



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO**

ANA PAULA BARBOSA DE LIMA

**Princípio Fundamental da Contagem:
Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na
resolução de situações combinatórias**

Recife
2015

ANA PAULA BARBOSA DE LIMA

**Princípio Fundamental da Contagem:
Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na
resolução de situações combinatórias**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife
2015



ANA PAULA BARBOSA DE LIMA

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM:
CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE SEU USO
NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientadora
Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Examinador Externo
Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro

Examinador Externo
Prof. Dr. João Alberto da Silva

Examinadora Interna
Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife, 25 de fevereiro de 2015.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, pela oportunidade de um novo recomeço e por todas as bênçãos que tem me concedido nos últimos anos.

A minha amada orientadora Rute Borba, "Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes" (Isaac Newton). Mais do que orientadora, uma mãe que me acolheu academicamente e com quem pude aprender a ser uma profissional melhor. Agradeço todos os dias por Deus ter colocado esta pessoa tão especial em minha vida.

Aos meus pais, Manoel e Maria, que deram o melhor para a criação dos seus filhos e com os quais aprendi valores imprescindíveis para me tornar o que sou! Sei o quanto foi difícil ver sua filha mais velha alçar voo, mas os filhos são criados para o mundo. Tenho certeza que essa vitória é a comprovação de que valeu a pena.

Aos meus irmãos, Poliana, Luan e Daniela, com vocês aprendi o que é ter responsabilidade, a compreender e dar melhor de mim em qualquer situação, essa vitória é de vocês também!

A minha querida Jéssica, amiga, irmã, filha e mãe. Pelo companheirismo nestes dois anos, pela amizade, pelas risadas, choros, por me mostrar o mundo e em todo momento dizer que eu posso e que eu sou capaz. Independente dos caminhos que vamos seguir após o mestrado, nossa amizade permanecerá cada dia mais forte.

Aos meus avós maternos, Teresa e Zeca (in memória), mais que avós, meus pais e meus padrinhos amados e queridos. Sei o orgulho que vocês têm de mim e mesmo distantes, estão comigo sempre. Aos meus avós paternos, Zezé e José Vicente, pelo carinho, amor e cuidado. Pelas risadas inesquecíveis e conselhos que levarei pra vida toda.

Chegar numa nova cidade e ter a sorte de poder ver uma família se formar, mostra o quanto sou abençoada, então não poderia deixar de agradecer a minha segunda família, Jéssica, Daniele e Almeida. A vida de mestranda, não é fácil, especialmente no último ano, e sem o apoio, "intensidade" e o incentivo de vocês teria sido tudo mais difícil. Muito obrigada!

Aos poucos, mas verdadeiros amigos (amigos de outras vidas), Lydiane, Joelbson, Jorge, Michele, Nathaly, e Rodrigo. Obrigada pelo carinho e pela linda amizade que construímos ao longo desses anos. Amo vocês.

Aos meus professores da graduação, Airlan, Bruno e Madeira, pelo incentivo ao longo da Graduação e da Pós, pelas orientações, caronas e principalmente pela amizade. Vocês são exemplos que levo sempre comigo.

Ao senhor Nivaldo e a dona Marlene, pelas oportunidades que me proporcionaram durante os anos que trabalhei com vocês. Obrigada pela flexibilidade nos horários e as muitas vezes que me liberaram para que eu pudesse iniciar minha experiência na vida docente.

Aos meus amigos e colegas professores das escolas Lions e Imaculada Conceição. Josenilda, Alice, Mônica, Gilda, Anilza, Michele, Jorge, Fátima, Patrícia, Alexsandra, Albanete, Ieudes, Diogo, Jaqueline, Denilma, Felipe. Obrigada pela amizade, conselhos, carinho, risadas e pelo incentivo de sempre.

Aos meus queridos companheiros, quase inseparáveis do mestrado e agora da vida, Rosi Docinho, pelo companheirismo, conselhos e aprendizados que levarei pra vida. Tamires Florzinha, de mulher durona a uma menina linda e admirável, e Robertinho Dr. Utônio, prometo

que vou te defender dos bulliyngs durante o doutorado. Trabalhamos muito, mas nos divertimos mais ainda.

Aos novos amigos conquistados ao longo desses dois anos. Em especial a querida Simone, uma das pessoas mais lindas que já conheci em minha vida, agradecer por tudo que você fez por mim e pela Jéssica será sempre pouco. O mundo precisa de mais pessoas iguais a você. Com carinho especial também para Anaria, Preta, Chico, Felipe Oliveira, Livia, Thais, Tia Silene e Tia Jesus.

Aos professores Dr. Alessandro Ribeiro e Dra. Paula Bellemain pelas excelentes contribuições dadas ao longo da pesquisa. Ao professor Dr. João Silva por aceitar compor a banca de defesa e pelas contribuições dadas.

Aos professores e funcionários do Edumatec, em especial a Carlos, Cris, Gilda, Liliane, Lícia e Fátima pelas contribuições dadas nas aulas de seminário. A professora Verônica pelos momentos de descontração e ajudinhas, as professoras Gilda e Lícia pelo incentivo dado durante as disciplinas eletivas. A Clara e Mário pela paciência, pela ajuda e cafezinhos para aliviar a tensão destes dois anos, e aos estagiários por estarem sempre dispostos a nos ajudar.

Aos amigos da turma de 2013, em especial Georgina (meu anjinho da guarda), Pablo, Val, Jonh (pelo companheirismo durante as disciplinas pagas), Deise, Dayse, Herman, Fabíola Melo, Charisse, Carla, Cíntia (pelo carinho, conversas, risadas, conselhos e oportunidades) e aos colegas das turmas 2012 e 2014.

Ao grupo GERAÇÃO. Cris pelas contribuições, carinho e simpatia. Tiane, por me apresentar a Débora Ball e por ter contribuído bastante com esta pesquisa. Dani e Ju, além da ajuda dada a pesquisa, obrigada pelos conselhos em momentos decisivos, eles foram fundamentais para que eu pudesse manter a calma. Agradeço ainda a Adry, Thalita, Mona, Pablo, Tati e Jesus, Mika, Rita, Glauce, Flávia, Tina, Fernanda, Monique, Rita, Marta.

Aos professores que, gentilmente, se dispuseram a participar desta pesquisa.

A CAPES pelo financiamento que permitiu maior dedicação a essa pesquisa

RESUMO

No estudo propôs-se investigar os conhecimentos de professores da Educação Básica sobre como o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), também conhecido como *princípio multiplicativo*, pode ser usado na resolução de variados problemas combinatórios e na construção das fórmulas da Análise Combinatória. Pesquisas anteriores evidenciam a importância deste princípio no ensino de Combinatória e como o mesmo facilita a resolução dos diferentes tipos de situações combinatórias. Foram realizados dois estudos, um com a finalidade de saber se professores e estudantes reconhecem o PFC em situações combinatórias; e o outro estudo tinha como objetivo investigar conhecimentos de professores de Matemática sobre a resolução e o ensino de problemas combinatórios com o uso do PFC. O primeiro estudo envolveu um teste de múltipla escolha e justificativas, de dados coletados junto a professores dos anos finais do Ensino Fundamental, professores do Ensino Médio e alunos deste último nível da Educação Básica. Para o segundo estudo, foi realizada uma entrevista semiestruturada com professores, baseada nos tipos de conhecimento sugeridos por Ball, Thames e Phelps (2008) (*conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento horizontal do conteúdo, conhecimento do conteúdo e alunos, conhecimento do conteúdo e ensino e conhecimento do conteúdo e currículo*). Neste segundo estudo a coleta de dados foi realizada por meio de protocolos com situações combinatórias resolvidas por alunos. Estas situações envolveram os quatro tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*). A partir dos conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008), foram criadas seis categorias com foco no PFC para a análise dos conhecimentos dos professores sobre o uso do PFC na resolução de situações combinatórias: *conhecimento comum do PFC, conhecimento especializado do PFC, conhecimento horizontal do PFC, conhecimento do PFC e alunos, conhecimento do PFC e ensino e conhecimento do PFC e currículo*. Como principais resultados tem-se que, os professores do Ensino Médio melhor reconhecem o uso do PFC, quando comparados com os professores do Ensino Fundamental. O reconhecimento do PFC dos professores do Ensino Médio é muito superior ao dos alunos deste nível de ensino, o que pode indicar que os professores parecem não estar ressaltando este princípio no ensino junto a seus alunos. Os professores evidenciam *conhecimentos comum e especializado* do PFC, bem como *horizontal*, mas não indicam como relacionar o *princípio multiplicativo* com as fórmulas da Análise Combinatória. Evidenciam *conhecimento do aluno*, mas referente ao *conhecimento do ensino* não deixam claro como o uso de outras estratégias, tais como árvores de possibilidades e fórmulas, se relacionam com o PFC. Melhores conhecimentos do que é prescrito e apresentado em *currículos* também são necessários. Conclui-se que os conhecimentos docentes do PFC podem servir de base para um melhor desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da Combinatória, mas há aspectos do conhecimento que os professores necessitam desenvolver melhor. Espera-se, assim, ter contribuído com o levantamento de conhecimentos docentes sobre a Combinatória e também ter trazido contribuições referentes ao papel do *Princípio Fundamental da Contagem* como eficiente estratégia de ensino, por possibilitar a resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios.

Palavras-chave: Princípio Fundamental da Contagem. Conhecimentos Docentes. Combinatória.

ABSTRACT

The study aimed to investigate Middle and High School teachers' knowledge of how the *Fundamental Counting Principle* (FCP), also known as *multiplicative principle*, can be used in solving various combinatorial problems and in the construction of formulas of Combinatorial Analysis. Previous research showed the importance of this principle in teaching Combinatorics and how it facilitates the resolution of different types of combinatorial situations. Two studies were performed, one study with the purpose of knowing whether teachers and students recognize the FCP in combinatorial situations; and the other study was designed to investigate Mathematics teachers knowledge about the resolution and the teaching of combinatorial problems using the FCP. The first study involved a multiple choice test and justifications, of data collected with Middle School and High School teachers and students of the final level of basic education. For the second study semi structured interviews with teachers were performed, based on the types of knowledge suggested by Ball, Thames and Phelps (*common content knowledge, specialized content knowledge, horizon content knowledge, content knowledge and students, content knowledge and teaching and content knowledge and curriculum*). In this second study data collection was performed using protocols with combinatorial situations resolved by students. These situations involved the four types of combinatorial problems (*Cartesian product, arrangement, permutation and combination*). Based on the knowledge proposed by Ball, Thames and Phelps, six categories were created with a focus on the FCP to analyse teacher's knowledge on the use of FCP in solving combinatorial situations: *common FCP knowledge, specialized FCP knowledge, horizon FCP knowledge, FCP knowledge and students, FCP knowledge and teaching and FCP knowledge and curriculum*. The main results show that High School teachers better recognize the use of FCP when compared to Middle School teachers. Recognition of the FCP by High School teachers is much higher than the students of this school level, which may indicate that teachers do not seem to be emphasizing this principle when teaching their students. Teachers show *common* and *specialized* knowledge of the FCP and also *horizon knowledge*, but do not indicate how to relate the multiplicative principle with the formulas of Combinatorial Analysis. They demonstrate *knowledge of the student*, but referring to *knowledge of teaching* they do not make clear how the use of other strategies, such as tree diagrams and formula, relates to the FCP. Better knowledge of what is prescribed and presented in *curricula* are also required. We conclude that FCP teachers' knowledge can be the basis for a better development of the teaching and learning of Combinatorics, but there are aspects of knowledge that teachers need to develop better. It is expected, therefore, that the study contributes to the survey of teachers' knowledge of Combinatorics and also to have brought contributions on the role of the Fundamental Counting Principle as an effective teaching strategy, allowing for the resolution of different types of combinatorial problems.

Keywords: Fundamental Counting Principle. Teachers' knowledge. Combinatorics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Domínios do conhecimento para o ensino de Matemática.	34
Figura 2 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de <i>produto cartesiano</i>	63
Figura 3 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de <i>arranjo</i>	64
Figura 4 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de <i>permutação</i>	64
Figura 5 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de <i>combinação</i>	64
Figura 6 - Justificativa de professor do Grupo 1 ao resolver um problema de <i>combinação</i>	78
Figura 7 - Justificativa de um participante do Grupo 1, usando o PFC na resolução de um problema de <i>produto cartesiano</i>	79
Figura 8 - Justificativa de participante do Grupo 1 usando o PFC na resolução de um problema de <i>produto cartesiano</i>	81
Figura 9 - Justificativa de um participante do Grupo 1 usando o PFC na resolução de um problema de <i>permutação</i>	82
Figura 10 - Exemplo do uso, por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio), do PFC na resolução de um problema de <i>combinação</i>	84
Figura 11 - Exemplo do uso, por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio), do PFC na resolução de um problema de <i>produto cartesiano</i>	84
Figura 12 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio) do PFC na resolução de um problema de <i>arranjo</i>	85
Figura 13 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 do PFC na resolução de um problema de <i>permutação</i>	85
Figura 14 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio) de fórmula na resolução de um problema de <i>combinação</i>	86
Figura 15 - Uso do PFC por estudantes na resolução de problema de <i>produto cartesiano</i>	88
Figura 16 - Uso do PFC por aluno do Ensino Médio na resolução de um problema de <i>permutação</i>	88
Figura 17 - Uso do PFC por estudante do Ensino Médio na resolução de problema de <i>arranjo</i>	89

Figura 18 - Estratégia usada por professor dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de problemas de <i>produto cartesiano</i> com 4 e 5 etapas de escolha.	90
Figura 19 - Representação dos nós livres para codificação no webQDA.	93
Figura 20 - Exemplo de problema de <i>produto cartesiano</i> na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.....	94
Figura 21 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de <i>produto cartesiano</i> , analisado pelos professores do Estudo 2.....	95
Figura 22 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de <i>combinação</i> , analisado pelos professores do Estudo 2.	96
Figura 23 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de <i>arranjo</i> , analisado pelos professores do Estudo 2.	101
Figura 24 - Exemplo de problema de <i>combinação</i> na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.....	102
Figura 25 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de <i>produto cartesiano</i> , analisado pelos professores do Estudo 2.....	103
Figura 26 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de <i>arranjo</i> , analisado pelos professores do Estudo 2.	108
Figura 27 - Exemplo de problema de <i>produto cartesiano</i> na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.....	109
Figura 28 - Exemplo de problema de <i>combinação</i> na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.....	110
Figura 29 - Exemplo de um problema de arranjo mostrando a relação entre a fórmula e o PFC.....	111
Figura 30 - Exemplo de um problema de <i>permutação</i> mostrando a relação entre a fórmula e o PFC.....	112
Figura 31 - Exemplo de um problema de arranjo mostrando a relação entre a fórmula e o PFC.....	113
Figura 32 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de <i>produto cartesiano</i> , analisado pelos professores do Estudo 2.....	114
Figura 33 - Conhecimentos docentes do Princípio Fundamental da Contagem.....	122

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Acerto total no teste do Estudo 1.	73
Gráfico 2 - Representação dos participantes nos acertos totais por tipo de problema entre o Grupo 1 e o Grupo 2.	75
Gráfico 3 - Representação dos participantes nos acertos totais por tipo de problema entre o Grupo 1 e o Grupo 3.	76
Gráfico 4 - Representação dos participantes nos acertos totais por tipo de problema entre o Grupo 2 e o Grupo 3.	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Frequência de acertos no teste.....	73
Tabela 2 - Média de acertos no teste por grupo.....	78
Tabela 3 - Frequência dos tipos de conhecimentos mobilizados pelos professores no Estudo 2.	94
Tabela 4 - Frequência do tipo de conhecimento por participante.....	107
Tabela 5 - Frequência de tipo de conhecimento docente por problema combinatório.	114

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Representação de situações combinatórias por meio do PFC.	28
Quadro 2 - Problemas usados no estudo de Esteves (2001).	43
Quadro 3 - Teste para coleta de dados do Estudo 1.....	59
Quadro 4 - Codificação dos participantes do Estudo 2.....	61
Quadro 5 - Primeira fase da entrevista do Estudo 2.	62
Quadro 6 - Primeiro momento da segunda fase da entrevista do Estudo 2.	65
Quadro 7 - Segundo momento da segunda fase da entrevista do Estudo 2.	65
Quadro 8 - Terceira fase da entrevista do Estudo 2.....	66
Quadro 9 - Segundo momento da terceira fase da entrevista do Estudo 2.	67
Quadro 10 - Estratégias usadas pelos participantes do Grupo 1 (Professores dos anos finais do Ensino Fundamental).....	80
Quadro 11 - Estratégias usadas pelos participantes do Grupo 2 (Professores do Ensino Médio).	83
Quadro 12 - Estratégias usadas pelos participantes do Grupo 3 (estudantes do Ensino Médio).	87
Quadro 13 - Perfil dos participantes do Estudo 2.....	91

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
CAPÍTULO 1	20
O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC) COMO OBJETO DE ESTUDO	20
1.1 A Combinatória e as orientações sobre seu ensino	21
1.2 A Combinatória e o Princípio Fundamental da Contagem	24
CAPÍTULO 2	29
CONHECIMENTOS DOCENTES	29
2.1 O conhecimento docente na perspectiva de Shulman	30
2.2 O conhecimento docente na perspectiva de Ball, Thames e Phelps	33
CAPÍTULO 3	40
ESTUDOS ANTERIORES: O CONHECIMENTO DOCENTE EM COMBINATÓRIA	40
3.1 Intervenções usando o Princípio Fundamental da Contagem com estudantes e professores da Educação Básica	41
3.2 Saberes e conhecimentos docentes referentes à Combinatória	48
3.3 Estratégias de resolução utilizadas por professores em situações combinatórias	52
CAPÍTULO 4	56
MÉTODO	56
4.1 Estudo 1: Reconhecimento por estudantes e professores do Princípio Fundamental da Contagem em situações combinatórias	57
4.1.1 Participantes do Estudo 1	58
4.1.2 Instrumento para coleta de dados do Estudo 1	58
4.2 Estudo 2: Conhecimento de professores sobre o uso do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de situações combinatórias	60
4.2.1 Participantes do Estudo 2	61
4.2.2 Instrumento para coleta de dados do Estudo 2	62
CAPÍTULO 5	68
APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	68
5.1 O tipo de conhecimento e o Princípio Fundamental da Contagem	69
5.2 Estudo 1 - Reconhecimento por estudantes e professores do Princípio Fundamental da Contagem em situações combinatórias	71

5.2.1 Caracterização dos participantes do Estudo 1.....	71
5.2.2 Acertos totais no teste do Estudo 1	72
5.2.3 Desempenho dos grupos por tipo de problema.....	77
5.3 Estudo 2: Conhecimento de professores sobre o Princípio Fundamental da Contagem na resolução de situações combinatórias	91
5.3.1 Caracterização dos participantes do estudo 2	91
5.3.2 Tipo de Conhecimento e o Princípio Fundamental da Contagem	92
5.3.3 Tipos de conhecimentos docentes mobilizados por cada professor	107
5.3.4 Produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação e o tipo de conhecimento.	114
CONSIDERAÇÕES FINAIS	120
REFERÊNCIAS	127
APÊNDICE	132
ANEXOS	137

INTRODUÇÃO

Os conhecimentos e saberes docentes têm sido alvo constante de pesquisas na área da Educação Matemática, porém, como observado por Nacarato e Paiva (2006), há muitas questões em aberto, entre elas, as que dizem respeito à formação inicial e continuada de docentes que levam em consideração o conhecimento de conteúdos matemáticos específicos. Após levantamento de dados nos dois primeiros Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM, Nacarato e Paiva (2006, p. 15) concluem que "as pesquisas apontam o início de uma maior valorização do fazer e das necessidades do professor – que passa a participar dos cursos, escolhendo temas, ganhando espaço para se expressar".

O tema formação de professores tornou-se alvo de atenção dos pesquisadores nos últimos anos, tanto em nosso país quanto no exterior. Uma grande parte dessas pesquisas aborda questões relacionadas aos cursos e processos de formação inicial ou continuada. Outros investigam as crenças, representações e as práticas do professor. São raros os trabalhos que focalizam mudanças associadas aos processos de formação e mais raros ainda os que estudam as relações do docente com os conhecimentos de sua área específica. (MANRIQUE E ANDRÉ, 2006, p. 133)

Dessa forma, pesquisas, como a do presente estudo, objetivam contribuir para a investigação de conhecimentos de professores quanto a conteúdos matemáticos específicos, valorizando especificidades do fazer docente. Em particular, a presente pesquisa investiga um conteúdo matemático ainda pouco explorado – o uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) no ensino da Combinatória.

Segundo Ball (1991), compreender a Matemática envolve uma articulação de conhecimentos, crenças e sentimentos sobre o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula. Para a autora, esta união é um tipo de conhecimento substantivo que inclui conhecimento proposicional e processual da Matemática que pode ser entendido por meio de temas específicos, no caso da presente pesquisa a Análise Combinatória; por uso de procedimentos, como o uso do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)* na resolução de problemas combinatórios; envolvendo distintos tipos de problemas, que na Combinatória tem-se: *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*; e considerando as relações existentes entre esses temas, procedimentos e conceitos. Entende-se aqui como a relação entre o uso do PFC na resolução dos diferentes conceitos estudados na Combinatória.

A Combinatória, segundo o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2000), é uma área de estudo importante da Matemática discreta e sua recomendação é que, desde a pré-escola essas ideias sejam introduzidas no ensino da Matemática. No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997), também recomendam que o

estudo da Combinatória se dê desde os anos iniciais. Defende-se que Combinatória exerce um papel relevante no desenvolvimento da aprendizagem e do raciocínio matemático de alunos da Educação Básica, daí a importância de se investigar os conhecimentos mobilizados pelos professores para o ensino deste conteúdo em sala de aula.

Alguns estudos em Combinatória procuram investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, de diferentes níveis de ensino, ao longo da escolaridade e relacionado a outros conceitos. O estudo de Pessoa e Borba (2009b) buscou investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Maher, Powell, Uptegrove (2011) fizeram um estudo longitudinal com um grupo de cinco crianças. Os autores acompanham o desenvolvimento dessas crianças por um período de 12 anos no amadurecimento de estratégias para resolução de situações combinatórias. Já trabalhos de Batanero, Godino, e Navarro-Pelayo (1996); Roa e Navarro-Pelayo (2001) pesquisam sobre o raciocínio combinatório, muitas vezes ligado ao ensino da Probabilidade.

Investigar e valorizar as estratégias usadas na aprendizagem da Combinatória são importantes, pois segundo os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012, p. 92) "É na elaboração de estratégias e na resolução de problemas que o estudante estabelece processos cognitivos importantes que não podem ser desenvolvidos por meio de um ensino baseado na memorização sem compreensão ou na sistematização precoce de conceitos".

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) pode ser considerada uma das estratégias mais importantes para a resolução de situações combinatórias. O PFC pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas combinatórios, sejam eles condicionais ou não condicionais, e, também, é base das fórmulas empregadas no ensino da Análise Combinatória para a construção dos diferentes tipos de problemas (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) estudados neste campo da Matemática.

O presente estudo tem como objetivo geral *Investigar conhecimentos de professores sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) na resolução de problemas combinatórios e na construção de fórmulas*.

Como objetivos específicos têm-se:

- Examinar que conhecimentos os professores mobilizam ao avaliar resoluções de alunos de problemas combinatórios usando, ou não, o PFC;
- Sondar que conhecimentos curriculares os professores mobilizam para o ensino da Combinatória ou quando tentam justificar possíveis erros cometidos por alunos;

- Investigar quais tipos de conhecimentos são mobilizados por professores ao se depararem com situações envolvendo os conceitos de *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*;
- Levantar quais estratégias os professores sugerem utilizar para auxiliar os estudantes a superarem dificuldades diante de diferentes situações combinatórias.

Estes objetivos tentam responder as seguintes questões da pesquisa:

1. Que conhecimentos os professores de Matemática têm, sobre como o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) pode ser utilizado na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios?
2. Os professores relacionam o PFC com os procedimentos formais da Combinatória e a partir dele constroem as fórmulas usadas nos diferentes tipos problemas?

Apresenta-se, a seguir, um panorama dos capítulos que compõem esta dissertação.

No primeiro capítulo é abordado o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) e sua aplicação nos problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. Neste capítulo, procura-se enfatizar que o PFC é base de todas as fórmulas usadas no ensino de Combinatória. É apresentado, ainda, como são as orientações de estudiosos e documentos oficiais sobre o trabalho e a importância do PFC para o ensino da Análise Combinatória.

No segundo capítulo apresenta-se o referencial teórico que serve de base para o estudo do conhecimento dos professores de Matemática quanto ao uso do PFC como estratégia para resolução de situações combinatórias. No capítulo são apresentados os estudos de Shulman (1986, 1987) sobre uma base de conhecimentos que os professores precisam ter para o ensino de diversas áreas do conhecimento; e os estudos de Ball, Thames e Phelps (2008), que, ao fazerem um estudo da base de conhecimentos propostos por Shulman, propõem uma subdivisão do *conhecimento do conteúdo* e do *conhecimento pedagógico do conteúdo*, analisando o conhecimento a partir da prática do professor de Matemática em sala de aula.

No terceiro capítulo são apresentados e discutidos estudos anteriores. Neste capítulo são apresentados estudos de intervenção com alunos e professores da Educação Básica com o PFC usado e/ou investigado como estratégia para resolução de situações combinatórias; saberes e conhecimentos docentes referentes à Combinatória e reconhecimento de estratégias de resolução utilizadas por professores para a resolução de problemas combinatórios.

No quarto capítulo é apresentado o método de estudo. Nele são detalhados os procedimentos dos dois estudos realizados e seus respectivos objetivos.

No quinto capítulo são apresentados e analisados resultados dos dois estudos e, em seguida, são apresentadas conclusões derivadas das discussões efetuadas.

CAPÍTULO 1
O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)
COMO OBJETO DE ESTUDO

Neste capítulo é abordado o uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) em problemas combinatórios. O que dizem os estudiosos no ensino de Combinatória quanto ao uso do PFC na resolução de problemas combinatórios? Como os documentos oficiais abordam e indicam o uso do PFC para o ensino de Combinatória? Como o PFC pode ser utilizado na resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios (sejam eles problemas simples, sejam problemas condicionais e que apresentam diferentes números de etapas de escolha)? Aqui serão buscadas respostas para esses questionamentos.

1.1 A Combinatória e as orientações sobre seu ensino

A Análise Combinatória, segundo Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) é um ramo da Matemática que se destina a analisar estruturas e relações discretas, apresentando dois tipos de problemas que ocorrem com mais frequência, em seu estudo. São eles: 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; e 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem condições dadas (Morgado, et al, 1991, p. 2).

A combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação sem necessariamente ter que contá-los um a um. (PESSOA E BORBA, 2009b, p. 3)

Os tipos de problemas de Combinatória¹ estudados no Ensino Médio são os que envolvem *arranjos*, *combinações*, *permutações*. Pessoa e Borba (2007) ressaltam que, além desses três tipos, há também problemas de *produto cartesiano*, os quais são explicitamente trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Cada um destes tipos de problemas combinatórios apresentam características próprias que permitem sua distinção e possuem uma forma de organizar o raciocínio combinatório empregado em sua resolução. Segundo Borba (2013, p. 4), os problemas do tipo *produto cartesiano* "são determinados a partir da escolha de elementos de diferentes conjuntos"; nos problemas do tipo *arranjo* "os elementos são escolhidos a partir de um conjunto único, mas nem todos os elementos constituem as possibilidades a serem enumeradas", neste caso a ordem dos elementos escolhidos irá gerar novas possibilidades; nos problemas do tipo *combinação* "são escolhidos alguns elementos de

¹A Combinatória e Análise Combinatória serão tratadas basicamente como sinônimas e, por vezes, Análise Combinatória se refere mais especificamente à disciplina cursada no Ensino Médio.

um conjunto único e a ordem de escolha dos elementos não constituem possibilidades distintas", sendo assim, a ordem em que os elementos aparecem não irá gerar novas possibilidades. No caso dos problemas do tipo *permutação*, que são tratados na Matemática como um caso particular dos *arranjos*, todos os elementos do conjunto dado são utilizados. Para Borba (2013, p. 4) "Cognitivamente falando, entretanto, estes são tipos de problemas distintos, pois nos *arranjos* os elementos não são todos utilizados na escolha de cada possibilidade e nas *permutações* todos os elementos são utilizados em cada uma das possibilidades", com isso, fica clara a distinção entre os dois tipos de problemas.

O estudo da Combinatória é indicado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e trabalhada com mais aprofundamento no Ensino Médio e essa continuidade pode fazer com que os diferentes tipos de problema combinatórios sejam tratados de uma forma mais sistemática e generalizadora. Na mesma direção, Borba (2010), em seu estudo sobre o raciocínio combinatório na Educação Básica, recomenda que professores aproveitem as estratégias espontâneas desenvolvidas pelos estudantes – como desenhos, diagramas, listagens e operações aritméticas – e, gradativamente, sejam desenvolvidos procedimentos mais formais. Dessa forma, o professor estará estimulando seus alunos a pensarem sobre as generalizações possíveis na resolução de situações combinatórias. A orientação dos Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013, p. 195) é de que no Ensino Médio "o estudo da Análise Combinatória deve possibilitar que o estudante amplie, aprofunde e formalize seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório adquirido ao longo do Ensino Fundamental".

Sobre o aproveitamento de estratégias para formalização dos conceitos da Combinatória, Borba (2010, p. 14) enfatiza, ainda, que “Estas generalizações possibilitarão o reconhecimento da natureza multiplicativa de problemas de Combinatória, o que facilitará a compreensão que nas diversas situações combinatórias o *Princípio Fundamental da Contagem* é válido”. Sendo assim, considera-se o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), também conhecido como *princípio multiplicativo*, como uma forma de resolução de situações combinatórias e a base de fórmulas utilizadas no estudo de Combinatória, pois expressa a natureza multiplicativa dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

Estudos anteriores (SABO, 2010; STURM, 1999) indicam, contudo, que esta prática – de um trabalho com aprofundamento gradativo da Combinatória – não é seguida nas aulas de Matemática. Isso se justifica pelo fato de professores de anos iniciais do Ensino Fundamental, em grande parte, desconhecerem os diferentes tipos de situações combinatórias e professores de Ensino Médio, de modo geral, usarem apenas as fórmulas para resolver problemas

combinatórios, o que contraria o recomendado em documentos oficiais e não segue o que tem sido defendido por estudiosos do ensino de Combinatória.

Os PCN (BRASIL, 1998) indicam, para os anos finais do Ensino Fundamental, que os problemas de Combinatória sejam apresentados com números maiores que os trabalhados nos anos iniciais, para que os estudantes percebam o *princípio multiplicativo* implícito nestas questões e que este se torne um recurso para auxiliar a resolução de situações combinatórias. O Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental da rede Estadual de Educação de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) recomenda que neste nível de ensino, os problemas de contagem que envolvem o *princípio multiplicativo* devem ser trabalhados a partir de diferentes técnicas, como o diagrama de árvores, tabelas e esquemas, da mesma forma que os problemas envolvendo *arranjos*, *permutações* e *combinações*, sem o uso de fórmulas.

Os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) indicam para o Ensino Médio que os problemas de contagem devem ser trabalhados a partir de situações reais como base para o ensino de Combinatória, evitando a mera aplicação de fórmulas. O Currículo de Matemática para o Ensino Médio da rede Estadual de Educação de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) indica que os conteúdos referentes à Combinatória sejam tratados a partir da resolução e elaboração de problemas de contagem que envolvam as ideias de arranjos, permutações e combinações. Essa recomendação é indicada para os três anos do Ensino Médio e é sugerido que esse ensino se dê usando estratégias diversas, evitando-se, assim, a simples aplicação de fórmulas.

Já as Orientações Educacionais Complementares (BRASIL, 2002) indicam que as fórmulas usadas no ensino da Combinatória sejam consequência do raciocínio desenvolvido pelos alunos e que as mesmas tenham a função de simplificar os cálculos quando os dados do problema forem muito grandes. De acordo com os Guias do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD para o Ensino Médio (BRASIL, 2011, p. 29; BRASIL, 2014, p. 92), "É prejudicial um ensino que habitue o aluno a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso somente de fórmulas". Dessa forma, documentos oficiais recomendam que as fórmulas não sejam as únicas estratégias incentivadas em sala de aula para a resolução de situações combinatórias.

Os Guias do PNLD para o Ensino Médio (BRASIL, 2011, 2014) tratam a Combinatória como sendo um tema muito tradicional no ensino da Matemática e sua renovação nos livros didáticos do Ensino Médio tem sido feita de forma lenta. Um dos avanços observados, segundo o Guia do PNLD (BRASIL, 2011, p. 29), nas coleções aprovadas é a introdução do *Princípio Fundamental da Contagem*, "com o qual é possível

obter técnicas básicas e muito eficientes de contagem". Porém, de acordo com o Guia do PNLD (BRASIL, 2011), após a introdução do PFC, muitas destas coleções deixam esta estratégia de lado e voltam ao método tradicional baseado em fórmulas para o ensino de *arranjos, permutações e combinações*.

Maher, Powell e Uptegrove (2011), reforçam, ainda, que a introdução do PFC em problemas de contagem é uma ideia chave na Análise Combinatória. O PFC, assim, é fundamental de ser tratado no ensino da Combinatória.

Conclui-se que, de modo geral, estudiosos do tema e os documentos oficiais têm colocado o PFC como um procedimento que pode ser desenvolvido a partir das estratégias informais utilizadas pelos alunos e pode servir de base para a construção de procedimentos mais formais.

1.2 A Combinatória e o Princípio Fundamental da Contagem

A partir da exploração de problemas simples de contagem, os alunos compreenderão, segundo os PCN (1998, p. 137), o *princípio multiplicativo*, também tratado neste trabalho como *Princípio Fundamental da Contagem*, que está associado a questões do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar?".

A questão acima trata de um problema combinatório do tipo *produto cartesiano*. O mesmo pode ser resolvido aplicando-se o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), ou *princípio multiplicativo*. Este princípio é enunciado, segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p. 125), como, "Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq ". Salienta-se que o princípio pode ser ampliado para outras decisões, como D_3 (tomado a r modos), D_4 (tomado a s modos), D_5 (tomado a t modos) e assim por diante. O número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 , D_2 , D_3 , D_4 e D_5 seria, portanto, $p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t$.

Assim, por exemplo, para determinar de quantas maneiras Marta poderá montar um sorvete com um sabor e uma calda se ela tem quatro maneiras de escolher o sabor que terá seu sorvete e três maneiras de escolher as caldas, tem-se a seguinte sentença pelo PFC: 4×3 , sendo quatro as maneiras de escolha do sabor e três as maneiras de escolha da calda. Dessa forma, Marta poderia montar seu sorvete de 12 maneiras diferentes.

Outros exemplos de problemas combinatórios, que são apresentados a seguir, ilustram o uso do PFC em suas resoluções. O primeiro exemplo é uma situação de *permutação*, o segundo é um exemplo de problema de *arranjo* e o terceiro exemplo é uma *combinação*.

Para verificar de quantos modos distintos cinco pessoas podem se posicionar em um banco de cinco lugares, se tem, segundo o PFC, que para o primeiro lugar há cinco possibilidades de escolha, ou seja, qualquer uma das cinco pessoas pode ocupar o primeiro lugar; para o segundo lugar há quatro possibilidades de escolha – uma vez que uma das pessoas já estaria sentada no primeiro lugar; há três possibilidades para o terceiro lugar – já que o primeiro e segundo lugares estariam ocupados por duas pessoas; duas possibilidades de escolha para o quarto lugar e apenas uma possibilidade para o quinto lugar – pois todos os outros lugares já estariam ocupados pelas outras pessoas. A solução da situação poderia, assim, ser representada por $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou seja, seriam 120 maneiras distintas das cinco pessoas se posicionarem.

Um outro exemplo: Em uma corrida, 10 corredores disputam os três primeiros lugares. De quantas formas diferentes podemos obter estas colocações? Qualquer um dos corredores pode chegar em primeiro lugar e tem-se, assim, 10 possibilidades de corredores para esta colocação; para o segundo lugar haverá nove corredores, uma vez que um dos corredores já terá sido o primeiro colocado; e, para o terceiro lugar, tem-se oito corredores, uma vez que dois dos que disputam a corrida já ocupam o primeiro e segundo lugares. Neste caso, a solução poderia ser representada pelo PFC da seguinte maneira: $10 \times 9 \times 8$, ou seja, teríamos 720 maneiras diferentes de formação do pódio.

Se, em outra situação, um técnico fosse escolher, dentre 12 atletas, cinco para comporem a equipe titular de um time de basquete, usando o PFC se teria: para a escolha do primeiro componente 12 possibilidades de escolha, ou seja, qualquer um dos 12 atletas; para a escolha do segundo componente haveria 11 possibilidades de escolha, já que um atleta já foi escolhido; 10 possibilidades para a escolha do terceiro atleta; 9 possibilidades para a escolha do quarto atleta e 8 possibilidades para a escolha do quinto e último componente da equipe. Nesse caso, além dessa aplicação do PFC, seria necessário aplicá-lo outra vez, dividindo o resultado obtido pelo produto $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ pela *permutação* dos cinco elementos escolhidos entre si, pois um time composto por André, Beto, Carlos, Daniel e Ênio, por exemplo, é idêntico ao time composto por Beto, Carlos, Daniel, Ênio e André. A *permutação* dos cinco elementos, semelhantemente ao exemplo anterior, poderia ser obtido pelo produto

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, e o resultado final será dado por: $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$, que resultará em 792 possibilidades.

Observa-se, assim, que o *Princípio Fundamental da Contagem* - PFC, pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas combinatórios – como *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações* – e pode servir de base para a construção de procedimentos formais da Análise Combinatória, pois, como afirmam Pessoa e Borba (2009a), o PFC é entendido como um princípio implícito na resolução de todos os tipos de problemas combinatórios. Acreditamos que se os professores têm conhecimento de como o PFC pode ser utilizado na resolução de distintas situações combinatórias e de como este princípio é base das fórmulas de Análise Combinatória, o ensino e a aprendizagem da Combinatória podem ser facilitados.

O PFC pode, em algumas situações, ser combinado ao *princípio básico de contagem*, também conhecido como *princípio aditivo*, constituindo assim mais uma ferramenta básica para a resolução de problemas. Morgado et al (1991, p. 18) enuncia o *princípio aditivo* como "Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos". No exemplo, a seguir, é possível ver a aplicação do PFC e do *princípio aditivo* na resolução de um problema.

Quantos números pares com quatro algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto $A = \{0, 1, 2, 6, 7 \text{ e } 8\}$, lembrando que os números não podem começar por zero.

Primeiro fixamos os números pares, começando com o zero na casa das unidades, temos:

- Para o primeiro algarismo, cinco possibilidades, já que o zero já foi escolhido;
- Para o segundo algarismo, quatro possibilidades;
- Para o terceiro algarismo, três possibilidades.

Ter-se-ia assim, $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ possibilidades, com o número par terminado por zero.

Fixando agora o algarismo dois na casa das unidades, temos:

- Para o primeiro algarismo, quatro possibilidades, já que o dois já foi escolhido e não se pode ter zero na casa das unidades e milhar;
- Para o segundo algarismo, quatro possibilidades;
- Para o terceiro algarismo, três possibilidades.

Têm-se, assim $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades, com o número par terminado pelo algarismo dois.

Para os números terminados em seis e oito, segue-se o mesmo raciocínio de quando o algarismo dois ocupou a casa das unidades. Têm-se assim, para o número par com final seis, $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades. E para o número par com final oito, têm-se $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$ possibilidades.

Assim, para saber quantos números pares com quatro algarismos foram formados a partir dos elementos do conjunto A, somam-se o total de possibilidades para cada uma das possibilidades dos números terminados em zero, dois, seis ou oito. Temos assim, $60 + 48 + 48 + 48 = 204$ números pares que podem ser formados.

É importante ressaltar que sempre há a aplicação do *princípio multiplicativo* em problemas combinatórios, mas nem sempre o princípio aditivo se faz presente. Isto é uma das justificativas para a Combinatória estar inserida no campo multiplicativo.

Borba e Braz (2012) estudaram problemas combinatórios condicionais e observaram que o PFC é uma estratégia válida para as diversas situações propostas. As autoras defendem que o uso direto de fórmulas nem sempre é útil quando o problema apresenta condições de *escolha* (implícita ou explícita), de *ordenação*, de *posicionamento* e/ou de *proximidade* de elementos. Já o PFC é um recurso que dá conta das diferentes situações combinatórias condicionais.

Entende-se, aqui, que o trabalho com Combinatória em sala de aula, pode ser eficiente a partir o uso do PFC na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. É preciso, portanto, investigar conhecimentos que os professores têm de Combinatória, em particular do PFC, tanto em sua formação inicial quanto na continuada. Segundo os PCN (1998, p. 36) "Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área". Assim, os conhecimentos dos professores podem influenciar direta e indiretamente o modo como a Combinatória é tratada em sala de aula. Acredita-se que, se há espaço para que procedimentos variados sejam valorizados e, em particular, os alunos possam compreender os procedimentos formais e não apenas memorizá-los, maiores proveitos terão do aprendizado da Análise Combinatória. No Quadro 1, Lima (2014) exemplifica como problemas combinatórios, com ou sem condição, podem ser representados a partir do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC).

Quadro 1 - Representação de situações combinatórias por meio do PFC.

TIPO	PROBLEMAS	REPRESENTAÇÃO USANDO O PFC
PRODUTO CARTESIANO	Joaquim foi à livraria comprar seu material escolar. Para montar seu kit a livraria lhe ofereceu: 3 modelos de caderno, 4 modelos de lápis, 8 modelos de borracha e 2 modelos de caneta azul. De quantas formas diferentes Joaquim pode montar seu kit?	$3 \times 4 \times 8 \times 2$ Quantidade de modelos possíveis (QMP) de cadernos X QMP de lápis X QMP de borracha X QMP de canetas.
ARRANJO	Na final do campeonato de judô, 5 meninas estão disputando os 3 primeiros lugares do torneio. De quantas formas diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	$5 \times 4 \times 3$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 1º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 2º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 3º lugar.
PERMUTAÇÃO	De quantos modos distintos 5 pessoas podem se posicionar em um banco de 5 lugares?	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 1ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 2ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 3ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 4ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 5ª posição.
COMBINAÇÃO	Um técnico tem que escolher, dentre 12 atletas, 5 para compor a equipe titular de um time de basquete. Qual o total de possibilidades que o técnico tem para montar sua equipe?	$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ Quantidade de escolhas para o 1º atleta X quantidade de escolhas para o 2º atleta X quantidade de escolhas para o 3º atleta X quantidade de escolhas para o 4º atleta X quantidade de escolhas para o 5º atleta. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 5 atletas.
ARRANJO CONDICIONAL	Ana, Júlia, Marcos, Pedro e Laís estão participando de uma corrida. De quantos modos diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados se Julia sempre chegar em primeiro lugar?	$1 \times 4 \times 3$ 1º lugar ocupado por Júlia X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar.
COMBINAÇÃO CONDICIONAL	Marta precisa escolher entre seus 8 amigos (Tiago, Simone, Daniele, Jéssica, Pedro, Amanda, Rafael e Felipe), 4 para ir ao cinema com ela. De quantas formas diferentes Marta pode escolher esses quatro amigos desde que Jéssica sempre esteja entre os escolhidos?	$\frac{1 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ 1º lugar ocupado por Jéssica X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 4º lugar. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 4 amigos.

Fonte: Adaptado de LIMA (2014).

Pensando nos conhecimentos que o professor precisa desenvolver e mobilizar para aulas de Combinatória, é apresentada a seguir, uma discussão sobre os tipos de conhecimentos necessários para a prática docente, de acordo com as ideias de Shulman (1986, 1987) e de Ball, Thames e Phelps (2008).

CAPÍTULO 2

CONHECIMENTOS DOCENTES

Neste capítulo, são apresentadas as considerações de Shulman (1986; 1987) sobre uma base de conhecimentos que professores precisam ter para desenvolver seu trabalho, destacando, assim, o *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo*. A partir destes trabalhos de Shulman, o estudo desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008) apresenta uma teoria baseada na prática do conhecimento do conteúdo, investigando a natureza do ensino da Matemática, desenvolvendo, assim, uma noção de *conhecimento matemático para o ensino*².

2.1 O conhecimento docente na perspectiva de Shulman

Shulman (1987) trata em seu trabalho de propostas de uma reforma para o ensino a partir de estudos feitos em exames para ingresso de professores à função docente. Segundo o autor, muitos dos que propõe reforma no ensino defendem que deva existir uma base de conhecimentos docentes para conduzir o processo de ensino nas escolas. De acordo com Shulman (1987, p. 4), essa base seria formada por "um conjunto codificado ou codificável de conhecimento, habilidade, compreensão e tecnologia, de ética e disposição, de responsabilidade coletiva"³. Os que defendem a reforma têm suposições sobre esta base de ensino e sugerem um aumento das exigências na formação de professores. Shulman (1987, p. 4), porém, mostra preocupação com este tipo de proposta, uma vez que essa base de conhecimentos "não indica o que os professores deveriam saber, fazer, compreender"⁴. O autor propõe, então, que deva haver um conjunto de habilidades e conhecimentos que precisam ser analisados.

A partir de análises sobre essa base de conhecimentos e amparado também em estudos anteriores, citados em seu trabalho, Shulman (1987, p. 5) vê surgir as primeiras indagações: "Qual base de conhecimentos? Conhece-se o suficiente sobre o ensino para sustentar uma base de conhecimentos?"⁵. Segundo Shulman (1987, p. 6) "professores mesmos têm

² Tradução nossa. Em inglês: *Mathematical Knowledge for Teaching - MKT*.

³ Tradução nossa. Em inglês: "a codified or codifiable aggregation of knowledge, skill, understanding, and technology, of ethics and disposition, of collective responsibility."

⁴ Tradução nossa. Em inglês: "not say what teachers should know, do, understand."

⁵ Tradução nossa. Em inglês: "What knowledge base? Is enough known about teaching to support a knowledge base?"

dificuldade em articular o que sabem e como eles sabem"⁶. A partir desses argumentos, Shulman (1987) defende em seus estudos que seja criada uma base de conhecimento para o professor. Assim, essa base seria composta pelas seguintes categorias,

- conhecimento do conteúdo; - conhecimento pedagógico geral, com referência especial para princípios amplos e estratégias de gestão e organização da sala de aula que transcendem o assunto; - conhecimento do currículo, com particular compreensão dos materiais e programas que servem como "ferramenta de ofício" para o professor; - conhecimento pedagógico do conteúdo, amálgama especial de conteúdo e pedagogia, sua forma especial de compreensão profissional é próprio do professor; - conhecimento de alunos e suas características; - conhecimento do contexto educacional, variando entre o funcionamento do grupo ou classes, a gestão ou financiamento de distritos escolares, ao caráter de comunidades e culturas; e - conhecimento das finalidades educacionais, propósitos, e valores e seus fundamentos filosóficos e históricos.⁷ (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa).

Dentre essas categorias, Shulman (1987) destaca o *conhecimento pedagógico do conteúdo* (em inglês: *pedagogical content knowledge*) como a categoria que exerce um papel importante para o processo de ensino, pois permite que se faça uma distinção entre a compreensão especialista de uma determinada área de conhecimento e a compreensão profissional do professor. Esse conhecimento representa também um amálgama entre o conteúdo estudado e a didática que envolve o ensino do mesmo, admitindo, assim, uma compreensão maior sobre como temas e problemas se organizam e vão adaptar-se aos interesses e capacidades de seus alunos. Para Shulman (1986) conhecimento pedagógico (em inglês: *pedagogical knowledge*) é um tipo de conhecimento que vai além do conhecimento do conteúdo para uma dimensão de conhecimento do conteúdo para o ensino.

Uma crítica feita por Ball, Thames e Phelps (2008, p. 394) é sobre o significado dado ao termo *conhecimento pedagógico do conteúdo*, termo citado em muitos estudos feitos a partir do estudo de Shulman. Estes estudos tratam o *conhecimento pedagógico do conteúdo* como sendo uma interseção entre conhecimento do conteúdo e conhecimento sobre a metodologia de ensino empregada ou sobre o domínio que combina *conhecimento do ensino* com *conhecimento pedagógico*. Segundo esses autores boa parte dessas definições são feitas equivocadamente. "Quando definido desta maneira, conhecimento pedagógico do conteúdo,

⁶ Em inglês: "Teachers themselves have difficulty in articulating what they know and how they know it".

⁷ Em inglês: "- content knowledge; - general pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter; - curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers; - pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding; - knowledge of learners and their characteristics; - knowledge of educational contexts, ranging from the workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; and - knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds."

começa a parecer que inclui quase tudo o que o professor pode saber de um tópico particular, obscurecendo a distinção entre ações, raciocínio, crenças e conhecimento do professor⁸.

Ball, Thames e Phelps (2008), argumentam, ainda, que Shulman e colaboradores não propuseram uma lista ou catálogo do que os professores devem saber para ensinar qualquer conteúdo da área de conhecimento e, sim, que seu trabalho sirva como uma orientação para professores e também para chamar a atenção de pesquisadores sobre a importância de tipos de conhecimentos necessários para o ensino. Chamam, assim, a atenção sobre a necessidade de pesquisas que foquem os conhecimentos sobre os conteúdos a serem ensinados.

Essa base de conhecimentos para o ensino, proposta por Shulman (1987), nasce a partir de algumas fontes específicas. Sobre essas fontes, Shulman (1987) aponta quatro como sendo as principais que justificam esses conhecimentos que os professores precisam ter para o ensino. Essas fontes são,

(1) formação no conteúdo da disciplina, (2) os materiais e a definição do processo educacional institucionalizado (por exemplo, currículo, livros didáticos, financiamento e organização escolar, e a estrutura para o ensino profissional), (3) pesquisa em educação, organização social, aprendizagem humana, ensino e desenvolvimento, e outros fenômenos sociais e culturais que afetam o trabalho do professor, e (4) a sabedoria outorgada à sua própria prática⁹. (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa).

Shulman (1987) define esses conhecimentos como sendo uma base para o ensino, não especificando uma área de estudo em especial, mas abrangendo todas as áreas do conhecimento de uma forma geral. Os pesquisadores Ball, Thames e Phelps (2008), ao estudarem os tipos de conhecimentos – *conhecimento do conteúdo* e *conhecimento pedagógico do conteúdo*, apontados por Shulman (1987) como sendo de grande importância para o professor – fazem um refinamento destes ao trabalharem estes tipos de conhecimentos a partir da prática do professor, no que se referem ao ensino da Matemática, como apresentado a seguir.

⁸Em inglês: "When defined in these ways, pedagogical content knowledge begins to look as though it includes almost everything a teacher might know in teaching a particular topic, obscuring distinctions between teacher actions, reasoning, beliefs, and knowledge".

⁹Em inglês: "(1) scholarship in content disciplines, (2) the materials and settings of the institutionalized educational process (for example, curricula, textbooks, school organizations and finance, and the structure of the teaching profession), (3) research on schooling, social organizations, human learning, teaching and development, and the other social and cultural phenomena that affect what teachers can do, and (4) the wisdom of practice itself".

2.2 O conhecimento docente na perspectiva de Ball, Thames e Phelps

Ao longo de mais de uma década de pesquisa, Ball e Bass (2003); Ball, Hill e Bass (2005); Ball, Thames e Phelps (2008), entre outros, têm estudado sobre a Matemática escolar no Ensino Fundamental, observando os desafios do ensino e os recursos matemáticos empregados. Estes pesquisadores fazem uma análise da natureza do conhecimento matemático e das habilidades utilizadas no ensino desta disciplina. São a partir destes estudos, segundo Ball, Hill e Bass (2005, p. 16), que eles buscam, com base na prática do professor, fazer um retrato do que eles chamam "Conhecimento Matemático para o Ensino". Por "Ensino", Ball, Hill e Bass (2005) entendem ser tudo aquilo que o professor realiza em sala de aula, incluindo o planejamento das aulas e a avaliação feita aos alunos, para fazer com que seu aluno aprenda o conteúdo que está sendo trabalhado.

Saber Matemática para o ensino, de acordo com Ball e Bass (2003), vai além do conteúdo e inclui elementos sobre os estudantes presentes no currículo escolar. É preciso que o professor compreenda quando um estudante apresenta uma solução diferente e que tome decisões adequadas a partir dos conhecimentos que possui do conteúdo, do aluno, do currículo e do ensino do conteúdo.

Ball, Thames e Phelps (2008), ao investigarem as demandas do conhecimento matemático para o ensino, abordam os conhecimentos do professor de Matemática a partir da sua prática em sala de aula. Objetiva-se, assim, investigar a orientação dada ao docente sobre o conhecimento do conteúdo matemático durante sua formação, fazendo um estudo sobre o ensino deste conteúdo, procurando identificar o conhecimento-base a partir de análises de questões matemáticas que surgem durante o ensino.

Partindo de estudos sobre a base de conhecimentos propostas por Shulman (1987), Ball, Thames e Phelps (2008) fizeram um refinamento das categorias *conhecimento do conteúdo* (em inglês: *content knowledge*) e *conhecimento pedagógico do conteúdo* (em inglês: *pedagogical content knowledge*) e identificaram e definiram domínios de conhecimento matemático para o ensino em cada uma dessas categorias, tomando como base a prática do professor de Matemática em sala de aula.

Para a categoria de *conhecimento do conteúdo*, os domínios definidos por Ball, Thames e Phelps (2008) são:

- *Conhecimento Comum do Conteúdo* (em inglês: *Common Content Knowledge - CCK*);
- *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (em inglês: *Specialized Content Knowledge - SCK*);

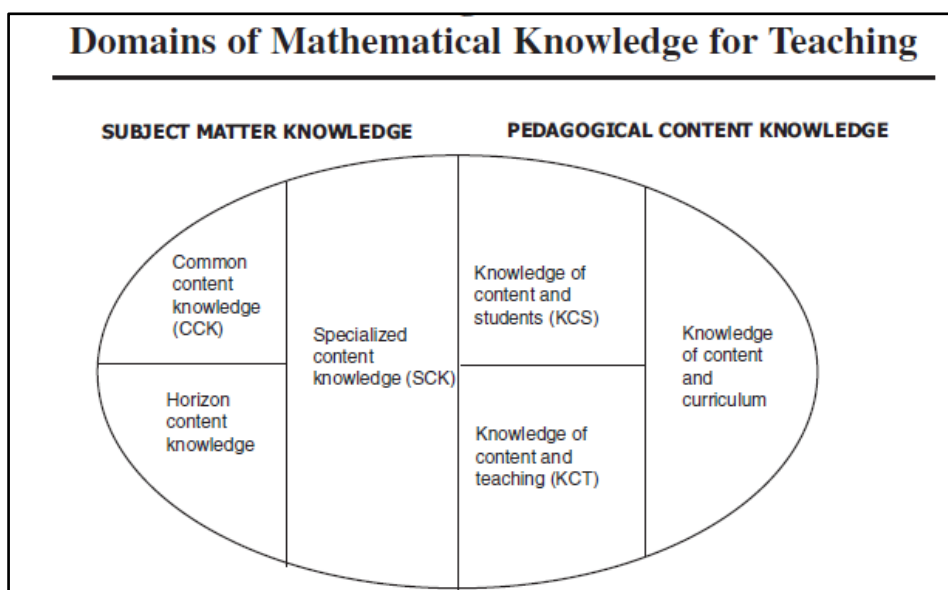
- *Conhecimento Horizontal do Conteúdo* (em inglês: *Horizon Content Knowledge - HCK*).

Na categoria *conhecimento pedagógico do conteúdo*, os domínios definidos são:

- *Conhecimento do Conteúdo e Alunos* (em inglês: *Knowledge of Content and Students - KCS*);
- *Conhecimento do Conteúdo e Ensino* (em inglês: *Knowledge of Content and Teaching - KCT*);
- *Conhecimento do Conteúdo e Currículo*¹⁰ (em inglês: *Knowledge of Content and Curriculum - KCC*).

Esse refinamento, feito a partir das categorias de Shulman (1987) e os domínios propostos por Ball, Thames e Phelps (2008, p. 402), estão sintetizados na Figura 1 a qual chamaram de "mapa do domínio do conhecimento do conteúdo para o ensino"¹¹.

Figura 1- Domínios do conhecimento para o ensino de Matemática.



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

¹⁰ Ball, Thames e Phelps (2008) incluíram esta terceira categoria do estudo de Shulman (1986). Os autores consideram que o *conhecimento do conteúdo e currículo* está imbricado no conceito do *conhecimento pedagógico de conteúdo*.

¹¹ Em inglês: "map of the domain of content knowledge for teaching".

O *conhecimento comum do conteúdo* é definido como sendo um conhecimento matemático e uma habilidade usada pelo professor para ensinar, porém este não é um tipo de conhecimento usado exclusivamente para o ensino. O que Ball, Thames e Phelps (2008) sugerem por "comum" é que é um conhecimento que pode ser utilizado em uma variedade de situações. Eles indicam que é preciso que os professores conheçam o material que ensinam, reconheçam quando seus alunos dão respostas erradas e também quando os livros didáticos se utilizam de definições equivocadas.

Uma evidência adicional para conhecimento comum do conteúdo veio a partir de nosso trabalho de desenvolvimento de instrumentos para medir o conhecimento matemático para o ensino. Nós colocamos questões tais como "Qual é um número que se posiciona entre 1.1 e 1.11?" Fizemos perguntas que exigem conhecimento que um quadrado é um retângulo, que $0/7$ é 0, e que as diagonais de um paralelogramo não são necessariamente perpendiculares. Estas não são compreensões especializadas, mas são questões que são tipicamente respondidas por quem conhece Matemática¹². (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 399, tradução nossa).

Dessa forma, o *conhecimento comum do ensino* é necessário ao professor – pois o mesmo necessita dominar o conhecimento dos conceitos que ensina em sala de aula, mas não é um conhecimento exclusivamente de professores, e, sim, de todos que dominam a Matemática em si mesma.

O *conhecimento especializado do conteúdo* é o tipo de conhecimento matemático e uma habilidade que está voltada apenas para o ensino e que, normalmente não será necessário para outros fins que não seja para a atividade de ensino. São exemplos de *conhecimento especializado do conteúdo*, algumas tarefas para o ensino de Matemática, segundo Ball, Thames e Phelps (2008):

Apresentar ideias matemáticas; Responder aos estudantes o "porque" das questões; Encontrar um exemplo para fazer uma afirmação matemática específica; Reconhecer o que está envolvido no uso de uma representação particular; Vincular representações a ideias subjacentes e a outras representações; Conectar um tópico ensinado com assuntos anteriores ou futuros; Explicar para os pais objetivos e fins matemáticos; Avaliar e adaptar o conteúdo matemático de livros didáticos; Modificar tarefas para serem mais fáceis ou mais difíceis; Avaliar a plausibilidade das reivindicações dos alunos (frequentemente com rapidez); Dar ou avaliar explicações matemáticas; Escolher e desenvolver definições usáveis; Usar notação matemática e linguagem e criticar seus usos; Perguntar questões matemáticas

¹²Em inglês: "Additional evidence for common content knowledge comes from our work to develop instruments for measuring mathematical knowledge for teaching. We pose questions such as, "What is a number that lies between 1.1 and 1.11?" We ask questions that require knowing that a square is a rectangle, that $0/7$ is 0, and that the diagonals of a parallelogram are not necessarily perpendicular. These are not specialized understandings but are questions that typically would be answerable by others who know mathematics".

produtivas; Selecionar representações para objetivos particulares; Inspeccionar equivalências¹³. (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 400, tradução nossa).

Como estas tarefas fazem parte da rotina de vida do professor em sala de aula, Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que, tomadas em conjunto, estas tarefas vão requerer um tipo de conhecimento e compreensão matemática que vai além do simples conhecimento para ensinar aos estudantes.

O *conhecimento horizontal do conteúdo* é definido como a conscientização, por parte do professor, de que existe uma relação entre os conteúdos matemáticos com a extensão matemática apresentada nos currículos. Os autores chamam a atenção, também, para a previsão de conteúdos matemáticos futuros para o aprofundamento da Matemática que está sendo trabalhada em sala de aula.

Um professor do primeiro ano, por exemplo, precisa saber como a Matemática que ele ensina está relacionada com a Matemática que os alunos aprenderão no terceiro ano para ser capaz de definir a base matemática para o que virá depois. Inclui também a visão usada para ver conexões com ideias matemáticas que virão muito posteriormente¹⁴. (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 403, tradução nossa).

Para o NCTM (2000, p. 64) a Matemática é uma área integrada de estudos, assim, vista em sua totalidade, destaca-se a necessidade de estudar e pensar sobre as conexões que existem entre os conteúdos matemáticos que irão se refletir tanto no currículo da escola toda, quanto no currículo de cada ano de escolaridade. São essas conexões entre conteúdos matemáticos que ajudarão o professor na tomada de decisões do que apresentar aos seus alunos. "Por enfatizar conexões matemáticas, os professores podem ajudar os estudantes a construir uma disposição para usar conexões na resolução de problemas matemáticos ao invés de ver a Matemática como um conjunto de habilidades e conceitos desconexos e isolados".

O *conhecimento do conteúdo e alunos* é um domínio que combina o conhecimento sobre os alunos e o conhecimento sobre a Matemática. Para Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401), é aqui que o professor deverá prever possíveis facilidades e/ou dificuldades que os

¹³Em inglês: "Presenting mathematical ideas; Responding to students' "why" questions; Finding an example to make a specific mathematical point; Recognizing what is involved in using a particular representation; Linking representations to underlying ideas and to other representations; Connecting a topic being taught to topics from prior or future years; Explaining mathematical goals and purposes to parents; Appraising and adapting the mathematical content of textbooks; Modifying tasks to be either easier or harder; Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly); Giving or evaluating mathematical explanations; Choosing and developing useable definitions; Using mathematical notation and language and critiquing its use; Asking productive mathematical questions; Selecting representations for particular purposes; Inspecting equivalencies".

¹⁴Em inglês: "First grade teachers, for example, may need to know how the mathematics they teach is related to the mathematics students will learn in third grade to be able to set the mathematical foundation for what will come later. It also includes the vision useful in seeing connections to much later mathematical ideas".

estudantes poderão ter ao terem contato com conteúdos matemáticos e também o que estes estudantes irão considerar ser interessante e motivador durante o processo de aprendizagem. Também "[...] familiaridade com erros comuns e decidir quais erros os estudantes estão mais propensos a fazer, são exemplos de *conhecimento do conteúdo e alunos* (CCA)¹⁵". Ainda, de acordo com os autores, as demandas do ensino da Matemática exigem do professor a interseção do *conhecimento do conteúdo* e também dos *alunos*.

Sobre o *conhecimento do conteúdo e ensino*, é o domínio que combina os conhecimentos sobre ensino e conhecimentos sobre a Matemática. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), muitas das tarefas matemáticas exigirão do professor um conhecimento matemático sobre o papel das instruções que ele está utilizando. É o professor, portanto, quem deve avaliar as vantagens e desvantagens das instruções e das representações usadas para ensinar um conteúdo específico e o uso de métodos e técnicas diferentes.

"Durante uma discussão em sala de aula, o professor deve decidir quando ter uma pausa para mais esclarecimentos, quando usar um comentário de um estudante para fazer uma observação sobre um assunto matemático e quando fazer uma nova pergunta ou colocar uma nova tarefa para aprofundar a aprendizagem dos estudantes. Cada uma dessas decisões requer coordenação entre a Matemática em questão e as opções de instrução e propósitos em jogo¹⁶. (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 401, tradução nossa).

É no desenrolar destas tarefas, que exigem uma interação entre o conteúdo matemático que está sendo trabalhado e o entendimento e compreensão pedagógica das questões envolvidas, que os autores exemplificam como sendo o *conhecimento do conteúdo e ensino*.

Quando se trata do *conhecimento do conteúdo e currículo*, este é um domínio definido como o conhecimento dos materiais (livros didáticos e recursos metodológicos), currículos, orientações metodológicas e programas que servem como ferramentas de apoio ao trabalho do professor dentro e fora da sala de aula durante a preparação das aulas.

Currículo, segundo Sacristán (2000, p. 15) é "um conceito essencial para compreender a prática educativa institucionalizada e as funções sociais da escola". Para o autor, o currículo pode ser dividido em seis níveis no processo de desenvolvimento que podem ajudar a

¹⁵Em inglês: "familiarity with common errors and deciding of several errors students are most likely to make are examples of knowledge of content and students (KCS)".

¹⁶Em inglês: "During a classroom discussion, a teacher must decide when to pause for more clarification, when to use a student's remark to make a mathematical point, and when to ask a new question or pose a new task to further students' learning. Each of these decisions requires coordination between the mathematics at stake and the instructional options and purposes at play".

compreender as conexões em cada um desses níveis presentes na prática pedagógica do professor. São eles:

1. *Currículo prescrito* que atua como referência na ordenação do sistema curricular e serve de base para a elaboração de materiais didáticos e de referência para o ensino. Este tipo de currículo varia de acordo com o sistema de ensino e a política praticada no momento;
2. *Currículo apresentado* é uma interpretação do currículo prescrito com significados e conteúdos explicados ao professor;
3. *Currículo modelado* é quando o professor, como indivíduo ativo e decisivo, molda a proposta curricular de acordo com sua cultura profissional e a proposta que lhe é feita por meio da prescrição administrativa;
4. *Currículo em ação* é o que se concretiza na prática do professor em suas tarefas acadêmicas. Pode ser considerado elemento básico que sustenta a ação pedagógica na qual se pode notar o significado das propostas curriculares;
5. *Currículo realizado* é o que se refere aos efeitos produzidos como consequência da realização prática do currículo. Essas consequências podem ser cognitivas, afetivas, sociais, morais, entre outras;
6. *Currículo avaliado* é o tipo que impõe critérios para o ensino do professor e a aprendizagem dos alunos. É neste tipo de currículo que se é reforçado o significado da prática de ensino.

Essas variadas expressões do currículo são vivenciadas e alvo de conhecimento de professores. Constituem-se, assim, como aspectos importantes do conhecimento docente.

Os tipos de conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) raramente se apresentam sozinhos em situações de sala de aula em que o professor está ensinando Matemática. Os autores exemplificam esta interrelação entre estes conhecimentos ao afirmar que quando o professor precisa analisar um erro cometido pelo seu aluno, ele pode usar o *conhecimento especializado do conteúdo*, analisando matematicamente o erro, e também o *conhecimento do conteúdo e seu aluno*, ao conhecer seu aluno e saber que o mesmo já cometeu este mesmo erro em outras situações semelhantes nas aulas de Matemática.

Outra situação em que pode haver uma intercessão de conhecimentos é quando o professor mobiliza *conhecimentos especializado, horizontal e do currículo*. Em sala de aula há uma relação entre conhecimento de conteúdos matemáticos específicos (*conhecimento especializado*) e indicações de como estes conteúdos são recomendados em livros didáticos

e/ou documentos curriculares (*conhecimentos curriculares*) ao longo da escolarização (*conhecimento horizontal*).

Partindo dessa particularidade dos tipos de conhecimentos propostos, Ball, Thames e Phelps (2008) tiveram a intenção de investigar sobre as habilidades, hábitos, sensibilidade e o conhecimento envolvido no processo de ensino, assim, procurando entender o raciocínio matemático a partir das decisões tomadas em sala de aula pelos docentes.

No Capítulo 5, são apresentados no contexto de problemas combinatórios, com foco no *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), os diferentes tipos de conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008). Trata-se de uma releitura dos tipos de conhecimentos aplicados ao conhecimento de como os professores usam o PFC em diferentes situações combinatórias em sala de aula, relacionando conteúdos, ensino e currículo. Os conhecimentos discutidos no quinto capítulo da presente dissertação são: *Conhecimento comum do PFC*; *Conhecimento especializado do PFC*; *Conhecimento horizontal do PFC*; *Conhecimento do PFC e alunos*; *Conhecimento do PFC e ensino*; *Conhecimento do PFC e currículo*. Antes, porém, serão apresentados estudos anteriores referentes ao conhecimento docente em Combinatória.

CAPÍTULO 3
ESTUDOS ANTERIORES: O CONHECIMENTO DOCENTE
EM COMBINATÓRIA

Neste capítulo, apresentamos o levantamento de estudos anteriores ligados ao ensino de Combinatória. São pesquisas relevantes que mostram o que já foi trabalhado nesta temática, com foco no *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) e nos professores de Matemática, e para a qual o presente estudo pretende contribuir. Serão apresentados e discutidos estudos de intervenção usando o PFC; pesquisas que focam saberes e conhecimentos docentes referentes à Combinatória; e investigações de estratégias de resolução utilizadas por professores em situações combinatórias.

Esta organização dos estudos foi feita com o objetivo de mostrar de que forma o PFC vem sendo aplicado em turmas de Matemática da Educação Básica, a importância do mesmo no estudo da Combinatória e, a partir de pesquisas que focam os conhecimentos dos professores, como estes veem o PFC dentro do campo de estudos da Análise Combinatória.

As pesquisas foram levantadas a partir de consultas feitas ao portal da Capes, ao Google acadêmico e com base em referências indicadas por estudos anteriores que pesquisaram a Combinatória na Educação Básica, desde a formação de professores a estudos com estudantes.

3.1 Intervenções usando o Princípio Fundamental da Contagem com estudantes e professores da Educação Básica

Sobre estudos com intervenção usando o *Princípio Fundamental da Contagem* - PFC em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental em turmas do Ensino Meio e também com professores da Educação Básica, apresenta-se, aqui, três dissertações e uma tese que evidenciam a importância do trabalho com o PFC em situações combinatórias e como esta estratégia facilita a compreensão dos diversos tipos de problemas.

Um primeiro estudo de intervenção usando o PFC foi realizado por Sturm (1999), que buscou investigar "As Possibilidades Pedagógicas de um Ensino de Análise Combinatória sob uma Abordagem Alternativa". A proposta de intervenção envolveu 33 estudantes da segunda série do Ensino Médio noturno para os quais foram ministradas aulas sobre *arranjo*, *permutação e combinação*. O autor que investigou sua própria sala de aula, fez com que inicialmente os estudantes tivessem contato com estratégias diversas de resolução, como *listagens*, *diagramas de árvores* e o PFC, tratado neste estudo como *princípio multiplicativo*, para, então, introduzir os diferentes tipos de problemas combinatórios. As observações destas aulas foram registradas em um diário. A pesquisa também foi desenvolvida por meio de

questionários, dirigidos aos estudantes, nos quais eles puderam expor suas opiniões sobre o tema estudado e se eles tinham segurança para resolver as questões propostas. Também foi pedido aos estudantes que eles fizessem uma comparação entre o trabalho vivenciado e outras experiências e outras aulas de Matemática. Provas também foram realizadas com estes estudantes com o intuito de ampliar a investigação do estudo realizado.

O autor concluiu que houve um aspecto positivo em relação à proposta apresentada quanto ao uso do *princípio multiplicativo* como estratégia para resolução de problemas combinatórios. Segundo o autor, os estudantes parecem ter compreendido a importância e a aplicabilidade desta estratégia, destacando que a presença da mesma, dentre as estratégias apresentadas, facilitou a compreensão de seus alunos quanto à aprendizagem das fórmulas de *arranjo* e *permutação*, uma vez que eles perceberam que estas fórmulas são originadas a partir do *princípio multiplicativo*.

Uma observação importante, feita por Sturm (1999), diz respeito ao uso inadequado do *princípio multiplicativo* na resolução de problemas de *combinação*. Como o autor não fez entrevistas com os alunos para saber o porquê da utilização desta estratégia, ele levantou a hipótese de que isso ocorreu pelo fato dos alunos acreditarem que o exercício em questão era um problema de *arranjo*. Outra hipótese levantada era dos alunos acreditarem ser o *princípio multiplicativo* aplicado igualmente para *arranjos* e *combinações*.

A análise deste estudo parece indicar o uso do PFC como uma boa estratégia de ensino para a resolução de situações combinatórias, mas o professor precisa ficar atento ao modo como o mesmo é utilizado nos diferentes tipos de problemas. É preciso um *conhecimento especializado da Combinatória* no qual haverá conhecimento dos diferentes tipos de problemas trabalhados e da aplicação do PFC em cada um destes problemas. O *conhecimento da Combinatória e alunos* é importante para que professor possa analisar os erros cometidos por estudantes ao confundir problemas de *arranjo* e *combinação* e fazer também uma análise pedagógica para identificar se este tipo de erro é recorrente em seus estudantes para que então, possa mobilizar *conhecimentos da Combinatória e ensino*, avaliando as vantagens e desvantagens ao introduzir este tipo de representação, que pode ser usada como estratégia para o ensino da Combinatória.

Um outro estudo de intervenção foi o de Esteves (2001), intitulado "Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do Ensino Fundamental". Neste estudo a autora teve como objetivo estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de Combinatória em adolescentes. Com isso, buscou-se responder se, em função do ensino oferecido, os sujeitos demonstrariam progresso

verificável no que tange ao campo conceitual considerado e se esta evolução se diferenciaria da observada no grupo de referência.

A autora elaborou uma sequência de aulas que consistia na resolução de problemas por contagem direta, e dividiu a sequência em três fases: pré-teste, intervenção e pós-teste. Esta foi aplicada em dois grupos: um grupo experimental com 28 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, com o qual o trabalho foi feito em duplas; e um grupo de referência, este composto por 28 alunos do 2º ano do Ensino Médio na faixa etária dos 16 anos. Com os participantes do grupo experimental foi realizada a sequência de aulas planejadas, enquanto que o grupo de referência seguiu o planejamento da escola.

O pré-teste e o pós-teste continham 10 questões equivalentes, já para a intervenção foram apresentadas situações problemas que podiam ser resolvidas por meio de contagem direta e com o avançar dos encontros ia se introduzindo a resolução por meio do PFC. Esteves (2001) defende que nem todos os problemas podem ser resolvidos com o uso do PFC e, assim, apresentou aos alunos a estratégia da árvore de possibilidades como uma alternativa para a resolução destes problemas. Os problemas usados pela autora para exemplificar o não uso do PFC como estratégia são apresentados no Quadro 2.

Quadro 2 - Problemas usados no estudo de Esteves (2001).

ATIVIDADE DO JOGO DE FRESCOBOL NUM TORNEIO DE FRESCOBOL, NA PRAIA DO BOQUEIRÃO, OS FINALISTAS FORAM ZECA E KADU. SERÁ DECLARADO CAMPEÃO AQUELE QUE VENCER DUAS PARTIDAS SEGUIDAS OU VENCER TRÊS PARTIDAS ALTERNADAS. OBSERVANDO QUEM SAI VENCEDOR EM CADA PARTIDA ATÉ QUE SE OBTENHA O CAMPEÃO, QUAIS OS RESULTADOS QUE SE PODE OBTER? SUGESTÃO: USE A ÁRVORE DE POSSIBILIDADES PARA ENCONTRÁ-LOS.
ATIVIDADE DOS ANAGRAMAS A) QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM AS TRÊS LETRAS DA PALAVRA ANA? B) QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM AS LETRAS DA PALAVRA AMADA? C) QUANTOS ANAGRAMAS PODEMOS FORMAR COM AS LETRAS DA PALAVRA LILI?

Fonte: Esteves (2001, p. 99).

Discordamos de Esteves (2001) sobre o PFC não resolver todos os problemas combinatórios. O que se tem é uma aplicação de princípio aditivo com princípio multiplicativo. Pode-se ter o mesmo jogador vencendo duas partidas seguidas OU um vencendo uma partida e o outro vencendo duas partidas OU um vencendo uma partida, outro vencendo uma partida e o primeiro vencendo outras duas partidas OU [...] (continua aqui até:

vence o primeiro, vence o segundo, vence novamente o primeiro, vence o segundo e, por fim, vence novamente o primeiro). Isso para Zeca vencendo a primeira partida. Dá para representar isso na expressão:

$$(1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1) = 5$$

Como o mesmo ocorre para Kadu vencendo a primeira partida, tem-se:

$$2 \times ((1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1)) = 10.$$

A segunda questão trata de situações envolvendo *permutação* de elementos repetidos. O que se pode fazer neste caso é aplicar o PFC para permutar todos os elementos e dividir pela permutação dos elementos que se repetem. Para a palavra ANA, permutam-se todos os elementos como se fossem distintos, $3 \times 2 \times 1$, e, em seguida, divide-se pela permutação de quantas vezes os elementos que se repetem, no caso a letra A que se repete duas vezes. Teríamos então, $\frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$, assim, o número de anagramas formados com as letras da palavra ANA são três. Para a palavra AMADA faz-se o mesmo processo, primeiro permutam-se todos os elementos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos $3 \times 2 \times 1$. Têm-se, para este caso, $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$, formando, assim, um total de 20 anagramas. E por último, para a palavra LILI, repete-se o processo, primeiro permutando todos os elementos $4 \times 3 \times 2 \times 1$, e, em seguida, dividendo pela permutação dos elementos repetidos, 2×1 , têm-se então, $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 6$. Assim serão formados 6 (seis) anagramas com esta palavra.

Como resultados, após a intervenção, Esteves (2001) observou que os alunos ao aprenderem uma estratégia de resolução aritmética ou algébrica, abandonavam as representações (árvore de possibilidades e desenhos) como estratégia, mesmo quando era pedido que eles usassem a árvore de possibilidades na resolução dos problemas. A autora observou, ainda, a evolução dos alunos durante a sequência didática, com as resoluções apresentadas e as discussões que eram geradas, em sala de aula, a partir destas resoluções. A dificuldade maior surgiu nos problemas de *arranjo* e *combinação* quando a ordem apresentada nos problemas gerava, ou não, novas possibilidades, e os alunos acabavam confundindo as mesmas.

Embora tenha usado o PFC na intervenção proposta, Esteves (2001) não fez em suas conclusões, menção ao sucesso, ou não, do uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) como estratégia eficaz na resolução de problemas combinatórios e na aprendizagem dos alunos. É preciso, então, que neste tipo de sequência, o professor conheça o *conhecimento*

especializado da Combinatória para compreender como o PFC pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas (*produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*), principalmente nos que apresentam condições para sua resolução.

Rocha (2002) em seu estudo sobre "O ensino da Análise Combinatória: uma discussão sobre o uso do *princípio multiplicativo* na resolução de problemas" investigou a resolução de problemas combinatórios, por alunos do Ensino Médio, baseados na aplicação do PFC.

O levantamento de dados foi realizado em cinco etapas: na primeira os alunos foram levados a resolver problemas básicos de contagem a partir do conhecimento prévio que traziam e sem a formalização de conceitos; na segunda etapa, os alunos resolveram problemas mais complexos de Combinatória e, após a resolução, a pesquisadora chamou a atenção destes alunos para a leitura e interpretação dos enunciados para uma resolução correta destes problemas; na terceira etapa, foi sugerido que os alunos criassem e resolvessem os próprios problemas e a partir da escolha de alguns destes foram definidos os conceitos de *permutação, arranjo e combinação*, possibilitando observar as regularidades e classificá-los de acordo com seu tipo; na quarta etapa, quando o uso do PFC, neste estudo chamado de *princípio multiplicativo*, já era familiar aos estudantes, foi proposta a dedução das fórmulas de cada um dos tipos de problemas e, em seguida, foi proposta uma nova lista de problemas na qual os alunos podiam escolher entre as estratégias sugeridas, apresentar a solução e justificar a escolha da estratégia; na quinta e última etapa, os estudantes foram submetidos a uma avaliação formal no qual eram respeitadas suas estratégias de resolução. A partir daí foi possível analisar o tipo de estratégia utilizada e computar os erros e acertos de cada questão, e, por fim, analisar a eficácia do método utilizado.

Rocha (2002) concluiu que este método de ensino permite que o estudante interaja de uma maneira mais integrada com o conteúdo exposto e o professor atue como mediador do processo de ensino, possibilitando uma discussão sobre a interpretação e análise dos enunciados, facilitando, assim, a aprendizagem dos alunos. A autora destaca que é importante também aproveitar os conhecimentos prévios dos alunos antes de apresentar estratégias e introduzir conceitos formais da Combinatória. Dessa forma, haverá uma formalização gradativa para a resolução de problemas combinatórios.

É importante que o professor mobilize alguns tipos de conhecimento para aplicação do PFC em suas aulas, como o *conhecimento comum da Combinatória*, para conhecer bem o conteúdo que ele irá abordar em suas aulas; ter um *conhecimento especializado da Combinatória*, conhecendo as características de cada problema para, então, aplicar o PFC dentro das particularidades dos problemas de *produto cartesiano, arranjo, permutação e*

combinação; e ter um *conhecimento da Combinatória e alunos*, prevendo, assim, como os estudantes podem se comportar diante de uma nova representação para o ensino e aprendizado de Combinatória.

A autora, porém, não traz conclusões mais abrangentes sobre o uso do PFC como estratégia eficaz na aprendizagem dos conceitos de Combinatória, mas ao longo da análise das etapas de investigação, é possível perceber a evolução dos alunos e a eficácia desta estratégia na resolução dos problemas combinatórios.

Um estudo recente com intervenção, agora com professores da Educação Básica, foi realizado por Teixeira (2012), intitulado "Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no Ensino Fundamental". O objetivo geral do autor era investigar os conhecimentos de professores de Matemática para explorar noções relativas aos problemas de contagem ao longo do Ensino Fundamental. Procurou-se responder que experiências esse professor deve vivenciar durante formações continuadas para selecionar e conduzir situações de aprendizagem que desenvolvam o raciocínio combinatório de seus alunos por meio de problemas de contagem, compreendendo as dificuldades apresentadas por seus alunos durante a resolução destes problemas e os ajudando a superar estas dificuldades.

Para isso, Teixeira (2012) aplicou uma sequência de ensino dividida em sete encontros. No primeiro encontro foram aplicados três questionários a 20 professores que atuavam em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e em turmas do Ensino Médio e estavam participando de um curso de formação continuada oferecida pela UNIBAN/CAPES. O primeiro questionário foi para conhecer a experiência docente deste grupo de professores, bem como seu perfil profissional e o posicionamento deles em relação ao currículo da Educação Básica do Estado de São Paulo. O segundo questionário continha nove situações problemas, resolvidas por alunos, e o autor tinha como objetivo identificar o *conhecimento especializado do conteúdo* associado aos problemas de contagem. Neste questionário foram levados em consideração as definições, representações e significados dos problemas e observadas também as estratégias usadas pelos participantes, pois em algum momento era também pedido que os professores resolvessem os problemas. O terceiro questionário versava sobre o *conhecimento pedagógico do conteúdo* e tinha como objetivo principal coletar dados referentes à experiência pedagógica dos participantes relacionada ao ensino e à aprendizagem de problemas de contagem. Neste questionário era pedido que o participante explicitasse como ele abordaria temas referentes à Combinatória em suas aulas.

Os encontros seguintes foram dedicados à intervenção, na qual foi aplicada uma sequência de ensino, feita a partir das análises dos questionários, agora com mais três professores que não haviam participado dos primeiros encontros. O objetivo desta etapa da pesquisa de Teixeira (2012) era investigar se um trabalho com Combinatória usando os *princípios multiplicativo e aditivo*, sem o uso das fórmulas, poderia favorecer o conhecimento dos professores sobre os problemas de contagem, sobretudo no Ensino Fundamental. No sétimo encontro, foi entregue aos participantes um novo questionário, o qual continha quatro questões abertas, de modo que o professor pudesse se manifestar, individualmente, sobre as atividades desenvolvidas durante a sequência didática. Os dados foram coletados por meio de gravação dos encontros, protocolos com respostas dos participantes e anotações do pesquisador.

Teixeira (2012) concluiu em seu estudo que alguns professores, participantes da pesquisa, são dependentes do livro didático no que diz respeito à apresentação e ao desenvolvimento dos conteúdos a partir de noções básicas da Combinatória. O autor pontua que são poucos os livros didáticos que fazem uma abordagem da Combinatória utilizando diferentes estratégias. Grande parte desses livros abordam algumas poucas estratégias e logo partem para a utilização de fórmulas para a resolução dos problemas apresentados.

Sobre a abordagem de Teixeira (2012), concluímos que é preciso que o professor tenha um *conhecimento da Combinatória e currículo* para que possa escolher materiais que forneçam bons subsídios para a aprendizagem de seus alunos em cada nível e ano de ensino. Ele mobilizará *conhecimento da Combinatória e os alunos*, prevendo quais estratégias serão mais atrativas ao ensino da Combinatória e as possíveis facilidades e dificuldades que seus estudantes poderão ter diante das escolhas metodológicas do professor e *conhecimento da Combinatória e o ensino* quando apresentar o PFC como estratégia para resolução de situações combinatórias e apresentar esclarecimentos aos alunos sobre a utilização desta estratégia.

Outro fator observado por Teixeira (2012) é que os professores não vivenciaram em sua formação situações nas quais é preciso resolver os problemas combinatórios por diversas etapas e que para chegar ao total de possibilidades pode ser feito uso do *princípio multiplicativo* e do *princípio aditivo* conjuntamente. Porém, pode-se perceber, ao longo do processo de intervenção, que os participantes ampliaram sua compreensão quanto à aplicação do *princípio multiplicativo* e que os problemas de contagem podem ser resolvidos por outras representações que não apenas as fórmulas. Porém, mesmo com esse avanço na compreensão dos *princípios multiplicativo e aditivo* como estratégias para resolução de problemas

combinatórios, muitos dos professores entrevistados demonstram insegurança com os resultados e acabaram optando pelo uso das fórmulas para a resolução de problemas combinatórios.

Por isso a importância do *conhecimento horizontal da Combinatória*, no qual o professor terá que ter claras as conexões entre as ideias matemáticas, no caso as diversas representações e estratégias que serão usadas no ensino aprendizagem da Combinatória. O *conhecimento comum da Combinatória* e o *conhecimento especializado da Combinatória* dará um suporte ao professor no que diz respeito a estratégias básicas e conhecimento das características particulares de cada problema para sua resolução.

Teixeira (2012) destaca a importância de se investir na construção de representações e na aplicação do *princípio multiplicativo* e do *princípio aditivo* para a resolução de problemas de contagem e de mostrar aos professores que este tipo de estratégia pode ser adotado desde os anos finais do Ensino Fundamental ao Ensino Médio.

Nosso estudo tem como diferencial a utilização das entrevistas para investigar os conhecimentos que os professores têm sobre o uso do PFC, por meio da análise de protocolos com resoluções de alunos, e sobre a relação do PFC com as fórmulas da Análise Combinatória. Dessa forma, acreditamos investigar quais conhecimentos os professores trazem consigo para a resolução de problemas combinatórios a partir do uso do PFC.

Podemos concluir, assim, que as intervenções relatadas obtiveram êxito com uso do PFC na resolução de problemas combinatórios, facilitando a aprendizagem dos alunos e a formalização dos conceitos da Combinatória, porém destacamos a importância de se investigar os conhecimentos que estes professores apresentam quando precisam ensinar e/ou resolver problemas combinatórios. Pretendemos assim, com presente estudo aprofundar a investigação sobre os conhecimentos docentes referentes ao uso do *Princípio Fundamental da Contagem* na resolução de problemas combinatórios.

3.2 Saberes e conhecimentos docentes referentes à Combinatória

Em relação aos saberes e conhecimentos docentes, no que diz respeito ao ensino da Combinatória, é relevante afirmar que são poucas as pesquisas voltadas para o conhecimento que estes profissionais têm sobre a Análise Combinatória, desde o conhecimento de suas definições, características e estratégias de resolução para os diferentes tipos de problemas abordados no ensino deste componente curricular.

Borba, Rocha, Martins e Lima (2009) fizeram um levantamento de pesquisas sobre o raciocínio combinatório publicado em eventos locais, regionais, nacionais e internacionais entre os anos de 2000 e 2008¹⁷. Ao todo, foram identificados 34 trabalhos publicados nestes eventos, o que é considerado um quantitativo baixo pelas autoras que afirmam que o estudo da Combinatória gera grandes possibilidades de desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Dentre esses trabalhos, os que se destinavam ao estudo dos professores apresentavam questões relacionadas à formação e/ou a prática desses docentes em sala de aula.

Silva e Pessoa (2013) fizeram um estudo sobre o estado da arte com trabalhos publicados em eventos nacionais e internacionais¹⁸ entre os anos de 2010 e 2013 realizados no Brasil, sobre o raciocínio combinatório. Dos 43 trabalhos identificados nesta temática, apenas 13,9% são estudos com professores, os quais se subdividiam entre estudos de sondagem sobre o conhecimento que o professor tem da Combinatória e estudos sobre propostas de formação para conceitos específicos da Combinatória.

Após levantamento de estudos anteriores, destacam-se nesta revisão de literatura dois estudos que propuseram investigar o conhecimento dos professores no que diz respeito à Combinatória no Ensino Médio.

O primeiro trabalho descrito foi realizado por Sabo (2010), que em seu estudo pesquisou sobre os "Saberes docentes: a Análise Combinatória no Ensino Médio". O autor teve como objetivos investigar, por meio de entrevistas semiestruturadas, os saberes do professor do Ensino Médio, em relação ao ensino e à aprendizagem de Análise Combinatória, como também detectar, se possível, na fala dos professores participantes fatores que podem influenciar as diversas abordagens desse tema pelo professor nas aulas de Matemática. Assim, foram entrevistados seis professores que lecionavam ou haviam lecionado Combinatória recentemente em escolas públicas e/ou privadas, sendo dois desses entrevistados licenciandos no 3º período do curso de Licenciatura em Matemática. O objetivo de incluir estes dois

¹⁷ Psychology of Mathematics Education (2004, 2005 e 2006); International Conference on Teaching Statistics (2006); Conferencia Interamericana de Educación Matemática (2003 e 2007); Reunião de Didática da Matemática do CONESUL (2006); Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (2003 e 2006); Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (2006 e 2008); Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM (2001, 2004 e 2007); Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação - ANPED (2000 a 2007); Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino - ENDIPE (2006); Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste - EPENN (2003, 2005 e 2007); Encontro Paranaense de Educação Matemática - EPREM (2007); Encontro Pernambucano de Educação Matemática - EPEM (2006).

¹⁸ Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM (2010 e 2013); Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM (2009 e 2012); Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM (2011); Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT (2012).

licenciandos foi para observar como o ambiente acadêmico poderia, ou não, influenciar o desenvolvimento dos saberes e a prática docente do futuro professor.

O autor concluiu em seu estudo que alguns dos professores entrevistados reproduzem, de certo modo, a prática docente e o saber herdado de seus professores, com relação ao ensino de Combinatória, valorizando assim a memorização e a aplicação de fórmulas. Essa informação é preocupante, uma vez que o professor não demonstra habilidades e conhecimentos que são necessários para um melhor desenvolvimento de sua atividade docente. É imprescindível que o professor tenha conhecimento do conteúdo que está sendo ensinado, no caso conteúdos de Combinatória, conhecimento de ideias que conectem os conhecimentos matemáticos e também se esta forma de ensinar terá uma boa aceitação pelos alunos e um bom desempenho destes. Outro aspecto relevante, do estudo, diz respeito à participação de professores em cursos de formação continuada. De acordo com Sabo (2010), esta participação tem-se mostrado provocadora de mudança em suas práticas.

Sobre o uso das fórmulas, Sabo (2010) observou uma situação divergente, quando alguns professores afirmaram valorizar o uso do *princípio multiplicativo* ao invés das fórmulas e outros utilizaram apenas as fórmulas no ensino de Combinatória, mas estes professores não souberam justificar a escolha e validade destas estratégias. O autor entende que seja mais relevante para o professor usar as fórmulas de Combinatória como sendo uma consequência do *princípio multiplicativo* e que as mesmas surjam como resultado de um processo de construção do raciocínio combinatório e não que as fórmulas sejam o início da construção deste conhecimento. Isso demonstraria um *conhecimento especializado da Combinatória* e do *conhecimento horizontal da Combinatória* no que se refere à formalização dos conceitos, a partir do uso do *princípio multiplicativo* na resolução de situações combinatórias.

Outro trabalho que investigou o conhecimento do professor foi o estudo realizado por Rocha (2011), em sua pesquisa intitulada "Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos". A autora partiu do questionamento sobre que conhecimentos de Combinatória e seu ensino têm os professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio. Assim, seu objetivo geral foi analisar estes conhecimentos. A partir deste objetivo geral, ela traçou objetivos específicos, como analisar os conhecimentos que os professores têm sobre as características dos problemas combinatórios; verificar como analisam as dificuldades enfrentadas por alunos; identificar como estes professores compreendem o desenvolvimento do raciocínio

combinatório por parte dos alunos e analisar as estratégias sugeridas por professores com diferentes níveis de formação.

A autora, por meio de entrevista semiestruturada, sondou o conhecimento de seis professores (dois dos anos iniciais e dois dos anos finais do Ensino Fundamental e, ainda, dois do Ensino Médio). As questões eram referentes aos tipos de problemas combinatórios, as estratégias utilizadas por alunos e os métodos de ensino usados na superação de dificuldades durante as aulas.

Rocha (2011) enfatizou que os professores com formação em Matemática e com experiência em diferentes níveis de ensino recomendaram o uso do *princípio multiplicativo* como estratégia eficaz na resolução de problemas de Combinatória. A pesquisa trouxe, ainda, como resultado a prioridade dos professores em usar algumas estratégias de ensino, como o uso de tabelas e árvores de possibilidades por professores do Ensino Fundamental, enquanto que os professores do Ensino Médio preferiram a apresentação de problemas combinatórios com o uso do *princípio multiplicativo*. Assim, tanto professores dos anos finais do Ensino Fundamental quanto professores do Ensino Médio valorizam, segundo a autora, aspectos mais formais em relação aos problemas combinatórios. Rocha (2011) acredita que isso se dá pelo fato deles terem vivenciado esse tipo de situação em suas formações ou em livros didáticos utilizados, o que os levam a propor atividades menos variadas para a compreensão de problemas combinatórios.

Este aspecto, ressaltado por Rocha (2011), remonta ao tipo de *conhecimento especializado da Combinatória* e ao *conhecimento da Combinatória e ensino*. Estes dois tipos de conhecimentos contemplam questões básicas para o ensino de Combinatória e também as estratégias que levem o estudante a compreender melhor o conteúdo tratado.

Algumas conclusões de Rocha (2011), ainda, dizem respeito às dificuldades que a maioria dos professores participantes demonstraram em relação à diferenciação entre problemas de *arranjo* e *combinação*, tanto na leitura do problema, quanto na correção das estratégias utilizadas pelos alunos. A autora acredita que estas diferenças de conhecimento estão ligadas aos conhecimentos adquiridos pelos professores durante sua prática e ao tempo de experiência em sala de aula. É importante que se faça um trabalho voltado para a formação inicial e/ou continuada para que este tipo de dificuldade seja suprida, pois, nestes aspectos, é preciso que o professor tenha conhecimento *especializado da Combinatória* e *conhecimento horizontal da Combinatória*.

Percebe-se, aqui, a importância que os participantes destes dois estudos dão ao uso do PFC ou *princípio multiplicativo* para a aprendizagem de Combinatória. Assim, é preciso,

ainda, investigar melhor o conhecimento que os professores têm sobre a importância do uso do PFC no ensino Combinatória e a relação que estes professores fazem entre o PFC e as fórmulas da Análise Combinatória.

3.3 Estratégias de resolução utilizadas por professores em situações combinatórias

Nesta seção são apresentados estudos sobre as estratégias que professores utilizam para a resolução de problemas combinatórios. No primeiro estudo, o objetivo era saber qual estratégia o professor apresentaria na resolução dos problemas combinatórios propostos. Já no segundo estudo, com questões de múltipla escolha e as alternativas corretas representadas pelo uso do PFC, o objetivo era investigar se os professores reconheceriam o PFC implícito nas alternativas. No terceiro, e último estudo desta seção, o objetivo foi investigar o desempenho e as estratégias de professores da Educação Básica ao resolverem situações combinatórias.

O estudo de Rocha e Ferraz (2011), intitulado "Conhecimentos de professores de Pedagogia e Matemática sobre problemas combinatórios", investigou as estratégias na resolução de problemas combinatórios por professores com diferentes formações. As autoras aplicaram um teste com oito problemas (dois de cada significado - *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) a 29 professores (13 com formação em Pedagogia e 16 com formação em Matemática) com objetivos de identificar o desempenho de professores com diferentes formações na resolução de problemas combinatórios; verificar o desempenho desses professores nos diferentes tipos de problemas combinatórios; analisar as estratégias de resolução que são privilegiadas na resolução desses problemas; e comparar os desempenhos e as estratégias desses professores.

As autoras observaram que 69% dos professores de Pedagogia ficaram abaixo da média de acertos totais do teste, enquanto que entre os professores de Matemática 18,75% ficaram abaixo da média. As autoras observaram, ainda, que as estratégias mais usadas pelos professores de Pedagogia foram listagem, desenho e árvore de possibilidades, enquanto que os professores de Matemática utilizaram o PFC, seguido do uso de fórmulas. Percebeu-se, assim, uma diferença de estratégias utilizadas por professores de diferentes formações e também a preferência do uso do PFC sobre o uso de fórmulas nos diversos problemas.

No estudo de Rocha (2013) sobre o "Princípio fundamental da contagem e a compreensão de problemas combinatórios: olhares de professores do Ensino Médio" foi

elaborado um teste com oito problemas combinatórios (dois de cada significado) e com o número de etapas controlado, a partir do qual a autora queria observar se a mudança no número de etapas influenciaria no desempenho dos sujeitos. O teste era fechado no qual os professores precisavam marcar a alternativa que julgavam correta e justificar a escolha das suas respostas. Participaram da pesquisa 11 professores com formação inicial em Matemática e que estavam lecionando há no mínimo seis anos em escolas públicas de Pernambuco.

Rocha (2013) observou que o número de etapas não foi uma dificuldade na compreensão dos problemas e também não foi considerado difícil pelos participantes da pesquisa. A autora observou, ainda, que a maioria das justificativas se referia ao uso do PFC como estratégia para a resolução dos problemas, uma vez que o mesmo se faz presente em todos os tipos de problemas combinatórios.

Um outro estudo que tinha como objetivo geral investigar o desempenho e as estratégias apresentadas por professores da Educação Básica ao lidar com problemas combinatórios, foi o de Moreira (2014) que tinha como tema "Os conhecimentos acerca dos conceitos de Análise Combinatória de professores que ensinam Matemática: um estudo diagnóstico". Os objetivos específicos do autor foram investigar se os professores apresentavam dificuldade ao resolver problemas de Combinatória quando estes envolviam os conceitos dos diferentes tipos de problemas, *arranjo*, *permutação*, *combinação* e *produto cartesiano*, com algumas condições e; identificar as estratégias utilizadas pelos professores por tipo de problema apresentado. Com isso, Moreira (2014, p. 138) pretendia responder a seguinte questão: "qual o desempenho e as estratégias que professores que ensinam Matemática apresentam ao resolverem problemas que envolvem o conteúdo Análise Combinatória?".

Para tentar resolver estas questões, Moreira (2014) aplicou um teste diagnóstico contendo oito questões, duas de cada tipo de problema combinatório e todos os problemas apresentavam condições de escolha e proximidade. Este teste foi aplicado a 18 participantes, sendo 17 com formação em Licenciatura em Matemática e um com formação em Ciência Naval. Destes participantes com formação em Licenciatura em Matemática, todos eram professores da Rede Pública de Ensino, apenas o professor com formação em Ciência Naval não tinha experiência com ensino. Todos os professores se encontravam iniciando um Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

As análises foram feitas a partir do acerto total em cada questão do teste. Com isso, Moreira (2014) identificou que os professores tiveram um desempenho bem abaixo do que ele esperava por se tratarem de professores atuantes em turmas do Ensino Médio. Assim, dos 18

professores participantes, 17 deles tiveram um desempenho abaixo de 50% do total de acertos no teste aplicado. Apenas o professor com formação em Ciências Navais obteve 76,9% de acerto total no teste aplicado.

Moreira (2014) identificou que as estratégias mais utilizadas pelos professores foram o *Princípio Fundamental da Contagem* - PFC, principalmente nos problemas de *arranjo*, com 46,1% de utilização no teste e as fórmulas que normalmente são apresentadas em livros didáticos para resolverem problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*, com 19,9% de utilização pelos participantes ao resolverem as situações combinatórias propostas. Como não era objeto de estudo do autor, estas estratégias podem ter levado os participantes a acertarem, ou não, as questões proposta no teste. Moreira (2014) observou, ainda, que os participantes que utilizaram o PFC como estratégia, acertaram apenas 10,2% dos problemas que tentaram resolver e erraram as demais questões utilizando o PFC. O baixo desempenho também ocorreu quando os participantes resolveram usar as fórmulas para resolver tais questões. Apesar de reconhecer que os problemas propostos não poderiam ser resolvidos por outras estratégias que não estas, o autor afirma que os participantes teriam tido mais sucesso se tivessem empregado outras estratégias de resolução para os problemas propostos.

Discordamos da afirmação acima, dada por Moreira (2014), uma vez que em boa parte dos problemas, o total de possibilidades era muito grande para se encontrar utilizando, apenas, estratégias como a listagem ou árvore de possibilidades.

Outra afirmação de Moreira, é que,

O PFC foi a estratégia que mais levou os professores ao acerto, mas também foi responsável pela maioria dos erros, e com os dados aqui mostrados percebemos que este fato está associado ao tipo de agrupamento, pois os agrupamentos que os professores obtiveram o pior desempenho foram resolvidos em sua maioria pelo PFC. Somando-se a essa estratégia (E2), as fórmulas também foram bastante utilizadas na resolução das combinações e permutações, podendo, além de outros fatores já levantados por nós, terem sido fundamentais para que grande parte dos professores não acertassem as questões desses tipos de agrupamentos combinatórios. (MOREIRA, 2014, p. 132).

Novamente discordamos do autor, acreditamos que o que pode ter ocorrido no baixo desempenho dos professores ao utilizarem o PFC como estratégia seja devido aos mesmos errarem o produto final, pois como visto nos exemplos apresentados por Moreira (2014) os professores reconhecem o PFC como estratégia para resolver os problemas combinatórios. Quanto ao erro utilizando as fórmulas como estratégias, conforme Borba e Braz (2012), o uso

de fórmulas nem sempre é útil na resolução de problemas que apresentem condições, quer sejam eles de *ordenação, escolha, posicionamento e/ou de proximidade* de elementos.

As estratégias apresentadas nestes estudos evidenciam o *conhecimento especializado da Combinatória* no qual a aplicação de diferentes estratégias, pode estar ligada ao conhecimento que o professor tem dos diferentes tipos de problemas trabalhados no estudo da Combinatória.

Alguns dos estudos aqui relatados, Borba, Rocha, Martins Lima (2009); Rocha (2011); Rocha e Ferraz (2011) e Rocha (2013), foram realizados pelo Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE - Geração¹⁹, coordenado pela professora Rute Borba. O grupo desenvolve pesquisas com crianças, adolescentes, jovens e adultos de diferentes modalidades de ensino e também com professores da Educação Básica. Os estudos produzidos pelos integrantes do Geração vão desde a produção de materiais para formação de professores a atividades para serem desenvolvidas com alunos. Já foram realizados pelo grupo estudos de sondagem e intervenção com alunos e professores da Educação Básica e nossa pesquisa busca contribuir com a investigação sobre o conhecimento específico do PFC.

Diante dos estudos anteriormente realizados, propõe-se um estudo voltado ao conhecimento específico sobre o uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) por parte de professores, que atuam em diferentes níveis de escolarização, no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos e na construção das fórmulas gerais da Combinatória.

¹⁹ Mais informações podem ser obtidas por meio do diretório de pesquisas do CNPQ e no blog do Geração na página <http://geracaoufpe.blogspot.com.br/>

CAPÍTULO 4

MÉTODO

Esta dissertação é composta de dois estudos que juntos buscam responder, primordialmente, as seguintes questões:

- Que conhecimentos os professores de Matemática têm, sobre como o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) pode ser utilizado na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios?
- Os professores relacionam o PFC com os procedimentos formais da Combinatória e a partir dele constroem as fórmulas usadas nos diferentes tipos problemas?

O primeiro estudo teve como objetivo investigar se professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e também alunos do Ensino Médio reconhecem o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) ou *princípio multiplicativo* em soluções de situações combinatórias.

No segundo estudo o objetivo foi investigar os conhecimentos que professores de Matemática mobilizam sobre como o PFC pode ser usado em problemas envolvendo o raciocínio combinatório.

Neste capítulo, é feita, então, uma descrição detalhada da metodologia empregada nestes dois estudos.

4.1 Estudo 1: Reconhecimento por estudantes e professores do Princípio Fundamental da Contagem em situações combinatórias

Com os objetivos de investigar se estudantes e professores reconhecem o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) como estratégia de resolução de problemas combinatórios; e verificar se há diferença no uso de estratégias ao resolver problemas com quatro e cinco etapas de escolha. Foi feita uma análise com auxílio do software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS) com dados de pesquisas produzidas na disciplina Tópicos em Combinatória do Programa de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC no semestre 2012.2. Cada aluno ou dupla de alunos da disciplina utilizou o mesmo instrumento, mas com grupo de participantes diferenciados: professores ou alunos de um nível específico de ensino.

4.1.1 Participantes do Estudo 1

Os dados foram cedidos pelas autoras Silva, Pontes e Teixeira (2013); Cunha, Lima e Rocha (2013) e Rocha (2013). Assim, o banco de dados do primeiro estudo da presente dissertação foi formado por 37 estudantes do 3º ano do Ensino Médio; 13 professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e 11 professores de Matemática do Ensino Médio, respectivamente.

O que distingue o presente estudo dos realizados na referida disciplina é o foco que aqui se dá ao *conhecimento especializado do Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), que é o reconhecimento e uso que variados participantes fazem do PFC ao resolverem problemas combinatórios. Cada estudo na disciplina buscou analisar o desempenho de um grupo específico de participantes e aqui os dados foram colocados em um único banco de dados e analisados e comparados os conhecimentos de professores do Ensino Médio, professores dos anos finais do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio. Nos estudos da disciplina o foco estava na comparação de desempenhos com quatro ou cinco etapas de escolha, bem como na verificação das justificativas apresentadas, mas de apenas um grupo específico. Desse modo, os focos do presente estudo são os conhecimentos do professor e a comparação de desempenhos de professores de diferentes níveis de ensino e o desempenho de alunos, enquanto que, nos demais estudos, o foco estava no desempenho de um grupo específico.

4.1.2 Instrumento para coleta de dados do Estudo 1

O teste aplicado aos participantes, das pesquisas citadas na seção 4.1.1, foi elaborado na disciplina Tópicos em Educação Matemática - Combinatória (2012.2), sob a orientação das professoras Rute Borba e Cristiane Pessoa. O teste é composto por oito problemas, sendo dois envolvendo cada um dos tipos de problemas combinatórios: *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. O que diferenciavam os dois problemas de cada tipo era a quantidade de etapas de escolha, assim tem-se um problema com quatro e outro com cinco etapas de escolha, como apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 - Teste para coleta de dados do Estudo 1.

Tipo	Problemas com 4 etapas de escolha	Problemas com 5 etapas de escolha
Produto cartesiano	No restaurante “Sabor Divino” Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) NDRA Justifique:	Na Lanchonete “Que Delícia” José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ c) $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$ d) $4 + 3 + 5 + 2 + 3$ e) $4 \times 3 \times 5 \times 2$ f) NDRA Justifique:
Arranjo	Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os 4 primeiros lugares. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 7×4 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ c) $7 + 4$ d) $7 \times 6 \times 5 \times 4$ e) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ f) NDRA Justifique:	Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $7 + 5$ b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) 7×5 e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA Justifique:
Combinação	Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8×4 c) $8 + 4$ d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ e) $8 \times 7 \times 6 \times 5$ f) NDRA Justifique:	Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 12×5 b) $12 + 5$ c) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA Justifique:
Permutação	A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 4×4 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$ d) $4 + 3 + 2 + 1$ e) $4 + 4$ f) NDRA Justifique:	Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 5×5 b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$ c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ d) $5 + 5$ e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA Justifique:

Fonte: Professores e estudantes da disciplina Tópicos em Educação Matemática - Combinatória do Programa de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC / UFPE no semestre 2012.2.

As etapas de escolha, consideradas na construção deste instrumento de coleta de dados, referem-se ao número de escolhas que será necessário fazer até se chegar ao total de possibilidades de cada situação combinatória.

Em *produtos cartesianos* pode-se, por exemplo, escolher um dentre quatro tipos de suco e um dentre cinco tipos de sanduíche e as etapas de escolha são duas: o tipo de suco e o tipo de sanduíche. Nesse mesmo tipo de problema, podem-se ter três etapas de escolha: o tipo de suco, o tipo de sanduíche e o tipo de sobremesa. Já em uma *permutação* que, por exemplo, se deseja permutar três pessoas em uma fila, as etapas de escolha são três: a primeira pessoa da fila, a segunda e a terceira. Já uma *permutação* com quatro elementos poderia ser o de anagramas com as letras da palavra AMOR, na qual quatro escolhas seriam efetuadas: cada uma das quatro letras. (VEGA e BORBA, 2014, p. 32).

Resultados do estudo de Vega (2014) mostram haver diferenças quando alunos resolvem problemas com diferentes etapas de escolha, como no caso entre problemas de *produto cartesiano* e *permutação*. Estudos anteriores mostravam que a *permutação* era o tipo de problema mais difícil de resolver, mas ao controlar as etapas de escolha entre os problemas, Vega (2014) observou que problemas de *permutação* com três etapas de escolha são mais fáceis de resolver do que os que envolvem o conceito de *produto cartesiano* com o mesmo número de etapas de escolha. Este estudo evidenciou, assim, uma importante variável a ser considerada na elaboração e resolução de problemas combinatórios: o número de etapas de escolha.

As alternativas do teste foram construídas de modo a se pensar como os participantes podem entender, ou não, a aplicação do PFC em cada tipo de problema combinatório. Assim, algumas alternativas envolviam a adição de valores citados no problema, para verificar se os participantes percebiam, ou não, a natureza multiplicativa das situações. Outras alternativas, entretanto, apresentavam multiplicações que não resolviam a situação e apenas uma alternativa indicava a correta multiplicação, ou seja, o correto uso do PFC.

4.2 Estudo 2: Conhecimento de professores sobre o uso do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de situações combinatórias

O segundo estudo teve como objetivo investigar o conhecimento dos professores sobre como o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) pode ser utilizado na resolução de problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. Também foi objetivo analisar de que modo o professor utiliza o PFC como estratégia para a resolução de problemas

combinatórios e se utiliza, ou não, o PFC na construção das fórmulas dos problemas de Combinatória. Os dados coletados foram categorizados e analisados com o auxílio do software de apoio à análise qualitativa, o web Qualitative Data analysis - webQDA.

4.2.1 Participantes do Estudo 2

Para o desenvolvimento deste estudo foi feito um estudo com três professores com formação em Licenciatura em Matemática que estavam atuando em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e/ou turmas do Ensino Médio. O número reduzido de participantes neste estudo foi intencional com o objetivo de fazer uma análise mais aprofundada com base na tipologia proposta por Ball, Thames e Phelps (2008).

No Quadro 4, há uma breve caracterização dos professores que participaram do segundo estudo.

Quadro 4 - Codificação dos participantes do Estudo 2.

Código	Atuação profissional
P1	Ensino Fundamental/Ensino Médio
P2	Ensino Médio
P3	Ensino Fundamental/Ensino Médio

Fonte: A autora.

Dois critérios foram determinantes para a escolha destes professores. O primeiro critério era que estes professores estivessem lecionando Matemática em turmas do Ensino Fundamental e/ou Médio nos últimos cinco anos. O outro critério era que estes participantes tivessem no mínimo cinco anos de experiência. Estas foram as condições de seleção, por acreditar-se que os participantes estariam em atuação na época do estudo e já teriam uma base formada na prática de ensino. O critério está de acordo com as recomendações de Tardif (2007, p. 57), quando o mesmo afirma que "Em toda ocupação, o tempo surge como um fator importante para compreender os saberes dos trabalhadores, uma vez que trabalhar remete a aprender a trabalhar, ou seja, a dominar progressivamente os saberes necessários à realização do trabalho". Ainda de acordo com o autor, é com a experiência que os professores aprendem a compreender melhor seus alunos, as necessidades de cada um.

Optou-se por dividir a entrevista em três fases com objetivos distintos. As respectivas fases estão descritas a seguir.

4.2.2 Instrumento para coleta de dados do Estudo 2

Para coleta dos dados desta pesquisa, optou-se pela entrevista semi-estruturada, que segundo Rocha (2011, p. 80) "este procedimento pode possibilitar a realização de inferências quanto aos conhecimentos dos sujeitos pesquisados, caracterizando-os".

O instrumento para coleta dos dados do Estudo 2 foi construído de acordo com a tipologia de conhecimentos proposta por Ball, Thames e Phelps (2008), que trata do *Conhecimento Comum do Conteúdo*, *Conhecimento Horizontal do Conteúdo*, *Conhecimento Especializado do Conteúdo*, *Conhecimento do Conteúdo e Alunos*, *Conhecimento do Conteúdo e Ensino* e *Conhecimento do Conteúdo e Currículo*. As características de cada um destes conhecimentos foram descritas no terceiro capítulo desta dissertação.

Com base nos estudos feitos dessa tipologia proposta por Ball, Thames e Phelps (2008), criamos seis categorias de conhecimentos voltadas para a investigação dos conhecimentos mobilizados pelo professor quando o mesmo precisa avaliar resoluções de situações combinatórias que envolvam o uso *princípio fundamental da contagem*- PFC. São elas: *Conhecimento Comum do PFC*, *Conhecimento Horizontal do PFC*, *Conhecimento Especializado do PFC*, *Conhecimento do PFC e Alunos*, *Conhecimento do PFC e Ensino* e *Conhecimento do PFC e Currículo*. As definições de cada uma dessas categorias se encontram no quinto capítulo desta dissertação.

A entrevista foi dividida em três fases distintas. A primeira fase da entrevista tinha como objetivo identificar a formação inicial e continuada, e também a experiência profissional, dos professores. Os questionamentos feitos, para o levantamento destas informações estão apresentados no Quadro 5 **Erro! Fonte de referência não encontrada..**

Quadro 5 - Primeira fase da entrevista do Estudo 2.

Você fez algum curso de pós-graduação? Se sim, qual?
Há quanto tempo leciona?
Leciona em quais redes de ensino?
Há quanto tempo leciona no atual nível de ensino?
Você estudou Combinatória em seu curso de graduação? Se sim, este estudo lhe auxilia no seu ensino em sala de aula?

Fonte: A autora.

Na segunda e terceira fases pretendeu-se investigar o conhecimento que os professores mobilizam sobre o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) como estratégia para resolução de problemas e também seus conhecimentos sobre os tipos de problemas combinatórios ao avaliarem situações combinatórias resolvidas por alunos da Educação Básica. Nessas fases da coleta de dados, os professores não foram informados sobre o nível de escolaridade desses alunos nem sobre a nomenclatura dos problemas apresentados.

Para a segunda fase da entrevista foram apresentados quatro protocolos²⁰ com justificativas de alunos em resposta a problemas combinatórios com foco no PFC. Estes protocolos apresentavam respostas incorretas, indicadas pelos alunos. Assim, tínhamos como hipótese que, seria possível identificar, de maneira indireta, se os professores sabem diferenciar os tipos de problemas combinatórios e, também, seus conhecimentos sobre o PFC, pois, se avaliassem como corretas as respostas incorretas, se observaria incorreções no conhecimento dos professores.

Segundo Stylianidese e Ball (2004), uma forma válida de avaliação de conhecimentos docentes, que não seja a observação de uma aula prática, é a análise por parte de professores de situações hipotéticas de sala de aula. Dessa forma, protocolos reais de alunos foram analisados pelos participantes do estudo, como formas de resolução de situações combinatórias, possíveis de serem observadas em sala de aula.

Os protocolos usados nesta fase do estudo piloto são apresentados nas Figuras 2, 3, 4 e 5.

Figura 2 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de produto cartesiano.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: porque ela tem ao total 12 tipos de refeições variadas e a letra que soma o total 12 número de refeições

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

²⁰ Protocolos retirados de Silva, Pontes e Teixeira (2012) e Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013), pesquisas apresentadas, no semestre 2012.2, na disciplina Tópicos em Educação Matemática - Combinatória (do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE), coordenada pelas professoras Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba e Dra. Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e posteriormente publicadas no XI Encontro Nacional de Educação Matemática.

Figura 3 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de arranjo.

4. Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $7 + 5$
b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$
c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
~~d) 7×5~~
e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: SABENDO-SE QUE DISPUTAM APENAS 5
POSICÕES REALIZAMOS UMA MULTIPLICAÇÃO

Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013).

Figura 4 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de permutação.

8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

~~a) 5×5~~
 $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$
b) 5×5
c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$
d) $5 + 5$
e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Multipliquei as fotos pelas opções.

Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013).

Figura 5 - Exemplo de justificativa incorreta quanto ao uso do PFC na resolução de um problema de combinação.

5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
b) 8×4
c) $8 + 4$
d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$
~~e) $8 \times 7 \times 6 \times 5$~~
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Por que - A equipe do Brasil formaram
Cada grupo diferentes na Olimpíadas.

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

Esta fase da entrevista foi dividida em dois momentos. No primeiro deles, os problemas foram apresentados individualmente e eram feitos alguns questionamentos aos professores. As perguntas eram as que constam no Quadro 6.

Quadro 6 - Primeiro momento da segunda fase da entrevista do Estudo 2.

<i>Que tipo de problema é este?</i>
<i>Este tipo de problema pode ser trabalhado a partir de que ano?</i>

Fonte: A autora.

Nossa hipótese nestas duas questões era de que os professores entrevistados mobilizassem conhecimentos referentes ao *conhecimento do PFC e currículo* e ao *conhecimento especializado do PFC* quando apresentassem como respostas termos normalmente usados para o ensino da Combinatória.

No segundo momento os problemas eram distribuídos lado a lado e feitos os questionamentos apresentados no Quadro 7.

Quadro 7 - Segundo momento da segunda fase da entrevista do Estudo 2.

<i>Em qual bloco de conteúdos estes problemas estão inseridos?</i>
<i>No que estes problemas se assemelham e no que se diferenciam?</i>
<i>Os estudantes estão corretos em suas respostas e justificativas?</i> ▪ <i>Se correto, por quê?</i> ▪ <i>Se incorreto, qual das alternativas é mais adequada para este tipo de problema?</i> ▪ <i>Se incorreto, qual a dificuldade você acha que o aluno apresentou na compreensão deste problema?</i>
<i>Como você auxiliaria o aluno a compreender este problema?</i>

Fonte: A autora.

Nesta fase da entrevista tínhamos como hipótese que os entrevistados mobilizariam conhecimentos referentes ao *PFC e seu currículo*, ao *conhecimento do PFC e aluno* e ao *conhecimento do PFC e ensino*, além de aspectos que envolvessem o *conhecimento especializado do PFC* nos protocolos apresentados.

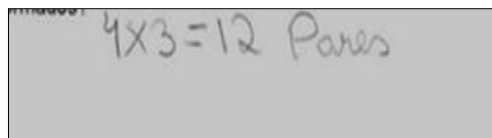
Na terceira e última fase desta entrevista o objetivo foi investigar quais tipos de conhecimentos os professores entrevistados mobilizam ao analisar e comparar os procedimentos formais da Combinatória e sua relação com o PFC. Nesta fase foram apresentados problemas combinatórios retirados da tese de Pessoa (2009) e do trabalho de Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013), sem a indicação do tipo de problema, seguidos pela fórmula matemática de cada tipo de problema e pela resolução de um aluno utilizando como estratégia o PFC de maneira correta. Seguem, no Quadro 8, os problemas utilizados.

Quadro 8 - Terceira fase da entrevista do Estudo 2.**Problema 01 - Produto Cartesiano**

Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luiza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

$$PC = n \times p$$

Exemplo de fórmula matemática.



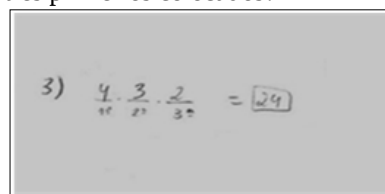
Exemplo de estratégia usando o PFC.
Fonte Pessoa (2009).

Problema 02 – Arranjo

As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo de fórmula matemática.



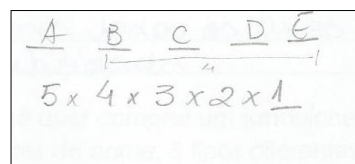
Exemplo de estratégia usando o PFC.
Fonte Pessoa (2009).

Problema 03 – Permutação

Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

$$P = n!$$

Exemplo de fórmula matemática.



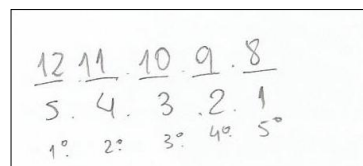
Exemplo de estratégia usando o PFC.
Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013)

Problemas 04 – Combinação

Na seleção brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo de fórmula matemática.



Exemplo de estratégia usando o PFC.
Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013)

Fonte: A autora

Num primeiro momento dessa fase da entrevista, os problemas, com suas respectivas estratégias, foram apresentados individualmente seguidos do questionamento:

- *Existe alguma relação entre as soluções matemáticas e as resoluções dos alunos? Se sim, qual?*

Com essa questão procuramos identificar o *conhecimento horizontal do conteúdo* o qual toma por base o fato do professor ter consciência da relação entre os conteúdos matemáticos e uma previsão de como os conteúdos poderão serão tratados futuramente com o avançar dos anos de escolarização. Aqui se esperava que o professor apontasse se existe relação entre a fórmula Matemática e o uso do PFC como estratégia de resolução.

No segundo momento dessa fase, os problemas foram agrupados lado a lado e feitos outros questionamentos ao professor, como indicado no Quadro 9.

Quadro 9 - Segundo momento da terceira fase da entrevista do Estudo 2.

<i>Qual a estratégia utilizada por estes alunos?</i>
<i>Ela se aplica a todos os tipos de problemas combinatórios?</i>
<i>Como esta estratégia se relaciona com as fórmulas?</i>
<i>Como se poderiam construir junto com os alunos as fórmulas da Combinatória?</i>

Fonte: A autora.

Os tipos de conhecimento que objetivamos observar neste momento eram, respectivamente: *conhecimento do conteúdo e aluno*; *conhecimento especializado do conteúdo*; *conhecimento horizontal do conteúdo*; e *conhecimento do conteúdo e ensino*.

A análise e os resultados desta coleta serão apresentados no próximo capítulo.

Deseja-se, a partir do proposto, colaborar para o levantamento de conhecimentos docentes e práticas de ensino, em particular da Combinatória, e, assim, trazer contribuições para o ensino de Matemática na Educação Básica. De modo mais específico, deseja-se trazer contribuições referentes ao papel do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)* como eficiente estratégia de ensino da Combinatória, por possibilitar a resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios.

CAPÍTULO 5
APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS
RESULTADOS

5.1 O tipo de conhecimento e o Princípio Fundamental da Contagem

Após estudo da tipologia de conhecimentos proposta por Ball, Thames e Phelps (2008), foi feita uma adaptação de como estes conhecimentos podem ser incorporados ao Ensino de Combinatória, mais especificamente ao conhecimento sobre o uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) de professores de Matemática da Educação Básica para resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. São eles:

1_ *Conhecimento comum do Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*

Neste tipo de conhecimento são observadas questões básicas para a aprendizagem da Combinatória, como saber aplicar o PFC em situações combinatórias variadas, sem necessariamente ter consciência das diferenças entre as situações apresentadas.

2_ *Conhecimento especializado do Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*

Para entender questões relacionadas à aplicação do PFC aos diferentes tipos de problemas, é necessário ao professor reconhecer termos específicos da Combinatória, como distinguir situações combinatórias variadas em suas nomenclaturas e características. O conhecimento especializado do PFC permite identificar como o princípio se aplica distintamente a situações combinatórias condicionais e não condicionais e como o princípio é utilizado diferentemente, de acordo com o tipo de problema de Combinatória.

Alguns exemplos conhecimento especializado do PFC e de Combinatória, necessário para a aplicação do *princípio multiplicativo*, que podem ser observados, são:

- Reconhecer e diferenciar os tipos de problemas e apontar características próprias sejam elas de ordem de elementos ou de uso, ou não, de todos os elementos de um dado conjunto;
- Apontar semelhanças e diferenças entre problemas apresentados e as resoluções de alunos;
- Reconhecer a aplicação do PFC nos diferentes tipos de problemas;
- Modificar tarefas usando o PFC, de modo que as mesmas se tornem de fácil compreensão por parte dos alunos. O mesmo pode ocorrer para transformar questões fáceis em questões mais elaboradas;
- A partir do PFC, perceber as propriedades multiplicativas implícitas nos problemas.
- Apresentar exemplos de como o PFC se aplica de modo diferente em situações condicionais e não-condicionais de distintos tipos de problemas;

- Reorganizar as informações contidas nas situações combinatórias apresentadas para aplicar o PFC em sua resolução.

3_ *Conhecimento horizontal do Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*

É como o professor tem consciência de como o PFC pode ser generalizado em situações mais simples a situações mais complexas e também como é base para a construção das fórmulas da Análise Combinatória.

Alguns exemplos que se pode observar neste tipo de conhecimento são:

- Relacionar o PFC e os procedimentos formais de resolução de diferentes situações combinatórias;
- Perceber como a multiplicação se faz presente na aplicação do PFC e das fórmulas da Análise Combinatória;
- Reconhecer o trabalho com a Combinatória desde os anos iniciais, e a aplicação implícita do PFC neste nível de escolarização, e que o princípio pode ser aplicado a problemas com nível gradual de dificuldades;
- Apontar a importância de aprender e usar o PFC desde os anos iniciais da Educação Básica.

4_ *Conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem e alunos*

Neste tipo de conhecimento, observa-se como o professor mobiliza conhecimentos referentes ao uso do PFC por estudantes. Exemplos deste tipo de conhecimento são:

- Apontar e descrever as dificuldades apresentadas pelos alunos ao aplicarem o PFC na resolução de diferentes situações combinatórias, sejam eles condicionais ou não-condicionais;
- Mostrar familiaridade com erros comuns cometidos pelos alunos ao usarem o PFC;
- Prever facilidades e/ou dificuldades de seus alunos ao usarem o PFC para resolução de diferentes situações combinatórias;
- Antecipar o que os alunos poderão considerar interessante e motivador para aprendizagem do PFC como estratégia de resolução de situações combinatórias;
- Entender como os alunos estão usando o PFC na resolução de problemas combinatórios.

5_Conhecimento do *Princípio Fundamental da Contagem e ensino*

Este é o tipo de conhecimento no qual o professor propõe que os alunos utilizem o PFC na resolução de problemas combinatórios. Exemplos desse tipo de conhecimento são:

- Usar métodos e técnicas de ensino para a Combinatória que contemplem o uso do PFC;
- Avaliar, junto aos alunos, vantagens e desvantagens do uso do PFC para resolução de problemas combinatórios;
- Apresentar esclarecimentos aos alunos referentes ao uso do PFC e relações com outras estratégias, como a árvore de possibilidades, durante a resolução dos problemas.

6_Conhecimento do *Princípio Fundamental da Contagem e currículo*

São observadas neste tipo de conhecimento, questões relativas a como o PFC vem sendo abordado nos livros didáticos, nas orientações curriculares e outros documentos oficiais que tratam do ensino da Combinatória.

Estas categorias, propostas no estudo do uso do PFC, são usadas como base para as análises dos dois estudos realizados que compõe esta dissertação, cujos resultados serão apresentados e analisados a seguir.

5.2 Estudo 1 - Reconhecimento por estudantes e professores do *Princípio Fundamental da Contagem em situações combinatórias*

No Estudo 1 objetivava-se investigar se professores de Matemática da Educação Básica e estudantes do Ensino Médio reconhecem o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) como estratégia para resolução dos diferentes tipos de problemas (*produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*), trabalhados no ensino da Combinatória.

5.2.1 Caracterização dos participantes do Estudo 1

Compõe este estudo, ao todo, 61 participantes, entre estudantes do Ensino Médio e professores de Matemática da Educação Básica. Os dados foram coletados pelas autoras Cunha, Lima e Rocha (2013); Rocha (2013) e Silva, Pontes e Teixeira (2013) e cedidos para este estudo.

Os dados referentes aos 13 professores dos anos finais do Ensino Fundamental foram cedidos pelas autoras Cunha, Lima e Rocha (2013). Estes participantes são formados em

Matemática e lecionavam em escolas municipais e estaduais dos Municípios de Olinda e Recife.

Rocha (2013) cedeu os dados de 11 professores que atuavam em turmas do Ensino Médio, e são formados em cursos de Licenciatura em Matemática ou Ciências com habilitação em Matemática. A experiência docente destes professores era de no mínimo seis anos em escolas públicas das redes estadual e/ou federal de Pernambuco.

Já os dados dos 37 estudantes do Ensino Médio foram cedidos pelas autoras Silva, Pontes e Teixeira (2013). Estes estudantes, na época da coleta de dados, estavam cursando o 3º ano do Ensino Médio em uma escola pública do Estado de Pernambuco.

Apesar de pesquisas distintas, todos os participantes responderam ao mesmo questionário (ver Quadro 3, p. 59) que continha oito questões, sendo duas de cada tipo (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*). Nestes testes foram manipuladas as etapas de escolha (quatro ou cinco etapas) e também, os contextos (os mesmos para quatro e para cinco etapas: refeições, esportes, competições, fotos de artistas).

Neste estudo, o foco está no reconhecimento do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*, presente nas alternativas corretas de cada questão, e seu uso nas justificativas apresentadas pelos participantes, durante a resolução das questões propostas. É também objetivo observar se as etapas de escolha influenciam na escolha das estratégias e em quais tipos de problemas o PFC é mais utilizado.

Para efeitos de análise, os participantes foram organizados em três grupos distintos: o Grupo 1 formado por professores dos anos finais do Ensino Fundamental; o Grupo 2 formado por professores do Ensino Médio; e o Grupo 3 formados por estudantes do Ensino Médio. Os dados foram tratados e analisados com o auxílio do software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS).

5.2.2 Acertos totais no teste do Estudo 1

Na Tabela 1 pode-se observar a frequência de quantos participantes em cada grupo, consegue acertar todas ou parte das questões propostas no teste.

Após o levantamento dos acertos totais do teste por cada grupo, constatou-se que nenhum participante do Grupo 3, estudantes do Ensino Médio, conseguiu acertar todas as questões propostas no teste. O que se observou no Grupo 3, foram acertos parciais que variaram desde participantes que não acertam nenhuma das questões a participantes que acertam sete das oito questões do teste.

Tabela 1 - Frequência de acertos no teste.

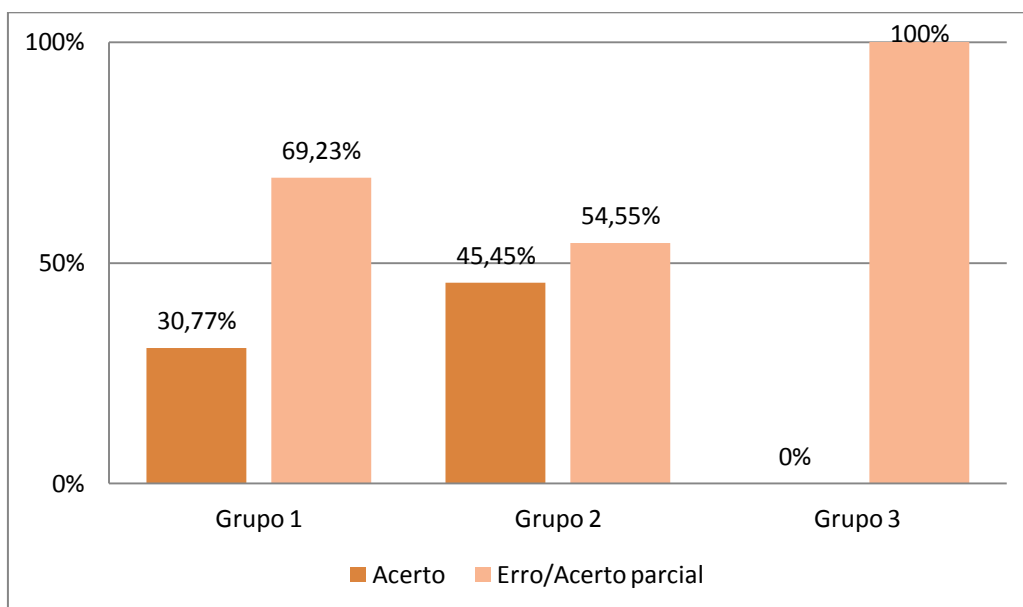
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	TOTAL
Grupo 1	1	0	1	1	1	2	3	0	4	13
Grupo 2	0	0	0	0	0	0	3	3	5	11
Grupo 3	7	10	6	3	2	4	4	1	0	37

Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 2 = Professores do Ensino Médio; Grupo 3 = Estudantes do Ensino Médio.

Fonte: A autora.

Vale também a pena ressaltar que entre os grupos de professores (Grupo 1 – professores dos anos finais do Ensino Fundamental e Grupo 2 – professores do Ensino Médio) a frequência de acertos total também foi baixa, pois nos dois casos menos da metade dos participantes reconheceu o PFC em todos os tipos de problemas. Dessa forma, o desempenho foi aquém do esperado, tanto no grupo dos alunos, quanto no dos professores.

Com os percentuais de cada grupo, como observado no Gráfico 1, percebe-se que nenhum dos grupos alcançou mais de 50% dos seus componentes acertando todas as questões propostas no teste.

Gráfico 1 - Acerto total no teste do Estudo 1.

Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 2 = Professores do Ensino Médio; Grupo 3 = Estudantes do Ensino Médio.

Fonte: A autora.

Ao realizar uma análise de variância – Anova – para comparações entre os grupos, foram observadas diferenças significativas entre os desempenhos dos participantes dos grupos [$F(8, 52) = 3,973$; ($p < 0,001$)]. Com um teste T para amostras pares entre os grupos,

percebe-se diferença significativa de desempenho no teste. Entre o Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) e o Grupo 2 (professores do Ensino Médio) a diferença é de $[t(23) = -5,335; p < 0,001]$; entre o Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) e o Grupo 3 (estudantes do Ensino Médio) a diferença é de $[t(49) = -4,436; p < 0,001]$; e a diferença entre o Grupo 2 (professores do Ensino Médio) e o Grupo 3 (estudantes do Ensino Médio) é de $[t(47) = -6,339; p < 0,001]$. Dessa forma, foram observadas diferenças significativas entre os grupos participantes deste estudo. A diferença de desempenhos dos professores por nível de ensino pode ser justificada pelas experiências dos professores na prática de ensino da Combinatória, em particular do PFC. Resultados semelhantes, como diferenças de conhecimentos de professores de acordo com o nível de ensino, embora tenham tido semelhantes formações na graduação, foram encontrados por Rocha (2011). A diferença no desempenho entre os grupos de Estudantes e Professores já esperado devido a formação inicial destes grupos, porém foi observada uma diferença muito grande entre esses dois grupos.

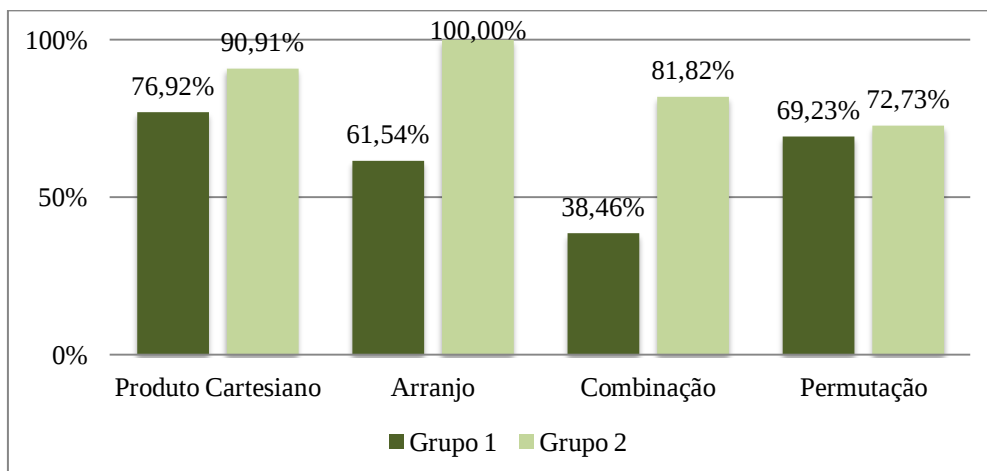
Nos Gráficos 2, 3 e 4 são apresentados os percentuais apenas dos acertos totais no teste pelos participantes dos grupos em cada um dos tipos de problemas, ou seja, se os participantes acertavam os dois problemas de cada tipo propostos no teste. O objetivo da apresentação destes gráficos é comparar os desempenhos dos professores de diferentes níveis e o desempenho dos alunos e discutir possíveis motivos de diferença de desempenhos.

No Gráfico 2 é feita uma comparação entre a quantidade de acertos totais por participantes dos grupos 1 e 2 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental e professores do Ensino Médio, respectivamente) dos dois problemas de cada tipo (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*) presentes no teste pelos Grupos 1 e 2.

Compara-se, dessa forma, os desempenhos dos professores que atuam em diferentes níveis de ensino – anos finais do Ensino Fundamental (Grupo 1) e Ensino Médio (Grupo 2).

Observa-se que os desempenhos apresentados são semelhantes nos dois grupos de professores em problemas de *permutação*, já nos problemas de *produto cartesiano*, *arranjo* e de *combinação* foram observadas diferenças significativas de desempenho entre os grupos. Desse modo, os professores de Matemática que lecionavam no Ensino Fundamental, e não tinham experiência de ensino de Análise Combinatória, apresentaram maior dificuldade no reconhecimento do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)* presente nas alternativas corretas, em problemas de *arranjo* e *combinação*.

Gráfico 2 - Representação dos participantes nos acertos totais por tipo de problema entre o Grupo 1 e o Grupo 2.



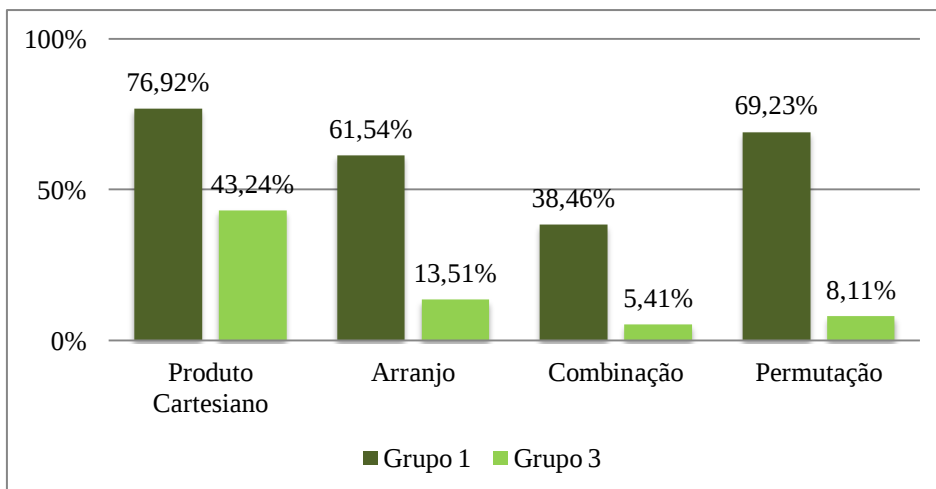
Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 2 = Professores do Ensino Médio.

Fonte: A autora.

Acredita-se que a dificuldade dos professores, que não têm experiência em ensino de Análise Combinatória, seja a de diferenciar *arranjos* de *combinações*. No caso de *combinações*, o professor precisa reconhecer que o PFC deve ser aplicado duas vezes, primeiro para fazer todas as combinações possíveis e depois dividi-las pela permutação dos elementos repetidos, para então, encontrar a solução correta.

No Gráfico 3, são comparados os acertos totais em cada tipo de problema (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) pelos participantes dos Grupos 1 e 3. Comparando-se assim, os desempenhos dos professores que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental (Grupo 1) e estudantes do Ensino Médio (Grupo 3).

Gráfico 3 - Representação dos participantes nos acertos totais por tipo de problema entre o Grupo 1 e o Grupo 3.



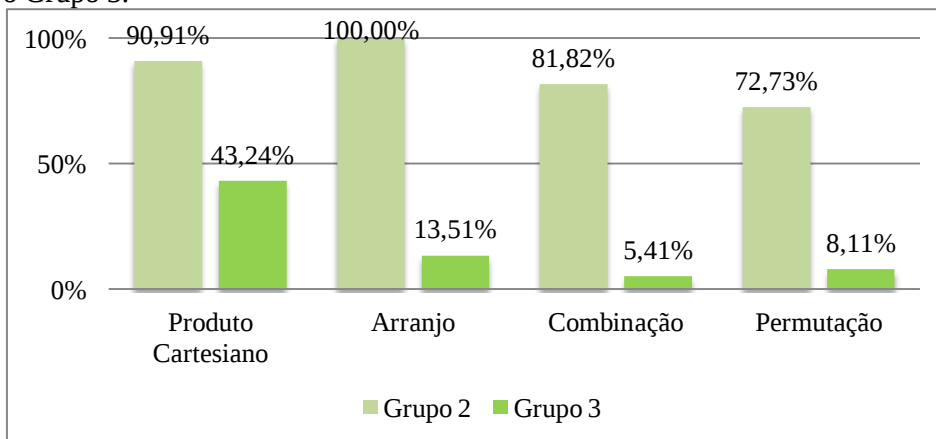
Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 3 = Estudantes do Ensino Médio.

Fonte: A autora.

Percebe-se diferença entre todos os problemas contidos no teste resolvido pelos dois grupos participantes (Grupo 1 e Grupo 3). Este já era um resultado esperado devido a formação inicial destes participantes serem diferentes.

Outra comparação feita foi em relação ao desempenho entre o Grupo 2 (professores do Ensino Médio) e o Grupo 3 (estudantes do Ensino Médio), nos acertos totais em cada tipo de problema contido no teste. Pode-se observar no Gráfico 4, uma diferença de desempenhos destes grupos em todos os tipos de problemas apresentados o que já era esperado devido à formação de cada um dos grupos, mas não era esperado que as diferenças fossem tão grandes.

Gráfico 4 - Representação dos participantes nos acertos totais por tipo de problema entre o Grupo 2 e o Grupo 3.



Grupo 2 = Professores do Ensino Médio; Grupo 3 = Estudantes do Ensino Médio.

Fonte: A autora.

Esta comparação justifica-se pelo objetivo de levantar informações e possíveis hipóteses que venham a justificar diferenças muito discrepantes de desempenho entre os participantes destes grupos, ou seja, entre professores e alunos do Ensino Médio – nível de ensino que trata explicitamente a Análise Combinatória.

Após esta observação, surge o questionamento de que, se os professores do Ensino Médio têm bom desempenho em todos os tipos de problemas apresentados, mostrando assim um reconhecimento do PFC como solução para diferentes situações combinatórias, por que estudantes desta mesma modalidade de ensino têm resultados tão inferiores comparados aos professores? Outros questionamentos seriam: Quais as naturezas das dificuldades demonstradas pelos estudantes? Estariam suas dificuldades, de alguma forma, relacionadas ao ensino da Análise Combinatória e/ou à não valorização, pelos professores, do PFC como estratégia eficiente de resolução dos problemas combinatórios?

Perante o que foi apresentado nos gráficos acima, observa-se que o Grupo 2 é o que tem melhor desempenho de acertos totais nas situações propostas no teste, seguido dos Grupos 1 e 3.

Mais adiante, é apresentada uma análise das estratégias usadas por todos os grupos participantes deste estudo, mas com um olhar voltado para os Grupos 2 e 3 para identificar se os participantes resolvem problemas combinatórios fazendo uso da mesma estratégia ou não. Essa apresentação trará luz sobre a natureza das dificuldades apresentadas, em particular as dos estudantes.

5.2.3 Desempenho dos grupos por tipo de problema

Com um percentual baixo de acertos totais apresentados pelos grupos, observou-se a média de acertos que cada um destes grupos teve na resolução dos diferentes tipos de problemas presentes no teste. As médias de acerto serão aqui analisadas levando em consideração as justificativas apresentadas para a escolha das alternativas nas questões.

Na Tabela 2, é apresentada a média de acertos por grupo. Cada uma das médias apresentadas leva em consideração os acertos totais e parciais por participantes em cada um dos grupos participantes. Os dados foram obtidos após uma análise estatística descritiva no software SPSS.

Tabela 2 - Média de acertos no teste por grupo.

	PRODUTO CARTESIANO	ARRANJO	COMBINAÇÃO	PERMUTAÇÃO
Grupo 1	1,69	1,23	1,00	1,38
Grupo 2	1,91	2,00	1,73	1,55
Grupo 3	1,16	0,49	0,35	0,43

Grupo 1 = Professores dos anos finais do Ensino Fundamental; Grupo 2 = Professores do Ensino Médio; Grupo 3 = Estudantes do Ensino Médio.

Fonte: A autora.

A dificuldade em resolver problemas de *arranjo* e *combinação* evidencia-se novamente entre os participantes do Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental). De acordo com Rocha (2011), professores têm dificuldades em diferenciar problemas de *arranjo* e *combinação*, ver Figura 6, e isso demonstra um desconhecimento das situações no qual os invariantes do conceito de ordenação irão implicar, ou não, em novas possibilidades.

Figura 6 - Justificativa de professor do Grupo 1 ao resolver um problema de *combinação*.

6. Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 12×5
b) $12 + 5$
c) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
~~d) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$~~
e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: É GRUPO DE 12 ATLETAS, ARRANJADOS
5 À 5. - ARRANJO

Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

Os participantes do Grupo 1 apresentaram um melhor reconhecimento do *princípio fundamental da contagem - PFC* nos problemas envolvendo situações de *produto cartesiano*, Figura 7. O reconhecimento do *princípio fundamental da contagem* na resolução destes problemas se caracteriza como a mobilização do *conhecimento especializado do PFC*, uma vez que o professor aponta o PFC como estratégia de resolução deste tipo específico de problema combinatório. Os participantes deste grupo (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) não evidenciam claramente o conhecimento da aplicação do PFC aos problemas de *permutação*.

Figura 7 - Justificativa de um participante do Grupo 1, usando o PFC na resolução de um problema de *produto cartesiano*.

2. Na Lanchonete "Que Delícia" José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
~~c) $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$~~
d) $4 + 3 + 5 + 2 + 3$
e) $4 \times 3 \times 5 \times 2$
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:

4	3	5	2	3
—	—	—	—	—
PÃO	CARNE	QUEIJO	MOLHO	SALADA

PELO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO,
POSSIBILIDADES = $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$.

Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

No Quadro 10 são apresentadas as estratégias que foram usadas pelos participantes do Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) para resolver os diferentes tipos de problemas presentes no teste.

Para os problemas do tipo *produto cartesiano*, percebe-se um uso mais explícito do *Princípio Fundamental da Contagem* - PFC para resolver este tipo de problema. Ao avaliar os tipos de conhecimentos presentes nas justificativas dadas pelos participantes deste grupo, percebe-se, então, a mobilização do *conhecimento especializado do PFC*, que ocorre quando estes participantes indicam, de forma explícita e muitas vezes com demonstrações, o uso do PFC para resolução do referido problema, Figura 8. Possivelmente os participantes deste Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental) que apenas apontam a resposta correta mobilizam o conhecimento comum do PFC.

Quadro 10 - Estratégias usadas pelos participantes do Grupo 1 (Professores dos anos finais do Ensino Fundamental).

TIPO DE PROBLEMA	QUANT.	ESTRATÉGIAS
PRODUTO CARTESIANO	2	Uso do Princípio Fundamental da Contagem;
	1	Uso do PFC e indicação da árvore de possibilidades;
	3	Multiplicação dos elementos presentes no enunciado;
	3	Marca uma alternativa e indica o PFC como estratégia;
	4	Apenas marcou uma das alternativas.
ARRANJO	2	Uso do Princípio Fundamental da Contagem;
	1	Uso do PFC e indicação da árvore de possibilidades;
	1	Uso da fórmula de <i>arranjo</i> ;
	2	Marca uma alternativa e indica que se trata de um problema de <i>arranjo</i> ;
	2	Marca uma alternativa e explica o por que da opção escolhida;
	5	Apenas marcou uma das alternativas.
COMBINAÇÃO	1	Uso do PFC e indicação da árvore de possibilidades;
	2	Uso da fórmula de <i>combinação</i> e indicação do tipo de problema;
	2	Uso da fórmula de <i>combinação</i> .
	2	Marca uma alternativa e indica que se trata de um problema de <i>arranjo</i> ;
	1	Marca uma alternativa e explica o por que da opção escolhida;
	5	Apenas marcou uma das alternativas.
PERMUTAÇÃO	1	Uso do PFC;
	1	Uso do PFC e da árvore de possibilidades;
	1	Uso do PFC e indica que trata-se de um problema de <i>permutação</i> .
	1	Marca uma alternativa e sugere uso da fórmula do fatorial;
	1	Marca uma alternativa e indica que se trata de um problema de <i>permutação</i> .
	1	Marca uma alternativa e indica que se trata de um problema de <i>arranjo</i> ;
	2	Marca uma alternativa e explica o por que da opção escolhida;
	5	Apenas marcou uma das alternativas.

Fonte: A autora.

Figura 8 - Justificativa de participante do Grupo 1 usando o PFC na resolução de um problema de *produto cartesiano*.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$
b) $3 \times 2 \times 4$
c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$
d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
~~e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$~~
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique:

USEI A IDEIA DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO, ONDE O PRODUTO DOS TIPOS DIFERENTES DE CADA OPÇÃO DÁ O RESULTADO DO TOTAL DE POSSIBILIDADES.

Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

Nos demais tipos de problemas, *arranjo*, *combinação* e *permutação*, o uso do PFC ainda aparece no Grupo 1 (professores dos anos finais do Ensino Fundamental), mas com menor explicitação, às vezes acompanhando de uma árvore de possibilidades, como na Figura 9, ou apenas sua indicação. Esta estratégia não deixa de caracterizar indícios de *conhecimento especializado do PFC*, reconhecendo que o mesmo pode ser aplicado em diferentes tipos de problemas.

No caso dos problemas de *arranjo* e, principalmente, nos casos de *combinação*, o uso e a indicação da fórmula aparecem com mais frequência como estratégia para resolução destes problemas. Nas demais justificativas, os participantes do Grupo 1 parecem evidenciar o *conhecimento comum do PFC* nestes problemas, ou seja, utilizam o PFC, mas sem clara explicitação de seu uso.

Figura 9 - Justificativa de um participante do Grupo 1 usando o PFC na resolução de um problema de permutação.

8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5×5
b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$
c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$
d) $5 + 5$
~~e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$~~
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: $(A, B, C, D, E) \rightarrow$ Artistas

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ possibilidades

	1º	2º	3º	4º	5º
A	5	4	3	2	1
B	(A)	A	A	A	A
C	B	(B)	B	B	B
D	C	C	(C)	C	C
E	D	D	D	(D)	D
	E	E	E	E	(E)

$D-E \rightarrow ABCDE$
 $C-E-D \rightarrow ABCED$
 $D-C-E \rightarrow ABDCE$
 $E-E-C \rightarrow ABDEC$
 $E-D-C \rightarrow ABEDC$
 $C-D \rightarrow ABECD$

$A \rightarrow 6$
 $D \rightarrow 6$
 $E \rightarrow 6$

$B \rightarrow 24$
 $C \rightarrow 24$
 $D \rightarrow 24$
 $E \rightarrow 24$

$\times 24$ possibilidades
só um artista
Logo, $24 \times 5 = \underline{120}$

Fonte: Cunha, Lima e Rocha (2013).

Pode-se, então, afirmar que, no Grupo 1, a explicitação do uso do PFC se dá mais frequentemente nos problemas do tipo *produto cartesiano*, indicando, assim, a mobilização do *conhecimento especializado do PFC*. Nos demais problemas, os professores dos anos finais do Ensino Fundamental dão maiores indícios do *conhecimento comum do PFC* quando apresentam respostas apontando o uso da multiplicação e a escolha de possibilidades durante a resolução destes problemas.

Os participantes do Grupo 2 – Professores do Ensino Médio – apresentaram um melhor desempenho. Como se pode observar na - Média de acertos no teste por grupo. - Tabela 2, (acerto máximo: 2,00), os acertos médios foram de 1,91 (para *produtos cartesianos*), 2,00 (para *arranjos*), 1,73 (para *combinações*) e 1,55 (para *permutações*).

Esses dados dão indícios fortes do conhecimento especializado do PFC mobilizado por estes professores, uma vez que estes reconhecem que o *princípio multiplicativo* aplica-se a distintos tipos de problemas combinatórios. As justificativas dadas por esse grupo, apresentadas no Quadro 11, indicam a menção ao PFC com maior frequência entre os professores do Ensino Médio.

Quadro 11 - Estratégias usadas pelos participantes do Grupo 2 (Professores do Ensino Médio).

TIPO DE PROBLEMA	QUANT.	ESTRATÉGIAS
PRODUTO CARTESIANO	6	Uso do PFC;
	2	Uso do PFC seguida de demonstração do cálculo;
	3	Uso do PFC e explicação do por que da opção escolhida.
ARRANJO	3	Uso do PFC;
	3	Uso do PFC seguida de demonstração do cálculo;
	3	Uso do PFC e explicação do por que da opção escolhida.
	2	Uso do PFC e indica que se trata de um problema de <i>arranjo</i> .
COMBINAÇÃO	1	Uso do PFC;
	4	Uso da fórmula de <i>combinação</i> seguida da indicação do tipo de problema;
	1	Marca uma alternativa e indica que se trata de um problema de <i>combinação</i> ;
	5	Marca uma alternativa e explica o por que da opção escolhida sem explicitar o tipo de problema trabalhado.
PERMUTAÇÃO	4	Uso do PFC;
	5	Marca uma alternativa e explica o por que da opção escolhida sem explicitar o tipo de problema trabalhado;
	2	Disseram não entender o que pedia o enunciado.

Fonte: A autora.

Após análises das justificativas apresentadas pelo Grupo 2, percebe-se a utilização e indicação explícitas do PFC nos problemas dos tipos *produto cartesiano*, *arranjo* e *permutação*. A não indicação do PFC nos problemas de *combinação*, Figura 10, indica dificuldade dos professores em associar o *princípio multiplicativo* a esse tipo de problema, uma vez que, neste caso, o PFC deve ser duplamente aplicado.

Figura 10 - Exemplo do uso, por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio), do PFC na resolução de um problema de *combinação*.

5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ 8.7.6.5

b) 8×4

c) $8 + 4$

d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

e) $8 \times 7 \times 6 \times 5$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: princípio multiplicativo

Fonte: Rocha (2013).

Neste grupo o conhecimento especializado do PFC aparece explicitamente com mais frequência em problemas de *produto cartesiano*. Na Figura 11 pode-se observar o uso explícito do PFC como estratégia de resolução.

Figura 11 - Exemplo do uso, por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio), do PFC na resolução de um problema de *produto cartesiano*.

2. Na Lanchonete "Que Delícia" José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

c) $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$

d) $4 + 3 + 5 + 2 + 3$

e) $4 \times 3 \times 5 \times 2$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Pelo princípio multiplicativo temos:

pão $\boxed{4} \times$ carne $\boxed{3} \times$ queijo $\boxed{5} \times$ molho $\boxed{2} \times$ salada $\boxed{3}$

Fonte: Rocha (2013).

Mesmo não sendo usado com tanta frequência pelos professores, o PFC também é indicado na resolução de problemas de *arranjo* e *permutação*, como se pode observar nas Figuras 12 e 13.

Figura 12 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio) do PFC na resolução de um problema de *arranjo*.

4. Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $7 + 5$
~~b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$~~
 c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
 d) 7×5
 e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
 f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Pelo P.F.C.

Fonte: Rocha (2013).

Figura 13 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 do PFC na resolução de um problema de *permutação*.

7. A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 4×4
 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$
 c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$
 d) $4 + 3 + 2 + 1$
 e) $4 + 4$
 f) Nenhuma das respostas anteriores

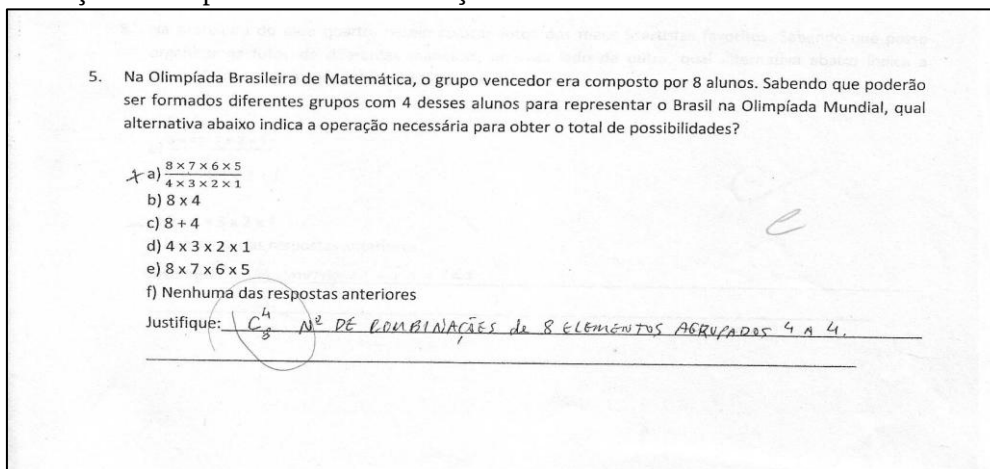
Justifique: Os quatro artistas podem ocupar os 4 lugares e é permutação $\rightarrow P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Handwritten notes:
 - "multiples" (circled)
 - "Outra resolução" (circled)
 - "Pelo Princípio Multiplicativo" (circled)
 - "4 possibilidades 4, 3, 2, 1" (circled)
 - "3 possibilidades" (circled)
 - "2 possibilidades" (circled)
 - "1 possibilidade" (circled)

Fonte: Rocha (2013).

Já nos problemas de *combinação*, como indicado na Figura 14, o que acontece é o uso predominante das fórmulas, sem a explicitação direta ou uso do PFC. Como já explicitado, anteriormente, no caso de problemas do tipo *combinação* o PFC deve ser aplicado duas vezes e nem todos os professores devem perceber isso, já que nenhum explicitou claramente o uso do *princípio multiplicativo* neste tipo de problema.

Figura 14 - Exemplo do uso por professor do Grupo 2 (professores do Ensino Médio) de fórmula na resolução de um problema de *combinação*.



Fonte: Rocha (2013).

Os participantes do Grupo 3, estudantes do Ensino Médio, apresentaram um desempenho bem mais fraco, com médias de acerto inferiores a 0,50 (de no máximo média 2,00) e apenas nos problemas de *produto cartesiano* tiveram um melhor desempenho (média 1,16), como indicado na Tabela 2.

Após o levantamento das estratégias apresentadas pelos participantes do Grupo 3, sintetizadas no Quadro 12, percebe-se que os estudantes pouco usam o PFC como estratégia na resolução dos problemas contidos no teste. O que há nas estratégias usadas por este grupo é uma maior ocorrência do uso da multiplicação, que muitas vezes mostra que o aluno reconhece o PFC, de modo implícito, embora não mencione o princípio explicitamente em suas justificativas.

Este tipo de ocorrência aconteceu com mais frequência nos problemas de *produto cartesiano*, exemplificado na Figura 15. Nas demais justificativas dadas, tanto para este tipo de problema, quanto para os demais presentes no teste, os estudantes dão respostas vagas que não chegam a expressar o entendimento que os mesmos têm em relação às alternativas escolhidas, como se pode observar no Quadro 12.

Quadro 12 - Estratégias usadas pelos participantes do Grupo 3 (estudantes do Ensino Médio).

TIPO DE PROBLEMA	QUANT.	ESTRATÉGIA
PRODUTO CARTESIANO	12	Multiplicação dos dados do enunciado com uma explicação lógica de que entende o PFC implícito nas questões.
	6	Soma dos números do enunciado
	16	Marcou uma das alternativas e justificou sem fundamentar a opção escolhida;
	3	Apenas marcou uma das alternativas.
ARRANJO	5	Multiplicação dos dados do enunciado com uma explicação lógica de que entende o PFC implícito nas questões.;
	4	Multiplicação dos dados do enunciado.
	21	Marcou uma das alternativas e justificou sem fundamentar a opção escolhida;
	5	Apenas marcou uma das alternativas;
	2	Justifica que não há alternativas para responder a pergunta.
COMBINAÇÃO	5	Multiplicação dos dados do enunciado;
	7	Apenas marcou uma das alternativas;
	8	Justifica que não há alternativas para responder a pergunta.
	17	Marcou uma das alternativas e justificou sem fundamentar a opção escolhida;
PERMUTAÇÃO	1	Uso do PFC;
	7	Multiplicação dos dados do enunciado.
	15	Marcou uma das alternativas e justificou sem fundamentar a opção escolhida;
	11	Apenas marcou uma das alternativas.
	2	Justifica que não há alternativas para responder a pergunta.
	1	Soma dos números do enunciado

Fonte: A autora.

Figura 15 - Uso do PFC por estudantes na resolução de problema de *produto cartesiano*.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ *C*

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ ~~e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$~~ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: *porque foram (3+1) salada (2+1) arroz (4+1) diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão $\rightarrow 3 \times 2 \times 4 \times 3$*

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

Sobre o uso do PFC na resolução dos problemas de *permutação* e *arranjo*, como indicado nas Figuras 16 e 17 respectivamente, os estudantes quase não usam o PFC em suas justificativas. Na maioria delas, usam explicações vagas para justificar a escolha das alternativas que consideram corretas. Pessoa (2009) já havia evidenciado o baixo uso do PFC em estratégias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio. Já nos problemas de *combinação*, nenhuma justificativa dada faz referência à aplicação do PFC para explicar a alternativa escolhida. Outro ponto a ser destacado, é que não há ocorrência do uso de fórmulas por parte dos estudantes e, geralmente, eles usam a mesma estratégia de resolução em todos os problemas resolvidos.

Figura 16 - Uso do PFC por aluno do Ensino Médio na resolução de um problema de *permutação*.

8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5×5 b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$ c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ *C*

d) $5 + 5$ e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: *multiplica-se as possibilidades diminuindo em a cada possibilidade*

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

Figura 17 - Uso do PFC por estudante do Ensino Médio na resolução de problema de *arranjo*.

3. Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os 4 primeiros lugares. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 7×4 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ c) $7 + 4$

~~d) $7 \times 6 \times 5 \times 4$~~ e) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: 840 possibilidades por isso $\rightarrow 7 \times 6 \times 5 \times 4$

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

A partir dos dados, acima analisados, vê-se que professores do Ensino Médio e estudantes, também do Ensino Médio, não usam a mesma estratégia para resolver problemas combinatórios. Com isso, há indicação de que os professores reconhecem e usam o PFC na resolução de problemas combinatórios, mas o mesmo não acontece com os estudantes, o que pode sugerir que os professores não usam o PFC como estratégia de ensino para os conceitos trabalhados na Combinatória.

Ao analisar se as etapas de escolha influenciam na escolha das estratégias usadas pelos professores para resolver as situações combinatórias proposta observa-se na Figura 18 as estratégias que um participante usa para resolver um problema de *produto cartesiano* com diferentes etapas de escolha.

Figura 18 - Estratégia usada por professor dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de problemas de *produto cartesiano* com 4 e 5 etapas de escolha.

TEMPO QUE LEVAMOS PARA RESOLVER

Para todos os problemas abaixo marque a alternativa que resolve corretamente a questão e justifique a sua escolha. Não é necessário realizar as operações.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ $\boxed{3} \boxed{2} \boxed{4} \boxed{3}$

b) $3 \times 2 \times 4$

c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

→ ☒ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: usando o princípio multiplicativo temos:

salada Arroz Carnes Feijão

$\boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{4} \times \boxed{3}$

2. Na Lanchonete "Que Delícia" José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

→ ☒ c) $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$

d) $4 + 3 + 5 + 2 + 3$

e) $4 \times 3 \times 5 \times 2$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Pelo princípio multiplicativo temos:

pão carne queijo molho Salada

$\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{2} \times \boxed{3}$

Fonte: Rocha (2013).

Observa-se que, de um modo geral, os participantes sempre usam a mesma estratégia para resolver problemas do mesmo tipo com diferentes etapas de escolha. Neste caso, o professor do Ensino Médio usa a mesma estratégia para resolver o problema de *produto cartesiano*, seja com quatro, seja com cinco etapas de escolha.

5.3 Estudo 2: Conhecimento de professores sobre o Princípio Fundamental da Contagem na resolução de situações combinatórias

No Estudo 2 objetivava-se examinar os conhecimentos mobilizados pelos professores, referentes ao Princípio Fundamental da Contagem; na resolução dos diferentes tipos de problemas (*produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*); na análise das resoluções de alunos de problemas combinatórios; nas escolhas curriculares quanto ao ensino e à avaliação; e no levantamento de estratégias para a superação de dificuldades diante de diferentes problemas combinatórios.

5.3.1 Caracterização dos participantes do estudo 2

Os professores de Matemática participantes deste estudo estavam atuando em turmas de Matemática do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental e/ou turmas de Matemática do Ensino Médio. No Quadro 13 são apresentadas as características dos participantes.

Quadro 13 - Perfil dos participantes do Estudo 2.

Professor	Titulação acadêmica	Experiência	Atuação	Rede de ensino
P1	Mestrado em Educação Matemática	16 anos	E.F./E.M.	Pública
P2	Mestrado Profissional (em andamento)	13 anos	E.M.	Privada
P3	Licenciatura em Matemática	07 anos	E.F./E.M.	Privada

As abreviações E.F. e E.M. correspondem, respectivamente, ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio.

Fonte: A autora.

Percebe-se, a partir das respostas ao questionário, que os professores P1 e P2 buscaram ampliar sua formação inicial dando continuidade aos estudos. Segundo Shulman (1987), a formação acadêmica com foco no conteúdo a ser ensinado é uma das fontes para a formação da base de conhecimentos que o professor precisa ter para o ensino, e esta continuidade torna-se uma extensão da formação inicial proporcionando ao professor um fortalecimento e ampliação de sua base de conhecimentos. Partindo desse princípio, os professores foram questionados se haviam visto conteúdos referentes à Combinatória durante a graduação e todos afirmam terem visto este conteúdo.

A partir dessa afirmação foi perguntado de que forma, o conteúdo visto durante sua formação acadêmica, contribui na preparação e desenvolvimento de suas aulas nos dias atuais.

P1_ Hum, da forma como foi ensinado [é?] na graduação? Sim, **pra formação do professor sim, mas [é] pra sala de aula** quando você pensa em *Análise Combinatória não dá pra [é] reproduzir o que você viu na graduação*, então você **tem que revisar esses conteúdo buscando uma compreensão [né?], do [...] e não a formalização de fórmulas [né?], de regras. Buscar a compreensão realmente de que o aluno compreenda, [né?], o raciocínio combinatório.**

P2_ Assim, sendo bem sincero, acho que **a grande ajuda foi os estudos posteriores individualmente** mesmo, entendeu? Lá na, eu tinha base do Ensino Médio e comecei a estudar por conta própria. **Do curso em si eu não vi muita contribuição** não, entendeu? Seria mais ou menos isso.

P3_ Foi bem superficial na verdade e na Universidade Federal você meio que o cara dá aula de uma coisa e você precisa andar pra tentar encontrar (...) mas ajuda, ajudou de alguma maneira.

Vê-se que a Combinatória não foi um conteúdo bem trabalhado durante a formação inicial destes professores e que pode, de alguma forma, dificulta o desenvolvimento deste conteúdo durante a preparação de aulas para turmas de Matemática da Educação Básica. Outra observação a ser feita é a de que estes professores, após uma formação inicial não muito proveitosa, no que diz respeito à Combinatória, precisam buscar uma formação continuada para que possam ensinar este conteúdo em sala de aula.

Nas próximas seções o objetivo agora será investigar o conhecimento destes professores sobre o uso do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)* como estratégia de resolução de problemas combinatórios trabalhados em turmas da Educação Básica.

5.3.2 Tipo de Conhecimento e o Princípio Fundamental da Contagem

A partir da categorização dos diferentes tipos de conhecimentos voltados ao conteúdo da Combinatória, com um olhar focado no *Princípio Fundamental da Contagem - PFC*, procurou-se identificar na fala dos professores na entrevista semiestruturada, quais conhecimentos podem se fazer presentes no momento em que o professor avalia situações de sala de aula e resoluções de situações combinatórias efetuadas por alunos da Educação Básica.

As análises foram efetuadas como o suporte do software de apoio à análise qualitativa, o web Qualitative Data analysis - webQDA²¹, desenvolvido por pesquisadores da Universidade de Aveiro, Portugal.

Para organização dos dados da entrevista, foi necessário dividir a fala dos professores em *unidades de registro*, que são frases ou orações possíveis de codificar de acordo com as

²¹ O software está disponível em uma versão online com uma licença gratuita de 30 dias, no endereço <https://www.webqda.com>.

Tabela 3 - Frequência dos tipos de conhecimentos mobilizados pelos professores no Estudo 2.

TIPO DE CONHECIMENTO	FREQUÊNCIA
Conhecimento Comum do PFC	57
Conhecimento Especializado do PFC	129
Conhecimento Horizontal do PFC	64
Conhecimento do PFC e Aluno	70
Conhecimento do PFC e Ensino	77
Conhecimento do PFC e Currículo	15

Fonte: A autora.

Muitas vezes, em uma mesma fala, o professor pode fornecer pistas de diferentes conhecimentos que ele mobiliza em determinadas situações. Esta fala, então, poderia ser classificada em dois, três ou mais tipos de conhecimentos, como observado na, Figura 20 na fala de P2 ao avaliar a resolução de um aluno em um problema do tipo *produto cartesiano*.

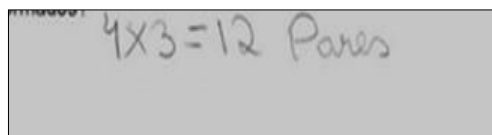
Figura 20 - Exemplo de problema de *produto cartesiano* na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.

Problema 01 - Produto Cartesiano

Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luiza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

$$PC = n \times p$$

Exemplo de fórmula matemática.



Exemplo de Estratégia usando o PFC.

Fonte Pessoa (2009).

Fonte: A autora.

P2_ E aqui, pelo que ele escreveu, **acredito que ele tenha utilizado e se apropriado mais do Princípio Fundamental** do que da fórmula propriamente dita, então ele **usou o Princípio Fundamental** corretamente.

Nesse excerto da fala de P2, pode-se inferir que o professor mobiliza *conhecimento especializado do PFC* quando trata explicitamente do PFC como uma estratégia que foi válida na resolução do problema apresentado; e o *conhecimento do PFC e aluno*, quando avalia qual a estratégia apropriada pelo aluno.

Além da elevada frequência de mobilização do *conhecimento especializado do PFC*, os professores também evidenciaram alta mobilização de *conhecimento comum do PFC*, *conhecimento horizontal do PFC*, *conhecimento do PFC e aluno* e *conhecimento do PFC e ensino*. A pouca frequência do *conhecimento do PFC e currículo* pode ser justificada pelo próprio roteiro da entrevista, pois questões voltadas para o currículo foram poucas.

Nas próximas seções são realizadas análises isoladas de cada um destes conhecimentos presentes na fala dos professores entrevistados. As análises isoladas são para efeito de discussão de cada tipo específico de conhecimento, mas ressalta-se, mais uma vez, que numa mesma fala diferentes tipos de conhecimento se fazem evidenciar.

5.3.2.1 Conhecimento Comum do PFC

O *conhecimento comum do PFC* aparece quando os professores expressam elementos comuns aos problemas estudados na Análise Combinatória. Na Figura 21, em um exemplo de problema envolvendo uma situação de *produto cartesiano*, os entrevistados foram solicitados a identificarem o tipo de problema envolvido e os Professores P1 e P2 mencionaram o uso do PFC, também conhecido como *princípio multiplicativo*.

Figura 21 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de *produto cartesiano*, analisado pelos professores do Estudo 2.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: porque ela tem ao total 12 tipos de refeições
variadas e a letra que soma o total 12 número
de refeições

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

P1_ É um problema que envolve [é] possibilidades [né?], pra resolver com princípio multiplicativo.

P2_ É um problema de contagem [né isso?], que você pode utilizar o princípio multiplicativo para contar e fazer árvore também das possibilidades.

Os professores falam do problema com aspectos gerais de problemas combinatórios quando P1 diz que "envolve possibilidades" e P2 quando diz que "é um problema de contagem". Aqui eles não fazem menção às especificidades da situação, pois trata-se de um conhecimento que não implica, necessariamente, no conhecimento do que diferencia as situações entre si. Há também indícios do *conhecimento especializado do PFC* quando os professores reconhecem que o PFC é um possível caminho de resolução da situação apresentada.

O *conhecimento comum do PFC* também aparece quando os professores reconhecem a aplicação incorreta do mesmo em situações combinatórias. Na Figura 22 os Professores P2 e P3 evidenciam *conhecimento comum do PFC*, ao apontarem a resposta errada e como deveria ser a aplicação correta do PFC.

Figura 22 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de *combinação*, analisado pelos professores do Estudo 2.

5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8×4 c) $8 + 4$

d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ e) $8 \times 7 \times 6 \times 5$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Por que - A equipe do Brasil formaram
cada grupo diferentes na Olimpíadas.

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

P3_ Ele erra, ele sabe o conceito, mas ele tá preso ao conceito do princípio Fundamental da Contagem, então ele erra.

P2_ E aí no caso, a "letra a" a resposta correta, porque ele não desconsiderou a ordem, ele até (...) **pela resposta dele**, ele entendeu que deveria escolher o 1º, depois o 2º, depois o 3º. Só que ao fazer isso, escolha o 1º ele tá definindo quem é o 1º aluno, mas isso não condiz com o que tá sendo proposto aqui.

Uma observação feita nesta discussão é a mobilização de mais de um tipo de conhecimento, além do *conhecimento comum do PFC*. Percebe-se, nas falas acima, que é possível identificar indícios de *conhecimento do PFC e aluno* quando P2 se refere à dificuldade do aluno em resolver o problema, por não considerar a ordem dos elementos na questão. Ressalta-se que P3 também indica *conhecimento do PFC e aluno*, ao afirmar que o aluno erra e *conhecimento especializado do PFC* ao apontar que, na sua opinião, o aluno "está

preso” ao PFC, sendo no caso de uma *combinação* uma estratégia que não se resolve por uma aplicação simples do PFC.

5.3.2.2 Conhecimento Especializado do PFC

Este tipo de conhecimento é o que apareceu com maior frequência após a codificação das entrevistas feitas, ver Tabela 3. Foram codificadas unidades referentes à aplicação do *conhecimento especializado do PFC* nos diferentes tipos de problemas, como expressado pelos professores P2 e P3 ao se referirem a todos os problemas, ou com foco apenas em um tipo, no caso o *produto cartesiano*.

P2_ *Você usa o princípio multiplicativo em todos, na questão de você separar em etapas você vai fazer uma escolha, então divide as etapas, o que vai ser cumprido primeiramente.*

P3_ *Aqui é uma contagem do Princípio Fundamental [né?], essa é a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem, são tantos tipos de cada coisa e ai fica simples assim.*

Reconhecer os diferentes tipos de problemas e seus invariantes (relações e propriedades) e apontar o PFC como solução comum destes problemas é uma forma de expressar o conhecimento especializado do conteúdo. No caso, para a aplicação do PFC em diferentes problemas combinatórios, saber diferenciar os problemas e conhecer seus invariantes é importante para saber como esta estratégia se aplicará às variadas situações.

P1_ *Então, assim: arranjo, permutação, caso particular de arranjo, então o que têm de comum é o raciocínio combinatório.*

P2_ *E a diferença maior, no caso o Problema 4 [problema de combinação] você teria que diferenciar a ordem, então teria que pontuar que a ordem, aqui nesse caso, não importa. Então você teria que pontuar como se desconsidera esta ordem, seria a diferença.*

P1 identifica quais problemas estão sendo apresentados e aponta semelhanças entre os problemas de *arranjo* e *permutação*. No caso de P2, ele se refere ao problema de *combinação*, como sendo um problema no qual a ordem "não importa", não irá gerar novas possibilidades, apontando assim, os invariantes presentes neste problema e a diferença para outros tipos de situações combinatórias.

A importância dessa identificação e diferenciação dos problemas combinatórios para a aplicação do PFC está em como esta estratégia irá se expressar em cada problema. Por exemplo, no problema de *permutação* usam-se todos os elementos de um conjunto; e em um problema de *combinação* a ordem em que os elementos aparecem, não gera novas

possibilidades e, assim, será necessário o uso do PFC duas vezes para se chegar na resposta correta.

P1_ *Sim. É bem direta porque como são cinco fotos [né?], **então o $n!$ de 5 é coincidente**, quer dizer, coincidentemente não, é o mesmo resultado, então o $n!$ e esse produto até chegar em 1 é a mesma coisa.*

P2_ *Como você já mostrou que se vai utilizar o princípio fundamental naquela sequencia, **a ordem vai ser considerada**, então você teria como arrumar maneira de mostrar que daria pra dividir por este fatorial e tirar a ordem no caso.*

O Professor P1 evidencia em sua fala o conhecimento especializado de como o PFC se relaciona com o procedimento formal, no caso o fatorial presente na solução de *permutações*. O Professor P2 fala na aplicação dupla do PFC, já que em *combinações* é preciso efetuar a divisão pelo número de elementos permutados entre si, considerando que a ordem deve ser desconsiderada (“tirar a ordem”) nesse tipo de situação.

Nesses casos, mais uma vez observa-se a presença de outras naturezas de conhecimentos, tais como o *conhecimento do conteúdo e aluno* e *conhecimento do conteúdo e ensino*, de modo particular quando o professor P2 fala em “arrumar maneira de mostrar”, ou seja, a organização de modo a trabalhar o PFC junto aos alunos.

5.3.2.3 Conhecimento Horizontal do PFC

O ensino da Combinatória é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) desde os anos iniciais. Outros documentos oficiais como os PCN para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) e os Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013), orientam para um ensino gradativo para que o aluno perceba o *princípio fundamental da contagem* – PFC – implícito nas questões e que a partir dele seja desenvolvido o raciocínio combinatório dos alunos, de modo que o ensino de Combinatória não fique preso, apenas, no uso de fórmulas. Autores como Borba (2010), orientam, ainda, um ensino em que sejam aproveitadas as estratégias usadas pelos alunos e dessa forma se construa, gradualmente, procedimentos mais formais para o ensino da Combinatória.

É essa conscientização, por parte do professor, de um ensino gradual que se investiga o *conhecimento horizontal do PFC* presente na prática do professor em sala de aula. Além do reconhecimento de uma gradação entre conteúdos matemáticos, o professor pode

compreender a necessidade de um aprofundamento gradual no ensino do PFC, ou seja, um conhecimento horizontal do princípio multiplicativo, especificamente no estudo do PFC para o ensino da Combinatória, no qual se investiga como, a partir dele, o professor pode chegar a procedimentos mais formais deste conteúdo.

Um dos pontos observados, durante a entrevista, era se o professor aponta a importância de se trabalhar estes conteúdos desde os anos iniciais, como se pode observar nos excertos abaixo.

P1_ *Você consegue resolver desde as séries iniciais, Fundamental I, Fundamental II e Ensino Médio.*

P3_ *Então, talvez pra 5ª série, pra talvez uma 7ª, talvez uma 8ª série, eu acho que ele consiga ter a maturidade para discernir a ordem (...).*

Os professores divergem sobre desde quando estes tipos de problemas podem ser trabalhados. Enquanto P1, afirma que todos os problemas podem ser trabalhados desde as séries iniciais, P3 diz talvez a partir de uma 5ª série, atual 6º ano, é que o aluno possa ter maturidade para entender quando a ordem de um elemento é, ou não, importante de ser considerada para a resolução de uma situação combinatória. Quanto à afirmação de P3, Pessoa e Borba (2009b) afirmam, a partir de resultados empíricos, que alunos desde as séries iniciais, já mostram compreensão sobre problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

De uma forma ou outra, os professores evidenciaram conhecimento de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório se inicia bem antes do ensino formal da Análise Combinatória, em geral, no 2º ano do Ensino Médio. Essa visão “do horizonte” possibilita que no ensino formal da Combinatória se aproveite experiências anteriores dos alunos com situações combinatórias.

O professor P2 mostra porque é importante trabalhar com o PFC desde os anos iniciais. Ele comenta que se fosse trabalhado antes (do Ensino Médio), o aluno teria melhor compreensão das situações e não se utilizaria de “modelos prontos” – os quais nem sempre garantem que o estudante compreenda os procedimentos, como as fórmulas.

P2_ *E aqui [resolução do aluno usando o PFC] como eu digo, é um nível mais elaborado que, se talvez fosse inserido antes [né?], e ele não utilizasse de fórmula, de modelos prontos, ele faria desse jeito [resolução do aluno usando o PFC].*

Sobre a relação entre o PFC e procedimentos formais da Combinatória, os professores entrevistados, apesar de indicar existir uma relação entre o PFC, usado pelos alunos na

resolução de situações combinatórias, e as fórmulas matemáticas, não explicam como se dá essa relação e nem como partir dessa estratégia para procedimentos mais formais usados na resolução dos diferentes tipos de problemas estudados no campo da Análise Combinatória.

Embora os professores evidenciem conhecimento de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório se inicia bem antes do Ensino Médio, não há indicação clara de que reconheçam que o PFC é fonte para a construção das fórmulas. Não basta, então, que se inicie o estudo da Combinatória antes, mas que se tenha também em mente como procedimentos intuitivos podem ser estruturados e sistematizados até chegar-se às fórmulas que são procedimentos também úteis em algumas situações combinatórias.

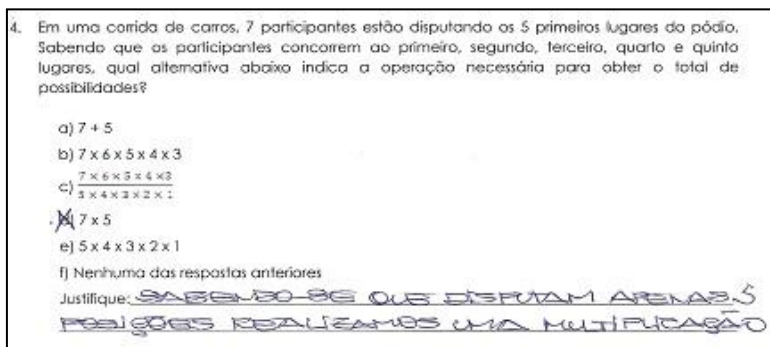
5.3.2.4 Conhecimento do PFC e Aluno

Este tipo de conhecimento implica entendimento de dificuldades que os alunos podem ter no desenvolvimento do seu raciocínio combinatório, em particular, na compreensão do PFC como estratégia de resolução de problemas de Combinatória. Por um lado envolve o conhecimento de erros usualmente cometidos pelos alunos e, por outro lado, envolve a antecipação de como os alunos podem ser incentivados a utilizarem o PFC para a superação de dificuldades e/ou eliminação de erros.

Procura-se identificar como o professor mostra familiaridade com erros comuns cometidos por seus alunos ao resolverem problemas envolvendo situações combinatórias, em particular utilizando o PFC. Os professores reconhecem claramente as dificuldades que os alunos têm em entender como o PFC se aplica a *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*? As multiplicações presentes no PFC são corretamente selecionadas pelos alunos?

A partir do exemplo exposto na Figura 23 analisaram-se conhecimentos dos professores referentes aos erros e dificuldades dos alunos ao usarem o PFC.

Figura 23 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de *arranjo*, analisado pelos professores do Estudo 2.



Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013).

P1_ A mesma coisa, *ele pegou e multiplicou os números que apareceram no problema, mas ele não levou em consideração, é a ordem* [né?]. Porque são cinco posições [né?] e quais são essas possibilidades [né?] de, é de organizar os cinco primeiros lugares.

P2_ Eles trazem muito isso... *A dificuldade, acho que eles pegam os números e multiplicam. Tem 7 participantes, 5 lugares, então ele faz 7×5 .*

P3_ Ele talvez tenha até ouvido falar no conceito, mas o conceito é multiplicar. *Ele pega os números que aparecem e multiplica 7×5 . Talvez ele tenha visto [né?] ou ouvido. Alguém deve ter dito: "ó, multiplica aí que vai dar certo".*

Os três professores perceberam que, possivelmente, o erro mais frequente dos alunos ao usarem o PFC seja o de identificar qual a multiplicação correta a ser considerada. Os professores apontam que há um reconhecimento por parte dos alunos de que se trata de uma situação multiplicativa, mas quais números devem ser multiplicados nem sempre fica claro para os alunos. No exemplo apresentado, os alunos multiplicam 7 por 5, os números explicitados no enunciado, não entendem que se trata da escolha de 5 lugares (5 etapas de escolha), havendo 7 possibilidades para o primeiro lugar, 6 possibilidades para o segundo lugar (uma vez que um dos participantes já ficou no 1º lugar), 5 possibilidades de escolha para o terceiro lugar, 4 para o quarto lugar e, finalmente, 3 possibilidades para o quinto lugar – sendo a multiplicação correta: $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$.

Sobre como auxiliar seus alunos a superarem dificuldades, os professores apresentam algumas alternativas.

P2_ *É ao pé da letra, se você entende que pra atingir um objetivo, pra formar um grupo, quando você divide em etapas, você pode pegar quantas opções tem em cada etapa e multiplicar, se ele entende bem isso, acho que já seria o suficiente.*

P3_ *Você diminui a quantidade de informação e apresenta a ele o mesmo conceito. Ai parece que, aparece uma luz assim, no fim do túnel.*

Entende-se, aqui, que os professores apresentam essa preocupação em apresentar o conteúdo a ser trabalhado de forma gradual. O Professor P2 destaca a necessidade de entender que há etapas de escolha a serem efetuadas e que se perceba quantas são as opções em cada etapa. Já o Professor P3 parece sugerir diminuir o número de etapas de escolha para que os alunos entendam o *princípio multiplicativo*, pois serão menos informações a serem inicialmente tratadas.

Além de técnicas para o ensino da Combinatória, que demonstram *conhecimento do PFC e ensino*, este é, também, a manifestação de um *conhecimento horizontal do PFC*, pois evidencia visão de como se pode abordar inicialmente situações combinatórias de modo mais simples até chegar a situações mais complexas. Esses conhecimentos evidenciados pelos professores estão de acordo com os PCN (BRASIL, 1998) que orientam o ensino de forma que o aluno perceba o *princípio fundamental da contagem* implícito na situação apresentada.

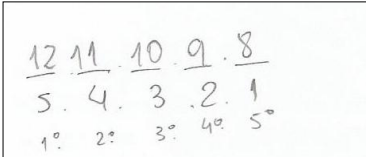
Outra situação analisada nesta seção, ver Figura 24, é o conhecimento que o professor tem sobre seu aluno e a previsão das facilidades e/ou dificuldades que este aluno pode ter na aprendizagem da Combinatória.

Figura 24 - Exemplo de problema de *combinação* na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.

Na seleção brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Exemplo de fórmula matemática.



Exemplo de Estratégia usando o PFC.

Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013).

Fonte: A autora.

P1_ Agora eu acredito que essa quarta questão não, na quarta questão é o princípio multiplicativo, mas **parece que ele tá utilizando uma fórmula aqui**. Não é só a ideia de multiplicar, tem(...).

P2_ E nesse problema 4 que é um pouquinho mais diferenciado pelo fato de desconsiderar a ordem, **também desconsiderou utilizando o Princípio Fundamental**.

P3_ Deve ter, tá abreviado. Me parece que tá abreviado, ele usou o numerador que é o 12! cortou com 7 que é a subtração de 12 com 5 e botou o p! que é 5. **Acredito que tenha usado, só não tá iniciado. É como se ele já soubesse o esquema e já tivesse feito as simplificações.** Porque seria 7! em cima, 7! embaixo ele cortou. Sim, acho que ele usou a fórmula.

Nem todos os professores conseguem claramente associar o PFC às fórmulas. O Professor P1 não fica certo se o aluno está, ou não, usando a fórmula e o Professor P3 acredita que o aluno antecipou simplificações da fórmula, o que pode não ter sido o procedimento do aluno, mas, sim, uma utilização dupla do PFC.

5.3.2.5 Conhecimento do PFC e Ensino

No que se refere ao uso de métodos e técnicas de ensino para a Combinatória, sobretudo no que diz respeito ao uso do PFC para resolução deste tipo de problema, foi possível identificar propostas que os professores têm e como eles mobilizam o *conhecimento do PFC e ensino*.

Os professores quando se expressaram sobre procedimentos que pudessem esclarecer dúvidas dos alunos na resolução de situações combinatórias, trazem afirmações como as observadas na discussão da resolução de um problema de *produto cartesiano* feita por um aluno, Figura 25, que evidenciam seus conhecimentos referentes ao ensino.

Figura 25 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de *produto cartesiano*, analisado pelos professores do Estudo 2.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: porque ela tem ao total 12 tipos de refeições variadas e a alternativa que soma o total 12 número de refeições

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

P1_ Mas é, seria também, usar uma árvore de possibilidades, depois ele perceber o princípio multiplicativo. Agora ficaria bem cheia de ramos.

P2_ É um problema de contagem (né) isso, que você pode utilizar o princípio multiplicativo para contar e fazer árvore também das possibilidades.

Os professores indicam que no ensino da Combinatória um possível caminho seria o uso de árvores de possibilidades para, a partir desta representação, chegar-se ao *princípio multiplicativo*. Embora seja um bom caminho sugerido, não fica evidente como os professores fariam essa transição de uma forma de representação (árvore de possibilidades) para outra (uso do PFC).

Após citar quais outras estratégias podem ser usadas na resolução de problemas combinatórios, os professores apresentaram de que forma eles podem auxiliar e esclarecer para seus alunos, com dificuldade, como superar obstáculos, como se pode observar na discussão a seguir entre o entrevistador (E) e os professores.

E_ *Como você auxiliaria o aluno a compreender este problema?*

P1_ *Primeiro perguntaria quais são estas possibilidades pra depois ver qual o total, aí dava pra ele visualizar que é um produto de multiplicações.*

P1_ *A questão seria trabalhar com quadros de (...) casas de possibilidades. Porque daria pra ele ver/identificar realmente (...) é porque todas elas, pelo menos as três, resolve com o princípio multiplicativo, mas aí teria que (...) a árvore de possibilidades ia chegar o momento que dificultaria a 4ª questão ficaria muito extensa, mas aí com o quadro de posição ele compreenderia.*

P2_ *Eu sempre tento fazer, também com poucos, poucos resultados e que ele faça uma comparação entre a leitura direta, a contagem direta, e a contagem indireta. Então, pra ele entender cada passo do que ele tá fazendo.*

P3_ *Às vezes você (...) pega os números que são grandes, que na cabeça deles talvez seja muito longe a relação de você diminuir aquela quantidade. Parece que o entendimento dele ficaria mais claro.*

Para a superação de dificuldades, os professores sugerem diminuir quantidades e organizar os dados, de forma a se entender quais multiplicações estão envolvidas. Os professores ressaltam ainda como os diferentes problemas podem se beneficiar de representações simbólicas específicas. No caso, por exemplo, de um problema com muitas possibilidades, sugere-se que a árvore de possibilidades não seja uma boa alternativa de representação.

5.3.2.6 Conhecimento do PFC e Currículo

As questões voltadas para o conhecimento do *currículo* e como o PFC é tratado em documentos oficiais e livros didáticos não foram tão enfatizadas na elaboração da entrevista, porém, a forma como a mesma foi construída objetivava verificar como o professor apontaria questões do currículo ao longo da entrevista em conjunto com o *conhecimento horizontal do PFC*, do *conhecimento do PFC e alunos* e do *conhecimento do PFC e ensino*.

Sobre o conhecimento explícito de orientações oficiais, os *currículos prescritos*, na terminologia de Sacristán (2000), como os PCN, por exemplo, não há referências espontâneas por parte dos entrevistados, apenas quando o pesquisador indicava do que se tratava, como pode-se observar no excerto a seguir.

E_ *Em qual bloco de conteúdos estes problemas estão inseridos? Naqueles blocos de conteúdos dos PCN, tu encaixaria em qual?*

P1_ *Acho que PCN tem tratamento da informação, [né?] e (...) e eles englobam Análise Combinatória dentro de Tecnologia da Informação.*

P2_ *Ah! nos blocos! Números e operações.*

P3_ *Eu, usando o PCN não saberia classificar eles por que eu não recordo a lista deles, eu não teria isso na mente.*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN são um referencial para a Educação Básica do Brasil, embora este documento não determine um currículo prescrito, suas orientações são muitas vezes consideradas como uma indicação de como deve ser o ensino. Segundo os PCN (BRASIL, 1997), eles têm como função, orientar e garantir que haja coerência dos investimentos no sistema educacional brasileiro, socializando, assim, discussões, pesquisas e recomendações que visam proporcionar uma maior participação dos professores, principalmente daqueles com menor contato com a produção pedagógica produzida por Instituições de Ensino Superior.

Nas falas dos professores não há claro indício do conhecimento do currículo prescrito nos PCN, pois os professores não tinham certeza de qual bloco de conteúdos contém a discussão sobre o PFC. Um dos professores indicou o eixo Tratamento da Informação, outro o eixo Números e Operações e o terceiro professor não soube indicar.

O professor P1, por exemplo, na maioria das vezes em que citou expressões que remetessem ao *conhecimento do PFC e currículo*, tratou de questões referentes à classificação dos problemas combinatórios ao bloco de conteúdos, que é uma classificação dada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e livros didáticos.

P1_ *Acho que PCN tem tratamento da informação, [né?] e (...) e eles englobam Análise Combinatória dentro de Tecnologia da Informação. Eu não concordo muito com essa, essa, (...) acho que são é (...) são blocos distintos. Não sei por qual razão eles colocam Tecnologia da Informação, probabilidade, Análise Combinatória, Probabilidade. Acho que são, é, são blocos de conteúdos distintos na minha opinião.*

Esta fala de P1 sintetiza bem o seu posicionamento em todas as vezes que foi confrontado a expressar conhecimentos sobre os PCN, que além de orientar professores, os aproxima de pesquisas em sua área de atuação, produzidas por Instituições de Ensino Superior.

Mesmo sem tratar questões curriculares específicas, ao longo da entrevista, os professores forneceram pistas de que conhecem, mesmo sem citar fontes, a respeito de

questões curriculares presentes nos livros didáticos, ou seja, *currículos apresentados*, na terminologia utilizada por Sacristán (2000).

E_ Então todas, a partir do 6º ano, você acha que dá pra trabalhar?

P2_ *Acredito que sim. Já, inclusive alguns livros didáticos, por que eu não tô muito mais no Fundamental, já me perdi um pouquinho. Mas assim, acredito que alguns livros didáticos já trazem o Princípio Fundamental e que esses problemas podem ser inseridos, sim, depende muito da realidade do colégio.*

P3_ *Alguns livros já trazem o Princípio, às vezes na 6ª. Alguns livros tão trazendo isso, mas traz isso, às vezes na parte de Estatística, às vezes eles trazem uma coisa ligado a isso, mas nem todo mundo aborda isso no Fundamental.*

Outras questões abordadas foram em relação ao início do ensino da Combinatória.

P1_ *É um problema que dá pra trabalhar também no Fundamental, não somente no Ensino Médio. No Fundamental dá também.*

P2_ *Não sei, uma sexta série, acho que eles já teriam essa noção por que eles já têm a habilidade aritmética [né].*

P3_ *Eu evitaria, eu acho que não, ele pode sair do Fundamental sem essa habilidade, que não compromete, não se for bem visto no Ensino Médio. Não compromete não. Agora se for o caso mais brando poderia aplicar com eles sem nenhum problema.*

Os professores têm opiniões convergentes, mas ao mesmo tempo divergentes quanto ao início da introdução de problemas combinatórios em turmas da Educação Básica. Ao mesmo tempo em que concordam que o ensino pode se dar a partir dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ano), P3 vem afirmar que os problemas envolvendo o conceito de *combinação* podem ser vistos apenas no Ensino Médio.

Os professores precisam conhecer melhor o que dizem as propostas curriculares sobre o período adequado para iniciar, aprofundar e consolidar os conteúdos de Combinatória. Assim, a partir de um melhor conhecimento dos currículos *prescrito* (em documentos oficiais) e *apresentado* (em livros didáticos), os professores planejarão melhor os currículos *moldados* e *efetivados em ação* na sala de aula. O currículo *avaliado* poderá, assim, indicar que o currículo *realizado* indicou apropriação do uso do PFC pelos alunos nas diversas situações combinatórias.

5.3.3 Tipos de conhecimentos docentes mobilizados por cada professor

Na Tabela 4 apresenta-se a frequência de cada tipo de conhecimento que foi mobilizado pelos participantes durante a entrevista. Estes dados, somados entre si, totalizam a frequência de cada tipo de conhecimento codificado.

Esta tabela é um detalhamento da Tabela 3, anteriormente apresentada, com o objetivo de reforçar quais tipos de conhecimentos os professores mobilizaram sobre o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC).

Tabela 4 - Frequência do tipo de conhecimento por participante.

TIPO DE CONHECIMENTO	P1	P2	P3	TOTAL
Conhecimento Comum do PFC	16	19	22	57
Conhecimento Especializado do PFC	36	46	47	129
Conhecimento Horizontal do PFC	18	23	23	64
Conhecimento do PFC e Aluno	17	24	29	70
Conhecimento do PFC e Ensino	15	34	28	77
Conhecimento do PFC e Currículo	07	04	04	15

Fonte: A autora.

O *conhecimento especializado do PFC* foi o tipo de conhecimento que foi observado com maior frequência nas entrevistas. Dessa forma, os participantes evidenciaram conhecimentos específicos da Combinatória ligados ao ensino deste tema e, em especial, quanto ao uso do PFC como uma estratégia para a resolução destes problemas.

Com frequências semelhantes foram observados o *conhecimento horizontal do PFC*, o *conhecimento do PFC e aluno* e o *conhecimento do PFC e ensino*. Verificou-se que os professores detêm conhecimentos sobre como alunos podem iniciar o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios bem antes do Ensino Médio. Entretanto, os professores não evidenciaram clareza de como ensinar aos alunos procedimentos mais formais (fórmulas da Análise Combinatória) a partir de outras estratégias de resolução (tais como árvores de possibilidades e o uso do PFC).

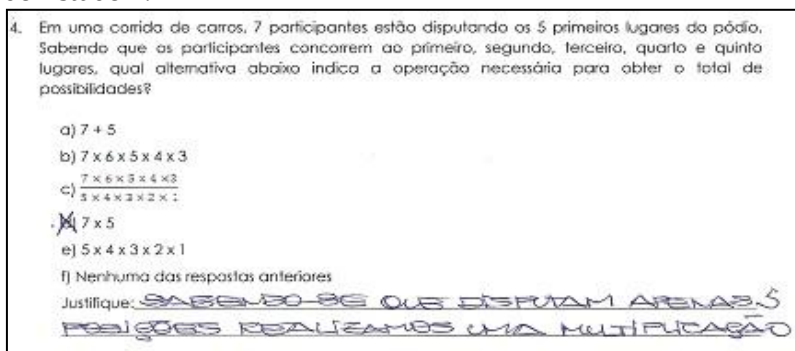
O *conhecimento comum do PFC* foi observado com menor frequência, pois não era objetivo específico a verificação deste tipo de conhecimento no Estudo 2, mas, indiretamente observou-se o quanto os professores dominavam o uso dos PFC na resolução de diferentes situações combinatórias. Os resultados do Estudo 1 já haviam evidenciado o quanto professores de diferentes níveis compreendem como aplicar o PFC a *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*.

De todos os conhecimentos, o menos mencionado pelos professores foi o *conhecimento do PFC e currículo*, claramente explicitado apenas 15 vezes. Como mencionado anteriormente, os questionamentos da entrevista não eram direcionados explicitamente ao currículo, mas havia a possibilidade de que a temática surgisse na discussão de outras questões, tais como relacionadas ao ensino e ao aluno.

Nessa seção discutiremos articulações de diferentes tipos de conhecimentos de cada um dos professores entrevistados.

No que se refere ao *conhecimento comum, horizontal, aluno, e ensino do PFC*, percebe-se uma proximidade de frequência, ver, quando P1 mobiliza estes conhecimentos durante a entrevista. Sendo assim, em uma mesma fala de P1 podem aparecer dois ou mais tipos de conhecimento, como se pode observar na discussão da Figura 26.

Figura 26 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de *arranjo*, analisado pelos professores do Estudo 2.



Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013).

E_E ele pode ser trabalhado a partir de que ano?

P1_ É um problema que dá pra trabalhar também no Fundamental, não somente no Ensino Médio. No Fundamental dá também.

P1_ Eu diria que a fórmula de arranjos pra ser apresentada pro aluno ela é demasiadamente complexa [né?]. Utilizando o princípio multiplicativo [né?], ele entendendo que aqui é, no caso a ordem importa aqui. Ele teria que entender isso. Bem mais simples resolver utilizando o princípio multiplicativo, ao invés de apresentar a fórmula.

No diálogo entre entrevistador (E) e o professor (P1) é possível ver essa articulação entre diferentes conhecimentos. Assim, P1 mobiliza *conhecimento horizontal do PFC* quando reconhece que problemas, como o de *arranjo*, podem ser trabalhados em turmas do Ensino Fundamental e não apenas no Ensino Médio. Há também mobilização do *conhecimento do PFC e aluno*, pois P1 indica o uso o *princípio multiplicativo* como sendo uma estratégia que facilitará ao aluno resolver estes problemas, ao mesmo tempo apresenta indícios de

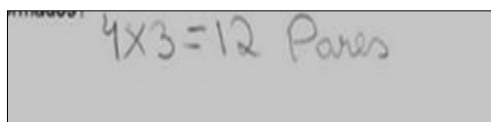
conhecimento do PFC e ensino quando avalia a vantagem de usar o *princípio multiplicativo* na resolução deste problema.

Figura 27 - Exemplo de problema de *produto cartesiano* na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.

Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luiza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

$$PC = n \times p$$

Exemplo de fórmula matemática.



Exemplo de Estratégia usando o PFC.
Fonte Pessoa (2009).

Fonte: A autora.

E_ *Esse é um problema, essa a fórmula matemática e essa aqui é a resolução de um aluno. Tu vê alguma relação entre a solução matemática e a resolução do aluno?*

P1_ *Sim.*

E_ *Qual seria essa relação?*

P1_ *Cada fator tá indicando, é, você tem três meninos e quatro meninas. Então o produto 4x3 está correta, a mesma coisa a fórmula e a solução.*

Nesse tipo de discussão, P1 mobiliza dois tipos de conhecimentos, o *conhecimento comum do PFC* quando consegue explicar de um modo geral o que se pede no problema; há, também, a presença do *conhecimento horizontal do PFC*, quando P1 diz existir relação direta entre a fórmula apresentada e a representação dada pelo aluno, mesmo não explicitando como se dá essa relação.

O *conhecimento especializado do PFC* está presente nas discussões feitas a partir dos problemas apresentados, anteriormente, nas Figuras 26 e 27, pois nelas o professor traz discussões referentes ao que é trabalhado exclusivamente em sala de aula no ensino da Combinatória.

Quando questionado sobre o uso do PFC como estratégia válida para resolver todos os problemas combinatórios, P1 argumenta que não e explica o porquê como observado no excerto abaixo.

P1_ Não, dá pra usar em todos, agora existe casos particulares de permutações circulares, arranjos, quer dizer, mas no Ensino Médio a gente acaba um ou outro problema que é trabalhado dessa forma (...).

Defende-se, assim como Pessoa (2009) e Borba e Braz (2012), que o PFC além de base para os problemas de Combinatória, também é uma estratégia válida para qualquer um dos tipos de problema trabalhados neste conteúdo, seja ele simples ou condicional.

O *conhecimento especializado do conteúdo* também é explorado por P1, na discussão anterior, quando ele traz em sua fala termos que são usados apenas para o ensino da Combinatória. Para qualquer outra situação, que não o ensino, o uso de alguns termos, como permutação circular²², não fazem sentido.

O Professor P2 traz em sua fala, durante a entrevista, discussões mais frequentes sobre o *conhecimento especializado do PFC* e do *conhecimento do PFC e ensino*, ver Tabela 4. Mas há uma articulação destes dois tipos de conhecimentos com os demais investigados neste estudo. As questões de *ensino*, por exemplo, abordadas por P2, mostravam como esclarecer uma situação problema para seus alunos, avaliando vantagens do uso do PFC, ou mesmo utilizando-se de técnicas para explicar como ele entende e ensina determinados tipos de problemas.

Em uma discussão sobre a relação entre a fórmula Matemática usada na resolução de problemas de combinação e o uso do PFC como estratégia para resolução deste tipo de problema, ver Figura 28, P2 discursa sobre o uso desta estratégia por alunos.

Figura 28 - Exemplo de problema de *combinação* na qual são apresentados duas estratégias de resolução, a fórmula matemática e o PFC, analisado pelos professores no Estudo 2.

Na seleção brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo de fórmula matemática.

Exemplo de Estratégia usando o PFC.
Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013).

Fonte: A autora.

²² "Chama-se permutação circular de n elementos, de um ou mais conjuntos, qualquer disposição desses elementos em torno de uma ordem circular".

P2_ Mas de início pra ele entender combinatória, acredito que ele deveria fazer isso, porque a fórmula se torna natural.

Ao avaliar as vantagens do uso do PFC, por parte do aluno, na resolução de um problema de *combinação*, além do *conhecimento do PFC e ensino*, evidencia-se o *conhecimento do PFC e aluno*, prevendo facilidades quanto ao uso do PFC e *conhecimento especializado do PFC*, que aparece de forma implícita quando P2 faz referência ao uso do PFC. O *conhecimento horizontal do PFC* evidencia-se, também, nessa relação entre PFC e fórmula, quando P2 diz que, a partir de um, o outro se torna natural.

Ainda sobre a discussão do problema de *combinação*, Figura 28, O Professor P2 continua a apresentar indícios de outros conhecimentos envolvidos nessa discussão.

P2_ E aqui [resolução do aluno] como eu digo, é um nível mais elaborado que, se talvez fosse inserido antes [né?], e ele não utilizasse de fórmula, de modelos prontos, ele faria desse jeito [resolução do aluno].

Na discussão P2 mobiliza *conhecimento comum do PFC* ao demonstrar saber aplicar o PFC em situações combinatórias variadas, como a apresentada na Figura 28. Há *conhecimento horizontal do PFC*, também nesta discussão, pois P2 indica a inserção desta estratégia antes do aluno utilizar fórmulas para resolução de situações combinatórias. O *conhecimento do PFC e aluno* e o *conhecimento do PFC e ensino* aparecem quando o professor prevê aos alunos facilidade ao resolver problemas combinatórios a partir desta estratégia, reconhecendo assim, o PFC para o ensino da Combinatória.

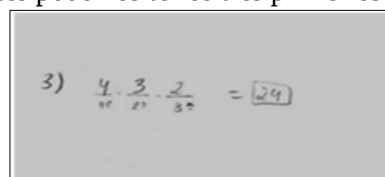
Muitas questões referentes ao ensino estão relacionadas também com o *conhecimento especializado do PFC*. O Professor P2 mobiliza estes conhecimentos para esclarecer situações de ensino, como a apresentada na discussão entre a relação da fórmula de *arranjo* e o PFC, estratégia usada por um aluno ao resolver este problema, como se pode observar na Figura 29.

Figura 29 - Exemplo de um problema de arranjo mostrando a relação entre a fórmula e o PFC.

As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo de fórmula matemática.



Exemplo de Estratégia usando o PFC.
Fonte Pessoa (2009).

Fonte: A autora.

P2_ Eu sempre gosto de falar que o princípio fundamental e arranjo é praticamente a mesma coisa quando você divide em etapas ali já tá subentendido que tá classificando uma ordem, escolha o 1º, escolha o 2º, escolha o 3º.

P2_ Na realidade, *na minha prática*, eu justamente **utilizo muito pouco a fórmula**. Eu penso na ideia, por exemplo, quando eu quero fazer um arranjo de 4, 3 a 3, eu já penso com ele que isso é equivalente a você escolher 3 pessoas [né] e você tem 4 opções na 1ª, 3 na 2ª, então nem coloco essa fórmula do fatorial de início. **Depois eu apresento**, mas eu faço mais $A_{4,3}$, então pego o fatorial do 4, desenvolve 3, que tem 3 espacinhos, então é dessa maneira que normalmente eu apresento.

Esse tipo de discussão além de apresentar questões referentes ao ensino da Combinatória, na qual P2 demonstra o uso de técnicas para resolução do problema, ele, ainda demonstra ter um *conhecimento especializado do PFC* quando reorganiza as informações contidas no problema esclarecendo, assim, ao aluno como desenvolver o raciocínio para resolução do problema em questão articulando, também, *conhecimento do PFC e aluno*.

Assim como evidenciado nas falas dos Professores P1 e P2, o Professor P3 também evidencia articulação de diferentes tipos de conhecimentos.

P3 mobiliza *conhecimento comum do PFC e conhecimento do PFC e ensino* para tentar explicar como as estratégias usadas para o ensino da Combinatória. Como se observa na discussão da situação apresentada na Figura 30.

Figura 30 - Exemplo de um problema de *permutação* mostrando a relação entre a fórmula e o PFC.

Problema 03 – Permutação

Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

$$P = n!$$

Exemplo de fórmula matemática.

Exemplo de Estratégia usando o PFC.
Fonte: Azevedo, Assis, Borba e Pessoa (2013)

Fonte: A autora.

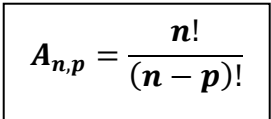
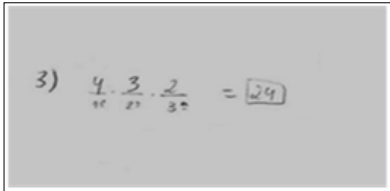
P3_ E aí você mostra casos que [...] eu mostro pra eles quando for resolver um problema como esse que envolve as possibilidades, quando vai passar por um problema como esse, se a gente usar o mesmo raciocínio já vê que bate na trave.

P3_ Eu acredito que resolva-se muitos problemas envolvendo só aquilo e depois de muita repetição daquilo, acho que você começa a mostrar que existe algumas variações.

O *conhecimento comum* aparece quando P3 apresenta o problema como um caso que "envolve as possibilidades", esta é uma das questões básicas para a aprendizagem da Combinatória, porém não é um *conhecimento especializado* para o ensino deste conteúdo. O *conhecimento do PFC e ensino* se dá quando o professor tenta explicar como se dá o processo de ensino de situações combinatórias já que, durante a entrevista, ele aponta este mesmo raciocínio para as demais situações apresentadas.

Na discussão feita a partir da Figura 31 o professor P3 discute sobre questões relacionadas aos conhecimentos *especializado*, do *aluno* e *ensino*.

Figura 31 - Exemplo de um problema de arranjo mostrando a relação entre a fórmula e o PFC.

Problema 02 – Arranjo As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	
	
Exemplo de fórmula matemática.	Exemplo de Estratégia usando o PFC. Fonte Pessoa (2009).

Fonte: A autora.

P3_ *Porque aqui a gente tendo 4 possibilidades pra montar os 3 primeiros lugares, não [...] sai por arranjo, não sai por combinação não, sai por arranjo. Tá certo, **aqui sai por arranjo, mas ele não fez uso do arranjo.***

P3_ *eu quando dou esse assunto pros meus alunos eu **tiro a ideia dele** ter que **identificar se isso é um arranjo, uma permutação.***

Ao identificar o tipo de problema exposto e diferenciá-lo de um problema de *combinação* o professor mobilizou *conhecimento especializado da Combinatória* o que auxilia na aplicação do PFC para resolução destes problemas. No decorrer da discussão P3 articula *conhecimento do PFC e aluno* ao apontar meios (não identificar o topo de problema trabalhado) a fim de facilitar a compreensão do aluno durante a resolução de uma situação combinatória; e *conhecimento do PFC e ensino* ao mostrar de que forma conduziria as orientações para que seus alunos pudessem resolver estes problemas.

Estas articulações, dos diferentes conhecimentos docentes, se complementam entre si possibilitando ao professor o desenvolvimento de um bom trabalho em sala de aula, em

particular no ensino de Combinatória e, especificamente, no uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) como estratégia de resolução de diferentes situações combinatórias.

5.3.4 Produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação e o tipo de conhecimento.

Nesta seção o objetivo foi identificar quais tipos de conhecimentos os professores parecem mobilizar em diferentes situações combinatórias. A Tabela 5 mostra a frequência com que esses problemas eram citados pelos professores quando evidenciavam algum dos tipos de conhecimento nas situações sugeridas durante a entrevista.

Tabela 5 - Frequência de tipo de conhecimento docente por problema combinatório.

	PC	AR	PER	COM	QUANDO SE REFERE A TODOS OS PROBLEMAS	TOTAL
Conhecimento Comum do PFC	17	12	12	8	8	57
Conhecimento Especializado do PFC	14	35	15	29	36	129
Conhecimento Horizontal do PFC	11	16	10	12	15	64
Conhecimento do PFC e Aluno	12	19	13	17	9	70
Conhecimento do PFC e Ensino	10	17	10	10	30	77
Conhecimento do PFC e Currículo	5	1	3	2	4	15

PC = Produto Cartesiano; AR = Arranjo; PER = Permutação; COM = Combinação.

Fonte: A autora.

O *conhecimento comum do PFC* aparece com maior frequência quando os professores avaliavam questões referentes aos problemas de *produto cartesiano*. Na discussão abaixo, Figura 32, verifica-se como os professores se referiam a este tipo de problema.

Figura 32 - Exemplo de resolução de um aluno, de problema de *produto cartesiano*, analisado pelos professores do Estudo 2.

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: porque ela tem ao total 12 tipos de refeições
variadas e "algebra" que soma o total 12 número
de refeições

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

P1_ É um problema que envolve [né?] possibilidades [né?] pra resolver com princípio multiplicativo.

P2_ É um problema de contagem [né?] isso, que você pode utilizar o princípio multiplicativo para contar e fazer árvore também das possibilidades.

P3_ A pergunta é, indique a opção necessária para obter o total de possibilidades. Isso não pode ser um caso de soma em hipótese alguma.

Vê-se que os professores P1 e P2 referem-se sempre ao *produto cartesiano* como sendo um simples problema de contagem que envolve possibilidades e que pode ser resolvido por meio do PFC. Apesar de P3 não se referir explicitamente, como os demais professores, subtende-se em sua fala que o mesmo também se refere ao *produto cartesiano* como sendo um problema de contagem, o qual se resolve por multiplicações e não por adição.

Nos problemas de *arranjo*, *permutação* e *combinação* os professores também mobilizavam este tipo de conhecimento, muitas vezes para apontar que as resoluções dos alunos estavam incorretas e, em seguida, apontavam as alternativas que responderiam corretamente aos problemas apresentados.

Para o *conhecimento comum do PFC* os professores P1 e P2 mobilizam este tipo de conhecimento ao explicar sobre semelhanças e diferenças entre situações combinatórias apresentadas durante a entrevista.

P1_ Bom, semelhante é o raciocínio combinatório, [né?], que são possibilidades, são combinações.

P3_ De diferença entre eles é a quantidade de casos mesmo.

Entendemos, aqui, que quando o P1 e P3 se referem a "combinações", "semelhanças" e "diferenças", estão mobilizando *conhecimentos comuns* de que estes variados tipos de problemas solicitam o número de possibilidades/combinações, mas que alguns levam a maior e outros a menor quantidade total de possibilidades. Este é um conhecimento básico e necessário para a resolução de problemas combinatórios.

O *conhecimento especializado do PFC* está presente e aparece com maior frequência quando os professores passam a mobilizar seus conhecimentos para o todo da Combinatória e não apenas em situações de problemas específicos, como se pode observar na Tabela 5.

Quando os Professores P1 e P2 se referem a questões especializadas do PFC relativas aos conceitos trabalhados na Combinatória, eles apontam semelhanças entre os problemas, o

uso do PFC para resolução de todos os problemas apresentados, além de questões relacionadas ao ensino da Combinatória.

P1_ A maioria dos problemas de Combinatória são resolvidos através do *princípio multiplicativo*.

P2_ Seria mais você mostrar que a ideia é essa, mostrar que a *diferença da combinação* se você faz a mesma coisa do arranjo, então tentar traduzir num *problema em que a ordem não importa*. Começa fazendo como se a ordem não importasse, você estaria utilizando aquele arranjo e aí tem a diferença de dividir pelo $p!$ pra desconsiderar a ordem entre os espaços, entre as quantidades que estão lá.

O Professor P3 apresenta questões sobre o uso do PFC para a resolução dos diferentes problemas combinatórios apresentados durante a entrevista e também como ele trabalha o conteúdo, neste caso apresentando termos e estratégias usadas apenas para o ensino – o que caracteriza esse conhecimento como *especializado* e não apenas *comum*.

P3_ Primeiro a gente *começa pelo Princípio Fundamental da Contagem* só pra que ele entenda alguma coisa".

P3_ Ou passa muito caso e aí você vê que os casos acabam se repetindo, no contexto da questão é o mesmo caso e aí você vai ter que explicar para o aluno que existe um outro caminho que aí a gente fala um pouquinho sobre arranjo [né?], que é você contar as possibilidades, mas há restrições, digamos assim.

Sobre os problemas de *arranjo* e *combinação*, quando tratados pelos professores separadamente no contexto do *conhecimento especializado do PFC*, apresentam-se questões relacionadas à identificação da importância de reconhecer se a ordem em que os elementos presentes no problema em questão irá, ou não, gerar novas possibilidades.

P1_ Ele não percebeu que os grupos, é (...) a ordem não importa [né?], e aí resolveu como se fosse um arranjo.

P2_ Quando você pensa num agrupamento, você já tá com a ideia do grupo bem formado. Então, você pensa: eu tenho 4 seleções para escolher 3. A ordem importa, então eu utilizo um arranjo pra resolver. É um grupo em que a ordem importa.

P3_ Eu tenho 7 participantes disputando 5 lugares, 1º, 2º, 3º, 4º e 5º lugares, então essa ordem interfere.

No *conhecimento horizontal do PFC* o tipo de problema mais discutido foi o *arranjo*, como se pode observar na Tabela 5, principalmente pelos Professores P2 e P3. Suas falas, que seguem, denotam este tipo de conhecimento – de como se pode dar o ensino e a aprendizagem da Combinatória ao longo dos anos escolares.

P2_ *Porque assim, no Ensino Médio eles já têm extrema dificuldade, mas numa 6ª série (como te disse) se o menino começa a gostar daquilo a partir de uma 6ª série, de uma 7ª série, aí eu acredito que daria. Agora é um desafio [né?] Seria mais ou menos isso.*

P3_ *Ó, se eu multiplicar todo mundo, é um tipo de problema, se eu for resolver outro tipo de problema que ele leve em consideração o posicionamento ou as comissões formadas, então talvez na 5ª não, talvez numa 8ª, o cara terminando já o Ensino Fundamental, ele já tenha maturidade suficiente.*

Na discussão, acima, os professores comentam a questão de quando problemas combinatórios podem começar a ser trabalhados em turmas da Educação Básica. Outras questões, relacionadas ao *conhecimento horizontal* e apontadas pelos três professores, foram sobre a relação entre a fórmula de *arranjo* e a resolução do aluno usando o PFC, na qual P1 e P2 explicitam o uso do PFC pelo aluno e como esta estratégia pode facilitar a resolução deste tipo de problema. Outras evidências de conhecimento dessa natureza se fazem presentes quando são avaliadas questões de *produto cartesiano*, *permutação* e *combinação*, só que com uma menor frequência.

Ao se referirem a todos os problemas, os professores, além da indicação do ano que poderiam ser trabalhados determinados tipos de problemas e da relação entre o PFC e a fórmula matemática, apontaram algumas estratégias em que seja possível a visualização do PFC implícita nas situações apresentadas.

E_ Como você auxiliaria esses alunos a resolver estes tipos de problemas? Qual seria tua intervenção?

P2_ *Eu sou suspeito, eu gosto muito desse assunto e eu acho que isso, é a tentativa de tentar compreender de fato o que o Princípio Fundamental sugere que é você separar as etapas, quando (...). É ao pé da letra, se você entende que pra atingir um objetivo, pra formar um grupo, quando você divide em etapas, você pode pegar quantas opções tem em cada etapa e multiplicar, se ele entende bem isso, acho que já seria o suficiente.*

Apesar dos professores denotarem visualizar como o ensino do PFC pode se dar "no horizonte", não evidenciaram clareza ao fazerem relação do PFC com as fórmulas matemáticas usadas para resolver problemas combinatórios.

Sobre o *conhecimento do PFC e alunos*, os professores mobilizaram mais frequentemente este tipo de conhecimento ao avaliarem seus alunos resolvendo problemas de *arranjo* e *combinação*, como indicado na Tabela 5.

A diferença entre os problemas de *arranjo* e *combinação* foi o mais citado entre os professores, ao apontarem e demonstrarem conhecer as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a resolução destes tipos de situações combinatórias. Estes resultados vão de encontro

com resultados de estudos feitos por Sturm (1999), Esteves (2001), Pinheiro, Santos e Sá (2006) e Pessoa e Borba (2010).

Quando se trata de questões voltadas ao uso de métodos e técnicas para o ensino da Combinatória, as vantagens e desvantagens do uso do PFC e quando o professor tenta esclarecer uma situação combinatória ao aluno, os professores entrevistados mobilizam o *conhecimento do PFC e ensino*. Isto ocorreu na maior parte das situações, para todos os conceitos que são trabalhados no estudo deste conteúdo, como indicado na Tabela 5.

Os Professores P1 e P2 claramente demonstram acreditar que o trabalho com o PFC é importante para o ensino/aprendizagem da Combinatória e que, a partir dele, o aluno conseguirá avançar no desenvolvimento de seu raciocínio combinatório.

P1_ Mas, mesmo no Ensino Médio dá pra dispensar a fórmula. O raciocínio multiplicativo já dá conta.

P2_ Então, acredito que esse método, se ele entender isso, a fórmula, a diferenciação dos agrupamentos não seria mais um problema pra ele.

Já P3 acredita que mesmo usando o PFC em todos os problemas, este não seja a única estratégia que pode ser usada na resolução dos diferentes conceitos trabalhados na Combinatória.

P3_ Não existe uma estratégia que resolva o todo [né?].

P3_ Cada contexto tá inserido na (...) pede uma solução diferente.

Para o *conhecimento do PFC e currículo*, o tipo de problema em que os entrevistados mais mobilizaram este tipo de conhecimento foram nos problemas de *produto cartesiano*. Neste caso, apenas os professores P1 e P2 expuseram conhecimentos referentes ao currículo neste tipo de problema. As questões expostas por eles foram em relação às habilidades que os alunos passam a ter com a experiência escolar e também sobre algumas questões relacionadas aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN.

P1_ É um problema que dá pra trabalhar também no Fundamental, não somente no Ensino Médio. No Fundamental dá também".

P1_ Acho que PCN tem tratamento da informação, [né?] e (...) e eles englobam Análise Combinatória dentro de Tecnologia da Informação.

P2_ Não sei, uma sexta série, acho que eles já teriam essa noção porque eles já têm a habilidade aritmética [né?].

Nota-se aqui, na fala dos professores, um conhecimento implícito do *currículo* em relação a algumas orientações sobre o ensino da Combinatória. Entretanto, os professores também demonstraram *conhecimentos curriculares* quando falavam dos problemas de um modo geral.

Assim, a partir das análises e discussões apresentadas neste capítulo, evidencia-se um reconhecimento do PFC em situações combinatórias por parte dos professores de Matemática da Educação Básica. Entretanto, quando se compara o reconhecimento do PFC entre professores e estudantes do Ensino Médio, os resultados são bem diferentes, apontando um reconhecimento muito superior dos professores de Matemática em relação ao desempenho destes estudantes. Este resultado pode indicar que professores deste nível de ensino podem não estar trabalhando o PFC como estratégia no ensino da Combinatória. Outro ponto observado foi em relação aos conhecimentos mobilizados pelos professores, entrevistados no Estudo 2, ao avaliarem situações combinatórias envolvendo o PFC como estratégia usada por estudantes ao resolverem situações combinatórias. Apesar de mobilizarem os conhecimentos aqui investigados, há aspectos destes conhecimentos que os professores precisam desenvolver melhor para alcançar melhores resultados no ensino da Combinatória na Educação Básica.

No próximo capítulo serão apresentadas as considerações finais dos principais resultados obtidos nesta pesquisa e as implicações educacionais indicadas para estudos futuros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desta dissertação foi *investigar conhecimentos de professores sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) na resolução de problemas combinatórios e na construção de fórmulas*. No percurso metodológico buscou-se identificar a natureza dos conhecimentos mobilizados pelos professores ao discutirem os diferentes tipos de problemas combinatórios, as resoluções de alunos, as propostas curriculares referentes à Combinatória e o ensino deste conteúdo.

Para o alcance do objetivo central da dissertação, foi necessário, inicialmente, investigar se os professores de Matemática reconhecem o PFC na resolução de situações combinatórias. Acredita-se que o conhecimento de como aplicar o PFC a distintas situações é um ponto de partida importante para o sucesso do ensino da Combinatória, não sendo o único conhecimento necessário, mas um conhecimento indispensável. Esta investigação foi o foco do primeiro estudo desenvolvido.

No primeiro estudo, os participantes eram professores de Matemática que atuavam nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio e também estudantes que estavam cursando o terceiro ano do Ensino Médio. Na análise de protocolos com respostas e justificativas de alunos, observou-se que os professores do Ensino Médio melhor reconhecem o uso do PFC, quando comparados com os professores do Ensino Fundamental. A explicação do melhor reconhecimento dos professores do Ensino Médio parece ser o fato de terem maior experiência de ensino da Combinatória. Isso reforça o encontrado em outros estudos, como o Rocha (2011), de que, apesar de mesma formação inicial - Licenciatura em Matemática, a prática de ensino dos professores do Ensino Médio os possibilita ampliar conhecimentos de Combinatória, em particular do PFC. Os saberes da prática, assim, são também motores do desenvolvimento de conhecimentos docentes, como apontam Shulman (1986), Ball (1991) e Tardif (2002).

Outro resultado apontado no Estudo 1 é o reconhecimento do PFC dos professores do Ensino Médio que aparece muito superior ao dos alunos deste nível de ensino, o que pode indicar que os professores parecem não estar ressaltando este princípio no ensino junto a seus alunos. Questiona-se, então, como os professores do Ensino Médio reconhecem e utilizam adequadamente o PFC em distintas situações combinatórias, mas os alunos deste nível de ensino não evidenciam desempenho semelhante. Parece, então, que o PFC não está sendo suficientemente destacado pelos professores e/ou percebido pelos alunos como uma estratégia de resolução de variadas situações combinatórias.

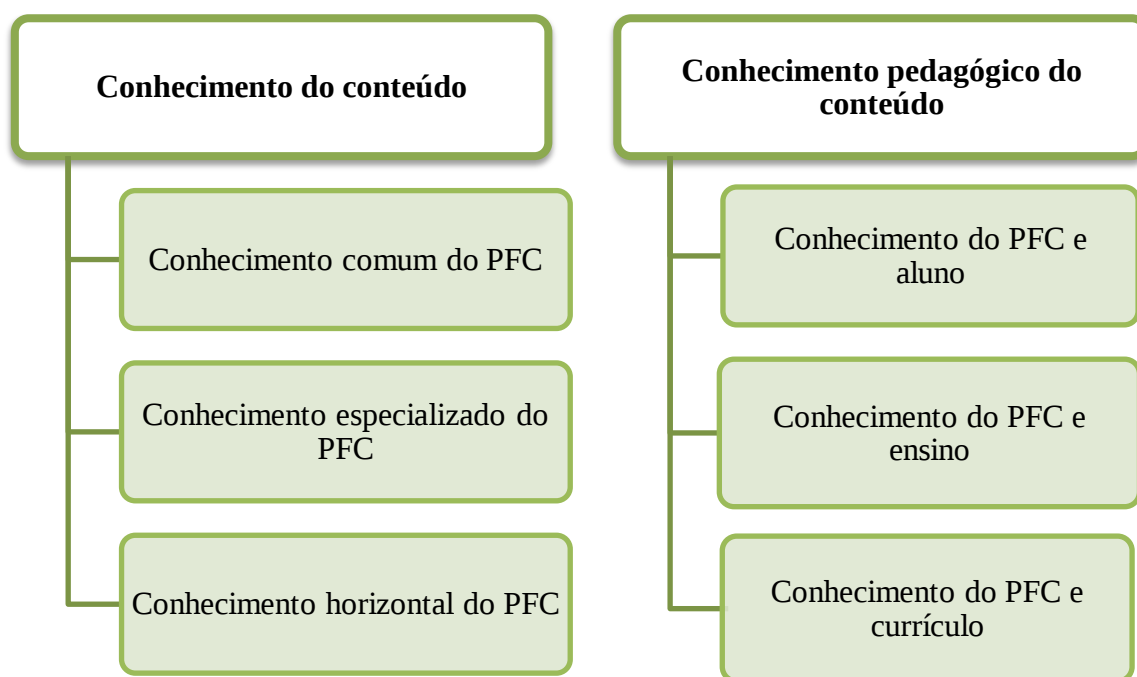
Como implicação educacional, resultante da discussão dos resultados obtidos no Estudo 1, recomenda-se que os professores ressaltem claramente para os alunos o PFC como

estratégia de resolução de situações combinatórias e, inclusive, como base das fórmulas da Análise Combinatória. Acredita-se que, dessa forma, os estudantes terão um melhor domínio da resolução de situações combinatórias, sejam as não-condicionais, sejam as condicionais e, quando for o caso de aplicação de fórmulas, poderão utilizá-las com maior compreensão, podendo, inclusive, reconstruí-las no caso de não recordarem como as mesmas se enunciam.

Após verificar que os professores reconhecem e usam o PFC na resolução de problemas combinatórios, no Estudo 2 foi averiguado como os professores usam esta estratégia e quais conhecimentos eles mobilizam ao avaliarem situações combinatórias resolvidas por estudantes com o uso do PFC e ao discutirem o ensino da Combinatória. Os conhecimentos aqui investigados são uma adaptação dos tipos de conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008). A partir deles, foi possível acompanhar como os professores podem usar o PFC na resolução de problemas combinatórios e como, através dele, podem relacionar o princípio com as fórmulas usadas para resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*).

Os conhecimentos aqui investigados, com foco no PFC, foram os que podem ser observados na Figura 33.

Figura 33 - Conhecimentos docentes do Princípio Fundamental da Contagem.



Adaptação dos tipos de conhecimentos propostos por Ball, Thames e Phelps (2008).

Fonte: A autora.

Os conhecimentos docentes, dessa forma, se agrupam em dois focos: *conhecimento do conteúdo* e *conhecimento pedagógico do conteúdo*. Evidencia-se, assim, que é necessário, mas não suficiente, que o professor detenha o conhecimento de conteúdos específicos (no caso particular, o PFC) que trabalha em sua sala de aula, porém, é necessário associar a este tipo de conhecimento, o da pedagogia do conteúdo (técnicas, princípios, métodos e estratégias, referentes ao ensino e à aprendizagem do PFC). Quanto ao *conhecimento do PFC*, é necessário que o professor saiba utilizar o princípio em distintas situações combinatórias (*conhecimento comum do PFC*) e que compreenda a aplicação do princípio às diferentes situações (*conhecimento especializado do PFC*), bem como entenda que a partir de estratégias intuitivas se pode chegar ao PFC e, a partir desse, se pode chegar às fórmulas (*conhecimento horizontal do PFC*). Em relação ao *conhecimento pedagógico do PFC*, destacam-se como aspectos distintos: o conhecimento de como o aluno compreende o PFC (*conhecimento do PFC e aluno*), de como se pode dar o ensino do princípio (*conhecimento do PFC e ensino*) e como o PFC se situa no currículo (*conhecimento do PFC e currículo*).

Apesar de serem apresentados separadamente, estes são, de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), conhecimentos que estão relacionados entre si. Em geral, aparecem juntos em uma mesma situação e, algumas vezes, é difícil distinguir quando o professor está mobilizando algum deles em específico em uma situação usual de sala de aula, por exemplo. O importante não é separá-los por si, mas reconhecer a gama de conhecimentos necessários para o bom exercício da docência e, para fins de estudo, acredita-se ser possível investigar como cada tipo de conhecimento é mobilizado.

Foi, então, objetivo do Estudo 2 investigar quais tipos de conhecimentos são mobilizados por professores ao se depararem com resolução de situações combinatórias resolvidas por alunos usando o Princípio Fundamental da Contagem e ao discutirem o ensino da Combinatória. A análise das entrevistas junto a professores que ensinam Matemática possibilitou a identificação de diferentes tipos de conhecimentos referentes ao PFC.

Os professores evidenciam *conhecimentos comum e especializado do PFC*, bem como *conhecimento horizontal do PFC*, mas não indicam, claramente, como relacionar o princípio multiplicativo com as fórmulas da Análise Combinatória. Este resultado responde ao que seria o segundo questionamento desta dissertação que foi investigar se os professores relacionam o PFC com os procedimentos formais da Combinatória e, se a partir dessa relação explicitam se eles constroem as fórmulas usadas na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

O *conhecimento comum do PFC* muitas vezes é evidenciado quando os professores reconhecem o PFC como uma possível alternativa para resolução das situações combinatórias apresentadas. Esse reconhecer, não significa que há conhecimento especializado do PFC, ou seja, este último é um conhecimento próprio do professor, voltado à percepção do que há de comum entre distintas situações que possibilitam o uso do PFC.

Já o *conhecimento especializado do PFC*, que foi o tipo de conhecimento mais mobilizado pelos professores durante as entrevistas, aparece sempre associado ao reconhecimento que os participantes fazem dos diferentes tipos de problemas apresentados na entrevista. Na maioria das vezes, os problemas eram identificados por suas nomenclaturas (*arranjo*, *permutação* e *combinação*), embora os problemas que envolviam *produto cartesiano* eram reconhecidos como sendo um problema de contagem, mas com conhecimento de suas características específicas. Os professores indicavam características próprias de cada um desses tipos de problemas, como nos problemas de *arranjo* a ordem ser importante e em problemas de *permutação* todos os elementos serem utilizados. Acredita-se que falta, ainda, clareza ao professor da relação do PFC com as fórmulas da Análise Combinatória e isto poderia auxiliá-los em seu ensino e possibilitar aos alunos uma melhor compreensão da aplicação de procedimentos formais em situações combinatórias.

Quanto ao *conhecimento horizontal do PFC*, os professores expressam que problemas combinatórios podem ser trabalhados desde os anos iniciais e, por vezes, expressam como o ensino da Combinatória pode se efetivar de modo gradual. Este também é um conhecimento muito importante, pois professores de diferentes níveis de ensino precisam compreender como o desenvolvimento do raciocínio combinatório pode ser estimulado ao longo da escolarização básica. Essa é uma recomendação de Borba (2010), a de aproveitar estratégias informais de crianças bem novas, como a manipulação de objetos combinados entre si (desde a Educação Infantil); os procedimentos de crianças novas, como desenhos e listagens de possibilidades (nos anos iniciais do Ensino Fundamental); o uso pelos alunos do princípio multiplicativo de modo mais explícito (nos anos finais do Ensino Fundamental) e procedimentos mais formais usados por estudantes (no Ensino Fundamental).

Um outro objetivo específico foi examinar que conhecimentos os professores mobilizam ao avaliarem resoluções de alunos de problemas combinatórios usando, ou não, o PFC. Observou-se que os professores evidenciam *conhecimento do PFC e aluno*, identificando seus erros ao resolver as situações combinatórias apresentadas e identificam qual seria a multiplicação correta a ser aplicada a cada um dos problemas. Os professores comentam como alguns alunos fazem incorretamente a multiplicação direta dos valores

enunciados na situação e ressaltam que falta a alguns estudantes a compreensão de qual multiplicação, por meio do PFC, podem corretamente solucionar cada situação.

No que se refere ao *conhecimento do PFC e ensino*, os professores apontam a árvore de possibilidades como uma alternativa para resolução do problema, porém não deixam claro como o uso desta e de outras estratégias (quadro de possibilidades e fórmulas) se relacionam com o PFC. As estratégias sugeridas pelos professores para auxiliar os estudantes a superarem dificuldades diante de diferentes situações combinatórias, giram em torno da apresentação de problemas com quantidades menores a serem encontradas para que os alunos possam, aos poucos, ir desenvolvendo o raciocínio combinatório necessário para resolução destes tipos de problemas.

Sobre o *conhecimento do PFC e currículo* o objetivo foi sondar que conhecimentos curriculares os professores mobilizam para o ensino da Combinatória, em especial para o uso do PFC como estratégia válida para resolução das situações combinatórias em geral. Apesar de não expressarem indícios claros do *currículo prescrito* para o ensino deste conteúdo, os professores fornecem pistas ao longo da entrevista de que têm conhecimentos sobre questões curriculares presentes em livros didáticos usados em turmas do Ensino Fundamental e Ensino Médio, ou seja, detêm conhecimento de currículos *apresentados*. Recomenda-se, assim, que os professores desenvolvam melhores conhecimentos do que é prescrito e apresentado em *currículos* sobre o ensino da Combinatória, para que possam modelar o ensino de acordo com as necessidades de seus estudantes e possam, assim, contribuir com o desenvolvimento do raciocínio combinatório de seus alunos.

Esta dissertação caracteriza-se como um estudo de sondagem que investigou os conhecimentos mobilizados por professores de Matemática que atuavam em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio sobre o conhecimento e uso do PFC como estratégia de resolução para os diferentes problemas (*produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação*) envolvidos no estudo da Combinatória. A partir dos resultados obtidos, outros estudos como o de intervenção com professores podem ser efetuados, enfatizando o *conhecimento do conteúdo* da Combinatória e o *conhecimento pedagógico* da Combinatória com o uso do PFC como estratégia válida para resolução de problemas combinatórios condicionais e não-condicionais. Estudos que tenham como objetivo contribuir para a formação inicial e/ou continuada de professores, quanto aos conhecimentos referentes ao *Princípio Fundamental da Contagem*, são, desse modo, necessários e podem contribuir para a melhoria dos processos de instrução e de aprendizado da Combinatória.

Conclui-se que os conhecimentos docentes do PFC podem servir como uma das bases para um melhor desenvolvimento do ensino e da aprendizagem da Combinatória, mas há aspectos do conhecimento que os professores necessitam desenvolver melhor, como questões de *ensino* e *currículo*. Espera-se, assim, ter contribuído com o levantamento de conhecimentos docentes sobre a Combinatória e também ter trazido contribuições referentes ao papel do *Princípio Fundamental da Contagem* como eficiente estratégia de ensino, por possibilitar a resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana; ASSIS, Adryanne; BORBA, Rute; PESSOA, Cristiane. Princípio fundamental da contagem: alunos do curso de graduação em Pedagogia resolvendo problemas combinatórios. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

BALL, Deborah. Research on teaching mathematics: making subject matter knowledge part of the equation. In: BROPHY, J. (Ed.) **Advances in research on teaching: Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction**. Greenwich, CT: JAI Press, 1991.V.2. pp.1- 47.

Ball, Deborah; Bass, Hyman. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In **Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**. Ed. Edmonton, AB. 2003, pp. 3-14.

BALL, Deborah; THAMES, Mark; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**. 2008 v.59 n.5 pp. 389-407.

BALL, Deborah; Hill, Heather; BASS, Hyman. Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? **American Educator**. 2005, pp. 14-46.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento Combinatorio**. Educación Matemática. Editorial Síntesis, 1996.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; MARTINS, Glaucé; LIMA, Rita. O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório. **Anais...** 10 Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí., 2009.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na Educação Básica. **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. Salvador, 2010.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? **Anais...** 3 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT. Fortaleza, 2012.

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. Curitiba, 2013.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012 para o Ensino Médio: Matemática / Brasília: Ministério da Educação**, 2011.

_____. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015 para o Ensino Médio: Matemática / Brasília: Ministério da Educação**, 2014.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática. Ensino de primeira a quarta série.** Brasília: MEC, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) 5ª a 8ª séries: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

CUNHA, Maria de Jesus; LIMA, Ana Paula; ROCHA, Cristiane. Raciocínio combinatório: compreensão dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental. **Anais... 21 Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste - EPENN.** Recife, 2013.

ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do Ensino Fundamental.** (Dissertação) Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo, 2001.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. **Temas e problemas elementares.** Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, Ana Paula. Princípio Fundamental da Contagem: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso em situações Combinatórias. **Anais... 18 Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM.** Recife, 2014.

MAHER, Carolyn; POWELL, Arthur; UPTEGROVE, Elizabeth. **Combinatorics and Reasoning:** representing, justifying and building isomorphisms. USA. Mathematics Education Library. Springer, 2011.

MANRIQUE, Ana Lúcia; ANDRÉ, Marli. Relações com saberes na formação de professores. In: NACARATO, Adair; PAIVA, Maria Auxiliadora. In **A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 133 - 147.

MOREIRA, Francis. **Os conhecimentos acerca dos conceitos de análise combinatória de professores que ensinam matemática:** um estudo diagnóstico. (Dissertação) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2014.

MORGADO, Augusto; CARVALHO, João; CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade.** Coleção do professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 9 ed. Rio de Janeiro, 1991.

NACARATO, Adair; PAIVA, Maria Auxiliadora. A formação do professor que ensina matemática: estudos e perspectivas a partir das investigações realizadas pelos pesquisadores do GT 7 da SBEM. In: NACARATO, Adair; PAIVA, Maria Auxiliadora. In **A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 7 - 26.

NCTM. **National Council of Teachers of Mathematics:** Principles and standards for school mathematics, 2000.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco / Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife: SE, 2012.

_____. Secretaria de Educação. **Currículo de Matemática para o Ensino Médio com base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco**. Recife: SE, 2012.

_____. Secretaria de Educação. **Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental com base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco**. Recife: SE, 2012.

_____. Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco / Parâmetros na Sala de Aula: Matemática Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SE, 2013.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Estratégias de Resolução de Problemas de Raciocínio Combinatório por Alunos de 1ª a 4ª série. **Anais...** 9 Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.

PESSOA, Cristiane. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. (Tese Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série**. Zetetiké - Cempem- FE - Unicamp - v. 17, n. 31 - jan/jun - 2009a.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. **Anais...** 4 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília, 2009b.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1. 2010.

PINHEIRO, Carlos; SANTOS, Ivaldo; SÁ, Pedro. Ensino de análise combinatória; o que ficou? **Anais...** Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Recife, 2006.

ROA, Rafael; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. **In: Jornades europees d'estadística**. Palma, 2001. pp 253- 264.

ROCHA, Janice. **O ensino da Análise Combinatória: Uma discussão sobre o uso do Princípio Multiplicativo na resolução de problemas**. (Dissertação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo - USP - São Paulo, SP, 2002.

ROCHA, Cristiane. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos**. (Dissertação) - Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE – Recife, PE, 2011.

ROCHA, Cristiane. Princípio fundamental da contagem e a compreensão de problemas combinatórios: olhares de professores do Ensino Médio. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

ROCHA, Cristiane; FERRAZ, Marta. Conhecimentos de professores de pedagogia e matemática sobre problemas combinatórios. **Anais...** 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM. Recife, 2011.

SABO, Ricardo. **Saberes Docentes: a análise combinatória no Ensino Médio.** (Dissertação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP – São Paulo, 2010.

SACRISTÁN, José. **Currículo: uma reflexão sobre a prática.** Tradução de Ernani F. da Fonseca Rosa. 3. ed. ArtMed. Porto Alegre, 2000.

SHULMAN, Lee. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, vol. 15, Nº 2.(Feb., 1986), pp. 4 - 14.

_____. Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**. Vol. 57, Nº 1. February 1987.

SILVA, Maria; PONTES, Danielle; TEIXEIRA, Maria. Princípio fundamental da contagem: a compreensão de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre os problemas de Combinatória. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

SILVA, Monalisa; PESSOA, Cristiane. **Raciocínio combinatório: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil.** UFPE, 2014. **Trabalho não publicado.**

STYLIANIDES, Andreas; BALL, Deborah. Studying the Mathematical Knowledge Needed for Teaching: The Case of Teachers' Knowledge of Reasoning and Proof. **Paper was presented at the 2004 Annual Meeting of the American Educational Research Association**, San Diego, CA.

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa.** (Dissertação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, São Paulo, 1999.

TARDIF, Maurice. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. In **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. 14 ed. pp. 56-111.

TEIXEIRA, Paulo Jorge. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao Professor de matemática para a Exploração de problemas de contagem no ensino Fundamental.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN, São Paulo, 2012.

VEGA, Danielle. **Qual mais fácil de resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação?** (Dissertação) - Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE – Recife, PE, 2014.

VEGA, Danielle; BORBA, Rute. Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática - JIEEM / International Journal for Studies in Mathematics Education - IJSME**, Vol. 7, Nº. 3, pp. 27-72. 2014.

APÊNDICE

Apêndice A_ Roteiro da entrevista do Estudo 2

1ª Fase da entrevista do Estudo 2

1. Fez algum curso de pós-graduação? Se sim, qual?
2. Há quanto tempo leciona?
3. Leciona em quais redes de ensino?
4. Há quanto tempo leciona no atual nível de ensino?
5. Você estudou Combinatória em seu curso de graduação?
6. Se sim, este estudo lhe auxilia no seu ensino em sala de aula?

2ª Fase da entrevista do Estudo 2

Com os quatro problemas separados:

1. Que tipo de problema é este? (Apontando para cada um)
2. Estes tipos de problema podem ser trabalhados a partir de que ano?
Por que?

Com os quatro problemas juntos:

1. Em qual bloco de conteúdos eles estão inseridos?
2. No que estes problemas se assemelham e no que se diferenciam
3. Os estudantes estão corretos em suas respostas e justificativas?
 - a) Se correto, por que?
 - b) Se incorreto, qual das alternativas é mais adequada para este tipo de problema?
 - c) Se incorreto, qual a dificuldade você acha que o aluno apresentou na compreensão deste problema?
 - d) Como você auxiliaria o aluno a compreender este problema?

Problemas utilizados na segunda fase do Estudo 2

Problema 1 -

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: porque ela tem ao total 12 tipos de refeições variadas e a letra que soma o total 12 número de refeições

Problema 2 -

4. Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $7 + 5$

b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

d) 7×5

e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: SABENDO-SE QUE DISPUTAM APENAS 5 POSIÇÕES REALIZAMOS UMA MULTIPLICAÇÃO

Problema 3 -

8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5×5

b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$

c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$

d) $5 + 5$

e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Multipliquei as fotos pelas opções

Problema 4 -

5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8×4 c) $8 + 4$

d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ e) $8 \times 7 \times 6 \times 5$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Por que - A equipe do Brasil formaram cada grupo diferentes na Olimpíada

3ª Fase da entrevista do Estudo 2

Com os quatro problemas separados:

- a) Qual a relação entre as soluções matemáticas e as resoluções dos alunos?

Com os quatro problemas juntos:

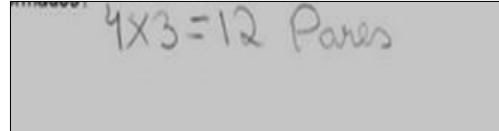
- b) Qual a estratégia utilizada por estes alunos?
- c) Ela se aplica a todos os tipos de problemas combinatórios?
- d) Como esta estratégia se relaciona com as fórmulas?
- e) Como se poderia construir junto com os alunos as fórmulas da Análise Combinatória?

Problemas utilizados na terceira fase da entrevista do Estudo 2.

Problema 01 –

Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luiza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

$$PC = n \times p$$

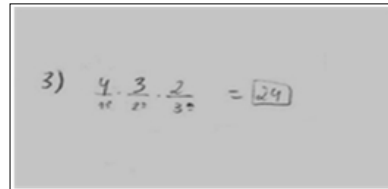


Handwritten calculation: $4 \times 3 = 12$ Pares

Problema 02 –

As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

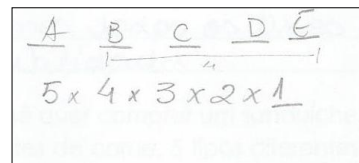


Handwritten calculation: 3) $\frac{4}{1^\circ} \cdot \frac{3}{2^\circ} \cdot \frac{2}{3^\circ} = 24$

Problema 03 –

Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

$$P = n!$$

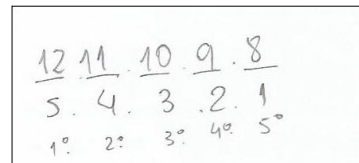


Handwritten calculation: A B C D E
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Problemas 04 –

Na seleção brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$



Handwritten calculation: 12 11 10 9 8
5 4 3 2 1
1º 2º 3º 4º 5º

ANEXOS

Anexo A_ Instrumento de coleta de dados do Estudo 1.

Tipo	Problemas com 4 etapas de escolha	Problemas com 5 etapas de escolha
Produto cartesiano	No restaurante “Sabor Divino” Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) NDRA Justifique:	Na Lanchonete “Que Delícia” José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ c) $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$ d) $4 + 3 + 5 + 2 + 3$ e) $4 \times 3 \times 5 \times 2$ f) NDRA Justifique:
Arranjo	Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os 4 primeiros lugares. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 7×4 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ c) $7 + 4$ d) $7 \times 6 \times 5 \times 4$ e) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ f) NDRA Justifique:	Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $7 + 5$ b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) 7×5 e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA Justifique:
Combinação	Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8×4 c) $8 + 4$ d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ e) $8 \times 7 \times 6 \times 5$ f) NDRA Justifique:	Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 12×5 b) $12 + 5$ c) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA Justifique:
Permutação	A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 4×4 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$ d) $4 + 3 + 2 + 1$ e) $4 + 4$ f) NDRA Justifique:	Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades? a) 5×5 b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$ c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ d) $5 + 5$ e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA Justifique:

Fonte: Professores e estudantes da disciplina Tópicos em Combinatória do Programa de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC / UFPE no semestre 2012.2.