UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Filipe Andrade da Costa

Análise qualitativa de equações diferenciais abstratas.

RECIFE

2016

Filipe Andrade da Costa

Análise qualitativa de equações diferenciais abstratas.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. **CLAUDIO CUEVAS**
Co-orientador: Prof. Dr. **HERNÁN R. HENRÍQUEZ**

RECIFE

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C837a Costa, Filipe Andrade da
Análise qualitativa de equações diferenciais abstratas / Filipe Andrade da Costa. – 2016.
94 f.

Orientador: Claudio Cuevas.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, Recife, 2015.

Inclui referências.

1. Análise funcional. 2. Equações de evolução. 3. Equações diferenciais funcionais. I. Cuevas, Claudio (orientador). II. Título.

515.7 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2016-084

FILIPE ANDRADE DA COSTA

ANÁLISE QUALITATIVA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ABSTRATAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 15/01/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hernan Roberto Henriquez Miranda (Co-orientador)
Universidad de Santiago de Chile

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Herme Patricio Soto Segura (Examinador Externo)
Universidad de La Frontera

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças para essa caminhada.

Agradeço a minha família, pelo apoio que sempre me deu, não apenas durante esse período, mas durante toda minha vida.

Ao Grupo de Equações de Evolução e Aplicacoes do Departamento de Matematicas e Estatistica da Universidade de La Frontera, Temuco, Chile, pelo convite para participar do II Workshop de Ecuaciones de Evolucion y Aplicaciones, em especial aos professores Mario Choquehuanca e ao professor Herme Soto por toda a hospitalidade. Tamb?m agradeço ao professor Herme Soto por sua disposição em colaborar com a realização desse trabalho.

Aos professores Claudio Cuevas e Hernán Henríquez, os quais foram de grande importancia, não apenas para a conclusão deste trabalho, mas também por tudo que aprendi com eles, pelos conselhos e por todas as oportunidades que abriram durante esse tempo. E que esse seja apenas o começo desse percurso.

Ao professor Ramón Mendoza, que tanto me incentivou e acompanhou durante o mestrado e doutorado, e com quem tanto aprendi.

Aos colegas do departamente do Matemática da UFPE. Em especial a Clessius, Juscelino, Omar e Deibson, que estiveram mais presentes durante esse tempo.

Aos amigos, Fernando, Isabela, Fábio, Itacira, Wanderson, Daniel, que me acompanharam desde o começo dessa longa jornada.

À Capes e ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Nesse trabalho estaremos interessados em estudar propriedades relacionadas as soluções brandas para certos tipos de equações de evolução. Dentre tais propriedades estudamos a existência de tais soluções assim como questões de periodicidade, para o problema de Cauchy abstrato com retardo dependendo do estado e para o problema com semigrupo exponencialmente estável. E para a equação que modela a dinâmica das estruturas flexíveis, esturademos a propriedade de Kneser.

Palavras-chave: Equações de evolução. Retardo dependendo do estado. Periodicidade. Estruturas flexíveis. Propriedade de Kneser. Solução branda.

ABSTRACT

In the present study, we focused on properties related to mild solutions to certain types of evolution equations. Among such properties, we studied the existence of these solutions as well as periodicity problems to the abstract Cauchy problem with state dependent delay and to the hyperbolic semigroup problem. In addition, for the equation that models the dynamic of flexible structures we studied the Kneser property.

Keywords: Evolution equations. State dependence delay. Periodicity. Flexible structure. Kneser property. Mild solution.

SUMÁRIO

1 Introdução

Desde os primórdios do estudo das equações diferenciais, um do principais problemas ao se tentar compreender um certo modelo (tanto abstrato como concreto) é determinar se tal problema possui solução. Após esse primeiro desafio, o seguinte varia dependendo das necessidades e curiosidade daqueles que investigam tal problema, em alguns casos o próximo passo ao determinar se o modelo com tais parâmetros possui solução, é determinar se a solução é única ou não. Da unicidade ou não das soluções podemos seguir alguns caminhos. Podemos, por exemplo, estudar as propriedades qualitativas da solução, para compreendermos melhor o modelo, estudando por exemplo a estabilidade, a peridiocidade, quase-periodicidade, periodicidade assintótica, dentre outras. Ou também no caso que a solução não é unica, podemos nos perguntar se o conjunto formado pelas soluções desse problema satisfaz alguma propriedade estrutural, por exemplo, se o conjunto dessas soluções é compacto ou conexo.

De forma semelhante, os mesmos tipos de perguntas podem ser feitas e estudadas para o caso das soluções para as equações diferenciais com retardo, neutras, com retardo dependendo do estado, abstratas, funcionais, integro-diferenciais, fracionárias. E todos estes tipo de equações estão intimamente conectadas a aplicações físicas relevantes. Nessa tese, abordaremos dois tipos de situações interessantes. Na primeira parte estudaremos resultados de periodicidade para certos tipos de equações diferenciais, e na segunda parte estaremos interessados em estudar a propriedade de Kneser para o conjunto das soluções para a equação que modela as estruturas flexíveis. Mais precisamente, nessa tese temos a seguinte organização:

No capítulo 3, estudaremos a periodicidade para um certo tipo de equação abstrata com retardo, mas com retardo dependendo não apenas do tempo, como também do estado atual do sistema, a saber, estudaremos a seguinte equação

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_{\rho(t,x_t)}), \quad t \in I,$$

onde $x(t) \in X$, e X um espaço de Banach, x_t denota a história da solução, ou seja, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, onde $\theta \in [-r, 0]$ onde r pode ou não ser infinito. Uma das grandes diferenças que existem no estudo das equações diferenciais e das equações diferenciais com retardo, é que no primeiro a condição inicial depende apenas do estado inicial (ou seja, depende apenas do valor $x(0) = x_0$), já no caso com retardo precisamos também conhecer a história (neste caso, o que temos é uma condição $x_0 = \varphi$, onde φ é uma função definida em $[-r, 0]$ ou $(-\infty, 0)$), ou seja, o futuro é influenciado também pelo passado, e não apenas pelo estado presente. Uma outra diferença existente entre as equações com retardo e as equações com retardo dependendo do estado, é que a segunda nunca é linear, o que já dificulta bastante o começo do estudo de problemas com esse tipo de retardo, requerendo o uso de técnicas sofisticadas de análise.

O estudo de equações com retardo surge do fato que tais equações modelam de forma mais precisa certos problemas. Um dos exemplos mais visíveis é o problema de crescimento populacional, onde por exemplo os indivíduos de uma dada espécie precisam de um certo tempo para estar aptos para a reprodução, e sendo assim não são todos os individuos da espécie que irão interferir diretamente na procriação no próximo ciclo, criando assim uma variável que depende de um retardo.

Os primeiros artigos com problemas com retardo surgiram dentro da geometria e na teoria dos números (no estudo da distribuição dos números primos). Picard em 1908, em um congresso internacional de Matemática, já enfatizava a importância da hereditáriedade no estudo de modelos físicos. Em 1909 e 1928, Volterra estudou equações envolvendo retardo que modelam viscoelasticidade (VOLTERRA, 1909) e em 1931 escreveu um livro sobre o papel da hereditariedade no modelo de interação entre espécies. Notamos que nesse primeiro momento o retardo depende apenas do tempo.

Observamos que sistemas com retardo dependendo do estado já eram estudados de forma isolada em alguns casos, mas tais tipos de estudos realmente começaram a ganhar notoriedade a partir de 1940, principalmente através da escola russa, e principalmente pelos estudos voltados a problemas de controle. E desde então o problema com retardo dependendo do estado vem sendo bastante estudado. Como comentamos anteriormente, o tipo de retardo que estamos interessados em abordar depende não apenas do tempo, mas também do estado x_t, e claramente esse caso é uma generalização do caso anterior.

O estudo das equações diferenciais funcionais com retardo dependendo do estado alcança o estudo de diversas áreas, temos por exemplo, na Física, os artigos de Driver (DRIVER, 1963; DRIVER, 1963; DRIVER, 2012) onde foi estudado o modelo matemático para o problema de dois corpos na eletrodinâmica clássica, obtendo resultados sobre a existência e unicidade de equações neutrais com retardo dependendo do estado, dentre outros. Assim como também temos exemplos na teoria de controle (WALTHER, 2002), na biologia (MAHAFFY; BÉLAIR; MACKEY, 1998), redes neurais (LONGTIN; MILTON, 1989), crescimento populacional (ARINO; SÁNCHEZ; FATHALLAH, 2001), (NISBET; GURNEY, 1983). Outras aplicações podem ser vistas em (HARTUNG et al, 2006).

Mais recentemente as equações funcionais com retardo dependendo do estado vem ganhando bastante espaço na literatura e seu estudo vem se desenvolvendo a cada dia, temos recentemente (AISSANI; BENCHOHRA,2014; ARJUNAN; NADAF, 2014; ARTHI; PARK; JUNG, 2014; BENCHOHRA; HENDERSON; MEDJADJ, 2014; BENCHOHRA; HELLAR, 2014; GAUTAM; DABAS, 2014; GUENDOUZI; BENZATOUT, 2014; LI; CHANG; NIETO, 2009; MUTHUKUMAR; RAJIVGANTHI, 2013; PANDEY; DAS; SUKAVANAM, 2014; RADHAKRISHNAN; BALACHANDRAN, 2012; REZOUNENKO, 2014; SAKTHIVEL; ANANDHI, 2010; RATHINASAMY; YONG, 2013; VEJAYAKUMAR; RAVICHANDRAN; MURUGESU, 2013;YAN; ZHANG,2014)

Um resumo desse capítulo pode ser encontrado no artigo aceito, intitulado “ Periodic solutions of abstract functional differential equations with state-dependent delay ” (ANDRADE; CUEVAS; HENRÍQUEZ, 2016).

A busca por soluções que possuem algum tipo de periodicidade é um problema que remonta ao início do estudo das equações diferenciais, e com o passar dos anos novas classes de periodicidade acabaram surgindo para se adequar melhor à realidade, por exemplo, no mundo real dificilmente poderíamos esperar encontrar fenômenos que se comportam de forma periódica (no sentido clássico de periodicidade), mas muitos deles acontecem de forma quase-periódicas (conceito introduzido por H. Bohr). E a partir daí muitas outras classes de periodicidade surgiram para atender melhor aos problemas reais.[1]

Já no capítulo 3, estaremos interessados em estudar questões de periodicidade, porém

[1]Para mais detalhes sobre as várias classes de periodicidade temos (DE ANDRADE, 2010).

no contexto de semigrupos exponencialmente estável, e estudando uma outra classe de periodicidade, a saber pseudo S-assintoticamente ω-periódicas. Tal classe foi definida recentemente em (PIERRI; ROLNIK, 2013).

Um resumo deste capítulo foi publicado em "Asymptotic periodicity for hyperbolic evolution equations and applications" Applied Mathematics and Computation 264(2015),169 − 195. (ANDRADE et al, 2015)

E finalizamos no capítulo 4, estudando um caso em que não temos a unicidade da solução para o problema que modela estruturas flexíveis, e neste caso estamos interessados em estudar a propriedade de Kneser (ou Hukuhara) para o conjunto das soluções, ou seja, que o conjunto das soluções é não-vazio, compacto e conexo.

Como haviamos comentado anteriormente, no estudo das equações diferenciais, uma das primeiras perguntas que fazemos é sobre as questões de existência e unicidade das soluções, porém dependendo das hipóteses sobre a função que descreve a equação podemos obter apenas a existência de tais soluções, e nesse caso podemos estudar se o conjunto dessas soluções satisfaz algumas propriedades topológicas.

Um resultado obtido por Peano em 1890 mostra que ao trocarmos a hipótese de Lipschitz apenas pela continuidade da f no problema de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

definido em $\mathbb{R}$ continuamos obtendo uma solução local, mas no geral não temos a unicidade da solução. E para um x_0 fixado, o conjunto das soluções de (1.1)-(1.2) é chamado "Peano funnel".

A partir desse resultado começou-se a estudar as estruturas de tais conjuntos, com o objetivo de descrever completamente suas propriedades topológicas e algébricas.

O que Peano fez, foi mostrar que, se $\mathcal{S}$ é o conjunto das soluções do problema (1.1)-(1.2), então $\mathcal{S}(t) = \{x(t) : x \in \mathcal{S}\}$ é sempre não-vazio, compacto e conexo na topologia da reta, para t numa vizinhança de t_0. E esse resultado, por sua vez, foi estendido em 1923 por Kneser (KNESER, 1923) para equações diferenciáis em $\mathbb{R}^n$ e cinco anos depois Hukuhara (FUKUHARA, 1928) provou que o conjunto $\mathcal{S}$ é um continuum[2] no espaço de Banach das funções contínuas com a norma do supremo.

[2]Um continuum é um conjunto que satisfaz as propriedades de ser não-vazio, conexo e compacto.

Nosso interesse nesse capítulo é mostrar a propriedade de Kneser para o conjunto das soluções brandas do seguinte problema:

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t)),\ t \geq 0, \tag{1.3}$$

$$u(0) = 0,\ u'(0) = y,\ u''(0) = z, \tag{1.4}$$

onde A é o gerador de uma família (α, β, γ)-regularizada.[3]

Tal equação é o melhor modelo para o estudo das vibrações de estruturas flexíveis com amortecimento. O diferencial deste modelo em relação aos modelos anteriores é que neste caso a tensão e a deformação não estão ligadas por uma relação de proporcionalidade, como por exemplo no modelo de Hooke. Essa equação surge no artigo de Bose e Gorain (BOSE; GORAIN, 1998) onde eles estão interessados em obter um modelo mais realista para as vibrações de uma estrutura elástica, conhecida como modelo linear padrão[4] da viscoelasticidade. Para mais informações sobre estruturas elásticas e viscoelásticas (FUNG, 1965), assim como os artigos de Gorain (GORAIN, 2009; GORAIN; BOSE, 2002). Notamos que em geral não podemos esperar que (1.3) esteja bem-posta (XIAO; LIANG, 2013). Também é conhecido que a fim de analizar se o problema é bem-posto, uma abordagem direta leva a melhores resultados do que uma redução a uma equação de primeira ordem (CHILL; SRIVASTAVA, 2005)

No artigo (BOSE; GORAIN, 1998) estuda-se a equação

$$y'' + \lambda y''' = c^2(\Delta y + \nu \Delta y')$$

$$y(x, 0) = y_0, y'(x, 0) = y_1, y''(x, 0) = y_2$$

onde Δ é o Laplaciano em $\mathbb{R}^n$, λ, ν são constante pequenas satisfazendo $\lambda < \nu$ e $c > 0$ uma constante. Tal equação está definida em um aberto conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ satisfazendo algumas propriedades.

Comparando com o problema de valor inicial (1.3)-(1.4), temos que $\alpha = \lambda$, $\beta = c^2$ e $\gamma = c^2\nu$, e no artigo (FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2010) é mostrado que é o gerador de uma família $(\lambda, c^2, \nu c^2)$-regularizada. É razoável portanto, supor que $\alpha\beta \leq \gamma$ para que nosso problema abstrato esteja englobando o problema concreto descrito por

[3]Falaremos sobre as famílias (α, β, γ)-regularizada no cápitulo 4.

[4]Standard linear model

Gorain.

Os problemas que envolvem estruturas flexíveis vêm sendo estudados a bastante tempo, tendo como uma das motivações (principalmente nas décadas de 70-80) a preocupação em compreender melhor como tais estruturas iriam se comportar por exemplo em satélites, ou veículos espaciais. Tal preocupação pode ser vista por exemplo em (LIKINS, 1969) e em (NOLL; ZVAVA; DEYST, 1969) que é um "Tecnical report" da NASA com o objetivo de disseminar informações práticas para os engenheiros que trabalhavam na teoria de controle para tais tipos de veículos. Mais recentemente (GORAIN; BOSE, 2002) estudou problemas de controlatibilidade exata para o caso de um painel solar ligado a uma estrutura rígida, que é um sistema híbrido, assim como podemos observar em outras situações, como por exempo em alguns sistemas mecânicos, em robôs com braços flexíveis, etc. Alguns outros resultados também relacionados à dinâmica e controle para estruturas flexíveis podem ser vistos em (WU; JUANG, 1981). Em (POBLETE; POZO, 2013) estuda-se soluções fortes periócias para uma equação de terceira ordem semelhante. E mais recentemente (CUEVAS; LIZAMA, 2009; DE ANDRADE; LIZAMA, 2011; FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2010; GORAIN; BOSE, 2002; GORAIN, 2009), apenas para citar alguns.

Um resumo deste capítulo foi publicado no artigo "L^p-boundedness and topological structure of solutions for flexible structural systems" Mathematical Methods in the Applied Sciences (ANDRADE et al, 2015).

2 Preliminares

Neste capítulo iremos expor os principais resultados mais gerais que iremos utilizar no decorrer deste trabalho, e no caso de informações mais específicas complementaremos no respectivo capítulo.

2.1 Espaço de fase

Começamos introduizindo a definição axiomática para o espaço de fase $\mathcal{B}$ a qual é semelhante à introduzida por Hale e Kato (HALE; KATO, 1978), mas que definiremos como encontrada em (HINO; NAITO, 1991). Seja X um espaço de Banach. De forma mais precisa, $\mathcal{B}$ será o espaço das funções lineares mapeando $(-\infty, 0]$ em X dotado com a seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ e que satisfaz os seguinte axiomas:

(A) Se $x : (-\infty, \sigma + a) \to X$, $a > 0$, é contínua em $[\sigma, \sigma + a]$ e $x_\sigma \in \mathcal{B}$ então para todo t em $[\sigma, \sigma + a)$ as seguintes condições são válidas:

(i) $x_t \in \mathcal{B}$.

(ii) $\|x(t)\| \leq H\|x_t\|_{\mathcal{B}}$.

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup\{\|x(s)\| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t - \sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$,

onde $H \geq 0$ é uma constante; $K, M : [0, \infty) \to [0, \infty)$, K é contínua, M é localmente limitada e H, K e M são independentes de x.

(A_1) Considerando a função x de (A), a função $t \to x_t$ é contínua de $[\sigma, \sigma + a)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ em $\mathcal{B}$.

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo.

O livro (HINO; NAITO, 1991) é uma boa referência para diversos exemplos de espaços de fase assim como outros resultados referentes a tais espaços.

Frequentemente na teoria das equações diferenciais funcionais com retardo ilimitado precisamos de uma propriedade adicional no espaço $\mathcal{B}$ para obter alguns resultados. Denotaremos por C_{00} o espaço das funções contínuas de $(-\infty, 0]$ em X com suporte compacto. Dos axiomas do espaço de fase é fácil ver que $C_{00} \subseteq \mathcal{B}$. Neste capítulo consideraremos o seguinte axioma (HINO; NAITO, 1991).

(C-2) Se uma sequência uniformemente limitada $(\varphi^n)_n$ em C_{00} converge para uma função φ na topologia compacto-aberta, então φ pertence a $\mathcal{B}$ e $\|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \to 0$, com $n \to \infty$.

Observação 2.1. *Quando o axioma (C-2) vale, o espaço $C_b((-\infty, 0], X)$ está continuamente incluso em $\mathcal{B}$ ((HINO; NAITO; MURAKAMI, 1991) proposição 7.1.1). Onde $C_b((-\infty, 0], X)$ é o espaço das funções contínuas e limitadas. Então, existe uma constante $Q \geq 0$ tal que $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq Q\|\psi\|_\infty$, para todo $\psi \in C_b((-\infty, 0], X)$.*

Seja $S(t) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ o C_0-semigrupo definido por $S(t)\varphi(\theta) = \varphi(0)$ para $\theta \in [-t, 0]$ e $S(t)\varphi(\theta) = \varphi(t + \theta)$ para $\theta \in (-\infty, -t]$, onde $t \geq 0$. Seja $\mathcal{B}_0 = \{\varphi \in \mathcal{B} : \varphi(0) = 0\}$. Denotaremos por $S_0(t)$ a restrição de $S(t)$ para $\mathcal{B}_0$.

(FMS) O espaço $\mathcal{B}$ é dito um espaço de memória amortecida se verifica o axioma (C-2) e $S_0(t)\varphi \to 0$ quando $t \to \infty$ para todo $\varphi \in \mathcal{B}_0$.

(UFMS) O espaço $\mathcal{B}$ é dito um espaço de memória uniformemente amortecida se satisfaz (C-2) e $\|S_0(t)\|_{\mathcal{B}} \to 0$ quando $t \to \infty$.

Observação 2.2. *Se $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida, as funções $K(\cdot)$ e $M(\cdot)$ são limitadas. Nesse caso, escrevemos $K = \sup_{t\geq 0} K(t)$ e $M = \sup_{t\geq 0} M(t)$. Para mais detalhes, o leitor pode consultar (HINO; NAITO; MURAKAMI, 1991) proposição 7.1.5. Além disso, podemos escolher $Q = K$, onde Q é a constante na Observação 2.1. E, se $\mathcal{B}$ é um UFMS, podemos selecionar $M(t) = \|S_0(t)\|$. Portanto, neste caso, existem constantes $M, \mu > 0$ tal que $M(t) \leq Me^{-\mu t}$ para todo $t \geq 0$.*

Exemplo 2.3. *(O espaço de fase $C_g^0(X)$)* Seja $\mathcal{B} = C_g^0(X)$ o espaço consistindo das funções contínuas $\varphi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\displaystyle\lim_{\theta\to-\infty} \frac{\|\varphi(\theta)\|}{g(\theta)} = 0$, onde $g : (-\infty, 0] \to (0, \infty)$ é uma função contínua que satisfaz as condições (g-1) e (g-2) como em (HINO; NAITO, 1991). Ou seja, que satisfaz (g-1) A função $G(t) = \sup_{\theta \leq -t} \dfrac{g(t+\theta)}{g(\theta)}$ é localmente limitada para $t \geq 0$.

(g-2) $g(\theta) \to \infty$ as $\theta \to -\infty$.

A norma em $\mathcal{B}$ é definida por

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\theta \leq 0} \frac{\|\varphi(\theta)\|}{g(\theta)}$$

o espaço $\mathcal{B}$ é um espaço de fase (HINO; NAITO; MURAKAMI, 1991) Teorema 1.3.2. Se G é limitada, então $\mathcal{B}$ satisfaz (FMS) e, se $G(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, então $\mathcal{B}$ satisfaz (UFMS) (HINO; NAITO; MURAKAMI, 1991) exemplo 7.1.7. Para simplificar algumas estimativas, no texto sempre iremos assumir que g é decrescente e $g(0) = 1$.

Exemplo 2.4. *(O espaço de fase $C \times L^p$) Seja $1 \leq p < \infty$, $0 \leq r < \infty$ e g uma função não-negativa, mensurável a Borel em $(-\infty, -r)$ satisfazendo as condições $(g-5), (g-6)$ e $(g-7)$ como em (HINO; NAITO, 1991). Ou seja, que satisfaz*

(g-5) $\int_u^{-r} g(\theta)d\theta < \infty$ *para todo* $u \in (-\infty, -r)$.

(g-6) $g(u+\theta) \leq G(u)g(\theta)$ *para* $u \leq 0$ *e* θ *em* $(-\infty, -r) - N_u$, *onde* $N_u \subset (-\infty, -r)$ *tem medida de Lebesgue nula e para uma função não-negativa* G *que é localmente limitada em* $(-\infty, 0]$.

(g-7) $\int_{-\infty}^{-r} g(\theta)d\theta < \infty$

Então o espaço $C \times L^p$ satisfaz (FMS). Além disso, satisfaz (UFMS) se e somente se esssup$\{\frac{g(\theta-t)}{g(\theta)} : \theta \leq -r\} \to 0$ *quando* $t \to \infty$ *((HINO; NAITO; MURAKAMI, 1991) proposição 1.4.11).*

2.2 Medida de não-compacidade

A definição de medida de não-compacidade de um subconjunto limitado em espaços normados foi introduzida por K. Kuratowski na década de 30. Algumas décadas depois tal definição voltou a ser utilizada devido aos avanços na teoria de equações diferenciais em espaços de Banach abstratos, onde tal medida se mostra uma grande ferramenta, principalmente para o estudo de existência de pontos fixo. A seguir definiremos a medida de não-compacidade e enunciaremos algumas propriedade e um teorema de ponto fixo que utilizaremos no capítulo 2.

Sejam E espaço de Banach, B um subconjunto limitado de E, e $\varepsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de B é uma ε-cobertura se $diam(V_i) \leq \varepsilon$ para todo i. A medida de não compacidade de Kuratowski de B é definida por

$$\alpha_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura finita de } B\ \}.$$

Uma cobertura $\{B_i\}$ de B por bolas de raio $\leq \varepsilon$ chamamos de ε-cobertura restrita de B. Assim a medida de não compacidade de Hausdorff de B é definida por

$$\tilde{\alpha}_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura restrita finita de } B\ \}.$$

A seguir apresentaremos várias propriedades das medidas de não compacidade.

Proposição 2.5. *Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach E. Então*

(i) $\alpha_E(A) = 0$, *se e somente se,* $\overline{A}$ *é compacto, sendo* $\overline{A}$ *o fecho de* A.

(ii) $\alpha_E(\overline{A}) = \alpha_E(A) = \alpha_E(co\{A\})$, *onde* $co\{A\}$ *denota a envoltória convexa de* A.

(iii) $\alpha_E(\lambda A) = |\lambda|\alpha_E(A)$.

(iv) $\alpha_E(A) \leq \alpha_E(B)$ *se* $A \subset B$.

(v) $\alpha_E(A + B) \leq \alpha_E(A) + \alpha_E(B)$.

(vi) $\tilde{\alpha}_E(A) \leq \alpha_E(A) \leq 2\tilde{\alpha}_E(A)$.

Para mais detalhes sobre medida de não-compacidade (ARJUNAN; NADAF, 2014; CHUONG;KE, 2012; DEIMLING, 2010).

Definição 2.6. Seja M um espaço métrico e $X \subset M$, X conjunto não-vazio e limitado. Uma aplicação contínua $f : X \to X$ é dita **condensante** se para todo $A \subset X$ com $\alpha(A) > 0$, f satisfaz:

$$\alpha(f(A)) < \alpha(A)$$

Enunciaremos agora um resultado de ponto fixo devido a Sadovskii (SADOVSKII, 1967).

Teorema 2.7. *Se um operador condensante f mapeia um subconjunto X convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach E nele próprio, então, ele possúi pelo menos um ponto fixo em X.*

2.3 Funções pseudo S-assintoticamente ω-periódica

Nesta subseção estaremos interessados em introduzir alguns conceitos e resultados importantes sobre funções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas. Nesta seção X, Y denotam espaços de Banach.

Definição 2.8. (PIERRI; ROLNIK, 2013) Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}; X)$ (respectivamente, $C_b(\mathbb{R}^+; X)$) é pseudo S-assintoticamente periódica se existe $\omega > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f(s+\omega)-f(s)\|ds = 0$ (respectivamente, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{0}^{t} \|f(s+\omega)-f(s)\|ds = 0$). Nesse caso, dizemos que f é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.

Proposição 2.9. *$PSAP_\omega(\mathbb{R}; C)$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. É fácil ver que $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ é um subespaço vetorial de $C_b(\mathbb{R}; X)$. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ que converge, pela norma $\|\cdot\|_\infty$, para uma função $f \in C_b(\mathbb{R}; X)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe n tal que $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$ e podemos escolher $N = N(n) > 0$ tal que

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f_n(s+\omega) - f_n(s)\|ds \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $t > N$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f(s+\omega) - f(s)\|ds &\leq \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f(s+\omega) - f_n(s+\omega)\|ds \\ &+ \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f_n(s+\omega) - f_n(s)\|ds + \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \|f_n(s) - f(s)\|ds \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $t > N$. Portanto, $f \in PSAP_\omega(\mathbb{R}, X)$. □

Utilizaremos a notação $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ (respectivamente, $PSAP_\omega(\mathbb{R}^+; X)$) para representar o subespaço de $C_b(\mathbb{R}; X)$ (respectivamente, $C_b(\mathbb{R}^+; X)$) formado por todas as funções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas. Notamos que $PSAP_\omega$ com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach e se verifica que $AP_\omega \hookrightarrow SAP_\omega \hookrightarrow PSAP_\omega$.[1]

Definição 2.10. Dizemos que $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ é limitada em conjuntos limitados de X se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$ o conjunto $\{f(t,x) : t \in \mathbb{R}, x \in K\}$ é limitado.

[1]As funções $AP_\omega(X)$ são defindas como a soma $P_\omega \oplus C_0(0,\infty); X)$ onde P_ω é o conjunto das funções com período ω e $C_0(0,\infty); X)$ o conjunto das funções que se anulam no infinito. E dizemos que $f \in SAP_\omega$ se $f \in C_b(\mathbb{R}^+; X)$ e $\lim_{t\to\infty}(f(t+\omega) - f(t)) = 0$.

Definição 2.11. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ é dita uniformemente contínua em conjuntos limitados de X se para todo $\varepsilon > 0$ e todo subconjunto limitado $K \subseteq X$, existe $\delta = \delta_{\varepsilon,K} > 0$ tal que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in K$ com $\|x - y\| < \delta$.

Observação 2.12. *Notamos que $u \in PSAP_\omega(X)$ se, e somente se, $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$ e para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto*

$$C_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}; \|u(t+\omega) - u(t)\|_X \geq \varepsilon\}$$

é um conjunto zero ergódico[2].

Lema 2.13. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ limitada em conjuntos limitados de X e uniformemente contínua em conjuntos limitados de X. Então f satisfaz a seguinte condição.*

(C1) *Para todo $u, v \in C_b(\mathbb{R}; X)$, se*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \|u(s) - v(s)\| ds = 0, \quad \textit{então} \ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds = 0.$$

Demonstração. Seja K um conjunto limitado que contém $Im(u)$ e $Im(v)$. Para $\varepsilon > 0$, pegue $\delta = \delta_{\varepsilon,K}$ como na definição 2.11. Seja $C_\delta = \{t \in \mathbb{R} : \|v(t) - u(t)\| \geq \delta\}$ e $k = \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C_b(\mathbb{R},Y)} + \|f(\cdot, v(\cdot))\|_{C_b(\mathbb{R},Y)}$. Então podemos afirmar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_Y ds &= \frac{1}{2t} \int_{[-t,t]\cap C_\delta} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_Y ds \\
&+ \frac{1}{2t} \int_{[-t,t]\setminus C_\delta} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_Y ds \\
&\leq \frac{1}{2t} k\lambda(C_\delta \cap [-t,t]) + \frac{\varepsilon}{2t} 2t
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de ε, e pelo fato C_δ ser um conjunto de zero ergódico, deduzimos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_Y ds = 0.$$

□

Definição 2.14. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Dizemos que uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ (respectivamente, $f : \mathbb{R}^+ \times X \to Y$) é uniformemente pseudo

[2] Um conjunto $C \subset \mathbb{R}$ é dito zero ergódico se $\frac{\lambda(C\cap[-t,t])}{t} \to 0$ se $t \to \infty$, onde λ é a medida de Lebesgue.

S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de X se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \sup_{x\in K} \|f(s+\omega,x) - f(s,x)\|ds = 0$ (respectivamente, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{0}^{t} \sup_{x\in K} \|f(s+\omega,x) - f(s,x)\|ds = 0$).

Lema 2.15. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ uma função limitada em conjuntos limitados de X, uniformemente contínua em conjuntos limitados de X, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de X. Se $u : \mathbb{R} \to X$ é uma função pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|f(s+\omega,u(s+\omega)) - f(s,u(s))\|ds \le& \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|f(s+\omega,u(s+\omega)) - f(s,u(s+\omega))\| \\ &+ \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|f(s,u(s+\omega)) - f(s,u(s))\|\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.13 sabemos que f satisfaz (C1), logo o segundo termo do lado direito da desigualdade tende a zero quando tomarmos o limite $t \to \infty$.

Portanto, é suficiente provar que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|f(s+\omega,u(s+\omega)) - f(s,u(s+\omega))\|ds = 0. \tag{2.1}$$

Observamos que

$$\int_{-t}^{t}\|f(s+\omega,u(s+\omega)) - f(s,u(s+\omega))\|ds \le \int_{-t}^{t}\sup_{x\in Im(u)}\|f(s+\omega,x) - f(s,x)\|ds,$$

e como f é pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de X temos que (2.1) é satisfeita. □

Lema 2.16. *O espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$ é invariante por translação.*

Demonstração. Seja u em $PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$. Para $s \in \mathbb{R}^+$, vemos que

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|u(\tau+\omega+s) - u(\tau+s)\|d\tau \le \left(1+\frac{s}{t}\right)\left(\frac{1}{2(t+s)}\int_{-(t+s)}^{t+s}\|u(\tau+\omega) - u(\tau)\|d\tau\right).$$

Para $s \in \mathbb{R}^-$, e $t \geq -s$, temos

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|u(\tau+\omega+s)-u(\tau+s)\|d\tau \leq -\frac{s}{t}\|u\|_{C_b(\mathbb{R};X)} + \frac{1}{2t}\int_{-(t+s)}^{t+s}\|u(\tau+w)-u(\tau)\|d\tau.$$

Portanto a função $\tau \to u(\tau+s)$ pertence a $PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$ para cada $s \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 2.17. (PRÜSS, 2013) Uma família de operadores fortemente mensurável $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ é dita uniformemente integrável (ou fortemente integrável) se $\int_0^\infty \|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)}dt < \infty$.

Lema 2.18. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ uma família uniformente integrável e seja $u \in PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$. Então a função $v_u : \mathbb{R} \to X$ dada por*

$$v_u(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)u(s)ds = \int_0^\infty S(s)u(t-s)ds$$

é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.

Demonstração. É claro que $v_u \in C_b(\mathbb{R};X)$. De fato, ainda mais $\|v_u\|_{C_b(\mathbb{R};X)} \leq \|S\|_{L^1}\|u\|_{C_b(\mathbb{R};X)}$. Além disso, para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|v_u(\tau+\omega)-v_u(\tau)\|d\tau &\leq \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\int_0^\infty \|S(s)\|_{\mathcal{B}(X)}\|u(\tau-s+\omega)-u(\tau-s)\|dsd\tau \\ &= \int_0^\infty \|S(s)\|\Phi_t(s)ds,\end{aligned}$$

onde $\Phi_t(s) = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\|u(\tau-s+\omega)-u(\tau-s)\|d\tau$. Utilizando que, pelo Lema 2.16, o espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$ é invariante por translação segue que a função $\tau \to u(\tau-s)$ pertence a $PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$ para cada $s \in \mathbb{R}$ e então $\Phi_t(s) \to 0$ quando $t \to \infty$. Desde que Φ_t é limitada e $s \to \|S(s)\|_{\mathcal{B}(X)}$ é integrável em $[0,\infty)$, utilizando o teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \|S(s)\|_{\mathcal{B}(X)}\Phi_t(s)ds = 0$, o que completa a demonstração.

$\square$

3 Soluções periódicas para equações abstratas com retardo dependendo do estado

Nesse capítulo estudaremos certas propriedades qualitativas para a solução branda do seguinte problema de Cauchy

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_{\rho(t,x_t)}), \quad t \in I, \tag{3.1}$$

$$x_0 = \varphi. \tag{3.2}$$

onde $x(t) \in X$, A, f, ρ são funções que definiremos a seguir e φ elemento do espaço de fase. Mais precisamente, estaremos preocupados em procurar informações sobre a periodicidade da solução.

Esse capítulo está dividido da seguinte forma, na seção 2.1 inicialmente estudaremos a existência e unicidade das soluções para o problema de Cauchy e daremos hipóteses para que a mesma seja extendida para toda a reta. Já na seção 2.2 estaremos preocupados em buscar soluções ω-periódicas e $n\omega$-periódicas. E finalizamos este capítulo com uma aplicação dos resultados aqui apresentados.

3.1 Existência de solução global

Seja X espaço de Banach. Nosso objetivo é estudar a periodicidade para o problema

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_{\rho(t,x_t)}), \quad t \in I,$$

$$x_0 = \varphi.$$

Assumiremos que A é o gerador infinitessímal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos em X. Como referência para teoria de semigrupo e sobre o prolema abstrato de Cauchy de primeira ordem (ENGEL; NAGEL, 2000; PAZY, 2012).

Começaremos estudando a existência para o problema de valor inicial (3.1)-(3.2). Consideraremos $\varphi \in \mathcal{B}$ uma função fixada, onde $\mathcal{B}$ é um espaço de fase como na seção 1.1, e $I = [0, a]$ para $a > 0$ ou $I = [0, \infty)$.

Por questões de simplificação da escrita do texto, iremos assumir $0 \leq \rho(t, \psi) \leq t$, para toda $\psi \in \mathcal{B}$.

Inicialmente iremos considerar o caso em que $I = [0, a]$. E faremos as seguintes hipóteses sobre f.

(F1)(i) Para toda $\psi \in \mathcal{B}$ a função $f(\cdot, \psi)$ de $I \to X$, que leva $t \mapsto f(t, \psi)$, é fortemente mensurável e a função $f(\cdot, 0)$ é integrável em I.

(ii) Existe uma constante $L_1 > 0$ tal que

$$\|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)\| \leq L_1 \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{\mathcal{B}}, \ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}, \tag{3.3}$$

para todo $t \in I$.

(F2) Para todo $r > 0$, existe uma constante $L_2(r) > 0$ tal que

$$\|f(t, x_{t_2}) - f(t, x_{t_1})\| \leq L_2(r)|t_2 - t_1|, \ \forall \, t_1, t_2 \in I,$$

para toda função $x : (-\infty, a] \to X$ tal que $x_0 = \varphi \in \mathcal{B}$, $x : [0, a] \to X$ é contínua e $\max_{0\leq s\leq a} \|x(s)\| \leq r$.

Vale observar, que no geral a constante $L_2(r)$ depende da função φ.

De forma parecida, imporemos as seguintes hipóteses sobre a função ρ.

(R) A função $\rho : I \times \mathcal{B} \to [0, \infty)$ satisfaz

(i) Para todo $\psi \in \mathcal{B}$, a função $t \mapsto \rho(t, \psi)$ é contínua.

(ii) Existe constante $L_\rho > 0$ tal que para todo $t \in I$

$$|\rho(t, \varphi_2) - \rho(t, \varphi_1)| \leq L_\rho \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{\mathcal{B}}, \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}$$

Mostraremos alguns exemplos de funções que satisfazem essas condições no espaço $\mathcal{B} = C_g^0(X)$, como definido no Exemplo 1.3.

Exemplo 3.1. Seja $P : (-\infty, 0] \to \mathcal{L}(X)$ uma aplicação cujos valores são operadores fortemente contínuos que satisfaz as seguintes condições:
(i) $\|P\| := \sup_{\theta \leq 0} \|P(\theta)\| < \infty$.
(ii) $\int_{-\infty}^{0} \|P(\theta)\| g(\theta) d\theta < \infty$.
(iii) Existe $L_P > 0$ tal que $\int_{-\infty}^{0} \|P(\theta - t_2) - P(\theta - t_1)\| g(\theta) d\theta \leq L_P |t_2 - t_1|$ para todo $t_2, t_1 \geq 0$.

Definimos
$$f(t, \psi) = \int_{-\infty}^{0} P(\theta)\psi(\theta) d\theta, \ t \geq 0, \ \psi \in C_g^0(X).$$
Segue direto que f satisfaz (F1) com
$$L_1 = \int_{-\infty}^{0} \|P(\theta)\| g(\theta) d\theta.$$

Além disso, para toda função $x : (-\infty, a] \to X$ tal que $x_0 = \varphi \in \mathcal{B}$, $x : [0, a] \to X$ é contínua e $\max\limits_{0 \leq s \leq a} \|x(s)\| \leq r$ temos

$$\begin{aligned} f(t, x_{t_2}) - f(t, x_{t_1}) &= \int_{-\infty}^{0} P(\theta) x(t_2 + \theta) d\theta - \int_{-\infty}^{0} P(\theta) x(t_1 + \theta) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{0} [P(s - t_2) - P(s - t_1)] \varphi(s) ds \\ &\quad + \int_{-t_1}^{0} [P(s + t_1 - t_2) - P(s)] x(s + t_1) ds + \int_{t_1 - t_2}^{0} P(s) x(s + t_2) ds, \end{aligned}$$

para $0 \leq t_1 \leq t_2$. Usando (i)-(iii) e a decomposição anterior, obtemos

$$\|f(t, x_{t_2}) - f(t, x_{t_1})\| \leq L_P (\|\varphi\| + r + \|P\| r) |t_2 - t_1|.$$

O que mostra que f satisfaz (F2). Observamos também que a estimativa acima é uniforme para φ em conjuntos limitados e independente de I. Além disso, $f(t, \psi)$ é independente de t.

Exemplo 3.2. Nesse exemplo mostramos algumas funções ρ que que satisfazem nossas condições. Não é complicado ver que a função $\rho : [0, \infty) \times C_g^0(X) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(t, \psi) = t - \min\{t, \|\psi(0)\|\} \tag{3.4}$$

satisfaz $0 \leq \rho(t, \psi) \leq t$, $\rho(t, \psi)$ é contínua em t e Lipschitz contínua em ψ com $L_\rho = 1$. De maneira similar, seja $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua ω-periódica tal que $0 \leq p(t) \leq t$ para todo $t \geq 0$. Então a função

$$\rho(t, \psi) = p(t) - \min\{p(t), \|\psi(0)\|\} \tag{3.5}$$

também satisfaz as condições mencionadas. E além disso, nesse caso, $\rho(t, \psi)$ é ω-periódica em t.

Começemos definindo o que queremos dizer por solução branda para o problema de valor inicial (3.1)-(3.2).

Definição 3.3. Uma função $x : (-\infty, a] \to X$ é chamada uma **solução branda** para o problema (3.1)-(3.2) se $x_0 = \varphi$, a função $x : [0, a] \to X$ é contínua e a equação integral

$$x(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s) f(s, x_{\rho(s, x_s)}) ds, \ 0 \leq t \leq a, \tag{3.6}$$

é verificada.

No que segue, utilizaremos a notação $C_\varphi([0, a], X) = \{x \in C([0, a], X) : x(0) = \varphi(0)\}$. Temos que $C_\varphi([0, a], X)$ é um subconjunto fechado de $C([0, a], X)$ na topologia usual. Além disso, para simplificar o texto, se $x \in C_\varphi([0, a], X)$, iremos identificar x com sua extensão para $(-\infty, 0]$ definida por $x(\theta) = \varphi(0)$.

Consideraremos também $\widetilde{M}$ uma constante tal que

$$\|T(t)\| \leq \widetilde{M}, \ 0 \leq t \leq a.$$

E para abreviarmos a escrita definimos $K_a = \sup\limits_{0 \leq t \leq a} K(t)$ e $M_a = \sup\limits_{0 \leq t \leq a} M(t)$.

Lema 3.4. *Assumindo que as condições (F1),(F2), (R) são válidas, e além disso assumindo que $\widetilde{M} L_1 K_a a < 1$. então o problema (3.1)-(3.2) tem uma única solução $x(\cdot)$ em $(-\infty, a]$.*

Demonstração. Escolhemos uma constante $R > 0$ tal que

$$\widetilde{M}(H + L_1 M_a a)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}\int_0^a \|f(s,0)\|ds + \widetilde{M}L_1 K_a a R \leq R. \tag{3.7}$$

Definimos o operador $\Gamma : C_\varphi([0,a],X) \to C_\varphi([0,a],X)$ por

$$\Gamma x(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, x_{\rho(s,x_s)})ds,\ 0 \leq t \leq a, \tag{3.8}$$

Denotamos por $B_R = \{x \in C_\varphi([0,a],X) : \|x(t)\| \leq R,\ 0 \leq t \leq a\}$.

(i) Mostraremos inicialmente que $\Gamma(B_R) \subset B_R$. De fato, para $x \in B_R$, usando (3.7) podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t)\| &\leq \widetilde{M}H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}\int_0^t \|f(s, x_{\rho(s,x_s)})\|ds \\
&\leq \widetilde{M}H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}\int_0^t \|f(s, x_{\rho(s,x_s)}) - f(s,0)\|ds + \widetilde{M}\int_0^t \|f(s,0)\|ds \\
&\leq \widetilde{M}H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}L_1\int_0^t \|x_{\rho(s,x_s)}\|_{\mathcal{B}}ds + \widetilde{M}\int_0^t \|f(s,0)\|ds \\
&\leq \widetilde{M}H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}L_1\int_0^t [K_a \max_{0\leq\tau\leq\rho(s,x_s)} \|x(\tau)\| + M_a\|\varphi\|_{\mathcal{B}}]ds + \widetilde{M}\int_0^t \|f(s,0)\|ds \\
&\leq \widetilde{M}H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}L_1 M_a a\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}L_1 K_a R a + \widetilde{M}\int_0^a \|f(s,0)\|ds \\
&\leq R,
\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq a$.

(ii) Neste passo mostraremos que Γ é Lipschitz contínua. Seja $x, y \in B_R$. Utilizando as condições (F1), (F2) e (R) temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma x(t)-\Gamma y(t)\| &\leq \widetilde{M}\int_0^t \|f(s,x_{\rho(s,x_s)})-f(s,y_{\rho(s,y_s)})\|ds \\
&\leq \widetilde{M}\int_0^t \|f(s,x_{\rho(s,x_s)})-f(s,y_{\rho(s,x_s)})\|ds \\
&+ \widetilde{M}\int_0^t \|f(s,y_{\rho(s,x_s)})-f(s,y_{\rho(s,y_s)})\|ds \\
&\leq \widetilde{M}L_1\int_0^t \|x_{\rho(s,x_s)}-y_{\rho(s,x_s)}\|_{\mathcal{B}}ds+\widetilde{M}L_2(R)\int_0^t |\rho(s,x_s)-\rho(s,y_s)|ds \\
&\leq \widetilde{M}L_1K_a\int_0^t \max_{0\leq\tau\leq\rho(s,x_s)}\|x(\tau)-y(\tau)\|ds+\widetilde{M}L_2(R)L_\rho\int_0^t \|x_s-y_s\|_{\mathcal{B}}ds \\
&\leq \widetilde{M}L_1K_a\int_0^t \max_{0\leq\tau\leq s}\|x(\tau)-y(\tau)\|ds+\widetilde{M}L_2(R)L_\rho\int_0^t \|x_s-y_s\|_{\mathcal{B}}ds \\
&\leq \widetilde{M}L_1K_a t\max_{0\leq s\leq t}\|x(s)-y(s)\|+\widetilde{M}L_2(R)L_\rho K_a t\max_{0\leq s\leq t}\|x(s)-y(s)\| \\
&\leq \widetilde{M}K_a(L_1+L_2(R)L_\rho)t\max_{0\leq s\leq t}\|x(s)-y(s)\|, \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

para todo $0\leq t\leq a$. E consequentemente,

$$\|\Gamma x-\Gamma y\|_\infty \leq \widetilde{M}K_a(L_1+L_2(R)L_\rho)a\|x-y\|_\infty,$$

que estabelece nossa afirmação.

(iii) Para finalizar, neste passo mostraremos que Γ^n é uma contração em B_R para n suficientemente grande. De fato, seja $x,y\in B_R$, $u=\Gamma x$ e $v=\Gamma y$. Argumentando como anteriormente, e substituindo (3.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma^2x(t)-\Gamma^2y(t)\| &= \|\Gamma u(t)-\Gamma v(t)\| \\
&\leq \widetilde{M}L_1K_a\int_0^t \max_{0\leq\tau\leq s}\|u(\tau)-v(\tau)\|ds+\widetilde{M}L_2(R)L_\rho\int_0^t \|u_s-v_s\|_{\mathcal{B}}ds \\
&\leq \widetilde{M}L_1K_a\int_0^t \widetilde{M}K_a(L_1+L_2(R)L_\rho)s\max_{0\leq\tau\leq s}\|x(\tau)-y(\tau)\|ds \\
&\quad +\widetilde{M}L_2(R)L_\rho\int_0^t K_a\widetilde{M}K_a(L_1+L_2(R)L_\rho)s\max_{0\leq\tau\leq s}\|x(\tau)-y(\tau)\|ds \\
&\leq \widetilde{M}^2K_a^2(L_1+L_2(R)L_\rho)^2\frac{t^2}{2}\max_{0\leq s\leq t}\|x(s)-y(s)\|
\end{aligned}
$$

para todo $0 \leq t \leq a$. Seguindo indutivamente, obtemos que

$$\|\Gamma^n x(t) - \Gamma^n y(t)\| \leq \widetilde{M}^n K_a^n (L_1 + L_2(R)L_\rho)^n \frac{t^n}{n!} \max_{0 \leq s \leq t} \|x(s) - y(s)\|$$

o que implica que Γ^n é uma contração para n suficientemente grande. E o ponto fixo $x(\cdot)$ de Γ é a única solução branda para o problema (3.1)-(3.2) em B_R. Além disso, como (3.7) é válido para qualquer constante $R' > R$ podemos repetir o proceso para $B_{R'}$. e concluimos assim, que (3.1)-(3.2) possui uma única solução branda. □

Teorema 3.5. *Assuma que as condições (F1),(F2), (R) são válidas. Então o problema* (3.1)-(3.2) *possui uma única solução branda* $x(\cdot)$ *em* $(-\infty, a]$.

Demonstração. Selecionamos $b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $nb = a$ e $\widetilde{M} L_1 K_a b < 1$. Segue então, do Lema 3.4 que existe uma solução branda $x^1(\cdot)$ do problema (3.1)-(3.2) definida em $(-\infty, b]$. Definamos $\varphi^1 = x_b^1$. Assuma que $n = 2$. Definimos $C_{\varphi^1}([b, 2b], X) = \{y \in C([b, 2b], X) : y(b) = \varphi^1(0)\}$. Para $y \in C_{\varphi^1}([b, 2b], X)$ identificamos y com sua extensão para $(-\infty, b]$ definida por $y(b + \theta) = \varphi^1(\theta)$ para $-\infty < \theta \leq 0$. Definimos $\Gamma : C_{\varphi^1}([b, 2b], X) \to C_{\varphi^1}([b, 2b], X)$ por

$$\Gamma y(t) = T(t - b)\varphi^1(0) + \int_b^t T(t - s) f(s, y_{\rho(s, y_s)}) ds, \ b \leq t \leq 2b.$$

Procedendo como na demonstração do Lema 3.4 podemos estabelecer que existe um ponto fixo $x^2(\cdot)$ de Γ. E substituindo $\varphi^1(0) = x(b)$, temos que

$$x^2(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t - s) f(s, x^2_{\rho(s, x_s^2)}) ds, \ 0 \leq t \leq 2b,$$

o que implica que x^2 é solução branda do problema (3.1)-(3.2) em $(-\infty, 2b]$.

Quando $n > 2$ podemos utilizar o mesmo argumento feito anteriormente para indutivamente concluirmos a existência de uma solução branda para o problema (3.1)-(3.2) em $(-\infty, nb]$. □

Assumimos agora $I = [0, \infty)$ e as condições (F1) e (F2) devem ser consideradas localmente. De forma mais específica, temos que para (F1) ser satisfeita, a função $f(\cdot, 0)$ deve ser localmente integrável (ou seja, $f(\cdot, 0)$ é integrável $[0, a]$ para todo $a > 0$). De forma similar, para que (F2) seja satisfeita, devemos ter que para cada $a > 0$ existe constante $L_2(R) > 0$, a qual também depende de a. Para o caso local, iremos abreviar as hipóteses por (F1-l),(F2-l) e (R-l). Além disso, assumiremos que a função $K(\cdot)$ é limitada em $[0,\infty)$ e denotaremos $K = \sup_{t\geq 0} K(t)$.

Corolário 3.6. *Assuma que as condições (F1-l), (F2-l), (R-l) são válidas. Então, existe uma única solução branda $x(\cdot)$ do problema* (3.1)-(3.2) *definida em* $(-\infty,\infty)$.

Demonstração. Para cada intervalo $(-\infty, n]$ as condições (F1-l), (F2-l), (R-l), são equivalentes as condições (F1), (F2), (R) utilizadas no Teorema 3.5, então de forma semelhante ao Lema, podesse mostrar que a solução existe para cada intervalo desse tipo.

Argumentando como na demonstração do Teorema 3.5 concluímos que existe uma única solução branda x^n do problema (3.1)-(3.2) definida em $(-\infty, n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x^{n+1}|_{(-\infty,n]} = x^n$. Então, a função x definida por $x(t) = x^n(t)$ para $t \leq n$ é bem definida e é a única solução do problema (3.1)-(3.2) definida em $(-\infty,\infty)$. $\square$

Nosso próximo objetivo é mostrar a existência de soluções brandas limitadas em $[0,\infty)$ para o problema (3.1)-(3.2). Lembremos que um semigrupo fortemente contínuo de operadores limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ é dito uniformemente exponencialmente estável se existem constantes $\widetilde{M} \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq \widetilde{M}e^{-\gamma t},\ t \geq 0. \tag{3.10}$$

Para nosso próximo resultado, a constante $L_1 > 0$ presente na condição (F1) é uniforme, o que significa que a estimativa (3.3) vale para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}$ e todo $t \geq 0$. Introduzimos as seguinte notações:

$$\begin{aligned} N &= \gamma \sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|f(s,0)\| ds, \\ C_1 &= \widetilde{M}H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M}(L_1 M\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + N)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Corolário 3.7. *Assuma que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida, as condições (F1-l), (F2-l), (R-l) e* (3.10) *são válidas. Assuma além disso, que L_1 é independente de a, $N < \infty$ e $\dfrac{\widetilde{M}L_1K}{\gamma} < 1$. Então, existe uma única solução branda limitada $x(\cdot)$ do problema*

(3.1)-(3.2) *definida* $(-\infty,\infty)$. *Além disso,*

$$\|x(t)\| \leq \frac{\gamma C_1}{\gamma - \widetilde{M}L_1K},\ t \geq 0.$$

Demonstração. Procedemos como na demonstração do Teorema 3.5. Definamos o operador $\Gamma : C_\varphi(I,X) \to C_\varphi(I,X)$ através de (3.8), onde $C_\varphi(I,X) = \{x \in C_b(I,X) : x(0) = \varphi(0)\}$. Temos que $C_\varphi(I,X)$ é um subconjunto fechado de $C_b(I,X)$. Escolhemos uma constante $R > 0$ tal que

$$\widetilde{M}(H + \frac{L_1M}{\gamma})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M}L_1K}{\gamma}R + \widetilde{M}\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,0)\|ds \leq R. \tag{3.11}$$

Denotemos $B_R = \{x \in C_\varphi(I,X) : \|x(t)\| \leq R,\ 0 \leq t < \infty\}$.

Começaremos mostrando que $\Gamma(B_R) \subseteq B_R$. De fato, para $x \in B_R$, usando (3.11) podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|\Gamma x(t)\| &\leq \widetilde{M}He^{-\gamma t}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,x_{\rho(s,x_s)})\|ds\\
&\leq \widetilde{M}He^{-\gamma t}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,x_{\rho(s,x_s)}) - f(s,0)\|ds\\
&+ \widetilde{M}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,0)\|ds\\
&\leq \widetilde{M}He^{-\gamma t}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}L_1\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|x_{\rho(s,x_s)}\|_{\mathcal{B}}ds + \widetilde{M}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,0)\|ds\\
&\leq \widetilde{M}He^{-\gamma t}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}L_1\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}[K\max_{0\leq\tau\leq\rho(s,x_s)}\|x(\tau)\| + M\|\varphi\|_{\mathcal{B}}]ds\\
&+ \widetilde{M}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,0)\|ds\\
&\leq \widetilde{M}He^{-\gamma t}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M}L_1M}{\gamma}\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}L_1K\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\max_{0\leq\tau\leq s}\|x(\tau)\|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \widetilde{M}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,0)\|ds \qquad (3.12)\\
&\leq \widetilde{M}(H + \frac{L_1M}{\gamma})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M}L_1K}{\gamma}R + +\widetilde{M}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s,0)\|ds\\
&\leq R,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Seja $a > 0$. Vamos restringir Γ para $C_\varphi([0,a],X)$. Denotemos $B_R(a) = \{x \in C_\varphi([0,a],X) : \|x(t)\| \leq R,\ 0 \leq t \leq a\}$. Pelos argumentos anteriores temos $\Gamma(B_R(a)) \subseteq B_R(a)$. Além disso, procedendo como na demonstração do Corolário 3.6 mostramos que Γ tem um ponto fixo em $B_R(a)$. Desde que a foi escolhido de forma arbitrária, isso completa a demonstração da afirmação.

Finalmente, sem dificuldades, verificamos que $R = \dfrac{\gamma C_1}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K}$ satisfaz a desigualdade (3.11). □

3.2 Existência de soluções periódicas

A partir de agora, estaremos interessados em estudar a existência de soluções periódicas para (3.1). Nessa seção usaremos $I = [0,\infty)$, as funções f e ρ estão definidas em $[0,\infty)\times\mathcal{B}$, e existe $\omega > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f(t+\omega,\psi) &= f(t,\psi), \\ \rho(t+\omega,\psi) &= \rho(t,\psi) \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e $\psi \in \mathcal{B}$.

Observação 3.8. Assumindo que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida e as condições (F1), (F2) e (R) são válidas em $[0,\omega]$, temos que as condições (F1-l) e (R-l) são satisfeitas em $[0,\infty)$ com L_1 e L_ρ independentes de a. Além disso, (F2-l) também é válida, no entanto $L_2(r)$ depende do intervalo $[0,a]$. De fato, seja $t, t_1, t_2 \in [(n-1)\omega, n\omega]$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e seja $x : (-\infty, n\omega] \to X$ uma função tal que $x_0 = \psi \in \mathcal{B}$, $x : [0,n\omega] \to X$ é contínua e $\max\limits_{0\leq s\leq n\omega} \|x(s)\| \leq r$. Definimos

$$\psi^1(\theta) = \begin{cases} x(\theta + (n-1)\omega), & -(n-1)\omega \leq \theta \leq 0, \\ \psi(\theta + (n-1)\omega), & \theta \leq -(n-1)\omega, \end{cases}$$

e $y(s) = x(s + (n-1)\omega)$ para $-\infty < s \leq \omega$. Temos que $y_0 = \psi^1$, $\|\psi^1\|_{\mathcal{B}} \leq Kr + M\|\psi\|_{\mathcal{B}}$, e

$\|y(s)\| \leq r$ para $s \in [0, \omega]$. Então, aplicando a condição (F2) no intervalo $[0, \omega]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|f(t, x_{t_2}) - f(t, x_{t_1})\| &= \|f(s + (n-1)\omega, y_{s_2}) - f(s + (n-1)\omega, y_{s_1})\| \\
&= \|f(s, y_{s_2}) - f(s, y_{s_1})\| \\
&\leq L_2'(r)|s_2 - s_1| \\
&= L_2'(r)|t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

onde $t = s + (n-1)\omega$, $t_i = s_i + (n-1)\omega$, $i = 1, 2$, e $L_2'(r)$ é a constante correspondente para todas as funções $\psi^1 \in \mathcal{B}$ tais que $\|\psi^1\|_{\mathcal{B}} \leq Kr + M\|\psi\|_{\mathcal{B}}$.

O próximo resultado mostra que o problema (3.1)-(3.2) possui uma solução branda limitada definida em $[0, \infty)$.

Teorema 3.9. *Assuma que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida, as condições (F1), (F2) e (R) são válidas em $[0, \omega]$, e a condição* (3.10) *é válida. Então o problema* (3.1)-(3.2) *possui uma única solução branda limitada $x(\cdot)$ definida em $(-\infty, \infty)$.*

Demonstração. Segue do Corolário 3.6 que existe uma única solução branda $x(\cdot)$ do problema (3.1)-(3.2) definida em $(-\infty, \infty)$.

Como o objetivo de mostrar que $x(\cdot)$ é limitada em $[0, \infty)$, tomamos $n\omega \leq t < (n+1)\omega$,

$n \in \mathbb{N}_0$, e fazemos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \widetilde{M} e^{-\gamma t} H \|\varphi\| + \widetilde{M} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|f(s, x_{\rho(s,x_s)}) - f(s,0)\| ds \\
&+ \widetilde{M} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|f(s,0)\| ds \\
&\leq \widetilde{M} e^{-\gamma t} H \|\varphi\| + \widetilde{M} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{(i-1)\omega}^{i\omega} e^{-\gamma(t-s)} \|f(s, x_{\rho(s,x_s)}) - f(s,0)\| ds \\
&+ \widetilde{M} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{(i-1)\omega}^{i\omega} e^{-\gamma(t-s)} \|f(s,0)\| ds \\
&\leq \widetilde{M} e^{-\gamma t} H \|\varphi\| + \widetilde{M} \sum_{i=1}^{n+1} e^{-\gamma(t-(i-1)\omega)} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} \|f(\xi, x_{\rho(\xi, x_{\xi+(i-1)\omega})}) - f(\xi,0)\| d\xi \\
&+ \widetilde{M} \sum_{i=1}^{n+1} e^{-\gamma(t-(i-1)\omega)} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} \|f(\xi,0)\| d\xi \\
&\leq \widetilde{M} e^{-\gamma t} H \|\varphi\| + \widetilde{M} L_1 e^{-\gamma t} \sum_{i=1}^{n+1} e^{\gamma\omega(i-1)} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} \|x_{\rho(\xi, x_{\xi+(i-1)\omega})}\| d\xi \\
&+ \widetilde{M} e^{-\gamma t} \sum_{i=1}^{n+1} e^{\gamma\omega(i-1)} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} \|f(\xi,0)\| d\xi \\
&\leq \widetilde{M} e^{-\gamma t} H \|\varphi\| + \widetilde{M} K L_1 e^{-\gamma t} \sum_{i=1}^{n+1} e^{\gamma\omega(i-1)} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} \max_{0 \leq \tau \leq \xi} \|x(\tau)\| d\xi \\
&+ \widetilde{M} L_1 M e^{-\gamma t} \sum_{i=1}^{n+1} e^{\gamma\omega(i-1)} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} \|\varphi\| d\xi + \widetilde{M} e^{-\gamma t} \sum_{i=1}^{n+1} e^{\gamma\omega(i-1)} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} \|f(\xi,0)\| d\xi \\
&\leq \widetilde{M}(H + L_1 M \frac{e^{\gamma\omega}}{\gamma}) \|\varphi\| + \widetilde{M} \frac{e^{\gamma\omega}}{e^{\gamma\omega} - 1} \int_0^\omega e^{\gamma\xi} (K L_1 \max_{0 \leq \tau \leq \xi} \|x(\tau)\| + \|f(\xi,0)\|) d\xi \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$. $\square$

Consequentemente, sob as hipóteses gerais, temos que para todo $\varphi \in \mathcal{B}$ existe uma solução branda limitada $x(\cdot) = x(\cdot, \varphi)$ do problema (3.1)-(3.2) construída no Teorema 3.9. No que segue, denotaremos por P a aplicação de Poincaré

$$P\varphi = x_\omega(\cdot, \varphi).$$

Para estudar a periodicidade de $x(\cdot, \varphi)$ precisaremos de algumas propriedades adicionais de $x(\cdot, \varphi)$. Consideremos o problema

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, x_{\rho(t,y_t)}),\ 0 \leq t \leq \omega \tag{3.13}$$

$$y_0 = x_\omega. \tag{3.14}$$

Definição 3.10. Uma função $y : (-\infty, a] \to X$ é dita uma **solução branda** para a equação (3.13)-(3.14) se $y_0 = x_\omega$, a função $y : [0, \omega] \to X$ é contínua e a equação integral

$$y(t) = T(t)x(\omega) + \int_0^t T(t-s)f(s, x_{\rho(s,y_s)})ds,\ 0 \leq t \leq \omega,$$

é satisfeita.

Lema 3.11. *Assumindo as condições do Teorema 3.9, existe uma única solução branda $y(\cdot)$ para o problema (3.13)-(3.14) em $[0, \omega]$.*

Demonstração. Definimos o operador $\Gamma : C_\omega([0, \omega], X) \to C_\omega([0, \omega], X)$ por

$$\Gamma y(t) = T(t)x(\omega) + \int_0^t T(t-s)f(s, x_{\rho(s,y_s)})ds,\ 0 \leq t \leq \omega,$$

onde $C_\omega([0, \omega], X) = \{y \in C([0, \omega], X) : y(0) = x(\omega)\}$. É imediato que C_ω é um subconjunto fechado de $C([0, \omega], X)$.

Além disso, para $y, z \in C_\omega([0, \omega], X)$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma y(t) - \Gamma z(t)\| &\leq \widetilde{M} \int_0^t \|f(s, x_{\rho(s,y_s)}) - f(s, x_{\rho(s,z_s)})\|ds \\
&\leq \widetilde{M} L_2(R) \int_0^t |\rho(s, y_s) - \rho(s, z_s)|ds \\
&\leq \widetilde{M} L_2(R) L_\rho \int_0^t \|y_s - z_s\|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq \widetilde{M} L_2(R) L_\rho K_\omega \int_0^t \max_{0 \leq \tau \leq s} \|y(\tau) - z(\tau)\|ds \\
&\leq \widetilde{M} L_2(R) L_\rho K_\omega t \max_{0 \leq s \leq t} \|y(s) - z(s)\|
\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq \omega$. Repetindo esse argumento, obtemos que Γ^n é uma contração para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. E o ponto fixo $y(\cdot)$ de Γ é a única solução de (3.13)-(3.14). □

Lema 3.12. *Se $x_\omega(\cdot, \varphi) = \varphi$, então $x(\cdot, \varphi)$ é ω-periódica.*

Demonstração. Abreviaremos $x(t) = x(t,\varphi)$. Definimos $y(t) = x(t+\omega)$ para $t \geq 0$. Usando a periodicidade de f e ρ, temos

$$\begin{aligned} y(t) = x(t+\omega) &= T(t+\omega)\varphi(0) + \int_0^{t+\omega} T(t+\omega-s)f(s,x_{\rho(s,x_s)})ds \\ &= T(t)\left[T(\omega)\varphi(0) + \int_0^{\omega} T(\omega-s)f(s,x_{\rho(s,x_s)})ds\right] \\ &+ \int_{\omega}^{t+\omega} T(t+\omega-s)f(s,x_{\rho(s,x_s)})ds \\ &= T(t)x(\omega) + \int_0^t T(t-\xi)f(\xi,x_{\rho(\xi,y_\xi)})d\xi \\ &= T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-\xi)f(\xi,x_{\rho(\xi,y_\xi)})d\xi \end{aligned}$$

que é o mesmo que dizer que $y(\cdot)$ é uma solução para o problema (3.13)-(3.14) com condição inicial $y_0 = x_\omega = \varphi$. Além disso, vemos que $x(\cdot)$ também é uma solução de (3.13)-(3.14) com condição inicial $x_0 = \varphi$. Pela unicidade da solução obtemos que $y(t) = x(t+\omega) = x(t)$, o que implica que $x(\cdot)$ é uma função ω-periódica. $\square$

Como consequência do Lema 3.12, a existência de soluções periódicas para a equação (3.1) está relacionada com a existência de pontos fixos para P.

No que segue, denotaremos por P_n a aplicação de Poincaré

$$P_n\varphi = x_{n\omega}(\cdot,\varphi).$$

Observação 3.13. Assuma que $\mathcal{B}$ é um espaço de memória amortecida e as condições (F1), (F2), e (R) são válidas em $[0,\omega]$. Segue da Observação 3.8 que L_1, L_ρ e $L_2(r)$ são uniformes em $[0,\infty)$. De forma mais especifica, seja $x : (-\infty,\infty) \to X$ uma função tal que $x_0 = \psi \in \mathcal{B}$, $x : [0,\infty) \to X$ é contínua e $\max\limits_{0\leq s<\infty)} \|x(s)\| \leq r$ e $\|\psi\| \leq r_1$. Então, usando a Observação 3.8, obtemos

$$\|f(t,x_{t_2}) - f(t,x_{t_1})\| \leq L_2'(r)|t_2 - t_1|,$$

onde $L_2'(r)$ é a constante correspondende a todas as funções $\psi^1 \in$ tais que $\|\psi^1\| \leq Kr + Mr_1$. Para darmos enfase a tal situação, escreveremos $L_2(r, Kr+Mr_1)$ ao invés de $L_2'(r)$.

No que segue, iremos lidar com um espaço de fase $\mathcal{B}$ que satisfaz (UFMS), ver página

17. Neste caso, podemos assumir que

$$M(t) \leq M_0 e^{-\mu t},\ t \geq 0,$$

para alguma constante $M_0 \geq 1$ e $\mu > 0$.

Para o nosso próximo teorema, e assumindo hipóteses apropriadas, usaremos as constantes $R, R_1 > 0$ dadas por

$$\frac{\widetilde{M} L_1 K}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K}[\widetilde{M} H K + M_0] R_1 + \frac{\widetilde{M} N K}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K} < R_1, \tag{3.15}$$

$$R = \frac{\widetilde{M}(\gamma H + L_1 M_0)}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K} R_1 + \frac{\widetilde{M} N}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K}. \tag{3.16}$$

Além disso, denotaremos por $B_r = \{\varphi \in \mathcal{B} : \|\varphi\|_{\mathcal{B}} < r\}$.

Teorema 3.14. *Assuma que $\mathcal{B}$ é UFMS, as condições (F1), (F2) e (R) são válidas em $[0, \omega]$, e o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ satisfaz a condição* (3.10). *Além disso assuma que*

$$\widetilde{M}(L_1 + L_2(R, KR + M_0 R_1) L_\rho) K (1 + \widetilde{M} H K + M_0) < \gamma, \tag{3.17}$$

então existe uma solução branda $n\omega$-periódica de (3.1).

Demonstração. Como

$$\widetilde{M} L_1 K (1 + \widetilde{M} H K + M_0) < \gamma$$

existem constantes R, R_1 que verificam (3.15)-(3.16). Seja $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$.

Seja $\varphi \in \mathcal{B}$ tal que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq R_1$, e seja $x(t) = x(t, \varphi)$ a solução limitada do problema (3.1)-(3.2) em $[0, \infty)$ cuja existência é garantida pelo Teorema 3.9.

Procedendo como na prova do Corolário 3.7, obtemos

$$\|x(t)\| \leq \frac{\gamma C_1}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K} = \frac{\widetilde{M}(\gamma H + L_1 M_0)}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K} \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M} N}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K} \leq R,$$

para $t \geq 0$. E substituindo essa estimativa em (3.12), temos

$$\|x(t)\| \leq \widetilde{M} H \left[e^{-\gamma t} + \frac{\widetilde{M} L_1 K}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K} \right] \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M} L_1 M_0}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K} \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M} N}{\gamma - \widetilde{M} L_1 K}$$

para todo $t \geq 0$. Por sua vez, obtemos

$$\|x_{m\omega}\|_{\mathcal{B}} \leq \left[\frac{\widetilde{M}K(\gamma H + L_1 M_0)}{\gamma - \widetilde{M}L_1 K} + M(m\omega)\right]\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \frac{\widetilde{M}KN}{\gamma - \widetilde{M}L_1 K},$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\|x_{n\omega}\|_{\mathcal{B}} &\leq K \max_{m\omega \leq t \leq n\omega} \|x(t)\| + M((n-m)\omega)\|x_{m\omega}\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq K\left[\widetilde{M}H(e^{-\gamma m\omega} + \frac{\widetilde{M}L_1 K}{\gamma - \widetilde{M}L_1 K}) + \frac{\widetilde{M}L_1 M_0}{\gamma - \widetilde{M}L_1 K}\right]\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + \frac{\widetilde{M}KN}{\gamma - \widetilde{M}L_1 K} + M((n-m)\omega)\|x_{m\omega}\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

Tomando $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m, n, n-m$ são suficientemente grandes[1], e utilizando (3.15) podemos inferir

$$\|x_{n\omega}\|_{\mathcal{B}} = \|P_n\varphi\| \leq R_1,$$

o que implica $P_n : B_{R_1} \to B_{R_1}$.

Agora mostraremos que P_n é uma contração em B_{R_1}. Seja $\varphi, \psi \in B_{R_1}$ e seja $x(\cdot)$ (resp. $y(\cdot)$) a solução branda do problema (3.1) com condição inicial $x_0 = \varphi$ (resp. $y_0 = \psi$). Usando a Observação 3.13, e procedendo como na demonstração do Lema 3.4, obtemos

$$\begin{aligned}
&\|x(t) - y(t)\| \leq \widetilde{M}He^{-\gamma t}\|\varphi - \psi\| + \widetilde{M}L_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|x_{\rho(s,x_s)} - y_{\rho(s,x_s)}\|ds \\
&+ \widetilde{M}L_2(R, KR + M_0 R_1)\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|\rho(s, x_s) - \rho(s, y_s)|ds \\
&\leq \widetilde{M}[He^{-\gamma t} + \frac{L_1 M_0}{\gamma}]\|\varphi - \psi\| + \widetilde{M}L_1 K \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \max_{0 \leq \xi \leq s} \|x(\xi) - y(\xi)\|ds \\
&+ \widetilde{M}L_2(R, KR + M_0 R_1)L_\rho K \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \max_{0 \leq \xi \leq s} \|x(\xi) - y(\xi)\|ds \\
&+ \frac{\widetilde{M}L_2(R, KR + M_0 R_1)L_\rho M_0}{\gamma}\|\varphi - \psi\| \\
&\leq \widetilde{M}\left[He^{-\gamma t} + \frac{M_0}{\gamma}(L_1 + L_2(R, KR + M_0 R_1)L_\rho)\right]\|\varphi - \psi\| \\
&+ \frac{\widetilde{M}K}{\gamma}(L_1 + L_2(R, KR + M_0 R_1)L_\rho) \max_{0 \leq \xi \leq t} \|x(\xi) - y(\xi)\| \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

[1]Tomamos esses valores para nos utilizarmos do fato que nosso espaço é UFMS.

para todo $t \geq 0$. Isto implica que

$$\max_{0\leq s\leq t} \|x(s) - y(s)\| \leq \frac{\gamma\widetilde{M}H + C_2}{\gamma - C_3}\|\varphi - \psi\|,$$

onde nesse caso, as constantes C_2 e C_3 são dadas por

$$\begin{aligned} C_2 &= \widetilde{M}M_0(L_1 + L_2(R, KR + M_0R_1)L_\rho), \\ C_3 &= \widetilde{M}K(L_1 + L_2(R, KR + M_0R_1)L_\rho). \end{aligned}$$

Então, obtemos

$$\|x_{m\omega} - y_{m\omega}\|_{\mathcal{B}} \leq \left[\frac{K(\gamma\widetilde{M}H + C_2)}{\gamma - C_3} + M(m\omega)\right] \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}}.$$

Além disso, utilizando novamente (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} \max_{m\omega\leq s\leq n\omega} \|x(s) - y(s)\| &\leq [\widetilde{M}He^{-\gamma m\omega} + \frac{C_2}{\gamma}]\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}} + \frac{C_3}{\gamma}\frac{\gamma\widetilde{M}H + C_2}{\gamma - C_3}\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \left[\widetilde{M}H(e^{-\gamma m\omega} + \frac{C_3}{\gamma - C_3}) + \frac{C_2}{\gamma - C_3}\right] \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Portanto, combinando com as estimativas anteriores, obtemos

$$\|x_{n\omega} - y_{n\omega}\| \leq K\left[\widetilde{M}H(e^{-\gamma m\omega} + \frac{C_3}{\gamma - C_3}) + \frac{C_2}{\gamma - C_3}\right]\|\varphi - \psi\| + M((n-m)\omega)\|x_{m\omega} - y_{m\omega}\|.$$

Juntando essas estimativas com (3.17), e assumindo novamente que $m, n, n-m$ são grandes o bastante, podemos inferir que P_n é uma contração. Consequentemente, P_n tem um ponto fixo $\varphi \in B_{R_1}$. Aplicando o Lema 3.12 obtemos que existe uma solução $n\omega$-periódica de (3.1). □

A seguir aplicaremos esse resultado para estudar um caso particular. Assumiremos que $L_2(\cdot)$ é subaditivo. Especificamente, assumiremos que existem constantes $L_2^1, L_2^2 > 0$ tais que

$$L_2(r, r_1) \leq L_2^1 r + L_2^2 r_1.$$

Iremos também denotar $C_4 = 1 + \widetilde{M}HK + M_0$.

Corolário 3.15. *Assuma que $\mathcal{B}$ é UFMS e as condições (F1), (F2) e (R) são válidas em*

$[0, \omega]$, *e o semigrupo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *satisfaz a condição* (3.10) *com* $\gamma > \widetilde{M}L_1KC_4$. *Assuma, além disso que*

$$L_1 + \frac{L_\rho(L_2^1 + L_2^2K)\widetilde{M}N}{\gamma - \widetilde{M}L_1K} + L_\rho\left[\frac{(L_2^1 + L_2^2K)\widetilde{M}(\gamma H + L_1M_0)}{\gamma - \widetilde{M}L_1K} + L_2^2M_0\right]\frac{\widetilde{M}KN}{\gamma - \widetilde{M}L_1KC_4}$$
$$< \frac{\gamma}{\widetilde{M}KC_4}, \tag{3.19}$$

então existe uma solução branda $n\omega$*-periódica* (3.1).

Demonstração. Definamos a constante $R_1 = \dfrac{\widetilde{M}KN}{\gamma - \widetilde{M}L_1KC_4}$, e seja R dado pela expressão (3.16). Inferimos que (3.15) e (3.16) são válidos. E usando (3.19), notamos que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{M}(L_1 + L_2(R, KR + M_0R_1)L_\rho)K(1 + \widetilde{M}HK + M_0)\\
&\leq \widetilde{M}(L_1 + L_\rho(L_2^1 + L_2^2K)R + L_\rho L_2^2M_0R_1)KC_4\\
&= \widetilde{M}KC_4\left[L_1 + \frac{L_\rho(L_2^1 + L_2^2K)\widetilde{M}N}{\gamma - \widetilde{M}L_1K}\right]\\
&+ \widetilde{M}KC_4L_\rho\left[\frac{(L_2^1 + L_2^2K)\widetilde{M}(\gamma H + L_1M_0)}{\gamma - \widetilde{M}L_1K} + L_2^2M_0\right]R_1 < \gamma,
\end{aligned}$$

que mostra que (3.17) é satisfeita. A afirmação é então uma consequência direta do Teorema 3.14. □

Em aplicações particulares da teoria, é frequente que o semigrupo envolvido seja compacto. Lembramos que um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é dito **compacto** (PAZY, 2012) se cada operador $T(t)$ é compacto para $t > 0$. Utilizando que o operador é compacto e o conceito de medida de não-compacidade obteremos a existência de soluções periódicas.

Teorema 3.16. *Assuma que* $\mathcal{B}$ *é UFMS, as condições (F1), (F2) e (R) são válidas em* $[0, \omega]$, *e o semigrupo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é compacto e satisfaz a condição* (3.10) *com* $\gamma > \widetilde{M}L_1K$. *Assuma, além disso, que existe uma constante* $R_1 > 0$ *que satisfaz* (3.15). *Então existe uma solução branda* $n\omega$*-periódica de* (3.1).

Demonstração. Procedemos como no Teorema 3.14, podemos afirmar que existem $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, grandes o suficiente tais que $P_n : B_{R_1} \to B_{R_1}$ e P_n é uma aplicação Lipschitz contínua. Além disso, podemos assumir que

$$M((n-m)\omega)[K(m\omega)H \sup_{0\leq s\leq m\omega} \|T(s)\| + M(m\omega)] < 1.$$

Completamos a prova como em (HERNÁNDEZ; HENRIQUEZ, 1998) Teorema 2.1. Para $D \subset B_R$, $\alpha(D) > 0$, $0 \le \sigma_1 < \sigma_2$, $\sigma \ge 0$, introduzimos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} D[\sigma_1, \sigma_2] &= \{x(\cdot, \varphi)|_{[\sigma_1,\sigma_2]} : \varphi \in D\}, \\ D_\sigma &= \{x_\sigma(\cdot, \varphi) : \varphi \in D\}. \end{aligned}$$

Usando que $T(t)$ é um operador compacto para $t > 0$, obtemos que $D[\sigma_1, \sigma_2]$ é relativamente compacto em $C([\sigma_1, \sigma_2], X)$ onde $\sigma_1 > 0$. Então, nesse caso, $\alpha(D[\sigma_1, \sigma_2]) = 0$. Além disso, através de cálculos diretos, obtemos

$$\alpha(D[0, \sigma]) \le H \sup_{0 \le s \le \sigma} \|T(s)\| \alpha(D).$$

Também, seguindo (SHIN, 1987),

$$\begin{aligned} \alpha(D_\sigma) &\le K(\sigma)\alpha(D([0, \sigma])) + M(\sigma)\alpha(D), \\ \alpha(D_{\sigma_2}) &\le K(\sigma_2 - \sigma_1)\alpha(D([\sigma_1, \sigma_2])) + M(\sigma_2 - \sigma_1)\alpha(D_{\sigma_1}). \end{aligned}$$

Combinando essas estimativas, para $\sigma_1 = m\omega$, $\sigma_2 = n\omega$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(P_n(D)) &= \alpha(D_{n\omega}) \le K((n-m)\omega)\alpha(D([m\omega, n\omega])) + M((n-m)\omega)\alpha(D_{m\omega}) \\ &\le M((n-m)\omega)[K(m\omega)\alpha(D([0, m\omega])) + M(m\omega)\alpha(D)] \\ &\le M((n-m)\omega)[K(m\omega)H \sup_{0 \le s \le m\omega} \|T(s)\| + M(m\omega)]\alpha(D) \\ &< \alpha(D), \end{aligned}$$

o que implica que P é um operador condensante. Pelo teorema de ponto fixo de Sadovskii (SADOVSKII, 1967), inferimos que P tem um ponto fixo $\varphi \in B_R$. $\square$

3.3 Aplicações

Nessa seção, aplicaremos nosso resultado para uma equação concreta. Consideramos X um espaço de Hilbert e A o operador de difusão típico. Isso significa que existe uma base ortonormal $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X, e uma sequência crescente $(\lambda_n)_n$ de números reais tais que $\lambda_n \to \infty$ com $n \to \infty$. O operador A é dado por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n^2 \langle x, z_n \rangle z_n, \ x \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 |\langle x, z_n \rangle|^2 < \infty\}.$$

Nesse caso o semigrupo gerado por A é

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \langle x, z_n \rangle z_n, \ x \in X.$$

Verificamos que $T(t)$ é um operador compacto para $t > 0$, e

$$\|T(t)\| \leq e^{-\lambda_1^2 t}, \ t \geq 0,$$

o que implica que $\widetilde{M} = 1$ e $\gamma = \lambda_1^2$. Tomamos $\mathcal{B} = C_g^0(X)$. Então, obtemos $H = 1$, $K(t) = 1$ e $M(t) = G(t)$. Seja f a função definida no Exemplo 3.1. Temos que

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{-\infty}^{0} \|P(\theta)\| g(\theta) d\theta, \\ L_2(r) &= (\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + r + \|P\| r). \end{aligned}$$

Seja $\rho(\cdot)$ a função dada no Exemplo 3.2. Então, sabemos que $L_\rho = 1$. A próxima afirmação é uma consequência direta do Corolário 3.7.

Corolário 3.17. *Assuma que $G(\cdot)$ é uma função limitada em $[0, \infty)$, $L_1 < \lambda_1^2$, e $\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\lambda_1^2 (t-s)} \|h(s)\| ds < \infty$. Seja $\varphi \in$. Então existe uma única solução branda limitada $x(\cdot)$ do problema (3.1)-(3.2) definida em $[0, \infty)$.*

A seguir consideramos a função ρ dada por (3.5). O resultado seguinte é uma consequência direta do Teorema 3.16.

Corolário 3.18. *Assuma que $G(t) \to 0$, $t \to \infty$. Além disso, assuma que $3L_1 < \lambda_1^2$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ e uma solução branda $n\omega$-periódica para (3.1).*

4 Periodicidade assintótica para soluções de equações de evolução

Nesse capítulo continuamos o estudo de existência de soluções do tipo periódicas para certos tipos de equações, onde o operador A é o gerador de um semigrupo uniformemente assintoticamente estável de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$. Em outras palavras, se verifica a seguinte condição

(UAS) Existem $\tilde{\mu} > 0$ e $\tilde{M} \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq \tilde{M}e^{-\tilde{\mu}t}$ para todo $t \geq 0$.

Nesse capítulo nós iremos procurar soluções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas e também mostramos que um resultado semelhante pode ser obtido também para solução S-assintoticamente ω-periódicas. Finalmente, apresentaremos uma aplicação de nossos resultados.

Mais especificamente, neste capítulo estudaremos condições para a existência e unicidade de soluções brandas pseudo S-assintoticamente ω-periódicas para a equação de evolução semilinear

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

com $A : D(A) \subseteq X \to X$ sendo o gerador de um semigrupo estável em X e f uma função contínua adequada.

Definição 4.1. (BOULITE; MANIAR; N'GUEREKATA, 2005) Uma solução branda para (4.1) em X é uma função contínua e limitada $u : \mathbb{R} \to X$ que satisfaz

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-r)f(r)dr, \tag{4.2}$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \geq s$.

Observação 4.2. Levando em consideração que $T(t)$ é uniformemente assintoticamente estável,podemos ver que se $u(\cdot)$ é uma solução branda para a equação (4.1), então tomando o limite quando s tende a $-\infty$ no lado direito da equação (4.2), obtemos

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)f(\sigma, u(\sigma))d\sigma, \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Reciprocamente, se $u(\cdot)$ é uma função limitada contínua tal que $f(\cdot, u(\cdot))$ é limitada e (4.3) se verifica, então $u(\cdot)$ é uma solução branda para (4.1).

4.1 Existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas

Teorema 4.3. *Assumindo que a condição* **(UAS)** *é válida, seja $f : \mathbb{R} \times X \to X$ uma função limitada em conjuntos limitados de X, uniformemente contínua em conjuntos limitados de X, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall\, x, y \in X,$$

onde $L(\cdot)$ é uma função mensurável tal que as seguintes condições são satisfeitas.

(PS7) *A função $\eta(t) = \tilde{M}e^{-\tilde{\mu}t} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{\tilde{\mu}s}L(s)ds$ é limitada.*

(PS8) *A integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \eta(\tau)d\tau$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Então a equação (4.1) *possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Seja Υ um operador definido por $\Upsilon u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)f(\sigma, u(\sigma))d\sigma$. O Lema 2.15 juntamente com o Lema 2.18 nos permite inferir que Υ mapeia $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ em si mesmo. A importância das condições **(PS7)** e **(PS8)** é que sua validade nos permite mostrar que o operador Υ é uma contração em $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$. Podemos definir uma nova norma em $PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$ por $|||u||| = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{v(t)\|u(t)\|\}$,[1] onde $v(t) = Exp[-k(\eta(t) + \tilde{\mu}\int_{-\infty}^{t}\eta(\tau)d\tau)]$ e $k > 1$. Sejam u e v duas funções em $PSAP_\omega(\mathbb{R};X)$, obtemos que

$$\begin{aligned} v(t)\|\Upsilon u_1(t) - \Upsilon u_2(t)\| &\leq \left(\int_{-\infty}^{t} e^{-\tilde{\mu}(t-\sigma)}v(t)v(\sigma)^{-1}\tilde{M}L(\sigma)d\sigma\right)|||u_1 - u_2||| \\ &= \frac{v(t)}{k}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{-\tilde{\mu}(t-\sigma)}\frac{d}{d\sigma}[v(\sigma)^{-1}]d\sigma\right)|||u_1 - u_2||| \\ &= \frac{1}{k}\left(1 - \tilde{\mu}\int_{-\infty}^{t} e^{-\tilde{\mu}(t-\sigma)}v(t)v(\sigma)^{-1}d\sigma\right)|||u_1 - u_2|||. \end{aligned}$$

E temos que

$$|||\Upsilon u_1 - \Upsilon u_2||| \leq \frac{1}{k}|||u_1 - u_2|||.$$

Lembrando agora que $k > 1$, concluímos pelo princípio da contração que existe uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω-periódica para a equação (4.1) dada por

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)f(\sigma, u(\sigma))d\sigma,\ t \in \mathbb{R}.$$

O que completa a demonstração. □

Para o resultado seguinte, precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.4. *Assuma que a condição* **(UAS)** *vale. Seja u em $PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)$ e seja $v_T^+ : [0,\infty) \to X$ a função definida por*

$$v_T^+(t) = \int_0^t T(t-s)u(s)ds.$$

Então $v_T^+ \in PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)$.

Demonstração. Podemos obter a seguinte estimativa

$$\|v_T^+\|_{C_b([0,\infty);X)} \leq \frac{\tilde{M}}{\tilde{\mu}}\|u\|_{C_b([0,\infty);X)}.$$

[1]Notamos que as normas $|||\cdot|||$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes. Para ver isto, basta usar as condições $(PS7)$ e $(PS8)$. Logo $(PSAP_\omega, |||\cdot|||)$ é completo.

Então $v_T^+ \in C_b([0,\infty);X)$. Além disso

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t \|v_T^+(\tau+\omega)-v_T^+(\tau)\|d\tau &\leq \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^\tau \|T(\tau-s)\|\|u(s+\omega)-u(s)\|dsd\tau \\
&+\frac{1}{t}\int_0^t\int_\tau^{\tau+\omega} \|T(s)\|\|u(\tau+\omega-s)\|dsd\tau \\
&\leq \frac{1}{t}\left(\int_0^t \|T(\tau)\|d\tau\right)\int_0^t \|u(s+\omega)-u(s)\|ds \\
&+\frac{\|u\|_\infty}{t}\int_0^t\int_\tau^{\tau+\omega}\|T(s)\|dsd\tau \\
&\leq \frac{\tilde{M}}{t}\left(\int_0^t e^{\tilde{\mu}\tau}\tau\right)\int_0^t \|u(s+\omega)-u(s)\|ds \\
&+\frac{\omega\tilde{M}\|u\|_\infty}{t}\int_0^t e^{-\tilde{\mu}\tau}d\tau \\
&\leq \frac{\tilde{M}}{\tilde{\mu}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \|u(s+\omega)-u(s)\|ds\right) \\
&+\frac{\omega\tilde{M}\|u\|_\infty}{\tilde{\mu}}\frac{1}{t} \to 0, \text{ quando } t\to\infty.
\end{aligned}$$

Isso completa a prova de que $v_T^+ \in PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)$. □

Teorema 4.5. *Assuma que a condição* **(UAS)** *vale. Seja $f:[0,\infty)\times X\to X$ uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos limitados de X e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de X que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leq L_f\|x-y\|, \text{ para todo } x,y\in X,\ t\geq 0. \tag{4.4}$$

Além disso, que as seguintes condições são satisfeitas.

(PS10) *Existe uma função contínua não-decrescente $W^+:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ tal que $\|f(t,x)\|\leq W^+(\|x\|)$ para todo $t\geq 0$ e $x\in X$.*

(PS11) *Para cada $a\geq 0$ e $r>0$ o conjunto $\{f(s,x): 0\leq s\leq a,\ x\in X,\ \|x\|\leq r\}$ é relativamente compacto em X.*

(PS12) *Existe $r>0$ tal que $\tilde{M}\left(\|u_0\|+\frac{1}{\tilde{\mu}}W^+(r)\right)\leq r$.*

Então existe uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω-periódica $u(\cdot)$ de

$$\begin{aligned}
u'(t) &= Au(t)+f(t,u(t)),\ t\in\mathbb{R}, \\
u(0) &= u_0.
\end{aligned}$$

Demonstração. No que segue, iremos considerar o espaço de Fréchet $C([0,\infty);X)$ munido com a topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos τ_C. Definimos o mapa Υ^+ no espaço $C([0,\infty);X)$ pela expressão

$$(\Upsilon^+ u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma,u(\sigma))d\sigma, \ t \geq 0. \tag{4.5}$$

A demonstração é baseada em uma adaptação das ideias desenvolvidas no recente trabalho (DOS SANTOS; HENRÍQUEZ, 2015) Teorema 3.2. Dividiremos a prova em vários passos.

Passo 1. O mapa Υ^+ é contínuo de $C([0,\infty);X)$ em $C([0,\infty);X)$. Se $(u_n)_n$ é uma sequência em $C([0,\infty);X)$ que converge para u na topologia τ_C, então $(\Upsilon^+ u_n)_n$ converge para $\Upsilon^+ u$ para τ_C. De fato, para cada $a > 0$ temos

$$\sup_{t\in[0,a]} \|\Upsilon^+ u_n(t) - \Upsilon^+ u(t)\| \leq \frac{\tilde{M} L_f}{\tilde{\mu}} \sup_{t\in[0,a]} \|u_n(t) - u(t)\|.$$

Passo 2. Tomemos $B_r = \{u \in C([0,\infty);X) : \|u\|_\infty \leq r\}$. Temos que B_r é um subconjunto fechado e convexo de $C([0,\infty);X)$. Além disso, se u é qualquer elemento de B_r, então notamos que

$$\|\Upsilon^+ u\|_\infty \leq \tilde{M}\left(\|u_0\| + \frac{1}{\tilde{\mu}} W^+(r)\right) \leq r,$$

o que mostra que B_r é invariante por Υ^+.

Passo 3. $\Upsilon^+(B_r)$ é um conjunto relativamente compacto em $C([0,\infty);X)$. Devemos mostrar que temos todas as condições necessárias para aplicarmos o Teorema de Ascoli ((KELLEY, 1975) Teorema 7.17). Inicialmente mostramos que $\Upsilon^+(B_r)(t)$ é um conjunto relativamente compacto em X para todo $t \geq 0$. Isso é uma consequência do teorema do valor médio $\Upsilon^+(B_r)(t) \subseteq T(t)u_0 + \overline{t co(\mathcal{K}^+)}$, onde $co(\mathcal{K}^+)$ denota o envoltória convexa do conjunto $\mathcal{K}^+$ e $\mathcal{K}^+ = \{T(t-s)f(s,x) : 0 \leq s \leq t, \ \|x\| \leq r\}$. Utilizando a hipótese **(PS11)** e o fato que $T(\cdot)$ é um semigrupo fortemente contínuo, obtemos que $\mathcal{K}^+$ é um conjunto relativamente compacto e que $\Upsilon^+(B_r)(t)$ também é relativamente compacto.

Para $u \in B_r$, $h \geq 0$, temos diretamente que

$$\Upsilon^+ u(h) - \Upsilon^+ u(0) = T(h)u_0 - u_0 + \int_0^h T(h-\sigma)f(\sigma,u(\sigma))d\sigma \to 0$$

com $h \to 0$ uniformemente em u. Além disso, para $t > 0$ é satisfeita a seguinte decomposição

$$\begin{aligned}\Upsilon^+ u(t+h) - \Upsilon^+ u(t) &= T(t)(T(h)u_0 - u_0) + \int_0^t (T(t+h-s) - T(t-s))f(s,u(s))ds \\ &+ \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds,\end{aligned}$$

da qual, segue que o conjunto $\Upsilon^+(B_r)$ é equicontínuo em $[0,a]$ para todo $a \geq 0$. Juntando essas propriedades, temos como consequência do Teorema de Ascoli-Arzela que $\Upsilon^+(B_r)$ é um conjunto relativamente compacto em $C([0,\infty);X)$.

Podemos então aplicar o [(CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014), Lema 2.3] e o Lema 4.4 para obter que $\Upsilon^+(PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)) \subseteq PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)$. Desde que Υ^+ é um mapa contínuo na topologia τ_C, segue então $\Upsilon^+(\overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)}^{\tau_C}) \subseteq \overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)}^{\tau_C}$, onde $\overline{B}^{\tau_C}$ denota o fecho do conjunto B na topologia τ_C. Definamos $C^{psap} = B_r \cap \overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}^+;X)}^{\tau_C}$. Temos que C^{psap} é um conjunto fechado e convexo tal que C^{psap} é invariante sob Υ^+. Combinando essas afirmações, temos que Υ^+ satisfaz todas as condições do Teorema de Schauder-Tychonoff[2] para espaços localmente convexos [(GRANAS; DUGUNDJI,2013), Teorema III.1.13]. Portanto, podemos garantir que Υ^+ possui um ponto fixo $\tilde{u}$ em C^{psap}.

Passo 4. O operador Υ^+ possui um único ponto fixo em $C_b([0,\infty);X)$. Assuma que $u \in C_b([0,\infty);X)$ é outro ponto fixo de Υ^+. Seque de (4.4) que

$$e^{\mu t}\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \tilde{M}L_f \int_0^t e^{\tilde{\mu}\sigma}\|u(\sigma) - \tilde{u}(\sigma)\|d\sigma,$$

o que implica que $\|u(t) - \tilde{u}(t)\| = 0$.

Passo 5. Defina $v(t) = \tilde{u}(t+\omega)$, $t \geq 0$. Devemos mostrar que $\Upsilon^+ v - v \in P_0(\mathbb{R}^+;X)$, onde

$$P_0(\mathbb{R}^+;X) = \left\{\phi \in C_b([0,\infty);X) : \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|\phi(s)\|ds = 0\right\}.$$

Podemos estabelecer a seguinte decomposição

$$\begin{aligned}\Upsilon^+ v(s) - v(s) &= T(s)u_0 - T(s+\omega)u_0 - \int_0^\omega T(s+\omega-\tau)f(\tau,\tilde{u}(\tau))d\tau \\ &- \int_0^s T(s-\tau)(f(\tau+\omega,\tilde{u}(\tau+\omega)) - f(\tau,\tilde{u}(\tau+\omega)))d\tau \quad (4.6)\end{aligned}$$

[2]Notamos que $\Upsilon^+(C^{psap}) \subset \Upsilon^+(B_r)$, e assim $\Upsilon^+(C^{psap})$ é compacto, já que C^{psap} é fechado e Υ^+ é contínuo.

e dela podemos inferir

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\int_0^t \|\Upsilon^+ v(s) - v(s)\| ds \le \frac{2\tilde{M}}{\tilde{\mu} t}\|u_0\| + \frac{\tilde{M} W^+(r)}{t}\int_0^t \int_0^\omega e^{-\tilde{\mu}(s+\omega-\tau)} d\tau ds \\
&+ \frac{\tilde{M}}{t}\int_0^t \int_0^s e^{-\tilde{\mu}(s-\tau)} \|f(\tau+\omega, \tilde{u}(\tau+\omega)) - f(\tau, \tilde{u}(\tau+\omega))\| d\tau ds \\
&\le \frac{\tilde{M}}{\tilde{\mu}}(2\|u_0\| + \omega W^+(r))\frac{1}{t} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{\mu} t}\int_0^t \sup_{\|x\|\le r}\|f(\tau+\omega, x) - f(\tau, x)\| d\tau.
\end{aligned}
$$

O que nos leva a concluir que $\Upsilon^+ v - v \in P_0(\mathbb{R}^+; X)$.

Passo 6. Seja $\varphi_+(t) = \|\Upsilon^+ v(t) - v(t)\|$, para $t \ge 0$. Então existe uma única função positiva ergódica $\alpha^\odot : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$
\alpha^\odot(t) = \varphi_+(t) + \tilde{M} L_f \int_0^t e^{-\tilde{\mu}(t-s)} \alpha^\odot(s) ds. \tag{4.7}
$$

Notemos que $a(t) = \tilde{M} L_f e^{-\tilde{\mu} t}$ satisfaz as condições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** do livro (MILLER, 1971), especificamente, usando [(MILLER, 1971) Teorema IV.6.2] o resolvente $r(t)$ associado à função $a(t)$ existe como um elemento de $L^1(\mathbb{R}^+)$ e é único nesse conjunto. O resolvente $r(t)$ é a solução da equação resolvente

$$
r(t) = -a(t) + \int_0^t a(t-s) r(s) ds, \ t > 0. \tag{4.8}
$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros da equação (4.7) por $r(t-\tau)$ e integrando no intervalo $[0, t]$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t r(t-\tau)\alpha(\tau) d\tau - \int_0^t r(t-\tau)\varphi_+(\tau) d\tau &= \int_0^t \left(\int_s^t r(t-\tau) a(\tau - s) d\tau\right) \alpha(s) ds \\
&= \int_0^t (r(t-s) + a(t-s))\alpha(s) ds.
\end{aligned}
$$

Comparando termo, obtemos

$$
-\int_0^t r(t-\tau)\varphi_+(\tau) d\tau = \int_0^t a(t-s)\alpha(s) ds,
$$

Desta afirmação segue-se que

$$
\alpha^\odot(t) = \varphi_+(t) - \int_0^t r(t-\tau)\varphi_+(\tau) d\tau. \tag{4.9}
$$

Desde que $\varphi_+(\cdot)$ é uma função ergódica (Passo 5) nós obtemos que a função $t \to \int_0^t r(t-\tau)\varphi_+(\tau)d\tau$ também é ergódica. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\left|\int_0^t \int_0^s r(s-\tau)\varphi_+(\tau)d\tau ds\right| &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \left(\int_\tau^t |r(s-\tau)|ds\right)|\varphi_+(\tau)|d\tau \\
&\leq \frac{\|r\|_1}{t}\int_0^t |\varphi_+(\tau)|d\tau \to 0 \ \text{ as } \ t\to\infty.
\end{aligned}$$

Reunindo esta propriedade com (4.9), temos que $\alpha^{\odot}$ é uma função ergódica. E isso completa a prova do Passo 6.

Passo 7. Consideremos o conjunto

$$C_+^{erg} = v + \{u \in P_0(\mathbb{R}^+; X) : \|u(t)\| \leq \alpha^{\odot}(t), \ t \in \mathbb{R}^+\},$$

onde $v(\cdot)$ e $\alpha^{\odot}(\cdot)$ são as funções dadas nos Passo 5 e Passo 6 respectivamente. É simples ver que C_+^{erg} é um subconjunto fechado e convexo de $C_b([0,\infty); X)$ na topologia τ_C. Nesse passo mostraremos que C_+^{erg} é invariante por Υ^+. Seja u em $P_0(\mathbb{R}^+; X)$, então podemos decompor

$$\Upsilon^+(v+u) - v = \Upsilon^+(v+u) - \Upsilon^+ v + \Upsilon^+ v - v. \tag{4.10}$$

• Pelo Passo 5 e a decomposição anterior, observamos que para provar que $\Upsilon^+(v+u) - v \in P_0(\mathbb{R}^+; X)$ é suficiente mostrar que $\Upsilon^+(v+u) - \Upsilon^+ v$ é uma função ergódica. Para este fim, calcula-se para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t \|\Upsilon^+(v+u)(s) - \Upsilon^+ v(s)\|ds &\leq \frac{\tilde{M}L_f}{t}\int_0^t \int_\sigma^t e^{-\tilde{\mu}(s-\sigma)}\|u(\sigma)\|ds d\sigma \\
&\leq \frac{\tilde{M}L_f}{\tilde{\mu}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \|u(\sigma)\|d\sigma\right) \to 0, \ \text{como } t\to\infty.
\end{aligned}$$

• Por outro lado, se $\|u(t)\| \leq \alpha^{\odot}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, então

$$\|\Upsilon^+(v+u)(t) - \Upsilon^+ v(t)\| \leq \int_0^t a(t-s)\|u(s)\|ds \leq \int_0^t a(t-s)\alpha^{\odot}(s)ds,$$

onde $a(\cdot)$ é a função dada no Passo 6. Combinando essa propriedade com (4.10) e usando a definição de $\alpha^{\odot}$, obtemos

$$\|\Upsilon^+(v+u)(t) - v(t)\| \leq \varphi_+(t) + \int_0^t a(t-s)\alpha(s)ds = \alpha^{\odot}(t),$$

que implica $\Upsilon^+(v+u) \in C_+^{erg}$, então provamos que C_+^{erg} é invariante pelo operador Υ^+.

Passo 8. Finalmente, procedendo como nos passos 1 a 3, temos que Υ^+ possui um ponto fixo $\tilde{u}_0$ in C_+^{erg}. Portanto, existe $u_0 \in P_0(\mathbb{R}^+; X)$ com $\|u_0(t)\| \leq \alpha(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $\tilde{u}_0 = v + u_0$. Usando agora o Passo 4, concluímos que $\tilde{u} = \tilde{u}_0$, o que implica $\tilde{u} - v \in P_0(\mathbb{R}^+; X)$. Então obtemos $\tilde{u} \in PSAP_\omega(\mathbb{R}^+; X)$, o que completa a prova. □

Corolário 4.6. *Assuma que a condição* **(UAS)** *vale. Seja* $f : [0, \infty) \times X \to X$ *uniformemente pseudo* S*-assintoticamente* ω*-periódica em conjuntos limitados de* X*, satisfaz* (4.4) *e* $f(\cdot, 0) \in C_b(I; X)$.

Se além disso, $\tilde{M}L_f \leq \tilde{\mu}$ *então existe uma única solução branda pseudo* S*-assintoticamente* ω*-periódica* $u(\cdot)$ *de*

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \; t \in \mathbb{R},$$
$$u(0) = u_0.$$

Demonstração. Por (4.4) e usando que $f(\cdot, 0)$ é limitada temos que f é assintoticamente limitada em conjuntos limitados de X. podemos tomar $W^+(\zeta) = C + L_f\zeta$, onde $\|f(t, 0)\| \leq C$ e $\tilde{M}L_f \leq \tilde{\mu}$ implica que $[PS12]$ é satisfeita. □

Observação 4.7. A condição **(PS11)** pode ser trocada pela condição de $T(t)$ ser um semigrupo compacto ou equivalentemente que $T(t)$ é contínuo na topologia uniforme de operadores para $t > 0$ e $R(\lambda, A)$ é compacto para $\lambda \in \rho(A)$ (o livro do Pazy (PAZY, 2012) é especialmente recomendado).

Sobre a existência de uma solução S-assintoticamente ω-periódica para a equação (4.1) para $t \geq 0$ com condição inicial $u(0) = u_0$, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.8. *Assuma que a condição* **(UAS)** *é válida. Seja* $f : [0, \infty) \times X \to X$ *uma função contínua uniformemente* S*-assintoticamente* ω*-periódica em conjuntos limitados que satisfaz* (4.4) *e as condições* **(PS10)**, **(PS11)** *e* **(PS12)** *do Teorema 4.5. Então existe uma única solução branda* S*-assintoticamente* ω*-periódica* $u(\cdot)$ *da equação* (4.1) *para* $t \geq 0$ *com condição inicial* $u(0) = u_0$.

Demonstração. Utilizaremos as mesmas notações como no Teorema 4.5. Iremo apenas mostrar os pontos chaves para obtermos o resultado desejado. Aplicando o Lema [(HENRÍQUEZ; PIERRI, TÁBOAS, 2008), Lema 3.1] e o Lema 4.4, podemos afirmar que $\Upsilon^+(SAP_\omega(X)) \subseteq SAP_\omega(X)$. Desde que Υ^+ é contínua na topologia τ_C segue que $\Upsilon^+\left(\overline{SAP_\omega(X)}^{\tau_C}\right) \subseteq \overline{SAP_\omega(X)}^{\tau_C}$. Podemos então definir $C^{sap} := B_r \cap \overline{SAP_\omega(X)}^{\tau_C}$, nós temos que C^{sap} é invariante por Υ^+. Pelos Passo 1 – Passo 3 da prova do Teorema 4.5 podemos ver que Υ^+ possui um ponto fixo $\tilde{u} \in C^{sap}$. Definimos $v(t) = \tilde{u}(t+\omega)$, $t \geq 0$ a seguir, mostraremos que $\Upsilon^+ v - v \in C_0([0,\infty);X)$. Desde f é uniformemente S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados, para cada $\varepsilon > 0$, existe $T_\varepsilon > 0$ tal que $\|f(\tau+\omega, \tilde{u}(\tau+\omega)) - f(\tau, \tilde{u}(\tau+\omega))\| \leq \varepsilon$, para todo $\tau \geq T_\varepsilon$. Utilizando (4.6), para $t \geq T_\varepsilon$ temos

$$\begin{aligned}
\|\Upsilon^+ v(t) - v(t)\| &\leq 2\tilde{M}e^{-\tilde{\mu}t}\|u_0\| + \tilde{M}W^+(r)\int_0^\omega e^{-\tilde{\mu}(t+\omega-\tau)}d\tau \\
&\quad + 2\tilde{M}W^+(r)\int_0^{T_\varepsilon} e^{-\tilde{\mu}(t-\tau)}d\tau + \tilde{M}\varepsilon\int_{T_\varepsilon}^t e^{-\tilde{\mu}(t-\tau)}d\tau \\
&\leq \tilde{M}\left(2\|u_0\| + \frac{W^+(r)}{\tilde{\mu}}\right)e^{-\tilde{\mu}t} + \frac{2\tilde{M}W^+(r)}{\tilde{\mu}}e^{-\tilde{\mu}(t-T_\varepsilon)} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{\mu}}\varepsilon,
\end{aligned}$$

onde $\Upsilon^+ v(t) - v(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Portanto, levando em conta [(GRIPENBERG; LONDEN; STAFFANS, 1990), Teorema 2.4.5], existe uma função positiva e contínua $\alpha^\sharp : [0,\infty) \to [0,\infty)$ que se anula no infinito, tal que

$$\alpha^\sharp(t) = \|\Upsilon^+ v(t) - v(t)\| + \tilde{M}L_f\int_0^t e^{-\tilde{\mu}(t-s)}\alpha^\sharp(s)ds.$$

Consideremos o conjunto

$$C_+^0 = v + \{u \in C_0([0,\infty);X) : \|u(t)\| \leq \alpha^\sharp(t),\ t \geq 0\}.$$

É fácil ver que C_+^0 é um subconjunto fechado e convexo de $C_b([0,\infty);X)$ na topologia τ_C . Mostraremos que C_+^0 é invariante por Υ^+. Seja u em $C_0([0,\infty);X)$ com $\|u(t)\| \leq \alpha^\sharp(t)$, então

$$\|\Upsilon^+(v+u)(t) - \Upsilon^+ v(t)\| \leq \tilde{M}L_f\int_0^t e^{-\tilde{\mu}(t-s)}\alpha^\sharp(s)ds.$$

É fácil ver, com a ajuda da decomposição em (4.10), que $\|\Upsilon^+(v+u)(t) - v(t)\| \leq \alpha^\sharp(t)$, o que implica que C_+^0 é invariante por Υ^+. Finalmente, temos que Υ^+ possui um ponto fixo $\tilde{u}_0 \in C_+^0$. Portanto, existe $u_0 \in C_0([0,\infty);X)$ com $\|u_0(t)\| \leq \alpha^\sharp(t)$, para todo $t \geq 0$ tal que $\tilde{u}_0 = v + u_0$. Finalizamos a prova com a ajuda do fato que o mapa Υ^+ possui um único ponto fixo em $C_b([0,\infty);X)$; concluimos que $\tilde{u} = \tilde{u}_0$, o que implica que

$\tilde{u} - v \in C_0([0,\infty);X)$. Portanto $\tilde{u} \in SAP_\omega(X)$. $\square$

Um resultado parecido ao Teorema 4.8 foi estabelecido em (DOS SANTOS; HENRÍQUEZ, 2015) para obtenção de existência e unicidade de uma solução branda S-assintoticamente ω-periódica para uma classe de equações integro-diferenciais abstratas. É fácil ver que utilizando a mesma prova do Teorema 4.5 podemos obter a existência e unicidade de uma solução $PSAP_\omega$ para esses tipos de equações integro-diferenciais.

4.2 Aplicação

Consideremos a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + a(t)sen(u(t,x)),\ t \in \mathbb{R}^+,\ x \in [0,\pi], \tag{4.11}$$

com condição de fronteira

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.12}$$

e condição inicial

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in [0,\pi], \tag{4.13}$$

onde $u_0 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é uma função com quadrado integrável e $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função pseudo S-assintoticamente ω-periódica. O sistema (4.11)–(4.13) pode ser modelado em $X = L^2[0,\pi]$ como um problema abstrato do tipo (4.1) definindo $u(t) = u(t,\cdot)$, $t \in \mathbb{R}^+$; a condição inicial como $u_0 \in L^2[0,\pi]$, e seja $f(t,\varphi)$ a perturbação associada ao problema (4.11)–(4.13), que é $f(t,\varphi)(x) = a(t)\sin(\varphi(x))$, $x \in [0,\pi]$, $\varphi \in L^2[0,\pi]$. Consideramos o operador $A : D(A) \subseteq L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ dado por $A\varphi = \varphi''$ em $D(A) := \{\varphi \in L^2[0,\pi] : \varphi'' \in L^2[0,\pi],\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\}$. É conhecido que A é o gerador infinitessimal de um semigrupo analítico compacto $(T(t))_{t\geq 0}$ em $L^2[0,\pi]$. Além disso, A tem espectro discreto com autovalores $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, e os respectivos autovetores normalizados $u_n(x) = (\frac{2}{\pi})^{1/2}\sin(nx)$; o conjunto das funções $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de $L^2[0,\pi]$ e $T(t)\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle \varphi, u_n\rangle u_n$, $\varphi \in L^2[0,\pi]$. Podemos verificar que $\|T(t)\| \leq e^{-t}$, para $t \geq 0$.

Seja K um subconjunto limitado de $L^2[0,\pi]$ e sejam φ e ψ em $L^2[0,\pi]$. Temos as seguintes estimativas:

$$\sup_{\varphi \in K} \|f(t,\varphi)\|_{L^2[0,\pi]} \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \sup_{\varphi \in K} \|\varphi\|_{L^2[0,\pi]}, \tag{4.14}$$

$$\|f(t,\varphi) - f(s,\psi)\|_{L^2[0,\pi]} \leq \sqrt{\pi}|a(t) - a(s)| + \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+)}\|\varphi - \psi\|_{L^2[0,\pi]}, \tag{4.15}$$

$$\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\|_{L^2[0,\pi]} \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})}\|\varphi - \psi\|_{L^2[0,\pi]}, \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \sup_{\varphi \in K} \|f(s+\omega,\varphi) - f(s,\varphi)\|_{L^2[0,\pi]} ds \leq \left(\sup_{\varphi \in K} \|\varphi\|_{L^2[0,\pi]}\right)\left(\frac{1}{t}\int_0^t |a(s+\omega) - a(s)| ds\right). \tag{4.17}$$

Observamos que (4.14) implica que a função f é limitada em conjuntos limitados de $L^2[0,\pi]$ e as estimativas (4.15) e (4.17) implicam que f é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em limitados de $L^2[0,\pi]$. Observamos que **(PS10)** é satisfeita para $W^+(\xi) = \|a\|_{C_b(\mathbb{R}^+)}$. Portanto a condição **(PS12)** é satisfeita para r grande o suficiente. Levando em consideração a Observação 4.7, segue do Teorema 4.5 que o problema (4.11)–(4.13) possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω-periódica.

5 Propriedade de Kneser para estruturas flexíveis

Neste capítulo, iremos estudar as propriedades que o conjunto das soluções brandas para a seguinte equação que modela a dinâmica das vibrações em estruturas flexíveis com amortecimento

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t)),\ t \geq 0, \tag{5.1}$$

$$u(0) = 0,\ u'(0) = y,\ u''(0) = z, \tag{5.2}$$

onde A é o gerador de uma família (α, β, γ)-regularizada.

5.1 Preliminares

Com o objetivo de estabelecer apropriadamente as nossas definições, inicialmente nós vamos resolver a equação (5.1) com condições iniciais $u(0) = 0, u'(0) = 0$ e $u''(0) = z$ numa situação bem particular.

Nós vamos considerar as vibrações de uma barra metálica no domínio $[0, \pi]$, com extremos fixos. Neste caso, o espaço X é $L^2([0, \pi])$ e

$$Ax(\zeta) = x''(\zeta)$$

no domínio $D(A) = \{x \in L^2([0, \pi]) : x'' \in L^2([0, \pi]), x(0) = x(\pi) = 0\}$. Usando método de separação de variáveis,

$$u(t, \zeta) = T(t)P(\zeta)$$

e, substituindo em (5.1), obtemos

$$\alpha T'''(t)P(\zeta) + T''(t)P(\zeta) - \beta T(t)P''(\zeta) - \gamma T'(t)P''(\zeta) = 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{\alpha T'''(t) + T''(t)}{T(t)} = \beta + \gamma \frac{T'(t)}{T(t)} \frac{P''(\zeta)}{P(\zeta)}$$

e

$$\frac{\alpha T'''(t) + T''(t)}{\beta T(t) + \gamma T'(t)} = \frac{P''(\zeta)}{P(\zeta)} = -\lambda$$

com $P(0) = P(\pi) = 0$, o que implica $\lambda = n^2$, para $n \in \mathbb{N}$, e $P_n(\zeta) = A_n cos(n\zeta) + B_n sen(n\zeta)$. Ademais,

$$\alpha T'''(t) + T''(t) + \gamma n^2 T'(t) + \beta n^2 T(t) = 0,$$

que é uma equação de terceira ordem com coeficientes constantes. Seu polinômio caracteristico é

$$\alpha s^3 + s^2 + \gamma n^2 s + \beta n^2 = 0,$$

cujas soluções são $-r, z, \overline{z}$, onde $r \in \mathbb{R}$. Então de

$$s^3 + \frac{1}{\alpha}s^2 + \frac{\gamma n^2}{\alpha}s + \frac{\beta n^2}{\alpha} = (s + r_n)(s - z_n)(s - \overline{z}_n) = (s + r_n)(s^2 - 2Re(z_n)s + |z_n|^2)$$

com $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\begin{aligned} r_n - 2a_n &= \tfrac{1}{\alpha}, \\ -2a_n r_n + |z_n|^2 &= \tfrac{\gamma n^2}{\alpha}, \\ r_n |z_n|^2 &= \tfrac{\beta n^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Dividiremos em dois casos. Primeiramente analisemos o caso $a_n \geq 0$. Logo $r_n > 0$, $a_n = \frac{1}{2}(r_n - \frac{1}{\alpha})$, e substituindo na terceira equação

$$r_n |z_n|^2 = \frac{\beta n^2}{\alpha} = 2a_n r_n^2 + \frac{\gamma n^2}{\alpha} r_n \geq \frac{\gamma n^2}{\alpha} r_n.$$

Assim, $r_n \leq \frac{\beta}{\gamma}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso

$$|z_n|^2 = \frac{\beta n^2}{\alpha r_n} \geq \frac{\beta n^2}{\alpha \frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\alpha} n^2,$$

Agora, se $a_n < 0$ temos, $r_n = \frac{1}{\alpha} + 2a_n$ o que implica $r_n < \frac{1}{\alpha}$. Além disso, $|z_n|^2 \leq \frac{\gamma n^2}{\alpha}$, logo $\frac{\beta}{\gamma} \leq r_n \leq \frac{1}{\alpha}$.

Assumindo $\alpha\beta \leq \gamma$, obtemos[1] que

$$0 \leq a_n^2 \leq \frac{1}{4\alpha^2},$$

e

$$b_n^2 \geq \frac{\gamma}{\alpha} n^2 - a_n^2 \geq \frac{\gamma}{\alpha} n^2 - \frac{1}{4\alpha^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A solução geral da equação, fica

$$u(t,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{-r_n t} + (B_n cos(b_n t) + C_n sen(b_n t) e^{a_n t}] sen(n\zeta).$$

Usando as condições iniciais podemos calcular os coeficientes A_n, B_n, C_n. De

$$u(0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) sen(n\zeta)$$

obtemos $A_n + B_n = 0$. De

$$u'(0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-r_n A_n + a_n B_n + b_n C_n) sen(n\zeta)$$

obtemos

$$(r_n + a_n) B_n + b_n C_n = 0$$

[1]Note que $\frac{1}{2}(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}) < a_n < 0$ então $\frac{-\gamma}{\alpha\gamma} = -\frac{1}{\alpha} < a_n < 0$

Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} =& \sum_{n=1}^{\infty}[-r_nA_ne^{-r_nt} + a_n(B_ncos(b_nt) + C_nsen(b_nt)e^{a_nt} \\
&+ (-b_nB_nsen(b_nt) + b_nC_ncos(b_nt)]sen(n\zeta)
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty}[r_n^2A_na_n^2B_n + a_nb_nC_n + a_nb_nC_n - b_n^2B_n]sen(n\zeta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[-r_n^2B_n + a_n^2B_n - 2a_n(r_n + a_n)B_n - b_n^2B_n]sen(n\zeta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[(-r_n^2 - a_n^2 - 2a_nr_n)B_n - b_n^2B_n]sen(n\zeta) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}[(r_n + a_n)^2 + b_n]B_nsen(n\zeta) \\
&= z(\zeta).
\end{aligned}
$$

Usando agora a série de Fourier de $z(\cdot)$ no intervalo $[0,\pi]$, nós obtemos os coeficientes B_n.

Juntando tudo isso,

$$
\begin{aligned}
R(t)z &= \frac{1}{\alpha}u(t,\zeta) \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}B_n[-e^{-r_nt} + (cos(b_nt) - \frac{r_n + a_n}{b_n}sen(b_nt)e^{a_nt}]sen(n\zeta)
\end{aligned}
$$

é a expressão para o resolvente do problema (5.1).

Observamos que com as hipóteses $\alpha\beta \leq \gamma$ nós obtemos uma resolvente assintoticamente estável. No entando, se $\alpha\beta > \gamma$, obtemos uma resolvente que é limitada exponencialmente mas não é assintoticamente estável.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma > 0$ números reais. Seguindo a notação de (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011), denotamos

$$
a(t) = -(\alpha\beta - \gamma) + \beta t + (\alpha\beta - \gamma)e^{\frac{-t}{\alpha}}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{5.3}
$$

e

$$k(t) = -\alpha + t + \alpha e^{\frac{-t}{\alpha}}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{5.4}$$

Para dar uma definição consistente para a solução branda da equação (5.1)-(5.2) baseada na abordagem de operadores, definimos a família (α, β, γ)-regularizada.

Definição 5.1. (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ definido no espaço de Banach X. Dizemos que A é o gerador de uma família (α, β, γ)-regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ se as seguintes condições são satisfeitas:

(R1) $R(t)$ é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$ e $R(0) = 0$;

(R2) $R(t)D(A) \subset D(A)$ e $AR(t)x = R(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$, $t \geq 0$;

(R3) A seguinte equação se verifica:

$$R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)R(s)Axds, \text{ para todo } x \in D(A), t \geq 0.$$

Nesse caso $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ é chamada a família (α, β, γ)-regularizada gerada por A.

Observação 5.2. A referência (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) estabelece que A é o gerador de uma família (α, β, γ)-regularizada se, e somente se, existe $\tilde{\mu} \geq 0$ e uma função fortemente contínua $R : \mathbb{R}^+ \to B(X)$ tal que $\left\{\frac{\lambda^2+\alpha\lambda^3}{\beta+\gamma\lambda} : Re\lambda > \tilde{\mu}\right\} \subset \rho(A)$ e

$$\frac{1}{\beta+\gamma\lambda}\left(\frac{\lambda^2+\alpha\lambda^3}{\beta+\gamma\lambda} - A\right)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}R(t)xdt, \ Re\lambda > \tilde{\mu}, \ x \in X.$$

Por outra parte, se assumirmos a existência de uma aplicação fortemente contínua $S : [0, \infty) \to B(X)$ tal que

$$\left(\frac{\lambda^2+\alpha\lambda^3}{\beta+\gamma\lambda}I - A\right)^{-1} x = \hat{S}x \quad x \in X, \quad Re(\lambda) > \omega,$$

então $R' : [0, \infty) \to B(X)$ é uma função fortemente contínua tal que:

$$S(t)x = \beta R(t)x + \gamma R'(t)x \tag{5.5}$$

De fato, é bem conhecido que $\mathcal{L}(\int_0^t R(s)xds) = \frac{1}{\lambda}\hat{R}(\lambda)x$. [2] Como

$$\hat{S}(\lambda)x = (\beta + \gamma\lambda)\hat{R}(\lambda)x,$$

então

$$\frac{1}{\lambda}\hat{S}(\lambda)x = \frac{\beta}{\lambda}\hat{R}(\lambda)x + \gamma\hat{R}(\lambda)x,$$

o que implica, usando a observação anterior, que

$$\int_0^t S(s)xds = \beta\int_0^t R(s)xds + \gamma R(t)x$$

e

$$R(t)x = \frac{1}{\gamma}[\int_0^t S(s)xds - \beta\int_0^t R(s)xds].$$

Assim, $R(\cdot)x$ é uma função de classe C^1 que satisfazer (5.5).

Note que neste caso a função $R : [0, \infty) \to B(X)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, em particular, é uma função contínua, para a norma de operadores. De fato, para $0 \leq t_1, t_2 \leq a$, do Teorema da Limitação Uniforme, temos que existe $M \geq 0$ tal que $\|R'(t)\| \leq M$ para todo $0 \leq t \leq a$. Portanto,

$$\|R(t_2)x - R(t_1)x\| = \|\int_{t_1}^{t_2} R'(s)xds\| \leq M|t_2 - t_1|\|x\|,$$

o que implica

$$\|R(t_2) - R(t_1)\|_{B(X)} \leq M|t_2 - t_1|.$$

Surge assim o problema de caracterizar aqueles operadores A que geram uma resolvente $R(\cdot)$ com derivada $R'(\cdot)$ fortemente contínua. No que segue nós apresentaremos um resultado deste tipo. Precisaremos de alguns lemas prévios.

Seja $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ uma função cosseno no espaço X[3]. Denotamos por $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ a função

[2] Onde $\mathcal{L}(f)$ é a transformada de Laplace de f.

[3] Para mais detalhes sobre uma família cosseno (FATTORINI, 2011)

seno associada, a qual é definida por

$$S(t)x = \int_0^t C(s)xds, t \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{5.6}$$

Dizemos que $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é uniformemente limitado se existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|C(t)\| \leq M, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Lema 5.3. *Seja $B : D(B) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de uma função cosseno $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ e $\beta \geq 0$. Então βB é gerador infinitesimal da função cosseno $(C_\beta(t))_{t\in\mathbb{R}}$ definida por*

$$C_\beta(t) = C(\sqrt{\beta}t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Demonstração. O fato que $(C_\beta(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é uma função cosseno segue direto da definição. Como o gerador infinitesimal de $(C_\beta(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é $C''_\beta(0)$ obtemos que $C''_\beta(0) = \beta C''(0) = \beta B$. □

Lema 5.4. *Se a função cosseno $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ com gerador infinitesimal B, satisfaz (5.7), então*

$$\|R(\lambda^2, B)\| \leq \frac{M}{|\lambda| Re(\lambda)}, \quad \textit{para } Re(\lambda) > 0.$$

Demonstração. É bem conhecido que

$$\lambda R(\lambda^2, B)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)xdt, \quad Re(\lambda) > 0,$$

o que implica

$$|\lambda| \|R(\lambda^2, B)x\| \leq \int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t} M dt \|x\| = \frac{M}{Re(\lambda)} \|x\|.$$

Assim, $\|R(\lambda^2, B)\| \leq \frac{M}{|\lambda| Re(\lambda)}$, para $Re(\lambda) > 0$. □

Lema 5.5. *Se* $|f(t)| \leq Mt$, *e definimos* $g_n(t) = (f * ... * f)(t)$, *então*

$$|g_n(t)| \leq M^n t^{2n-1}(2n-1)!.$$

Se $F(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, *então* $\sum_{n=0}^{\infty} F^n(\lambda) = \mathcal{L}(\sum_{n=0}^{\infty} g_n)$.

Demonstração. De fato

$$|g_2(t)| = |f * f(t)| = |\int_0^t f(s)f(t-s)ds| \leq M^2 \int_0^t s(t-s)ds = M^2 \frac{t^3}{6}$$
$$|g_3(t)| = |f * f * f(t)| \leq \int_0^t M^2 \frac{s^3}{6} M(t-s)ds = \frac{M^3 t^5}{6.20}.$$

E de forma semelhante estimamos os $g_n(t)$. Logo, a série $\sum_0^{\infty} g_n(t)$ converge uniformemente em cada intervalo limitado. □

Teorema 5.6. *Seja* A *o gerador infinitesimal de uma função cosseno* $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *uniformemente limitada. Então* A *é o gerador de uma resolvente* $R(\cdot)$ *diferenciável e* $R'(\cdot)$ *é fortemente contínua.*

Demonstração. De

$$\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} = \frac{\alpha}{\gamma}\lambda^2(1 + \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\gamma}}{\frac{\beta}{\gamma} + \lambda})$$

obtemos

$$(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} - A)^{-1} = \frac{\gamma}{\alpha}[\lambda^2(\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\gamma})\frac{\lambda^2}{\frac{\beta}{\gamma} + \lambda} - \frac{\gamma}{\alpha}A]^{-1},$$

e o último parentesis pode ser escrito como

$$(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 + \frac{c_3}{c_3 + \lambda} - B)^{-1},$$

onde c_1, c_2, c_3 são constante e $B = \frac{\gamma}{\alpha}A$. Usando a equação dos resolventes, podemos escrever

$$\begin{aligned}&(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 - B)^{-1} - (\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 + \frac{c_3}{c_4 + \lambda} - B)^{-1} \\ &= \frac{c_3}{c_4 + \lambda}(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 + \frac{c_3}{c_4 + \lambda} - B)^{-1}(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 - B)^{-1}. \qquad (5.8)\end{aligned}$$

Agora vamos estudar os termos nesta igualdade separadamente.

$$(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 - B)^{-1} = (\lambda^2 - B)^{-1}[I + (c_1\lambda + c_2)(\lambda^2 - B)^{-1}]^{-1} = F_1(\lambda) \tag{5.9}$$

Usando expansão em séries

$$[I + (c_1\lambda + c_2)(\lambda^2 - B)^{-1}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(c_1\lambda + c_2)^n(\lambda^2 - B)^{-n}.$$

Como $\|c_1C_B(t) + c_2S_B(t)\| \leq \tilde{M}t$, onde $(C_B(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é a função cosseno gerada por B e

$$-(c_1\lambda + c_2)(\lambda^2 - B)^{-1} = -\mathcal{L}(c_1C_B(t) + c_2S_B(t)),$$

então usando o Lema (5.8), $F_1(\lambda)$ é uma transformada de Laplace.

Seja $F_2(\lambda) = (\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 + \frac{c_3}{c_4+\lambda} - B)^{-1}$ e

$$\Phi(\lambda) = \frac{c_3}{c_4 + \lambda}.$$

Então, como $|\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 + \frac{c_3}{c_4+\lambda}| \approx |\lambda|^2$, quando $Re(\lambda) \to \infty$, então

$$\|\Phi(\lambda)F_2(\lambda)\| \leq \frac{|c_3|}{|c_4 + \lambda|}\frac{cte}{|\lambda|},$$

para $Re(\lambda)$ grande.

Seja $0 < b \leq 1$. Então

$$\|\lambda\lambda^b\Phi(\lambda)F_2(\lambda)\| \leq |c_3||\frac{\lambda^b}{c_4 + \lambda}|cte \leq |c_3|\frac{|\lambda|^b}{|c_4 + \lambda|}cte \leq cte \leq \infty,$$

logo

$$\sup_{Re(\lambda)\geq\omega} \|\lambda\lambda^b\Phi(\lambda)F_2(\lambda)\| \leq cte$$

usando o [(ARENDT et al, 2011), Teorema 2.5.1] obtemos que

$$\lambda^b\Phi(\lambda)F_2 = \lambda^b\mathcal{L}(f).$$

Então $\Phi(\lambda)F_2(\lambda)$ é uma transformada de Laplace. Assim, o termo na direita da igualdade (5.8) é uma transformada de Laplace e, voltando a usar (5.8), $F_2(\lambda)$ é também uma transformada de Laplace.

□

Notamos que um resultado análogo pode ser obtido sem assumir que a função cosseno é uniformemente limitada. Se assumirmos $\|C(t)\| \leq Me^{\omega t}$, podemos obter os seguinte resultados.

Lema 5.7. *Se a função cosseno $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$ com gerador infinitesimal B, satisfaz $\|C(t)\| \leq Me^{\omega t}$, então*

$$\|R(\lambda^2, B)\| \leq \frac{M}{|\lambda|(Re(\lambda) - \omega)}, \quad \textit{para } Re(\lambda) > \omega.$$

Demonstração. É bem conhecido que

$$\lambda R(\lambda^2, B)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)x dt, \quad Re(\lambda) > 0,$$

o que implica

$$|\lambda| \|R(\lambda^2, B)x\| \leq \int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t} M e^{s\omega} dt \|x\| = \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)} \|x\|,$$

para $Re(\lambda) > \omega$. Assim, $\|R(\lambda^2, B)\| \leq \frac{M}{|\lambda|(Re(\lambda)-\omega)}$, para $Re(\lambda) > \omega$. □

Lema 5.8. *Se $|f(t)| \leq Me^t$, e definimos $g_n(t) = (f * ... * f)(t)$, então*

$$|g_n(t)| \leq M^n e^{\omega t} t^{n-1}(n-1)!.$$

Se $F(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, então $\sum_{n=0}^\infty F^n(\lambda) = \mathcal{L}(\sum_{n=0}^\infty g_n)$.

Demonstração. De fato

$$|g_2(t)| = |f * f(t)| = |\int_0^t f(s)f(t-s)ds| \leq M^2 \int_0^t e^{s\omega} e^{(t-s)\omega} ds = M^2 e^{\omega t} t$$
$$|g_3(t)| = |f * f * f(t)| \leq \int_0^t M^2 e^{\omega s} s M e^{(t-s)\omega} ds = M^3 e^{\omega t} \frac{t^2}{2}$$

E de forma semelhante estimamos os $g_n(t)$. Logo, a série $\sum_0^\infty g_n(t)$ converge uniformemente em cada intervalo limitado. □

E com esses resultados, podemos mostrar

Teorema 5.9. *Seja A o gerador infinitesimal de uma função cosseno $(C(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Então A é o gerador de uma resolvente $R(\cdot)$ diferenciável e $R'(\cdot)$ é fortemente contínua.*

Observação 5.10. Outro resultado sobre gerador de família (α, β, γ)-regularizada é o seguinte. Seja $-B$ um operador positivo autoadjunto no espaço de Hilbert H e assuma que $\alpha\beta \leq \gamma$. Então B é o gerador de uma famíla (α, β, γ)-regularizada limitada em H, $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, que é dada por

$$\hat{R}(\lambda) = \frac{1}{\beta + \gamma\lambda}\left(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} - B\right)^{-1},\ Re\lambda > 0,$$

onde $\hat{R}$ denota a transformada de Laplace de R ((FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2010) para detalhes).

Para o nosso propósito estaremos interessado em estudar o conjunto das soluções brandas para o problema (5.1)-(5.2), a qual definiremos a seguir.

Definição 5.11. (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) Seja $R(t)$ uma familia (α, β, γ)-regularizada em X com gerador A. Uma função contínua $u : \mathbb{R}^+ \to X$ satisfazendo a equação

$$u(t) = \alpha R'(t)y + R(t)y + \alpha R(t)z + \int_0^t R(t-s)f(s, u(s))ds,\ t \geq 0, \tag{5.10}$$

onde $y, z \in X$ é chamada uma solução branda do problema (5.1)-(5.2).

Para mais detalhes e algumas propriedades das famílias (α, β, γ)-regularizadas (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011).

5.2 Propriedade de Kneser

Daqui em diante denotaremos por I o intervalo fechado $I = [0, 1]$. Para estudarmos nosso problema, iremos supor inicialmente algumas hipóteses sobre a função f

Suposição $(\mathcal{C}_{car})$. A função $f : I \times X \to X$ satisfaz as seguinte condições de Carathéodory:

(i) $f(t, \cdot) : X \to X$ é contínua q.t.p. $t \in I$;

(ii) Para cada $x \in X$, a função $f(\cdot, x) : I \to X$ é fortemente mensurável.

Com isso já podemos mostrar o seguinte resultado de compacidade.

Teorema 5.12. *Suponha que o operador A gera uma família (α, β, γ)-regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ tal que a função $t \to R(t)$ é contínua de I em $B(X)$. Assuma que a condição $\mathcal{C}_{car}$ é válida e além disso que as seguintes condições são satisfeitas.*

(Kn-1) *Para cada $R > 0$ existe uma função positiva e integrável $\gamma_R \in L^1(I)$ tal que*

$$\sup\{\|f(t,x)\|_X : \|x\|_X \leq R\} \leq \gamma_R(t), \text{ a.e. } t \in I.$$

(Kn-2) *Para cada $0 \leq t \leq 1$ e $R > 0$ o conjunto $\{R(t)f(s,x) : 0 \leq s \leq 1, \|x\|_X \leq R\}$ é relativamente compacto.*

(Kn-3) $\liminf_{R\to\infty} \frac{M_{RR'}}{R} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds < 1$, *onde $M_{RR'}$ é dada por*

$$M_{RR'} = \sup\{\|R(t)\|_{B(X)} : t \in [0,1]\} + \sup\{\|R'(t)\|_{B(X)} : t \in [0,1]\}. \tag{5.11}$$

Então, existe uma solução branda para (5.1)-(5.2) *em I. Além disso, se a seguinte condição é satisfeita:*

(Kn-4) $\limsup_{R\to\infty} \frac{M_{RR'}}{R} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds < 1$,

então o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (5.1)-(5.2) *é compacto em $C(I;X)$.*

Demonstração. Começamos definindo o mapa $\Lambda : C(I;X) \to C(I;X)$ pelo lado direito de (5.10). Então Λ é bem definido e pelo Teorema da Convergencia Dominada de Lebesgue obtemos que o mesmo é contínuo. Afirmamos que existe $\rho > 0$ tal que $\Lambda : B_\rho(C(I;X)) \to B_\rho(C(I;X))$, onde $B_\rho(C(I;X))$ são as bolas abertas em $C(I;X)$ de raio ρ e centradas na origem. Para isso, assumiremos que tal afirmação é falsa, então para cada $\rho > 0$ podemos escolher $u^\rho \in B_\rho(C(I;X))$ tal que $\|\Lambda u^\rho\|_{C(I;X)} > \rho$. Então,

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{M_{RR'}}{\rho}((\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M_{RR'}}{\rho}\int_0^t (t-s)\gamma_\rho(s)ds \\
&\leq \frac{M_{RR'}}{\rho}((\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M_{RR'}}{\rho}\int_0^1 (1-s)\gamma_\rho(s)ds = \int_0^1 R(t-s)f(s,u(s))ds.
\end{aligned}$$

O que implica
$$1 \leq \liminf_{R\to\infty} \frac{M_{RR'}}{R} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds,$$
e esta desigualdade contradiz a hipótese **(Kn-3)**. A seguir, iremos mostrar que o mapa Λ é completamente contínuo, com o intuito de utilizarmos o teorema do ponto fixo de Schauder.

Pelo teorema de Arzelà-Ascoli é suficiente mostrarmos que para cada $R \geq 0$ o conjunto $\{\Lambda_0(u)(t) : \|u\|_{C(I;X)} \leq R\}$ é relativamente compacto em X para todo $0 \leq t \leq 1$ e o conjunto $\{\Lambda_0(u) : \|u\|_{C(I;X)} \leq R\}$ é equicontínuo, onde
$$\Lambda_0(u)(t) = \Lambda(u)(t) - \alpha R'(t)y - R(t)y - \alpha R(t)(z) = \int_0^t R(t-s)f(s,u(s))ds.$$

Comecemos com a primeira afirmação. Seja ε um número real positivo. Como $R(\cdot)$ é contínuo na norma dos operadores, existe $\delta > 0$ tal que
$$\|R(s) - R(s')\|_{B(X)} \leq \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\xi)d\xi \right)^{-1}, |s - s'| < \delta. \tag{5.12}$$

Selecionemos então $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = t$ tal que $|s_i - s_{i-1}| \leq \delta$. Escrevemos então Λ_0 como segue
$$\Lambda_0(u)(t) = \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} (R(t-s) - R(t-s_{i-1}))f(s,u(s))ds + \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} R(t-s_{i-1})f(s,u(s))ds \tag{5.13}$$

Comecemos notando que o primeiro termo do lado direito (5.13) é dominada por ε, pois
$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \|R(t-s) - R(t-s_{i-1})\|_{B(X)} \|f(s,u(s))\|_X ds \\ &\qquad \leq \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\zeta)d\zeta \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \gamma_R(s)ds \\ &\qquad = \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\zeta)d\zeta \right)^{-1} \int_0^t \gamma_R(s)ds \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pela condição **(Kn-2)** temos que o segundo termo do lado direito de (5.13) está incluso em um conjunto compacto que não depende da função u, que verificamos aplicando o teorema do valor médio para integral de Bochner como segue

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} R(t-s_{i-1})f(s,u(s))ds \in (s_i - s_{i-1})\overline{co(R(t-s_i)f([0,t]\times B_R(C(I;X)))} := K_i{}^4$$

O que nos leva imediatamente ao seguinte

$$\Lambda_0(B_R(C(I;X)))(t) \subset K + B_\varepsilon(X), \tag{5.14}$$

onde $K = K_1 + ... + K_n$. Como a escolha do $\varepsilon > 0$ foi arbitrária, temos que $\Lambda_0(B_R(C(I;X)))(t)$ é relativamente compacto. Veremos inicialmente que o conjunto $\{\Lambda_0(u) : \|u\| \leq R\}$ é equicontínuo para $t = 0$. De fato,

$$\|\Lambda_0(u)(h)\| = \| \int_0^h R(t-s)f(s,u(s))ds\| \leq M_{RR'} \int_0^h \gamma_R(s)ds,$$

que converge para zero, pelo Teorema de Lebesgue. Seja agora $t > 0$, $t+h > 0$ com $t+h \in I$. Então

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_0(u)(t+h) - \Lambda(u)(t)\| &= \| \int_0^{t+h} R(t+h-s)f(s,u(s))ds - \int_0^t R(t-s)f(s,u(s))ds\| \\
&\leq \| \int_t^{t+h} R(t+h-s)f(s,u(s))ds\| \\
&+ \int_0^t \|R(t+h-s) - R(t-s)\|\gamma_R(s)ds \\
&= \| \int_t^{t+h} R(t+h-s)f(s,u(s))ds\| \\
&+ \int_{t-2\delta}^t \|R(t+h-s) - R(t-s)\|\gamma_R(s)ds \\
&+ \int_0^{t-2\delta} \|R(t+h-s) - R(t-s)\|\gamma_R(s)ds,
\end{aligned}$$

onde $\delta > 0$, $2\delta < t$ e $|h| < \delta$. Seja $\varepsilon > 0$. Com o mesmo argumento inicial, nós podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$\| \int_t^{t+h} R(t+h-s)f(s,u(s))ds\| + \int_{t-2\delta}^t \|R(t+h-s) - R(t-s)\|\gamma_R(s)ds \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

[4]Por **(Kn-2)**, os conjuntos K_i são compactos.

Adicionalmente, para o termo remanescente $t-s \geq 2\delta$[5] e $t+h-s \geq \delta$. Como $R:[\delta,1] \to B(X)$ é uniformemente contínua para a norma de operadores, existe δ' tal que $|h| \leq \delta'$ implica que

$$\|R(t+h-s) - R(t-s)\| \leq \varepsilon'$$

onde $\varepsilon' \int_0^t \gamma_R(s)ds \leq \frac{\varepsilon}{3}$. E assim, obtemos

$$\|\Lambda_0(u)(t+h) - \Lambda(u)(t)\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon' \int_0^t \gamma_R(s)ds \leq \varepsilon$$

o que completa a prova de que o conjunto $\|\Lambda_0(u) : \|u\| \leq r\}$ é equicontínuo.

Finalmente, utilizando o teorema do ponto fixo de Schauder temos que Λ tem um ponto fixo em $B_\rho(C(I;X))$. Além disso, a continuidade do mapa Λ implica que o conjunto $\mathcal{S}$ das soluções brandas é fechado.

Assumindo agora que a condição **(Kn-4)** é válida, temos que o conjunto $\mathcal{S}$ é limitado. De fato, se assumimos que $\mathcal{S}$ não é limitado, então existe uma sequência de funções $u_k \in \mathcal{S}$ tal que $R_k = \|u_k\|_{C(I;X} \geq k$. Então, teriamos

$$\|u_k(t)\|_X = \|\Lambda(u_k)(t)\|_X \leq M_{RR'}((\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M_{RR'} \int_0^1 (1-s)\gamma_{R_k}(s)ds,$$

o que implicaria

$$1 \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{M_{RR'}}{R_k} \int_0^1 (1-s)\gamma_{R_k}(s)ds,$$

que por **(Kn-4)** é um absurdo.

Finalmente, utilizando que Λ é completamente contínuo, temos que $\mathcal{S}$ é compacto. □

Observamos que resultados semelhantes foram obtidos para o caso do problema abstrato de Cauchy de segunda ordem e para o caso de equações diferenciais funcionais com retardo, em [(HENRÍQUEZ; CASTILLO, 2005), Teorema 2.2] e [(CARDOSO; CUEVAS, 2009) Teorema 1.4] respectivamente.

A seguir mostraremos um lema que nos será útil na demonstração do próximo teorema.

Lema 5.13. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $K \subset C(I;X)$ um conjunto relativamente compacto. Então $\{u(t) : u \in K, t \in I\}$ é relativamente compacto em X.*

[5] Pois $t > 2\delta$ e como $0 \leq s \leq t - 2\delta$ obtemos $2\delta \leq t - s$.

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$, existem uma quantidade finita $u_1, ..., u_n \in K$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(u_i, C(I;X))$. Então

$$\{u(t) : u \in K, t \in I\} \subset \cup_{i=1}^{n}\{u_i(t) : t \in I\} + B_\varepsilon(0, X).$$

$\square$

Como consequência direta do lema, o conjunto

$$\mathcal{V} = \{\int_0^t R(t-s)f(s,u(s))ds : t \in I, u \in L^\infty(I;X), \|u\|_\infty \leq R\} \subset X$$

é relativamente compacto.

Com o intuito de mostrar que o conjunto das soluções brandas para o problema (5.1)-(5.2) é conexo, utilizaremos o seguinte resultado, o qual apenas enunciaremos.

Lema 5.14. (HENRIQUEZ;CASTILLO, 2005) *Seja $\tau : C(I;X) \to C(I;X)$ um mapa contínuo e $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos fixos de τ. Assuma que existe um conjunto compacto $K \subset C(I;X)$ e que para cada $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \subset K$ com as seguintes propriedades:*

(i) *Os conjuntos K_ε são conexos;*

(ii) *$d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $x \in \mathcal{S}$;*

(iii) *$\|y - \tau y\|_\infty < \delta(\varepsilon)$, para todo $y \in K_\varepsilon$, onde $\delta(\varepsilon) \to 0$ com $\varepsilon \to 0$.*

Então, $\mathcal{S}$ é conexo.

No resultado seguinte, denotaremos por $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções brandas para o problema (5.1)-(5.2). O que faremos a seguir é construir conjuntos K e K_ε que venham a satisfazer as condições do Lema 5.14, o que nos levará a uma demonstração bastante técnica.

Teorema 5.15. *Suponha que A seja o gerador de uma família (α, β, γ)-regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ tal que a função $t \to R(t)$ é contínua de I em $B(X)$, f contínuas e que as condições* ***(Kn-1)*** *e* ***(Kn-2)*** *são válidas. Se as seguintes condições são satisfeitas:*

(Kn-5) *O conjunto $\mathcal{S}$ é compacto.*

(Kn-6) *$3M_{RR'}\liminf_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^1(1-s)\gamma_R(s)ds<1$. Então, $\mathcal{S}$ é conexo.*

Demonstração. Começaremos abreviando nossa notação, escrevendo $h(t)=\alpha R'(t)y+R(t)y+\alpha R(t)z$. Da hipótese $(Kn-5)$ e $(Kn-6)$, podemos selecionar uma constante $R>0$ grande o suficiente, tal que $\|x\|_\infty\leq R$ para todo $x\in\mathcal{S}$ e

$$M_{RR'}\left((\alpha+1)\|y\|_X+\alpha\|z\|_X+3\int_0^1(1-s)\gamma_R(s)ds\right)<R. \tag{5.15}$$

Seja $\mathcal{V}$ o conjunto construido no Lema 5.13, com R como em (5.15). Sem perda de generalidade, assumimos que $\mathcal{V}$ é compacto e absolutamente convexo.[6]. Tomando $\mathcal{U}=2\mathcal{V}$, $\mathcal{U}_1=3\mathcal{V}$ e indicando $N_1=2M_{RR'}\int_0^1\gamma_R(s)ds$ onde R é como em (5.15). A partir desse momento iremos dividir a demonstração em vários passos.

Passo 1. Nessa primeira parte vamos construir os conjunto K e K_ε. Para uma divisão d do intervalo I formado pelos pontos $0=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=1$, escolhemos $u_k\in\mathcal{U}$, $k=1,...,n$ tal que $\sum_{k=1}^i(t_k-t_{k-1})u_k\in\mathcal{U}$, $\|u_i\|_X\leq N_1$ and $\|\sum_{k=1}^i(t_k-t_{k-1})u_k\|_X\leq 2M_{RR'}\int_0^1(1-s)\gamma_R(s)ds$, para todo $i=1,...,n$. consideremos as função $z(\cdot)$ dada por

$$z(t)=h(t)+\int_0^t R(t-s)f(s,0)ds+tu_1,\ \text{for } 0\leq t\leq t_1.$$

Para $t_1<t\leq t_2$,

$$z(t)=h(t)+\int_0^{t_1}R(t-s)f(s,0)ds+t_1u_1+\int_{t_1}^t R(t-s)f(s,z(t_1))ds+(t-t_1)u_2.$$

No caso geral, para $t_{i-1}<t\leq t_i$, $i=1,...,n$ definimos

$$\begin{aligned} z(t)=h(t)&+\sum_{k=1}^{i-1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}R(t-s)f(s,z(t_{k-1}))ds+(t_k-t_{k-1})u_k\right)\\ &+\int_{t_{i-1}}^t R(t-s)f(s,z(t_{i-1}))ds+(t-t_{i-1})u_i \end{aligned} \tag{5.16}$$

A função z assim definida é uma função contínua. Em seguida, para um ponto fixo $z(\cdot)$

[6]Podemos assumir isso pois, se $\mathcal{S}$ é compacto então usando [(BERBERIAN, 1974), (17.16)] temos que o envoltório balanceado de $\mathcal{S}$, $bal(\mathcal{S})$, é compacto. Usando agora [(MARTIN JR, 1976), Corolário 5.1] temos que o envoltório convexo de $bal(\mathcal{S})$, $co(bal(\mathcal{S}))$, é compacto. E notamos que [(BERBERIAN, 1974), (25.28)] implica que o envoltório convexo absoluto de $\mathcal{S}$, $abco(\mathcal{S})$, coincide com $co(bal(\mathcal{S}))$ então, $abco(\mathcal{S})$ é um conjunto compacto absolutamente convexo.

dado por (5.16) denotaremos por $y(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ as funções escadas definidas por

$$y(0)=0, \varphi(0)=u_1, y(t)=z(t_{k-1}) \text{ and } \varphi(t)=u_k,$$

para $t_{k-1} < t \leq t_k$ e $k=1,...,n$. Então, podemos reescrever a nossa definição de $z(\cdot)$ como

$$z(t)=h(t)+\int_0^t R(t-s)f(s,y(s))ds+\int_0^t \varphi(t)ds. \tag{5.17}$$

Além disso, para simplificar mais nossa notação, escrevemos $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t)ds$. Mostraremos que $\|z(t)\|_X \leq R$, para $0 \leq t \leq 1$, independentemente da divisão d e da escolha dos pontos u_i. De (5.15) obtemos facilmente que $\|z(t)\|_X \leq R$ para $0 \leq t \leq t_1$[7]. Assumimos agora que essa propriedade é válida para $[0, t_{i-1}]$ mostraremos que a mesma também é válida para $t_{i-1} < t \leq t_i$. De fato, usando que $\Phi(t)$ é uma combinação convexa de $\Phi(t_{i-1})$ e $\Phi(t_i)$[8]. Obtemos então,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_X &\leq \|h(t)\|_X+\sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|R(t-s)\|_{B(X)}\|f(s,z(t_{k-1}))\|_X ds \\
&+\int_{t_{i-1}}^{t}\|R(t-s)\|_{B(X)}\|f(s,z(t_{i-1}))\|_X ds+\|\Phi(t)\|_X \\
&\leq \|h\|_\infty+M_{RR'}\sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t-s)\gamma_R(s)ds+M_{RR'}\int_{t_{i-1}}^{t}(t-s)\gamma_R(s)ds \\
&+\left(1-\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)\|\sum_{k=1}^{i-1}(t_k-t_{k-1})u_k\|_X+\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\|\sum_{k=1}^{i}(t_k-t_{k-1})u_k\|_X \\
&\leq M_{RR'}((\alpha+1)\|y\|_X+\alpha\|z\|_X)+M_{RR'}\int_0^t(t-s)\gamma_R(s)ds \\
&+2M_{RR'}\int_0^1(1-s)\gamma_R(s)ds \leq R,
\end{aligned}$$

[7] Para $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_X &\leq \|h\|_\infty+M_{RR'}\int_0^t(t-s)\gamma_R(s)ds+2t_1M_{RR'}\int_0^1(1-s)\gamma_R(s)ds \\
&\leq M_{RR'}\left((\alpha+1)\|y\|_X+\alpha\|z\|_X+3\int_0^1(1-s)\gamma_R(s)ds\right)\leq R.
\end{aligned}$$

[8] Basta observarmos que para $t_{i-1} < t \leq t_i$ temos

$$\Phi(t)=\left(1-\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)\Phi(t_{i-1})+\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\Phi(t_i).$$

que era o que queriamos mostrar.

Introduzamos o conjunto $K_0 \subset C(I;X)$ formado pelas funções contínuas ζ tal que $\zeta(t) \in \mathcal{U}_1$ para todo $t \in I$ e satisfazem uma condição de equicontinuidade[9]. Do teorema de Arzelà-Ascoli segue que K_0 é compacto. Tomando $K = h + K_0$ temos que K também é compacto.

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\varepsilon \leq 4M_{RR'} \displaystyle\int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds$ e tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M_{RR'}}$. Usando a compacidade de $\mathcal{S}$ e K assim como a continuidade de f, podemos obter $0 < \delta_1 \leq 2\varepsilon$ tal que

$$\|f(s,w) - f(s,w')\|_X \leq \varepsilon_1 \tag{5.18}$$

para todo $s \in I$ e para todo $w, w' \in (K \cup \mathcal{S})(I)$ tal que $\|w - w'\|_X \leq \delta_1$. Semelhantemente, como $K \cup \mathcal{S}$ é um conjunto compacto em $C(I;X)$, então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|x(t) - x(s)\|_X \leq \frac{\delta_1}{4}, \tag{5.19}$$

para todo $x \in K \cup \mathcal{S}$ e $t, s \in I$ tal que $|t - s| \leq \delta_2$.

Escolhamos n tal que $\frac{1}{n} < min\{\delta_2, \sqrt{\frac{\delta_1}{2\varepsilon}}\}$. Em seguida consideremos a divisão d definida pelos pontos $t_i = \frac{i}{n}$, para $i = 0, 1, ..., n$. Tomemos K_ε como o conjunto formado pelas funções $z = z_u$ definida por (5.16) onde $u = (u_1, ..., u_n)$ e os pontos $u_1, ..., u_n$ são escolhidos de tal forma que $u \in Z_\varepsilon$, onde Z_ε é o conjunto formado por todo $u = (u_1, ..., u_n) \in (2n\mathcal{U} \cap B_{N_1}(X))^n$ tal que $\sum_{k=1}^{i} u_k \in n\mathcal{U}$ e

$$\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{i} u_k\|_X \leq \frac{1}{2} M_{RR'} t_i^2 \varepsilon_1,$$

para todo $i = 1, ..., n$[10]. Por outro lado, Z_ε é convexo e as funções $z_u \in K_\varepsilon$ dependem continuamente[11] da escolha de $u = (u_1, ..., u_n) \in Z_\varepsilon$, então o conjunto K_ε é conexo.

Passo 2 Nesse passo mostraremos que $K_\varepsilon \subset K$, para todo $\varepsilon > 0$. De (5.16) e da nossa

[9]Ou de outra forma, que exista uma função Ω, tal que $\Omega(\delta) \to 0$ quando $\delta \to 0^+$, e

$$\sup_{t \in [0,1], |h| \leq \delta} |\zeta(t+h) - \zeta(t)| \leq \Omega(\delta)$$

[10]Notamos que pela nossa escolha de ε os elementos $(u_1, ..., u_n) \in Z_\varepsilon$ satisfazem $\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{n} u_k\| \leq 2M_{RR'} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds$.

[11]Notamos que $\|z_u - z_v\|_{C(I;X)} \leq \|u - v\|_{X^n}$.

definição de K, se denotarmos $\tilde{z} = z - h$, devemos provar que $\tilde{z} \in K_0$. Como $\Phi(t_i) \in \mathcal{U}$ para todo $i = 1, ..., n$, então $\Phi(t) \in \mathcal{U}$ para todo $t \in I$, pois $\mathcal{U}$ é absolutamente convexo. Notemos que as funções escadas $y(\cdot)$ são tais que $y \in L^\infty(I; X)$ e $\|y\| \leq R$. Então, da nossa definição de $z(\cdot)$ e pelo Lema 5.13, obtemos $\tilde{z}(t) \in \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{U}_1$, para todo $z \in K_\varepsilon$ e $t \in I$. Resta mostrarmos que as funções $\tilde{z}$, para $z \in K_\varepsilon$, satisfazem a condição de equicontinuidade. Tomando $t, \in I$, $h \geq 0$ tal que $t + h \in I$, usando (4.12),

$$\begin{aligned}\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h) = &\int_0^t (R(t-s) - R(t+h-s))f(s, y(s))ds - \int_t^{t'} R(t+h-s)f(s, y(s))ds \\ &- \int_t^{t+h} \varphi(s)ds.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h)\|_X \leq &\int_0^t \|(R(t-s) - R(t+h-s))f(s, y(s))\|ds \\ &+ \int_t^{t+h} M_{RR'}(t+h-s)\gamma_R(s)ds + N_1 h\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da desiguadade podemos estimar menor que ε seguindo o mesmo caminho feito no Teorema (4.5), obtemos então

$$\|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h)\|_X \leq \varepsilon + hM_{RR'} \int_t^{t+h} \gamma_R(s)ds + N_1 h$$

E quando $h \to 0$, $\|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h)\|_X \leq \varepsilon$. Portando, de nossa definição deduzimos que $K_\varepsilon \subset K$, para todo $\varepsilon > 0$.

Passo 3. Agora, mostraremos que as soluções de (5.1)-(5.2) podem ser aproximadas por elementos em K_ε. Seja $x \in \mathcal{S}$ fixado. O que faremos é construir $z \in K_\varepsilon$, tal que $\|x - z\|_\infty \leq \varepsilon$. E para isso, iremos definir z indutivamente nos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$. Para $i = 1$, temos $t_1 = \frac{1}{n}$, e tomamos[12]

$$u_1 = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} R(t_1 - s)(f(s, x(s)) - f(s, 0))ds.$$

[12]Da definição de u_1 e usando (5.18) obtemos a estimativa

$$\|u_1\| \leq \frac{1}{t_1} M_{RR'} \int_0^{t_1} (t_1 - s)\varepsilon_1 ds = \frac{1}{t_1} M_{RR'} \varepsilon_1 (t_1 s - \frac{s^2}{2})|_0^{t_1} = nM_{RR'}\varepsilon_1 \frac{t_1^2}{2}.$$

Pela construção, podemos ver que $u_1 \in 2n\mathcal{V} \cap B_{N_1}$, já que

$$u_1 = 2n\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_1} R(t_1 - s)f(s, x(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^{t_1} R(t_1 - s)f(s, 0)ds\right) \in 2n\mathcal{V}$$

e

$$\|u_1\| \leq 2nM_{RR'}\int_0^{t_1}(t_1 - s)\gamma_R(s)ds \leq 2nt_1M_{RR'}\int_0^1 \gamma_R(s)ds = N_1.$$

Desde que $\mathcal{V}$ é absolutamente convexo, sabemos que $\frac{1}{2}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, e com isso, obtemos que $u_1 \in 2n\mathcal{U} \cap B_{N_1}(X)$. De (4.17) e (4.18), podemos afirmar $\|f(s, x(s)) - f(s, 0)\|_X \leq \varepsilon_1$[13] para todo $0 < s \leq \frac{1}{n}$, o que implica $\|u_1\|_X \leq \frac{1}{n}M_{RR'}\varepsilon_1$[14]. Definimos então

$$z(t) = h(t) + \int_0^t R(t - s)f(s, 0)ds + tu_1, 0 \leq t \leq t_1. \tag{5.20}$$

Observamos que z definida nesse intervalo satisfaz as mesmas condições das funções em K restritas a $[0, t_1]$. Segue de (5.20) que,

$$\begin{aligned}
z(t_1) &= h(t_1) + \int_0^{t_1} R(t_1 - s)f(s, 0)ds + t_1u_1 \\
&= h(t_1) + \int_0^{t_1} R(t_1 - s)f(s, 0)ds + \int_0^{t_1} R(t_1 - s)(f(s, x(s)) - f(s, 0))ds \\
&= h(t_1) + \int_0^{t_1} R(t_1 - s)f(s, x(s))ds = x(t_1).
\end{aligned}$$

Além disso, para $0 < t \leq t_1$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|x(t) - z(t)\|_X &\leq \|\int_0^t R(t - s)(f(s, x(s)) - f(s, 0))ds\|_X + t\|u_1\|_X \\
&\leq M_{RR'}\int_0^t (t - s)\varepsilon_1 ds + \frac{t}{2n}M_{RR'}\varepsilon_1 \\
&\frac{1}{n^2}M_{RR'}\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{n^2} \leq \frac{\delta_1}{2}
\end{aligned}$$

[13]Como $x \in \mathcal{S}$, $x(0) = 0$, por (5.19) temos $\|x(s) - x(0)\| < \frac{\delta_1}{4} < \delta_1$, usando esse fato mais (5.18) obtemos a estimativa

[14]$\|u_1\| \leq \frac{1}{t_1}M_{RR'}\varepsilon_1(t_1s - \frac{s^2}{2})|_0^{t_1} = \frac{M_{RR'}\varepsilon_1t_1}{2} = \frac{M_{RR'}\varepsilon_1}{2n} \leq \frac{M_{RR'}\varepsilon_1}{n}$

Agora, tomemos

$$\begin{aligned}
u_2 &= n\int_0^{t_1} ((R(t_2-s)-R(t_1-s))(f(s,x(s))-f(s,0))ds \\
&+ n\int_{t_1}^{t_2} R(t_2-s)(f(s,x(s))-f(s,z(t_1)))ds \\
&= n\int_0^{t_2} R(t_2-s)(f(s,x(s))-f(s,y(s)))ds \\
&- n\int_0^{t_1} R(t_1-s)(f(s,x(s))-f(s,y(s)))ds.
\end{aligned}$$

Dessa expressão $u_2 \in 2n\mathfrak{U}$ e

$$\begin{aligned}
\|u_2\|_X &\le 2nM_{RR'}(t_2-t_1)\int_0^{t_1}\gamma_R(s)ds + 2nM_{RR'}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)\gamma_R(s)ds \\
&\le 2M_{RR'}\left(\int_0^{t_1}\gamma_R(s)ds + \int_{t_1}^{t_2}\gamma_R(s)ds\right) \le N_1.
\end{aligned}$$

Observamos que

$$u_1+u_2 = n\int_0^{t_2} R(t_2-s)(f(s,x(s))-f(s,y(s)))ds \in n\mathfrak{U}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\|u_1+u_2\|_X \le M_{RR'}&\int_0^{t_1}(t_2-s)\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|_X ds \\
&+ M_{RR'}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|_X ds := I_1+I_2
\end{aligned}$$

Estimando os termos I_1 e I_2[15]. obtemos que

$$I_1 \le M_{RR'}\varepsilon_1\int_0^{t_1}(t_2-s)ds = \frac{1}{2}M_{RR'}\varepsilon_1(t_2^2-(t_2-t_1)^2),$$

$$I_2 \le M_{RR'}\varepsilon_1\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)ds = \frac{1}{2}M_{RR'}\varepsilon_1(t_2-t_1)^2.$$

Portanto

$$\frac{1}{n}\|u_1+u_2\|_X \le \frac{1}{2}M_{RR'}t_2^2\varepsilon_1.$$

[15]Notamos que se $0 < s < \frac{1}{n}$ $\|x(s)-y(s)\|_X \le \frac{\delta_1}{4}$. Então $\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\|_X \le \varepsilon_1$.

Seja $z(t)$ dada por (5.20) para $0 < t \leq t_1$. Para $t_1 < t \leq t_2$ definimos

$$z(t) = h(t) + \int_0^{t_1} R(t-s)f(s,0)ds + t_1u_1 + \int_{t_1}^{t} R(t-s)f(s,z(t_1))ds + (t-t_1)u_2.$$

Observamos que z definida nesse intervalo, satisfaz as mesmas condições das funções em K restritas a $[0, t_2]$. Além disso,

$$\begin{aligned} z(t_2) = h(t_2) &+ \int_0^{t_1} R(t_2-s)f(s,y(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} R(t_2-s)f(s,z(t_1))ds \\ &+ \int_0^{t_2} R(t_2-s)(f(s,x(s)) - f(s,y(s)))ds \\ &= h(t_2) + \int_0^{t_2} R(t_2-s)f(s,x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} R(t_2-s)f(s,z(t_1))ds \\ &- \int_{t_1}^{t_2} R(t_2-s)f(s,y(s))ds \\ &= h(t_2) + \int_0^{t_2} R(t_2-s)f(s,x(s))ds = x(t_2). \end{aligned}$$

Desde que $x(t_1) = z(t_1), z \in K$, levando em conta (5.19) para $0 < t \leq t_2$ e ...

$$\|x(t) - z(t)\|_X \leq \|x(t) - x(t_1)\|_X + \|z(t_1) - z(t)\|_X \leq \frac{\delta_1}{2} \leq \varepsilon.$$

Procedendo indutivamente assumimos que temos selecionados termos u_k, para $k = 1, ..., i-1$ tais que $(u_1, ..., u_{i-1}, 0, ..., 0) \in Z_\varepsilon$ e a função $z(t)$ dada por (5.16) para $t \in [0, t_{i-1}]$ satisfaz $z(t_k) = x(t_k)$ e a estimativa $\|x(t) - z(t)\|_X \leq \frac{\delta_1}{2}$, $0 \leq t \leq t_{i-1}$. Agora, definimos a função z em $[t_{i-1}, t_i]$. Começamos selecionando

$$\begin{aligned} u_i =& n\sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (R(t_i - s) - R(t_{i-1} - s))(f(s,x(s)) - f(s,z(t_{k-1})))ds \\ &+ n\int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i - s)(f(s,x(s)) - f(s,z(t_{i-1})))ds. \end{aligned}$$

Inicialmente, mostremos que $(u_1, ..., u_i, 0, ..., 0) \in Z_\varepsilon$. Começamos observando que podemos reescrever u_i como

$$\begin{aligned} u_i &= n \int_0^{t_{i-1}} (R(t_i - s) - R(t_{i-1} - s))(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &+ n \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &= n \int_0^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &- n \int_0^{t_{i-1}} R(t_{i-1} - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds. \end{aligned}$$

Então $u_i \in 2n\mathfrak{U}$ e

$$\begin{aligned} \|u_i\|_X &\leq 2nM_{RR'}(t_i - t_{i-1}) \int_0^{t_{i-1}} \gamma_R(s)ds + 2nM_{RR'} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)\gamma_R(s)ds \\ &\leq 2M_{RR'} \int_0^{t_i} \gamma_R(s)ds \leq N_1, \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{i} u_k = \int_0^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds,$$

o que por sua vez implica que $\sum_{k=1}^{i} u_k \in n\mathfrak{U}$.

Além disso, para $t_{i-1} < s \leq t_i$ temos $y(s) = z(t_{i-1})$, então

$$x(s) - y(s) = x(s) - x(t_{i-1}) + x(t_{i-1}) - z(t_{i-1}).$$

De (5.19), sabemos que $\|x(s) - x(t_{i-1})\|_X \leq \frac{\delta_1}{4}$ e por indução $\|x(t_{i-1}) - z(t_{i-1})\|_X \leq \frac{\delta_1}{2}$.

Combinando essas estimativas com (5.18) temos que

$$\frac{1}{n} \| \sum_{k=1}^{i} u_k \|_X \leq \frac{1}{2} M_{RR'} t_i^2 \varepsilon_1.$$

Agora definimos $z(t)$ para $t_{i-1} < t \leq t_i$ pela fórmula (5.16). Usando essa expressão e a escolha dos u_k, $k = 1, ..., i$ obtemos que

$$\begin{aligned}
x(t_i) - z(t_i) &= \int_0^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{i} u_k \\
&= \int_0^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\
&- \int_0^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds = 0.
\end{aligned}$$

Além disso, para $t_{i-1} < t \le t_i$ segue de (5.19) e da escolha de n que

$$\|x(t) - z(t)\|_X \le \|x(t) - x(t_{i-1})\|_X + \|z(t_{i-1}) - z(t)\|_X \le \frac{\delta_1}{2},$$

o que mostra nossa afirmação.

Passo 4 Agora finalizamos mostrando que os elementos de K_ε são soluções aproximadas de (5.10). Especificamente, mostraremos que

$$\|z(t) - h(t) - \int_0^t R(t-s)f(s, z(s))ds\|_X \le \varepsilon,$$

para todo $t \in I$ e $z \in K_\varepsilon$. De fato, para $t_{i-1} < t \le t_i$ e usando (5.17) temos

$$\begin{aligned}
z(t) - h(t) - \int_0^t R(t-s)f(s, z(s))ds &= \int_0^t R(t-s)(f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds + \Phi(t) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} R(s-t)(f(s, z(t_{k-1})) - f(s, z(s)))ds \\
&+ \int_{t_{i-1}}^{t} R(t-s)(f(s, z(t_{i-1})) - f(s, z(s)))ds + \Phi(t) \\
&:= I_1^{\odot} + I_2^{\odot} + \Phi(t).
\end{aligned}$$

• A seguir, estimaremos os dois primeiros termos [16]. É claro que

$$\|I_1^{\odot}\|_X \le M_{RR'}\varepsilon_1 \int_0^{t_{i-1}} (t-s)ds, \tag{5.21}$$

$$\|I_2^{\odot}\|_X \le M_{RR'}\varepsilon_1 \int_{t_{i-1}}^{t} (t-s)ds. \tag{5.22}$$

[16]Notamos que para $s \in [t_{k-1}, t_k]$, $|t_{k-1} - s| < \frac{1}{n} < \delta_2$ e $z \in K$, então por (5.19) $\|z(t_{k-1}) - z(s)\|_X \le \frac{\delta}{4}$. Por (5.18), $\|f(s, z(t_{k-1})) - f(s, z(s))\|_X \le \varepsilon_1$.

• Para o terceiro termo, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Phi(t)\|_X &\le \left(1-\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)\|\sum_{k=1}^{i-1}\frac{u_k}{n}\|_X + \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\|\sum_{k=1}^{i}\frac{u_k}{n}\|_X\\ &\le \frac{1}{2}M_{RR'}t_{i-1}^2\varepsilon_1\left(1-\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)+\frac{1}{2}M_{RR'}t_i^2\varepsilon_1\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\\ &\le \frac{1}{2}M_{RR'}t_i^2\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.23}$$

De (5.21),(5.22) e (5.23) obtemos a estimativa

$$\|z(t)-h(t)-\int_0^t R(t-s)f(s,z(s))ds\|_X \le \frac{1}{2}M_{RR'}\varepsilon_1 t^2 + \frac{1}{2}M_{RR'}\varepsilon_1 t_i^2 \le \varepsilon t_i^2 \le \varepsilon$$

Desde que $\mathcal{S}$ é o conjunto dos pontos fixos do mapa Λ dado por (5.10), e combinando os Passo 1 ao Passo 4 e aplicando o Lema 5.14 obtemos que $\mathcal{S}$ é conexo em $C(I;X)$. □

Iremos agora estabelecer a propriedade de Kneser para o conjunto das soluções para o seguinte problema

$$\alpha u'''(t)+u''(t)-\beta Au(t)-\gamma Au'(t)=f(t,u(t),u'(t)),\ t\in I \tag{5.24}$$

$$u(0)=0, u'(0)=0, u''(0)=z, \tag{5.25}$$

onde $f: I\times X\times X\to X$ é uma função adequada e A o gerador de um família (α,β,γ)-regulaizada $\mathcal{R}(t)$ tal que as funções $t\to\mathcal{R}(t)$ e $t\to\mathcal{R}'(t)$ são fortemente contínuas de $[0,1]\to\mathcal{B}(X)$.

Para tratar o problema, iremos assumir que as seguinte condições são satisfeitas:

Condição $(\mathcal{C}_{car})^*$ A função $f: I\times X\times X\to X$ satisfaz a seguinte condição de Carathéodory:

(i) $f(t,\cdot): X\times X\to X$ é contínua a.e. $t\in I$;

(ii) Para cada $x\in X\times X$, a função $f(\cdot,x): I\to X$ é fortemente mensurável.

Começaremos introduzindo o conceito de solução branda para nosso problema.

Definição 5.16. Uma função $u: I\to X$ é dita uma solução branda do problema (5.24)-(5.25) se u é uma função continuamente diferenciável que satisfaz a seguinte equação integral

$$u(t) = \alpha R(t)z + \int_0^t R(t-s)f(x, u(s), u'(s))ds. \tag{5.26}$$

Notamos que se u for uma função de classe C^1 que satisfaz (5.26), então u' verifica a seguinte equação

$$u'(t) = \alpha R'(t)z + \int_0^t R'(t-s)f(x, u(s), u'(s))ds. \tag{5.27}$$

A partir de agora, consideraremos o espaço $X^2 = X \times X$ com a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_X, \quad x, y \in X.$$

De forma semelhante, consideraremos o espaço $C(I; X)^2 = C(I; X) \times C(I; X)$ com essa norma. Alem disso, como é feito normalmente para o espaço C^1 das funções continuamente diferenciáveis, iremos tomar a norma

$$\|x\|_1 = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty, x \in C^1(I; X).$$

Com isso, podemos estabelecer o seguinte resultado sobre existencia de soluções brandas para o problema (5.24)-(5.25).

Teorema 5.17. *Suponha que o operador A gera uma família (α, β, γ)-regularizada $R(t)$ tal que a função $t \to R(t)$ é contínua de I em $\mathcal{B}(X)$. Além disso, a função f satisfaz $(\mathcal{C}_{car})^*$ assim como as seguintes condições:*

(Kn-7) *Para cada $\sigma > 0$ o conjunto $f(I \times B_\sigma)$ é relativamente compacto, onde $B_\sigma(X) = \{(x, y) \in X \times X; \|x\|_X + \|y\|_X \leq \sigma\}$.*

Denotaremos $\gamma_\sigma^* = sup\{\|f(s, x, y)\|_X : s \in I, \|x\|_X + \|y\|_X \leq \sigma\}$.

(Kn-8) $2M_{RR'} \liminf_{\sigma \to \infty} \frac{1}{\sigma}\gamma_\sigma^* < 1$,

então existe uma solução branda para o problema (5.24)-(5.25). Além disso, se a seguinte condição é cumprida

(Kn-9) $2M_{RR'} \limsup_{\sigma \to \infty} \frac{1}{\sigma}\gamma_\sigma^* < 1$,

então, o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (5.24)-(5.25) é compacto em $C^1(I; X)$.

Demonstração. Para provar esse resultado iremos argumentar de forma semelhante a feita na prova do Teorema 5.12. Seja $\tau : C(I;X)^2 \to C(I;X)^2$ o mapa definido por

$$\begin{aligned}\tau^1(u,v)(t) &= \alpha R(t)z + \int_0^t R(t-s)f(s,u(s),v(s))ds,\\ \tau^2(u,v)(t) &= \alpha R'(t)z + \int_0^t R'(t-s)f(s,u(s),v(s))ds.\end{aligned}$$

De **(Kn-8)** temos que existe $\sigma > 0$ de tal forma que $\tau : B_\sigma(C(I;X))^2) \to B_\sigma(C(I;X))^2)$.

Mostraremos que τ é completamente contínuo. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli é suficiente mostrar que $\{\tau_0(u,v)(t) : \|(u,v)\|_{C(I;X)^2} \leq \sigma\}$ é relativamente compacto, e que o conjunto $\{\tau_0(u,v); \|u\|_{C(I;X)} + \|v\|_{C(I;X)} \leq \sigma\}$ é equicontínuo, onde

$$\tau_0(u,v) = (\tau_0^1(u,v), \tau_0^2(u,v)) = \tau(u,v) - (\alpha R(t)z, \alpha R'(t)z)$$

Podemos escrever τ_0 como

$$\begin{aligned}\tau_0(u,v)(t) = &\sum_{i=1}^n \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} [R(t-s) - R(t-s_i)]f(s,u(s),v(s))ds, \right.\\ &\left. \int_{s_{i-1}}^{s_i} [R'(t-s) - R(t-s_i)]f(s,u(s),v(s))ds \right)\\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} R(t-s_i)f(s,u(s),v(s))ds, \int_{s_{i-1}}^{s_i} R(t-s_i)f(s,u(s),v(s))ds \right).\end{aligned} \tag{5.28}$$

Para τ_0^1 obtemos a seguinte estimativa para o primeiro termo

$$\|\sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} [R(t-s) - R(t-s_i)]f(s,u(s),v(s))ds\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

pois $R(\cdot)$ é fortemente contínua e $f(s,u(s),v(s))$ está contido em um conjunto compacto, então $[R(t)-R(t')]f(s,u(s),v(s)) \to 0$ quando $|t-t'| \to 0$. De forma semelhante, podemos mostrar que

$$\|\sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} [R'(t-s) - R(t-s_i]f(s,u(s),v(s))ds\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Para o segundo termo de τ_0^1 temos que

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} R(t-s_{i-1})f(s,u(s))ds \in (s_i - s_{i-1})\overline{co(R(t-s_i)f([0,t]\times B_R(C(I;X)))} := K_i^1$$ [17]

E semelhantemente,

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} R'(t-s_{i-1})f(s,u(s))ds \in (s_i - s_{i-1})\overline{co(R'(t-s_i)f([0,t]\times B_R(C(I;X)))} := K_i^2,$$

onde os conjuntos K_i^2 são compactos. Assim,

$$\tau_0(B_\sigma(C(I;C)))(t) \subset K + B_\varepsilon(X),$$

onde $K = K_1^1 \times K_1^2 + ... + K_n^1 \times K_n^2$[18]. Como a escolha do $\varepsilon > 0$ foi arbitrária, temos que $\tau_0(B_\sigma(C(I;C)))(t)$ é relativamente compacto.

Para a equicontinuidade sejam ε e δ escolhidos satisfazendo as estimativas antiores e h tal que $|h| < \delta$. Notamos que a segunda afirmação é uma consequência direta das seguintes estimativas:

$$\| \int_0^t (\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s))f(s,u(s))ds\|_X \leq \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\zeta)d\zeta\right)^{-1} \int_0^t \gamma_R(s)ds \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$\| \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s,u(s))ds\|_X \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_t^{t+h} \gamma_R(s)ds,$$

O que implica que esse termo tende a 0 quando $h \to 0$, pois γ_R é integrável. Com estimativas semelhantes para τ_0^2, e juntando tudo, obtemos a equicontinuidade.

Então, se (u,v) é um ponto fixo de τ, então $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável e $u'(t) = \tau^2(u,v) = v(t)$. O que mostrar, que u é uma solução branda de (5.24)-(5.25). E a outra parte do teorema também é mostrada praticamente da mesma forma que no Teorema 5.12. ■

No teorema a seguir, assumiremos que o conjunto $\mathcal{S}$ consiste das soluções brandas de (5.24)-(5.25).

Teorema 5.18. *Suponha que o operador A gera uma família (α,β,γ)-regularizada $R(t)$*

[17] Por **(Kn-7)**, os conjuntos K_i^1 são compactos.

[18] Notamos que K é compacto, já que temos uma união finita de compactos em $C(I;X) \times C(I;X)$.

*tal que as funções $t \to R(t)$ e $t \to R'(t)$ são fortemente contínuas de I em $\mathcal{B}(X)$ e que as condições $(C_{car})^*$ e **(Kn-**7**)** são válidas. Além disso, se as seguinte condições são satisfeitas:*

(Kn-10) *O conjunto $\mathcal{S}$ é compacto em $C^1(I;X)$,*

(Kn-11) $4M_{RR'} \liminf_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma}\gamma_\sigma^* < 1$,

então $\mathcal{S}$ é conexo em $C^1(I;X)$.

Demonstração. Os argumentos para demonstrarmos esse resultado é muito parecido com aqueles que utilizamos para mostrar o Teorema 5.15, então o que faremos é mostrar os aspectos principais da demonstração. Do resultado anterior sabemos que o conjunto $\mathcal{S}$ é não vazio.Temos que $\mathcal{S}$ é conexo em $C^1(I;X)$ se, e somente se, o conjunto $\mathcal{S}^2 = \{(x,x') : x \in \mathcal{S}\}$ é conexo em $C(I;X)^2$.

Podemos selecionar uma constante $R > 0$ grande o suficiente, tal que $\|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \leq R$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e

$$2\alpha M_{RR'}\|z\|_X + 4M_{RR'}\gamma_R^* \leq R. \tag{5.29}$$

Seja $\mathcal{V}^*$ um conjunto compacto e absolutamente convexo tal que $f(t,x,y) \in \mathcal{V}^*$ para todo $t \in I$ e todo $(x,y) \in X^2$, $\|x\|_X + \|y\|_X \leq R$. Denotaremos por $\mathcal{V}_i^*$, $i = 0,1$ algum conjunto compacto e absolutamente convexo tal que

$$\int_0^t R(t-s)f(s,x(s),y(s))ds \in \mathcal{V}_0^*, \int_0^t R'(t-s)f(s,x(s),y(s))ds \in \mathcal{V}_1^*,$$

para todo $t \in I$, $(x(\cdot),y(\cdot)) \in C(I;X)^2$, $\|x(\cdot),y(\cdot)\| \leq R$. Tomamos $\mathcal{U}_i = 2\mathcal{V}_i^*$, $\mathcal{U}_i' = 3\mathcal{V}_i^*$, $i = 0,1$ e indicaremos por $N_0 = 2M_{RR'}\gamma_R^*$, com R dado por (3.26).

Passo 1 Para uma divisão d do intervalo I formado pelos pontos $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$, consideramos as funções $\zeta(\cdot)$ e $\omega(\cdot)$ dadas por $\zeta(0) = 0$, $\omega(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}\zeta(t) = \alpha R(t)z + \sum_{k=1}^{i-1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} R(t-s)f(s,\zeta(t_{k-1}),\omega(t_{k-1}))ds + (t_k - t_{k-1})v_k\right)\\ + \int_{t_{i-1}}^{t} R(t-s)f(s,\zeta(t_{i-1}),\omega(t_{i-1}))ds + (t-t_{i-1})v_i.\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\omega(t) = \alpha R'(t)z + \sum_{k=1}^{i-1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} R'(t-s)f(s,\zeta(t_{k-1}),\omega(t_{k-1}))ds + (t_k - t_{k-1})u_k\right)$$
$$+ \int_{t_{i-1}}^{t} R'(t-s)f(s,\zeta(t_{i-1}),\omega(t_{i-1}))ds + (t - t_{i-1})u_i, \tag{5.31}$$

para $t_{i-1} < t \leq t_i$ e $i = 1, ..., n$. Nas expressões (4.25) e (4.26) escolhemos $u_i, v_i \in X$ tal que $(u_i, v_i) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1$, $\sum_{k=1}^{i}(t_k - t_{k-1})(u_k, v_k) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1$, $\|u_i\| \leq N_0$, $\|\sum_{k=1}^{i}(t_k - t_{k-1})u_k\| \leq N_0$ e $\|\sum_{k=1}^{i}(t_k - t_{k-1})v_k\| \leq N_0$, para todo $i = 1, ..., n$.

Teremos que ζ e ω são funções contínuas. Para ζ e ω fixadas, dadas por (4.25) e (4.26) respectivamente, denotaremos por $\psi_i(\cdot)$ e $\varphi_i(\cdot)$, $i = 0, 1$ as funções escadas definidas por $(\psi_0(0), \psi_1(0)) = (0, 0)$, $(\varphi_0(0), \varphi_1(0)) = (u_1, v_1)$, $(\psi_0(t), \psi_1(t)) = (\zeta(t_{k-1}), \omega(t_{k-1}))$ e $(\varphi_0(t), \varphi_1(t)) = (u_k, v_k)$ para $t_{k-1} < t \leq t_k$ e $k = 1, ..., n$. Então, podemos reescrever as definições de ζ e ω como

$$\zeta = \alpha R(t)z + \int_0^t R(t-s)f(s,\psi_0(s),\psi_1(s))ds + \int_0^t \varphi_0(s)ds, \tag{5.32}$$
$$\omega = \alpha R'(t)z + \int_0^t R'(t-s)f(s,\psi_0(s),\psi_1(s))ds + \int_0^t \varphi_1(s)ds. \tag{5.33}$$

Denotemos $\Phi_i(t) = \int_0^t \varphi_i(s)ds$, $i = 0, 1$. Mostraremos que $\|(\zeta(t), \omega(t))\| \leq R$, para $0 \leq t \leq 1$, independente da divisão d e da escolha dos pontos (u_i, v_i). Das definições de ζ e ω obtemos facilmente que $\|(\zeta(t), \omega(t))\| \leq R$ para $0 \leq t \leq t_1$. Assumiremos agora que essa propriedade é válida em $[0, t_{i-1}]$ também podemos mostrar que continua válida para $t_{i-1} < t \leq t_i$.

Passo 2. Aqui mostraremos que o conjunto K formado pelas funções (ζ, ω) definidas em (4.25) e (4.26) é relativamente compacto em $C(I; X)^2$. De fato, se denotamos $\tilde{\zeta} = \zeta - \alpha\mathcal{R}(\cdot)z$ e $\tilde{\omega} = \omega - \alpha\mathcal{R}'(\cdot)z$ devemos provar que $K_0 = \{(\tilde{\zeta}, \tilde{\omega}) : (\zeta, \omega) \in K\}$ é relativamente compacto. Segue diretamente de (5.32) que $\tilde{\zeta}(t) \in \mathcal{U}_0'$ e $\tilde{\omega}(t) \in \mathcal{U}_1'$, para todo $(\zeta, \omega) \in K$ e $t \in I$. E seguindo como na demonstração do Teorema 5.15 podemos ver que a função $\tilde{\zeta}$ satisfaz a condição de Lipschitz com constante de Lipschitz dada por $N_2 = 3M_{RR'}\gamma_R^*$.

Veremos agora que a função $\tilde{\omega}$ é equicontínua. Supondo que s é um número positivo, temos a seguinte decomposição

$$\tilde{\omega}(t+s) - \tilde{\omega}(t) = \int_0^t (R'(\nu+s) - R'(\nu)) f(t-\nu, \psi_0(t-\nu), \psi_1(t-\nu)) d\nu$$
$$+ \int_t^{t+s} R'(t+s-\nu) f(\nu, \psi_0(\nu), \psi_1(\nu)) d\nu + \int_t^{t+s} \varphi_1(\nu) d\nu.$$

Como $\{f(t-\nu, \psi_0(t-\nu), \psi_1(t-\nu)) : 0 \leq \nu \leq t\}$ é relativamente compacto e $\mathcal{R}'(\cdot)$ é fortemente contínuo, temos que o primeiro termo do lado direito converge para zero, quando $s \to 0$. Mostremos agora que o segundo termo do lado direito também converge para zero,

$$\| \int_t^{t+s} R'(t+s-\nu) f(\nu, \psi_0(\nu), \psi_1(\nu)) d\nu \| \leq M_{RR'} \int_t^{t+s} \gamma_R^* d\nu = M_{RR'} \gamma_R^* s$$

que converge para zero quando $s \to 0$. Para o terceiro termo, temos que o mesmo tende a zero por agumentos semelhantes ao que fizemos no Teorema 5.15.

Então pelo Teorema de Arzelà-Ascoli segue que K_0 é relativamente compacto, e assim $K = (\alpha R(\cdot)z, \alpha R'(\cdot)z) + K_0$ também será.

Passo 3 Fixemos agora $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\varepsilon \leq 4M_{RR'}\gamma_R^*$ e tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M_{RR'}}$. Claramente, temos $\varepsilon_1 \leq 2\gamma_R^*$.

Pela compacidade de $\mathcal{S}^2$ e K assim como pela continuidade de f podemos tomar $0 < \delta_1 < 2\varepsilon$ tal que

$$\|f(s, x^1, y^1) - f(s, x^2, y^2)\| \leq \varepsilon_1,$$

para todo $s \in I$ e para todo $(x^i, y^i) \in (K \cup \mathcal{S}^2)(I)$ $i = 1, 2$, tal que $\|x^1 - x^2\| + \|y^1 - y^2\| \leq \delta_1$. Desde que $K \cup S^2$ é relativamente compacto em $C(I; X)^2$, podemos afirmar que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|(x(t), y(t)) - (x(s), y(s))\| \leq \frac{\delta_1}{4},$$

para todo $(x, y) \in K \cup \mathcal{S}^2$ e $t, s \in I$ tal que $|t - s| \leq \delta_2$.

Escolhamos n tal que $\delta = \frac{1}{n} \leq \min\{\delta_2, \frac{\delta_1}{\varepsilon}\}$. E a seguir, consideramos a divisão d definida pelos pontos $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$. Seja K_ε o conjunto formado pelos pares de funções (ζ, ω) definidos por (5.32), onde os pontos $u_1, v_1, ..., u_n, v_n$ satisfazem as seguintes condições:

(i) $(u_i, v_i) \in 2n(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1)$, $\|u_i\| \leq N_0$.

(ii) $\sum_{k=1}^{i}(u_k, v_k) \in n(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1)$, $\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{i} u_k\| \leq \frac{1}{2}M_{RR'}t_i^2\varepsilon_1$, $\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{i} v_k\| \leq M_{RR'}t_i\varepsilon_1$, para todo $i = 1, ..., n$.

Denotaremos por Z_ε o conjunto dos pontos $(u_1, v_1, ..., u_n, v_n)$ que satisfazem as condições acima. Da condição (ii) segue que $\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{i} u_k\| \leq M_{RR'}\gamma_R^*$ and $\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{i} v_k\| \leq 2M_{RR'}\gamma_R^*$.

Podemos concluir a prova estudando as propriedades do conjunto K_ε assim como foi feito de forma semelhante no Teorema 5.15. Para mostrarmos que cada solução branda $(x, x') \in \mathcal{S}^2$ pode ser aproximada por elementos de K_ε devemos selecionar u_i e v_i apropriadamente. De fato, u_i e v_i são dados por

$$\begin{aligned}
u_i &= n\sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(R(t_i - s) - R(t_{i-1} - s))\Delta_k f(s)ds + n\int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i - s)\Delta_i f(s)ds \\
&= n\sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(R(t_i - s) - R(t_{i-1} - s))(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds \\
&+ n\int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_i &= n\sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(R'(t_i - s) - R'(t_{i-1} - s))\Delta_k f(s)ds + n\int_{t_{i-1}}^{t_i} R'(t_i - s)\Delta_i f(s)ds \\
&= n\sum_{k=1}^{i-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(R'(t_i - s) - R'(t_{i-1} - s))(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds \\
&+ n\int_{t_{i-1}}^{t_i} R'(t_i - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))ds,
\end{aligned}$$

onde $p_0(s) = x(s)$, $p_1(s) = x'(s)$, $q_0(s) = \zeta(s)$, $q_1(s) = \omega(s)$ e abreviamos $\Delta_k f(s) = f(s, p_0(s), p_1(s)) - f(s, q_0(t_{k-1}), q_1(t_{k-1}))$.

Notamos que

$$\begin{aligned}
u_i &= n\int_0^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds \\
&- n\int_0^{t_{i-1}} R(t_{i-1} - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_i = n & \int_0^{t_i} R'(t_i - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds \\
- n & \int_0^{t_{i-1}} R'(t_{i-1} - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds
\end{aligned}
$$

Então $u_i \in 2n\mathfrak{U}_0$ e $v_i \in 2n\mathfrak{U}_1$ e

$$
\begin{aligned}
\|u_i\| &\leq 2nM_{RR'}(t_i - t_{i-1})t_{i-1}\gamma_R^* + 2nM_{RR'}(t_i - t_{i-1})^2\gamma_R^* \\
&= 2M_{RR'}t_{i-1}\gamma_R^* + 2M_{RR'}(t_i - t_{i-1})\gamma_R^* \leq 2M_{RR'}\gamma_R^*
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{n}\|\sum_{k=1}^{i} v_k\| = \|\int_0^{t_i} R'(t_i - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds\| \leq M_{RR'}t_i\varepsilon_1
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{i}(u_k, v_k) = (n & \int_0^{t_i} R(t_i - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds, \\
n & \int_0^{t_i} R'(t_i - s)(f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s)))ds\,) \in n(\mathfrak{U}_0 \times \mathfrak{U}_1).
\end{aligned}
$$

E seguindo da mesma forma que no Teorema 5.15 construimos os K_ε, que satisfazem as hipoteses do Lema 5.14, e assim mostramos a conexidade para o conjunto das soluções brandas para o problema 5.24-(5.25) ■

5.3 Aplicações

Seja $L : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Suponha que existe constante $\alpha \in (0, 1)$ tal que $|L(\cdot)|^\alpha \in L^1(0, 1)$. Consideremos a seguinte equação

$$
\begin{aligned}
\partial_{tt}u(t, x) + \lambda\partial_{ttt}u(t, x) =& c^2(\Delta u(t, x) + \nu\Delta\partial_t u(t, x)) && (5.34) \\
& + h\left(\int_\Omega L(t)u(t, \xi)d\xi\right)\Phi_0(x), t \geq 0, x \in \Omega, && (5.35)
\end{aligned}
$$

com condições iniciais $u(0, \cdot) = 0, \partial_t u(0, \cdot) = y, \partial_{tt}u(0, \cdot) = z$ e $\Phi_0 \in W^{1,2}(\Omega)$. Sob as condições acima, se h é uma função contínua que satisfaz as seguinte condições.

Li) Existe constante $c_1 > 0$ tal que $|h(t)| < c_1|t|^\alpha$, $t \in \mathbb{R}$.

Então o problema 5.34 com as condições iniciais dadas possui solução branda, e o conjunto formado por essas soluções é conexo.

Demonstração. Seja $f(t,\varphi)$ a perturbação associada a Equação (5.34). Podemos verificar que f satisfaz as hipoteses do Teorema 4.4. Notemos que

$$\|f(t,\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 vol(\Omega)^{\alpha/2}\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}|L(t)|^{\alpha}\|\varphi\|^{\alpha}_{L^2(\Omega)},$$

para todo $t \in I$, $\varphi \in L^2(\Omega)$, o que mostra que a condição $(Kn-1)$ vale, com $\gamma_R(t) = c_1 vol(\Omega)^{\alpha/2}\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}|L(t)|^{\alpha}R^{\alpha}$, e, e por sua vez, essa definição mostra que $(Kn-4)$ e $(Kn-6)$ são satisfeitos quando $\alpha < 1$. Notamos que a condição $(Kn-2)$ segue do fato que o conjunto $\{f(t,\varphi) : 0 \leq t \leq 1, \varphi \in L^2(\Omega), \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq R\}$ é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$, que é uma consequência do teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov. Consequentemente, as hipóteses do teorema 5.12 e 5.15 são satisfeitas e assim, podemos afirmar que o conjunto das soluções brandas de (5.34) com condições iniciais dadas é conexo[19]. □

[19]Vale observar que obtemos essa propriedade sem assumir que h satisfaz uma condição de Lipschitz local.

REFERÊNCIAS

AISSANI, Khalida; BENCHOHRA, Mouffak. Fractional integro-differential equations with state-dependent delay. **Adv. Dyn. Syst. Appl**, [S.l.], v. 9, n. 1, p. 17-30, 2014.

ANDRADE, Filipe et al. Asymptotic periodicity for hyperbolic evolution equations and applications. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v. 269, p. 169-195, 2015.

ANDRADE, Filipe et al. L^p-boundedness and topological structure of solutions for flexible structural systems. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, [S.l.], v. 38, n. 18, p. 5139-5159, 2015.

ANDRADE, Filipe; CUEVAS, Claudio; HENRÍQUEZ, Hernán R. Periodic solutions of abstract functional differential equations with state-dependent delay. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**,[S.l.], 2016.

ARENDT, Wolfgang et al. **Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems**. New York: Springer Science Business Media, 2011.

ARINO, O.; SÁNCHEZ, E.; FATHALLAH, A. State-dependent delay differential equations in population dynamics: modeling and analysis. **Fields Institute Communications**, [S.l.], v. 29, p. 19-36, 2001.

ARJUNAN, M. Mallika; NADAF, N. Y. Existence and controllability results for damped second order impulsive functional differential systems with state-dependent delay. **Opuscula Mathematica**, [S.l.], v. 34, n. 3, p. 503-522, 2014.

AKHMEROV, Rustjam R. et al. Measures of noncompactness and condensing operators. **Operator theory**, [S.l.], v. 55, p. 1-244, 1992.

ARTHI, G.; PARK, Ju H.; JUNG, Ho Y. Existence and controllability results for second-order impulsive stochastic evolution systems with state-dependent delay.**Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v. 248, p. 328-341, 2014.

BENCHOHRA, Mouffak; HENDERSON, Johnny; MEDJADJ, Imene. Global Existence Results for Functional Differential Inclusions with State-Dependent Delay. **Mathematical Modelling and Analysis**, [S.l.], v. 19, n. 4, p. 524-536, 2014.

BENCHOHRA, Mouffak; HELLAR, M. Global uniqueness results for fractional partial hyperbolic differential equations with state-dependent delay. **Ann Polon Math**, [S.l.], v. 110, n. 3, p. 259-281, 2014.

BERBERIAN, Sterling-K. **Lectures in functional analysis and operator theory**. New York: Springer-Verlag 1974.

BOSE, Sujit Kumar; GORAIN, Ganesh Chandra. Stability of the boundary stabilised internally damped wave equation $y'' + \lambda y''' = c^2($

$Deltay + \nu\Delta y'$) in a bounded domain in Rn. **Indian J. Math**, [S.l.], v. 40, n. 1, p. 1-15, 1998.

CARDOSO, Fernando; CUEVAS, Claudio. Exponential dichotomy and boundedness for retarded functional difference equations. **Journal of Difference Equations and Applications**, [S.l.], v. 15, n. 3, p. 261-290, 2009.

CHUONG, Nguyen Minh; KE, Tran Dinh. Generalized Cauchy problems involving nonlocal and impulsive conditions. **Journal of Evolution Equations**, [S.l.], v. 12, n. 2, p. 367-392, 2012.

CUEVAS, Claudio; HENRÍQUEZ, Hernán R.; SOTO, Herme. Asymptotically periodic solutions of fractional differential equations. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v. 236, p. 524-545, 2014.

CUEVAS, Claudio; LIZAMA, Carlos. Well posedness for a class of flexible structure in Hölder spaces. **Mathematical Problems in Engineering**, [S.l.], v. 2009.

DE ANDRADE, Bruno. **Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução**, Tese (Doutorado em Matemática)- UFPE, Recife, 2010

DE ANDRADE, Bruno; LIZAMA, Carlos. Existence of asymptotically almost periodic solutions for damped wave equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v. 382, n. 2, p. 761-771, 2011.

BOULITE, S.; MANIAR, L.; N'GUEREKATA, G. M. Almost automorphic solutions for hyperbolic semilinear evolution equations. In: **Semigroup Forum**. [S.l]: Springer-Verlag, 2005. p. 231-240.

CHILL, Ralph; SRIVASTAVA, Sachi. L p-maximal regularity for second order Cauchy problems. **Mathematische Zeitschrift**, [S.l.], v. 251, n. 4, p. 751-781, 2005.

DEIMLING, Klaus. **Nonlinear functional analysis**. New York; Dover Publications,Inc. , 2010.

DRIVER, Rodney D. Existence theory for a delay-differential system. **Contributions to Differential Equations**, [S.l.]; v. 1, p. 317-336, 1963.

DRIVER, Rodney D. A two-body problem of classical electrodynamics: the one-dimensional case.**Annals of Physics**, [S.l.]; v. 21, n. 1, p. 122-142, 1963.

DRIVER, Rodney D. A functional differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics. **Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics**,[S.l.]; p. 474-484, 2012.

NOLL, R. B.; ZVAVA, J.; DEYST, J. J. Effects of structural flexibility on spacecraft control systems.**Journal of Spacecraft and Rockets**, [S.l.]; 1969.

ENGEL, Klaus-Jochen; NAGEL, Rainer. **One-parameter semigroups for linear evolution equations**. New York; Springer Science Business Media, 2000.

FATTORINI, Hector O. **Second order linear differential equations in Banach spaces**. New York; Elsevier, 2011.

FERNÁNDEZ, Claudio; LIZAMA, Carlos; POBLETE, Verónica. Maximal regularity for flexible structural systems in Lebesgue spaces. **Mathematical Problems in Engineering**,[S.l.]; v. 2010.

FUKUHARA, Masuo. Sur les systémes des équations differentielles ordinaires. In:**Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts**. [S.l.], The Mathematical Society of Japan, 1928. p. 345-350.

FUNG, Yuan-cheng. **Foundations of solid mechanics**. New Jersey: Prentice Hall, 1965.

GAUTAM, Ganga Ram; DABAS, Jaydev. Results of local and global mild solution for impulsive fractional differential equation with state dependent delay.**Diff. Equ. Appl**, [S.l.], v. 6, n. 3, p. 429-440, 2014.

GORAIN, Ganesh C.; BOSE, Sujit K. Exact controllability and boundary stabilization of flexural vibrations of an internally damped flexible space structure. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v. 126, n. 2, p. 341-360, 2002.

GORAIN, Ganesh C. Uniform stabilization of n-dimensional vibrating equation modeling 'standard linear model' of viscoelasticity. **Applications and Applied Mathematics**, [S.l.], v. 4, n. 2, p. 314-328, 2009.

GRANAS, Andrzej; DUGUNDJI, James. **Fixed point theory**. New York: Springer Science Business Media, 2013.

GRIPENBERG, Gustaf; LONDEN, Stig-Olof; STAFFANS, Olof. **Volterra integral and functional equations**. New York: Cambridge University Press, 1990.

GUENDOUZI, Toufik; BENZATOUT, Ouahiba. Existence of mild solutions for impulsive fractional stochastic differential inclusions with state-dependent delay. **Chinese Journal of Mathematics**, [S.l.], v. 2014, 2014.

HALE, Jack K.; KATO, Junji. Phase space for retarded equations with infinite delay. **Funkcial. Ekvac**, [S.l.], v. 21, n. 1, p. 11-41, 1978.

HARTUNG, Ferenc et al. Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications. **Handbook of differential equations: ordinary differential equations**, [S.l.], v. 3, p. 435-545, 2006.

HERNÁNDEZ, Eduardo; HENRIQUEZ, Hernán R. Existence of periodic solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay. **Journal of**

Mathematical Analysis and Applications, [S.l.], v. 221, n. 2, p. 499-522, 1998.

HENRÍQUEZ, H. R.; CASTILLO, Genaro. The Kneser property for the second order functional abstract Cauchy problem. **Integral Equations and Operator Theory**, [S.l.], v. 52, n. 4, p. 505-525, 2005.

HENRIQUEZ, Hernan R.; PIERRI, Michelle; TÁBOAS, Plácido. Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for abstract neutral equations. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, [S.l.], v. 78, n. 03, p. 365-382, 2008.

HINO, Yoshiyuki; NAITO, Toshiki; MURAKAMI, Satoru. **Functional differential equations with infinite delay**. Londres: Springer, 1991.

KELLEY, John L. **General topology**. New York: Springer Science Business Media, 1975.

KNESER, Hellmuth. **Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschitzschen Bedingung nicht genügt**.[S.l.], 1923.

LI, Wen-Sheng; CHANG, Yong-Kui; NIETO, Juan J. Solvability of impulsive neutral evolution differential inclusions with state-dependent delay. **Mathematical and Computer Modelling**, [S.l.], v. 49, n. 9, p. 1920-1927, 2009.

LIKINS, Peter W. **Dynamics and control of flexible space vehicles**. Technical Report, Jet Propulsion Lab., California Inst. of Tech, [S.l.], 1969.

LONGTIN, André; MILTON, John G. Modelling autonomous oscillations in the human pupil light reflex using non-linear delay-differential equations. **Bulletin of mathematical biology**, [S.l.], v. 51, n. 5, p. 605-624, 1989.

LUNARDI, Alessandra. **Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems**. New York: Springer Science Business Media, 2012.

MAHAFFY, Joseph M.; BÉLAIR, Jacques; MACKEY, Michael C. Hematopoietic model with moving boundary condition and state dependent delay: applications in erythropoiesis.**Journal of theoretical biology**, [S.l.], v. 190, n. 2, p. 135-146, 1998.

MARTIN JR, Robert-H. **Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces**. New York: Wiley-Interscience, 1976.

MILLER, Richard-K. **Nonlinear Volterra integral equations**.New York: American Elsevier Publishing Co. 1971.

MUTHUKUMAR, P.; RAJIVGANTHI, C. Approximate controllability of impulsive neutral stochastic functional differential system with state-dependent delay in Hilbert spaces. **Journal of Control Theory and Applications**, [S.l.], v. 11, n. 3, p. 351-358, 2013.

NISBET, R. M.; GURNEY, W. S. C. The systematic formulation of population models for insects with dynamically varying instar duration. **Theoretical Population Biology**, [S.l.], v. 23, n. 1, p. 114-135, 1983.

PANDEY, Dwijendra N.; DAS, Sanjukta; SUKAVANAM, N. Existence of solution for a second-order neutral differential equation with state dependent delay and non-instantaneous impulses. **Int. J. Nonlinear Sci**, [S.l.], v. 18, n. 2, p. 145-155, 2014.

PAZY, Amnon. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. New York: Springer Science Business Media, 2012.

PIERRI, Michelle; ROLNIK, Vanessa. On pseudo-asymptotically periodic functions. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, [S.l.], v. 87, n. 02, p. 238-254, 2013.

POBLETE, Verónica; POZO, Juan C. Periodic solutions of an abstract third-order differential equation. **Studia Mathematica**, [S.l.], v. 215, p. 195-219, 2013.

PRÜSS, Jan. **Evolutionary integral equations and applications**. Berlim: Birkhäuser, 2013.

RADHAKRISHNAN, B.; BALACHANDRAN, K. Controllability of neutral evolution integrodifferential systems with state dependent delay. **Journal of Optimization Theory and Applications**, [S.l.], v. 153, n. 1, p. 85-97, 2012.

REZOUNENKO, Alexander V. On time transformations for differential equations with state-dependent delay. **Central European Journal of Mathematics**, [S.l.], v. 12, n. 2, p. 298-307, 2014.

SADOVSKII, Boris N. A fixed-point principle. **Functional Analysis and Its Applications**, [S.l.], v. 1, n. 2, p. 151-153, 1967.

SAKTHIVEL, R.; ANANDHI, E. R. Approximate controllability of impulsive differential equations with state-dependent delay. **International Journal of Control**, [S.l.], v. 83, n. 2, p. 387-393, 2010.

RATHINASAMY, Sakthivel; YONG, Ren. Approximate controllability of fractional differential equations with state-dependent delay. **Results in Mathematics**, [S.l.], v. 63, n. 3-4, p. 949-963, 2013.

DOS SANTOS, José Paulo Carvalho; HENRÍQUEZ, Hernán R. Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions to abstract integro-differential equations. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v. 256, p. 109-118, 2015.

SHIN, Jong Son. An existence theorem of functional-differential equations with infinite delay in a Banach space. **Funkcialaj Ekvacioj**, [S.l.], v. 30, n. 1, p. 19-29, 1987.

VIJAYAKUMAR, Velusamy; RAVICHANDRAN, C.; MURUGESU, R. Approximate controllability for a class of fractional neutral integro-differential inclusions with state-dependent delay. **Nonlinear Studies**, [S.l.], v. 20, n. 4, 2013.

VOLTERRA, Vito. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticita. **Atti della Reale Accademia dei Lincei**, [S.l.], v. 18, n. 2, p. 295, 1909.

YAN, Zuomao; ZHANG, Hongwu. Existence of solutions for impulsive fractional partial neutral integro-differential inclusions with state-dependent delay in Banach spaces. In: **ANNALES POLONICI MATHEMATICI**. SNIADECKICH 8, PO BOX 21,, 00-956 WARSAW 10, POLAND: POLISH ACAD SCIENCES INST MATHEMATICS, 2014. p. 143-169.

XIAO, Ti-Jun; LIANG, Jin. **The Cauchy problem for higher order abstract differential equations**. New York: Springer, 2013.

WALTHER, Hans-Otto et al. Stable periodic motion of a system with state dependent delay. **Differential and Integral Equations**, [S.l.], v. 15, n. 8, p. 923-944, 2002.

WU, Y.W R.B. Rice; JUANG, J. N. Control of large flexible space structures using pole placement design techniques. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, [S.l.], v. 4, n. 3, p. 298-303, 1981.