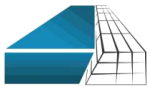


Laboratório de Métodos Computacionais em Geomecânica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

NAYARA TORRES BELFORT ACIOLI

ANÁLISE NUMÉRICA DE ESCAVAÇÃO EM ROCHAS SALINAS COM POSSIBILIDADE DE REATIVAÇÃO DE FALHAS VIA TÉCNICA DE DESCONTINUIDADES FORTES

RECIFE, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

NAYARA TORRES BELFORT ACIOLI

ANÁLISE NUMÉRICA DE ESCAVAÇÃO EM ROCHAS SALINAS COM POSSIBILIDADE DE REATIVAÇÃO DE FALHAS VIA TÉCNICA DE DESCONTINUIDADES FORTES

Dissertação submetida ao Programa de pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte integrante dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenheira Civil

Orientador: D.Sc. Leonardo José do Nascimento Guimarães
Coorientador: D.Sc. Igor Fernandes Gomes

RECIFE, 2017

Catalogação na fonte
Bibliotecária Valdicéa Alves, CRB-4 / 1260

A181a Acioli, Nayara Torres Belfort.
Análise numérica de escavação em rochas salinas com possibilidade de reativação de falhas via técnica de descontinuidades fortes/ Nayara Torres Belfort Acioli - 2017.
146folhas, Il.; Tab.; e Simb.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães.
Coorientador: Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.
Inclui Referências.

1. Engenharia Civil. 2. Evaporitos. 3. Fluência. 4. IMPLEX. 5. Elementos finitos. 6. Descontinuidades fortes. 7. Reativação de falhas. I. Guimarães, Leonardo José do Nascimento. (Orientador). II. Gomes, Igor Fernandes (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.) BCTG/2017-123

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

ANÁLISE NUMÉRICA DE ESCAVAÇÃO EM ROCHAS SALINAS COM POSSIBILIDADE DE REATIVAÇÃO DE FALHAS VIA TÉCNICA DE DESCONTINUIDADES FORTES

defendida por

Nayara Torres Belfort Acioli

Considera a candidata APROVADA

Recife, 13 de março de 2017

Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães – Orientador - UFPE
Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes – Coorientador - UFPE

Banca Examinadora:

_____
Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães – UFPE
(orientador)

_____
Prof.ª Dr.ª Analice França Lima Amorim – UFPE
(examinadora externa)

_____
Prof.ª Dr.ª Lícia Mouta da Costa– UFPE
(examinadora externa)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que me deu saúde, paz e coragem para seguir meu caminho.

Agradeço ao meu orientador, Leonardo Guimarães, com seu exemplo e postura profissional admiráveis, que me aceitou no grupo LMCG, me deu segurança, me abriu as portas, me mostrou caminhos e que me deu suporte profissional e financeiro para realizar minha pesquisa.

Agradeço ao meu Coorientador, Igor Gomes, que me ensinou com sua simplicidade e inteligência como ser criativa para resolução de problemas e flexível a aceitar opiniões com sua postura profissional e humor sempre solícito e paciente para ensinar e tentar novos caminhos na pesquisa.

Agradeço aos meus familiares que sempre estiveram próximos nessa jornada, me dando apoio em tudo que precisei, nas horas boas e ruins, são vocês que são meu porto seguro.

Aos meus amigos e companheiros de trabalho que contribuíram com a minha evolução como pessoa e como profissional durante nossas conversa e reuniões. Em especial a Washington Moura, Ana Itamara, Lady Laura, Daniela Santos, Katia Botelho, Leila Beserra e Jonathan Teixeira que me deram total apoio quando precisei.

À equipe administrativa que com toda simpatia e eficiência me mostraram os caminhos e as soluções de tantos problemas que levei. Em especial Priscila Gameiro, Rose Mary, Andrea Negromonte, Cleide e Claudiana.

Não poderia esquecer de Vânia, que com sua amizade e com seus milagrosos cafezinhos me deu garra de continuar esperta na batalha.

Por fim, agradeço também à FACEPE pelo apoio financeiro durante todo o mestrado e à Fundação CMG pelo apoio financeiro que recebi durante a pesquisa.

RESUMO

Os geomateriais quando submetidos a variações no estado de tensões tendem a apresentar um comportamento tensão deformação inelástico que pode se mostrar complexo, envolvendo processos de fluência, com endurecimento ou abrandamento podendo levar à ruptura. No processo de escavação de evaporitos submetidos a tensão constante ocorre o fenômeno de fluência que pode influenciar o comportamento de rochas adjacentes. Com o objetivo de prever esse comportamento vêm sendo desenvolvidos modelos constitutivos e formulações numéricas os quais são empregados em modelagem computacional através de métodos aproximados como, por exemplo, o método dos elementos finitos. Nesse trabalho foi avaliada a influência das deformações de rochas evaporíticas sobre rochas adjacentes naturalmente fraturadas. Para isso, na modelagem numérica, adotou-se nas rochas salinas o modelo de fluência (*creep*) LUBBY 2, e para as descontinuidades da rocha considerou-se um modelo elasto-plástico de Drucker-Prager aliado a uma técnica de descontinuidades fortes embebidas. O objetivo é verificar a reativação da descontinuidade em decorrência das deformações da rocha salina como consequência da escavação de galerias para extração de minérios. Para isso, neste trabalho, foi validada e aplicada uma técnica de simplificação do algoritmo de integração de tensões implícita para o IMPLEX no programa em elementos finitos *in house* CODE-BRIGHT. Esse algoritmo tem a inovação de utilizar as relações constitutivas do passo de tempo anterior para calcular o multiplicador plástico do passo de tempo atual, dessa forma ganhando eficiência computacional, mas podendo perder em precisão, seguindo com o cálculo implícito das relações constitutivas do passo de tempo atual. A fim de validar o algoritmo IMPLEX e avaliar a sensibilidade ao incremento de tempo e à tolerância associada ao mesmo foi modelado o caso de Expansão de cavidade, que mostrou a conformidade entre a solução numérica e a solução analítica com cerca de 1% de erro relativo. Também foi avaliada a sensibilidade do algoritmo à estrutura da malha de elementos finitos discretizada com o caso de Cisalhamento Direto no qual se observou uma limitação no algoritmo em função do alinhamento dos elementos da descontinuidade. Para analisar a sensibilidade do algoritmo à direção da descontinuidade embebida foi simulado o caso de Compressão Uniaxial. E para confirmar a sensibilidade do algoritmo à tolerância associada ao incremento de tempo, foi realizado o caso de Estabilidade de Talude, no qual se verificou o padrão na escolha da tolerância. Por fim, o caso principal desse trabalho que é a análise do comportamento de uma descontinuidade existente em um 8cenário fictício de uma escavação de minas em rochas evaporíticas (análogas às rochas da Mina Taquari Vassouras localizada no estado de Sergipe, Brasil) a grandes profundidades (1.200 metros) demonstra a possibilidade de reativação de falhas por cisalhamento em dois cenários, uma frente de escavação e uma escavação de uma mina em galeria. Nesses casos foi observado que a geometria da escavação e o posicionamento da falha possuem influência na sua reativação, quanto maior o vão da escavação mais rápida é reativada a falha e quanto mais a escavação avança na direção da falha, mais as tensões são transmitidas de modo que um menor estado de tensão já permite reativar a falha.

Palavras-chave: Evaporitos. Fluência. IMPLEX. Elementos finitos. Descontinuidades Fortes. Druker-Prager. Reativação de Falhas.

ABSTRACT

The geomaterials when subjected to variations in the state of stresses tend to present an inelastic strain behavior that may be complex, involving creep processes, with hardening or softening and rupture may happen. Digging evaporites under constant tension occurs the creep phenomenon that can influence the behavior of adjacent rocks. In order to predict this behavior, constitutive models and numerical formulations have been develop to be used in computational modeling through approximate methods such as the finite element method. In this work the influence of the evaporitic rocks deformation on naturally fractured rocks was evaluated. For this purpose, in the numerical modeling, the LUBBY 2 creep model was adopted in the saline rocks, and for discontinuities a Drucker-Prager elastoplastic model was considered, together with a strong embedded discontinuity technique. The objective is to verify the reactivation of the discontinuity due to the deformations of the salt rock as a consequence of the excavation of galleries for extraction of ores. In this work, a simplification technique of the implicit stress integration algorithm for IMPLEX in the in-house CODE-BRIGHT finite element program was validated and applied. This algorithm has the innovation of using the constitutive relations of the previous time step to calculate the plastic multiplier of the current time step, therefore reaching computational efficiency but being able to lose in precision, following with the implicit calculation of the constitutive relations of the time step current. In order to validate the IMPLEX algorithm and evaluate the sensitivity regarding the time increment and the associated tolerance, the Cavity Expansion case was modeled, which showed the conformity between the numerical solution and the analytical solution with about 1% relative error. It was also evaluated the sensitivity of the algorithm regarding the finite element mesh structure with the case of Direct Shear in which a limitation was observed as a function of the elements alignment of the discontinuity. To analyze the sensitivity of the algorithm about the embedded discontinuity direction, the case of Uniaxial Compression was simulated. And in order to confirm the sensitivity of the algorithm to the tolerance associated to the increment of time, the case of Slope Stability was carried out, in which the standard in choice of tolerance was verified. Finally, the main case of this work is the analysis of the behavior of a discontinuity existing in a fictitious scenario of a mine excavation in evaporitic rocks (analogous to the rocks of the Taquari Vassouras Mine located in the state of Sergipe, Brazil) in high depths (1,200 meters) demonstrates the possibility of reactivation of shear failures in two scenarios, an excavation front and an excavation of a gallery mine. In these cases, it was observed that the geometry of the excavation and the positioning of the fault have an influence on its reactivation, the larger the interspace the faster fault is reactivated and the more excavation advances towards the failure, the more tensions are transmitted, thereby lower tensions already allows the fault reactivation.

Keywords: Evaporites. Creep. IMPLEX. Finite elements. Strong Discontinuities. Drucker-Prager. Fault Reactivation.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – EVOLUÇÃO DAS DEFORMAÇÕES COM O INCREMENTO DAS TENSÕES. 24

FIGURA 2 – REPRESENTAÇÃO DE UM ENSAIO DE FLUÊNCIA E OS TRÊS ESTÁGIOS DO COMPORTAMENTO DE TÍPICO DE UMA CURVA DE FLUÊNCIA 27

FIGURA 3 – GRÁFICO DA EVOLUÇÃO DAS DEFORMAÇÕES COM O INCREMENTO DAS TENSÕES. 32

FIGURA 4 – TENSÕES PLASTICAMENTE ADMISSÍVEIS. 34

FIGURA 5 – CRITÉRIO DE PLASTIFICAÇÃO – ESPAÇO DE TENSÕES ADMISSÍVEIS. 34

FIGURA 6 – ENDURECIMENTO E DECOMPOSIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS E PLÁSTICAS. 38

FIGURA 7 – SUPERFÍCIE DE FLUÊNCIA DE DRUKER-PRAGER. 40

FIGURA 8 – ESQUEMA DE RETORNO AO VÉRTICE 42

FIGURA 9 – SÓLIDO COM DESCONTINUIDADES INCORPORADAS. 57

FIGURA 10 – SALTO DE DESLOCAMENTOS E DIREÇÃO DA NORMAL NA DESCONTINUIDADE INCORPORADA. 58

FIGURA 11 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA CAVIDADE CILÍNDRICA. 68

FIGURA 12 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS. 69

FIGURA 13 – RELAÇÃO CARGA X DESLOCAMENTO 70

FIGURA 14 – POROSIDADE E DEFORMAÇÃO PLÁSTICA DO MODELO COM INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA. 71

FIGURA 15 – POROSIDADE E DEFORMAÇÃO PLÁSTICA DO MODELO COM INTEGRAÇÃO IMPLEX 71

FIGURA 16 - EVOLUÇÃO DO PASSO DE TEMPO 73

FIGURA 17 – ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER 73

FIGURA 18 – TENSÃO X DEFORMAÇÃO 74

FIGURA 19 – TENSÃO DESVIADORA X TEMPO 75

FIGURA 20 – FORÇA X DEFORMAÇÃO PARA TOLERÂNCIAS VARIADAS, COM INCREMENTO DE TEMPO INICIAL DE 1E-00 76

FIGURA 21 – EVOLUÇÃO DA TENSÃO DESVIADORA COM O TEMPO PARA TOLERÂNCIAS VARIADAS, COM INCREMENTO DE TEMPO INICIAL DE 1E-00 77

FIGURA 22 – EVOLUÇÃO DO DTIME COM O TEMPO PARA TOLERÂNCIAS VARIADAS, COM INCREMENTO DE TEMPO INICIAL DE 1E-00 77

FIGURA 23 – ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER COM TOLERÂNCIAS VARIADAS COM DTIME 1E-00.....78
FIGURA 24 – FORÇA X DEFORMAÇÃO PARA TOLERÂNCIAS VARIADAS, COM INCREMENTO DE TEMPO INICIAL DE 1E-02 79
FIGURA 25 – EVOLUÇÃO DO INCREMENTO DE TEMPO COM O TEMPO PARA TOLERÂNCIAS VARIADAS, COM INCREMENTO DE TEMPO INICIAL DE 1E-02.....80
FIGURA 26 – EVOLUÇÃO DO ESTADO DE TENSÃO DESVIADORA COM O TEMPO PARA TOLERÂNCIAS VARIADAS, COM INCREMENTO DE TEMPO INICIAL DE 1E-02....81
FIGURA 27 –ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER PARA TOLERÂNCIAS VARIADAS, COM INCREMENTO DE TEMPO INICIAL DE 1E-02.....81
FIGURA 28 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS E CONDIÇÕES DE CONTORNO.....86
FIGURA 29 – CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SEGUNDA ETAPA DE DESLOCAMENTO PRESCRITO. 87
FIGURA 30 – CAMPOS DOS DESLOCAMENTOS 87
FIGURA 31 – CAMPOS DAS TENSÕES 88
FIGURA 32 – POROSIDADE 88
FIGURA 33 - ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER 89
FIGURA 34 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS E DIREÇÃO DA DESCONTINUIDADE 90
FIGURA 35 – CAMPOS DOS DESLOCAMENTOS E POROSIDADE 90
FIGURA 36 – CAMPOS DAS TENSÕES 90
FIGURA 37 – GRÁFICO COMPARATIVO DAS TENSÕES AO LONGO DA AMOSTRA EM CORTE VERTICAL PARA A MALHA ESTRUTURADA E PARA A MALHA NÃO-ESTRUTURADA. 91
FIGURA 38 - ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER PARA O ELEMENTO 120 DA MALHA ESTRUTURADA E PARA O ELEMENTO 124 DA MALHA NÃO ESTRUTURADA....92
FIGURA 39 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA UNIAXIAL.....94
FIGURA 40 – (A) PROPRIEDADES DO MATERIAL, (B) CONDIÇÕES DE CONTORNO E (C) O DIREÇÃO DA DESCONTINUIDADE EMBEBIDA E ELEMENTOS ANALISADOS. (FONTE: AUTORA).....94
FIGURA 41 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS, ESCALA DEFORMADA EM 24X. 95
FIGURA 42 – CAMPO DAS TENSÕES 95
FIGURA 43 – TRAJETÓRIA DAS TENSÕES E ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER 96
FIGURA 44 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS PARA DESCONTINUIDADE A 30°, 40º E 45º ...97

FIGURA 45 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS PARA DESCONTINUIDADE A 50°, 55º E 60º ... 97
FIGURA 46 – TENSÃO DESVIADORA X TEMPO ... 98
FIGURA 47 – DEFORMAÇÃO PLÁSTICA X TEMPO ... 98
FIGURA 48 – INCREMENTO DE TEMPO X TEMPO ... 99
FIGURA 49 – ENVOLTÓRIA DE RUPTURA DE DRUKER-PRAGER ... 99
FIGURA 50 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA ESTABILIDADE DE TALUDE. ... 100
FIGURA 51 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA ALTURA CRÍTICA DE TERZAGHI ... 101
FIGURA 52 - CONDIÇÕES DE CONTORNO E GEOMETRIA DO PROBLEMA ... 102
FIGURA 53 - DIREÇÃO DA DESCONTINUIDADE EMBEBIDA E NÓS AVALIADOS. ... 103
FIGURA 54 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS (MPA) ... 103
FIGURA 55 – CAMPO DAS TENSÕES HORIZONTAIS (MPA) ... 104
FIGURA 56 – CAMPO DAS TENSÕES DESVIADORAS (MPA) ... 104
FIGURA 57 – ABERTURA DE FRATURA EM METROS ... 104
FIGURA 58 – RECALQUE NA SUPERFÍCIE DO TERRENO EM METROS ... 105
FIGURA 59 – POROSIDADE X ALTURA CRÍTICA ... 106
FIGURA 60 – ENVOLTÓRIA DE RUPTURA DE DRUKER-PRAGER ... 106
FIGURA 61 – POROSIDADE X FATOR DE GRAVIDADE (FG) ... 107
FIGURA 62 - CONDIÇÕES DE CONTORNO E GEOMETRIA DO PROBLEMA ... 108
FIGURA 63- DESCONTINUIDADE EMBEBIDA, EM AZUL, E NÓS AVALIADOS. ... 109
FIGURA 64 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS (MPA) ... 109
FIGURA 65 – CAMPO DAS TENSÕES DESVIADORAS (MPA) ... 110
FIGURA 66 – CAMPO DAS TENSÕES HORIZONTAIS (MPA) ... 110
FIGURA 67 – ABERTURA DE FRATURA EM METROS ... 110
FIGURA 68 – RECALQUE NA SUPERFÍCIE DO TERRENO EM METROS ... 111
FIGURA 69 – POROSIDADE X ALTURA CRÍTICA ... 112
FIGURA 70 – ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER ... 112
FIGURA 71 – POROSIDADE X FATOR DE GRAVIDADE (FG) ... 113
FIGURA 72 - GEOMETRIA DO PROBLEMA ... 117
FIGURA 73 - CONDIÇÕES DE CONTORNO, NÓS (PRETO) E ELEMENTOS (VERMELHO) AVALIADOS. ... 118
FIGURA 74 – GRÁFICO COM AS TENSÕES VERTICAIS EM CORTE ANTES DA ESCAVAÇÃO 118
FIGURA 75 – CONVERGÊNCIA NA ESCAVAÇÃO ... 119
FIGURA 76 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS (M) ... 120

FIGURA 77 – SUBSIDÊNCIA (M) DO TERRENO. V 120
FIGURA 78 – COMPACTAÇÃO (M) DA ESCAVAÇÃO NA CAMADA DE CARNALITA. 121
FIGURA 79 – TENSÕES VERTICAIS (MPA) 121
FIGURA 80 – TENSÕES CISALHANTES (MPA) 122
FIGURA 81 – TENSÕES DESVIADORAS (MPA) 122
FIGURA 82 – TENSÕES VERTICAIS (MPA) 123
FIGURA 83 – TENSÕES CISALHANTES (MPA) 123
FIGURA 84 - CONDIÇÕES DE CONTORNO E GEOMETRIA DO PROBLEMA 124
FIGURA 85 - CONDIÇÕES DE CONTORNO, NÓS (PRETO) E ELEMENTOS (VERMELHO) AVALIADOS. 125
FIGURA 86 – CONVERGÊNCIA NAS ESCAVAÇÕES 125
FIGURA 87 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS (M). 126
FIGURA 88 – SUBSIDÊNCIA (M) DO TERRENO. 126
FIGURA 89 – COMPACTAÇÃO (M) DA ESCAVAÇÃO NA CAMADA DE CARNALITA. 127
FIGURA 90 – TENSÕES VERTICAIS (MPA) 127
FIGURA 91 – TENSÕES CISALHANTES (MPA) 128
FIGURA 92 – TENSÕES DESVIADORAS (MPA) 128
FIGURA 93 – TENSÃO VERTICAL ENTRE AS ESCAVAÇÕES. 129
FIGURA 94 – TENSÃO VERTICAL NA ROCHA ADJACENTE. 129
FIGURA 95 – TENSÃO CISALHANTE NA ROCHA ADJACENTE. 130
FIGURA 96 - CONDIÇÕES DE CONTORNO E GEOMETRIA DO PROBLEMA 131
FIGURA 97 – CONVERGÊNCIA NAS ESCAVAÇÕES 132
FIGURA 98 – CAMPO DOS DESLOCAMENTOS (M). 132
FIGURA 99 – SUBSIDÊNCIA (M) DO TERRENO. 133
FIGURA 100 – COMPACTAÇÃO (M) DA ESCAVAÇÃO NA CAMADA DE CARNALITA. 133
FIGURA 101 – TENSÕES VERTICAIS (MPA) 134
FIGURA 102 – TENSÕES CISALHANTES (MPA) 134
FIGURA 103 – TENSÕES DESVIADORAS (MPA) 135
FIGURA 104 – TENSÃO VERTICAL ENTRE AS ESCAVAÇÕES. 135
FIGURA 105 – TENSÃO VERTICAL NA ROCHA ADJACENTE. 136
FIGURA 106 – TENSÃO CISALHANTE NA ROCHA ADJACENTE. 136
FIGURA 107 – TENSÃO CISALHANTE NA ROCHA ADJACENTE. 137

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – PROPRIEDADES DO MATERIAL. 69
TABELA 2 – ERROS OBTIDOS NA ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER COM TOLERÂNCIAS VARIADAS PARA DTIME 1E-00 82
TABELA 3 – ERROS OBTIDOS NA ENVOLTÓRIA DE DRUKER-PRAGER COM TOLERÂNCIAS VARIADAS PARA DTIME 1E-02 82
TABELA 4 – EFICIÊNCIA DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE EXPANSÃO DE CAVIDADE COM TOLERÂNCIAS VARIADAS PARA DTIME 1E-00 83
TABELA 5 – EFICIÊNCIA DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE EXPANSÃO DE CAVIDADE COM TOLERÂNCIAS VARIADAS PARA DTIME 1E-02 83
TABELA 6 – EFICIÊNCIA DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE EXPANSÃO DE CAVIDADE COM TOLERÂNCIAS VARIADAS PARA DTIME 1E-00 83
TABELA 7 – EFICIÊNCIA DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE EXPANSÃO DE CAVIDADE COM TOLERÂNCIAS VARIADAS PARA DTIME 1E-02 84
TABELA 8 – PROPRIEDADES DO MATERIAL. 85
TABELA 9 – PROPRIEDADES DO MATERIAL 102
TABELA 10 – EFICIÊNCIA DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE TALUDE PARA MALHA NÃO-ESTRUTURADA 107
TABELA 11 – EFICIÊNCIA DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE TALUDE PARA MALHA ESTRUTURADA 113
TABELA 12 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS 116

LISTA DE SÍMBOLOS

e	Índice de vazios
Vv	Volume de vazios (m³)
Vt	Volume total (m³)
ϕ	Ângulo de atrito (°)
u	Deslocamento (m)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Deformação (%)
σ	Tensão (MPa)
b	Forças de corpo (MPa)
$\dot{\varepsilon}$	Taxa de deformação (%s^{-1})
Q	Energia de ativação adotada
R	Constante universal dos gases (kcal/mol/K)
T	Temperatura (°C)
M	Operador desviador
ρ	Tensão média (MPa)
$\mathbf{I}$	Tensor Identidade
$\mathbf{S}$	Tensor Desviador
J	Tensão desviadora (MPa)
$\mathbf{D}$	Matriz constitutiva
k	Parâmetro de estado

F	Função de fluência
h	Parâmetro de estado (MPa)
A	Constante do comportamento plástico
λ	Multiplicador plástico
f	Função de fluência (MPa)
c	Coesão (MPa)
ψ	Ângulo de dilatância (°)
γ	Multiplicador plástico
K	Módulo elástico volumétrico (MPa)
G	Módulo elástico cisalhante (MPa)
E	Módulo de elasticidade (MPa)
F_tol	Fator de tolerância
g	Função de fluência (MPa)
dtime	Incremento de tempo (s)
H	Função degrau
d	Deslocamentos nodais
δ_{Se}	Delta de Dirac
C	Matriz de constantes elásticas
l_e	Tamanho do elemento (m)
ν	Coeficiente de Poisson

p_o	Pressão interna (MPa)
Fg	Fator de gravidade
γ	Peso específico (kg/m³)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 18

1.1 Introdução 18

1.3 Objetivos 21

1.4 Estrutura 22

2 CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO CONTÍNUO 24

2.1 Cinemática e Equilíbrio 24

2.2 Modelo Constitutivo de Fluência 26

2.3 Relações Constitutivas Elasto-plásticas 29

2.3.1 Teoria da Plasticidade **29**

2.3.2 Invariantes de Tensão **29**

2.3.3 Equação constitutiva elástica **31**

2.3.4 Equação constitutiva plástica **33**

2.3.5 Tensor constitutivo elasto-plástico **35**

2.4 Modelo constitutivo de Plasticidade 37

2.5 Algoritmo de integração implícita de Druker-Prager 41

2.5.1 Equações constitutivas **41**

2.5.2 Algoritmo de retorno **43**

2.5.3 Retorno à superfície do cone **43**

2.5.4 Algoritmo Básico Implementado **46**

2.6 Algoritmo de Integração Implícita-Explícita (IMPLEX) para o Modelo de Druker-Prager 48

2.6.1 Algoritmo Básico Implementado **50**

2.7 Algoritmo de Controle do Passo de Tempo 54

2.7.1 Algoritmo Implementado **54**

3 ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADE FORTE 55

3.1 Campo de Deslocamentos nas Descontinuidades 57

3.2 Campo de deformações 59

3.3 Consistência Cinemática 62

3.4 Campo das Tensões 62

3.5 Condição de Continuidade das Tensões 63

3.6 Matriz de Rigidez do Elemento, Vetor de Forças Internas e Operador Tangente 64

3.7 Algoritmo de Determinação da Trajetória da Descontinuidade 65

4 VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO DE ALGORITMO IMPLEX 67

4.1 Expansão de cavidade cilíndrica 67

4.1.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX ao Incremento de Tempo (dtime) **..... 72**

4.1.2 Análise de Sensibilidade do IMPLEX à Tolerância (F_tol) **..... 75**

4.2 Cisalhamento direto 85

4.2.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX à Estrutura da Malha **..... 89**

4.3 Compressão uniaxial 93

4.3.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX ao Posicionamento da Descontinuidade **..... 96**

4.4 Estabilidade de talude 100

4.4.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX à Estrutura da Malha **..... 108**

5 INFLUÊNCIA DA FLUÊNCIA DE EVAPORITOS NA REATIVAÇÃO DE FALHA GEOLÓGICA 114

5.1 Frente de Escavação em Rocha Salina 117

5.2 Escavação de Rocha Salina em Galeria com Falha Próxima à Escavação 124

5.3 Escavação de Rocha Salina em Galeria com Falha Localizada Acima da Escavação 131

6 CONCLUSÃO 139

7 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS 142

REFERÊNCIAS 143

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

A importância das rochas evaporíticas é notável nas indústrias farmacêutica, de alimentação, química, agrícola e petrolífera. Há, porém, uma crescente demanda por reservatórios que estoquem fluídos como gás natural e o óleo cru, que necessitam de grandes espaços para estocagem. Convencionalmente se realiza a estocagem desses materiais em tanques de aço a céu aberto, um método oneroso e que oferece perigo se comparado à possibilidade de armazenamento nas cavernas em rochas evaporíticas. Essas cavernas necessitam ser estudadas frente ao armazenamento dne fluídos em formações salinas naturalmente fraturadas. (BARAJAS et al. 2014)

Segundo o U. S. Department of Energy (2006b), as cavernas em zonas salinas são dispostas de forma a se apresentarem mais seguras como reservatórios e 10 vezes mais baratas do que o armazenamento convencional em tanques. Baseado nisso, nas últimas décadas se investiu em projetos que permitissem o armazenamento de resíduos nucleares e hidrocarbonetos em minas subterrâneas lavradas por métodos convencionais a seco ou em grandes cavernas abertas por dissolução. (POIATE, 2012)

A disposição estrutural dos evaporitos permite que ocorra a fluência do material no qual sua estrutura, submetida a altas pressões e altas temperaturas, se reorganiza e, na ausência de argilo-minerais, cicatriza e fecha fissuras, determinando uma estanqueidade essencial para a obtenção de reservatórios de petróleo e gás natural. (MOHRIAK et al, 2008)

Devido a esse fenômeno de fluência, essas minas, a longo ou médio prazos, podem incorrer em acomodações mecânicas na própria escavação como formação de chocos e subsidência da caverna, com possibilidade de fechamento da mesma. Essa

deformação da caverna tende a gerar concentração de tensões cisalhantes nas camadas superiores, possibilitando a reativação de falhas pré-existentes.

Nesse sentido, a fim de prever a reativação de falhas e prevenir acidentes de magnitudes desconhecidas com tremores de terra seguido da sua acomodação, ferramentas computacionais cada vez mais robustas têm sido desenvolvidas para que se represente o estado de tensões limite dos geomateriais para que ocorra a reativação de falhas e qual a magnitude do problema considerando os mais avançados modelos constitutivos que representem ao máximo a situação real.

Para que os modelos representem bem a realidade proposta, deve sempre ser validado com soluções analíticas de modo a verificar as relações constitutivas do material. Segundo Vasconcelos (2007), na modelagem numérica do comportamento mecânico de um geomaterial devem ser consideradas as propriedades físicas, estruturais e sua constituição mineralógica, que são responsáveis pela resposta do meio.

Dessa forma, a modelagem numérica do comportamento mecânico das rochas sujeitas à operação de escavação em ambientes naturalmente fraturados deve ser conhecida para a previsão de acidentes e maior eficiência na extração de minérios a altas pressões.

Uma ilustração dessa realidade é a exploração de potássio em minas de evaporitos no Brasil é realizada pela CRVD (Companhia Vale do Rio Doce) na mina de Taquari-Vassouras, localizada no estado de Sergipe, voltada, principalmente, para a fabricação de fertilizantes. Essa extração dos evaporitos se dá por meio de cavernas subterrâneas lavradas através do método de câmaras e pilares, no qual a própria rocha é utilizada como estrutura de sustentação, semelhante a pilares intercalados com a escavação. (SILVA, 2015)

Seguindo esse motivador, nesse trabalho foram realizadas modelagens de cenários de escavação de rochas evaporíticas para a verificação da influência do comportamento de fluência em rochas adjacentes naturalmente fraturadas. Para isso foram utilizados dois modelos constitutivos, para a rocha evaporítica o modelo de fluência, validado por Silva (2015), e para a rocha adjacente ao evaporito e para a falha o modelo elasto-plástico com o algoritmo de integração implícita-explícita (IMPLEX) para prever o comportamento de solos e rochas submetidos a esforços de cisalhamento através do critério de Druker-Prager, que foi validado nesse trabalho.

A fim de prever e avaliar a possibilidade da reativação de falhas por acréscimo de tensões cisalhantes em rochas naturalmente fraturadas diante de cenários de escavação em rochas evaporíticas, utilizou-se a técnica de descontinuidades fortes embebidas, implementada por Beserra (2015).

Nesse contexto se insere a ferramenta CODE_BRIGHT (COupled DEformation, BRIne, Gas and Heat Transport), utilizada neste trabalho, que proporciona a modelagem de problemas em até três dimensões, caracterizados por fenômenos de natureza mecânica, hidráulica, térmica e química, permitindo ainda o acoplamento entre dois ou mais destes fenômenos. Nesse trabalho serão apresentados problemas de natureza mecânica em duas dimensões.

1.3 Objetivos

O presente trabalho tem como principal objetivo acrescentar à ferramenta CODE_BRIGHT um algoritmo de integração implícita-explícita (IMPLEX) com leis constitutivas tensão-deformação para avaliação do comportamento de fraturas frente à influência da fluência em rochas salinas adjacentes, visando um ganho de eficiência computacional e uma simulação numérica mais satisfatória.

Especificamente podemos listar os seguintes objetivos principais.

i. Validação numérica do algoritmo de integração implícita-explícita (IMPLEX) para o cálculo das equações constitutivas segundo o critério elasto-plástico de Drucker-Prager.
ii. Realizar análise de sensibilidade do algoritmo ao incremento de tempo inicial, à tolerância associada, ao posicionamento da descontinuidade embebida e ao tipo de malha, estruturada e não-estruturada.
iii. Compatibilização com soluções analíticas disponíveis na literatura para ensaios laboratoriais de Cisalhamento Direto e Compressão Uniaxial;
iv. Verificar e comparar a eficiência do algoritmo através do Número Total de Iterações (NTITER) para valores de tolerâncias diferentes ao fim do processo total da análise e do Tempo Total de processamento em CPU requerido pelos esquemas de integração (CPU Time);
v. Simular problemas mecânicos em cenários de reativação de falha a partir de escavação em rochas salinas com ocorrência da fluência em grandes profundidades.

1.4 Estrutura

Esse trabalho está estruturado de forma a introduzir os objetivos que motivaram esse estudo, seguindo com a revisão bibliográfica, os resultados encontrados e suas análises. Deste modo, foi estruturada da seguinte maneira:

No capítulo 1, Introdução, estão descritas as considerações gerais sobre o tema, seguindo com o objetivo da pesquisa e a presente estrutura do trabalho descrito.

No capítulo 2, Caracterização Mecânica e Relações Constitutivas do Contínuo, se encontra o estudo dos modelos numéricos e o as propriedades mecânicas dos geomateriais, que enriquece a metodologia utilizada e que dá suporte às análises e conclusões dos resultados da pesquisa.

No capítulo 3, Elementos Finitos com Descontinuidades Fortes, está apresentada a técnica utilizada na discretização das descontinuidades na qual foi avaliado o comportamento da ruptura por cisalhamento através do critério de Druker-Prager.

No capítulo 4, Validação e Aplicação do Algoritmo IMPLEX, estão apresentadas as modelagens mecânicas bidimensionais (Expansão de Cavidade, Cisalhamento Direto, Uniaxial e Estabilidade de Talude) realizadas com o objetivo de validar o algoritmo e verificar a sensibilidade do mesmo quanto ao incremento de tempo, à tolerância associada ao mesmo, ao tipo de discretização da malha e ao posicionamento da descontinuidade.

No capítulo 5, Influência da Fluência de Evaporitos na Reativação de Falha Geológica, foram modelados cenários da extração de evaporitos realizada através de minas de extração a grandes profundidades (superiores a 1.200 metros). Nessa extração, a rocha evaporítica sofre o efeito de fluência, o que leva a um alívio de tensões

permitindo o acomodamento do maciço e causando a reativação de falhas geológicas próximas.

No capítulo 6, se encontram as conclusões dessa dissertação com as considerações finais.

No capítulo 7, diante da contribuição desse trabalho, estão as sugestões para futuras pesquisas seguida pelas referências utilizadas nesse estudo.

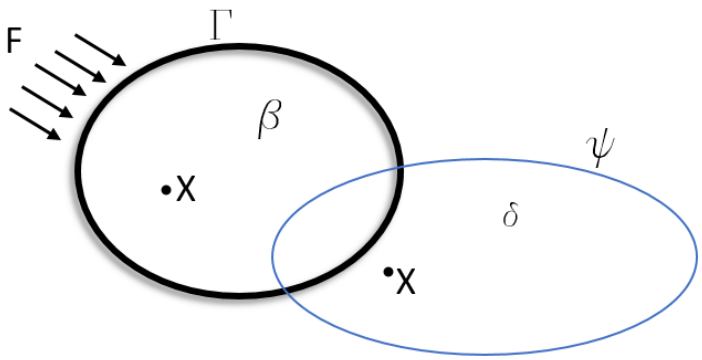
2 CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO CONTÍNUO

Para que seja caracterizado o comportamento elasto-plástico de um corpo é necessário estabelecer relações constitutivas que descrevam o efeito a partir de critérios de fluência adequados. Com esse objetivo, será necessário o estudo prévio da cinemática e equilíbrio para dar embasamento matemático ao comportamento do corpo no espaço quando submetido a uma força externa.

2.1 Cinemática e Equilíbrio

O movimento da partícula é caracterizado pela posição das partículas de um corpo no espaço e sua determinação é obtida a partir de uma configuração de referência β e fronteira regular G, em que um ponto X ∈ β é definido como ponto material, onde submetendo o corpo à uma força externa F num instante t, a configuração inicial β é levada a uma configuração final δ e o ponto material X ∈ β é levado a X ∈ δ e uma nova configuração de fronteira ψ, conforme ilustrado na Figura 1. (GOMES, 2006)

Figura 1 – Evolução das Deformações com o Incremento das Tensões.



Fonte: A autora.

Quando essa mudança de configuração do corpo é irreversível pode ser considerada como uma deformação plástica.

Essa plastificação ocorre associada à mudança no volume da massa de solo, e para isso, a diminuição ocorre com a redução de vazios do solo, que pode ser composto por líquidos ou ar. Essa mudança do volume do material sólido se dá a depender das restrições impostas pela parte sólida. (BESERRA, 2010)

A relação entre os vazios e a parte sólida do solo é dada pelo índice de vazios e a porosidade:

$$e = \frac{Vv}{Vt} \tag{1}$$

$$\phi = \frac{e}{1+e} \tag{2}$$

Onde Vv é o volume de vazios e Vt o volume total.

As componentes do tensor de deformações podem ser consideradas como funções contínuas das componentes de deslocamento, e para pequenas deformações pode ser representada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right) \text{ em } \Omega \tag{3}$$

O equilíbrio fica, portanto:

$$div\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4}$$

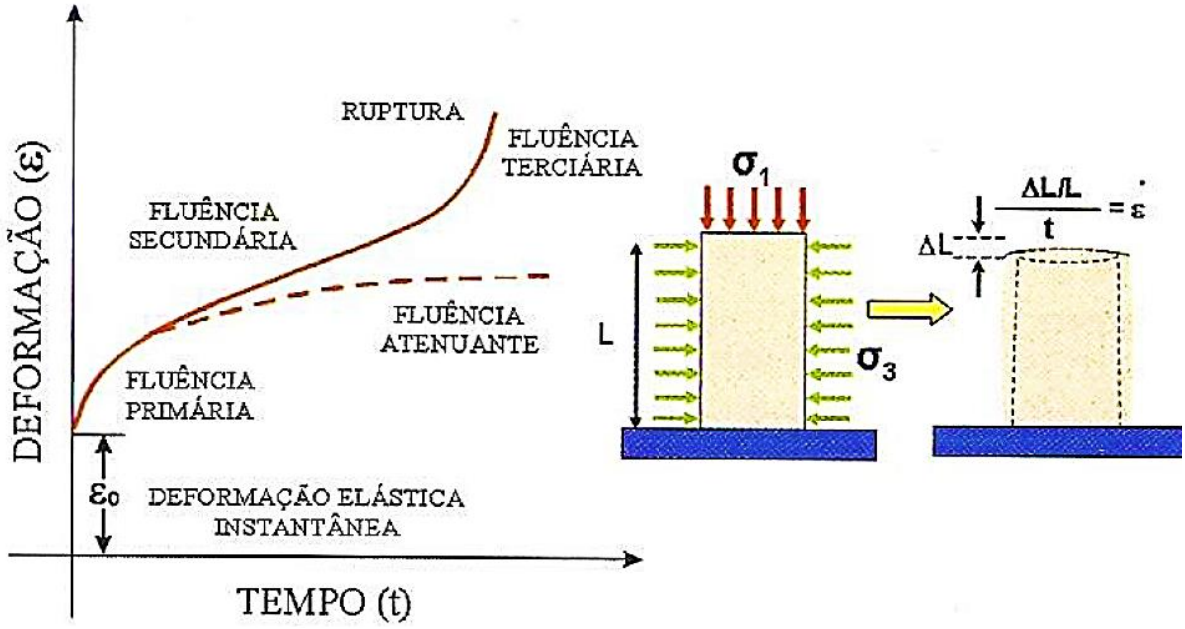
Para as pequenas deformações

2.2 Modelo Constitutivo de Fluência

O fenômeno de Fluência pode ser considerado como uma deformação inelástica de longa duração e progressiva de um material ao longo do tempo quando esse material está submetido a um estado de tensões e temperatura constantes. Esse comportamento pode reduzir a vida útil do material em questão ou até inviabilizar o uso, pois deformações excessivas podem reduzir o seu desempenho. (POIATE, 2012)

Quando um material é submetido ao estado de tensão desviadora constante no tempo, ele possui um comportamento deformação no tempo com três estágios (Figura 2) distintos que caracterizam o comportamento de fluência: fluência primária, fluência secundária, fluência terciária. Os modelos constitutivos de fluência mais utilizados são baseados em formulações empíricas que empregam o modelo de mecanismo duplo de deformação. (MEDEIROS, 1999; COSTA et al*.,* 2005; BOTELHO, 2008)

Figura 2 – Representação de um Ensaio de Fluência e os Três Estágios do Comportamento de Típico de uma curva de Fluência



Fonte: Mohriak et al. (2008).

Nesse modelo de dupla deformação, a taxa de fluência é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{sc} = \dot{\varepsilon}_d \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_{do}} \right)^n \tag{5}$$

Onde $\dot{\varepsilon}_{sc}$ é a taxa de deformação no regime estacionário, $\dot{\varepsilon}_d$ é a taxa de deformação estacionária corrigida em função da temperatura, σ_d é a tensão desviadora aplicada (MPa), σ_{do} é a tensão desviadora de referência (MPa) e n é o parâmetro da tensão desviadora aplicada, sendo:

$$n = \begin{cases} n_1, \sigma_d \leq \sigma_{do} \\ n_2, \sigma_d > \sigma_{do} \end{cases} \tag{6}$$

A taxa de deformação $\dot{\varepsilon}_d$ pode ser calculada em função de um termo exponencial considerado como fator de ativação térmica (Lei de Arrhenius) (COSTA et al., 2004):

$$\dot{\varepsilon}_d = \dot{\varepsilon}_{sco} \exp\left(\frac{Q}{R(T_o + 273{,}15)} - \frac{Q}{R(T + 273{,}15)} \right) \tag{7}$$

$\dot{\varepsilon}_{sco}$ é a taxa de deformação de referência constante para cada rocha salina (t^{-1}), Q é a energia de ativação adotada para as rochas de 12 kcal/mol, R é a constante universal dos gases (0,0019858 kcal/mol/K), T é a temperatura da rocha em superfície (°C) e T_o é a temperatura de referência (°C).

Uma atualização realizada por Silva (2015) permitiu uma atualização automática da taxa de fluência em função da temperatura e do estado multiaxial de tensões:

$$\dot{\varepsilon}_{sc}(\sigma) = \frac{3}{2}\left[\dot{\varepsilon}_{sco} \exp^{\left(\frac{Q}{RT_o} - \frac{Q}{RT}\right)} \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_{do}} \right)^n \right] M\sigma \frac{1}{\sigma_d} \tag{8}$$

Onde $\dot{\varepsilon}_{sc}(\sigma)$ é o vetor da taxa de deformação da fluência estacionária (ano^{-1}), $\dot{\varepsilon}_{sco}$ é a taxa de deformação de fluência de referência (ano^{-1}), σ_d é a tensão desviadora de Von Mises (MPa), σ_{do} é a tensão desviadora de referência de Von Mises (MPa), T_o é a temperatura de referência (K), T é a temperatura (K), Q é a energia de ativação térmica que depende da rocha salina (kcal/mol), R é a constante universal dos gases (kcal/mol/K), n é o expoente que varia de acordo com a tensão desviadora ($n = n_1$, se $\sigma_d \leq \sigma_{do}$ e $n=n_2$, se $\sigma_d > \sigma_{do}$ e M é o operador desviador, σ é o tensor de tensões (MPa). Os parâmetros $\dot{\varepsilon}_{sco}$, σ_{do}, n_1 e n_2 são obtidos através de ensaios de

laboratório de fluência sob condições controladas de temperatura e tensão desviadora (MOHRIAK et al., 2008).

Nesse trabalho foi avaliada a influência do comportamento de fluência de minas de extração de evaporitos na reativação de falhas pré-existentes a grandes profundidades (1.200 metros). Como as análises realizadas nesse trabalho foram puramente mecânicas, foi admitido o caso isotérmico com a temperatura de 20°C, sendo assim, desconsiderada a influência do gradiente de temperatura, nesse caso o fator de ativação térmica da taxa de deformação de fluência se anula.

2.3 Relações Constitutivas Elasto-plásticas

2.3.1 Teoria da Plasticidade

A teoria da plasticidade analisa o comportamento de materiais como solos e rochas. Esses materiais, quando submetidos a esforços de tensão, possuem deformações elásticas (reversíveis) e plásticas (irreversíveis), ainda que as tensões aplicadas sejam aliviadas ou até mesmo anuladas.

Nesse estudo foi dado ênfase ao comportamento plástico dos materiais, para assim avaliar o comportamento do material frente a esforços de cisalhamento com critério de plastificação de Druker-Prager.

2.3.2 Invariantes de Tensão

Para a avaliação das deformações plásticas dos geomateriais se faz necessário o estudo dos Invariantes das tensões, já que a deformação volumétrica faz com que haja a dissociação entre a variação de volume e a distorção.

Segundo Chen & Baladi (1985), os invariantes, tensão desviadora e tensão média, se relacionam com a energia associada à distorção e à variação volumétrica.

Para isso se tem o primeiro invariante:

Tensor de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{9}$$

Tensor desviador:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \rho\mathbf{I} \tag{10}$$

Sendo **I** o tensor identidade e *p* a tensão média. Esta última se dá pela equação:

$$p = \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{11}$$

Logo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{bmatrix} \tag{12}$$

E o segundo invariante das tensões:

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{S}\| \tag{13}$$

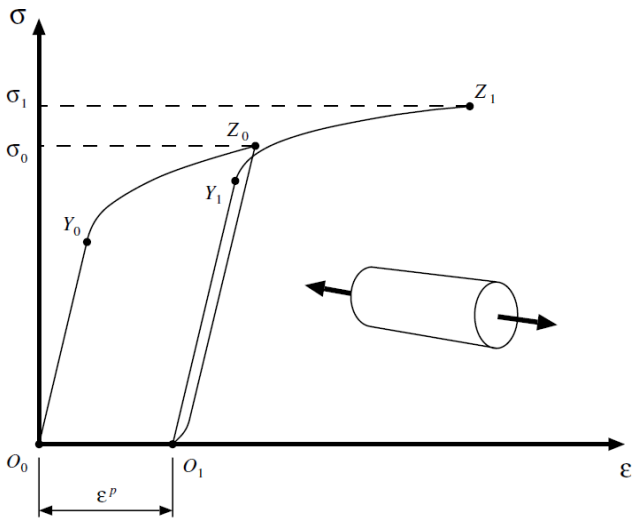
$$J = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x - p)^2 + (\sigma_y - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + 2(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xy}^2)\right]} \tag{14}$$

2.3.3 Equação constitutiva elástica

O comportamento dos materiais se dá em duas etapas, a primeira elástica e a segunda plástica. Na primeira etapa o comportamento tensão x deformação se dá de forma linear e reversível, com a evolução das tensões, mas sem sair do domínio do comportamento elástico. Dessa forma, quando submetido a esforços o material se deforma e na ocasião do alívio dessa tensão a energia absorvida é recuperada.

O domínio das tensões elásticas é limitado pela tensão de pré-adensamento em solos e rochas, visto a seguir na Figura 3 - Y_o.

Figura 3 – Gráfico da Evolução das Deformações com o Incremento das Tensões.



Fonte:Souza Neto et. al. 2008

Tem-se a deformação elástica definida pelo princípio da decomposição aditiva, na qual a soma das parcelas de deformação elástica ($\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$) e plástica ($\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$) é a deformação total ($\boldsymbol{\varepsilon}$).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p} \tag{15}$$

Fica, por tanto, a Lei constitutiva para a tensão em função da deformação e da matriz de rigidez elásticos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{e}\boldsymbol{\varepsilon}^{e} \tag{16}$$

2.3.4 Equação constitutiva plástica

Segundo Gomes (2006) a função de fluência se encontra em função da história de tensões e deformações do material, onde esses parâmetros são inseridos através de parâmetros de estado k. Para tanto, a superfície de fluência é dada por:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, k) = \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{f}}(k) \tag{17}$$

Sendo:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{f}}(k) = \boldsymbol{\sigma}_{e} + h.k \tag{18}$$

Sendo assim o critério de plastificação se dá num limite das tensões plasticamente admissíveis, logo:

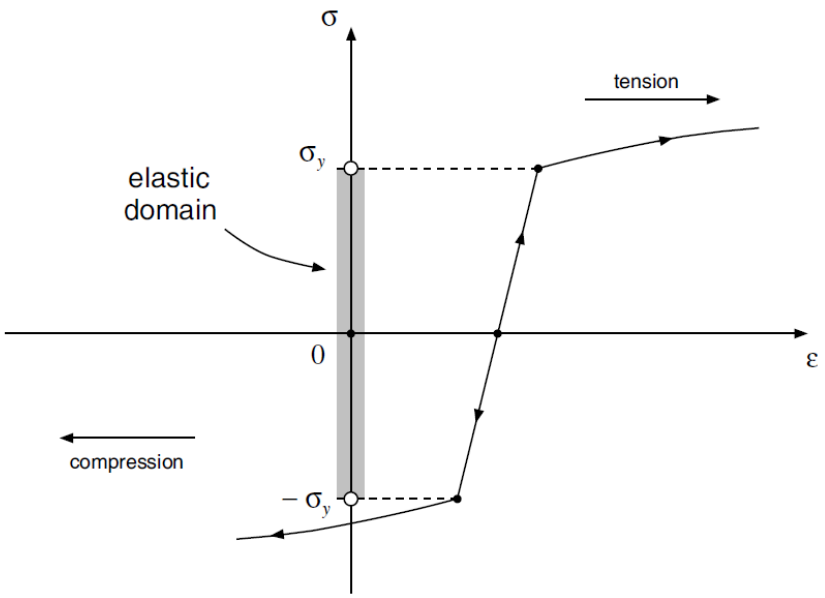
$$F(\boldsymbol{\sigma}, k) \leq 0 \tag{19}$$

Fica, assim, o domínio elástico de tal forma que:

$$\begin{aligned} &F(\boldsymbol{\sigma}, k) < 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = 0 \\ &F(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = 0 \\ \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

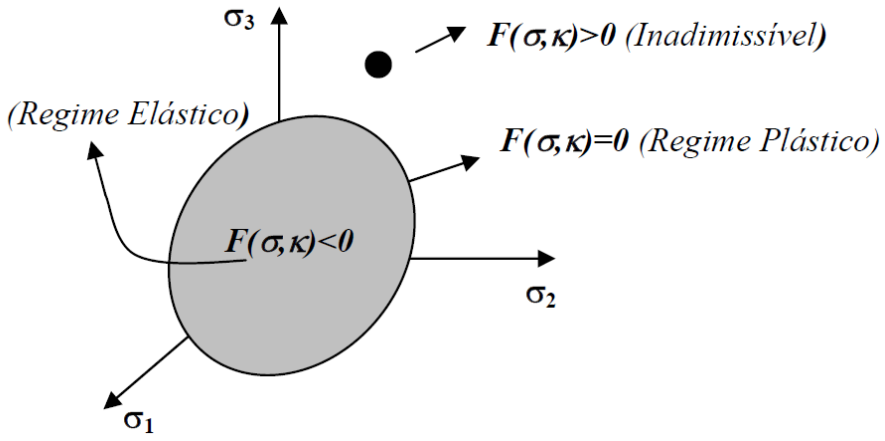
No esquema unidimensional pode-se definir o domínio das tensões plasticamente admissíveis como ilustrado na Figura 4. E no esquema multiaxial como ilustrado na Figura 5.

Figura 4 **–** Tensões Plasticamente Admissíveis**.**



Fonte:Souza Neto et. al. 2008

Figura 5 – Critério de Plastificação – Espaço de Tensões Admissíveis.



Fonte: Gomes, 2006.

2.3.5 Tensor constitutivo elasto-plástico

As equações que representam o modelo constitutivo elasto-plástico são em função dos incrementos de tensões e deformações no tempo. Análoga a equação do tensor constitutivo elástico, a equação do tensor de tensões constitutivo elasto-plástico é definido por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{\mathrm{ep}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{21}$$

Sendo o tensor de tensões e o tensor de deformações derivados no tempo, representando os incrementos no tempo, ou taxa. O incremento das deformações pode ser representado pela adição do incremento de deformações elásticas e de deformações plásticas:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} \tag{22}$$

Tem-se, portanto:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} = \mathbf{D}^{e^{-1}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{23}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \lambda \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Psi})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{24}$$

Assim:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \lambda \mathbf{D}^e \left[\frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Psi})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \tag{25}$$

Sabendo que para se encontrar no regime plástico, o critério de fluência deve satisfazer a condição de estar na fronteira, com $f(\sigma, h) = 0$, e que a derivada f deve ser zero:

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}) = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right]^T \dot{\mathbf{h}} = 0 \tag{26}$$

Ficando o multiplicador plástico:

$$\lambda = \frac{\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \mathbf{D}^e \left[\frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Psi})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T + A} \tag{27}$$

Para tanto, define-se uma constante *A* a qual varia conforme o comportamento plástico do material. Para plasticidade perfeita, h é constante e *A* = 0. Para o caso de endurecimento ou amolecimento:

$$A = -\frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{28}$$

Assumindo que h e ε^p possuem uma relação linear (SOUSA, 2004), o parâmetro λ pode ser cancelado e *A* se torna determinado. Sendo assim:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbf{D}^e\left[\dfrac{\partial g(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Psi})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T\left[\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{h})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T\mathbf{D}^e\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left[\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{h})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T\mathbf{D}^e\left[\dfrac{\partial g(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Psi})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T + A} \tag{29}$$

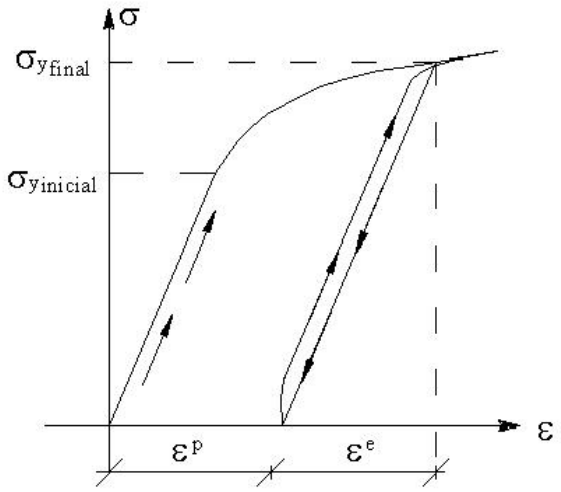
E por fim, determinando a matriz constitutiva elasto-plástica:

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e\left[\dfrac{\partial g(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Psi})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]\left[\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{h})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T\mathbf{D}^e}{\left[\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{h})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T\mathbf{D}^e\left[\dfrac{\partial g(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\Psi})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T + A} \tag{30}$$

2.4 Modelo constitutivo de Plasticidade

No comportamento dos solos e rochas, para Druker-Prager, existe uma deformação elástica e outra plástica (Figura 6), podendo o material apresentar o comportamento de amolecimento ou mesmo de endurecimento do material quando submetido a altas tensões, acompanhado por deformações plásticas.

Figura 6 – Endurecimento e Decomposição das Deformações Elásticas e Plásticas.



Fonte: Gomes, 2006

O modelo constitutivo de Druker-Prager é uma suavização do modelo de Mohr Coulomb (SOUZA NETO et al., 2008), ele consiste na adição do parâmetro ângulo de atrito no comportamento do material de Von Mises, o metal. Para o metal, o comportamento ocorre na forma de plasticidade perfeita, sem deformação na etapa elástica.

O modelo de Druker-Prager prevê que a plastificação do material tem início quando o invariante das tensões desviadoras (*J*) e a tensão média (*p*) atingem uma combinação de valores críticos, tocando a superfície de fluência. (BESERRA, 2010). Para este modelo, por tanto, define-se a função de fluência como:

$$f\left(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{h}\right)=J+\eta p-\xi c' \tag{31}$$

Sendo

$$\eta(c,\varphi);\xi(c,\varphi)$$

Dos quais *c* (coesão) e ϕ (ângulo de atrito) são parâmetros do material.

Essa superfície de fluência tridimensional de Druker-Prager é um formato de cone que, a depender dos parâmetros η e ξ escolhidos, pode circunscrever o hexágono de Mohr Coulomb, inscrevê-lo ou coincidir os vértices para superfície de ruptura plana (Figura 7).

Os cones mais utilizados são o que circunscreve e o que coincide com a superfície de Mohr Coulomb (BEZERRA, 2010). O cone que circunscreve a superfície de Mohr-Coulomb, é chamado cone de compressão, para o qual:

$$\eta = \frac{6\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)} \tag{32}$$

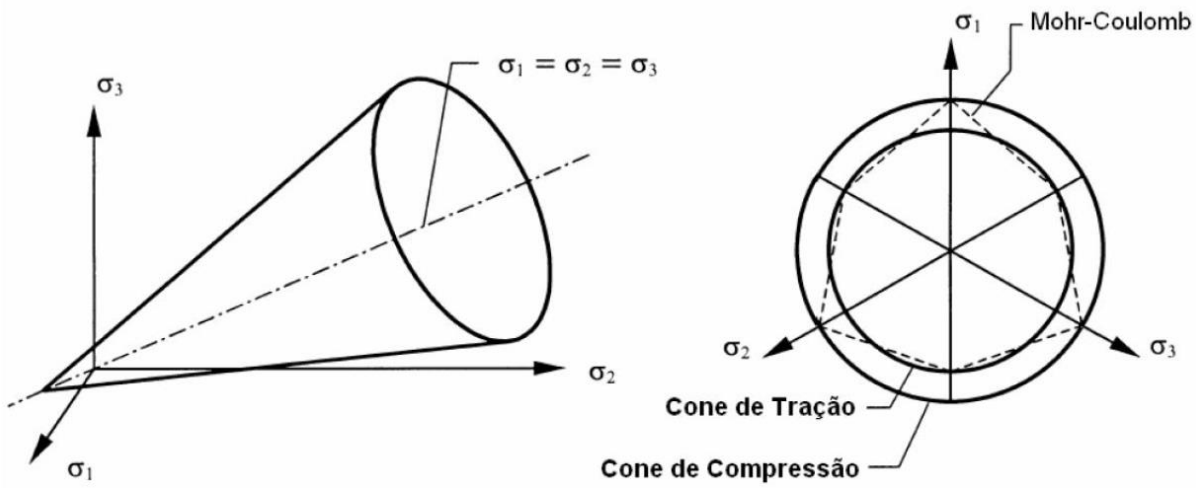
$$\xi = \frac{6\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)} \tag{33}$$

A superfície de Druker-Prager que coincide com a superfície de Mohr-Coulomb é chamado cone de extensão, sendo:

$$\eta = \frac{6\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)} \tag{34}$$

$$\xi = \frac{6\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)} \tag{35}$$

Figura 7 – Superfície de Fluência de Druker-Prager.



Fonte: Sousa, 2004

No caso de plasticidade não-associada, uma lei de fluxo plástico é estabelecida, na qual utiliza-se a mesma função de fluência, e η e ξ ficam em função do ângulo de dilatância (ψ), sendo assim:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}) = J + \bar{\eta} p \tag{36}$$

Sendo para o cone de compressão:

$$\bar{\eta} = \frac{6 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \tag{37}$$

E para o cone interno:

$$\bar{\eta} = \frac{6\sin\psi}{\sqrt{3}(3+\sin\psi)} \tag{38}$$

2.5 Algoritmo de integração implícita de Druker-Prager

O algoritmo de integração implícita no CODE_BRIGHT foi implementado por Beserra (2010) em elementos finitos, tendo sido tomado como referência o algoritmo descrito por Souza Neto et al (2008).

2.5.1 Equações constitutivas

A superfície de fluência de Druker-Prager é definida pela seguinte função de fluência:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, c) = \frac{\sqrt{2}}{2}\|\mathbf{S}\| + \eta p - \xi c \tag{39}$$

Onde p é a tensão média

$$p = \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{40}$$

E c é a coesão do material e η e ξ para coincidir com o eixo de ruptura são definidas por:

$$\eta = \frac{3\sin\phi}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{2\cos\phi}{\sqrt{3}} \tag{41}$$

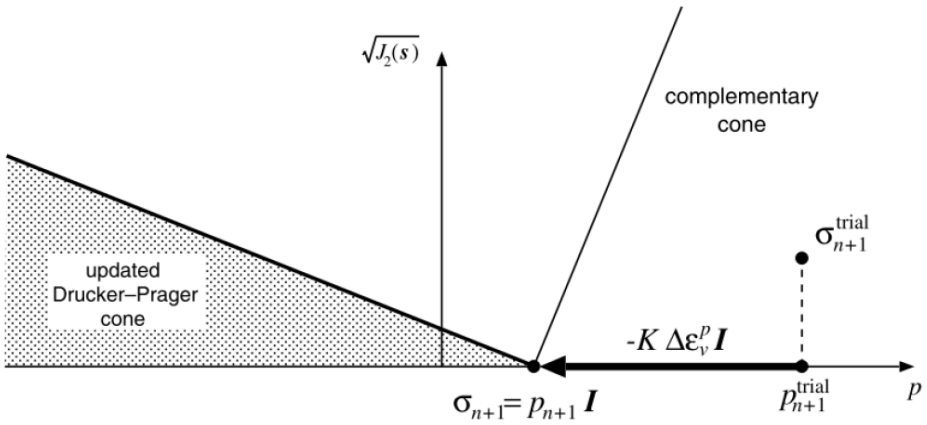
Nesse modelo foi adotada uma regra de fluxo associado, sendo assim, o ângulo de dilatância é igual ao ângulo de atrito

Para Druker-Prager, na parte suave do cone o vetor de fluxo é dado por:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} - \frac{\overline{\eta}}{3}\mathbf{1} \tag{42}$$

Para o retorno da singularidade do cone (vértice), o vetor de fluxo é o subgradiente de *f*, ou seja, **n** é um vetor pertencente ao cone complementar, Figura 8.

Figura 8 – Esquema de Retorno ao Vértice



Fonte: Souza Neto et al., 2008

2.5.2 Algoritmo de retorno

A simetria do cone da superfície de fluência de Druker-Prager em relação ao eixo hidrostático e a existência de apenas uma singularidade no cone (no vértice) torna o algoritmo relativamente simples.

A atualização do tensor de tensões é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{D}^{e} : \mathbf{n}_{n+1} \tag{43}$$

Onde $-\Delta\gamma \mathbf{D}^{e} : \mathbf{n}_{n+1}$ é o vetor de retorno à superfície de plastificação.

2.5.3 Retorno à superfície do cone

O incremento da deformação plástica é:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \Delta\gamma \mathbf{n}_{n+1} = \Delta\gamma \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{trial}}{\left\| \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \right\|} + \frac{\overline{\eta}}{3} \mathbf{1} \right) \tag{44}$$

Para a atualização das tensões, segue:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \gamma \left(\sqrt{2} G \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{trial}}{\left\| \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \right\|} + K\overline{\eta} \mathbf{I} \right) \tag{45}$$

K e G são os módulos de deformação volumétrica e cisalhante, respectivamente. A equação acima pode ser reescrita em termos das componentes das tensões desviadora e hidrostática:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}G}{\left\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\right\|}\right)\mathbf{S}_{n+1}^{trial} \tag{46}$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial} - K\overline{\eta}\gamma \tag{47}$$

Para esse caso, a condição de consistência é:

$$f_{n+1} \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\mathbf{S}_{n+1}\right\| + \eta p_{n+1} - \xi c = 0 \tag{48}$$

Para encontrar o multiplicador plástico, substituindo as componentes desviadora e volumétrica, tem-se:

$$\tilde{f}(\gamma) \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\right\| - G\Delta\gamma + \eta(p_{n+1}^{trial} - K\overline{\eta}\Delta\gamma) - \xi c = 0 \tag{49}$$

Por fim, chegando com alguma manipulação em:

$$\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{G + K\eta\overline{\eta}} \tag{50}$$

Após esse passo as tensões são atualizadas.

O vetor de retorno deve estar contido no cone complementar, Figura 8, e a condição de consistência é reduzida:

$$c\frac{\xi}{\eta} - p_{n+1}^{trial} + K\Delta\varepsilon_v^p = 0 \tag{51}$$

E a atualização das tensões é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (p_{n+1}^{trial} - K\Delta\varepsilon_v^p)\mathbf{I} \tag{52}$$

Adota-se o algoritmo de retorno à superfície do cone, uma vez determinado o multiplicador, γ , procede-se a verificação:

Se

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\right\| - G\gamma \geq 0 \tag{53}$$

Então o algoritmo de retorno é validado, senão, realiza-se retorno ao vértice.

Para esse modelo, o cálculo do operador tangente consistente elasto-plástico é dado pela expressão:

$$\mathbf{D}^{ep} = 2G\left(1-\frac{2G\gamma}{\sqrt{2}\left\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\right\|}\right)\left[\mathbf{I}-\frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right]+2G\left(\frac{2G\gamma}{\sqrt{2}\left\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\right\|}-GA\right)\mathbf{n}_d\otimes\mathbf{n}_d$$
$$-\sqrt{2}GAK\left(\eta\mathbf{n}_d\otimes\mathbf{1}+\bar{\eta}\mathbf{1}\otimes\mathbf{n}_d\right)+K\left(1-K\eta\bar{\eta}A\right)\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \quad (54)$$

Onde A é um parâmetro de endurecimento do material, se γ = 0, então retorna para a matriz elástica:

$$\mathbf{D}^{e} = 2G\left[\mathbf{I}-\frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right]+K\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \quad (55)$$

2.5.4 Algoritmo Básico Implementado

Algoritmo implícito Backward-Euler:

1) Dados de Entrada

$$\boldsymbol{\sigma}_n ; \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n ; \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$
$$E, \nu, c, \phi, \psi$$

Módulos elásticos volumétrico e cisalhante calculados por:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (56)$$

2) Estado Trial

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}^e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{57}$$

$$f^{trial} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\right\| + \eta p_{n+1}^{trial} - \xi c \tag{58}$$

3) Verificação do Passo se Elástico ou Plástico

Se

$$f^{trial} \leq 0 \tag{59}$$

Então → Passo Elástico:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \end{cases} \tag{60}$$

Senão → Passo Elasto-plástico

$$\begin{cases} \gamma^{n+1} = \dfrac{f^{trial}}{(G + K\eta\bar{\eta})} & (61) \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \gamma^{n+1}\dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & (62) \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \mathbf{D}^{ep} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p & (63) \end{cases}$$

4) Verificação de tensão no vértice

Se

$$\frac{\left\|\mathbf{S}^{trial}\right\|}{\sqrt{2}} < \gamma^{n+1} \tag{64}$$

Então

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \dfrac{c\xi}{\eta} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \mathbf{D}^{ep} : (\sigma_{n+1} - \sigma_{n}) \end{cases} \tag{65}$$

Fim

2.6 Algoritmo de Integração Implícita-Explícita (IMPLEX) para o Modelo de Druker-Prager

Foi proposto por Oliver et al. (2008) um algoritmo que simplifica o algoritmo de integração implícita reduzindo a não linearidade do algoritmo de retorno e estimando um multiplicador plástico a partir dos dados de tensões, deformações e variáveis de história do passo de tempo anterior.

Assim o algoritmo se tornou mais simples, sem calcular as derivadas do multiplicador a cada passo de tempo. Esse algoritmo apresenta oscilações, que os próprios autores mostram que podem ser controladas com passos de tempo reduzidos.

Beserra (2010) modificou o algoritmo proposto por Oliver et al. (2008) fazendo uma extrapolação do multiplicador plástico do passo de tempo atual escalonado pelos

incrementos de tempo dos passos atual e anterior, propondo o cálculo da estimativa do multiplicador plástico a partir da projeção das deformações totais do tempo anterior:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{*} = \frac{\Delta t^{n+1}}{\Delta t^{n}} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n} \tag{66}$$

Estimando, com a projeção das deformações totais, um estado de tensões trial:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial*} = \boldsymbol{\sigma}_{n} + \mathbf{D}^{e} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{*} \tag{67}$$

Beserra (2010) ainda ressalta que esse estado de tensões trial é projetado a partir do estado de tensões anterior, convergido do passo de tempo anterior. Tendo, portanto, no estado de plastificação do material a função de fluência trial:

$$f^{trial*} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\| \mathbf{S}_{n+1}^{trial*} \right\| + \eta p_{n+1}^{trial*} - \xi c \tag{68}$$

No presente trabalho, diferentemente de Beserra (2010), foi realizada uma seção com algoritmo de integração explícita, na qual a função de fluência é projetada a partir do passo de tempo anterior, no qual as componentes das tensões desviadora e média já convergiram.

$$f^{trial*} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\| \mathbf{S}_{n}^{trial*} \right\| + \eta p_{n}^{trial*} - \xi c \tag{69}$$

Apesar do ganho de eficiência computacional, esse algoritmo permite que o erro seja acumulado a cada passo de tempo. Para controlar o erro associado foi realizada a condição de que caso haja a violação da superfície de fluência, obtêm-se o multiplicador plástico para o passo de tempo atual:

$$\gamma^{n+1} = \frac{f^{trial*}}{(G + K\eta\overline{\eta})} \tag{70}$$

Os cálculos restantes do algoritmo são iguais aos da integração implícita. Vale ressaltar que o cálculo do operador tangente se torna mais simplificado a partir do multiplicador plástico obtido com as variáveis do passo de tempo anterior e tendo sua derivada nula (OLIVER et al., 2008). Com a simplificação da implementação do IMPLEX o operador elasto-plástico segue:

$$\mathbf{D}^{ep} = \left(\left[\mathbf{D}^{e}\right]^{-1} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{2}\|\mathbf{S}\|} \left\{ \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \right] - \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \otimes \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \right\} \right)^{-1} \tag{71}$$

E, análoga à integração implícita, se γ^{n+1} = 0, retorna a matriz elástica.

2.6.1 Algoritmo Básico Implementado

Algoritmo implícito Backward-Euler:

1) Dados de Entrada

$$\boldsymbol{\sigma}_n ; \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n ; \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} ; \boldsymbol{\varepsilon}_n^p ; \gamma^n$$

E, ν, c, ϕ, ψ

Módulos elásticos volumétrico e cisalhante calculados por:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{72}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{73}$$

2) Se IMPLEX, estima-se o multiplicador plástico

Oliver et al. (2008):

$$\gamma^{n+1} = \frac{\Delta t^{n+1}}{\Delta t^{n}} \gamma^{n} \tag{74}$$

Beserra (2010):

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{n+1} = \frac{\Delta t^{n+1}}{\Delta t^{n}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n} \tag{75}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{trial*}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n} + \mathbf{D}^{e} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{n+1} \tag{76}$$

$$f^{trial*} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\| \mathbf{S}^{trial*}_{n+1} \right\| + \eta p^{trial*}_{n+1} - \xi c \tag{77}$$

$$\gamma^{n+1} = \frac{f^{trial*}}{(G + K\eta\overline{\eta})} \tag{78}$$

Presente trabalho:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{n+1} = \frac{\Delta t^{n+1}}{\Delta t^{n}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n} \tag{79}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{trial*}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n} + \mathbf{D}^{e} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{n+1} \tag{80}$$

$$f^{trial*} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\mathbf{S}^{trial*}_{n}\right\| + \eta p^{trial*}_{n} - \xi c \tag{81}$$

$$\gamma^{n+1} = \frac{f^{trial*}}{(G + K\eta\bar{\eta})} \tag{82}$$

3) Estado Trial definitivo para ambos algoritmos

$$\boldsymbol{\sigma}^{trial}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n} + \mathbf{D}^{e} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \tag{83}$$

$$f^{trial} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\mathbf{S}^{trial}_{n+1}\right\| + \eta p^{trial}_{n+1} - \xi c \tag{84}$$

4) Se implícito, calcula o multiplicador plástico.

$$\gamma^{n+1} = \frac{f^{trial}}{(G + K\eta\bar{\eta})} \tag{85}$$

5) Verificação do Passo se Elástico ou Plástico

Se

$$f^{trial} \leq 0 \tag{86}$$

Então → Passo Elástico:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} & (87) \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = 0 & (88) \end{cases}$$

Senão → Passo Elastoplástico

$$\begin{cases} \gamma^{n+1} = \dfrac{f^{trial}}{(G + K\eta\bar{\eta})} & (89) \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \gamma^{n+1}\dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & (90) \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \mathbf{D}^{ep} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} & (91) \end{cases}$$

6) Verificação de tensão no vértice

Se

$$\frac{\left\|\mathbf{S}^{trial}\right\|}{\sqrt{2}} < \gamma^{n+1} \qquad (92)$$

Então

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \dfrac{c\xi}{\eta} & (93) \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \left[\mathbf{D}^{ep}\right]^{-1} : (\sigma_{n+1} - \sigma_{n}) & (94) \end{cases}$$

Fim

2.7 Algoritmo de Controle do Passo de Tempo

No presente trabalho, esse modelo apresenta sensibilidade ao incremento do passo de tempo, então, foi implementado um artifício chamado de tolerância (F_tol).

Essa tolerância força que o modelo não viole a superfície de fluência, de forma que, como as deformações e o multiplicador plástico são calculados em função do passo de tempo (dtime) anterior, a tolerância força o passo de tempo para diminuir, de forma que não viole a superfície de plastificação.

Em caso de ser violada a superfície de fluência, a tolerância força que o modelo retorne ao cone de plastificação.

2.7.1 Algoritmo Implementado

1) Dados de entrada

$$\text{dtime}_{min},\ F_tol \tag{95}$$

2) Condição de consistência

Se

$$f > 0,\ g > 0 \text{ e } \text{dtime} > \text{dtime}_{min} \tag{96}$$

Então:

$$\text{Fator} = \frac{1 + F_tol}{1 + f} \tag{97}$$

$$dtime = dtime * Fator \tag{98}$$

Fim.

3 ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADE FORTE

O modelo numérico avaliado nessa dissertação foi implementado, utilizando a técnica de elementos finitos, no programa CODE_BRIGHT. Esse programa tem a capacidade de solucionar problemas termo-hidro-mecânicos e geoquímicos em meios porosos saturados com fluido homogêneo ou heterogêneo (BESERRA, 2010). Ele foi desenvolvido inicialmente por Olivella *et al* (1995) com problemas de resíduos nucleares relacionados a rochas salinas.

Já Nóbrega (2008) estendeu a aplicação do CODE_BRIGHT a modelagens de barreiras de proteção ambiental, transporte de solutos, aterros, escavações, pavimentação, solos colapsíveis e expansivos e barragens de terra.

Beserra (2010) implementou algoritmos de integração implícita de modelos constitutivos elasto-plásticos aplicados a problemas acoplados hidromecânicos em meios porosos. Beserra (2015) desenvolveu uma metodologia referente à modelagem em elementos finitos para o problema de faturamento hidráulico em formações rochosas usando a aproximação contínua de descontinuidades fortes.

Nesse trabalho é validado o modelo de plasticidade de Druker-Prager para modelagem mecânica em elementos finitos através da técnica de descontinuidades fortes embebidas implementada por Beserra (2015) no CODE_BRIGHT.

Com essa validação será permitido, através dessa ferramenta *in house*, CODE_BRIGHT, realizar previsões do comportamento dos solos e rochas em situações de reativação de falhas preexistentes através de perfuração de poços, e prever a propagação das falhas, também situações de rupturas por cisalhamento em taludes, fundações, barragens.

Essa técnica de descontinuidades fortes permite trabalhar com fraturas de maneira mais robusta, estável e eficiente usando a aproximação contínua de descontinuidades fortes. (BESERRA, 2015)

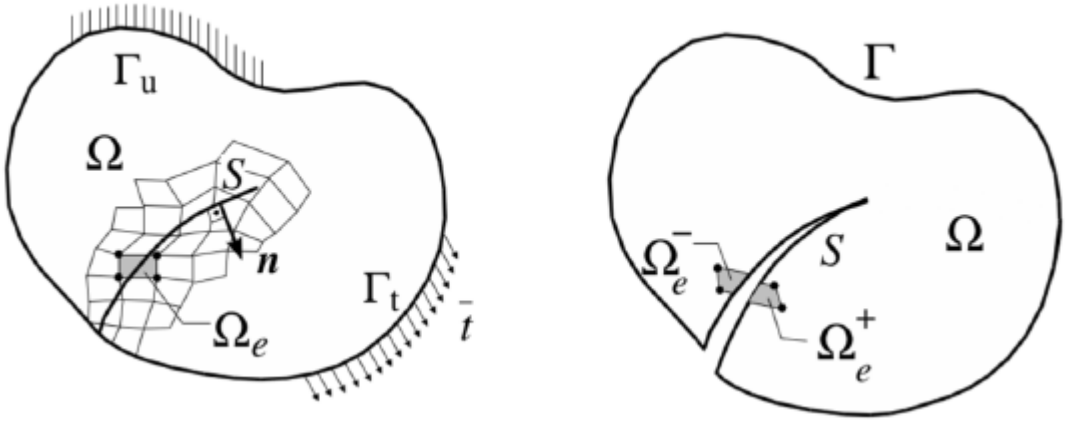
Segundo Beserra (2015), essa técnica se mostrou eficiente em relação ao custo computacional para simular o faturamento, já que ela permite uma discretização do domínio da fratura de uma malha relativamente grosseira, capturando adequadamente o efeito de uma descontinuidade de espessura de 10% da espessura do elemento, podendo ainda simular o problema de faturamento hidráulico em formações rochosas com fraturas preexistentes

Ainda segundo Beserra (2015), essa técnica permite a representação de descontinuidades no campo dos deslocamentos no interior do elemento, evitando a necessidade de malhas muito refinadas ou de remalhar várias vezes a mesma geometria ou ainda de utilizar elementos de interface discretos.

A implementação dessa descontinuidade no CODE_BRIGHT se dá de forma não intrusiva no código, uma vez que o salto no campo dos deslocamentos pode ser calculado como deformações inelásticas equivalentes no programa de elementos finitos durante a integração das tensões nos elementos.

Para a incorporação das descontinuidades (Figura 9), as deformações são localizadas em bandas estreitas (descontinuidades fracas) nas quais os deslocamentos se concentram, a partir da degradação do material, com a zona de processamento da fratura, até a ruptura completa da descontinuidade, desenvolvendo a descontinuidade no campo dos deslocamentos (descontinuidade forte).

Figura 9 – Sólido com Descontinuidades Incorporadas.



Fonte: Manzoli, 2008

3.1 Campo de Deslocamentos nas Descontinuidades

Beserra (2015) ilustra um elemento triangular de domínio Ω_e, comprimento l_e, com uma banda de localização das deformações, S_e, de largura h, que divide o elemento em duas zonas, Ω_e^- e Ω_e^+, isolando o nó 1 dos nós 2 e 3, Figura 10.

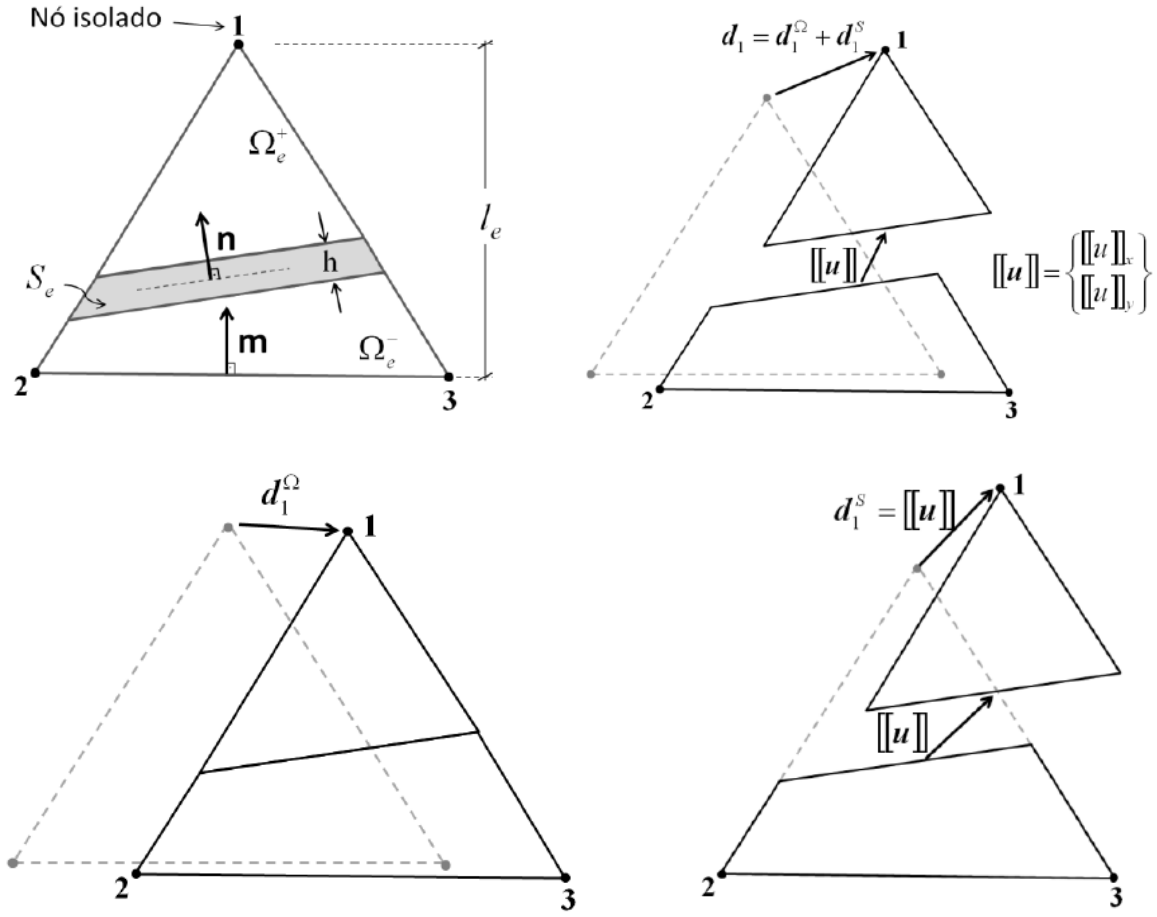
Nesse caso o elemento possui duas componentes de deslocamento, um associado ao deslocamento do meio contínuo, u_Ω, e outro associado ao movimento de corpo rígido entre as duas faces do elemento que foram decompostas, u_S. Assim, o campo dos deslocamentos total é:

$$u = u_\Omega + u_S \tag{99}$$

Sendo o movimento relativo entre as interfaces do elemento uniforme, a componente de corpo rígido pode ser expressa como:

$$u_S = H_{S_e}[[u]] \tag{100}$$

Figura 10 – Salto de Deslocamentos e Direção da Normal na Descontinuidade Incorporada.



Fonte: Beserra, 2015

Sendo o vetor de deslocamentos ([[*u*]]) que compõe as componentes do salto de deslocamentos na interface, e a função degrau (H_S), uma função descontínua em Ω_e:

$$[[u]] = \begin{Bmatrix} [[u]]_x \\ [[u]]_y \end{Bmatrix} \tag{101}$$

$$H_{Se} = \begin{cases} 1 \; em \; \Omega_e^+ \\ 0 \; em \; \Omega_e^- \end{cases} \tag{102}$$

3.2 Campo de deformações

i) Deformação na parte contínua

Beserra (2015) mostra que a deformação da parte contínua pode, pela função de forma convencional de elementos finitos, ser obtida:

$$\varepsilon_{\Omega} = Bd_{\Omega} = B(d - d_s) \tag{103}$$

Na qual ***B*** é a matriz que relaciona deformações e deslocamentos convencionais de elementos finitos, d_{Ω} é o vetor de deslocamentos nodais da parte contínua e d_S é o vetor da parte descontínua, associado ao movimento de corpo rígido do elemento, dada a seguir:

$$d_S = P[[u]] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{104}$$

P é a matriz de projeção, de maneira que o produto entre P e o salto dos deslocamentos ([[*u*]]) seja igual ao próprio salto dos deslocamentos. Sendo assim, para o triângulo dos três nós, P pode ser reescrito:

$$\varepsilon_{\Omega} = Bd - BP[[u]] \tag{105}$$

Bd está associado à deformação regular do elemento e ***BP*** pode ser escrito como o gradiente da função de forma do nó isolado.

Seja **n** um vetor unitário normal a *S* na direção de Ω_e^+ e ***m*** um vetor unitário normal à base do elemento na direção do nó isolado. Dá-se então as matrizes $\boldsymbol{N_n}$ e ***M*** com as componentes ***n*** e ***m***, respectivamente:

$$N_n = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{106}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix} \tag{107}$$

Considerando o elemento com funções de forma lineares, o gradiente da função de forma se dá:

$$\nabla N_1 = \frac{1}{l_e} M \tag{108}$$

Onde: l_e é o tamanho do elemento, correspondente a altura do elemento referente ao nó isolado. E assim, a equação das deformações é reescrita por Beserra (2015) como:

$$\varepsilon_\Omega = \varepsilon - \frac{1}{l_e} M[\![u]\!] \tag{109}$$

ii) Deformação na descontinuidade

A partir do campo de deslocamentos descontínuos, Beserra (2015) mostra que o campo das deformações na banda de localização pode ser obtido:

$$\varepsilon_S = \varepsilon_\Omega + D(H_{S_e}[\![u]\!]) = \underbrace{\varepsilon - \frac{1}{l_e} M[\![u]\!]}_{S_\Omega} + \delta_{S_e} N_n [\![u]\!] \tag{110}$$

Onde δ_{S_e} representa o delta de *Dirac* em S_e que decorre do cálculo do gradiente material da função *degrau.* Numericamente δ_{S_e} é substituído por:

$$\delta_{S_e}(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{h} \;\; se \;\; x \in S_e \\ 0 \;\; caso \;\; contrário \end{cases} \tag{111}$$

Assim, quando a espessura da banda de localização (*h*) tende a zero, essa aproximação se mostra como o delta de Dirac. O parâmetro *h* pode ser considerado como a largura da banda de localização muito estreita contendo *S*, sobre a qual a descontinuidade dos deslocamentos é regularizada.

O campo de deformações na banda de localização fica descrito por Beserra (2015) como:

$$\varepsilon_S = \varepsilon - \frac{1}{l_e} M[\![u]\!] + \frac{1}{h} N_n [\![u]\!] \tag{112}$$

3.3 Consistência Cinemática

Segundo Beserra (2015), para que o deslocamento de corpo rígido seja consistente, o campo das deformações deve reproduzir uma relaxação na parte contínua do elemento. Dessa forma, se o vetor de deslocamentos for apenas inelástico, ele deverá ser reproduzido da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{\Omega} = 0 \;\; se \;\; d = d_S \left(= P[\![u]\!]\right) \tag{113}$$

3.4 Campo das Tensões

O campo das tensões é obtido pela relação constitutiva:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Omega} &= C\varepsilon_{\Omega} \\ \sigma_{\Omega} &= C\left(\varepsilon - \varepsilon_S\right) \end{aligned} \tag{114}$$

C é a matriz das constantes elásticas do material.

Observa-se que nessa relação constitutiva os deslocamentos da descontinuidade, associada ao movimento de corpo rígido, não tem influência na deformação da parte contínua. É interpretada, portanto, essa deformação como movimento contínuo inelástico equivalente, que relaxa as tensões na parte contínua do elemento.

O campo de tensões na banda de localização é obtido a partir da relação:

$$\sigma_S = \Sigma(\varepsilon_S) \tag{115}$$

Onde Σ representa a lei constitutiva inelástica do tipo contínuo, relacionando as tensões e deformações do material.

3.5 Condição de Continuidade das Tensões

Para que haja continuidade no campo das tensões, como a descontinuidade adiciona graus de liberdade ao problema, faz-se necessário equações de acoplamento do contínuo e interface para que complemente as equações de equilíbrio. Tem-se:

$$t_\Omega - t_S = 0 \ \ em\ S \tag{116}$$

Onde t_Ω é o vetor das tensões da parte contínua do elemento próximo à interface e t_s é o vetor das tensões do elemento na interface.

Nesse modelo é imposta a condição de continuidade da tensão média em todo o domínio do elemento, incluindo a descontinuidade. Essa condição de continuidade é calculada pela forma fraca, na qual é imposta a continuidade das tensões em um ponto discretizado, situado na interface da descontinuidade.

O campo das deformações totais no interior da descontinuidade, quando a aproximação de descontinuidade forte é adotada, é calculado por:

$$N_n^T\left(\sigma_\Omega - \sigma_S\right) = 0 \tag{117}$$

Na qual podemos obter, substituindo as tensões:

$$N_n^T \left(C\varepsilon_\Omega - \sum \left(\varepsilon_S \right) \right) = 0 \tag{118}$$

E por fim, o sistema de equações substituindo as deformações:

$$N_n^T \left(C\left(\varepsilon - \frac{1}{l_e} M[\![u]\!] \right) - \sum \left(\varepsilon - \frac{1}{l_e} M[\![u]\!] + \frac{1}{h} N_n [\![u]\!] \right) \right) = 0 \tag{119}$$

Sendo resolvido pelo método iterativo de Newton-Raphson.

3.6 Matriz de Rigidez do Elemento, Vetor de Forças Internas e Operador Tangente

Pelo método de elementos finitos, o vetor de forças internas, ou forças de corpo é dado por:

$$F_{\text{int}_e} = \int_{\Omega_e} B^T \sigma d\Omega_e \overset{h \to 0}{\cong} \int_{\Omega_e} B^T \sigma_\Omega d\Omega_e \tag{120}$$

A matriz de rigidez do elemento:

$$K_e = \frac{\partial F_{\text{int}_e}}{\partial d_e} = \int_{\Omega_e} B^T \underbrace{\frac{\partial \sigma_\Omega}{\partial \varepsilon}}_{operadortangente} B d\Omega_e \tag{121}$$

E a matriz tangente de Descontinuidades Fortes é:

$$C_{tg} = \frac{\partial \sigma_{\Omega}}{\partial \varepsilon} = C\left(I + \frac{1}{l_e} M \left(\frac{\partial R}{\partial [\![u]\!]} \right)^{-1} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \tag{122}$$

Sendo:

$$\frac{\partial R}{\partial [\![u]\!]} = N_n^T \left(-C \frac{1}{l_e} M - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon_S} \left(\frac{1}{h} N_n - \frac{1}{l_e} M \right) \right) \tag{123}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = N_n^T \left(C - \frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon_S} \right) \tag{124}$$

3.7 Algoritmo de Determinação da Trajetória da Descontinuidade

A etapa de determinação da localização da descontinuidade é uma etapa crucial para o modelo. Nesse caso será imposta uma descontinuidade embebida plana à base do elemento.

O algoritmo se resume a definir uma trajetória da descontinuidade, definindo um campo vetorial no qual as iso-superfícies determinem a partir da direção da normal do plano a localização e a posição da mesma no sistema de coordenadas adotado.

A partir do campo de tensões do problema, se estabelece um campo vetorial da direção da normal à superfície da falha que pode variar no tempo conforme as tensões, sendo fornecido um vetor normal a superfície da falha $\mathbf{n}(x,t) = (n_x\ n_y\ n_z)^T$.

Esse vetor permite que o modelo concentre a descontinuidade na direção normal à fornecida.

Pretende-se encontrar um campo escalar θ(x,t) no qual o gradiente do campo composto por superfícies de iso-valores (curvas de nível) seja dado por $\Delta\theta = \boldsymbol{n}$, assim, os vetores normais a θ devem coincidir com os vetores normais à descontinuidade.

4 VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO DE ALGORITMO IMPLEX

Para que seja modelado o caso de escavação em rochas salinas (modelo de fluência) com reativação de uma falha com o algoritmo implícito-explícito (IMPLEX) para o modelo de Druker-Prager foi necessário realizar a validação e verificação desse algoritmo através dos casos de Expansão de Cavidade, Cisalhamento Direto, Compressão Uniaxial e Estabilidade de Talude mostrados nessa seção.

A verificação do desempenho e funcionalidade dos algoritmos está apresentada através do tempo total de processamento em CPU (*CPUTIME*) e do número de interações (*NUMPASS*).

As relações constitutivas estão apresentadas a partir de gráficos de saída do pós-processo no GID, do Matlab e do gnuplot, onde são descritas também as variações de parâmetros como porosidade, deformações plásticas, deslocamentos nodais e estado de tensões.

4.1 Expansão de cavidade cilíndrica

A teoria de expansão de cavidade é muito utilizada na geotecnia, onde a principal aplicação é dada em casos de interpretação de ensaios de campo, como ensaios pressiométricos e ensaios de penetração de cone.

Dentre os trabalhos que abordam o problema de expansão de cavidade podem-se citar Hill (1950), Burd e Houlsby (1990), Yu e Houlsby (1991 e 1992), Abbo (1997), Sloan et al. (2000), Gomes (2006) e Beserra (2010).

No trabalho de Gomes (2006) foi feita a implementação e validação, para o problema de expansão de cavidades, de um algoritmo de integração de tensões explícito com controle de erro empregando um modelo elasto-plástico de Mohr Coulomb, que comparado com o de Druker-Prager, espera-se que as soluções sejam muito próximas.

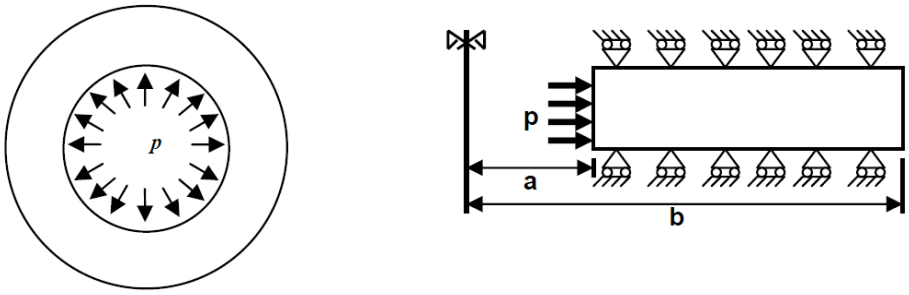
Neste trabalho, a simulação numérica deste problema foi realizada empregando o algoritmo de integração implícita-explícita (IMPLEX) para o critério de plastificação de Druker-Prager com o objetivo de verificação deste para a solução analítica.

Está apresentado a seguir a análise de expansão de cavidade para deformação plana com o modelo de plasticidade perfeita e associada. A geometria foi utilizada de forma simétrica, com um quarto da cavidade, com as devidas condições de contorno nos nós extremos, Figura 11.

Foram analisados resultados para o elemento 18, ilustrado na Figura 12 e as propriedades do material módulo de elasticidade (E), coesão (c), ângulo de atrito (ø), dilatância (ψ), coeficiente de Poisson (ν), relação geométrica entre o raio interno e o raio externo (b/a) e pressão inicial (p_o) estão expressas na Fonte: A autora.

Tabela 1.

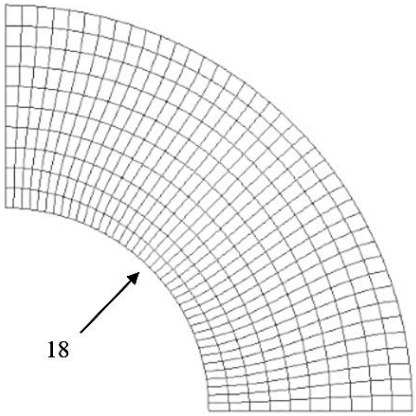
Figura 11 – Condições de contorno para Cavidade Cilíndrica.



Fonte: Gomes, 2006.

Figura 12 – Malha de Elementos Finitos.

Malha de elementos finitos com elementos quadriláteros com 4 pontos de Gauss em cada elemento e um total de 451 nós e 400 elementos.



Fonte: A autora.

Tabela 1 – Propriedades do Material.

E (MPa)	c (MPa)	ø = ψ	ν	b/a	p_o(MPa)
100	0,1	30º	0,30	2	0

Fonte: A autora.

Gomes (2006) compara sua solução de pressão de colapso com a solução analítica apresentada por Yu (1992), Equação 123. Gomes (2006) obteve um valor de pressão máxima de aproximadamente p/c = 1,032, pela solução analítica seria aproximadamente p/c = 1,017, existindo um erro relativo de 1,5%.

$$\frac{p}{c} = \frac{Y + (\alpha - 1)p_o}{c(\alpha - 1)} \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}} - 1 \right) + \frac{p_o}{c} \tag{125}$$

Onde:

$$Y = \frac{2c\cos\phi}{1 - sen\phi} \tag{126}$$

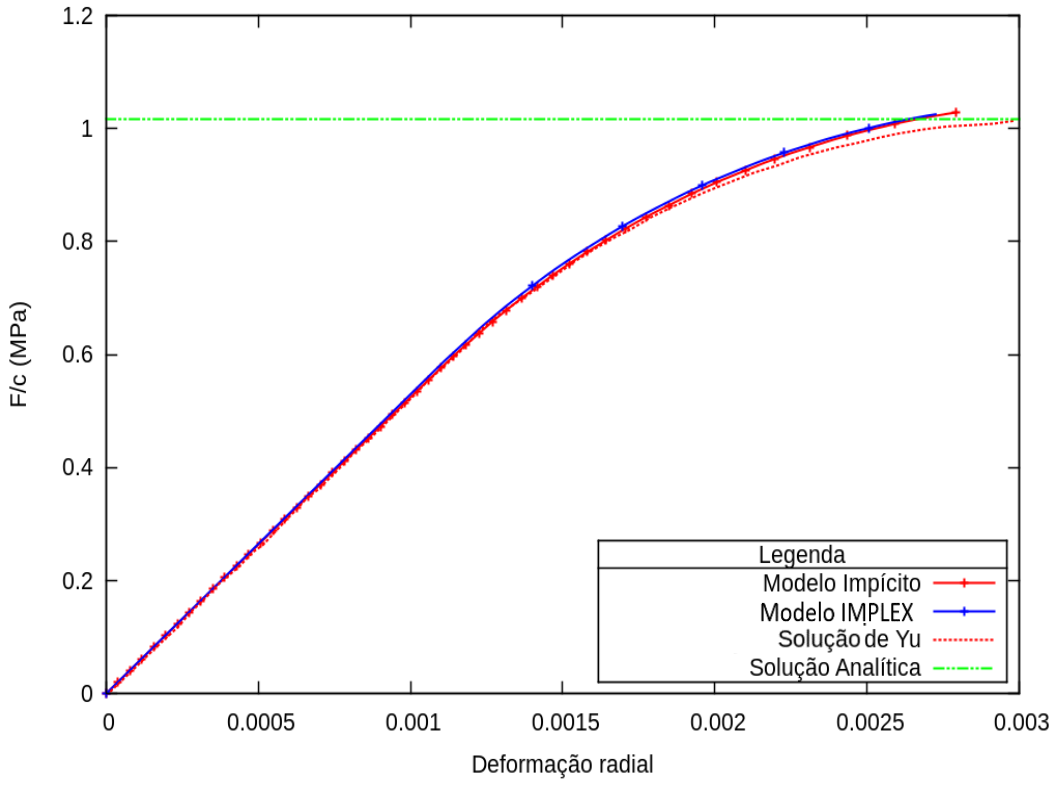
$$\alpha = \tan^2\left(45 + \frac{\phi}{2} \right) \tag{127}$$

No presente trabalho, foi simulado o problema de expansão de cavidades considerando um esquema implícito de integração de tensões e também o IMPLEX com relação ao explícito representado por Gomes (2006) e a solução analítica, bem como com relação ao implícito.

Comparado com a solução analítica, a pressão máxima para o modelo implícito foi de p/c = 1,022 com erro relativo de 0,49%, e para o modelo implícito-explícito (IMPLEX, com incremento de tempo de 1E-05), o erro relativo foi 1,12%, p/c = 1,028,

Figura 13, e de 0,4% com a solução de Mohr Coulomb de Gomes (2006).

Figura 13 – Relação Carga x Deslocamento

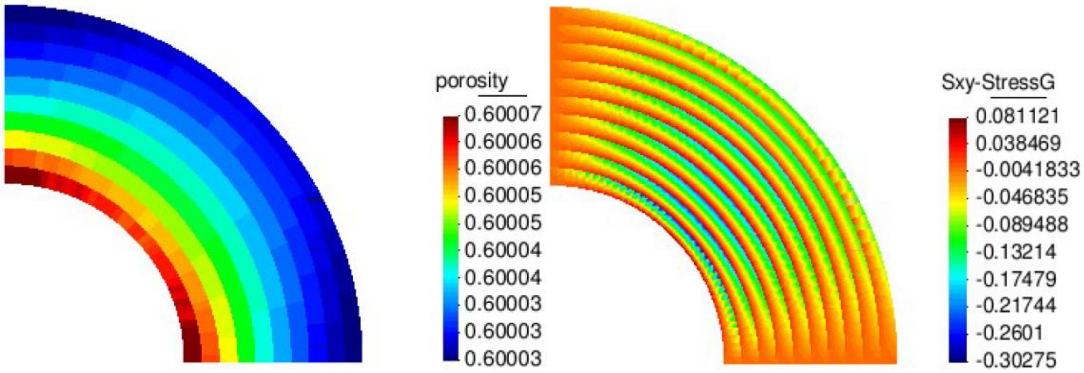


Fonte: A autora.

Nessa curva o modelo implícito e o IMPLEX perdem a convergência nesse ponto de parada.

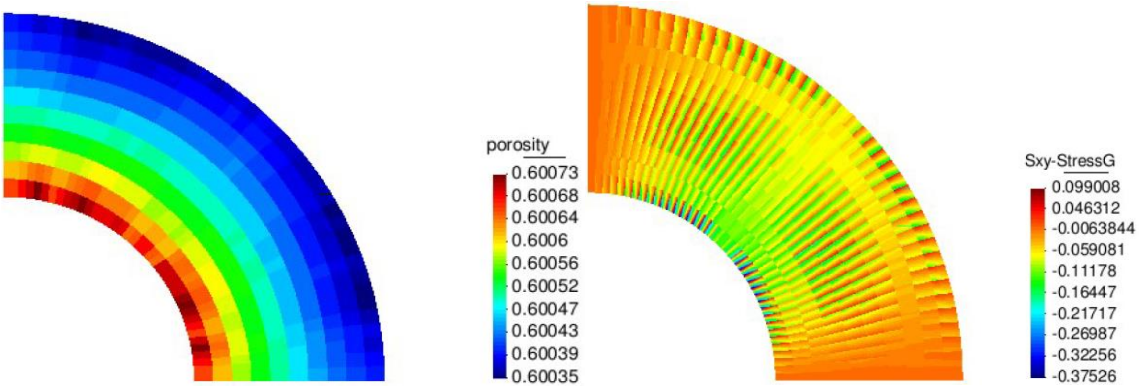
Diante dos resultados verifica-se que o algoritmo de integração implícita e IMPLEX desse modelo apresentam uma aproximação satisfatória em relação à solução analítica. E conforme as representações gráficas na Figura 14 e na Figura 15, observa-se que os modelos possuem comportamentos semelhantes, com distribuição de porosidade e tensões radialmente distribuídas, aumentando com a proximidade ao interior da cavidade, onde se aplica a pressão interna.

Figura 14 – Porosidade e Deformação Plástica do Modelo com Integração Implícita.



Fonte: A autora.

Figura 15 – Porosidade e Deformação Plástica do Modelo com Integração IMPLEX



Fonte: A autora.

4.1.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX ao Incremento de Tempo (dtime)

Para avaliar a sensibilidade do algoritmo foram realizadas comparações entre as formulações implícita e IMPLEX com passos de tempo variando de 0,01s, 0,1s até 1s.

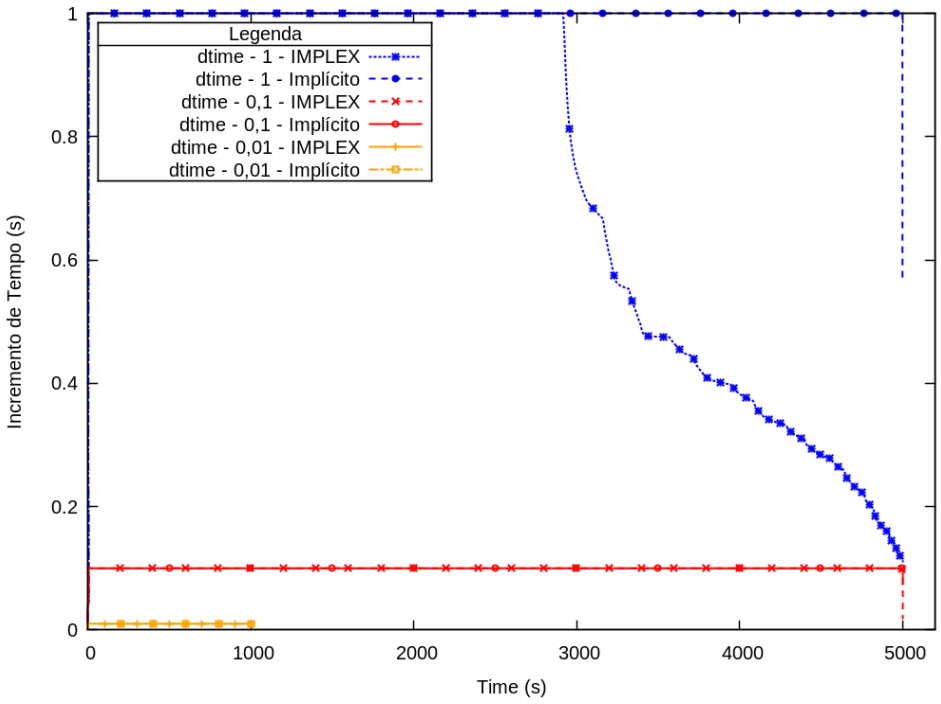
Os resultados apresentados a seguir mostram a evolução do passo de tempo da modelagem, a envoltória de Druker-Prager, a evolução da tensão desviadora com a deformação, e a evolução das tensões verticais com o tempo.

Na Figura 16 o algoritmo se mostra sensível ao aumento passo de tempo para uma mesma tolerância de 0,02. Como as tensões, as deformações e a função de fluência são atualizadas a partir dos valores respectivos de tensão e deformação do passo de tempo anterior, já convergido, a solução do algoritmo do IMPLEX possui um sistema de erro acumulado, obtido do passo de tempo anterior somado ao passo de tempo atual. Em função disso, pode-se observar que, para uma mesma tolerância, no momento em que a evolução das tensões desviadora e média atinge a superfície de fluência, a tolerância é ativada para reduzir o passo de tempo e impedir que o estado de tensões viole a envoltória de ruptura.

Em função desse erro acumulado, quanto maior for o incremento de tempo, maior o erro associado e mais o estado de tensões se afastar da envoltória de ruptura

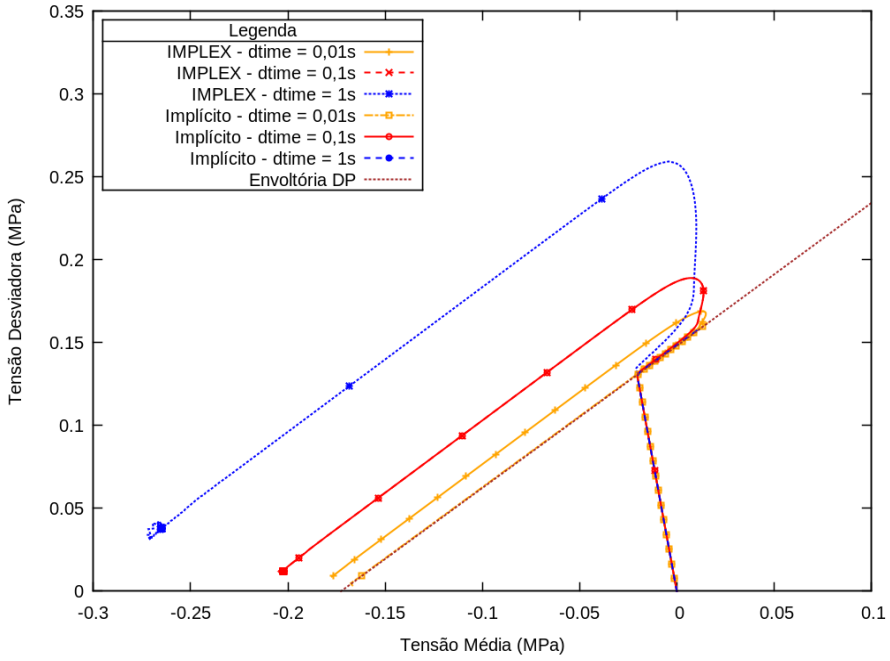
Na Envoltória de Druker-Prager, Figura 17, fica evidente que o modelo Implícito é coerente com o estado de tensões da envoltória de plastificação do material, pois a cada passo de tempo são realizados cálculos com as variáveis do passo de tempo atual. No modelo IMPLEX, que utiliza o resultado das variáveis convergidas do passo anterior, o material passa a exibir um estado de tensões que viola significativamente a envoltória, o que é esperado, Figura 17.

Figura 16 - Evolução do Passo de Tempo



Fonte: A autora.

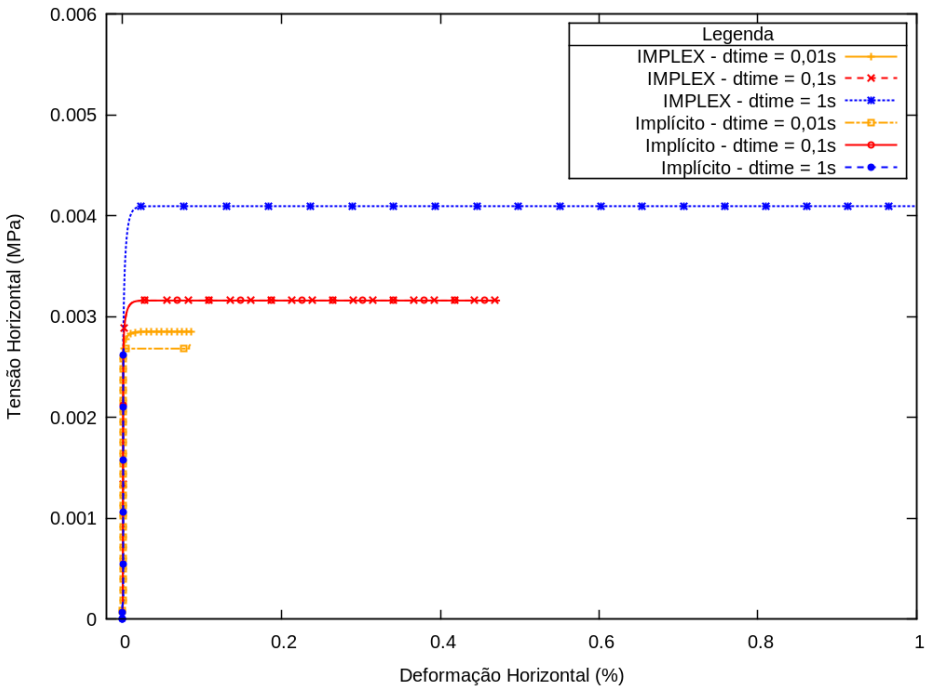
Figura 17 – Envoltória de Druker-Prager



Fonte: A autora.

Na Figura 18 e na Figura 19, semelhante ao que ocorre na análise da envoltória, observa-se que quanto maior o passo de tempo, maior a tensão desviadora na ruptura e maior a tensão residual, pois o estado de tensões é violado e a solução se afasta da solução de integração implícita.

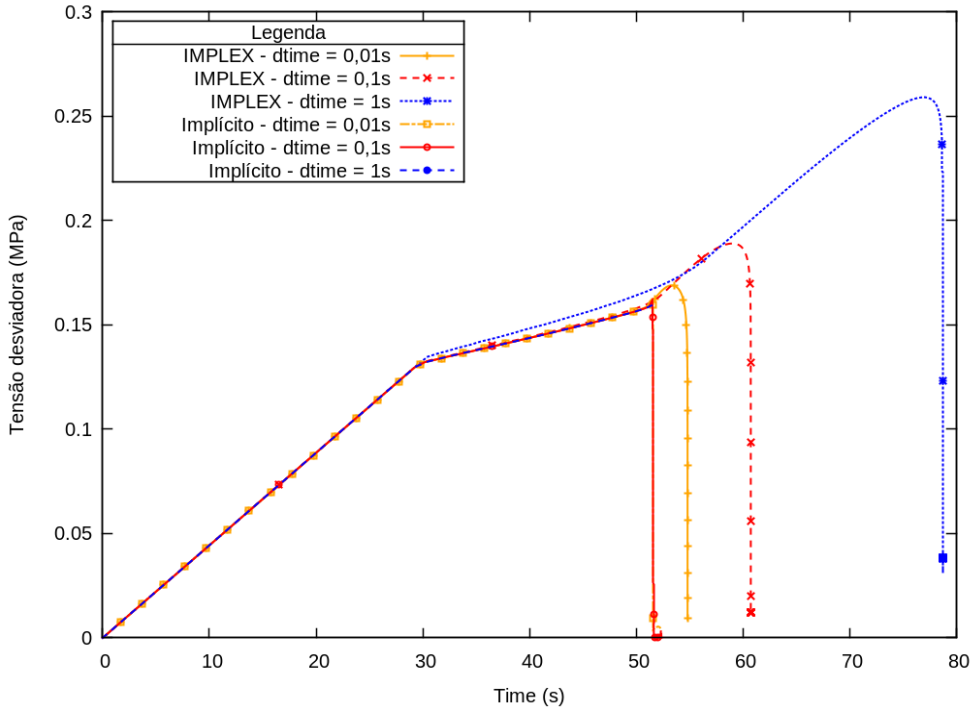
Figura 18 – Tensão x Deformação



Fonte: A autora.

Em todos os gráficos observa-se que no momento que o estado de tensões toca na envoltória, o salto dos deslocamentos é maior quanto maior for o incremento de tempo, porém, com a existência do controle do passo de tempo, o estado de tensões é forçado a retornar ao comportamento de plastificação admissível. Observa-se que a trajetória das tensões para o dtime = 1,0 segundo, por exemplo, viola a superfície de fluência com um salto no campo das tensões, em seguida, com a redução do incremento de tempo, através do controle do passo de tempo, o estado de tensões é forçado a retornar à superfície de ruptura, num comportamento paralelo à superfície de Druker-Prager.

Figura 19 – Tensão Desviadora x Tempo



Fonte: A autora.

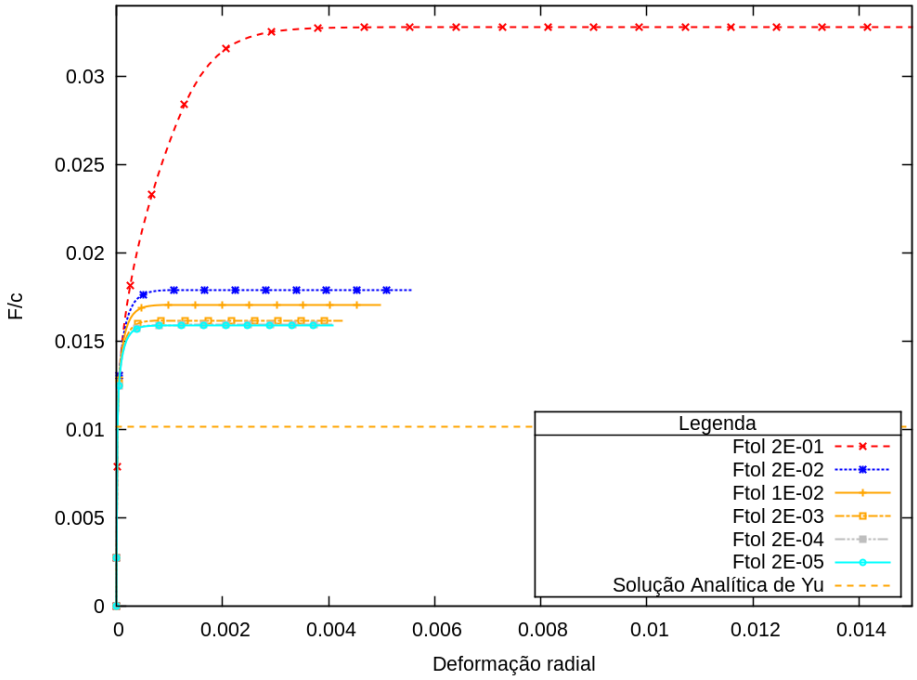
4.1.2 Análise de Sensibilidade do IMPLEX à Tolerância (F_tol)

Como mostrado na seção 3.8.1, o algoritmo possui uma tolerância (F_tol) para controlar o estado de tensões e, para avaliar a sensibilidade do mesmo a essa tolerância, foram realizadas análises com tolerâncias distintas e mesmo incremento de tempo de 0,01s e de 1s.

Na Figura 20, está o comparativo entre as soluções do IMPLEX para diversas tolerâncias diferentes e a solução analítica. A medida em que o algoritmo permite uma violação da superfície de ruptura, Figura 21, às tensões atingem valores mais altos, de modo que fica claro uma falsa resistência, maior do que a tensão máxima da solução analítica. Ainda na Figura 22, comparando com a solução analítica, observa-se que a solução se encontra com erro aproximado de 60% para a tolerância de 1E-05, de 61% para a tolerância de 1E-04, e de 62% para a solução com a tolerância de 1E-03.

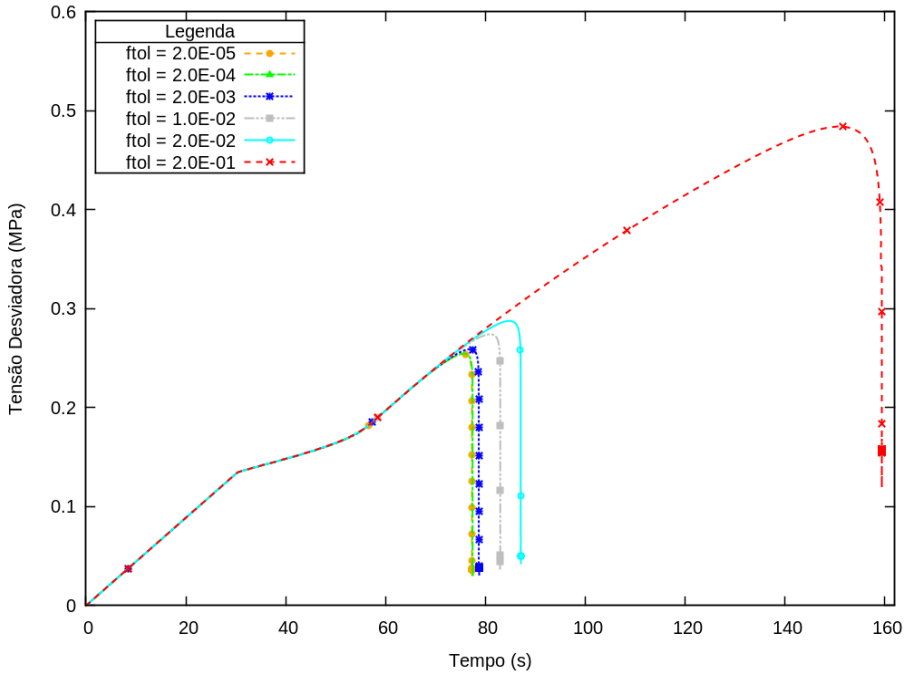
Está claro que, quanto maior a tolerância, mais as tensões atingem valores maiores sem reduzir o incremento de tempo, e, conforme a Figura 23, mais a envoltória de ruptura é violada. Quanto menor essa tolerância, F_tol = 2.0E-05, fica claro que a solução segue a trajetória de tensões de forma coerente.

Figura 20 – Força x Deformação para Tolerâncias Variadas, com incremento de tempo inicial de 1E-00



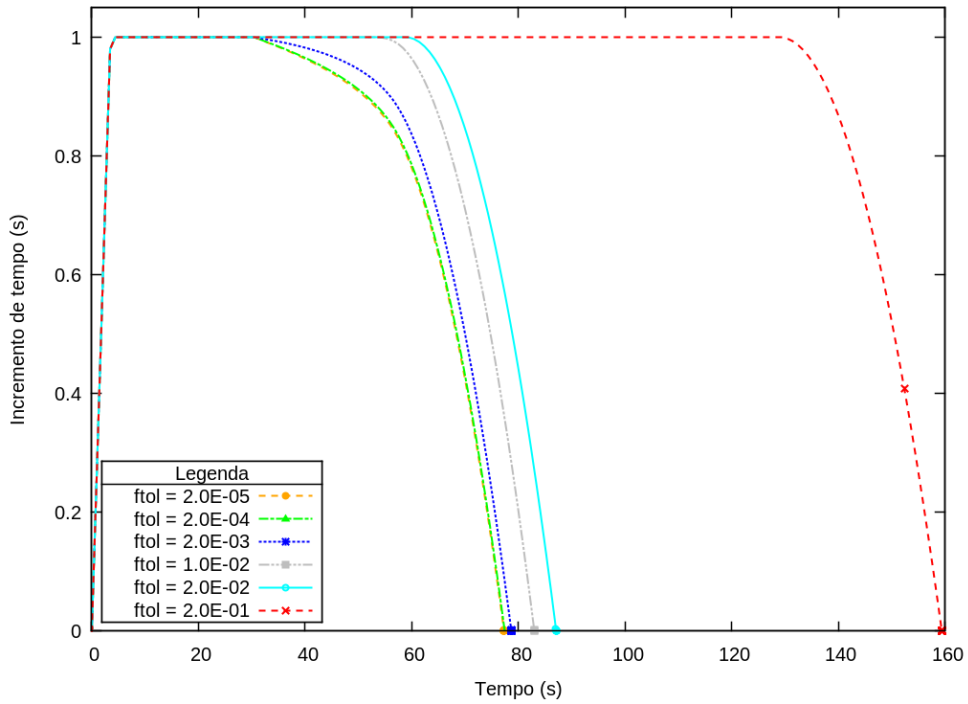
Fonte: A autora.

Figura 21 – Evolução da Tensão Desviadora com o Tempo para Tolerâncias Variadas, com incremento de tempo inicial de 1E-00



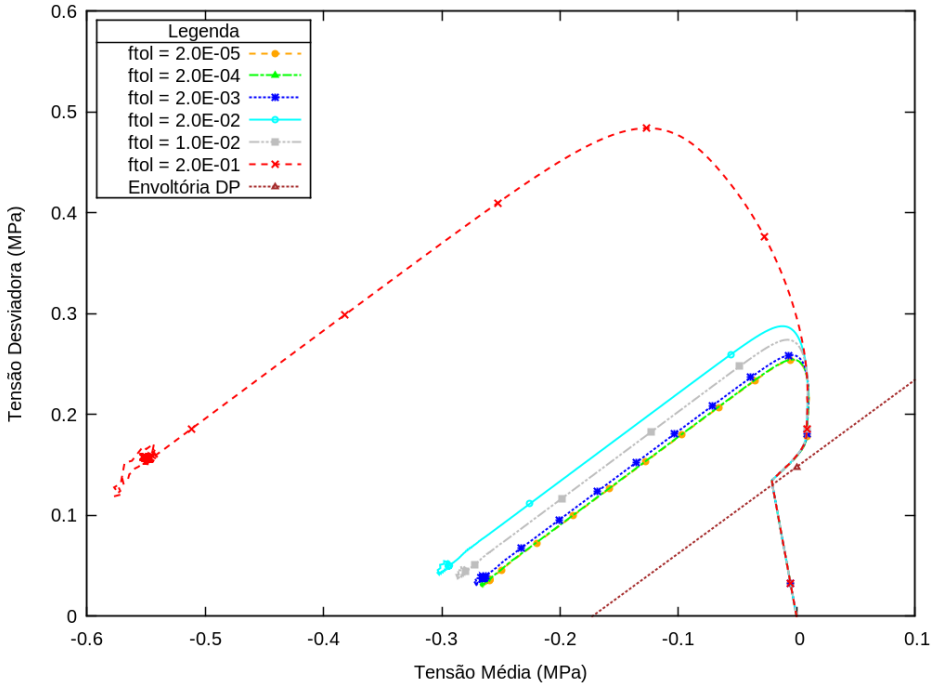
Fonte: A autora.

Figura 22 – Evolução do dtime com o Tempo para Tolerâncias Variadas, com incremento de tempo inicial de 1E-00



Fonte: A autora.

Figura 23 – Envoltória de Druker-Prager com Tolerâncias Variadas com dtime 1E-00

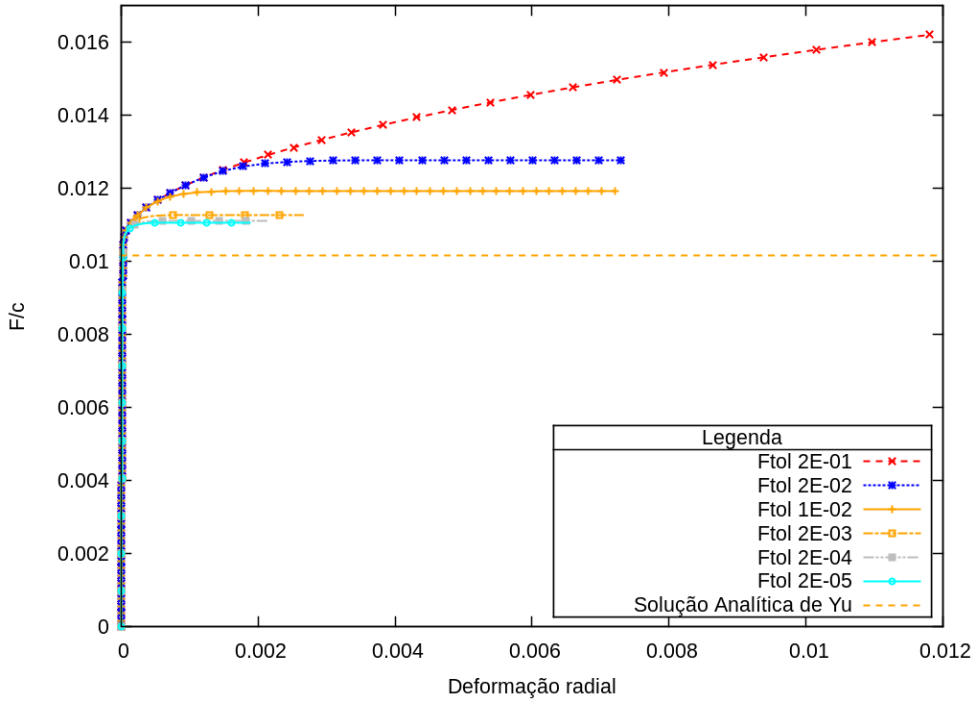


Fonte: A autora.

Semelhante aos resultados para o incremento de tempo de 1E-00, para o incremento de tempo de 1E-02 pode-se observar que o comportamento do estado de tensões é semelhante ao anterior, porém, por haver nessa modelagem um incremento de tempo inferior 100 vezes, as tensões evoluem a patamares inferiores, como esperado.

Na Figura 24, comparando com a solução analítica, observa-se que a solução se encontra com erro aproximado de 10% para o resultado com a tolerância de 1E-05, 10,2% para a tolerância de 1E-04, e com erro de 11% para a solução com a tolerância de 1E-03.

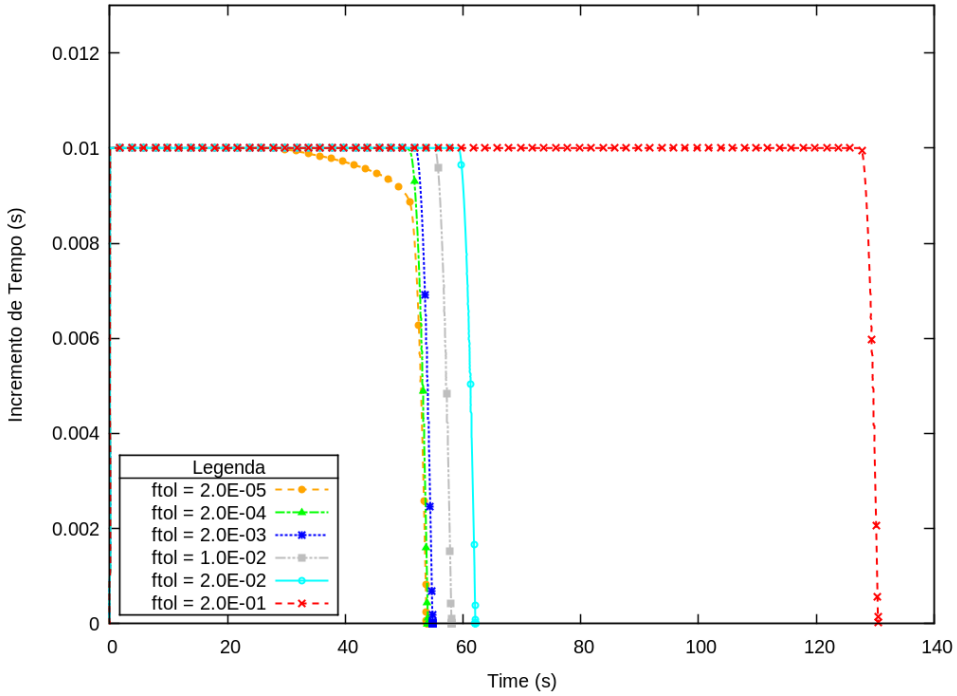
Figura 24 – Força x Deformação para Tolerâncias Variadas, com incremento de tempo inicial de 1E-02



Fonte: A autora.

Na Figura 25 pode-se notar que o incremento de tempo reduz para o tempo de análise aproximado a 54 segundos para as tolerâncias inferiores a 1E-02, mostrando uma correlação entre a tolerância e o incremento de tempo inicial.

Figura 25 – Evolução do Incremento de Tempo com o Tempo para Tolerâncias Variadas, com incremento de tempo inicial de 1E-02

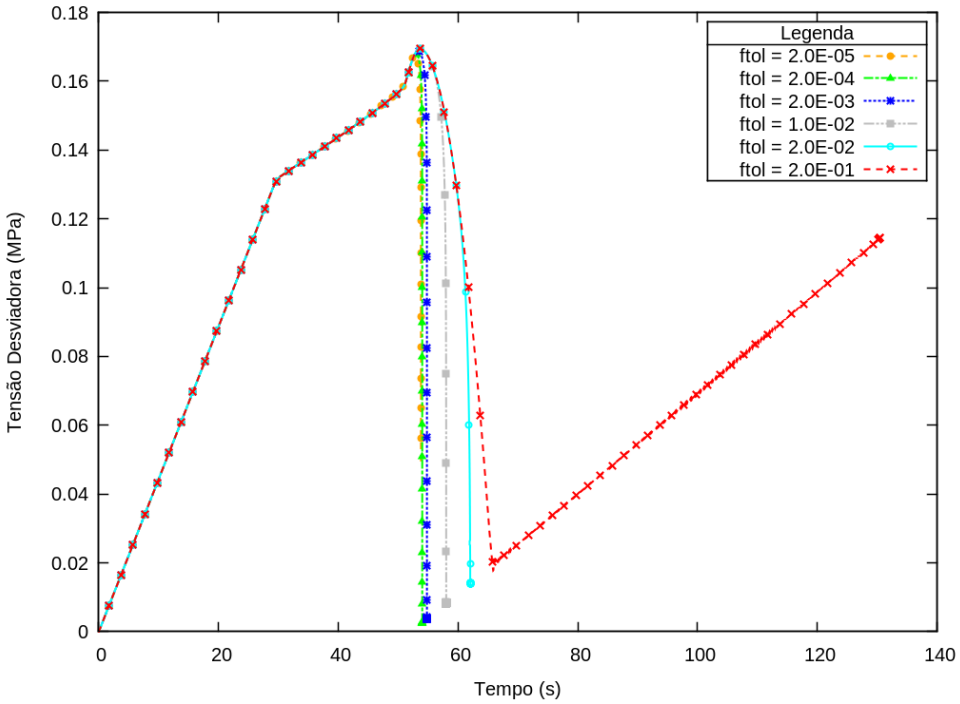


Fonte: A autora.

Na Figura 26 pode ser observado que a tensão máxima desviadora é a mesma para todas as tolerâncias avaliadas, diferentemente do comportamento com incremento de tempo maior visto anteriormente. No momento que a tensão desviadora atinge o máximo, o estado de tensões atinge a envoltória de ruptura e esse é o momento que a superfície de fluência é violada e o algoritmo força o retorno. Nesse caso observa-se que quanto maior o incremento de tempo, mais tempo o algoritmo leva para que a tensão desviadora reduza até seu mínimo.

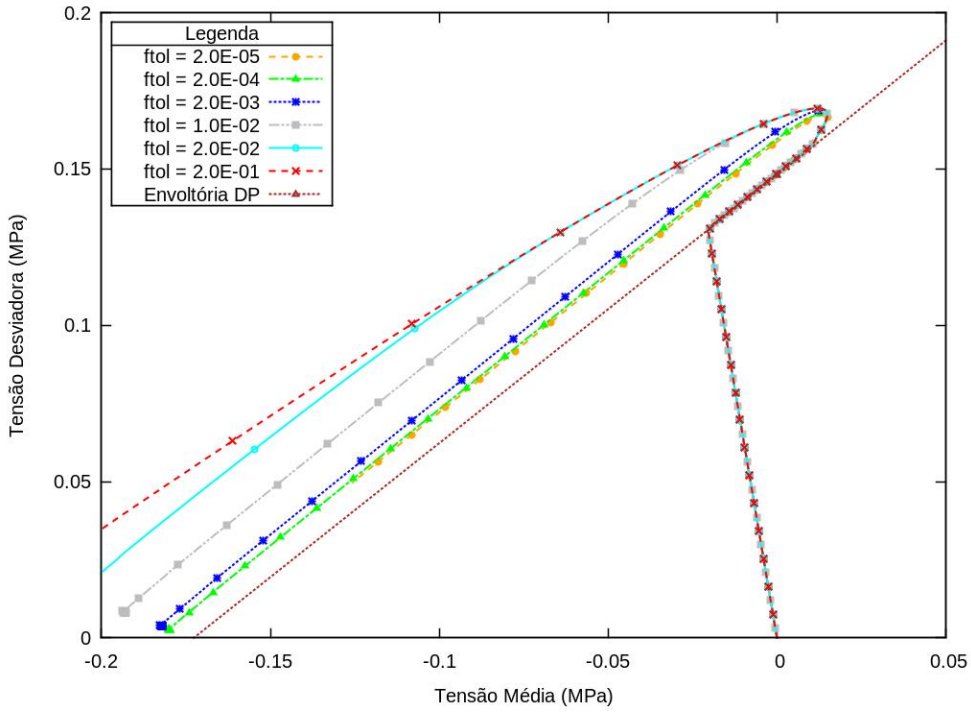
E seguindo esse raciocínio, por fim, na Figura 27, pode-se observar que quanto maior a tolerância mais o estado de tensões viola a envoltória de ruptura.

Figura 26 – Evolução do Estado de Tensão Desviadora com o Tempo para Tolerâncias Variadas, com incremento de tempo inicial de 1E-02



Fonte: A autora.

Figura 27 –Envoltória de Druker-Prager para Tolerâncias Variadas, com incremento de tempo inicial de 1E-02



Fonte: A autora.

Na Tabela 2 está o comparativo dos erros absolutos (abs.) e relativos (rel.), em relação à envoltória de ruptura, obtidos para um valor de tensão média de -0,1 MPa para o incremento de tempo de 1E-00 segundos. Na Tabela 3 está o comparativo dos erros para uma tensão média de -0,05 MPa para o incremento de 1E-02 segundos.

Tabela 2 – Erros obtidos na Envoltória de Druker-Prager com Tolerâncias Variadas para dtime 1E-00

F_tol	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
Valor Abs. (MPa)	0,03	0,28	0,3	0,32	0,32	0,33
Erro Abs. (MPa)	0,46	0,21	0,19	0,17	0,17	0,16
Erro Rel.	4,2	1,67	1,48	1,3	1,26	1,24

Fonte: A autora.

Tabela 3 – Erros obtidos na Envoltória de Druker-Prager com Tolerâncias Variadas para dtime 1E-02

F_tol	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
Valor Abs (MPa)	0,015	0,015	0,022	0,034	0,038	0,039
Erro Abs (MPa)	0,134	0,135	0,128	0,115	0,112	0,11
Erro Rel.	0,33	0,33	0,26	0,14	0,1	0,09

Fonte: A autora.

Observa-se, também, que existe um padrão de comportamento das tensões com a variação da tolerância pois, para um dtime 100 vezes menor, a trajetória se mantém próxima à solução até a tolerância de 2E-03, para valores maiores de tolerância a trajetória viola a superfície de ruptura com erros grosseiros.

Nas Tabelas 4 e 5 pode ser observado a análise quanto ao desempenho da integração IMPLEX do modelo para o mesmo tempo de modelagem. Observa-se que a maior a eficiência da modelagem se dá em F_tol = 2E-03.

Tabela 4 – Eficiência do Algoritmo para o Problema de Expansão de Cavidade com Tolerâncias Variadas para dtime 1E-00

F_tol	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
CPUTIME	16,11	11,09	21,37	24,26	21,97	14,69
NTITER	169	192	204	242	284	296
TIME	77	77	77	77	77	77

Fonte: A autora.

Tabela 5 – Eficiência do Algoritmo para o Problema de Expansão de Cavidade com Tolerâncias Variadas para dtime 1E-02

F_tol	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
CPUTIME	354,54	361,74	583,04	654,73	451,56	527,144
NTITER	5.403	5.403	5.403	5.439	5.606	8.171
TIME	54	54	54	54	54	54

Fonte: A autora.

Nas Tabelas 6 e 7 pode ser observado a análise quanto ao desempenho da integração IMPLEX do modelo para o tempo de modelagem necessário à plastificação do material. Observa-se que a maior a eficiência da modelagem se dá em F_tol = 2E-03, já que para valores menores do que esse o valor da solução se encontra a mesma e também por ser a tolerância que possui menor número de iterações e menor tempo de máquina entre as tolerâncias (2E-03, 2E-04 e 2E-05) que tiveram a melhor solução para a modelagem.

Tabela 6 – Eficiência do Algoritmo para o Problema de Expansão de Cavidade com Tolerâncias Variadas para dtime 1E-00

F_tol	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
CPUTIME	429,30	241,96	316,78	186,86	163,28	102,83
NTITER	4.907	4.768	3.536	2.100	2.088	2.072
TIME	159,43	87,1	83	78,7	77,45	77,3

Fonte: A autora.

Tabela 7 – Eficiência do Algoritmo para o Problema de Expansão de Cavidade com Tolerâncias Variadas para dtime 1E-02

F_tol	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
CPUTIME	1755,23	856,55	882,51	880,39	783,97	527.144
NTITER	21.143	14.258	14.041	7.291	10.200	8.171
TIME	130,4	62	58	54,8	54	53,7

Fonte: A autora.

4.2 Cisalhamento direto

Nessa análise, foi utilizado um modelo que representa bem a análise do ensaio de cisalhamento direto realizado em laboratório. Esse ensaio clássico na obtenção de parâmetros de resistência do solo, no qual, em uma primeira etapa do ensaio se aplica uma tensão vertical para promover a consolidação/adensamento da amostra semelhante ao estado inicial do solo. Posteriormente, em uma segunda etapa, se aplica uma tensão horizontal, tensão cisalhante, mantendo o estado de tensão obtido com a tensão vertical, para avaliar a tensão de cisalhamento máxima.

O objetivo principal dessa modelagem é verificar a adequação do algoritmo de integração das tensões na ruptura com o modelo de cisalhamento de Druker-Prager na descontinuidade forte embebida na superfície de ruptura do solo, nesse caso uma superfície determinada pelo ensaio, e verificar a sensibilidade do algoritmo à estrutura da malha.

Os parâmetros do material são semelhantes a uma areia siltosa com módulo de elasticidade (E), coesão (c), ângulo de atrito (ø), dilatância (ψ) e coeficiente de Poisson (ν) estão descritos na Tabela 8.

Tabela 8 **– Propriedades do Material.**

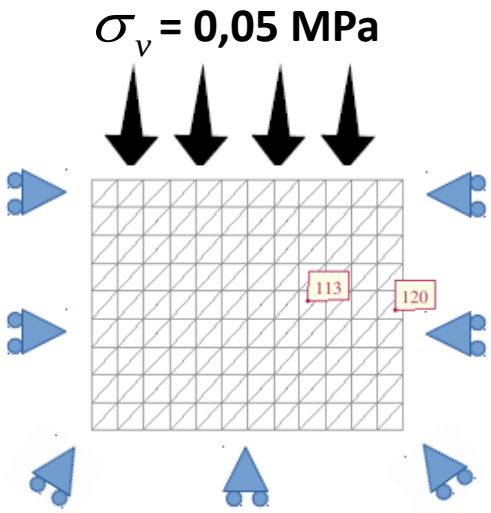
E (MPa)	**ø = ψ**	ν	**c (MPa)**	σ_v **(MPa)**
100	30º	0,30	0,30	0,05

Fonte: A autora.

Esse ensaio não é trivial, suas condições de contorno são complexas e após várias análises, verificou-se que a forma mais adequada de modelar com essa técnica é realizar a primeira etapa de confinamento da amostra, Figura 28, com uma tensão vertical, e em seguida, com o estado novo de tensões de confinamento já atingido, retira-se a tensão vertical e se prescreve um deslocamento na fronteira da região média superior da amostra, Figura 29, para que as tensões atinjam as tensões cisalhantes máximas e consequentemente a envoltória de ruptura.

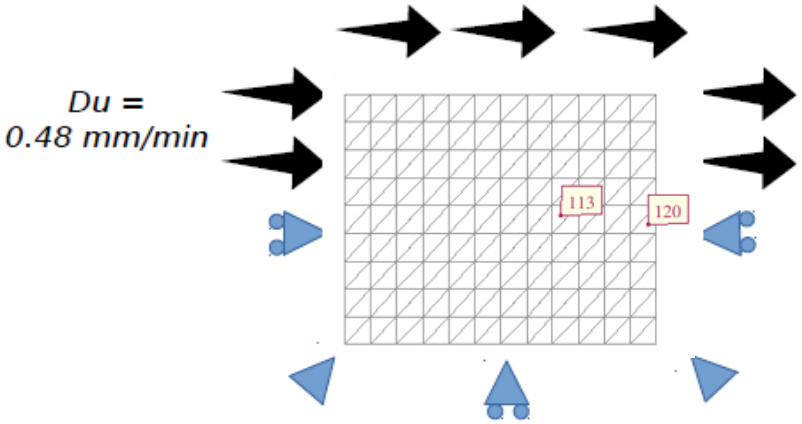
Nesse caso foi utilizada uma amostra de 0,05 metros de comprimento e 0,04 metros de altura, com as devidas condições de contorno na fronteira Figura 29. A malha, é formada por elementos triangulares de 3 nós e 1 pontos de Gauss em cada elemento, com 130 nós e 216 elementos.

Figura 28 – Malha de Elementos Finitos e Condições de Contorno.



Fonte: A autora.

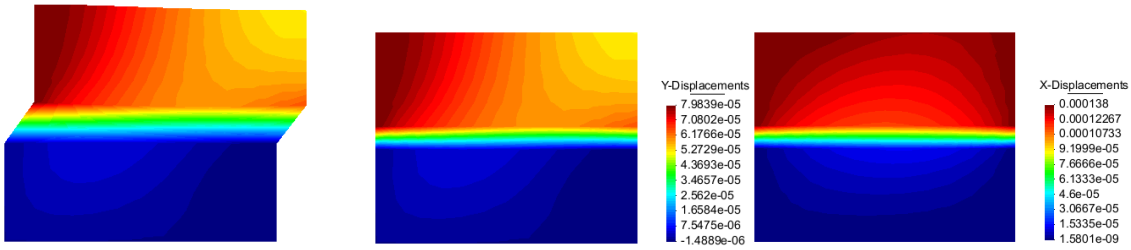
Figura 29 – Condições de Contorno na Segunda Etapa de Deslocamento Prescrito.



Fonte: A autora.

A amostra apresenta o ângulo de atrito e de dilatância iguais, representando a plasticidade associada, possuindo uma expansão devido à dilatância, Figura 30 (a). Observou-se também que o algoritmo responde adequadamente ao deslocamento horizontal da porção média superior da amostra e pode-se observar os deslocamentos sofridos após a simulação do ensaio a seguir Figura 30 (b) e (c).

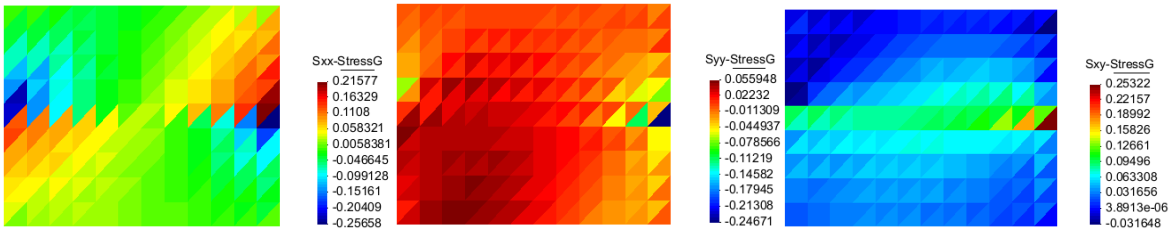
Figura 30 – Campos dos Deslocamentos



Fonte: A autora.

Pode-se observar que o modelo apresenta um comportamento estável, com a concentração das tensões na descontinuidade, Figura 31, que se distribuem uniformemente pelos elementos contínuos da amostra, e com a porosidade, que se eleva apenas na descontinuidade, não variando nos elementos contínuos, Figura 32.

Figura 31 – Campos das Tensões



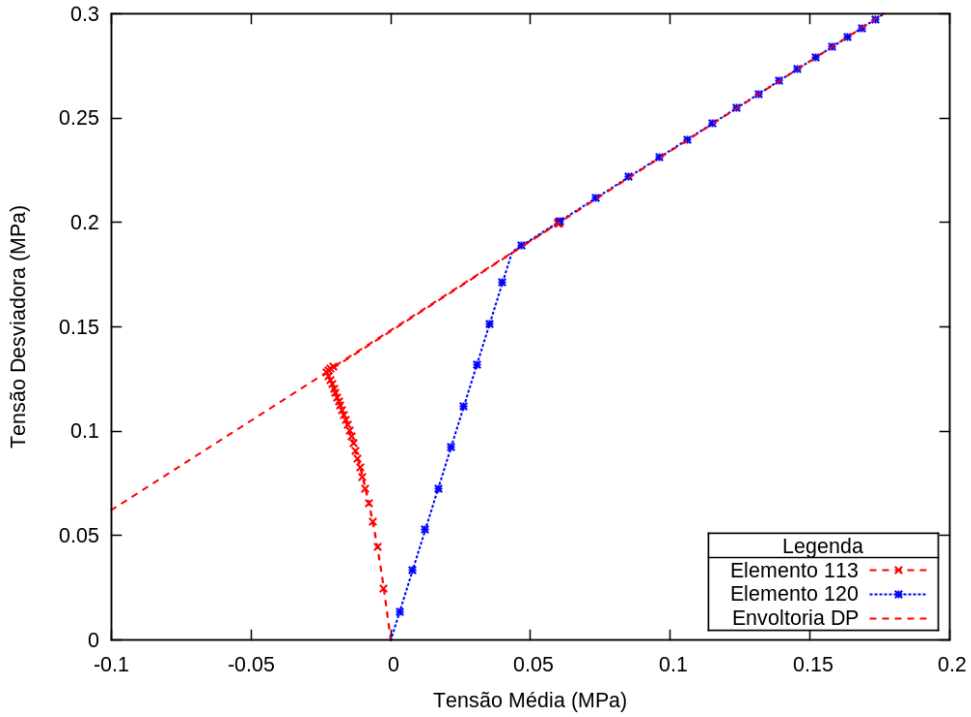
Fonte: A autora.

Figura 32 – Porosidade

Fonte: A autora.

A Figura 33 mostra a confiabilidade do algoritmo na compatibilidade do campo das tensões com a envoltória de ruptura demonstrado pela trajetória das tensões, cujos eixos das coordenadas são os invariantes das tensões $\frac{\sqrt{3}}{2}\|\mathbf{S}\| = \sqrt{3}J_2$ e $p = I_1/3$.

Figura 33 - Envoltória de Druker-Prager



Fonte: A autora.

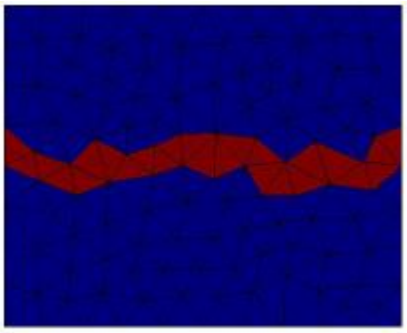
4.2.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX à Estrutura da Malha

Neste caso optou-se por realizar a análise tanto para uma malha estruturada (caso anterior) quanto para uma não-estruturada, de forma a verificar se há influência da malha na solução. Esta análise é importante uma vez que a maioria dos problemas geomecânicos envolvidos na geotecnia e em reservatórios de petróleo implicam em geometrias complexas com restrições no emprego de malhas estruturadas.

A malha não estruturada, Figura 34, foi dimensionada com as mesmas dimensões e refinamento da malha estruturada, seção anterior. Essa malha foi gerada com 128 nós e 218 elementos triangulares.

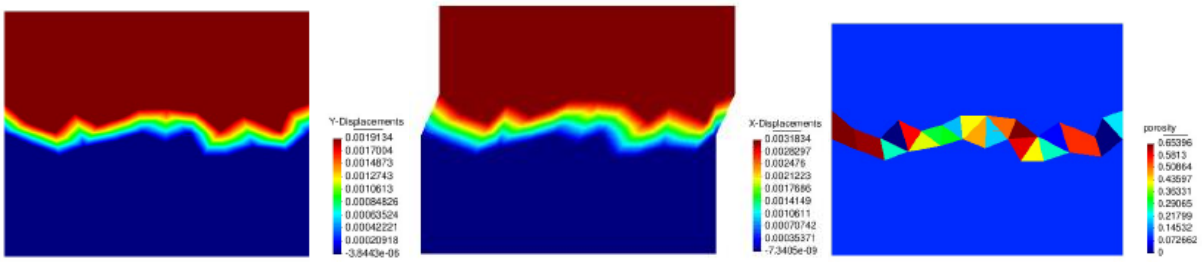
Nesse caso, semelhante à malha estruturada, os deslocamentos e alteração da porosidade, Figura 35, se concentram na descontinuidade, assim como as tensões, que se comportam de forma semelhante ao final da análise, Figura 36.

Figura 34 – Malha de Elementos Finitos e Direção da Descontinuidade



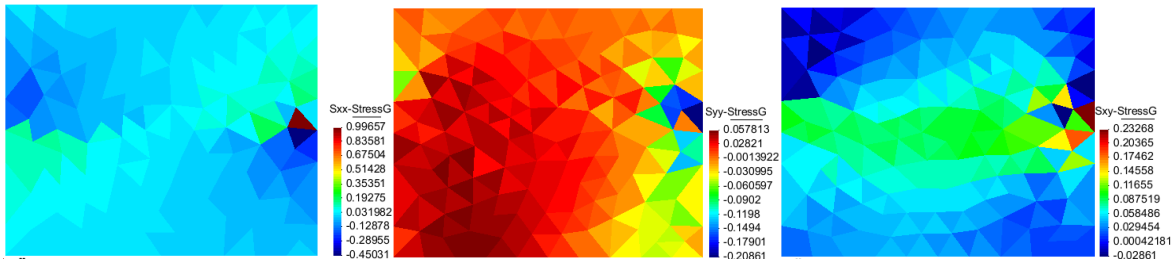
Fonte: A autora.

Figura 35 – Campos dos Deslocamentos e Porosidade



Fonte: A autora.

Figura 36 – Campos das Tensões

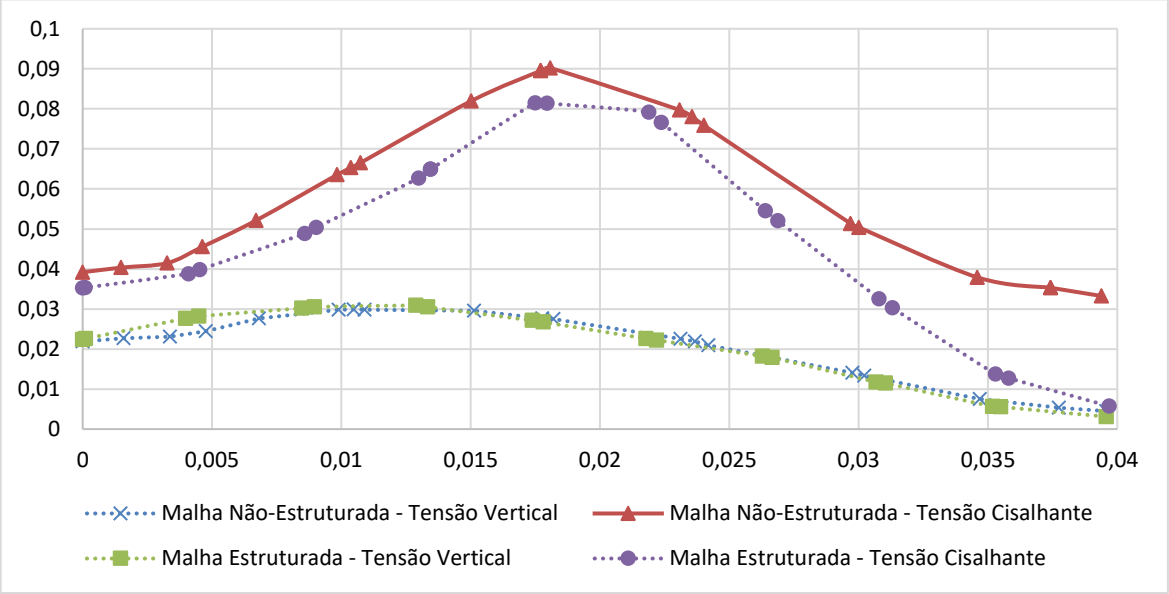


Fonte: A autora.

O comportamento das tensões ao longo de um corte vertical no centro da amostra mostra que a evolução das tensões é coerente, Figura 37. Porém, quando gerado o

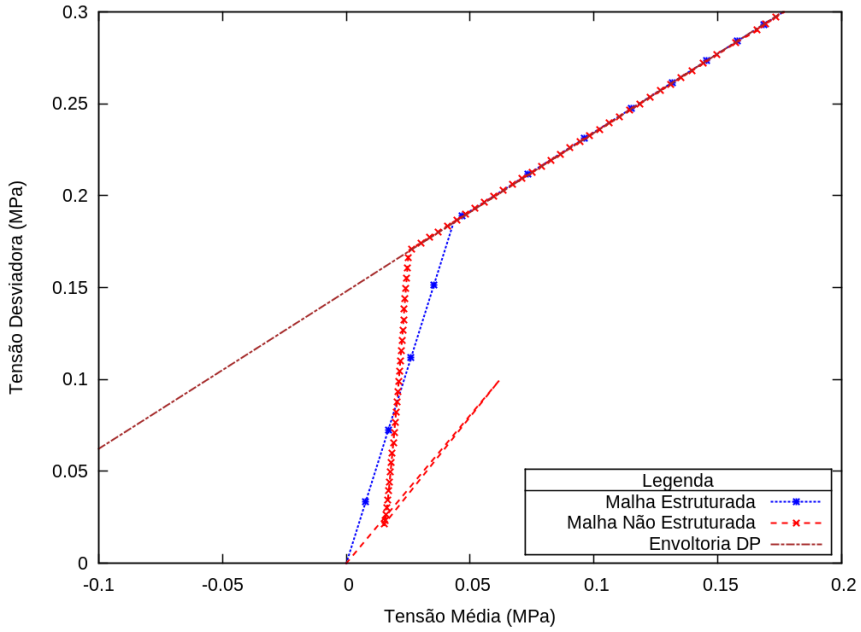
gráfico da evolução das tensões desviadora e média até a envoltória de ruptura observa-se que ocorre um travamento (*locking*) na evolução das tensões na transição da fase inicial de confinamento da amostra para a fase de aplicação da tensão de cisalhamento mostrando uma instabilidade do algoritmo, Figura 38. Além disso, quando comparado com a análise anterior, o ponto de ruptura do material se dá com uma tensão desviadora e média inferiores.

Figura 37 – Gráfico Comparativo das Tensões ao Longo da Amostra em Corte Vertical para a Malha Estruturada e para a Malha Não-Estruturada.



Fonte: A autora.

Figura 38 - Envoltória de Druker-Prager para o Elemento 120 da Malha Estruturada e para o Elemento 124 da Malha Não Estruturada



Fonte: A autora.

4.3 Compressão uniaxial

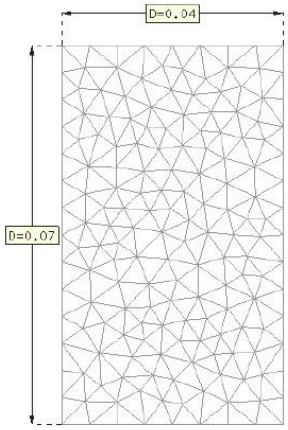
Nessa modelagem foi representado o ensaio uniaxial, no qual a tensão confinante relativa à pressão atmosférica é zero, e uma tensão desviadora vertical é aplicada até a ruptura da amostra. O material modelado é frágil semelhante a uma areia compacta e o objetivo é mostrar a adequação do modelo às superfícies planas de ruptura e verificar a sensibilidade do algoritmo ao posicionamento da descontinuidade embebida.

Para que esse modelo seja representativo, foi verificado o comportamento da evolução do estado de tensões, o qual se mostrou coerente com o resultado esperado, a descontinuidade, portanto, não é linear e passa na superfície mais frágil do solo. Para materiais que não são previamente fraturados é necessário ter uma solução analítica que preveja a superfície de ruptura e/ou fazer suficientes testes na malha, modificando a direção da normal do campo da descontinuidade do elemento. Nessa modelagem, foi verificada a posição analítica da região mais frágil desse ensaio uniaxial que é a angulação da descontinuidade em $\emptyset = 45° + \emptyset'/2$, como $\emptyset' = 30°$, $\emptyset = 60°$.

A geometria utilizada é de uma seção vertical da amostra de diâmetro de 0,04 m e altura de 0,07 m, Figura 39. A seguir estão descritos os parâmetros do material módulo de elasticidade (E), coesão (c), ângulo de atrito ($\emptyset$), dilatância (ψ), coeficiente de Poisson (ν), incremento de tempo (dtime), fator de tolerância (F_tol) e as condições de contorno adotados, com deslocamento vertical imposto de Du = 7,7E-04 m/min, padrão do ensaio, Figura 40.

Figura 39 – Malha de Elementos Finitos para Uniaxial.

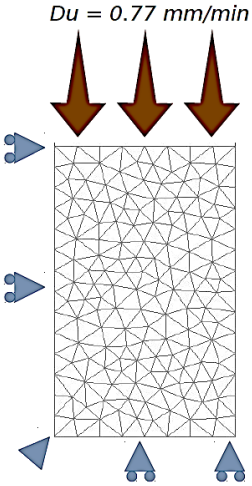
Malha de elementos finitos com elementos triangulares com 1 ponto de Gauss em cada elemento e um total de 171 nós e 296 elementos.

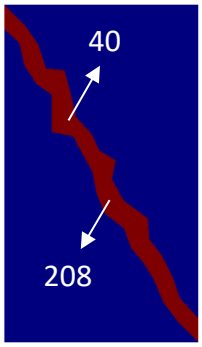


Fonte: A autora.

Figura 40 – (a) Propriedades do material, (b) condições de contorno e (c) o direção da descontinuidade embebida e elementos analisados. (Fonte: Autora)

E (MPa)	ø = ψ	c(MPa)
100	30º	0,1
ν	**dtime**	**F_tol**
0,30	1E-0	0,002



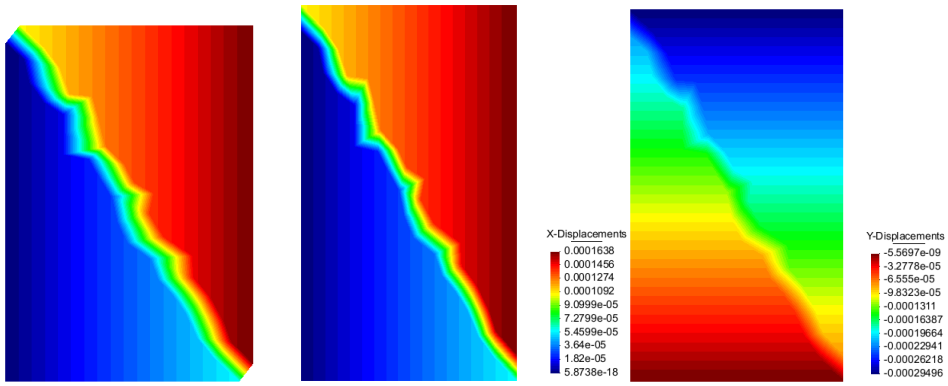


Fonte: A autora.

Fica claro que existe uma concentração dos deslocamentos na direção da descontinuidade e que o acoplamento do deslocamento do meio contínuo ao deslocamento de corpo rígido (dilatância) é adequado. Observa-se o deslocamento de corpo rígido que o elemento apresenta, Figura 41, e a continuidade no campo das tensões, Figura 42.

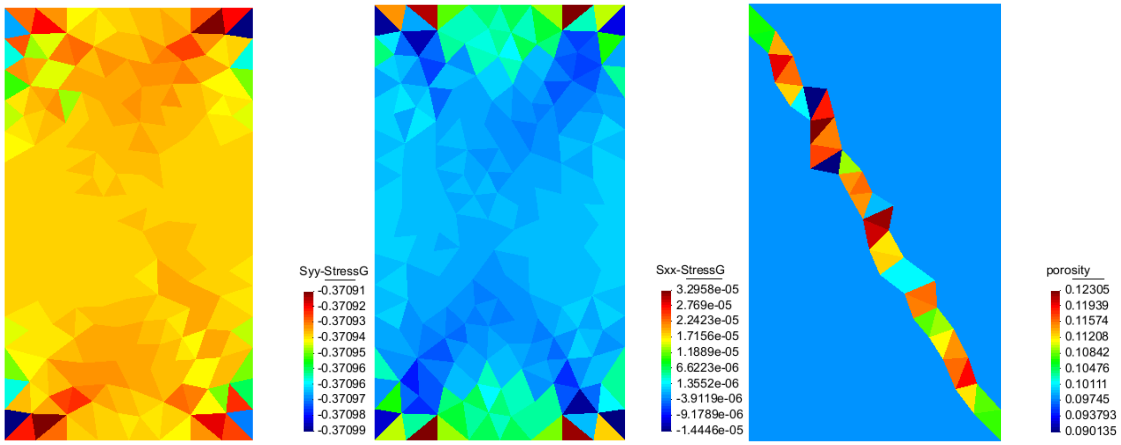
Semelhante ao comportamento do cisalhamento direto, nessa modelagem, a confiabilidade do algoritmo se mostra na compatibilidade do campo das tensões com a envoltória de ruptura demonstrado na Figura 43.

Figura 41 – Campo dos Deslocamentos, escala deformada em 24x.



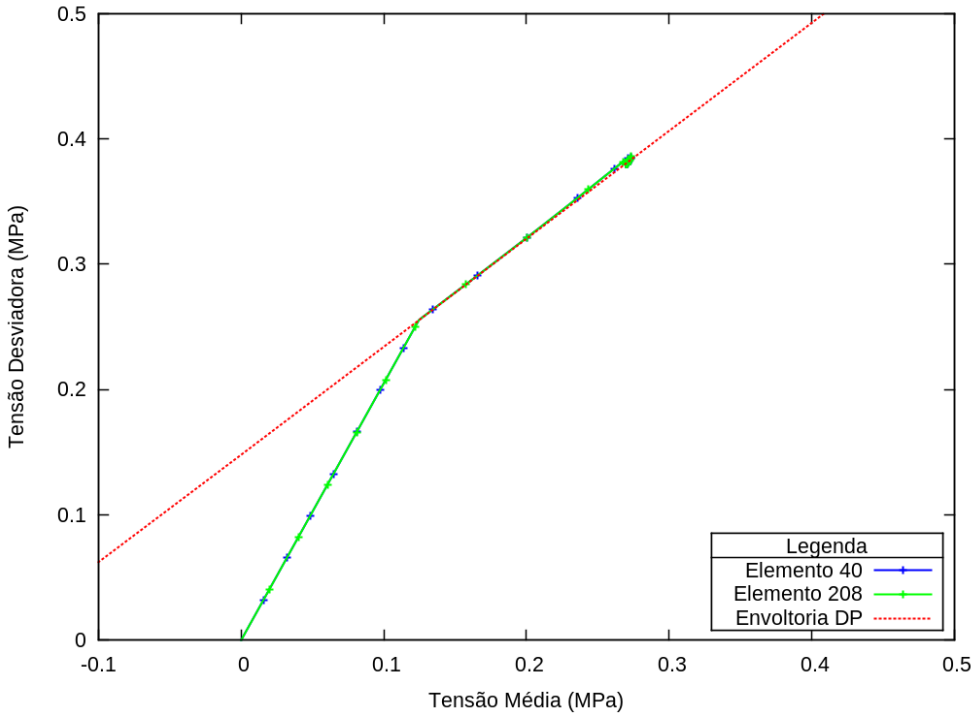
Fonte: A autora.

Figura 42 – Campo das Tensões



Fonte: A autora.

Figura 43 – Trajetória das Tensões e Envoltória de Druker-Prager



Fonte: A autora.

4.3.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX ao Posicionamento da Descontinuidade

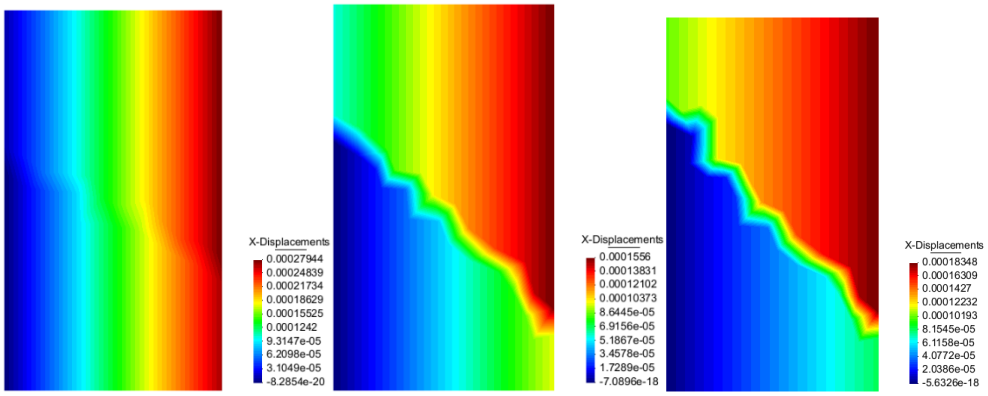
Para verificar a resposta do algoritmo ao posicionamento da fratura foram realizadas modelagens com diferentes angulações na amostra, de modo que a de 60° deva ser a secção de menor resistência da amostra.

Na Figura 44 está o campo dos deslocamentos horizontais para as direções da descontinuidade embebida de 30°, 40° e 45°. E na Figura 45, está ilustrado o campo dos deslocamentos horizontais para as direções de 50°, 55° e 60°, que foi a máxima angulação obtida por limitação da malha.

A seguir estão as saídas gráficas para o caso de Estabilidade de Talude com a tolerância de 2E-03.

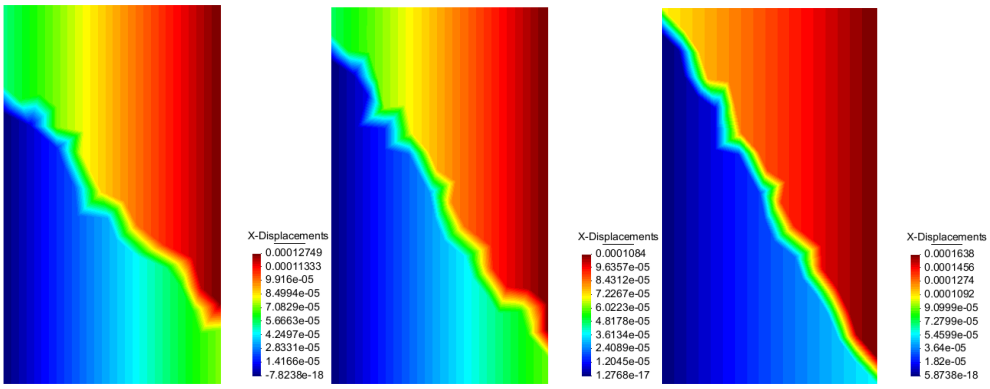
Percebe-se pelos resultados que, de fato, a direção de 60º é a que apresenta a menor resistência ao cisalhamento, com a menor tensão desviadora, Figura 46, e que, quanto menor a inclinação, maior o esforço para ocorrer o cisalhamento do solo, maiores as tensões adquiridas e menores as deformações plásticas, Figura 47.

Figura 44 – Campo dos Deslocamentos para descontinuidade a 30°, 40º e 45º



Fonte: A autora.

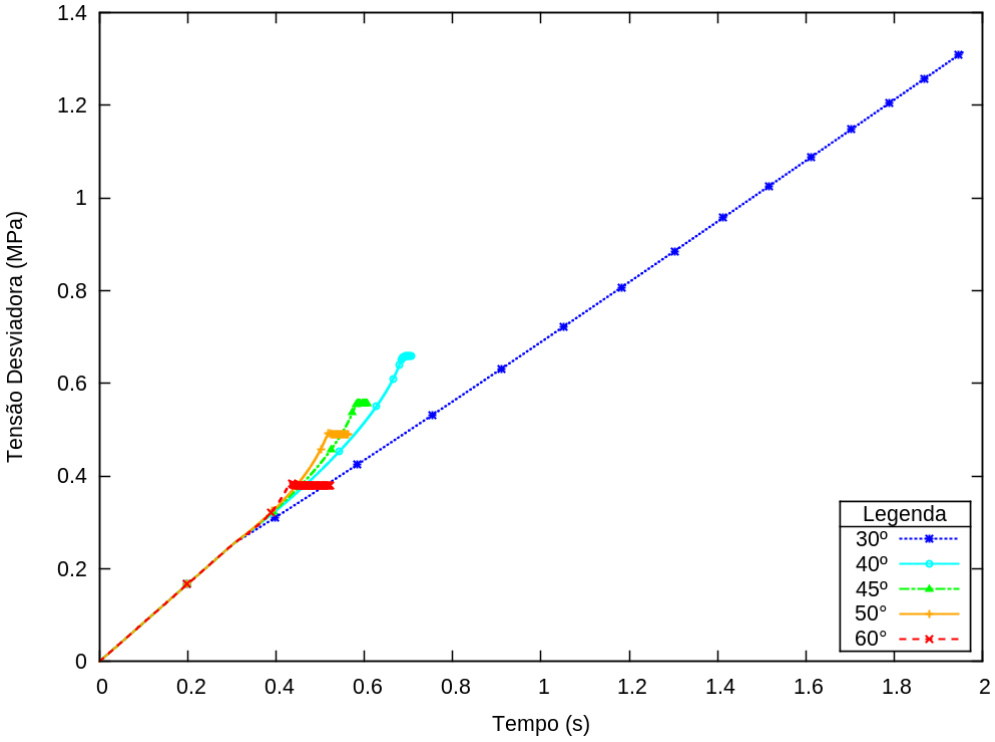
Figura 45 – Campo dos Deslocamentos para descontinuidade a 50°, 55º e 60º



Fonte: A autora.

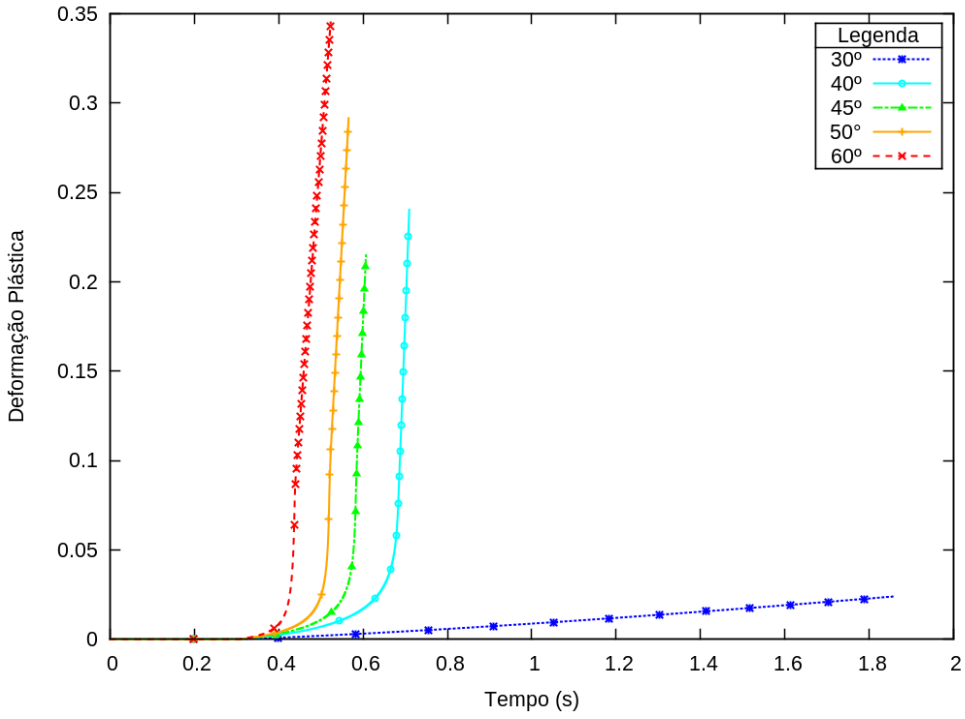
Na Figura 48, a análise do dtime mostra que no momento em que o solo atinge a envoltória de plastificação o controle de tempo é ativado para reduzir o incremento de tempo, de forma que o solo permaneça na trajetória de tensões plasticamente admissíveis, Figura 49, e não viole a superfície de fluência.

Figura 46 – Tensão Desviadora x Tempo



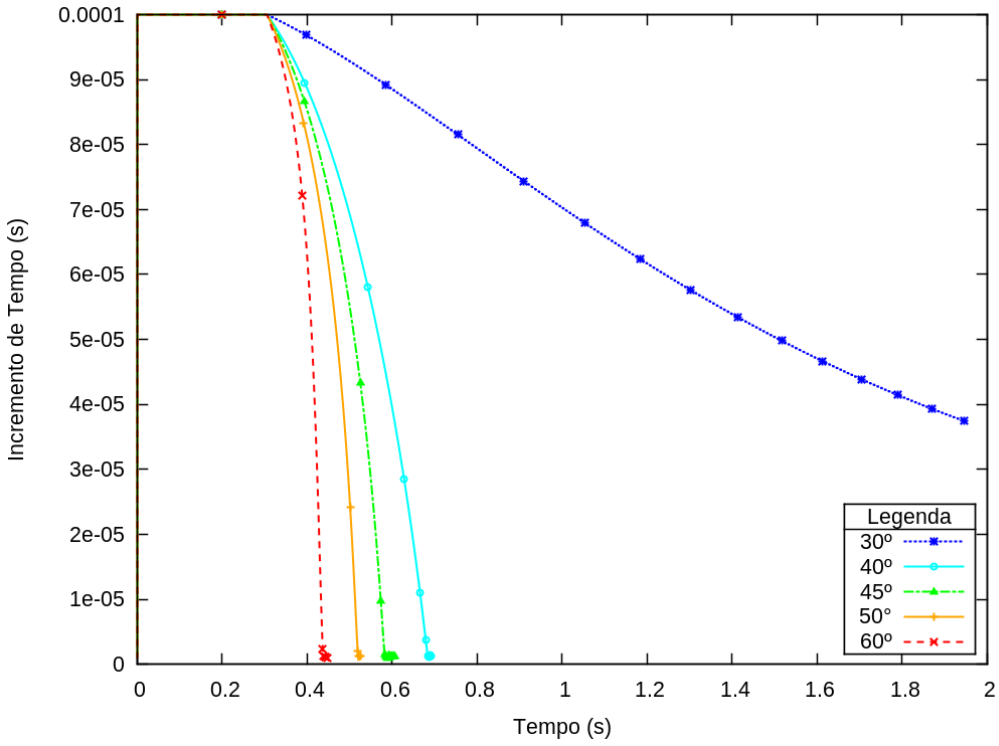
Fonte: A autora.

Figura 47 – Deformação Plástica x Tempo



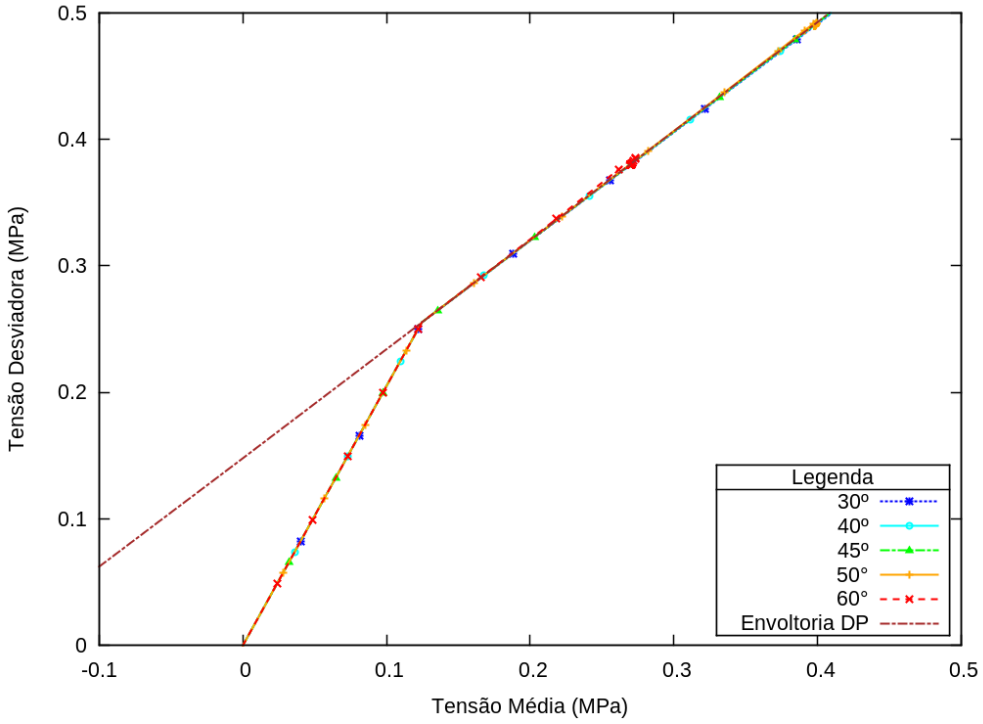
Fonte: A autora.

Figura 48 – Incremento de Tempo x Tempo



Fonte: A autora.

Figura 49 – Envoltória de Ruptura de Druker-Prager



Fonte: A autora.

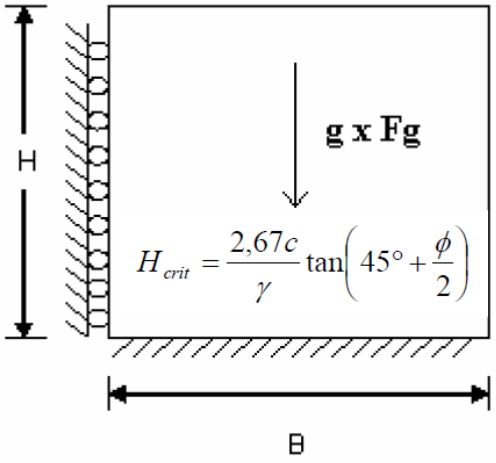
Entende-se, então, que o algoritmo se mostra sensível ao posicionamento da descontinuidade, pois, na medida em que se modifica o ângulo da descontinuidade o comportamento do solo se altera e que o comportamento foi dentro do esperado.

4.4 Estabilidade de talude

Nessa modelagem, o objetivo é avaliar a estabilidade de um talude vertical através da ruptura por cisalhamento com o critério de Druker-Prager e com isso mostrar a adequação do algoritmo às superfícies planas de ruptura em escalas maiores.

No problema de estabilidade de talude, o peso do próprio solo causa instabilidade do material através de um artifício da inserção de um fator multiplicador da gravidade que aumenta a gravidade e consequentemente o peso do solo até a ruptura. As análises foram feitas baseadas no critério de altura crítica de Terzaghi (Caputo, 1987), Figura 50, que afirma que para taludes verticais a superfície estará instável no momento em que a condição de altura crítica não for mais atendida.

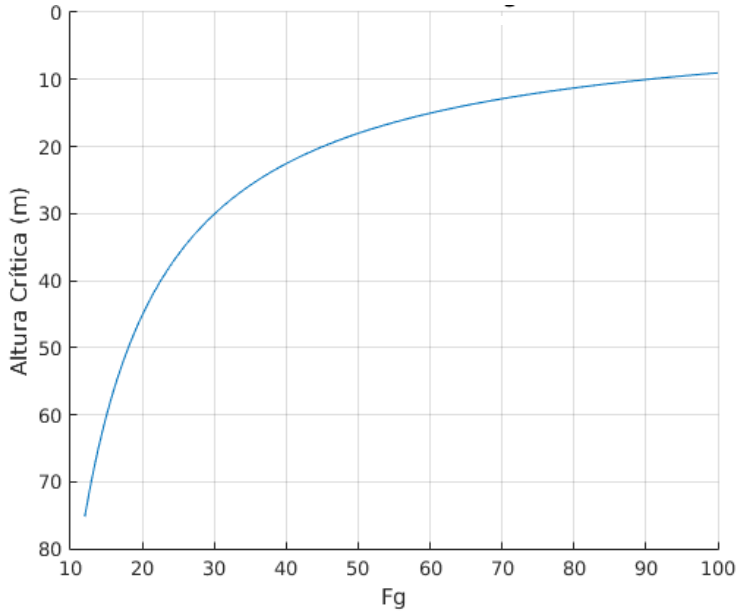
Figura 50 – Condições de contorno para Estabilidade de Talude.



Fonte: Gomes (2006).

Avaliando um talude vertical com solo de coesão de 5 MPa e peso específico de 2611,3 Kg/m³ a solução analítica da altura crítica de Terzaghi mostra que o fator de gravidade para que seja atingida a altura crítica de 10 metros é Fg = 90, Figura 51.

Figura 51 – Solução Analítica da Altura Crítica de Terzaghi



Fonte: A autora.

A simulação numérica desse modelo foi puramente mecânica através do algoritmo de integração IMPLEX para o critério de plastificação de Druker-Prager com a simulação do comportamento de plasticidade perfeita e associada. Esse critério foi inserido em uma descontinuidade forte embebida a 60° de inclinação, obtida analogamente à inclinação de menor resistência do caso de compressão uniaxial. Foi realizada, portanto, essa simulação com um fator de gravidade crescente em forma de uma rampa de $0 \leq Fg \leq 90$, com um incremento de tempo de 1E-03, e com um material com os parâmetros de módulo de elasticidade (E), coesão (c), ângulo de atrito (ø), dilatância (ψ), coeficiente de Poisson (ν) e peso específico (γ) descritos na Tabela 9.

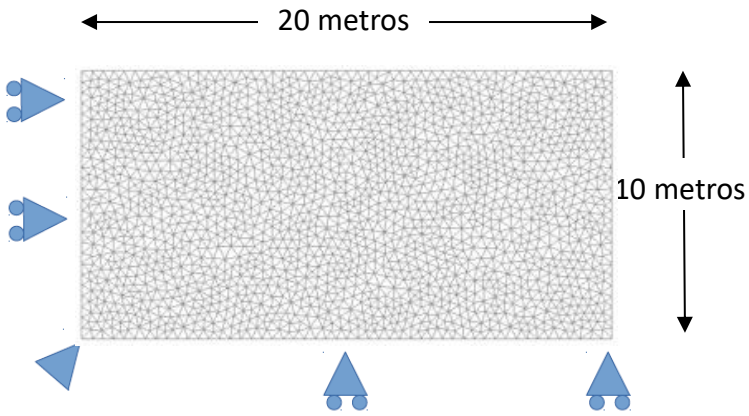
Tabela 9 – Propriedades do material

E (MPa)	c (MPa)	$\phi = \psi$	ν	γ(Kg/m³)
100	5	30º	0,30	2611,3

Fonte: A autora.

A geometria utilizada e as condições de contorno estão ilustradas na Figura 52.

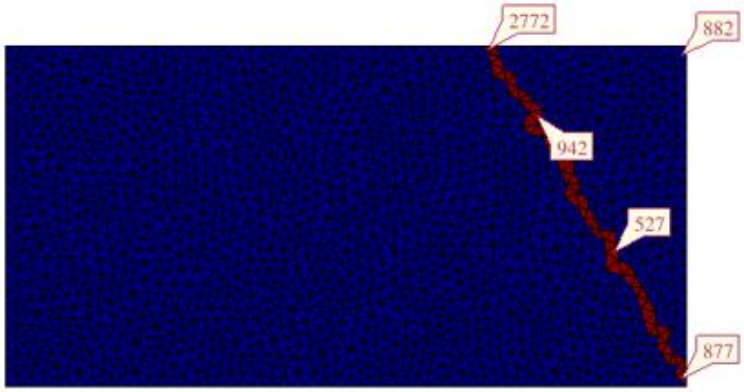
Figura 52 - Condições de contorno e Geometria do Problema



Fonte: A autora.

A malha de elementos finitos foi dimensionada com elementos triangulares, com 0,4 metro de lado, de 3 nós e 1 pontos de Gauss em cada elemento, com 1744 nós e 3336 elementos, com os elementos avaliados e a posição da descontinuidade descritas na Figura 53.

Figura 53 - Direção da Descontinuidade Embebida e Nós Avaliados.



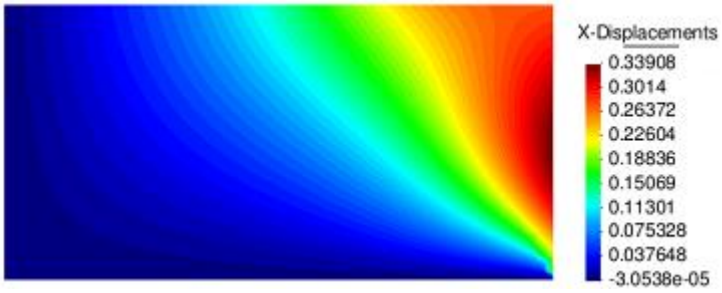
Fonte: A autora.

A seguir estão as saídas gráficas para o caso de Estabilidade de Talude com a tolerância de 2E-03.

Na Figura 54 observa-se uma distribuição de deslocamentos horizontais uniforme e crescente a medida que se aproxima da margem direita do talude, que se encontra na ruptura. Semelhante à distribuição dos deslocamentos, a distribuição de tensões horizontais se torna mais expressiva ao se aproximar da margem direita do talude, Figura 55.

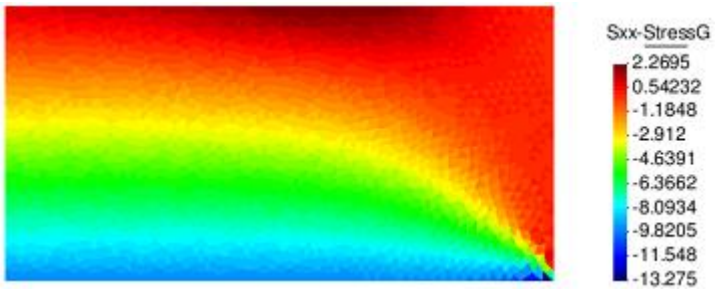
Na Figura 56 observa-se um aumento da tensão desviadora nas mediações da fratura e principalmente no pé do talude, onde a ruptura tem início e por isso as tensões se tornam mais expressivas.

Figura 54 – Campo dos Deslocamentos Horizontais (MPa)



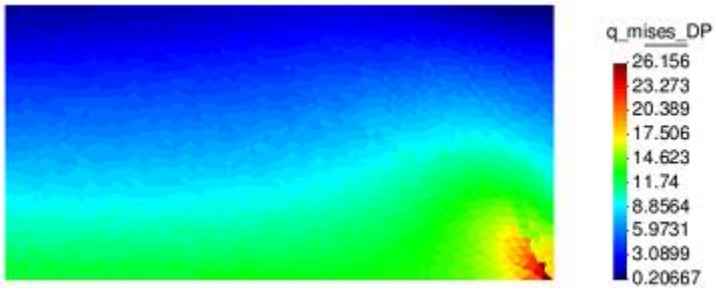
Fonte: A autora.

Figura 55 – Campo das Tensões Horizontais (MPa)



Fonte: A autora.

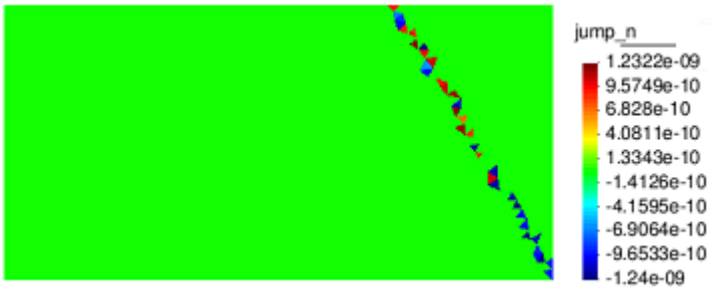
Figura 56 – Campo das Tensões Desviadoras (MPa)



Fonte: A autora.

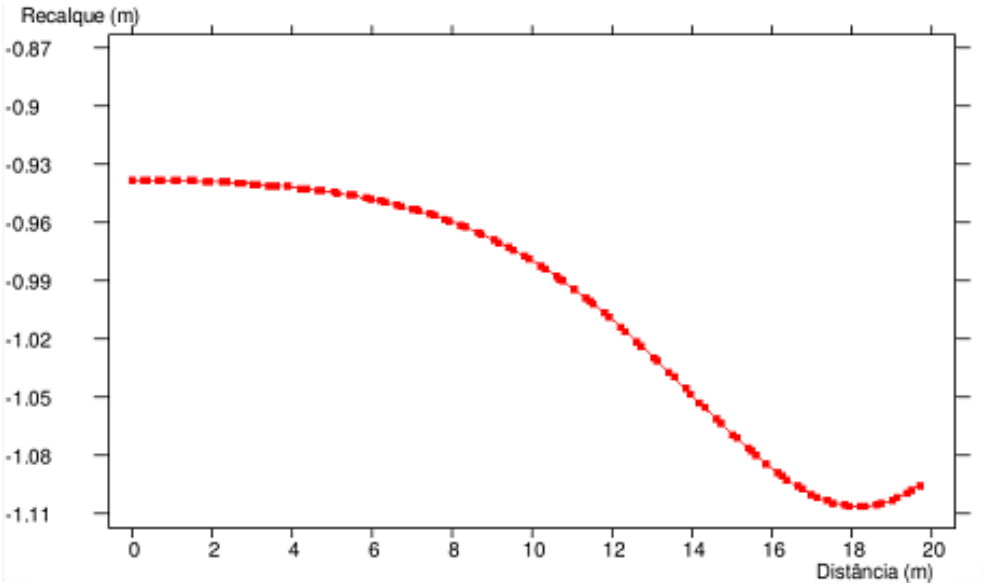
Na Figura 57 está ilustrada a abertura de fratura localizada ao longo da descontinuidade, que indica o processo de ruptura do material e na Figura 58 está ilustrado o recalque na superfície do terreno da esquerda para a direita.

Figura 57 – Abertura de Fratura em Metros



Fonte: A autora.

Figura 58 – Recalque na Superfície do Terreno em Metros

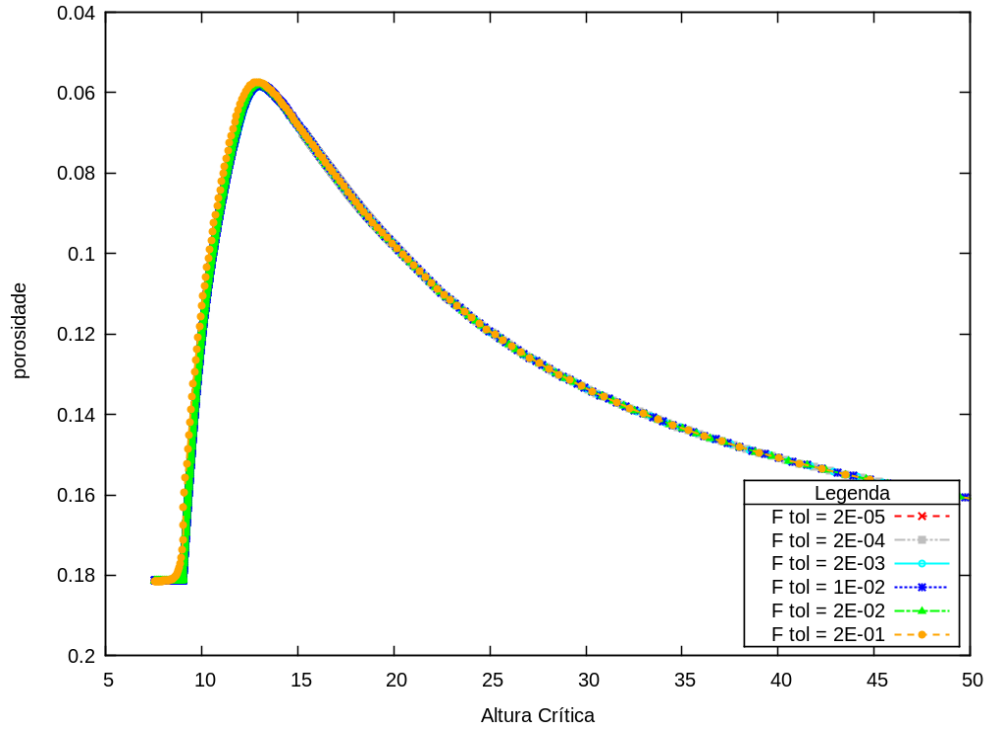


Fonte: A autora.

Esse problema foi avaliado com as diversas tolerâncias utilizadas no problema de Expansão de Cavidade. Nas figuras a seguir (Figura 59 e Figura 60) mostram que, o algoritmo responde de forma estável ao problema.

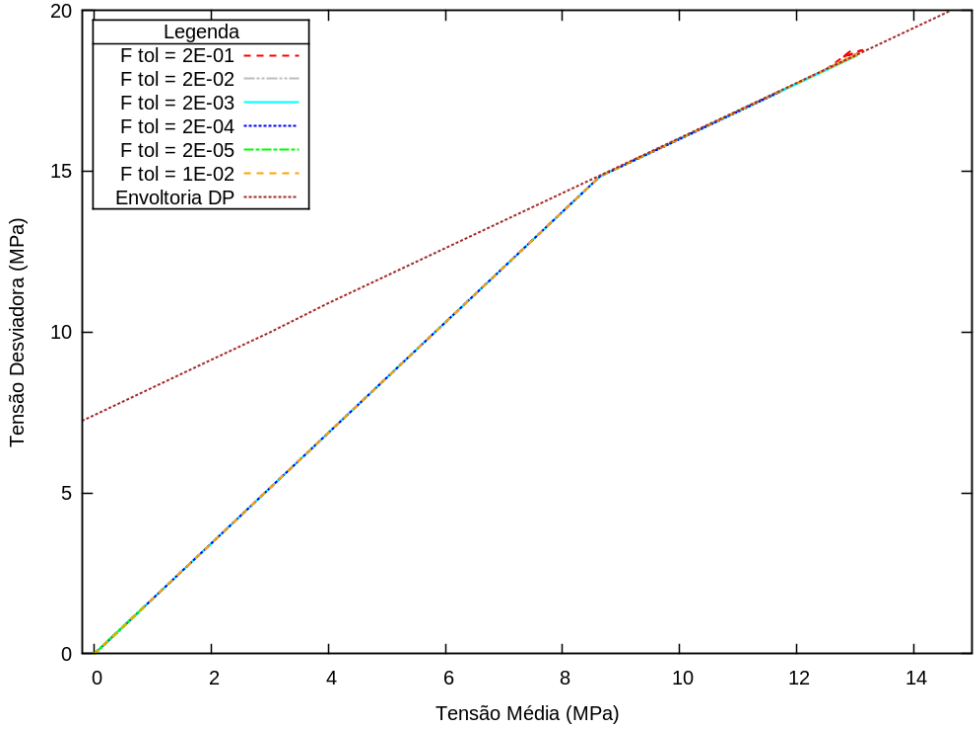
Porém, o algoritmo resultou em um valor de 14 metros de altura crítica e um fator de gravidade em torno de Fg = 40, Figura 61, diferente da solução analítica.

Figura 59 – Porosidade x Altura Crítica



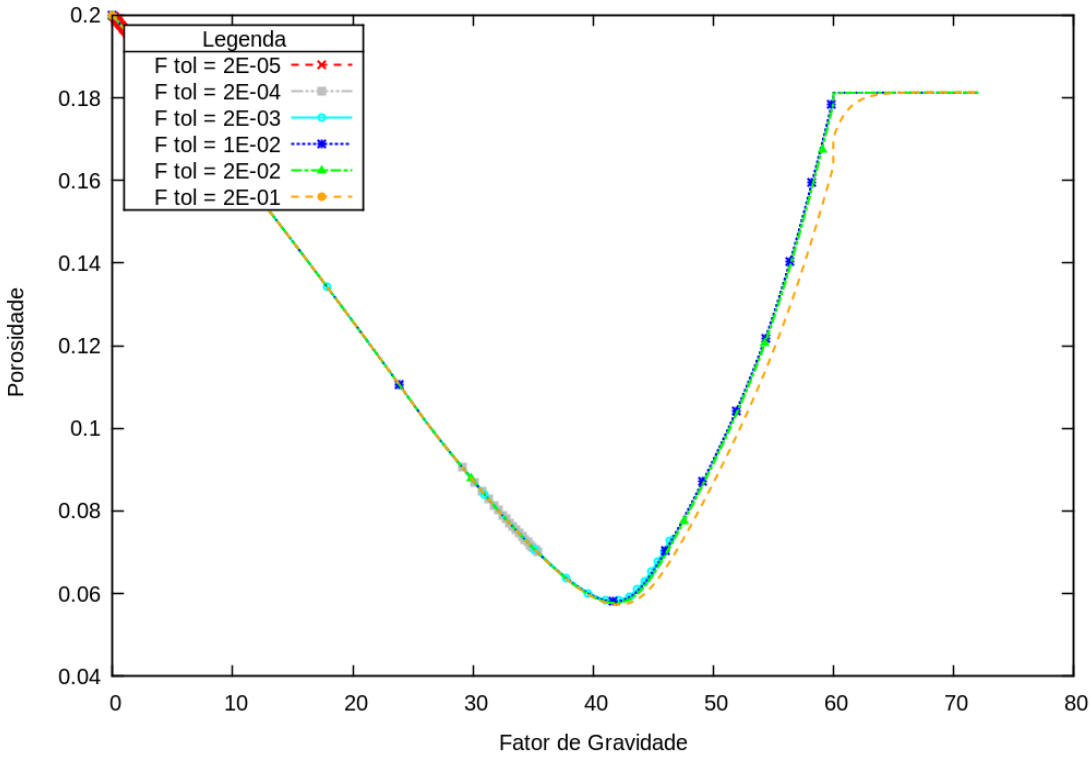
Fonte: A autora.

Figura 60 – Envoltória de Ruptura de Druker-Prager



Fonte: A autora.

Figura 61 – Porosidade x Fator de Gravidade (Fg)



Fonte: A autora.

Na Tabela 10 pode ser observada a eficiência do algoritmo.

Tabela 10 – Eficiência do Algoritmo para o Problema de Estabilidade de Talude para Malha Não-Estruturada

F_TOL	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
CPUTIME	2,44E03	4.78E03	7,85E03	3,37E04	7,23E04	5,70E04
NTITER	12.126	23.753	39.326	167.347	1.577.729	112.735.715
TIME (S)	120	120	120	120	120	87,04

Fonte: A autora.

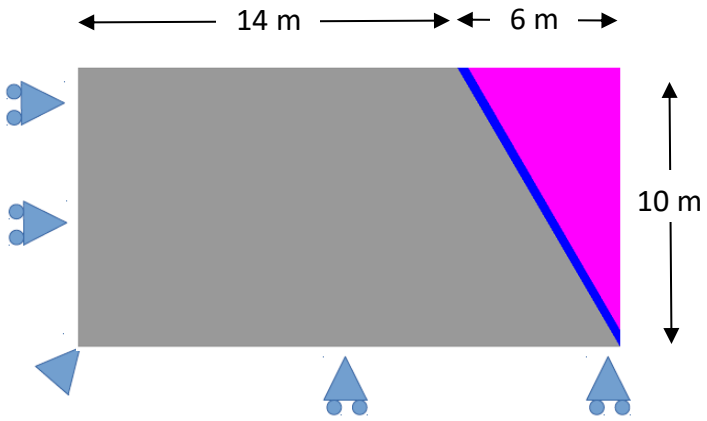
Diante do resultado obtido, foi proposta uma análise de sensibilidade da malha nesse caso com a mesma malha ainda não-estruturada, porém, com os elementos da superfície de ruptura alinhados, semelhante ao realizado no caso de Cisalhamento Direto.

4.4.1 Análise de Sensibilidade do IMPLEX à Estrutura da Malha

Para que seja realizada a análise da malha nesse caso, foi necessário inserir um novo material na direção da fratura para que a descontinuidade embebida seja inserida numa linha de elementos alinhados, de modo que a irregularidade da malha não tenha interferência no resultado. Para isso foram discriminadas três regiões no corpo do talude com o mesmo material e nessa geometria foram utilizadas as mesmas dimensões e mesmas condições de contorno do item anterior.

A geometria utilizada está descrita na Figura 62, com a descontinuidade embebida, em azul, e com as devidas condições de contorno nos nós extremos.

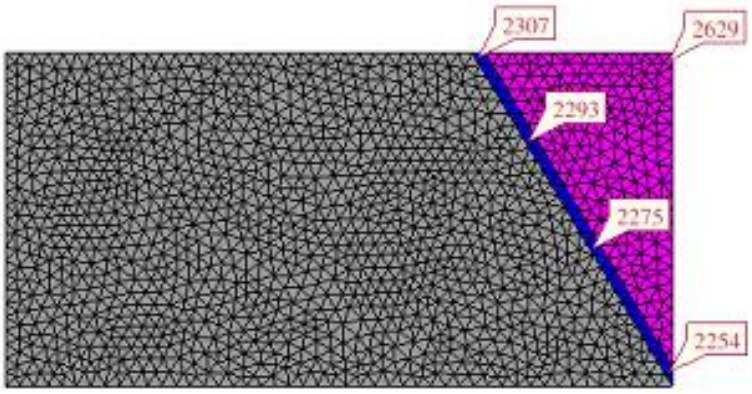
Figura 62 - Condições de contorno e Geometria do Problema



Fonte: A autora.

A malha de elementos finitos foi dimensionada com elementos triangulares, com 0.4 metro de lado, de 3 nós e 1 pontos de Gauss em cada elemento, com 1400 nós e 2655 elementos, Figura 63.

Figura 63- Descontinuidade Embebida, em azul, e Nós Avaliados.

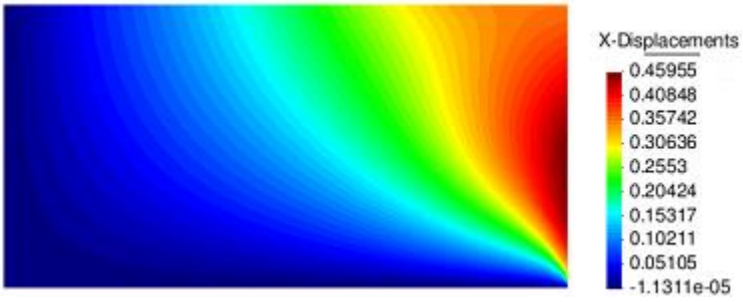


Fonte: A autora.

A seguir estão as saídas gráficas para o caso de Estabilidade de Talude com a tolerância de 2E-03.

Na Figura 64 observa-se a distribuição do campo dos deslocamentos, que se mostra uniformemente distribuído conforme a profundidade e mais expressiva quando na superfície de ruptura. A porosidade se apresenta bem localizada na descontinuidade embebida, assim como as deformações plásticas. Semelhante à distribuição dos deslocamentos, a distribuição de tensões se torna mais expressiva ao se aproximar da margem direita do talude, Figura 65 e Figura 66.

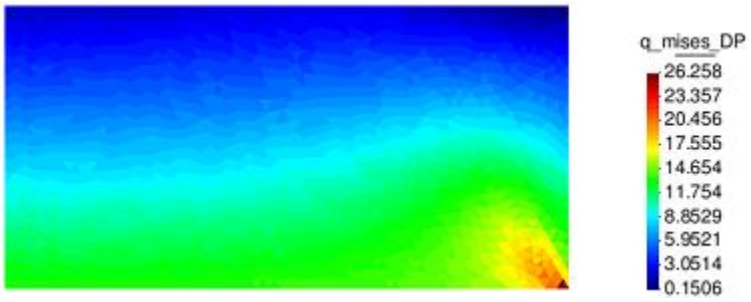
Figura 64 – Campo dos Deslocamentos Horizontais (MPa)



Fonte: A autora.

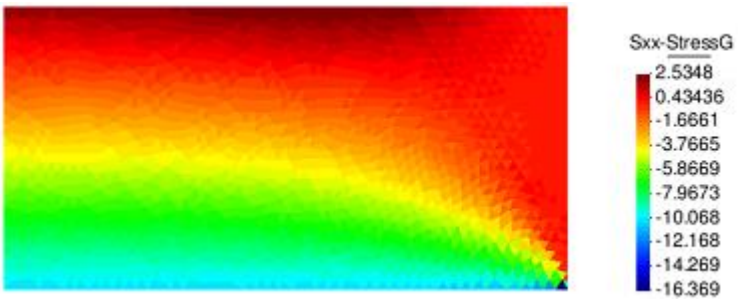
Na Figura 67 está ilustrada a abertura de fratura localizada ao longo da descontinuidade, que indica o processo de ruptura do material e na Figura 68 está ilustrado o recalque na superfície do terreno da esquerda para a direita.

Figura 65 – Campo das Tensões Desviadoras (MPa)



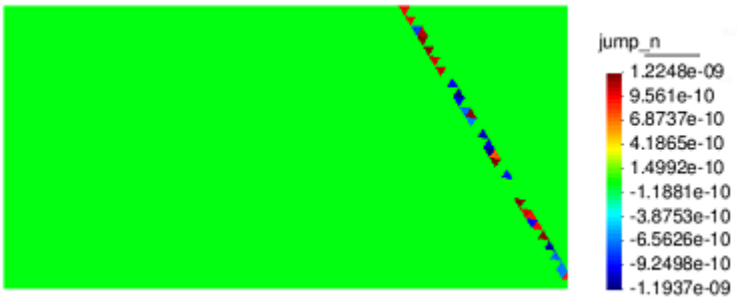
Fonte: A autora.

Figura 66 – Campo das Tensões Horizontais (MPa)



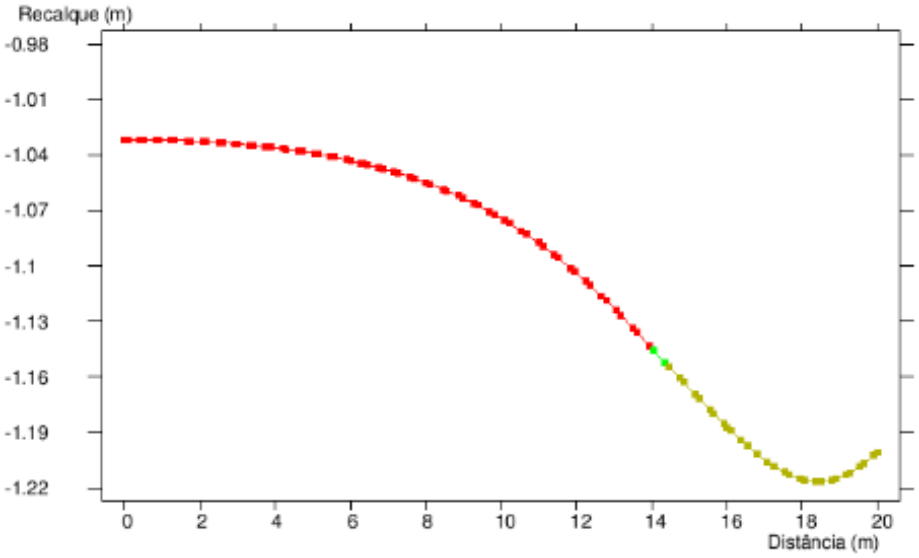
Fonte: A autora.

Figura 67 – Abertura de Fratura em Metros



Fonte: A autora.

Figura 68 – Recalque na Superfície do Terreno em Metros



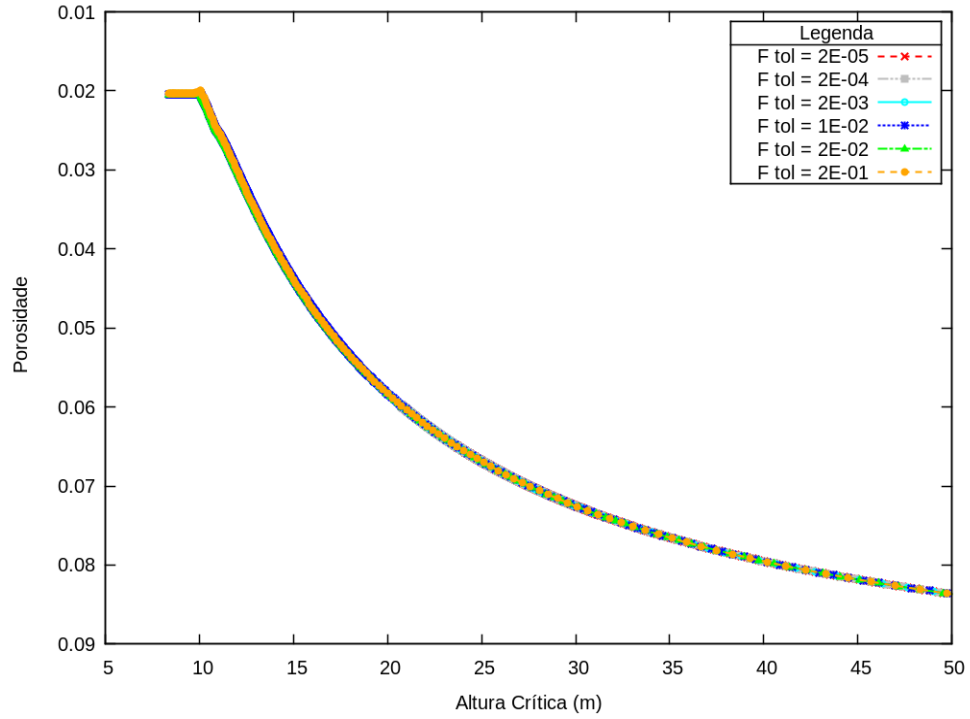
Fonte: A autora.

Para verificar o comportamento dessa geometria frente a geometria não-estruturada, realizou-se o estudo com as diversas tolerâncias e obteve-se um resultado esperado quando comparado com a solução analítica, no qual mostrou uma solução de altura crítica de 10 metros para um fator de gravidade de 90.

Nas figuras seguintes (Figura 69 e Figura 70) mostram que o algoritmo responde de forma estável ao problema em todos os níveis de tolerância avaliados e que todos incorrem no mesmo resultado de altura crítica com comportamentos bem semelhantes. Na compatibilização com a solução analítica, o algoritmo responde corretamente com o valor de Fg = 90, Figura 71.

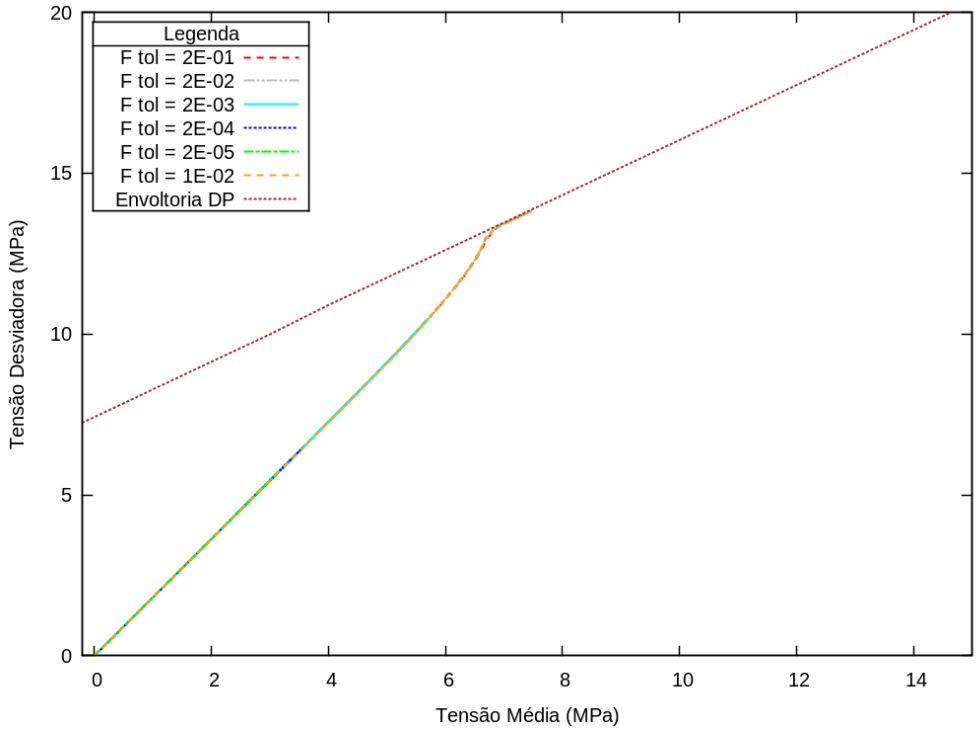
Com relação à eficiência do algoritmo foi verificado que a melhor resposta, mais eficiente, foi com a tolerância F_tol = 2E-03, conforme a Tabela 11.

Figura 69 – Porosidade x Altura Crítica



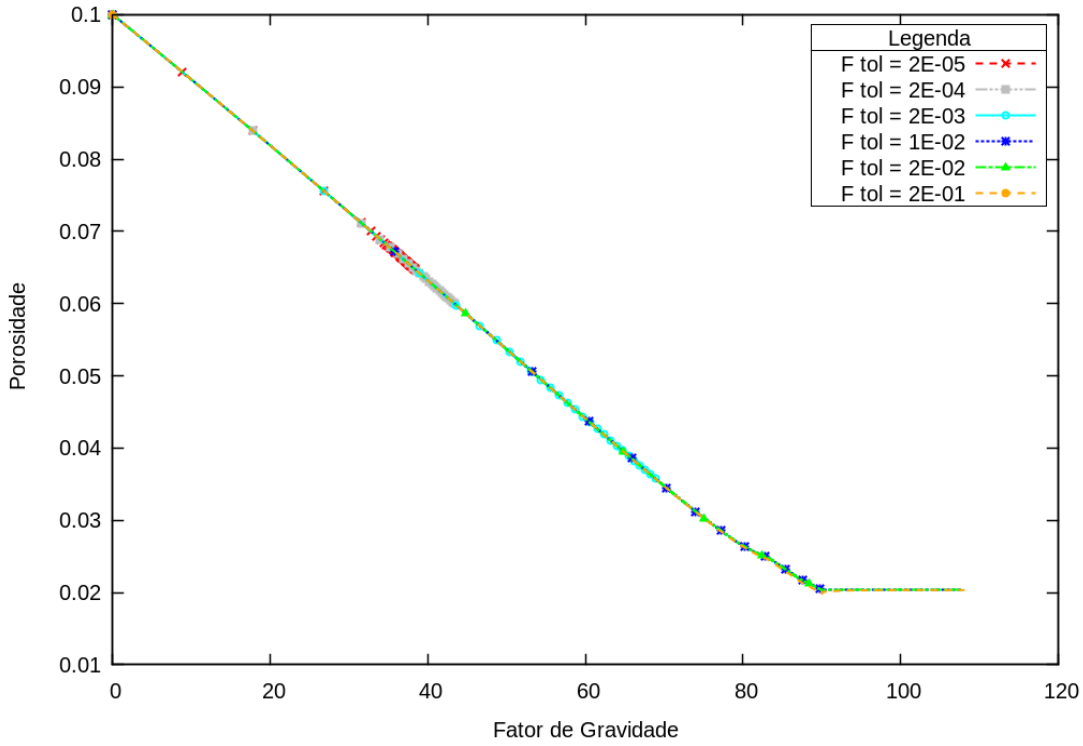
Fonte: A autora.

Figura 70 – Envoltória de Druker-Prager



Fonte: A autora.

Figura 71 – Porosidade x Fator de Gravidade (Fg)



Fonte: A autora.

Tabela 11 – Eficiência do Algoritmo para o Problema de Estabilidade de Talude para Malha Estruturada

F_TOL	2,00E-01	2,00E-02	1,00E-02	2,00E-03	2,00E-04	2,00E-05
CPUTIME	2,14E03	5,13E03	9,26E03	4,12E04	1,00E06	5,70E04
NTITER	12.136	29.114	51.446	233.139	2.241.497	112.423.941
TIME	120	120	120	120	120	94,53

Fonte: A autora.

Comparando com o resultado do problema com a malha não-estruturada, nota-se que o comportamento do algoritmo frente a um cisalhamento de uma superfície irregular é estável, porém apresenta uma solução incompatível com a solução analítica de Terzaghi. Admite-se, então, uma limitação do algoritmo, que exige que para cada falha que for avaliada deverá ser inserida em uma linha de elementos alinhados, estruturados, na direção da descontinuidade para que não haja uma solução incoerente.

5 INFLUÊNCIA DA FLUÊNCIA DE EVAPORITOS NA REATIVAÇÃO DE FALHA GEOLÓGICA

Uma vez validado o algoritmo IMPLEX com o modelo elasto-plástico adotado o critério de Druker-Prager incorporado a descontinuidades fortes embebidas, foi aplicado o IMPLEX no caso de reativação de falha apresentado na presente seção.

O problema de escavação de rochas evaporíticas a grandes profundidades é de fundamental importância na engenharia geotécnica e na engenharia de petróleo diante dos problemas como por exemplo em cenários de produção de óleo ou de escavação em rochas, seja na mineração ou para estocagem de resíduos radioativos, óleo cru ou mesmo CO_2.

É de extrema importância a previsão de reativação destas estruturas, uma vez que podem comunicar a região de produção ou de escavação com rochas reservatórios ou aquíferos superficiais. No caso de reservatórios de petróleo isso pode levar a migração de fluidos de forma ascendente, levando à perda de pressão de injeção e fluxo de óleo ou gás para aquíferos e até para o leito marinho ou terrestre. No caso de escavações, especialmente em rochas salinas, a comunicação da escavação com aquíferos, através de falhas e/ou fraturas reativadas, pode levar ao fluxo de água na direção destas galerias devido à perda de selo da estrutura, implicando em acidentes e dissolução de galeria, o que pode comprometer o projeto executivo e incorrer em perdas de vidas, no caso de escavações com máquina operado por pessoas (como na Mina Taquari Vassouras).

Com o intuito de prever possíveis perdas no projeto e prever a ocorrência de acidentes relacionados ao problema de escavação a grandes profundidades, nessa seção será apresentado o principal caso e tema desse trabalho, o problema de escavação em rochas salinas (modelo de fluência) com rocha adjacente falhada para verificar a possibilidade de reativação da falha (algoritmo IMPLEX com modelo elasto-plástico

de Druker-Prager em Descontinuidade Forte Embebida) ocasionado pela fluência das rochas salinas.

Na escavação de rochas salinas foi visto que ocorre o fenômeno de fluência a tensão constante ao longo do tempo, com uma influência importante da temperatura. Como nesse caso a análise é puramente mecânica, foi considerado nesse cenário de escavação em rochas evaporíticas a uma temperatura de 20°C, em condição isotérmica.

Com o tempo a fluência gera uma convergência entre o teto e o piso da escavação, gerando recalques na superfície do terreno e a redistribuição de tensões no maciço de rocha no entorno das escavações. Isto pode levar a recalques superficiais (subsidência) e à concentração de tensões cisalhantes em descontinuidades presentes no meio, como por exemplo, em falhas geológicas, levando à possibilidade de reativação destas estruturas.

Os principais efeitos desse comportamento são o tempo de reativação da falha, com mais ou menos tempo, e a disposição das tensões em função da geometria da escavação e do posicionamento da falha, que será apresentado.

Os parâmetros dos materiais foram oriundos de ensaios laboratoriais de rochas extraídas da mina de Taquari-Vassouras, localizada no estado de Sergipe, Brasil, obtidos por Silva (2015). Do perfil estratigráfico desta mina foi elaborado um cenário sintético de escavação em rocha salina considerando os dados indicados acima como propriedades dos materiais das camadas da modelagem. O cenário consiste em simular a escavação de galerias de forma a reproduzir um problema mineração de potássio por dissolução e para estudar esse problema foram simulados cenários de escavações em rochas evaporíticas de dimensões variáveis a 1.200 metros de profundidade. Foi ainda acrescentada uma descontinuidade em rochas adjacentes simulando uma falha geológica próxima à escavação, com parâmetros estimados, porém realísticos.

Em todas as análises foi projetada uma secção bidimensional (corte) de 2.000 metros de extensão e 1539 metros de comprimento em uma análise de deformação plana. As malhas foram projetadas em elementos finitos triangulo linear com um único ponto de Gauss. Nesse caso a única força atuante é a gravitacional e os materiais estão dispostos conforme a Tabela 12.

Tabela 12 – Propriedades dos materiais

	Materiais	**E (MPa)**	**c (MPa)**	γ **(Kg/m³)**	**ø =**ψ**(graus)**	ν	ε **(ano^{-1})**
1	Barreira	1,00E05	0,2	1900	11,0	0,330	-
2	Halita	3,64E04	-	2160	-	0,295	1,6E-03
3	Carnalita	1,75E04	-	1847	-	0,260	7,2E-03
4	Shale	5,00E03	4,8	2600	22,0	0,330	-
5	Falha	5,00E03	0,01	2773	10,0	0,30	-

Fonte: A autora.

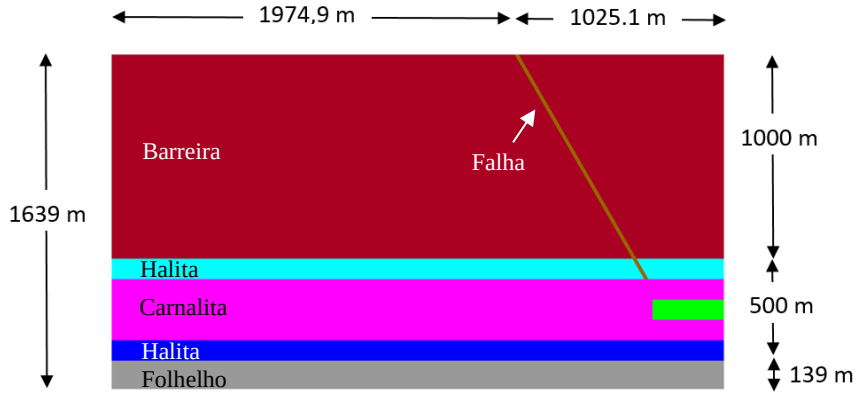
A partir desse cenário, foram modelados 4 casos de escavação com uma falha preexistente, no primeiro uma frente de escavação e nos segundo, terceiro e quarto casos uma escavação em forma de galeria. Nesses casos, devido à influência da malha observada anteriormente, foram inseridas fraturas com uma linha de elementos alinhados de forma que a malha não tenha interferência nos resultados.

5.1 Frente de Escavação em Rocha Salina

Na intensão de avaliar o comportamento da fluência em uma frente de escavação em uma rocha evaporítica do tipo carnalita e sua influência em uma rocha adjacente com uma falha pré-existente foi realizada uma modelagem de uma frente de escavação com uma geometria de dimensões de 300 metros de comprimento e 100 metros de altura que se encontra a uma distância horizontal entre o topo da escavação e a base da falha de 20 metros.

A falha está localizada à esquerda da escavação em um problema simétrico e ela passa em uma linha de elementos triangulares de lado 20 metros, Figura 72, e se localiza, propriamente, como visto anteriormente, em uma espessura de 10 % do elemento que configura a descontinuidade embebida, nesse caso, 0,2 metros.

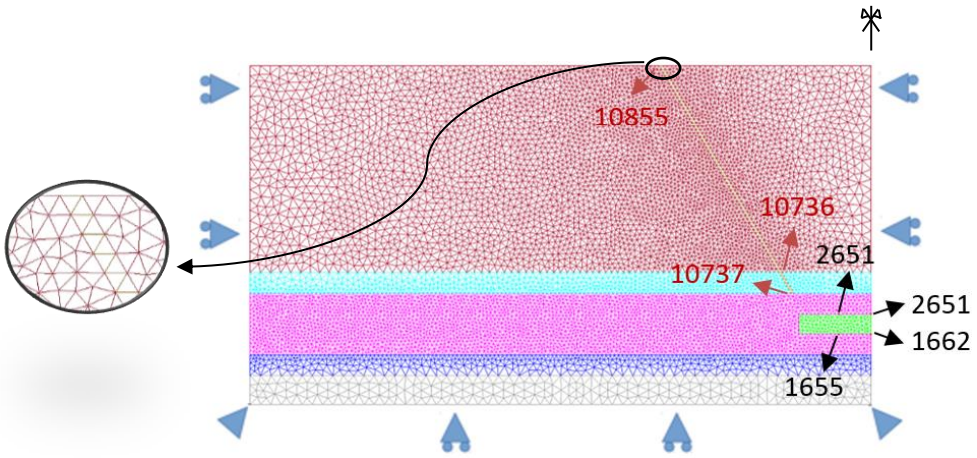
Figura 72 - Geometria do Problema



Fonte: A autora.

Foi projetada uma malha com 8555 nós e 16863 elementos e as condições de contorno estão descritos na Figura 73

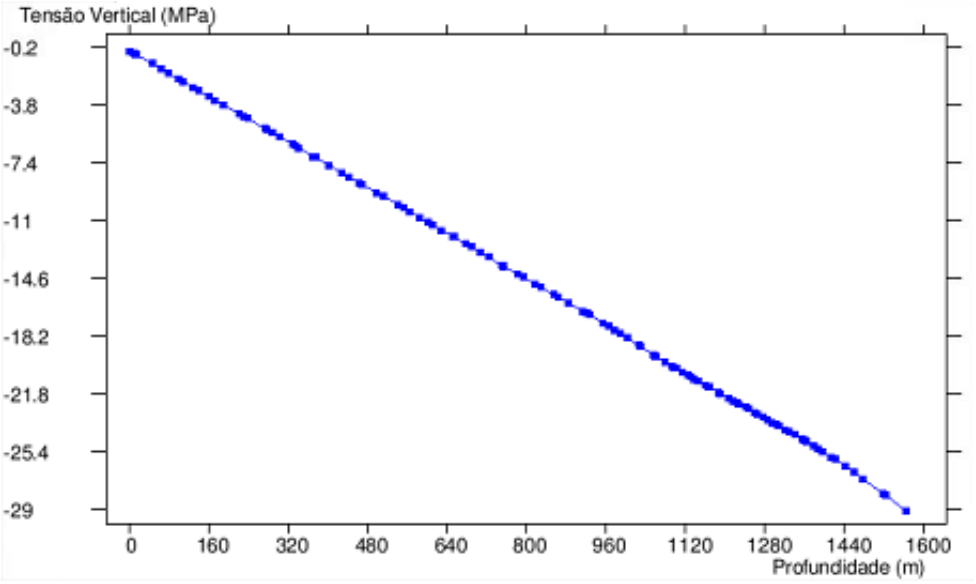
Figura 73 - Condições de contorno, nós (preto) e elementos (vermelho) avaliados.



Fonte: A autora.

Na Figura 74 pode ser observado a conformidade da evolução das tensões com a profundidade advindas do geostático com um gráfico de tensões em perfil. Este gráfico é correspondente em todos os casos de Reativação de Falha, pois foram utilizados os mesmos parâmetros de materiais e a mesma geometria de contorno.

Figura 74 – Gráfico com as Tensões Verticais em Corte Antes da Escavação

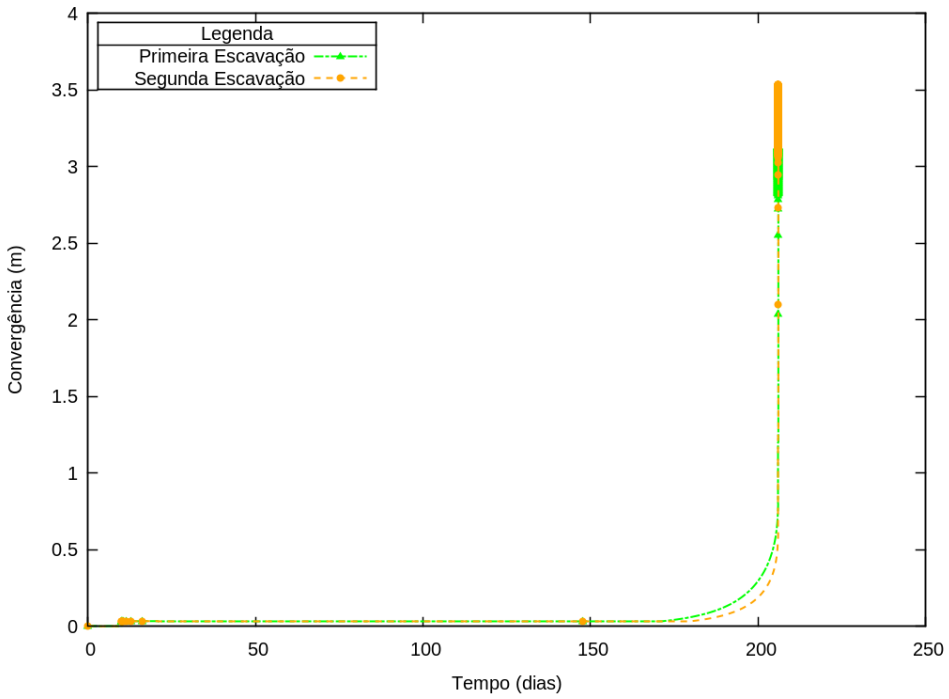


Fonte: A autora.

Na Figura 75 pode ser observado o efeito da fluência através da análise de convergência entre o teto e o piso do material evaporítico escavado. Essa deformação

evolui a partir dos 180 dias entrando na fase de fluência primária com um valor de 3,6% (3,6 metros) de convergência em 206 dias.

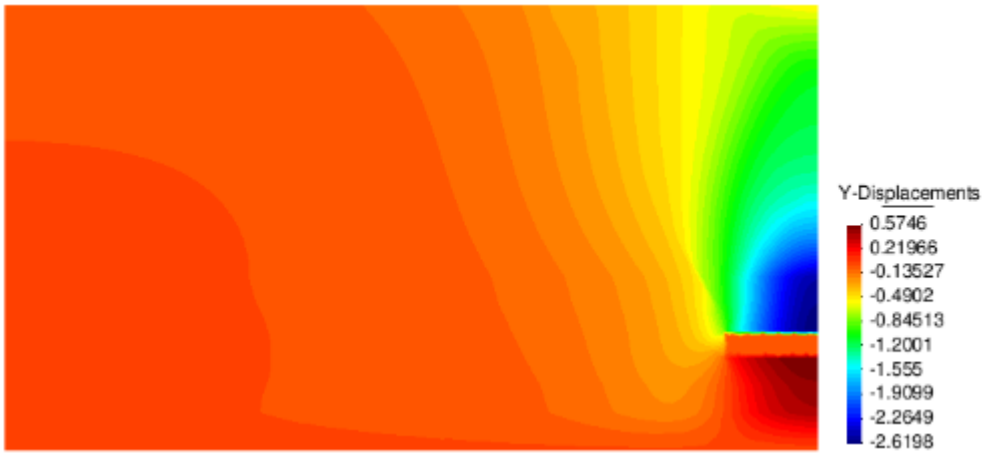
Figura 75 – Convergência na Escavação



Fonte: A autora.

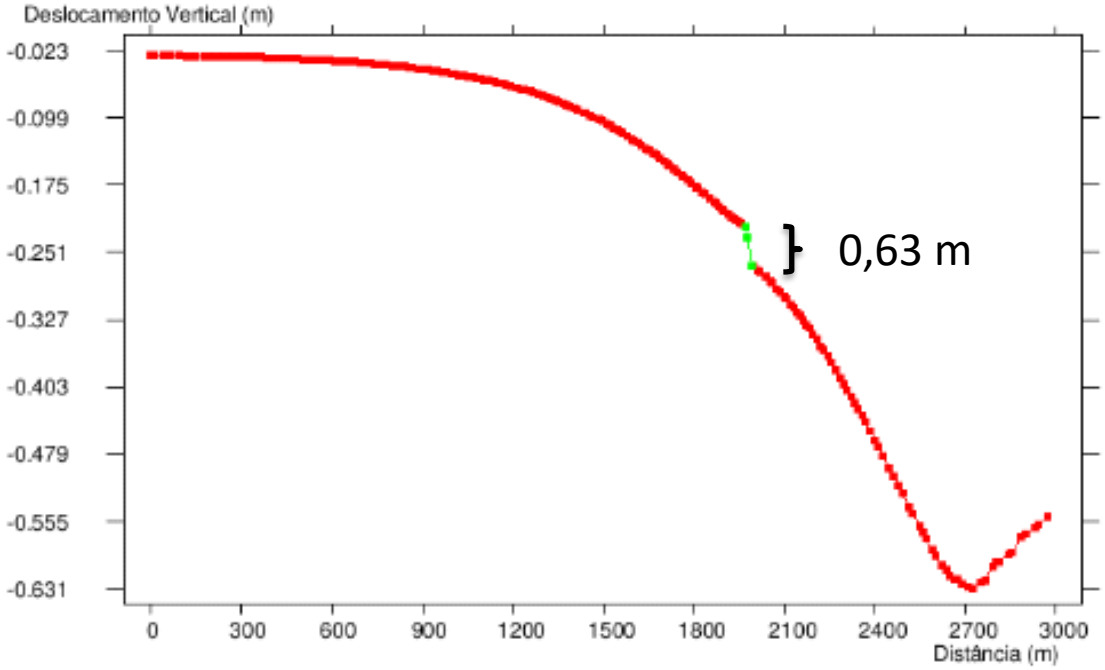
As deformações ocorrem na carnalita tanto no teto quanto no piso e na lateral gerando uma acomodação no terreno e nas camadas de solo adjacentes do material escavado. Isso pode ser observado também no deslocamento vertical, Figura 76, Figura 77 e Figura 78, na direção do fechamento que leva a subsidência, de aproximadamente 0,63 metros.

Figura 76 – Campo dos Deslocamentos (m)



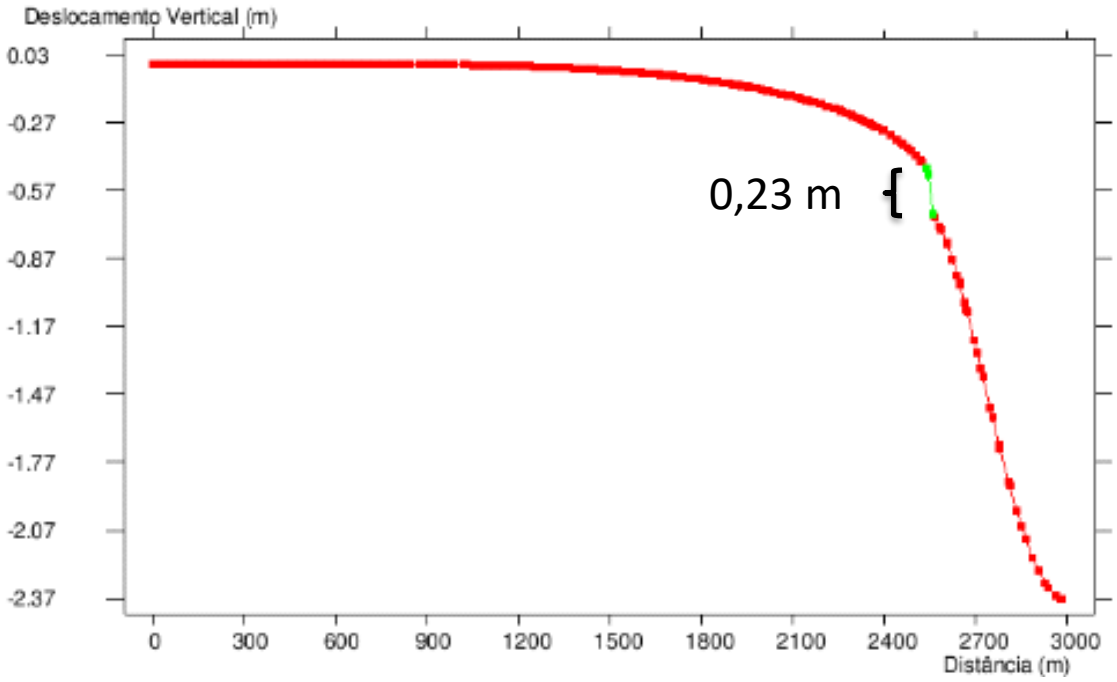
Fonte: A autora.

Figura 77 – Subsidência (m) do Terreno. v



Fonte: A autora.

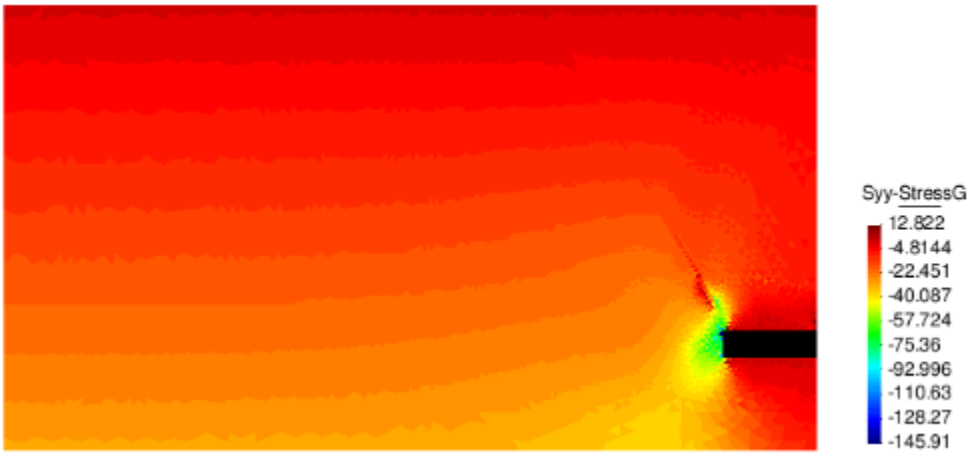
Figura 78 – Compactação (m) da Escavação na Camada de Carnalita.



Fonte: A autora.

Essa subsidência do terreno é acompanhada por uma interferência no estado de tensões ao redor da escavação e principalmente na região mais próxima à falha, com aumento da tensão vertical, Figura 79, e da tensão cisalhante, Figura 80, que se propaga ao longo da falha reativando-a, Figura 81, chegando a tensão desviadora em aproximadamente 13,8 MPa.

Figura 79 – Tensões Verticais (MPa)

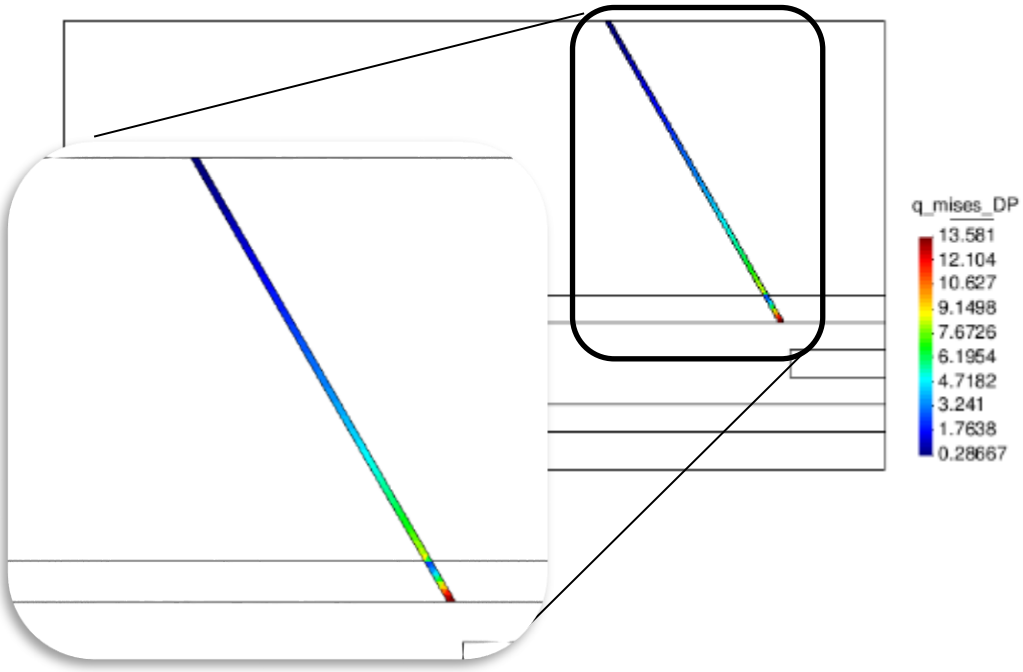


Fonte: A autora.

Figura 80 – Tensões Cisalhantes (MPa)

Fonte: A autora.

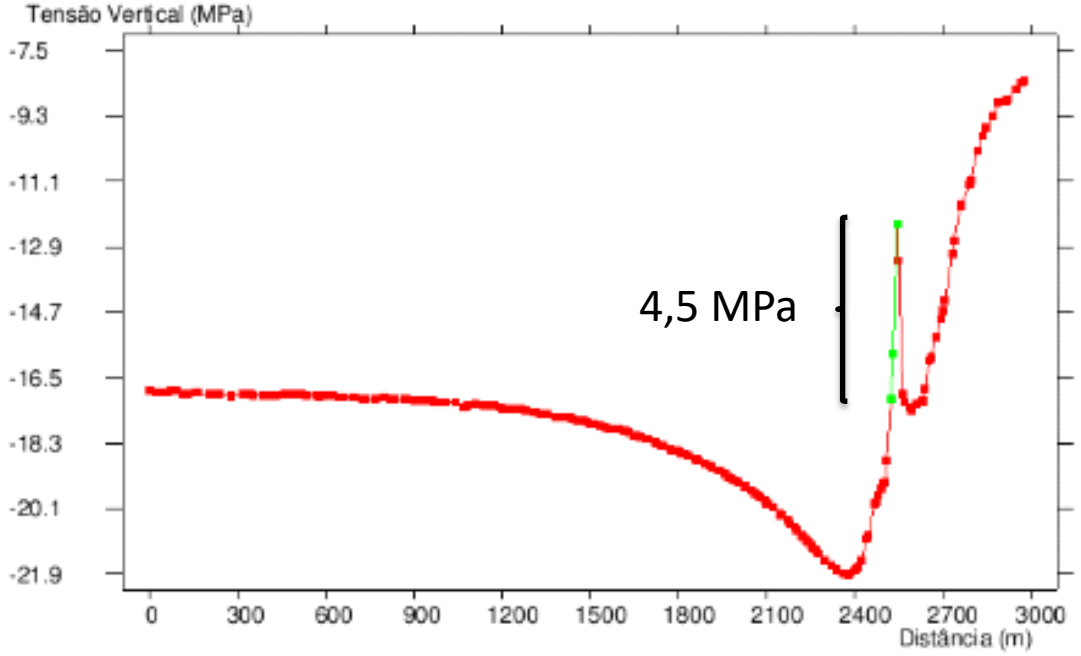
Figura 81 – Tensões Desviadoras (MPa)



Fonte: A autora.

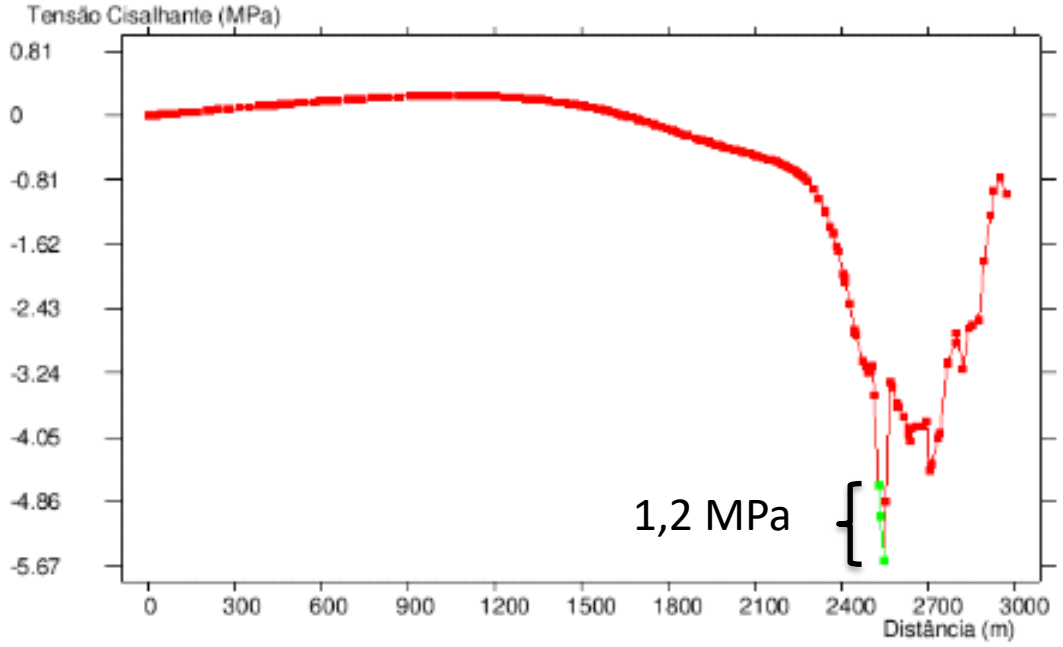
No comportamento das tensões observa-se que ocorre um salto das tensões na descontinuidade, tanto no comportamento das tensões verticais, com um valor de 4,5 MPa, Figura 82, quanto nas tensões cisalhantes, 1,2 MPa, Figura 83.

Figura 82 – Tensões Verticais (MPa)



Fonte: A autora.

Figura 83 – Tensões Cisalhantes (MPa)

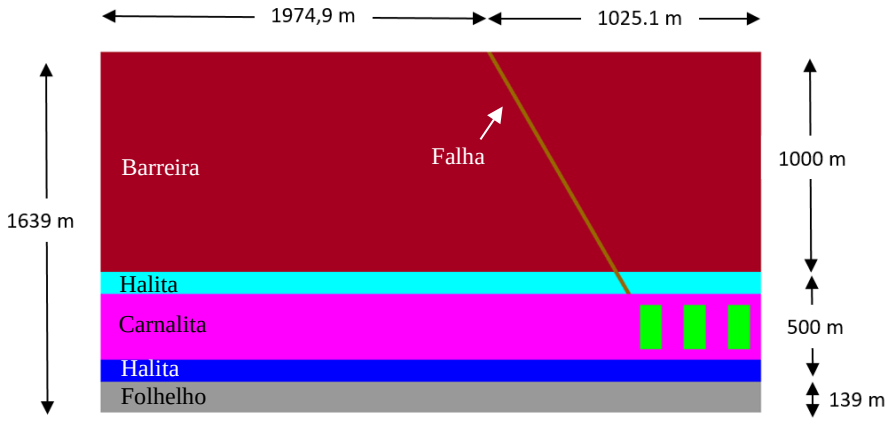


Fonte: A autora.

5.2 Escavação de Rocha Salina em Galeria com Falha Próxima à Escavação

Para que seja avaliado o tipo de escavação e qual a influência dessa geometria na reativação de uma falha pré-existente, foi realizada uma modelagem simétrica de três escavações em galeria com dimensões de 100 metros de comprimento e 200 metros de altura que se encontra a 40 metros de uma falha. Nesse caso as escavações estão distantes entre si em 100 metros com a intensão de que esse material entre as escavações funcione como pilares de sustentação, Figura 84.

Figura 84 - Condições de contorno e Geometria do Problema

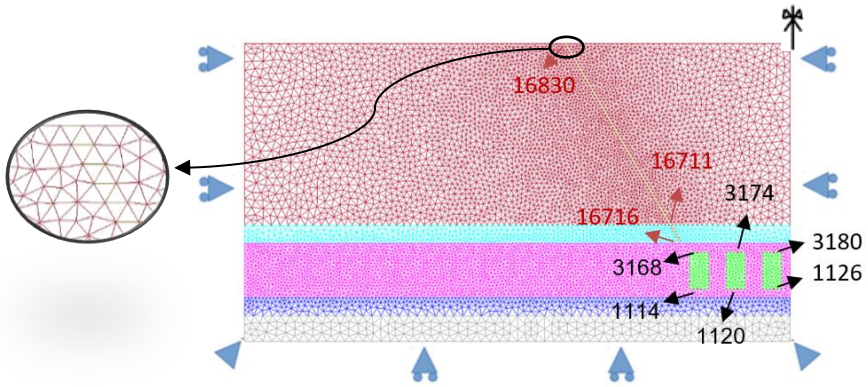


Fonte: A autora.

Nessa modelagem a fratura foi localizada também à esquerda da escavação em um problema simétrico e foi projetada uma malha com 8539 nós e 16831 elementos e as condições de contorno estão descritos na Figura 85.

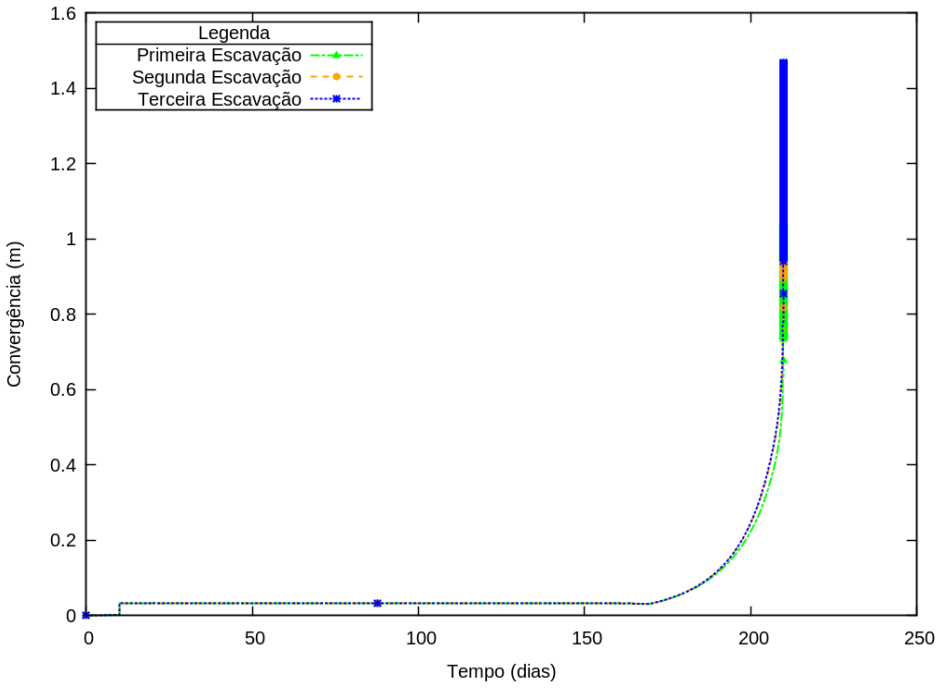
Na Figura 86 pode ser observada a fluência do material evaporítico escavado. A deformação convergente entre o piso e o teto da escavação evolui a partir dos 176 dias entrando na fase de fluência primária com um valor de aproximadamente 0,75% (1,5 metros) de convergência em 210 dias.

Figura 85 - Condições de contorno, nós (preto) e elementos (vermelho) avaliados.



Fonte: A autora.

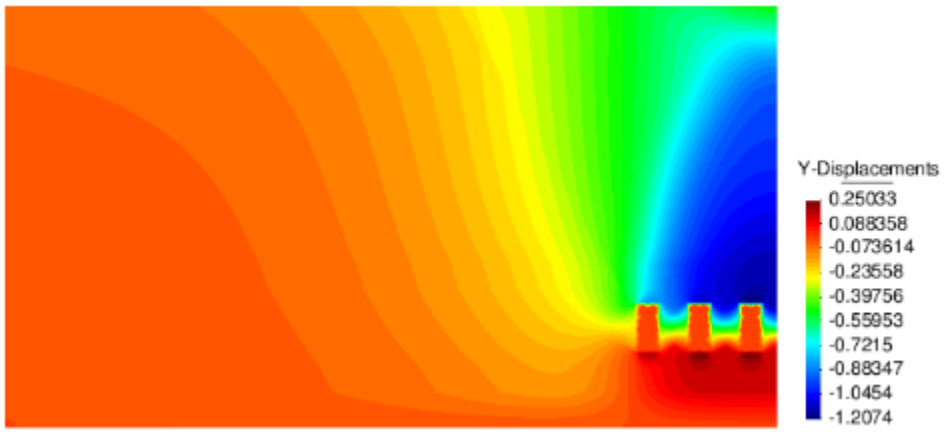
Figura 86 – Convergência nas Escavações



Fonte: A autora.

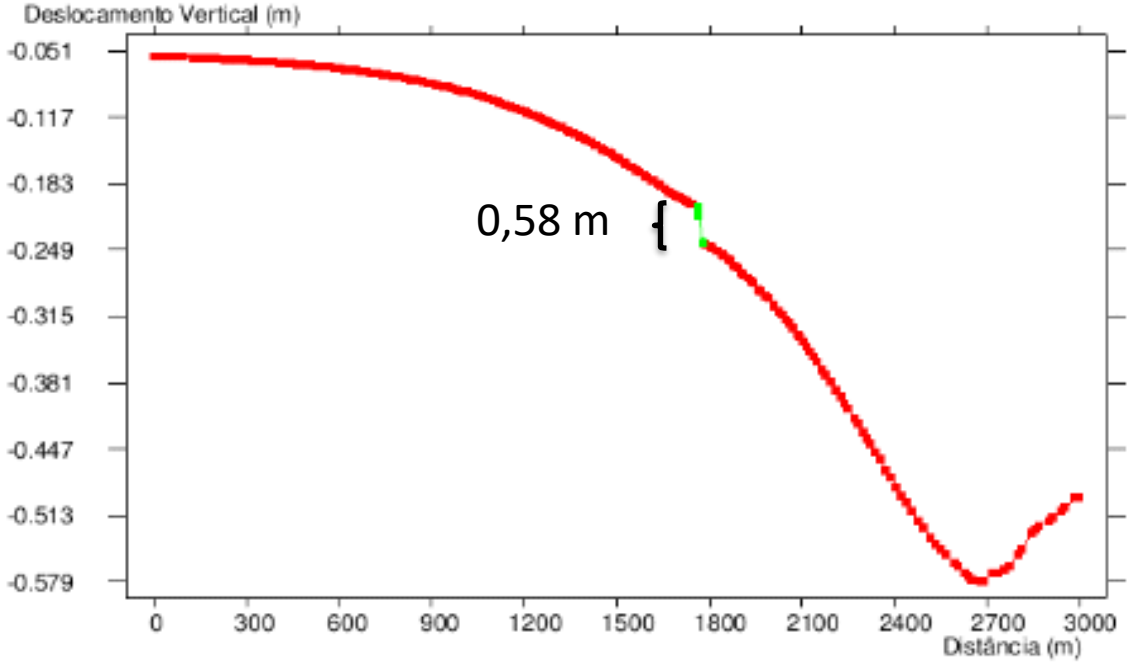
Semelhante ao comportamento da falha no caso anterior de frente de escavação, a fluência afeta diretamente o comportamento da falha, observa-se a variação nos deslocamentos verticais, Figura 87, com a subsidência do terreno de 0,58 metros e um salto nos deslocamentos de aproximadamente 0,05 metros, Figura 88, e com a compactação da escavação, Figura 89.

Figura 87 – Campo dos Deslocamentos (m).



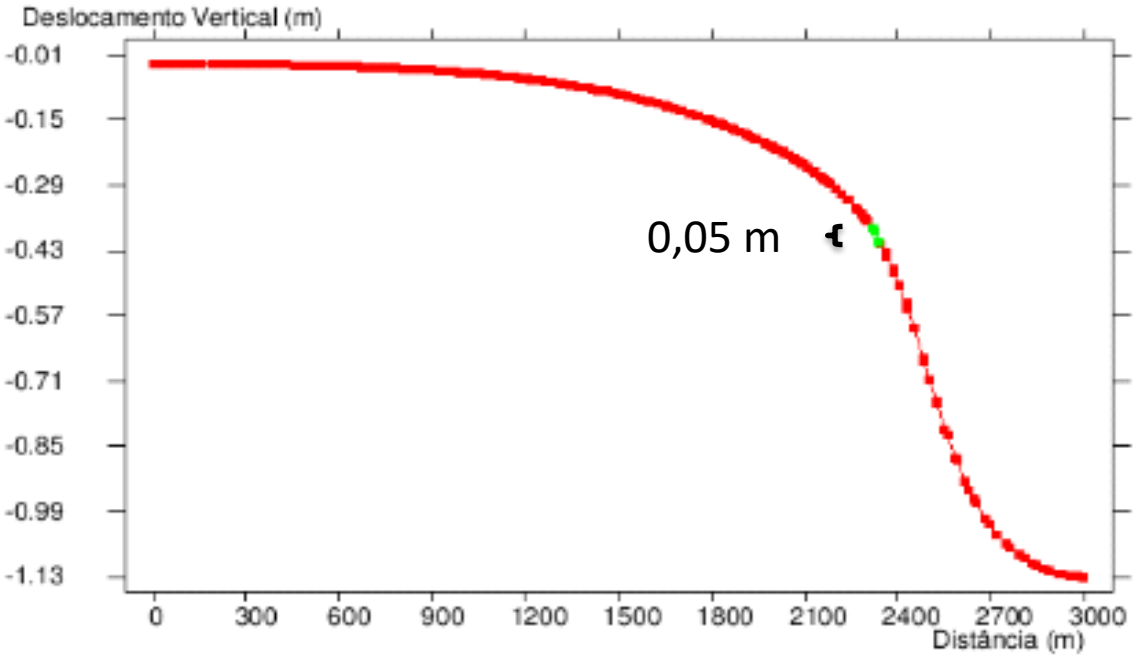
Fonte: A autora.

Figura 88 – Subsidência (m) do Terreno.



Fonte: A autora.

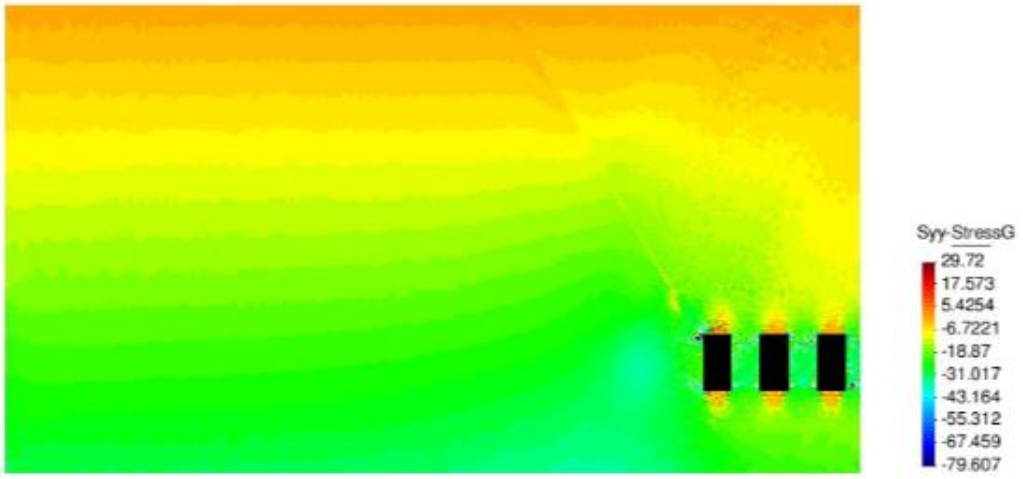
Figura 89 – Compactação (m) da Escavação na Camada de Carnalita.



Fonte: A autora.

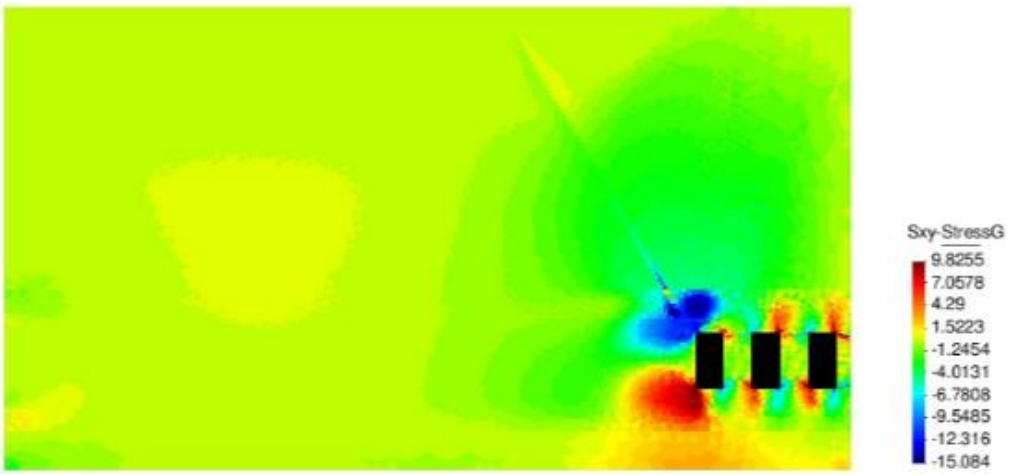
Essa subsidência do terreno é acompanhada por uma interferência no estado de tensões ao redor da escavação e principalmente na região mais próxima à falha, com aumento da tensão vertical, Figura 90, e da tensão cisalhante, Figura 91, que se propaga ao longo da falha reativando-a, Figura 92, com a tensão desviadora chegando ao valor de aproximadamente 12.9 MPa.

Figura 90 – Tensões Verticais (MPa)



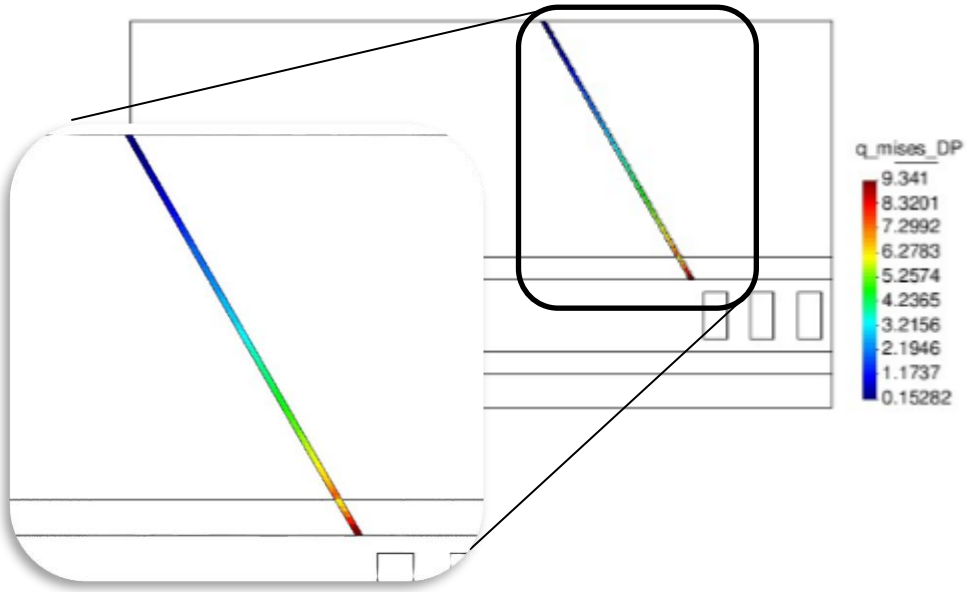
Fonte: A autora.

Figura 91 – Tensões Cisalhantes (MPa)



Fonte: A autora.

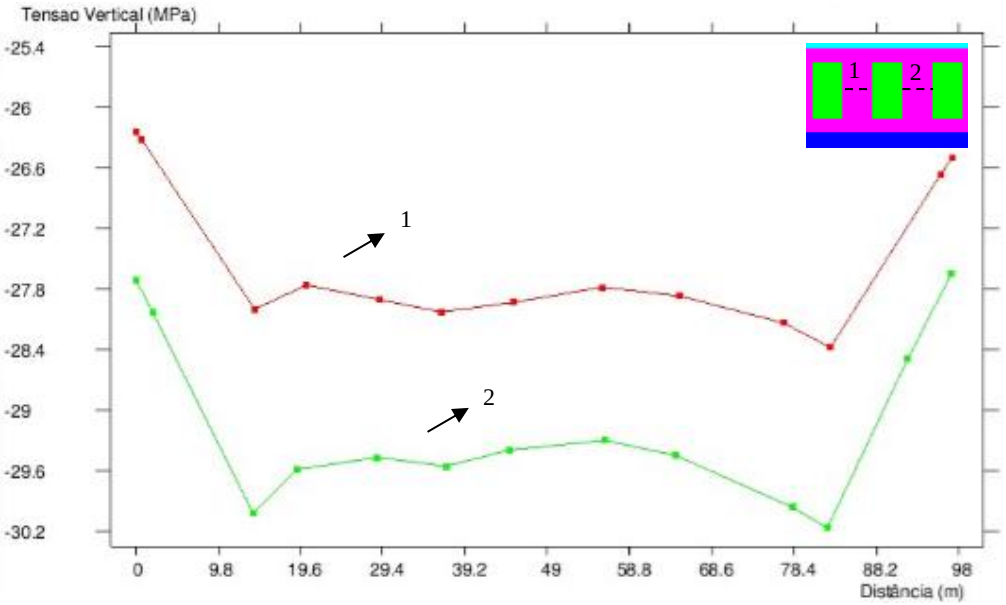
Figura 92 – Tensões Desviadoras (MPa)



Fonte: A autora.

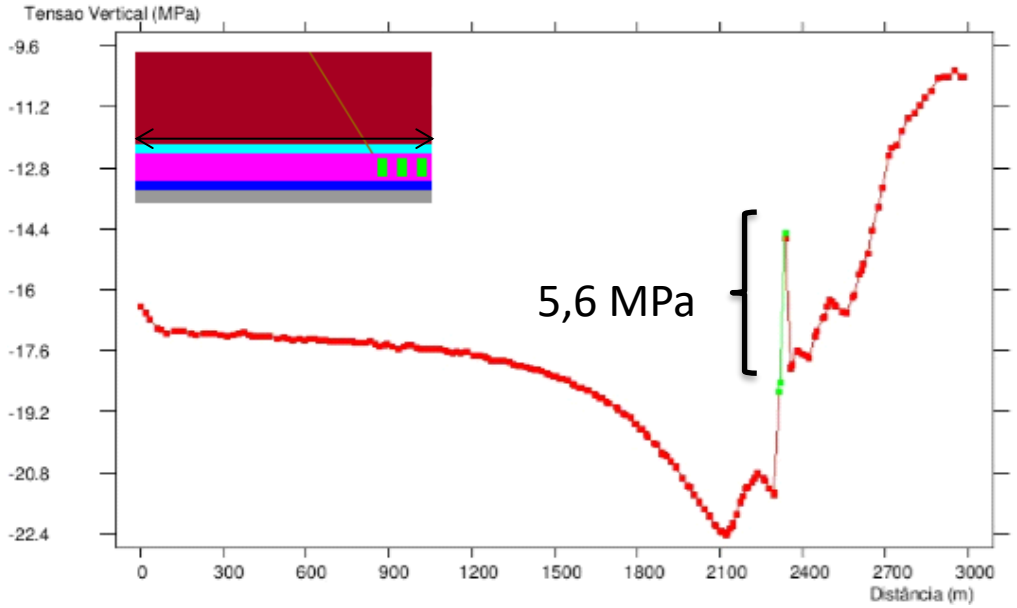
No comportamento das tensões observa-se que ocorre uma concentração de tensões ao redor das escavações com uma diferença de, em média, 1,5 MPa entre as curvas, Figura 93, e um salto das tensões na descontinuidade, tanto no comportamento das tensões verticais, de aproximadamente 5,6 MPa, Figura 94, quanto nas tensões cisalhantes, de aproximadamente 3,1 MPa, Figura 95.

Figura 93 – Tensão Vertical entre as Escavações.



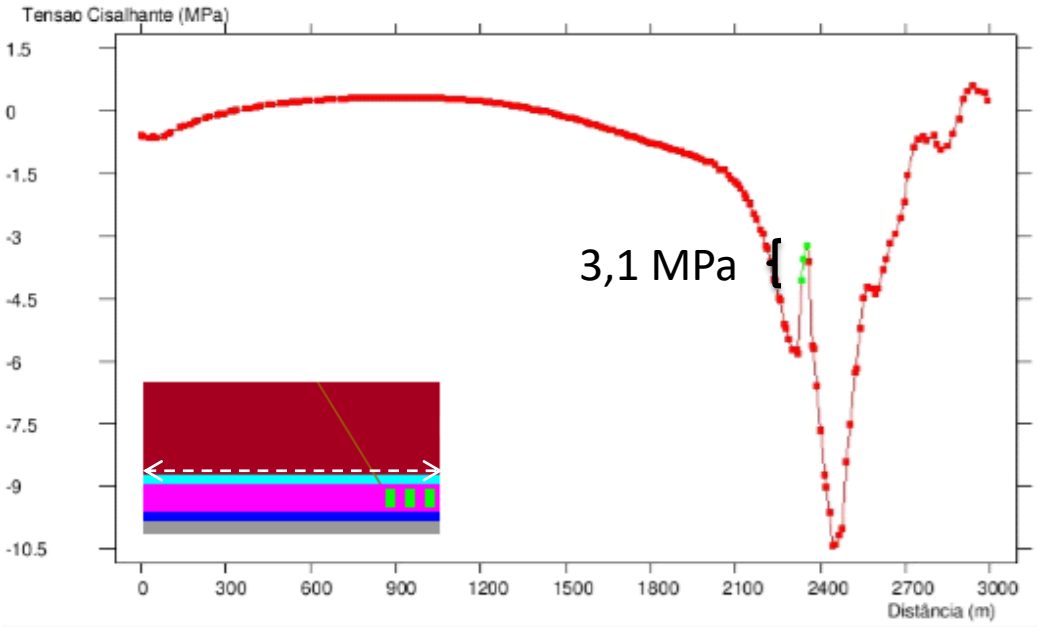
Fonte: A autora.

Figura 94 – Tensão Vertical na Rocha Adjacente.



Fonte: A autora.

Figura 95 – Tensão Cisalhante na Rocha Adjacente.



Fonte: A autora.

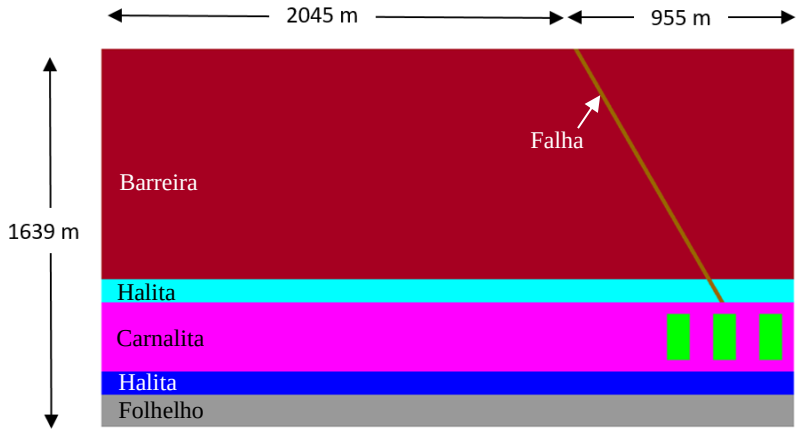
Comparando com o caso anterior de Frente de Escavação, observou-se que o caso da galeria necessitou de mais tempo para que ocorresse a reativação da fratura. E na existência dos pilares entre as escavações, a subsidência no terreno foi menor e foi maior a concentração de tensões, com valores de tensão cisalhante chegando ao dobro do caso anterior, mesmo tendo ocorrido com tensões desviadoras e com um salto no deslocamento inferiores.

Isso mostra que a falha é reativada com mais facilidade no caso da Frente de Escavação, mostrando que a geometria da escavação tem influência na fluência da rocha evaporítica e consequentemente na reativação da falha.

5.3 Escavação de Rocha Salina em Galeria com Falha Localizada Acima da Escavação

Para que seja avaliada a influência do posicionamento da escavação em relação à falha, a partir do caso anterior foi modificado o posicionamento da falha em 270 metros mais próximo da extremidade direita da geometria, de forma que a falha fica sobreposta à escavação, Figura 96.

Figura 96 - Condições de contorno e Geometria do Problema

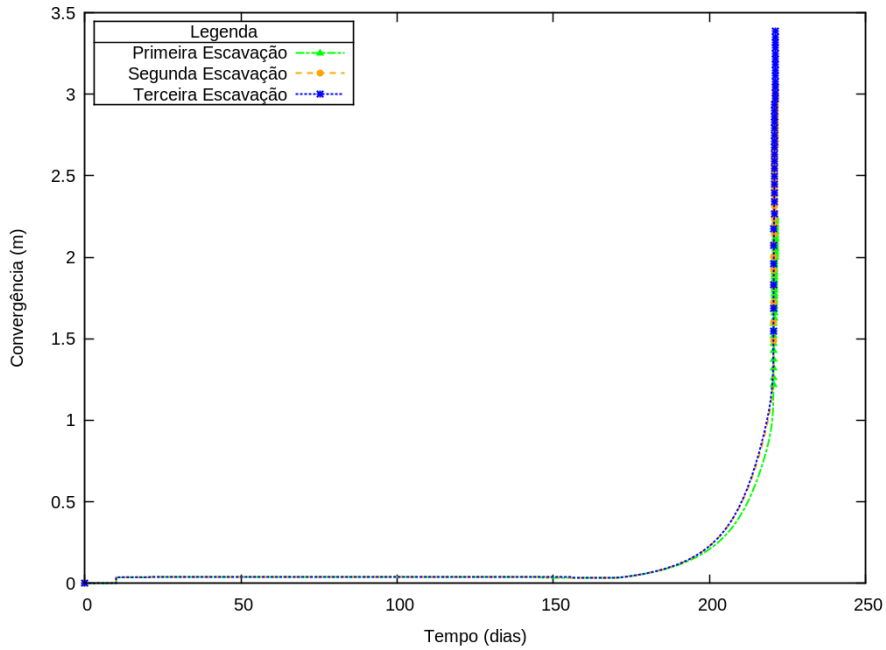


Fonte: A autora.

Na Figura 97 pode ser observada a fluência do material evaporítico escavado. A deformação convergente entre o piso e o teto da escavação evolui a partir dos 170 dias entrando na fase de fluência primária com um valor de 1,7% (3,4 metros) de convergência em 221 dias.

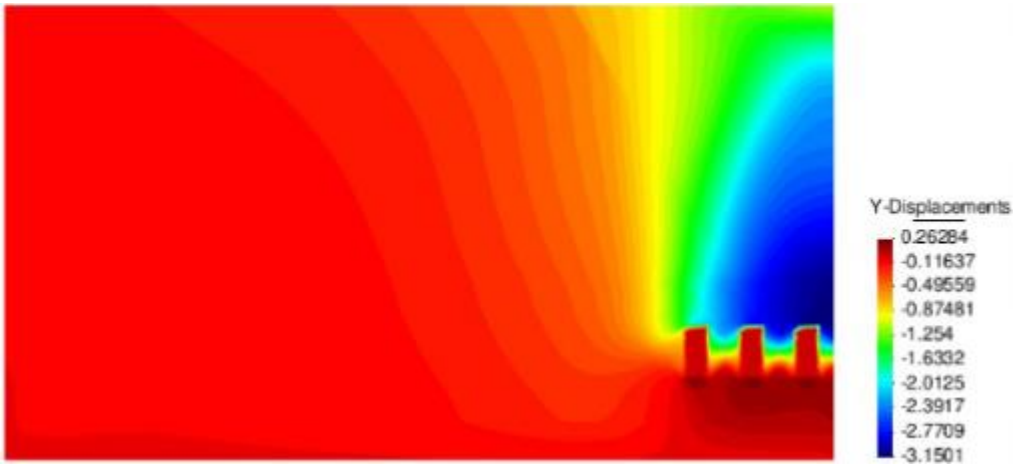
Na Figura 98 observa-se a variação nos deslocamentos verticais com a subsidência do terreno de 1,28 metros e um salto nos deslocamentos de aproximadamente 0,17 metros, Figura 99, e com a compactação da escavação, Figura 100.

Figura 97 – Convergência nas Escavações



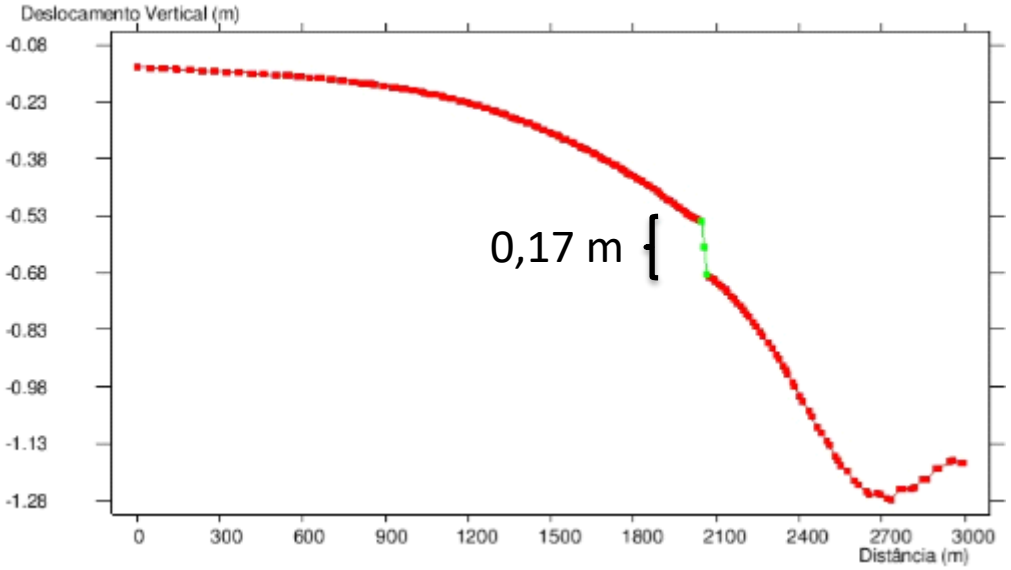
Fonte: A autora.

Figura 98 – Campo dos Deslocamentos (m).



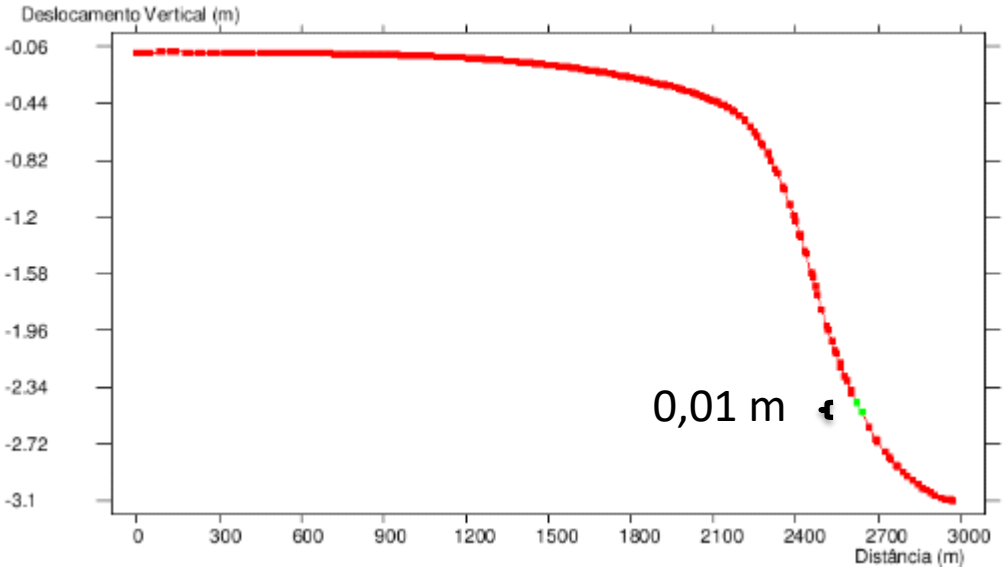
Fonte: A autora.

Figura 99 – Subsidência (m) do Terreno.



Fonte: A autora.

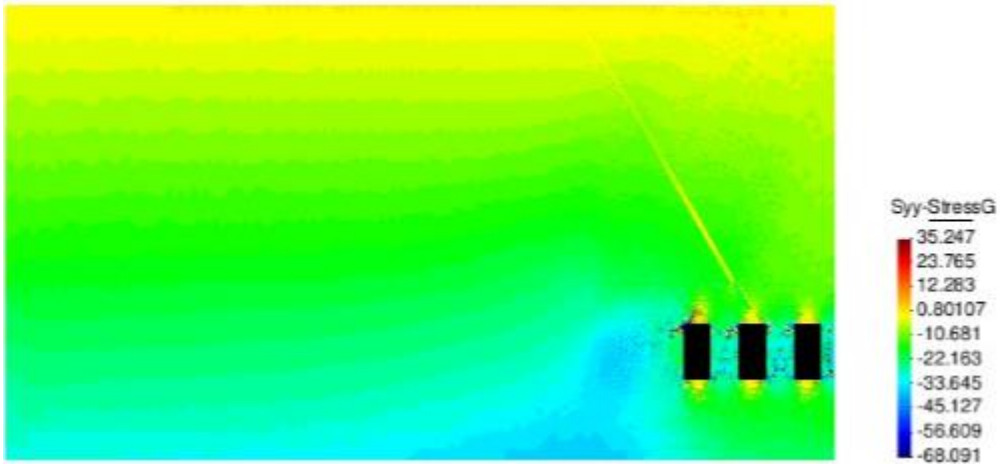
Figura 100 – Compactação (m) da Escavação na Camada de Carnalita.



Fonte: A autora.

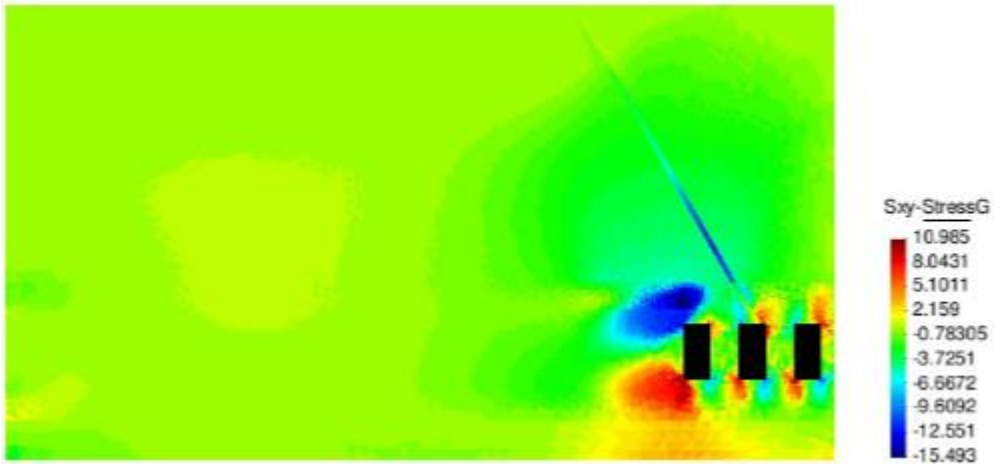
Análoga ao caso anterior, essa subsidência do terreno é acompanhada por uma interferência no estado de tensões ao redor da escavação e principalmente na região mais próxima à falha, com aumento da tensão vertical, Figura 101, e da tensão cisalhante, Figura 102, que se propaga ao longo da falha reativando-a, Figura 103, com a tensão desviadora chegando ao valor de aproximadamente 10.2 MPa.

Figura 101 – Tensões Verticais (MPa)



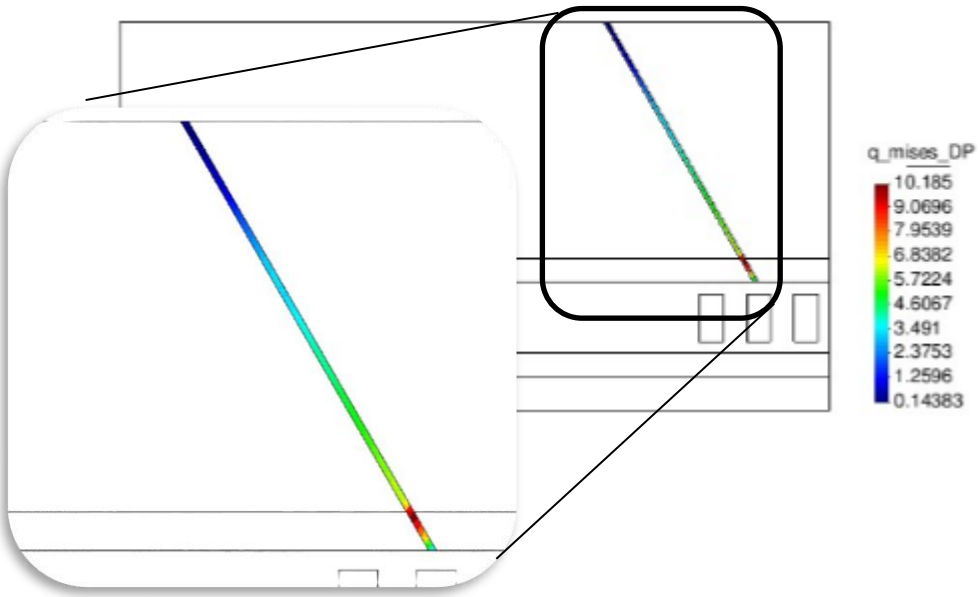
Fonte: A autora.

Figura 102 – Tensões Cisalhantes (MPa)



Fonte: A autora.

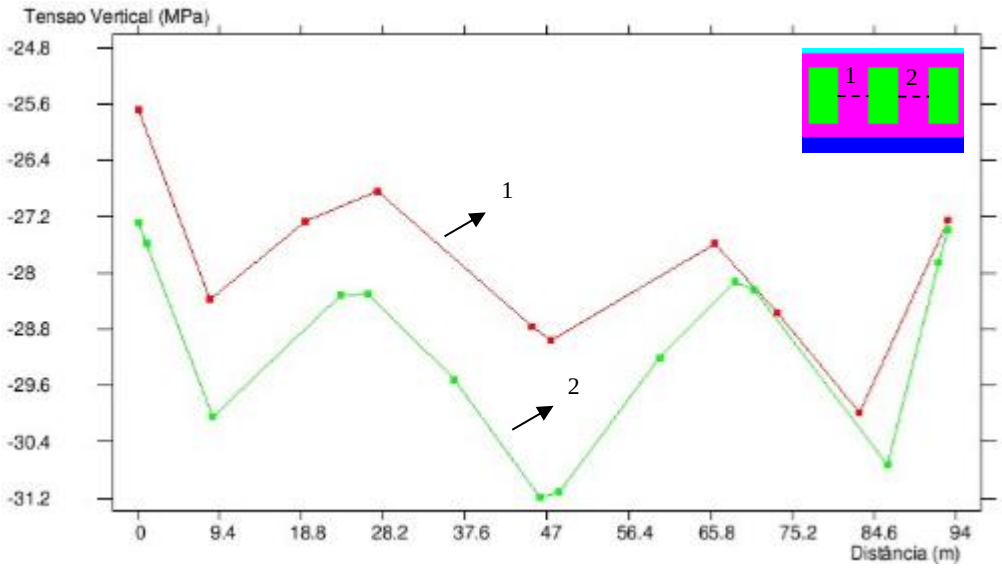
Figura 103 – Tensões Desviadoras (MPa)



Fonte: A autora.

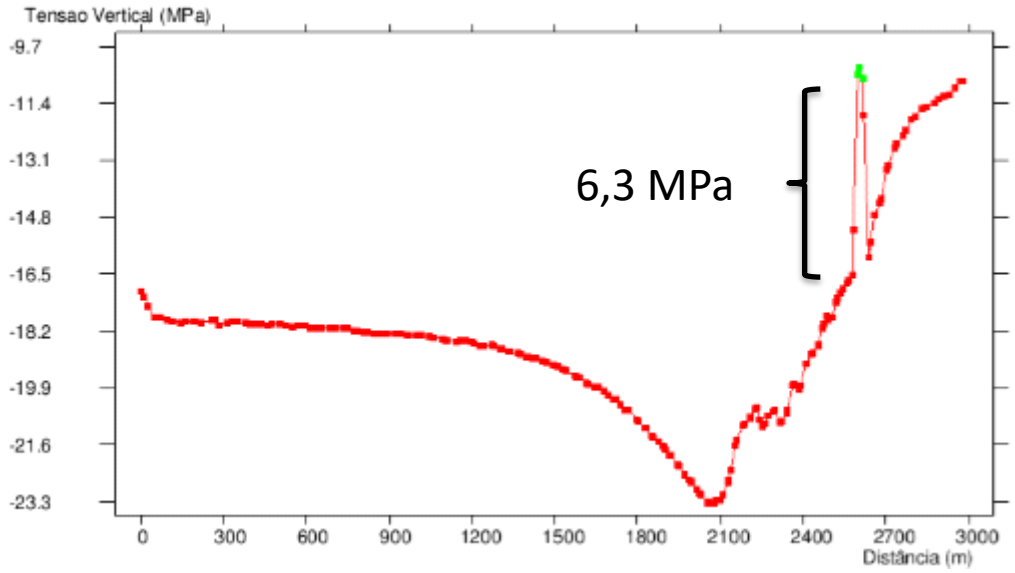
No comportamento das tensões observa-se que ocorre uma concentração de tensões ao redor das escavações com uma diferença entre as curvas de, em média, 1,2 MPa, Figura 104, e um salto das tensões na descontinuidade, tanto no comportamento das tensões verticais, de aproximadamente 6,3 MPa, Figura 105, quanto nas tensões cisalhantes, de aproximadamente 3,8 MPa, Figura 106.

Figura 104 – Tensão Vertical entre as Escavações.



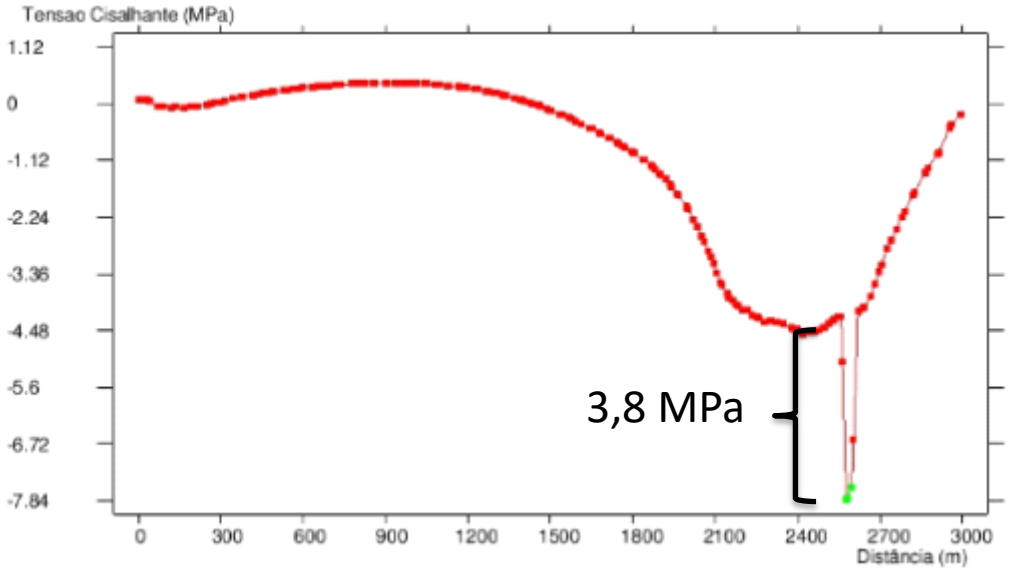
Fonte: A autora.

Figura 105 – Tensão Vertical na Rocha Adjacente.



Fonte: A autora.

Figura 106 – Tensão Cisalhante na Rocha Adjacente.



Fonte: A autora.

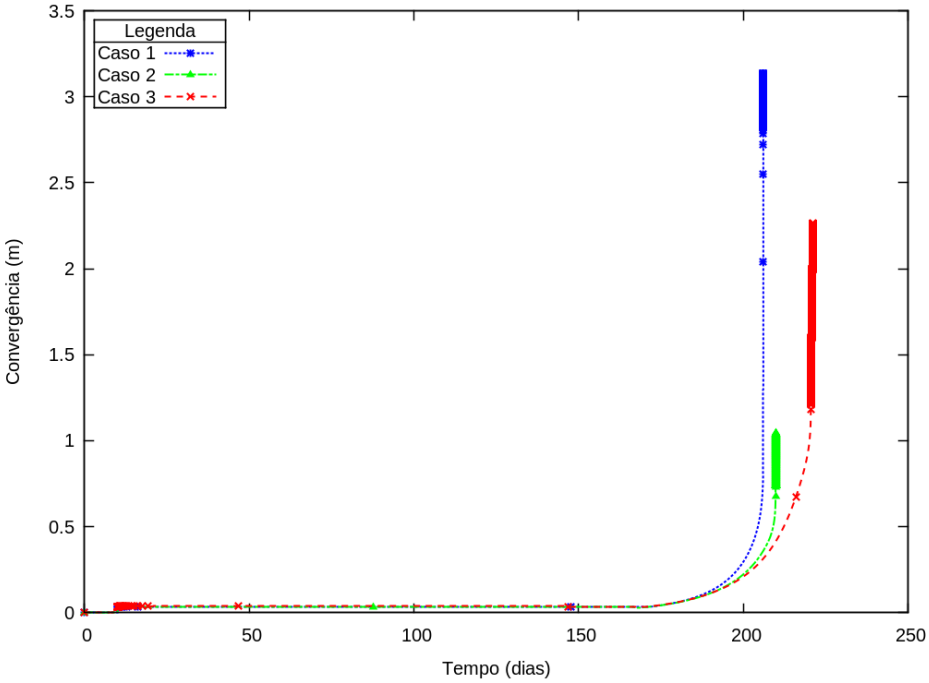
O gráfico a seguir,

Figura 107, mostra o comportamento da convergência dos pontos mais a esquerda das escavações, tratados como primeira escavação para os casos avaliados nessa seção. Sendo o caso 1 o de frente de escavação, o caso 2 da galeria de escavação

com a falha a esquerda e o caso 3 da galeria de escavação com a falha acima da escavação.

Nesse gráfico pode-se observar que as maiores convergências ocorrem no caso de frente de escavação, seguido pelo caso da escavação com uma falha acima da escavação central e por último o caso 2, que mostra maior estabilidade da falha, mas ainda com reativação.

Figura 107 – Tensão Cisalhante na Rocha Adjacente.



Fonte: A autora.

Neste caso, com a falha localizada sobre a cavidade observa-se uma reativação desta sob estado de tensão inferior quando comparado ao caso anterior. Isto se deve pelo fato de a falha sofrer maior influência da convergência (deformações) da escavação. O que mostra que este cenário apresenta mais risco que o anterior, pois as deformações são mais elevadas, embora a subsidência medida tenha sido inferior, Tabela 13.

Tabela 13 – Comparação entre as escavações.

	Escavação	Subsidência (m)	Tensão de Cisalhamento máx (MPa)	Convergência (%)	Salto das tensões (MPa)
1	**Frente de escavação**	0,63	13,8	3,6	4,5
2	**Escavação 200x100 (HxC)**	0,58	12,9	0,75	5,6
3	**Escavação 200x100 (HxC) com Fratura acima**	0,17	10,2	1,7	6,3

Isso mostra que quanto mais distante a falha se localizar da escavação mais as tensões se dissipam no maciço e menos as tensões são transmitidas para a falha. No sentido do tamanho da escavação, os casos mostraram que a geometria da escavação tem influência. Quanto ao vão da escavação, a existência de pilares auxilia na sustentação da escavação, dessa forma, quanto maior o vão mais susceptível à reativação.

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi avaliado o problema do fenômeno de fluência de rochas evaporíticas e sua influência em rochas adjacentes naturalmente fraturadas. Para isso foi necessário realizar a validação do algoritmo de integração implícita-explícita (IMPLEX) para o cálculo das equações constitutivas do modelo elasto-plástico segundo o critério de ruptura de Drucker-Prager no programa de elementos finitos, *in house*, CODE-BRIGHT para ser utilizado na descontinuidade embebida.

Para a validação do algoritmo IMPLEX aplicado na técnica de descontinuidades fortes embebidas, foi necessário compatibilizar o modelo com soluções analíticas, avaliar a sensibilidade do modelo frente ao incremento de tempo, à tolerância associada ao mesmo, à estrutura de malha e ao posicionamento da descontinuidade.

Foi comparada a solução numérica com a solução analítica do algoritmo através da modelagem do caso clássico de expansão de cavidade no qual foi verificada a solução numérica com cerca de 1% de erro relativo à solução analítica. Foi verificada a eficiência do algoritmo através do Número Total de Iterações (NTITER) e do Tempo Total de processamento em CPU requerido pelos esquemas de integração (CPU Time) para valores de incremento de tempo de 1E-00, 1E-01, 1E-02 e para valores de tolerâncias de 2E-01, 2E-02, 1E-02, 2E-03, 2E-04 e 2E-05 ao fim do processo total da análise. Constatou-se que quanto menor o incremento de tempo e a tolerância, mais próxima a resposta do algoritmo IMPLEX fica da solução analítica, mas existem valores ótimos de incremento de tempo, sendo variável com o tipo de problema avaliado, e de tolerância de 2E-03.

Em seguida, foi verificada a sensibilidade do algoritmo à estrutura da malha de elementos finitos discretizada através da modelagem do ensaio de Cisalhamento Direto, no qual mostrou a limitação do modelo frente a malhas desestruturadas. Foi também demonstrada a sensibilidade do algoritmo quanto ao posicionamento da descontinuidade embebida através da modelagem do ensaio Uniaxial.

Através do caso de estabilidade de talude, se qualificou o algoritmo inserido na técnica de descontinuidades fortes com a solução analítica de altura crítica para taludes verticais de Terzaghi. Nesse caso foi avaliada para esse problema de médio porte a sensibilidade do algoritmo à malha, que comprovou a limitação do algoritmo frente a malhas desestruturadas verificada no caso de cisalhamento direto. Também se confirmou a sensibilidade do algoritmo à tolerância associada ao incremento de tempo para esse problema de médio porte, na qual se verificou que para a malha com a falha embebida em elementos alinhados o algoritmo respondeu de igual forma para todas as tolerâncias;

Com esse caso pode-se comparar com o caso de expansão de cavidade, que possui um estado de tensão inicial menor em comparação com o caso do Talude, e verificar que o algoritmo é mais sensível ao valor da tolerância, mas para estados de tensões semelhantes ao caso do talude, o algoritmo se mostra estável com qualquer valor de tolerância avaliado nesse trabalho.

Com isso concluiu-se que o algoritmo é estável e eficiente para a modelagem de problemas de superfícies de cisalhamento com o modelo de Druker-Prager inserido em descontinuidades embebidas forte. Porém, com a limitação de que a malha deverá ser estruturada na região da falha.

Foi então avaliada a influência do fenômeno de fluência de rochas evaporíticas através da modelagem de escavação em rochas evaporíticas num problema de reativação de falha geológica considerando o modelo de fluência para a camada de rocha salina e o modelo elasto-plástico, empregando o algoritmo IMPLEX, para rochas adjacentes e para a falha geológica aplicando nesta a técnica de descontinuidade forte embebida. Nesses casos notou-se que existe a tendência de reativação de falha por cisalhamento a partir da fluência das rochas evaporíticas e a mudança no estado de tensões. Nessa análise foi observado que quanto mais próxima a falha se encontrar da escavação e quanto maior for o vão da escavação, sem pilares de sustentação,

maior a influência da deformação das rochas salinas e maior a possibilidade de reativação da falha.

7 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Para trabalhos futuros propõe-se a adaptação desse algoritmo para superfícies de falhas e fraturas não lineares e aplicadas em malhas não-estruturadas.

Propõe-se também que seja realizada uma análise acoplada em casos hidromecânicos, como o caso do Talude, e termo mecânicos, como no caso da reativação de falhas em regiões de escavação em minas de evaporitos, de forma que o código CODE-BRIGHT ganhe maior robustez.

Por fim, pode-se incluir também leis de endurecimento e amolecimento ao modelo de Druker-Prager.

REFERÊNCIAS

ABBO, A. J., **Finite Element Algorithms for Elastoplasticity and Consolidation.** PhD Thesis, University of Newcastle, pp. 271, February, 1997.

BARAJAS, P., AND CIVAN, F. **Modeling and Analysis of Salt-Cavern Natural-Gas Storage**. SPE 164489, University of Oklahoma City, USA, 2014.

BESERRA, L. de S., **Implementação de Algoritmos de Integração Implícita para Modelos Constitutivos Elasto-Plásticos na Simulação Geomecânica.** Dissertação de Mestrado, UFPE, Recife, 2010.

BESERRA, L. de S., **Análise Hidromecânica do Fraturamento Hidráulicoo via Elementos Finitos com Descontinuidades Fortes Incorporadas.** Tese de Doutorado, UFPE, Recife, 2015.

BOTELHO, F. V. C. **Análise Numérica do Comportamento do Sal em Poços de Petróleo.** Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.

BURD, H. J., HOULSBY, G. T., **Finite Element Analysis of Two Cylindrical Expansion Problems Involving Nearly Incompressible Material Behaviour.** International for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 14, 351-366, 1990.

CAPUTO, H. P. **Mecânica dos solos: e suas aplicações**, 6ª edição. Livros Técnicos e Científicos Editora, Vol. 2, 1987.

CHEN, W. F., BALADI, G. Y. **Soil plasticity: theory and implementation.** New York: Elsevier, 1985.

COSTA, A. M., MEDEIROS, F. A. S., FONSECA, C.F. **Perfuração de Espessas Camadas de Sal na Bacia de Campos.** Relatório Petrobrás, 2004.

COSTA, A. M., POIATE, E. JR., FALCÃO, J. L. **Triaxial Creep Test in Salt – Applied in Drilling Through Thick Salt Layers in Campos Basin – Brazil.** International Society for Rock Mechanics. News Journal, Vol. 9, pp. 14-24, 2005.

GOMES, I. F. **Implementação de métodos explícitos de integração com controle de erro para modelos elasto-plásticos e visco-elasto-plásticos**. Dissertação de mestrado: Mestrado em Engenharia Civil, UFPE, Recife, 2006.

HILL, R., **The Mathematical Theory of Plasticity.** Oxford University Press, London, England, 355 pp., 1950.

MANZOLI, O. L. **Contribuições à simulação numérica de descontinuidades fortes**. UNESP. Bauru – SP, 2008.

MEDEIROS, F. A. S. **Análise do Comportamento de Colunas de Revestimento Frente à Movimentação do Sal em Poços de Petróleo.** Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.

MOHRIAK; W., SZATMAN; P, ANJOS, S. M. C. **Sal: Geologia e Tectônica (Exemplos nas Bacias Brasileiras).** (1ª Ed.) Beca Edições Ltda. Petrobrás, São Paulo, 2008

NÓBREGA, L. D. O. **Modelagem Hodro-Mecânica de Estruturas de Concreto Afetada pela Reação Álcali-Agregado.** Tese de Doutorado em Engenharia Civil, UFPE, Recife, 2008.

OLIVER, J.; HUESPE, A. E.; CANTE, J. C. **Na Implicit/Explicit Integration Scheme to Increase Cumputability of Non-Lineas Material and Contact/ Friction Problems.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 197, p. 1865-1889, 2008

POIATE JR, E. **Mecânica das rochas e mecânica computacional para projetos de poços de petróleo em zonas de sal**. Rio de Janeiro-RJ. 462p. 2012. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2012.

SILVA, I. J. M. da. **Análise de Estabilidade e Deformação de Cavidades em Evaporitos pelo Método dos Elementos Finitos.** Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 156 p, 2015.

SLOAN, S. W., SHENG, D., ABBO, A. J., **Accelerated Initial Stiffness for Elastoplasticity.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24: 579-599, 2000.

SOUSA, R. M. **Modelagem Acoplada Hidro-Mecânica da Perfuração de Poços em Rochas Frágeis.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, UFPE, Recife, 2004.

SOUZA NETO, E. D.; PERIC, D.; OWENS, D. **Computacional Methods for Plasticity: Theory and Applications**. Chichester: Jonh Wiley & Sons Ltd., 2008.

VASCNCELOS, R. B. **Implementação de Modelo de Dano Isotrópico Aplicado a Problemas Acoplados Hidro-geomecânicos.** Dissertação de Mestrado para Engenharia Civil, UFPE, Recife, 2007.

YU, H. S., HOULSBY, G. T., **Finite Cavity Expansion in Dilatant soils: Loading Analysis.** Géotechnique. 42, No. 4, (649-654), 1992.