostrar a evolução dos dobramentos de período como rota para

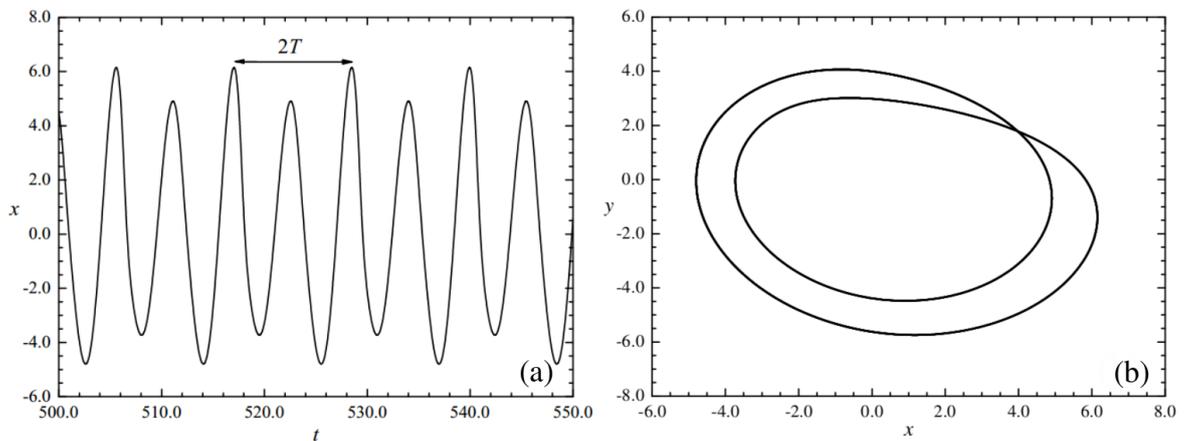


Figura 1.9: (a) Resultado numérico para $x(t)$ do sistema de Rössler com $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 3.0$. (b) Ciclo limite correspondente no plano $y \times x$.

o caos, vamos produzir um diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler com $a = b = 0.2$ fixos e c variando de 2 a 11. Na simulação são armazenados os valores dos

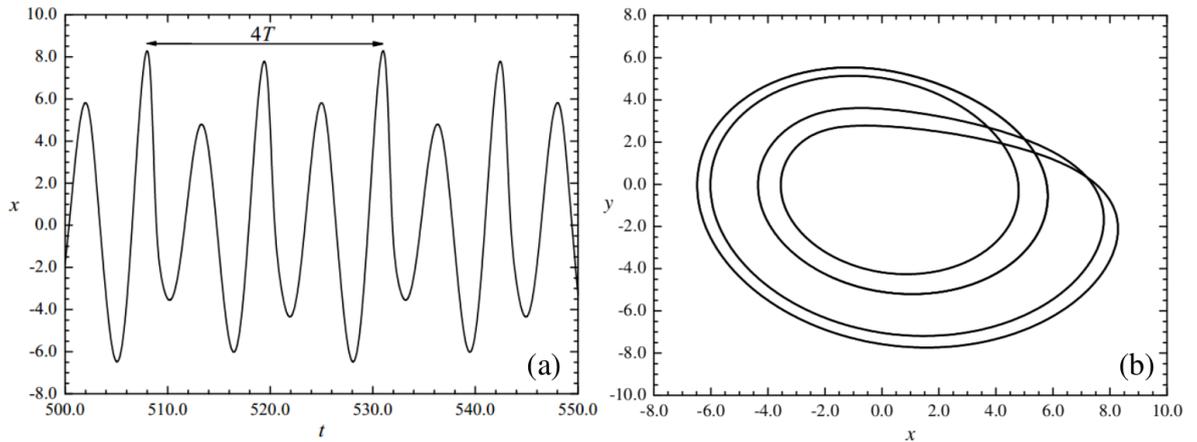


Figura 1.10: (a) Resultado numérico para $x(t)$ do sistema de Rössler com $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 4.0$. (b) Ciclo limite correspondente no plano $y \times x$.

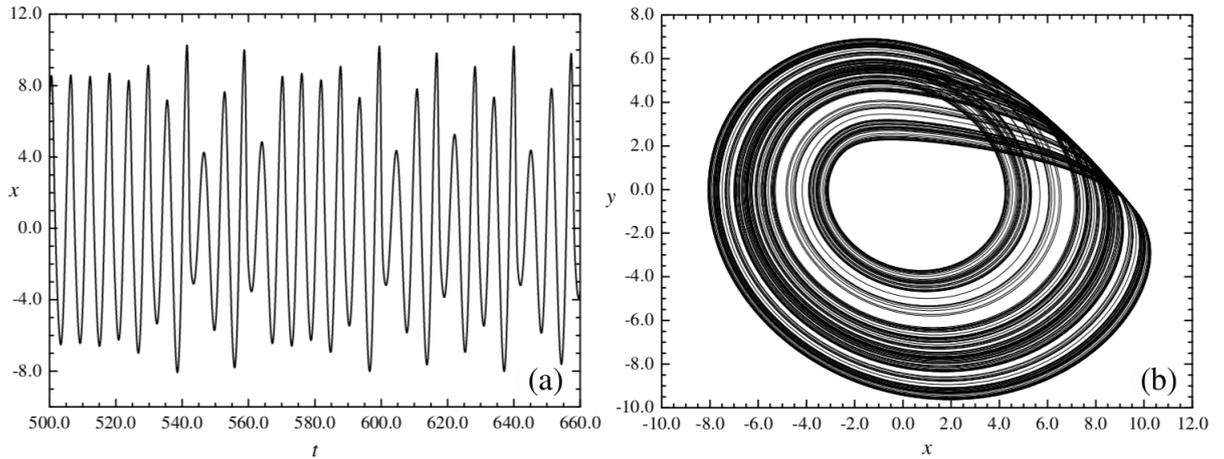


Figura 1.11: (a) Resultado numérico para $x(t)$ do sistema de Rössler com $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 5.0$. (b) Atrator estranho correspondente no plano $y \times x$.

máximos locais da curva $x(t)$ pós transiente, e em seguida exibimos este número como função de c . O resultado é mostrado em Fig. 1. 12. Observamos que, como no mapa logístico, temos uma cascata de dobramentos de período que acumulam próximo a $c = 4.2$, seguida de um regime caótico com indicação para uma possível sequência de adição de período nas janelas dentro do caos. Para $a = b = 0.2$, contudo, esta sequência parece incompleta, no sentido de que há uma aparente limitação para o

número de janelas com período n crescente.

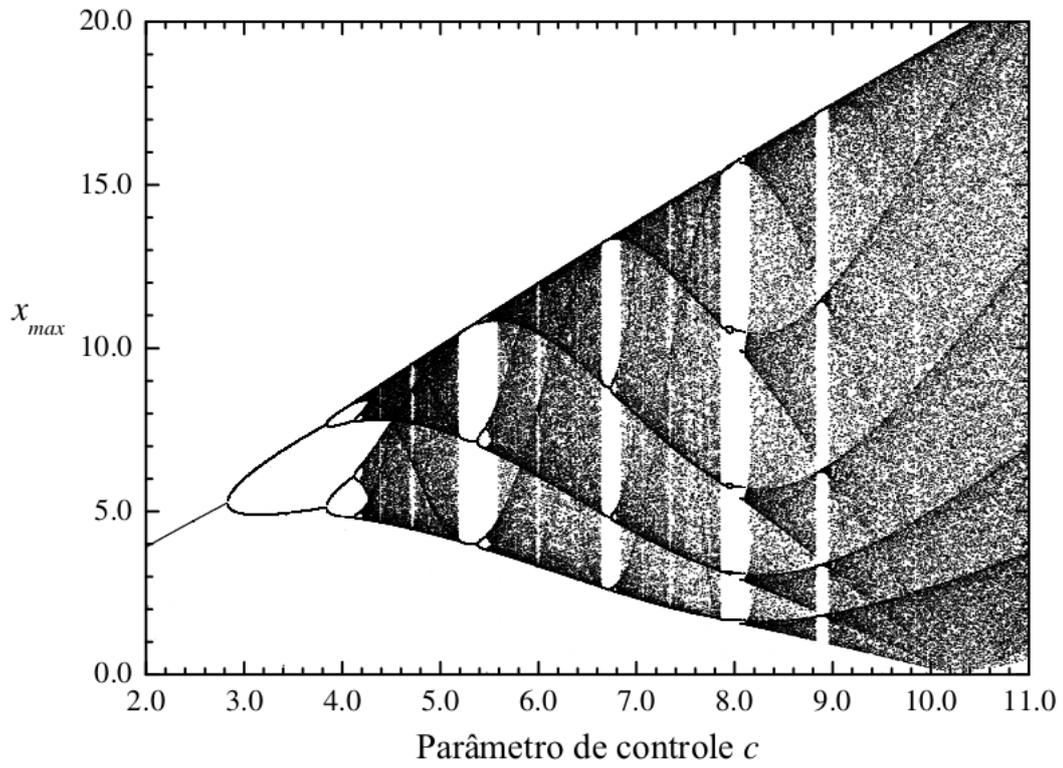


Figura 1.12: Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler com $a = b = 0.2$.

Capítulo 2

Expoentes de Lyapunov

Qualitativamente, um sistema caótico deve ser aperiódico e ter forte dependência com as condições iniciais. Quantitativamente, a teoria de sistemas dinâmicos clássicos fornece parâmetros que caracterizam o caos. O mais conhecido deles é o expoente de Lyapunov. Em essência, ele informa sobre a aproximação ou divergência de duas trajetórias inicialmente vizinhas. Neste capítulo, tratamos os expoentes de Lyapunov em mapas 1D e em fluxos 3D.

2.1 Expoente de Lyapunov em mapas unidimensionais

Iremos calcular o expoente de Lyapunov partindo de 2 trajetórias extremamente próximas, estudando a forma como elas se separam ou se aproximam. Então, consideremos x_0 como sendo um estado inicial de uma trajetória, e uma outra trajetória muito próxima com condição inicial $x_0 + \delta_0$. Definimos δ_n como sendo a separação entre as trajetórias após n iterações. Se as duas órbitas forem caóticas, a distância entre elas cresce exponencialmente com o tempo discreto n . De outro modo, as órbitas

se aproximam. Quantitativamente, temos que

$$|\delta_n| \approx |\delta_0| \exp(n\lambda), \quad (2.1)$$

onde λ é o expoente de Lyapunov. Tomando o logaritmo em ambos os lados, obtemos

$$\ln |\delta_n| \approx \ln |\delta_0| + n\lambda \quad \Rightarrow \quad (2.2)$$

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right|. \quad (2.3)$$

Aqui, temos que

$$|\delta_n| = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0). \quad (2.4)$$

Se tomarmos o limite de δ_0 tendendo a 0 e aplicarmos a equação (2.4) à equação (2.3), obtemos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| \quad (2.5)$$

Usando a regra da cadeia, podemos expandir $(f^n)'(x_0)$ na forma

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i), \quad (2.6)$$

de modo que

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.7)$$

Tomando $n \rightarrow \infty$, definimos formalmente o expoente de Lyapunov como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.8)$$

Um expoente de Lyapunov positivo remete ao comportamento caótico. Para ciclos estáveis, λ é negativo. Quando $\lambda \rightarrow -\infty$, dizemos que o ciclo é superestável. Mostraremos a aplicabilidade da equação (2.8) calculando o expoente de Lyapunov para o mapa logístico em função do parâmetro de controle r no intervalo $2.9 \leq r \leq 4.0$.

Com o gráfico resultante poderemos dizer onde ocorrem as bifurcações, onde os ciclos são estáveis e superestáveis, e onde o sistema apresenta caos.

O cálculo computacional foi realizado na linguagem de programação C. No programa, em cada valor de r partimos de uma trajetória x_0 . Fizemos 10^3 iterações até que o transiente fosse eliminado, e prosseguimos com mais 10^5 iterações que foram usadas na equação (2.8). A figura 2.1 exhibe o resultado da simulação para o expoente de Lyapunov para 10^3 diferentes valores de r e o respectivo diagrama de bifurcação do mapa logístico. Vemos que o dobramento de período ocorre quando o expoente de Lyapunov se aproxima de zero. Também observamos que entre dois dobramentos de período há um ciclo superestável. Vemos também que na região caótica temos picos invertidos de expoentes de Lyapunov negativos, indicando regimes superestáveis de janelas periódicas estreitas.

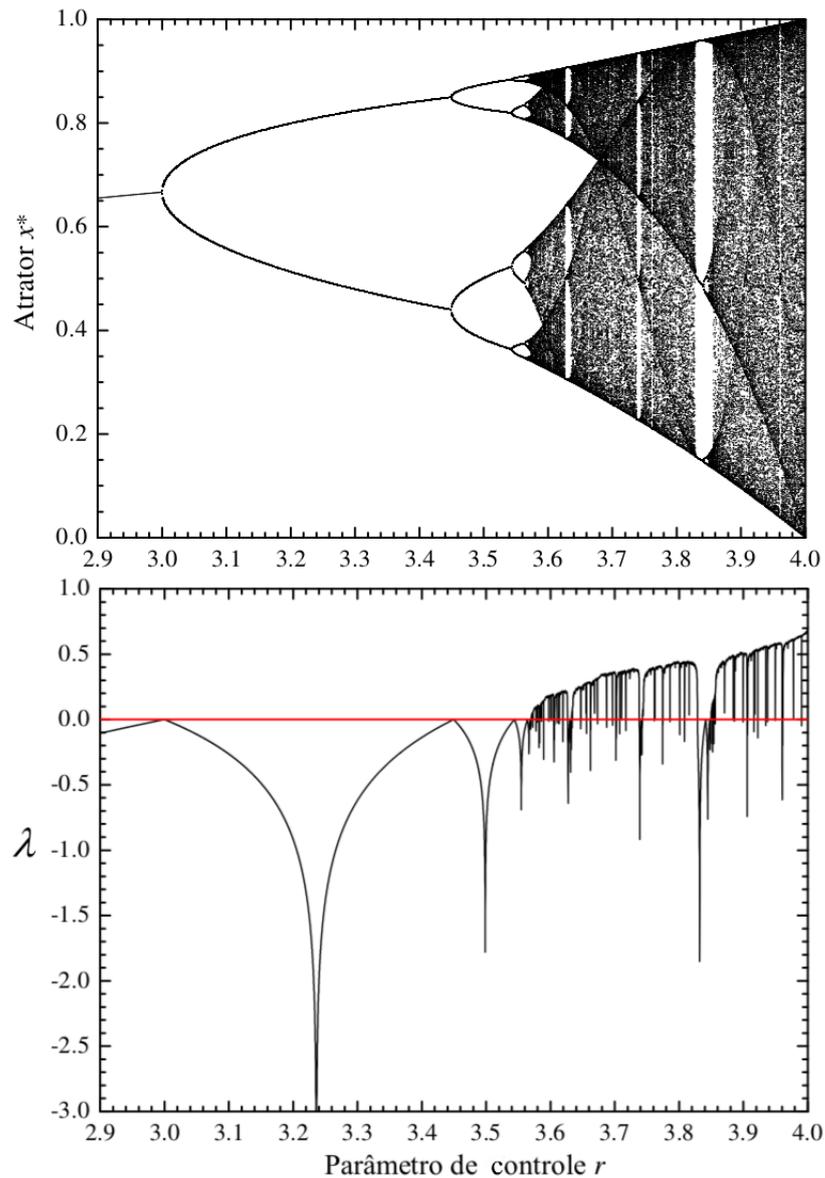


Figura 2.1: Diagrama de bifurcação do mapa logístico (painel superior) e correspondente expoente de Lyapunov (painel inferior).

2.2 Espectro de Lyapunov em fluxos tridimensionais

Para um sistema contínuo de dimensão N , temos N expoentes de Lyapunov, os quais constituem o chamado espectro de Lyapunov. Nesta seção utilizaremos o método introduzido nas referências [7] e [8] para obter o espectro de sistemas 3D numérica-

mente, e verificaremos se nossos resultados concordam com a literatura. O método, na realidade, vale para uma dimensão N qualquer.

Um sistema dinâmico genérico tridimensional, com variáveis $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ pode ser compactamente escrito em notação vetorial como

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}(\vec{X}), \quad (2.9)$$

onde os vetores são

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

A ideia do algoritmo para obtenção do espectro de Lyapunov desse sistema é seguir uma dada trajetória típica a partir de condições iniciais $x_1(0)$, $x_2(0)$ e $x_3(0)$ que já estão no atrator, ou seja, estamos supondo que transientes já foram descartados. Devemos monitorar três direções específicas no espaço de fases, a saber: (a) Uma ao longo da própria trajetória. Duas condições iniciais vizinhas ao longo desta direção nem se aproximam nem se afastam. A ela estará associado, portanto, um expoente de Lyapunov $\lambda_a = 0$; (b) Como estamos supostamente em um atrator, este possuirá, mesmo em regime caótico, uma variedade estável. Esta direção, portanto, será caracterizada por um expoente $\lambda_b < 0$ em qualquer circunstância; (c) Finalmente, a terceira direção, ortogonal às duas primeiras, poderá indicar a presença de uma variedade estável ou instável com λ_c negativo ou positivo, respectivamente. Este será o nosso expoente característico, indicador das fases periódicas e caóticas em um plano de parâmetros do sistema, como a da figura na folha de rosto desta dissertação.

Para isso, devemos integrar simultaneamente as três equações do sistema (2.9) e nove outras, no chamado espaço tangente das equações linearizadas, ou seja, três para

cada direção ortogonal. Para a i -ésima direção ($i = 1, 2, 3$), temos que

$$\Delta \dot{\vec{X}}_i = J(\vec{X}(t))\Delta \vec{X}_i, \quad (2.11)$$

onde o elemento de matriz do jacobiano é $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$. Na prática, não há a necessidade de seguirmos exatamente uma direção ao longo da trajetória. Podemos monitorar o que ocorre com três direções ortogonais arbitrárias e identificar o expoente λ_3 posteriormente. Como ponto de partida, essas três direções podem ser associadas às direções dos vetores

$$\Delta \vec{X}_1(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \vec{X}_2(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \Delta \vec{X}_3(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Esses vetores, obviamente ortonormais em $t = 0$ não permanecem assim em tempos posteriores. O algoritmo prevê, então, que a cada intervalo de tempo $\Delta t = \tau$ devemos reortonormalizar os vetores soluções de (2.11), por exemplo, através do processo de Gram-Schmidt. Assim, sejam \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 as versões ortogonais dos vetores que definem essas novas direções perpendiculares entre si e \vec{U}_1 , \vec{U}_2 e \vec{U}_3 as respectivas versões normalizadas. Ao final de cada intervalo de tempo τ fazemos

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \Delta \vec{X}_1, \\ \vec{U}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \\ \vec{v}_i &= \Delta \vec{X}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \Delta \vec{X}_i, \vec{U}_j \rangle \vec{U}_j, \quad i = 2, 3, \\ \vec{U}_i &= \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ao longo do processo, guardamos os três vetores ortogonais $\vec{v}_i^{(k)}$ do instante $t = k\tau$ ($i = 1, 2, 3$). Após um total N_p de passos de intervalos de tempo τ os expoentes de Lyapunov são obtidos via

$$\lambda_i = \frac{1}{N_p \tau} \sum_{k=1}^{N_p} \ln \|\vec{v}_i^{(k)}\|, \quad (2.14)$$

médias análogas àquela em (2.8) para um mapa discreto 1D.

Os valores de τ e N_p são escolhidos apropriadamente para cada sistema dinâmico de forma a garantir a convergência do espectro de Lyapunov. Note que o processo de Gram-Schmidt não permite uma relação imediata entre os expoentes λ_a , λ_b e λ_c como anteriormente com os expoentes λ_1 , λ_2 e λ_3 obtidos pela Eq. (2.14). Isto depende do sistema dinâmico. Para o de Rössler, verificamos que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, independentemente das condições iniciais e que, portanto, $\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2$.

Abaixo apresentamos resultados numéricos para dois sistemas bem conhecidos e faremos a comparação com a literatura. O espectro de Lyapunov do sistema de Rössler foi calculado a partir do conjunto de equações (1.6), com os parâmetros $a = b = 0.2$, $c = 5.7$. Esses parâmetros correspondem a uma solução caótica. Então, pelo menos 1 dos expoentes de Lyapunov deve ser positivo. Usamos aqui $\Delta t = 0.01$ como incremento integração numa rotina comercial (DVERK, IMSL) de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordens, $N_p = 10^5$ e $\tau = 1$, obtendo

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.070739 \\ \lambda_2 &= 0.000012 \approx 0 \\ \lambda_3 &= -5.393765.\end{aligned}\tag{2.15}$$

A convergência do espectro de Lyapunov em função de N_p está esquematizado na Fig. 2.2. Nossos resultados estão em bom acordo com os valores obtidos por Sprott [1], a saber

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.0714 \\ \lambda_2 &= 0.0 \\ \lambda_3 &= -5.3943\end{aligned}\tag{2.16}$$

Na seção seguinte deste capítulo faremos um diagrama de fases a partir de um desses expoentes no plano $a \times c$.

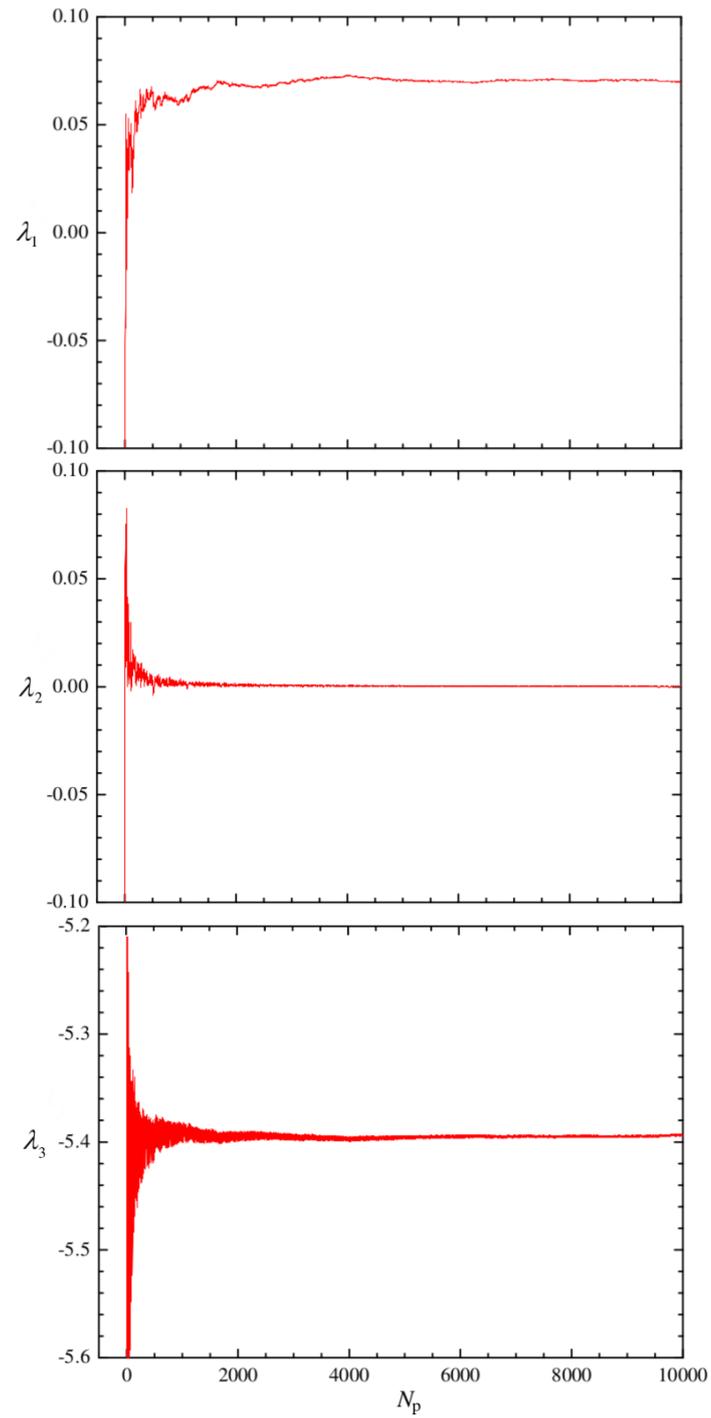


Figura 2.2: Convergência dos expoentes de Lyapunov para o sistema de Rössler com $a = b = 0.2$ e $c = 5.7$.

Outro protótipo 3D na teoria de sistemas dinâmicos dissipativos é o sistema de Lorenz, definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Para $\sigma = 10$, $r = 5.7$ e $b = 8/3$, este sistema exibe um atrator estranho cuja projeção no plano $z \times x$ é mostrado na Fig. 2.3.

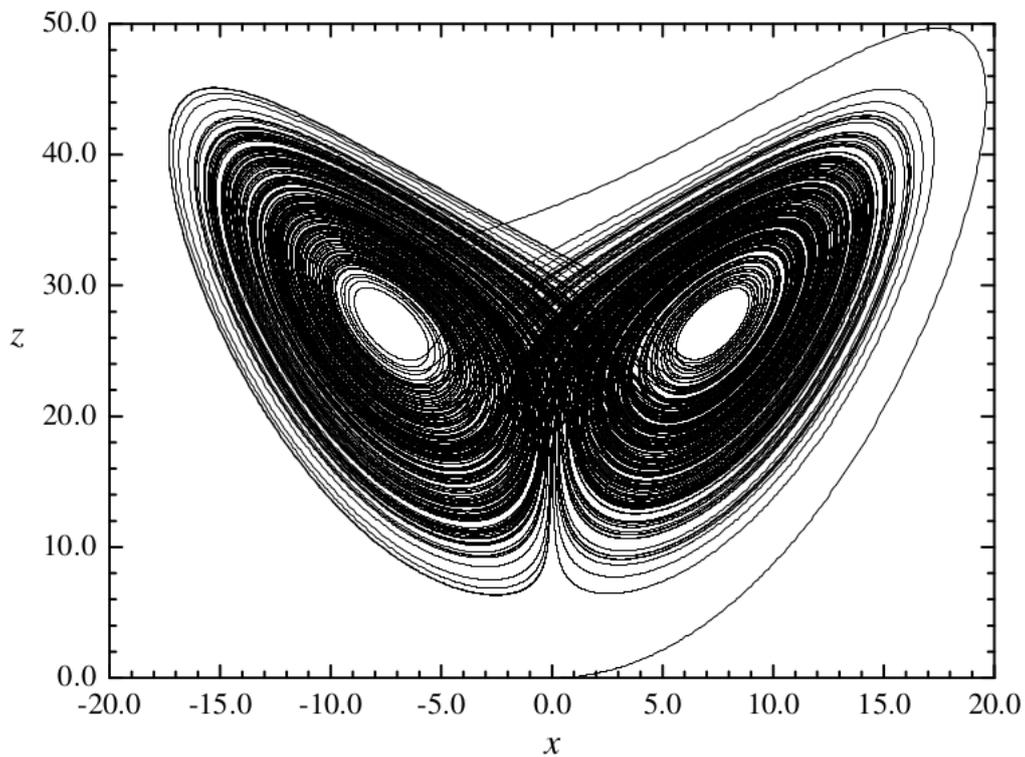


Figura 2.3: Atrator caótico do sistema de Lorenz com $\sigma = 10$, $r = 5.7$ e $b = 8/3$ no plano $z \times x$.

Com $\tau = 1$ e $N_p = 10^5$ obtivemos aqui

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.9968 \\ \lambda_2 &= 0.00029 \approx 0 \\ \lambda_3 &= -14.5829.\end{aligned}\tag{2.18}$$

os quais também estão em bom acordo com aqueles da ref. [1], a saber

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.9056 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -14.5723.\end{aligned}\tag{2.19}$$

2.3 Aplicação: O sistema de Rössler

Para ilustrar a eficácia do método descrito na seção anterior, discutimos aqui o espectro de Lyapunov referente ao diagrama de bifurcação do sistema de Rössler mostrado na Fig. 1.12, com $a = 0.2$ e $b = 0.2$. No painel superior da Fig. 2.4 repetimos este diagrama juntamente com o expoente λ_c em função do parâmetro de controle c no intervalo de 2 a 11. Como discutido para o mapa unidimensional, observamos da Fig. 2.4, que as regiões estáveis tem λ_c negativo. Também vemos nas bifurcações $\lambda_c \rightarrow 0$. Finalmente, nas regiões caóticas λ_c é positivo.

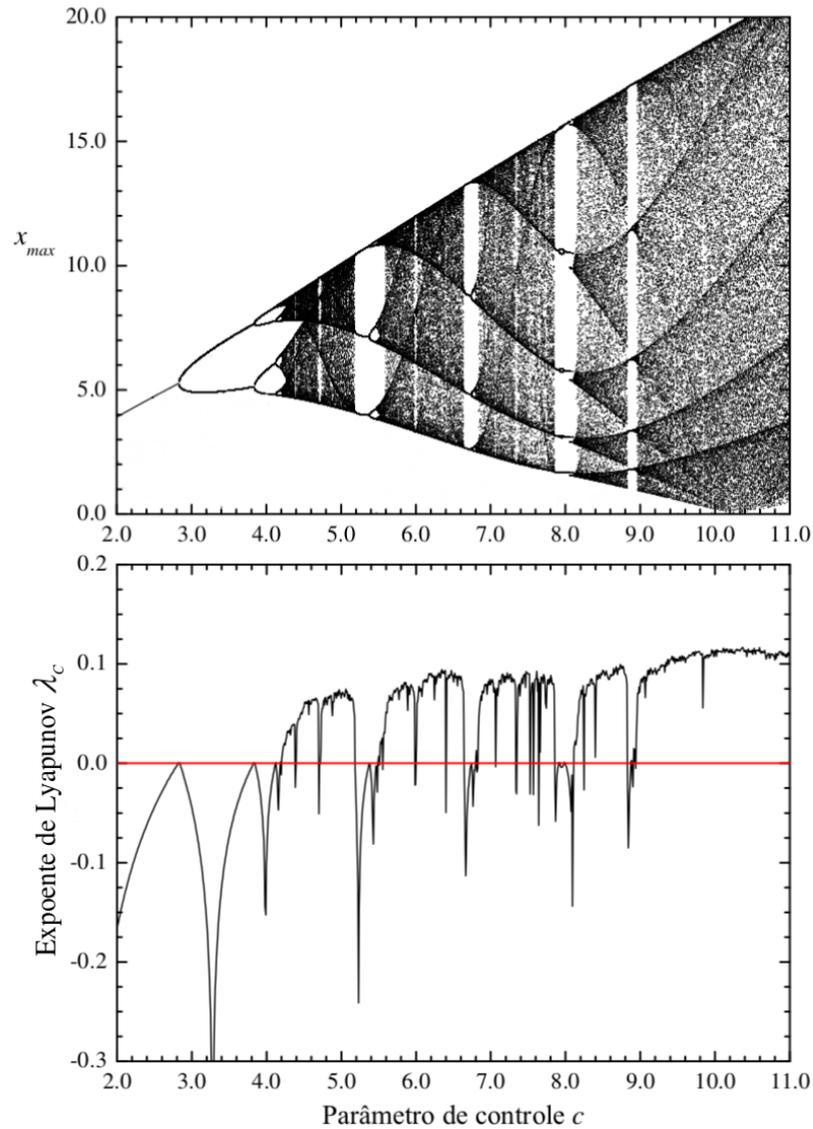


Figura 2.4: Painel superior: Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler com $a = b = 0.2$ e c como parâmetro de controle. Painel inferior: Correspondente expoente característico λ_c .

2.3.1 Diagrama de fases periódicas e caóticas

Nesta seção apresentamos resultados os quais fixamos apenas um dos três parâmetros de controle do sistema de Rössler, o parâmetro b . Projetando o valor calculado de λ_c no plano $a \times c$, obtemos um diagrama de fases de Lyapunov. A Fig. 2.5 mostra

o diagrama de fases para $b = 0.17872$. Os valores positivos de λ_c estão normalizados por λ_{cmax} , que é o maior valor positivo de λ_c obtido numericamente quando varremos os outros dois parâmetros nos intervalos $1.0 \leq c \leq 16.0$ e $0.1 \leq a \leq 0.35$. Correspondentemente, os valores negativos de λ_c estão normalizados pelo valor absoluto de λ_{cmin} . Esta região do plano foi escolhida por exibir claramente a possibilidade de

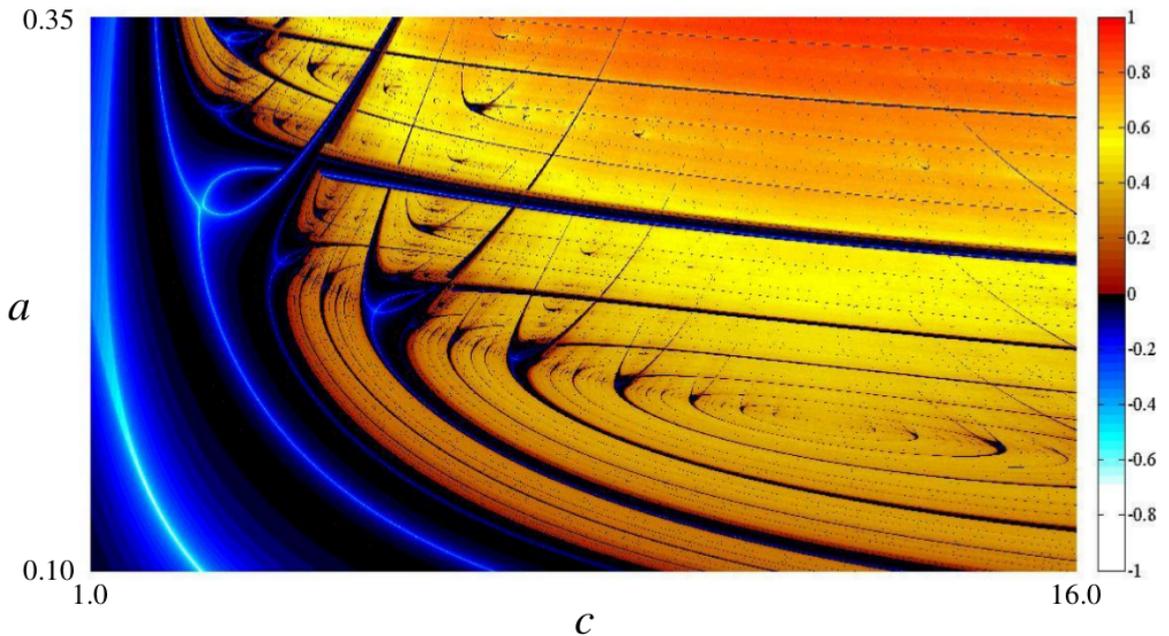


Figura 2.5: Diagrama de fases de Lyapunov obtido numericamente com 2400×2400 valores normalizados de λ_c , projetados no plano $a \times c$ para $b = 0.17872$.

caracterização de uma “sequência completa”, ou seja, uma sequência de dobramentos de período seguida por outra de adição de período [9] na região caótica. Este diagrama mostra um centro de periodicidade e caos (CPC) localizado nas coordenadas $(c_c, a_c) = (10.5706, 0.17694)$. Vemos no diagrama que espirais de regiões periódicas ($\lambda < 0$) e caóticas ($\lambda > 0$) convergem para o CPC, conhecido na literatura como “periodicity hub” [10, 11, 12]. A Fig. 2.6 mostra uma ampliação do diagrama de fases na vizinhança do CPC. O que não fica evidente a partir desses diagramas é o

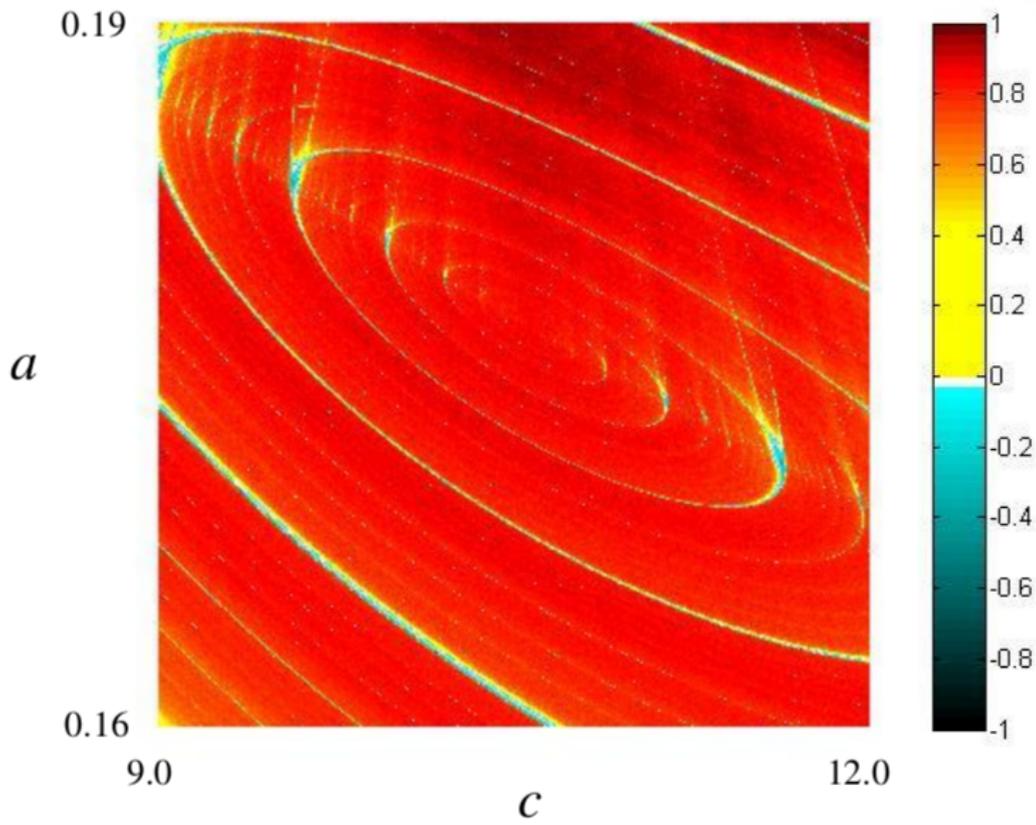


Figura 2.6: Ampliação da Fig. 2.5 na região do CPC.

período de cada região estável. Para isso, construímos um diagrama de bifurcação como antes, fixando agora um valor específico do parâmetro a e mantendo c como parâmetro de controle. Em particular, a nossa procurada sequência completa fica garantida, em princípio, com $a = a_c$, sabendo-se que em cada volta de uma espiral estável, o período da janela principal correspondente aumenta em uma unidade, como veremos a seguir. No painel superior da Fig.2.7 mostramos o diagrama de bifurcação para $a = a_c = 0.17694$, lembrando que fixamos $b = 0.17872$. No painel inferior, mostramos o correspondente expoente de Lyapunov λ_c para esse conjunto de parâmetros. A indicação das primeiras janelas da adição de período está evidenciada com setas para as janelas P3, P4, P5 e P6.

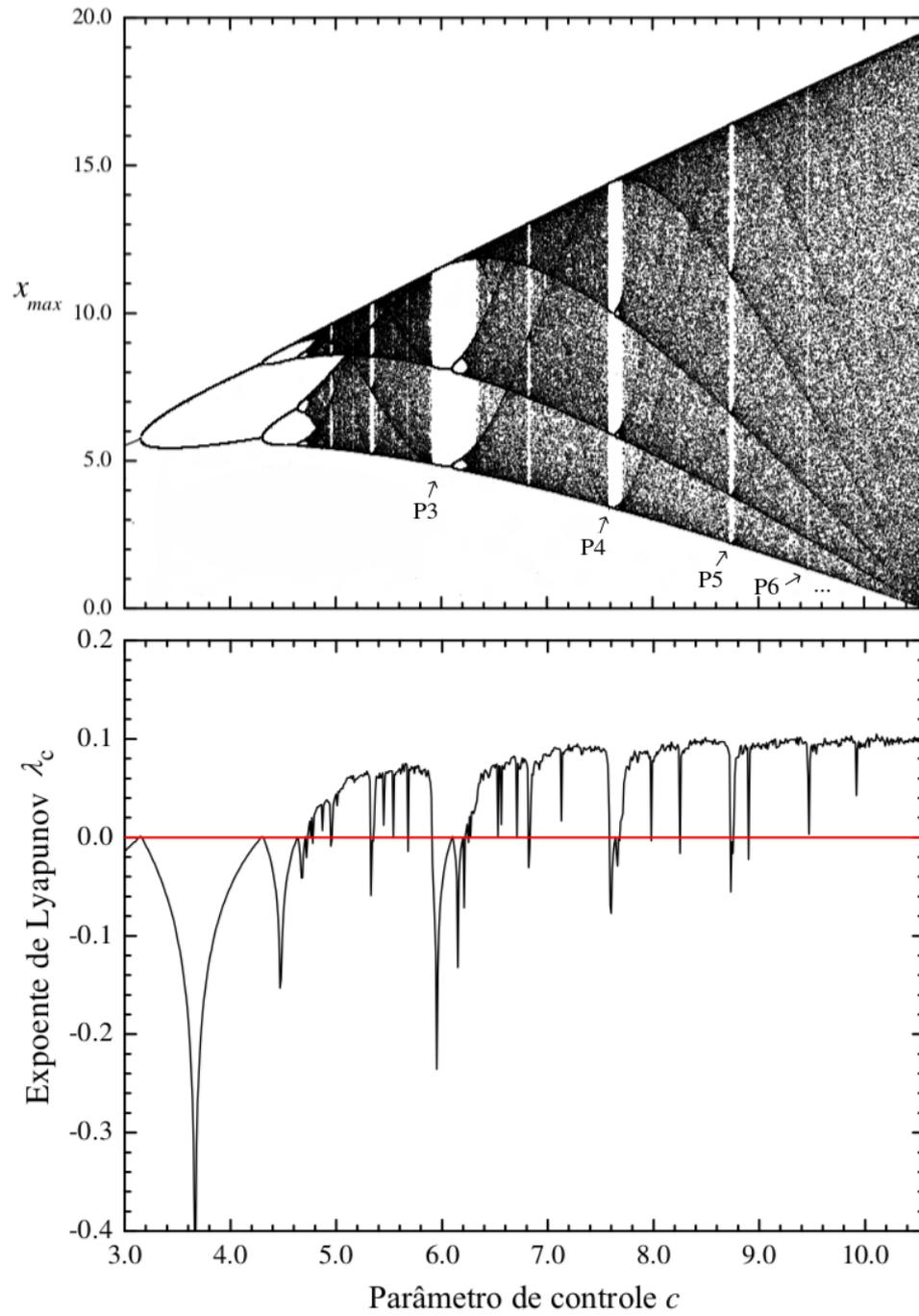


Figura 2.7: Diagrama de bifurcação (painel superior) e correspondente expoente de Lyapunov λ_c para o sistema de Rössler com $a = a_c = 0.17694$, $b = 0.17872$ e $c = c_c = 10.5706$.

2.3.2 A constante δ de Feigenbaum

No final da década de 1970, o físico matemático americano Mitchell Feigenbaum propôs pioneiramente que mapas 1D com concavidades parabólicas devem exibir propriedades universais quantitativas que podem ser medidas em experimentos físicos e numéricos. Talvez a mais popular delas seja a razão de convergência da sequência de dobramentos de período, constante δ . Seja r o parâmetro de controle de um tal mapa, e r_n o valor de r onde ocorre o período 2^n superestável. Então, a constante δ de Feigenbaum foi definida como

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (n > 1). \quad (2.20)$$

Estimativas numéricas indicam o valor $\delta = 4.669201609\dots$. Vários sistemas físicos reais descritos por equações diferenciais que exibem o fenômeno da adição de período confirmam a universalidade proposta por Feigenbaum, isso porque o mapa de retorno desses sistemas é aproximadamente unimodal, ou seja, é uma curva suave, côncava com um único máximo.

A título de confirmação, realizamos experimentos numéricos no sistema de Rössler com os parâmetros da Fig. 2.7 na região de dobramentos de período. A Fig. 2.8 mostra gráficos de λ_c em função de c exibindo os mínimos numéricos correspondendo a vários regimes superestáveis. A Tabela 2.1 contém os valores numéricos do parâmetro de controle e a Tabela 2.2 as aproximações sucessivas para δ . Em particular, vemos que

$$\delta_8 = \frac{c_8 - c_7}{c_9 - c_8} \simeq 4.66922 \quad (2.21)$$

já fornece uma boa aproximação para δ . Esta convergência está indicada na Fig. 2.9.

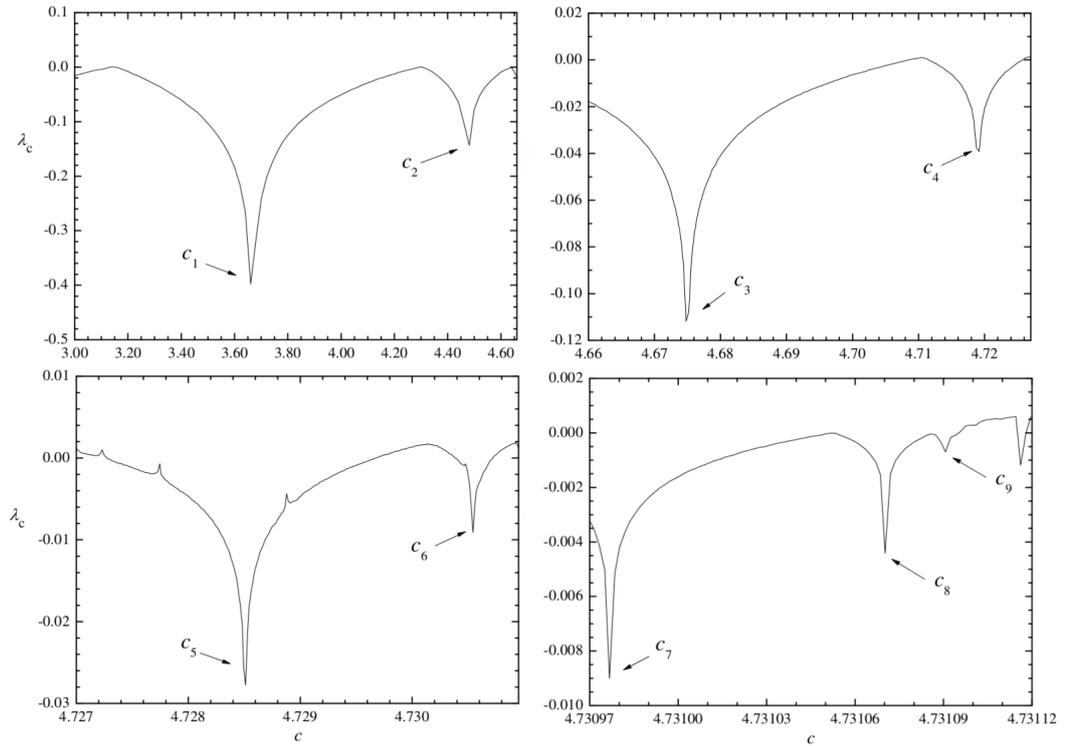


Figura 2.8: Mínimos do expoente de Lyapunov indicando órbitas superestáveis para o sistema de Rössler com os parâmetros da Fig. 2.7.

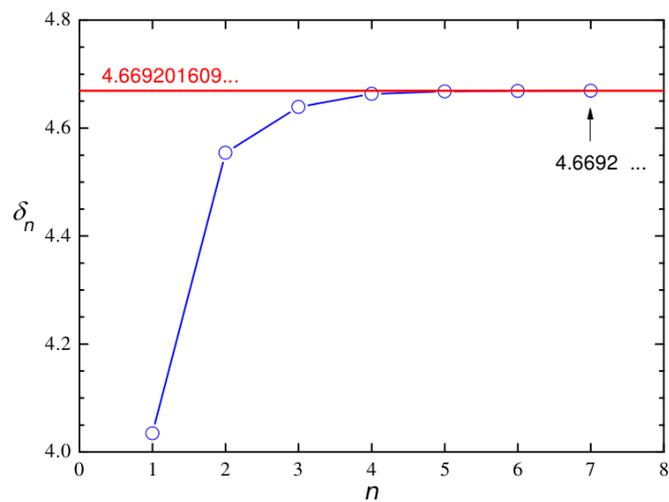


Figura 2.9: Comportamento do parâmetro de convergência da sequência de dobramentos de período.

Tabela 2.1: Valores de c_n para as órbitas superestáveis de período- 2^n , onde $n = 1, 2, \dots, 9$, para o sistema de Rössler com os parâmetros da Fig. 2.7.

c_1	3.6654561199
c_2	4.4744553141
c_3	4.6749818502
c_4	4.7190141340
c_5	4.7285055311
c_6	4.7305408588
c_7	4.7309768888
c_8	4.7310702789
c_9	4.7310902801

Tabela 2.2: Razão δ_n para sucessivos dobramentos de período.

δ_2	4.03437...
δ_3	4.55408...
δ_4	4.63917...
δ_5	4.66332...
δ_6	4.66786...
δ_7	4.66891...
δ_8	4.66922...

2.3.3 Convergência da sequência de adição de período

Em analogia com a sequência de dobramento de período, consideramos ocorrência das janelas de adição de período na região caótica. Definimos, então,

$$\Delta_n = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n}, \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (2.22)$$

onde p_n indica o valor de c correspondente ao ciclo- n superestável. Até o ponto de acumulação em 10.5706, observamos até a janela de período 13. Além disso fica difícil devido ao limite computacional. Na figura 2.10, mostramos as janelas de períodos 3 a 8, e na Fig. 2.11 mostramos λ_c nas janelas de P3 e P4. Os valores de p_n da Tabela 2.3 foram utilizados para calcular os de Δ_n da Tabela 2.4. Esta tabela, assim como o gráfico da Fig. 2.12 indicam uma possível convergência para Δ_∞ pouco menor do

que 1.74. Este resultado deve ser comparado ao do mapa proposto no Cap. 3, que veremos, permite a observação de períodos de ordens superiores a P13.

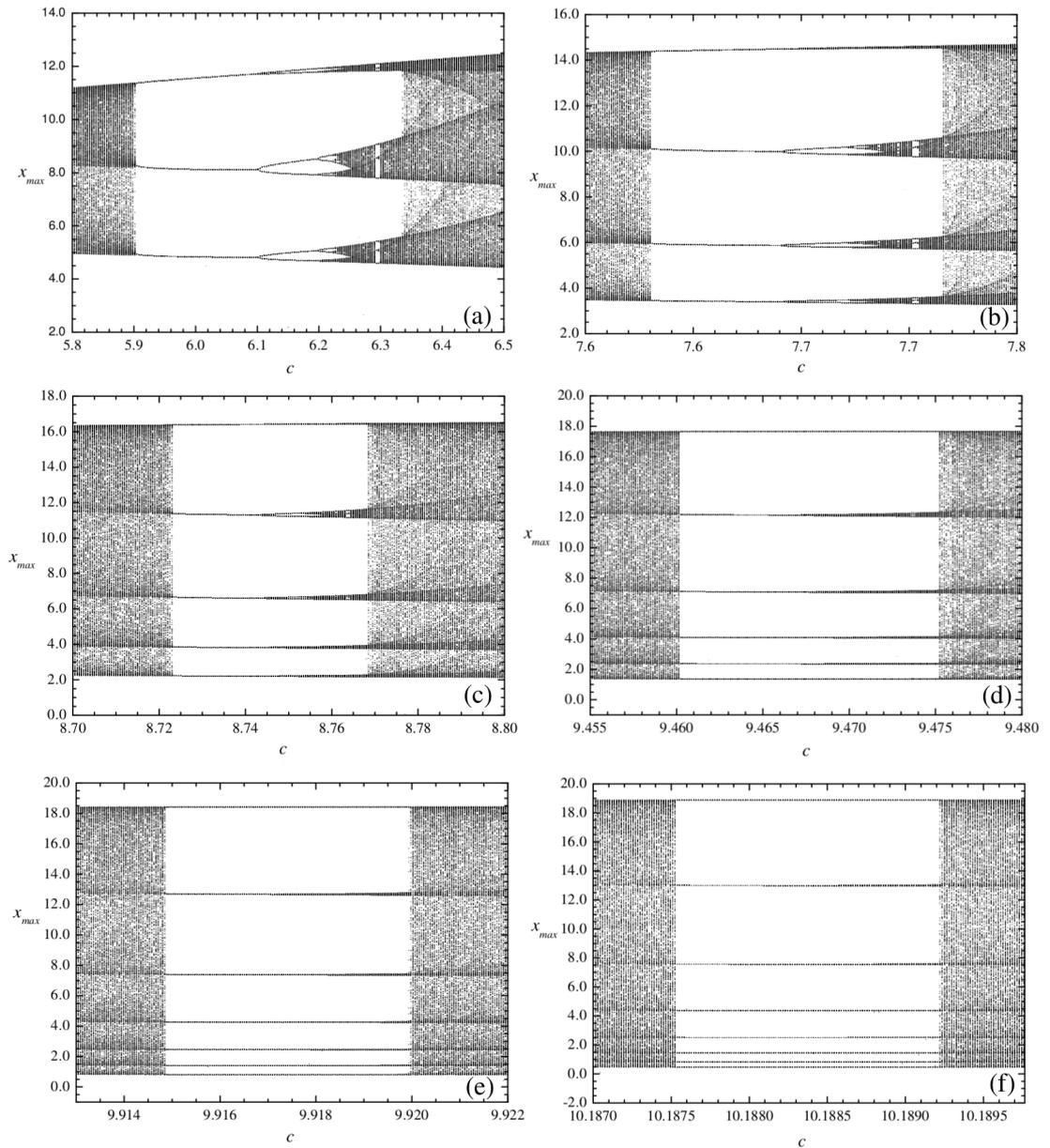


Figura 2.10: (a) Janela periódica de período 3. (b) Janela periódica de período 4. (c) Janela periódica de período 5. (d) Janela periódica de período 6. (e) Janela periódica de período 7. (f) Janela periódica de período 8.

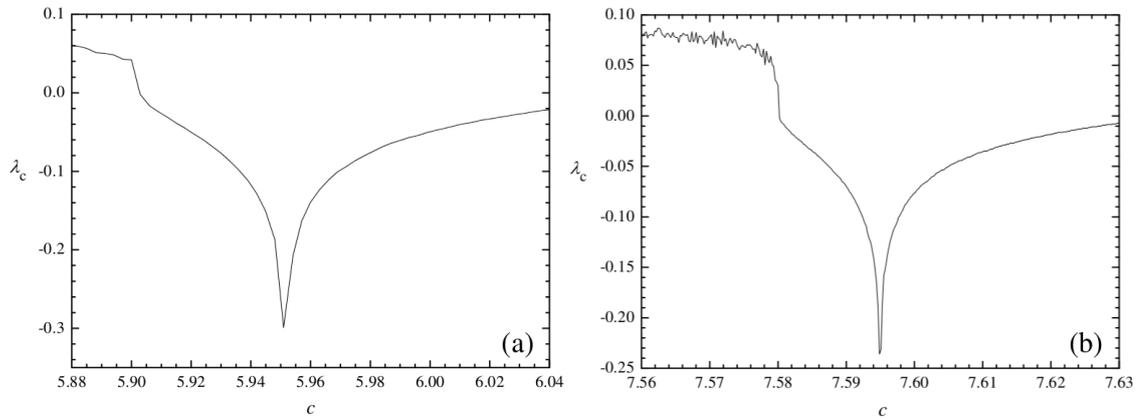


Figura 2.11: Expoente de Lyapunov λ_c cujos mínimos indicam as órbitas superestáveis das janelas de (a) período-3 e (b) período-4.

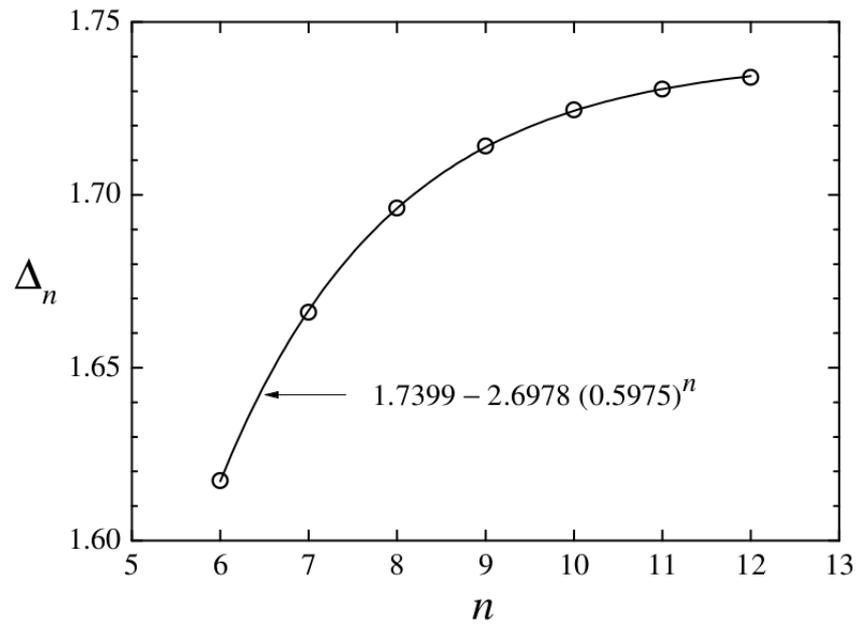


Figura 2.12: Símbolos: Parâmetro de convergência Δ_n para o sistema de Rössler com $a = 0.17694$, $b = 0.17872$ e $3 < c < 10.5706$. Linha sólida: Ajuste com valor assintótico $\Delta_\infty = 1.7399$.

Tabela 2.3: Valores de p_n para as órbitas superestáveis de período- n , onde $n = 3, 4, \dots, 13$, para o sistema de Rössler com os parâmetros da Fig. 2.7.

p_3	5.9514819642...
p_4	7.5949594421...
p_5	8.7279851632...
p_6	9.4617437201...
p_7	9.9154173100...
p_8	10.1877206905...
p_9	10.3482591596...
p_{10}	10.4419150467...
p_{11}	10.4962213401...
p_{12}	10.5276014686...
p_{13}	10.5456984109...

Tabela 2.4: Razão Δ_n para sucessivas janelas da adição de período.

Δ_4	1.45052...
Δ_5	1.54413...
Δ_6	1.61737...
Δ_7	1.66605...
Δ_8	1.69618...
Δ_9	1.71413...
Δ_{10}	1.72458...
Δ_{11}	1.73059...
Δ_{12}	1.73400...

Capítulo 3

O mapa

3.1 Tentando e errando

Neste capítulo descrevemos a construção de um mapa discreto unidimensional que faz a mímica do sistema de Rössler, com os parâmetros a e b fixos. Os parâmetros escolhidos são os mesmos que foram usados para a geração do diagrama de bifurcação de Fig. 2.7, ou seja, com $b = 0.17872$, $a = a_c = 0.17694$ e c variando de 3 até o ponto de acumulação do CPC, $c = c_c = 10.5706$. A partir do mapa discreto para o sistema de Rössler, produzimos diagramas de bifurcação, e comparamos as razões de convergência do dobramento de período (δ), assim como a da adição de período (Δ).

Lembramos que o diagrama de bifurcação de Fig. 2.7 foi gerado a partir dos máximos locais $x_{máx}$ de $x(t)$. Um primeiro passo na construção do mapa é redefinir variáveis de modo que suas iteradas ocorram em um domínio a ser escolhido. Em nosso caso, vamos escolher o intervalo unitário, como no mapa logístico. Aqui, vamos supor que este intervalo é inteiramente visitado quando $c = c_c$. Vamos adicionalmente

redefinir o parâmetro de controle como $r = c/c_c$. Assim, se $x_{máx}^{mín}$ é o menor valor de $x_{máx}$ quando $c = c_c$ e $x_{máx}^{máx}$, nossa transformação de variáveis fica

$$x_{máx} \rightarrow x = \frac{x_{máx} - x_{máx}^{mín}}{x_{máx}^{máx} - x_{máx}^{mín}} \quad \text{e} \quad c \rightarrow r = \frac{c}{c_c}. \quad (3.1)$$

Assim, quando $r = r_{máx} = 1$ o mapa varre todo intervalo $[0,1]$, e o valor mínimo de r pode ser definido pelo menor valor de c do diagrama de bifurcação (Fig. 2.7), quando temos apenas 1 ponto fixo, ou seja, ciclo de período 1. Para cada valor de r temos um conjunto de valores discretos de x . Em cada conjunto é possível construir mapas de retorno $x_{n+1} \times x_n$. No Capítulo 1, vimos como a equação da parábola que descreve o mapa logístico (Eq. I.1) produz os pontos do mapa de retorno. Para o sistema de Rössler, faremos o inverso. A partir dos mapas de retorno buscaremos uma função que se adeque a esses pontos para qualquer valor deste parâmetro de controle. Supomos, então, que existe uma função de referência que deve ser ajustada para muitos valores. É natural que o processo de ajustes dos mapas de retorno seja iniciado em $r = 1$, quando as iteradas preenchem o intervalo $[0,1]$. Os símbolos na Fig. 3.1 mostram o mapa de retorno para o sistema de Rössler exatamente no CPC da Fig. 2.6 normalizado via (3.1). Assim como no mapa logístico, os símbolos da Fig. 3.1 indicam que o mapa que buscamos deve ter dois pontos fixos, sendo um deles igual a zero, e um único máximo. Diferentemente do mapa logístico, este máximo é assimétrico, devendo crescer mais lentamente no lado esquerdo, do que decair no lado direito. Esta função poderia ser descrita sucintamente como uma parábola deformada, para ajustar os pontos do mapa na Fig. 3.1, escolhemos então uma função de pico assimétrica superposta a uma parábola. Os ajustes iniciais não foram satisfatórios e o passo seguinte foi, então, aumentar a ordem no polinômio.

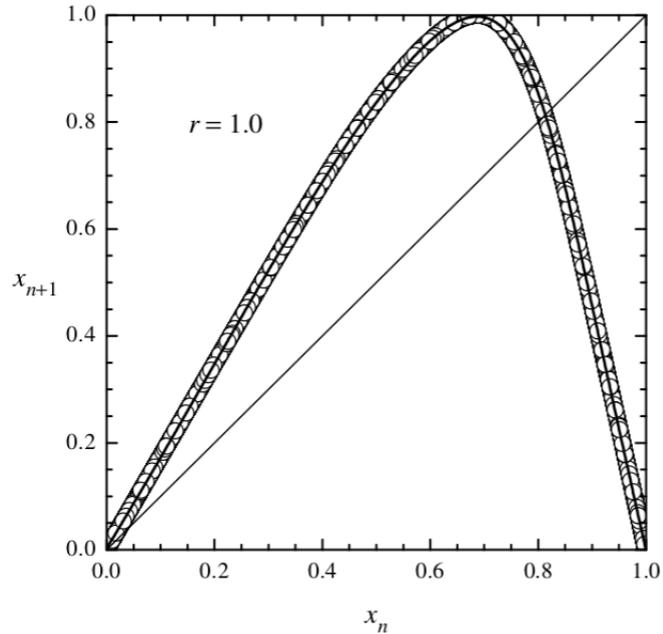


Figura 3.1: Mapa de retorno para os máximos normalizados em $x(t)$ do sistema de Rössler no CPC da Fig. 2.6.

Mostraremos a seguir que uma função capaz de fornecer ajustes satisfatórios tem a forma

$$f(x) = A \left\{ \frac{1}{1 + \exp \left[- \left(\frac{x - x_c + 0.5w_1}{w_2} \right) \right]} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \exp \left[- \left(\frac{x - x_c - 0.5w_1}{w_3} \right) \right]} \right\} +$$

$$+ y_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4, \quad (3.2)$$

onde o primeiro termo é a função de pico assimétrico e os demais constituem um polinômio de quarta ordem. Nela, os parâmetros A , P_1 , P_2 , P_3 e P_4 controlam a amplitude do mapa, x_c está na vizinhança da coordenada do máximo, w_1 , w_2 e w_3 controlam a largura da função e y_0 é uma componente que ajusta a posição vertical do mapa. Nossa esperança inicial era a de que a variação de r pudesse exibir variações simples nesses 10 parâmetros. Assim, após a sequência de ajustes do mapa via (3.2) para dezenas de valores de r , os ajustes adicionais nos vários parâmetros nos dariam

um mapa efetivamente com um único parâmetro, ou seja, r .

O esquema seguido foi, então, o seguinte: Ajustamos o mapa de retorno dos máximos de $x(t)$ normalizados em $r = 1$, com a função dada em (3.2). Este ajuste é feito com um software comercial. Os 10 valores de entrada para os parâmetros em (3.2) são arbitrários. Após uma primeira convergência, fazemos variações fixando alguns deles e otimizamos o acordo visual, além de satisfazer o critérios de convergência numérica do ajuste. A linha sólida na Fig. 3.1 representa este ajuste otimizado. Os 10 valores de saída deste ajuste são, então, utilizados como ponto de partida do ajuste subsequente para um r ligeiramente menor do que 1. Esse processo é repetido para cerca de 30 valores de r no diagrama de bifurcação da Fig. 2.7. Para um dado r , os dez valores de entrada utilizados no ajuste do mapa de retorno foram sempre os dez valores do ajuste otimizado no valor imediatamente superior de r .

Alguns desses ajustes estão mostrados na Fig. 3.2. Os valores dos vários parâmetros serão apresentados na seção seguinte. Por ora, observamos apenas que a função $f(x)$ dada em (3.2) não pode, sozinha, definir o mapa. Diferentemente do mapa logístico, que é “ancorado” em $x = 0$ e $x = 1$, $f(x) = 0$ em $x \simeq 0$ e em outro ponto, x_M , que depende de r . O mapa deve prever o que ocorre com condições iniciais em $x_M \leq x \leq 1.0$. Esta questão é discutida na seção seguinte.

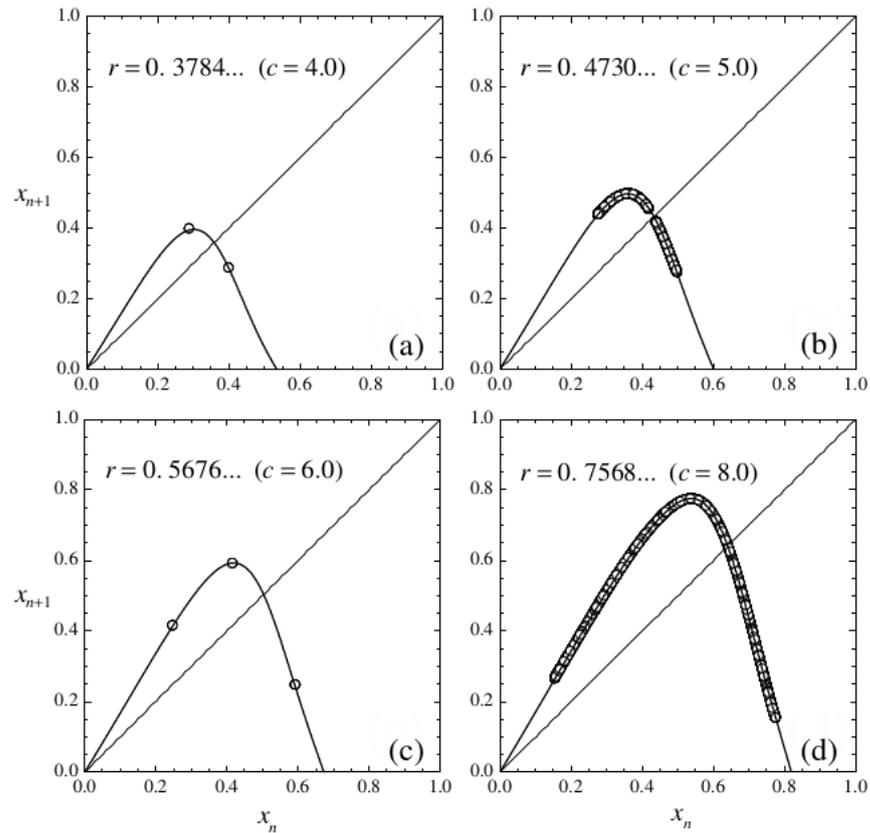


Figura 3.2: Mapas de retorno (símbolos) para o sistema de Rössler e respectivos ajustes com $f(x)$ da Eq. (3.2) (linhas sólidas). Em (a) temos um ciclo-2, em (c) um ciclo-3 e em (b) e (d) regimes caóticos.

3.2 Uma proposta

Inicialmente, realizamos os ajustes dos mapas de retorno para 13 valores do parâmetro de controle r no intervalo de 0.75 a 1.0, uma região mais generosa em pontos para esse fim. Os círculos na Fig. 3.3 mostram os comportamentos dos 10 parâmetros da Eq. (3.2) como funções de r em uma primeira rodada de ajustes. Neste caso, a ser explorado na subseção 3.2.1, arriscamos substituir os parâmetros y_0 , x_c , w_1 e w_2 por ajustes lineares. Reiniciamos o processo em $r = 1$, agora com esses quatro parâmetros fixos nos seus valores lineares, os demais livres. Após uma nova rodada de

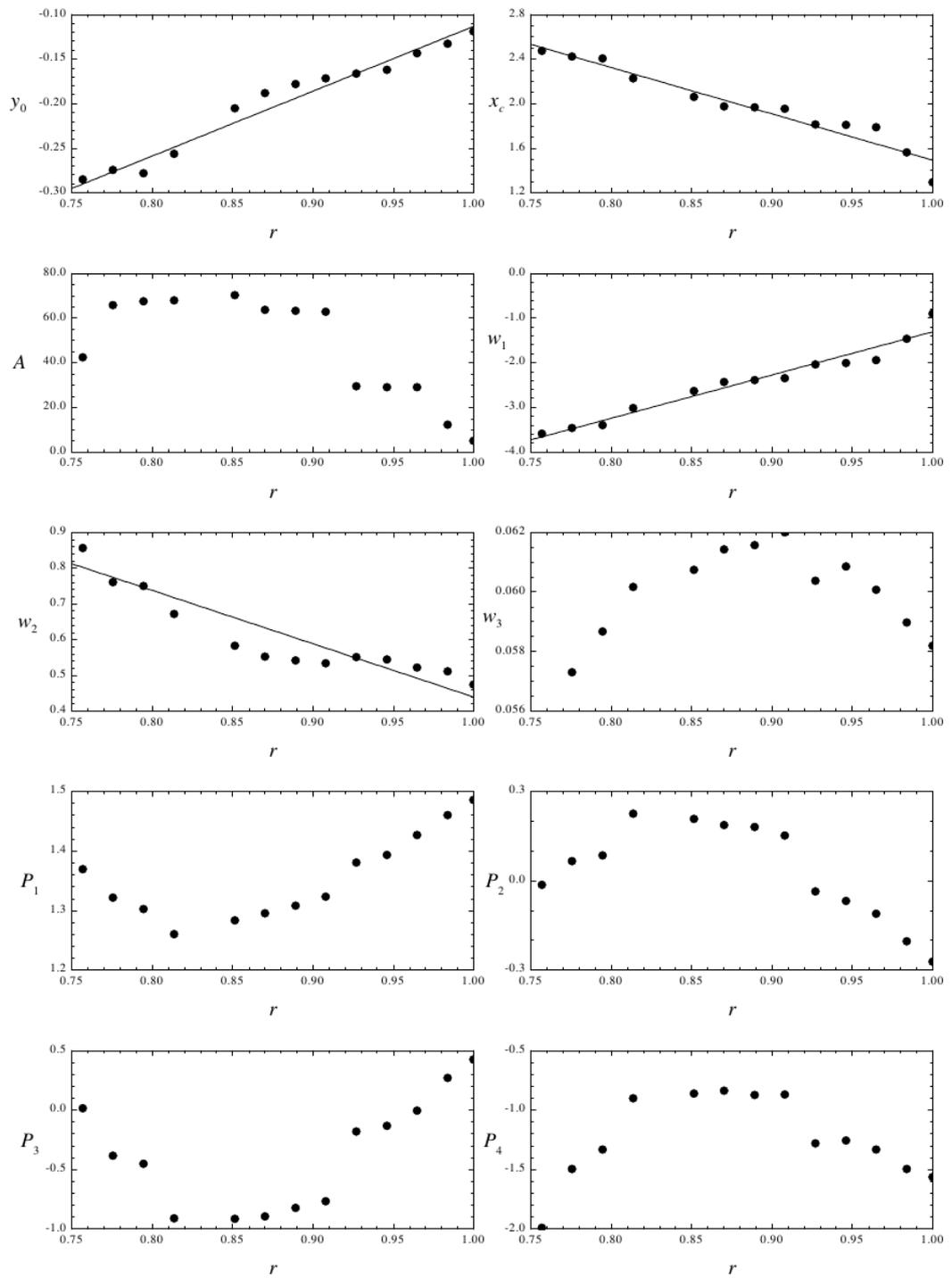


Figura 3.3: Resultados de ajustes preliminares nos 10 parâmetros de $f(x)$ da Eq. (3.2) como funções de r , como descrito no texto.

ajustes dos mapas de retorno, outro parâmetro pôde ser fixado por uma função bem comportada de r , além dos quatro anteriores. Foram necessários, então, mais oito rodadas de ajustes até que todos os parâmetros pudessem ser descritos por funções bem comportadas no intervalo de interesse, $0.3 \leq r \leq 1.0$. Os gráficos dessas funções estão mostrados na Fig. 3.4. Suas expressões estão dadas na Tabela B.1 do Apêndice B. Note que para os últimos ajustes utilizamos 32 valores de r . Como veremos nas subseções seguintes, os resultados obtidos com esta abordagem são satisfatórios de modo que propomos aqui que a função $f(x)$ pode, realmente, ser escrita na forma

$$f(x) = A(r) \left\{ \frac{1}{1 + \exp \left[- \left(\frac{x - x_c(r) + 0.5w_1(r)}{w_2(r)} \right) \right]} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \exp \left[- \left(\frac{x - x_c(r) - 0.5w_1(r)}{w_3(r)} \right) \right]} \right\} + y_0(r) + P_1(r)x + P_2(r)x^2 + P_3(r)x^3 + P_4(r)x^4, \quad (3.3)$$

onde r está no intervalo $[0.3, 1]$ e x em $[0, 1]$.

Uma das características do mapa discreto dado por (3.3) é que ele contém duas raízes, $x = 0$ (aproximadamente) e $x = x_M$, como visto nas Figs. 3.1 e 3.2, onde $x_M = x_M(r)$ e $x_M = 1$ apenas quando $r = 1$. Se tivermos uma condição inicial x_0 no intervalo $x_M < x_0 \leq 1$, devemos adicionar uma reta partindo de x_M com inclinação diferente de zero para injeção das iteradas abaixo da curva $f(x)$. Então, o mapa completo, definido aqui como $M_r(x)$, é dado por

$$M_r(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq x_M \\ g(x) = \frac{g_1}{1-x_M}x - \frac{g_1 x_M}{1-x_M}, & \text{se } x_M < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde g_1 é um número positivo que deve pertencer ao intervalo $(0, 1)$. Para que apenas uma iterada seja necessária para a injeção de um ponto inicialmente em $(x_M, 1]$ na

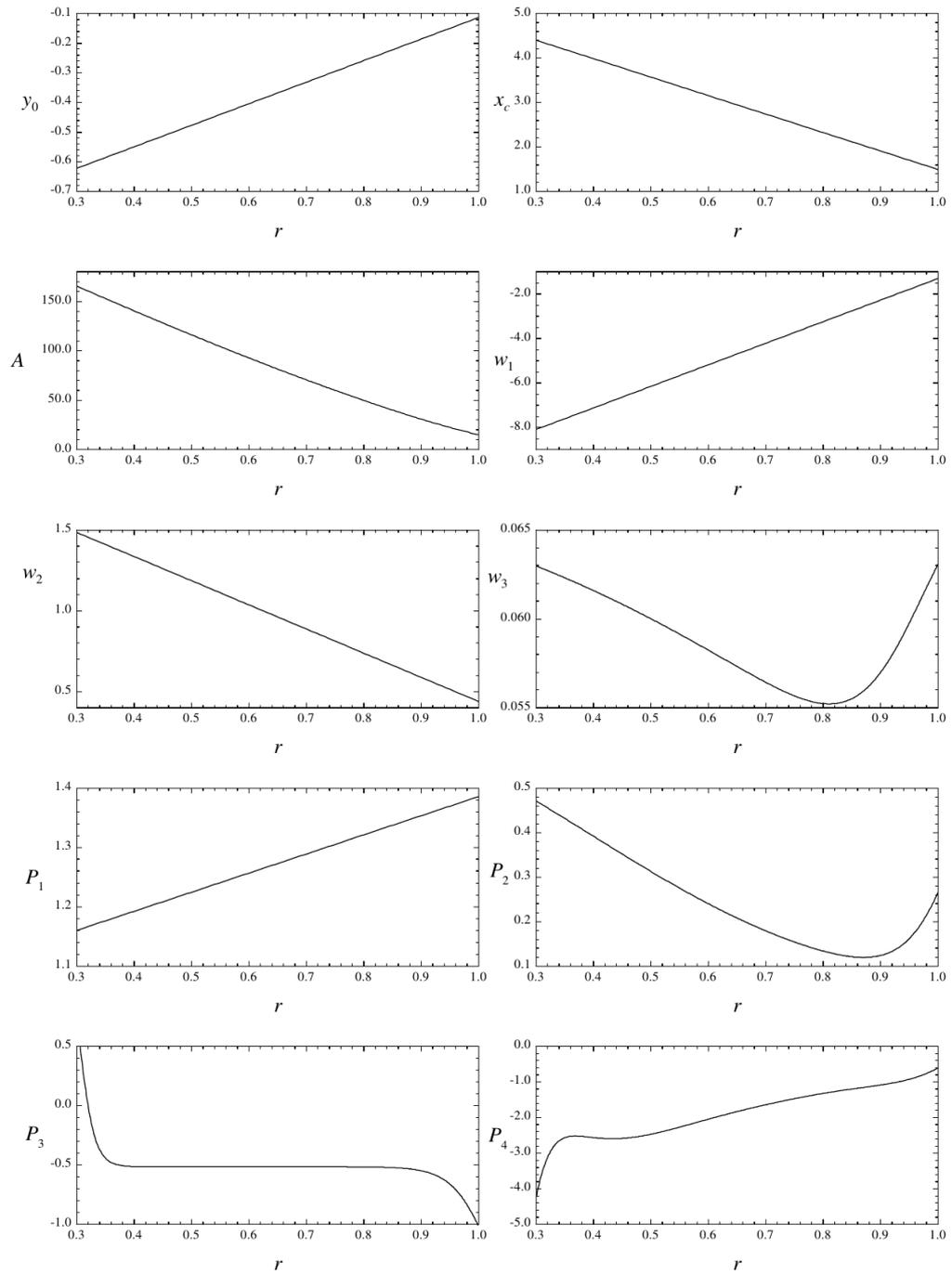


Figura 3.4: Gráficos das funções de ajuste final dos 10 parâmetros de $f(x)$ da Eq. (3.2), exibidas na Tabela B.1 do Apêndice B.

região sob a curva $f(x)$, basta que g_1 seja menor do que o máximo de $f(x)$. O gráfico do mapa (3.4) para um valor intermediário de r em $[0.3,1]$ é mostrado na Fig. 3.5.

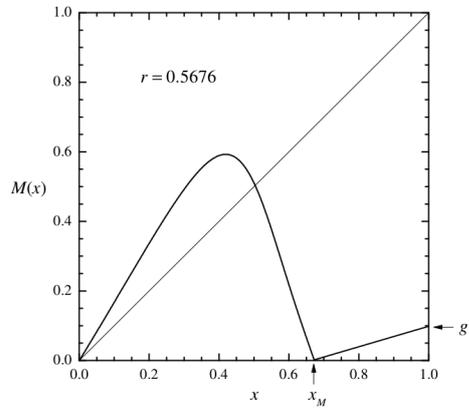


Figura 3.5: Gráfico do mapa $M_r(x)$ das Eqs. 3.4 e 3.3 com parâmetros da Tabela B.1 e $g_1 = 0.1$.

3.2.1 Força bruta

A esta primeira abordagem, na qual todos os 10 parâmetros de entrada no primeiro ajuste foram deixados livres, chamamos de força bruta (FB). Como primeiro teste dessa abordagem, mostramos na Fig. 3.6 o diagrama de bifurcação do mapa descrito pelas Eqs. (3.3) e (3.4) e o correspondente expoente de Lyapunov (Eq. (2.8)), para 1000 valores de r no intervalo $[0.3,1]$. De modo geral, o diagrama produzido por $M(x)$ é bem semelhante ao do sistema original, mostrado na Fig. 2.7. Contudo, como verificado posteriormente, o lençol é um pouco curto. Quando o ajuste é melhor no início, digamos, na região anterior ao caos, os ajustes do fim não são tão precisos quanto o necessário para um acordo melhor com o sistema de Rössler. Assim, procuramos alternativas para o ajuste dos parâmetros. Duas delas serão consideradas nas subseções seguintes. Aqui, vamos fazer ainda alguns experimentos numéricos com a aproximação FB.

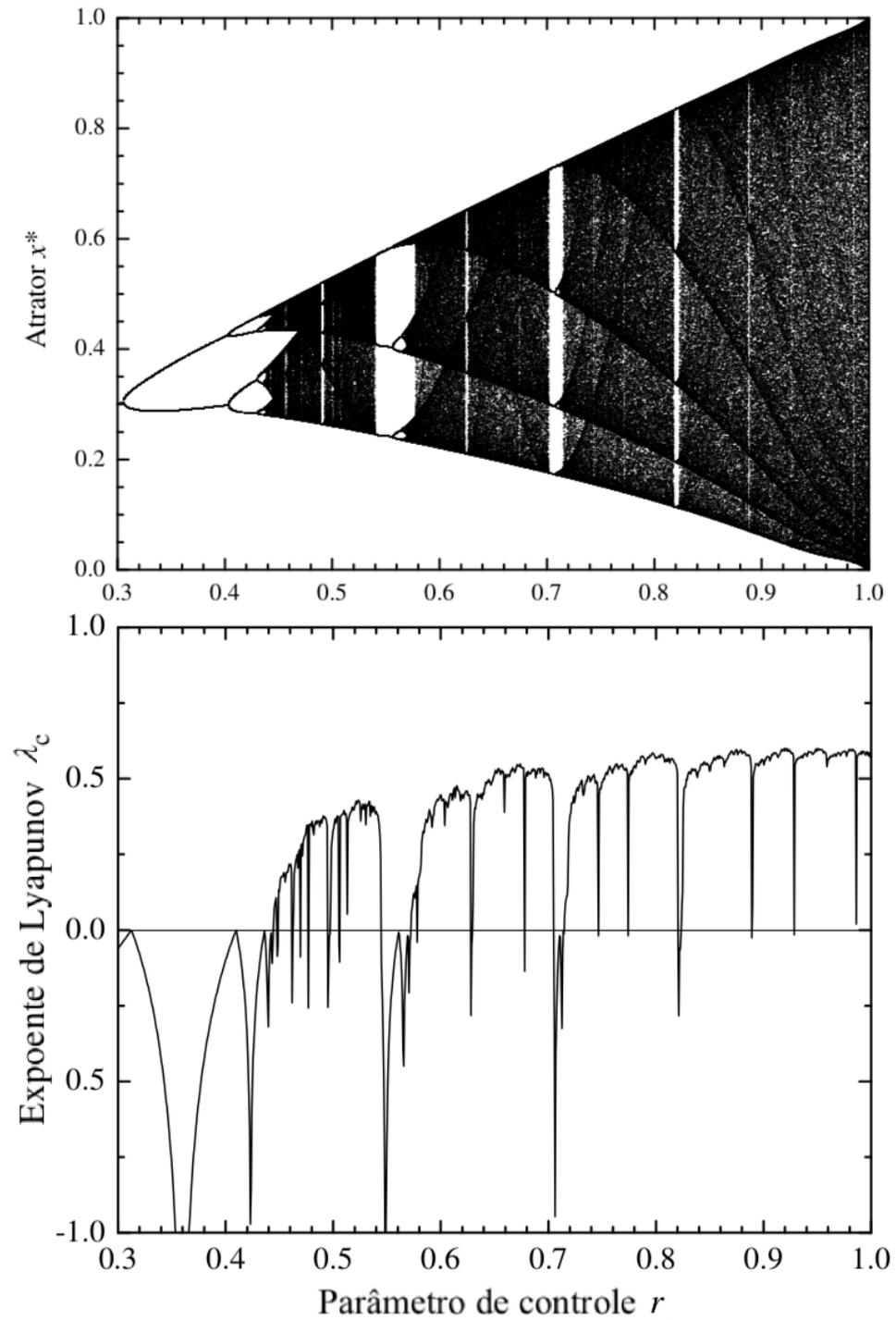


Figura 3.6: Diagrama de bifurcação (painel superior) e correspondente expoente de Lyapunov para o mapa $M_r(x)$ “força bruta”.

O mapa descrito pelas Eqs. (3.3) e (3.4) essencialmente confirma a previsão de Feigenbaum para a constante δ , como indicam os pontos da Fig. 3.7 (a), onde encontra-se $\delta_7 = 4.669\dots$. A curva sólida na Fig. 3.7(a) é um ajuste dos pontos com uma função que prevê um valor assintótico próximo ao de δ de Feigenbaum. De modo análogo, os

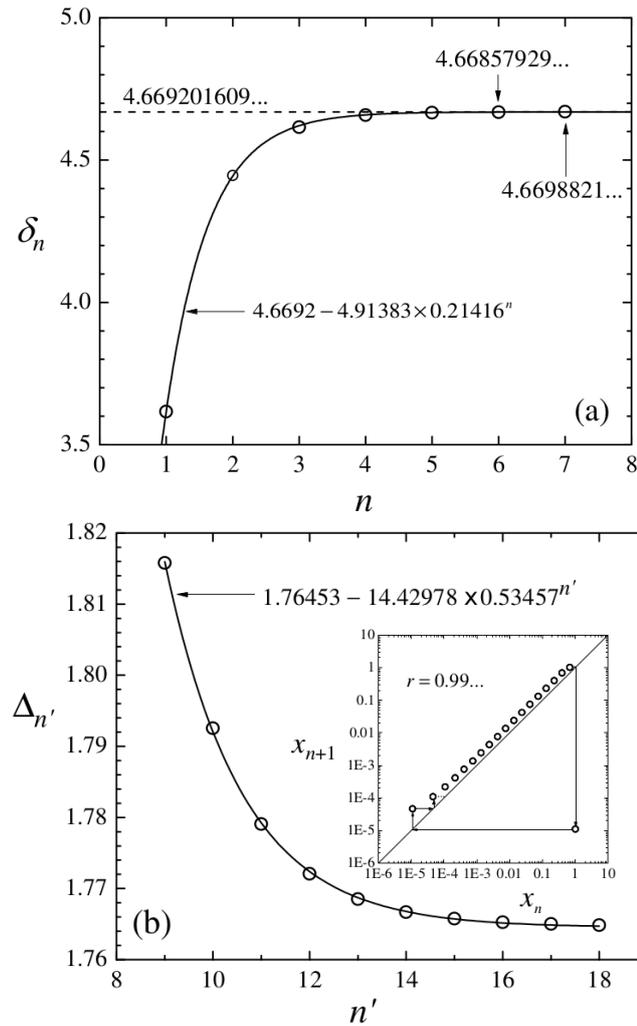


Figura 3.7: Parâmetros de convergência δ_n (a) e $\Delta_{n'}$ (b) para o mapa FB, dado pelas Eqs. (3.3) e (3.4) com os parâmetros da Tabela B1, como descrito no texto. Encarte: Mapa de retorno do regime P19 superestável.

símbolos na Fig. 3.7 (b) correspondem aos vários $\Delta_{n'}$ para os regimes superestáveis da sequência de adição de período do mapa $M_r(x)$ com os parâmetros da Tabela B.1.

A curva sólida é um ajuste com o valor assintótico $\Delta_\infty = 1.7645\dots$, que compara-se favoravelmente com aquele encontrado no sistema de Rössler com um número menor de janelas na sequência.

Outro experimento numérico que discutimos aqui refere-se à distribuição das iteradas do mapa em ergodicidade plena. Esta distribuição é conhecida como *medida* ou *densidade invariante* μ . Para um sistema ergódico, no qual todo o espaço de fases é supostamente visitado pelas órbitas típicas em um tempo infinitamente longo, a medida é a densidade de probabilidade de que um determinado ponto seja visitado. Quando esta probabilidade não depende da condição inicial e, portanto, vale para qualquer órbita, dizemos que a medida é invariante. No apêndice A apresentamos uma revisão deste conceito e sua conexão com o expoente de Lyapunov para mapas 1D. Ali também se encontra uma demonstração de que a medida invariante do mapa logístico em $r = 4$ é dada por

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad (3.5)$$

uma função simétrica com extremos agudos em $x = 0$ e $x = 1$.

O valor médio (no tempo) de uma função arbitrária $g(x)$,

$$\bar{g} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N g(x_i), \quad (3.6)$$

pode ser obtido, para um sistema ergódico, como a média (no *ensemble*)

$$\langle g \rangle = \int_0^1 g(x)\mu(x)dx. \quad (3.7)$$

Em particular, o expoente de Lyapunov pode ser escrito em termos da medida invariante de um sistema ergódico, como o mapa logístico em $r = 4$ ou $M_r(x)$ em $r = 1$, como

$$\lambda = \int_0^1 \mu(x) \ln|f'(x)|dx. \quad (3.8)$$

Considere, então, o sistema de Rössler no CPC, com a devida normalização descrita na Eq. (1.3). O histograma da Fig. 3.8 mostra a distribuição das visitas dos máximos em $x(t)$ normalizados em uma longa série temporal (cerca de 95000 máximos). A curva

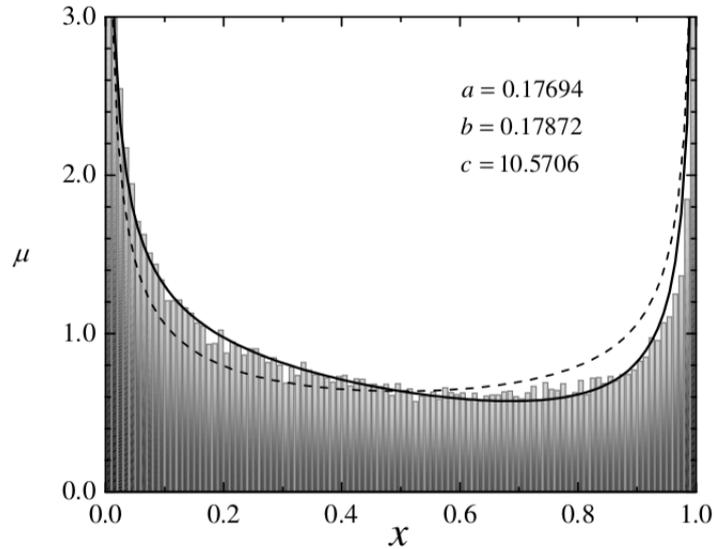


Figura 3.8: Histograma: Distribuição de ocorrência de máximos normalizados no sistema de Rössler com os parâmetros do CPC indicados. Linha tracejada: Distribuição $\mu(x)$ do mapa logístico (Eq. (3.5)). Linha sólida: Ajuste com a distribuição $\mu_0(x)$ dada pela Eq. (3.10) com $A = 0.3$.

tracejada é a distribuição do mapa logístico dada na Eq. (3.5) acima. Claramente, a distribuição do sistema de Rössler é assimétrica, deslocando a média de x para a esquerda do valor 0.5. De fato, a média de x calculada a partir do histograma foi

$$\langle x \rangle_{hist}^{Rössler} = \sum_{k=1}^{N_{bin}} x_k \mu(x_k) \Delta x = 0.424. \quad (3.9)$$

Aqui, N_{bin} é o número de *binas* usado no histograma, x_k é a coordenada no centro do k -ésimo bina e Δx é a largura comum dos *binas* do histograma. Como não dispomos de uma expressão analítica para a medida do mapa, fizemos um exercício com mais um ajuste. Considerando que a medida do mapa logístico está normalizada e notando

que a adição de uma função linear com zero em $x = 0.5$ mantém esta normalização, fizemos um ajuste do histograma com a função de um único parâmetro

$$\mu_0(x) = A(1 - 2x) + \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad (3.10)$$

a qual converge para os dados ajustados numericamente com o valor $A = 0.3$. O gráfico dessa função está representado pela linha sólida na Fig. 3.8. A média de x obtida via Eqs. (3.7) e (3.10) foi

$$\langle x \rangle_{\mu_0}^{Rössler} = 0.45, \quad (3.11)$$

a qual está próxima do valor extraído diretamente do histograma.

O histograma da Fig. 3.9 mostra a distribuição obtida com o mapa FB descrito pelas Eqs. (3.3) e (3.4) com os parâmetros da Tabela B1. Dele, segue que

$$\langle x \rangle_{hist}^{FB} = 0.416. \quad (3.12)$$

A linha sólida na Fig. 3.9 é um ajuste do histograma com a Eq. (3.10) com $A = 0.389$, o qual fornece

$$\langle x \rangle_{\mu_0}^{FB} = 0.435. \quad (3.13)$$

Embora todos esses valores estejam próximos ao valor *experimental* da Eq. (3.9), veremos adiante que a restrição a $r = 1$ permite uma aproximação melhor do que a FB. Com ela, será explorado o conceito da medida invariante também para o cálculo do expoente de Lyapunov.

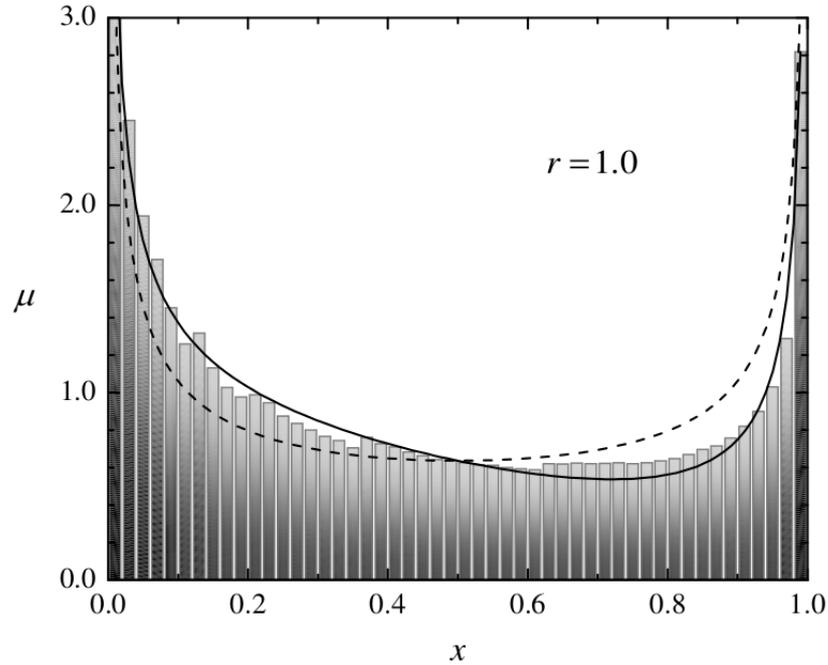


Figura 3.9: Histograma: Distribuição de ocorrência das iteradas discretas do mapa FB descrito pelas Eqs. (3.3) e (3.4) com os parâmetros da Tabela B1. Linha tracejada: Distribuição $\mu(x)$ do mapa logístico (Eq. (3.5)). Linha sólida: Ajuste com a distribuição $\mu_0(x)$ dada pela Eq. (3.10) com $A = 0.389$.

3.2.2 Seguindo a intuição

Há quem diga que com 10 parâmetros se constrói uma casa. Crítica aceita. Em nossa abordagem, podemos diminuir este número para nove parâmetros impondo que $x = 0$ seja ponto fixo do mapa. Neste caso, o parâmetro y_0 não é mais independente dos demais, sendo dado por

$$y_0 = -A \left[\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x_c - 0.5w_1}{w_2}\right)} \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x_c + 0.5w_1}{w_3}\right)} \right]. \quad (3.14)$$

Realizamos, então, uma nova sequência de ajuste dos mapas de retorno com a Eq. (3.3) e com y_0 dado pela Eq. (3.14). Nesta nova sequência, procuramos maximizar o número de ajustes lineares nos nove parâmetros restantes. Além disso, procuramos guiar os ajustes de modo que as amplitudes A e P_1 fossem funções crescentes de r . Os

resultados obtidos estão na Tabela B2 do Apêndice B. Os gráficos das correspondentes funções estão mostrados na Fig. 3.10. A euforia inicial pelos sete comportamentos

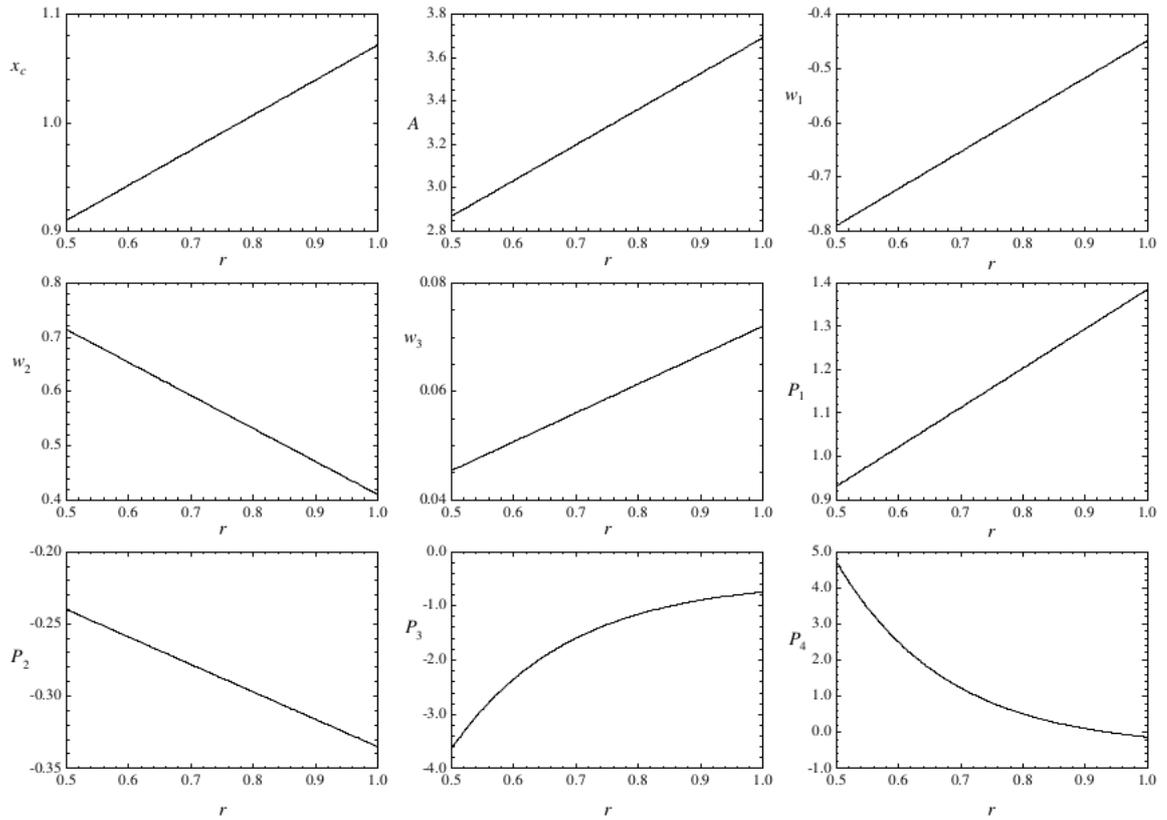


Figura 3.10: Gráficos dos parâmetros da Eq. (3.3) como função de r , obtidos através de ajustes dos mapas de retorno do sistema de Rössler. As funções correspondentes estão na Tabela B2 do Apêndice B.

lineares da Fig. 3.10 foi cortada pelo diagrama de bifurcação resultante, reproduzido na Fig. 3.11. Observamos que ele não está fiel ao produzido pelas equações do sistema de Rössler, pois no diagrama produzido por $M_r(x)$ observamos que a série de dobramentos de período e a região caótica surgem em uma escala diferente do diagrama original. Além disso, não conseguimos observar o ponto de acumulação das janelas periódicas do fenômeno de adição de período.

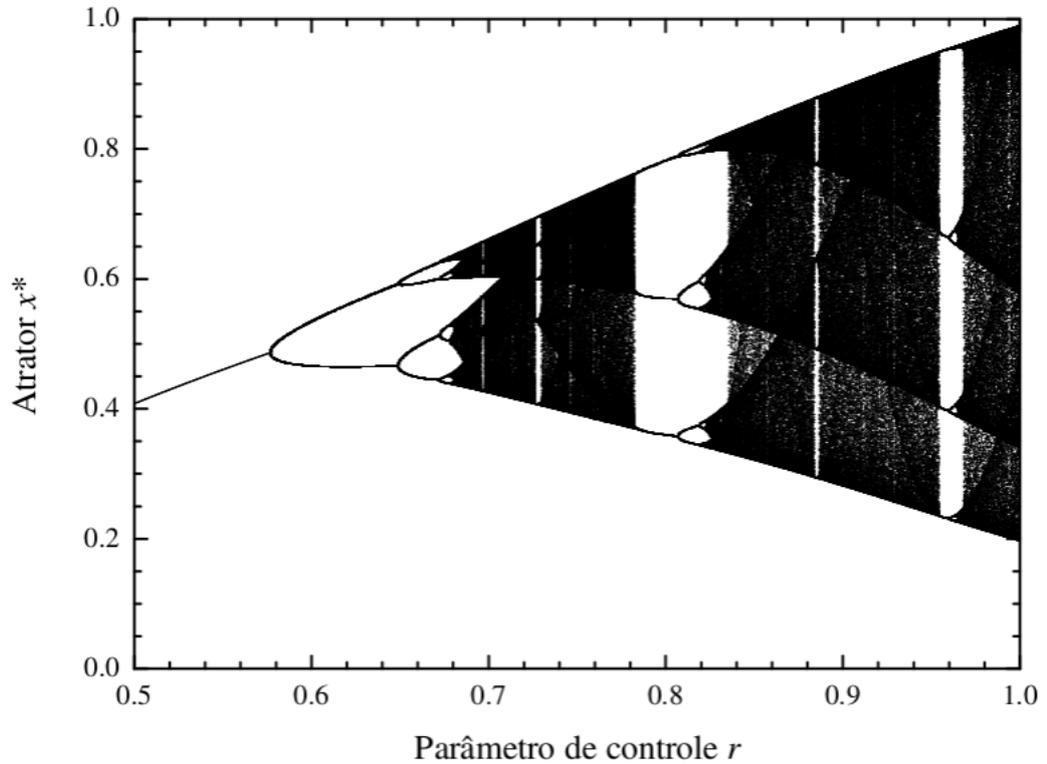


Figura 3.11: Diagrama de bifurcação para o mapa $M_r(x)$ “seguinto a intuição”.

3.2.3 A opção pelo fim

Como as duas aproximações anteriores evidenciaram, a abordagem através do mapa descrito pelas Eqs. (3.3) e (3.4) no intervalo $0.3 < r \leq 1$ está limitada pela precisão dos ajustes dos vários parâmetros. Com o objetivo de melhorar a estatística em ergodicidade plena ($r = 1$), apresentamos aqui resultados para um conjunto de ajustes focalizado na região $0.93 < r \leq 1$. Para isso, impomos a condição de que $x = 0$ seja ponto fixo do mapa e que os parâmetros x_c , A e P_1 sejam funções crescentes de r . As funções de ajuste resultantes para os nove parâmetros estão esquematizadas na Tabela B3 do Apêndice B. Seus gráficos estão mostrados na Fig. 3.12. O painel superior da Fig. 3.13 mostra o diagrama de bifurcação do mapa neste intervalo mais próximo do

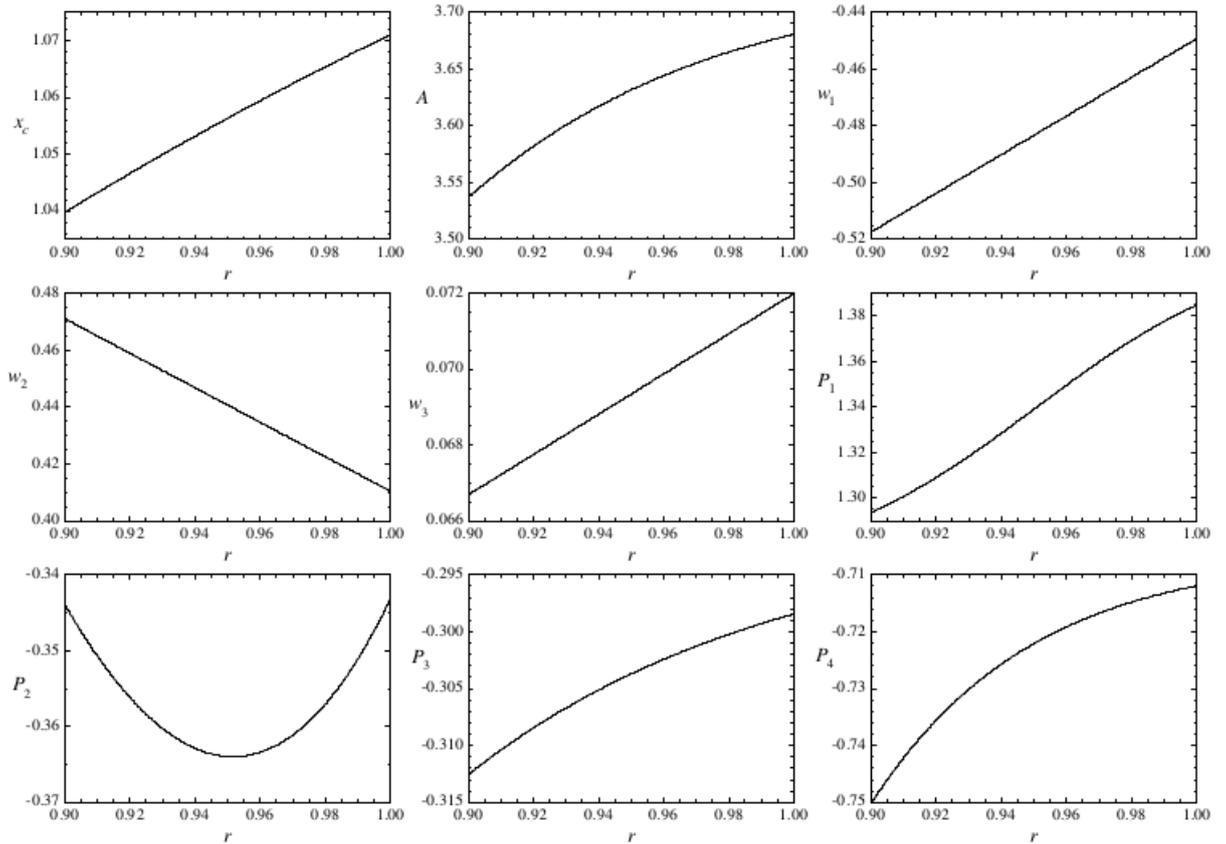


Figura 3.12: Gráficos dos parâmetros da Eq. (3.3) como função de r , obtidos através de ajustes dos mapas de retorno do sistema de Rössler. As funções correspondentes estão na Tabela B3 do Apêndice B.

fim. O painel inferior da mesma figura mostra o diagrama correspondente proveniente dos máximos em $x(t)$, solução das equações de Rössler. Embora as janelas de regimes periódicos apareçam em valores distintos do parâmetro de controle, as *linhas* que definem os esqueletos dos diagramas parecem convergir para $x = 0$ quando r se aproxima de 1.

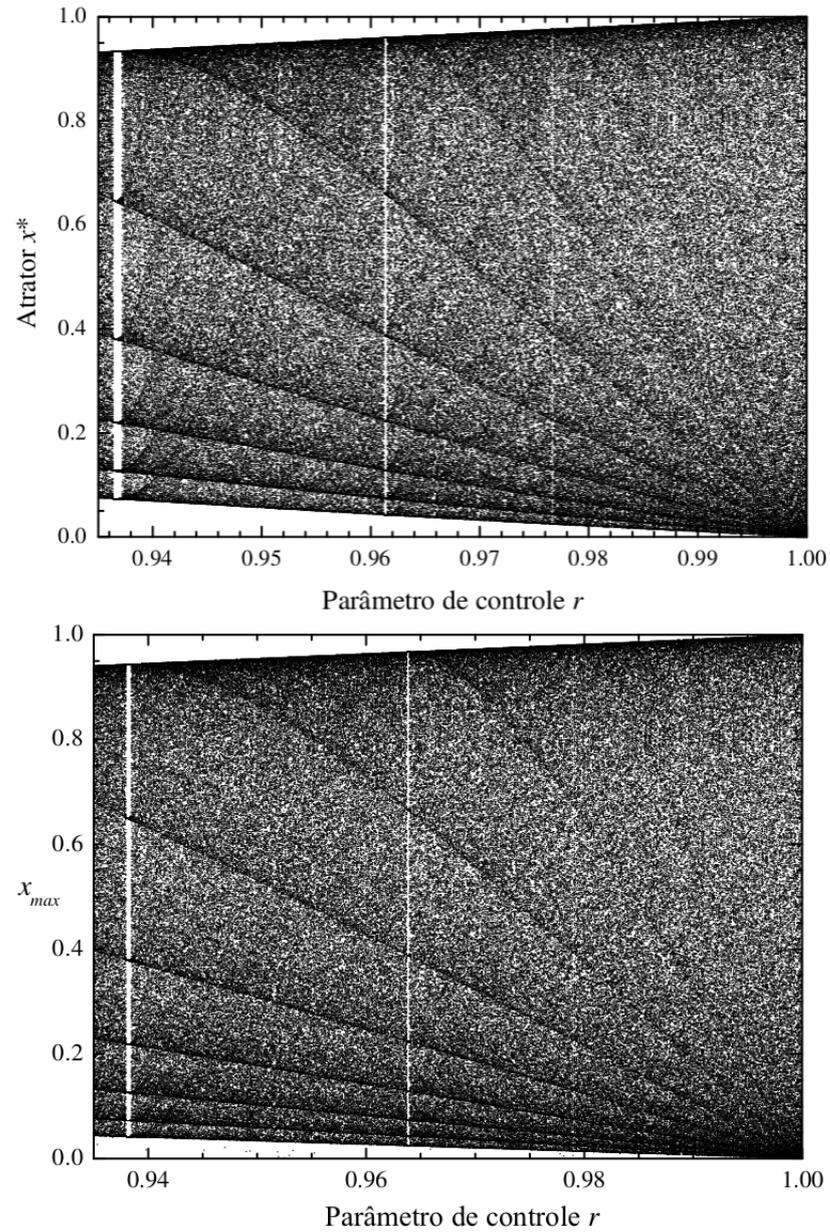


Figura 3.13: Painel superior: Diagrama de bifurcação para o mapa $M_r(x)$ com os parâmetros da Tabela B3 do Apêndice B. Painel inferior: Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler com $a = 0.17694$ e $b = 0.17872$ com $r = c/c_c$.

A Fig. 3.14 mostra o expoente de Lyapunov calculado para o mapa $M_r(x)$ na região da janela de P6, exibindo o mínimo característico do regime superestável em $r = 0.93644999\dots$. O mapa de retorno correspondente é mostrado na Fig. 3.15.

Como nos demais mapas, a dinâmica simbólica da janela de P_n é caracterizada por $n - 1$ pontos no lado esquerdo da curva $y = x$ e um ponto no lado direito.

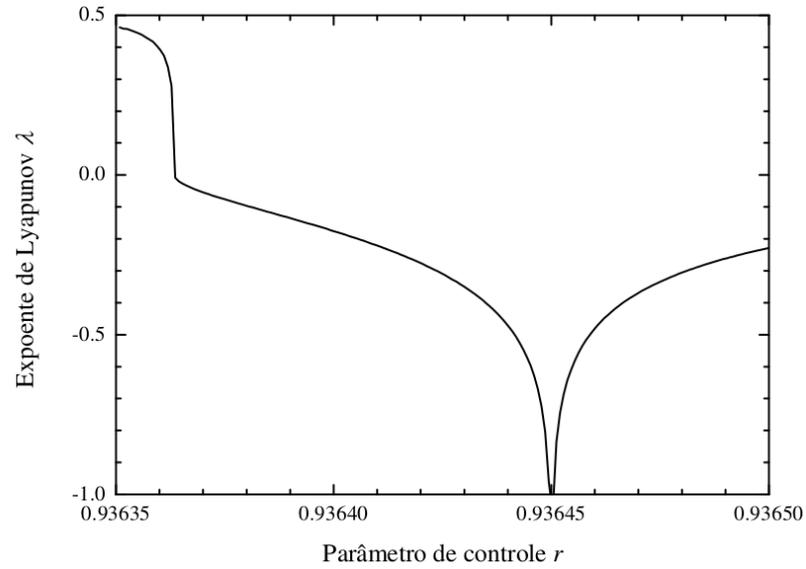


Figura 3.14: Expoente de Lyapunov λ cujo mínimo indica a órbita superestável da janelas de período-6 do mapa $M_r(x)$ com os parâmetros da Tabela B3.

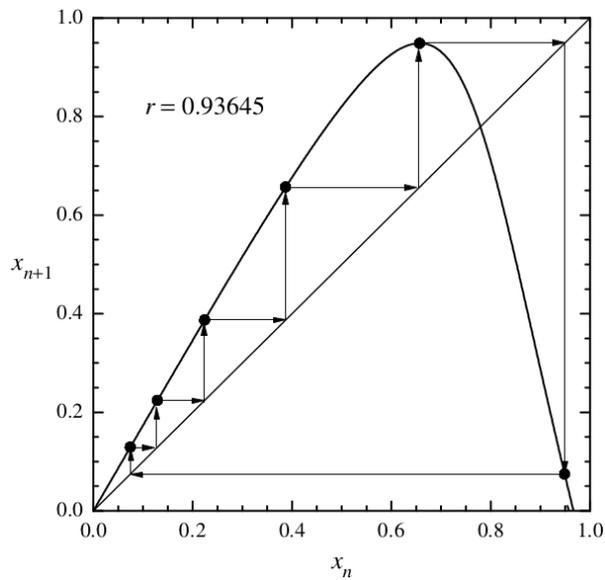


Figura 3.15: Atrator de P6 superestável do mapa $M_r(x)$ com os parâmetros da Tabela B3.

Por clareza, os símbolos na Fig. 3.16 mostram os atratores de seis mapas de retorno da seqüência de adição de período, correspondendo aos períodos de P6 a P11, em escala log-log. As linhas curvas correspondem à função $y = f(x)$ (Eq. (3.3)). A bissetriz do ângulo reto corresponde, evidentemente, à identidade $y = x$. Ainda como ilustração, mostramos na Fig. 3.17 o gráfico correspondente do atrator de período P18. Os símbolos na Fig. 3.18 mostram valores calculados para o parâmetro de convergência Δ_n . A linha sólida corresponde a um ajuste com o valor assintótico $\Delta_\infty = 1.72971$, em bom acordo com o valor aproximado de 1.74 obtido para o sistema de Rössler, como descrito no Cap. 2.

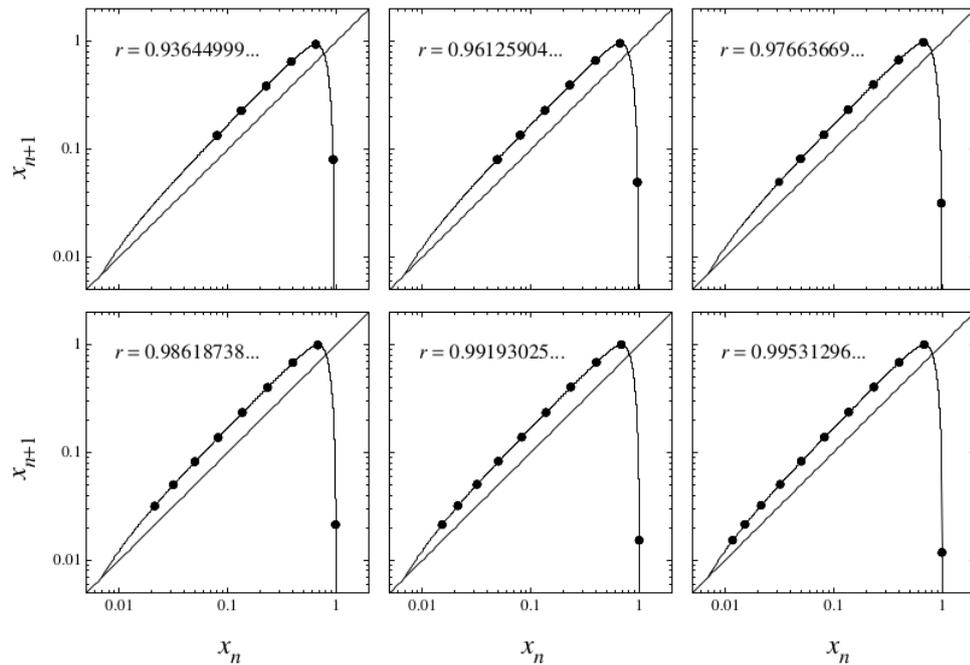


Figura 3.16: Mapas de retorno para os regimes P6, P7, P8, P9, P10 e P11 superestáveis.

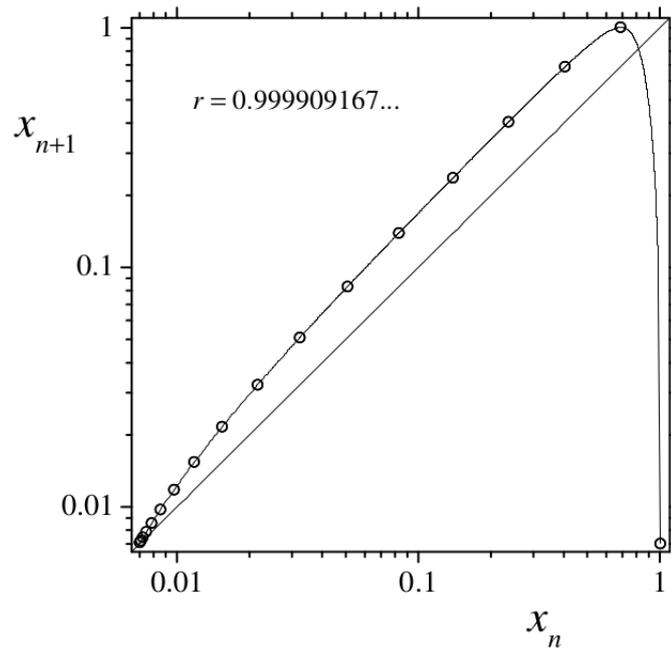


Figura 3.17: Mapa de retorno para o regime P18 superestável.

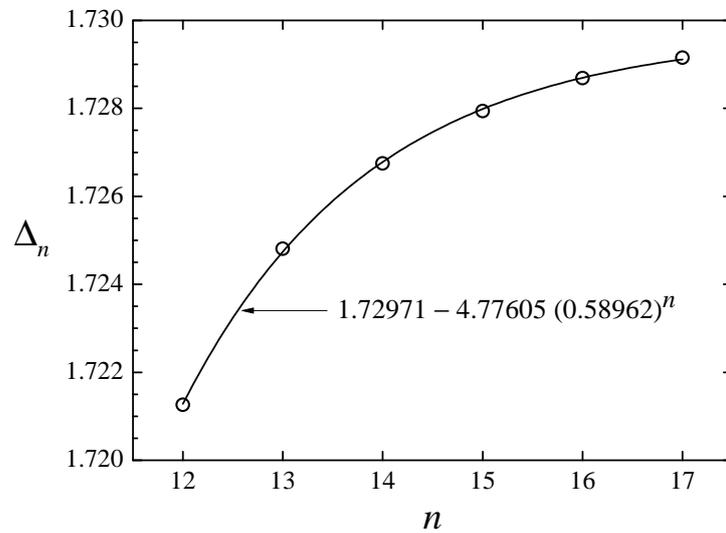


Figura 3.18: Símbolos: Parâmetro de convergência Δ_n para o mapa $M_r(x)$ dado pelas Eqs. (3.3) e (3.4) com os parâmetros da Tabela B3. Linha sólida: Ajuste com valor assintótico $\Delta_\infty = 1.72971$.

Finalmente, a distribuição das iteradas do mapa em $r = 1$ está no histograma da Fig. 3.19, juntamente com o ajuste dado pela Eq. (3.10) com $A = 0.3$. Deste histograma, obtivemos $\langle x \rangle = 0.421$, que está em bom acordo com a média obtida a partir das equações do sistema de Rössler, $\langle x \rangle = 0.424$.

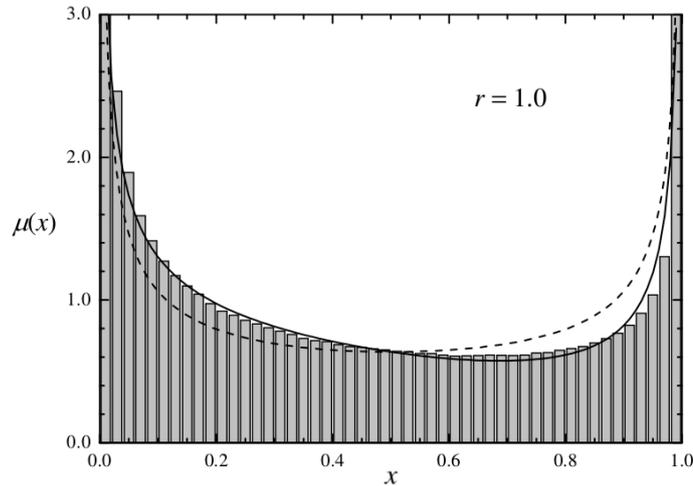


Figura 3.19: Distribuição de ocorrência das iteradas discretas do mapa $M_r(x)$ descrito pelas Eqs. (3.3) e (3.4) com os parâmetros da Tabela B3. Linha tracejada: Distribuição $\mu(x)$ do mapa logístico (Eq. (3.5)). Linha sólida: Ajuste com a distribuição $\mu_0(x)$ dada pela Eq. (3.10) com $A = 0.3$.

3.2.4 Uma medida conciliatória

Lembramos aqui que a vantagem do ajuste com a Eq. (3.10) é que ele preserva a normalização em $\mu(x)$, uma vez que adiciona à distribuição do mapa logístico uma função linear simétrica em relação ao ponto $x = 0.5$. Tentamos, então, abrir mão da normalização a priori, com um novo ajuste com uma função de quatro parâmetros na qual os expoentes de x e $(1 - x)$ no termo logístico não são iguais, ou seja,

$$\mu(x) = A(1 - 2x) + \frac{B}{x^\alpha(1 - x)^\beta}. \quad (3.15)$$

O resultado está mostrado na Fig. 3.20, onde o mesmo ajuste é exibido tanto para a distribuição do mapa FB (Fig. 3.20 (a)) como para a deste mapa que privilegia o fim (Fig. 3.20 (b)). No caso, foram usados os valores $A = 0.21$, $B = 0.32$, $\alpha = 0.55$ e $\beta = 0.45$. Com esses valores, a normalização fica a menos de 1.8% do valor exato. Por outro lado, ela prevê $\langle x \rangle = 0.423$, em ótimo acordo com aquele obtido no sistema de Rössler (Eq. (3.9)). Finalmente, usando esta medida na Eq. (A.18) obtemos para o expoente de Lyapunov o valor $\lambda = 0.597$, também em bom acordo com o valor $\lambda = 0.588$, obtido através da Eq. (2.8) para o mapa $M_r(x)$ com os parâmetros da Tabela B3.

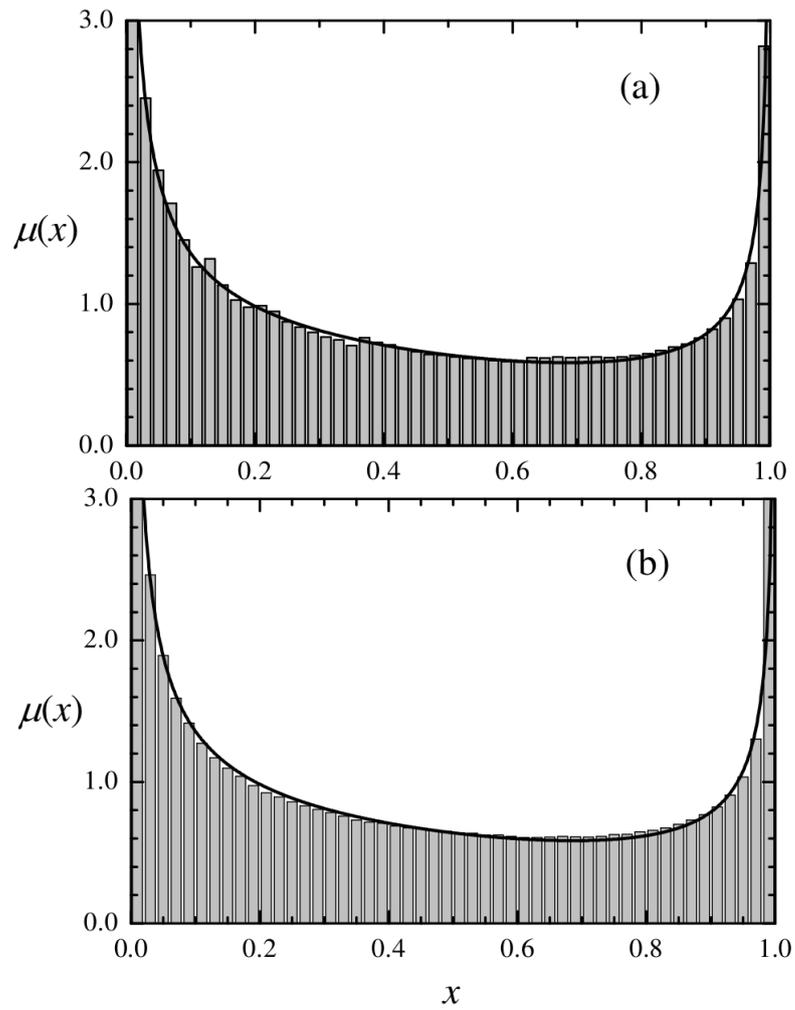


Figura 3.20: Histograma e ajuste com a Eq. (3.15) para a distribuição das iteradas do mapa $M_r(x)$ com os parâmetros da Tabela B1 (a) e da Tabela B3 (b).

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação elaboramos um programa para o cálculo numérico do espectro de Lyapunov de sistemas dinâmicos dissipativos tridimensionais, o qual reproduz satisfatoriamente resultados da literatura. Exploramos este programa para identificar um centro de periodicidade e caos nas coordenadas (a_c, c_c) do plano de parâmetros $a \times c$ do sistema de Rössler, com $b = b_c$ fixo. Com isso, identificamos claramente a possibilidade de se observar uma “sequência completa“, ou seja, uma sequência de dobramentos de período seguida de uma sequência de janelas de adição de período dentro do caos. Neste caso, com $a = a_c$, $b = b_c$ e $0.3 \leq r \leq 1$, onde $r = c/c_c$. Verificamos que a sequência de dobramentos de período acumula com o parâmetro δ de Feigenbaum e estimamos que as janelas de adição de período acumulam com razão de convergência $\Delta_\infty \approx 1.74$. A partir de mapas de retorno dos máximos locais na variável $x(t)$ do sistema de Rössler, elaboramos um mapa unidimensional $M_r(x)$, no intervalo unitário que faz a mímica da dinâmica do fluxo. Este mapa depende de funções de ajustes como as descritas nas seções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3, e no Apêndice B. Obtivemos um diagrama de bifurcação que exhibe grande semelhança com o original do sistema de Rössler, através da seção 3.2.1. Nesta abordagem, os parâmetros x_c e A são funções decrescentes de r . Contudo, o centro do mapa e sua amplitude crescem com r . Isto indica que o papel do polinômio que também é parte do mapa, é importante

nos vários ajustes. Com o objetivo de se fazer uma comparação quantitativa mais satisfatória entre o fluxo e o mapa 1D, fizemos ajustes mais cuidadosos na região $0.94 \leq r \leq 1$, como descrito na seção 3.2.3. Com isso, estimamos uma razão de convergência $\Delta_\infty \approx 1.72971$ para o acúmulo das janelas de adição de período, em que está em bom acordo com a obtida pelo sistema de Rössler. Esta abordagem revelou-se realmente mais adequada no que se refere à aproximação para a medida invariante em ergodicidade plena ($r = 1$). Neste caso, bons acordos foram encontrados, por exemplo, para média de x e para o expoente de Lyapunov.

Em perspectiva maior, deixamos a aplicação do algoritmo que permite o cálculo numérico do espectro de Lyapunov a outros sistemas dinâmicos dissipativos de interesse atual. Lembramos que ele foi explorado aqui em sistemas tridimensionais, mas a essência do método é a mesma em dimensões maiores.

Referências

- [1] J. C. Sprott and J. C. Sprott, *Chaos and time-series analysis*, Vol. 69 (Oxford University Press Oxford, 2003)
- [2] M. J. Feigenbaum, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **7**, 16 (1983)
- [3] B. Hu and J. Rudnick, *Physical Review Letters* **48**, 1645 (1982)
- [4] H. L. d. S. Cavalcante, G. L. Vasconcelos, and J. R. R. Leite, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **295**, 291 (2001)
- [5] O. E. RöSSLer, *Physics Letters A* **57**, 397 (1976)
- [6] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (Westview press, 2014)
- [7] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **16**, 285 (1985)
- [8] I. Shimada and T. Nagashima, *Progress of Theoretical Physics* **61**, 1605 (1979)
- [9] R. Van Buskirk and C. Jeffries, *Physical Review A* **31**, 3332 (1985)
- [10] C. Bonatto and J. A. Gallas, *Physical Review Letters* **101**, 054101 (2008)
- [11] J. G. Freire and J. A. Gallas, *Physical Review E* **82**, 037202 (2010)

- [12] R. Vitolo, P. Glendinning, and J. A. Gallas, *Physical Review E* **84**, 016216 (2011)

Apêndice A

Expoente de Lyapunov e medida invariante em mapas discretos unidimensionais

A medida ou densidade invariante $\mu(x)$ determina a distribuição das iteradas de um mapa

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (\text{A.1})$$

onde $x \in [0, 1]$ e $n = 0, 1, 2, \dots$ é o tempo discreto. Ela é definida por

$$\mu(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \delta(x - f^i(x_0)), \quad (\text{A.2})$$

onde f^i é a i -ésima composta de f e, portanto, $f^i(x_0) = x_i$. Se $\mu(x)$ não depende de x_0 , ou seja, não depende do tempo, dizemos que a medida é invariante e que o sistema é *ergódico*. Neste caso, temos que a média no tempo de uma função $g(x_n)$ em que os valores discretos de x são determinados pelo mapa (A.1) pode ser escrita

como

$$\bar{g} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g(f^i(x_0)) = \int_0^1 \mu(x)g(x)dx = \langle g \rangle, \quad (\text{A.3})$$

ou seja, a média no tempo de $g(x_n)$ é igual à média no *ensemble* cuja distribuição é dada pela expressão (A.2).

Com a evolução de x_0 para $x_1 = f(x_0)$, a função delta de Dirac em (A.2) evolui para $\delta(x - f(x_0))$, a qual pode ser escrita como

$$\delta(x - f(x_0)) = \int_0^1 \delta(x - f(y))\delta(y - x_0)dy. \quad (\text{A.4})$$

Generalizando para a evolução de uma densidade $\mu_n(x)$ arbitrária no tempo n temos

$$\mu_{n+1}(x) = \int_0^1 \delta(x - f(y))\mu_n(y)dy. \quad (\text{A.5})$$

Esta é a equação de Frobenius-Perron. Quando a medida é invariante, esta equação se torna

$$\mu(x) = \int_0^1 \delta(x - f(y))\mu(y)dy. \quad (\text{A.6})$$

Considere, por exemplo, o mapa $m(x) = 2x \bmod 1$, ou seja,

$$m(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 2x - 1, & \text{se } 0.5 < x \leq 1. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Como a função delta é par e possui a propriedade

$$\delta(F(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x^{(i)})}{\left| \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x^{(i)}} \right|}, \quad (\text{A.8})$$

onde $F(x^{(i)}) = 0$, segue da Eq. (A.6) que, para o mapa modular (7)

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \int_0^{0.5} \mu(y)\delta(2y-x)dy + \int_{0.5}^1 \mu(y)\delta(2y-1-x)dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{0.5} \mu(y)\delta\left(y-\frac{x}{2}\right)dy + \frac{1}{2} \int_{0.5}^1 \mu(y)\delta\left(y-\frac{x+1}{2}\right)dy \\
&= \frac{1}{2} \left[\mu\left(\frac{x}{2}\right) + \mu\left(\frac{x+1}{2}\right) \right], \tag{A.9}
\end{aligned}$$

de onde concluímos que $\mu(x) = 1$.

Considere agora o mapa logístico em $r = 4$, cujas iteradas são dadas por

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n). \tag{A.10}$$

Com a mudança de variáveis

$$x = h(y) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi y)], \tag{A.11}$$

segue de (A.10) que

$$\begin{aligned}
1 - \cos(2\pi y_{n+1}) &= 2[1 - \cos(2\pi y_n)][1 + \cos(2\pi y_n)] \\
&= 2[1 - \cos^2(2\pi y_n)] \\
&= 2\text{sen}^2(2\pi y_n) \\
&= 1 - \cos(4\pi y_n). \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Esta equação tem solução única no intervalo unitário, a saber

$$y_{n+1} = 2y_n \text{ mod } 1, \tag{A.13}$$

o mapa modular $m(y)$ de medida $\mu(y) = 1$ discutido anteriormente. Resumindo, a função $h(y)$ em (A.11) mapeia o intervalo unitário ergodicamente visitado pelo mapa

logístico (A.10) com medida $\mu(x)$ no intervalo unitário ergodicamente visitado pelo mapa modular (A.7) com medida microcanônica $\mu(y) = 1$. Essas duas medidas estão relacionadas através da equação de Frobenius-Perron, como segue da própria definição

$$\mu(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \delta(x - h(y_n)) = \int_0^1 \mu(y) \delta(x - h(y)) dy = \int_0^1 \delta(x - h(y)) dy. \quad (\text{A.14})$$

Usando a propriedade (A.8) temos que

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \int_0^1 \delta(h(y') - x) dy' \\ &= \frac{1}{\left| \frac{dh}{dy'} \Big|_{y'=y(x)} \right|} \left[\int_0^{0.5} \delta(y' - y(x)) dy + \int_{0.5}^1 \delta(y' - y(x)) dy \right] \\ &= \frac{2}{\left| \frac{dh}{dy'} \Big|_{y'=y(x)} \right|}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Agora, invertendo (A.11), temos que $y(x) = \frac{1}{2\pi} \arccos(1 - 2x)$, de modo que o denominador em (A.15) fica

$$h'(y(x)) = \pi \text{sen}[\arccos(1 - 2x)] = \pi \sqrt{1 - (1 - 2x)^2} = 2\pi \sqrt{x(1 - x)}, \quad (\text{A.16})$$

de onde segue que

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1 - x)}}. \quad (\text{A.17})$$

Finalmente, para um mapa genérico (A.1), a definição (A.2) permite ainda uma relação direta entre o expoente de Lyapunov e a medida invariante:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 \delta(x - x_i) \ln |f'(x)| dx \\ &= \int_0^1 \mu(x) \ln |f'(x)| dx. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Ou seja, de uma forma (soma discreta) ou de outra (soma contínua), o expoente de Lyapunov é a média do logaritmo natural do valor absoluto da derivada do mapa $f(x)$. Em particular, para o mapa logístico (A.10), segue de (A.17) e (A.18) que $\lambda = \ln 2 = 0.693147\dots$, o qual calculamos numericamente, e obtivemos $\lambda = 0.693127\dots$

Apêndice B

Parâmetros do mapa $M_r(x)$

Neste Apêndice estão tabeladas as funções que descrevem os parâmetros do mapa $M_r(x)$ descrito pelas equações (3.3) e (3.4). A Tabela B1 para o mapa da seção 3.2.1, a Tabela B2 para o mapa da seção 3.2.2 e a Tabela B3 para o mapa da seção 3.2.3.

Tabela B.1: Parâmetros como função de r da Eq. (3.3) para o mapa $M_r(x)$ da seção 3.2.1.

i	Funções $R_i(r)$ e seus parâmetros
–	$R_i(r) = a_i r + b_i$
1	$R_1(r) = y_0(r), a_1 = 0.72716, b_1 = -0.8403$
2	$R_2(r) = x_c(r), a_2 = -4.15421, b_2 = 5.64757$
3	$R_3(r) = w_1(r), a_3 = 9.70095, b_3 = -11.00418$
4	$R_4(r) = w_2(r), a_4 = -1.49464, b_4 = 1.93359$
5	$R_5(r) = P_1(r), a_5 = 0.32252, b_5 = 1.06343$
–	$R_i(r) = a_i + b_i(c_i - r)^{d_i}$
6	$R_6(r) = A(r), a_6 = 11.9496, b_6 = 255.11377, c_6 = 1.02936,$ $d_6 = 1.21164$
–	$R_i(r) = a_i + b_i \left\{ \frac{1.0}{1.0 + \exp[-(r-c_i)/d_i]} \right\} \left\{ 1.0 - \frac{1.0}{1.0 + \exp[-(r-e_i)/f_i]} \right\}$
7	$R_7(r) = w_3(r), a_7 = 0.0694, b_7 = -0.03743, c_7 = 0.9542,$ $d_7 = 0.41556, e_7 = 0.9542, f_7 = 0.0608$
8	$R_8(r) = P_2(r), a_8 = 0.76905, b_8 = -0.75511, c_8 = 0.400535,$ $d_8 = 1.043505, e_8 = 1.043505, f_8 = 0.04654$
–	$R_i(r) = a_i + b_i \left\{ \frac{c_i}{1.0 + 10^{[(d_i-r)(e_i)]}} + \frac{f_i}{1.0 + 10^{[(g_i-r)(h_i)]}} \right\}$
9	$R_9(r) = P_3(r), a_9 = -2.00105, b_9 = 3.92365, c_9 = 0.62117,$ $d_9 = 0.030127, e_9 = -31.13043, f_9 = 0.37883$ $g_9 = 1.02141, h_9 = -13.4513$
–	$R_i(r) = a_i + b_i \left\{ \frac{c_i}{1.0 + 10^{[(d_i-r)(e_i)]}} + \frac{f_i}{1.0 + 10^{[(g_i-r)(h_i)]}} \right\}$ $j_i r + k_i r^2 + l_i r^3 + m_i r^4$
10	$R_{10}(r) = P_4(r), a_{10} = 5.90373, b_{10} = 24.38358, c_{10} = 0.81593,$ $d_{10} = 0.25751, e_{10} = 17.77172, f_{10} = 0.18497$ $g_{10} = 0.81767, h_{10} = 4.25695, j_{10} = -191.41608$ $k_{10} = 465.26652, l_{10} = -480.95921, m_{10} = 176.86508$

Tabela B.2: Parâmetros como função de r da Eq. (3.3) para o mapa $M_r(x)$ da seção 3.2.2.

i	Funções $R_i(r)$ e seus parâmetros
–	$R_i(r) = a_i r + b_i$
1	$R_1(r) = x_c(r)$, $a_1 = 0.32292$, $b_1 = 0.74864$
2	$R_2(r) = A(r)$, $a_2 = 1,64199$, $b_2 = 2.04872$
3	$R_3(r) = w_1(r)$, $a_3 = 0.68054$, $b_3 = -1.12987$
4	$R_4(r) = w_2(r)$, $a_4 = -0.60761$, $b_4 = 1.01795$
5	$R_5(r) = w_3(r)$, $a_5 = 0.05317$, $b_5 = 0.01883$
6	$R_6(r) = P_1(r)$, $a_6 = 0.90637$, $b_6 = 0.47823$
7	$R_7(r) = P_2(r)$, $a_7 = -0.18953$, $b_7 = -0.14531$
–	$R_i(r) = a_i + b_i(c_i)^r$
8	$R_8(r) = P_3(r)$, $a_8 = -0.52569$, $b_8 = -44.47034$, $c_8 = 0.00488$
9	$R_9(r) = P_4(r)$, $a_9 = -0.42482$, $b_9 = 87.82309$, $c_9 = 0.00344$
–	$y_0 = \text{Eq. (3.14)}$.

Tabela B.3: Parâmetros como função de r da Eq. (3.3) para o mapa $M_r(x)$ da seção 3.2.3.

i	Funções $R_i(r)$ e seus parâmetros
–	$R_i(r) = a_i r + b_i$
1	$R_1(r) = w_1(r)$, $a_1 = 0.68054$, $b_1 = -1.12987$
2	$R_2(r) = w_2(r)$, $a_2 = -0.60761$, $b_2 = 1.01795$
3	$R_3(r) = w_3(r)$, $a_3 = 0.05317$, $b_3 = 0.01883$
–	$R_i(r) = a_i + \frac{b_i}{1.0+(r/c_i)^{d_i}}$
4	$R_4(r) = P_3(r)$, $a_4 = -0.28921$, $b_4 = -7.74732$, $c_4 = 0.46689$, $d_4 = 8.83866$
–	$R_i(r) = a_i + b_i \left\{ \frac{1.0}{1.0+\exp[-(r-c_i)/d_i]} \right\} \left\{ 1.0 - \frac{1.0}{1.0+\exp[-(r-e_i)/f_i]} \right\}$
5	$R_5(r) = P_2(r)$, $a_5 = 3.11649$, $b_5 = -6.77679$, $c_5 = 0.777225$, $d_5 = 0.13857$, $e_5 = 1.274775$ $f_5 = 0.13857$
–	$R_i(r) = a_i + b_i \left\{ \frac{c_i}{1.0+10^{[(d_i-r)(e_i)]}} + \frac{f_i}{1.0+10^{[(g_i-r)(h_i)]}} \right\}$
6	$R_6(r) = P_1(r)$, $a_6 = 1.4129$, $b_6 = 0.4656$, $c_6 = 1.33303$, $d_6 = 0.40456$, $e_6 = -4.15781$, $f_6 = -0.33303$, $g_6 = 0.94964$, $h_6 = -12.31662$
7	$R_7(r) = P_4(r)$, $a_7 = -0.70642$, $b_7 = 3.59296$, $c_7 = 1.31791$, $d_7 = 0.46478$, $e_7 = -14.03846$, $f_7 = -0.31791$, $g_7 = -14.03846$, $h_7 = 0.74737$
8	$R_8(r) = x_c(r)$, $a_8 = 0.61192$, $b_8 = 0.53683$, $c_8 = 0.81391$, $d_8 = 0.3939$, $e_8 = 1.40426$, $f_8 = 0.18609$, $g_8 = 0.8252$, $h_8 = 2.89037$
9	$R_9(r) = A(r)$, $a_9 = 0.83942$, $b_9 = 2.88954$, $c_9 = 0.65998$, $d_9 = 0.53087$, $e_9 = 4.37201$, $f_9 = 0.34002$, $g_9 = 0.79518$, $h_9 = 7.20971$
–	$y_0 = \text{Eq. (3.14)}$.