UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

Resolvendo problemas de multiplicação e divisão envolvendo o agrupamento explícito e implícito

FERNANDA AUGUSTA LIMA DAS CHAGAS

Dissertação de Mestrado

Recife
2014

FERNANDA AUGUSTA LIMA DAS CHAGAS

Resolvendo problemas de multiplicação e divisão envolvendo o agrupamento explícito e implícito

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, da Universidade Federal de Pernambuco, para obtenção do título de mestre em Psicologia.

Área de Concentração: Psicologia Cognitiva
Orientadora: Síntria Labres Lautert

Recife

2014

Catalogação na fonte
Bibliotecária Maria Janeide Pereira da Silva, CRB4-1262

C433r Chagas, Fernanda Augusta Lima das.
Resolvendo problemas de multiplicação e divisão envolvendo o agrupamento explícito e implícito / Fernanda Augusta Lima das Chagas. – 2014.
85 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora : Profª. Drª. Síntria Labres Lautert
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CFCH. Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, 2014.
Inclui Referências e anexos.

1. Psicologia cognitiva. 2. Psicologia da aprendizagem. 3. Matemática - Aprendizagem - Aspectos psicológicos. 4. Ensino fundamental. 5. Matemática - Multiplicação. 6. Matemática - Divisão. 7. Agrupamento explícito. 8. Agrupamento implícito. 9. Estrutura multiplicativa. I. Lautert, Síntria Labres. II. Título.

159 CDD (22. ed.) UFPE (BCFCH2016-127)

FOLHA DE APROVAÇÃO

Fernanda Augusta Lima das Chagas

Resolvendo problemas de multiplicação e divisão envolvendo o agrupamento explícito e implícito.

Dissertação apresentada à Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Psicologia Cognitiva.
Área de concentração: Psicologia Cognitiva

Aprovado em: 26 de fevereiro de 2014.

Banca Examinadora

Profa. Drª.: Alina Galvão Spinillo

Instituição: Universidade Federal de Pernambuco | UFPE

Prof. Dr.: Ernani Martins dos Santos

Instituição: Universidade de Pernambuco | UPE

Dedicatória

Dedico, a conclusão deste trabalho, ao meu querido Amigo de todas as horas, **Deus**, que configurou em mim os seus Planos de Amor, devolvendo a minha oferta como fez a Abraão. Pelo Amor Incondicional, Doce e Terno que me sustenta a cada instante.

AGRADECIMENTOS

Os livros, as teses, as dissertações, os artigos, os congressos científicos, ao longo desses dois anos de Mestrado, me auxiliaram bastante, digo até que foram fundamentais, porque me proporcionaram inúmeras reflexões, dando suporte a escrita deste trabalho. No entanto, eles não amam e por isso precisamos de pessoas, familiares, amigos, anjos de Deus ao nosso lado. A partir dessa compreensão, realizada ao longo de minha trajetória acadêmica, faço nesse momento memória das inúmeras pessoas me apoiaram e participaram de forma direta ou indireta da construção desse trabalho, tornando-o significativo para mim. Por isso, venho aqui expressar, com palavras, toda a gratidão que se encontra em meu coração.

Eterna gratidão a **Deus**, meu melhor Amigo, que ao meu lado permaneceu nas inúmeras madrugadas de estudo. Quando todos em minha casa estavam dormindo, e eu aparentemente sozinha, pude experimentar da Sua Presença, trazendo sabedoria e força para não desistir. Não foi fácil "lançar as redes" novamente (entregando mais termos de consentimento aos estudantes), acreditando que conseguiria coletar a quantidade necessária dos participantes para a realização da análise, mas a Fé me moveu e me conduziu a experimentar do milagre.

À minha orientadora, mãe na academia, **Síntria Labres Lautert**, que entrou em minha vida como um anjo de Deus, por sua presença amiga ao longo desses sete anos em que trabalhamos juntas, compartilhando conhecimento, experiência de vida e amizade. As palavras não são capazes de descrever exatamente o que sinto agora ao tentar expressar a minha profunda gratidão por todo apoio, compreensão e principalmente por ter me ajudado a ser mais humana. Obrigada por ter acreditado que o trabalho seria concluído! Não poderia esquecer que a orientação como sempre foi para além da academia, chegando à vida e por isso sou muito grata!

Ao meu querido pai terreno, **Romildo Tenório das Chagas,** que desde os meus primeiros anos de vida me estimulou e incentivou a ter um olhar especial pela Matemática. A minha querida mãe, **Maria Augusta Sidrônio de Lima,** que não teve a oportunidade de estudar o quanto desejava, mas sempre me incentivou em minha trajetória de estudos, com sua compreensão e ajuda diante dos desafios. A vocês gratidão eterna por todo o amor e cuidado!

À **Ivone Chagas**, minha irmã, presente e socorro de Deus em minha vida. Muito obrigada por sua ajuda na coleta dos dados, ela sem dúvida foi essencial!

À **Luciana do Nascimento**, minha prima, por ter me ajudado na finalização do Abstract. Thanks, Lu!

A toda minha **família** pelo amor e paciência diante da minha tentativa de administrar o tempo da melhor forma.

À professora **Sandra Magina,** que me influenciou com o tema, através de uma palestra realizada pelo Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM) no qual faço parte, e proporcionou um grande aprendizado com o desafio.

À professora **Alina Spinillo,** por ter aceitado participar da minha banca de defesa de mestrado, minha gratidão! Como você já sabe tenho um profundo respeito acadêmico e admiração por você! Para mim é sempre um prazer ouvir os seus comentários e críticas que tanto me enriquecem e me levam a refletir. Muito obrigada por todo apoio e exemplo na academia!

Ao professor **Ernani Martins,** por toda disponibilidade e ajuda na construção da ideia que trabalhei nessa pesquisa, como também na avaliação dos problemas. Seus comentários foram essenciais! Muito obrigada por ter aceitado participar da minha banca de defesa de mestrado!

Ao professor **Maurício Bueno,** por toda ajuda no tratamento estatístico dos dados e pela imensa paciência e disponibilidade.

Ao **NUPPEM** que me conduz sempre a pensar na Educação Matemática de maneira a tornar-me mais apaixonada por esta fascinante área de conhecimento, a matemática, e pelos **amigos** que tenho descoberto nele ao longo das atividades realizadas.

Às amigas **Patrícia Interaminense** e **Hanna Kardenya** pela disponibilidade em me ajudar na coleta de alguns dados e pela amizade. Os ouvidos de vocês foram fundamentais! Obrigada pelas vezes que apenas estiveram ao meu lado, acreditando que era possível!

À **Layane Carolinne**, **Ana Bárbara**, **John Oliveira**, por toda ajuda nas análises dos dados. Muito obrigada por tudo!

À **Danielle Sobral e Vanessa Alencar** pela disponibilidade para fazer uma revisão no material que enviei no auge da madrugada! Meninas, Deus lhes pague! Os comentários foram fundamentais!

Ao professor, amigo, **Rogério Ignácio,** por todas as discussões matemáticas que antecederam o mestrado. Elas foram essenciais! O tempo se encarregou de nos afastar diante das nossas escolhas, no entanto, não posso deixar de expressar a minha gratidão, admiração e respeito!

A todos os **meus irmãos** que encherem os céus com suas orações e aos meus **formadores (José Mário Freire e Jaíra Meira)** que me liberaram das atividades da Comunidade Católica Shalom, da qual faço parte, para que conseguisse terminar a minha dissertação. E as **Irmãs Carmelitas** que também intercederam pela conclusão desta etapa em minha vida!

Ao **Colégio Marista São Luís**, na pessoa do **Irmão Iranilson Lima** (Diretor), que me concedeu a possibilidade de conciliar o trabalho com o mestrado, permitindo me ausentar de algumas atividades, em vista de finalizar a minha dissertação. Por todo apoio da equipe (**Regina Pinheiro, Juliana Silvestre, Edmilson Pessoa e André Luiz**) do Núcleo de Apoio Pedagógico que na época trabalhava diariamente ao meu lado. Vocês fizeram toda diferença com palavras e presença nos meus últimos dias! Como também pelas palavras de esperança e força do **Irmão Natalino** e **Francisco Saldanha** (Chico) do Núcleo de Apoio ao Estudante. Gratidão!

Aos meus colegas de turma **(Cachaça Cognitiva)** que marcaram minha vida de forma única! Vocês são caros ao meu coração! Obrigada por tudo!

As secretárias da Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, **Vera Amélia**, **Vera Lúcia, Elaine Marques** que com sua presença alegraram as minhas tardes na Pós e se colocaram à disposição para resolver todas as questões burocráticas ao longo desses dois anos.

Às **escolas** investigadas, as **crianças** que participaram deste estudo e aos seus **professores** pelo seu interesse e colaboração, tornando possível a realização da pesquisa.

À **UFPE**, pela concessão da bolsa REUNI de auxílio à pesquisa, nos períodos de Abril a Julho de 2012, para que eu realizasse atividades pedagógicas com alunos da graduação em Psicologia da UFPE.

À **FACEPE**, pela concessão da bolsa de auxílio à pesquisa, durante alguns meses ao longo do mestrado, o que permitiu o regime de dedicação exclusiva ao Mestrado.

Gratidão é a linguagem do meu coração!

Resumo

Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática apontam algumas das dificuldades que as crianças apresentam em relação às estruturas multiplicativas. Por isso, o presente estudo investigou, se e como, a noção de agrupamento explícito poderia favorecer o raciocínio matemático das crianças na resolução de problemas de multiplicação e divisão (partição e quota) de proporção simples de um-para-muitos. De forma específica, investigou as estratégias utilizadas pelas crianças para resolver essa classe de problemas, buscando observar se algum tipo de problema desse agrupamento explícito favoreceu a resolução, como também analisar a maneira na qual a criança lida com os problemas que possui o agrupamento implícito. Para tanto, a dissertação se fundamenta nas ideias de Jean Piaget para discorrer sobre o desenvolvimento cognitivo e a construção de conceitos, e no campo da Matemática, na Teoria dos Campos Conceituais apresentada por Gérard Vergnaud. Participaram dessa pesquisa 119 crianças, de ambos os sexos, com idades entre 6 e 11 anos, cursando 2º ano, 3º ano, 4º ano e 5º ano, do Ensino Fundamental (anos iniciais) de escolas públicas da cidade do Recife. Todos os participantes foram entrevistados individualmente em duas sessões, sendo solicitados a resolver seis problemas em cada sessão, totalizando doze problemas, envolvendo o agrupamento explícito e implícito. Após aplicação das tarefas foi realizada uma entrevista individual, seguindo o método clínico piagetiano, onde foi solicitado ao participante que explicasse a estratégia utilizada na resolução dos problemas apresentados. Os dados foram analisados em função do número de acertos e das estratégias utilizadas. De modo geral, os resultados mostraram que não houve diferença significativa nos problemas de agrupamento explícito, quando comparado aos de agrupamento implícito. Isso talvez tenha ocorrido devido há algumas limitações encontradas na pesquisa. Entretanto, no que diz respeito aos participantes do 2º ano foi verificada uma diferença significativa nos problemas de divisão por quota, contendo o agrupamento explícito, quando comparado aos problemas de partição. Mas apesar do dado encontrado não é possível afirmar com precisão que esse tipo de agrupamento tenha favorecido, uma vez que pesquisas anteriores demonstram que as crianças tendem a apresentar melhores resultados na resolução nos problemas de divisão por quota. As estratégias foram analisadas, considerando a pesquisa realizada por Magina, Santos e Merlini (2010) e por Chagas (2011), sendo, detectados quatro tipos de respostas, a saber: inconsistente, pensamento aditivo, transição e pensamento multiplicativo. O teste aplicado em relação às estratégias não detectou diferenças significativas nos diferentes tipos de agrupamento, considerando os anos investigados. Conclui-se que o agrupamento explícito não favorece no raciocínio das crianças na resolução de problemas de multiplicação e divisão (partição), de proporção simples de um-para-muitos. No entanto, o fato de ter encontrado uma diferença na resolução dos problemas de divisão por quota de agrupamento explícito, nos estudantes do 2º ano, faz com que se pense na possibilidade de realizar outro estudo mais detalhado, contendo um maior número de problemas e de participantes para de verificar se realmente há diferença, visto que não é possível afirmar a diferença na atual pesquisa.

Palavras-chaves: Estrutura Multiplicativa. Multiplicação. Divisão. Ensino Fundamental. Agrupamento Explícito. Agrupamento Implícito.

Abstract

Research in Psychology of Mathematics Education point out the difficulties that children have in relation to the multiplicative structures. This study had as general objective investigate if and how the explicit grouping can influence in the logic of the students in the resolution of multiplication and division problems (partition and share) of simple proportion from one-to-many. Specifically, we investigated the strategies used by children to solve this class of problems, trying to see if any problems that explicit grouping favored the resolution, but also examine the way in which the child deals with the problems that have the implicit grouping. Therefore, the dissertation is based on Jean Piaget ideas to discuss cognitive development and the construction of concepts, and in the field of Mathematics, Theory of Conceptual Fields by Gérard Vergnaud. Participated in this study 119 children of both sexes, aged between 6 and 11 years old, attend classes 2º grade, 3º grade, 4º grade and 5º grade, of Elementary Education (first years) of public schools from Recife. All the participants were interviewed individually in two sessions, being order to resolve six problems in each session, totalizing 12 problems, involving the idea of explicit grouping and implicit grouping. After the problems application it was make an individual interview, following Piaget clinical methods, which was order that the participant explain the strategy used in the resolution of presented problems. The data were analyzed in function of correct numbers and follow strategies. In general, the results showed no significant differences in explicit grouping problems, when compare with implicit grouping. This maybe happen because there are some limitations found in the search. However, about the participants of 2º grade it was observed a significant difference in share by division problems, the explicit containing group when compared to partitioning problems. But even with this data is not possible to state precisely that type of grouping has favored, since previous research has shown that children tend to have better results in solving problems in the division by quota. About the strategies were analyzed considering the research made by Magina, Santos and Merlini (2010) and by Chagas (2011) and it was found four types of answers, to know: inconsistent, additive thought, transition and multiply thought. The test applied in relation to the strategies did not detect significant differences in the different types of grouping, considering the years investigated. It concluded that the explicit grouping doesn´t influence the children logical in resolution of multiplication and division problems (partition) of simple proportion from one-to-many. However, the fact of having found a significant difference in solving division problems by explicit grouping share, the students of 2º grade, makes you think of the possibility of carrying out a more detailed study, containing a large number of problems and participants to check if there really is a difference, since it is not possible to state the difference in current research.

Keywords: Multiplicative Structure. Multiplication. Division. Elementary Education. Explicit Grouping. Implicit Grouping.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa está inserida na área de estudo da Psicologia Cognitiva com o propósito de compreender como ocorre o desenvolvimento das capacidades cognitivas e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Em particular essa investigação tem por foco o agrupamento explícito e o agrupamento implícito em problemas envolvendo o campo conceitual das Estruturas Multiplicativas, nos problemas de multiplicação e divisão, analisando o desempenho e as estratégias adotadas por estudantes dos anos Iniciais do Ensino Fundamental.

O ensino da Matemática costuma despertar inúmeros questionamentos nos professores que transmitem os conteúdos, nos estudantes que apresentam dificuldades para assimilar as informações, como também nos pais que presenciam o sofrimento dos filhos diante desse componente curricular. É possível observar que o processo de aprendizagem na área da Matemática tem demonstrado resultados negativos com frequência, porque os algoritmos, em sua maioria, estão sendo apresentados de forma mecânica, desprovidos de significados.

Esses resultados negativos podem ser verificados através do índice de desempenho dos estudantes em Matemática no Brasil e no mundo, nas etapas de escolarização da Educação Básica. Atualmente ele encontra-se abaixo do considerado satisfatório, conforme pode ser constatado pelo *Programme for International Student Assessment* – PISA[1] (2009), que avalia a proficiência dos estudantes em Matemática a nível internacional. Este exame evidencia, entre outros aspectos, que o Brasil está na 57ª posição dentre os 65 países que participaram da investigação. No âmbito nacional, os resultados são similares, visto que os índices de desempenho dos estudantes também são baixos, nas avaliações federais do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB[2].

---

[1] O *Programme for International Student Assessment* (PISA) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes avalia sistemas educacionais de 65 países, incluindo o Brasil. Tem por objetivo, examinar o desempenho de estudantes na faixa-etária dos 15 anos, idade média do término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O indicador é desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). As avaliações do Pisa acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento, a saber: Leitura, Matemática e Ciências. (Inep 2011. Recuperado em 06 abril 2013, de http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos)

[2] O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é uma avaliação para diagnóstico, em larga escala, desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Têm o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes

Dessa forma, as avaliações apresentadas, apontam que o ensino da Matemática ocupa hoje no Brasil e no mundo um lugar preocupante dentro do ensino das ciências. Por isso, diversos pesquisadores já realizaram estudos relacionados à dificuldade das crianças em trabalhar com os algoritmos das séries iniciais, no âmbito da Matemática, na área da Psicologia Cognitiva (Nunes & Bryant, 1997; Nunes, Campos, Magina, & Bryant, 2001; Spinillo & Lautert, 2006). Essas pesquisas têm indicado que o indivíduo desenvolve as habilidades de lidar com os números à medida que evolui cognitivamente. Nesse processo, a escola ocupa um lugar privilegiado na aprendizagem, sendo o adulto o principal mediador entre o objeto de conhecimento e o seu aprendiz.

Para tanto, em vista de aprofundar as investigações no âmbito da matemática, este estudo buscou verificar, se e como, agrupamento explícito poderia favorecer o raciocínio matemático das crianças na resolução de problemas de multiplicação e divisão (partição e quota) de proporção simples de um-para-muitos. Considerando que o agrupamento explícito pode ser compreendido nos problemas de estrutura multiplicativa, quando todos os elementos envolvidos no cálculo estabelecem relação entre si, representando uma quantidade de agrupamentos de objetos de mesma natureza. De forma especifica, investigou: as estratégias utilizadas pelas crianças para resolver esse tipo problema, procurando identificar se em algum tipo de problema essa noção facilitaria, como também buscou verificar como a criança lida com os problemas que não possui o agrupamento explícito.

A dissertação será apresentada em cinco capítulos. No primeiro capítulo são tecidas considerações teóricas sobre o desenvolvimento cognitivo e a construção de conceitos, a partir das ideias de Jean Piaget, sendo posteriormente apresentadas e discutidas as questões referentes à Teoria dos Campos Conceituais, delineada por Gérard Vergnaud. Este teórico propõe uma teoria psicológica da conceitualização da realidade, através da qual é possível estudar os elos e as rupturas existentes entre os saberes e que pode ser aplicada a qualquer campo do conhecimento. Para esse teórico, os conceitos não devem ser definidos apenas pela sua estrutura, e para dominá-los é necessário considerar três aspectos: (i) um conjunto de representações simbólicas, gráficas, gestuais, linguísticas; (ii) um conjunto de invariantes

padronizados e questionários socioeconômicos. Nos testes aplicados no 5º ao 9º anos do ensino fundamental e no 3º do ensino médio, os estudantes respondem a itens (questões) de língua portuguesa, com foco em leitura, e matemática, com foco na resolução de problemas. (Ministério da Educação 2013. Recuperado em 06 abril 2013, de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&id=210&Itemid=324)

operacionais, propriedades fundamentais que caracterizam o conceito; (iii) e um conjunto de situações que dá sentido aos conceitos. (Vergnaud, 1997)

No segundo capítulo, demonstra-se o método adotado nessa investigação, os objetivos gerais e específicos, os participantes, o planejamento e o procedimento experimental. Já no terceiro capítulo são descritos o sistema de análise implementado e os resultados relativos ao desempenho e às estratégias de resolução adotadas pelos participantes, no geral e por tipo de problema.

No quarto e no último capítulo, são apresentadas as conclusões e discussões, a partir dos resultados obtidos nesta investigação. As conclusões decorrentes desta dissertação, não são suficientes para responder com precisão se os diferentes tipos de agrupamentos podem vir a favorecer o raciocínio matemático, dentro da estrutura multiplicativa, no qual se insere o conceito de multiplicação e divisão. Nesse sentido são discutidas nas conclusões as limitações dessa investigação e apresentadas sugestões de futuras pesquisas que poderiam contribuir para as questões suscitadas na presente investigação.

Capítulo I
Fundamentação teórica

As considerações teóricas que fundamentam o presente estudo partem de um diálogo entre a Psicologia e a Educação Matemática. De modo que será realizada uma descrição geral, de como ocorre o desenvolvimento cognitivo e a construção dos conceitos de forma ampla, e uma descrição específica, considerando o mesmo desenvolvimento e a construção de conceitos no âmbito na Matemática. A descrição geral versa sobre a construção teórica de Piaget e de maneira específica, traz a perspectiva de Vergnaud sobre a Teoria dos Campos Conceituais. Ademais, será realizada uma discussão no campo do ensino e aprendizagem na área da Matemática, a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), com o foco nas estruturas multiplicativas e dentro delas o agrupamento explícito e implícito. Por fim, serão demonstrados os estudos empíricos realizados por Magina, Santos e Meline (2010) e por Chagas (2011), que enfocam questões semelhantes, porém com a nomenclatura inicial de ideia de coleção e não coleção, ao que nessa investigação é denominado de agrupamento explícito e implícito respectivamente.

1.1. O desenvolvimento cognitivo e a construção de conceitos

O desenvolvimento cognitivo e as modificações do pensamento nos seres humanos, ao longo de sua vida, é uma das áreas de estudo da Psicologia que busca compreender como acontece o desenvolvimento das habilidades mentais, por meio da maturação biológica sequencial e contínua, ou através das suas experiências de aprendizagem. Esta questão conduz a possibilidade de uma influência mútua existente entre desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem como aponta Spinillo (1999). Para compreender como ocorre o desenvolvimento cognitivo na criança será tomado por base à perspectiva de Jean Piaget.

1.1.1. Conceitos segundo Jean Piaget

Piaget, em sua teoria, buscou explicar por meio dos experimentos realizados como o sujeito aprende e se desenvolve. Para isso considerou que a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento pressupõem a existência de uma relação entre o sujeito e o objeto de conhecimento. Sendo assim, Piaget, pode ser considerado de vertente interacionista, uma vez que, apresenta a relação que se estabelece entre o sujeito e o objeto de conhecimento citada anteriormente. Esse paradigma o leva a conceber o papel do social, enquanto condição que facilita a apropriação e superação do conhecimento socialmente disponível (Palangana, 2001).

Em seus estudos, Piaget, explorou a forma de pensar das crianças, não se limitando a contar os acertos e classificar as crianças de acordo com uma tabela, mas preocupou-se com as respostas erradas e com o tipo de raciocínio utilizado. Tal trabalho favoreceu a investigação de como as crianças desenvolviam suas formas de raciocínio, desvendando muito dos processos de elaboração do conhecimento.

Com o propósito de estudar e desvendar questões referentes à origem do conhecimento, a construção do mesmo e como ocorre esse processo de construção, Piaget criou uma base teórica e metodológica própria, partindo de bases estruturalistas. Para tanto, introduziu o uso do método clínico na pesquisa psicológica, oriundo da prática clínica em psiquiatria, tendo como objetivo estudar a constituição do conhecimento humano em vista de obter formas precisas sobre o raciocínio das crianças. Suas observações foram construídas a partir de uma realidade concreta, alcançando modelos de ordem abstrata cuja função é explicar a estrutura a partir de suas organizações e relações.

Nessa perspectiva, Piaget constrói uma teoria que concebe uma formação cognitiva progressiva, tendo como foco às ações do individuo. Tal proposta fornece a base para compreender uma série de conceitos essenciais de como se desenvolve o conhecimento. Dessa maneira, um dos pontos centrais de sua teoria é abordar a construção do conhecimento a partir das ações do sujeito com o mundo. Visto isso, apresenta que através das ações com o meio, o ser humano, busca formas de equilíbrio e adaptação, onde o desenvolvimento humano e biológico age da mesma forma e a atividade intelectual e o funcionamento do organismo não são tratados de formas diferentes (Piaget & Gréco, 1974).

O desenvolvimento humano é, então, explicado a partir de uma determinada composição, por meio do conjunto de relações entre sujeito e o objeto, e dos mecanismos, tais como: maturação, experiência, e equilibração do organismo com o meio. O último destes mecanismos, a equilibração, é um termo central na teoria piagetiana, pois se trata de um fenômeno que sofre variações em função do meio que o indivíduo está inserido, mas que em sua essência é universal, é um mecanismo que explica o desenvolvimento. Nesse sentido, sua teoria vai levar em consideração dois fatores básicos, os quais ele nomeia de invariantes e variantes funcionais (Flavell, 1988).

Os fatores invariantes são as marcas inatas que não sofrem transformações ao longo da vida do indivíduo e que irão fundamentar os conceitos de organização e adaptação, que tem como proposta explicar o funcionamento total do organismo. Os fatores variantes, por sua vez, são representados pela noção de esquema, que de acordo com Piaget (1972), constitui a unidade básica do pensamento, que se modifica através do processo de interação do individuo com o meio.

Segundo Piaget (1972) os esquemas são as estruturas mentais ou cognitivas, que se referem a uma classe de sequências de ações semelhantes, onde os elementos comportamentais estão estreitamente inter-relacionados. Um esquema é o conteúdo comportamental explícito e organizado, mas com conotações estruturais importantes. O fato de serem estruturas demonstra que os mesmos são criados e modificados pelo funcionamento intelectual, apresentando características funcionais e evolutivas básicas como, a repetição, a generalização e diferenciação. Tais estruturas vão se transformando e ficando cada vez mais sofisticadas com o desenvolvimento, devido o processo de adaptação.

Para Piaget, é a adaptação que garante a sobrevivência e o crescimento do indivíduo, pois o mesmo ou se adapta ao ambiente, ou morre. Dessa forma, o homem consegue adquirir o conhecimento da realidade e, consequentemente, um alto nível de adaptação, mais do que os outros seres. A busca por novas formas de adaptação vai abranger dois processos complementares em seu funcionamento, porém distintos em sua constituição, são eles: a assimilação e a acomodação (Flavell, 1988).

Nesse processo de conhecimento, a adaptação ocorre sempre que há um determinado intercâmbio entre o organismo e o ambiente, tendo como efeito a modificação do organismo. De modo que, o caminho de modificação dos elementos do meio se incorpora à estrutura do organismo, sendo assim, chamado de assimilação, ou seja, é a forma dos objetos ajustar-se à estrutura peculiar do organismo. Já o ajustamento ao objeto é chamando de acomodação, uma vez que o organismo precisa acomodar seu funcionamento às características específicas do objeto que está tentando assimilar (Palangana, 2001).

O processo de assimilação, dessa forma, pode ser entendido como o acréscimo de novos eventos aos esquemas já existentes. Como também, na ação contínua com o meio onde o indivíduo, tendo que se adaptar a este, acaba por promover uma série de interpretações das informações que o circundam e por consequência passa a integrar novas informações as já existentes, numa busca sucessiva pelo equilíbrio. Sendo assim, a acomodação consiste no caminho de modificação de um esquema já existente e a inclusão de um novo, ou seja, é a experiência assimilada a esquemas já existentes, que transformados acabam promovendo um processo de acomodação (Palangana, 2001).

O início do desenvolvimento, para Piaget, acontece a partir de um estado inicial de profundo egocentrismo, por volta dos dois primeiros anos de vida, onde a assimilação e a acomodação não se diferenciam, embora antagônicas e opostas no seu funcionamento. Nesse período, elas são direcionadas para um estado final de objetividade e equilíbrio, no qual essas duas funções são de um lado relativamente separadas e distintas, e de outro, coordenadas e complementares. Visto isso, a assimilação e acomodação são inicialmente indiferenciadas, mas com a separação gradual entre o eu e o mundo inicia-se um processo de diferenciação e estas passam a ser complementares (Flavell, 1988).

Segundo Flavell (1988) as estruturas cognitivas para Piaget surgem no decorrer do funcionamento intelectual, sendo através do funcionamento e apenas através deste que surgem tais estruturas. O modo do funcionamento permanece constante durante toda vida, ou seja, as propriedades fundamentais do funcionamento intelectual são as mesmas, sempre e em toda parte, apesar da ampla variedade de estruturas cognitivas que este funcionamento gera.

Piaget, em suas proposições, parte da consideração de que as experiências físicas e as condições sociais determinarão o acabamento daquilo que a maturação torna apenas possível. O conhecimento das coisas que permite a adaptação vai sendo construído, à medida que, o homem age sobre estas, ou seja, por meio dos mecanismos que Piaget definiu como equilibração de um sistema menos avançado para um mais avançado. Essa ação sobre o mundo pauta a compreensão de desenvolvimento cognitivo que é interpretada, então, a partir da experiência como o meio físico (Flavell, 1988).

Para que seja desenvolvido o conhecimento de algo é necessário que haja o contorno de uma relação entre o objeto e o sujeito, ocorrendo a partir da incorporação do objeto aos esquemas que decorrem da própria atividade e que simplesmente se acomodam a ele enquanto o torna compreensível para o sujeito. A concepção de desenvolvimento pressupõe, que no contato com o mundo, no processo de construções sucessivas, resultantes da relação sujeito-objeto, é que se processa a aquisição do conhecimento e com o exercício se dá a formação do pensamento lógico (Flavell, 1988).

Sendo assim, a compreensão do desenvolvimento cognitivo é interpretada em decorrência da experiência com o meio físico e a partir do processo de adaptação. O papel da experiência no decorrer do desenvolvimento varia, porque é algo complexo e sutil. O organismo que conhece é um agente ativo no processo que se defronta com o ambiente, assimilando-o a esquemas, enquanto acomoda estes esquemas aos limites do ambiente (Flavell, 1988). Nesse cenário, a experiência ganha importante expressão no entendimento de desenvolvimento humano, uma vez que a partir dela ocorre toda configuração estabelecida através de determinados níveis do desenvolvimento cognitivo.

Esses níveis de desenvolvimento podem ser definidos como os estágios de desenvolvimento, que para Piaget, demonstram características qualitativas do desenvolvimento, uma vez que a essência das mudanças estruturais é da natureza qualitativa. Por isso, ele dividiu em estágios as estruturas em mudança, porque ocorrem numa sequência ontogenética e permitem o entendimento de como se processa o desenvolvimento no decorrer do tempo. Outra característica dos estágios é que as estruturas que os definem são anteriores e integram-se ou incorporam-se às estruturas dos estágios seguintes (Beard, 1976; Castorina, 1997; Flavell, 1988).

Dessa maneira, um estágio vai se caracterizar por um período inicial de preparação e um período final de realização. No período de preparação, as estruturas que os definem estão em processo de formação e de organização. O processo de desenvolvimento, do ponto de vista cognitivo, não é homogêneo, pois o desenvolvimento intelectual dá-se como um movimento que parte do desequilíbrio em vista de encontrar o equilíbrio estrutural (Beard, 1976; Castorina, 1997; Flavell, 1988).

Em síntese, os estágios, devem ser entendidos, como a passagem no curso de uma transição, irá se processar a partir de uma organização menor para uma maior. Para tanto, Piaget postulou quatro estágios[3] para o entendimento do desenvolvimento, a saber: sensório-motor, pré-operatório, operatório-concreto e operatório-formal. A compreensão dos estágios, na teoria proposta por Piaget é deste modo, um importante fator para compreensão de desenvolvimento cognitivo. Cada um deles é caracterizado por diferentes formas de organização mental, que retratam as diferentes maneiras do indivíduo relacionar-se e agir com o meio, bem como as construções cognitivas possibilitadas por essas ações ao promoverem diferentes níveis de desenvolvimento (Palangana, 2001).

1.1.2. O desenvolvimento cognitivo e a construção de conceitos no âmbito da Matemática

O modelo teórico mencionado acima incide diretamente na educação e fornece parâmetros importantes sobre como se processa o pensamento da criança, visto que, segundo Flavell (1988), Piaget apresenta que as ações desempenhadas pelo sujeito são a matéria prima de toda a adaptação intelectual e perceptual. Sendo assim, os estudos piagetianos apontam para correspondência entre as estruturas mentais elementares em desenvolvimento na criança e as estruturas mais complexas que irão compor o pensamento lógico-matemático.

Segundo o mesmo autor, o conhecimento desenvolve-se e é adquirido a partir de ações voltadas inicialmente ao concreto, em seguida são internalizadas e por fim seguem em direção à abstração. Dessa forma, pensar a matemática e, consequentemente, os números, é perceber que estes não são possíveis de serem apreendidos diretamente dos objetos materiais, por abstração das propriedades observáveis, tão pouco são entendidos a partir das abstrações das propriedades das ações que são exercidas materialmente sobre os objetos.

A partir da concepção de desenvolvimento apresentada por Piaget, a experiência lógico-matemática deve ser percebida de maneira distinta da experiência física, pois dirige-se às propriedades das ações, das transformações ocorridas e da coordenação de suas relações. Ou seja, em termos de compreensão matemática, pode-se dizer que uma criança abstrai o número das propriedades que a sua ação introduz nos objetos. Deste modo, Piaget explica que são as ações que geram os conceitos matemáticos e, portanto, a matemática não está ligada

[3] Maiores informações sobre os estágios de desenvolvimento consultar Flavell (1988).

exclusivamente aos dados perceptivos, mas apoiada no simbolismo, nas ações lógicas, nas relações e, com o passar do tempo, nas operações.

A educação matemática pode ser beneficiada com as compreensões do pensamento infantil propostas por Piaget, uma vez que essas concepções impulsionam a criação de condições que possibilitam a construção do conhecimento matemático. Nesse sentido, o ensino e o aprendizado da matemática, ocorrem a partir de problemas que desequilibrem o aluno naquilo que eles sabem, em vista de proporcionar o desenvolvimento do seu pensamento lógico, através das recorrentes equilibrações e reequilibrações.

No entanto, de maneira específica, a aprendizagem dos conceitos matemáticos no contexto escolar, diante das pesquisas realizadas, pode-se dizer que de modo geral tem ocorrido de forma mecânica e sem significação, uma vez que, muitas vezes, os professores apresentam a matemática como algo preciso devido ao seu caráter objetivo e à inexistência de ambiguidades em suas interpretações. Isso faz com que os alunos não produzam sentido no que está sendo realizado com os números. Sendo assim, pode-se dizer que o ensino da matemática é fundamentado num processo de automatismo e mecanização do algoritmo, prescindindo a construção de significados, que nesta área passa inevitavelmente pela compreensão de princípios invariantes subjacentes aos conceitos (Correa & Spinillo, 2004).

Dessa forma, a matemática se limita apenas a execução dos cálculos (algoritmos), ignorando que a mesma fornece modelos para a representação e compreensão do mundo que se está inserido. Caso não sejam levadas em consideração as diferenças entre operação e algoritmo, a compreensão significativa do conceito fica prejudicada. Do ponto de vista psicológico, se os processos de aquisição dos conceitos matemáticos forem ignorados, dificilmente serão detectados como ocorrem e utilizados pelos sujeitos para dominar as situações (Correa & Spinillo, 2004).

No que diz respeito à avaliação das soluções dos problemas matemáticos pelos educadores, constata-se que frequentemente estas soluções são avaliadas de duas maneiras diferentes, a saber: solução correta e incorreta. Sendo a solução correta, vista como uma compreensão adequada do conceito envolvido no problema, enquanto a solução incorreta é interpretada como uma compreensão inadequada desse conceito. No entanto, é importante destacar que a compreensão de um conceito não garante que haja um desempenho adequado na resolução de problemas, uma vez que, existem crianças, utilizando corretamente o algoritmo, mas possuem uma compreensão elementar dos conceitos envolvidos. Como também, existem aquelas que mesmo cometendo erros ao empregar o algoritmo, possuem um conhecimento mais elaborado acerca das operações do que as crianças que resolvem corretamente (Correa & Spinillo, 2004).

Com relação às habilidades utilizadas pelas crianças na resolução de problemas matemáticos Brito (2006) diz que pode ser entendida como um processo que inicia no momento em que o sujeito é confrontado com uma situação-problema e necessita criar estratégias para chegar numa solução adequada. Nesse processo, são combinados conceitos, princípios, procedimentos, habilidades e conhecimentos prévios, necessários para a obtenção da solução do problema. Por isso, para chegar à solução dos problemas são essenciais os conceitos e princípios anteriormente aprendidos e combinados para alcançar o resultado final.

1.2. A perspectiva de Vergnaud: a teoria dos campos conceituais e a estrutura multiplicativa

Para Vergnaud (1993;1997) é através da interação com o meio que o indivíduo agrega conhecimentos e forma os seus conceitos. O ato de formar um conceito é algo complexo, uma vez que nesse processo de formação surgem inúmeras situações que por mais simples que possam parecer, envolvem vários conceitos. Por isso, ele propõe a formação do Campo Conceitual, que requer o domínio de vários conceitos de naturezas distintas, tornando sem sentido referir-se a formação de apenas um conceito. Sendo assim, o *campo conceitual* pode ser descrito como um conjunto de situações que comporta uma variedade de conceitos, procedimentos e representações estritamente interligados. Esse conjunto de situações conduz os sujeitos a dar sentido aos conceitos.

As ciências cognitivas têm favorecido a realização de diversos estudos sobre questões de aprendizagem, focando nos processos de aquisição e utilização dos conhecimentos do indivíduo. Nesse contexto, os conceitos matemáticos, formam um dos campos da Psicologia da Educação Matemática, que nessa perspectiva tem estado comprometida com os aspectos que possibilitam o desenvolvimento progressivo das estruturas operatórias do pensamento infantil (Nunes & Bryant, 1997).

Nessa investigação tomou-se como referência a Teoria dos Campos Conceituais, delineada por Gérard Vergnaud (1997) que propõe uma teoria psicológica da conceitualização da realidade, através da qual é possível estudar os elos e as rupturas existentes entre os saberes e que pode ser aplicada a qualquer campo do conhecimento, nesse caso em particular o conhecimento matemático. Para esse teórico, os conceitos não devem ser definidos apenas pela sua estrutura, e para dominá-los é necessário considerar três aspectos: (i) um conjunto de representações simbólicas, gráficas, gestuais, linguísticas; (ii) um conjunto de invariantes operacionais, propriedades fundamentais que caracterizam o conceito; (iii) e um conjunto de situações que dá sentido aos conceitos. Esta é uma teoria cognitiva pós-construtivista, de caráter psicológico, que ainda pode ser expressa a partir das noções integradas de esquema, teoremas-em-ação e da noção de desenvolvimento que caracteriza o domínio dos campos conceituais (Spinillo & Lautert, 2006).

Para Vergnaud (1983), o esquema é formado por uma organização invariante do comportamento do indivíduo que mobiliza as competências necessárias para cada situação-problema. Dessa forma, pode-se dizer que o mesmo é composto de regras de ação, de antecipações e inferências realizadas pelo sujeito, fazendo emergir uma série de ações, com o propósito de atingir um objetivo específico, por isso, os esquemas tornam-se um suporte às ações do sujeito. Para o mesmo autor, a compreensão das operações aritméticas encontra-se nos esquemas de ação, a saber: esquemas de ação de juntar, separar e de correspondência um-para-um, que dão origem aos conceitos de adição e subtração e os esquemas de ação de distribuição e de correspondência um-para-muitos, dando origem aos conceitos de multiplicação e divisão; esquemas de ação de equivalência, que originam aos conceitos relacionais de probabilidade, proporção e fração.

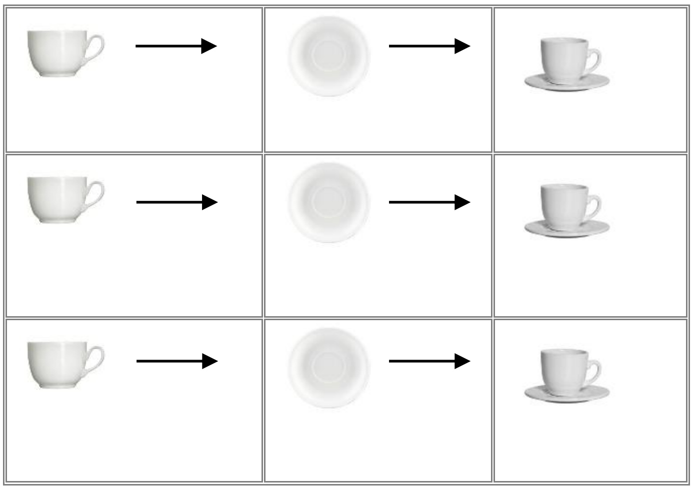
No que se refere aos teoremas-em-ação, Vergnaud (1983), propõe que os mesmos são às relações consideradas pelos indivíduos, quando estes optam por uma operação ou sequências de operações. Em vista, de resolver um problema, sem caracterizar-se como um teorema convencional explicitamente proposto, uma vez que eles estão subjacentes ao comportamento dos alunos, mostrando-se de modo intuitivo na ação dos mesmos, visto que, quando uma criança é solicitada para calcular a quantidade de brinquedos dela e de seu colega, ela escolhe uma estratégia para fazer o que foi pedido. Nesse processo, a criança pode utilizar diversas estratégias. Uma delas é achar pertinente à situação o ato de juntar e realizar uma contagem total dos brinquedos. Como também, pode pedir ao seu colega que conte seus brinquedos e a partir do que seu amigo possui, ela possa continuar a contagem, chegando assim o total de brinquedos.

Para Vergnaud (1983), há dois campos conceituais na aritmética, a saber: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. Este último abrange os conceitos de divisão, multiplicação, fração, razão, proporção, dentre outros. Dessa maneira, a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud, diz que existe vários fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos nos indivíduos e que o conhecimento vai emergir a partir da resolução de situações-problema distintas. Como já mencionado, o presente estudo investigará de forma específica o campo das estruturas multiplicativas.

1.3. O início do raciocínio multiplicativo em crianças na perspectiva da Psicologia e da Matemática

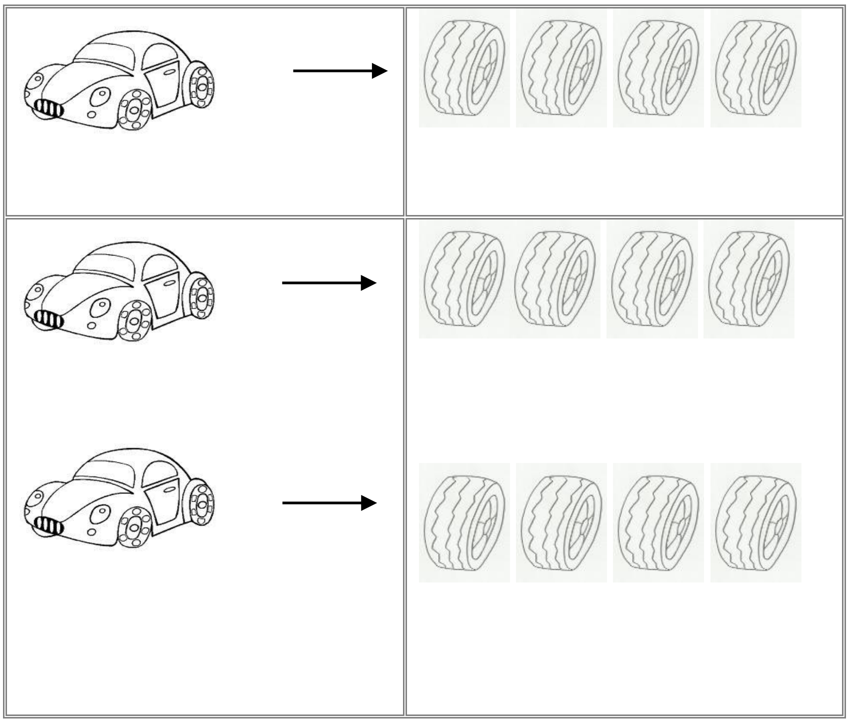
As pesquisas realizadas por Piaget e Szeminska (1971) apresentam que o esquema de correspondência, facilita na decomposição de quantidades a serem comparadas entre si e que esta compreensão é construída de forma gradativa no pensamento da criança. O início dessa compreensão pode ser observado quando, em diversas situações cotidianas, a criança começa a estabelecer correspondência entre termos (objetos, quantidades ou conjuntos), sendo esta caracterizada por correspondência termo a termo. A utilização da correspondência termo a termo pode ser verificada quando a criança é conduzida a perceber que cada objeto corresponde unicamente a outro, no sentido de equivalência, como por exemplo, em situações em que uma xícara estabelece relação com um pires, ou seja, para cada xícara pode-se inferir que há um pires, de maneira que se existem três xícaras, logo o número de pires deve ser o mesmo, ou seja, três pires. Conforme pode ser observado na figura a seguir:

Figura 1: Correspondência termo a termo.



Outro esquema de correspondência, agora associado ao raciocínio multiplicativo, é o de correspondência um para muitos, caracterizado pela relação que um elemento estabelece com um conjunto de elementos. Ele surge à medida que o raciocínio multiplicativo vai sendo desenvolvido, uma vez que o seu aparecimento está diretamente relacionado a essa estrutura. Nesse processo, também gradativo, a criança compreende que um objeto pode se relacionar com vários outros e não apenas com um, como pode ser verificado na correspondência termo a termo, como por exemplo: um carro tem quatro rodas (1 para 4), sendo assim dois carros terão oito rodas (2 para 8). Conforme pode ser observado na Figura 2.

Figura 2: Correspondência um para muitos.



A partir de investigações realizadas, Piaget e Szeminska (1971) observaram que as crianças de 5 e 6 anos de idade conseguem dominar a correspondência termo a termo, como também compreendem alguns aspectos das relações multiplicativas, no que diz respeito a correspondência um para muitos entre dois conjuntos, sem que as mesmas precisem realizar cálculos numéricos.

Nas escolas, os conteúdos a serem ensinados pelos professores seguem uma ordem lógica de apresentação, como pode ser observado no ensino da matemática, quando a adição é ensinada antes da multiplicação. Há inúmeras razões para isso acontecer, pois há aqueles que afirmam que a adição é mais fácil do que a multiplicação. Outros dizem que a adição conduz à multiplicação, porque em alguns aspectos a adição serve de base para a multiplicação. Em parte, esse pensamento é correto, uma vez que a adição repetida é uma das formas de resolver os problemas de multiplicação, apesar de não ser esse um raciocínio multiplicativo. Isto pode ser verificado quando a criança é solicitada a realizar o cálculo de 3 x 4 = 12, ela pode chegar à resposta através da conta 4 + 4 + 4 = 12, ou seja, somando o número 4, três vezes, fazendo assim a adição repetida. Como também, podem ser observadas ainda, relações semelhantes entre a subtração e a divisão, onde a criança consegue chegar ao resultado da divisão 36/6, subtraindo 6 de 36 até chegar a zero (Nunes & Bryant, 1997).

Por isso, o ensino da multiplicação e da divisão nos anos iniciais, para muitos, é percebido apenas como a aquisição de novas operações aritméticas, independente se o raciocínio da criança dará conta de tal aprendizagem. No entanto, Piaget e Szeminska (1977) afirmaram que para a criança entender esses novos conteúdos é necessário que haja uma transformação qualitativa em sua forma de pensar, uma vez que há continuidades e descontinuidades entre essas operações, assim como se pode observar entre a adição e a subtração. Dessa maneira, o raciocínio multiplicativo não é algo fácil de lidar, porque assume formas diferentes, com diversas situações distintas (Nunes & Bryant, 1997).

Para que haja uma clareza nos tipos de raciocínio, aditivo e multiplicativo, os mesmos serão colocados a seguir em perspectiva, tomando por base o número de sentidos e as situações que envolvem cada um deles. Segundo Nunes e Bryant (1997) o raciocínio aditivo diz respeito a situações onde os objetos são reunidos (adição) ou separados (subtração). Nas situações aditivas os sentidos de número estão diretamente relacionados ao tamanho do conjunto dos objetos e as ações de unir e/ou separar objetos e conjuntos. De forma resumida, esse raciocínio pode ser analisado a partir de um axioma básico onde o todo é igual à soma das partes, ou seja, para saber o valor do todo é necessário fazer a soma das partes. Sendo assim, considera-se que o invariante conceitual do raciocínio aditivo é a relação parte-todo (Nunes, Campos, Magina, & Bryant, 2001).

Já o raciocínio multiplicativo não envolve as ações de unir e separar os objetos como no raciocínio aditivo, mas estabelecem relações distintas, como pode ser observado em três tipos principais de situações, a saber: situações de correspondências, situações que envolvem relações entre variáveis e situações de distribuição. Dessa forma, para que ocorra a compreensão da multiplicação e da divisão a criança deve aprender e entender um novo conjunto de sentido de número, como também um novo conjunto de invariantes, sendo assim, muito mais do que simplesmente calcular quantidades. O raciocínio multiplicativo tem por invariante conceitual a relação fixa que é estabelecida entre duas variáveis, sendo elas: duas grandezas ou quantidade; seja qual for à situação multiplicativa, ela envolve duas quantidades numa relação constante entre si (Nunes & Bryant, 1997).

A partir do exposto, pode-se concluir que um problema de raciocínio aditivo está baseado na relação parte-todo. Em contrapartida, os problemas de raciocínio multiplicativo, buscam um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável (Nunes, Campos, Magina, & Bryant, 2001). Um dos grandes desafios para os pesquisadores e professores é compreender como as crianças conseguem resolver um determinado tipo de problema dentro das estruturas multiplicativas, mas erram ao tentar resolver outros que parecem ter, a princípio, a mesma estrutura, usando ao mesmo tipo de raciocínio semelhante ou distinto.

1.3.1. Origem dos conceitos de multiplicação e divisão e os tipos de problema de divisão

O conceito de multiplicação pode ser definido como tendo a sua origem na ideia de adição repetida de parcelas iguais. Entretanto, a Associação Japonesa de Educação Matemática discorda da ideia mencionada anteriormente, por considerar que a relação existente entre a adição e a multiplicação não é algo conceitual. Mas, está centrada no processo de cálculo da multiplicação que pode ser feito através de adição repetida, uma vez que a multiplicação é distributiva com relação à adição (Nunes, Campos, Magina, & Bryant, 2001). No que diz respeito à divisão, a literatura trata como um conceito complexo, por envolver regras que necessitam do uso de outras operações como: a subtração, a multiplicação, de divisões sucessivas, que pode não ter o seu resultado exato, gerando dessa forma um valor restante (Spinillo & Lautert, 2006).

No que diz respeito à divisão, para Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985), os problemas podem ser classificados em dois tipos, a saber: partição e quota. Esta forma de pensar os problemas de divisão por partição e por quota pode ser vista como modelos intuitivos[4]. Dessa maneira, o ato de repartir coisas trás em si o modelo intuitivo de partição, enquanto que o modelo intuitivo de quota envolve a noção de medidas preestabelecidas.

Já para Vergnaud (1990), esses problemas podem ser caracterizados como problemas de isomorfismo de medidas, no qual existe uma proporção simples entre dois espaços de medida, ou seja, uma relação quaternária. Segundo o mesmo autor, o esquema utilizado para resolver esse tipo de problema, envolve três níveis de dificuldades, a saber: multiplicação, regra de três

[4] "O termo intuição em sua acepção mais geral, significa conhecimento imediato" (Fischbein, Barbat, & Minzat, 1971, p. 264).

e a divisão. No entanto, esses problemas podem ser representados por esquemas análogos, onde se busca encontrar uma quantidade. Como pode ser observado na Figura 3:

Figura 3: Problemas de divisão representados por esquemas análogos.

(1) Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Qual é o preço de uma garrafa? ***Garrafas*** ***reais*** **1** → **X** **3** → **12**	(2) Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$ 4,00 cada um. Quantos pacotes ele pode comprar? ***Pacote*** ***reais*** **1** → **4** **X** → **12**

Fonte: (Vergnaud, 1991, p.198).

Para Vergnaud (1990), o resultado para esses dois problemas, ilustrados acima, pode ser encontrado através de uma tabela de correspondência entre dois tipos de quantidades que se traduz como isomorfismos de medidas, ou seja, garrafas – reais, ou pacotes – reais. Embora os problemas possam ser resolvidos e as respostas possam ser encontradas através do isomorfismo entre duas medidas, algumas diferenças entre esses dois exemplos podem ser observadas. No primeiro problema, o objetivo é buscar o valor unitário (o quociente) e a relação entre grandezas diferentes. Todavia, no segundo exemplo, é possível observar que o valor unitário está dado e é necessário buscar a quantidade de unidades (o quociente - pacotes) e a relação entre as grandezas envolvidas. Esses dois tipos de problemas são denominados por Vergnaud (1990) de divisão por partição e divisão por quotas, respectivamente.

Em estudo recente de Magina, Santos e Merlini (2010), tomando por base o modelo intuitivo de divisão, apresentam dois esquemas que expõem tais concepções de forma elucidativa, fundamentados nos modelos propostos por Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985), os quais serão reproduzidos a seguir:

Figura 4: Esquema explicativo das divisões por partição e por quota.

Esquema 1

Informação 1 **(conhecida)**	Informação 2 **(conhecida)**	Resultado **(partição desconhecida)**
Variável 1 (V1) **Quantidade: 30 figurinhas**	Variável 2 (V2) **Quantidade: 6 amigos**	Relação entre V1 e V2 **Desconhecida (?)**

Tabela 1: Esquema da divisão por partição entre duas grandezas de naturezas diferentes.

Exemplo 1: *João tem 30 figurinhas e quer dividir igualmente com os seus 6 amigos. Quantas figurinhas cada um dos seus amigos vai receber?*

Esquema 2

Informação 1 **(conhecida)**	Informação 2 **(desconhecida)**	Resultado **(quota conhecida)**
Variável 1 (V1) **Quantidade: 30 figurinhas**	Variável 2 (V2) **Quantidade: amigos (?)**	Relação entre V1 e V2 **Conhecida: 5**

Tabela 2: Esquema da divisão por quota entre duas grandezas de mesma natureza.

Exemplo 2: *João tem 30 figurinhas e vai dar 5 figurinhas para os seus amigos. Quantos amigos de João ganharão figurinhas?*

Fonte: Magina, Santos e Merlini (2010, p. 09).

A partir das Figuras 3 e 4, explicitadas anteriormente, Chagas (2011)[5] em seu estudo entende que, dados dois objetos de naturezas A e B, envolvidos em uma situação de problema que requer uma operação aritmética ψ[6] para a sua solução, pode-se resumir tais noções por meio das seguintes possibilidades listadas abaixo:

- Esquema da solução de um problema de divisão por partição:

  A ψ B = A (Um cardinal representando um objeto de natureza A, operado com o de natureza B, obtendo uma resposta de natureza A);
- Esquema da solução de um problema de divisão por quota:

  A ψ A = B (Um cardinal representando um objeto de natureza A, operado com o de natureza A, obtendo uma resposta de natureza B);

---

[5] Monografia não publicada, intitulada: Compreendendo as estratégias utilizadas por crianças para resolver problemas de multiplicação e divisão, envolvendo coleção e não coleção, sob a orientação da professora Dra. Síntria Labres Lautert.

[6] **ψ –** Esse símbolo foi utilizado para representar uma operação aritmética qualquer, que na presente pesquisa pode ser tanto de multiplicação, como de divisão.

Dessa forma, os problemas de divisão por partição ainda podem ser definidos como aqueles em que é dado um conjunto inicial no problema e o número de partes em que essa quantidade inicial deverá ser distribuída, sendo o tamanho de cada parte o resultado encontrado. Enquanto que nos problemas de divisão por quota, é dado o valor do conjunto inicial no problema que deverá ser dividido em quotas preestabelecidas, sendo o número de partes obtidas, o resultado encontrado. Os exemplos a seguir ilustram as diferenças existentes entre esses dois tipos de problemas que apresentam o mesmo par numérico (20/5 =4):

Quadro 1: Exemplo de problemas de divisão por partição e por quota.

Problema de divisão por partição	**Problema de divisão por quota**
Dona Nilda comprou 20 chocolates para dar aos seus 5 netos. Dona Nilda quer que cada neto receba a mesma quantidade de chocolates. Quantos chocolates cada neto receberá?	Dona Nilda comprou 20 chocolates para os seus netos. Dona Nilda quer que cada neto receba 5 chocolates. Quantos netos irão receber os chocolates?

Diante dos estudos realizados para investigar que tipo de problema de divisão, partição ou quota, constata-se que não há na literatura um consenso no que diz respeito à facilidade da criança em lidar com esses dois tipos de problemas. Embora, para alguns autores (Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Lautert, 2005; Chagas & Lautert, 2009), os problemas de partição facilitam a resolução quando comparados com os problemas de divisão por quota, pois a criança desde cedo possui a ideia de repartir (distribuir). Entretanto, para outros pesquisadores (Brown, 1981; Nesher, 1988; Selva, 1993) os problemas de divisão por quotas podem ser resolvidos com mais facilidade pelas crianças, por conduzirem diretamente ao uso da estratégia de subtração repetida. Esta estratégia ocorre quando as crianças vão retirando do total a quantidade de elementos determinada pelo problema, até chegarem a seu resultado.

Após a descrição dos tipos de problemas de divisão será apresentado a seguir a noção de agrupamento explícito e implícito e em seguida os estudos iniciais realizados com crianças, investigando a resolução de problemas de estrutura multiplicativa, envolvendo essas noções.

1.4. Agrupamento explícito e o agrupamento implícito: conceituação e estudos empíricos

De acordo com Vergnaud (2009) todo o raciocínio matemático pode ser observado como um cálculo relacional entre objetos, domínios de conhecimentos, como por exemplo: grau de parentesco, questões históricas, gramaticais. À medida que ocorre o desenvolvimento cognitivo da criança as relações vão sendo construídas e compreendidas progressivamente, iluminadas por suas experiências.

Para compreender a noção de agrupamento explícito que o presente trabalho se propõe a discutir, nos problemas que serão apresentados a seguir, é necessário pensar inicialmente sobre os objetos e as suas propriedades, antes mesmo de defini-la. Uma vez que, todo objeto possui algumas características específicas, segundo Vergnaud (2009), nomeada de descritores[7] (cor, forma, tamanho), que permite o seu reconhecimento e enquadramento numa determinada classe. Os indivíduos, diante das propriedades e características dos objetos, tendem a estabelecer relações binárias entre os mesmos, como pode ser observado nas expressões a seguir: "esse objeto tem a mesma cor que aquele", "lembra de alguma forma", "o tamanho é quase o mesmo", entre tantas outras utilizadas no cotidiano. Essas relações são de grande importância no desenvolvimento das atividades cognitivas das crianças, pois proporciona a realização de atividades classificatórias, noções de quantidade, medida e número.

Segundo Vergnaud (2009) o ato de juntar objetos é uma atividade que inicia desde muito cedo nas crianças. Nesse processo ela estabelece comparações dos objetos entre si e investiga as suas semelhanças e diferenças, equivalência e complementaridade. Destaca-se aqui a complementaridade, uma vez que será importante para compreensões posteriores, considerando que ela pode ser descrita quando alguns objetos são colocados juntos porque se complementam bem e formam um objeto ou um arranjo novo, interessante e significativo.

Na escola as propriedades e características dos objetos são retomadas por meio das operações aritméticas, adição, subtração, multiplicação e divisão. Tudo é matéria para que seja estabelecida relação e o trabalho do Educador é favorecer que os estudantes utilizem a

[7] "Um descritor é então um conjunto de propriedades distintas, e uma propriedade é o valor assumido por um descritor." (Vergnaud, 2009. p. 99)

matemática para analisar as relações, descobrindo que por trás de uma enorme variedade de coisas, há um número.

Uma classe de objetos pode ser definida em compreensão e em extensão. A compreensão é geralmente mais considerada pelos Psicólogos e a extensão, observada pelos matemáticos que são frequentemente obrigados a isso devido ao exercício de sua profissão. Dessa forma, na matemática é possível definir a noção de conjunto de duas formas, como pode ser observado a seguir:

> "C é o conjunto de elementos x que têm a propriedade P.
>
> 1º C = { x tal que P(x) }
>
> C é o conjunto de elementos enumerados dentro das chaves.
>
> 2º C = { x1, x2, ..., xn }"
>
> Fonte:Vergnaud (2009. p.98)

Sendo assim, os agrupamentos formados podem ser compreendidos a partir do modo de pensar das crianças, levando em conta os grupos que as mesmas formam mentalmente dos objetos de mesma natureza e de natureza distinta, mencionados nos problemas a serem resolvidos. De modo que no agrupamento explícito a manipulação dos elementos ocorre estabelecendo uma estreita relação entre si, uma vez que todos possuem a mesma natureza e se completam, formando um objeto ou um arranjo novo, interessante e significativo. É possível retomar o sentido de correspondência mencionado anteriormente em que cada objeto corresponde unicamente a outro, no sentido de equivalência. Em contrapartida, nos agrupamentos implícitos os elementos utilizados nos problemas não possuem a mesma natureza, por isso, não é possível estabelecer uma relação de complementariedade como no agrupamento explícito.

Chagas (2011) em seu trabalho define que o agrupamento explícito[8] pode ser compreendido nos problemas de estrutura multiplicativa, quando todos os elementos envolvidos no cálculo do problema estabelecem relação, representando uma quantidade de agrupamentos de objetos de mesma natureza que os demais elementos. Como pode ser constatado no exemplo a seguir: *Em um pacote de figurinhas vem 4 figurinhas. Quantas figurinhas vem em 3 pacotes?* Na solução, 4 x 3 = 12, os valores 4 e 12 (cardinais) representam contagem do mesmo objeto (figurinhas). Observa-se ainda que o valor 3

[8] Essa nomenclatura foi inicialmente nomeada pela autora como ideia de coleção.

(cardinal) tem o seu significado ligado ao mesmo objeto mencionado, por se tratar de uma contagem de grupo de figurinhas. Sendo assim, pode-se ler a solução deste problema de agrupamento explícito da seguinte maneira: Quatro **figurinhas**, vezes três agrupamentos de **figurinhas** são iguais a 12 **figurinhas**, que continuam sendo agrupamento do mesmo objeto, figurinhas.

Ainda para a mesma autora, no que diz respeito ao problema de agrupamento implícito pode ser encontrado, quando um dos elementos envolvidos no cálculo não pode ser subtendido como contagem de agrupamentos de objetos de mesma natureza que os demais, tal como pode ser observado no exemplo a seguir: *Luísa comprou 18 canetas para dar de presente aos seus sobrinhos. Ela deu 2 canetas a cada um deles. Quantos sobrinhos de Luísa receberão canetas?* Na solução, 18/2 = 9, envolve dois valores referentes à quantidade de canetas (18, 2) e outro (9) referente à contagem de um objeto de natureza distinta (sobrinhos) que não pode ser entendido como mero agrupamento de canetas, visto que um sobrinho não é formado por canetas.

Para Chagas (2011) ao adequar essa noção ao esquema que foi proposto em páginas anteriores, deste estudo – **A ψ B = A** (partição); **A ψ A = B** (quota) – caso o objeto de natureza **B** represente um agrupamento de objetos de natureza **A,** para tanto lida-se com um problema de agrupamento explícito. Em contrapartida, se objeto de natureza **B** não puder ser entendido como agrupamento de elementos de natureza **A**, chega-se a um problema de agrupamento implícito. Isso se verifica em ambos os casos (partição e quota).

Outro estudo que discute acerca de agrupamento implícito e explícito foi conduzido por Magina, Santos e Merlini (2010)[9] com 80 estudantes do 2º ano, 86 da 3º, 94 da 4º e 89 estudantes do 5º ano, totalizando 349 estudantes do Ensino Fundamental de uma mesma Escola Pública Estadual, localizada em um bairro classe média da cidade de São Paulo. O estudo buscava investigar se a noção de agrupamento explícito (ideia de coleção) de alguma forma iria favorecer a resolução dos problemas. Todos os estudantes, em uma sessão coletiva, foram solicitados a resolverem 13 situações-problema envolvendo o campo Conceitual multiplicativo, que requeriam uma multiplicação e/ou uma divisão por quota. Os resultados revelaram que a variável, agrupamento explícito (ideia de coleção) influenciou na resolução dos problemas de multiplicação, demonstrando diferença significativa, do ponto de vista cognitivo, no desempenho dos estudantes quando comparado aos problemas de agrupamento

[9] As autoras adotam a nomenclatura coleção e não coleção para os problemas de agrupamento explícito e implícito respectivamente.

implícito (ideia de não coleção). Já nos problemas de divisão por quotas, o agrupamento explícito (ideia de coleção), não foi facilitador para os estudantes do 2º ano, uma vez que essas crianças tiveram insucesso nas duas questões (divisão por quota – coleção e não coleção) igualmente. Já, para os estudantes do 3º e do 5º ano, a divisão por quota, envolvendo situação de não coleção foi significativamente mais fácil que a de coleção. E por fim, para os estudantes do 4º ano, essa variável agrupamento explícito versus implícito (coleção versus não coleção) não interferiu em seus desempenhos.

No estudo realizado por Chagas (2011)[10] amplia-se a categorização acima, ao criar problemas de divisão partitiva, envolvendo o agrupamento explícito e implícito. Uma vez que até o momento não existia uma discussão na divisão por partição, contendo essa noção de agrupamentos distintos. Nessa pesquisa participaram 40 crianças, de baixa renda, com idades entre 9 e 13 anos, cursando o 5º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da cidade do Recife. Os participantes foram solicitados a resolver seis problemas de estruturas multiplicativas, sendo eles: dois de multiplicação, dois de divisão por partição e dois de divisão por quota, envolvendo o agrupamento explícito e implícito. Os dados foram analisados em função do número de acertos e das justificativas apresentadas, uma vez que os mesmos foram entrevistados após a resolução.

No que diz respeito ao desempenho, as crianças apresentaram um maior percentual de acerto no problema de multiplicação por agrupamento implícito, mas estatisticamente não houve diferença significativa. Já nos problemas de divisão as crianças apresentaram percentuais de acertos melhores nos problemas de divisão por quota, tanto nos de agrupamento explícito, como nos de agrupamento implícito, respectivamente 67,5% e 57,5 %, não havendo diferença significativa. Com relação às justificativas, foram analisadas considerando a pesquisa realizada por Magina et al. (2010). A análise também permitiu a identificação de quatro níveis de estratégias de resolução relacionadas ao raciocínio multiplicativo. Categorias estabelecidas por Magina (2009) Tipo 1 (Inconsistente); Tipo 2 (Pensamento aditivo); Tipo 3 (Transição) e Tipo 4 (Pensamento multiplicativo). Os tipos de estratégias mais utilizadas pelas crianças foram as do Tipo 3 e do Tipo 4, tanto nos problemas de coleção, quanto nos problemas de não coleção, isso tanto na multiplicação, quanto na divisão. Dessa forma, pode ser verificado que as crianças transitam entre a saída das estruturas do campo aditivo e a entrada no campo multiplicativo. Por fim, às estratégias dos

[10] Inicialmente a autora nomeava esses problemas como, contendo a ideia de coleção e não coleção.

Tipos 1 e 2, no estudo apontam que as mesmas aparecem num percentual menor que as mencionadas anteriormente.

Ao colocar em perspectiva as pesquisas realizados por Magina et al. (2010) e por Chagas (2011) verifica-se que o fato dos estudantes acertarem mais questões de multiplicação por agrupamento implícito no estudo de Chagas (2011) o que se contrapõe ao estudo de Magina et al. (2010) o qual aponta que os desempenhos dos estudantes são melhores nos problemas de multiplicação por coleção, tendo como suposição que os problemas apresentam uma situação prototípica da multiplicação, permitindo que o aluno pense em multiplicar como adição repetida. É possível que esta divergência se explique por dois motivos: os pares numéricos serem diferentes e de alguma forma terem facilitado, assim como também o enunciado dos problemas ter trazido situações cotidianas.

No que diz respeito aos problemas de divisão, Magina et al. (2010) constatou que para os estudantes do 3º e do 5º ano, a divisão por quota, envolvendo situação de agrupamento implícito foi significativamente mais fácil que a de agrupamento explícito. No entanto, para Chagas (2011) que investigou apenas o 5º ano não encontrou diferença significativa neste tipo de problema. Sendo assim, ao comparar os estudos percebe-se que o estudo de Chagas (2011) amplia um pouco o olhar no que diz respeito à noção intuitiva agrupamento explícito e implícito nos problemas de multiplicação e divisão. No entanto, verificam-se limites tendo em vista que foi apresentado apenas um problema de cada tipo e havia enunciados mais próximos ao cotidiano das crianças. Portanto, a mesma sugere que seria pertinente ampliar o quantitativo de problemas apresentados às crianças, bem como fazer um controle acerca dos enunciados e dos pares numéricos para afirmar o que no momento de forma exploratória foi percebido.

Por isso, o presente estudo amplia o quantitativo de problemas apresentados às crianças, controlando as variáveis mencionadas acima e aumenta os anos investigados, sendo eles agora os anos iniciais (2º ao 5º). Em vista de investigar se e como o agrupamento explícito pode favorecer o modo de pensar matemático das crianças na resolução de problemas de multiplicação e divisão (partição e quota).

Capítulo II
Método

2.1. Objetivos e hipóteses

Conforme mencionado e discutido nas considerações teóricas, as crianças dos anos iniciais apresentam dificuldade de compreensão nos problemas matemáticos, de modo que não conseguem operar corretamente o algoritmo. Isto ocorre de forma particular com os problemas do campo das estruturas multiplicativas, mais especificamente àqueles envolvendo o conceito de multiplicação e divisão. Pesquisas anteriores revelam que o agrupamento explícito e implícito pode vir a favorecer no desempenho e nas estratégias escolhidas pelas crianças frente aos problemas de multiplicação de proporção simples um para muitos.

Na revisão da literatura, é possível observar inclusive diferenças significativas no desempenho, visto que, tais ideias podem estarem favorecendo uma compreensão maior dos problemas, fazendo emergir um raciocínio lógico matemático para a resolução, como foi demonstrado através das pesquisas realizadas por Magina, Santos e Merlini (2010) e por Chagas (2011). No entanto, estes estudos são recentes e algumas variáveis não foram controladas, como por exemplo: os pares numéricos utilizados nos problemas, a quantidade de problemas para que essa diferença pudesse ser constada com precisão, bem como a forma na qual os problemas foram aplicados, de forma coletiva, o que justifica uma nova pesquisa na área. Ademais, como comentado anteriormente, após reflexões realizadas a partir da literatura, chega-se a conclusão que o termo mais adequado para os tipos de problemas apresentados no estudo de Magina, Santos e Merlini (2010) e por Chagas (2011) seria, a noção de agrupamento explícito e implícito ao invés de ideia de coleção e não coleção.

Em face do exposto, o presente estudo tem por objetivo geral investigar, se e como, a noção de agrupamento explícito pode favorecer o raciocínio lógico matemático das crianças na resolução de problemas proporção simples de um-para-muitos, envolvendo a multiplicação e divisão (partição e quota). De forma especifica, buscou-se investigar as estratégias utilizadas pelas crianças para resolver essa classe de problemas, buscando observar se algum tipo de problema de agrupamento explícito e/ou implícito favoreceu a resolução.

A hipótese levantada neste estudo é que o agrupamento explícito pode vir a facilitar a forma de raciocinar das crianças, na resolução dos problemas, a predição é que as crianças teriam um melhor desempenho nos problemas que explicitam a ideia apresentada, conforme observado em estudos anteriores. É provável também que as crianças venham a adotar estratégias de resolução mais sofisticadas, indicando um tipo de pensamento mais elaborado, nos problemas que apresentam o agrupamento explícito. Além da noção de agrupamento, foi observado se houve diferença significativa no desempenho dos estudantes, nos diferentes tipos de problemas apresentados dentro da estrutura multiplicava, como será descrito no planejamento experimental. Caso a hipótese viesse a se confirmar de que o agrupamento explícito favorece a resolução dos problemas de multiplicação e divisão, poderia auxiliar os educadores no ensino da Matemática.

2.2. Participantes

Participaram desse estudo 119 crianças, de ambos os sexos, com idades entre 6 e 11 anos, estudantes do 2º ano ao 5º ano, do Ensino Fundamental, de escolas públicas[11] da cidade do Recife; sendo 27 crianças do 2º ano, 26 crianças do 3º ano, 30 crianças do 4º ano e 36 crianças do 5º ano. Salienta-se que as crianças, 2º e 3º anos, não receberam instrução formal, sobre as operações de multiplicação e divisão, no contexto escolar. Enquanto que as crianças do 4º e 5º anos já foram instruídas formalmente sobre os conceitos de multiplicação e divisão na escola.

2.3. Procedimento e planejamento experimental

Todos os participantes foram entrevistados individualmente, em duas sessões, no contexto escolar, sendo solicitados a resolverem 12 problemas, envolvendo proporção simples

[11] O critério de escolha da amostra, por crianças de Escola Pública do 2º ano ao 5º ano do Ensino Fundamental, deve-se ao fato de pesquisas anteriores terem investigado participantes com o mesmo perfil em termos educacionais e socioeconômicos.

um para muitos, abarcando o agrupamento explícito e o agrupamento implícito, sendo quatro problemas de multiplicação, quatro problemas divisão por partição e quatro problemas divisão por quota.

Os problemas foram apresentados um por vez, com espaço para resolução e resposta. Estes foram lidos pelo examinador e pela criança conjuntamente, ficando disponível para outras leituras. Tal medida teve por objetivo controlar uma possível dificuldade de leitura que a criança pudesse vir a apresentar, como também minimizar o esforço da memória. A instrução dada à criança foi a seguinte: *"Você irá resolver neste nosso primeiro encontro seis problemas de matemática. A leitura do problema será feita por mim. Eu vou te dar o primeiro problema e assim que você terminar receberá o próximo, até terminar todos desse dia. Após a resolução de cada problema, eu pedirei para você me explicar como fez para resolvê-lo"*. O tempo de resolução dos problemas era livre.

Todas as crianças foram individualmente entrevistadas, em duas sessões, por um único examinador sendo estas gravadas e posteriormente transcritas, para protocolos individuais, tendo duração média de vinte minutos cada.

A ordem de apresentação dos problemas foi randomizada, envolvendo o agrupamento explícito e o agrupamento implícito e obedeceu à seguinte ordem: metade dos participantes realizou inicialmente os problemas de agrupamento explícito e em seguida os de agrupamento implícito; e a outra metade dos participantes, realizou na ordem inversa: metade dos participantes realizou os problemas de agrupamento implícito, em seguida os de agrupamento explícito.

A entrevista individual, foi realizada para compreender o raciocínio utilizado pelo estudante na resolução, se deu a partir do método clínico Piagetiano, na qual foi solicitado que o participante explicasse as bases do raciocínio que utilizou para resolver o problema apresentado. O método clínico, desenvolvido por Jean Piaget consiste num procedimento realizado através de entrevistas, onde se acompanha o pensamento do estudante, com intervenções sistemáticas, elaborando sempre novas perguntas relacionadas a questões críticas. A partir das respostas do estudante são avaliadas a qualidade e abrangência destas respostas, como também a segurança que ele tem sobre tais respostas diante de contra argumentações (Carraher, 1989).

2.3.1. Os problemas

A opção por examinar apenas problemas dentro da estrutura multiplicativa, multiplicação e divisão (partição e quota), na proporção simples um para muito, se deve ao fato de que pesquisas anteriores foram realizadas dentro desse campo conceitual, no entanto algumas variáveis não foram controladas conforme mencionado anteriormente. Nesta investigação buscou-se controlar o tipo de agrupamento apresentado no problema, podendo ser explícito e implícito, a ordem de aplicação dos problemas, o número de sessões, os mesmos pares numéricos trabalhados no agrupamento explícito e implícito, a idade dos participantes e os seus respectivos anos.

Os doze problemas a serem apresentados, fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas, sendo eles: a multiplicação e a divisão (partição e quota), no eixo, da proporção simples de um-para-muitos, fazendo uso do agrupamento explícito e do agrupamento implícito. Estes foram construídos com base nos estudos realizados por Magina et al. (2010) e Chagas (2011) e posteriormente analisados por dois especialistas na área da matemática.

Em seguida foi realizado um estudo piloto inicialmente com quatro crianças, para verificar se as instruções e os problemas estavam adequados aos anos investigados. Nesse estudo piloto, as crianças menores demostraram dificuldade para compreender alguns verbos usados nos problemas, como também apresentaram cansaço ao resolver os doze problemas em uma única sessão. Em face dessas observações, os verbos foram adaptados a uma linguagem mais acessível e também foi tomada a decisão de aplicar os problemas em duas sessões. Após os devidos ajustes no instrumento, uma nova aplicação foi realizada com mais quatro crianças, visando garantir que o instrumento e a sua forma de aplicação estavam adequados. Nesse momento foi constatada a adequação tanto do instrumento, quanto na forma de aplicação.

No que diz respeito aos pares numéricos, foram usados os mesmos pares tanto nos problemas que contêm o agrupamento explícito, como nos que têm o agrupamento implícito, mudando-se apenas o tipo de agrupamento, o nome dos personagens e os referentes[12] dos pares numérico. Como pode ser observado nos exemplos a seguir, no problema de

[12] Os referentes dizem respeito aquilo que a quantidade se refere, no caso, os objetos envolvidos no problema.

multiplicação, contendo o agrupamento explícito, apresenta-se o seguinte problema: “Um álbum é formado por figurinhas. Para completar esse álbum Luís comprou alguns pacotes de figurinhas na banca de revista. Em um pacote de figurinhas vem 4 figurinhas. Quantas figurinhas vem em 3 pacotes? ” Já no Problema de multiplicação, contendo o agrupamento implícito, este mesmo par numérico apareceu da seguinte forma: “Para fazer uma receita de brigadeiro Maria usa vários ingredientes. Um dos ingredientes que Maria usa é o chocolate em pó. Maria usa 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Quantas colheres de chocolate Maria usará para fazer 3 receitas de brigadeiro? ” Observa-se que o par numérico 4x3 foi usado em ambos os problemas, em vista de controlar essa variável como foi sugerido no estudo realizado por Chagas (2011). O Quadro 2, a seguir, ilustra todos os problemas que foram apresentados as crianças:

Quadro 2: Problemas de agrupamento explícito e agrupamento implícito adotados no estudo.

Tipos de Problemas	Agrupamento explícito	Agrupamento implícito
MULTIPLICAÇÃO (um para muitos)	**(ME1)** Um álbum é formado por figurinhas. Para completar esse álbum Luís comprou alguns pacotes de figurinhas na banca de revista. Em um pacote de figurinhas vem 4 figurinhas. Quantas figurinhas vem em 3 pacotes?	**(MI3)** Para fazer uma receita de brigadeiro Maria usa vários ingredientes. Um dos ingredientes que Maria usa é o chocolate em pó. Maria usa 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Quantas colheres de chocolate Maria usará para fazer 3 receitas de brigadeiro?
	(ME2) Uma cartela é formada por selos. Em uma cartela de selos vem 8 selos. Quantos selos vem em 5 cartelas?	**(MI4)** Dona Benta usa vários ingredientes para fazer um bolo. Um dos ingredientes que ela usa é o ovo. Dona Benta usa 8 ovos para fazer um bolo. Quantos ovos Dona Benta vai precisar para fazer 5 bolos?

DIVISÃO (partição)	**(DPE1)** Uma caixa é formada por lápis de cor diferentes. Felipe ganhou 36 lápis de cor diferentes e deseja colocar os lápis em 6 caixas. Cada caixa terá a mesma quantidade de lápis de cor. Quantos lápis de cor Felipe colocará em cada caixa?	**(DPI3)** Um professor comprou 36 chocolates e deseja distribuir os chocolates com 6 de seus alunos. Cada aluno receberá a mesma quantidade de chocolates. Quantos chocolates cada um dos seus alunos receberá?
	(DPE2) Um pacote é formado por biscoitos. Letícia fez 18 biscoitos de morango e quer colocar os biscoitos em 6 pacotes. Cada pacote terá a mesma quantidade de biscoitos. Quantos biscoitos de morango Letícia colocará em cada pacote?	**(DPI4)** A professora tem 18 pirulitos para distribuir com seus 6 alunos. Cada aluno receberá a mesma quantidade de pirulitos. Quantos pirulitos cada aluno receberá?
DIVISÃO (quota)	**(DQE1)** Uma caixa é formada por latinhas de refrigerantes. Ricardo tem 24 latinhas de refrigerante e deseja guardar as latinhas em caixas. Ele vai colocar 3 latinhas de refrigerante em cada caixa. Quantas caixas Ricardo precisa para guardar todas as latinhas?	**(DQI3)** Rafael tem 24 bolas de gude para dar de presente aos seus amigos. Ele deu 3 bolinhas de gude a cada um dos seus amigos. Quantos amigos de Rafael ganharam bolinhas de gude?
	(DQE2) Uma caixinha é formada por chicletes. Pedro comprou 18 chicletes e deseja colocar os chicletes em caixinhas. Ele colocou 2 chicletes em cada caixinha. Quantas caixinhas de chicletes Pedro formou?	**(DQI4)** Luísa comprou 18 canetas para dar de presente aos seus sobrinhos. Ela deu 2 canetas a cada um deles. Quantos sobrinhos de Luísa receberão canetas?

ME1: multiplicação-explícito 1; **ME2:** multiplicação- explícito 2 ; **MI3:** multiplicação-implícito 3; **MI4:** multiplicação-implícito 4; **DPE1:** divisão-partição- explícito 1**; DPE2:** divisão-partição- explícito 2; **DPI3:** divisão-partição-implícito 3; **DPI4:** divisão-partição-implícito 4; **DQE1:** divisão-quota-explícito 1; **DQE2:** divisão-quota-explícito 2; **DQI3:** divisão-quota-implícito 3; **DQI4:** divisão-quota-implícito 4.

O Quadro 3, a seguir, apresenta a ordem de aplicação dos problemas aos estudantes dos anos investigados. Salienta-se que a ordem de apresentação dos três tipos de problemas, de estrutura multiplicativa, no interior de cada situação foi realizada através de uma permutação simples[13], sem restrições.

Quadro 3. Ordem de aplicação dos problemas

Situação	Tipos de problemas
1	Multiplicação – Divisão Partição – Divisão Quota
2	Divisão Partição – Divisão Quota – Multiplicação
3	Divisão Quota – Multiplicação – Divisão Partição
4	Multiplicação – Divisão Quota – Divisão Partição
5	Divisão Partição – Multiplicação – Divisão Quota
6	Divisão Quota – Divisão Partição – Multiplicação

2.3.2. Material

O material utilizado foi formado por uma folha de identificação, 12 folhas, cada uma contendo um problema escrito de multiplicação ou divisão com espaço para resolução e para a resposta, lápis preto, borracha e um gravador de som digital.

É importante ressaltar que os registros feitos no papel foram utilizados como um auxílio à gravação com o propósito de compreender melhor as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução dos problemas, uma vez que, o seu uso não era obrigatório e sim orientado, estando o lápis e papel à disposição da criança para que ela faça uso se desejar.

[13] A permutação simples pode ser considerada como um caso particular de arranjo, onde os elementos formarão agrupamentos que se diferenciarão somente pela ordem. As permutações simples dos elementos M, P e Q são: MPQ, MQP, PMQ, PQM, QMP, QPM.

Capítulo III
Sistema de análise

A partir de uma análise dos protocolos das crianças, foram analisados dois aspectos: o desempenho (número de acertos) e as estratégias utilizadas na resolução dos problemas. Tomando como referência os estudos de Magina, Santos e Melini (2010) e de Chagas (2011), a análise dos protocolos permitiu identificar quatro tipos de estratégias de resolução. Estes tipos são descritos[14] e exemplificados a seguir.

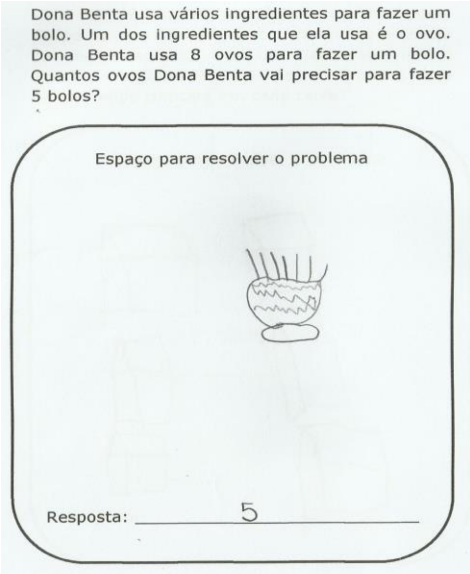
3.1 Estratégias de resolução

Tipo 1 – *Inconsistente*

São aquelas estratégias inadequadas em que o estudante não consegue explicitar a operação realizada por ele para resolver o problema. Ele pode fazer um desenho sem significado para a resolução do problema, pode repetir um dos dados do problema, como também trazer os seus conhecimentos de mundo ou, ainda, escolher outro número sem que se consiga entender a razão para tal. Este tipo de resposta está, na maioria das vezes, incorreta. Por exemplo:

[14] Convenções adotadas: P – Participante; E – Examinador.

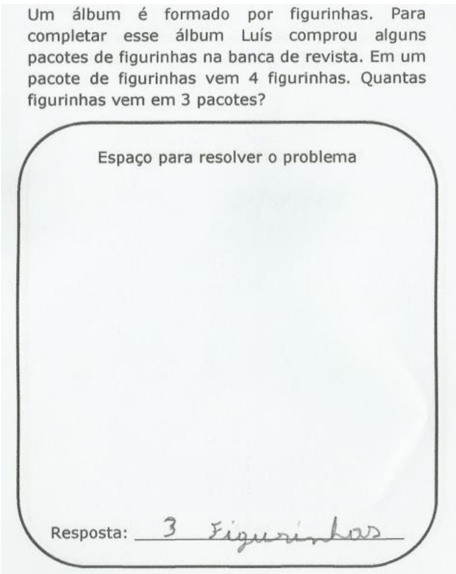
Exemplo 1: Problema de multiplicação por agrupamento implícito. Inconsistente (pictórico/icônico). Desenha e não justifica.



P: Cinco.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Veio na cabeça.
E: Como assim veio na cabeça?
P: No pensamento. Eu fiquei pensando, pensando, e aí veio o cinco.
E: Você consegue me explicar como você ficou pensando?
P: Não. Eu fiquei pensando.
E: E esse desenho que você fez?
P: (risos) Ah tia eu desenhei fazendo o bolo.

Figura 5: Extrato do protocolo do Participante nº 26,
2º ano, feminino, 7 anos e 9 meses.

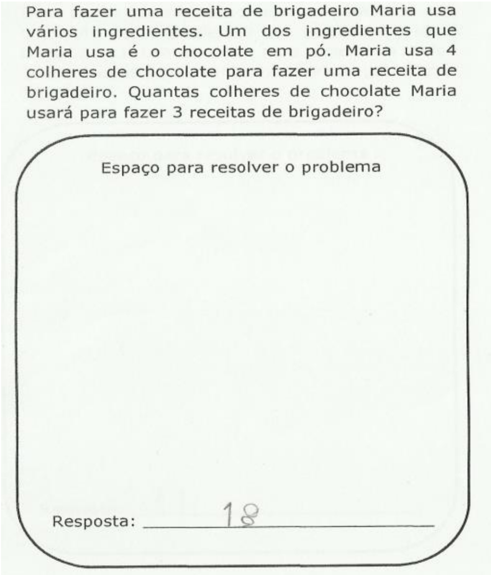
Exemplo 2: Problema de multiplicação por agrupamento explícito. Inconsistente (simbólico). Repete dados do problema.



P: Três figurinhas.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: A senhora disse aí.
E: Como assim eu disse?
P: Quando a senhora leu aí no probleminha, aí disse que era três figurinhas.

Figura 6: Extrato do protocolo participante nº 21,
2º ano, feminino, idade 8 anos e 2 meses.

Exemplo 3: Problema de multiplicação por agrupamento. Implícito. Inconsistente (simbólico). O estudante trás o conhecimento de mundo para explicar “a minha mãe ela só faz dezoito brigadeiros pra minha festa” (sic).


Para fazer uma receita de brigadeiro Maria usa vários ingredientes. Um dos ingredientes que Maria usa é o chocolate em pó. Maria usa 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Quantas colheres de chocolate Maria usará para fazer 3 receitas de brigadeiro?

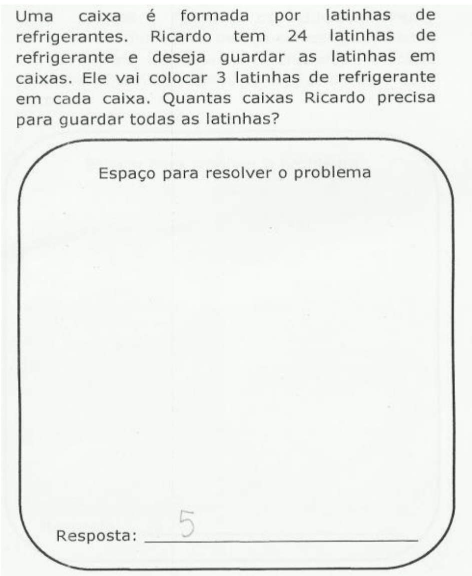
Espaço para resolver o problema

Resposta: 18

P: É dezoito.
E: Você coloca aí, por favor, a resposta.
P: E como que se faz o dezoito?
E: Um e oito. Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: A minha mãe ela só faz dezoito brigadeiros pra minha festa (sic).

Figura 7: Extrato do protocolo do Participante nº 11,
2º ano, feminino, 7 anos e 10 meses.

Exemplo 4: Problema de divisão por quota de agrupamento explícito. Inconsistente (simbólico). Escolha de um número aleatório.


Uma caixa é formada por latinhas de refrigerantes. Ricardo tem 24 latinhas de refrigerante e deseja guardar as latinhas em caixas. Ele vai colocar 3 latinhas de refrigerante em cada caixa. Quantas caixas Ricardo precisa para guardar todas as latinhas?

Espaço para resolver o problema

Resposta: 5

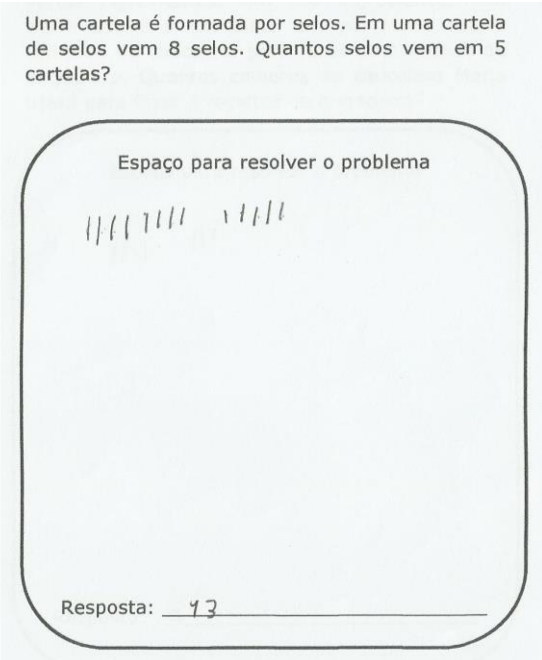
P: Cinco.
E: Como você encontrou essa resposta? Me explica.
P: É no pensamento que vem a resposta.
E: Como assim é no pensamento?
P: Vem na cabeça tia.
E: Você consegue me explicar como vem na cabeça?
P: Sei não tia.

Figura 8: Extrato do protocolo do Participante nº 1,
2º ano, masculino, 7 anos e 7 meses.

Tipo 2 – *Pensamento Aditivo*

São aquelas estratégias em que o estudante faz uma adição ou subtração, usando os dados fornecidos no problema de forma simbólica ou pictórica / icônica. Não se trata de fazer adições ou subtrações repetidas. Assim como no Tipo 1, aqui a estratégia de ação realizada pelos estudante, ainda, não se encontra dentro do campo da estrutura multiplicativa, o que o leva ao insucesso. Por exemplo:

Exemplo 5: Problema de multiplicação por agrupamento explícito. Pensamento aditivo (icônico).


Uma cartela é formada por selos. Em uma cartela de selos vem 8 selos. Quantos selos vem em 5 cartelas?

Espaço para resolver o problema

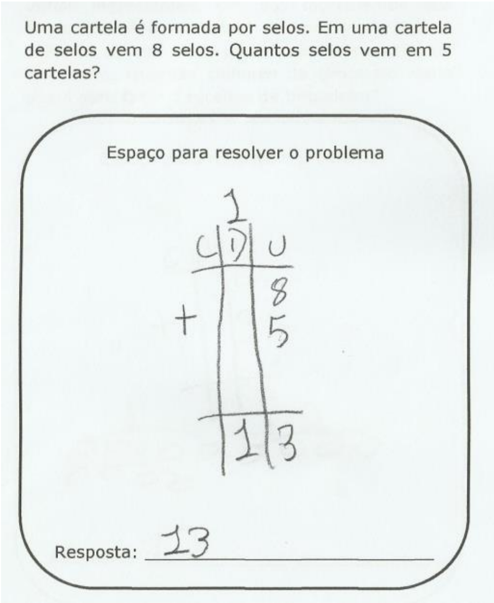
|||||||| |||||

Resposta: 13

P: Treze.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Eu fiz os pauzinhos e fui contando.
E: Me explica como você colocou os pauzinhos.
P: Eu botei oito pauzinhos e depois botei cinco, aí contei tudinho e deu treze.
E: Que continha foi essa que você fez?
P: Foi de mais.
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer a continha de mais?
P: Não tia. É que eu já aprendi a continha de mais, aí eu fiz de mais.

Figura 9: Extrato do protocolo do Participante nº 33,
3º ano, feminino, 8 anos e 10 meses.

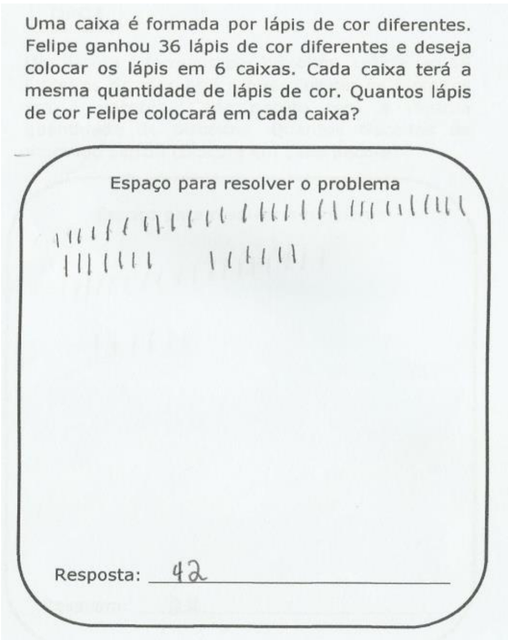
Exemplo 6: Problema de multiplicação por agrupamento explícito. Pensamento aditivo (simbólico).



P: Treze.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Eu armei uma continha de mais. Coloque a unidade, a dezena e a centena e coloquei os números na unidade pra somar. Aí oito mais cinco deu treze, aí eu boto o três e vai um pra dezena. Aí não tem nenhum número na dezena só o um que subiu aí ele desce e fica treze (sic).
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer a continha de mais?
P: Eu vi que tinha oito selos e cinco cartelas, aí eu somei tudo e deu treze.

Figura 10: Extrato do protocolo do Participante nº 44,
3º ano, feminino, 9 anos e 9 meses.

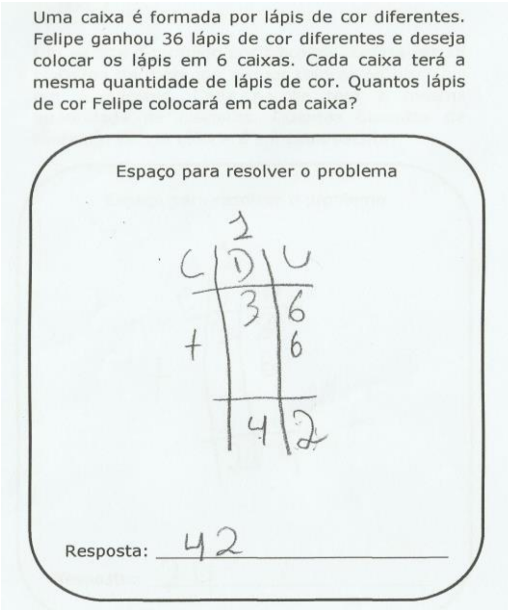
Exemplo 7: Problema de divisão por partição de agrupamento explícito. Pensamento aditivo (icônico/simbólico).



P: Quarenta e dois.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Eu fiz os pauzinhos de novo e fui contando.
E: Me explica como você colocou os pauzinhos.
P: Eu botei trinta e seis pauzinhos e depois botei seis, aí contei tudinho e deu quarenta e dois.
E: Que continha foi essa que você fez?
P: Foi de mais.
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer a continha de mais?
P: Não tia. A mesma coisa. É que eu já aprendi a continha de mais, aí eu fiz de mais.

Figura 11: Extrato do protocolo do participante nº 33,
3º ano, feminino, 8 anos e 10 meses.

Exemplo 8: Problema de divisão por partição de agrupamento explícito. Pensamento aditivo (simbólico).



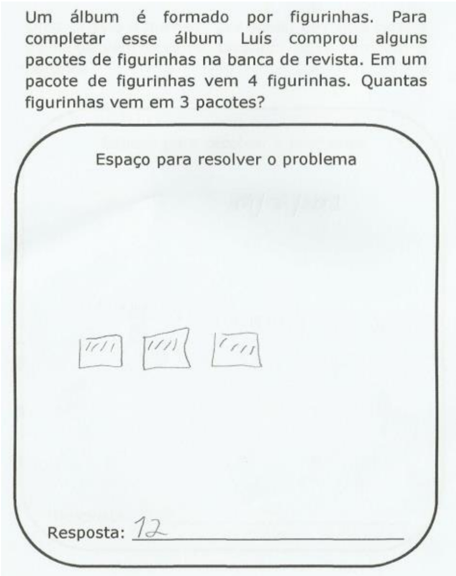
P: Quarenta e dois.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Eu armei uma continha de mais. Coloque a unidade, a dezena e a centena e coloquei os números na dezena e na unidade pra somar. Aí seis mais seis deu doze, aí eu boto o dois e vai um pra dezena. Aí três mais um deu quatro e fica quarenta e dois.
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer a continha de mais?
P: Eu vi que tinha trinta e seis e seis, aí eu somei tudo e deu quarenta e dois.

Figura 12: Extrato do protocolo do participante nº 44,
3º ano, feminino, 9 anos e 9 meses.

Tipo 3 – *Transição*

Neste tipo, as estratégias dos estudantes se mostram mais sofisticadas. O estudante agrupa os dados fornecidos, de forma pictórica ou simbólica, formando as quotas até chegar na quantidade total informada no problema (adotando adição ou subtração repetida). Esta estratégia pode levar tanto ao erro quanto ao acerto, a depender da ação de agrupamento (algumas vezes confusa) ou da interpretação dada pelo estudante aos números presentes no enunciado do problema. Neste caso, em particular o estudante faz menção ao agrupamento e explica através da adição e/ou subtração de parcelas, podendo também após fazer uso da contagem dos elementos agrupados. Como pode ser observado nos exemplos:

Exemplo 9: Problema de multiplicação por agrupamento explícito. Transição (pictórico/simbólico). Agrupa os dados fornecidos no problema pictoricamente e fornece resposta com base na contagem de todos elementos desenhados.


Um álbum é formado por figurinhas. Para completar esse álbum Luís comprou alguns pacotes de figurinhas na banca de revista. Em um pacote de figurinhas vem 4 figurinhas. Quantas figurinhas vem em 3 pacotes?

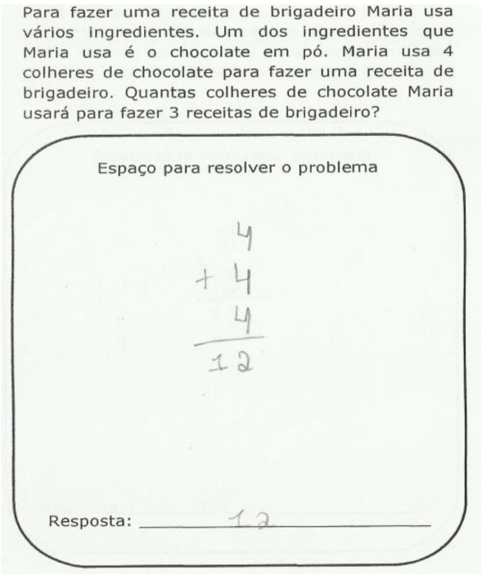
Espaço para resolver o problema

Resposta: 12

P: Doze.
E: Como você fez para encontrar a resposta? Me explica.
P: Eu desenhei três pacotinhos e coloquei quatro tracinhos que são as figurinhas em cada pacotinhos, aí depois contei tudo e deu doze. (sic)
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer dessa forma?
P: Teve. A senhora leu que em um pacote de figurinhas vem quatro figurinhas e ele quer saber quantas figurinhas vem em três pacotes, por isso, eu fiz assim. Depois que desenhei somei tudo e deu doze.

Figura 13: Extrato do protocolo do participante nº 114,
5º ano, masculino, 12 anos e 4 meses.

Exemplo 10: Problema de multiplicação por agrupamento implícito. Transição (simbólico). Agrupa os dados fornecidos no problema de forma simbólica, usando a adição repetida.


Para fazer uma receita de brigadeiro Maria usa vários ingredientes. Um dos ingredientes que Maria usa é o chocolate em pó. Maria usa 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Quantas colheres de chocolate Maria usará para fazer 3 receitas de brigadeiro?

Espaço para resolver o problema

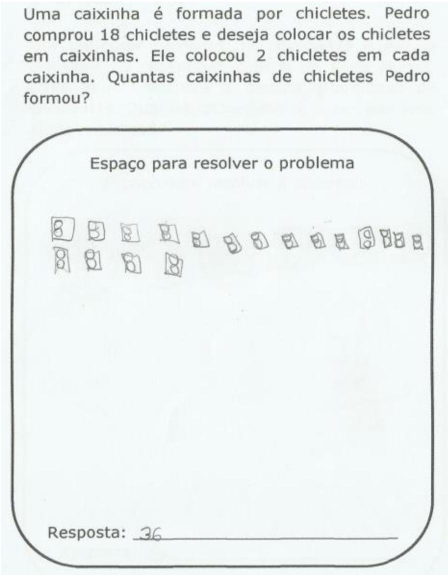
4
\+ 4
4
12

Resposta: 12

P: Doze.
E: Como você fez para encontrar a resposta? Me explica.
P: Eu fiz uma continha de mais. Botei quatro, mais quatro, mais quatro e deu doze.
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer dessa forma?
P: Teve. É que ele tem quatro figurinhas em um pacote, mas ele quer três pacotes, aí eu botei quatro, mais quatro, mais quatro pra ver o total. (sic)

Figura 14: Extrato do protocolo do Participante nº 61,
4º ano, feminino, 10 anos e 6 meses.

Exemplo 11: Problema de divisão por quota de agrupamento explícito. Transição (pictórico/simbólico). Agrupa os dados fornecidos no problema pictoricamente de forma incorreta.


Uma caixinha é formada por chicletes. Pedro comprou 18 chicletes e deseja colocar os chicletes em caixinhas. Ele colocou 2 chicletes em cada caixinha. Quantas caixinhas de chicletes Pedro formou?

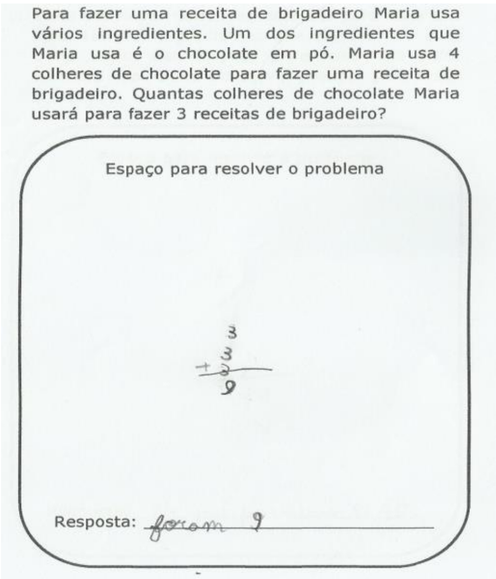
Espaço para resolver o problema

Resposta: 36

P: Trinta e seis.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Eu fiz dezoito caixinhas e coloquei dois chicletes dentro de cada caixinha, aí vi que a resposta era trinta e seis.
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer dessa forma?
P: Teve. Ele disse que tinha dezoito chicletes e ia colocar dois em cada caixinha. Aí eu coloquei os chicletes e deu trinta e seis caixinhas.

Figura 15: Extrato do protocolo do Participante nº 46,
3º ano, feminino, 9 anos e 4 meses (3ºano).

Exemplo 12: Problema de multiplicação por agrupamento implícito Transição (simbólico). Agrupa os dados fornecidos no problema de forma simbólica incorreta e explica usando adição repetida.


Para fazer uma receita de brigadeiro Maria usa vários ingredientes. Um dos ingredientes que Maria usa é o chocolate em pó. Maria usa 4 colheres de chocolate para fazer uma receita de brigadeiro. Quantas colheres de chocolate Maria usará para fazer 3 receitas de brigadeiro?

Espaço para resolver o problema

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ +\,3 \\ \hline 9 \end{array}$$

Resposta: foram 9

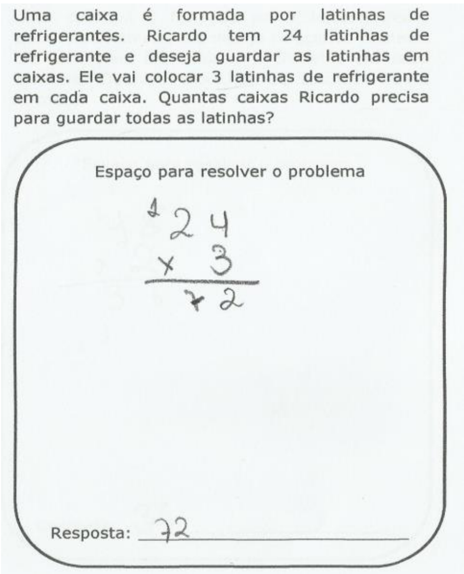
P: Nove.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Eu botei três, mais três, mais três, aí deu nove.
E: Que continha foi essa que você fez?
P: De mais.
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a fazer dessa forma?
P: Teve. Maria quer fazer três receitas, aí eu contei o três, mais três, mais três e deu nove.

Figura 16: Extrato do protocolo do Participante nº 41,
3º anos, masculino, idade 9 anos.

Tipo 4 – *Pensamento Multiplicativo*

Neste tipo, o estudante faz uso de estratégias eficientes, no campo das estruturas multiplicativas, de forma específica utiliza as operações de multiplicação ou divisão e explica considerando a operação de multiplicação ou divisão por ele adotada. Neste tipo, constata-se que apesar de usar uma das operações do campo multiplicativo, o estudante pode fazer de maneira adequada (correta) ou inadequada que leva ao erro (incorreta). Em relação aos erros consta-se o uso da operação inversa requerida no problema ou de erros procedimentais na realização do algoritmo. Por exemplo:

Exemplo 13: Problema de divisão por quota de agrupamento explícito. Pensamento multiplicativo.


Uma caixa é formada por latinhas de refrigerantes. Ricardo tem 24 latinhas de refrigerante e deseja guardar as latinhas em caixas. Ele vai colocar 3 latinhas de refrigerante em cada caixa. Quantas caixas Ricardo precisa para guardar todas as latinhas?

Espaço para resolver o problema

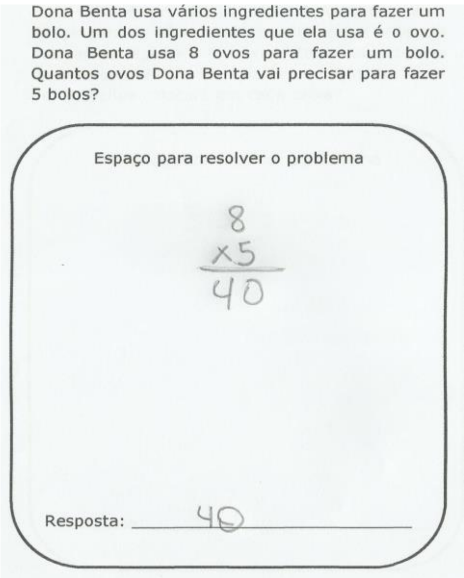
1
 24
x 3
 72

Resposta: 72

P: Setenta e dois.
E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.
P: Eu fiz uma continha de vezes, vinte e quatro vezes três, aí deu setenta e dois.
E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a escolher a continha de vezes?
P: Tá dizendo que Ricardo tem vinte e quatro latinhas e três latinhas, aí eu multipliquei pra encontrar a resposta.

Figura 17: Extrato do protocolo do participante nº 103,
5º ano, feminino, 12 anos.

Exemplo 14: Problema de multiplicação por agrupamento implícito. Pensamento multiplicativo. Escolhe a operação (multiplicação) correta e acerta.



P: Quarenta. Essa foi fácil.

E: Você achou fácil? (Faz sinal positivo com a cabeça) Como você fez para encontrar a resposta? Me explica.

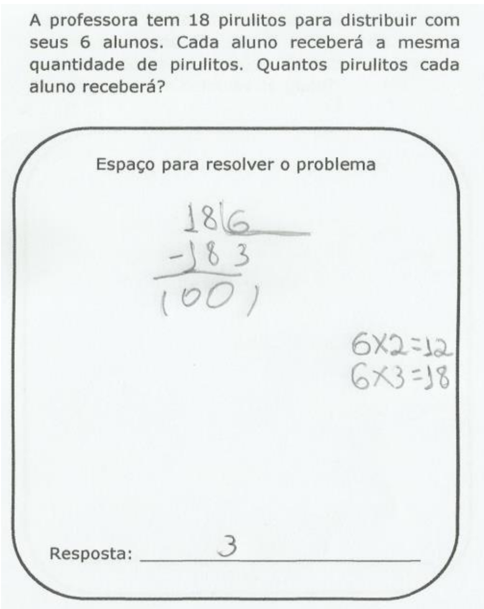
P: Eu fiz oito vezes cinco, aí deu quarenta.

E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a escolher a continha de vezes?

P: Teve. Disse que Dona Benta usa oito ovos para fazer um bolo, aí ela queria saber quantos ovos vai usar em cinco bolos. Tinha que ser de vezes.

Figura 18: Extrato do protocolo do participante nº 86,
5º ano, feminino, 11 anos e 2 meses.

Exemplo 15: Problema de multiplicação por agrupamento implícito. Pensamento multiplicativo. Escolhe a operação (divisão) correta e acerta.



P: Três.

E: Como você fez para encontrar essa resposta? Me explica.

P: Eu dividi dezoito por seis. Quando fiz a divisão tinha que ver qual número da tabuada do seis dava dezoito, aí achei o três. Coloquei o três e três vezes seis deu dezoito para dezoito nada.

E: Teve alguma coisa no probleminha que te levou a escolher a continha de vezes?

P: A professora tinha dezoito pirulitos para distribuir com os seus seis alunos, aí tinha que dividir tia.

Figura 19: Extrato do protocolo do participante nº 86,
5º ano, feminino, idade 11 anos e 2 meses.

Todas as estratégias foram analisadas por dois juízes independentes, e treinados, obtendo-se, um índice de concordância de 94.5% entre eles. Os casos discordantes foram avaliados por um terceiro juiz, também independente, cuja análise foi considerada final.

Capítulo IV
Resultados

No presente estudo, foram considerados de maneira geral dois tipos de problemas: os que possuem o agrupamento explícito e os de agrupamento implícito, dentro da estrutura multiplicativa e de modo específico os problemas de multiplicação e divisão (partição/quota). Sendo assim, os diferentes tipos de problema foram fatores investigados, com o propósito de verificar se o agrupamento explícito levou a criança a um raciocínio que favoreceu na resolução dos problemas e como isto ocorreu nas estratégias.

Os problemas, por sua vez, foram apresentados às crianças em duas ordens: Na primeira, Ordem 1, em que a criança resolve inicialmente os problemas que contém o agrupamento explícito e em seguida resolve o de agrupamento implícito; Na segunda, Ordem 2, em que a criança resolve os problemas na ordem inversa. Com base nos objetivos, os resultados encontrados foram analisados em função do desempenho, considerando o número de acertos e as estratégias de resolução adotadas, sendo essas analisadas conforme descrito no capítulo anterior relativo ao Sistema de Análise.

Antes de apresentar os dados referentes ao desempenho e as estratégias adotadas pelos participantes será apresentado o primeiro passo da análise de dados que foi a verificação das condições para a realização da análise fatorial exploratória, inicialmente com o banco de dados do desempenho – acerto (um ponto) e erro (zero); e em seguida o banco de dados das estratégias – tipos: inconsistente (um), pensamento aditivo (dois), transição (três) e pensamento multiplicativo (quatro), por meio dos seguintes procedimentos: (i) da inspeção da matriz de correlações; (ii) do Teste de Esfericidade de Bartlett e (iii) do cálculo do índice de adequação da amostra de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO). A inspeção da matriz de correlações mostrou que a média das correlações, levando em consideração o desempenho, no Grupo 1 foi de 1.95 e a do Grupo 2 foi de 1.97, não apresentou diferença significativa entre os grupos ($p = 0.898$).

Ao comparar as médias do banco de dados das estratégias, por trazer um maior detalhamento dos itens, constata-se os seguintes resultados, no Grupo 1 a média foi de 2.52 e a do Grupo 2 foi de 2.49, p=0.427 que também não revelou diferença significativa entre os grupos. O Teste de Esfericidade de Bartlett ambas as matrizes de correlações eram significativamente diferentes de uma matriz identidade, no desempenho com $X^2_{(gl=5)}$=320.935 e p=0.000 para o Grupo 1 e $X^2_{(gl=5)}$=359.631 e p=0.000 para o Grupo 2. O mesmo ocorre com as estratégias $X^2_{(gl=5)}$ = 713.819 e p = 0.000 para o Grupo 1 e $X^2_{(gl=5)}$=657.804 e p=0.000 para o Grupo 2. Por fim, o KMO do banco de dados do desempenho foi de 0.863 e 0.766, para os Grupos 1 e 2, respectivamente. Enquanto que nas estratégias o KMO foi de 0.828 no Grupo 1 e 0.814 no Grupo 2.

A partir de critérios apresentados por Tabachnick e Fidell (1989), esse conjunto de dados indica que há correlações suficientes entre as variáveis para a realização da análise fatorial em ambos os grupos, por isso, o segundo passo foi a investigação da estrutura fatorial. Sendo assim, a análise foi realizada através de uma análise fatorial exploratória com extração dos fatores por fatoração dos eixos principais e rotação oblíqua, uma vez que se tinha a expectativa que houvesse correlações significativas entre os fatores. Para isso, foi utilizado o *software Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS 21.0).

Foram obtidas duas soluções no banco de dados do desempenho, onde cada uma delas formou apenas um fator, sendo assim, unifatorial, indicando que o instrumento atual pode ser utilizado com validade e fidedignidade. Na primeira análise formou-se um fator capaz de explicar 60.8% da variância total que podem ser interpretados como: agrupamento explícito, contendo 6 itens; α =0.868. No segundo fator capaz de explicar 58.3% da variância, nomeado agrupamento implícito, contendo 6 itens; α = 0.850. Do ponto de vista psicométrico esses dois fatores apresentam o coeficiente alfa de Cronbach satisfatório.

Ao considerar os dados das estratégias, novamente foram obtidas duas soluções no banco de dados do desempenho, onde cada uma delas formou apenas um fator, sendo assim, unifatorial, indicando que o instrumento atual pode ser utilizado com validade e fidedignidade. Na primeira análise formou-se um fator capaz de explicar 77.6% da variância total que podem ser interpretados como: agrupamento explícito, contendo 6 itens; α =0.942. No segundo fator capaz de explicar 73.2% da variância, nomeado agrupamento implícito, contendo 6 itens; α = 0.926. Do ponto de vista psicométrico esses dois fatores apresentam o coeficiente alfa de Cronbach altos de modo a ser satisfatório.

Os dados foram submetidos a análises estatísticas apropriadas ao tamanho da amostra, com o propósito de verificar as diferenças existentes em função das variáveis independentes consideradas no estudo. Os resultados serão apresentados, a seguir, no formato de tabelas, contendo discussões descritivas e interpretativas.

4.1. Multiplicação

4.1.1. Desempenho

A Tabela 1 apresenta a média de acertos dos participantes, por ano de escolaridade, nos problemas de multiplicação, contendo o agrupamento explícito e o agrupamento implícito.

Tabela 1: Média de acertos problemas de multiplicação (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) em função do tipo de agrupamento explícito e implícito por ano de escolaridade.

	Multiplicação	
Ano	Agrupamento Explícito	Agrupamento Implícito
2º Ano	**0.26**	**0.15**
	(0.594)	(0.456)
3º Ano	**0.58**	**0.58**
	(0.809)	(0.809)
4º Ano	**1.07**	**1.13**
	(0.828)	(0.819)
5º Ano	**1.17**	**1.25**
	(0.775)	(0.841)

Para examinar se haveria diferenças entre os problemas que possuem o agrupamento explicito e implícito em cada ano investigado aplicou-se o Teste t para amostras pareadas que apontou não existir diferenças significativas no 2º, 3º, 4º e 5º ano. Tais resultados indicam que não há diferenças significativas quanto se compara os problemas de multiplicação de agrupamento explícito e de agrupamento implícito nos anos investigados. Sendo assim, o tipo de agrupamento não foi determinante para o desempenho, o qual parece ser influenciado pelo nível de instrução formal sobre a multiplicação.

Com o objetivo de identificar diferenças entre os anos de escolaridade foi aplicado o Teste t para amostra independente que revelou existir diferenças significativas entre: 2º ano vs. 3º ano (agrupamento implícito: p= .021); 2º ano vs. 4º ano (agrupamento explícito e implícito: p= .000); 2º ano vs. 5º ano (agrupamento explícito e implícito: p= .000); 3º ano vs. 4º ano (agrupamento explícito: p= . 030 e agrupamento implícito: p= .014); 3º ano vs. 5º ano (agrupamento explícito: p= . 005 e agrupamento implícito: p= .002). Isso ocorreu porque as médias de acertos foram consideravelmente superiores entre o nível de escolarização. Não foram detectadas diferenças significativas quando comparado o 4º ano vs. 5º ano, demonstrando que não há um avanço significativo no que diz respeito ao domínio da multiplicação. Considerando que os estudantes adotaram quatro tipos de estratégias para a resolução dos problemas de multiplicação, a saber: Tipo 1 (Inconsistente) ; Tipo 2 (Pensamento aditivo); Tipo 3 (Transição) e Tipo 4 (Pensamento multiplicativo), foi verificado a seguir se o agrupamento explícito, contido nos problemas influencia na escolha da estratégia adotada pelos estudantes para resolver problemas de multiplicação.

4.1.2. Estratégias de resolução

A Tabela 2 apresenta a distribuição das estratégias dos participantes, por ano de escolaridade, nos problemas de multiplicação por agrupamento explícito e agrupamento implícito.

Tabela 2: Média das estratégias nos problemas de multiplicação (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) em função do tipo de agrupamento (explicito e implícito) por ano de escolaridade.

Ano	Multiplicação									
	Agrupamento Explícito					**Agrupamento Implícito**				
	T1	T2	T3	T4	Média geral	T1	T2	T3	T4	Média geral
2º	**1.30**	**0.41**	**0.30**	**0.00**	**1.50**	**1.33**	**0.33**	**0.33**	**0.00**	**1.50**
	(0.912)	(0.797)	(0.609)	(0.000)	(0.665)	(0.920)	(0.734)	(0.734)	(0.000)	(0.747)
3º	**0.54**	**0.65**	**0.50**	**0.31**	**2.29**	**0.46**	**0.65**	**0.54**	**0.35**	**2.38**
	(0.905)	(0.936)	(0.860)	(0.679)	**(1.021)**	(0.761)	(0.797)	(0.859)	(0.689)	**(0.941)**
4º	**0.13**	**0.47**	**0.67**	**0.73**	**3.00**	**0.10**	**0.53**	**0.53**	**0.83**	**3.05**
	(0.507)	(0.860)	(0.922)	(0.944)	(0.938)	(0.403)	(0.860)	(0.860)	(0.950)	(0.884)
5º	**0.03**	**0.50**	**0.42**	**1.06**	**3.25**	**0.08**	**0.44**	**0.22**	**1.25**	**3.32**
	(0.167)	(0.775)	(0.806)	(0.924)	**(0.797)**	(0.368)	(0.773)	(0.637)	(0.937)	**(0.919)**

Nota: T1 (Inconsistente); T2 (Pensamento aditivo); T3 (Transição); T4 (Pensamento multiplicativo).

Observa-se, de modo geral, que há diferença percentual entre as médias dos tipos de estratégias, no entanto, para verificar se haveria diferenças significativas, considerando os problemas de agrupamento explícito e implícito em cada ano de escolaridade aplicou-se o Teste t para amostras pareadas. O Teste t não detectou diferenças significativas nos anos investigados (2º, 3º, 4º e 5º anos). Tais resultados indicam que o tipo de agrupamento não favoreceu o raciocínio do estudante na escolha de uma estratégia mais sofisticada, o qual parece ter utilizado apenas pelo nível de instrução formal que adquiriu na escola sobre a multiplicação. Verifica-se também por meio do Teste t que o nível de significância ao comparar as médias dos anos de escolaridade, de modo geral, considerando os tipos de agrupamento (explícito vs. implícito) não foi significativo para nenhum dos anos investigados.

Com o propósito de verificar se havia diferença entre os Tipos de estratégias em cada ano de escolaridade para amostra independente, aplicou-se o Teste t que apontou diferenças significativas nos tipos de estratégias entre: 2º ano vs. 3º ano (Explícito - Tipo 1: p=.004; Tipo 4: p=.022 e Implícito - Tipo 1: p=.000; Tipo 4: p=.012); 2º ano vs. 4º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000 e Implícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000); 2º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000 e Implícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000); 3º ano vs. 4º ano (Explícito - Tipo 1: p=.040; Tipo 4: p=.028 e Implícito -Tipo 4: p=.035). Esses resultados apontam que as diferenças nos anos investigados se concentram nos extremos (Tipo 1 e Tipo 4), os estudantes sem instrução formal (2ºano) apresentam uma média maior de estratégias do Tipo 1, enquanto que os estudantes que já foram formalmente instruídos (4º e 5ºanos) apresentam uma maior média de respostas do Tipo 4. Vale ressaltar que, não foram detectadas diferenças significativas nas estratégias quando comparado o 4º ano e o 5º ano.

4.2. Divisão

4.2.1. Desempenho geral

A Tabela 3 fornece uma visão geral da média de acertos dos participantes, por ano de escolaridade, nos problemas de divisão, no geral, considerando o agrupamento: explícito e implícito.

Tabela 3: Média de acertos problemas de divisão (máximo: 4) e desvio padrão (entre parênteses) em função do tipo de agrupamento (explicito e implícito) por ano.

	Divisão	
Ano	Agrupamento Explícito	Agrupamento Implícito
2º Ano	**0.48**	**0.33**
	(0.935)	(0.679)
3º Ano	**0.77**	**0.81**
	(1.394)	(1.327)
4º Ano	**1.43**	**1.27**
	(1.591)	(1.530)
5º Ano	**1.67**	**1.89**
	(1.707)	(1.670)

Verifica-se, de modo geral, que há diferenças nas médias de acerto dos estudantes, entretanto, não foram consideradas significativas quando aplicado o Teste t para amostras pareadas. Tais resultados indicam que não há diferenças significativas quando se compara os problemas de divisão, no geral, de agrupamento explicito e de agrupamento implícito nos anos investigados. Dessa forma, pode-se afirmar que o tipo de agrupamento não favoreceu o desempenho, o qual parece ser influenciado pelo nível de instrução formal sobre a divisão.

De modo geral, a Tabela 3 apresenta uma diferença no desempenho dos estudantes nos problemas de divisão, envolvendo o agrupamento explícito e o agrupamento implícito quando se considera o conhecimento escolar. O Teste t para amostras independentes revelou existir diferenças significativas entre: 2º ano vs. 4º ano (agrupamento explícito: p=.009 e implícito: p=.005); 2º ano vs. 5º ano (agrupamento explícito: p=.002 e implícito: p= .000); 3º ano vs. 5º ano (agrupamento explícito: p=.032 e implícito: p= .008). Os resultados indicam que isso ocorreu porque as médias de acertos foram consideravelmente superiores entre o nível de escolarização. Não foram detectadas diferenças significativas quando comparado o 2º ano vs. 3º ano, 3º ano vs. 4º ano e 4º ano vs. 5º ano, demonstrando que não há um avanço significativo no que diz respeito ao domínio da divisão. Considerando que foram apresentados dois tipos de problemas de divisão (partição e quota) e nos resultados anteriores não ter sido observado essas especificidades, serão abordadas, a seguir, as análises dos dois agrupamentos (explícito e implícito) em relação a esses tipos de problemas.

4.2.2. Desempenho nos problemas de divisão: partição vs. quota

A Tabela 4 mostra a média de acerto dos participantes, por ano de escolaridade, nos problemas de divisão por partição e divisão por quota, por agrupamento explícito e agrupamento implícito.

Tabela 4: Média de acertos problemas de divisão por partição e por quota (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) em função do tipo de agrupamento (explicito e implícito) por ano.

	Divisão			
Ano	Agrupamento Explícito		Agrupamento Implícito	
	Partição	Quota	Partição	Quota
2º	**0.22**	**0.26**	**0.26**	**0.07**
	(0.506)	(0.594)	(0.447)	(0.385)
3º	**0.35**	**0.42**	**0.46**	**0.35**
	(0.689)	(0.809)	(0.706)	(0.745)
4º	**0.73**	**0.70**	**0.73**	**0.53**
	(0.828)	(0.877)	(0.828)	(0.860)
5º	**0.92**	**0.75**	**1.00**	**0.89**
	(0.937)	(0.906)	(0.862)	(0.950)

Para verificar se haveria diferenças entre os problemas que envolvem o agrupamento explícito e o agrupamento implícito em cada ano investigado aplicou-se o Teste t para amostras pareadas apontou uma diferença marginalmente significativa no desempenho dos estudantes do 2º ano (p=.057). Isso indica que talvez o raciocínio dos estudantes seja favorecido por meio dos problemas de divisão por quota de agrupamento explícito. Porém, não revelou existir diferenças significativas no 3º, 4º e 5º ano. Tais resultados indicam que não há diferenças significativas quanto se compara a média de acertos os problemas de divisão de agrupamento explícito e de agrupamento implícito nos anos investigados. Constata-se, assim, que o tipo de agrupamento não foi determinante para o desempenho, o qual parece ser influenciado pelo nível de instrução formal sobre a divisão.

A fim de averiguar e confirmar essa influência do nível de escolaridade entre os anos investigados foi aplicado o Teste t para amostras independentes que apontou diferenças significativas entre: 2º ano vs. 4º ano (Partição - agrupamento explícito: p=.008 e implícito: p=.014 e Quota - agrupamento explícito: p=.032 e implícito: p=.014); 2º ano vs. 5º ano (Partição - agrupamento explícito: p=.001 e implícito: p=.000 e Quota - agrupamento explícito: p=.017 e implícito: p=.000); 3º ano vs. 5º ano (Partição - agrupamento explícito e explicito: p=.011 e Quota apenas no agrupamento implícito: p=.018). Isso ocorreu porque as médias de acertos foram consideravelmente superiores entre o nível de escolarização. Não foram detectadas diferenças significativas quando comparado o 2º ano vs. 3º anos, 3º ano vs. 4º ano e 4º ano vs. 5º anos. No momento não se dispõe de explicação para este resultado, demonstrando que não há um avanço significativo no que diz respeito ao domínio da divisão.

4.2.3. Estratégias de resolução: geral e por tipo de problema

4.2.3.1. Estratégias no geral

A Tabela 5 apresenta a distribuição das estratégias dos participantes, por ano de escolaridade, nos problemas de divisão por agrupamento explícito e agrupamento implícito.

Tabela 5: Média das estratégias nos problemas de divisão (máximo: 4) e desvio padrão (entre parênteses) em função do tipo de agrupamento (explicito e implícito) por ano.

	Divisão							
	Agrupamento Explicito				**Agrupamento Implícito**			
Ano	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4
2º	**3.74**	1.33	0.93	0.00	4.15	1.15	0.70	0.00
	(2.443)	(2.402)	(1.639)	(0.000)	(2.522)	(2.282)	(1.683)	(0.000)
3º	1.77	2.27	1.15	0.81	1.65	2.35	1.15	0.85
	(2.688)	(2.765)	(2.034)	(1.789)	(2.481)	(2.465)	(2.034)	(1.567)
4º	0.53	1.90	1.67	1.90	0.67	1.87	1.53	1.93
	(1.306)	(2.310)	(2.123)	(2.280)	(1.446)	(2.161)	(1.871)	(1.818)
5º	0.03	1.56	1.06	3.36	0.14	1.53	1.00	3.33
	(0.167)	(1.934)	(2.042)	(2.332)	(0.487)	(1.828)	(1.773)	(2.204)

Nota: T1 (Inconsistente); T2 (Pensamento aditivo); T3 (Transição); T4 (Pensamento multiplicativo).

Observa-se, de modo geral, que há diferença entre as médias dos tipos de estratégias, todavia, para verificar se estas diferenças são significativas, considerando os problemas de agrupamento explícito e implícito em cada ano de escolaridade aplicou-se o Teste t para amostras pareadas. O Teste t não detectou diferenças significativas nos anos investigados (2º, 3º, 4º e 5º anos). Tais resultados indicam que o tipo de agrupamento não influenciou o estudante na escolha de uma estratégia mais sofisticada, o qual parece ser influenciado apenas pelo nível de instrução formal que adquiriu na escola sobre a divisão. Verifica-se também por meio do Teste t que o nível de significância ao comparar as médias dos anos de escolaridade, de modo geral, considerando os tipos de agrupamento (explícito vs. implícito) não foi significativo para nenhum dos anos investigados.

O Teste t para amostra independente aplicado aos dados revelou que há diferenças significativas nos tipos de estratégias entre: 2º ano vs. 3º ano (Explícito - Tipo 1: $p=.007$; Tipo 4: $p=.023$ e Implícito - Tipo 1: $p=.001$; Tipo 4: $p=.007$); 2º ano vs. 4º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: $p=.000$ e Implícito - Tipo 1 e Tipo 4: $p=.000$); 2º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: $p=.000$ e Implícito - Tipo 1 e Tipo 4: $p=.000$); 3º ano vs. 4º ano (Explícito - Tipo 1: $p=.030$; Tipo 4: $p=.054$ – marginalmente significativo e Implícito -Tipo 4: $p=.021$); 3º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1: $p=.000$; Tipo 4: $p=.003$ e Implícito -Tipo 1: $p=.001$; Tipo 4: $p=.008$); 4º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1: $p=.025$; Tipo 4: $p=.013$ e Implícito -Tipo 1: $p=.044$; Tipo 4: $p=.007$). Esses resultados apontam que as diferenças nos anos investigados se concentram nos extremos (Tipo 1 e Tipo 4), os estudantes sem instrução formal (2ºano) apresentam uma média maior de estratégias do Tipo 1, enquanto que os estudantes que já foram formalmente instruídos (4º e 5ºano) apresentam uma maior média de respostas do Tipo 4.

4.2.3.2. Estratégias de resolução: partição

A distribuição das estratégias dos participantes, por ano de escolaridade, nos problemas de divisão por partição no agrupamento explícito e agrupamento implícito pode ser verificada na Tabela 6.

Tabela 6: Média das estratégias nos problemas de divisão por partição (máximo: 2) e desvio padrão (entre parênteses) em função do tipo de agrupamento (explicito e implícito) por ano.

	Divisão por partição									
	Agrupamento Explícito					**Agrupamento Implícito**				
Ano	T1	T2	T3	T4	Média geral	T1	T2	T3	T4	Média geral
2º	**1.33**	**0.44**	**0.22**	**0.00**	**1.44**	**1.37**	**0.41**	**0.22**	**0.00**	**1.43**
	(0.920)	(0.847)	(0.577)	(0.000)	(0.641)	(0.884)	(0.797)	(0.577)	(0.000)	(0.631)
3º	**0.62**	**0.88**	**0.27**	**0.23**	**2.06**	**0.58**	**0.81**	**0.35**	**0.27**	**2.15**
	(0.898)	(0.993)	(0.667)	(0.652)	(0.942)	(0.902)	(0.981)	(0.745)	(0.667)	(0.967)
4º	**0.27**	**0.73**	**0.40**	**0.60**	**2.67**	**0.20**	**0.60**	**0.50**	**0.70**	**2.85**
	(0.640)	(0.944)	(0.724)	(0.855)	(0.986)	(0.610)	(0.894)	(0.861)	(0.915)	(0.993)
5º	**0.00**	**0.50**	**0.31**	**1.19**	**3.28**	**0.06**	**0.36**	**0.44**	**1.14**	**3.11**
	(0.000)	(0.845)	(0.710)	(0.951)	(0.815)	(0.333)	(0.762)	(0.809)	(0.961)	(0.854)

Nota: T1 (Inconsistente); T2 (Pensamento aditivo); T3 (Transição); T4 (Pensamento multiplicativo).

Com o propósito de verificar se o conjunto de estratégias escolhido pelos estudantes na resolução favoreceu, de modo geral, considerando os anos de escolaridade, nos problemas de agrupamento explícito ou no agrupamento implícito nos problemas de partição, aplicou-se o Teste t para amostras pareadas, que não detectou diferença significativa entre no 2º, 3º, 4º e 5º ano. Os resultados indicam que o tipo de agrupamento não causou diferença no raciocínio do estudante na escolha de uma estratégia mais sofisticada em relação aos problemas de partição, o qual novamente parece ser favorecido apenas pelo nível de instrução formal que adquiriu na escola sobre a divisão.

Com o objetivo de verificar e confirmar se o nível de escolaridade favorece entre os anos investigados foi aplicado o Teste t para amostra independente. Os dados revelou que há diferenças significativas nos tipos de estratégias entre: 2º ano vs. 3º ano (Explícito - Tipo 1: p=.006 e Implícito -Tipo 1: p=.002; Tipo 4: p=.041); 2º ano vs. 4º ano (Explícito - Tipo 1: p=.000; Tipo 4: p=.001 e Implícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000); 2º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000 e Implícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000); 3º ano vs. 4º ano (Implícito - Tipo 4: p=.052 – marginalmente significativo); 3º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000 e Implícito - Tipo 1: p=.002; Tipo 2: p=0.48; Tipo 4: p=.000); 4º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1: p=.015; Tipo 4: p=.010); A partir dos resultados nota-se que as diferenças nos anos investigados se concentram novamente nos extremos (Tipo 1 e Tipo 4), os estudantes sem instrução formal (2ºano) apresentam uma média maior de estratégias do Tipo 1, em contrapartida os estudantes que já foram formalmente instruídos (4º e 5ºano) apresentam novamente uma maior média de respostas do Tipo 4.

4.2.3.3. Estratégias de resolução: quota

A Tabela 7 apresenta a distribuição das estratégias dos participantes, por ano de escolaridade, nos problemas de divisão por quota de agrupamento explícito e agrupamento implícito.

Tabela 7: Média das estratégias nos problemas de divisão por quotas (máximo: 2), o desvio padrão (entre parênteses) em função do tipo de agrupamento (explicito e implícito) por ano e a média das estratégias por agrupamento.

	Divisão por quota									
	Agrupamento Explícito					**Agrupamento Implícito**				
Ano	T1	T2	T3	T4	Média geral	T1	T2	T3	T4	Média geral
2º	**1.11**	**0.48**	**0.41**	**0.00**	**1.65**	**1.44**	**0.41**	**0.15**	**0.00**	**1.35**
	(0.934)	(0.849)	(0.747)	(0.000)	(0.731)	(0.892)	(0.797)	(0.534)	(0.000)	(0.617)
3º	**0.62**	**0.73**	**0.38**	**0.27**	**2.15**	**0.62**	**0.88**	**0.27**	**0.23**	**2.06**
	(0.941)	(0.962)	(0.804)	(0.667)	(1.008)	(0.898)	(0.993)	(0.667)	(0.587)	(0.876)
4º	**0.13**	**0.70**	**0.60**	**0.57**	**2.80**	**0.37**	**0.73**	**0.50**	**0.40**	**2.47**
	(0.507)	(0.915)	(0.932)	(0.858)	(0.887)	(0.765)	(0.944)	(0.861)	(0.724)	(0.946)
5º	**0.00**	**0.56**	**0.33**	**1.11**	**3.38**	**0.00**	**0.72**	**0.33**	**0.94**	**3.11**
	(0.000)	(0.843)	(0.756)	(0.950)	(0.815)	(0.000)	(0.914)	(0.756)	(0.955)	(0.854)

Nota: T1 (Inconsistente); T2 (Pensamento aditivo); T3 (Transição); T4 (Pensamento multiplicativo).

Com o objetivo de investigar se o conjunto de estratégias escolhido pelos estudantes (2º, 3º, 4º e 5º ano) na resolução favoreceu nos problemas de agrupamento explícito ou no agrupamento implícito nos problemas de divisão por quotas, aplicou-se o Teste t, que indicou diferença significativa apenas no 2º ano entre o agrupamento explícito e implícito (p =.021). Este resultado indica que as crianças conseguiram elaborar estratégias mais sofisticadas nos problemas que contêm o agrupamento explícito, tais como Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição). Sendo assim, o resultado indica que o agrupamento explícito influencia no raciocínio do estudante que não possui a instrução formal sobre a divisão por quota. Não foi encontrada diferença significativa entre o 3º, 4º e 5º ano.

Verifica-se também por meio do Teste t que o nível de significância ao comparar as médias dos anos de escolaridade, de modo geral, considerando os tipos de agrupamento (explícito vs. implícito) identificou diferença significativa apenas para os estudantes do 2º ano (p=.021). Nesse caso pode-se dizer que houve diferença significativa quanto se compara os problemas de divisão por quota, de agrupamento explicito e de agrupamento implícito. Dessa forma, pode-se afirmar que o tipo de agrupamento favoreceu o uso de outras estratégias para a resolução, como detectado um índice maior de estratégias do Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição), visto que esses estudantes ainda não possuem a instrução formal sobre a divisão.

Como pode ser observado os resultados das estratégias nos problemas de divisão por quota são semelhantes aos encontrados na tabela anterior dos problemas de divisão por partição (Tabela 6). O Teste t para amostra independente aplicado aos dados revelou que há diferenças significativas nos tipos de estratégias entre: 2º ano vs. 3º ano (Explícito - Tipo 4: p=.041 e Implícito -Tipo 1: p=.001; Tipo 4: p=.046); 2º ano vs. 4º ano (Explícito - Tipo 1: p=.000; Tipo 4: p=.001 e Implícito - Tipo 1: p=.000 e Tipo 4: p=.006); 2º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000 e Implícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000); 3º ano vs. 4º ano (Explícito - Tipo 1: p=.018); 3º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 1 e Tipo 4: p=.000 e Implícito -Tipo 1: p=.000 e Tipo 4: p=.001); 4º ano vs. 5º ano (Explícito - Tipo 4: p=.018 e Implícito - Tipo 1: p=.005 e Tipo 4: p=.013). Os resultados indicam novamente que as diferenças nos anos investigados se concentram nos extremos (Tipo 1 e Tipo 4), sendo assim os estudantes sem instrução formal (2ºano) apresentam uma média maior de estratégias do Tipo 1, já os estudantes que foram formalmente instruídos (4º e 5ºano) apresentam uma maior média de respostas do Tipo 4.

Capítulo V

Conclusões e considerações críticas

Um grande desafio para os pesquisadores e educadores é compreender as diferentes formas de raciocinar dos estudantes e operar o algoritmo, porque muitas vezes eles conseguem resolver um determinado tipo de problema dentro das estruturas multiplicativas, mas erram ao tentar resolver outros que parecem ter, a princípio, a mesma estrutura, levando ao mesmo tipo de raciocínio. Tomando como ponto de partida esse desafio, o presente estudo, buscou investigar problemas de estrutura semelhantes, no entanto, com ideias intuitivas distintas, em vista de identificar se há uma facilitação na resolução dos algoritmos dentro da estrutura multiplicativa.

Dessa forma, buscou-se investigar, de modo geral, se e como, a noção de agrupamento explícito favorece o raciocínio matemático das crianças na resolução de problemas proporção simples de um-para-muitos, envolvendo a multiplicação e divisão (partição e quota). De forma especifica, buscou-se investigar as estratégias utilizadas pelas crianças para resolver essa classe de problemas, com o propósito de observar se algum tipo de problema de agrupamento explícito e/ou implícito favoreceu a resolução.

Uma vez que a hipótese levantada neste estudo é que o agrupamento explícito pode vir a facilitar a forma de raciocinar das crianças, na resolução dos problemas, a predição é que as crianças teriam um melhor desempenho nos problemas que explicitam a noção apresentada, conforme observado em estudos anteriores. É provável também que as crianças venham a adotar estratégias de resolução mais sofisticadas, indicando um tipo de pensamento mais elaborado, nos problemas que apresentam o agrupamento explícito. Além da noção de compreensão, foi observado se houve diferença significativa no desempenho dos estudantes, nos diferentes tipos de problemas apresentados dentro da estrutura multiplicava, como foi descrito no planejamento experimental.

Inicialmente serão discutidos os principais resultados referentes ao desempenho e estratégias utilizadas em relação à multiplicação seguidos dos resultados referentes à divisão considerando as variáveis investigadas (agrupamento explícito vs. implícito e ano escolar). E ao final são tecidas considerações críticas sobre as limitações da investigação realizada sendo apresentadas possibilidades de pesquisas futuras.

Em relação à multiplicação os resultados encontrados no presente estudo indicam, que os estudantes não apresentaram médias com diferenças significativas nos problemas, envolvendo o agrupamento explícito, quando comparado aos problemas, envolvendo o agrupamento implícito, em nenhum dos anos investigados (2º, 3º, 4º e 5º ano). Esse resultado se contrapõe ao estudo de Magina, Santos e Merlini (2010) que revelam um melhor desempenho nos problemas de multiplicação, envolvendo a noção de agrupamento explícito, (denominado pelas autoras no estudo de ideia de coleção), uma vez que os problemas apresentam uma situação prototípica da multiplicação, permitindo que o aluno pense em multiplicar como adição repetida. Ao mesmo tempo diverge do estudo exploratório realizado por Chagas (2011), quando investigou a mesma variável em estudantes do 5º ano e verificou que os participantes tiveram um desempenho significativo nos problemas de multiplicação por agrupamento implícito.

Salienta-se que na presente pesquisa as variáveis sugeridas por Chagas (2011), a saber: o aumento na quantidade de problemas, o controle acerca dos enunciados e dos pares numéricos foram controladas com o propósito de encontrar resultados precisos. No entanto, embora esses controles tenham sido realizados no planejamento experimental os resultados apontam que não há diferença significativa entre os problemas de agrupamento explícito vs. implícito. Tais resultados revelam não haver influência do tipo de agrupamento no raciocínio dos estudantes para resolver os problemas de multiplicação de proporção simples de um-para-muitos, contendo o agrupamento explícito e o agrupamento implícito. Nesse momento conclui-se que a capacidade de articular as ideias, fazendo uso do raciocínio lógico-matemático, se sobrepõe aos tipos de agrupamentos (ideia intuitiva) que foi investigado no estudo.

No que diz respeito às estratégias, ainda nos problemas de multiplicação, de modo geral, foi constatado que a escolarização é um fator importante na escolha de estratégias dos estudantes, ocorrendo um aumento na média, indicando estratégias mais sofisticadas, à medida que os estudantes são instruídos formalmente sobre a multiplicação.

Isso pode ser explicado porque nas escolas os conteúdos a serem ensinados pelos professores seguem uma ordem lógica de apresentação, como pode ser observado no ensino da matemática, quando a adição é ensinada antes da multiplicação. Há inúmeras razões para isso acontecer, pois existem aqueles que afirmam que a adição é mais fácil do que a multiplicação. Outros dizem que a adição conduz a multiplicação, porque em alguns aspectos a adição serve de base para a multiplicação. Em parte, esse pensamento é correto, uma vez que a adição repetida é uma das formas de resolver os problemas de multiplicação, apesar de não ser esse um raciocínio multiplicativo. Isto pode ser verificado quando a criança é solicitada a realizar o cálculo de 3x4=12, ela pode chegar à resposta através da conta 4+4+4=12, ou seja, somando o número 4, três vezes, fazendo assim a adição repetida (Nunes & Bryant, 1997).

Constatou-se, também, que os estudantes que não receberam instrução sobre a multiplicação (2ºano) tendem a realizar estratégias apenas do Tipo 1 (Inconsistentes), Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição), sendo elas concentradas em maior índice no Tipo 1 (Inconsistentes), demonstrando assim que esses estudantes não conseguem em seu discurso explicar o tipo de estratégia utilizada para resolver o problema e não adotam estratégias do Tipo 4 (resolução através da multiplicação).

Quando os estudantes do 2º ano explicitaram suas estratégias, eles realizaram outras operações que não a multiplicação, sendo elas adição e subtração. Segundo Nunes e Bryant (1997) o raciocínio aditivo diz respeito a situações onde os objetos são reunidos (adição) ou separados (subtração). Nas situações aditivas os sentidos de número estão diretamente relacionados ao tamanho do conjunto dos objetos e as ações de unir e/ou separar objetos e conjuntos. De forma resumida, esse raciocínio pode ser analisado a partir de um axioma básico onde o todo é igual à soma das partes, ou seja, para saber o valor do todo é necessário fazer a soma das partes. Sendo assim, considera-se que o invariante conceitual do raciocínio aditivo é a relação parte-todo (Nunes, Campos, Magina, & Bryant, 2001). A escolha da estratégia do Tipo 2 pelos participantes do 2º ano parece está relacionada ao tipo de operação exercitada por eles em sala de aula.

Enquanto que os estudantes que haviam recebido a instrução formal (4º e 5ºano) sobre a multiplicação diminuem a média de respostas do Tipo 1 (Inconsistentes) e aumentam as respostas do Tipo 4 (Pensamento multiplicativo), ou seja, fazem uso do algoritmo da multiplicação mesmo que não consiga operar corretamente. Diferentemente dos estudantes do 3º ano que estão iniciando a instrução formal sobre a multiplicação, tendem a adotar mais estratégias do Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição) e apresentam uma média de respostas do Tipo 4 pouco expressiva quando comparado ao 4º e 5º anos em ambos tipos de agrupamento.

Como foi apresentado nos resultados a estratégia do Tipo 2, em que predomina o raciocínio aditivo, aparece em todos os anos, mas com uma média maior nos protocolos dos estudantes do 3º ano. Isso talvez ocorra por ser a forma de resolução mais exercitada nesse ano escolar. Já a estratégia do Tipo 3 (transição) aparece em todos os anos. Entretanto, pode ser observada com maior média nos protocolos das crianças do 4º ano, demonstrando assim que as mesmas transitam entre a saída das estruturas do campo aditivo e a entrada no campo multiplicativo. Isto se explica pelo fato de existir um predomínio na adição e subtração repetida das parcelas. A estratégia do Tipo 4, raciocínio multiplicativo, aparece nos protocolos do 3º, 4º e 5º ano. Tais resultados indicam que os estudantes apresentam mais respostas envolvendo o raciocínio no campo multiplicativo. Isto se deve ao fato dos estudantes já terem recebido a instrução, mesmo que de forma inicial (3ºano), sobre a multiplicação no contexto escolar, uma vez que é predominante nos estudantes do 4º e 5ºanos.

Vale considerar que o raciocínio multiplicativo pode ser compreendido como aquele que não envolve as ações de unir e separar os objetos como no raciocínio aditivo, mas estabelecem relações distintas, como pode ser observado em três tipos principais de situações, a saber: situações de correspondências, situações que envolvem relações entre variáveis e situações de distribuição. Dessa forma, para que ocorra a compreensão da multiplicação e da divisão a criança deve aprender e entender um novo conjunto de sentido de número, como também um novo conjunto de invariantes, sendo assim, muito mais do que simplesmente calcular quantidades. O raciocínio multiplicativo tem por invariante conceitual a relação fixa que é estabelecida entre duas variáveis, sendo elas: ou duas grandezas ou quantidades. Para Nunes e Bryant (1997) seja qual for à situação multiplicativa ela envolve duas quantidades numa relação constante entre si.

No que diz respeito aos problemas de divisão, de modo geral, os resultados revelaram que não houve diferenças significativas ao comparar os problemas de divisão por agrupamento explicito e de agrupamento implícito nos anos investigados. Dessa forma, pode-se afirmar que o tipo de agrupamento não favoreceu o desempenho, de modo geral, o qual parece que o nível de instrução formal facilitou a resolução, corroborando assim com os estudos de Chagas (2011), uma vez que também não encontrou diferenças significativas para esses tipos de problemas.

Ao verificar os problemas de divisão, levando em consideração a classificação proposta por Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985), a saber: partição e quota, esta forma de pensar os problemas de divisão por partição e por quota pode ser vista como modelos intuitivos[15]. Já para Vergnaud (1991), esses problemas podem ser caracterizados como problemas de isomorfismo de medidas. Nesta investigação, constatou-se que os estudantes do 2º ano apresentam diferença marginalmente significativa ($p=.057$) nos problemas que possuem o agrupamento explícito. Entretanto, deve-se ter cautela em relação a esse resultado, considerando a quantidade de problemas apresentados e a natureza dos problemas quotas apresentadas nessa investigação no que diz respeito ao agrupamento implícito e explícito. Isso porque os resultados revelam que não houve diferenças significativas nos demais anos 3º, 4º e 5º ano. Nesse sentido, considera-se que o tipo de agrupamento não foi determinante para o desempenho, o qual parece ser influenciado pelo nível de instrução formal sobre a divisão, ou seja, pelo raciocínio lógico-matemático que se sobrepõe aos tipos de agrupamentos que foram investigados, assim como já mencionado nos problemas de multiplicação.

Diante dos estudos existentes na literatura para investigar que tipo de problema de divisão, partição ou quota, constata-se que não há um consenso no que diz respeito à facilidade da criança em lidar com esses dois tipos de problemas. Embora para alguns autores apontem (Correa, Nunes, & Bryant, 1998; Lautert, 2005; Chagas & Lautert, 2009) que os problemas de partição facilitam a resolução dos problemas de divisão, quando comparado aos problemas de divisão por quota, porque a criança desde cedo possui a ideia de repartir (distribuir); outros pesquisadores apontam que os problemas de divisão por quotas podem ser resolvidos com mais facilidade pelas crianças por conduzirem diretamente ao uso da estratégia de subtração repetida (Brown, 1981; Nesher, 1988; Selva, 1993). Esta estratégia ocorre quando as crianças vão retirando do total a quantidade de elementos determinada pelo problema, até chegarem a seu resultado.

No que diz respeito às estratégias nos problemas de divisão por partição e por quota foi constatado, de modo geral, que as estratégias ficam mais sofisticadas à medida que aumenta o grau de instrução formal do estudante sobre a divisão. Constata-se que os estudantes que não receberam instrução sobre divisão (2º ano) fizeram uso de estratégias do Tipo 1 (Inconsistente), Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição), sendo elas concentradas em maior média no Tipo 1 (Inconsistentes), demonstrando assim que esses

[15] “O termo intuição em sua acepção mais geral, significa conhecimento imediato” (Fischbein, Barbat, & Minzat, 1971, p. 264).

estudantes não conseguem em seu discurso explicar o tipo de estratégia utilizada para resolver o problema, como também não houve estudantes que adotaram a estratégias do Tipo 4 (resolução através da divisão). Os estudantes do 2º ano quando explicitaram suas estratégias, realizavam outras operações que não a divisão, sendo elas adição e subtração. Entretanto os estudantes que haviam recebido a instrução formal (4º e 5ºano) sobre a divisão diminuem a média de respostas do Tipo 1 (Inconsistentes) e aumentam as respostas do Tipo 4 (Pensamento multiplicativo), ou seja, fazem uso do algoritmo da divisão mesmo que não consiga operar corretamente. Em contrapartida, os estudantes do 3º ano que estão iniciando a instrução formal sobre a divisão, tendem a adotar mais estratégias do Tipo 2 (Pensamento aditivo) e Tipo 3 (Transição) e apresentam uma média de resposta pouco expressiva do Tipo 4 quando comparado ao 4º e 5º anos em ambos tipos de agrupamento. Sendo esses resultados semelhantes aos encontrados nos problemas de multiplicação.

Ainda pode ser observado a estratégia do Tipo 2, que demonstra o uso do raciocínio aditivo, aparece em todos os anos, mas com uma média maior nos protocolos dos estudantes do 3º ano. Isso indica que pode ser a forma de resolução mais exercitada nesse ano escolar. No entanto, a estratégia do Tipo 3 (transição) também aparece em todos os anos, entretanto pode ser observada com maior média nos protocolos dos estudantes do 4º ano, demonstrando assim que os mesmos transitam entre a saída das estruturas do campo aditivo e a entrada no campo multiplicativo. Isto se explica pelo fato de existir um predomínio na adição e subtração repetida das parcelas. Como pode ser observado nas relações entre a subtração e a divisão, onde a criança consegue chegar ao resultado da divisão 36/6, subtraindo 6 de 36 até chegar a zero (Nunes & Bryant, 1997). A estratégia do Tipo 4 (Pensamento multiplicativo), aparece nos protocolos do 3º, 4º e 5º ano. Tais resultados indicam que as crianças apresentam mais respostas envolvendo o raciocínio no campo multiplicativo, isto se deve ao fato das crianças já terem recebido a instrução, mesmo que de forma inicial (3ºano) sobre a divisão no contexto escolar, uma vez que é predominante nas crianças do 4º e 5ºanos que foram formalmente instruídas sobre a divisão.

Considerando os resultados dessa investigação, consta-se que o presente estudo ampliou o olhar no que diz respeito à noção intuitiva de agrupamento explícito e de agrupamento implícito nos problemas de multiplicação e divisão (partição e quota), de proporção simples um para muitos. No entanto, ressalta-se as limitações dessa investigação visto que foram apresentados por exemplo, dois tipos de problemas de multiplicação e de divisão (por partição e por quota) o que pode não ter sido suficiente para explorar a compreensão dos estudantes do 2º ao 5º ano. Outro ponto a ser destacado é que pesquisa investigou apenas problemas que trazem a correspondência um para muitos e que poderia ser ampliado inserindo os problemas que apresentam a correspondência muitos para muitos.

Portanto, seria pertinente em pesquisas futuras uma ampliação no quantitativo de problemas apresentados aos estudantes, controlando a apresentação de problemas de proporção simples considerando a correspondência um para muitos e muitos para muitos, para afirmar o que no momento de forma exploratória foi percebido em relação ao agrupamento explicito e implícito. Por fim, salienta-se a necessidade de uma maior revisão da literatura no que diz respeito aos estudos clássicos e recentes que tratam acerca da noção de agrupamento e a resolução de problemas no âmbito das estruturas multiplicativas.

Referências

Barker, C., Pistrang, N., & Elliot, R. (1994). *Research methods in clinical and counseling psychology*. Chichester: John Wiley & Sons.

Beard, R. M. (1976). *Como a criança pensa: a psicologia de Piaget e suas implicações educacionais.* São Paulo: IBRASA.

Brasil (2005). *Ministério da Educação e do Desporto. Resultados do Sistema Nacional da Educação Básica (Saeb),* Disponível em: < http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/SAEB1995_2005.pdf> Acesso em: Jul. 2012.

Brito, M. R. F. (2006). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: M. R. F. Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar* (pp. 13-53). Campinas: Alínea.

Brown, M. (1981). *Numbers operations*. In HART, K. M. (Org.). Children's Understanding of Mathematics. John Murray, p.11-16.

Carraher, T. N. (1989). *O método clínico: usando os exames de Piaget*. São Paulo: Cortez.

Castorina, J. A. (1997). *Piaget - Vygotsky novas contribuições para o debate*. 4ª Ed. São Paulo: Ática.

Chagas, F. A. L. (2011). *Compreendendo as estratégias utilizadas por crianças para resolver problemas de multiplicação e divisão, envolvendo coleção e não coleção*. Monografia não publicada.

Chagas, F. A. L., Lautert, S. L., & Ferreira, S. P. A. (2009). *Um olhar para a reprodução oral de textos narrativos contendo problemas de divisão.* In: XVII Congresso de Iniciação Científica da UFPE, 2009, Recife. Um olhar para a reprodução oral de textos narrativos contendo problemas de divisão.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). *Young Children's Understanding of Division: The Relationship Between Division Terms in a Noncomputational Task*. Journal of Educational Psychology, 90(2), 321-329.

Correa, J., & Spinillo, A. G. (2004). O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In: PAVANELLO, Regina M. (Org.). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula.* São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM, p.103-127.

Fischbein, E. (1969). *Enseignement Mathématique et Développement Intellectuel*. In: Educational Studies in Mathematics. v. 38, n. 11, p. 290-306.

Fischbein, E., Barbat, I., & Minzat, I. (1971). *Intuitions primaries et intuitions secondaires dans l´initiation aux probabilité.* In: Educational Studies in Mathematics. v.4, n. 12, p. 264-280.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). *The rule of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division.* Journal of Research in Mathematics Education, pp. 3-17.

Flavell, J. H. (1988). *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. 3º Ed. São Paulo: Pioneira.

Lautert, S. L. (2005). *As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção.* 2005. 325 f. Tese de Doutorado. Doutorado em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, PE.

Magina, S.M.P., Santos, A., & Meline, V. L. (2010) *Quando e Como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental? Contribuições para o debate.* EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, p. 1-23.

Nesher, P. (1988). *Multiplicative school word problems: theorical approaches and empirical findings.* In: Hiebert, M. ; Behr, J. (Orgs.). Number concepts and operations in the middle grades. National Council for Teachers of Mathematics.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S., & Bryant, P. (2001). *Introdução à Educação Matemática.* São Paulo: Proem.

Palangana, I. C. (2001). *Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky: a relevância do social.* São Paulo: Summus.

Piaget, J. Development and learning. (1972) In Lavattelly, C. S. & Stendler, F. *Reading in child behavior and development.* New York: HartcourtBrace Janovich. Recuperado em 05 de maio de 2012 do http://educadi.psico.ufrgs.br/servicos/listas/ppg-cognitiva/doc00000.doc.

Piaget, J., & Gréco, P. (1974). *Aprendizagem e conhecimento*. Rio de Janeiro: Freitas Bastos.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1971). *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar.

Relatório OECD (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico): The Programme For International Student Assessment: Disponível em: http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf (consultado em 05 de Setembro de 2011).

Selva, A. C. V. (1993). *A influência de diferentes tipos de representação na resolução de problemas de divisão*. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) - Pós-graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

Spinillo, A. G. (1999). *As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervenção*. Arquivos Brasileiros de Psicologia, v. 51, n. 1, p. 55-74.

Spinillo, A. G., & Lautert, S. L. (2006). *O diálogo entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Educação Matemática*. In: L. Meira ; A. G. Spinillo. Psicologia Cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem. Recife: Editora Universitária.

Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (1989). *Using multivariate statistcs*. (2ªed.). Cambridge: Happer & Row.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative structures*. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique dês Mathématiques, vol.10 n°2-3, pp.133-170.

Vergnaud, G. (1997). *The nature of mathematics concepts*. In T. Nunes,; P. Bryant (Orgs.), Learning and teaching mathematics: an international perspective. p. 5-28. Sussex: Psychology Press.

Vergnaud, G. (2009). *A Criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Curitiba: Ed. da UFPE.

Anexos

ANEXO A – Termo de consentimento Livre e Esclarecido

NUPPEM
Núcleo de Pesquisa
em Psicologia da Educação Matemática

Universidade Federal de Pernambuco
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA
Centro de Filosofia e Ciências Humanas • 8º andar • Recife PE • 50670-901 • Brasil
Fone 55 [81] 2126 7330 • Fax 55 [81] 2126 8272
www.ufpe.br/psicologia/cognitiva.htm • cognitiva@ufpe.br
ALINA GALVÃO SPINILLO • Professora Associada • spin@ufpe.br
SÌNTRIA LABRES LAUTERT • Professora Adjunto II • sintrialautert@gmail.com

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos o (a) seu/sua filho (a) para participar, como voluntário (a), da pesquisa, "Resolvendo problemas de multiplicação e divisão envolvendo agrupamento explícito e implícito". Esta pesquisa é orientada pela Prof.ª Síntria Labres Lautert e está sob a responsabilidade da pesquisadora Fernanda Augusta Lima das Chagas, que pode ser contatada na Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, no 8º andar do Centro de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Pernambuco, Av. Acadêmico Hélio Ramos s/n - CEP: 50670-901. Recife-PE. Como também através dos telefones: 88237594 / 99913513 e e-mail: chagasfernanda@hotmail.com. Também participa desta pesquisa a pesquisadora: Síntria Labres Lautert que pode ser contatada por meio dos telefones: 21267030/2126 8272 ou 99159504.

Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar que o (a) seu/sua filho (a) faça parte do estudo, rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável. Em caso de recusa o (a) Sr.(a) ou o (a) seu/sua filho(a) não serão penalizados (as) de forma alguma.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

A pesquisa tem por objetivo investigar a compreensão do raciocínio multiplicativo em crianças, considerando problemas de multiplicação e divisão de proporção simples de um- para-muitos, envolvendo agrupamento explícito e implícito. Nesta pesquisa a criança será solicitada a resolver doze problemas de multiplicação e divisão semelhantes aos propostos no contexto escolar e posteriormente a pesquisadora realizará uma entrevista com a criança em vista de compreender como a mesma realizou a atividade proposta.

Estaremos à disposição para responder a qualquer dúvida sobre os procedimentos e outros assuntos relacionados com essa pesquisa. Assim como também terá total liberdade para retirar o seu

consentimento, a qualquer momento, podendo seu filho deixar de participar do estudo, sem que isto traga prejuízo ao atendimento prestado na escola.
Os riscos do ponto de vista psicológico são mínimos, tendo em vista que a criança será solicitada a resolver atividades semelhantes às propostas no contexto escolar, podendo haver o constrangimento da criança, no entanto serão tomados os cuidados necessários para que isso não venha a ocorrer. Já com relação aos benefícios são superiores, uma vez que a criança ao realizar essa atividade poderá estar explicitando a sua forma de raciocinar que poderá em outro momento ser discutida pela professora com vistas a auxiliar a criança na superação de suas dificuldades.

Esses protocolos ficarão à disposição da Universidade para outros estudos, sempre respeitando o caráter confidencial das informações registradas e o sigilo de identificação do participante. Os dados serão arquivados, no Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática, no 8º andar do Centro de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Pernambuco, Av. Acadêmico Hélio Ramos s/n - CEP: 50670-901, sob a responsabilidade da Prof.ª. Síntria Labres Lautert e serão destruídos depois decorrido o prazo de 05 (cinco) anos.

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, Sala 4 – Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600. Tel.: 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

____

(Assinatura da pesquisadora)

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO

Eu, ____, portador do RG_____________________, e do CPF__________________, abaixo assinado, responsável pelo (a) menor _____________________________________, autorizo a sua participação no estudo "Resolvendo problemas de multiplicação e divisão envolvendo agrupamento explícito e implícito", como voluntário(a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele (a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade ou interrupção de seu acompanhamento/ assistência/tratamento.

Local e data ____

Nome e Assinatura do (da) responsável: ____

Nome e Assinatura do (da) menor: ____

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do sujeito em participar. Testemunhas:

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura: