UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA

PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

ANNA BARBARA BARROS LEITE

Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais

Recife

2016

ANNA BARBARA BARROS LEITE

Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais

Dissertação apresentada à Pós- graduação em Psicologia Cognitiva, da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Psicologia Cognitiva.

Área de concentração: Psicologia Cognitiva

Linha de Pesquisa: Educação Matemática e Científica

Orientadora: Síntria Labres Lautert

Recife

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecário Rodrigo Fernando Galvão de Siqueira, CRB4-1689

L533r Leite, Anna Barbara Barros.
Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla : um olhar para as situações que emvolvem grandezas diretamente proporcionais / Anna Barbara Barros Leite. – 2016.
106 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profª. Drª. Síntria Labres Lautert.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Recife, 2016.
Inclui referências e apêndices.

1. Psicologia cognitiva. 2. Estudantes do ensino fundamental. 3. Adolescentes - Testes psicológicos. I. Lautert, Síntria Labres (Orientadora). II. Título.

153 CDD (22.ed.) UFPE (BCFCH2016-55)

FOLHA DE APROVAÇÃO

Anna Barbara Barros Leite

Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais.

Dissertação apresentada à Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Psicologia Cognitiva.

Área de concentração: Psicologia Cognitiva

Linha de Pesquisa: Educação Matemática e Científica

Orientadora: Síntria Labres Lautert

Aprovado em 26 de fevereiro de 2016

Banca Examinadora

ProfaDr. : Ernani Martins dos Santos

Instituição: Universidade de Pernambuco | UPE

Profa. Dra:Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Instituição: Universidade Federal de Pernambuco | UFPE

Às minhas filhas, com amor e gratidão por todos os sorrisos e abraços que são minha força motriz.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir a concretização de mais essa etapa.

Aos familiares e amigos, que à sua maneira contribuíram e torceram para que essa conquista fosse alcançada.

Aos membros do NUPPEM, pelos ricos momentos de discussões teóricas, em especial, à Ariédja, Layane, Dara, Sara e Maria Eduarda que ajudaram intensamente nas atividades de pesquisa.

Às colegas de pós-graduação Johana, Mirela e Larissa, em partilhar os momentos difíceis e pelas conversas de corredor.

À Professora Síntria, que desde o meu primeiro contato com trabalho de pesquisa, incentivou minha caminhada nessa jornada, e que durante estes anos de convivência tornou-se muito mais que uma orientadora. Obrigada pelos ensinamentos que tanto contribuíram para meu crescimento profissional.

A toda a equipe do Colégio de Aplicação, em especial aos alunos e professores que foram essenciais para a efetivação desta investigação.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste estudo.

Leite, A.B.B. *Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais 107 f*. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco.

RESUMO

Tomando por base as discussões da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1983, 1988, 2011) este estudo se propôs a descrever e classificar resoluções e estratégias desenvolvidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental II ao resolverem duas atividades (computacional e não-computacional) que envolviam situações-problema de proporção dupla e proporção múltipla em relações diretamente proporcionais. Para Gitirana, Magina, Spinillo e Campos (2014), estas situações envolvem relações proporcionais entre, no mínimo, três pares de grandezas e apresentam características especificas em suas configurações: (i) nas situações de proporção dupla os conjuntos de grandezas estabelecem relações independentes entre si e (ii) nas situações de proporção múltipla os conjuntos de grandezas apresentam relações proporcionais conjugadas entre si. Participaram do estudo 90 estudantes, de ambos os sexos, com idades entre 11 a 15 anos, matriculados entres os 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II de uma escola pública da cidade do Recife, igualmente divididos em três grupos de 30 participantes por ano investigado. Os participantes realizaram duas atividades em momentos distintos: (i) atividade computacional, realizada coletivamente e envolvia resolução de quatro situações-problema alternadas entre proporção dupla e proporção múltipla; (ii) atividade não computacional, realizada individualmente, na qual os participantes apresentavam estimativas para resolver duas situações- problema (uma de proporção dupla e uma proporção múltipla). Os resultados encontrados foram analisados quanto ao número de acertos e as estratégias elaboradas para realização das duas atividades. Quanto ao desempenho, na atividade computacional, observou-se que a média geral foi alta para todos os anos (1,58 para proporção dupla e 1,73 para proporção múltipla) e não foi encontrada diferença significativa entre o desempenho nos dois tipos de situação em todos os anos escolares (p= 0,90). O desempenho encontrado na atividade não computacional apresentou médias mais baixas (0,70 para proporção dupla e 0,74 para proporção múltipla) e não apresentou diferença significativa nas médias entre os anos investigados (p= 0, 483). Ao comparar as médias gerais nas duas atividades, observou-se diferença significativa para situação de proporção múltipla (p= 0,04) apontando maior grau de dificuldade na atividade não-computacional, possivelmente relacionada a manipulação errada dos conjuntos de grandezas ou por incompreensão das relações proporcionais neste tipo de situação. Quanto às estratégias elaboradas, tanto na atividade computacional quanto na atividade não-computacional, os dados apontam o uso massivo do operador escalar entre as grandezas nas situações de proporção dupla, já nassituações de proporção múltipla, identificou-se elevado índice de estratégia mista, que se refere ao uso de relação escalar e funcional entre os conjuntos de grandezas. Os resultados permitiriam chegar à algumas conclusões: (i) situações computacionais de proporção dupla e múltipla apresentam o mesmo grau de dificuldade independente do grau de escolaridade; (ii) a compreensão das relações na situação de proporção múltipla, sem o registro escrito, apresentou-se como mais difícil para amostra e (iii) existem estratégias especificas para resolução de cada tipo de situação de acordo com suas configurações proporcionais.

Palavras-chave: Estruturas multiplicativas. Proporção dupla. Proporção múltipla.

Leite, A. B. B. R*esolution problems of double and multiple proportion: a look at the situations that directly involve proportionals* 2016. *107 f.* MA dissertation. Postgraduate Program in Cognitive Psychology, Federal University of Pernambuco, Brazil.

ABSTRACT

Based on the discussions of the Theory of Conceptual Fields (Vergnaud, 1983, 1988, 2011) this study was to describe and classify resolutions and strategies developed by students of the final years of elementary school II to solve two activities (computational and non-computational) involving problem situations of double and multiple proportion ratio directly proportional relationships. To Gitirana, Magina, Spinillo and Campos (2014), these situations involve proportional relationships between at least three pairs of magnitudes and present specific features in their configurations: (i) in cases of double proportion the quantities of sets establish independent relations themselves and (ii) in situations of multiple proportions the quantities of conjugated sets have proportional relationships between them. The study included 90 students of both sexes, aged 11-15 years, enrolled entres the 7th, 8th and 9th grades of elementary school II of a public school in the city of Recife, equally divided into three groups of 30 participants per investigated year. Participants performed two activities at different times: (i) computer activity held collectively and involved four alternate resolution problem situations between double and multiple proportion ratio; (Ii) computer activity, carried out individually, in which participants presented estimates to solve two problem situations (a double ratio and a multiple ratio). The results were analyzed for the number of hits and the strategies developed to carry out the two activities. As for performance, the computational activity, it was observed that the overall average was high for all years (1.58 to 1.73 for double ratio and multiple proportion) and there was no significant difference between the performance of both types of situation in all school years (p = 0.90). The performance not found on computer activity showed lower average (0.70 to 0.74 for double ratio and multiple proportion) and no significant difference in mean between the investigated years (p = 0, 483). Comparing the overall averages in both activities, there was a significant difference for multiple ratio status (p = 0.04) indicating greater degree of difficulty in non-computational activity, possibly related to wrong manipulation of sets of quantities or misunderstanding of proportional relations in this type of situation. As to elaborate strategies, both in computational activity as the non-computational activity, the data point to the massive use of the operator climb between the quantities in situations of double proportion, as in situations of multiple proportion, we identified high mixed strategy index, As regards the use of scalar and functional relationship between sets of variables. The results allow to reach some conclusions: (i) computer cases of double and multiple proportion with the same degree of difficulty regardless of the level of education; (Ii) an understanding of the relationships in the multiple ratio situation without the written record, was presented as more difficult to sample and (iii) there are specific strategies for resolving each situation according to their proportional settings.

Keywords: Multiplicative structures. Double proportion. Multiple ratio.

Sumário

Introdução

As pesquisas realizadas no âmbito da Psicologia da Educação Matemática caracterizam-se por um campo de conhecimentos e estudos empíricos que abordam o processo de construção de conceitos matemáticos com interesse na análise das atividades matemáticas produzidas pelos indivíduos em diferentes contextos, escolares ou extraescolares; em especial atenção para as formas (estratégias) como os indivíduos lidam com estes conceitos durante a resolução de problemas matemáticos (Da Rocha Falcão, 1999, 2003; Nunes, Carraher & Schliemann, 2011).

Entre os aportes teóricos desenvolvidos para esta finalidade, destaca-se a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud (1983),pertencente ao movimento da “didática das matemáticas”, a qual busca compreender a dinâmica da conceitualização em seus diferentes níveis qualitativos no decorrer da escolaridade (Moro, 2001).

De acordo com esta perspectiva teórica (Vergnaud, 1983), define-se por campo conceitual um conjunto de situações que envolvem conceitos com características em comum, e no caso da Aritmética propõe-se a existência de dois grandes campos conceituais: aditivo e multiplicativo, sendo este último o grande eixo desta investigação.

O campo conceitual multiplicativo, qual engloba operações que envolvem multiplicação, divisão, fração, razão, proporção e probabilidade (Vergnaud, 1983). As discussões acerca do campo conceitual multiplicativo referem-se à existência de uma “continuidade” entre os raciocínios aditivos e multiplicativos, visto que, muitas vezes o procedimento de cálculo da multiplicação pode ser feito por meio de adição de parcelas iguais (Magina, Santos & Merlini 2012; 2014).

No entanto, do ponto de vista conceitual, existe uma ruptura relevante entre essas duas operações, pois, no raciocínio aditivo as situações caracterizam-se pela presença de um único invariante operatório, expresso pela relação parte e todo, já o raciocínio multiplicativo se caracteriza por situações que envolvem a coordenação das relações entre duas variáveis (Vergnaud, 1983, 1988; Correa & Spinillo, 2004; Nunes& Bryant, 2005; Magina, Santos & Merlini, 2012, 2014; Gitirana, Magina, Spinillo & Campos, 2014).

Pertencente ao campo conceitual multiplicativo e objeto central desta investigação está o conceito de proporcionalidade que envolve o sentido de co-variância e múltiplas comparações, bem como, se refere à capacidade de reunir e processar mentalmente conjuntos diferentes de informação. Outra característica deste conceito refere-se à capacidade de entender a relação multiplicativa inerente em situações de comparação (Lesh; Post &Behr, 1988). As situações que envolvem proporcionalidade caracterizam-se pela presença de relações entre variáveis, e estas podem apresentar-se de três formas diferentes: (i) proporção simples, definida pela existência de uma relação constante entre os dois números; (ii) proporção múltipla, caracterizada por situações que envolvem duas ou mais proporções simples conjugadas; (iii) proporção dupla, caracterizada por situações que envolvem duas ou mais proporções independentes ligadas entre si por uma variável em comum (Vergnaud,1983;1988;2011).

Este estudo pretendeu investigar o desempenho e as estratégias desenvolvidas por estudantes nos anos finais do Ensino Fundamental II (7º, 8º e 9º anos) para resolução de situações-problema computacionais e não computacionais envolvendosituações de proporção dupla ou múltipla em sua configuração. De modo geral busca-se discutir três questões principais:

1. As situações de proporção dupla e de proporção múltipla apresentam o mesmo grau de dificuldade?
2. Que estratégias são mais eficazes para resolução de situações de proporção dupla e proporção múltipla? São as mesmas em ambas as situações?
3. Como se configura a compreensão dos estudantes acerca das relações diretamente proporcionais nas situações de proporção dupla e múltipla, ao realizarem atividades com e sem apoio do registro escrito?

Diante dos aspectos apresentados nesta introdução, apresenta-se sinteticamente a estrutura geral desta dissertação, cujos Capítulos I e II estão direcionados às questões de natureza teórica, no Capítulo III são apresentados os objetivos pretendidos e aspectos referentes à operacionalização da investigação. Nos Capítulos IV e V são apresentados sistema de análise, resultados obtidos e suas respectivas análises. E por fim, no Capítulo VI são apresentadas as conclusões gerais do estudo a partir das três questões apresentadas acima nesta seção.

Capítulo I

Psicologia da Educação Matemática e a Teoria dos Campos Conceituais

Neste capitulo serão discutidas as interlocuções existentes entre os objetivos da Psicologia Cognitiva e a Psicologia da Educação Matemática, bem como, apresenta-se uma das teorias que dão suporte para as investigações nesta área: A Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1983).

1.1 - Psicologia cognitiva e a Psicologia da Educação Matemática

A psicologia cognitiva considera tanto o processo de aquisição de conhecimentos quanto à investigação e desenvolvimento de atitudes que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem (Brito & Garcia, 2001). Dentro desta perspectiva é possível elencar cinco aplicações desta área de conhecimento/investigação para a educação: (i) a atenção é voltada a "*como*" os estudantes aprendem; (ii) realiza-se uma análise do desenvolvimento cognitivo dos estudantes para o planejamento de ensino; (iii) pretende-se demonstrar que um conceito está relacionado com outros; (iv) associa-se novas informações àquelas já aprendidas para facilitar o processo de aprendizagem; (v) incentiva-se a realização de atividades mentais (Grau,1997).

Lautert e Spinillo (2006) apontam que a psicologia cognitivaaproxima-se de forma mais efetiva da educação quando lança mão de uma perspectiva que ressalta teorias acerca de conhecimentos específicos como é o caso da Psicologia da Educação Matemática. Este campo teórico e empírico surge a partir de interação entre os aportes e objetivos da Psicologia e da Educação Matemática, esegundo Da Rocha Falcão (2003) tem como foco da investigação a análise da atividade matemática.

Considera-se nesta perspectiva três contextos culturais nos quais há construção de conhecimento desta disciplina: (i) matemática escolar, através das atividades didáticas; (ii) matemática extra-escolar, realizada em ambientes que não tenham por objetivo a transmissão de conteúdo e (iii) a matemática dos matemáticos, praticado por profissionais específicos e com objetivos delimitados.

Uma recente definição para Psicologia da Educação Matemática foi apresentada por Spinillo e Lautert (2013), referindo-se aos seus objetivos e contribuições:

> Esta área de conhecimento se volta para compreensão dos aspectos psicológicos do ensino e aprendizagem da Matemática; destacando-se dentre outros pontos, a necessidade de compreender as formas de raciocinar dos estudantes: como os conceitos matemáticos são compreendidos, quais as dificuldades que os estudantes enfrentam em relação a esses conceitos, como eles se desenvolvem e como podem ser desenvolvidos (p.206).

Desta forma, as pesquisas empíricas realizadas neste âmbito buscam examinar o processo de construção de conceitos matemáticos com vistas a levantar discussões e investigar aspectos que contribuam para uma aprendizagem significativa e eficiente.

A Teoria dos Campos Conceituais surge a partir das discussões de Gerárd Vergnaud (1983) como uma perspectiva teórica que abrange e norteia o conjunto das discussões e estudos realizados nesta área, e, será melhor explicada na próxima seção.

1.2- A Teoria dos Campos Conceituais e o processo de resolução de problemas

A Teoria dos Campos Conceituais tem o objetivo de fornecer alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento dos conteúdos conceituais em campos específicos do conhecimento(Vergnaud, 1983; 2011), e, desta forma apresenta-se como um corpus teórico consistente e coerente para pesquisas na área da Psicologia Cognitiva e mais especificamente à Psicologia da Educação Matemática.

Por se tratar de um campo que investiga processo desenvolvimental de conceitos, a TCC[1]aponta que, durante a construção de conhecimento existem várias etapas que envolvem rupturas e filiações dos conhecimentos já adquiridos ou experienciados pelos estudantes. Em outras palavras, os aprendizes ao se depararem com novas situações se utilizam do conhecimento adquirido para buscar resolvê-las, e quando não há êxito na atividade, exige-se o abandono de antigas concepções, a fim de propiciar a construção de novos conceitos (Vergnaud, 2011).

Além disso, e por muitas vezes, os aprendizes conseguem resolver a atividade solicitada, porém, não conseguem explicar o que foi realizado. Sobre esta questão, Vergnaud (2011) propõe a existência de dois tipos de conhecimento: (i) o explícito, que pode ser verbalmente explicado pelos indivíduos, denominado de "conceito-em-ação" e (ii) o implícito, no qual o estudante realiza a operacionalização, sem, no entanto, conseguir explicitar verbalmente as estratégias utilizadas, denominado de "teorema-em-ação". Acerca da relevância desta diferenciação, o autor aponta para necessidade de atentar-se aos teoremas-em-ação, pois estes indicam a forma como o estudante está construindo o conhecimento (Ibidem).

O campo conceitual, sob a égide desta teoria, caracteriza-se como o conjunto de situações, nas quais os conceitos se encontram em estreita conexão e para sua análise e tratamento é

[1] Adiante será utilizada essa sigla para referir-se à Teoria dos Campos Conceituais.

necessária a compreensão dos tipos de procedimentos e representações utilizados pelos indivíduos para resolver as situações. Para Vergnaud (1983; 2011) esta proposta teórica de investigação sobre desenvolvimento de conceitos deve ser pautada numa terna de conjuntos, quais sejam:

- O conjunto de invariantes (I), caracterizados pelos objetos, propriedades e relações, que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações;
- O conjunto de representações (R) que podem ser usadas para pontuar e representar esses invariantes, bem como, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles, podendo estas ser simbólicas, gráficas, pictóricas, dentre outras;
- O conjunto de situações (S) definido como o conjunto de situações que tornam o conceito significativo.

Os conteúdos referentes a cada conceito são estudados e descritos com base tanto nas situações como nos invariantes operatórios e representações/esquemas mobilizados pelos indivíduos em tais situações.

Nesta perspectiva, o conceito não é compreendido como uma entidade isolada, mas a partir do cruzamento entre vários conceitos existentes numa rede de significados (Vergnaud, 2011). Entende-se, portanto, que para a construção de determinado conceito faz-se necessário que outro esteja em processo de consolidação cognitiva, visto que o processo de conceitualização é contínuo. Nesta condição, a estrutura de campo conceitual nos possibilita estudar a organização das ideias interconectadas, das conceitualizações e das representações por um período de tempo suficientemente extenso (Vergnaud, 1983).

Em sua proposta, a TCC toma como herança da perspectiva piagetianaa ideia de que existe uma relação de interdependência entre aquele que conhece e aquilo que vai ser conhecido, e, portanto, o entendimento de um conceito matemático pode ser revelado a partir das ações que o estudante opera para resolver uma situação (Banks - Leite, 2000).

Uma ferramenta pedagógica eficiente para esse processo de construção de conceito é a resolução das situações-problema, visto que, os estudantes na busca de encontrar uma solução experienciam uma aprendizagem mais significativa, bem como, os significados dos conceitos são ampliados, e, assim é possível "costurar o plano subjetivo das concepções à estabilidade objetiva dos conceitos" (Pais, 2006, p. 133).

Sobre a atividade de resolução de problemas,Brito (2006) define como

> um processo cognitivo que visa transformar uma dada situação em uma situação dirigida a um objetivo, quando o método obvio de solução não está disponível para o solucionador, apresentando quatro características básicas: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do individuo. A solução de problemas refere-se a uma atividade mental superior ou de alto nível e envolve o uso de conceitos e princípios para atingir a solução (p.18).

Para as discussões acerca das etapas de referentes ao processo de resolução de problemas tomar-se-á por base as perspectivas apresentadas por Polya (1995) e Mayer (1992), favorecendo, assim, a construção de um panorama que permita realizar análise das etapas e procedimentos utilizados pelos sujeitos, para a descrição, oral ou escrita da forma como pensaram para resolver um problema.

Segundo Polya (1995), a atividade de resolução de problemas envolve quatro etapas sequenciais:

1- Compreensão do problema: consiste em identificar as partes principais do problema, articulando a incógnita, os dados e a condicionante;

2- Estabelecimento de um plano: nesta etapa exige-se que o sujeito tenha conhecimento dos procedimentos (cálculos, desenhos) necessários para a resolução do problema. Ressalta-se que pode haver dificuldade na passagem da compreensão do problema para o estabelecimento de um plano, referindo-se este último à etapa principal da resolução.
3- Execução do plano: envolve a seleção e aplicação do procedimento mais útil;
4- Verificação da solução ou retrospecto: consiste em reexaminar a resolução escolhida, analisar o plano e sua execução.

Sobre os conhecimentos necessários para solução de problemas Mayer (1992) *apud* Brito (2006), aponta que podem ser classificados em quatro tipos específicos: (i) fatores linguísticos, que envolvem a compreensão do enunciado; (ii) conhecimento de esquema, no qual sabe-se a relação entre problemas e tipo; (iii) conhecimento algorítmico**,** refere-se ao (s) procedimento (s) de cálculo a ser utilizado; (iv)conhecimento estratégico, relacionado a forma como os problemas serão enquadrados.

Diante desta discussão acerca do processo de resolução de problemas e de sua relevância para investigações na área da Psicologia Cognitiva e mais especificamente da Psicologia da Educação Matemática, aponta-se que durante atividades de resolução de situações-problema, esquemas específicos são mobilizados a depender dos conceitos envolvidos nelas, relacionados ao nível de desenvolvimento cognitivo, possibilitando a identificação de aspectos referentes à variedade de procedimentos e estratégias.

As discussões em torno dessa abordagem afirmam que para melhor compreender o raciocínio dos estudantes e implementar formas de desenvolvê-lo é necessário refletir e interpretar os tipos de resolução adotados, bem como, considerar que do ponto de vista psicológico a aquisição de um conceito está atrelada às competências, estratégias e representações dos conceitos e das situações (Correa &Spinillo, 2004).

Diante destas reflexões apresentadas, é possível delimitar que os aspectos psicológicos emergentes ematividades que envolvam a resolução de problemasapresentam particularidades que direcionam a compreensão e, consequentemente a elaboração de estratégias de raciocínio, o que nos instiga a uma problematização no âmbito da Psicologia da Educação Matemática.

Esta investigação concentra-se na resolução de problemas que envolvem conceitos e situações pertencentes ao campo conceitual multiplicativo, e por isso, faz-se necessário uma apresentação mais detalhada, encontrada no próximo capítulo.

Capítulo II

As estruturas multiplicativas e o conceito de proporcionalidade

Neste capítulo discute-se acerca das especificidades do campo conceitual multiplicativo de acordo com a TCC, em seguida, apresenta-se as características operatórias do conceito de proporção e o processo de construção de um raciocínio proporcional e, por fim, os diferentes tipos de situações que envolvem proporcionalidade em suas configurações.

2.1- As especificidades do campo conceitual multiplicativo

O campo conceitual multiplicativo engloba operações que envolvem multiplicação, divisão, fração, razão, proporção e probabilidade (Vergnaud, 1983). É consenso na literatura a existência de continuidades e descontinuidades entre os raciocínios aditivos e multiplicativos (Vergnaud, 1983, 1988; Correa & Spinillo, 2004; Nunes & Bryant, 2005; Magina, Merlini & Santos, 2012; 2014; Gitirana, Magina, Spinillo & Campos, 2014). Um esquema explicativo e ilustrativo dos conceitos e relações pertencentes a este campo conceitual pode ser visualizado na Figura 1 apresentada abaixo:

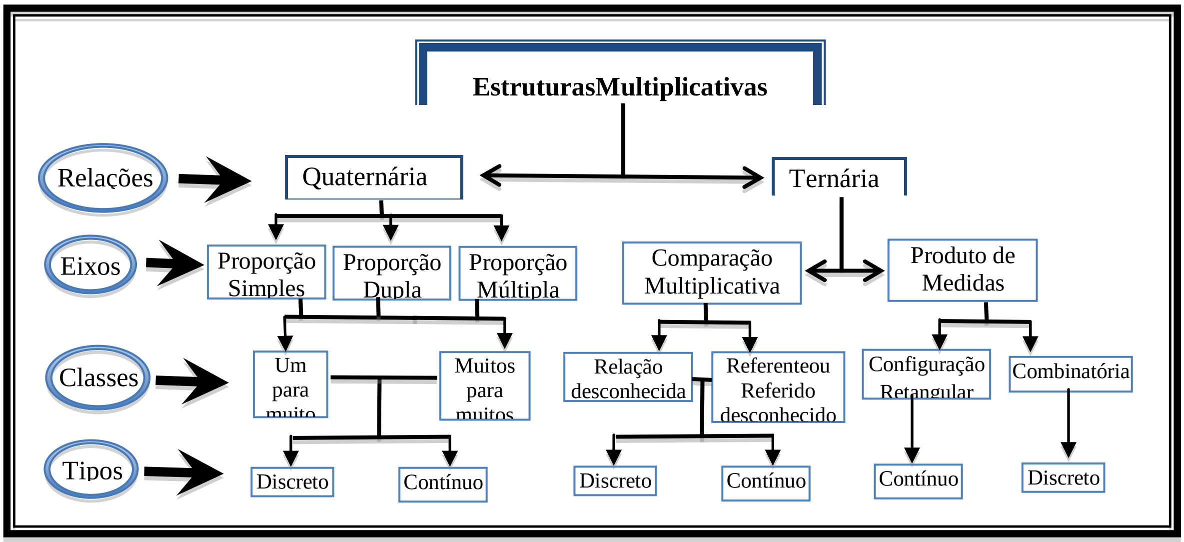


Figura 1: Esquema ilustrativo e explicativo das relações envolvidas no campo conceitual multiplicativo. (Fonte: Santos, 2015. p.105)

Aponta-se a existência de relação entre multiplicação e adição quanto ao procedimento de cálculo da multiplicação por meio de adição de parcelas iguais, (Magina, et. al., 2014), porém, do ponto de vista conceitual, existe uma ruptura relevante entre essas duas operações, visto que, no raciocínio aditivo as situações caracterizam-se pela presença de um único invariante operatório, expresso pela relação parte e todo, no qual se sabe o tamanho das partes e procura-se o todo ou, ainda, apresenta-se o todo e uma das partes e se solicita a identificação da outra parte.

Segundo Nunes et. al.(2005), o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é a "existência de uma relação fixa entre duas variáveis (ou duas quantidades) e uma relação constante entre elas" (p.85). Desta forma, ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, estamos buscando o valor de uma variável que corresponda a um valor dado na outra variável, e esta relação constante entre variáveis é que caracteriza os problemas de raciocínio multiplicativo.

Subjaz a este raciocínio específico a ideia de uma correspondência de um-para–muitos ou de muitos-para-muitos, de um esquema de distribuição equitativa e de coordenação entre os esquemas de correspondência pertencente à multiplicação e os que envolvem a distribuição/divisão (Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2005).

Segundo Nunes e Bryant (1997) três situações demarcam as diferenças procedurais, conceituais e cognitivas entre situações aditivas e multiplicativas, na sequencia é feita uma breve explanação de cada uma.

Nesta perspectiva, as situações de correspondência **um-para-muitos** se diferenciam das situações aditivas em quatro aspectos:

1- Apresentamrelação constante entre dois conjuntos, que é invariável e possui a unidade como referencia de um dos conjuntos, este esquema de ação serve como base para compreensão do conceito de proporção, um exemplo desta situação pode ser: “para uma bicicleta tem-se duas rodas”, podendo ser representado 1:2;

2- As ações que devem ser efetuadas para manter esta relação constante são as replicações, que envolve a soma de cada conjunto da unidade correspondente para que a invariância seja mantida, ou seja, a cada 1 bicicleta que é somada ao conjunto de bicicletas, deve-se somar 2 rodas ao conjunto de rodas;

3- A cada replicação realizada a proporção não é alterada, ou seja, a proporção do exemplo das bicicletas é 1:2, então para 6 bicicletas teremos 12 rodas;

4- O surgimento de um novo sentido numérico, que refere-se ao número de replicações realizadas e denomina-se de fator (ou operador) escalar, por exemplo, para o exemplo das bicicletas o número seis refere-se à relação entre 1 e 6 bicicletas e entre 2 e 12 rodas.

Outro tipo de situações especificas do campo conceitual multiplicativo, referem-se**às relações entre variáveis ou co-variações**, caracterizadas por relações entre duas ou mais variáveis que co-variam em consequência de uma convenção ou causa (Nunes & Bryant, 1997). Portanto, nestas relações refere-se sempre aos valores sobre variáveis e não aos valores dos conjuntos de variáveis, por exemplo, numa situação de venda de alimentos por quilo é comum dizer o “preço por quilo”, porém, essa informação não se refere ao preço final nem ao conjunto referente a quantidade de alimentos, mas, a uma informação que conecta essas duas, podendo ser denominado de fator (ou operador) funcional (Santos,2015).

Ainda sobre os esquemas de ação que envolvem correspondência, observa-se que em algumas situações esta correspondência não se refere à unidade, apresentando em seus conjuntos grandezas maiores que um, são denominados de relações de correspondência **muitos-para-muitos**(Santos, 2015;Magina et. al., 2014)um exemplo deste tipo de relação pode ser encontrado na seguinte situação-problema: “ A padaria de Seu João está em promoção, a cada 6 pães comprados recebe-se como brinde 2 caixas de suco. Quantas caixas de suco Mariana receberá se comprar 18 pães?”.

Neste tipo de problema observa-se que a relação entre o conjunto de pães e de caixas de suco é 6:2. De acordo com Santos (2015) neste tipo de relação exige-se do sujeito que realize duas operações: (i) identificar a relação entre as grandezas a partir da unidade, ou seja, estabeleça a relação um-para-muitos; (ii) execute a operação, utilizando fator (operador) escalar ou funcional.

Por último apresentam-se as **situações que envolvem distribuições**, relacionadas ao às situações de divisão e são compostas por três elementos (o todo, a parte e o tamanho das partes), estas situações caracterizam-se por uma relação inversa entre dois elementos, ou seja, quando a divisão é feita sucessivamente, observa-se uma transformação inversa na relação entre o todo e as partes.

Desta forma observa-se que em situações que envolvam o raciocínio multiplicativo, faz-se necessária uma transformação qualitativa de pensamento, pois são apresentados diferentes sentidos numéricos e novas situações, de forma que seu desenvolvimento só é frutífero se forem apresentadas diversas situações que abordem estas características.

Apresentada a especificidade do campo conceitual multiplicativo, as próximas seções discutirão acerca da temática central desta investigação: o conceito de proporcionalidade e os tipos de situações relacionadas ao mesmo.

2.2 O conceito de proporcionalidade e o raciocínio proporcional

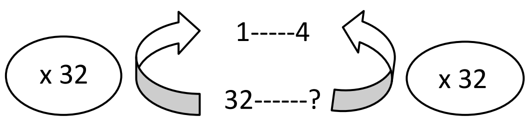
De acordo com Lesh, Post e Behr (1988), a proporcionalidade envolve o sentido de covariância e múltiplas comparações, assim como a capacidade de reunir e processar mentalmente conjuntos diferentes de informação; apresenta como característica a capacidade de entender a relação multiplicativa inerente em situações de comparação.

Contudo faz-se necessário apresentar, a principio, a distinção entre *proporcionalidade*, o qual se refere a um conceito que desempenha um papel importante em aplicações contextuais a princípios físicos e *raciocínio proporcional*, caracterizado pela compreensão dos contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade (Sousa, 2015).

Segundo Stremel (2013) define-se*razão* entre dois números (a e b) pelo quociente existente entre eles (a/b) e se forem duas medidas de mesma grandeza devem ser representadas em uma mesma unidade de medida. Por exemplo, as idades de dois irmãos, sejam 15 e 30, sua razão pode ser representada por 15: 30 que é igual a 0,5.Já o conceito de *proporcionalidade* pode ser definido como a igualdade entre duas ou mais razões, ou seja, *a/b=c/d=e/f*. Tomando o exemplo anterior tem-se que ao dobrar os valores das idades, as razões entre as idades dos irmãos podem ser representadas por: 15/30= 30/60 que equivalem a 0,5. As situações proporcionais variam de acordo com a relação existente entre as grandezas existentes nas situações-problema, que podem ser:

(i) Diretamente proporcionais: nas quais a variação escalar ocorrida em uma grandeza é observada no mesmo sentido na outra grandeza. Exemplo disto pode ser a seguinte situação-problema:

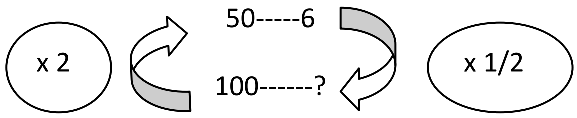
Para cada carro tem-se 4 rodas. Quantas rodas têm um conjunto com 32 carros?



Observa-se que nesta situação à medida que o conjunto de carros aumenta é observado um aumento, de mesma magnitude, no conjunto das rodas.

(ii) Inversamente proporcionais: nas quais a variação ocorrida em uma grandeza é observada no sentido inverso na outra grandeza. Exemplo deste tipo de relação pode ser encontrado na situação-problema abaixo:

Se João demorou 6h numa viagem ao dirigir com velocidade de 50km/h. Quanto tempo João demoraria se sua velocidade fosse 100km/h?



Observa-se que nesta situação à medida que a velocidade aumenta o tempo de viagem diminui.

Segundo Spinillo (2002), o conceito de proporção vem sendo investigado através de uma variedade de tarefas, quais sejam (i) tarefas de incógnita, nas quais busca-se na resolução encontrar o valor omisso; e, (ii) tarefas de comparação,nas quais são feitas comparações entre relações.

Sobre o raciocínio proporcional, observa-se que este vai muito além da mecanização e está associado a competências no sentido de fazer análises conscientes de relação entre quantidades (Sousa, 2015). Observa-se que muitas vezes o estudante utiliza corretamente relações multiplicativas para resolver problemas que envolvem proporcionalidade, contudo, estas informações não são suficientes para considerar a sua construção ou desenvolvimento, pois, o raciocínio proporcional evidencia-se quando o sujeito reconhece a semelhança estrutural e a relação entre as grandezas envolvida.

É consenso na literatura que o raciocínio proporcional requer: (i) reconhecer a equivalência entresituações distintas; (ii) pensar em termos relativos e não em termos absolutos; (iii) estabelecer relações entre relações,i.e., estabelecer relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem (Sousa, 2015; Vergnaud, 2011; Spinillo, 2002; Lesh, Post &Behr, 1988).

Do ponto de vista psicológico, considera-se que este tipo de raciocínio proporciona o desenvolvimento de conhecimentos, os quais favorecem aos estudantes a evolução de raciocínios de ordem superior. O raciocínio proporcional, por estar relacionado a inferências e predições que envolvem tanto o pensamento qualitativo como o pensamento quantitativo, muitas vezes baseados em situações da vida real, abrange um espectro mais amplo e complexo das aptidões cognitivas, o que provoca um *"deslocamento conceptual significativo dos níveis operacionais do pensamento concreto para os níveis operacionais formais do pensamento"*(Piaget & Beth, 1966 *apud*Lesh, Post &Behr, 1988, p.99).

A partir do exposto caracteriza-se o conceito de proporcionalidade como pedra angular necessária para a passagem da Aritmética para Álgebra.Observa-se, portanto, o nível de relevância do conceito de proporcionalidade e do desenvolvimento do raciocínio proporcional tanto na esfera da educação formal quanto na compreensão de situações cotidianas. Na sequência apresentam-se as diversas possibilidades de situações que envolvem o conceito de proporcionalidade e as características inerentes a cada uma, as quais provocam mobilizações especificas no processo do raciocínio proporcional.

2.3 Situações que envolvem proporcionalidade de acordo com a TCC

Acerca dos tipos de problemas que envolvem o conceito de proporção, Levain e Vergnaud (1994; 1995) apontam três situações que apresentam características especificas que se diferenciam quanto ao número de grandezas envolvidas e as relações entre elas.

A primeira é a situação de *proporção simples*, caracterizada pela relação constante entre dois pares de grandezas, que podem ser diretamente ou inversamente proporcionais, bem como, podem estabelecer relações do tipo um- para-muitos oumuitos- para- muitos (Gitirana, et. al., 2014).A Figura 2 apresenta um exemplo de enunciado e estrutura deste tipo de situação de acordo com a proposta vergnaudiana.

Problema: Dois carros têm oito rodas. Quantas rodas têm seis carros?

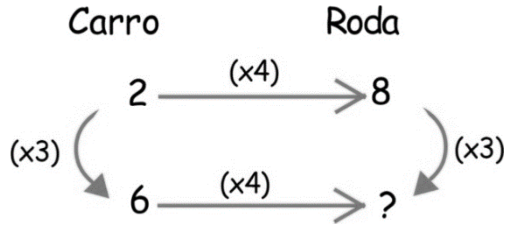


Figura 2: Exemplo de situação de proporção simples de acordo com a TCC.

Fonte: Magina, Merlini & Santos, 2014

Nesta ilustração é possível observar as relações estabelecidas entre os conjuntos de grandezas. Quando se toma por referência a quantidade de vezes que o mesmo conjunto é alterado, diz-se que está sendo utilizado o **operador escalar,** por exemplo, na Figura 2 pode estar relacionado às replicações dentro do conjunto dos carros, no qual são multiplicados o valor inicial do conjunto (2 carros) pela quantidade de vezes que este conjunto foi alterado (operador escalar =3). Outro tipo de relação entre os conjuntos de grandezas na proporção é aquela na qual se toma por referência a relação existente entre dois conjuntos de grandezas diferentes, utilizando para isso o **operador funcional** inerente aos conjuntos de grandezas, no exemplo da Figura 2 estaria relacionada à multiplicação entre a quantidade de rodas por carro (operador funcional= 4).

As duas outras situações apresentam três ou mais pares de grandezas envolvidos para sua resolução, que é o caso das proporções múltiplas e duplas, ambas caracterizam-se pela presença de um conjunto de proporções simples, porém, diferem-se devido à natureza das relações existentes em cada dupla de grandeza.

Nas situações de *proporção múltipla*, apresenta-se uma estrutura que envolve a concatenação de várias proporções, ou seja, nesta estrutura os pares de grandezas mantém entre si uma relação de dependência de forma que qualquer alteração nos valores apresentados, mesmo mantendo-se constantes as taxas de proporcionalidade, produzirá mudança na situação final do problema (Vergnaud, 1988). Observa-se que neste tipo de situação, a ideia de co-variação está subjacente ao sentido dos números no contexto, de forma que a identificação do fator funcional é peça fundamental para encontrar a solução do problema. Um exemplo para este tipo de estrutura é uma situação de preparação de uma receita de bolo, na qual, as quantidades dos ingredientes estão relacionadas, sendo necessário para o caso de replicação desta receita, o estabelecimento da razão entre a quantidade de cada ingrediente com relação ao outro (Gitirana, et. al., 2014). A Figura 3 ilustra uma situação de proporção múltipla:

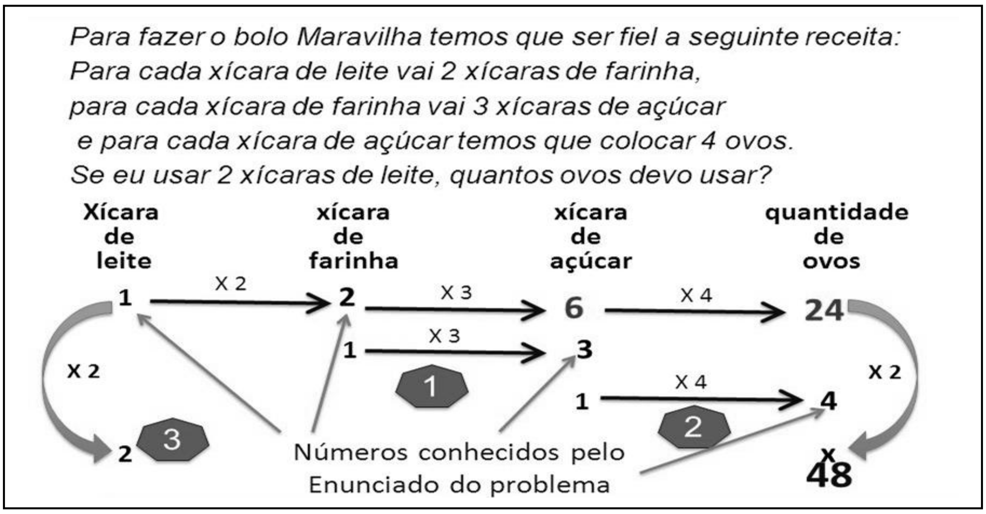


Figura 3: Exemplo de situação de proporção múltipla de acordo com a TCC.
Fonte: Magina, 2015.

É possível identificar que na situação ilustrada acima (ver Figura 3), que as grandezas possuem relações intrínsecas, de forma que, a mudança ocorrida em um ingrediente provoca reflexos em todos os outros, neste exemplo tem-se que se a quantidade de xícaras de leite for alterada, também se modificam sequencialmente, a quantidade de farinha, que provoca mudança na quantidade de açúcar e por último altera a quantidade de ovos.

Nos casos que envolvem *proporção dupla*,também chamada de função bilinear, apresenta-se na situação uma estrutura composta por dois ou mais pares de grandezas, os quais não mantém relação proporcional entre si, mas permeada por uma terceira variável, chamada de produto. Ou seja, os pares de grandezas envolvidos (por exemplo, M1, M2 e M3) relacionam-se dois a dois separadamente, de forma que M3 é o produto da situação problema apresentada e se relaciona separadamente com M1 e M2. (Santos, 2015; Gitirana et.al, 2014; Vergnaud, 2011; 1995;1994).

Na Figura 4 é ilustrado um exemplo para este tipo de situação

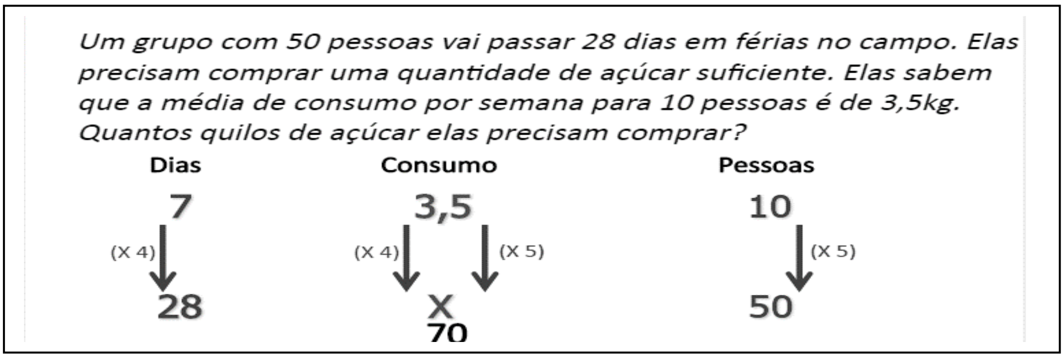


Figura 4: Exemplo de situação de proporção dupla de acordo com a TCC.

Fonte: Magina, 2015.

Nota-se que na situação ilustrada pela Figura 4, o conjunto de dias e o conjunto de pessoas não mantém uma relação proporcional direta entre si, mas permeada pela informação da quantidade de consumo de açúcar que depende do número de pessoas e do tempo que estas irão permanecer na situação dada ao contexto. Neste sentido, para a resolução deste tipo de problema opera-se multiplicativamente a partir dos operadores escalares de cada conjunto, de forma que para encontrar o produto final é necessário realizar a seguinte operação: 3,5(x4)(x5) = 70.

A relação entre as taxas de proporcionalidade de cada par de grandeza está mais fortemente atrelado ao fator escalar e ao número de replicações. Outra característica observada neste tipo de situação é que, caso sejam mantidos o valor inicial da grandeza produto e as taxas de proporcionalidade, mudanças nos pares numéricos nos outros conjuntos não acarretariam em mudança no resultado final, por exemplo, na Figura 5 tem-se duas situações-problema que envolvem proporção dupla e que apresentam as modificações apenas nos pares numéricos.

Problema 1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?	**Problema 2:** A turma do 6º ano, da mesma escola, também participa da gincana. Nesta turma, um grupo de 12 alunos se organizou e conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos no período de 7 dias. Se esse grupo fosse composto por 36 estudantes que trabalhassem durante 14 dias quantos quilos seriam arrecadados por esta equipe?

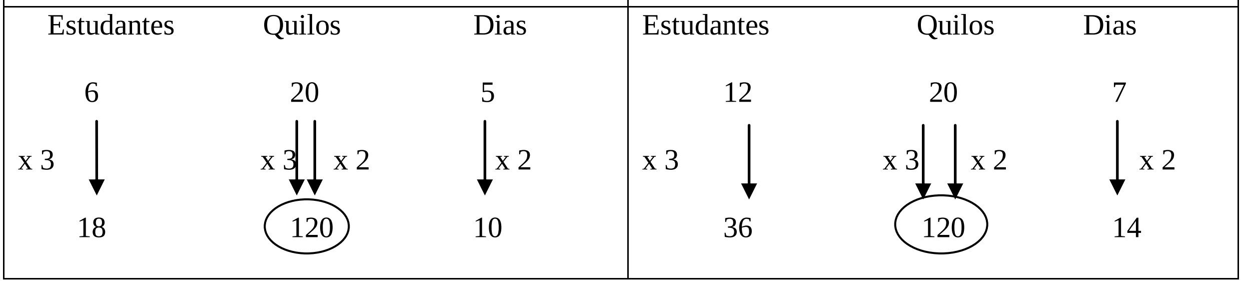


Figura 5: Exemplo de comparação entre proporções duplas.

Gitirana et. al. (2014) pontuam que estes dois tipos de situações são apresentados em níveis diferentes, quanto ao grau de complexidade na elaboração de estratégias cognitivas, sendo os problemas de proporção múltipla considerados mais difíceis do que os problemas de proporção dupla. Entretanto, ainda são poucos os estudos empíricos encontrados na literatura da área que buscam compreender especificamente estas características conceituais, bem como as estratégias mobilizadas cognitivamente na resolução de problemas que apresentem estes dois conceitos. Desta forma, a presente investigação voltar-se-á especificamente para a compreensão dos aspectos psicológicos que emergem durante a resolução de problemas que envolvem estes dois conceitos (proporção dupla e proporção múltipla) com a expectativa de que, a partir dos dados encontrados, seja possível promover uma reflexão sobre o desempenho e a natureza das estratégias utilizadas pelos estudantes nos diferentes anos investigados.

Diante destas reflexões apresentadas, é possível delimitar que os aspectos psicológicos emergentes na resolução de problemas que envolvem estes conceitos apresentam particularidades que direcionam a compreensão e, consequentemente a elaboração de estratégias diante destas estruturas, o que nos instiga a uma problematização no âmbito da Psicologia da Educação Matemática.

Capítulo III

A investigação

Apresentados os marcos teóricos que norteiam esta proposta justifica-se, portanto, a necessidade da realização de investigações que realizem o mapeamento dos aspectos cognitivos (desempenho e elaboração de estratégias) e os aspectos metacognitivos (reflexões acerca da forma de resolução) iminentes durante a resolução de problemas que envolvam situações de proporção dupla e de proporção múltipla.

Três questões de pesquisa emergem acerca desta temática: (i) As situações de proporção dupla e de proporção múltipla apresentam o mesmo grau de dificuldade? (ii) Que estratégias são mais eficazes para resolução de tais situações? São as mesmas quando se considera a proporção múltipla ou dupla ou apresentam diferenças? (iii) Como se configura a compreensão dos estudantes acerca das relações proporcionais, tanto na proporção dupla como na múltipla, ao realizarem atividades com e sem apoio do registro escrito (computacional e não- computacional)?

Dando continuidade, são apresentados os objetivos e método desta investigação, detalhando-se a configuração do desenho experimental.

3.1 Objetivos

Em face do exposto objetivou-se descrever e classificar o desempenho e as formas de resolução de estudantes, entre os 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, ao realizarem atividades computacionais e não-computacionais que envolvessem em sua configuração situações-problema de proporção dupla e proporção múltipla. Para o alcance do objetivo central desta investigação, foram estabelecidos alguns objetivos específicos, a saber:

(i) Analisar o desempenho dos estudantes (número de acertos) nas atividades propostas (computacional e não-computacional);

(ii) Descrever e categorizar as estratégias construídas pelos estudantes nas resoluções (com e sem apoio de registro escrito) dos problemas de proporção dupla e proporção múltipla;

(iii) Investigar a existência de diferenças entre o desempenho e os tipos de estratégias na resolução de problemas de proporção dupla e de proporção múltipla considerando os anos investigados;

(iv) Analisar a compreensão dos estudantes sobre relações proporcionais nas atividades apresentadas (computacional e não-computacional);

3.2 Método

3.2.1 Participantes

Participaram do estudo 90 estudantes, divididos em três grupos de 30 participantes, de ambos os sexos, com idades entre 11 a 15 anos, matriculados nos 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Recife, referência no estado de Pernambuco.

A escolha destes anos escolares foi norteada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos finais da Educação Fundamental (1998), no qual é apresentado como um dos objetivos para este segmento educacional

> “[...] a exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.” (Brasil, p.65)

3.2.2 Procedimentos, planejamento experimental e materiais

A presente investigação foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e após sua aprovação[2] entrou-se em contato com os professores e alunos da escola consultada para apresentação da proposta e distribuição dos Termos de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE – ver Apêndice I) e Assentimento Livre e Esclarecido (TALE- ver Apêndice II). De posse destes documentos e com as devidas autorizações dos responsáveis pelos estudantes iniciaram-se as atividades de pesquisa, organizada em dois estudos.

3.2.2.1 Estudo 1: Resolução de Problemas Computacionais

O Estudo 1 teve por objetivo investigar o processo de resolução dos problemas computacionais que envolviam situações de proporção dupla e de proporção múltipla com grandezas diretamente proporcionais. As situações apresentadas no Estudo 1 são ilustradas no Quadro 1. De forma especifica buscou-se: (i) investigar o desempenho dos estudantes, a partir do número de acertos, nas situações apresentadas; (ii) descrever e categorizar as estratégias construídas pelos estudantes para resolução dos problemas propostos e (iii) analisar a existência de diferenças entre o desempenho e a elaboração de estratégias para todo o instrumento considerando os anos investigados.

Neste estudo os estudantes foram solicitados a responder, através de registro escrito, uma ficha contendo quatro situações problemas, duas situações de proporção dupla e duas

---
[2]Parecer de nº 973.620. Data da aprovação: 04/03/2015.

situações de proporção múltipla. Esta atividade foi realizada numa aplicação coletiva, durante a aula de Matemática, no horário acordado com cada turma e seus respectivos professores. Cada turma tinha disponível o horário referente a duas aulas consecutivas (100 minutos) para a realização da atividade, sendo utilizado em média 50 minutos para a atividade proposta.

Quadro 1: Situações-problema resolvidos pelos participantes no Estudo 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Situações problemas</th></tr>
<tr><th>Proporção dupla (PD)</th><th>Proporção múltipla (PM)</th></tr>
<tr><td>Problema 1 (PD1): Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?
Estudantes | Quilos | Dias
6 | 20 | 5
↓ x3 | x 3 ↓↓ x 2 | x 2 ↓
18 | 120 | 10</td><td>Problema 3 (PM3): Para preparar uma calçada o pedreiro Seu José utiliza para cada 3 baldes de cimento 6 baldes de areia e para cada 2 baldes de areia são necessários 4 baldes de água. Quando recebeu o material percebeu que havia 6 baldes de cimento e 12 baldes de areia. Desta forma quantos baldes de água Seu José precisará para fazer a massa do mesmo jeito?
Cimento | Areia | Água
3 —x 2→ 6 | ---
--- | 2 —x 2→ 4
6 —x 2→ 12 —x 2→ 24</td></tr>
<tr><td>Problema 2 (PD2): Na fábrica de automóveis FabriCar, a produção é acompanhada através da contagem dos carros produzidos. Observou-se que 2 operários trabalhando 8 dias seguidos conseguem montar 4 carros. Quantos carros serão produzidos por 6 operários que trabalham em 16 dias?
Operários | Carros | Dias
2 | 4 | 8
x 3 ↓ | x 3 ↓↓ x 2 | x 2 ↓
6 | 24 | 16</td><td>Problema 4 (PM4): Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite e 6 ovos?
Leite | Ovo | Trigo
1 —x 2→ 2 | ---
-- → 1 —x 3→ 3
3 —x 2→ 6 —x 3→ 18</td></tr>
</table>

Devido ao fato de que os estudantes resolveram problemas que apresentavam situações distintas em uma mesma tarefa optou-se pela randomização das situações problemas. Sendo assim, metade dos estudantes resolveu primeiramente os problemas de proporção dupla e em seguida os de proporção múltipla; e a outra metade na ordem inversa, ou seja, resolveram primeiro os problemas de proporção múltipla e em seguida os de proporção dupla[3]. O Quadro 2 ilustra a forma de randomização da apresentação das situações considerando os anos investigados e o quantitativo de participantes por ordem.

Quadro 2: Ordem de apresentação dos problemas no Estudo 1 considerando os anos investigados.

	Número de participantes por ordem	
Anos Investigados	**Ordem A:** PD1 → PD2 → PM3 → PM4	**Ordem B:** PM3→ PM4 →PD1 → PD2
7º ano	15	15
8º ano	15	15
9º ano	15	15

A instrução dada a todos participantes na aplicação coletiva pode ser assim resumida: *"Gostaríamos que vocês resolvessem individualmente esta ficha utilizando apenas lápis, borracha ou caneta. Abaixo de cada pergunta há um espaço para a resolução, sendo possível utilizar outros espaços em branco deste material. É necessário que vocês apresentem de forma clara qual é a resposta encontrada. Nosso tempo será até o final desta aula* (de Matemática)".

Após um intervalo de tempo, entre 5 a 15 dias[4], os estudantes eram convidados a realizar uma entrevista individual na qual foram solicitados a explicarem como pensaram para resolver dois problemas propostos na atividade coletiva: "A receita de Marina" (Proporção Múltipla) e "A Gincana escolar do 5º ano" (Proporção Dupla). A instrução usada pode ser assim resumida: *"Eu gostaria que você explicasse a forma como você resolveu esses dois problemas".* Buscou-se aqui realizar uma atividade que levasse o estudante a pensar sobre as suas formas de raciocínio e escolha de estratégias.

[3]No Apêndice C encontra-se os modelos das fichas apresentadas aos estudantes

[4] O intervalo entre a atividade coletiva e as entrevistas individuais deve-se principalmente ao fato de que foi autorizada a realização das atividades de pesquisa apenas nos horários das aulas de Matemática.

Ressalta-se que todos os participantes iniciaram suas explicações pelo problema de proporção múltipla (receita de Marina) e em seguida o problema de proporção dupla (a gincana escolar).

Para o Estudo 1 foram utilizados os seguintes materiais: gravador, lápis, borracha, fichas impressas com quatro situações problemas, sendo duas situações de proporção dupla e duas situações de proporção múltipla(ver Quadro 1).

3.2.2.2 Estudo 2: Realização de Atividade não- computacional

O Estudo 2 teve por objetivo investigar o processo de resolução dos problemas não-computacionais que envolviam situações de proporção dupla e de proporção múltipla com grandezas diretamente proporcionais. A atividade envolveu a apresentação de problemas que requeriam para sua resolução uma resposta verbal, sem registro escrito, feita a partir da estimativa referente ao produto final do problema, seguida de uma justificativa para o mesmo. Com a apresentação desses problemas (ver Quadro 3) buscava-se levar o estudante a refletir sobre as relações existentes em cada conjunto de grandezas pertencentes às situações propostas sem o apoio do registro escrito, bem como, possibilitava identificar se o participante havia compreendido (através do desempenho e das justificativas adequadas) as características dos problemas apresentados e os invariantes operatórios mobilizados pelo estudante em cada situação, visando responder a seguintes questão:"*Será que sem o apoio do registro escrito os estudantes compreendem a configuração das relações proporcionais presentes nas situações de proporção dupla e proporção múltipla?*"

O Estudo 2 foi realizado logo após a explicação dos problemas computacionais realizados pelos participantes no Estudo 1, e foram apresentados duas situações-problema, sendo mantidos os contextos e as taxas de proporcionalidade dos problemas computacionais, as alterações que foram feitas envolviam apenas os pares numéricos. Solicitava-se que cada participante apresentasse uma estimativa de resposta utilizando códigos relativos de comparação de quantidades (mais, menos ou a mesma quantidade). O Quadro 3 ilustra as situações apresentadas aos estudantes para realização desta atividade.

Quadro 3: Situações apresentadas no Estudo 2 que requeriam uso de estimativas

Situações – problema	
Proporção Múltipla	**Proporção Dupla**
Eduarda quer fazer um bolo de chocolate utilizando a mesma receita que Marina. Porém quando ela chega em casa percebe que tem 2 copos de leite. Você acha que Eduarda precisará da mesma quantidade de xícaras de trigo, mais xícaras de trigo ou menos xícaras de trigo que Marina? **Por quê? Explique sua resposta.**	A turma do 6º ano, da mesma escola, também participa da gincana. Nesta turma, um grupo de 12 alunos se organizou e conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos no período de 7 dias. Se esse grupo fosse composto por 36 estudantes que trabalhassem durante 14 dias. O que você acha que acontece com a arrecadação de alimentos da turma do 6º ano em relação ao que foi arrecadado pelo 5º ano. Eles arrecadaram a mesma quantidade, arrecadaram mais alimentos ou arrecadaram menos alimentos. **Por quê? Explique sua resposta.**

Como pode ser verificado no Quadro 3, o estudante neste momento foi solicitado a refletir sobre as relações existentes em cada conjunto de grandezas pertencentes às situações propostas, fazendo uso de estimativas. A instrução dada pode ser resumida: *"Agora que você já explicou como resolveu as duas questões anteriores, eu vou te apresentar duas novas situações. Gostaria que você lesse com atenção, e antes de resolvê-la por escrito me falasse o que você acha que encontrará como resposta, fizesse uma estimativa. Se ficar com dúvida eu posso ler para você"*.

Após apresentar a estimativa para a situação problema, o estudante era solicitado a fazer um registro escrito da sua resolução para pergunta realizada na ficha, podendo esse registro ser realizado através de algoritmo, representação ou texto com a justificativa da resposta. O tempo para realização da atividade era livre.

Salienta-se, que todos os participantes iniciaram o Estudo 2 pela situação de proporção múltipla, da mesma forma como fizeram no momento da explicação no Estudo 1,a qual exigia uma comparação entre a receita de Marina e a receita de Eduarda, seguida da situação de proporção dupla, que exigia uma comparação entre a arrecadação de alimentos dos 5º edos 6º anos na gincana escolar. Para o Estudo2 foram utilizados os seguintes materiais: gravador, lápis, borracha e fichas impressas contendo duas situações problemas, uma de proporção múltipla e uma de proporção dupla (Ver Apêndice D).

Em ambos estudos (Estudo 1 e Estudo 2) os participantes foram entrevistados por três examinadores devidamente aptos para esta tarefa. Todos os áudios foram gravados em Mp3 e transcritos em protocolos individuais relativos a cada estudo. O Quadro 4 apresenta uma síntese da pesquisa.

Quadro 4: Síntese do planejamento implementado na investigação

Estudos	Procedimento
Estudo 1 Investiga o desempenho e as estratégias de resolução em problemas computacionais	• Resolução de quatro problemas computacionais envolvendo proporção dupla e proporção múltipla aplicados de forma coletiva durante aulas de Matemática. • Em um segundo momento, com aplicação individual o estudante foi solicitado a explicar a forma de resolução de um problema de cada tipo (proporção dupla ou proporção múltipla).
Estudo 2 Investiga o desempenho e as estratégias de resolução em problemas não-computacionais	• Apresentação de novas situações-problema envolvendo os mesmos contextos e taxas de proporcionalidade propostas no Estudo 1; • Resolução dos problemas a partir da estimativa de resposta utilizando códigos relativos de comparação de quantidades (mais, menos ou a mesma quantidade) e posterior justificativa; • Registro escrito da resolução fornecida.

Capítulo IV

Sistema de Análise dos Dados

Para o alcance dos objetivos pretendidos, foram estabelecidos dois aspectos centrais e distintos para realização da análise de resolução dos problemas de proporção dupla e proporção múltipla:

(i) Análises referentes aos desempenhos (número de acertos) na resolução das situações-problema propostas na atividade computacional (Estudo 1) e na resolução (estimativas) das situações-problema na atividade não-computacional (Estudo 2);

(ii) Análises referentes ao tipo de raciocínio utilizado na resolução das atividades: estratégias elaboradas durante a atividade computacional (Estudo 1) e as justificativas e reflexões feitas durante a atividade não-computacional (Estudo 2).

Os sistemas de análise para os dois estudos são análogos, diferenciando-se apenas quanto aos exemplos encontrados. Desta forma serão apresentadas as classificações feitas nos dois estudos de acordo com os aspectos citados anteriormente (Desempenho e Estratégias).

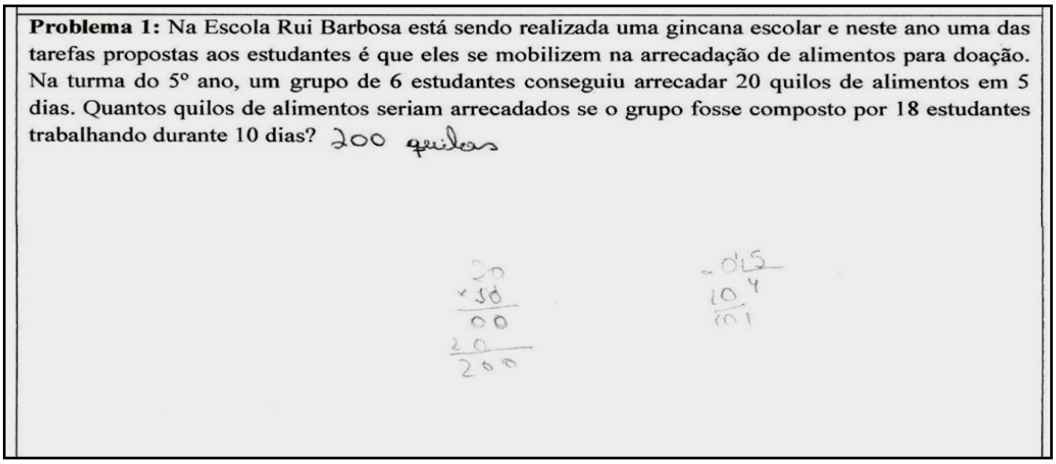
4.1 Sistema de Análise do Desempenho

O desempenho foi analisado a partir das resoluções e das respostas fornecidas pelos participantes sobre as quatro situações-problema computacionais (Estudo 1) e o desempenho referente a resolução (estimativa) de duas situações-problema não-computacionais (Estudo 2).

Ressalta-se que no Estudo 2 o desempenho foi considerado a partir da primeira resposta fornecida pelo estudante e que as situações-problema (dupla e múltipla) apresentam estimativas diferentes devido aos invariantes de cada situação, de forma que, nas situações de proporção múltipla a mudança entre os conjuntos de grandezas provoca alteração no produto final. Já nas situações de proporção dupla não há alteração no produto final, visto que os conjuntos de grandezas são independentes entre si.

Optou-se em ambos estudos por um sistema de classificação binário: zero e um. Estes são apresentados e ilustrados a seguir considerando ambos os estudos.

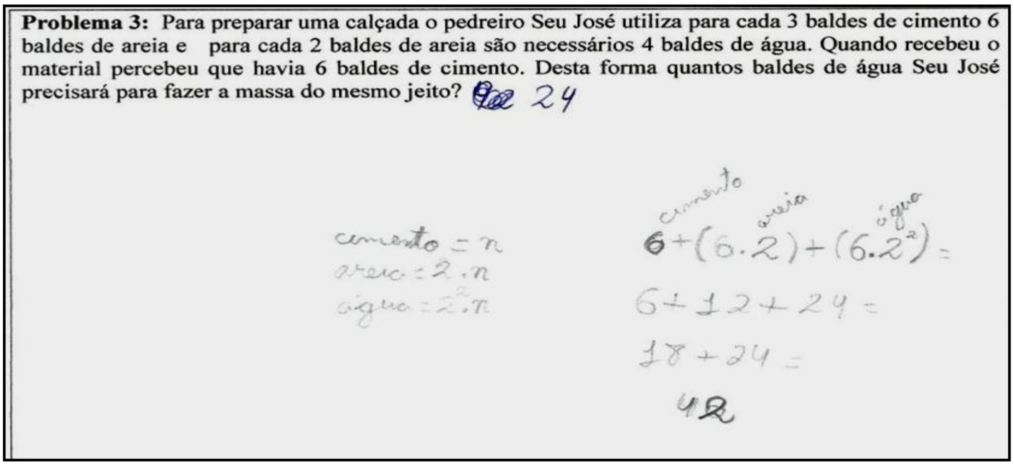
Pontuação Zero (0): Foram inseridas nessa categoria as respostas nas quais os participantes: apresentam resolução/cálculo errado, apresentam resolução incompleta ou deixam a resolução e reposta em branco (Estudo 1); apresentam resolução (estimativa) incorreta ou não apresentam resolução, isto é, não realizam estimativa (Estudo 2). A seguir são apresentados separadamente os exemplos alocados nesta classificação:


Problema 1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias? 200 quilos

20
×10
00
20
200

Figura 6: Extrato Protocolo do Participante nº 3, sexo feminino, 7 º ano. Problema de proporção dupla computacional- Estudo 1.

Observa-se na Figura 5, que o participante para resolver o problema de proporção dupla opera apenas com dois conjuntos de grandezas (número de estudantes e quantidade de quilos de alimentos), excluindo o terceiro conjunto (quantidade de dias trabalhados), fornecendo uma resolução e uma resposta incorreta.



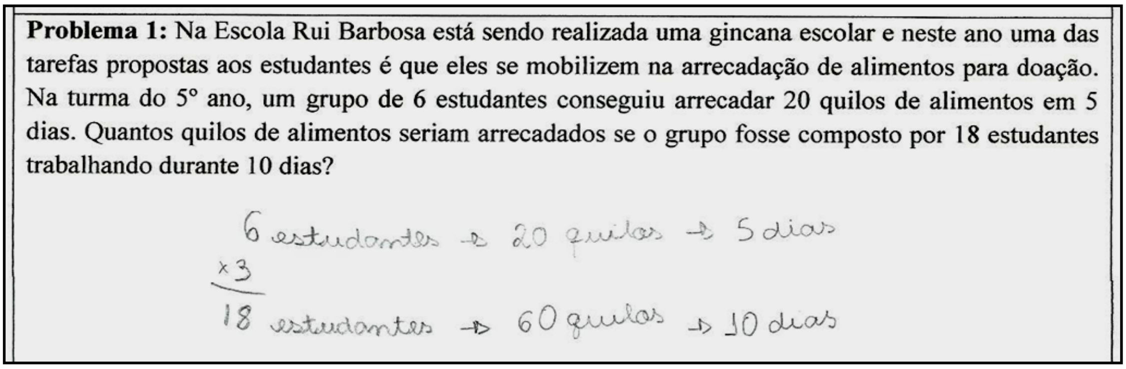
Problema 3: Para preparar uma calçada o pedreiro Seu José utiliza para cada 3 baldes de cimento 6 baldes de areia e para cada 2 baldes de areia são necessários 4 baldes de água. Quando recebeu o material percebeu que havia 6 baldes de cimento. Desta forma quantos baldes de água Seu José precisará para fazer a massa do mesmo jeito? 24

cimento = n
areia = 2.n
água = 2^2.n

$6+(6.2)+(6.2^2) =$
$6+12+24 =$
$18+24 =$
42

Figura 7: Extrato Protocolo do Participante nº 42, sexo masculino, 8 º ano. Problema de proporção múltipla computacional- Estudo 1.

Observa-se na Figura 6, que o participante para resolver este problema de proporção múltipla realiza procedimentos aditivos e multiplicativos em forma de expressão numérica que não são suficientes para uma resolução adequada e por fim apresenta como resultado um valor divergente daquele encontrado na operação e sem o referente da quantidade.



Problema 1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5° ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

6 estudantes → 20 quilos → 5 dias
×3
18 estudantes → 60 quilos → 10 dias

Figura 8: Extrato Protocolo do Participante nº 33, sexo feminino, 8 º ano. Problema de proporção dupla computacional- Estudo 1.

É possível identificar uma resolução classificada como incompleta no Figura 7, visto que a participante faz anotações com os dados fornecidos na situação-problema, inicia o procedimento, mas não conclui a operação nem faz registro de resposta com o produto final.

Ressalta-se que para realização da estimativa (Estudo 2) os participantes não fizeram nenhum tipo de registro escrito, portanto os exemplos são referentes a entrevista realizada durante a entrevista.

E[5]: Eduarda quer fazer um bolo de chocolate utilizando a mesma receita que Marina. Porém quando ela chega em casa percebe que tem 2 copos de leite. Você acha que Eduarda precisará da mesma quantidade de xícaras de trigo, mais xícaras de trigo ou menos xícaras de trigo que Marina? **Por quê? Explique sua resposta.**

P: *"Vai dar a mesma coisa, porque os dados são iguais"*.

Figura 9: Extrato Protocolo do Participante nº 82, sexo feminino, 9º ano. Problema de proporção múltipla não computacional- Estudo 2.

E: A turma do 6º ano, da mesma escola, também participa da gincana. Nesta turma, um grupo de 12 alunos se organizou e conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos no período de 7 dias. Se esse grupo fosse composto por 36 estudantes que trabalhassem durante 14 dias. O que você acha que acontece com a arrecadação de alimentos da turma do 6º ano em relação ao que foi arrecadado pelo 5º ano. Eles arrecadaram a mesma quantidade, arrecadaram mais alimentos ou arrecadaram menos alimentos. **Por quê? Explique sua resposta.**

P: *"Arrecadariam mais alimentos, porque são mais alunos e mais dias"*.

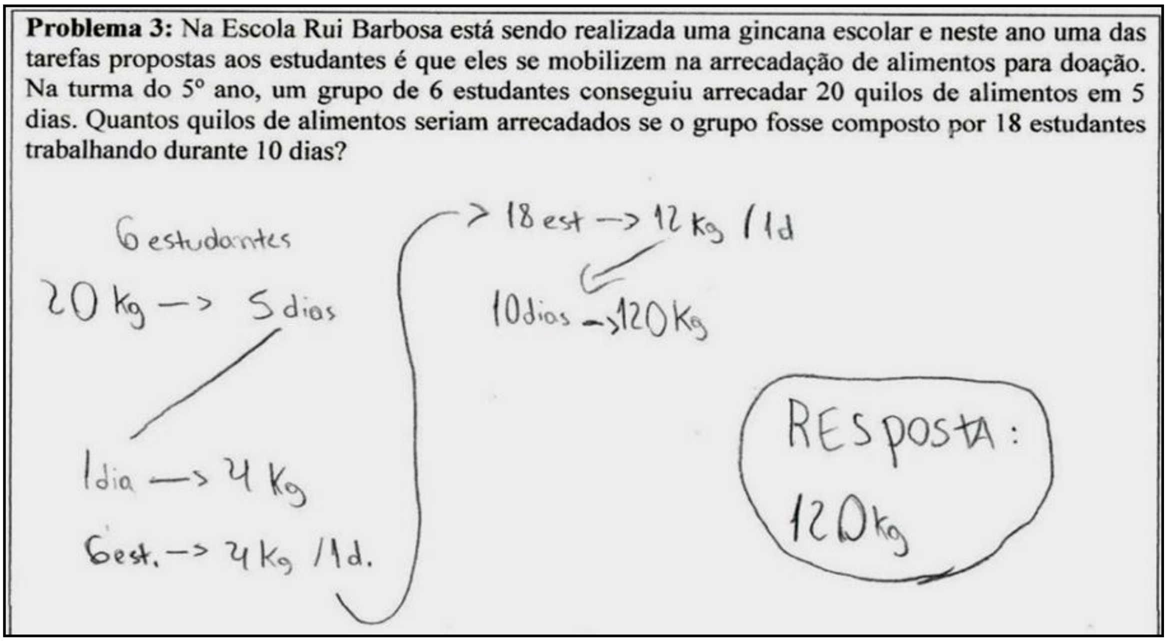
Figura 10: Extrato Protocolo do Participante nº 5, sexo feminino, 7º ano. Problema de proporção dupla não computacional- Estudo 2.

Observa-se que, nos dois exemplos (Figuras 8 e 9) os erros provocados pelos participantes ao realizarem a estimativa referem-se aos pontos de referência utilizados: os

[5] Convenções adotadas E: Examinador e P: Participante

pares numéricos apresentados na nova situação. Neste tipo de erro não há, por parte do estudante, reflexão acerca das relações proporcionais entre estes.

Pontuação Um (1): Para o Estudo 1 esta pontuação foi dada àqueles que apresentaram a resolução e o resultado corretos para o que foi proposto nos enunciados das situações-problema computacionais e foram identificadas algumas variações, a saber: (i) refere-se ao conjunto de resolução e resultados corretos com a apresentação dos referentes de quantidades, registrados tanto em algoritmos como em expressão pictórica (Figuras11 e 12); e (ii) os estudantes apresentam a resposta correta, sem apresentação do procedimento e sem uso de referentes (Figura 13).



Problema 3: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5° ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

Figura 11: Extrato de protocolo nº 24, sexo masculino, 7º ano. Problema de proporção dupla computacional- Estudo 1

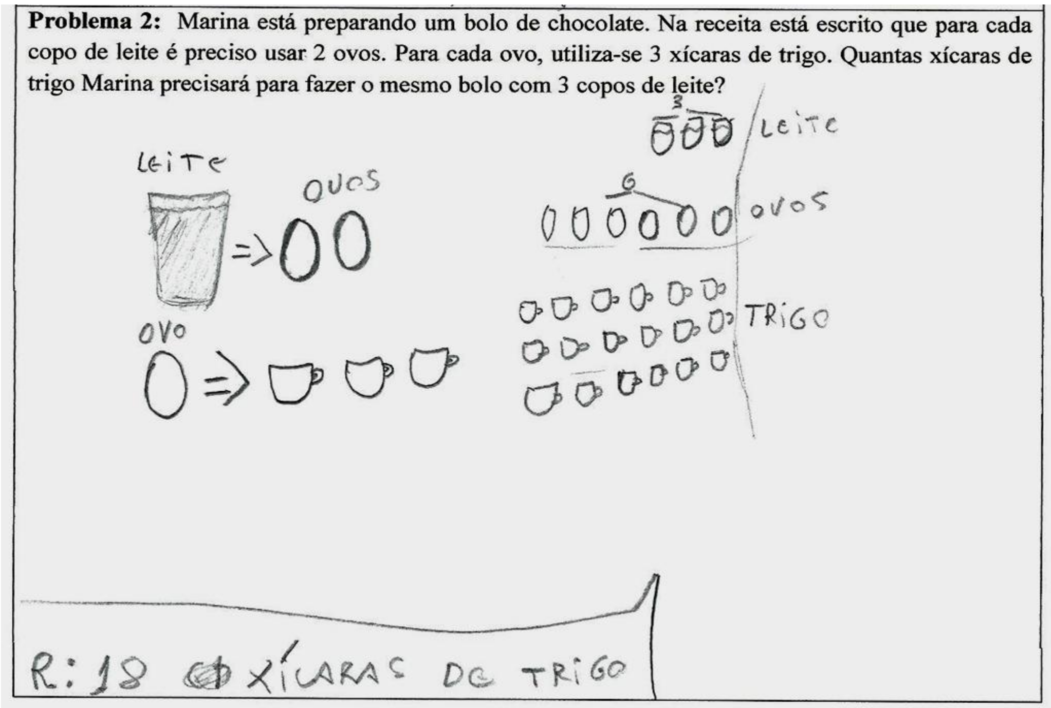

Problema 2: Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite?

Figura 12: Extrato de protocolo nº 53, sexo masculino, 8º ano. Problema de proporção múltipla computacional- Estudo 1

É possível observar nas Figuras 10 e 11 duas formas diferentes e corretas de resolver tanto situações-problema de proporção dupla quanto de proporção múltipla, nas quais os participantes fazem os registros dos procedimentos e demarcam os resultados encontrados, com uso dos referentes adequados.

Outro tipo de resposta alocada como pontuação 1 (Estudo 1) pode ser observada na Figura 13, em que o participante não apresentou nenhum registro acerca da resolução para o problema, apresenta apenas o resultado correto sem referente, diferente do que foi encontrado Figura 14, pois, o estudante não realiza cálculo, mas, registra a resposta com referente adequado.

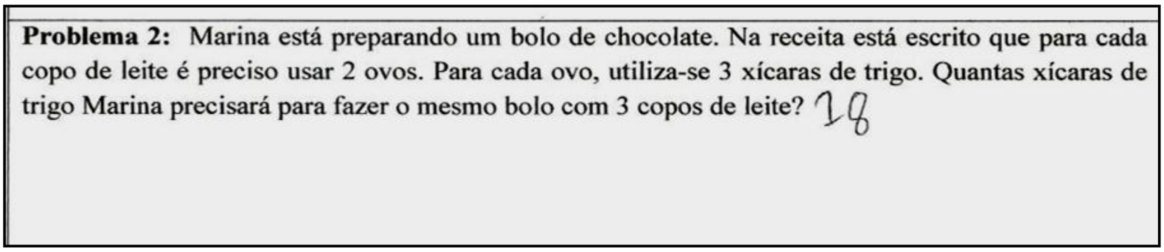
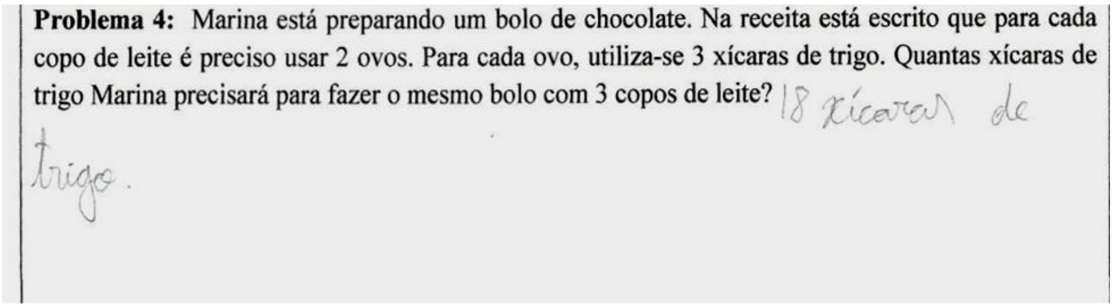

Problema 2: Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite? 18

Figura 13: Extrato Protocolo do Participante nº 86, sexo masculino, 9 º ano. Problema de proporção múltipla computacional- Estudo1.



Problema 4: Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite? 18 xícaras de trigo.

Figura 14: Extrato Protocolo do Participante nº 65, sexo masculino, 9 º ano. Problema de proporção múltipla computacional- Estudo1.

No Estudo 2 (situações-problema não computacionais), a pontuação um (1) foi dada àqueles participantes que estimaram corretamente à resposta esperada para atividade proposta. Dois exemplos são apresentados, um para cada tipo de situação apresentada:

E: Eduarda quer fazer um bolo de chocolate utilizando a mesma receita que Marina. Porém quando ela chega em casa percebe que tem 2 copos de leite. Você acha que Eduarda precisará da mesma quantidade de xícaras de trigo, mais xícaras de trigo ou menos xícaras de trigo que Marina? **Por quê? Explique sua resposta**

P: *Seria menos.*

Figura 15: Extrato Protocolo do Participante nº 20, sexo masculino, 7 º ano. Problema de proporção múltipla não-computacional - Estudo 2.

E: A turma do 6º ano, da mesma escola, também participa da gincana. Nesta turma, um grupo de 12 alunos se organizou e conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos no período de 7 dias. Se esse grupo fosse composto por 36 estudantes que trabalhassem durante 14 dias. O que você acha que acontece com a arrecadação de alimentos da turma do 6º ano em relação ao que foi arrecadado pelo 5º ano. Eles arrecadaram a mesma quantidade, arrecadaram mais alimentos ou arrecadaram menos alimentos. **Por quê? Explique sua resposta.**

P: *Eles arrecadam a mesma quantidade.*

Figura 16: Extrato Protocolo do Participante nº 65, sexo masculino, 9 º ano. Problema proporção dupla não-computacional- Estudo 2.

Os acertos apresentados pelos participantes para realização da estimativa devem-se à compreensão dos mesmos quanto à natureza das relações proporcionais, ou seja, a capacidade de reunir e processar mentalmente conjuntos diferentes de informação (Lesh, Post &Behr, 1988).Na sequencia é apresentado o sistema decategorização das estratégias/justificativas adotadas pelos estudantes para resolverem as situações propostas nos dois estudos.

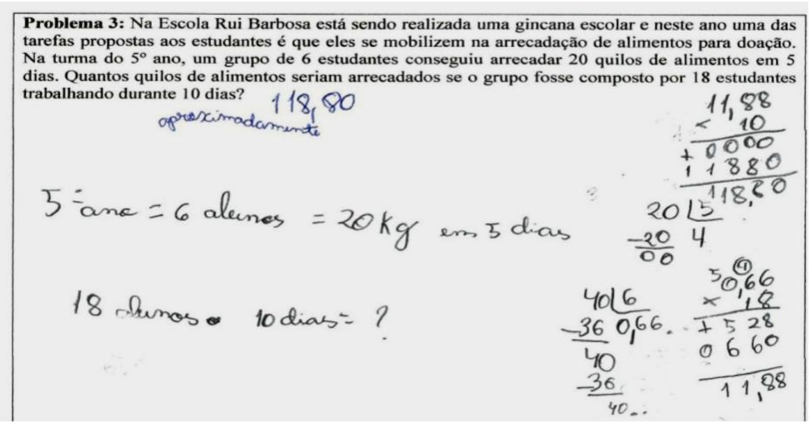
4.2 Sistema de Análise das Estratégias e Justificativas

Este sistema de análise foi construído para auxiliar no exame das estratégias (Estudo 1) e justificativas (Estudo 2)[6]desenvolvidas pelos estudantes. No Estudo 1 esta categorização utilizou-se das explicações dos participantes sobre a forma que resolveram as situações-problema dos temas "Gincana Escolar" (proporção dupla) e "Receita de Marina" (proporção múltipla).Para o Estudo 2 as classificações foram feitas a partir das justificativas dadas para realização de estimativas sobre o produto final das situações propostas.

Vale ressaltar que para a construção desta categorização tomou-se por base aspectos relativos aos conceitos explorados pela da Teoria dos Campos Conceituais (Santos, 2015; Vergnaud, 2011), especificamente, aqueles que apontam para o uso de operadores escalares ou funcionais em situações que envolvam proporcionalidade. Também foram observadosaspectos que se referiam às quatro etapas da resolução de problemas propostas por Polya (1995), com a ressalva de que na análise realizada no Estudo 2 só foi possível observar as três primeiras etapas, visto que, os participantes não verificavam a solução fornecida. Foram identificados quatro tipos de estratégias/justificativas utilizadas pelos participantes

[6] No Estudo 1 a explicação da resolução do problema será denominada de "estratégia" e no Estudo 2 a explicação será denominada de justificava da estimativa implementada, contudo os dois termos (estratégia/justificativa) nessa investigação referem-se ao tipo de raciocínio utilizado para resolver as atividades propostas.

Tipo 1- No Estudo 1 referem-se às situações nas quais os participantes não lembram como resolveram, não resolveram a situação durante a atividade coletiva ou resolveram utilizando um algoritmo que não seja a proporcionalidade. Já no Estudo 2 referem-se aos casos nos quais o participante não realiza estimativa ou não apresenta justificativa para resposta.


Problema 3: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

118,80
aproximadamente

5º ano = 6 alunos = 20kg em 5 dias

18 alunos 10 dias = ?

E: Agora eu gostaria que você explicasse como pensou pra resolver este problema da gincana escolar.

P: *Não lembro mais não como eu fiz isso (sic).*

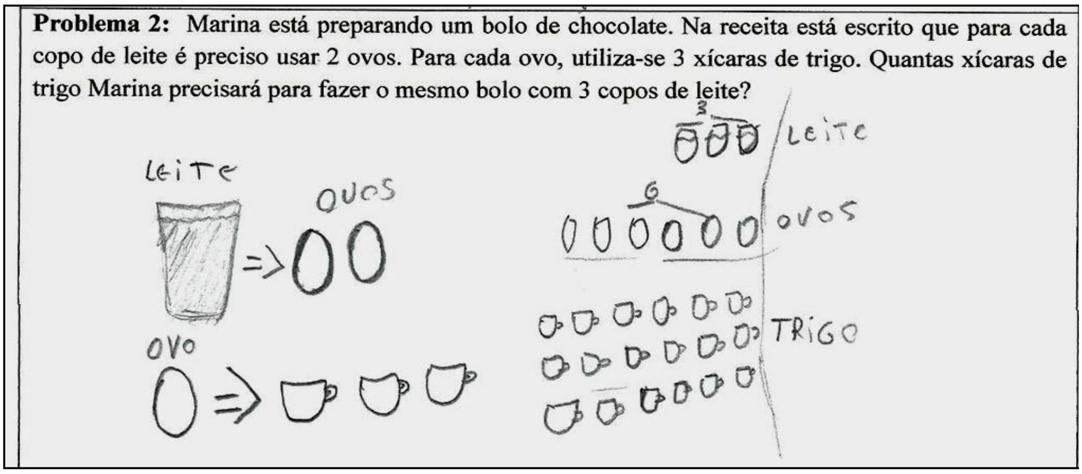
Figura 17: Extrato de Protocolo nº 21, sexo feminino, 7º ano. Estratégia Tipo 1-Problema de proporção dupla computacional- Estudo 1.

E:Eduarda quer fazer um bolo de chocolate utilizando a mesma receita que Marina. Porém quando ela chega em casa percebe que tem 2 copos de leite. Você acha que Eduarda precisará da mesma quantidade de xícaras de trigo, mais xícaras de trigo ou menos xícaras de trigo que Marina? **Por quê? Explique sua resposta.**

P: *Acho que vai ser a mesma quantidade.*

Figura 18: Extrato de Protocolo nº 10, sexo feminino, 7º ano. Justificativa Tipo 1- Problema de proporção múltipla não-computacional - Estudo 2

Como comentado anteriormente, no Estudo 1 os participantes eram solicitados a explicarem a forma como resolveram as situações-problema já realizadas na aplicação coletiva, enquanto no Estudo 2 eles realizavam uma estimativa sem fazer qualquer tipo de registro escrito e é por isso que não há representação gráfica para ilustrar a Figura 18. Em resumo foram classificados no Tipo 1 todos aqueles que não explicaram e/ou justificaram suas respostas nos dois estudos ou que não adotaram estratégia que se refere ao conceito de proporção.Os demais tipos de estratégias/justificativas referem-se ao uso de procedimentos que tem por base o raciocínio proporcional.



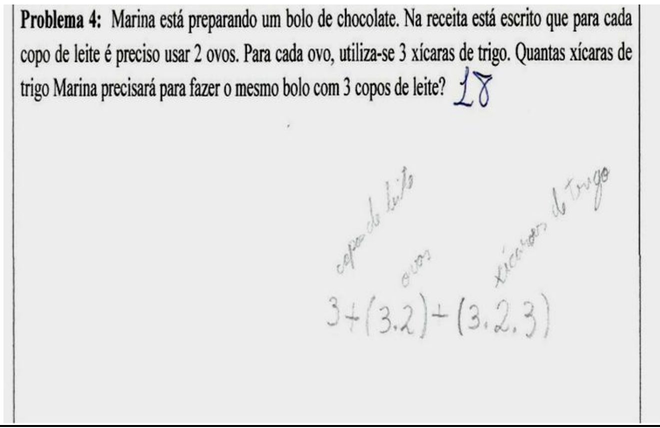
E: Vamos realizar hoje a segunda parte da pesquisa. Para iniciar, gostaria que você me explicasse como pensou para resolver este problema da receita.

P: Bem simples, é só fazer uma fração e subdividir. A fração é 1 copo de leite você divide por 2 que dá ½ e depois você divide por 3 que dá ½ dividido por 3 que vai ser 1/6. Se ela tem 3 copos de leite então vai ser multiplicado por 6. Porque você já sabe que cada bolo com 1 copo de leite é igual a 6 xícaras de trigo então dá 6 vezes 3 e o resultado é 18 xícaras.

Figura 19: Extrato de protocolo nº 53, sexo masculino, 8º ano. Problema de proporção múltipla computacional- Estudo 1

Tipo 2: Neste tipo de estratégia/justificativa o participante estabelece uma ou mais relações funcionais entre os conjuntos de grandezas apresentados, quer seja para resolver a situação-problema computacional (Estudo 1) quer seja para resolver a situação-problema não-computacional (Estudo 2).Estas relações podem ser apresentadas através da manipulação das informações em duas proporções simples ou numa proporção composta. Por exemplo:

No exemplo abaixo (Figura 20) observa-se que o participante manipulou os três conjuntos de grandezas ao mesmo tempo tomando por base as relações funcionais estabelecidas entre os pares.


Problema 4: Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite? 18

E: *Vamos realizar hoje a segunda parte da pesquisa. Para iniciar, gostaria que você me explicasse como pensou para resolver este problema da receita.*

P: *Se eu uso 3 copos de leite, eu vou usar 6 ovos e depois 18 xícaras de trigo (sic).*

Figura 20: Extrato de Protocolo nº 42, sexo masculino, 8º ano. Estratégia Tipo 2.Problema de proporção múltipla computacional- Estudo 1

E: *Agora eu gostaria que você explicasse como pensou pra resolver este problema da gincana escolar.*

P: *Eu tentei calcular quantos quilos são arrecadados por dia, como são 20 quilos em 5 dias dá 4 quilos por dia, porque 20 dividido por 5 dá 4. Aí agora... eita... isso eu fiz tão na doida... de onde veio esse 40? Acho que fiz 4 quilos de alimento em 10 dias que deu 40 quilos e depois eu tentei achar quantos quilos por 1 estudante, que deu 0,66 kg e se fosse 18 estudantes daria 10,8 kg aí vai dar 108 kg no total (sic).*

Figura 21: Extrato de Protocolo nº 4, sexo feminino, 7º. Problema de proporção dupla computacional- Estudo 1

Outra forma de proceder é ilustrada na Figura 21 na qual a estudante opera separadamente com os conjuntos de grandezas, buscando estabelecer uma primeira relação funcional ("quilos por dia"), em seguida estabelece uma segunda relação funcional ("quilos por estudante") e por fim multiplica esse valor pelas quantidades finais de dias e de estudantes apresentadas na situação- problema, porém este procedimento a levou ao erro visto que as grandezas dias e estudantes são independentes entre si, e, portanto, não é possível estabelecer relações funcionais entre elas. A seguir ilustram-se os exemplos das justificativas Tipo 2 nas situações não computacionais (Estudo2).

E: Eduarda quer fazer um bolo de chocolate utilizando a mesma receita que Marina. Porém quando ela chega em casa percebe que tem 2 copos de leite. Você acha que Eduarda precisará da mesma quantidade de xícaras de trigo, mais xícaras de trigo ou menos xícaras de trigo que Marina? **Por quê? Explique sua resposta.**

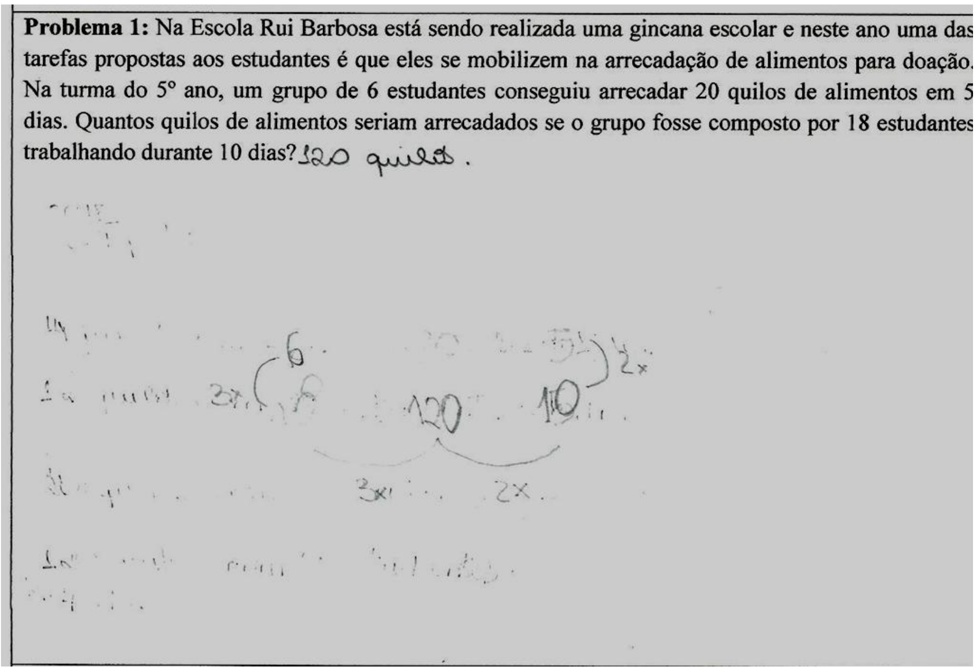
P: *No caso ela precisaria de menos xícaras de trigo, porque com 1 ovo ela precisaria de 3 de trigo, e 2 ovos com 1 de leite, e ela tem 2 de leite, então no caso ela teria 4 ovos e se para cada ovo ela teria 3 xícaras de trigo, então 4 vezes 3 dá 12, então ela usa 12 xícaras de trigo, enquanto que a outra utiliza 18 xícaras de trigo, por isso é menos*".

Figura 22: Extrato de Protocolo nº 37, sexo feminino, 8º ano. Justificativa do Tipo 2. Problema de proporção múltipla não-computacional- Estudo 2

Observa-se na Figura 21 que a estudante ao estimar sua resposta opera de forma funcional com os conjuntos de grandezas, ou seja, na relação entre "quantidade de ovos por copos de leite" e "quantidade de xícaras de trigo por copo de leite.

Tipo 3: Neste tipo de estratégia/justificativa o participante procede a partir do uso de uma relação escalar entre cada conjunto de grandeza, ou seja, a partir da quantidade de vezes que esse conjunto se altera. Este tipo de estratégia apareceu tanto na resolução da atividade computacional (Estudo 1)quanto na realização da atividade não-computacional (Estudo 2). Assim como observado no Tipo 2 estas relações podem ser apresentadas em duas proporções simples ou através de uma proporção composta conforme é ilustrado nos exemplos a seguir.

Na Figura 23, identifica-se que a participante resolve o problema a partir de duas etapas, nas quais a primeira etapa se refere à relação escalar entre o conjunto dos estudantes (triplo) e a na segunda etapa com relação a quantidade de vezes que o conjunto de dias é alterado (dobro), identificando, assim, que o produto final (quantidade de quilos de alimento) estaria relacionado a essas duas taxas ou ao produto delas (sêxtuplo).



Problema 1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias? 120 quilos.

E: Agora eu gostaria que você explicasse como pensou pra resolver este problema da gincana escolar.

P: Se são 18 estudantes, se fosse o triplo de estudantes daria 60 quilos, só que além de ser o triplo dos estudantes é o dobro dos dias, então, daria 120 quilos, então seria a mesma coisa que multiplicar isso aqui por 6. O triplo de alunos e o dobro de dias.

Figura 23: Extrato de Protocolo nº 38, sexo feminino, 8º ano. Estratégia Tipo 3. Problema de proporção dupla computacional- Estudo 1

E: Eduarda quer fazer um bolo de chocolate utilizando a mesma receita que Marina. Porém quando ela chega em casa percebe que tem 2 copos de leite. Você acha que Eduarda precisará da mesma quantidade de xícaras de trigo, mais xícaras de trigo ou menos xícaras de trigo que Marina? **Por quê? Explique sua resposta.**

P: *Eu acho que seria menos xícara de trigo do que Marina, porque, Marina vai fazer uma receita com 3 copos de leite e Eduarda só tem 2 copos, então se ela colocasse a quantidade de xícara de trigo que Marina coloca a receita meio que não daria certo".*

Figura 24: Extrato de Protocolo nº 17, sexo feminino, 7º ano. Justificativa Tipo 3. Problema de proporção múltipla não-computacional- Estudo 2.

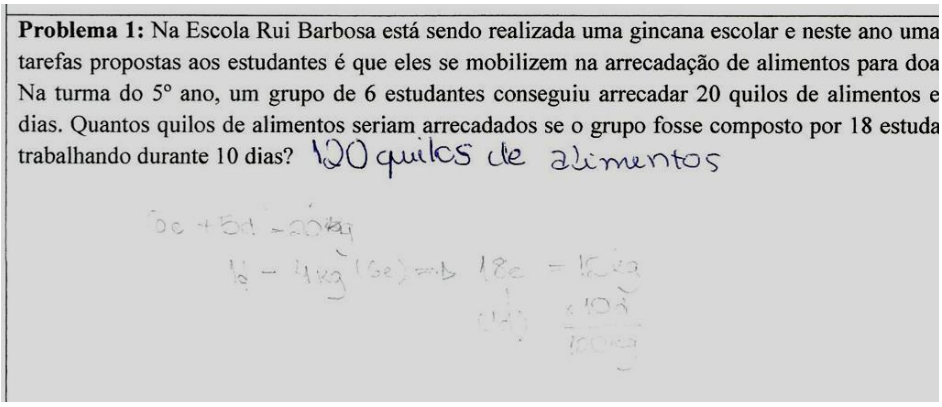
E: A turma do 6º ano, da mesma escola, também participa da gincana. Nesta turma, um grupo de 12 alunos se organizou e conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos no período de 7 dias. Se esse grupo fosse composto por 36 estudantes que trabalhassem durante 14 dias. O que você acha que acontece com a arrecadação de alimentos da turma do 6º ano em relação ao que foi arrecadado pelo 5º ano. Eles arrecadaram a mesma quantidade, arrecadaram mais alimentos ou arrecadaram menos alimentos. **Por quê? Explique sua resposta**

P:*Eu vi quantos quilos os 12 alunos arrecadariam em 14 dias, sabendo que em 7 dias eles arrecadaram 20 quilos, ou seja, eles arrecadariam o dobro, mas ele pergunta 36 alunos quantos quilos eles arrecadam, então seria o triplo da quantidade de alunos e consequentemente o triplo da quantidade de alimentos, que dá 120 quilos".*

Figura 25: Extrato de Protocolo nº 40, sexo masculino, 8º ano. Justificativa Tipo 3. Problema de proporção dupla não-computacional -Estudo 2.

Nas Figuras 24 e 25(Estudo2),os participantes tomam como parâmetro a quantidade de vezes que os conjuntos se alteram a Figura24refere-se à comparação entre quantidade de copos de leite e Figura 25refere-se às quantidades de dias e estudantes.

Tipo 4: Neste tipo de estratégia/justificativa o participante faz uso tanto de relações funcionais quanto de relações escalares para resolução computacionalou não computacional). Como encontrado nos demais tipos, aqui também se observa a utilização de procedimentos que envolvem duas proporções simples ou uma proporção composta. Os exemplos a seguir, encontrados nos dois estudos ilustram esta categoria:

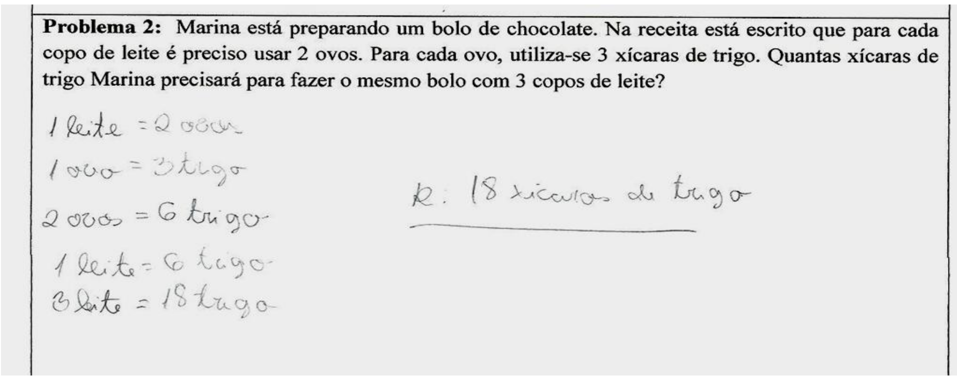

Problema 1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doa Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos e dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estuda trabalhando durante 10 dias? 120 quilos de alimentos

*E: Agora eu gostaria que você explicasse como pensou pra resolver este problema da gincana escolar.**P:** Se 6 estudantes em 5 dias conseguiram 20 quilos, então eu calculei quantos quilos eles conseguiram em 1 dia, que dá 4 quilos por dia, então como agora são 18 estudantes eu multipliquei os 4 quilos por dia, que deu 12 e como eram 10 dias ficava 120 quilos*"

Figura 26: Extrato de Protocolo nº 66, sexo feminino, 9º ano. Estratégia Tipo 4. Problema de proporção dupla computacional-Estudo1.

Na Figura 26, a estudante procede em duas etapas: estabelece uma relação funcional entre a quantidade de quilos e os dias trabalhados, posteriormente, identifica a alteração realizada no conjunto de estudantes (triplo) estabelecendo assim a quantidade de alimento em 5 dias e por fim calcula qual seria o produto final de acordo com as informações fornecidas na situação-problema (10 dias).

Na Figura 27, o procedimento utilizado envolve os três conjuntos de grandezas concomitantemente e identifica todos os fatores proporcionais existentes na situação: “quantidade de ovos por copos de leite”; “quantidade de xícaras de trigo por ovos” e “quantidade de vezes que o conjunto de copos de leite se altera”.



Problema 2: Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite?

1 leite = 2 ovos
1 ovo = 3 trigo
2 ovos = 6 trigo
1 leite = 6 trigo
3 leite = 18 trigo

R: 18 xícaras de trigo

E: *Vamos realizar hoje a segunda parte da pesquisa. Para iniciar, gostaria que você me explicasse como pensou para resolver este problema da receita.*

P: *Então se um copo de leite equivale a dois copos, dois ovos equivale a seis xícaras de trigo. Porque um ovo equivale a três de trigo, então vai ficar assim. Então se eu digo que dois ovos é igual a seis de trigo, e dois ovos corresponde a um leite, um leite corresponde a seis de trigo. Então aqui três leite é igual a dezoito xícaras de trigo. Foi basicamente isso”.*

Figura 27: Extrato de Protocolo nº 54, sexo feminino, 8º ano. Estratégia Tipo 4. Problema de proporção múltipla computacional- Estudo 1

Na Figura 28, o estudante faz uso de relação funcional para encontrar a quantidade de quilos arrecadados em um dia e depois estabelece como parâmetro a quantidade de vezes que os conjuntos de dias e de estudantes se alteram (dobro e triplo respectivamente), contudo erra na justificativa, pois não leva em consideração que os conjuntos de estudantes e dias são independentes.

E: A turma do 6º ano, da mesma escola, também participa da gincana. Nesta turma, um grupo de 12 alunos se organizou e conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos no período de 7 dias. Se esse grupo fosse composto por 36 estudantes que trabalhassem durante 14 dias. O que você acha que acontece com a arrecadação de alimentos da turma do 6º ano em relação ao que foi arrecadado pelo 5º ano. Eles arrecadaram a mesma quantidade, arrecadaram mais alimentos ou arrecadaram menos alimentos. **Por quê? Explique sua resposta**

P: Eu acho que daria... 98 quilos aproximadamente, porque tem 12 alunos que arrecada 20 quilos em 7 dias, que dá aproximadamente 3 quilos por dia, ai tem que achar esse valor em 14 dias, e eles vão arrecadar o triplo porque aumentou o triplo dos estudantes, que dá 9, ai tem que multiplicar por 14, que dá aproximadamente 126 quilos (sic).

Figura 28: Extrato de Protocolo nº 16, sexo masculino, 7º ano. Justificativa Tipo 4. Problema de proporção dupla não-computacional- Estudo 2

Apresentado todo o sistema de categorização construído para análise dos dados de ambos os estudos(Estudo 1 e Estudo 2), segue-se abaixo o Quadro 5 que apresenta uma síntese geral da classificação adotada na investigação.

Quadro 5:Síntese do sistema de análise adotado para os dois estudos

Classificação/pontuação	
Desempenho	**Zero:** resolução e/ou respostas erradas; incompletas ou em branco
	Um: resolução e/ou respostas corretas; respostas corretas sem resoluçãoexplícitas.
Estratégias/ Justificativas*	**Tipo 1:** não sabe explicar, não se lembra como fez ou não utiliza o algoritmo de proporcionalidade.
	Tipo 2: faz uso de relações funcionais entre os conjuntos de grandezas.
	Tipo 3: faz uso de relações escalares em cada conjunto de grandeza.
	Tipo 4: faz uso de relações funcionais e escalares

Nota: * No Estudo 1 são denominadas estratégias e no Estudo 2 justificativas

Capítulo V

Análise e Discussão dos Resultados

A análise dos resultados encontrados será apresentada, neste capitulo, em três partes: (i) Estudo 1(Atividade Computacional); (ii) Estudo 2(Atividade não-computacional) e (iii) Estudo 1 *vs.* Estudo 2.Em cada uma das partes os dados serão discutidos a partir de dois aspectos já mencionados: o desempenho (número de acertos) e a explicitação das estratégias/ justificativas utilizadas nas atividades propostas.

No processo de análise dos resultados, referentes ao desempenho e as estratégias/justificativas, foi utilizado o software SPSS *(Statistical Package for the Social Sciences),* que possibilitou mais segurança e precisão na manipulação das informações geradas nesta investigação. Para cada análise realizada, os dados foram submetidos ao teste paramétrico *T-Student*(para amostra independente e amostra pareada), com objetivo de verificar os níveis de significância na comparação entre as médias inter e intra-grupos, respectivamente.

5.1 Estudo 1- Atividade Computacional

5.1.1. Análise do desempenho

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos a partir da análise do desempenho (número de acertos) para resolução da atividade computacional. Esta análise será apresentada a partir de dois aspectos: (i) desempenho por tipo de situação-problema (proporção dupla e proporção múltipla) e (ii) desempenho em cada tipo de problema.

5.1.1.1 Análise do desempenho por tipo de situação-problema

Adotando-se o sistema de classificação binária (zero e um), já descrito anteriormente (Capítulo IV), examinou-se a distribuição das médias de resoluções em função do tipo de situação-problema e da escolaridade, como ilustra a Tabela 1.

Tabela 1: Média de acertos e desvio padrão por tipo de situação e escolaridade

Anos Investigados		**Proporção Dupla**	**Proporção Múltipla**
	Média	**1,47**	**1,73**
7º ano	n*	30	30
	Desvio padrão	0,776	0,521
	Média	**1,63**	**1,77**
8º ano	n	30	30
	Desvio padrão	0,669	0,568
	Média	**1,63**	**1,70**
9º ano	n	30	30
	Desvio padrão	0,669	0,596
	Média	**1,58**	**1,73**
Total	n	90	90
	Desvio padrão	0,703	0,557

Nota: Pontuação máxima igual a 2 por tipo de situação ; *n refere-se ao número de participantes em cada grupo investigado.

Ao analisar as médias gerais encontradas nos conjuntos de situações propostas, não foi identificada alta variabilidade entre elas, com valores entre 1,58 a 1,73 nas situações de proporção dupla e proporção múltipla, respectivamente.Uma análise relativa às situações dentro de cada ano investigado apontou que no 7º ano as médias tiveram mais variação, enquanto que nos 8º e 9º anos as médias apresentaram-se mais próximas.

Embora existam diferenças entre médias não foram detectadas diferenças significativas quando comparados os anos em cada uma das situações: proporção dupla (7º ano *vs.* 8º ano t = -.891, p = .377;7º ano *vs.* 9º ano t = -.891, p = .377; 8º ano *vs.*9ºano t= .000, p=1) e proporção múltipla (7º ano *vs.* 8º ano t = -.237;p= .814; 7º ano *vs.* 9º ano t =.231; p=.818; 8º ano *vs.* 9º ano t =.443; p= .659). Tais resultados revelam que não existe efeito significativo do nível de instrução sobre o desempenho nas situações-problema apresentadas quer seja na proporção dupla ou na proporção múltipla.

Para examinar as diferenças entre as duas situações-problema (dupla e múltipla), em cada um dos grupos, aplicou-se o Teste t para amostras pareadas. Como pode ser observado na Tabela 1 os estudantes do 7º, 8º e 9º apresentam melhor desempenho na proporção múltipla, contudo não foram identificados níveis de significância quando comparados os desempenhos em cada ano investigado separadamente (7º ano: t= -1, 547, p=.133; 8º ano:t=-.779, p=.442 e 9º ano: t =-.528, p= .601). Esses resultados revelam que não existe efeito significativo quando se compara o desempenho entre as situações-problema (dupla vs. múltipla) em cada ano escolar.

Em linhas gerais observa-se que, quanto ao desempenho, as situações de proporção dupla e proporção múltipla apresentam nível equivalente de dificuldade entre si ao considerar-se cada ano escolar separadamente, bem como, não foram encontrados indícios de diferenças de desempenho em cada tipo de situação problema quando se compara um ano escolar ao outro.

5.1.1.2 Análise do desempenho em cada situação-problema

Nesta seção discute-se acerca da existência ou não de diferenças significativas em relação aos problemas apresentados, ou seja, observa-se o grau de dificuldade de cada um dos problemas apresentados por ano escolar. Na Tabela 2, apresentam-se os resultados das médias e desvio-padrão encontrados por tipo de problema.

Tabela 2: Média de acertos e desvio padrão por tipo de problema e escolaridade

Anos Investigados		**Gincana**	**Carro**	**Calçada**	**Receita**
7º ano	Média	**0,80**	**0,67**	**0,77**	**0,97**
	n*	30	30	30	30
	Desvio padrão	0, 407	0, 479	0, 430	0, 183
8º ano	Média	**0,77**	**0,87**	**0,87**	**0,90**
	n	30	30	30	30
	Desvio padrão	0, 430	0, 346	0, 346	0, 305
9º ano	Média	**0,87**	**0,77**	**0,87**	**0,83**
	n	30	30	30	30
	Desvio padrão	0, 346	0, 430	0, 346	0, 379
Total	Média	**0,81**	**0,77**	**0,83**	**0,90**
	n	90	90	90	90
	Desvio padrão	0, 394	0, 425	0, 375	0, 302

Nota: Pontuação máxima igual a 1 (um) por tipo de problema; *n refere-se ao número de participantes em cada grupo investigado.

Como pode ser observado na Tabela 2, o problema que apresentou menor desempenho no geral foi o problema do Carro (média: 0,77) enquanto que o problema da Receita foi o que apresentou melhor desempenho (média: 0,90). Verifica-se, ainda que no problema do Carro as médias mais baixas foram as do 7º e 9º anos, 0,67 e 0,77, respectivamente. Já no 8º ano a média mais baixa foi encontrada no problema da Gincana (0,77). Ressalta-se que os problemas do Carro e da Gincana envolviam em sua configuração a dupla proporcionalidade, bem como,as relações entre as grandezas eram do tipo "muitos-para-muitos", as quais requerem do estudante a manipulação entre conjuntos de grandezas maiores que 1(um).

O problema da Receita que envolve uma proporção múltipla do tipo "um-para-muitos", apresenta média mais elevada nos 7º e 8º anos. Já a média mais elevada no 9º ano foi no problema da Calçada, cuja relação é do tipo "muitos-para-muitos", o que parece indicar um efeito do nível de escolaridade para a resolução desse tipo de problema.

Diante dos achados, cabe analisar se as diferenças encontradas nas médias por tipo de problema são significativas quando se compara os anos escolares investigados. Conforme pode ser visualizado no Quadro 6, não foram detectadas diferenças significativas quando aplicado o Teste t para amostras independentes(p>.05). Em outras palavras, não existe efeito significativo do nível de instrução sobre o desempenho em cada tipo de problema proposto nessa investigação.

Quadro 6: Níveis de significância entre as diferenças de médias por tipo de problema

Anos	Gincana		Carro		Calçada		Receita	
	T	p	t	p	t	p	t	P
7º vs. 8º	.308	.759	-1.853	.069	-. 992	. 325	1.027	.310
8º vs. 9º	-.992	.325	.992	.325	.000	1	.750	.456
7º vs. 9º	-. 684	.497	-.850	.399	-.992	.325	.736	.090

Para examinar as diferenças entre os tipos de problema em cada um dos anos aplicou-se o Teste t para amostras pareadas, que detectou diferenças significativas apenas no 7º ano quando se comparou os problemas Carros *vs.* Receita (t=-3.071, p=.005) e Calçada *vs*. Receita (t=-2.693,p=.012).Como pode ser observado na Tabela 2 os estudantes apresentam média mais elevada no problema da Receita (média: 0,97) quando comparado aos problemas do Carro (média: 0.67) e da Calçada (média: 0.77) na qual apresentam médias mais baixas.De modo geral, esses resultados indicam que para os estudantes que estão iniciando às discussões formais sobre a composição de proporção, os problemas que envolvem relações um-para-muitos (Receita) são mais fáceis de resolução do que os problemas que envolvem relações muitos-para-muitos (Carro e Calçada).

5.1.2 Análise das estratégias na atividade computacional

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos a partir do exame minucioso dos tipos de estratégias utilizadas para resolução da atividade computacional. Cabe aqui ressaltar que este material se refere às explicações dadas pelos estudantes da forma que resolveram os problemas da "Gincana Escolar" (proporção dupla) e da "Receita de Marina" (proporção múltipla).

Como já mencionado anteriormente, quatro tipos de estratégias foram identificadas, a saber: Tipo 1 (não lembram, não resolveram ou não utilizaram procedimentos de proporcionalidade); Tipo 2 (estabelece relações funcionais); Tipo 3 (estabelece relações escalares); Tipo 4 (estabelece relações funcionais e escalares).

Na Tabela3são apresentadas as frequências e porcentagens dos tipos de estratégias identificadas em cada tipo de problema que envolvia tanto a proporção dupla (Gincana) como a proporção múltipla (Receita).

Tabela 3: Frequência e percentual (entre parênteses) de tipos de estratégias por ano.

	Proporção Múltipla-Receita				Proporção Dupla- Gincana			
Ano Investigado	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
7º ano (n=30)	**0** (0)	**3** (10)	**8** (26,7)	**19** (63,3)	**3** (10)	**1** (3,3)	**18** (60)	**8** (26,7)
8º ano (n=30)	**4** (13,3)	**2** (6,7)	**12** (40)	**12** (40)	**2** (6,7)	**0** (0)	**24** (80)	**1** (3,3)
9º ano (n=30)	**1** (3,3)	**9** (30)	**9** (30)	**11** (36,7)	**1** (3,3)	**2** (6,7)	**22** (73,3)	**5** (16,7)
Total (n=90)	**5** (5,5)	**14** (15,6)	**29** (32,2)	**42** (46,7)	**6** (6,7)	**3** (3,3)	**64** (71,1)	**14** (15,6)

Nota: Tipo 1 (não realiza ou não apresenta justificativa); Tipo 2 (estabelece relações funcionais); Tipo 3 (estabelece relações escalares); Tipo 4 (estabelece relações funcionais e escalares).

Foi constatado que a escolha da estratégia esteve relacionada ao tipo de situação, conforme é apresentado na Tabela 3, na qual a estratégia do Tipo3 (que envolve relação escalar) é mais utilizada na situação de proporção dupla (71,1%), enquanto que a estratégia do Tipo 4 (relação escalar e funcional) é mais utilizada na situação de proporção múltipla (46,7%). Estes dados revelam que em situações com relações independentes, como é o caso da dupla proporcionalidade, há certo direcionamento para o uso de operações que envolvam relações escalares em sua resolução, enquanto que situações que apresentam relações conjugadas entre as grandezas (proporção múltipla) necessitam do uso de procedimentos escalares e funcionais.

Os resultados das médias foram submetidos ao teste *T Student* para amostras pareadas com o objetivo de verificar se há efeito significativo entre o tipo de situação e a estratégia escolhida por ano escolar. Foram detectados níveis de significância em todos os anos para a estratégia do Tipo 3 (7º: t=-2,408,p=.023; 8º: t=3,525, p= .001; 9º: t= -3,496, p=.002), pois, observa-se aumento no uso de operação escalar quando se tratou de situação que envolvia proporção dupla. Também foram identificadas diferenças significativas para a estratégia do Tipo 4 nos 7º (t=3,003, p= .005) e 8º anos(t= 2,283,p= .030), devido ao aumento no uso de operações escalares e funcionais para situações de proporção múltipla. A estratégia do Tipo 2 (relação funcional) apresenta diferença significativa apenas no 9º ano (t= 2,249, p=.032), devido ao maior uso tipo de raciocínio para resolução da situação de proporcionalidade múltipla. Não foram identificados níveis de significância para a estratégia do Tipo 1 em nenhum ano escolar.

Foram feitas análises dos tipos de estratégias entre os anos investigados com objetivo de verificar se existiria influência do grau de escolaridade sobre a escolha das estratégias. Nas situações de proporção dupla não foram identificados níveis de significância em nenhuma das comparações feitas (p>.05).Para as situações de proporção múltipla, a análise entre 7º *vs.* 8º anos detectou diferença significativa apenas para a estratégia do Tipo 1 na situação de proporção múltipla (t=-2,112; p=.039), visto que, no primeiro grupo este tipo não foi apresentado por nenhum participante enquanto no 8º ano consta-se quatro estudantes apresentam esse tipo de estratégia. A comparação entre 8º *vs.* 9º apontou nível de significância para estratégia do Tipo 2 na situação de proporção múltipla (t= -2,408; p=.019), reflexo da frequência desta categoria nos anos comparados (n= 2 e n=9 respectivamente). Ao se comparar as médias das categorias entre os 7º e 9º anos, foram identificadas diferenças significativas para as estratégias do Tipo 2 (t=-1,966; p= .054)e do Tipo 4 (t= 2,107;p=.039) na situação de proporção múltipla, pois observa-se que um aumento no uso da estratégia funcional de acordo com o aumento do grau de escolaridade, e diminuição da estratégia que envolve dois tipos de operação (Tipo4) à medida que o os anos escolares aumentam.

Em linhas gerais, estes resultados revelam que existe efeito significativo entre o tipo de situação (proporção dupla ou múltipla) para a escolha da operação realizada pelos participantes e pode estar relacionada às relações entre os conjuntos de grandezas existentes em cada situação ou ao tipo de correspondência estabelecida (um-para-muitos ou muitos-para-muitos). Também foi observado que não há efeito significativo do grau de escolaridade na escolha das estratégias para situações de proporção dupla, enquanto que nas situações de proporção múltipla foram detectados níveis de significância, estes resultados permitem inferir que nas situações de proporção múltipla a capacidade de manipular vários conjuntos de grandeza concomitantemente estaria relacionada ao nível de instrução do estudante.

5.1.2.2 Relação entre o tipo de estratégia e o desempenho

Nesta seção serão discutidos, de forma qualitativa, os resultados referentes à existência de efeito da escolha do procedimento (estratégia) sobre o número de acertos (desempenho), ou seja, quais são as estratégias mais eficientes para resolver o conjunto de situações propostas.

A Tabela 4, apresentada na página 64,contém as frequências e porcentagens do desempenho na situação de proporção múltipla por tipo de estratégia utilizada em toda a amostra.

Em termos gerais, nota-se que para a situação de proporção múltipla todos os quatro tipos de estratégias, apresentaram, em sua totalidade altos índices de respostas corretas (Tipo 1: 100%; Tipo 2: 78,6%; Tipo 3: 86,2% e Tipo 4: 95,2%).

Tabela 4: Frequência e porcentagem (entre parênteses) de acertos nos dois tipos de situação por estratégia utilizada

Proporção Múltipla- Receita				**Proporção Dupla- Gincana**			
Tipo 1 (n=5)	**Tipo 2** (n =14)	**Tipo 3** (n =29)	**Tipo 4** (n =42)	**Tipo 1** (n=6)	**Tipo 2** (n=3)	**Tipo 3** (n =64)	**Tipo 4** (n=17)
5 (100)	**11** (78,6)	**25** (86,2)	**40** (95,2)	**1** (16,7)	**0** (0)	**56** (87,5)	**16** (94,1)

Nota: Tipo 1 (não realiza ou não apresenta justificativa); Tipo 2 (estabelece relações funcionais); Tipo 3 (estabelece relações escalares); Tipo 4 (estabelece relações funcionais e escalares).

Observa-se que a estratégia do Tipo 4 apresentou,dentro dos casos encontrados e em comparação às demais, o maior percentual de acertos e um dos mais baixos percentuais de respostas incorretas (4,8%). Este achado permite inferir que na situação de proporção múltipla é possível utilizar vários tipos de raciocínio diferentes (utilizando tanto as relações dentro ou entre os conjuntos de grandezas), porém a resolução mais eficiente é aquela na qual se manipulam os pares de grandezas a partir das relações escalares e funcionais concomitantemente.

Ao observar como a relação entre estratégia e desempenho se configura na situação de proporção dupla, tem-se que todos os tipos de estratégias foram encontrados na amostra, mas, o Tipo 2 foi aquele que em sua totalidade levou ao maior índice de respostas incorretas (100%) apresentando-se como um tipo de raciocínio ineficaz para esse tipo de situação. Já as estratégias que apresentaram altos percentuais de respostas corretas, dentro dos casos encontrados, foram as do Tipo 3 (87,5%) e Tipo 4 (94,1%), indicando que neste tipo de situação(proporção dupla) uma resolução que leve ao êxito pode estar relacionada tanto à manipulação das informações a partir das relações dentro dos conjuntos de grandezas (escalar) quanto às relações dentro e entre os conjuntos de grandezas (escalar e funcional).

Em síntese, a análise do Estudo 1 permitiu identificar que:

a) não há diferença significativa entre as situações de proporção dupla e proporção múltipla quando estas são comparadas entre si dentro e entre os anos escolares investigados (7º, 8º e 9º anos), indicando que, numa atividade que envolva registro escrito, estas apresentam níveis equiparáveis de dificuldade;
b) ao se comparar cada tipo de problema apresentada observou-se diferença significativa, inter e intra-grupos, entre situações que envolvem relações um-para-muitos e muitos-para-muitos, indicando que um grau menor de dificuldade na situação que apresentava a unidade como uma das referências;
c) a análise das estratégias indicou que a depender do tipo de situação problema (proporção múltipla ou proporção dupla), há um direcionamento do raciocínio do estudante, de forma que nas situações de proporção dupla o mesmo é levado a operar com os dados a partir das relações escalares (Estratégia Tipo 3) enquanto que nas situações de proporção múltipla exige-se que a operação envolva relações entre e dentro dos pares de grandeza. Ao uso frequente de um ou outro tipo de estratégia entre as situações propostas acompanha-se um alto índice de acertos dos Tipos 3 e 4 para situação de proporção dupla e Tipo 4 para situação de proporção múltipla, indicando que estas estratégias seriam as mais indicadas e adequadas em cada tipo de situação.

5.2- Estudo 2- Atividade não-computacional

O objetivo da realização do Estudo 2 foi analisar a compreensão dos estudantes sobre as relações proporcionais, nas situações de proporção dupla e múltipla, a partir de uma atividade não-computacional que envolveu o uso de estimativas, buscando responder a seguinte questão:“*Será que sem o apoio do registro escrito os estudantes compreendem a* *configuração das relações proporcionais presentes nas situações de proporção dupla e proporção múltipla?".*

Os resultados deste estudo serão apresentados e discutidos em duas sessões que se referem a aspectos distintos: (i) análise do desempenho (número de acertos) na atividade não-computacional e (ii) análise das justificativas[7] apresentadas na atividade não-computacional.

5.2.1- Análise do desempenho

Conforme apresentado anteriormente, o desempenho dos participantes nesta etapa refere-se à capacidade de estimar corretamente a resolução da situação-problema apresentada. Como nesta etapa foi apresentada uma situação de cada tipo (proporção múltipla e proporção dupla) todos os participantes realizaram a atividade na mesma ordem, primeiro estimaram a situação de proporção múltipla e depois a de proporção dupla. A análise do desempenho, utilizou-se do mesmo sistema de classificação binário feito no Estudo 1 e concentra-se no exame minucioso da distribuição das médias de estimativas corretas em função da escolaridade, como ilustra a Tabela 5.

Ao analisar as médias gerais encontradas no conjunto de situações propostas, não foi identificada alta variabilidade entre elas, com valores entre 0,70 a 0,74 para as situações de proporção dupla e proporção múltipla, respectivamente. Uma análise relativa às estimativas corretas, realizadas em cada ano investigado apontou que no 7º ano as médias tiveram mais variação, enquanto que nos 8º e 9º anos as médias apresentaram-se mais próximas.

[7] Como neste estudo os participantes precisavam explicar o porquê da estimativa apresentada, o tipo de raciocínio utilizado será denominado de "justificativa".

Tabela 5: Média de acertos e desvio padrão na atividade não-computacional por ano

Ano Investigado		Proporção Múltipla	Proporção Dupla
	Média	**0,87**	**0,63**
7º ano	n*	30	30
	Desvio padrão	0,346	0,490
	Média	**0,63**	**0,67**
8º ano	n	30	30
	Desvio padrão	0,490	0,479
	Média	**0,73**	**0,80**
9º ano	n	30	30
	Desvio padrão	0,450	0,407
	Média	**0,74**	**0,70**
Total	n	90	90
	Desvio padrão	0,439	0,461

Nota: Pontuação máxima igual a 1(um); *n refere-se ao número de participantes em cada grupo investigado

Como pode ser observado na Tabela 5, os estudantes do 7º ano apresentam mais sucesso ao realizar estimativas na situação de proporção múltipla, enquanto que nos 8º e 9º anos observou-se uma melhor compreensão da situação de proporção dupla.Foi realizado o Teste T para amostras independentes a fim de identificar se haveria diferenças significativas quando comparados os anos em cada uma das situações propostas e foram encontrados os seguintes resultados como pode ser ilustrado no Quadro 7.

Quadro 7: Níveis de significância entre as diferenças de médias por tipo de situação-problema

Anos Investigados	Proporção Múltipla		Proporção Dupla	
	t	p	t	p
7º vs. 8º	2,131	.037	-.266	.791
8º vs. 9º	-.823	.414	-1,161	.250
7º vs. 9º	1,287	.203	-1,433	.157

Estes resultados indicam que não há efeito significativo do nível de instrução sobre o desempenho para realização de estimativa na situação de proporção dupla. Contudo, para realização de estimativa na situação de proporção múltipla observa-se efeito significativo ao comparar 7º e 8º anos (t = 2,131; p=.037). Como pode ser observado na Tabela 5, o 7º ano apresenta média de acerto mais elevada (média: 0.87) quando comparado ao 8º ano (média: 0.63), isso se deve talvez à familiaridade,do primeiro grupo, ao contexto da situação, por estarem ingressando formalmente na aprendizagem deste conceito; ou à incapacidade por parte do grupo do 8º ano de elaborar uma resolução verbal para o problema (como será apresentado na seção 5.2.2).

Para examinar a existência de diferença significativa ao se comparar as duas situações em cada um dos grupos, aplicou-se o Teste t para amostras pareadas (7º ano t= 2,249, p=.032; 8º ano t= -.297,p= .769; 9º ano t= -.626 p= .536). Foi detectada diferença significativa na turma do 7º ano (p<.050), quando compara-se os tipos de situação na realização da atividade, fato observado pela diferença das médias encontradas nesta turma,sendo na proporção múltipla (média: 0,87) e na proporção dupla (média: 0,63). Nos 8º e 9º anos, não há efeito significativo do tipo de situação (proporção dupla vs. múltipla) para realização de estimativas. Estes resultados apontam que possivelmente, para aqueles que estão ingressando no conhecimento formal da proporcionalidade, existem fatores, como por exemplo, a diferença entre os tipos de esquemas de ação (correspondências um-para-muitos ou muitos-para-muitos) envolvidos em cada situação, ou a própria configuração de em cada tipo de situação apresentada (conjugação de várias proporções simples na proporção múltipla ou conjunto de duas proporções simples independente entre si na situação de proporção dupla).

5.2.2- Análise das justificativas na atividade não-computacional

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos a partir do exame minucioso dos tipos de justificativas utilizadas para resolução da atividade não-computacional que envolvia o uso de estimativas. Como já mencionado anteriormente (Ver Capítulo IV), quatro tipos de estratégias/justificativas foram identificadas.Esta análise será apresentada a partir de dois aspectos: (i) frequência e médias de justificativas por ano investigado e (ii) relação entre os tipos de justificativas e o desempenho (estimativa correta) em cada situação. Na Tabela 6 são apresentadas as frequências e percentuais dos tipos das justificativas encontradas considerando os anos investigados.

Tabela 6: Frequência e porcentagem (entre parênteses) de tipos de estratégias/justificativas por ano.

	Proporção Múltipla				**Proporção Dupla**			
Ano Investigado	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
7º ano	**8**	**4**	**4**	**14**	**15**	**0**	**15**	**0**
(n = 30)	(26,6)	(13,3)	(13,3)	(46,6)	(50)	(0)	(50)	(0)
8º ano	**14**	**2**	**4**	**10**	**13**	**0**	**17**	**0**
(n = 30)	(46,6)	(6,6)	(13,3)	(33,3)	(43,3)	(0)	(56,6)	(0)
9º ano	**10**	**2**	**10**	**8**	**9**	**0**	**21**	**0**
(n = 30)	(33,3)	(6,6)	(33,3)	(26,6)	(30)	(0)	(70)	(0)
Total	**32**	**8**	**18**	**32**	**37**	**0**	**53**	**0**
(n=90)	(35,5)	(8,8)	(20)	**(35,5)**	(41,1)	(0)	(58,8)	(0)

Nota: Tipo 1 (não realiza ou não apresenta justificativa); Tipo 2 (estabelece relações funcionais); Tipo 3(estabelece relações escalares); Tipo 4 (estabelece relações funcionais e escalares).

Ao observar os valores gerais da amostra, constata-se que na situação de proporção dupla, só são encontradas justificativas **Tipo 1** (41,1%) e do **Tipo3**(58,8%), enquanto que na situação de proporção múltipla as justificativas se distribuíram entre os quatro tipos encontrados,concentrando-se nas justificativas dos **Tipo 1**(35,5%) e **Tipo 4** (35,5%).

Estes dados possibilitam identificar dois aspectos interessantes, no geral: (i) independente do tipo de situação (proporção múltipla ou dupla) boa parte dos participantes apresentaram dificuldade em explicitar o tipo de raciocínio utilizado para estimar os valores dos produtos finais (Tipo 1), como pode ser visto a partir da frequência deste tipo de raciocínio nas situações propostas (35,5% na proporção múltipla e 41,1% na proporção dupla) e (ii) para aqueles que conseguiram elaborar uma justificativa, foi observada relação entre o tipo de situação (dupla ou múltipla) e o raciocínio utilizado (35,5% do Tipo 4 na situação de proporção múltipla e 58,8% do Tipo 3 na situação de proporção dupla).

Para realizar uma análise acerca da existência de diferenças significativas entre as justificativas em cada tipo de situação apresentada (proporção dupla eproporçãomúltipla) por cada ano escolar, os dados, em médias, foram submetidos ao Teste t para amostras pareadas. Foram detectados níveis de significância em todos os anos investigados para as justificativas do **Tipo 3** (7º ano: $t=-3,266$, $p=.003$; 8º ano: $t= -3,791$, $p= .001$; 9º ano $t= -2,796$, $p=.009$) e do **Tipo 4** (7º ano: $t= 5,037$, $p<.001$; 8º ano $t=3,808$, $p=.001$; 9º ano $t=3,247$, $p=.003$). Já a justificativa do **Tipo 2** (relação funcional) apresenta diferença significativa apenas no 7º ano ($t=-2,112$; $p=.043$).Não foram identificados níveis de significância para a estratégia do Tipo 1 em nenhum ano escolar.

Estes resultados evidenciam que há influência, em todos os anos investigados, do tipo de situação sobre o raciocínio utilizado para a resolução da atividade não-computacional, visto que, para realização adequada de estimativa na situação de proporção múltipla, por exemplo, esperasse que o estudante tenha compreensão da manipulação das grandezas a partir das relações escalares e funcionais, enquanto que, na situação de proporção dupla faz-se necessário a compreensão das relações escalares (Tipo 3) para realização correta das estimativas, sugerindo a existência de características peculiares na configuração de cada tipo de situação que direcionam o raciocínio dos estudantes.

5.2.3 Relação entre o tipo de justificativa e o desempenho na estimativa

Nesta seção investiga-se a existência de relação entre resposta correta e o tipo de justificativa adotada em cada tipo de situação (proporção dupla ou múltipla). A Tabela 8 apresenta as frequências e percentuais das estimativas corretas e incorretas, de toda a amostra, considerando a proporção múltipla.

Tabela 7: Frequência e percentual (entre parênteses) de respostas corretas em cada justificativa na proporção múltipla

Proporção Múltipla- Receita			
Tipo 1 (n = 32)	**Tipo 2** (n =8)	**Tipo 3** (n =18)	**Tipo 4** (n =32)
9 (28,2)	**8** (100)	**18** (100)	**32** (100)

Nota: Tipo 1 (não realiza ou não apresenta justificativa); Tipo 2 (estabelece relações funcionais); Tipo 3 (estabelece relações escalares); Tipo 4 (estabelece relações funcionais e escalares).

Ao analisar a Tabela 7, nota-se que a totalidade das justificativas **Tipo 2, Tipo 3** e **Tipo 4** leva sempre ao acerto na realização de estimativa; enquanto que a maior parte das justificativas do Tipo 1 (71,8%) está associada a estimativas incorretas. É possível observar que, a ausência de justificativa estaria relacionada, em sua maioria, a uma dificuldade em realizar estimativa, ou, em menor parte a uma dificuldade de explicitar o raciocínio apesar de conseguir realizar a atividade corretamente (28,2%). Acerca dos percentuais de acertos

(100%), nas demais justificativas (T2; T3 e T4) é possível inferir que para este tipo de situação (proporção múltipla) existe um leque de possibilidades eficientes de compreensão das relações proporcionais em situações que exigem a manipulação mental das informações. Este achado sugere que os problemas de proporção múltipla podem ser favoráveis para o desenvolvimento de um raciocínio proporcional, pois, permitem ao estudante o reconhecimento e a manipulação de todos os tipos de relações existentes dentro de uma situação proporcional.

No que se refere a proporção dupla, contata-se que em nenhum dos anos investigados foram utilizadas justificativas dos **Tipos 2**(estabelece relações funcionais) e do **Tipo 4** (estabelece relações funcionais e escalares) na realização de estimativa (ver Tabela 7, página 72).

Como pode ser observado na Tabela 8 (página 74), a justificativa do Tipo 1 esteve relacionada na maior parte dos casos a uma estimativa incorreta (73%) enquanto que a totalidade das justificativas do Tipo 3 são corretas e permite compreender o raciocínio adotado para dar a estimativa, estabelecendo relações escalares para dar a resposta ao que foi solicitado.

Observa-se, também, que em 27% das respostas os estudantes apresentam a resposta correta, mas não conseguem explicitar as bases de seus raciocínios para justificar de forma adequada, o que está sendo proposto na situação de proporção dupla.

Tabela 8: Frequência e percentual (entre parênteses) de respostas corretas em cada justificativa na proporção dupla

Proporção Dupla- Gincana	
Tipo 1 (n = 37)	**Tipo 3** (n =53)
10 (27)	**53** (100)

Nota: Tipo 1 (não realiza ou não apresenta justificativa) e Tipo 3 (estabelece relações escalares)

De acordo com o exposto na Tabela 8, pode-se dizer que a maior dificuldade dos estudantes está em justificar as estimativas escolhidas quando os problemas envolvem proporção dupla. Quando estes conseguem justificar, na sua totalidade, adotam justificativas que estabelecem relações escalares (Tipo 3). Isso porque o raciocínio utilizado nas situações que apresentam proporções independentes entre si, como é o caso das situações de proporção dupla, é direcionada para a manipulação (mental, para este estudo) das informações de dentro dos conjuntos de grandezas, de forma que o participante ao estimar o resultado final da situação proposta, o faz tomando por base que os pares numéricos são alterados, mas o operador escalar é mantido constante. Isto pode ser observado quando surgem nas justificativas às expressões “dobro” ou “triplo” referindo-se à quantidade de vezes que os conjuntos são alterados.

Em síntese, foi observado no Estudo 2 que:

a) Com relação ao desempenho, ao se comparar o nível de instrução não foram encontrados níveis de significância na situação de proporção dupla, revelando que em todos os anos os estudantes foram capazes de realizar estimativa eficazmente neste tipo de situação. Contudo foi identificada diferença significativa na situação de proporção múltipla ao se comparar os 7º e 8º anos, em favor do menor nível de instrução, revelando que apesar de estarem ingressando no conhecimento formal do conceito de proporcionalidade, os estudantes estariam mais atentos às relações estabelecidas entre as grandezas e a necessidade de manipulá-las de forma a encontrar o resultado;

b) Com relação às estratégias utilizadas, observou-se influência do tipo de situação sobre a escolha do raciocínio utilizado para realizar estimativa, indicando que para resolução da situação de proporção dupla, a manipulação das informações dentro dos grupos de grandezas (relações escalares: Tipo 3) se sobressaem, enquanto que na situação de proporção múltipla, a realização da estimativa é direcionada pela manipulação entre e dentro dos conjuntos de grandezas concomitantemente (relações escalares e funcionais: Tipo 4). Ainda sobre o uso massivo de uma ou outra justificativa a depender do tipo de situação, foram observados índices consideráveis de acertos relacionados às mesmas, apontando para a eficiência de sua utilização em tarefas que não contam com o apoio do registro escrito.

5.3 Análise Estudo 1 *vs*. Estudo 2

Nesta seção será realizada uma análise a partir do cruzamento entre os resultados dos dois estudos realizados. O objetivo desta comparação é verificar se os participantes compreendem as relações existentes nas situações de proporção dupla e de proporção múltipla ao resolverem atividades computacionais (Estudo 1) e não-computacionais (Estudo 2). Cabe ressaltar que as análises feitas neste capítulo são referentes aos problemas denominados

Receita e Gincana, visto que, os mesmos fizeram parte dos dois instrumentos utilizados nesta investigação.

Os resultados serão apresentados e discutidos em duas sessões que se referem a aspectos distintos: (i) análise dos desempenhos e (ii) análise das estratégias e justificativas em cada atividade realizada.

5.3.1 Desempenho: Estudo 1 *vs*. Estudo 2

A Tabela 9 apresenta as médias e desvio-padrão dos desempenhos (número de acertos) da amostra como um todo em cada estudo considerando a situação de proporção dupla (problema gincana) e a situação de proporção múltipla (problema receita).

Tabela 9: Média de acertos e desvio padrão por estudo em cada situação-problema em toda amostra

	Estudo 1		**Estudo 2**	
	Proporção Múltipla	**Proporção Dupla**	**Proporção Múltipla**	**Proporção Dupla**
Média	**0,90**	**0,81**	**0,74**	**0,70**
N	90	90	90	90
Desvio padrão	0,302	0,394	0,439	0,461

Nota: Pontuação máxima igual a 1 (um); *n refere-se a totalidade de participantes em cada estudo.

De modo geral, observa-se na Tabela 9, que na situação de proporção dupla os estudantes apresentam desempenhos muito próximos quando se compara o Estudo 1 (média:0,81) e o Estudo 2 (média 0,70), enquanto que na situação de proporção múltipla verifica-se uma média um pouco mais elevada no Estudo 1 (média:0,90) do que no Estudo 2 (média: 0,74). Tais resultados foram confirmados pelo Teste t para amostras pareadas que detectou diferença significativa apenas na proporção múltipla (t=2,980, p=.004), quando se compara o desempenho entre os dois estudos.

Este resultado indica um efeito significativo do tipo de tarefa para resolução de situações que apresentam proporções concatenadas[8], principalmente ao manipular as informações mentalmente, sem realização de registro escrito, exigindo, portanto, do estudante um nível mais elevado de compreensão das relações proporcionais existentes na situação-problema. Em outras palavras, para resolver situações de proporção múltipla exige-se do estudante que ele opere com as informações de duas formas diferentes: dentro (escalar) e entre (funcional) os conjuntos das grandezas apresentadas, contudo, quando o procedimento pode ser registrado por escrito observa-se um alto desempenho (média=0,90) que revela compreensão das relações proporcionais existentes na situação apresentada; mas quando esta manipulação é feita sem o apoio do lápis e papel o estudante apresenta baixo desempenho (média=0,74), que pode estar relacionado à dificuldade de operar mentalmente com mais de dois pares de grandeza de duas formas diferentes concomitantemente.

Caso oposto é encontrado na situação de proporção dupla quando se comparam os desempenhos nos dois estudos, pois, não foram observados níveis de significância em nenhuma das análises feitas. O que parece indicar que, de forma geral, este tipo de situaçãoé mais compreensível para os estudantes, independente da atividade (ser computacional ou não computacional). Isto pode estar relacionado à configuração das relações proporcionais existentes, pois,as situações que envolvem dupla proporcionalidade apresentam duas proporções simples independentes entre si, exige-se do estudante a manipulação delas, em etapas, de cada par de grandezas para sua resolução;seja através do algoritmo seja utilizando estimativa. Talvez seja por isso que não foram observados índices relevantes e significativos ($p<.050$) na média do Estudo 1 (média: 0,81) quando comparado à média do Estudo 2 (média: 0,70).

[8] Invariante das situações de proporção múltipla, várias proporções simples conjugadas.

5.3.2 Estratégias/Justificativas: Estudo 1 *vs*. Estudo 2

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos a partir do exame minucioso dos tipos de estratégias e justificativas[9] utilizadas para realização das duas atividades propostas (computacional e não-computacional) e a relação entre estas e o desempenho em cada atividade, ou seja, pretende-se discutir acerca do tipo de raciocínio utilizado em cada estudo, a depender da situação apresentada e da eficiência das mesmas. Na Tabela 10 são apresentadas as frequências e porcentagens dos tipos de estratégias/ justificativas encontradas nas situações de proporção múltipla e proporção dupla em ambos estudos (Estudo 1 e Estudo 2).

Tabela 10: Frequência e porcentagem (entre parênteses) de tipos de estratégias/justificativas nas situações de proporção múltipla e dupla nos dois estudos

Proporção	**Estudo 1** (n= 180)				**Estudo 2** (n= 180)			
	T1	**T 2**	**T 3**	**T4**	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**
Múltipla	**5** (3)	**14** (8)	**29** (16)	**42** (23)	**32** (18)	**8** (4,5)	**18** (10)	**32** (18)
Dupla	**6** (4)	**3** (2)	**64** (35)	**17** (9)	**37** (20,5)	**0** (0)	**53** (29)	**0** (0)

Nota: T1 (não realiza ou não apresenta justificativa); T2 (estabelece relações funcionais); T3 (estabelece relações escalares); T4 (estabelece relações funcionais e escalares).

Ao analisar cada tipo de raciocínio utilizado em toda a amostra, constata-se que tanto nas situações de proporção múltipla quanto nas situações de proporção dupla, houve um aumento relevante no uso da estratégia/justificativa do Tipo 1 no Estudo 2 (múltipla: 18% e dupla 20,5%) quando comparado ao Estudo 1(múltipla: 3% e dupla 4%), sendo esse

[9] Como comentado anteriormente, no Estudo 1 a explicação da resolução do problema foi denominada de “estratégia” e no Estudo 2 a explicação dada para justificar a estimativa realizada foi denominada de “justificativa”, contudo os dois termos referem-se ao tipo de raciocínio utilizado para resolver as atividades propostas.

resultado confirmado pelo Teste t para amostras pareadas tanto para proporção múltipla (t=-3,525, p<.001) quanto para proporção dupla (t= -5,381, p<.001).Tais resultados revelam que explicar acerca das relações proporcionais com base no uso de estimativas em atividades não-computacionais é mais difícil do que realizar em atividades computacionais.

Quanto ao uso da estratégia/justificativa do Tipo 2 (relação funcional), observa-se que tanto na situação de proporção dupla quanto na proporção múltipla esse raciocínio foi pouco frequente tanto no Estudo 1 (múltipla: 8% e dupla 2%) como no Estudo 2 (múltipla: 4,5% e dupla 0%), não sendo detectadas diferenças significativas quando comparado as duas situações em cada estudo.

Em relação à estratégia/justificativa do Tipo 3 (estabelece relações escalares), como pode ser observado na Tabela 10 tanto na situação de proporção dupla quanto na proporção múltipla esse tipo de estratégia é mais frequente no Estudo 1 (múltipla: 16% e dupla 35%) quando comparado ao Estudo 2 (múltipla: 10% e dupla 29%), sendo detectada diferenças significativas apenas na situação de proporção dupla (t =2,351; p=.021).

Quanto a estratégia/justificativa do Tipo 4 (estabelece relações escalares e funcionais) constata-se que na proporção múltipla os estudantes apresentam percentuais próximos tanto no Estudo 1 (23%) como no Estudo 2 (18%), diferentemente da proporção dupla na qual eles apresentam esse tipo de justificativa apenas no Estudo 1 (9%). Aplicado o teste t foi detectada diferença significativa apenas na proporção dupla (t=4,553; p<.001).

Os resultados encontrados nas analises dos Tipo 3 e Tipo 4 podem ter relação, como já apresentado anteriormente (ver página 62), com os esquemas de ação, correspondência um-para-muitos e muitos-para-muitos, que estão sendo mobilizados em cada tipo de situação ou estes achados podem estar relacionados às configurações de cada situação apresentada direcionando a manipulação das informações seja através de operador escalar ou funcional.

Em síntese a comparação entre os dois estudos constatou que:

a) Ao comparar os dois estudos a partir do desempenho não foram detectados níveis de significância para a situação de proporção dupla, indicando que os estudantes a compreenderam do tipo de atividade solicitada. Contudo, observou-se diferença significativa quanto ao tipo de atividade(computacional ou não-computacional) nas situações de proporção múltipla indicando que a compreensão da situação estaria relacionada ao uso ou não do registro escrito do algoritmo de proporcionalidade.

b) Quanto ao tipo de raciocínio utilizado em cada atividade observou-se um aumento na estratégia/justificativa do Tipo 1 para os dois tipos de situação (proporção múltipla e proporção dupla), indicando que a ausência do registro escrito apresenta efeito significativo na explicitação do raciocínio. Também foi observada diferença significativa, quando se comparam as atividades propostas, quanto ao tipo de situação (proporção dupla ou proporção múltipla) e o tipo de estratégia/justificativa utilizada indicando a existência de características especificas nas situações que direcionam o raciocínio dos estudantes, independente da tarefa solicitada.

Capítulo VI

Conclusões

Primeiramente deve-se constatar que a existência de uma amostra que englobasse tanto estudantes que estavam iniciando o conhecimento formal do conceito de proporcionalidade quanto aqueles que já tiveram acesso a este conhecimento possibilitou compreender as nuances da construção e posterior sedimentação deste conceito. Este fato corrobora com a perspectiva teórica de Pais (2006) acerca da distinção entre o tempo delimitado pelos programas escolares para explicitação de um conteúdo (tempo didático) e o tempo necessário para que o estudante reorganize todas as informações aprendidas e as compreenda formalmente (tempo de aprendizagem).

Para a discussão deste capítulo serão retomados os questionamentos que direcionaram a construção e operacionalização desta investigação.

As situações de proporção dupla e de proporção múltipla apresentam o mesmo grau de dificuldade?

De acordo com as atividades realizadas e os resultados encontrados, observa-se que, em linhas gerais, não foram encontrados dados que possibilitassem uma hierarquização, quanto ao nível de dificuldade, entre as situações de proporção dupla ou proporção múltipla. Verificou-se que no Estudo 1 (atividade computacional) não há diferença significativa entre estes tipos de situações quando são comparadas entre si e entre os anos escolares investigados (7º, 8º e 9º anos), indicando que, em uma atividade que envolva registro escrito, problemas que envolvem proporção dupla e proporção múltipla apresentam níveis equiparáveis de dificuldade.

Contudo, ao se comparar o conjunto de problemas propostos na atividade computacional: Gincana (PD)[10], Carros (PD), Calçada (PM) e Receita (PM), foram detectados, no Teste t para amostras pareadas, diferenças significativas no grupo do 7º ano para os problemas Carros *vs.* Receita (t=-3.071, p=.005) e Calçada *vs*. Receita (t=-2.693,p=.012). Atenta-se que nos dois casos há uma comparação não somente dos tipos de situação (proporção múltipla e proporção dupla), mas dos esquemas de ação de correspondência, visto que,na situação-problema da Receita que apresentava uma relação do tipo um-para-muitos, observou-se melhor desempenho do que as outras duas situações-problema (Carros e Calçada) apresentavam como esquema de ação a correspondência muitos-para-muitos.

Estes achados corroboram com as discussões teóricas e empíricas (Santos, 2015; Magina, Merlini & Santos, 2014; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2005; Correa & Spinillo, 2004) que apontam níveis de complexidade distintos na resolução de problemas que envolvam a correspondência ***um-para-muitos***, em que a relação fixa entre dois pares de grandezas é explicita, sendo que um deles refere-se à unidade; e a correspondência do tipo ***muitos-para-muitos***, na qual a relação fixa entre as duas quantidades está implícita e aponta-se que para obter o resultado, é necessário realizar duas operações, a primeira de divisão para se encontrar a relação fixa um para muitos e a segunda de multiplicação para obter o resultado.

Quanto ao desempenho na atividade não-computacional (Estudo 2), observou-se de modo geral que os estudantes do 7º ano apresentam mais sucesso ao realizar estimativas na

[10] PD se refere à proporção dupla e PM à proporção múltipla

situação de proporção múltipla(um-para-muitos), enquanto que nos 8º e 9º anos observou-se uma melhor compreensão da situação de proporção dupla (muitos-para-muitos). A princípio este resultado poderia sugerir, novamente, uma influência do esquema de correspondência subjacente a cada situação, de forma que o aumento do grau de escolaridade fosse acompanhado de uma melhor desenvoltura ao estabelecer relações desse tipo sem o auxílio do papel e lápis.

Contudo, as médias de desempenho, quando submetidas a testes estatísticos paramétricos, revelaram que não há efeito significativo,do nível de instrução (7º, 8º ou 9º ano)para a situação de proporção dupla. Já na situação de proporção múltipla, foi observada diferença significativa ao se comparar os 7º e 8º anos, em favor do menor nível de instrução, contrastando com a hipótese de que com o aumento da escolaridade, seriam estabelecidos domínio e compreensão das relações proporcionais existentes neste tipo de situação.Uma possível explicação para este achado pode estar relacionada à familiaridade do 7º ano ao contexto da situação proposta, ou seria um reflexo do nível atencional dos estudantes, proporcionando uma compreensão ampla da situação. Outra justificativa a este resultado pode estar referente à incapacidade por parte do grupo do 8º ano de elaborar uma resolução verbal, estimativa, para o problema de proporção múltipla, fato observado na análise das justificativas, descritas mais adiante.

Desta forma, os resultados encontrados nesta investigação apontam para necessidade de novas investigações que manipulem especificamente uma variedade de situações de proporção múltipla em atividade não-computacional considerando as situações um para muitos e muitos para muitos.

Em síntese, é possível concluir que na atividade computacional (Estudo 1), não foram encontradas diferenças significativas quanto ao grau de dificuldade nas situações de proporção dupla e proporção, apresentando-se de forma equiparada na amostra investigada. Este achado vai de encontro ao que é proposto por Gitirana et. al. (2014) quanto a uma hierarquização das situações quanto ao nível de complexidade, apontando as proporções múltiplas como mais complexas do que as proporções duplas, na obra citada estas são denominadas de funções bilineares. Entretanto, na atividade não-computacional (Estudo 2) verificou-se que diferenças significativas na situação de proporção múltipla. Como comentado esse resultado necessita de maiores investigações, pois, nesse estudo foram propostas apenas duas situações e não foi feito o controle dessa variável que parece ter um papel relevante para a compreensão dessas relações.

Que estratégias são mais eficazes para resolução de situações de proporção dupla e proporção múltipla? São as mesmas em ambas as situações?

Quanto à relação entre estratégia/justificativa e o desempenho nas situações de proporção dupla e proporção múltipla, foram encontrados resultados específicos para cada atividade proposta (computacional e não-computacional). Lembrando que foram identificados quatro tipos de estratégias/justificativas: **Tipo 1** (não lembram, não resolveram ou não utilizaram procedimentos de proporcionalidade); **Tipo 2** (resolve ou estima a partir de operadores funcionais); **Tipo 3** (resolve ou estima a partir de operadores escalares); **Tipo 4** (resolve ou estima a partir de operadores funcionais e escalares).

Ao analisar toda a amostra, observa-se que nas situações de **proporção múltipla** as estratégias dos Tipos 2, 3 e 4 apresentaram, dentro dos casos encontrados, índices relevantes de acerto tanto no Estudo 1 (Tipo 2- 78,6%; Tipo 3- 86,2%; Tipo 4- 95,2%) quanto no Estudo 2 (Tipo 2-100%; Tipo 3- 100% e Tipo 4-100%).Diante de tais achados é possível concluir que para realização deste tipo de situação, seja numa atividade computacional ou não computacional, os estudantes lançam mão de esquemas de ação que envolvem tanto operadores escalares como operadores funcionais (Santos, 2015; Vergnaud, 2009; Nunes e Bryant,1997) indicando que existe um leque de possibilidades eficientes para compreensão das relações proporcionais para problemas de proporção múltipla. Ademais, este achado sugere que os problemas de proporção múltipla podem ser favoráveis para o desenvolvimento de um raciocínio proporcional, pois, permitem ao estudante o reconhecimento e a manipulação de todos os tipos de relações existentes dentro de uma situação proporcional, corroborando com a proposta de Sousa (2015), na qual aponta que a construção de um raciocínio proporcional acontece quando o aluno reconhece a semelhança estrutural e a relação entre as grandezas envolvidas.

Na situação de **proporção dupla**, os resultados revelam que no Estudo 1 as estratégias que apresentaram altos percentuais de respostas corretas, dentro dos casos encontrados, foram Tipo 3 (87,5%) e Tipo 4 (94,1%) enquanto que no Estudo 2 a justificativa do Tipo 3 esteve relacionada a 100% de acerto, dentro dos casos encontrados, e a justificativa do Tipo 4 não foi utilizada.Esses resultados chamam a atenção para as diferenças no uso das estratégias quando se tem o apoio do registro escrito (Estudo 1), a resolução envolve o uso de fatores escalares sozinhos ou relacionados a fatores funcionais, contudo, quando não é permitido registrar o procedimento (Estudo 2), observa-se que a estratégia predominante e eficiente esteve relacionada ao uso dos operadores escalares, na qual é feita manipulação das informações a partir das relações dentro dos conjuntos de grandezas(Santos, 2015; Vergnaud, 2011; Nunes e Bryant,1997).Estes achados corroboram com as discussões apresentadas em Gitirana et.al.(2014) e Santos (2015), apontando na direção de que existe uma influência do tipo de situação apresentada e dos esquemas de correspondência subjacentes a cada situação, para a escolha e execução do procedimento a ser utilizado.

As situações de proporção múltipla proporcionaram aos estudantes operarem, com êxito, tanto a partir de relações escalares quanto relações funcionais, e a escolha destas estratégias está relacionada ao fato de que este tipo de situação é constituído a partir da “concatenação” de várias proporções simples, cada uma apresentando relações especificas e necessárias para a compreensão das outras. Ou seja, como a proporção múltipla é caracterizada pelo conjunto de mais de duas proporções simples interligadas entre si, observa-se dependência entre todos os pares de grandeza. Desta forma qualquer alteração no par numérico de alguma das grandezas gera consequência em toda a cadeia, exigindo que sua resolução o sujeito tenha que atentar para todas as relações existentes, podendo-se lançar mão do uso de fatores escalares ou fatores funcionais, a depender do esquema de correspondência estabelecida em cada par de grandeza.

Também foi constatada que na situação de proporção dupla o uso do operador escalar foi massivo e eficientemente utilizado pelos participantes, corroborando com a proposta de Santos (2015), na qual é apontado que a especificidade das relações proporcionais apresentadas nestes tipos de problemas, proporções independentes entre si interligadas pelo produto final, conduz ao estudante a perceber que o produto final refere-se à multiplicação dos operadores escalares dos conjuntos de grandezas independentes pela quantidade apresentada no conjunto do produto final.

Em síntese observa-se que cada tipo de situação apresentada conduziu o estudante a elaborar uma estratégia (ou justificativa para o caso do Estudo 2) específica e distinta, ressaltando assim, a proposta defendida por Vergnaud (ano) de que é a partir da apresentação de uma variedade de situações que torna-se possível obter sucesso no processo de conceituação, pois cada situação exige a interação de vários conceitos, visto que, nesta investigação cada situação proposta exigiu do estudante a compreensão de outros conceitos, tais como o uso de referencial de quantidade (dobro, triplo), uso de multiplicação, sendo este aspecto também defendido por outros autores (Lautert &Spnillo, 2006; Magina,et. al., 2014; Santos, 2015).

Como se configura a compreensão dos estudantes acerca das relações diretamente proporcionais nas situações de proporção dupla e múltipla, ao realizarem atividades com e sem apoio do registro escrito?

Quando se confronta os estudos (Estudo 1 vs. Estudo 2)em relação ao desempenho, não foi detectado nível de significância para a situação de proporção dupla, indicando que os estudantes compreenderam este tipo de situação-problema independente do tipo da atividade solicitada. Contudo, observou-se diferença significativa quanto ao tipo de atividade (computacional ou não-computacional) nas situações de proporção múltipla, indicando que a compreensão da situação estaria relacionada ao uso ou não do registro escrito do algoritmo de proporcionalidade ou de outras formas de representação mobilizadas como, por exemplo,pictórico e a contagem.

Quanto ao tipo de raciocínio utilizado em cada atividade, foi observado que independente da atividade realizada (computacional ou não-computacional) houve uma repetição das estratégias/justificativas do Tipo 4 (uso dos operadores escalares e funcionais concomitantemente) na proporção múltipla e do Tipo 3 (uso de operadores escalares) na proporção dupla indicando a existência de características especificas em cada um que direcionam o raciocínio dos estudantes, independente da atividade solicitada. Sobre esta repetição é possível apontar para uma influência da sequência em que as atividades foram apresentadas, visto que, a realização de estimativas foi apresentada imediatamente após a explicação das estratégias utilizadas na atividade computacional, podendo ter enviesado estes resultados. Acerca desta possível influência encontra-se em Mayer (1992) *apud* Brito (2006) que um dos conhecimentos necessários para solução de problemas refere-se ao "conhecimento de esquema" referente à relação entre problema-tipo, possivelmente despertado pelos estudantes para a realização da atividade não-computacional, ou seja, houve identificação imediata do estudante das semelhanças existentes entre as situações que compunham as duas atividades.

Os resultados revelaram um aumento significativo da estratégia/justificativa do Tipo 1 (não explica como fez o procedimento escrito ou a estimativa) para as duas situações (dupla e múltipla), indicando que a ausência do registro escrito parece influenciar na explicitação do raciocínio. Acerca desta dificuldade encontrada é possível retomar a proposta de Polya (1978) acerca dos estágios para resolução de problemas (ver seção teórica p.14), sugerindo que para os estudantes o fato de não poder executar e verificar a solução dada ao problema (Estudo 2) em contraponto a realização de todos os estágios na atividade computacional (Estudo 1) tenha provocado a diminuição da explicitação ou a não realização da estimativa, provavelmente devido à falta de compreensão da atividade ou insegurança quanto a eficiência do plano elaborado mentalmente.

Estes dados apontam para mesma direção dos estudos realizados por Cruz e Spinillo (2014), Correa e Spinillo (2004), e das discussões teóricas levantadas por Brito (2006) acerca do processo de resolução de problemas matemáticos sem a utilização do registro escrito. Indicando que, o uso da atividade mental permite avaliar se a compreensão do estudante, diante do problema proposto, está relacionada apenas aos cálculos e escolha de algoritmos ou se expande para a compreensão das relações (invariantes) inerentes a cada situação.

De forma geral, observa-se que a compreensão dos estudantes acerca dos problemas apresentados relaciona-se em sua grande maioria ao uso de cálculos, representações pictóricas, fórmulas e algoritmos escritos, enquanto que o conhecimento declarativo apresenta-se com muita fragilidade e insegurança. Isto pode ser apontado como reflexo dos procedimentos utilizados na instituição escolar, os quais valorizam o ensino a partir de algoritmos e planos de solução prontos e adequados para cada tipo de problema (Brito, 2006).

Na realidade, constatou-se o que defende Vergnaud (2003) e outros pesquisadores (Lautert, Spinillo & Queiroz, prelo) chamam atenção, de que na escola precisamos desenvolver tanto a forma operatória do conhecimento (o saber fazer) como a forma predicativa do conhecimento (o saber explicitar as propriedades, os conceitos e a forma como pensamos para resolver uma dada situação).Esse é um dos grandes desafios para a Psicologia da Educação Matemática, em sua tarefa de integrar aspectos psicológicos e educacionais em prol de um efetivo domínio de conhecimento numa área especifica como a Matemática (Spinillo & Lautert, 2006), de forma a propiciar ao aprendiz desenvolver o raciocínio lógico-matemático, expandindo a significação dos conceitos e fazendo-o transitar entre as varias modalidades de conhecimento (escolar e extra-escolar).

Futuras Pesquisas

A seguir apresentam-se algumas sugestões para futuras pesquisas acerca desta temática, de forma a responder alguns questionamentos que surgiram durante análise dos resultados dessa investigação, que não podem ser plenamente respondidos considerando o método implementado ou que podem ampliar a discussão sobre as situações diretamente e inversamente proporcionais. Primeiro, seria interessante estudos que investiguem como se configuram as resoluções e elaborações de estratégias de situações de proporção dupla envolvendo relações inversamente proporcionais, de forma a ampliar as discussões acerca das relações inversas dentro do conceito de proporção. Segundo, averiguar a influência dos esquemas de correspondência um-para-muitos e muito-para-muitos, na comparação de situações de proporção dupla e múltipla, em situações diretamente e/ou inversamente proporcionais, de forma a controlar o efeito desta variável. Terceiro, investigar de forma mais detalhada sobre o uso de estimativas (atividade não-computacional) em situações diretamente e/ou inversamente proporcionais (dupla e múltipla) controlando a variável um para muitos e muitos para muitos, de forma a identificar os tipos de raciocínio encontrados quando não se tem apoio de material escrito, investigando de forma mais sistemática a forma predicativa - o saber explicitar as propriedades, os conceitos e a forma como pensamos para resolver uma dada situação.

Referências

Banks Leite, L. *As interações sociais na perspectiva piagetiana.*Série Idéias, São Paulo, v. 20, p. 41-47, 2000.

Brasil (1998). Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF. Recuperado em 20 de agosto, 2014, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf.

Brito, M.R.F. & Garcia, V.J.N (2001). A psicologia cognitiva e suas aplicações à educação (pp.29-48) In: Brito, M. R. F. (Org). *Psicologia da Educação Matemática-Teoria e Pesquisa.* Florianópolis: Insular.

Brito, M.R.F. (2006). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos (pp.13-54). In: Brito, M.R.F. (Org.). *Solução de Problemas e a Matemática Escolar.* Campinas: Alínea.

Correa, J.; Spinillo, A.G. (2004). O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças (pp. 103-127). In R. M. Pavanello (Org). *Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula.* Coleção SBEM Vol. 2 São Paulo.

Cruz, M.S.S.; Spinillo, A.G. (2014). Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro. *Estudos de Psicologia*, v.19, n. 4, p.241-249

Da Rocha Falcão, J. T. (1999). Contribuições da Psicologia para a didática de conteúdos específicos. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, v.51, n.1, p.75-90.

Da Rocha Falcão, J. T. (2003). *Psicologia da Educação Matemática: Uma introdução*. Belo Horizonte: Autêntica.

Gitirana, V.; Magina, S; Spinillo, A. G. & Campos, T. M. M. (2014). *Repensando Multiplicação e Divisão- Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.* São Paulo: PROEM.

Grau, I. (1997). Cognitive Psychology and its application to Education. Recuperado em 15 de dezembro de 2015. http://129.7.160.115/inst5931/cognitive.psy

Lautert, S.; Spinillo, A. G. (2006). O diálogo entre psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática (pp. 46 – 81). In: L. Meira & A. G. Spinillo (Orgs). *Psicologia cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem.* Recife: Ed. Universitária da UFPE.

Lautert,S.L.; Spinillo, A.G. & Queiroz, T.V., (prelo) Reflexões sobre o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos: a pesquisa-intervenção e a observação em sala de aula(pp.49-64) In: Castro-Filho, J.A. & Maia, D.L.*Matemática, Cultura e Tecnologia: entre perspectivas locais e globais.*Curitiba: CRV.

Levain, J. P. & Vergnaud, G. (1994-1995). Proportionnalité Simple, Proportionnalité Multiple. *Gran*, n. 56, p. 55- 66.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert& M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum &National Council of Teachers of Mathematics.

Magina, S.; Santos, A.& Merlini, V. (2012). A estrutura Multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. *Anais do 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* - 3o SIPEMAT, Fortaleza. v. 1. pp. 1-12.

Magina, S. M. P.; Santos, A. & Merlini, V.L.. (2014). O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. *Ciência & Educação (Bauru)*, *20*(2), 517-533. Recuperado em: 20 de janeiro de 2016. https://dx.doi.org/10.1590/1516-73132014000200016

Magina, S.M.P. (2015). A importância das estruturas multiplicativas para a educação básica: um olhar psicológico. [Apresentação de slides] II Congresso Nacional de

Educação- II CONUDE, João Pessoa. Recuperado em 3 de fevereiro de 2016. http://slideplayer.com.br/slide/8711864/#.

Moro, M.L.F. (2001). Apresentação (pp.15-29). In: Brito, M. R. F. (Org). *Psicologia da Educação Matemática- Teoria e Pesquisa.* Florianópolis: Insular.

Nunes, T. Bryant, P. (1997). Crianças fazendo Matemática. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T.; Campos, T. M. M.; Magina, S.& Bryant, P. (2005). *Educação matemática 1: números e operações numéricas.* São Paulo: Cortez.

Nunes, T.; Carraher, D. & Schliemann, A. (2011). *Na vida dez, na escola zero*. 16ª Ed. São Paulo: Cortez.

Pais, L. C. (2006). *Ensinar e aprender Matemática*. 1ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Polya, G.(1995).*A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. [tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo]. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Interciência

Santos, A. (2015). Formação de professores e as estruturas multiplicativas. 1ª Edição.Curitiba: Appris.

Sousa, F., Palhares, P., & Oliveira, M. L. (2015). Raciocínio proporcional e resolução de problemas em contextos piscatórios portugueses. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(2), 76-104.

Spinillo, A. G. (2002). *O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre ProporçãoPsicologia: Reflexão e Crítica, 2002, 15(3), pp. 475-487.*

Spinillo, A.G. & Lautert, S.L. (2013) As contribuições da psicologia cognitiva para a psicologia da educação matemática (pp.205-232). In: Borba, R.E.S.R & Monteiro, C.E.F. (Orgs.) *Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática* .Recife: Ed. Universitária da UFPE.

Stremel, J. D. (2013). *Proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais.* Trabalho de conclusão de Curso do Departamentode Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre. Recuperado em 30 de setembro de 2015: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/93398/000914206.pdf?sequence=1.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.). *Acquisitions of mathematics concepts and procedures* (pp.127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988).Structures Multiplicatives. In H. Hiebert&M.Behr (Eds). *Reseach Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in Middle Grades*. (pp. 141-161) Laurence ErlbaumEd.Hillsdale. 17

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática *Educar em Revista.* Curitiba, Brasil, nº. Especial 1, 15-27.Editora UFPR.

Apêndices

Apêndice A- Termo de Consentimento Livre Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS - Resolução 466/12)

Solicitamos a sua autorização para convidar o (a) seu/sua filho (a) para participar, como voluntário (a), da pesquisa: *Compreensão sobre os conceitos de função bilinear e múltipla em estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio*. Esta pesquisa é da responsabilidade da pesquisadora Sintria Labres Lautert, CPF 400.657.31034, residente na Rua Charles Darwin 183, apto 801, CEP: 51021-520, Boa Viagem, Recife – Pernambuco. Telefone: (81) 26268272 – ramal zero; celular: (81) 99159504; email: sintrialautert@gmail.com. Os pais e/ou participante poderão entrar em contato com a pesquisadora por quaisquer destes endereços, inclusive para ligações a cobrar. Também participa dessa pesquisa a estudante de mestrado em Psicologia Cognitiva, Anna Barbara Barros Leite, CPF 013437339446, email: anna.barbara.leite@hotmail.com; telefones (81) 3452177 ou (81) 99105689, sob orientação da responsável pela pesquisa Sintria Labres Lautert, cujos endereços estão acima mencionados.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde que o (a) menor faça parte do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Caso não concorde não haverá penalização nem para o (a) Sr.(a) nem para o/a voluntário/a que está sob sua responsabilidade, bem como será possível ao/a Sr. (a) retirar o consentimento a qualquer momento, também sem qualquer penalidade.

O presente estudo tem por objetivo investigar a compreensão de estudantes do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental II e do 1º ao 3º ano do Ensino Médio sobre problemas de função bilinear (proporção dupla) e de problemas de proporção múltipla. De forma especifica, busca-se (i) investigar o desempenho e as estratégias adotadas para a resolução das duassituações problemas investigadas; (ii) analisar se existem e diferenças quanto ao desempenho e as estratégias adotadas em relação as duas situações problemas envolvendo proporção considerando os anos investigados; (iii) verificar se a ordem de apresentação das situações problemas (função bilinear e proporção múltipla) podem propiciar um melhor desempenho nos diferentes anos investigados e (iv) analisar o efeito de novas representações no desempenho dos estudantes. A pesquisa será realizada em dois momentos no primeiro momento os estudantes serão solicitados a resolver quatro problemas (aplicação coletiva) e em um segundo momento os estudantes serão solicitados a explicar as formas de resolução adotadas, em uma entrevista individual. Estas atividades serão realizadas nas dependências do Colégio de Aplicação nas datas a serem acordadas com a instituição, a serem realizadas no primeiro e segundo semestre de 2015.

O *risco* psicológico que poderá acontecer é, por exemplo, o constrangimento, no entanto o pesquisador deverá ter cuidado para que isso não ocorra, mas caso o estudante não se sinta à vontade para continuar realizando os problemas ou de explicar atividade por ele realizada, o mesmo poderá sair da pesquisa a qualquer momento. Sabe-se que os *benefícios* trazidos por esse estudo serão superiores, uma vez que poderá contribuir para a compreensão das dificuldades que os estudantes enfrentam na resolução dos problemas de função bilinear (proporção dupla) e de problemas de proporção múltipla, bem como melhorar a compreensão do estudante frente a esses conceitos.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (entrevista - protocolo contendo os esclarecimentos sobre as formas de resolução de problemas matemáticos adotadas pelos participantes no estudo), ficarão armazenados em pastas de arquivo, sob a responsabilidade de Sintria Labres Lautert, no endereço: Universidade Federal de Pernambuco - Centro de Filosofia e Ciências Humanas - CFCH – 8º andar – Núcleo de Pesquisa em Psicologia da educação Matemática – NUPPEM – Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, pelo período de mínimo 5 anos.

O (a) senhor (a) não pagará nada e nem receberá nenhum pagamento para ele/ela participar desta pesquisa, pois deve ser de forma voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação dele/a na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento com transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

__________________________ Pesquisadora responsável pela pesquisa - UFPE- PPG Psicologia Cognitiva. Telefonefixo: (81) 26268272 Celular: (81) 99159504	__________________________ Estudante de mestrado PPG Psicologia Cognitiva sob orientação da pesquisadora responsável -UFPE Telefone fixo: (81) 3452177 Celular: (81) 99105689

CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO/A VOLUNTÁRIO

Eu, ____, CPF_________________, abaixo assinado, responsável por ____, autorizo a sua participação no estudo *Compreensão sobre os conceitos de função bilinear e múltipla em estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio,*como voluntário(a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele (a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de seu acompanhamento/ assistência/tratamento) para mim ou para o (a) menor em questão.

Local e data ___________________

Assinatura do (da) responsável: ___________________________

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar.

Testemunha 1:

Nome: ____

Assinatura: ____

Testemunha 2:

Nome: ____

Assinatura: ____

Apêndice B- Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA MENORES DE 12 a 18 ANOS - Resolução 466/12)

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais] para participar como voluntário (a) da pesquisa: *Compreensão sobre os conceitos de função bilinear e múltipla em estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio*. Esta pesquisa é da responsabilidade da pesquisadora Sintria Labres Lautert, CPF 400.657.31034, residente na Rua Charles Darwin 183, apto 801, CEP: 51021-520, Boa Viagem, Recife – Pernambuco. Telefone: (81) 26268272 – ramal zero; celular: (81) 99159504; email: sintrialautert@gmail.com. O participante poderá entrar em contato com a pesquisado por quaisquer destes endereços, inclusive para ligações a cobrar. Também participa dessa pesquisa a estudante de mestrado em Psicologia Cognitiva, Anna Barbara Barros Leite, CPF 013437339446, email: anna.barbara.leite@hotmail.com; telefones (81) 3452177 ou (81) 99105689, sob orientação da responsável pela pesquisa Sintria Labres Lautert, cujos endereços estão acima mencionados.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados e concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue para que seus pais ou responsável possam guarda-la e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida e estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

O presente estudo tem por objetivo investigar a compreensão de estudantes do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental II e do 1º ao 3º ano do Ensino Médio sobre problemas de função bilinear (proporção dupla) e de problemas de proporção múltipla. De forma especifica, busca-se (i) investigar o desempenho e as estratégias adotadas para a resolução das duassituações problemas investigadas; (ii) analisar se existem e diferenças quanto ao desempenho e as estratégias adotadas em relação as duas situações problemas envolvendo proporção considerando os anos investigados; (iii) verificar se a ordem de apresentação das situações problemas (função bilineare proporção múltipla) podem propiciar ummelhor desempenho nos diferentes anos investigados e (iv) analisar o efeito de novas representações no desempenho dos estudantes. A pesquisa será realizada em dois momentos no primeiro momento os estudantes serão solicitados a resolver quatro problemas (aplicação coletiva) e em um segundo momento os estudantes serão solicitados a explicar as formas de resolução adotadas, em uma entrevista individual. Estas atividades serão realizadas nas dependências do Colégio de Aplicação nas datas a serem acordadas com a instituição, a serem realizadas no primeiro e segundo semestre de 2015.

O *risco* psicológico que poderá acontecer é, por exemplo, o constrangimento, no entanto o pesquisador deverá ter cuidado para que isso não ocorra, mas caso o estudante não se sinta à vontade para continuar realizando os problemas ou de explicar atividade por ele realizada, o mesmo poderá sair da pesquisa a qualquer momento. Sabe-se que os *benefícios* trazidos por esse estudo serão superiores, uma vez que poderá contribuir para a compreensão das dificuldades que os estudantes enfrentam na resolução dos problemas de função bilinear (proporção dupla) e de problemas de proporção múltipla, bem como melhorar a compreensão do estudante frente a esses conceitos

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (entrevista - protocolo contendo os esclarecimentos sobre as formas de resolução de problemas matemáticos adotadas pelos participantes no estudo), ficarão armazenados em pastas de arquivo, sob a responsabilidade de Sintria Labres Lautert, no endereço: Universidade Federal de Pernambuco - Centro de Filosofia e Ciências Humanas - CFCH – 8º andar – Núcleo de Pesquisa em Psicologia da educação Matemática – NUPPEM – Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, pelo período de mínimo 5 anos.

Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE que está no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 -**

Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).

______________________________	______________________________
Pesquisadora responsável pela pesquisa - UFPE- PPG Psicologia Cognitiva. Telefonefixo: (81) 26268272 Celular: (81) 99159504	Estudante de mestrado PPG Psicologia Cognitiva sob orientação da pesquisadora responsável -UFPE Telefone fixo: (81) 3452177 Celular: (81) 99105689

ASSENTIMENTO DO(DA) MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO(A)

Eu, ____, portador (a) do documento de Identidade _____________________ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo *Compreensão sobre os conceitos de função bilinear e múltipla em estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio*,como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Local e data ___________________

Assinatura do (da) menor : ____________________________

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar.

Testemunha 1:
Nome: ____
Assinatura: ____

Testemunha 2:
Nome: ____
Assinatura: ____

Apêndice C- Modelos do instrumento para atividade computacional

- **Ordem A**

Nome:	**Data:**
Data de Nascimento: **Ano:**	

Problema 1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

Problema 2: Na fábrica de automóveis FabriCar, a produção é acompanhada através da contagem dos carros produzidos. Observou-se que 2 operários trabalhando 8 dias seguidos conseguem montar 4 carros. Quantos carros serão produzidos por 6 operários que trabalham em 16 dias?

Problema 3: Para preparar uma calçada o pedreiro Seu José utiliza para cada 3 baldes de cimento 6 baldes de areia e para cada 2 baldes de areia são necessários 4 baldes de água. Quando recebeu o material percebeu que havia 6 baldes de cimento. Desta forma quantos baldes de água Seu José precisará para fazer a massa do mesmo jeito?

Problema 4: Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite?

Ordem B

Nome: **Data:** **Data de Nascimento:** **Ano:**	
Problema 1: Para preparar uma calçada o pedreiro Seu José utiliza para cada 3 baldes de cimento 6 baldes de areia e para cada 2 baldes de areia são necessários 4 baldes de água. Quando recebeu o material percebeu que havia 6 baldes de cimento. Desta forma quantos baldes de água Seu José precisará para fazer a massa do mesmo jeito?	
Problema 2: Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite?	
Problema 3: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?	

Problema 4: Na fábrica de automóveis FabriCar, a produção é acompanhada através da contagem dos carros produzidos. Observou-se que 2 operários trabalhando 8 dias seguidos conseguem montar 4 carros. Quantos carros serão produzidos por 6 operários que trabalham em 16 dias?

Apêndice D- Modelo do instrumento utilizado na Atividade não-computacional

Nome:	**Data:**
Problema 1: Eduarda quer fazer um bolo de chocolate. Na receita diz que pra cada ovo ela utilizará 3 xícaras de trigo, e a cada 2 ovos é preciso colocar 1 copo de leite. Eduarda tem 2 copos de leite na geladeira e vai procurar os outros ingredientes. Se compararmos com a receita de Marina, você acha que Eduarda precisará da mesma quantidade de xícaras de trigo, mais xícaras de trigo ou menos xícaras de trigo? Por quê? Explique sua resposta.	

Problema 2: A turma do 6º ano, da mesma escola, também participa da gincana. Nesta turma, um grupo de 12 alunos se organizou e conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos no período de 7 dias. Se esse grupo fosse composto por 36 estudantes que trabalhassem durante 14 dias. O que você acha que acontece com a arrecadação de alimentos da turma do 6º ano em relação ao que foi arrecadado pelo 5º ano. Eles arrecadaram a mesma quantidade, arrecadaram mais alimentos ou arrecadaram menos alimentos. Por quê?