



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Jaime Cesar dos Santos Filho

Fibrações: Do Local para o Global

Recife

2015

Jaime Cesar dos Santos Filho

Fibrações: Do Local para o Global

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Henrique de Araujo
Coorientador: Dr. Marcus Wanderley

Recife

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S337f Santos Filho, Jaime César dos
Fibrações: do local para o global / Jaime César dos Santos Filho. – 2015.
75 f.

Orientador: Henrique de Araujo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2015.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Fibrações. I. Araujo, Henrique de (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-151

JAIME CÉSAR DOS SANTOS FILHO

FIBRAÇÕES: DO LOCAL PARA O GLOBAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 12/08/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Medeiros Wanderley (Co-orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

Agradecimentos

O meu primeiro agradecimento vai para minha mãe, Maria de Lourdes, principal responsável pela minha educação e, conseqüentemente, pela minha percepção de mundo. Pois sem seu apoio e cobranças eu não teria condições de percorrer o caminho que fiz. Minha dívida com ela é impagável, daquelas que só se deve ter com a própria mãe.

Naturalmente, depois da mãe, gostaria de agradecer aos meus familiares que, além de educadores, foram exemplos de várias qualidades, algumas das quais busco incessantemente e respeito muito quem às têm. Aqui eu gostaria de citar meus avós maternos, Dona Júlia e Seu Luiz (vulgo Seu Zezinho), que foram avós, educadores e hoje tornaram-se ídolos como pessoas. Gostaria de agradecer nominalmente também ao meu irmão Caio Cesar. Que seu futuro premie suas qualidades, que são muitas.

Como representantes dos amigos pré-universidade destaco Carlos, Breno, Fidell e Romagnosi. Mas o agradecimento vai para todos os amigos de infância e da juventude, em especial as pessoas que passaram pelo Colégio Santa Helena no meu tempo de estudante. Vocês me fizeram ter um gosto especial pela amizade, que trago comigo até hoje.

Agradeço também os amigos da universidade. Tanto do tempo de engenharia quanto, posteriormente, na matemática. A excelente recepção que tive no bacharelado em matemática foi fundamental para meu aproveitamento do curso. Cito os amigos André Pacheco, Bob, Edgar, Gilson, João Alves, Lucas “xodó”, Luiz “Charlisson” e o restante da turma do Aquário. Amigos e parceiros de fim de bacharelado e início e mestrado como André Pirauá, Renato Soares, Caio, Thiago Fiel, Rafael Holanda, Thiago “Nesh”, Ricardo, Willikat, Hugo e vários outros. Destaco nominalmente Nicolás Zumelzu, amigo que tive o prazer de conhecer no meio do mestrado e que é o responsável pela edição desta dissertação.

Agradeço os professores e funcionários que compõem o DMat. Aos professores Antônio Carlos, Manoel Lemos e Sóstenes Lins, pela convivência e aprendizado. Em especial o professor Sérgio Santa Cruz, que foi fundamental para a minha formação como matemático e hoje é um dos meus ídolos profissionais. Meu mestrado não seria possível sem a boa vontade e disposição do meu orientador, professor Henrique Araújo, e sem o interesse do meu co-orientador Marcus Vinícius.

Este parágrafo reservo à minha companheira, Elaine de Araújo. Ela me proporcionou duas experiências impagáveis: ser pai e formar uma família, em ordem cronológica. Com ela, e nossos filhos Athos e Lisie, tenho o que mais prezo no momento. A felicidade de conhecer e conviver com uma pessoa como Elaine não pode ser descrita. Por isso, apenas, agradeço muito.

De fundamental importância para os sucessos do meu caminho, depois de formado uma família, foi a família da minha companheira. Seus pais, Seu Dinamérico Farias e Dona Maria José, que por incontáveis situações nos deram suporte, inclusive ficando com meu filho ainda bebê, para que eu pudesse ir pra universidade estudar. Agradeço também a Aline, que ajudou neste suporte.

Por fim, agradeço o apoio financeiro da CAPES que foi necessário, mas não suficiente, para a realização desta dissertação.

*“...And we’ll bask in the shadow
Of yesterday’s triumph
And sail on the steel breeze
Come on, you boy child, you winner and loser
Come on, you miner for truth and delusion
And shine!”
(Shine On You Crazy Diamond - PINK FLOYD)*

Resumo

Fibrações: do Local para o Global coloca toda a teoria das fibrações dentro do contexto de espaços sobre uma base. Isso possibilita desenvolver de forma completa (no sentido de ser autocontida) a teoria tanto do ponto de vista de reobter os resultados principais de forma sistemática, quanto do ponto de vista de generalizá-los. O foco desse trabalho está nos resultados de localização. Para isso é fundamental entender a importância da *Propriedade de Extensão de Seção* (abreviada do inglês por SEP) e sob quais hipóteses podemos dizer que esta propriedade é local (*Localização da SEP*). Com a ajuda da SEP provamos que a *Propriedade de Levantamento de Homotopias* (CHP) é local (*Teorema de Uniformização de Hurewicz*). Por fim, caracterizamos localmente as fibrações. No capítulo dois introduzimos os nossos objetos de estudos, os espaços sobre uma base, damos vários exemplos e definimos produto fibrado. Definimos também o que chamamos de B -homotopia e B -equivalência homotópica. No capítulo três trabalhamos com a Propriedade de Extensão de Seção (SEP), mostrando que a SEP é uma propriedade local sob certas hipóteses gerais. Mostramos também que essa propriedade é hereditária. No capítulo quatro definimos as fibrações de Hurewicz e a Propriedade de Levantamento de Homotopias (CHP) e mostramos que são propriedades essencialmente equivalentes. Mostramos que estas propriedades são locais. No capítulo cinco definimos uma fibração fraca de modo mais geral que as fibrações de Hurewicz. Reobtemos resultados semelhantes aos obtidos para fibrações, inclusive o análogo ao Teorema da Uniformização de Hurewicz. No fim do capítulo caracterizamos localmente as fibrações fracas.

Palavras-chave: Fibrações. Propriedade de Extensão de Seção. Propriedade de Levantamento de Homotopias. Propriedade Fraca de Levantamento de Homotopias. Fibrações Fracas.

Abstract

Fibrações: do Local para o Global puts the entire theory of fiber within the context of spaces on a basis. This makes it possible to develop fully (in the sense of being self-contained) the theory both from the point of view of retrieving the main results in a systematic way, and from the point of view of generalizing them. The focus of this work is on localization results. For this it is fundamental to understand the importance of Section Extension Property (SEP) and under what hypotheses we can say that this property is local (SEP localization). With the help of SEP we prove that the Covering Homotopy Property (CHP) is local (Hurewicz Uniformization Theorem). Finally, we characterize the localities. In chapter two we introduce our objects of study, the spaces on a base, we give several examples and define bundled product. We also define what we call B-homotopy and B-homotopic equivalence. In chapter three we work with the Section Extension Property (SEP), showing that the SEP is a local property under certain general assumptions. We also show that this property is hereditary. In chapter four we define the Hurewicz Fibrations and the Covering Homotopy Property (CHP) and show them to be essentially equivalent properties. We have shown that these properties are local. In chapter five we define a weak fibration more generally than the Hurewicz fibrations. We obtain similar results to those obtained for fiber, including the analogue to the Hurewicz Uniformization Theorem. At the end of the chapter we characterize weak fiber locally.

Keywords: Fibrations. Section Extension Property. Covering Homotopy Property. Weak Covering Homotopy Property. Weak Fibrations.

Sumário

1	Introdução.....	10
2	Espaços sobre uma base.....	14
2.1	Definições e Exemplos.....	14
2.2	Homotopias Sobre uma Base e Espaços Retrâteis.....	20
2.3	Produto Fibrado.....	24
3	A Propriedade de Extensão de Seção.....	27
3.1	A Propriedade de Extensão de Seção (SEP).....	27
3.2	Localização da SEP	35
3.3	Hereditariedade da Propriedade de Extensão de Seção	41
3.4	Localização dos Espaços Retrâteis e das <i>B-Equivalências</i>	43
4	Fibrações e a Chip.....	47
4.1	Fibrações	47
4.2	Propriedade de Levantamento de Homotopias (CHP).....	49
4.3	Localização das Fibrações.....	54
5	Fibrações Fracas e a WCHP.....	60
5.1	Propriedade Fraca de Levantamento de Homotopias (WCHP).....	60
5.2	Localização das Fibrações Fracas	65
5.3	Caracterização Local das Fibrações Fracas	69
	Referências.....	75

1 Introdução

A Teoria das Fibrações, hoje, constitui uma das noções básicas em topologia. É uma estrutura simples de se definir e de se pensar sobre.

Começamos com uma função contínua $p : E \longrightarrow B$, onde o espaço topológico E é dito espaço total, o espaço B é dito espaço base e a função p dita projeção. Existem essencialmente dois pontos de vista sobre tal teoria: o ponto de vista geométrico e o da Teoria da Homotopia.

O geométrico foi brilhantemente explorado e fundamentado (já que ainda havia divergência da comunidade sobre quais definições deveriam ser adotadas) por Norman Steenrod em seu livro “The Topology of Fibre Bundles”, (**STEENROD, 1951**), que virou a principal referência desse tópico e influenciou inúmeros matemáticos em suas pesquisa, entre eles Grothendieck no seu trabalho em geometria algébrica.

Esse ponto de vista generaliza a ideia de parametrizar um espaço topológico através de outro espaço o que engloba casos como variedades diferenciáveis, por exemplo. No nosso texto, esse ponto de vista será abordado nos exemplos com nome de espaços fibrados (de Steenrod) com objetivo de aplicar a teoria desenvolvida no nosso trabalho à essa abordagem mais geométrica.

O outro ponto de vista, o da homotopia, é o plano de fundo do nosso trabalho. Um dos principais questionamentos dessa teoria é o seguinte:

Considere o seguinte diagrama comutativo de espaços topológicos e funções contínuas:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Sob quais hipóteses existe um levantamento $\widetilde{H} : X \times [0, 1] \longrightarrow E$ tal que $p\widetilde{H} = H$ e $\widetilde{H}_0 = h$?

Uma função contínua $p : E \longrightarrow B$ que possui tal propriedade para um espaço topológico X é dita possuir a Propriedade de Levantamento de Homotopia para X (abreviadamente dizemos que p possui a CHP para X , onde a sigla CHP é decorrente da nomenclatura inglesa “Covering Homotopy Property”). Arelado a isso surgem dois pontos a se questionar:

- Dada uma classe $\mathcal{C}$ de espaços topológicos, sob quais condições $p : E \longrightarrow B$ possui a CHP para $\mathcal{C}$ (ou seja possui a CHP para todo espaço pertencente a $\mathcal{C}$)?
- Até que ponto possuir tais propriedades localmente implica possuir tais propriedades

globalmente? (Maneiras de sair do local e ir para o global constitui um problema central em topologia).

Em 1944, Steenrod publicou o artigo “*The classification of the Sphere Bundles, Ann. of Math., 45 (1944), 294-311*” onde mostrou que todo espaço fibrado $p : E \rightarrow B$ com base normal (T4 e Hausdorff) possui a CHP para os espaços compactos. Nesse mesmo artigo ele fez a seguinte pergunta: Sob quais hipóteses um espaço fibrado possui a CHP para todos os espaços topológicos? Essa pergunta ficou sem resposta até o início da década de 50.

Em 1951, Jean-Pierre Serre, em sua extraordinária tese (**SERRE, 1951**), estudou aplicações que possuem a CHP para cubos $[0, 1]^n$ com n natural), que se mostrou equivalente a possuir a CHP para os CW-complexos que constituem uma classe importantíssima (e suficientemente geral) de espaços topológicos.

A motivação para o nosso trabalho começa com o breve e belíssimo artigo de Hurewicz, (**HUREWICZ, 1955**), publicado em 1955. Nesse trabalho ele introduziu, não com essa nomenclatura, o produto fibrado (Capítulo 1) e o usou para definir o que hoje chamamos de fibração (ou fibração de Hurewicz, como é comumente denominado devido a esse trabalho). Nele Hurewicz mostrou que ser uma fibração é equivalente a possuir a CHP para todo espaço topológico (Capítulo 3). Mas a principal contribuição desse artigo só foi observada por Dold quase uma década depois em (**DOLD, 1963**): A ideia usada por Hurewicz na demonstração do “Teorema da Uniformização”, onde mostra que $p : E \rightarrow B$ com B paracompacto é uma fibração se, e somente se, é localmente uma fibração. Com esse trabalho Hurewicz respondeu as perguntas (a) e (b) acima para fibrações de forma extremamente satisfatória.

Esse teorema na verdade foi obtido, por Hurewicz, como um corolário. O que ele mostrou foi o seguinte: Se B possui uma cobertura (não necessariamente aberta) $\{V_\lambda\}$ onde existe uma partição da unidade localmente finita subordinada a tal cobertura então $p : E \rightarrow B$ é uma fibração se, e só se, p é uma fibração sobre cada V_λ dessa tal cobertura (Capítulo 3). Dold observou tal demonstração e observou também a importância de $p : E \rightarrow B$ possuir a “Propriedade de Extensão de Seção”, abreviadamente SEP (capítulo 2), como ponto central para o estudo das fibrações e em seu artigo, já citado, explicitou tal importância.

Para isso a partição da unidade se mostrou fundamental. Foi usando ela que Dold deu condições para a SEP ser uma propriedade local dos espaços (Teorema de Extensão de Seção) o que possibilitou a ele reobter todos os resultados de Hurewicz para uma classe maior de funções contínuas $p : E \rightarrow B$: As funções que possuem a “Propriedade Fraca de Levantamento de Homotopias”, abreviada por WCHP que provem da nomenclatura “Weak Covering Homotopy Property” (capítulo 4).

Infelizmente não há na literatura nenhum trabalho voltado para fibrações, do ponto de vista da homotopia, comparável ao trabalho feito por Steenrod. E não temos, nem de longe, tal pretensão. O nosso objetivo é constituir um texto autocontido que exponha a teoria das fibrações de maneira organizada, acessível e “linearmente” ordenada. Fazendo com que leitores iniciantes (na arte da Matemática) com apenas conhecimentos básicos de topologia geral possam, sem a necessidade de recorrer constantemente a outras fontes, compreender essa belíssima teoria e identificar em seus estudos o aparecimento dessa teoria em outros ramos da matemática: Como Geometria Diferencial, Topologia Algébrica e Geometria Algébrica por exemplo.

O foco de “Fibrações: do Local para o Global”, como o próprio título sugere, está nos resultados de localização: resultados que nos dão condições de passar uma propriedade local para global.

No capítulo 1: Introduzimos os nossos objetos de estudos: Os espaços sobre uma base (ou B -espaços) e as aplicações sobre uma base (ou B -aplicações). Damos vários exemplos que nos acompanharão por todo o texto e definimos o que vem a ser um produto fibrado que desempenha um papel importante não só na teoria das fibrações como na matemática em si. Definimos também o que chamamos de B -homotopia e B -equivalência homotópica que são homotopias (e equivalências homotópicas) que preservam as fibras. Com isso podemos definir o que vem a ser um espaço sobre uma base *retrátil* e mostramos que ser retrátil é uma propriedade hereditária (ou seja, é herdada por produtos fibrados).

No capítulo 2: Trabalhamos com a Propriedade de Extensão de Seção (SEP) e provamos o Teorema da Extensão de Seção que é, sem dúvida, um dos principais resultados da Teoria das Fibrações. Esse teorema afirma que se $p : E \rightarrow B$ é uma função contínua e B é paracompacto então p possui a propriedade de extensão de seção se, e só se, possui tal propriedade localmente (ou seja a SEP é uma propriedade local). Mostramos também que essa propriedade é hereditária, nos possibilitando concluir que ser retrátil é uma propriedade local.

No capítulo 3: Definimos as fibrações de Hurewicz e a Propriedade de Levantamento de Homotopias (CHP) e mostramos que são propriedades essencialmente equivalentes. Depois relacionamos a CHP com a SEP e junto com a equivalência anterior provamos, com a ajuda do Teorema de Extensão de Seção, o Teorema de Uniformização de Hurewicz que mostra que ser uma fibração (ou equivalentemente possui a CHP) é uma propriedade local.

Com a nossa abordagem, respondemos de forma elegante a pergunta feita por Steenrod, descrita acima. Mostramos, através do Teorema de Uniformização, que todo espaço fibrado de Steenrod $p : E \rightarrow B$ com base B paracompacto é uma fibração (de Hurewicz). Na verdade mostramos um resultado mais geral: Se $p : E \rightarrow B$ é um fibrado de Steenrod *normal* então é uma fibração.

No capítulo 4: Definimos uma fibração fraca como uma aplicação contínua $p : E \longrightarrow B$ que possui a Propriedade Fraca de Levantamento de Homotopias (WCHP) para todo espaço topológico, o que abrange as fibrações de Hurewicz. Reobtemos resultados semelhantes aos obtidos para fibrações, inclusive o análogo ao Teorema da Uniformização de Hurewicz: ou seja, ser uma fibração fraca é uma propriedade local.

No fim do capítulo caracterizamos localmente as fibrações fracas: mostramos que para fibrações fracas (em particular para fibrações) B -aplicações são B -equivalências se, e só se, são equivalências homotópicas comum. Posteriormente, como consequência de um resultado mais geral, mostramos que $p : E \longrightarrow B$ onde B é um CW-complexo é uma fibração fraca se, e só se, localmente p é B -equivalente a um espaço trivial e que, sob estas mesmas hipóteses sobre B , uma B -aplicação é uma B -equivalência se, e só se, é uma equivalência homotópica usual sobre cada uma das fibras.

2 Espaços Sobre uma Base

Neste capítulo apresentamos os nossos objetos de estudos: Os espaços e aplicações sobre uma base (ou relativos a uma base). Nele também veremos alguns resultados e algumas equivalências básicas, além de exemplos que vamos usar durante o decorrer do texto.

2.1 Definições e Exemplos

Começamos com a definição de espaços sobre uma base. Por uma base entendemos um espaço topológico qualquer fixado. Desse modo, definimos:

Definição 2.1.1. Seja B um espaço topológico qualquer. Por um *espaço sobre B* (ou B -*espaço*, ou apenas *espaço*) entendemos uma tripla (E, p, B) onde E é um espaço topológico e $p : E \rightarrow B$ é uma função contínua. O espaço topológico B é dito o *espaço base*, E o *espaço total* e a função p a *projeção*.

Se b é um ponto do espaço base então $p^{-1}(b)$ é dito a *fibra sobre b* .

Durante todo o texto adotaremos a notação funcional dos B -espaços. Ou seja, usaremos $p : E \rightarrow B$ ao invés de (E, p, B) .

Os exemplos a seguir nos acompanharão durante todo o texto. Têm como papel principal servir de exemplos e contraexemplos para propriedades citadas.

Exemplo 2.1.2. ESPAÇO TRIVIAL: Sejam Y e B espaços topológicos. Definimos o espaço trivial $\wp : B \times Y \rightarrow B$ como a projeção $\wp(b, y) = b$. Nesse exemplo, as fibras $\wp^{-1}(b) = \{b\} \times Y$ são todas homeomorfas a Y .

◇

Exemplo 2.1.3. A FAIXA DE MÖBIUS: Considere o intervalo compacto $I = [0, 1]$ junto com a relação de equivalência $0 \sim 1$. Então nosso espaço base é $B = \frac{I}{\sim}$ com a topologia quociente. Com isso B é homeomorfo ao $\mathbb{S}^1$. Consideremos também a seguinte relação de equivalência sobre $I \times I$: $(0, t) \sim (1, 1 - t)$. Então nosso espaço total é a Faixa de Möbius $\mathbb{M} = \frac{I \times I}{\sim}$ e a projeção é $p : \mathbb{M} \rightarrow B$ dada por $p[(a, b)] = [a]$. Onde $[\cdot]$ denota a respectivas classes de equivalências em seus devidos espaços. Portanto a faixa de Möbius é um espaço sobre $\mathbb{S}^1$. Sua fibras são todas homeomorfas a I e portanto são contráteis.

◇

Exemplo 2.1.4. GARRAFA DE KLEIN: Com o mesmo espaço base $B = \frac{I}{\sim}$ da faixa de Möbius, **exemplo 2.1.3** acima, temos que a Garrafa de Klein, dada como o espaço quociente $\mathbb{K} = \frac{I \times \mathbb{S}^1}{\sim}$ cuja relação é dada por $(0, (x, y)) \sim (1, (x, -y))$, junto com a projeção $p : \mathbb{K} \rightarrow B$ dada por $p[(a, (x, y))] = [a]$ é um espaço sobre o $\mathbb{S}^1$. Suas fibras são todas homeomorfas ao $\mathbb{S}^1$.

◇

Exemplo 2.1.5. TORO RETORCIDO: Um outro exemplo de um B -espaço, onde B é o mesmo espaço base da Faixa de Möbius, é o toro retorcido $\mathbb{T}_r = \frac{I \times \mathbb{S}^1}{\sim}$, cuja relação é dada por $(0, (x, y)) \sim (1, (-x, -y))$, junto com a projeção $p : \mathbb{T}_r \rightarrow B$ dada por $p[(a, (x, y))] = [a]$.

◇

Exemplo 2.1.6. ESPAÇO DE RECOBRIMENTO: Um B -espaço $p : E \rightarrow B$ é dito um espaço de recobrimento se p for sobrejetiva e todo b no espaço base B possuir uma vizinhança aberta V , dita *vizinhança distinguida*, tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}$ é união disjunta de abertos $\{U_{\lambda}\}$ onde

$$p|_{U_{\lambda}} : U_{\lambda} \rightarrow V$$

é um homeomorfismo. Com isso, temos que p é um homeomorfismo local. Suas fibras $p^{-1}(b)$ são todas discretas.

Se o espaço base B é conexo então $p^{-1}(b)$ possui a mesma cardinalidade, independente do $b \in B$ (ver **(LIMA, 1977)**, pág 119).

◇

Exemplo 2.1.7. FIBRADOS (DE STEENROD) (Ver **(STEENROD, 1951)**, seção 2.3): Seja $p : E \rightarrow B$ um espaço sobre B . Y um espaço topológico e G um grupo topológico de transformações de Y (nesse caso G é um grupo topológico que age efetivamente e continuamente sobre Y e portanto está naturalmente identificado com um subgrupo dos homeomorfismos de Y em Y). Diremos que p é um *fibrado coordenado* se:

a) $\forall b \in B$, $p^{-1}(b)$ é homeomorfo a Y . Com isso dizemos que Y é a *fibra* de $p : E \rightarrow B$.

b) Existe uma coleção $\{V_\lambda\}$ de abertos de B , ditas *vizinhanças coordenadas*, e homeomorfismos

$$\begin{array}{ccc} V_\lambda \times Y & \xrightarrow{\phi_\lambda} & p^{-1}(V_\lambda) \\ \varphi \downarrow & \swarrow p_{V_\lambda} & \\ V_\lambda & & \end{array}$$

ditas *funções coordenadas*.

c) Essas funções e vizinhanças coordenadas satisfazem a condição que dado $b \in V_\lambda$ e dado $y \in Y$ então $p\phi_\lambda(b, y) = b$. Como conseqüência temos que fixado $b \in V_\lambda$ então

$$\phi_{\lambda,b} : Y \longrightarrow p^{-1}(b) \text{ dada por } \phi_{\lambda,b}(y) = \phi_\lambda(b, y)$$

é um homeomorfismo. Veremos mais adiante que isso faz de cada ϕ_λ um V_λ -homeomorfismo (ver **definição 2.1.14**).

d) Dado $b \in V_\lambda \cap V_\gamma$ então $\phi_{\gamma,b}^{-1}\phi_{\lambda,b} : Y \longrightarrow Y$ é um elemento de G . Mais ainda: As funções

$$g_{\gamma,\lambda} : V_\lambda \cap V_\gamma \longrightarrow G \text{ tal que } g_{\gamma,\lambda}(b) = \phi_{\gamma,b}^{-1}\phi_{\lambda,b}$$

são todas contínuas.

Os espaços dos **exemplos 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 e 2.1.5** são exemplos de Fibrados Coordenados (ver **(STEENROD, 1951)**, seção 1).

Se $p : E \longrightarrow B$ é um espaço de recobrimento com base conexa, então também é um fibrado coordenado de Steenrod pois, neste caso, as fibras $p^{-1}(b)$ são todas homeomorfas (possuem a mesma cardinalidade).

Dois fibrados coordenados com o mesmo espaço total e mesma base são ditos *estritamente equivalentes* se suas funções e vizinhanças coordenadas $\{(\phi_\lambda, V_\lambda)\}$ e $\{(\phi'_\gamma, V'_\gamma)\}$ satisfazem a condição que as funções

$$\bar{g}_{\lambda,\gamma} : V_\lambda \cap V'_\gamma \longrightarrow G \text{ tal que } b \mapsto \phi_{\lambda,b}^{-1}\phi'_{\gamma,b}$$

são todas contínuas. Uma classe de equivalência de fibrados coordenados na relação descrita acima é dito simplesmente um *espaço fibrado* ou *G-fibrado (de Steenrod)* quando queremos destacar o grupo G .

◇

O outro objeto central do nosso estudo são as aplicações sobre uma base, que definimos da seguinte forma:

Definição 2.1.8. Sejam $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ espaços sobre B . Por uma *aplicação sobre B* (ou apenas *B -aplicação*) entendemos uma função contínua $f : E \longrightarrow E'$ tal que $p'f = p$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & \swarrow p' & \\ B & & \end{array}$$

ou seja, uma função contínua $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação sobre B se (e somente se) *preserva fibras* (i.e. $\forall b \in B, f(p^{-1}(b)) \subseteq p'^{-1}(b)$). Naturalmente, a identidade $I_E : E \longrightarrow E$ é uma B -aplicação assim como composições de B -aplicações é uma B -aplicação.

Note que os espaços sobre B junto com as aplicações sobre B formam uma categoria, a categoria $\frac{Top}{B}$ dos espaços sobre B , onde:

- Os objetos dessa categoria são formados pela classe

$$Obj\left(\frac{Top}{B}\right) = \{p : E \longrightarrow B \text{ contínua} \mid E \text{ é um espaço topológico}\}$$

- Dados $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ espaços sobre B , então os morfismos são dados pelos conjuntos

$$Hom(p, p') = \{f : E \longrightarrow E' \text{ contínua} \mid p'f = p\}$$

Esta categoria possui um objeto destacado que é I_B , a identidade de B , pois $Hom(p, I_B) = \{p\}$.

Exemplo 2.1.9. Aplicações Fibradas: Nos espaços fibrados do **exemplo 2.1.7** temos as *aplicações fibradas* (Ver **(STEENROD, 1951)**, seção 2.5): Dados $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B'$ espaços fibrados com o mesmo grupo G e mesma fibra Y . Por uma *aplicação fibrada* entendemos uma aplicação contínua $h : E \longrightarrow E'$ tal que existe uma função contínua $\bar{h} : B \longrightarrow B'$, dita induzida por h , satisfazendo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{h}} & B' \end{array}$$

- $p'h = \bar{h}p$;
- $h_b = h|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(\bar{h}(b))$ é um homeomorfismo;
- $\forall b \in V_\lambda \cap \bar{h}^{-1}(V'_\gamma)$ então $\phi'^{-1}_{\gamma, \bar{h}(b)} h_b \phi_{\lambda, b} \in G$ e as funções $\bar{g}_{\gamma, \lambda} : V_\lambda \cap \bar{h}^{-1}(V'_\gamma) \longrightarrow G$ dada por

$$\bar{g}_{\gamma, \lambda}(b) = \phi'^{-1}_{\gamma, \bar{h}(b)} h_b \phi_{\lambda, b}$$

(ditas mudança de aplicações) são todas contínuas.

A identidade $I_E : E \longrightarrow E$ é uma aplicação fibrada, assim como composição de aplicações fibradas é uma aplicação fibrada.

Considere $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ dois espaços G -fibrados com mesma fibra e mesmo espaço base. Então nem toda aplicação fibrada é uma B -aplicação e nem toda B -aplicação é uma aplicação fibrada. Continuaremos essa discussão mais adiante (ver **exemplo 2.1.17**).

◇

Uma propriedade procurada nos espaços sobre uma base é a existência de seções. Definiremos agora o que é uma seção e no decorrer do texto ficará mais claro o importante papel exercido pelas seções na teoria.

Definição 2.1.10. Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço. Por uma *seção* de p entendemos qualquer função contínua $s : B \longrightarrow E$ tal que $ps = I_B$. Isto é, s é uma função contínua que associa a cada ponto b da base um elemento em sua fibra $p^{-1}(b)$. Podemos pensar numa seção como uma maneira (ou possibilidade) de se caminhar através das fibras (ou seja, não há “saltos”). Se existe $V \subseteq B$ e $s : V \longrightarrow E$ tal que $ps = I_V$ então s é dita uma *seção parcial* de p .

Note que o fato de p possuir uma seção implica que p é sobrejetiva.

Exemplo 2.1.11. Seja $p : E \longrightarrow B$ uma função contínua sobrejetiva e localmente injetiva, com E um conexo de Hausdorff. Então p admite uma seção se, e só se, p é um homeomorfismo (ver **(LIMA, 1977)**, pág 115). Com isso, um recobrimento $p : E \longrightarrow B$ com E um conexo de Hausdorff admite uma seção se, e só se, é um homeomorfismo.

◇

Exemplo 2.1.12. Uma seção num espaço trivial, **exemplo 2.1.2**, está unicamente determinada por uma função contínua $\sigma : B \longrightarrow Y$. Com isso, temos uma bijeção entre a classe de seções de um espaço trivial $\varphi : B \times Y \longrightarrow B$ e a classe das funções contínuas de B em Y , que denotaremos por Y^B (por enquanto não há topologia envolvida em Y^B , mas sua topologia padrão nesse texto será a compacto-aberta)

◇

Exemplo 2.1.13. Quaisquer duas seções na faixa de Möbius, **exemplo 2.1.3**, se intersectam: de fato, quaisquer duas seções na faixa são da forma $s_i([t]) = [(t, y_i(t))] \in \mathbb{M}$, e $i = 1, 2$. Se $s_1([0]) \neq s_2([0])$ então podemos supor que $y_1(0) > y_2(0)$. O que, por continuidade, implica que $y_1(t) > y_2(t)$ para $t \in [0, c]$ com $c \leq 1$ constante. Como $s_1([1]) = [(1, y_1(1))] = [(0, 1 - y_1(0))]$ e $s_2([1]) = [(1, y_2(1))] = [(0, 1 - y_2(0))]$, portanto se a constante c pudesse ser igual a 1 teríamos que $1 - y_1(0) > 1 - y_2(0)$, o que é um absurdo. Logo $c < 1$ o que implica na interseção das seções.

◇

Definição 2.1.14. Dois espaços $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ são ditos *B-homeomorfos* se existe um homeomorfismo $f : E \longrightarrow E'$ que é uma *B-aplicação* (isso já implica que f^{-1} é uma *B-aplicação* também).

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & E' & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ & \searrow p & \downarrow p' & \swarrow p & \\ & & B & & \end{array}$$

Dizer que $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ são *B-homeomorfos* equivale a dizer que E e E' são homeomorfos através de um homeomorfismo que faz corresponder fibras de E com as fibras de E' , também homeomorficamente.

Observação 2.1.15. Naturalmente, não distinguiremos espaços *B-homeomorfos* já que gozam das mesmas propriedades estudadas neste texto.

Exemplo 2.1.16. Todo espaço topológico Y define dois espaços sobre B , dito espaços *triviais*, que são as projeções $\wp_1 : B \times Y \longrightarrow B$ e $\wp_2 : Y \times B \longrightarrow B$. Esses espaços sobre B são naturalmente *B-homeomorfos* (no caso de $Y = \emptyset$, então $\wp_1 = \wp_2 = \emptyset$).

◇

Exemplo 2.1.17. Continuando com o assunto das aplicações fibradas, temos que para uma aplicação fibrada $h : E \longrightarrow E'$ ser uma *B-aplicação* devemos ter que a aplicação induzida $\bar{h}$ deve ser a identidade de B (ver **exemplo 2.1.9**). Isso implica que existe uma função inversa $h^{-1} : E' \longrightarrow E$ que também é uma aplicação fibrada. Com isso h é um *B-homeomorfismo* (ver **(STEENROD, 1951)**, seção 2.5)

Dois espaços *G-fibrados* $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ com mesma base e mesma fibra são ditos *equivalentes* se existe uma aplicação fibrada $h : E \longrightarrow E'$ que induz a identidade $\bar{h} = I_B : B \longrightarrow B$. Se uma *B-aplicação* $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação fibrada

então f é uma equivalência entre os espaços fibrados (em particular, f deve ser um B -homeomorfismo).

◇

Como é de se esperar, nem todo homeomorfismo é um B -homeomorfismo:

Exemplo 2.1.18. Sejam $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|\}$, $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, $p_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}$ dados por $p_i(x, y) = x$, $i = 1, 2$. Então E_1 e E_2 são homeomorfos (E_2 é obtido a partir de uma rotação de 45° em E_1). Mas p_1 e p_2 não são B -homeomorfos pois as fibras $p_1^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$ e $p_2^{-1}(0) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ não são homeomorfas.

◇

2.2 Homotopias Sobre uma Base e Espaços Retrátéis

Os espaços retrátéis constituem uma classe importante dos espaços sobre uma base devido à facilidade de se obter resultados a respeito deles. Para a definição de espaços retrátéis é necessário a definição de homotopias sobre uma base, que também nos acompanhará durante todo o texto.

Definição 2.2.1. Sejam $f, g : E \rightarrow E'$ B -aplicações. Por uma B -homotopia (ou homotopia sobre B) ligando f a g entendemos uma homotopia $\Theta : E \times I \rightarrow E'$ tal que $\Theta_0 = f$, $\Theta_1 = g$, e $p'\Theta_t = p$, $\forall t \in I$. f e g são ditas B -homotópicas se existe uma B -homotopia entre f e g .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Theta_t} & E' \\ p \downarrow & \swarrow p' & \\ B & & \end{array}$$

Ou seja, Θ é uma homotopia tal que:

- a) Fixado $t \in I$, a função Θ_t preserva fibras;
- b) Fixado b na base, $\Theta_b = \Theta \Big|_{p^{-1}(b) \times I}$ é uma homotopia entre $f \Big|_{p^{-1}(b)}$ e $g \Big|_{p^{-1}(b)}$;

Denotamos o fato de f e g serem B -homotópicas por $f \underset{B}{\simeq} g$ ou, quando queremos destacar a B -homotopia, por $\Theta : f \underset{B}{\simeq} g$.

Observação 2.2.2. Poderíamos, no lugar de $I = [0, 1]$, considerar qualquer intervalo compacto $[a, b]$ com $a < b$.

É óbvio que B -homotopia é uma relação de equivalência nas aplicações sobre B . Denotamos a categoria $\left[\frac{Top}{B}\right]$ cujos objetos são os mesmos B -espaços e os morfismos são as classes de B -homotopias.

Definição 2.2.3. Dados os B -espaços $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$, e uma B -aplicação $f : E \longrightarrow E'$ então f é dita uma B -equivalência homotópica (ou simplesmente B -equivalência) entre p e p' se existe uma B -aplicação $g : E' \longrightarrow E$ tal que $fg \simeq_B I_{E'}$ e $gf \simeq_B I_E$. No caso da existência dessa f diremos que p é B -equivalente a p' .

Dizer que dois espaços p e p' são B -equivalentes significa dizer que existe uma equivalência homotópica f , com inversa homotópica g , onde ambas preservam fibras e para cada fibra $p^{-1}(b)$ a restrição $f|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(b)$ também é uma equivalência homotópica, com inversa $g|_{p'^{-1}(b)}$. Neste caso E e E' possuem o mesmo tipo de homotopia, e para cada b as fibras $p^{-1}(b)$ e $p'^{-1}(b)$ também possuem o mesmo tipo de homotopia. Veremos mais na frente (**Teorema 5.3.1**) que para uma classe considerável de B -espaços (que chamaremos de *fibrações fracas*) vale que uma B -aplicação é uma B -equivalência se, e só se, é uma equivalência homotópica usual.

Exemplo 2.2.4. Com a noção acima, fica claro que se um espaço $p : E \longrightarrow B$ é B -equivalente a um espaço trivial então existe um espaço topológico Y tal que E tem o mesmo tipo de homotopia que $B \times Y$ e cada fibra $p^{-1}(b)$ tem o mesmo tipo de homotopia que Y .

◇

Exemplo 2.2.5. Os espaços p_1 e p_2 do **exemplo 2.1.18** não são B -homeomorfos, como já foi visto. Mas são B -equivalentes: De fato basta considerar $f : E_1 \longrightarrow E_2$ e $g : E_2 \longrightarrow E_1$ dadas por $f(x, y) = (x, 0)$ assim como $g(x, y) = (x, 0)$. É óbvio que $fg \simeq_B I_{E_2}$ e $gf \simeq_B I_{E_1}$ já que $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ é retrato de deformação forte de ambos os espaços totais E_1 e E_2 (ver **exemplo 2.2.13**)

◇

Definição 2.2.6. Dados os espaços $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$. Dizemos que p é *dominado* por p' (ou que p' *domina* p) se existem B -aplicações $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E$ tais que $gf \simeq_B I_E$.

A grosso modo, dizer p' domina p significa dizer que, do ponto de vista da teoria da homotopia, não precisamos nos preocupar com o todo o espaço topológico E (e suas fibras $p^{-1}(b)$) e sim com apenas o subespaço $gf(E)$ (e $gf(p^{-1}(b))$).

Proposição 2.2.7. *As seguintes condições são equivalentes:*

- a) p é B -equivalente a I_B ;
- b) p é dominada por I_B ;
- c) Existe uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ tal que $ps = I_B$ (ou seja, s é uma seção) e $sp \simeq_B I_E$.

Demonstração. $[a \implies b]$ e $[c \implies a]$ são triviais. $[b \implies c]$ Como p é dominada por I_B existem B -aplicações f e g tal que $gf \simeq_B I_E$. Portanto $f = p$ e $pg = I_B$ e $gp \simeq_B I_E$. Tome $s = g$. (Não deixou de ser trivial também!) $\square$

Observação 2.2.8. Note que dizer que p é B -equivalente a I_B implica que E possui o mesmo tipo de homotopia que B e que cada fibra $p^{-1}(b)$ é *contrátil* (i.e. possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto). Na condição (c) acima, poderíamos ter pedido apenas que $ps \simeq_B I_B$, mas isso implica a igualdade. Perceba também que p , neste caso, é sobrejetiva.

Definição 2.2.9. Um espaço $p : E \rightarrow B$ é dito ser *retrátil* se satisfizer alguma (logo, todas) das condições acima. Portanto espaços retráteis são B -equivalentes a I_B .

Observação 2.2.10. Assim, espaços retráteis são espaços B -equivalentes a espaços triviais cujas fibras são contráteis. A recíproca é verdade, como veremos mais adiante (em **2.2.16**).

Exemplo 2.2.11. Seja $E = B^I$, onde $I = [0, 1]$ e $B^I = \mathcal{C}_{ca}(I; B)$ denota $\mathcal{C}(I; B)$ com a topologia compacto-aberta. Seja $p : E \rightarrow B$ tal que $p(w) = w(0)$. Dado $A \subseteq B$ um aberto qualquer então $p^{-1}(A) = \mathcal{C}_{ca}(I, \{0\}; B, A)$ que é um aberto da sub-base, portanto p é contínua, logo um espaço sobre B . Considere $s : B \rightarrow E$ tal que $s(b)$ seja a função que manda todo $t \in I$ em b . Então s é contínua (ver **(ROKHLIN; FUKS, 1984)**, pág. 47).

Para mostrar que p é retrátil usaremos a propriedade (c). $ps = I_B$ e $sp(w) = s(w(0))$. Considerando $\Theta : E \times I \rightarrow E$ dado por $\Theta(w, r) = \Theta_r(w)$ é tal que $(\Theta_r(w))(t) = w(rt)$, e portanto $p\Theta_r = p$, $\forall r \in I$ ($p\Theta_r(w) = w(r0) = w(0) = \Theta_0(w)$). Então $\Theta : sp \simeq_B I_B$. Com isso concluímos que $\mathcal{C}_{ca}(I; B)$ possui o mesmo tipo de homotopia que B .

$\diamond$

Exemplo 2.2.12. A faixa de Möbius, **exemplo 2.1.3**, é retrátil: Basta tomar $S : B \rightarrow \mathbb{M}$ dada por $S[a] = [(a, 0)]$. Então $pS = I_B$ e $Sp[(a, b)] = [(a, 0)]$ que é homotópico a $[(a, b)]$.

◇

Exemplo 2.2.13. Outros espaços que são facilmente verificados que são retráteis são os espaço p_1 e p_2 do **exemplo 2.1.18**: Para ambos os casos, basta tomar $s : \mathbb{R} \longrightarrow E_i$ tal que $s(x) = (x, 0)$, com $i = 1, 2$. É imediato a verificação que s é uma seção para ambos os espaços. E tomamos $\Theta : E_i \times I \longrightarrow E_i$ da da por $\Theta(x, y, t) = (x, ty)$ que é uma $\mathbb{R}$ -homotopia entre sp_i e I_{E_i} .

◇

Exemplo 2.2.14. A garrafa de Klein e o Toro retorcido, **exemplos 2.1.4 e 2.1.5**, NÃO são retráteis pois $\mathbb{K}$ e $\mathbb{T}_r$ não possuem o mesmo tipo de homotopia que o $\mathbb{S}^1$.

◇

Exemplo 2.2.15. Um espaço de recobrimento $p : E \longrightarrow B$, **exemplo 2.1.6**, é retrátil se, e só se, é um homeomorfismo. De fato as fibras de p são todas discretas. Por isso, se p for retrátil essas fibras devem ser contráteis e portanto constituídas de um único ponto. Isso implica a injetividade e portanto p é uma bijeção.

Como p admite uma seção s de maneira que $sp \underset{B}{\simeq} I_E$ então $sp(e) \in p^{-1}(p(e)) = \{e\}$. Logo $sp = I_E$.

◇

Podemos induzir, a partir do que já fizemos, as seguintes caracterizações para espaços retráteis:

Proposição 2.2.16. *Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço sobre B . Então são equivalentes:*

- a) p é retrátil;
- b) p é B -equivalente a um espaço trivial $\wp : B \times Y \longrightarrow B$ com Y contrátil;
- c) p é dominada por um espaço trivial $\wp : B \times Y \longrightarrow B$ com Y contrátil;

Demonstração. $[a \implies b]$ É trivial, mas faremos em detalhes: Suponha que p é retrátil. Então existe $s : B \longrightarrow E$ tal que $ps = I_B$ e $sp \underset{B}{\simeq} I_E$. Seja Y um espaço contrátil qualquer

(portanto $Y \neq \emptyset$) e $\Phi : Y \times I \longrightarrow Y$ a homotopia entre a aplicação constante y_0 , $y_0 \in Y$, e a identidade I_Y ($\Phi_0 = y_0$ e $\Phi_1 = I_Y$). Considere a função $(p, y_0) : E \longrightarrow B \times Y$ tal que $e \mapsto (p(e), y_0)$ e a função $s^\times : B \times Y \longrightarrow E$ onde $s^\times(b, y) = s(b)$. Então $\wp(p, y_0) = p$, $ps^\times = \wp$ e $s^\times(p, y_0) = sp \underset{B}{\simeq} I_E$. Tomando

$$\Theta : B \times Y \times I \longrightarrow B \times Y \text{ tal que } \Theta(b, y, t) = (b, \Phi_t(y))$$

temos que $\Theta : (p, y_0) s^\times \underset{B}{\simeq} I_{B \times Y}$.

[b $\implies$ c] é trivial;

[c $\implies$ a] Suponha que p é dominada por $\wp$. Portanto existem B -aplicações $f : E \longrightarrow B \times Y$ e $g : B \times Y \longrightarrow E$ tal que $gf \underset{B}{\simeq} I_E$. Portanto f é da forma (p, f_2) onde $f_2 : E \longrightarrow Y$. Como Y é contrátil, f_2 é homotópica a aplicação constante y_0 , com $y_0 \in Y$. Considere a função $(I_B, y_0) : B \longrightarrow B \times Y$ tal que $(I_B, y_0)(b) = (b, y_0)$ e defina $s = g(I_B, y_0)$. Então $ps = I_B$. Seja $\Phi : y_0 \underset{B}{\simeq} f_2$ e considere

$$\Theta : E \times I \longrightarrow E \text{ tal que } \Theta(e, t) = g(p(e), \Phi_t(y))$$

que para todo t satisfaz $p\Theta_t = p$, pois $pg = \wp$. Então $\Theta : sp \underset{B}{\simeq} gf$ e, por hipótese, $gf \underset{B}{\simeq} I_E$, o que finaliza a demonstração. $\square$

2.3 Produto Fibrado

Até agora já deu para perceber que no estudo dos espaços e aplicações sobre uma base, não apenas o espaço base e total têm suas respectivas relevâncias mas também é importante conhecer o comportamento sobre as fibras. Vamos olhar para o comportamento dos B -espaços, não só sobre as fibras como sobre um subespaço qualquer, num contexto mais geral: vamos colocá-las dentro do contexto de *produtos fibrados*. Uma das primeiras aparições de grande destaque do produto fibrado foi no trabalho de Hurewicz, (**HUREWICZ, 1955**), onde foi usada para definir fibrações (ver **seção 4.1**).

Definição 2.3.1. Sejam $p : E \longrightarrow B$ e $\alpha : X \longrightarrow B$ funções contínuas. Definimos o *produto fibrado (ou espaço induzido)* por α como o X -espaço $p_\alpha : E_\alpha \longrightarrow X$ onde

$$E_\alpha = \left\{ (e, x) \in E \times X \mid p(e) = \alpha(x) \right\}$$

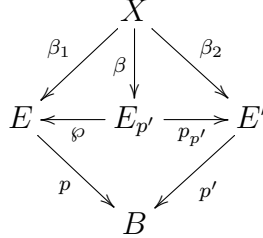
(com a topologia de subespaço) e $p_\alpha(e, x) = x$ (que é a restrição da projeção sobre a segunda coordenada).

Se $A \subseteq B$ e $i_A : A \longrightarrow B$ é a inclusão, então denotamos E_{i_A} por E_A e p_{i_A} por p_A . Note que, no último caso,

$$E_A = \bigsqcup_{a \in A} (p^{-1}(a) \times \{a\})$$

Com isso p_A é B -homeomorfo a $p \Big|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \longrightarrow A$ e, portanto, não distinguiremos p_A de $p \Big|_{p^{-1}(A)}$.

E_α satisfaz a seguinte propriedade natural: Seja X um espaço topológico qualquer, $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ espaços. Existe uma bijeção entre o conjunto das funções contínuas $\beta : X \longrightarrow E_\alpha$ e pares de funções contínuas $\beta_1 : X \longrightarrow E$ e $\beta_2 : X \longrightarrow E'$ tais que $p\beta_1 = p'\beta_2$. Essa correspondência é feita pela função $\beta \mapsto (\beta_1 = \wp\beta, \beta_2 = p_{p'}\beta)$, onde $\wp : E \times B \longrightarrow E$ é a projeção natural.



Exemplo 2.3.2. [PRODUTO FIBRADO DE STEENROD] Na teoria dos espaços fibrados de Steenrod (**exemplo 2.1.7**), temos também a noção de *produto fibrado* (ou *fibrados induzidos*): Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço G -fibrado com fibra Y , vizinhanças coordenadas $\{V_\lambda\}$ e funções coordenadas $\{\phi_\lambda\}$. Seja $\alpha : X \longrightarrow B$ uma função contínua. Definimos o espaço G -fibrado induzido como $p_\alpha : E_\alpha \longrightarrow X$, como no caso dos B -espaços, mesma fibra Y , vizinhanças coordenadas $\{\alpha^{-1}(V_\lambda)\}$ e funções coordenadas $\{\varphi_\lambda(x, y) = (x, \phi_\lambda(\alpha(x), y))\}$ (Ver (**STEENROD, 1951**), seção 10).

◇

Definição 2.3.3. Dada $f : E \longrightarrow E'$ uma B -aplicação e $\alpha : X \longrightarrow B$ uma função contínua. Definimos a *aplicação sobre X induzida por α* como a X -aplicação $f_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E'_\alpha$ onde $f_\alpha(e, x) = (f(e), x)$. Notações análogas à anterior seguem para o caso onde $A \subseteq B$, onde f_A será tratada, naturalmente, como $f|_{p^{-1}(A)}$.

Observação 2.3.4. Dado $\alpha : X \longrightarrow B$ uma aplicação contínua, a noção de espaços e aplicações induzidas definem um functor covariante induzido por α ,

$$T_\alpha : \left(\frac{Top}{B}, Hom\left(\frac{Top}{B}\right) \right) \longrightarrow \left(\frac{Top}{X}, Hom\left(\frac{Top}{X}\right) \right)$$

tal que se $p \in \frac{Top}{B}$, $T_\alpha(p) = p_\alpha$ e se $f \in Hom(p, p')$ então $T_\alpha(f) = f_\alpha$. Esse functor preserva hootopias que preservam fibras e portanto está definido como functor em

$$\left(\left[\frac{Top}{B} \right], Hom\left(\left[\frac{Top}{B} \right]\right) \right).$$

Definição 2.3.5. Seja P uma propriedade de funções contínuas e A um subconjunto de B . Dizemos que um espaço $p : E \longrightarrow B$ possui a *propriedade P sobre A* (respectivamente $f : E \longrightarrow E'$ possui a propriedade P sobre A) se p_A (respec. f_A) possui tal propriedade.

Dizemos que p (respect. f) possui a *propriedade P localmente* se $\forall b \in B$ existe vizinhança aberta V_b de b tal que p tem a propriedade P sobre V_b (respectivamente f_{V_b} possui a propriedade P).

Exemplo 2.3.6. Espaços fibrados (de Steenrod) são localmente B -homeomorfos a espaços triviais: continuando com as notações do **exemplo 2.1.7** temos que dado $b \in B$ existe vizinhança coordenada V_λ a qual b pertence. Portanto $\phi_\lambda^{-1} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda \times Y$ é o B -homeomorfismo requerido.

◇

Proposição 2.3.7. Se $p : E \longrightarrow B$ é retrátil sobre $A \subseteq B$ e $\alpha : X \longrightarrow B$ é contínua, então p_α é retrátil sobre $\alpha^{-1}(A)$. Em particular, se α é a inclusão ($X \subseteq B$) então p ser retrátil sobre A implica que p_X é retrátil sobre $X \cap A$.

Demonstração. Como p é retrátil sobre A , existe uma seção parcial $s : A \longrightarrow p^{-1}(A)$ tal que $p_A s = I_A$ e $sp_A \simeq_B I_{p^{-1}(A)}$. Seja Θ a B -homotopia entre sp_A e $I_{p^{-1}(A)}$. Tomemos, então, $s' : \alpha^{-1}(A) \longrightarrow p_\alpha^{-1}(\alpha^{-1}(A))$ tal que $s'(x) = (s\alpha(x), x)$. Portanto $(p_\alpha)_{\alpha^{-1}(A)} s' = I_{\alpha^{-1}(A)}$.

Então $\Psi : p_\alpha^{-1}(\alpha^{-1}(A)) \times I \longrightarrow p_\alpha^{-1}(\alpha^{-1}(A))$ tal que $\Psi(e, x, t) = (\Theta(e, t), x)$ é a B -homotopia desejada entre $s'(p_\alpha)_{\alpha^{-1}(A)}$ e $I_{p_\alpha^{-1}(\alpha^{-1}(A))}$ □

3 A Propriedade de Extensão de Seção

Uma das principais contribuições de Albrecht Dold à teoria das fibrações foi compreender a importância da extensão de seções para a teoria. Observando a demonstração do Teorema da Uniformização de Hurewicz (4.3.6), em (HUREWICZ, 1955), Dold percebeu que, junto com a partição da unidade, a *Propriedade de Extensão de Seção* (SEP) constitui uma poderosa ferramenta para provar teoremas de localização.

Por teoremas de localização estamos nos referindo a resultados que dão condições a uma propriedade local (ver **definição 2.3.5**) de um espaço ser estendida globalmente.

Com seu trabalho em (DOLD, 1963) ele fixou o Teorema de Extensão de Seção, que é um teorema de localização da SEP, como um dos principais resultados da teoria das fibrações.

3.1 A Propriedade de Extensão de Seção (SEP)

Para termos uma ideia da importância de possuir uma seção, vamos ver o exemplo abaixo que trata de fibrados principais e como a existência de seção para esses B -espaços equivale a ele ser equivalente (no sentido dado no **exemplo 2.1.17**) a um espaço trivial.

Exemplo 3.1.1. [Fibrados Principais e Fibrados Associados] (Ver (STEENROD, 1951), seção 8) Um G -fibrado $p : E \rightarrow B$ com fibra Y é dito *principal* se G é igual a Y e G age sobre a fibra Y (ou seja, sobre si mesmo) da maneira mais natural: multiplicação à esquerda

$$G \times Y \rightarrow Y \text{ tal que } (g, y) \mapsto gy$$

Todo espaço fibrado $p : E \rightarrow B$, com fibra Y e grupo G possui um G -fibrado *principal associado*, que denotaremos $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow B$, com fibra G (ver (STEENROD, 1951), pág 35).

Dois fibrados p e p' com a mesma fibra, mesmo grupo e mesmo espaço base são equivalentes se seus fibrados principais $\tilde{p}$ e $\tilde{p}'$ são equivalentes.

Um espaço fibrado $p : E \rightarrow B$ é equivalente a um espaço trivial se, e só se, seu fibrado principal associado $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow B$ admite uma seção (ver (STEENROD, 1951), pág 36).

Dois fibrados com mesma base e mesmo grupo (mas não necessariamente com mesma fibra) são ditos *associados* (ou G -associados) (ver (STEENROD, 1951), seção 9) se possuem fibrados principais equivalentes (ver **exemplo 2.1.17**).

◇

Definição 3.1.2. Seja B um espaço topológico e A um subespaço. Um *halo* sobre A (ou ao redor de A) é um subespaço $V \subseteq B$ junto com uma função contínua $\tau : B \rightarrow I$, onde $I = [0, 1]$, tal que $A \subseteq \tau^{-1}(1)$ e $B \setminus V \subseteq \tau^{-1}(0)$. Escrevemos assim, que (V, τ) é um halo sobre A .

Exemplo 3.1.3. Um exemplo trivial é que todo subespaço de um espaço topológico é um halo sobre o conjunto vazio, junto com a função constante igual a 0. Um outro exemplo é que se B é normal (T4 e Hausdorff) e A é fechado, então toda vizinhança aberta de A é um halo, através da função de Urysohn ((ROKHLIN; FUKS, 1984), pág 17). Este último caso engloba uma grande gama de espaços já que os espaços paracompactos são normais ((ROKHLIN; FUKS, 1984), pág 26). Por (MIYAZAKI, 1952) todo CW-complexo é paracompacto e portanto normal.

Observação 3.1.4. É natural considerar $V = \tau^{-1}(0, 1]$. Não há perda ao fazermos isso já que todo halo sobre A contém $\tau^{-1}(0, 1]$.

Definição 3.1.5. Seja $p : E \rightarrow B$ um espaço sobre B . Dizemos que p possui a SEP se dado $A \subseteq B$ e dada uma seção parcial s sobre A que se estende a uma seção $\tilde{s}$ sobre V , onde V é um halo sobre A , então existe uma seção S sobre B que estende s .

Observação 3.1.6. Note que se $f : E \rightarrow E'$ é uma B -aplicação e s é uma seção sobre $A \subseteq B$, com relação a p , então $s' = f_A s$ é uma seção sobre A com relação a p' .

Observação 3.1.7. Se p possui a SEP, então p possui uma seção: Basta tomar $A = V = \emptyset$ e considerar a função vazia. Portanto, nesse caso, p é sobrejetiva.

Exemplo 3.1.8. a) O espaço $p_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ do **exemplo 2.1.18** possui a SEP: Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ uma seção sobre A é uma função contínua $s : A \rightarrow p_1^{-1}(A)$ que é da forma $s(a) = (a, y(a))$ onde $(a, y(a)) \in E_1$. Seja (V, τ) um halo sobre A e $\tilde{s}$ a extensão de s ao halo V . Tomemos então $S : \mathbb{R} \rightarrow E_1$ tal que

$$S(r) = \begin{cases} (r, \tau(r) y(r)), & \text{se } r \in V \\ (r, 0), & \text{se } r \in \mathbb{R} \setminus V \end{cases}$$

a continuidade de S segue do fato de y ser localmente limitada.

b) Seja $E = [0, 2\pi]$ e $B = \mathbb{S}^1$ e $p : E \rightarrow B$ dada por $p(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Então p não possui a SEP: Não existe função contínua $S : B \rightarrow E$ tal que $pS = I_B$. De fato p não possui a SEP sobre qualquer vizinhança aberta de $(1, 0)$.

◇

Um questionamento natural é sobre a unicidade, a menos de B -homotopia, da extensão de seção. Mas, em geral, não existe tal unicidade:

Exemplo 3.1.9. Considere o $\mathbb{R}$ -espaço $p_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ do **exemplo 2.1.18**. Então p_1 possui a unicidade, a menos de B -homotopia. Mas considerando

$$E = \frac{(E_1 \times \{0\}) \sqcup (E_1 \times \{1\})}{\sim}$$

onde $((x, y), 0) \sim ((x', y'), 1)$ se, e só se, $(x, y) = (x', y')$ e $x \geq 0$. Sendo $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p[(x, y), j] = x$ e $j = 0, 1$. É simples de se ver que o espaço p possui duas seções que não são B -homotópicas: Dada qualquer seção S de p_1 , então as seções $S_0, S_1 : \mathbb{R} \longrightarrow E$ dadas por $S_i(x) = [S(x), i]$, com $i = 1, 2$, não são $\mathbb{R}$ -homotópicas.

◇

Proposição 3.1.10. *Se $p : E \longrightarrow B$ é dominada por $p' : E' \longrightarrow B$ e p' tem a SEP, então p possui a SEP. Em particular, todo espaço retrátil possui a SEP.*

Demonstração. Como p' domina p , existem B -aplicações $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E$ tal que $gf \simeq_B I_E$. Pela observação 3.1.6, $\tilde{s}' = f_V \tilde{s}$ é uma seção sobre V , com relação a p' , que estende $s' = f_A s$

Tome $A \subseteq B$, (V, τ) um halo sobre A tal que existe uma seção parcial s sobre A que se estende a uma seção parcial $\tilde{s}$ sobre V . A ideia é tomarmos uma seção de p' e levarmos via g a uma seção de p . Essa seção, em geral, não coincidirá com s sobre A . Então a deformaremos para uma seção que coincida, sobre A , com s . Mas para isso precisamos escolher bem a seção de p' .

Tomamos $\tau' : B \longrightarrow I$ dada por

$$\tau'(x) = \min \{2\tau(x), 1\}$$

o que nos dá que $\tau'^{-1}(1) = \tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ e $\tau'^{-1}(0, 1] = \tau^{-1}(0, 1]$.

Do fato de p' possuir a SEP, existe seção $S' : B \longrightarrow E'$ tal que

$$S' \Big|_{\tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]} = \tilde{s}' \Big|_{\tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]}$$

Considere a B -homotopia

$$\Theta : E \times I \longrightarrow E$$

tal que $\Theta_0 = gf$ e $\Theta_1 = I_E$. Como $\tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \subseteq V$, podemos considerar a função $S : B \rightarrow E$, tal que

$$S(b) = \begin{cases} gS'(b), & \text{se } b \in \tau^{-1} \left[0, \frac{1}{2} \right] \\ \Theta(\tilde{s}(b), 2\tau(b) - 1), & \text{se } b \in \tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \end{cases}$$

que é contínua pelo lema da colagem. $pS = I_B$ e se $b \in A$, $S(b) = \Theta(s(b), 1) = I_E(s(b)) = s(b)$. $\square$

Exemplo 3.1.11. Devido a proposição acima temos que a Faixa de Möbius, **exemplo 2.1.3**, o espaço p_2 do **exemplo 2.1.18** e o espaço $p : B^I \rightarrow B$ do **exemplo 2.2.11** possuem a SEP pois são retráteis.

$\diamond$

Definição 3.1.12. Se $B \subseteq B'$ dizemos que uma função contínua $r : B' \rightarrow B$ é uma *retração* se existe uma seção $i : B \rightarrow B'$ (não necessariamente a inclusão) tal que $ri = I_B$. Se $i = i_B$ é a inclusão então r é dita uma *retração forte*. Em caso da existência de uma retração (retração forte) $r : B' \rightarrow B$ dizemos que B é um retrato (retrato forte) de B' .

Proposição 3.1.13. *Suponha que $p : E \rightarrow B$ é um espaço sobre B e que $r : B' \rightarrow B$ é uma retração, com seção i . Então p_r domina ip . Como consequência temos que se p_r possui a SEP, então ip possui a SEP. Mais ainda, se i for a inclusão então, nesse caso, p possui a SEP.*

Demonstração. Tome $f : E \rightarrow E_r$ tal que $f(e) = (e, ip(e))$ e $g : E_r \rightarrow E$ tal que $g(e, b') = e$. Então $p_r f = ip$ e $ipg = p_r$ e portanto f e g são B -aplicações e $gf = I_E$.

Suponha agora que i é a inclusão. Dada $A \subseteq B$ e (V, τ) um halo para A e $s : V \rightarrow p^{-1}(V)$ uma seção parcial de p . Portanto $(V' = r^{-1}(V), \tau r)$ é um halo para A , agora com relação a B' . Tome $s_r : V' \rightarrow E_r$ dada por

$$s_r(b') = (b', sr(b'))$$

que é uma seção parcial de p_r . Então, devido a p_r possuir a SEP, existe seção S_r de p_r e S_r é da forma

$$S_r(b') = (b', S'(b))$$

onde $S' : B' \rightarrow E$ satisfaz $pS' = r$. Portanto tomando $S = S' \Big|_B$ obtemos que $S \Big|_A = s$ e $pS(b) = r(b) = b$. $\square$

Exemplo 3.1.14. Um espaço trivial $\wp : B \times Y \rightarrow B$ possuir a propriedade de extensão de seção (SEP) equivale ao seguinte problema de estender funções contínuas: Dado $A \subseteq B$ e (V, τ) um halo ao redor de A . Seja $f : V \rightarrow Y$ uma função contínua. Será que existe uma função contíua $F : B \rightarrow Y$ tal que $F \Big|_A = f \Big|_A$? A resposta ser afirmativa para

qualquer halo e qualquer função contínua equivale ao espaço $\wp : B \times Y \longrightarrow B$ possui a SEP. Com isso não podemos esperar que um espaço trivial qualquer possua a SEP. No entanto, o resultado é verdadeiro se Y for contrátil: Denotando $H : Y \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow Y$ a homotopia entre $H_0 = I_Y$ e $H_{\frac{1}{2}} = y_0$ tomamos $F : B \longrightarrow Y$ dada por

$$F(b) = \begin{cases} H(f(b), 1 - \tau(b)), & \tau(b) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ y_0, & \tau(b) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

◇

Exemplo 3.1.15. Suponha que $p : E \longrightarrow B$ é dominada por um espaço trivial $\wp : B \times Y \longrightarrow B$ onde os i -ésimos grupos fundamentais de Y são todos triviais até $i = n - 1$, ou seja $\pi_i(Y) = 0$, $\forall i = 0, 1, \dots, n - 1$ onde $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Suponha também que B é um retrato forte de um Complexo-CW de dimensão menor que ou igual a n . Então p possui a SEP.

Nesse caso vamos mostrar que $\wp : B \times Y \longrightarrow B$ possui a SEP. Daí, como $\wp$ domina p segue que p possui a SEP. Pela **proposição 3.1.13** podemos supor que B por si só é um Complexo-CW de dimensão menor que ou igual a n .

Seja $A \subseteq B$ e (V, τ) um halo sobre A . Suponha que $s : V \longrightarrow V \times Y$ é uma seção parcial sobre V , com relação a $\wp$. Então s é da forma $s = (I_V, \sigma)$ onde $\sigma : V \longrightarrow Y$. O nosso objetivo é construir $\Sigma : B \longrightarrow Y$ tal que $\Sigma|_A = \sigma|_A$, pois daí teremos que $S : B \longrightarrow B \times Y$ dada por $S(b) = (b, \Sigma(b))$ será uma seção sobre B , com relação a $\wp$, que estende $s|_A$. Como todo CW-complexo é normal ((ROKHLIN; FUKS, 1984), pág. 87), o que de fato vamos mostrar é que o seguinte: dado um CW-complexo B , $V \subseteq B$ um aberto e um fechado $W \subseteq V$. Então dada uma função contínua $f : V \longrightarrow Y$ (Y com as mesmas hipóteses sobre ele) existe uma função contínua $\tilde{f} : B \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{f}|_W = f|_W$.

Faremos isso por indução. Mas indução onde?

Denotemos, para isso, $B^r = Ske_r(B)$ o r -ésimo Skeleton de B e $T^r = B^r \cup \tau^{-1}\left[\frac{r+1}{r+2}, 1\right]$, $\forall r \in 0, 1, 2, \dots, n$. Construiremos seções parciais $\Sigma^r : T^r \longrightarrow Y$ de maneira que $\Sigma^r|_{B^{r-1}} = \Sigma^{r-1}|_{B^{r-1}}$ e $\Sigma^r|_A = \sigma|_A$. A primeira equação nos garante que a função $\Sigma = \lim_r \Sigma^r$ está bem definida e é contínua, enquanto que a segunda garante que $\Sigma|_A = \sigma|_A$.

Iniciamos o processo de construção com a seção $\Sigma^0 : T^0 \longrightarrow Y$ onde

$$\Sigma^0(b) = \begin{cases} \sigma(b), & \text{Se } b \in \tau^{-1}\left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ y_0, & \text{onde } y_0 \in Y \text{ qualquer, caso } b \notin \tau^{-1}\left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

daí temos que $\Sigma^0|_A = \sigma|_A$.

Considere $\{e_\lambda^1\}_{\lambda \in \Lambda_1}$ a coleção de todas as 1-células de B e para cada $\lambda \in \Lambda_1$ a função característica da célula e_λ^1

$$ch_\lambda : \Delta^1 \longrightarrow B$$

onde Δ^1 denota o 1-simplexo padrão. Para cada λ , temos duas possibilidades: $e_\lambda^1 \cap \tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] = \emptyset$ ou $e_\lambda^1 \cap \tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \neq \emptyset$.

· Se $e_\lambda^1 \cap \tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] = \emptyset$: Então consideramos $\Sigma^0 ch_\lambda \Big|_{\partial \Delta^1}$. Daí, como $\pi_0(Y) = 0$, existe

$$\Sigma_\lambda^1 : \Delta^1 \longrightarrow Y \text{ tal que } \Sigma_\lambda^1 \Big|_{\partial \Delta^1} = \Sigma^0 ch_\lambda \Big|_{\partial \Delta^1}.$$

· Se $e_\lambda^1 \cap \tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \neq \emptyset$: Então existe $N_\lambda^1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de maneira que a N_λ^1 -ésima divisão baricêntrica de Δ^1 satisfaça a condição que dado Δ_j^1 um sub-simplexo da divisão que intersecta $ch_\lambda^{-1} \left(\tau^{-1} \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \right)$ então $\Delta_j^1 \subseteq ch_\lambda^{-1} \left(\tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right)$. Denotando por $\left\{ \Delta_j^1 \right\}_{j=1}^{\alpha(N_\lambda^1)}$, $\alpha(N_\lambda^1) \in \mathbb{N}$, a coleção de todos os sub-simplexos da N_λ^1 -ésima divisão baricêntrica, definimos

$$K_\lambda^1 = \bigcup_j \left\{ \Delta_j^1 \mid \Delta_j^1 \subseteq ch_\lambda^{-1} \left(\tau^{-1} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) \right\}$$

então $\Sigma^0 ch_\lambda$ está bem definida em $K_\lambda^1 \cup \partial \Delta^1$. Vamos extendê-la para todo Δ^1 . Dado $\Delta_j^1 \not\subseteq K_\lambda^1$ definimos $\phi_{j,0} : \partial \Delta_j^1 \longrightarrow Y$ dada por

$$\phi_{j,0}(x) = \begin{cases} \Sigma^0 ch_\lambda(x), & x \in K_\lambda^1 \\ y_0, & x \notin K_\lambda^1 \end{cases}$$

e como Y é conexo por caminhos, existe $\Phi_j : \Delta_j^1 \longrightarrow Y$ tal que $\Phi_j \Big|_{\partial \Delta_j^1} = \phi_{j,0}$. Feito isso para todo sub-simplexo que não está contido em K_λ^1 , podemos então definir $\Sigma_\lambda^1 : \Delta^1 \longrightarrow Y$ por

$$\Sigma_\lambda^1(x) = \begin{cases} \Sigma^0 ch_\lambda(x), & chx \in K_\lambda^1 \\ \Phi_j(x), & x \in \Delta_j^1, \text{ onde } \Delta_j^1 \not\subseteq K_\lambda^1 \end{cases}$$

então Σ_λ^1 está bem definida (e é contínua) pois a interseção de dois sub-simplexos da divisão baricêntrica é, no máximo, um único ponto (uma 0-face). Se este ponto $x \in \Delta_{j_1}^1 \cap \Delta_{j_2}^1$, caso exista, estiver em K_λ^1 então $\Phi_{j_1}(x) = \Phi_{j_2}(x) = \Sigma^0 ch_\lambda(x)$. Caso contrário, não estando em K_λ^1 , então $\Phi_{j_1}(x) = \Phi_{j_2}(x) = y_0$.

Repetindo o procedimento acima para cada $\lambda \in \Lambda_1$, podemos definir a seguinte função contínua $\Sigma^1 : T^1 \longrightarrow Y$ dada por

$$\Sigma^1(b) = \begin{cases} \Sigma^0(b), & b \in B^0 \cup \tau^{-1} \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \\ \Sigma_\lambda^1(ch_\lambda^{-1}(b)), & b \in e_\lambda^1 \end{cases}$$

Se $b \in e_\lambda^1 \cap \tau^{-1} \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$ então $ch_\lambda^{-1}(b) \in K_\lambda^1$ e portanto $\Sigma^1(b) = \Sigma^0(b)$. Daí, se $a \in A$ então $\Sigma^1(a) = \Sigma^0(a) = \sigma(a)$.

Antes de fazer o caso geral do passo indutivo, vamos fazer para o caso $r = 2$ com o objetivo de entender melhor o procedimento.

Denotemos por $\{e_\lambda^2\}_{\lambda \in \Lambda_2}$ a coleção de todas as 2-células de B . Para cada $\lambda \in \Lambda_2$, tomemos (com perdão pelo abuso de notação)

$$ch_\lambda : \Delta^2 \longrightarrow B$$

a função característica de e_λ^2 . Temos, como antes, duas possibilidades: e_λ^2 intersectar ou não $\tau^{-1} \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$. Se não intersectar, procedemos de maneira análoga ao caso anterior, usando o fato de que $\pi_1(Y) = 0$ para estender a função da fronteira para todo o Δ^2 . O caso a se trabalhar é quando intersecta.

Nesse caso, existe N_λ^2 tal que a N_λ^2 -ésima divisão baricêntrica, denotada por $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\alpha(N_\lambda^2)}$, satisfaz a propriedade que se $\Delta_j^2 \cap ch_\lambda^{-1} \left(\tau^{-1} \left[\frac{3}{4}, 1 \right] \right) \neq \emptyset$ então $\Delta_j^2 \subseteq ch_\lambda^{-1} \left(\tau^{-1} \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \right)$. Definimos

$$K_\lambda^2 = \bigcup_j \left\{ \Delta_j^2 \mid \Delta_j^2 \subseteq ch_\lambda^{-1} \left(\tau^{-1} \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \right) \right\}$$

então $\Sigma^1 ch_\lambda$ está definida em $K_\lambda^2 \cup \partial \Delta^2$. Resta-nos estendê-la: para cada sub-simplexo Δ_j^2 que não está contido em K_λ^2 , denotamos $\Delta_{j,0}^2$ as 0-faces de Δ_j^2 assim como $\Delta_{j,1}^2$ as 1-faces. Então para cada sub-simplexo temos três 0-faces e três 1-faces a considerar. E a interseção de dois sub-simplexos qualquer é uma 0-face (um ponto) ou uma 1-face.

Para simplicidade da exposição da ideia, denotemos $\{x_1, x_2, x_3\}$ as 0-faces e $\{\Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_3^1\}$ as três 1-faces de um sub-simplexo Δ_j^2 que não está contido em K_λ^2 de maneira que $\partial \Delta_1^1 = \{x_1, x_2\}$, $\partial \Delta_2^1 = \{x_2, x_3\}$ e $\partial \Delta_3^1 = \{x_3, x_1\}$.

Definimos $\phi_{j,0} : \Delta_{j,0}^2 \longrightarrow Y$ dada por $\phi_{j,0}(x) = \Sigma^1 ch_\lambda(x)$, se $x \in K_\lambda^2$ e $\phi_{j,0}(x) = y_0$ caso contrário. Devido ao fato de $\pi_0(Y) = 0$, existem funções contínuas

$$\phi_{j,1}^r : \Delta_r^1 \longrightarrow Y$$

de maneira que $\phi_{j,1}^r \Big|_{\partial \Delta_r^1} = \phi_{j,0} \Big|_{\partial \Delta_r^1}$ (se uma 1-face contiver dois ou mais pontos de K_λ^2 então ela está inteiramente contida nele), com $r = 1, 2, 3$. Daí, como $\partial \Delta_j^2 = \Delta_1^1 \cup \Delta_2^1 \cup \Delta_3^1$, temos que a função $\phi_{j,1} : \partial \Delta_j^2 \longrightarrow Y$ tal que $\phi_{j,1}(x) = \phi_{j,1}^r(x)$, se $x \in \Delta_r^1$, é contínua. Como $\pi_1(Y) = 0$, existe $\Phi_j : \Delta_j^2 \longrightarrow Y$ onde $\Phi_j \Big|_{\partial \Delta_j^2} = \phi_{j,1}$. Fazemos esse procedimento para todo sub-simplexo Δ_j^2 que não está contido em K_λ^2 e, com isso, podemos definir $\Sigma_\lambda^2 : \Delta^2 \longrightarrow Y$ por

$$\Sigma_\lambda^2(x) = \begin{cases} \Sigma^1 ch_\lambda(x), & x \in K_\lambda^2 \\ \Phi_j(x), & x \in \Delta_j^2, \text{ onde } \Delta_j^2 \not\subseteq K_\lambda^2 \end{cases}$$

Fazendo a construção acima para todo $\lambda \in \Lambda_2$, podemos construir a função contínua $\Sigma^2 : T^2 \longrightarrow Y$ onde

$$\Sigma^2(b) = \begin{cases} \Sigma^1(b), & b \in B^1 \cup \tau^{-1}\left[\frac{3}{4}, 1\right] \\ \Sigma_\lambda^2(ch_\lambda^{-1}(b)), & b \in e_\lambda^2 \end{cases}$$

O passo indutivo: Seja $r > 2$ e suponha construída a função $\Sigma^{r-1} : T^{r-1} \longrightarrow Y$ como desejamos. Tomamos uma r -célula qualquer e_λ^r com função característica $ch_\lambda^r : \Delta^r \longrightarrow B$. Se essa célula não intersectar $\tau^{-1}\left[\frac{i}{i+1}, 1\right]$, já sabemos como proceder (usando o fato que $\pi_r(Y) = 0, \forall i \leq r$).

Se intersectar, tomamos N_λ^r suficientemente grande de maneira que todo sub-simplexo da N_λ^r -ésima divisão baricêntrica que intersecta

$$(ch_\lambda^r)^{-1}\left(\tau^{-1}\left[\frac{r+1}{r+2}, 1\right]\right)$$

está contido em $(ch_\lambda^r)^{-1}\left(\tau^{-1}\left[\frac{r}{r+1}, 1\right]\right)$. Tomamos, como antes,

$$K_\lambda^r = \bigcup_j \left\{ \Delta_j^r \mid \Delta_j^r \subseteq (ch_\lambda^r)^{-1}\left(\tau^{-1}\left[\frac{r}{r+1}, 1\right]\right) \right\}$$

então $\Sigma^{r-1}ch_\lambda^r$ está definida em $K_\lambda^r \cup \partial\Delta^r$.

Considere Δ_j^r um sub-simplexo da divisão que não está contido em K_λ^r . Seja $\Delta_{j,0}^r$ o conjunto das 0-faces do sub-simplexo. Definimos $\phi_{j,0} : \Delta_{j,0}^r \longrightarrow Y$ dada por

$$\phi_{j,0}(x) = \begin{cases} \Sigma^{r-1}ch_\lambda^r(x), & x \in K_\lambda^r \\ y_0, & x \notin K_\lambda^r \end{cases}$$

e aí procedemos de forma análoga aos casos particulares vistos para estendermos essa função para a união das 1-faces de Δ_j^r . Supondo já feita a extensão dessa função para todas as i -faces, com $i < r$, então usamos o fato que $\pi_i(Y) = 0$ para estender para todas as $(i+1)$ -faces.

Portanto construímos, para cada sub-simplexo Δ_j^r que não intersecta K_λ^r , uma função $\Phi_j : \Delta_j^r \longrightarrow Y$ tal que

$$\Phi_j \Big|_{\Delta_j^r \cap K_\lambda^r} = \Sigma^{r-1}ch_\lambda^r \Big|_{\Delta_j^r \cap K_\lambda^r}$$

e com isso, $\Sigma_\lambda^r : \Delta^r \longrightarrow Y$ com

$$\Sigma_\lambda^r(x) = \begin{cases} \Sigma^{r-1}ch_\lambda^r(x), & x \in K_\lambda^r \\ \Phi_j(x), & x \in \Delta_j^r, \text{ onde } \Delta_j^r \not\subseteq K_\lambda^r \end{cases}$$

Portanto, podemos tomar $\Sigma^r : T^r \longrightarrow Y$ onde

$$\Sigma^r(b) = \begin{cases} \Sigma^{r-1}(b), & b \in B^{r-1} \cup \tau^{-1} \left[\frac{r+1}{r+2}, 1 \right] \\ \Sigma_\lambda^r \left((ch_\lambda^r)^{-1}(b) \right), & b \in e_\lambda^r \end{cases}$$

$$\text{e } \Sigma^r \Big|_{B^{r-1}} = \Sigma^{r-1} \Big|_{B^{r-1}} \text{ e } \Sigma^r \Big|_A = \sigma \Big|_A.$$

Tomamos então $\Sigma = \lim_r \Sigma^r$ e $S : B \longrightarrow B \times Y$ tal que $S(b) = (b, \Sigma(b))$.

◇

3.2 Localização da SEP

O nosso objetivo, agora, é provar o *Teorema de Extensão de Seção*. Este teorema, provado por Dold em **(DOLD, 1963)**, é um resultado de localização da SEP e se mostrará fundamental para outros resultados de localização.

Teorema 3.2.1. *Suponha que $p : E \longrightarrow B$ possua a SEP. Seja $\rho : B \longrightarrow I$ contínua e $W = \rho^{-1}(0, 1]$. Então p_W possui a SEP.*

Demonstração. Tome $A \subseteq W$, (V, τ) um halo sobre A onde $\tau : W \longrightarrow I$ (aqui tomamos $V = \tau^{-1}(0, 1]$) e s uma seção parcial sobre A , com relação a p_W (ou seja, $p_A s = I_A$), que se estende a uma seção $\tilde{s}$ sobre V .

Temos dois casos a considerar:

CASO 1: Existe $k \in (0, 1]$ tal que $A \subseteq \rho^{-1}[k, 1]$;

CASO 2: $\forall \varepsilon > 0$ temos que $A \cap \rho^{-1}(0, \varepsilon) \neq \emptyset$;

No primeiro caso, tomamos $\tau' : B \longrightarrow I$ tal que

$$\tau'(b) = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\rho(b)\tau(b)}{k}, 1 \right\}, & \text{se } b \in W \\ 0, & \text{se } b \in B \setminus W \end{cases}$$

que é contínua devido a definição de ρ e τ , satisfaz $\tau'^{-1}(0, 1] = V$ e (V, τ') é um halo para A , agora com relação a B . Daí, como $p : E \longrightarrow B$ possui a SEP, segue que existe $S' : B \longrightarrow E$ tal que $S' \Big|_{\tau'^{-1}(1)} = \tilde{s} \Big|_{\tau'^{-1}(1)}$. Tomando $S = S' \Big|_W : W \longrightarrow p^{-1}(W)$ temos que $p_W S = I_W$ e $S \Big|_A = s$.

O primeiro caso foi simples pois conseguimos um halo para A com relação a B cuja seção parcial é a mesma função s . Para o segundo caso, o procedimento não será tão simples assim pois nele o A se aproxima arbitrariamente de $\rho^{-1}(0)$. Por isso a nossa estratégia será considerar seções parciais sobre pedaços cada vez maiores de A , onde cada

uma dessas seções podem ser estendidas a uma seção sobre B e quando restritas aos pontos de A , que estão nas seções parciais iniciais, coincide com s .

Para isso, dado $n \in \mathbb{N}$ consideremos funções contínuas $\mu_n, \lambda_n : I \longrightarrow I$ de maneira que

$$\left. \begin{array}{l} \mu_n \text{ satisfaça:} \\ \text{Se } x \leq 1 - \frac{1}{n}, \text{ então } \mu_n(x) = \frac{1}{n}; \\ \text{Se } x \geq 1 - \frac{1}{n+1}, \mu_n = \frac{1}{n+2}; \\ \forall x \in I, \frac{1}{n+2} \leq \mu_n(x) \leq \frac{1}{n}; \end{array} \right| \begin{array}{l} \lambda_n \text{ satisfaça:} \\ \text{Se } x \leq 1 - \frac{1}{n}, \text{ então } \lambda_n(x) = \frac{1}{n+1}; \\ \forall x \in I, \frac{1}{n+3} < \lambda_n(x) < \mu_n(x); \end{array}$$

Seja $\tau_{n+1} : B \longrightarrow I$ tal que

$$\tau_{n+1}(b) = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\rho(b) - \lambda_n(\tau(b))}{\mu_n(\tau(b)) - \lambda_n(\tau(b))}, 1 \right\}, & \text{se } b \in V_{n+1} \\ 0, & b \in B \setminus V_{n+1} \end{cases}$$

onde

$$V_{n+1} = \left\{ b \in W \mid \rho(b) > \lambda_n(\tau(b)) \right\}$$

daí temos que $\tau_{n+1}^{-1}(0, 1] = V_{n+1}$. Denotando $\tau_{n+1}^{-1}(1)$ por A_{n+1} temos então que

$$A_{n+1} = \left\{ b \in W \mid \rho(b) \geq \mu_n(\tau(b)) \right\}$$

E, afinal de contas, para que servirão essas funções e esses conjuntos construídos acima?

Perceba que cada (V_{n+1}, τ_{n+1}) são halos para A_{n+1} e que dado $a \in A$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_{n_0+1}$. Analogamente dado $b \in W$, existe n_0 tal que b (mais ainda: uma vizinhança aberta de b) está contido em V_{n_0+1} . Portanto, resta-nos construir seções parciais sobre cada um desses V_{n+1} de maneira que quando nos restringirmos aos pontos de $A \cap A_{n+1}$ tenhamos a função $\tilde{s} \Big|_{A \cap A_{n+1}}$. E quando considerarmos suas extensões $S_{n+1} : B \longrightarrow E$ que satisfarão as seguintes propriedades:

- (a) Se $\rho(b) > \frac{1}{n+1}$, então $S_{n+1}(b) = S_n(b)$;
- (b) Se $b \in V_{n+1}$ e $\tau(b) > 1 - \frac{1}{n}$, então $S_n(b) = \tilde{s}(b)$;

obteremos que a função $S = \lim_n \left(S_n \Big|_W \right)$ é contínua, $pS = I_W$ e $S \Big|_A = s$. Vamos, então, à construção dessas seções:

Considere, inicialmente, as funções $\tau' : B \longrightarrow I$ tal que

$$\tau'(b) = \begin{cases} \rho(b) \tau(b), & \text{se } b \in W \\ 0, & \text{se } b \in B \setminus W \end{cases}$$

e $\tau'' : B \longrightarrow I$ tal que

$$\tau''(b) = \begin{cases} \min \{ 6\tau'(b), 1 \}, & \text{se } b \in W \\ 0, & \text{se } b \in B \setminus W \end{cases}$$

o que nos dá que $\tau''^{-1}(0, 1] = V$ e que $\tau''^{-1}(1) = \tau'^{-1}\left[\frac{1}{6}, 1\right]$. Por hipótese, p possui a SEP. Portanto existe seção $S'' : B \rightarrow E$ tal que $S''\Big|_{\tau'^{-1}\left[\frac{1}{6}, 1\right]} = \tilde{s}\Big|_{\tau'^{-1}\left[\frac{1}{6}, 1\right]}$.

O caso base é dado por $n = 2$: Nesse caso temos V_3 , A_3 e τ_3 como foi definido anteriormente para o caso geral. Tomemos a seção parcial $s_3 : V_3 \rightarrow p^{-1}(V_3)$ dada por

$$s_3(b) = \begin{cases} S''(b), & \rho(b) > \frac{1}{3} \\ \tilde{s}(b), & \tau(b) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

que está bem definida e é contínua devido à construção de S'' . Portanto, devido a SEP, existe seção $S_3 : B \rightarrow E$ de maneira que $S_3\Big|_{A_3} = s_3\Big|_{A_3}$.

Para $n = 3$, definimos a seção parcial $s_4 : V_4 \rightarrow p^{-1}(V_4)$ dada por

$$s_4(b) = \begin{cases} S_3(b), & \rho(b) > \frac{1}{4} \\ \tilde{s}(b), & \tau(b) > 1 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Então, dado $b \in V_4$ com $\tau(b) \leq 1 - \frac{1}{3}$ temos que $\lambda_3(\tau(b)) = \frac{1}{4}$ e portanto $\rho(b) > \frac{1}{4}$. Se $\rho(b) > \frac{1}{4}$ e $\tau(b) > 1 - \frac{1}{3}$ então $\mu_2(\tau(b)) = \frac{1}{4}$ e portanto $b \in A_3$. Daí $S_3(b) = \tilde{s}(b)$. Com isso, existe seção $S_4 : B \rightarrow E$ de maneira que $S_4\Big|_{A_4} = s_4\Big|_{A_4}$.

O passo indutivo é totalmente análogo: Suponha construída a seção S_n , $n > 2$, então definimos a seção parcial $s_{n+1} : V_{n+1} \rightarrow p^{-1}(V_{n+1})$ dada por

$$s_{n+1}(b) = \begin{cases} S_n(b), & \rho(b) > \frac{1}{n+1} \\ \tilde{s}(b), & \tau(b) > 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

e, argumentando como no caso $n = 3$, temos que existe seção $S_{n+1} : B \rightarrow E$ de maneira que $S_{n+1}\Big|_{A_{n+1}} = s_{n+1}\Big|_{A_{n+1}}$.

Tomamos $S = \lim_n \left(S_{n+1}\Big|_W\right)$ e verificamos, facilmente, que satisfaz as propriedades desejadas:

- Se $\rho(b) > \frac{1}{n+1}$ então $S_{n+1}(b) = S_n(b)$. Portanto S' é contínua;
- $pS' = I_W$;
- Se $a \in A$ então $\tau(a) = 1$ portanto é maior que $1 - \frac{1}{n}$ para todo n . Logo $S'(a) = S(a) = s(a)$. □

Definição 3.2.2. Seja B um espaço topológico qualquer. Uma cobertura $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (não necessariamente aberta) de B é dita ser *normal* se existe uma partição da unidade localmente finita $\{\pi_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ subordinada à cobertura $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ (i.e. $\forall \delta \in \Delta$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\pi_\delta^{-1}(0, 1] \subseteq V_\lambda$ e a cobertura $\{\pi_\delta^{-1}(0, 1]\}_{\delta \in \Delta}$ é localmente finita).

Observação 3.2.3. A nomenclatura *normal* foi usada por Hurewicz em (**HUREWICZ, 1955**). Já *enumerável* por Dold em (**DOLD, 1963**). No nosso caso, reservaremos a palavra *enumerável* para coberturas onde o conjunto de índices Λ for enumerável no

sentido cardinal. Um outro fato a se observar é que em geral, na literatura, exige-se que $\overline{\pi_\delta^{-1}(0, 1]} \subseteq V_\lambda$. No nosso caso não precisamos exigir tanto.

Exemplo 3.2.4. Se B é normal (T4 e Hausdorff) então toda cobertura aberta localmente finita é normal ((**ROKHLIN; FUKS, 1984**)). Em espaços paracompactos toda cobertura aberta admite subcobertura localmente finita. E como todo paracompacto é normal, segue que se B é paracompacto então toda cobertura aberta é normal.

◇

O próximo teorema é o de localização da SEP. Localização neste texto tem um sentido mais estrito: Aqui tem o sentido que se vale sobre cada elemento de uma cobertura normal então vale globalmente. Não é uma restrição muito onerosa pois caso o espaço base B seja paracompacto (como, de fato, é na grande maioria dos casos trabalhados) então obtemos a noção de localização usual, ou seja, se vale localmente então vale globalmente.

Teorema 3.2.5. [*Teorema de Extensão de Seção ou Localização da SEP*] Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço sobre B . Suponha que exista uma cobertura normal $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que p possui a SEP sobre cada V_λ . Então p possui a SEP. Como consequência temos que se B é paracompacto, então p possui a SEP se, e só se, todo ponto b de B possui uma vizinhança aberta V_b na qual p possui a SEP sobre V_b .

Demonstração. Seja $\{\pi'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ a partição da unidade localmente finita subordinada a $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Podemos, e vamos, assumir que $\Lambda' = \Lambda$. Tome $A \subseteq B$ e (V, τ) um halo sobre A (aqui $V = \tau^{-1}(0, 1]$). Seja s uma seção parcial sobre A que se estende a uma seção parcial $\tilde{s}$ sobre V .

Defina $\Delta = \Lambda \cup \{0\}$ e $\pi_0 = \tau$ assim como para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos $\pi_\lambda = (1 - \tau)\pi'_\lambda$. Para cada $\lambda \in \Delta$ tomamos $U_\lambda = \pi_\lambda^{-1}(0, 1]$. Feito isso, obtemos que $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ é uma partição da unidade localmente finita subordinada a cobertura $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{V\}$ e que $A \cap U_\lambda = \emptyset$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Ou seja, o único elemento da nova cobertura que intersecta A é o V .

Dado $\Gamma \subseteq \Delta$, definimos $\pi_\Gamma(b) = \sum_{\lambda \in \Gamma} \pi_\lambda(b)$ que é contínua (já que a partição é localmente finita). Então colocamos $U_\Gamma = \pi_\Gamma^{-1}(0, 1] = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda$.

Denotemos por

$$\mathcal{P} = \left\{ (\Gamma, S_\Gamma) \middle| 0 \in \Gamma \text{ e existe seção parcial } S_\Gamma \text{ sobre } U_\Gamma \text{ que estende } s \right\}$$

que tem o seguinte objetivo: Dizer que $(\Gamma, S_\Gamma) \in \mathcal{P}$ significa que podemos estender s para todo o conjunto $\bigcup_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda$ (daí o motivo de exigirmos que $0 \in \Gamma$). Então $\mathcal{P} \neq \emptyset$ pois $(\{0\}, \tilde{s}) \in \mathcal{P}$ (que é a extensão sobre V , e por hipótese já existe). O nosso objetivo é mostrar que $(\Delta, S_\Delta) \in \mathcal{P}$ (ou seja: devemos encontrar S_Δ).

Consideremos a seguinte ordem parcial sobre $\mathcal{P}$: Diremos que $(\mathcal{A}, S_{\mathcal{A}}) \leq (\mathcal{B}, S_{\mathcal{B}})$ se, e só se,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ e } S_{\mathcal{B}} \Big|_{U_{\mathcal{A}} \setminus U_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}}} = S_{\mathcal{A}}$$

ou seja: dado $b \in U_{\mathcal{A}}$ com $\pi_{\lambda}(b) = 0$ para todo $\lambda \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, então $S_{\mathcal{B}}(b) = S_{\mathcal{A}}(b)$.

Seja $\Sigma = \{(\Gamma_{\alpha}, S_{\Gamma_{\alpha}})\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ uma cadeia de $\mathcal{P}$.

Tome $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} \Gamma_{\alpha}$. Então $U_{\Gamma} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} U_{\Gamma_{\alpha}}$ e vamos construir a seção parcial $S_{\Gamma} : U_{\Gamma} \rightarrow p^{-1}(U_{\Gamma})$ da seguinte forma: Dado $b \in U_{\Gamma}$ existem apenas um número finito de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Delta$ tais que $b \in U_{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$. Denotando por $\mathcal{L}_b = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ temos que o conjunto de índices $\mathcal{L}_b \cap \Gamma$ é não vazio. Como $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} \Gamma_{\alpha}$, existe $\alpha \in \mathbb{A}$ tal que $\mathcal{L}_b \cap \Gamma \subseteq \Gamma_{\alpha}$. Com isso definimos

$$S_{\Gamma}(b) = S_{\Gamma_{\alpha}}(b)$$

Dado qualquer $\gamma \in \mathbb{A}$ com $\Gamma_{\alpha} \subseteq \Gamma_{\gamma}$ então $S_{\Gamma_{\alpha}}(b) = S_{\Gamma_{\gamma}}(b)$, e daí segue a boa definição e continuidade de S_{Γ} . Com isso $(\Gamma, S_{\Gamma}) \in \mathcal{P}$ (pois dado $b \in A$ e dado $\lambda \neq 0 \in \Delta$ então $\pi_{\lambda}(b) = 0$, implicando que $S_{\Gamma_{\alpha}}(b) = s(b)$). Que (Γ, S_{Γ}) é uma cota superior para Σ segue do fato que dado $b \in U_{\Gamma_{\alpha}}$ com $\pi_{\lambda}(b) = 0$ para todo $\lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_{\alpha}$ então $\mathcal{L}_b \cap \Gamma = \mathcal{L}_b \cap \Gamma_{\alpha}$ o que implica, pela definição S_{Γ} , que $S_{\Gamma}(b) = S_{\Gamma_{\alpha}}(b)$.

Portanto, mostramos que toda cadeia ascendente de $\mathcal{P}$ possui uma cota superior em $\mathcal{P}$. Com isso podemos aplicar o *lema de Zorn* sobre $\mathcal{P}$ e concluir que existe um elemento maximal $(\mathcal{M}, S_{\mathcal{M}}) \in \mathcal{P}$.

Vamos mostrar que $\mathcal{M} = \Delta$. Mostrado isso, já obtemos o resultado pois $U_{\Delta} = B$.

Suponhamos que $\mathcal{M} \neq \Delta$. Tome $\mu \in \Delta \setminus \mathcal{M}$. Defina $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{\mu\}$. Considere a função $\varphi : \pi_{\mathcal{M}'}^{-1}(0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\varphi(b) = \begin{cases} 1, & \text{se } \pi_{\mu}(b) \leq \pi_{\mathcal{M}}(b) \text{ (nesse caso } \pi_{\mathcal{M}}(b) > 0) \\ \frac{\pi_{\mathcal{M}}(b)}{\pi_{\mu}(b)}, & \text{se } \pi_{\mu}(b) \geq \pi_{\mathcal{M}}(b) \text{ (nesse caso } \pi_{\mu}(b) > 0) \end{cases}$$

então φ é contínua e $\varphi^{-1}(0, 1] = \pi_{\mathcal{M}}^{-1}(0, 1] = U_{\mathcal{M}}$.

Considere $W = \varphi^{-1}(1) \cap U_{\mu}$ e $\widetilde{W} = U_{\mathcal{M}} \cap U_{\mu}$. Portanto $\left(\widetilde{W}, \varphi \Big|_{U_{\mu}}\right)$ é um halo para W e $S_{\mathcal{M}} \Big|_{\widetilde{W}}$ é uma seção parcial sobre $\widetilde{W}$ com relação a p . Como p possui a SEP sobre V_{μ} , segue pelo **Teorema 3.2.1** que p possui a SEP sobre U_{μ} . Portanto existe $S_{\mu} : U_{\mu} \rightarrow p^{-1}(U_{\mu})$ tal que $p_{U_{\mu}} S_{\mu} = I_{U_{\mu}}$ e

$$S_{\mu} \Big|_W = \left(S_{\mathcal{M}} \Big|_{\widetilde{W}} \right) \Big|_W = S_{\mathcal{M}} \Big|_W$$

Consideremos, por fim, $S_{\mathcal{M}'} : U_{\mathcal{M}'} \rightarrow p^{-1}(U_{\mathcal{M}'}),$ onde $U_{\mathcal{M}'} = U_{\mathcal{M}} \cup U_{\mu}$, tal que

$$S_{\mathcal{M}'}(b) = \begin{cases} S_{\mathcal{M}}(b), & \text{caso } \pi_{\mu}(b) \leq \pi_{\mathcal{M}}(b) \\ S_{\mu}(b), & \text{caso } \pi_{\mu}(b) \geq \pi_{\mathcal{M}}(b). \end{cases}$$

Então $S_{\mathcal{M}'}$ é contínua pois se $\pi_\mu(b) = \pi_{\mathcal{M}}(b)$ então $S_\mu(b) = S_{\mathcal{M}}(b)$, $pS_{\mathcal{M}'} = I_{U_{\mathcal{M}'}}$ e

$$(\mathcal{M}', S_{\mathcal{M}'}) > (\mathcal{M}, S_{\mathcal{M}})$$

pois se $\pi_\mu(b) = 0$ então $S_{\mathcal{M}'}(b) = S_{\mathcal{M}}(b)$ (lembrando que $\mathcal{M}' \setminus \mathcal{M} = \{\mu\}$). O que contraria a maximalidade de $(\mathcal{M}, S_{\mathcal{M}})$. Portanto $\mathcal{M} = \Delta$. Terminando a segunda afirmação e consequentemente a prova do teorema. $\square$

Com a mesma ideia dada na demonstração acima, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.6. *Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço sobre B , $A \subseteq B$, e seja s uma seção sobre A que se estende a uma seção sobre V , halo ao redor de A . Suponha que existe uma cobertura normal $\{V_\lambda\}$ de $B \setminus A$ tal que p_{V_λ} é retrátil para cada λ . Então existe uma seção sobre B , S , tal que $S|_A = s$.*

Demonstração. É apenas uma adaptação natural da demonstração do teorema acima. $\square$

Exemplo 3.2.7. Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço sobre B , $A \subseteq B$, e s uma seção sobre A que se estende a uma seção sobre V , halo ao redor de A . Suponha que existe uma cobertura normal $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $B \setminus A$ tal que p_{V_λ} é dominado por um espaço trivial $\wp_\lambda : V_\lambda \times Y_\lambda \longrightarrow B$ (as projeções) com os grupos fundamentais $\pi_i(Y_\lambda) = 0$, para cada λ , $i \leq n_\lambda$, e cada V_λ um retrato de um complexo-CW de dimensão $\leq n_\lambda$. Então existe uma seção sobre B , S , tal que $S|_A = s$ (Veja o **exemplo 3.1.15**).

$\diamond$

Exemplo 3.2.8. FIBRADOS NORMAIS: Um fibrado de Steenrod $p : E \longrightarrow B$ é dito *normal* se existe cobertura normal $\{W_\gamma\}$ de B tal que os produtos fibrados (de Steenrod) p_{W_γ} são todos triviais (ver o **exemplo 2.3.2** para produto fibrado de Steenrod). No caso do espaço base B ser paracompacto, então $p : E \longrightarrow B$ é naturalmente um fibrado normal já que a cobertura por vizinhanças coordenadas $\{V_\lambda\}$ é a tal cobertura normal requerida. Com isso a Faixa de Möbius, a Garrafa de Klein e o Toro Retorcido vistos na **seção 2.1** são todos fibrados normais. Se B é um conexo paracompacto e $p : E \longrightarrow B$ é um recobrimento de B então p é um fibrado normal.

Se $p : E \longrightarrow B$ é um G -fibrado normal então qualquer fibrado associado (ver **exemplo 3.1.1**) e qualquer produto fibrado (ver **exemplo 2.3.2**) também é normal.

Se $p : E \longrightarrow B$ é um fibrado normal, com cobertura normal $\{W_\gamma\}$ de B e com fibra contrátil então p_{W_γ} é retrátil (ver **proposição 2.2.16**) e portanto p possui a SEP sobre cada elemento dessa cobertura normal. Decorre, então, do *Teorema de Extensão de Seção* que p possui a SEP.

Com isso, temos que se $p : E \longrightarrow B$ é um fibrado de Steenrod com fibra contrátil e B é paracompacto então p possui a SEP: por exemplo a Faixa de Möbius possui a SEP.

Pelo mesmo motivo se B é um conexo paracompacto e $p : E \longrightarrow B$ é um recobrimento de B tal que $p^{-1}\{b\}$ é um único ponto $e \in E$ então p possui a SEP.

Continuando com os G -fibrados principais, **exemplo 3.1.1**, temos que um G -fibrado principal normal $p : E \longrightarrow B$ com G contrátil possui a SEP, e portanto admite uma seção. Logo são equivalentes a um espaço trivial (ver **exemplo 2.1.17**).

◇

3.3 Hereditariedade da Propriedade de Extensão de Seção

Definição 3.3.1. Seja P uma propriedade sobre funções contínuas. Diremos que P é *hereditária sobre* $p : E \longrightarrow B$ se o fato de p possuir a propriedade P implicar que TODOS os produtos fibrados também possuem tal propriedade. Ou seja, dado $\alpha : X \longrightarrow B$ contínua então p_α possui a propriedade P .

Exemplo 3.3.2. Pela **proposição 2.3.7** vemos que ser retrátil é uma propriedade hereditária.

◇

Definição 3.3.3. Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço sobre B e $h : X \longrightarrow E$ uma função contínua. Então ph é um B -espaço e h se torna uma B -aplicação com relação aos espaços ph e p . Com isso, dadas $h_0, h_1 : X \longrightarrow E$ funções contínuas tais que $ph_0 = ph_1$, dizemos que h_0 e h_1 são B -homotópicas se existe uma homotopia $\Theta : X \times I \longrightarrow E$ tal que $\Theta_0 = h_0$, $\Theta_1 = h_1$ e para todo t , $p\Theta_t = ph_0 = ph_1$. Denotamos esse fato (com perdão pelo abuso de notação) escrevendo $h_0 \underset{B}{\simeq} h_1$.

Em geral, a SEP não é hereditária sobre um espaço qualquer. Veremos agora que a SEP é hereditária sobre um espaço p se, e só se, p é retrátil.

Proposição 3.3.4. *As seguintes condições são equivalentes:*

- a) A SEP é hereditária sobre p (ou seja, todo produto fibrado p_α possui a SEP);
- b) Dada $\overline{F} : X \longrightarrow B$, $A \subseteq X$, (V, τ) um halo sobre A e $f : V \longrightarrow E$ com $pf = \overline{F}|_V$ (ou seja, f é um levantamento parcial de $\overline{F}$), então existe $F : X \longrightarrow E$ com $F|_A = f|_A$ e $pF = \overline{F}$ (ou seja, F é um levantamento de $\overline{F}$);

c) Dada $\overline{F} : X \longrightarrow B$, $A \subseteq X$, (V, τ) um halo sobre A e $f : V \longrightarrow E$ com $pf = \overline{F}|_V$ (ou seja, f é um levantamento parcial de $\overline{F}$), então existe um levantamento $F : X \longrightarrow E$ com $F|_A \cong_B f|_A$;
d) p é retrátil;

Demonstração. [a $\implies$ b] Considere o produto fibrado $p_{\overline{F}} : E_{\overline{F}} \longrightarrow X$, e a aplicação induzida $f_{\overline{F}} : V_{\overline{F}} \longrightarrow E_{\overline{F}}$ (ver **definição 2.3.3**). Seja $h : X \longrightarrow X_{\overline{F}}$ dada por $h(x) = (x, x)$. Como $p_{\overline{F}}f_{\overline{F}}h|_V = I_V$ e $p_{\overline{F}}$ possui a SEP, por hipótese, existe $S : X \longrightarrow E_{\overline{F}}$ tal que $S|_A = f_{\overline{F}}h|_A$ e $p_{\overline{F}}S = I_X$. Note que S é da forma $S(x) = (F(x), x)$, onde $F : X \longrightarrow E$ tal que $pF(x) = \overline{F}(x)$, $\forall x$.

[b $\implies$ c] é trivial.

[c $\implies$ d] Seja (V, τ) um halo sobre A e $s : V \longrightarrow E$ uma seção parcial para p . Por hipótese existe seção $S : B \longrightarrow E$ tal que $S|_A = s|_A$. Portanto p possui a SEP. Seja $\overline{F} = p^\times : E \times I \longrightarrow B$ tal que $p^\times(e, t) = p(e)$. Considere a função $\tau : E \times I \longrightarrow I$ dada por $\tau(e, t) = 2|t - \frac{1}{2}|$. Sejam

$$V = \tau^{-1}(0, 1] = E \times [0, \frac{1}{2}) \cup E \times (\frac{1}{2}, 1] \\ A = \tau^{-1}(1) = E \times \{0\} \cup E \times \{1\}$$

e considere a função $f : V \longrightarrow E$ definida por

$$f(e, t) = \begin{cases} e, & \text{se } t < \frac{1}{2} \\ Sp(e), & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por hipótese, existe $F : E \times I \longrightarrow E$ tal que $F|_A \cong_B f|_A$, o que implica $F_0 \cong_B I_B$ e $F_1 \cong_B Sp$, e $pF = \overline{F} = p^\times$. Como $F : F_0 \cong_B F_1$ segue que $I_B \cong_B Sp$. Logo p é retrátil.

[d $\implies$ c] Por hipótese existe $S : B \longrightarrow E$ tal que $pS = I_B$ e $Sp \cong_B I_E$. Tomando $F = S\overline{F}$ obtemos $pF = \overline{F}$ e $F|_A = Spf|_A \cong_B f|_A$;

[c $\implies$ a] Suponha $A \subseteq X$ e (V, τ) um halo ao redor de A . Considerando

$$\tau'(x) = \min\{1, 2\tau(x)\}$$

obtemos $\tau'^{-1}(0, 1] = V$ e $\tau'^{-1}(1) = \tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$.

Suponha $s : V \longrightarrow p_\alpha^{-1}(V)$ uma seção parcial para p_α . Então s é da forma $s(x) = (x, s_\alpha(x))$ onde $s_\alpha : V \longrightarrow E$ com $ps_\alpha = \alpha|_A$. Por hipótese existe $S_\alpha : X \longrightarrow E$ com $S_\alpha|_{\tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]} \cong_B s_\alpha|_{\tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]}$. Tomando $S'(x) = (x, S_\alpha(x))$ e denotando por H a B -

homotopia entre $S_\alpha \Big|_{\tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]}$ e $s_\alpha \Big|_{\tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]}$ podemos tomar $S : X \longrightarrow E_\alpha$ dada por

$$S(x) = \begin{cases} S'(x), & \tau(x) \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2\tau(x) - 1), & \tau(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

que satisfaz $p_\alpha S = I_X$ e $S \Big|_A = s \Big|_A$. □

3.4 Localização dos espaços retráteis e das B -Equivalências

Depois da SEP nos ter sido apresentada nas seções anteriores, vamos ver o seu papel mais importante na teoria das fibrações. Mais precisamente veremos a importância do teorema de extensão de seção nos teoremas de localização. Lembrando que localização nesse texto tem um significado diferente do usual.

Teorema 3.4.1. [*Localização dos Espaços retráteis*] Se $p : E \longrightarrow B$ é retrátil sobre cada V_λ , onde $\{V_\lambda\}$ forma uma cobertura normal para B , então p é retrátil. Em particular, se B é paracompacto então p é retrátil se, e só se, é localmente retrátil.

Demonstração. Seja $\alpha : X \longrightarrow B$ uma função contínua qualquer. Pelo **proposição 2.3.7** p_α é retrátil sobre cada $\alpha^{-1}(V_\lambda)$. Como $\{\alpha^{-1}(V_\lambda)\}$ forma uma cobertura normal para X , segue do *teorema de extensão de seção* que p_α possui a SEP. Da arbitrariedade de α , temos que p é retrátil, pela **proposição 3.3.4**. □

Exemplo 3.4.2. Todo fibrado normal com fibra contrátil é retrátil: De fato, segue do que vimos no **exemplo 3.2.8** e do teorema acima. Um exemplo é a Faixa de Möbius.

◇

Observação 3.4.3. O teorema acima nos mostra que ser retrátil é uma característica “local” do espaço. As aspas são devido a exigência da cobertura ser normal. Se B for paracompacto, então $p : E \longrightarrow B$ é retrátil se, e só se, p é localmente retrátil. O nosso próximo objetivo é mostrar que ser uma B -equivalência homotópica também é uma condição “local”. Para isso consideremos o seguinte lema:

Lema 3.4.4. Sejam $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ espaços e $f : E' \longrightarrow E$ uma B -equivalência com inversa f' . Considere

$$\mathcal{R} = \left\{ (y, w) \in E' \times E^I \mid p'(y) = pw(I) \text{ e } w(1) = f(y) \right\}$$

ou seja, $\forall t \in I$ $pw(t) = p'(y)$. $\mathcal{R}$ é obviamente não vazio (tome $w(t) = f(y)$ para todo t). Tomando $q : \mathcal{R} \longrightarrow E$ dada por $q(y, w) = w(0)$, então q é retrátil.

Demonstração. Denotemos por $\Phi : I_{E'} \xrightarrow{\simeq_B} f'f$ e $\Psi : I_E \xrightarrow{\simeq_B} ff'$ as B -homotopias e adotemos as seguintes notações:

- Se w e w' são caminhos com $w(1) = w'(0)$, então denotamos o caminho produto por $w * w'$;
- Dado $r \in I$, denotamos ${}_r w(t) = w(rt)$ e ${}^r w(t) = w(1 - r + rt)$
- $w^-(t) = w(1 - t)$.

Daí, observamos que ${}_1 w(t) = {}^1 w(t) = w(t)$, ${}_0 w(t) = w(0)$ e ${}^0 w(t) = w(1)$. Definamos, também, a função $\sigma : E \rightarrow \mathcal{R}$ como $\sigma(e) = (f'(e), \Psi(e, \cdot))$. Então $q\sigma(e) = \Psi(e, 0) = I_E(e) = e$ e $\sigma q(y, w) = \sigma(w(0)) = (f'(w(0)), \Psi_{w(0)})$. Nosso objetivo é mostrar que $I_{\mathcal{R}} \xrightarrow{\simeq_E} \sigma q$.

Fixado $(y, w) \in \mathcal{R}$ temos que $\Phi_y(1) = f'f(y) = f'w(1)$, $f'w(0) = \Psi_{w(0)}(0)$, $\Psi_{w(0)}(1) = ff'w(0)$, $ff'w(1) = f\Phi_y^-(0)$ e $f\Phi_y^-(1) = w^-(0)$. Portanto podemos considerar a função $\mu : \mathcal{R} \rightarrow E'^I$ dada por

$$\mu(y, w) = \Phi_y * f' \left[w^- * \Psi_{w(0)} * ff'w * f\Phi_y^- * w^- \right]$$

que é um caminho sobre a fibra $p'^{-1}(p'(y))$ ligando $\mu(y, w)(0) = y$ a $\mu(y, w)(1) = f'w(0)$. Dessa forma, $f\mu(y, w)$ é um caminho em $p^{-1}(p'(y))$ que se inicia em $f(y) = w(1)$ e termina em $ff'(w(0))$.

Considere também $F : \mathcal{R} \times I \rightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$F(y, w, r) = (\mu(y, w)(r), w * f({}_r \mu(y, w)))$$

(a continuidade segue de **(LIMA, 1977)**, pág 131) que é uma E -homotopia ligando $F_0 = I_{\mathcal{R}}$ e $F_1(y, w) = (f'w(0), w * f\mu(y, w))$ (como $w * f({}_r \mu(y, w))$ é um caminho na fibra $p^{-1}(p'(y))$ terminando em $f(\mu(y, w)(r))$ então $(\mu(y, w)(r), w * f({}_r \mu(y, w))) \in \mathcal{R}$ e $qF_t(e', w) = w(0) = q(e', w)$).

O objetivo, agora, é verificar que $w * f\mu(y, w)$ é homotópica, sobre a fibra, à $\Psi_{w(0)}$.

Perceba que

$$w * f\mu(y, w) = w * f \left[\Phi_y * f' \left(w^- * \Psi_{w(0)} * ff'w * f\Phi_y^- * w^- \right) \right]$$

é E -homotópica, por reparametrização, a

$$(w * f\Phi_y * ff'w^-) * ff'\Psi_{w(0)} * ff' \left(ff'w * f\Phi_y^- * w^- \right)$$

onde denotaremos $(w * f\Phi_y * ff'w^-) = \nu$. Com isso temos que $(ff'w * f\Phi_y^- * w^-) = \nu^-$ e reescrevendo, temos que

$$w * f\mu(y, w) \xrightarrow{\simeq_E} \nu * ff'\Psi_{w(0)} * ff'\nu^-$$

que é um caminho na fibra $p^{-1}(p'(y))$ começando em $w(0)$ e terminando em $ff'(w(0))$. Assim

$$\nu * ff'\Psi_{w(0)} * ff'\nu^- \underset{E}{\simeq} \nu * ff'w(0) * ff'(\Psi_{w(0)} * \nu^-) * ff'w(0)$$

é uma reparametrização onde ficamos parados em $ff'w(0)$ nos intervalos $[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Denotemos por G a E -homotopia que leva $G_0 = F_1$ em

$$G_1(y, w) = (f'w(0), \nu * ff'w(0) * ff'(\Psi_{w(0)} * \nu^-) * ff'w(0)).$$

Considere a E -homotopia $H : \mathcal{R} \times I \longrightarrow R$ tal que

$$H(y, w, r) = (f'w(0), \nu *_{*r} (\Psi_{w(0)}^-) * \Psi_{1-r}(\Psi_{w(0)} * \nu^-) *_{*r} \Psi_{w(0)})$$

onde $H_0 = G_1$ e

$$H_1 = (f'w(0), \nu * \Psi_{w(0)}^- * (\Psi_{w(0)} * \nu^-) * \Psi_{w(0)})$$

Como $(\nu * \Psi_{w(0)}^-) * (\Psi_{w(0)} * \nu^-)$ é homotópica, por reparametrização, ao caminho constante $w(0)$ e $w(0) * \Psi_{w(0)}$ é homotópico a $\Psi_{w(0)}$ obtemos que $H_1(y, w)$ é E -homotópico a

$$\sigma q(y, w) = (f'w(0), \Psi_{w(0)})$$

e, portanto, encadeando as E -homotopias F, G, H e esta última entre $H_1(y, w)$ e $\sigma q(y, w)$, obtemos que $I_{\mathcal{R}}$ é E -homotópico a σq $\square$

Teorema 3.4.5. [Localização das B -equivalências] *Seja $f : E' \longrightarrow E$ uma B -aplicação relativa aos B -espaços $p' : E' \longrightarrow B$ e $p : E \longrightarrow B$. Se f é uma B -equivalência homotópica sobre cada V_λ de uma cobertura normal $\{V_\lambda\}$ de B , então f é uma B -equivalência. No caso de B ser paracompacto, então f é uma B -equivalência se, e só se, é localmente uma B -equivalência.*

Mais ainda, se nos é dada uma inversa parcial $g : p^{-1}(V) \longrightarrow p'^{-1}(V)$, onde (V, τ) é um halo para A , e nos é dada uma B -homotopia $D_V : I_{p^{-1}(V)} \underset{B}{\simeq} fg$ então $g_A = g|_A$ e $D_A = D_V|_A$ se estendem a todo B .

Demonstração. Suponha a existência de uma função contínua $S : E \longrightarrow E' \times E^I$ onde, como de costume, $E^I = \mathcal{C}_{ca}(I; E)$, tal que S associe a cada ponto $e \in E$ um ponto $e' \in p'^{-1}(p(e))$ e um caminho $\theta_e : I \longrightarrow E$ de maneira que $\theta_e(0) = e$, $\theta_e(1) = f(e')$ e $\theta_e(t) \in p^{-1}(p(e))$, $\forall t$. Então S é da forma $S(e) = (f'(e), \theta_e)$ onde $f' : E \longrightarrow E'$, $p'f' = p$ e $\theta : E \longrightarrow E^I$. Portanto $\Theta : E \times I \longrightarrow E$ dada por $\Theta(e, t) = \theta_e(t)$ é uma B -homotopia entre I_E e ff' (a continuidade de Θ segue **(LIMA, 1977)**, pág 131).

Do fato de $I_E \underset{B}{\simeq} ff'$ e de f_{V_λ} ser uma B -equivalência, temos que $I_{p^{-1}(V_\lambda)} \underset{B}{\simeq} f_{V_\lambda} f'_{V_\lambda}$. Portanto $f'_{V_\lambda} f_{V_\lambda} \underset{B}{\simeq} I_{p'^{-1}(V_\lambda)}$. Assim f' é uma B -equivalência sobre cada um dos V_λ , e por

argumentos análogos ao caso da f , existirá uma $f'' : E' \rightarrow E$ tal que $f'f'' \underset{B}{\simeq} I_{E'}$. Daí temos que

$$f'f \underset{B}{\simeq} (f'f)(ff') \underset{B}{\simeq} fI_E f'' \underset{B}{\simeq} I_{E'}$$

logo f é uma B -equivalência homotópica.

Para mostrarmos a existência da função S considerada acima, notamos que: Denotando

$$\mathcal{R} = \left\{ (y, w) \in E' \times E^I \mid p'(y) = pw(I) \text{ e } w(1) = f(y) \right\}$$

como no lema anterior e $q : R \rightarrow E$ tal que $q(y, w) = w(0)$. Como f é uma B -equivalência sobre cada V_λ então q é retrátil sobre cada $p^{-1}(V_\lambda)$ e $\{p^{-1}(V_\lambda)\}_\lambda$ forma uma cobertura normal de E . Então pelo **Teorema 3.4.1** q é retrátil implicando na existência da função S requerida. O que conclui demonstração do teorema, restando a verificação da segunda parte:

Suponha que são dadas g e D_V como no enunciado. Tomemos $s : p^{-1}(V) \rightarrow \mathcal{R}$ dad por $s(e) = (g(e), D_V(e, \cdot))$ e notemos que $qs = I_{p^{-1}(V)}$. Como $(p^{-1}(V), \tau p)$ é um halo sobre $p^{-1}(A)$ e q possui a SEP (pois é retrátil) então existe $S : E \rightarrow \mathcal{R}$ que estende $s \Big|_{p^{-1}(A)}$ e $qS = I_E$. Essa S é da forma $S = (G, D)$ onde $G : E \rightarrow E'$ e $D : E \rightarrow E^I$ são tais que $G \Big|_{p^{-1}(A)} = g_A$ e $D \Big|_{p^{-1}(A)} = D_A$. Com isso, concluimos a demonstração do teorema. $\square$

4 Fibrações e a CHP

Em seu artigo “*On the concept of the fibre space*”, (ver (HUREWICZ, 1955)), Hurewicz caracterizou os espaços sobre uma base que possuem a *propriedade de levantamento de homotopias*. Essa caracterização foi dada através de levantamentos de caminhos. Aos espaços que possuem esta propriedade chamamos de *fibrações (de Hurewicz)*.

Um espaço sobre B , $p : E \longrightarrow B$, é dito possuir a *propriedade de levantamentos de homotopias* (*Covering Homotopy Property - CHP*) se toda homotopia $\bar{H} : X \times I \longrightarrow B$ em B cuja função inicial $\bar{H}_0$ possui um levantamento em E pode ser levantada completamente a uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow E$ em E .

Neste mesmo trabalho, Hurewicz mostra que se B é paracompacto então p é uma fibração se, e só se, é localmente uma fibração. Esse resultado é o famoso *Teorema de Uniformização de Hurewicz*.

4.1 Fibrações

Durante essa seção e no restante do texto, estaremos supondo que $p : E \longrightarrow B$ é sobrejetiva. Caso contrário, basta restringirmos os casos devidamente à imagem $p(E)$.

Nossa primeira definição é a de fibração. Usamos a mesma definição dada por Hurewicz em (HUREWICZ, 1955). Perceba o uso do produto fibrado.

Definição 4.1.1. Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço sobre B . Se denotarmos por $\ell : B^I \longrightarrow B$ a aplicação $\ell(w) = w(0)$ então

$$E_\ell = \left\{ (e, w) \in E \times B^I \mid p(e) = \ell(w) = w(0) \right\}$$

é o espaço total do produto fibrado $p_\ell : E_\ell \longrightarrow B^I$. Denotamos $\tilde{p} : E^I \longrightarrow E_\ell$ tal que $\tilde{p}(\alpha) = (\alpha(0), p\alpha)$. Diremos que $p : E \longrightarrow B$ é uma *fibração (de Hurewicz)* se existe uma função contínua $\gamma : E_\ell \longrightarrow E^I$ tal que $\tilde{p}\gamma = I_{E_\ell}$. A função γ é dita *função de levantamento* relativa a p .

$$\begin{array}{ccc} E^I & \xrightarrow{I_{E^I}} & E^I \\ \gamma \uparrow & \swarrow \tilde{p} & \downarrow \\ E_\ell & \xrightarrow{\varphi} & E \\ p_\ell \downarrow & & \downarrow p \\ B^I & \xrightarrow{\ell} & B \end{array}$$

Intuitivamente, um espaço $p : E \longrightarrow B$ é uma *fibração* se dado um caminho w em B com ponto inicial em b e dado $e \in p^{-1}(b)$ existe um caminho $\tilde{w}$ em E que levanta w e se inicia em e e esse caminho depende continuamente de w e do ponto inicial e .

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{e} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{w} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{w} & B \end{array}$$

Exemplo 4.1.2. a) O espaço trivial $\wp : B \times Y \longrightarrow B$ do **exemplo 2.1.2** é uma fibração como é simples de se verificar: Denotando por $\ell : B^I \longrightarrow B$ a aplicação $\ell(w) = w(0)$, então tomamos $\gamma : (B \times Y)_\ell \longrightarrow (B \times Y)^I$ dada por $\gamma(b, y, w)(t) = (w(t), y)$. Com isso $\gamma(0) = (b, y)$ e $\tilde{p}\gamma(b, y, w) = (b, y, w)$.

b) Todo espaço de recobrimento $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração. Mais ainda: dado w um caminho em B começando em b , e dado $e \in p^{-1}(b)$ existe um *único* caminho em E começando em e que levanta w (Ver **(LIMA, 1977)**, pág 129)

c) Composição de fibrações é uma fibração: Supondo $p' : E' \longrightarrow E$ e $p : E \longrightarrow B$ fibrações, tomamos w um caminho em B começando em b . Dado $e' \in (pp')^{-1}(b)$, denotamos $e = p(e')$. Por hipótese existe um caminho $\tilde{w}$ em E , dependendo continuamente de e e w , tal que $\tilde{w}(0) = e$ e $p\tilde{w} = w$. Também por hipótese, existe caminho $\tilde{w}'$ em E' , dependendo continuamente de e' e $\tilde{w}$ (conseqüentemente depende continuamente de e' e w , pois $\tilde{w}$ depende continuamente de w), tal que $\tilde{w}'(0) = e'$ e $p'\tilde{w}' = \tilde{w}$. Portanto $pp'\tilde{w}' = w$ e $\tilde{w}'$ é o levantamento desejado de w .

d) Se $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração e $\alpha : X \longrightarrow B$ uma função contínua então o produto fibrado p_α é uma fibração (ou seja: fibração é hereditária). Provaremos uma generalização desse fato mais na frente.

e) O espaço $p_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ do **exemplo 2.1.18** é uma fibração: Seja w é uma caminho em $\mathbb{R}$ e $(w(0), y) \in p_1^{-1}(w(0))$. Definimos o caminho $\tilde{w} : I \longrightarrow E_1$ dado por $\tilde{w}(t) = (w(t), \tilde{y}(t))$ onde

· Se $w(0) \geq 0$ e $y \geq 0$,

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y, & w(t) \geq y \\ w(t), & w(t) \leq y \end{cases}$$

· Se $w(0) \leq 0$ e $y \geq 0$,

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y, & w(t) \leq -y \\ -w(t), & w(t) \geq -y \end{cases}$$

· Se $w(0) \geq 0$ e $y \leq 0$,

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y, & w(t) \geq -y \\ -w(t), & w(t) \leq -y \end{cases}$$

· Se $w(0) \leq 0$ e $y \leq 0$,

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y, & w(t) \leq y \\ w(t), & w(t) \geq y \end{cases}$$

que é o levantamento desejado.

◇

Exemplo 4.1.3. Vimos (exemplo 2.2.5) que os espaços $p_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ do exemplo 2.1.18 são B -equivalentes e p_1 é uma fibração. Mas p_2 não é uma fibração: o caminho $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t) = t$ não se levanta a nenhum caminho começando em $(0, y)$ com $y < 0$. Com isso, fibração não é preservada por B -equivalências.

◇

4.2 Propriedade de Levantamento de Homotopias (CHP)

Definição 4.2.1. Seja $p : E \rightarrow B$ um espaço sobre B , X um espaço topológico qualquer e $\bar{H} : X \times I \rightarrow B$ uma homotopia (usual). Diremos que p possui a CHP para $\bar{H}$ se dada $h : X \rightarrow E$ com $ph = \bar{H}_0$ e dadas $\tau : X \rightarrow I$ e $H' : \tau^{-1}(0, 1] \times I \rightarrow E$ com $pH' = \bar{H}|_{\tau^{-1}(0, 1] \times I}$ e $H'(x, 0) = h(x)$, $\forall x \in \tau^{-1}(0, 1]$ então existe $H : X \times I \rightarrow E$ tal que $pH = \bar{H}$, $H|_{\tau^{-1}(1) \times I} = H'|_{\tau^{-1}(1) \times I}$ e $H_0 = h$.

Observação 4.2.2. Naturalmente poderíamos no lugar de I considerar qualquer intervalo compacto $[a, b]$ com $a < b$.

A abstração da definição acima é ajudada pela intuição no caso de X ser um espaço normal (T4 e Hausdorff). Nesse caso dizer que p possui a CHP para $\bar{H}$ significa que dada $h : X \rightarrow E$ com $ph = \bar{H}_0$, dados $A \subseteq V \subseteq X$ com A fechado e V aberto e dada H' levantamento parcial de $\bar{H}$ em V que coincide com h em $V \times \{0\}$, então podemos tomar H , levantamento de $\bar{H}$, de maneira que coincida com H' em $A \times I$ e $H_0 = h$. Com isso englobamos exemplos importantes como todos os espaços paracompactos (por exemplo: espaços celulares).

Definição 4.2.3. Dizemos que $p : E \longrightarrow B$ possui a CHP para um espaço topológico X se possui a CHP para toda homotopia $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$. Se p possui a CHP para todo espaço topológico X então dizemos que p possui a CHP.

A noção de um espaço sobre B possuir a CHP pra uma homotopia $\overline{H}$ será tratada apenas como uma noção auxiliar. O que vai nos interessar mesmo é a noção de possuir CHP para espaços ou classes de espaços. Para isso será importante a seguinte caracterização.

Proposição 4.2.4. $p : E \longrightarrow B$ tem a CHP para um espaço X se, e só se, dada qualquer homotopia $\overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ e $g : X \longrightarrow E$ com $pg = \overline{G}_0$ então existe $G : X \times I \longrightarrow E$ com $pG = \overline{G}$ e $G_0 = g$. Intuitivamente falando, dada qualquer homotopia cuja aplicação inicial possa ser levantada, então existe um levantamento de toda a homotopia que se inicia no levantamento da aplicação inicial.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{\overline{H}} & B \end{array}$$

Demonstração. Para mostrar que a CHP é suficiente, considere $\tau : X \longrightarrow I$ a função nula e H' a função vazia.

Que é necessário: Tome $\overline{H}$, h , τ e H' como na definição. Considere $\tau' : X \longrightarrow I$ tal que

$$\tau'(x) = \max\{0, 2\tau(x) - 1\}$$

pois com isso, temos que $\tau'^{-1}(0, 1] = \tau^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$, $\tau'^{-1}(0) = \tau^{-1}[\frac{1}{2}, 1]$ e $\tau'^{-1}(1) = \tau^{-1}(1)$

Tomemos também $\overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ tal que $\overline{G}(x, t) = \overline{H}(x, \min\{1, \tau'(x) + t\})$ e $g : X \longrightarrow E$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} H'(x, \tau'(x)), & \text{se } \tau(x) > 0 \\ h(x), & \text{se } \tau(x) \in [0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

e a continuidade de g segue pelo lema da colagem. Como $pg = \overline{G}_0$ temos, por hipótese, que existe $G : X \times I \longrightarrow E$ com $pG = \overline{G}$ e $G_0 = g$.

Consideremos os seguintes subespaços:

- $Y = \{(x, t) \in X \times I \mid t \leq \tau'(x)\}$;
- $Z = \{(x, t) \in X \times I \mid t \geq \tau'(x)\}$ e
- $W = \{(x, t) \in X \times I \mid t \leq \tau'(x) \text{ e } \tau(x) > 0\}$.

E tomemos $\widetilde{H} : Y \longrightarrow E$ dada por

$$\widetilde{H}(x, t) = \begin{cases} h(x), & \text{se } \tau(x) \in [0, \frac{1}{2}) \\ H'(x, t), & \text{se } \tau(x) > 0 \end{cases}$$

então $\widetilde{H}$ é contínua em Y : De fato, W é aberto em Y pois $W = (\tau^{-1}(0, 1] \times I) \cap Y$.

$$Y = \left(\tau^{-1} \left[0, \frac{1}{2} \right) \times \{0\} \right) \cup W$$

e dado $(x, 0) \in \left(\tau^{-1} \left[0, \frac{1}{2} \right) \times \{0\} \right) \cap W = \tau^{-1} \left(0, \frac{1}{2} \right) \times \{0\}$ temos que $H'(x, 0) = H'(x, \tau'(x)) = h(x)$. Portanto segue que, pelo lema da colagem, $\widetilde{H}$ é contínua em Y .

Como $G \Big|_Z : Z \longrightarrow E$ também é contínua, segue pelo lema da colagem que a função $H : X \times I \longrightarrow E$ dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} \widetilde{H}(x, t), & \text{se } t \leq \tau'(x) \\ G(x, t - \tau'(x)), & \text{se } \tau'(x) \leq t \end{cases}$$

é contínua e H satisfaz as propriedades desejadas:

- $H_0(x) = \widetilde{H}(x, 0) = h(x)$;
- $H \Big|_{\tau^{-1}(1) \times I} = \widetilde{H} \Big|_{\tau^{-1}(1) \times I} = H' \Big|_{\tau^{-1}(1) \times I}$;
- $pH(x, t) = \begin{cases} p\widetilde{H}(x, t), & \text{se } t \leq \tau'(x) \\ pG(x, t - \tau'(x)), & \text{se } \tau'(x) \leq t \end{cases} = \begin{cases} ph(x), & \text{se } \tau(x) \in [0, \frac{1}{2}] \\ pH'(x, t), & \text{se } \tau(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ se } t \leq \tau'(x) = \overline{G}(x, t - \tau'(x)), \text{ se } \tau'(x) \leq t$
 $\overline{H}(x, t)$

□

De posse da equivalência acima, podemos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 4.2.5. Todo espaço trivial $\wp : B \times Y \longrightarrow B$ possui a CHP: Dadas $\overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ e $g : X \longrightarrow B \times Y$, onde X é um espaço topológico arbitrário, e $\wp g = \overline{G}_0$ então tome $G(x, t) = (\overline{G}(x, t), g_2(x))$, onde g_2 é a segunda coordenada de g . Portanto todo espaço trivial possui a CHP e é, ao mesmo tempo, uma fibração. Veremos que este fato não é uma coincidência.

◇

Exemplo 4.2.6. O espaço $p : B^I \longrightarrow B$ do **exemplo 2.2.11** possui a CHP: Consideremos $\overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ uma homotopia qualquer, onde X é um espaço topológico arbitrário. Suponha a existência de $g : X \longrightarrow B^I$ contínua tal que $pg = \overline{G}_0$. Considerando as funções $\tilde{G} : X \times I \times \{0\} \longrightarrow B$ e $\tilde{g} : X \times \{0\} \times I \longrightarrow B$ dadas por

$$\tilde{G}(x, t, 0) = \overline{G}(x, t) \quad \text{e} \quad \tilde{g}(x, 0, t) = g(x)(t)$$

então $\overline{G}$ e g são contínuas se, e só se, $\tilde{G}$ e $\tilde{g}$ são contínuas (ver (LIMA, 1977), pág 131). Segue do lema da colagem que a função $\tilde{H} : (X \times I \times \{0\}) \cup (X \times \{0\} \times I) \longrightarrow B$ dada por

$$\tilde{H}(x, r, s) = \begin{cases} \tilde{g}(x, r, s), & r = 0 \\ \tilde{G}(x, r, s), & s = 0 \end{cases}$$

é contínua.

$(I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I)$ é um retrato de deformação forte de $I \times I$. Denotemos por R tal retração forte. Então consideremos $H = X \times I \times I \longrightarrow B$ dada por

$$H(x, r, s) = \tilde{H}(x, R(r, s))$$

que é naturalmente contínua.

Tomemos, então, a homotopia $G : X \times I \longrightarrow B^I$ dada por

$$G(x, t) = H(x, t, \cdot)$$

que satisfaz as condições desejadas:

$$pG(x, t) = H(x, t, 0) = \tilde{H}(x, t, 0) = \tilde{G}(x, t, 0) = \overline{G}(x, t)$$

e

$$G(x, 0) = H(x, 0, \cdot) = \tilde{g}(x, 0, \cdot) = g(x)$$

◇

Exemplo 4.2.7. Com a mesma idéia apresentada no exemplo anterior, mostra-se que o espaço $p : B^I \longrightarrow B \times B$ dado por

$$p(w) = (w(0), w(1))$$

também possui a CHP, pois $(\{0\} \times I) \cup (I \times \{0, 1\})$ também é retrato de deformação forte de $I \times I$.

◇

O próximo resultado relaciona a CHP com ser uma fibração:

Proposição 4.2.8. *Um espaço $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração se, e somente se, $p : E \longrightarrow B$ possui a CHP.*

Demonstração. Suficiência: Suponha que p possui a CHP. Tome

$$E_\ell = \left\{ (e, w) \in E \times B^I \mid p(e) = w(0) \right\}$$

Queremos mostrar a existência de uma função $\gamma : E_\ell \rightarrow E^I$ tal que $\tilde{p}\gamma = I_{E_\ell}$. Considere a função $\overline{H} : E_\ell \times I \rightarrow B$ tal que $\overline{H}(e, w, t) = w(t)$ e $\varphi \Big|_{E_\ell} : E_\ell \rightarrow E$ onde $\varphi : E \times B^I \rightarrow E$ é a projeção natural. Então existe $H : E_\ell \times I \rightarrow E$ tal que $pH = \overline{H}$ e $H_0 = \varphi \Big|_{E_\ell}$. Tomemos, então

$$\gamma : E_\ell \rightarrow E^I \text{ dada por } \gamma(e, w)(t) = H(e, w, t)$$

daí temos que $\tilde{p}\gamma = I_{E_\ell}$.

Necessidade: Suponha que $p : E \rightarrow B$ é uma fibração. Então existe $\gamma : E_\ell \rightarrow E^I$ tal que $\gamma(e, w)$ é um caminho em E que começa em e e satisfaz $p\gamma(e, w) = w$.

Dadas $\overline{G} : X \times I \rightarrow B$ e $g : X \rightarrow E$ tais que $pg = \overline{G}_0$. $\forall x \in X$ considere $w_x : I \rightarrow B$ tal que $w_x(t) = \overline{G}(x, t)$. Como $w_x(0) = g(x)$, definimos $G : X \times I \rightarrow E$ tal que $G(x, t) = \gamma(g(x), w_x)(t)$. Então $pG(x, t) = w_x(t) = \overline{G}(x, t)$ e $G(x, 0) = g(x)$. $\square$

Exemplo 4.2.9. Com a caracterização acima, obtemos que os espaços $p : B^I \rightarrow B$ e $p : B^I \rightarrow B \times B$ dos **exemplos 4.2.6 e 4.2.7** são fibrações.

◇

Observação 4.2.10. Uma classe de espaços topológicos importantes são os CW-complexos. Um B -espaço é dito ser uma *fibração de Serre* se possui a CHP para todo CW-complexo. Segue daí que toda fibração é uma fibração de Serre.

Definição 4.2.11. Pensando em B e E como subespaços (de maneira natural) de B^I e E^I , respectivamente, nós dizemos que uma função de levantamento γ é *regular* se caminhos constantes em $p(E)$ são levantados, via γ , a caminhos constantes em E . Ou seja, $\gamma(e, pe) = e$, onde e denota o caminho constante mais natural possível. Uma fibração que admite uma função de levantamento regular é dito uma *Fibração Regular*.

Vemos, assim, que podemos modificar a **proposição 4.2.8** com o seguinte enunciado: Um espaço $p : E \rightarrow B$ é uma fibração regular se, e só se, possui a CHP e dada uma homotopia $\overline{H}$ o levantamento obtido, H , preserva pontos estacionários (ou seja, dado $x \in X$ tal que $\overline{H}(x, t) = \overline{H}(x, 0)$, $\forall t$, então $H(x, t) = H(x, 0)$).

Exemplo 4.2.12. Se $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração e B é um espaço métrico, então p é uma fibração regular. Seja γ uma função de levantamento. Dado $(e, w) \in E_\ell$ definimos d_w como o diâmetro de $w(I)$ e definimos o caminho

$$w'(t) = \begin{cases} w\left(\frac{t}{d_w}\right), & \text{se } t \leq d_w \\ w(1), & \text{se } t \geq d_w \end{cases}$$

Assim, podemos considerar a função de levantamento

$$\gamma'(e, w)(t) = \gamma(e, w')(d_w t)$$

◇

4.3 Localização das Fibrações

Agora vamos em busca da demonstração do *Teorema da Uniformização* provado por Hurewicz em **(HUREWICZ, 1955)**. Esse teorema é um teorema de localização (no sentido já citado anteriormente) das fibrações.

Proposição 4.3.1. *Possuir CHP para um espaço topológico X é hereditária. Como consequência temos que ser uma fibração é uma propriedade hereditária.*

Demonstração. Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço que possui a CHP para X . Seja $\alpha : Y \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Suponha $\overline{G} : X \times I \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow E_\alpha$ com $p_\alpha g = \overline{G}_0$. Portanto g é da forma $g = (g_1, g_2)$ onde $pg_1 = \alpha g_2$. Como $p_\alpha g = g_2$ temos que $\overline{G}_0 = g_2$. Considerando $\alpha \overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ temos que $pg_1 = (\alpha \overline{G})_0$. Portanto, como p possui a CHP para X , segue pela **proposição 4.2.4** que existe $G' : X \times I \longrightarrow E$ com $pG' = \alpha \overline{G}$ e $G'_0 = g_1$. Tomemos $G : X \times I \longrightarrow E_\alpha$ tal que $G(x, t) = (G'(x, t), \overline{G}(x, t))$. Então $p_\alpha G = \overline{G}$ e $G(x, 0) = g(x)$. □

Exemplo 4.3.2. Seja B é um espaço topológico qualquer, não vazio, e b é um ponto fixado de B . Consideremos

$$\mathcal{C}(b) = \left\{ w \in B^I \mid w(0) = b \right\}$$

com a topologia de subespaço. Tomamos $p^b : \mathcal{C}(b) \longrightarrow B$ dado por $p^b(w) = w(1)$. Então podemos pensar em p^b como a restrição do espaço p do **exemplo 4.2.7** ao conjunto $\mathcal{C}(b)$. Devido a hereditariedade da fibração, segue que p^b é uma fibração.

◇

Definiremos o espaço abaixo, onde o usaremos para provar uma caracterização de possuir a CHP para uma homotopia dada. Essa equivalência relaciona a propriedade de extensão de seção com a de levantamento de homotopias.

Dada $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ uma homotopia e $h : X \longrightarrow E$ tal que $ph = \overline{H}_0$, definimos

$$R_h = \left\{ (x, w) \in X \times E^I \mid h(x) = w(0) \text{ e } pw(t) = \overline{H}(x, t) \right\}$$

com a topologia induzida de subespaço. R_h considera pontos de X e caminhos em E , com ponto inicial em $h(x)$, e que levanta o caminho $\overline{H}_x = \overline{H}(x, \cdot)$. Definimos o X -espaço $q_h : R_h \longrightarrow X$ tal que $q_h(x, w) = x$. Com isso podemos enunciar o lema seguinte que relaciona a SEP com a CHP:

Lema 4.3.3. *Um espaço $p : E \longrightarrow B$ possui a CHP para $\overline{H}$ se, e só se, $\forall h : X \longrightarrow E$ com $ph = \overline{H}_0$ temos que q_h possui a SEP.*

Demonstração. “IDA” Suponha que p possua a CHP para $\overline{H}$ e tome $h : X \longrightarrow E$ com $ph = \overline{H}_0$. Então R_h é não vazio pois podemos tomar $\rho : X \longrightarrow I$ a função nula. Com isso existe $\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$ tal que $\widetilde{H}_0 = h$ e $p\widetilde{H} = \overline{H}$. Então $\forall x \in X$, o par $(x, \widetilde{H}(x, \cdot)) \in R_h$.

Entender esse lema fica simples quando entendemos o que é uma seção para q_h : Basicamente é uma função que associa a cada ponto $x \in X$ um caminho w_x em E que se inicia em $h(x)$ e levanta, via p , o caminho $\overline{H}_x$. Assim, se $A \subseteq X$ e (V, τ) um halo para A com $\tau : X \longrightarrow I$ e $V = \tau^{-1}(0, 1]$ então dizer que q_h possui uma seção parcial $s : V \longrightarrow q_h^{-1}(V)$ é o mesmo que afirmar que existe uma função que associa a cada ponto $v \in V$ um caminho w_v em E que se inicia em $h(v)$ e levanta, via p , o caminho $\overline{H}_v$. Ou seja, temos uma homotopia

$$H' : \tau^{-1}(0, 1] \times I \longrightarrow E, \text{ tal que } H'(v, t) = w_v(t)$$

e, devido a p possuir a CHP para $\overline{H}$, existe $H : X \times I \longrightarrow E$ tal que $H|_{A \times I} = H'|_{A \times I}$ e $pH = \overline{H}$. Com isso, tomamos

$$S : X \longrightarrow R_h, \text{ onde } S(x) = (x, H(x, \cdot))$$

que é uma seção para q_h que estende $s|_A$.

“Volta” É tão, ou mais, simples quanto a ida. Por isso faremos com menos detalhes.

Tome $\overline{H}$, h , τ e H' como na definição de CHP. Tomamos

$$s : \tau^{-1}(0, 1] \longrightarrow q_h^{-1}(\tau^{-1}(0, 1])$$

dada por $s(x) = (x, H'(x, \cdot))$. Devido a SEP, existe seção $S : B \longrightarrow R_h$ que estende $s|_{\tau^{-1}(1)}$. Portanto tomamos $H(x, t) = S(x)(t)$. $\square$

O próximo lema vai nos ajudar a mostrar que possuir CHP para uma homotopia é, de certa forma, uma propriedade local.

Lema 4.3.4. *Seja $a < b < c$ números reais e $\overline{H} : X \times [a, c] \longrightarrow B$ uma homotopia. Se $p : E \longrightarrow B$ possui a CHP para $\overline{H}|_{X \times [a, b]}$ e para $\overline{H}|_{X \times [b, c]}$ então p possui CHP para $\overline{H}$.*

Demonstração. Seja $\overline{H}$, h , τ , H' como da definição (apenas trocando I por $[a, c]$). A estratégia para este lema é simples: primeiro levantamos $\overline{H}|_{X \times [a, b]}$ para uma função $F|_{X \times [a, b]}$, que é onde temos que obedecer a restrição $F_0 = h$. Usando o caminho final F_b , estendemos $\overline{H}|_{X \times [b, c]}$ a uma homotopia $G|_{X \times [b, c]}$ de maneira que $G_b = F_b$.

Começamos definindo $\overline{F} = \overline{H}|_{X \times [a, b]}$, $\tau_1(x) = \min\{b, \tau(x)\}$, $F' = H'|_{\tau^{-1}(a, b) \times [a, b]}$. Por hipótese, existe $F : X \times [a, b] \longrightarrow E$ tal que $F|_{\tau_1^{-1}(b) \times [a, b]} = F'|_{\tau_1^{-1}(b) \times [a, b]}$, $pF = \overline{F}$ e $F(x, 0) = h(x)$.

Tomando $\overline{G} = \overline{H}|_{X \times [b, c]}$, $g(x) = F(x, b)$, $\tau_2(x) = \max\{b, \tau(x)\}$ e $G' = H'|_{\tau^{-1}(b, c) \times [b, c]}$ nós temos garantida a existência de $G : X \times [b, c] \longrightarrow E$ com $G|_{\tau_2^{-1}(c) \times [b, c]} = G'|_{\tau_2^{-1}(c) \times [b, c]}$ e $pG = \overline{G}$. Definindo H como a colagem de F e G , obtemos o levantamento desejado de $\overline{H}$. $\square$

Teorema 4.3.5. *Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço sobre B e $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ uma homotopia. Suponha que exista uma cobertura normal $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X e para cada $\lambda \in \Lambda$ existam números reais $t_0^\lambda = 0 < t_1^\lambda < \dots < t_{r(\lambda)}^\lambda = 1$ tal que p possui a CHP para $\overline{H}|_{V_\lambda \times [t_i^\lambda, t_{i+1}^\lambda]}$, onde $\lambda \in \Lambda$ e $i = 0, \dots, r(\lambda) - 1$. Então p possui a CHP para $\overline{H}$.*

Demonstração. Pelo lema anterior p tem a CHP para $\overline{H}|_{V_\lambda \times I}$. Tome $h : X \longrightarrow E$ tal que $ph = \overline{H}_0$. Pelo **lema 4.3.3**, $q_h : R_h \longrightarrow X$ possui a SEP sobre cada V_λ . E como $\{V_\lambda\}$ forma uma cobertura normal para X , temos que q_h possui a SEP, devido ao teorema de extensão de seção. Portanto, também pelo **lema 4.3.3**, p possui a CHP para $\overline{H}$. $\square$

Teorema 4.3.6. *[Teorema de Uniformização de Hurewicz ou Localização das Fibrações] Um espaço $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração sobre cada V_λ de uma cobertura normal $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de B (ou seja p_{V_λ} é uma fibração para todo λ) se, e só se, p é uma fibração. Em particular, se B é paracompacto então p é uma fibração se, e somente se, p é localmente uma fibração.*

Demonstração. A ida decorre da hereditariedade das fibrações. Vamos à recíproca:

Suponha que $\{\pi_\lambda : B \longrightarrow I\}_{\lambda \in \Lambda}$ é a partição da unidade localmente finita onde vamos assumir que $V_\lambda = \pi_\lambda^{-1}(0, 1]$, $\forall \lambda$. Potanto $\{V_\lambda = \pi_\lambda^{-1}(0, 1]\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura

aberta localmente finita. Tome $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ uma homotopia arbitrária. Nosso objetivo é mostrar que p possui a CHP para $\overline{H}$, pois, devido a arbitrariedade da homotopia e do espaço X , obteremos o resultado.

Para cada r -tupla de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ definimos a função $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} : X \longrightarrow I$ dada por

$$\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x) = \prod_{i=1}^r \min \left\{ \pi_{\lambda_i} \overline{H}(x, t) \mid t \in \left[\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r} \right] \right\}$$

o que implica que $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x) \neq 0 \iff \overline{H} \left(\{x\} \times \left[\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r} \right] \right) \subseteq V_{\lambda_i}, \forall i = 1, \dots, r$. Definamos

$$W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} = \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^{-1}(0, 1]$$

o fato de p ser uma fibração sobre cada V_λ implica que p possui CHP para $\overline{H}|_{W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \times \left[\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r} \right]}$. Com isso, se mostrarmos que a coleção

$$\mathcal{A} = \left\{ W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \mid r \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda \right\}$$

é uma cobertura normal para X obteremos, pelo teorema anterior, que p possui CHP para $\overline{H}$ (é nesse último passo que está escondido o teorema de extensão de seção).

Tome $x \in X$. Então existe vizinhança aberta U_x de x e um número natural r_x (devido ao *número de Lebesgue*) tais que

- (a) Para cada $i = 1, \dots, r_x$, $U_x \times \left[\frac{i-1}{r_x}, \frac{i}{r_x} \right] \subseteq \overline{H}^{-1}(V_{\gamma_{x,i}})$ para algum $\gamma_{x,i} \in \Lambda$;
- (b) $U_x \times I$ intersecta apenas um número finito de conjuntos $\overline{H}^{-1}(V_\lambda)$, com $\lambda \in \Lambda$.

Por (a) concluímos que $\mathcal{A}$ é uma cobertura para X pois, seguindo as notações acima, dado $x \in X$ então $x \in \phi_{\gamma_{x,1}, \dots, \gamma_{x,r}}^{-1}(0, 1] = W$.

Por (b) concluímos que, fixado r , a subcoleção

$$\mathcal{A}_r = \{ W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda \}$$

é localmente finita: De fato, suponha que $U = W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \cap U_x \neq \emptyset$. Então $U \times \left[\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r} \right] \subseteq \overline{H}^{-1}(V_{\lambda_i})$ para cada $i = 1, \dots, r$. O que implica que $(U_x \times I) \cap \overline{H}^{-1}(V_{\lambda_i}) \neq \emptyset$. Então, por (b), não pode haver infinitos $W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ que intersectam U_x .

As verificações de (a) e (b) são simples. Vamos a elas:

Fixe $x \in X$. Para cada $t \in I$ existe vizinhança aberta V_t de $\overline{H}(x, t)$ tal que V_t intersecta apenas um número finito de abertos V_λ . O que implica que cada $\overline{H}^{-1}(V_t)$, com $t \in I$, intersecta apenas um número finito de abertos do tipo $\overline{H}^{-1}(V_\lambda)$.

A coleção $\{ \overline{H}^{-1}(V_t) \}_{t \in I}$ é uma cobertura aberta de $\{x\} \times I$. Definindo $\wp_2 : X \times I \longrightarrow I$ como a projeção sobre a segunda coordenada, e usando o fato que é uma aplicação aberta, obtemos que $\{ \wp_2(\overline{H}^{-1}(V_t)) \}_{t \in I}$ é uma cobertura aberta de I . Tomemos δ'_x o número de Lebesgue da cobertura $\{ \wp_2(\overline{H}^{-1}(V_t)) \}$. Por argumentos análogos $\{ \wp_2(\overline{H}^{-1}(V_\lambda)) \}_{\lambda \in \Lambda}$

também é uma cobertura aberta para I , e tomemos δ''_x o número de Lebesgue desta cobertura.

Tomando $\delta_x = \min \{\delta'_x, \delta''_x\}$ e r_x um número natural de forma que $\frac{1}{r_x} < \delta_x$ obtemos que para todo $i = 1, \dots, r_x$,

$$\left[\frac{i-1}{r_x}, \frac{i}{r_x} \right] \subseteq \wp_2 \left(\overline{H}^{-1}(V_{t_i}) \right) \cap \wp_2 \left(\overline{H}^{-1}(V_{\lambda_i}) \right)$$

para certos $t_i \in I$ e $\lambda_i \in \Lambda$. Com isso

$$\{x\} \times I \subseteq \bigcup_{i=1}^{r_x} \left(\overline{H}^{-1}(V_{t_i}) \cap \overline{H}^{-1}(V_{\lambda_i}) \right) = \bigcup_{i=1}^{r_x} \overline{H}^{-1}(V_{t_i} \cap V_{\lambda_i})$$

Tomando $\wp_1 : X \times I \longrightarrow X$ a projeção e $U_x = \bigcap_{i=1}^{r_x} \wp_1 \left(\overline{H}^{-1}(V_{t_i} \cap V_{\lambda_i}) \right)$ que é uma vizinhança aberta de x tal que:

- $\forall i = 1, \dots, r_x, U_x \times \left[\frac{i-1}{r_x}, \frac{i}{r_x} \right] \subseteq \overline{H}^{-1}(V_{\lambda_i});$
- Apenas um número finito de conjuntos da forma $\overline{H}^{-1}(V_{\lambda})$ intersectam $U_x \times \left[\frac{i-1}{r_x}, \frac{i}{r_x} \right]$, pois $U_x \times \left[\frac{i-1}{r_x}, \frac{i}{r_x} \right] \subseteq \overline{H}^{-1}(V_{t_i})$. Logo apenas um número finito de conjuntos da forma $\overline{H}^{-1}(V_{\lambda})$ intersectam $U_x \times I$.

Porém não garantimos que a coleção $\mathcal{A}$ seja localmente finita: Fixado $r \in \mathbb{N}$, apenas um número finito de abertos do tipo $W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ intersectam U_x , mas variando r não garantimos mais essa finitude. Mas existe um refinamento dela que será localmente finita. Vamos a construção desse refinamento.

Para cada natural r , denotemos $\psi_r = \sum_{\substack{i < r \\ \lambda_1, \dots, \lambda_i \in \Lambda}} \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_i} : X \longrightarrow I$ e $\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} : X \longrightarrow I$

onde

$$\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x) = \max \{0, \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x) - r\psi_r(x)\}$$

Dado $x \in X$, tomamos $k_x \in \mathbb{N}$ mínimo tal que existe k_x -tupla $\lambda_1, \dots, \lambda_{k_x} \in \Lambda$ onde $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k_x}}(x) \neq 0$ (diremos que $\lambda_1, \dots, \lambda_{k_x}$ é uma k_x -tupla minimal relacionada a k_x). Obviamente tal k_x e tal k_x -tupla minimal existem devido a coleção $\mathcal{A}$ ser uma cobertura para X . Daí $\psi_{k_x}(x) = 0$ e portanto, para essa k_x -tupla, $\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k_x}}(x) = \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k_x}}(x)$. Assim

$$\mathcal{B} = \left\{ \varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k_x}}^{-1}(0, 1] \mid x \in X, \text{ e } \lambda_1, \dots, \lambda_{k_x} \text{ é a } k_x\text{-tupla minimal relacionada ao natural } k_x \right\}$$

forma uma cobertura para X . Mais ainda, fixado x , se tomarmos $N > k_x$ suficientemente grande de maneira que $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k_x}}(x) > \frac{1}{N}$, então, pela definição de ψ_N , temos que $\psi_N(x) > \frac{1}{N}$ implicando que $N\psi_N(x) > 1$. Pela continuidade, existe vizinhança aberta V_x de x tal que $N\psi_N(y) > 1$ para todo $y \in V_x$. Nessa vizinhança $\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(y) = 0, \forall m \geq N$, o que mostra que $\mathcal{B}$ é localmente finita.

Com isso, tomamos a coleção

$$\Delta = \left\{ \lambda_1, \dots, \lambda_{k_x} \mid x \in X \text{ e } \lambda_1, \dots, \lambda_{k_x} \text{ é a } k_x\text{-tupla minimal relacionada ao natural } k_x \right\}$$

temos que a relação

$$\Phi = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

define uma função contínua e positiva ($\Phi(x) > 0, \forall x \in X$). Então, para cada $\alpha \in \Delta$, consideramos as funções $\pi_\alpha : X \longrightarrow I$ dadas por

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\varphi_\alpha(x)}{\Phi(x)}$$

que satisfaz $\pi_\alpha^{-1}(0, 1] = \varphi_\alpha^{-1}(0, 1]$ e portanto $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ é a partição da unidade localmente finita subordinada a cobertura $\mathcal{A}$. Com isso, por definição, $\mathcal{A}$ é uma cobertura normal para X . $\square$

Observação 4.3.7. O mesmo resultado, com as modificações naturais, é válido para fibrações regulares (Ver (HUREWICZ, 1955), pág. 959).

O corolário abaixo segue da demonstração feita acima:

Corolário 4.3.8. *Se $p : E \longrightarrow B$ é trivial sobre cada V_λ de uma cobertura aberta $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de B então p possui CHP para todo espaço paracompacto X .*

Demonstração. A cobertura aberta $\mathcal{A} = \left\{ W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \mid r \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda \right\}$ de X será normal, já que X é paracompacto. $\square$

Exemplo 4.3.9. Vimos no **exemplo 4.1.2** que todo espaço trivial é uma fibração. Com isso, todo espaço localmente trivial é uma fibração devido ao Teorema de Uniformização. Mas a recíproca é falsa: O espaço p_1 do **exemplo 4.1.2.b** é uma fibração que não é localmente trivial nem localmente B -homeomorfo a um espaço trivial.

$\diamond$

Exemplo 4.3.10. TODO G -FIBRADO NORMAL É UMA FIBRAÇÃO: De fato um G -fibrado normal $p : E \longrightarrow B$ é trivial sobre uma cobertura normal de B , portanto é uma fibração sobre cada elemento dessa cobertura normal (já que espaços triviais são fibrações) e pelo Teorema da Uniformização de Hurewicz segue que p é uma fibração. Como consequência temos que o Toro Retorcido, Garrafa de Klein e a Faixa de Möbius são fibrações pois seus espaços base são paracompactos (ver o **exemplo 3.2.8**).

$\diamond$

5 Fibrações Fracas e a WCHP

Para muitos resultados destacáveis não é necessário que um espaço $p : E \longrightarrow B$ seja uma fibração. É suficiente que ele possua a *propriedade fraca de levantamento de homotopia* (*Weak Covering Homotopy Property - WCHP*). Chamaremos um espaço que possui a WCHP de *fibração fraca* pois é um enfraquecimento nas hipóteses de fibração. Nessa seção mostraremos que muitas das propriedades das fibrações se preservam quando olhamos para fibrações fracas (inclusive a localização desses espaços) e que essas últimas são preservadas por B -equivalências, diferentemente das fibrações.

Mesmo sob esse enfraquecimento nas hipóteses de fibrações somos capaz de estudar tais espaços do ponto de vista da teoria da homotopia de maneira satisfatória a ponto de, sob hipóteses pouco restritivas, caracterizar esses espaços pelo comportamento local. O que nos dá uma caracterização local das fibrações como consequência.

Lembre-se que estamos supondo que p é sobrejetiva. Dada uma homotopia $H : X \times I \longrightarrow B$ denotaremos por $\widehat{H} : X \times [-1, 1] \longrightarrow B$ a função $\widehat{H}(x, t) = H(x, \max\{t, 0\})$. Continuaremos a denotar por $I = [0, 1]$ e adotaremos durante este capítulo a notação $J = [-1, 1]$ e $L = [-1, 2]$. Em todos os casos citados podemos trocar I por $[b, c]$, J por $[a, c]$ e L por $[a, d]$ onde $-\infty < a < b < c < d < \infty$.

5.1 Propriedade Fraca de Levantamento de Homotopia (WCHP)

Definição 5.1.1. Dirtemos que um espaço $p : E \longrightarrow B$ possui a *propriedade fraca de levantamento de homotopias* (WCHP) para uma homotopia $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ se possui CHP para $\widehat{H} : X \times J \longrightarrow B$ onde $\widehat{H}(x, t) = \overline{H}(x, \max\{t, 0\})$. Ou seja, dada $h : X \longrightarrow E$ com $ph = \widehat{H}_{-1}$ e dadas $\tau : X \longrightarrow J$ e $H' : \tau^{-1}(-1, 1] \times J \longrightarrow E$ com $pH' = \widehat{H}|_{\tau^{-1}(-1, 1] \times J}$ e $H'(x, -1) = h(x)$, $\forall x \in \tau^{-1}(-1, 1]$, então existe $H : X \times J \longrightarrow E$ com $pH = \widehat{H}$, $H|_{\tau^{-1}(1) \times J} = H'|_{\tau^{-1}(1) \times J}$.

A homotopia H que levanta $\widehat{H}$ é dita *levantamento fraco* da homotopia $\overline{H}$.

Diremos, como no caso da CHP, que p possui a WCHP para um espaço topológico X se possui a WCHP para toda homotopia $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$. E que p possui a WCHP se possui a WCHP para todo espaço X . Neste último caso, para manter a coerência com a nomenclatura, diremos que um espaço que possui a WCHP é uma *fibração fraca*.

Observação 5.1.2. Intuitivamente falando, um espaço possui a WCHP se possui a propriedade de levantamentos de homotopias (CHP) para as homotopias que são inicialmente

estacionárias (i.e. possui a CHP para todas as homotopias $\overline{H} : X \times [a, c] \longrightarrow B$ que são estacionárias em $t \in [a, b]$, onde $a < b < c$). O nosso interesse está em espaços que possuam a WCHP para uma classes de espaços topológicos, assim como no caso da CHP. Por isso será importante a seguinte caracterização:

Proposição 5.1.3. Um espaço $p : E \longrightarrow B$ possui WCHP para X se, e só se, dada qualquer homotopia $\overline{G} : X \times [0, 1] \longrightarrow B$ e dada $g : X \longrightarrow E$ com $pg = \overline{G}_0$ então existe $G : X \times [-1, 1] \longrightarrow E$ tal que $pG = \widehat{\overline{G}}$ e $G_{-1} = g$.

Demonstração. A demonstração é idêntica a demonstração da **proposição 4.2.4**, modificando (com a mesma notação usada em **4.2.4**):

$$\tau'(x) = \max \{-1, 2\tau(x) - 1\}$$

assim como $g : X \longrightarrow E$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} H'(x, \tau'(x)), & \text{se } \tau(x) > -1 \\ h(x), & \text{se } \tau(x) \in [-1, 0) \end{cases}$$

Consideremos o seguinte subespaço:

$$\cdot W = \{(x, t) \in X \times I \mid t \leq \tau'(x) \text{ e } \tau(x) > -1\}.$$

E tomemos $\widetilde{H} : Y \longrightarrow E$ dada por

$$\widetilde{H}(x, t) = \begin{cases} h(x), & \text{se } \tau(x) \in [-1, 0) \\ H'(x, t), & \text{se } \tau(x) > -1 \end{cases}$$

□

Obviamente toda fibração é uma fibração fraca, mas a recíproca é falsa:

Exemplo 5.1.4. O espaço $p_2 : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ do **exemplo 2.1.18** não é uma fibração, como vimos. Mas é uma fibração fraca, como é simples de se verificar: Seja $\overline{H} : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma homotopia e $h : X \longrightarrow E_2$ com $h_1 = ph = \overline{H}_0$. Então h é da forma $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ e podemos considerar $H : X \times [-1, 1] \longrightarrow E_2$ dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} (h_1(x), -th_2(x)), & t \in [-1, 0] \\ (\overline{H}(x, t), 0), & t \in [0, 1] \end{cases}$$

a continuidade de H decorre do lema da colagem. $H_{-1} = h$ e $pH = \widehat{\overline{H}}$. Pela proposição anterior segue, da arbitrariedade da homotopia e da escolha do espaço X , que p_2 é uma fibração fraca.

◇

Intuitivamente falando, dizer que p possui WCHP para X significa que dada uma homotopia $\overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ cujo função inicial $\overline{G}_0$ se levanta, via p , a uma função $g : X \longrightarrow E$ então existe uma homotopia $G : X \times I \longrightarrow E$ que levanta $\overline{G}$ e existe uma homotopia $\Theta : X \times I \longrightarrow E$ com $\Theta_0 = g$, $\Theta_1 = G_0$ e, fixado $x \in X$, $\Theta_x : I \longrightarrow E$ é um caminho na fibra $p^{-1}(\overline{G}(x, 0))$ ligando $g(x)$ a $G(x, 0)$. Seguindo a **definição 3.3.3** denotamos esse último fato escrevendo $g \simeq_B G_0$. Com isso fica evidente a seguinte equivalência:

Proposição 5.1.5. $p : E \longrightarrow B$ possui a WCHP para X se, e só se, dadas $\overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ e $g : X \longrightarrow E$ tal que $pg = \overline{G}_0$, então existe $G : X \times I \longrightarrow E$ tal que $pG = \overline{G}$ e $G_0 \simeq_B g$.

Demonstração. Suponha que p possui a WCHP para X . Pela **proposição 5.1.3** existe $G' : X \times J \longrightarrow E$ tal que $pG' = \widehat{\overline{G}}$ e $G'_{-1} = g$. Tomemos $G = G' \Big|_{X \times I}$ e $G' \Big|_{X \times [-1, 0]}$ é a homotopia desejada ligando G_0 a $g(x)$.

Reciprocamente, suponha $\overline{G} : X \times I \longrightarrow B$ e $g : X \longrightarrow E$ tal que $pg = \overline{G}_0$. Então existe $G : X \times I \longrightarrow E$ tal que $pG = \overline{G}$ e $\Theta : g \simeq_B G_0$ onde $\Theta_0 = g$ e $\Theta_1 = G_0$. Tomemos $G' : X \times J \longrightarrow E$ tal que

$$G'(x, t) = \begin{cases} \Theta(x, t+1), & t \in [-1, 0] \\ G(x, t), & t \in [0, 1] \end{cases}$$

então $pG' = \widehat{\overline{G}}$ e $G'_{-1} = g$. Logo, pela **proposição 5.1.3**, p possui a WCHP para X . □

Proposição 5.1.6. Possuir WCHP para um espaço topológico X é hereditária. Como consequência ser uma fibração fraca (possuir a WCHP) é uma propriedade hereditária.

Demonstração. É uma simples adaptação da **proposição 4.3.1**. □

Um fator de nosso interesse na WCHP é que ela é preservada por B -equivalências, ao contrário CHP:

Exemplo 5.1.7. Os espaços $p_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $p_2 : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ do **exemplo 2.2.5** são B -equivalentes. No entanto, p_1 possui a CHP, ou seja é uma fibração, enquanto que p_2 não possui, como já vimos. Mas ambos são fibrações fraca.

◇

Proposição 5.1.8. Se $p : E \longrightarrow B$ é dominada por $p' : E' \longrightarrow B$ e p' é uma fibração fraca (mais geralmente se possui WCHP para X) então p é uma fibração fraca (possui WCHP para X).

Demonstração. A maneira mais natural de atacar tal problema é supor $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ uma homotopia. Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $f^- : E' \longrightarrow E$ B -aplicações com $f^- f \underset{B}{\simeq} I_E$. Seja $h : X \longrightarrow E$ tal que $ph = \overline{H}_0$. Tomando $h' = fh$ temos que $p'h' = p'fh = ph$ e como p' possui a WCHP para X segue da **proposição 5.1.5** que existe $H' : X \times I \longrightarrow E'$ tal que $p'H' = \overline{H}$ e $H'_0 \underset{B}{\simeq} h'$. Tomando $H = f^- H'$ obtemos que $pH = \overline{H}$ e $H_0 \underset{B}{\simeq} f^- h' = f^- fh \underset{B}{\simeq} h$. Portanto p é fibração fraca. $\square$

O resultado acima pode ser generalizado, mas a demonstração deixa de ser tão natural quanto a anterior:

Proposição 5.1.9. *Se $p : E \longrightarrow B$ é dominada por $p' : E' \longrightarrow B$ e p' possui WCHP para $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ então p possui WCHP para $\overline{H}$.*

Demonstração. Começamos supondo a existência de $h : X \longrightarrow E$ tal que $ph = \widehat{H}_{-1}$, $\tau : X \longrightarrow J = [-1, 1]$ e $H' : \tau^{-1}(-1, 1] \times J \longrightarrow E$ satisfazendo $H'_{-1}(x) = h(x)$, $\forall x \in \tau^{-1}(-1, 1]$, e

$$pH' = H \Big|_{\tau^{-1}(-1, 1] \times J}$$

Considere $\tau' : X \longrightarrow [0, 1] \subseteq J$ tal que $\tau'(x) = \max\{0, \tau(x)\}$ e $H'' : \tau^{-1}(-1, 1] \times J \longrightarrow E$ definida por

$$H''(x, t) = \begin{cases} H'(x, t), & \text{se } t \geq 0 \\ H'\left(x, \frac{2t}{1+\tau'(x)}\right), & \text{se } -\frac{(1+\tau'(x))}{2} \leq t \leq 0 \\ h(x), & \text{se } -1 \leq t \leq -\frac{(1+\tau'(x))}{2} \end{cases}$$

é contínua, pelo lema da colagem, e satisfaz $pH'' = \widehat{H}$, $H''(x, -1) = h(x)$. A diferença principal entre H' e H'' é que $H''(x, t) = h(x)$, $\forall t \leq -\frac{(1+\tau'(x))}{2}$, enquanto que, para H' , vale que, para $t \leq 0$, $H'(x, t) \in p^{-1}\left(\widehat{H}_0(x)\right)$ mas não precisa ser constante com relação a t .

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E$ B -aplicações com $\Theta : I_E \underset{B}{\simeq} gf$ onde $\Theta_{-1} = I_E$ e $\Theta_1 = gf$. Tomamos $\tau'' : X \longrightarrow J$ onde $\tau''(x) = \min\{1, 4\tau(x) + 3\}$. Então $\tau''^{-1}(-1, 1] = \tau^{-1}(-1, 1]$, $\tau''^{-1}(1) = \tau^{-1}\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ e

$$pH'' \Big|_{\tau''^{-1}(-1, 1] \times J} = pH'' \Big|_{\tau^{-1}(-1, 1] \times J} = \widehat{H} \Big|_{\tau''^{-1}(-1, 1] \times J}$$

Considerando as funções fh e fH'' temos, pelo fato de p' possui a WCHP para $\overline{H}$, na existência de uma homotopia $G : X \times J \longrightarrow E'$ tal que $p'G = \widehat{H}$,

$$G \Big|_{\tau''^{-1}(1) \times J} = G \Big|_{\tau^{-1}\left[-\frac{1}{2}, 1\right] \times J} = (fH'') \Big|_{\tau^{-1}\left[-\frac{1}{2}, 1\right] \times J}$$

e $G_{-1} = fh$. Então considerando $gG : X \times J \longrightarrow E$ temos que

$$p(gG) = p'G = \widehat{H}$$

mas $(gG)_{-1} = gfh$ é apenas homotópica a h , mas não necessariamente igual.

Para corrigir esse problema, consideramos a homotopia $F : X \times J \longrightarrow E$ dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} \Theta(h(x), 2t + 1), & t \in [-1, 0] \\ gG(x, 2t - 1), & t \in [0, 1] \end{cases}$$

então $pF = \widehat{H}$ e $F_{-1} = h$, mas $F|_{\tau^{-1}(1) \times J}$ pode não coincidir com $H'|_{\tau^{-1}(1) \times J}$.

Como queremos que $H(x, -1) = h(x)$ e no caso de $\tau(x) = 1$ queremos que $H(x, t) = H'(x, t) = H''(x, t)$, uma tentativa natural de construção do levantamento fraco H passa por considerar uma divisão do retângulo $J \times J$ em domínios de funções de maneira que para $\tau(x) = 1$ satisfaça $H(x, t) = H''(x, t) = \Theta(H''(x, t), -1)$ e que $H(x, -1) = h(x) = \Theta(h(x), -1)$ e depois usar gG para colar de maneira adequada, levando em conta que:

- i) Se $t = -\frac{(1+\tau(x))}{2}$, $H''(x, t) = h(x)$, (e vamos usar isso para colar parte 2 com a parte 3 da figura abaixo);
- ii) $\Theta(h(x), 1) = gG(x, -1)$, (colar 1 com a parte 3);
- iii) Se $\tau(x) \geq 0$, $\Theta(H''(x, t), 1) = gfH''(x, t) = gG(x, t)$ (colar 1 com 2)

Então, torna-se natural a escolha da homotopia $H : X \times J \longrightarrow E$ tal que

$$H(x, t) = \begin{cases} \Theta(H''(x, t), -2\tau(x) + 1), & \text{se } \tau(x) \geq 0 \text{ e } t \geq \frac{-(1+\tau(x))}{2} \\ gG(x, t), & t \geq -\frac{1}{2} \text{ e } \tau(x) \leq 0 \\ \Theta(h(x), 4t + 3), & \text{se } t \leq -\frac{1}{2} \text{ e } t \leq \frac{-(1+\tau(x))}{2} \end{cases}$$

que é o levantamento fraco desejado:

BOA DEFINIÇÃO: Se $\tau(x) = 0$ e $t \geq -\frac{1}{2}$ então $\Theta(H''(x, t), 1) = gfH''(x, t) = gG(x, t)$. No caso de $t = -\frac{1}{2}$ e $\tau(x) \in [-\frac{1}{2}, 0]$ temos que $\tau'(x) = 0$ e

$$gG\left(x, -\frac{1}{2}\right) = gfH''\left(x, -\frac{1}{2}\right) = gfh(x) = \Theta(h(x), 1)$$

$$\cdot H|_{\tau^{-1}(1) \times J}(x, t) = \Theta(H''(x, t), -1) = H''(x, t) = H'(x, t), \text{ pois } \tau'(x) = 1.$$

$$\cdot pH(x, t) = \begin{cases} pH''(x, t) = \widehat{H}(x, t), & \text{se } \tau(x) \geq 0 \text{ e } t \geq \frac{-(1+\tau(x))}{2} \\ pgG(x, t) = p'G(x, t) = \widehat{H}(x, t), & t \geq -\frac{1}{2} \text{ e } \tau(x) \leq 0 \\ ph(x) = \widehat{H}(x, t), & \text{se } t \leq -\frac{1}{2} \text{ e } t \leq \frac{-(1+\tau(x))}{2} \end{cases} = \widehat{H}(x, t) \quad \square$$

Como consequência da proposição acima, além da **proposição 5.1.8**, temos o corolário seguinte que nos dá a principal vantagem da WCHP em cima da CHP: a WCHP é preservada por B -equivalências.

Corolário 5.1.10. *Possuir a WCHP para $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ é uma propriedade preservada por B -equivalências, assim como possuir a WCHP para X .*

5.2 Localização das Fibrações Fracas

Depois de destacarmos as principais diferenças entre a CHP e WCHP, vamos às semelhanças. Ou seja, vamos provar resultados para WCHP que são intuídos por resultados para CHP e o nosso objetivo final é provar o *Teorema de Localização das Fibrações Fracas* (que é o análogo do Teorema da Uniformização). Para isso, vamos precisar das seguintes notações:

Fixemos a função $\varphi : [-1, 2] \times [0, 1] \longrightarrow [-1, 2]$ tal que

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1, & \text{se } t_1 \leq 0 \\ 0, & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1 - t_2 \\ 2\left(\frac{t_1 + t_2 - 1}{t_2 + 1}\right), & t_1 \geq 1 - t_2 \end{cases}$$

então $\varphi(t_1, 0)$ mapeia identicamente $[-1, 0]$ em $[-1, 0]$, contrai $[0, 1]$ ao ponto $\{0\}$ e manda $[1, 2]$ de maneira afim em $[0, 2]$. Seja $\hat{\varphi} : [-1, 2] \times [-1, 1] \longrightarrow [-1, 2]$ dada por $\hat{\varphi}(t_1, t_2) = \varphi(t_1, \max\{0, t_2\})$.

Considere também a função $\psi : [-1, 2] \longrightarrow [-1, 2] \times [-1, 1]$ dada por

$$\psi(t) = (t, \min\{1, 2t + 1\})$$

nos dando que $\hat{\varphi}\psi = I_{[-1, 2]}$.

Essas duas funções acima nos ajudarão na construção de novas homotopias a partir de homotopias dadas: Sejam $H : X \times [-1, 2] \longrightarrow B$ e $G : X \times [-1, 2] \times [-1, 1] \longrightarrow B$ homotopias (aqui o papel de B é coadjuvante) definimos, então, as funções induzidas $H^{\hat{\varphi}} : X \times [-1, 2] \times [-1, 1] \longrightarrow B$ e $G^{\psi} : X \times [-1, 2] \longrightarrow B$ dadas por

$$H^{\hat{\varphi}}(x, t_1, t_2) = H(x, \hat{\varphi}(t_1, t_2)) \quad \text{e} \quad G^{\psi}(x, t) = G(x, \psi(t))$$

e se observa que vale as propriedades:

- i) Se $pF = H$ então $pF^{\hat{\varphi}} = H^{\hat{\varphi}}$;
- ii) Se $pF = G$ então $pF^{\psi} = G^{\psi}$;
- iii) $H^{\hat{\varphi}\psi} = H$;

Denotamos $H^{\varphi} = H^{\hat{\varphi}} \Big|_{X \times [-1, 2] \times [0, 1]}$

Lema 5.2.1. *Sejam $\overline{H} : X \times [-1, 2] \longrightarrow B$ e $\widetilde{H} : X \times [-1, 0] \longrightarrow E$ homotopias tais que $p\widetilde{H} = \overline{H} \Big|_{X \times [-1, 0]}$. Considere também $\tau : X \longrightarrow [-1, 2]$ e $H' : \tau^{-1}(-1, 2] \times [-1, 2] \longrightarrow E$ com $pH' = \overline{H} \Big|_{\tau^{-1}(-1, 2] \times [-1, 2]}$ e $H' \Big|_{\tau^{-1}(-1, 2] \times [-1, 0]} = \widetilde{H} \Big|_{\tau^{-1}(-1, 2] \times [-1, 0]}$. Se p possui a WCHP para $\overline{H} \Big|_{X \times [0, 2]}$ e para $\overline{H}^{\varphi}$, então existe $H : X \times [-1, 2] \longrightarrow E$ com $pH = \overline{H}$, $H(x, -1) = \widetilde{H}(x, -1)$ e $H \Big|_{\tau^{-1}(2) \times [-1, 2]} = H' \Big|_{\tau^{-1}(2) \times [-1, 2]}$.*

Demonstração. Adotemos as seguintes notações: $\overline{G} = \overline{H}|_{X \times [0,2]}$, $G' = H'|_{\tau^{-1}(-1,2] \times [0,2]}$, $\widehat{G}(x, t) = \overline{G}(x, \max\{0, t\})$ e $\widehat{G}'(x, t) = G'(x, \max\{0, t\})$. Além disso, considere $\tau'' : X \rightarrow [-1, 2]$ dada por

$$\tau''(x) = \min \left\{ 2, \frac{3\tau(x) + 1}{2} \right\}$$

dessa forma $\tau''^{-1}(-1, 2] = \tau^{-1}(-1, 2]$, $\tau''^{-1}(2) = \tau''^{-1}[1, 2]$,

$$p\widehat{G}' = \overline{G}|_{\tau^{-1}(-1,2] \times [0,2]},$$

$$p\widetilde{H}_0 = \overline{G}_0 = \widehat{G}_{-1} \text{ e } \widehat{G}'(x, -1) = \widetilde{H}_0(x).$$

Como p , por hipótese, possui a WCHP para $\overline{G}$, então existe $H'' : X \times [-1, 2] \rightarrow E$ tal que $pH'' = \widehat{G}$, $H''|_{\tau''^{-1}(2) \times [-1,2]} = \widehat{G}'|_{\tau''^{-1}(2) \times [-1,2]}$ e $H''_{-1} = \widetilde{H}_0$.

Pelo fato de $pH'|_{\tau^{-1}(-1,2] \times [-1,2]} = \overline{H}|_{\tau^{-1}(-1,2] \times [-1,2]}$ e $p\widetilde{H}_0 = \overline{H}_0$ temos, pela propriedade (i) acima, que $pH'^{\widehat{\varphi}}|_{\tau^{-1}(-1,2] \times [-1,2] \times [-1,1]} = \overline{H}^{\widehat{\varphi}}|_{\tau^{-1}(-1,2] \times [-1,2] \times [-1,1]}$ e $p\widetilde{H}_0^{\widehat{\varphi}} = \overline{H}_0^{\widehat{\varphi}}$. Tomando $\tau' : X \times [-1, 2] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $\tau'(x, t) = \min\{1, \tau(x)\}$ temos $\tau'^{-1}(1) = \tau^{-1}[1, 2] \times [-1, 2]$ e $\tau'^{-1}(-1, 1) = \tau^{-1}(-1, 2] \times [-1, 2]$.

Como p possui a WCHP para $\overline{H}^{\widehat{\varphi}}$ (ou seja possui a CHP para $\widehat{H}^{\widehat{\varphi}} = \overline{H}^{\widehat{\varphi}}$) nós podemos encontrar $G : X \times [-1, 2] \times [-1, 1] \rightarrow E$ com $pG = \widehat{H}^{\widehat{\varphi}}$,

$$G(x, t_1, -1) = \begin{cases} \widetilde{H}(x, t_1), & \text{se } t_1 \leq 0 \\ H''(x, t_1 - 1), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1 \\ H''(x, 2t_1 - 2), & \text{se } 1 \leq t_1 \leq 2 \end{cases}$$

e se $\tau(x) = 2$ então $G(x, t_1, t_2) = H'^{\widehat{\varphi}}(x, t_1, t_2)$. Note que se $\tau(x) \geq 1$ então

$$H'^{\widehat{\varphi}}(x, t_1, -1) = \begin{cases} \widetilde{H}(x, t_1), & \text{se } t_1 \leq 0 \\ H''(x, t_1 - 1), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1 \\ H''(x, 2t_1 - 2), & \text{se } 1 \leq t_1 \leq 2 \end{cases}$$

e note também que $pH'^{\widehat{\varphi}} = \widehat{H}^{\widehat{\varphi}}$ (por (i) acima).

Portanto, tomando $H = G^{\psi} : X \times [-1, 2] \rightarrow E$ temos que $pH = \left(\widehat{H}^{\widehat{\varphi}}\right)^{\psi} = \overline{H}$ (por (ii) e (iii)),

$$H(x, -1) = G(x, \psi(-1)) = G(x, -1, -1) = \widetilde{H}(x, -1)$$

e

$$H|_{\tau^{-1}(2) \times [-1,2] \times [-1,1]} = H'^{\widehat{\varphi}\psi}|_{\tau^{-1}(2) \times [-1,2] \times [-1,1]} = H'|_{\tau^{-1}(2) \times [-1,2] \times [-1,1]}$$

□

Notação: Se $H : X \times [a, c] \longrightarrow B$ é uma homotopia, onde $a < b < c$ são números reais, e $L : [a, c] \longrightarrow [-1, 2]$ é o homeomorfismo que faz corresponder de forma afim $[a, b]$ em $[-1, 0]$ e $[b, c]$ em $[0, 2]$, então denotamos H^b a homotopia $H^b : X \times [a, c] \times [0, 1] \longrightarrow B$ dada por

$$H^b(x, t_1, t_2) = H\left(x, L^{-1}[\varphi(L(t_1), t_2)]\right)$$

Com a notação acima o enunciado do lema anterior, no caso genérico, é da seguinte forma:

Lema 5.2.2. *Sejam $b < c < d$ números reais, e seja $\overline{H} : X \times [b, d] \longrightarrow B$ uma homotopia e $\widetilde{H} : X \times [b, c] \longrightarrow E$, tal que $p\widetilde{H} = \overline{H}|_{X \times [b, c]}$. Considere também $\tau : X \longrightarrow [b, d]$ e $H' : \tau^{-1}(b, d) \times [b, d] \longrightarrow E$ com $pH' = \overline{H}|_{\tau^{-1}(b, d) \times [b, d]}$ e $H'|_{\tau^{-1}(b, d) \times [b, c]} = \widetilde{H}|_{\tau^{-1}(b, d) \times [b, c]}$. Se p possui a WCHP para $\overline{H}|_{X \times [c, d]}$ e para $\overline{H}^c$. Então existe $H : X \times [b, d] \longrightarrow E$ com $pH = \overline{H}$, $H(x, b) = \widetilde{H}(x, b)$ e $H|_{\tau^{-1}(d) \times [b, d]} = H'|_{\tau^{-1}(d) \times [b, d]}$.*

Proposição 5.2.3. *[Compare com o lema 4.3.4] Seja $\overline{H} : X \times [a, d] \longrightarrow B$ uma homotopia, com $a < b < c < d$. Se $p : E \longrightarrow B$ possui a WCHP para $\overline{H}|_{X \times [a, c]}$, $\overline{H}|_{X \times [c, d]}$ e para $\left(\overline{H}|_{X \times [b, d]}\right)^c$, então p possui a WCHP para $\overline{H}$.*

Demonstração. Tome $\widehat{H} : X \times [a-1, d] \longrightarrow B$ e $h : X \longrightarrow E$ tal que $ph = \widehat{H}_a$. Considere também $\tau : X \longrightarrow [a-1, d]$ e $H' : \tau^{-1}(a-1, d) \times [a-1, d] \longrightarrow E$ tal que $pH' = \widehat{H}|_{\tau^{-1}(a-1, d) \times [a-1, d]}$ e $H'(t, a-1) = h(x)$ se $x \in \tau^{-1}(a-1, d]$

Como p possui a WCHP para $\overline{H}|_{X \times [a, c]}$, então p possui a CHP para $\widehat{H}|_{X \times [a-1, c]}$. Considere $\tau_c : X \longrightarrow [a-1, c]$ onde $\tau_c(x) = \min\{c, \tau(x)\}$. Portanto $\tau_c^{-1}(a-1, c] = \tau^{-1}(a-1, d]$ e $\tau_c^{-1}(c) = [c, d]$. Tomando $F' = H'|_{\tau_c^{-1}(a-1, c] \times [a-1, c]}$ temos que $pF' = \widehat{H}|_{\tau^{-1}(a-1, d) \times [a-1, c]}$. Portanto existe $F : X \times [a-1, c] \longrightarrow E$ tal que $pF = \widehat{H}|_{X \times [a-1, c]}$,

$$F|_{\tau^{-1}[c, d] \times [a-1, c]} = F'|_{\tau^{-1}[c, d] \times [a-1, c]} = H'|_{\tau^{-1}[c, d] \times [a-1, c]}$$

e $F_{a-1} = h$.

Consideremos, agora, $\overline{H}|_{X \times [b, c]}$ e $F|_{X \times [b, c]}$. Temos que $pF|_{X \times [b, c]} = \overline{H}|_{X \times [b, c]}$. Tome $\tau^b : X \longrightarrow [b, d]$ tal que $\tau^b(x) = \max\{b, \tau(x)\}$. Então $(\tau^b)^{-1}(b, d] = \tau^{-1}(b, d]$ e $(\tau^b)^{-1}(d) = \tau^{-1}(d)$. Considerando $H'|_{(\tau^b)^{-1}(b, d) \times [b, d]}$ temos que

$$pH'|_{(\tau^b)^{-1}(b, d) \times [b, d]} = pH'|_{\tau^{-1}(a-1, d) \times [b, d]} = \widehat{H}|_{\tau^{-1}(a-1, d) \times [b, d]}$$

e como p possui a WCHP para $\overline{H}|_{X \times [c, d]}$ e $\left(\overline{H}|_{X \times [b, d]}\right)^c$ segue pelo lema anterior, com $F|_{X \times [b, c]}$ fazendo o papel de $\widetilde{H}$ e τ^b de τ , que existe $G : X \times [b, d] \longrightarrow E$ com $pG = \widehat{\overline{H}}|_{X \times [b, d]}$, $G(x, b) = F(x, b)$, $\forall x \in X$ e $G|_{\tau^{-1}(d) \times [b, d]} = H'|_{\tau^{-1}(d) \times [b, d]}$.

Para finalizar a demonstração, tomemos $H : X \times [a - 1, d] \longrightarrow E$ tal que

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, t), & t \in [a - 1, b] \\ G(x, t), & t \in [b, d] \end{cases}$$

então $pH = \widehat{\overline{H}}$, $H|_{\tau^{-1}(d) \times [a-1, d]} = H'|_{\tau^{-1}(d) \times [a-1, d]}$ e $H_{a-1} = F_{a-1} = h$. $\square$

Teorema 5.2.4. [Compare com o **Teorema 4.3.5**] Seja $p : E \longrightarrow B$ é um espaço sobre B e $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ uma homotopia. Suponha que exista uma cobertura normal $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X e para cada $\lambda \in \Lambda$ existam números reais $t_0^\lambda = 0 < t_1^\lambda < \dots < t_{r(\lambda)}^\lambda = 1$ tal que p possui a WCHP para $\overline{H}|_{V_\lambda \times [t_i^\lambda, t_{i+3}^\lambda]}$ e para $\left(\overline{H}|_{V_\lambda \times [t_{i+1}^\lambda, t_{i+3}^\lambda]}\right)^{t_{i+2}^\lambda}$ onde $\lambda \in \Lambda$ e $i = 0, \dots, r(\lambda) - 3$. Então p possui a WCHP para $\overline{H}$. (Aqui $\left(\overline{H}|_{V_\lambda \times [t_{i+1}^\lambda, t_{i+3}^\lambda]}\right)^{t_{i+2}^\lambda} : V_\lambda \times [t_{i-1}^\lambda, t_{i+1}^\lambda] \times [0, 1] \longrightarrow B$ denota a aplicação que corresponde a $\overline{H}^\varphi$ sob o homeomorfismo que manda de maneira afim $[t_{i+1}^\lambda, t_{i+2}^\lambda]$ em $[-1, 0]$ e $[t_{i+2}^\lambda, t_{i+3}^\lambda]$ em $[0, 2]$)

Demonstração. Aplicações repetidas da **proposição 5.2.3** nos dá que p possui a WCHP para cada $\overline{H}|_{V_\lambda \times I}$, ou seja possui a CHP para $\widehat{\overline{H}}|_{V_\lambda \times J}$ então, pelo **teorema 4.3.5**, p possui a CHP para $\widehat{\overline{H}} \therefore p$ possui WCHP para $\overline{H}$. $\square$

Teorema 5.2.5. [Teorema de Localização das Fibrações Fracas] Se $p : E \longrightarrow B$ é fibração fraca sobre cada elemento de uma cobertura normal $\{V_\lambda\}$ de B então p é fibração fraca. Supondo que B é paracompacto então p é fibração fraca se, e só se, p é localmente uma fibração fraca.

Demonstração. É inteiramente análoga à demonstração do **teorema de Uniformização (4.3.6)**:

Suponha que $\{\pi_\lambda : B \longrightarrow I\}_{\lambda \in \Lambda}$ é a partição da unidade localmente finita onde vamos assumir que $V_\lambda = \pi_\lambda^{-1}(0, 1]$, $\forall \lambda$. Potanto $\{V_\lambda = \pi_\lambda^{-1}(0, 1]\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura aberta localmente finita. Tome $\overline{H} : X \times I \longrightarrow B$ uma homotopia arbitrária. Nosso objetivo é mostrar que p possui a WCHP para $\overline{H}$, pois, devido a arbitrariedade da homotopia e do espaço X , obteremos o resultado.

Para cada r -tupla de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ definimos a função $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} : X \longrightarrow I$ dada por

$$\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x) = \prod_{i=3}^r \min \left\{ \pi_{\lambda_i} \overline{H}(x, t) \mid t \in \left[\frac{i-3}{r}, \frac{i}{r} \right] \right\}$$

o que implica que $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x) \neq 0 \iff \overline{H}\left(x, \left[\frac{i-3}{r}, \frac{i}{r} \right]\right) \subseteq V_{\lambda_i}, \forall i = 3, \dots, r$. Definamos

$$W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} = \phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^{-1}(0, 1]$$

O fato de p ser uma fibração fraca sobre cada V_λ implica que p possui WCHP para

$$\overline{H} \Big|_{W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \times \left[\frac{i-3}{r}, \frac{i}{r} \right]}.$$

Denotando por

$$F = \left(\overline{H} \Big|_{W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \times \left[\frac{i-2}{r}, \frac{i}{r} \right]} \right)^{\frac{i-1}{r}}$$

e por $L : \left[\frac{i-2}{r}, \frac{i}{r} \right] \longrightarrow [-1, 2]$ o homeomorfismo que faz corresponder de forma afim $\left[\frac{i-2}{r}, \frac{i-1}{r} \right]$ em $[-1, 0]$ e $\left[\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r} \right]$ em $[0, 2]$, então $F : W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \times \left[\frac{i-2}{r}, \frac{i}{r} \right] \times [0, 1] \longrightarrow V_{\lambda_i}$ é dada por

$$F(w, t_1, t_2) = \overline{H}(w, L^{-1}[\varphi(L(t_1), t_2)])$$

e possui a WCHP para F pois p é uma fibração fraca sobre V_{λ_i} .

Mostra-se, de maneira inteiramente análoga à feita na demonstração do Teorema da Uniformização, que a coleção

$$\mathcal{A} = \left\{ W_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \mid r \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda \right\}$$

é uma cobertura normal para X . E pelo teorema anterior segue que p possui WCHP para $\overline{H}$.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ é uma cobertura normal, observamos que dado $x \in X$ existem vizinhança aberta U_x de x e um número natural r (devido ao *número de Lebesgue*) tais que

(a) Dado $i = 2, \dots, r$, $U_x \times \left[\frac{i-2}{r}, \frac{i}{r} \right] \subseteq \overline{H}^{-1}(V_{\gamma_{x,i}})$ para algum $\gamma_{x,i} \in \Lambda$;

(b) $U_x \times I$ intersecta apenas um número finito de conjuntos $\overline{H}^{-1}(V_\lambda)$, com $\lambda \in \Lambda$.

E prosseguimos de forma análoga à feita na demonstração do Teorema da Uniformização. $\square$

5.3 Caracterização Local das Fibrações Fracas

Na seção anterior vimos que as fibrações fracas se comportam bem com relação a B -equivalências. Nesta seção veremos como as B -equivalências se comportam com relação às fibrações fracas. Por fim, sob hipóteses bastante gerais, caracterizamos localmente as fibrações fracas e as B -equivalências entre fibrações fracas.

Teorema 5.3.1. *Sejam $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ fibrações fracas e $f : E \longrightarrow E'$ uma B -aplicação. Então f é uma B -equivalência homotópica se, e só, é uma equivalência homotópica comum.*

Demonstração. Que é suficiente, não há o que discutir. Vamos mostrar que é necessário.

Por hipótese existe $f' : E' \longrightarrow E$ (não necessariamente uma B -aplicação) tal que $f'f \simeq I_E$ e $ff' \simeq I_{E'}$. Denotemos por $d : ff' \simeq I_{E'}$ a homotopia. Então

$$p'd : E \times I \longrightarrow B$$

é tal que $p'd_0 = pf'$. Portanto, como p é uma fibração fraca, existe um levantamento $D : E' \times I \longrightarrow E$ com $pD = p'd$ e existe uma homotopia $\Theta : E' \times [1, 2] \longrightarrow E$ tal que $\Theta_1 = D_0$, $\Theta_2 = f'$ e $p\Theta_t = pf'$. Como $pD_1 = p'd_1 = p'$ então D_1 é uma B -aplicação. Denotemos $f'' = D_1$.

Afirmo que $ff'' \simeq_B I_{E'}$: De fato, começamos considerando a homotopia $h : E' \times [0, 3] \longrightarrow E'$ dada por

$$h(e', t) = \begin{cases} fD(e', 1-t), & t \in [0, 1] \\ f\Theta(e', t), & t \in [1, 2] \\ d(e', t-2), & t \in [2, 3] \end{cases}$$

e que satisfaz $p'h(e', t) = p'h(e', 3-t)$. Então h ainda não é uma B -homotopia, mas vamos usá-la para criar tal homotopia. Tomando $\overline{H} : E' \times [0, 3] \times I \longrightarrow B$ tal que

$$\overline{H}(e', t_1, t_2) = \begin{cases} p'h(e', t_1), & t_1 \leq \frac{3}{2}(1-t_2) \\ p'h\left(e', \frac{3}{2}(1-t_2)\right), & \frac{3}{2}(1-t_2) \leq t_1 \leq \frac{3}{2}(1+t_2) \\ p'h(e', t_1), & t_1 \geq \frac{3}{2}(1+t_2) \end{cases}$$

que é contínua se $t_1 = \frac{3}{2}(1+t_2)$ então $3-t_1 = \frac{3}{2}(1-t_2)$ e $p'h(e', t) = p'h(e', 3-t)$.

Temos que $ph = \overline{H}_0$. Portanto existe $H : E' \times [0, 3] \times I \longrightarrow E'$ com $p'H = \overline{H}$ e H_0 é homotópico a h , através de uma homotopia $\Phi : E' \times [0, 3] \times I \longrightarrow E'$ onde $p'\Phi_t = p'h$ para todo $t \in I$. Consideremos $G : E' \times [0, 7] \longrightarrow E'$ dada por

$$G(e', t) = \begin{cases} \Phi(e', 0, t), & t \in [0, 1] \\ H(e', 0, t-1), & t \in [1, 2] \\ H(e', t-2, 1), & t \in [2, 5] \\ H(e', 3, 6-t), & t \in [5, 6] \\ \Phi(e', 3, t-6), & t \in [6, 7] \end{cases}$$

é a B -homotopia entre ff'' e $I_{E'}$ (pois $\Phi(e', 3, 1) = h(e', 3) = I_{E'}$). Com isso

$$\begin{aligned} p'G(e', t) &= \begin{cases} p'h(e', 0), & t \in [0, 1] \\ \overline{H}(e', 0, t-1), & t \in [1, 2] \\ \overline{H}(e', t-2, 1), & t \in [2, 5] \\ \overline{H}(e', 3, 6-t), & t \in [5, 6] \\ p'\Phi(e', 3, t-6), & t \in [6, 7] \end{cases} = \begin{cases} p'h(e', 0), & t \in [0, 1] \\ p'h(e', 0), & t \in [1, 2] \\ p'h(e', 0), & t \in [2, 5] \\ p'h(e', 0), & t \in [5, 6] \\ p'h(e', 3) = p'h(e', 0), & t \in [6, 7] \end{cases} \\ &= p'ff''(e') = p'(e') \end{aligned}$$

é uma B -homotopia, o que termina a prova da afirmação.

Como os argumentos acima independem do espaço E e E' , temos por argumentos análogos, dessa vez com respeito à f'' , que existe $f''' : E \rightarrow E'$ tal que $f''f''' \simeq_B I_E$. Então temos que

$$f''f \simeq_B (f''f)(f''f''') \simeq_B f''f''' \simeq_B I_E$$

□

Os próximos lemas serão usados para analisar o comportamento das fibrações fracas localmente.

Lema 5.3.2. *Se $p : E \rightarrow B \times I$, onde $p(e) = (p_1(e), p_2(e))$, é uma fibração fraca então existe $Q : E \times I \rightarrow E$ tal que:*

i) $pQ(e, t) = (p_1(e), t)$;

ii) Se $q : E \rightarrow E$ é tal que $q(e) = Q(e, p_2(e))$ então $q \simeq_{B \times I} I_E$;

Demonstração. Tome $\overline{H} : E \times I \times I \rightarrow B \times I$ de forma que

$$\overline{H}(e, t_1, t_2) = (p_1(e), (1-t_2)p_2(e) + t_2t_1)$$

e, portanto, $\overline{H}(e, t, 0) = (p_1(e), p_2(e)) = p(e)$ então, devido ao fato de p ser uma fibração fraca, existe $H : E \times I \times I \rightarrow E$ tal que $pH = \overline{H}$ e $H_0 \simeq_{B \times I} h$, onde $h : E \times I \rightarrow E$ tal que $h(e, t) = e$. Tomando $Q = H_1$ temos que $pQ(e, t) = \overline{H}(e, t, 1) = (p_1(e), t)$.

Se considerarmos $G : E \times I \rightarrow E$ dada por

$$G(e, t) = H(e, p_2(e), t)$$

obtemos que $pG_t(e) = \overline{H}(e, p_2(e), t) = (p_1(e), p_2(e)) = p(e)$ e portanto é uma B -homotopia, $G_0(e) = H(e, p_2(e), 0) \simeq_{B \times I} h(e, p_2(e)) = e$ e $G_1(e) = H(e, p_2(e), 1) = Q(e, p_2(e)) = q(e)$. Portanto $q \simeq_{B \times I} I_E$. □

Lema 5.3.3. Dado $t \in I$, e seguindo as notações acima, denotamos $E^t = p^{-1}(B \times \{t\})$. Considerando os B -espaços $p^t : E^t \longrightarrow B$ tal que $p^t(e) = p_1(e)$ temos que as funções $Q_1 : E^0 \longrightarrow E^1$ e $Q_0 : E^1 \longrightarrow E^0$ dadas por

$$Q_i(e) = Q(e, i) = H(e, i, 1), \quad i = 0, 1$$

são B -equivalências inversas.

Demonstração. $p^1 Q_1(e) = p^1 Q(e, 1) = p_1(e) = p^0(e)$. Analogamente $p^0 Q_0 = p^1$ e portanto Q_1 e Q_0 são B -aplicações.

Temos que $Q_1 Q_0(e) = Q_1(Q(e, 0)) = Q(Q(e, 0), 1)$. Assim, tomando $\Phi : E^1 \times I \longrightarrow E^1$ dada por

$$\Phi(e, t) = Q(Q(e, t), 1)$$

temos que $\Phi : Q(Q(e, 0), 1) \xrightarrow[B]{\simeq} Q(Q(e, 1), 1)$. Mas $Q(Q(e, 1), 1) = q(q(e)) \xrightarrow[B \times I]{\simeq} I_{E^1}(e)$. Denotando por $\Psi : q(q(e)) \xrightarrow[B \times I]{\simeq} I_{E^1}$ a homotopia sobre as fibras, temos que $p^1 \Psi_t(e) = p_1(e) = p^1(e)$ e portanto é uma B -homotopia. Logo $Q_1 Q_0 \xrightarrow[B]{\simeq} I_{E^1}$. O caso de $Q_0 Q_1$ é análogo. $\square$

Teorema 5.3.4. Se $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração fraca e $V \subseteq B$ é um subespaço tal que a inclusão $i : V \longrightarrow B$ é homotopicamente nula (isto é, é homotópica a uma aplicação constante $V \longrightarrow V \subseteq B$), então p_V é B -equivalente a um espaço trivial $\wp : V \times p^{-1}(v) \longrightarrow V$ para algum $v \in V$.

Demonstração. Como i é homotopicamente nula, existe $\Phi : V \times I \longrightarrow B$ tal que $\Phi_0 = i$ e $\Phi_1 = v$, para algum $v \in V$. Tomemos o produto fibrado

$$p_\Phi : E_\Phi \longrightarrow V \times I$$

onde $E_\Phi = \left\{ (e, b, t) \in E \times V \times I \mid p(e) = \Phi(b, t) \right\}$. Devido a hereditariedade das fibrações fracas (**proposição 5.1.6**) temos que p_Φ é fibração fraca, portanto segue do **lema 5.3.2** que existe

$$Q : E_\Phi \times I \longrightarrow E_\Phi$$

tal que $p_\Phi Q((e, b, t), r) = (b, r)$ e pelo lema anterior (e usando as mesmas notações) temos que $Q_1 : E_\Phi^0 \longrightarrow E_\Phi^1$ e $Q_0 : E_\Phi^1 \longrightarrow E_\Phi^0$ dadas por

$$Q_1(e, b, 0) = Q((e, b, 0), 1) \quad \text{e} \quad Q_0(e, v, 1) = Q((e, v, 1), 0)$$

são B -equivalências inversas com relação aos B -espaços $p_\Phi^0 : E_\Phi^0 \longrightarrow B$ tais que $p_\Phi^0(e, b, 0) = b$ e $p_\Phi^1 : E_\Phi^1 \longrightarrow B$ com $p_\Phi^1(e, b, 1) = b$.

Notando que $E_\Phi^0 = \left\{ (e, b, 0) \in E \times V \times \{0\} \mid p(e) = \Phi(b, 0) = b \right\}$ obtemos, de maneira natural, que p_Φ^0 é B -homeomorfo a $p_V : p^{-1}(V) \longrightarrow V$. Notando também que

$$E_\Phi^1 = \left\{ (e, b, 1) \in E \times V \times \{1\} \mid p(e) = \Phi(b, 1) = v \right\}$$

e, naturalmente, p_Φ^1 é B -homeomorfo ao espaço trivial $\wp : V \times p^{-1}(v) \longrightarrow V$. Portanto $p_V \underset{V}{\simeq} \wp$. $\square$

Observação 5.3.5. Note que pela demonstração acima, podemos tomar v como sendo qualquer ponto no qual V se contrai.

Exemplo 5.3.6. Todo CW-complexo B admite uma cobertura aberta $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que a inclusão $i : V_\lambda \longrightarrow B$ é homotopicamente nula. Mais ainda, se B é conexo podemos tomar $\Lambda = \mathbb{N}$ (ou seja, temos uma cobertura enumerável). Para esse resultado veja **(DOLD, 1963), proposição 6.7.**

Como todo CW-complexo é paracompacto (ver **(MIYAZAKI, 1952)**) temos que essa referida cobertura é normal.

$\diamond$

Corolário 5.3.7. *[Caracterização Local das Fibrações Fracas] Seja $p : E \longrightarrow B$ um espaço tal que B admite uma cobertura normal $\{V_\lambda\}$ onde, para cada λ , a inclusão $i : V_\lambda \longrightarrow B$ é homotopicamente nula. Então p é uma fibração fraca se, e somente se, p_{V_λ} é B -equivalente a um espaço trivial para cada λ .*

Com isso temos que se B é um CW-complexo então $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração fraca se, e só se, é localmente B -equivalente a um espaço trivial.

Demonstração. Se p é uma fibração fraca segue, pelo teorema anterior, que para cada λ existe $v_\lambda \in V_\lambda$ tal que p_{V_λ} é B -equivalente ao espaço trivial $\wp_\lambda : V_\lambda \times p^{-1}(v_\lambda) \longrightarrow V_\lambda$.

Suponha que p_{V_λ} é B -equivalente a um espaço trivial. Então, para cada λ , p_{V_λ} é fibração fraca, e devido ao teorema de localização das fibrações fracas **(5.2.5)**, temos que p é uma fibração fraca. $\square$

O próximo resultado goza de beleza equivalente a do corolário acima:

Teorema 5.3.8. *[Caracterização Local das B -equivalências entre Fibrações Fracas] Sejam $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B$ fibrações fracas tal que B admite uma cobertura normal $\{V_\lambda\}$ onde, para cada λ , a inclusão $i : V_\lambda \longrightarrow B$ é homotopicamente nula. Então uma B -aplicação $f : E \longrightarrow E'$ é uma B -equivalência se, e somente se, para todo $b \in B$ a restrição $f_b = f \Big|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(b)$ é uma equivalência homotópica (usual).*

Demonstração. Pelo **teorema 3.4.5** é suficiente mostrar que para cada λ a restrição f_{V_λ} é uma B -equivalência. Ora, fixado λ temos pelo **teorema 5.3.4** existe $v_\lambda \in V_\lambda$ tal que p_{V_λ} é B -equivalente ao espaço trivial $\wp : V_\lambda \times p^{-1}(v_\lambda) \longrightarrow V_\lambda$. Analogamente p'_{V_λ} é B -equivalente a $\wp' : V_\lambda \times p'^{-1}(v_\lambda) \longrightarrow V_\lambda$ (pela observação 5.3.5 podemos tomar o mesmo v_λ para ambas

projeções). Denotemos por $h : p^{-1}(V_\lambda) \longrightarrow V_\lambda \times p^{-1}(v_\lambda)$, $h^- : V_\lambda \times p^{-1}(v_\lambda) \longrightarrow p^{-1}(V_\lambda)$ e os análogos h' e h'^- as B -aplicações tais que

$$h^-h \simeq_{V_\lambda} I_{p^{-1}(V_\lambda)} \text{ e } hh^- \simeq_{V_\lambda} I_{V_\lambda \times p^{-1}(v_\lambda)} \quad \text{assim como,} \quad h'^-h' \simeq_{V_\lambda} I_{p'^{-1}(V_\lambda)} \text{ e } h'h'^- \simeq_{V_\lambda} I_{V_\lambda \times p'^{-1}(v_\lambda)}$$

definimos $f_\lambda : V_\lambda \times p^{-1}(v_\lambda) \longrightarrow V_\lambda \times p'^{-1}(v_\lambda)$ dada por $f_\lambda(b, e) = (b, f_{v_\lambda}(e))$. Então $\wp' f_\lambda = \wp$, nos dando assim que é uma B -aplicação. Por hipótese existe uma inversa homotópica de f_{v_λ} , $g_{v_\lambda} : p'^{-1}(v_\lambda) \longrightarrow p^{-1}(v_\lambda)$. Então consideremos a B -aplicação $g_\lambda : V_\lambda \times p'^{-1}(v_\lambda) \longrightarrow V_\lambda \times p^{-1}(v_\lambda)$. É de verificação direta que f_λ é uma B -equivalência com inversa g_λ (que também é uma B -equivalência). Logo, tomamos as B -aplicações $F_\lambda : p^{-1}(V_\lambda) \longrightarrow p'^{-1}(V_\lambda)$ e $G_\lambda : p'^{-1}(V_\lambda) \longrightarrow p^{-1}(V_\lambda)$ dadas por

$$F_\lambda(e) = h'^- f_\lambda h \quad \text{e} \quad G_\lambda(e) = h^- g_\lambda h'$$

e verificamos, facilmente, que F_λ e G_λ são B -equivalências inversas.

Para concluir o resultado, vamos mostrar que f_{V_λ} é B -homotópica a F_λ . Feito isso, o resultado segue imediatamente. Para isso notemos que $p' f_{V_\lambda} = p' F_\lambda$. Afimo que isso é suficiente para concluir: De fato, tomando a B -homotopia $\Theta : G_\lambda F_\lambda \simeq_{V_\lambda} I_{p^{-1}(V_\lambda)}$ temos que $p\Theta_0 = pG_\lambda F_\lambda = pF_\lambda = pf_{V_\lambda}$ e, pelo fato de p_{V_λ} ser uma fibração fraca, temos que existe uma homotopia $\Phi : p^{-1}(V_\lambda) \times I \longrightarrow p'^{-1}(V_\lambda)$ tal que $p'\Phi = p\Theta$ e, por um lado, $\Phi_0 \simeq_B F_\lambda$ assim como, por outro lado, $\Phi_0 \simeq_B f_{V_\lambda}$. $\square$

Referências

- DOLD, A. Partitions of Unity in the Theory of Fibrations. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 223–255, 1963. Citado 5 vezes nas páginas 11, 27, 35, 37 e 73.
- HUREWICZ, W. On the concept of fiber space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 41, n. 11, p. 956–961, 1955. Citado 7 vezes nas páginas 11, 24, 27, 37, 47, 54 e 59.
- LIMA, E. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CNPq., 1977. Citado 6 vezes nas páginas 15, 18, 44, 45, 48 e 52.
- MIYAZAKI, H. The Paracompactness of CW-complexes. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, v. 4, n. 3, p. 309–313, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 73.
- ROKHLIN, V.; FUKS, D. *Beginner's Course in Topology*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 22, 28, 31 e 38.
- SERRE, J. Homologie singuliere des espaces fibres. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 425–505, 1951. Citado na página 11.
- STEENROD, N. *The Topology of Fibre Bundles*. [S.l.]: Princeton University Press, 1951. Citado 7 vezes nas páginas 10, 15, 16, 17, 19, 25 e 27.