UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

CLARA RAÍSSA FERNANDES DE MELO

QUANTIDADES CONTÍNUAS E DISCRETAS: UM OLHAR SOBRE A COMPREENSÃO DE ESTUDANTES ACERCA DAS RELAÇÕES INVERSAS EM PROBLEMAS DE DIVISÃO

RECIFE

2017

CLARA RAÍSSA FERNANDES DE MELO

QUANTIDADES CONTÍNUAS E DISCRETAS: UM OLHAR SOBRE A COMPREENSÃO DE ESTUDANTES ACERCA DAS RELAÇÕES INVERSAS EM PROBLEMAS DE DIVISÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Mestre em Psicologia Cognitiva.
Área de Concentração: Educação Matemática e Científica
Orientadora: Profª. Drª. Síntria Labres Lautert

RECIFE

2017

CLARA RAÍSSA FERNANDES DE MELO

“QUANTIDADES CONTÍNUAS E DISCRETAS: UM OLHAR SOBRE A COMPREENSÃO DE ESTUDANTES ACERCA DAS RELAÇÕES INVERSAS EM PROBLEMAS DE DIVISÃO”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Mestra.
Área de Concentração: Psicologia Cognitiva

Aprovada em: 23/02/2017

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Síntria Labres Lautert (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Drª. Juliana Ferreira Gomes da Silva (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Alagoas

____
Prof. Dr. Ernani Martins dos Santos (Examinador Externa)
Universidade de Pernambuco

Catalogação na fonte
Bibliotecária Maria Janeide Pereira da Silva, CRB4-1262

M528q Melo, Clara Raíssa Fernandes de.
Quantidades contínuas e discretas : um olhar sobre a compreensão de estudantes acerca das relações inversas de divisão / Clara Raíssa Fernandes de Melo. – 2017.
108 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora : Profª. Drª. Síntria Labres Lautert.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CFCH. Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Recife, 2017.
Inclui Referências e apêndices.

1. Psicologia cognitiva. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Matemática (Ensino Fundamental) – Aspectos psicológicos. 4. Divisão. I. Lautert, Síntria Labres (Orientadora). II. Título.

153 CDD (22. ed.) UFPE (BCFCH2017-117)

Aos meus pais pelo amor incondicional.

Ao meu noivo Lucas Cavalcanti,

por toda dedicação, amor, compreensão e parceria.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a oportunidade de concluir essa etapa da minha vida.

Aos meus pais, Lúcia de Fátima e Francisco de Assis pelo amor e compreensão incondicional e por serem minha maior motivação para seguir em frente.

A Síntria Labres Lautert, pelas orientações e ensinamentos, pela paciência, pela sua sensibilidade e afeto em todos os momentos e até nas pequenas ações.

Ao meu noivo, Lucas Cavalcanti, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo amor incondicional, pela paciência, pelas sugestões e pela disponibilidade em todos os momentos.

A minha irmã, Carla Rafaela e meu cunhado Orlando,pelo carinho e cuidado e por me acolher na sua casa.

Aos membros do NUPPEM e colegas de pós-graduação, em especial, à Bárbara, Johana e Larissa pelas reflexões, sugestões e apoio que foram fundamentais da construção desse estudo e pelos momentos de descontração.

A Rebeka, por ser minha companheira de pesquisa desde a graduação em Psicologia, por partilhar as alegrias e angústias, pelo apoio e incentivo.

A Mirela,por ter me acolhido de braços abertos em todos os momentos, pela disponibilidade, atenção e pelo exemplo de pessoa íntegra que me motiva com sua força e coragem.

A Danilo, pelas risadas, pela disponibilidade, pelos momentos de descontração compartilhados e pela parceria.

A escola em que desenvolvi a pesquisa, a toda equipe pedagógica e as crianças pela disponibilidade.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro que possibilitou a realização desse estudo.

RESUMO

O presente estudo investiga o desenvolvimento da compreensão de estudantes do 3º e 5º do Ensino Fundamental acerca das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante, considerando duas condições, C1: presença de números e C2: presença de códigos relativos, envolvendo quantidades contínuas e discretas. Participaram da investigação 80 estudantes, de ambos os sexos, com idades entre 7 e 12 anos, frequentando o 3º e 5º do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de João Pessoa. Esses foram alocados em dois grupos: G1: 40 estudantes do 3º ano (que não foram instruídos sobre divisão no contexto escolar) e G2: 40 estudantes do 5º ano (que já foram instruídos sobre a divisão no contexto escolar). Todos os estudantes foram solicitados em duas sessões individuais, com intervalos de dois a quatro dias entre elas, a resolverem 12 problemas de divisão na Condição 1 e na Condição 2. Em cada condição foram apresentados problemas com quantidades contínuas e discretas envolvendo problemas de divisão por partição e por quotas. A análise dos dados foi realizada a partir dos protocolos individuais dos participantes da pesquisa e organizada em três momentos, análise do desempenho, das justificativas e a relação entre o desempenho e as justificativas. Quanto ao desempenho, os resultados permitiram verificar que os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão apresentam melhor desempenho no geral e considerando ambas as condições e quantidades do que os estudantes do G1 (3º ano). Entretanto, apenas os estudantes do G1 (3º ano) parecem prestar mais atenção nas relações de covariação quando o dividendo é mantido constante na presença de códigos relativos do que na presença de números. Ademais, os estudantes do G2 (5º ano) apresentaram melhor desempenho com quantidade contínua do que com quantidade discreta em ambas as condições, enquanto para os estudantes do G1 (3º ano) o nível de dificuldade de ambas as quantidades equivalente. Quanto as justificativas foram identificadas três tipos: Justificativa 1 - imprecisas e circulares ou baseadas na adição e ou subtração; Justificativa 2 - foco da atenção no valor do dividendo ou divisor (maior ou o menor) ou confundem o tamanho da parte com o número de partes e Justificativa 3 - demonstram compreensão das relações inversas entre os termos da divisão. Verificou-se que os estudantes do G1 (3º ano) usam mais a Justificativa 2 e que os estudantes do G2 (5º ano) usam mais a Justificativas 3. Entre os subtipos de justificativa 2 foi observado que é mais freqüente, em ambas as condições e quantidades, a justificativa na qual foco da atenção concentra-se no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor e há uma redução na emissão da mesma na quantidade contínua. Esses resultados indicam que a maioria das crianças tem dificuldade em lidar com as relações inversas quando o dividendo é mantido constante em problemas de divisão e que a quantidade contínua facilita a compreensão apenas para os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão em ambas as condições.

Palavras-chave: Educação Matemática. Estruturas Multiplicativas. Divisão.

ABSTRACT

The current study investigates the development of the comprehension of students about the inverse relationship between the division terms when the dividend is constant considering two conditions, C1: presence of numbers and C2: presence of relative codes, involving continuous and discrete quantity. This research involved 80 students of both sexes, between 7 and 12 years old, attending the 3rd and the 5th year of the Elementary School of a public School in the city João Pessoa. They were split into two groups: G1: 40 students of the 3rd year (that were not instructed about division in the school context), and G2: 40 students of the 5th year (that were already instructed about division in the school context). It was asked that the students solved 12 division problems in Condition 1 and in Condition 2. In each condition, the problems were presented with continuous and discrete quantities involving division problems by participation and division by quota. The analysis of the data was based on individual protocols of the subjects and organized into three categories: performance analysis, justification and the relation between them. Regarding the performance, the results showed that students that have had formal instruction about division presented better performance in general, and considering both conditions and quantities than the G1 students (3rd year), however, only the G1 students (3rd year) seemed to pay more attention to the relations of covariation when the dividend is constant when there are relative codes present then with numbers involved. In addition, the G2 students (5th year) had a better performance with continuous quantities than with the discrete quantities in both conditions, while for the G1 students (3rd year) the difficulty level in both quantities (continuous and discrete) was the same. Regarding the justifications, three types were identified: Justification 1 – imprecise and circular or based in addition and/or subtraction; Justification 2 – focusing the attention on the dividend or divider value or confusing the size of the part with the number of parts and Justification 3 – demonstrating comprehension of the inverse relations between the division terms. It was verified that the G1 students (3rd year) used Justification 2 more often and the G2 students (5th year) used Justification 3 more often, which demonstrates the comprehension of the inverse relations in continuous quantity. Among the justification subtypes in both conditions and quantities the justification in which the focus of their attention was on the number or word that represents the bigger or smaller divisor and there is a reduction in the emission of the same continuous quantity. These results indicate that most children have difficulties in dealing with inverse relations when the dividend is kept constant in division problems, and that the continuous quantity makes the comprehension easier only for those students who have had formal instruction about division in both conditions.

Key-words: Mathematics Education. Multiplicative Structures.Division.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Psicologia da Educação Matemática é um campo de interseção entre a Matemática, a Educação e a Psicologia, que apresenta implicações tanto teóricas como práticas, uma vez que tem como foco a análise das atividades matemáticas desenvolvidas nos contextos escolares, extra-escolar e dos matemáticos. Além disso, possui interesse pela conceptualização da matemática e criação do conhecimento científico pelo indivíduo, visto como participante ativo de um contexto histórico-cultural (Da RochaFalcão, 2003).

Diversos enfoques teóricos dão subsídio às reflexões no âmbito da Psicologia da Educação Matemática. Neste estudo destaca-se a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Gérard Vergnaud (1988) caracterizada como uma teoria cognitivista, que serve de base para diversas pesquisas (e.g.Correa, Nunes & Bryant, 1998; Lautert & Spinillo, 2015; Magina, Santos & Merlini, 2014) na área do desenvolvimento e da aprendizagem da Matemática, que visa compreender as continuidades e descontinuidades entre os conhecimentos.

Este estudo em particular investiga a compreensão de estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental, acerca das relações inversas entre os termos da divisão, quando o dividendo é mantido constante considerando a presença de números e códigos relativos,envolvendo quantidades discretas e contínuas. De forma específica: (i) examina se a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão,quando o dividendo é mantido constante envolvendo quantidades discretas e contínuas, estariam relacionadas ao fato de serem apresentadas sob a forma de números ou códigos relativos; (ii) verifica se a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão, quando o dividendo é mantido constante, considerando quantidades discretas e contínuas, estariam relacionadas as situações-problema de divisão: por partição e por quota; (iii) analisa a natureza das justificativas apresentadas pelos estudantes em relação as variáveis investigadas: quantidade discreta vs contínua; número vs. código; partição vs. quota; (iv) examina o desempenho e a natureza das justificativas considerando a escolaridade em função das variáveis investigadas, a saber: número vs. código e quantidade discreta vs contínua.

Estudos que focalizam a divisão (e.g.Correa, Nunes & Bryant,1998; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Florbela Soutinho & Mamede, 2013; Lautert, Spinillo, Correa, 2012)chamam atenção para o fato de que os estudantes apresentam dificuldades em lidar com as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Além disso, tornar-se relevante considerar o tipo de quantidade envolvida em cada condição. Este estudo concentra-se de forma mais específica nas quantidades contínuas uma vez que elas são frequentemente exploradas em problemas de divisão e que são mais difíceis das crianças compreenderem do que as quantidades discretas (Correa, Meireles & Curvelo, 2000).

A literatura (e.g.Correa, 1996; Correa Nunes & Bryant, 1998; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Kornilak & Nunes, 2005; Oliveira, 2014; Rasmussen, Ho & Bisanz, 2003; Nunes, 2016)chama atenção para o fato de que as quantidades podem ser expressas através de número ou de códigos relativos e que as crianças pequenas costumam utilizar códigos relativos quando não conseguem realizar tarefas que exigem cálculo matemático. Esta ação da criança pequena é considerada como significativa, na medida em que contribui para pensarem relativamente ao resolverem certos problemas. Entretanto, conforme relata Nunes (2011), poucos estudos exploram as quantidades no que se refere aos códigos relativos. Estabilidade de coordenar os significados envolvendo quantidades, números, operações e relações através da presença ou não de códigos é fundamental para a compreensão da resolução de problemas no contexto escolar e na vida diária.

Ressalta-se que essa investigação se insere no campo de estudos da Psicologia Cognitiva, e, mais especificamente, na linha de pesquisa de Educação Matemática e Científica, na medida em que se interessa pelo modo como os conceitos matemáticos são aprendidos e desenvolvidos no contexto escolar.

A dissertação foi organizada em quatro partes. A primeira parte (Fundamentação teórica) apresenta a teoria que subsidiou este estudo, a saber: a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvidas por Geràrd Vergnaud e seus conceitos centrais, as discussões acerca da operação de divisão e as pesquisas empíricas desenvolvidas na área que tratam das relações inversas e das variáveis investigadas (condição, tipo de quantidade, situação de divisão). A segunda parte (Método) apresenta os objetivos gerais da pesquisa, a caracterização dos participantes e o planejamento experimental. A terceira parte (Análise e discussão dos resultados) apresenta o sistema de análise implementado nessa investigação, bem como os resultados da investigação realizada considerando as variáveis investigadas (número vs. código; quantidade discreta vs contínua; divisão por partição vs. divisão por quota e escolaridade). A quarta parte (Conclusão) apresenta as conclusões e as implicações educacionais considerando-se os resultados da investigação implementada, bem como são apresentados propostas de pesquisas futuras que respondam a questionamentos suscitados e proporcionem novos questionamentos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 *Resolução de problemas*

Diversos autores (e.g. Boa Vida, 1993; Brito, 2000; Caldonazzo, Salgado, Capellini & Ciasca, 2006) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) concordam com a ideia de que a resolução de problemas envolve conceitos, habilidades, utilizar estratégias, dominar algoritmo, lembrar fatos numéricos e realizar procedimentos como: fazer tentativas e formular hipóteses.

Para Caldonazzo, Salgado, Capellini e Ciasca (2006, p.117), a resolução de problemas se caracteriza como "*um modo de compreender o mundo, raciocinar e deduzir a situação apresentada como solução*". Já Brito (2000, p. 96) chama atenção para quatro características básicas: "*é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do indivíduo*" e não possui uma solução imediata.

Ainda para Brito (2000), um problema é formado pela estrutura (operações que devem ser realizadas) e pelo envoltório (história, linguagem, entre outros elementos) e possui a função de manter relação entre as situações cotidianas e a matemática escolar. Entretanto, o ensino focaliza os mesmos tipos de problemas rotineiramente, isso leva os alunos a solucionar os problemas de forma automatizada prejudicando a habilidade de transferir situações cotidianas para a matemática aprendida na escola.

Quanto a relevância da solução de problemas Vergnaud (2009, p. 59) afirma que ela é simultaneamente um meio e um critério de aquisição das relações de ordem e de equivalência,

> [...] um meio porque a análise dos problemas, das soluções e dos erros é pedagogicamente essencial para fazer as crianças compreenderem quais relações são importantes e como elas podem ser tratadas. Um critério porque o fracasso em transformar e em compor relações traduz lacunas ou desconhecimentos [...]

Este teórico conclui ainda que não é possível realizar uma classificação completa dos problemas complexos que existem devido ao número de possibilidades serem consideravelmente maior do que o número de relações elementares envolvidas.

A importância do desenvolvimento da capacidade de resolver problemas também é reconhecida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais nos anos 90 e se constitui como o principal objetivo da Educação Matemática (Brasil, 1997; Boa Vida, 1993). Isso se deve conforme pontua Fávero e Neves (2009), à influência das pesquisas desenvolvidas no Brasil e em outros países, tanto na área da Educação Matemática, como na área da Psicologia da Educação Matemática.

Para Chahon (2006) a resolução de problemas é considerada paradigmática tanto por ser destacada nas pesquisas na área da Psicologia da Educação Matemática quanto por avaliar a capacidade cognitiva do aluno. Além disso, ela abarca um amplo campo de investigação na história da Psicologia Cognitiva e da Matemática, refletindo em mudanças importantes no campo pedagógico desde as últimas décadas do século XX.

Apesar dessa importância, os problemas são utilizados na escola apenas para avaliar se os alunos sabem empregar o que foi ensinado e para a maioria dos alunos, resolver um problema é calcular utilizando os números do enunciado ou colocar em prática algo que aprenderam nas aulas, ou seja, o saber matemático se torna algo sem sentido (Brasil,1997).

Como exposto, a resolução de problemas apresenta várias definições e tem recebido destaque nas pesquisas (e.g. Correa, 2004; Lautert & Spinillo, 2015; Fávero & Neves, 2009; Squire & Bryant, 2002) na área da Psicologia da Educação Matemática por ser permitir o acesso as formas mobilizadas pelos indivíduos para resolverem as situações-problema apresentadas

Nesta investigação assume-se a Teoria dos Campos Conceituais defendida por Vergnaud (1983, 1988, 1991, 2009, 2011) como referencial teórico subjacente para olhar para resolução de problemas no âmbito das estruturas multiplicativas, especificamente os problemas envolvendo o conceito de divisão. Neste sentido torna-se relevante discutir sobre os aspectos relevantes dessa teoria: campos conceituais, conceitos, competência, concepção, invariantes, esquemas, teorema-em-ação, as estruturas multiplicativas e o conceito divisão.

2.2 *Teoria dos Campos Conceituais*

Segundo Vergnaud (1988, 2003) um campo conceitual envolve: um conjunto de situações (tarefas), cuja apropriação exige o domínio de vários conceitos, ou seja, não se restringe a um conceito isolado, sendo esses conceitos organizados em campos conceituais tanto no âmbito da matemática como em outras áreas de conhecimento.

No que se refere a constituição dos conceitos matemáticos, Vergnaud (1988) chama atenção para três conjuntos que são representados por três letras (S - I - R): S – o conjunto de situações que tornam o conceito significativo; I - conjunto de invariantes que o sujeito reconhece e utiliza para analisar e dominar as situações; R – o conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes. Em uma visão psicológica, S é a realidade enquanto I e R são as representações, ou seja, a relação entre significado (I) e significante (S). Ademais, a compreensão da criança acerca de um novo conceito ocorre ao longo de vários anos e passa por interações e defasagens durante esse processo, o que pode ser observado através da resolução de um problema por um indivíduo.

Vergnaud (1988, 1991) denomina de *invariantes*, os componentes cognitivos que subjazem os comportamentos dos indivíduos e são constitutivos dos *esquemas*, que são ações organizadas para uma classe de situações específicas. É nesta estrutura que se encontra os conhecimentos do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que permitem a este realizar uma ação operatória, por exemplo, no campo da motricidade o esquema que organiza o movimento dos corpos do atleta no momento do salto em altura representa um impressionante conjunto de conhecimentos espaciais e mecânicos. Estes podem ser implícitos, os indivíduos utilizam em ação, mas não têm consciência ou explícitos, os quais estão relacionados a uma concepção e são expressos de forma simbólica, através, por exemplo, da linguagem.

O termo conhecimento possui para Vergnaud (1991) dois significados distintos: competências e concepções, os quais para Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001) estariam relacionados, pois a palavra competência refere-se as ações julgadas e implementadas pelo sujeito diante das situações e a palavra concepção fazer referência em geral as expressões verbais ou outras representações simbólicas que são expressas por sequência de enunciados.

Ainda quanto aos esquemas, estes são compostos de antecipações do objetivo a atingir, regras de ação, inferências e *conceitos-em-ação ou esquemas de ação*, que são utilizados em situações de aprendizagem de operações aritméticas (Vergnaud, 1991). Os esquemas de ação, por exemplo, permitem as crianças que não foram formalmente instruídas sobre a divisão solucionar problemas que envolvam essa operação através do *esquema de distribuição* e de *correspondência um-para-muitos* (Correa, 2006; Nunes &Bryant,1997).

Os esquemas também são compostos de *teoremas-em-ação* definidos como relações matemáticas utilizadas pelos estudantes quando selecionam uma ou várias operações para resolver um problema e auxiliam os indivíduos a transformar conhecimentos implícitos em conhecimentos explícitos (Vergnaud, 1988). Nunes (2016) dá o exemplo de que quando uma criança mostra três dedos para representar três doces ao resolver um problema de adição ela está demonstrando uma compreensão implícita de equivalência e essa suposição é um teorema-em-ação porque a criança pode não ser capaz de explicá-lo. Os teoremas-em-ação de acordo com Vergnaud (1988, p.149).

> [...] são uma forma de fazermos um melhor diagnóstico do que os estudantes sabem ou não sabem, para que nós possamos lhes oferecer situações que lhes permitam consolidar seus conhecimentos, aumentá-los, perceber seus limites, e, certamente, superá-los [...]

Salienta-se que o termo teorema não é empregado no sentido convencional, pois se refere a relações que não são explícitas e seu âmbito de validade é menor que o dos teoremas convencionais, visto que diz respeito a situações específicas.

Vergnaud (1988, 2011) destaca, ainda, que o par *situação/esquema* não reduz a importância da comunicação didática, pois o professor é um mediador, ou seja, seu papel não se limita a acompanhar a atividade dos alunos, mas ajudá-los a desenvolver seu repertório de esquemas e representações e principalmente proporcionar aos estudantes situações frutíferas/ diversificadas.

No que se refere a representação, ela é um conceito complexo e por isso muitos pesquisadores optam por utilizar outros termos como "conceituação" e "codificação. Não é algo estático, mas um processo dinâmico, que possibilita ao ser humano utilizar imagens internas, gestos e palavras, fazer inferências, antecipar eventos e pensar nos objetos, propriedades, relações, processos, ações e construções sobre os quais não há consenso entre as pessoas. A representação pode ainda ser verdadeira ou falsa, explícita ou implícita e atua em alguns casos como substituto da realidade e por isso é formada por teoremas-em-ação (Vergnaud, 1998).

A utilização desse quadro teórico permite a delimitação dos conceitos em campos conceituais, um conjunto de situações que dão sentido e significação aos conceitos, procedimentos e representações simbólicas. Para Vergnaud (1988, 1991) existem dois campos conceituais da aritmética, o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas que serão discutidos a seguir.

2.2.1 Campos conceituais da aritmética: As estruturas multiplicativas

Cada campo conceitual da aritmética possui sua especificidade, apesar da filiação entre as estruturas aditivas e multiplicativas. O campo conceitual das estruturas aditivas envolve as operações de adição e subtração e alguns conceitos como, cardinal e medida, transformação temporal pelo aumento ou diminuição, composição binária de medidas, entre outros. Já o campo das estruturas multiplicativas refere-se às operações de multiplicação ou divisão ou a combinação entre elas e envolve conceitos como: proporção, fração, razão, número racional, análise de dimensão, porcentagem, espaços vetoriais, funções lineares e não lineares (Vergnaud, 1988,1991).

A raiz da compreensão das estruturas aditivas e multiplicativas está nos esquemas-de-ação das crianças. No caso das estruturas aditivas, os esquemas de ação de juntar, separar e colocar em correspondência estão na base dos conceitos de adição e subtração, enquanto nas estruturas multiplicativas, os esquemas de ação da distribuição e da correspondência um-para-muitos estão na base da divisão e da multiplicação (e.g. Correa, 2004; Moro, 2004; 2005).

Vergnaud (1983) identifica três diferentes tipos de problemas do campo das estruturas multiplicativas: (i) proporção múltipla; (ii) produto de medidas e (iii) isomorfismo de medidas. Neste último concentra-se o foco da atenção deste estudo, o qual implica na proporção direta simples entre duas grandezas, por exemplo, pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância. Dentro do isomorfismo de medidas existem os problemas de divisão por partição e por quotas, que serão discutidas posteriormente.

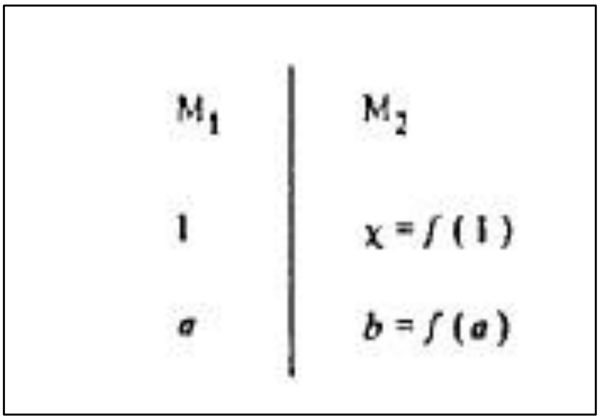
É imprescindível que os educadores matemáticos estudem as estruturas multiplicativas, dentro de campos conceituais, para que compreendam as filiações e saltos na aquisição do conhecimento dos estudantes e entendam como já foi mencionado, que um conceito não se desenvolve isolado, mas inter-relacionado com outros conceitos (Vergnaud, 1988) Sendo, portanto, relevante apresentar situações diversificadas e diferentes formas de representação que permitam a aquisição de um dado conceito. Isso porque como salienta Correa e Spinillo (2004) para auxiliar a desenvolver o raciocínio multiplicativo a escola não deve separar e tratar de forma meramente algorítmica, por exemplo, a divisão e a multiplicação, mas propor situações que permitam a coordenação entre estas operações.

Considerando que a divisão faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas e que envolve considerar dois tipos de situações-problema, torna-se relevante discutir tais situações e as investigações empíricas que contribuíram para a construção dessa investigação.

2.2.2 Conceito de divisão: Aspectos teóricos e empíricos

Como mencionado anteriormente Vergnaud (1983) distingue dois problemas de divisão, por partição e por quotas. No primeiro caso é fornecida uma quantidade inicial e o número de partes em que estaquantidade deve ser distribuída e é preciso encontrar o tamanho de cada parte.Por exemplo: *"Connie quer compartilhar seus doces com Jannie e Susan. A* *mãe dele lhe deu12 doces. Quantos doces cada um receberá?”.* Este problema é ilustrado na Figura 1, onde M1 = número de crianças e M2 = número de doces, a= 3 e b= 12.

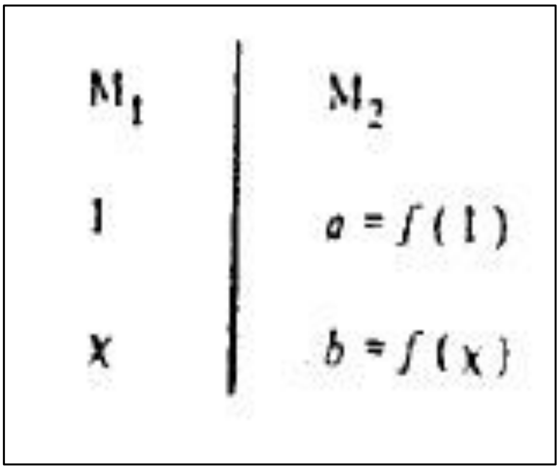
Figura 1 - Representação da divisão por partição



Fonte: (Vergnaud,1983, p.131)

Já nos problemas de divisão por quotas é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas, sendo necessário encontrar o número de partes em que esta quantidade deve ser distribuída. Por exemplo: *“Peter tem 15 euros para gastar e ele gostaria de comprar carros em miniatura. Cada carro custa 3euros. Quantos carros ele pode comprar?”*, sendo este problema ilustrado na Figura 2, onde M1= número de carros e M2=euros, a= 3 e b= 15.

Figura 2 - Representação da divisão por quotas



Fonte: (Vergnaud,1983, p.132)

Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985) também fazem essa distinção acerca da divisão por partição e por quotas e acrescentam que nas duas situações o dividendo deve ser maior que o divisor e na divisão partitiva o divisor deve ser um número inteiro e o quociente deve ser menor que o dividendo. Como se pode observar, cada divisão requer a realização de cálculos relacionais diferentes e elucida a ideia de que existem diferentes situações que envolvem um mesmo conceito. De acordo com a literatura da área (e.g.Brito, 2000; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Correa, 2006; Lautert, Spinillo & Correa, 2012;Nunes & Bryant, 1997; Vergnaud, 2009) a divisão é uma operação complexa e importante para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Para Brito (2000) ela é considerada a operação mais difícil para os alunos das séries iniciais do ensino fundamental, que não possuem uma compreensão de fato dos conceitos exigidos para executar as operações, mas reproduzem as orientações dos professores.

Vergnaud (2009) acrescenta que esta complexidade se deve a razões de ordem conceitual e complexidade das regras operatórias implicadas. No plano conceitual, diferente das demais operações, a divisão não é sempre exata e o quociente não é por si só, o resultado da aplicação do operador ao operando. Como regra operatória, ela não é exatamente o inverso da multiplicação. No plano das regras operatórias, a divisão é a mais complexa das quatro operações porque implica subtração, multiplicação, realização de divisões sucessivas,busca de um quociente e requer o estabelecimento das relaçõesentre o tamanho das partes, o número de partes e o tamanho do todo e a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes (Vergnaud, 1988, 1991, 2009).

A literatura aponta quatro tipos de dificuldades que crianças e adolescentes enfrentam quanto à divisão: a) dificuldades relacionadas aos tipos de problemas (e.g.Correa, Nunes & Bryant, 1998; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1998; Nunes & Bryant, 1997); b) dificuldades relacionadas aos suportes de representação (Selva, 1998); c) dificuldades em compreender as relações inversas entre os termos quando o dividendo é mantido constante (e.g.Kornilak & Nunes, 2005; Lautert, 2005; Oliveira, 2014; Squire & Bryant, 2002); d) dificuldades em lidar com o resto (e.g.Lautert, 2005; Spinillo & Lautert, 2006a). Quanto ao questionamento especificamente sobre a dificuldade dos tipos de problemas: partição e de quotas, não há consenso na literatura da área sobre um deles ser mais fácil que o outro, embora estudos chamem atenção que as situações de partição são mais presentes no cotidiano das crianças antes de ingressarem no contexto escolar (e.g. Correa, Nunes & Bryant, 1998; Fischbein, Deri, Nello & Marino,1985; Squire & Bryant, 2002).

Apesar da complexidade desta operação, estudos empíricos mostram que a aprendizagem e a compreensão das estruturas multiplicativas no contexto escolar em geral inicia por volta dos 8anos, no entanto uma grande parte dos estudantes chega ao final do Ensino Fundamental apresentando dificuldades para resolver problemas envolvendo estas estruturas (Vergnaud, 1988).

Magina, Santos e Merlini (2014) em acordo com esta ideia afirmam que diversos estudos verificaram que crianças a partir dos seis anos de idade possuem capacidade de resolver situações envolvendo a divisão e isto não é refletido na formulação do currículo de Matemática desenvolvido para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Uma das razões é a concepção de currículo que fundamenta a prática pedagógica do professor, ou seja, a ideia de que aprende a adição, depois a subtração e, em sequência, a multiplicação e a divisão.

Exposto tais situações sobre a divisão pode-se direcionar o olhar para as temáticas que têm sido discutidas em diferentes estudos envolvendo este conceito, a saber: compreensão intuitiva da divisão (e.g.Bell, Greer, Griminson & Mangan, 1989; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Mulligan & Mitchelmore, 1997), compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando dividendo é mantido constante (e.g.Correa, Nunes & Bryant, 1998; Lautert, Spinillo & Correa,2012; Oliveira, 2014), compreensão de quantidades intensivas (e.g.Nunes, Desli & Bell, 2003); relação de equivalência (Frydman & Bryant, 1988) como estudantes lidam com o resto em problemas de divisão inexata (Lautert & Spinillo, 2015),as discussões envolvendo o conceito de fração (e.g.Magina & Campos,2008; Pantziara & Philippou, 2001), as discussões sobre a importância da metacognição para a compreensão dos invariantes da divisão (Lautert & Spinillo, 2011) dentre outros.

Como pode ser observado a partir desse cenário, a discussão acerca da divisão está atrelada a diversas temáticas. Dentre estas, destaca-se a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e envolve as variáveis (condição, tipo de quantidade e situação de divisão), as quais serão discutidas na Parte 3 visando a um maior esclarecimento acerca do direcionamento do presente estudo.

2.3 *Números, quantidades e relações: Aspectos teóricos*

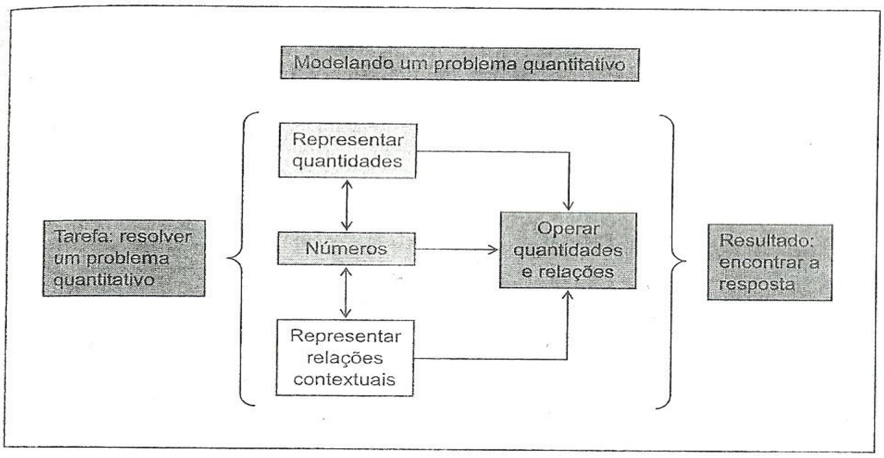
Segundo Nunes (2016), a matemática é um recurso culturalmente transmitido para modelar o mundo de forma a entendê-lo e controlá-lo. O termo modelagem refere-se ao processo de representação do mundo e de lidar com essa representação para obter conclusões sobre o mundo. Para modelarmos o mundo com matemática é preciso aprender a pensar sobre o mundo em termos de quantidades, operações e relações entre quantidades; a usar números para representar quantidades e relações e a pensar sobre as relações entre os números porque estes formam um sistema, e compreender esse sistema torna-se fundamental para entender o significado dos números no contexto em que esses são usados em nossa cultura.

A modelagem com a matemática "é uma aquisição precoce, que se baseia no entendimento da criança sobre equivalência entre um conjunto de sinais externos e os elementos do conjunto representados por esses sinais" (Nunes, 2016, p.130). No início as crianças sabem lidar com representações externas prolongadas e com o avanço da idade a medida que a compreensão delas acerca das operações matemáticas melhora, a capacidade de representação também.

Os números se referem ao conceito mais importante da matemática, ensinado no início da escolarização e desenvolvido ao longo do desenvolvimento da criança. Ele representa medida, ordem ou quantidade, está apoiado nas noções de aplicação, correspondência biunívoca, relação de equivalência e relação de ordem (Vergnaud, 2009) e representa as quantidades e as relações entre estas no cotidiano das crianças (Campos, Nunes, Costa & Ceragioli, 2012).

Os números, além das quantidades, operações e relações entre as quantidades constituem as quatro unidades básicas do modelo quantitativo. A compreensão das crianças e as representações de cada uma dessas unidades mudam com o desenvolvimento e a partir do aprendizado da matemática na escola. Para coordenar essas mudanças nas representações com uma ideia de uma função constante remete-se ao conceito de Luria (1973, citado por Nunes, 2016) de funções mentais superiores, que ele contrasta com as funções biológicas. Esta autora afirma que de acordo com Luria, as funções biológicas envolvem uma tarefa fixa realizada por mecanismos e órgãos fixos, assim como as funções mentais superiores envolvem uma tarefa fixa que pode ser realizada por diferentes mecanismos e órgãos. A modelagem com matemática como uma função mental superior está ilustrada na figura abaixo.

Figura 3 - Modelagem com matemática como uma função mental superior



Fonte: Nunes (2016, p.133)

Para Nunes (2016, p. 130), o raciocínio quantitativo envolve tanto o uso de números quanto o raciocínio dedutivo para modelar o mundo. Números e quantidades não possuem o mesmo significado, pois é possível pensar sobre relações entre quantidades sem utilizar números através do raciocínio dedutivo e exemplifica: "*se você sabe que Peter é mais alto do que Jack, e que Jack é mais alto do que Rob, você sabe que Peter é mais alto que Rob sem saber nada sobre o quão alto cada um deles*". Assim como é possível raciocinar sobre as relações entre quantidades usando números e o raciocínio dedutivo sem saber as quantidades como no seguinte problema: "*se Peter é 5cm mais alto que Jack e Jack é 2 cm mais alto que Rob você sabe que Peter é 7cm mais alto que Rob, mesmo não sabendo a altura de nenhum desses garotos"* (Nunes, 2016, p. 130). Nesse sentido, a autora afirma que apesar de podermos pensar sobre relações entre quantidades sem utilizar números, quando aprendemos a lidar com números ampliamos a precisão e o poder do nosso raciocínio, pois isso nos permite ter informações além do que é obtido pela percepção e temos a possibilidade de construir modelos de mundo melhores.

Em concordância com esta autora, Correa (1996) também reconhece que podemos pensar sobre relações entre quantidades sem utilizar números e denomina estas quantidades, que são representadas pelas relações matemáticas, maior, menor, mais, menos de *códigos relativos*, termo que será adotado neste estudo. De acordo com esta autora e para Correa, Nunes e Bryant (1998) é mais fácil para as crianças pequenas, que ainda não conseguem realizar cálculo numérico com precisão pensar sobre as operações de divisão em termos relativos do que em termos absolutos (tarefas de cálculo).

Pensar relativamente, ou seja, utilizando códigos relativos, implica segundo, Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985) o uso de modelos intuitivos, os quais estariam relacionados a cada uma das quatro operações aritméticas e auxiliariam as crianças pequenas a solucionarem um problema ao permitir identificar a operação necessária à resolução da tarefa. Devido aos problemas de divisão partitiva serem resolvidos mais facilmente pelos sujeitos em comparação a outros tipos de problemas, os autores consideram esta operação como sendo o modelo intuitivo da operação aritmética de divisão.

As quantidades podem ser classificadas como *discretas* ou *contínuas*. Segundo Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) a quantidade discreta é natural e se refere a quantidades distintas, contáveis, que não podem ser divididas em partes, como carro e bicicleta. Vergnaud (2009) dá o exemplo do conjunto de duas crianças pertencentes a mesma equipe, no qual elas podem ser vizinhas e distintas sem que qualquer outra equipe intermediária possa ser colocada entre elas.

Já as quantidades contínuas são convencionais, como metros e não se referem a objetos distintos, mas as partes de um mesmo objeto, como bolo ou uma pizza (Nunes *et al*., 2005), assim o resultado da divisão de quantidades contínuas são frações (Nunes & Bryant, 1997). Vergnaud (2009) dá o exemplo da equivalência de altura de duas crianças como formadora de um conjunto *contínuo*, ou seja, para dois tamanhos a e b, sendo um próximo do outro, pode existir um intermediário c que estará separado por um intervalo ainda menor.

Apesar das diferenças entre as quantidades contínuas e descontínuas, elas estão baseadas na mesma estrutura lógica que é a relação parte-todo: a soma das quantidades é igual ao valor do todo. Essa estrutura lógica relaciona-se ao fato de que a medida dessas quantidades é essencialmente uma comparação entre duas quantidades da mesma natureza "três metros" expressa a comparação de uma unidade de comprimento, o metro, com outro comprimento, o comprimento da mesa (Nunes & Bryant, 1997).

Segundo Nunes et al., (2005) as crianças têm mais dificuldade de compreender as quantidades contínuas pelo fato das unidades que compõem esta quantidade não serem percebidas separadamente e precisarem ser compreendidas como idênticas, caso contrário o significado do número se torna dúbio. Estes autores afirmam ainda que as principais dificuldades das quantidades contínuas em relação às discretas se referem ao fato delas não serem naturais, mas convencionais.

Smith, Solomon e Carey (2005) sugerem que a compreensão da divisibilidade infinita de quantidades físicas contínuas (por exemplo, comprimento ou volume) parece preceder a do número como infinitamente divisível (apesar de em grande parte a aquisição da noção de divisão infinita de números e a de quantidades físicas progredirem em paralelo). Assim, embora as crianças pequenas possam negar que exista um número entre 0 e 1, elas podem ver em uma medição que existe uma linha de comprimento de unidade entre a origem e a primeira unidade em uma linha de número e entender a divisibilidade infinita do número, a partir desta observação de quantidades físicas contínuas. Nesse sentido, as noções iniciais acerca de transformações multiplicativas poderiam se desenvolver primeiro no contexto de quantidades contínuas (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002).

Entretanto, segundo Smith, Solomon e Carey (2005), naturalmente, as quantidades físicas não são infinitamente divisíveis, tanto por causa das limitações técnicas quanto porque a matéria se constitui de partículas, mas há muitas evidências de que as crianças compreendem uma quantidade física contínua inicialmente como um todo que não pode ser dividido, para depois compreenderem como uma quantidade divisível. Por exemplo, antes de aprender sobre átomos, estudantes do ensino fundamental desenham modelos contínuos de líquidos e ficam se questionando ao descobrir que o volume de uma mistura de álcool e água foi menor do que a soma do volume de cada líquido (Snir, Smith & Raz, 2003).

Como mencionado anteriormente é preciso aprender a pensar sobre o mundo em termos de relações e duas relações diferentes que as crianças devem entender são as *relações diretas* e *inversas*. Nos problemas que envolvem relação direta se descreve uma correspondência de um–para–muitos entre as variáveis e o valor dos fatores são indicados (Vergnaud, 2011). Para Correa (2006) na relação direta se mantêm constante o número de divisores em uma relação entre dividendo e quociente, assim o aumento em um dos termos ocasionaria o acréscimo no outro.

Enquanto as relações inversas, foco deste estudo, são aquelas operações que possibilitam passar do estado final ao estado inicial (Vergnaud, 2011). Nestes problemas, um dos fatores está ausente, e a pergunta é realizada sobre o valor desse fator (Nunes *et al.*, 2005). A relação inversa em específico entre os termos da divisão remete à ideia de que o número de partes em que um conjunto foi dividido é inversamente proporcional ao tamanho das partes (Correa, Nunes & Bryant,1998).

A relação direta é inapropriada para investigar a compreensão do conceito de divisão, o qual implica na compreensão da coordenação dos termos envolvidos, pois o êxito de uma criança nesses problemas poderia não ser consequência desta coordenação das transformações ocorridas em todos os termos da operação, mas do foco nas alterações de apenas um termo, o dividendo. Nesse sentido, se faz necessário analisar problemas de divisão que envolvam relações inversas entre divisor e quociente quando o dividendo for mantido constante (Correa, 2006).

Para Nunes *et al*., (2008), a compreensão das relações inversas é a base para a aprendizagem da aritmética e em particular a compreensão delas quanto as relações inversas entre a adição e a subtração é um precursor para compreensão da relação inversa entre multiplicação e divisão. Entretanto é mais difícil para as crianças ter uma compreensão consistente das relações inversas do que das relações diretas, porque elas possuem mais experiência com as relações diretas durante o seu desenvolvimento (e.g.Correa, Nunes & Bryant,1998; Correa, Meireles & Curvelo, 2000).

Nunes (2016) defende ainda que existem duas relações, as necessárias e as contextuais, as quais estão envolvidas na resolução de problemas. Dois exemplos de *relações necessárias* de parte-todo que as crianças devem compreender são: a comutatividade da adição, ou seja, a + b é o mesmo que b+a e a relação inversa entre adição e subtração. Essas relações devem ser investigadas em problemas que envolvem quantidades e são ligados por uma operação de adição ou subtração, a saber: problemas de combinação e transformação. Já as *relações contextuais* são definidas dentro do problema, assim existiriam diferentes formas de descrever a relação entre duas quantidades, as quais dependem do contexto, por exemplo, neste problema multiplicativo: "*Rob e Anne tem 15 livros juntos (quantidade). Rob tem 2 vezes mais livros que Anne. Quantos livros tem cada um*? (p.141)" a relação seria "Rob tem 2 vezes mais livros que Anne", já se essa situação fosse aditiva a relação seria "Rob tem 5 livros a mais que Anne". Para solucionar um problema que envolve relações contextuais é necessário estabelecer uma conexão entre a descrição da relação e uma operação aritmética e elas derivam de problemas de comparações.

Ademais, os problemas de comparação que envolvem relações contextuais seriam mais difíceis do que os problemas de combinação e transformação que envolvem apenas quantidades e operações, relações necessárias. Diante disso, Nunes (2016) defende a hipótese de que um problema é resolvido quando as crianças utilizam relações contextuais, ou seja, quando quantidades são conectadas a uma operação, e a criança entende as relações necessárias para aquela operação.

A seguir apresentam-se alguns estudos empíricos que envolvem as idéias de número, códigos relativos, quantidades e relações no conceito de divisão aqui mencionadas.

2.4 *Estudos empíricos envolvendo número, quantidades e relações no conceito de divisão*

Exposta a discussão da literatura acerca das relações, números e quantidades pode-se direcionar o olhar para as pesquisas que tratam dos aspectos envolvidos na divisão mencionados neste estudo. Correa, Nunes e Bryant (1998) realizaram um estudo acerca das relações inversas em problemas de divisão envolvendo códigos relativos. Participaram 120 crianças de escolas estaduais de Oxford que foram divididas em dois grupos. Cada grupo participou de um experimente diferente, o primeiro apresentava problemas de divisão por partição e o segundo grupo problemas de divisão por quotas. Os materiais utilizados foram brinquedos: coelhos rosa e azul e caixas de plástico representando doces.

No primeiro experimento (divisão por partição) os doces (12 ou 24) foram distribuídos para os dois grupos de coelhos e as crianças foram solicitadas a responder se os dois grupos haviam recebido a mesma quantidade de doces ou se um grupo teria recebido mais que o outro e a justificarem suas respostas. As crianças participaram de duas sessões, nas quais foram apresentadas duas condições denominadas: "mesmo divisor" (os dois grupos tinham a mesma quantidade de coelhos) e "divisor diferente" (em cada grupo havia quantidades diferentes de coelhos). Nas duas condições a quantidade de coelhos variou de 2 a 4.

No experimento 2 (divisão por quotas) as crianças foram informados de que o experimentador tinha uma quantidade de doces que pretendia dar a cada coelho rosa e azul, ou seja, a quota e queele queria convidar coelhos rosa e azuis para um piquenique mas não sabia saber quantos poderia convidar. Em seguida o experimentador questionava as crianças se ele poderia convidar o mesmo número de coelhos rosa e azul para o piquenique ou se ele deveria convidar mais coelhos de um grupo do que de outro e solicitava que justificassem suas respostas. As crianças participaram de duas sessões, nas quais foram apresentadas duas condições denominadas: "mesmo divisor" (os dois grupos recebiam a mesma quantidade de doces) e "divisor diferente" (os dois grupos recebiam quantidades diferentes de doces). Nas duas condições a quantidade de doces variou de 2 a 4. Os resultados desse estudo revelaram a capacidade das crianças pequenas de compreender as relações inversas entre os termos da divisão por partição e quota e uma melhor compreensão destas relações com o aumento da idade.

Kornilak e Nunes (2005) em seu estudo objetivaram verificar se as crianças podem transferir sua compreensão de relações lógicas de divisão de quantidades discretas para resolver problemas similares com quantidades contínuas apesar das quantidades envolverem processos diferentes. Procedendo de forma semelhante a Correa, Nunes e Bryant (1998), as pesquisadoras realizaram dois experimentos com dois grupos diferentes de 96 crianças entre cinco e sete anos de idade do nordeste de Londres que não haviam sido instruídas formalmente acerca da divisão. Os participantes resolviam problemas orais de partição e quotas que envolviam códigos relativos, quantidades discretas e contínuas e tinham a sua disposição material concreto para resolvê-los.

No primeiro experimento as crianças foram divididas em dois grupos para solucionar problemas de divisão por partição. O primeiro envolvia problemas em que o dividendo era uma quantidade discreta, peixes (variavam de 12 a 24) e o divisor eram gatos (divididos em brancos e marrons variando de dois a seis) apresentados em duas condições. Na primeira condição denominada "mesma" a quantidade de gatos nos dois grupos era igual e na segunda denominada "diferente" a quantidade de gatos nos dois grupos era distinta, um grupo tinha dois gatos e o outro três gatos, por exemplo. As crianças deveriam informar quantos peixes cada grupo de gatos deveria receber, se os gatos brancos receberiam a mesma quantidade de peixe que os gatos marrons ou não, se respondesse que não deveriam dizer que grupo receberia mais. Ao segundo grupo de crianças foram apresentados problemas equivalentes, porém o dividendo era uma quantidade contínua, bolos de peixe (variou de um a três) que deveria ser dividido entre um número maior de gatos.

O Experimento 2 foi realizado da mesma forma, porém envolvendo problemas de divisão por quota. Nos problemas que envolviam quantidades discretas na condição "mesma", as crianças eram informadas que os gatos brancos gostariam de distribuir uma quantia de peixe para dois amigos e os gatos marrons também. Já na condição "diferente" gatos brancos gostariam de distribuir uma quantidade de peixe com dois amigos enquanto os marrons gostariam de dividir com três amigos, por exemplo. Então as crianças eram questionadas se os gatos brancos e marrons distribuiriam os peixes com a mesma quantidade de amigos, se respondessem não elas deveriam dizer que grupo daria peixe para mais amigos. Os problemas que envolviam quantidades contínuas eram equivalentes, porém a quantia a ser dividida eram pedaços de bolo (variou de metade, 1/3, 1/4 ou 1/8) que na condição "mesma" eram pedaços de tamanhos iguais e na condição "diferente" eram pedaços de tamanhos distintos.

Nesse estudo foi observado que o desempenho das crianças variou em função da idade e do uso do princípio lógico de equivalência e da relação inversa entre divisor e quociente na resolução de problemas, mas não em função do tipo de quantidade (discreto ou contínuo).

Além disso, o efeito do tipo de problema (partição ou quota) na compreensão da relação inversa entre divisor e quociente foi o mesmo com quantidades contínuas e discretas: as crianças têm mais facilidade de raciocinar acerca das relações inversas em problemas de partição do que de quota, tais resultados corroboram como estudo de Correa, Nunes e Bryant (1998) que encontrou resultados semelhantes no que se refere as quantidades discretas.

Kornilak e Nunes (2005) verificaram ainda que a maioria das crianças de sete anos, que não receberam instrução formal acerca da divisão, compreendem a relação inversa entre divisor e quociente em problemas de divisão por quota que envolvem quantidades discretas.Esta descoberta também concorda com o estudo de Correa, Nunes e Bryant (1998).

Na discussão dos seus resultados, Kornilak e Nunes (2005) afirmaram que o desempenho das crianças para resolverem problemas de divisão foi influenciado não apenas pelo uso do raciocínio intuitivo defendido por Fischbein (1987), mas pelo nível das tarefas, pois as crianças que utilizaram o raciocínio errado na tarefa de divisão por quota, não utilizaram na divisão por partição.

Outro estudo sobre as relações inversas foi desenvolvido por Correa, Meireles e Curvelo (2000). As autoras investigaram a compreensão de61 crianças de cinco a sete anos de idade de uma escola pública do Rio de Janeiro acerca da relação inversa entre os termos da divisão por partição quando o dividendo é mantido constante envolvendo apenas quantidades contínuas. Esse estudo consistiu em tarefas do tipo relacional em que as crianças tiveram que julgar o valor relativo dos quocientes. Nessas tarefas eram apresentadas às crianças dois grupos de bonecos (o número de elementos em cada grupo variou de dois a quatro) dispostos em diferentes lados da mesa. Uma quantidade preestabelecida de chocolate e suco deveria ser distribuída igualmente para cada grupo de bonecos e elas deveriam julgar a quantia de chocolates (ou copos de suco) que cada boneco receberia nas duas condições, que foram designadas como Condição “Mesma” (mesmo número de elementos, por exemplo, dois meninos e duas meninas) e Condição “Diferente” (cada grupo de bonecos tinha um número diferente de elementos, por exemplo, duas meninas e três meninos).

As quantidades foram apresentadas em dois contextos aqui designados como “Numérico” e de “Tamanho”. No primeiro contexto seriam dados aos bonecos pedaços de chocolates (ou copos de suco) e as crianças avaliaram se cada um dos bonecos em um grupo receberia maior, menor ou igual número de pedaços (ou copos de suco) que os bonecos de outro grupo. No caso do Contexto Tamanho, as crianças avaliaram o tamanho do pedaço da barra de chocolate (ou da quantidade da garrafa de suco) dado a cada boneco nos dois diferentes grupos.

Esta pesquisa observou, em concordância com Kornilak e Nunes (2005) que com o aumento da idade houve o desenvolvimento das habilidades das crianças em lidar com a relação de ordem inversa entre divisor e quociente e o aumento de justificativas que fazem menção a fatores que são matematicamente relevantes à solução do problema, reduzindo a freqüência de respostas sem justificativas. Os resultados mostram ainda que a experiência em estabelecer comparações entre partilhas idênticas é anterior e parece constituir experiência fundamental à criança para a compreensão das relações entre os termos envolvidos na operação de divisão, principalmente no julgamento das relações inversas.

Lautert (2005) realizou uma pesquisa com 100 estudantes entre oito e 11 anos, do 4º ano do ensino fundamental de escolas públicas do Recife visando investigar se uma intervenção específica sobre as dificuldades das crianças com as relações inversas entre os termos da divisão e sobre o significado do resto e sua relação com os demais termos da divisão; poderia contribuir para melhora das crianças que apresentam dificuldades em lidar com a divisão. Para assegurar que fossem selecionadas apenas as crianças com dificuldade na divisão foi aplicado um pré-teste geral com 12problemas de divisão. Após esse momento, as crianças foram divididas em dois grupos: grupo Experimental (GE) e grupo Controle (GC) e todas participaram de um pré-teste específico.

A intervenção que o grupo Experimental (GE) se submeteu consistia na criança solucionar individualmente problemas problema de divisão por partição e quota que exigia: compreender as relações inversas entre os termos da relação quando o dividendo é mantido constante; compreender o efeito do aumento do valor do resto sobre os demais termos e analisar procedimentos de resolução corretos e incorretos apresentados sob forma pictográfica. Durante a intervenção, oferecida apenas para o grupo experimental, as crianças recebiam *feedback* e explicações do examinador com o intuito de auxiliá-las a compreender os princípios invariantes da divisão. Por fim foi aplicado um pós-teste geral e específico com todas as crianças, a partir do qual observou-seque as crianças do grupo Experimental apresentavam melhor desempenho e justificativas mais elaboradas que demonstravam uma compreensão dos invariantes da divisão quando comparada as crianças do grupo controle. Assim, o estudo concluiu que a intervenção propiciou uma melhora no desempenho e nas justificativas elaboradas pelas crianças do grupo experimental, porém contatou-se que as relações inversas parece ser um dos invariantes da divisão mais difíceis de ser compreendido pelas crianças quando comparado as formas de lidar com o resto em problemas de divisão inexata.

Além das pesquisas mencionadas, destaca-se a desenvolvida por Oliveira (2014) por se constituir como pano de fundo para a reflexão acerca da resolução de problemas de divisão por crianças nos anos iniciais da escolarização. Esta autora verificou a compreensão de crianças dos anos inicias de uma escola particular do Recife na resolução de problemas de divisão acerca das relações inversas entre quociente e divisor quando o dividendo é mantido constante, sem a presença explícita do número expressando quantidades. Os participantes foram organizados em três grupos, a saber: Grupo 1: Infantil 3, Grupo 2: 1º ano do Ensino Fundamental 1 e Grupo 3: 2º ano do Ensino Fundamental 1.

Quanto ao método, todas as crianças resolverem individualmente em duas sessões, 12 problemas de divisão envolvendo as relações inversas, sendo seis de partição e seis de quota, distribuídos entre: *Condição 1* - problemas envolvendo relações inversas com a presença explícita do número, *Condição 2* - problemas envolvendo quantidades e códigos relativos, mas sem a explicitação numérica. Ela observou que a Condição 1 mostrou-se mais difícil para todos os grupos, sendo encontrada diferença significativa entre as condições nos Grupos 2 e 3, que as crianças que estão se apropriando da possibilidade de operar com os números, parecem prestar mais atenção nas relações de covariação quando existe a presença de códigos relativos. Além disso, todos os grupos apresentaram mais justificativas imprecisas em ambas as condições. Assim, ela concluiu que ao fazer o julgamento das relações inversas entre os termos quando o dividendo é mantido constante a criança usa como critério o tamanho do divisor e desconsidera as outras relações presentes tanto na condição com a presença de números como na condição com a presença de códigos relativos.

Apesar das contribuições trazidas pelos estudos referenciados ao trazerem a proposta de compreender e intervir nas relações inversas entre os termos da divisão constata-se que as pesquisas de Correa Nunes e Bryant (1998), Kornilak e Nunes (2005), Correa, Meireles e Curvelo (2000) e Lautert (2005) selecionaram como participantes apenas crianças que não haviam sido instruídas formalmente sobre a divisão ou apenas as que já haviam sido instruídas e excluindo a pesquisa de Kornilak e Nunes (2005) todas as demais focaram ora quantidades discretas e ora quantidades contínuas. Além disso, Kornilak e Nunes (2005), Correa Nunes e Bryant (1998) e Correa, Meireles e Curvelo (2000) utilizaram apenas problemas que envolviam material concreto e códigos relativos, enquanto Lautert (2005) apresentou problemas que envolviam números e códigos relativos em cartelas. Já o estudo de

Oliveira (2014) que constituiu o *background* desta pesquisa, apesar de considerar além das situações (partição e quota), códigos relativos e números se concentrou apenas nas quantidades discretas e em estudantes de escolas particulares que não foram instruídos formalmente sobre a divisão.

Faz-se necessário, portanto um estudo considere que articule tanto as quantidades contínuas quanto as discretas considerando crianças que foram ou não instruídas formalmente sobre a divisão na intenção de compreender mais sobre o desenvolvimento da concepção de relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Em outras palavras, para investigar melhor sobre as relações de covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante seria pertinente a elaboração de um estudo em que várias variáveis fossem simultaneamente exploradas, tais como: a presença de números, códigos relativos e tipos de problemas (partição e quota) relacionando-os as quantidades discretas e contínuas com crianças com e sem a instrução no contexto escolar.

A partir das reflexões teóricas e contribuições dos estudos expostos, questiona-se: (i) Será que estudantes instruídos formalmente sobre a divisão apresentam melhor desempenho na resolução de problemas de relação inversa entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante considerando a presença de números e códigos relativos envolvendo quantidades *discretas ou contínuas* quando comparado aos que não foram formalmente instruídos sobre este conceito no contexto escolar? (ii) Qual a natureza das justificativas adotadas pelos estudantes para resolverem problemas de relação inversa entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante na presença de números e códigos relativos quando são apresentadas quantidades *discretas e contínuas?* Estariam essas justificativas atreladas ao nível de escolaridade? (iii) Existiria um tipo de erro mais frequente quando se considera as condições (presença de números vs códigos relativos) e as quantidades *discretas e contínuas*?

3 MÉTODO

3.1 *Objetivos*

Em face do exposto o presente estudo tem por objetivo geral investigar a compreensão de estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental acerca das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante considerando quantidades discretas e contínuas. De forma específica examina: (i) se a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante envolvendo quantidades discretas e contínuas estariam relacionadas ao fato de serem apresentadas sob a forma de números ou códigos relativos; (ii) se a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante considerando quantidades discretas e contínuas estariam relacionadas aos problema de divisão: partição e quota; (iii) a natureza das justificativas apresentadas pelos estudantes em relação as variáveis investigadas: quantidade discreta vs contínua; número vs. código; (iv) se existem diferenças no desempenho e nas justificativas em relação as principais variáveis investigadas (condição e quantidade quando se considera os anos escolares investigados.

3.2 *Participantes*

Participaram desse estudo80estudantes, de ambos os sexos, com idades entre 7 e 12 anos, cursando os 3º e 5º anos dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de João Pessoa, sendo esses escolhidos aleatoriamente (através de sorteio) e posteriormente alocados em dois grupo sem função do nível de instrução escolar, a saber:

Grupo 1: 40 estudantes do 3º ano (média de idade: 8 anos, máximo 9 anos e mínimo 7 anos) sem instrução formal sobre a divisão no contexto escolar.

Grupo 2: 40 estudantes do 5º ano (média de idade: 10 anos e 8 meses, máximo 12 anos e mínimo 9 anos) com instrução formal sobre a divisão no contexto escolar.

3.3 *Procedimentos e planejamento experimental*

O projeto foi realizado de acordo com as prescrições da resolução nº196/96 do Conselho Nacional de Saúde, Diretriz Nacional que regulamenta as pesquisas que envolvem seres humanos. Após a aprovação do Comitê de Ética foi realizado um novo contato com a escola para a distribuição do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE com as turmas acordadas para a participação da investigação. De posse dos termos assinados iniciou-se a coleta com os estudantes do 3º ano e posteriormente com os estudantes do 5º ano.

A investigação foi realizada em duas sessões individuais, com intervalos de dois a quatro dias entre elas, sendo todas as sessões gravadas em MP3 e posteriormente transcritas em protocolos individuais para realização da análise. Em cada sessão os estudantes foram solicitados a resolverem 12 problemas de divisão envolvendo a presença de números (Condição 1) e problemas de divisão envolvendo a presença de códigos relativos (Condição 2). Salienta-se que em cada condição foram apresentados problemas com quantidades contínuas e discretas envolvendo problemas de divisão por partição e divisão por quotas.

Os problemas apresentados em ambas as condições foram construídos baseados nos estudos de Lautert (2005) e Oliveira (2014) que investigam a compreensão de estudantes sobre as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante envolvendo quantidades discretas. A seguir são apresentadas as duas condições elaboradas para essa investigação, a saber:

Condição 1 (C1): Nesta condição são apresentados problemas de divisão envolvendo as relações inversas entre os termos quando o dividendo é mantido constante, na qual os problemas apresentam números para representar quantidades. Todos os participantes foram solicitados a resolver 12 problemas de divisão, sendo seis com quantidades discretas e seis com quantidades contínuas envolvendo problemas de partição e quotas (ver Quadro 1).

Quadro 1 - Visão geral dos problemas a serem apresentados na Condição 1 (presença de números)

Quantidades	Partição	Quota
	(DPP1) Ivete e Diana foram a uma floricultura próxima à casa delas e cada uma comprou 21 rosas. Ivete quer colocar suas rosas em 3 vasos e Diana quer colocar suas rosas em 7 vasos. Quem vai ter vasos com mais rosas, Ivete ou Diana? Por quê? Resposta: Ivete. Ela quer	**(DPQ2)** Fernanda e Otávio foram a papelaria e cada um comprou 24 figurinhas. Fernanda quer colar 4 figurinhas em cada página de seu caderno e Otávio quer colar 6 figurinhas. Quem vai precisar de mais páginas para colar todas as figurinhas, Otávio ou Fernanda? Por quê? Resposta: Fernanda. Ele vai colocar

Discretas	colocar suas rosas em menos vasos, portanto ela terá mais rosas nos vasos. Referentes: rosas/vasos Pares numéricos: 21:3 = 7 21:7= 3 **(DPP3)** Davi e Gabriel foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 16 carrinhos coloridos. Gabriel quer colocar seus carrinhos em 4 caixas e Davi quer colocar seus carrinhos em 8 caixas. Quem vai ter caixas com menos carrinhos coloridos, Gabriel ou Davi? Por quê? Resposta: Davi. Ele quer colocar seus carrinhos em mais caixas, portanto terá menos carrinhos nas caixas. Referentes: carrinhos/ caixas Pares numéricos: 16:4 = 4 16:8=2 **(DPP5)** Letícia e Alice foram ao parque fazer um piquenique, e cada uma levou 12 biscoitos para comer. Letícia quer colocar seus biscoitos em 2 potes e Alice quer colocar seus biscoitos em 6 potes. Quem vai ter potes com mais biscoitos, Letícia ou Alice? Por quê? Resposta: Letícia. Ela colocará seus biscoitos em dois potinhos, portanto terá mais biscoitos no pote Referentes: biscoito/ potes Pares numéricos: 12:2 = 6 12:6=2	menos figurinhas em cada página, portanto precisará de mais páginas Referentes: figurinhas/página de caderno Pares numéricos: 24:4 = 6 24:6= 4 **(DPQ4)** Miguel e João foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 18 bolinhas. Miguel quer guardar 3 bolinhas em cada saquinho e João quer guardar 6 bolinhas em cada saquinho. Quem vai precisar de menos saquinhos para colocar todas as bolinhas, Miguel ou João?Por quê? Resposta: João. Ele quer guardar mais bolinhas em cada saquinho, portanto precisará de menos saquinhos. Referentes: bolinhas/ saquinhos Pares numéricos: 18:3 = 6 18:6= 3 **(DPQ6)** Luana e Marta foram a uma festa, e cada uma ganhou 15 pulseiras de brinde. Luana quer colocar 3 pulseiras na bolsa e Marta quer colocar 5 pulseiras na bolsa. Quem vai precisar de mais bolsas para colocar todas as pulseiras, Luana ou Marta? Por quê? Resposta: Luana. Ela colocará menos pulseiras em cada bolsa, portanto precisará de mais bolsas. Referentes: pulseiras/ bolsas Pares numéricos: 15:3 = 5 15:5= 3
	(CPP7) Andréia e Bruno fizeram na hora do lanche cada um, 1 litro de suco para distribuir igualmente com seus primos. Andréia deu o suco	**(CPQ8)** Manoela e Fernanda fizeram cada uma, 1litro de suco de laranja para distribuir igualmente com seus amigos. Manoela colocou o suco em copos de 100ml e

Contínuas	para 4 primos e Bruno para 6 primos. Quem vai ter copos com mais suco os primos de Andréia ou os de Bruno? Por quê? Resposta: Andréia. Ela deu para menos primos, portanto eles vão ter mais suco no copo. Referentes: suco/primos 1 litro dividido entre 4primos 1 litro dividido entre 6primos **(CPP9)** Carol e Diego foram a padaria e cada um comprou 1 bolo do mesmo tamanho. Carol quer distribuir igualmente o bolo com 3 amigos e Diego com 7 amigos. Quem vai ter os pedaços de bolo menor, os amigos de Carol ou de Diego? Por quê? Resposta: Diego. Ele tem mais amigos, portanto pedaços de bolo menor. Referentes: bolo/amigos 1 bolo dividido entre 3 amigos 1 bolo dividido entre 7 amigos **(CP11)** Antônio e Carla foram visitar seus avós e cada um ganhou 15 reais para dividir igualmente com seus irmãos. Antônio tem 2 irmãos e Carla tem 4 irmãos. Quem vai ficar com menos dinheiro, os irmãos de Carla ou os irmãos de Antônio? Por quê? Resposta: Carla. Ela tem mais irmãos, portanto menos dinheiro para cada um deles. Referentes: dinheiro/irmãos Pares numéricos: 15:3 =5 15:5=3	Fernanda em copos de 200ml. Quem vai distribuir o suco de laranja com mais amigos, Manoela ou Fernanda? Por quê? Resposta: Manoela. Ela colocou o suco em copos de 100ml, portanto um copo menor. Referentes: suco laranja/amigos 1 litro de suco dividido em copos de 100ml 1 litro de suco dividido em copos de 200ml **(CPQ10)** Dara e Joana compraram cada uma 1 pizza grande de calabresa. Dara quer dar 3 pedaços de pizza para cada um de seus amigos e Joana quer dar 4 pedaços de pizza. Quem vai dar pedaços de pizza menores aos seus amigos, Dara ou Joana? Por quê? Resposta: Joana Ela vai dar 4 pedaços da pizza, portanto terá os pedaços menores Referentes:pizza/amigos 1 pizza dividida em 3 pedaços 1 pizza dividida em 4 pedaços **(CPQ12)** Maria e Paulo ganharam de suas mães, cada um, 12 reais de mesada. Maria quer comprar doces que custam 3 reais e Paulo quer comprar doces que custam 4 reais. Quem vai comprar menos doces com o dinheiro que recebeu, Maria ou Paulo? Por quê? Resposta: Paulo. Ele irá comprar doces mais caros, portanto poderá comprar menos doce. Referentes: dinheiro/ doces Pares numéricos: 12:3 = 4 12:4= 3

Condição 2 (C2): Nesta condição são apresentados problemas de divisão envolvendo as relações inversas entre os termos quando o dividendo é mantido constante, na qual os problemas não explicitam quantidades numericamente enfocando os códigos relativos, sem a presença explícita de números. Todos os participantes foram solicitados a resolver 12 problemas de divisão, sendo seis com quantidades discretas e seis com quantidades contínuas envolvendo problemas de partição e quotas (ver Quadro 2).

Quadro 2: Visão geral dos problemas a serem apresentados na Condição 2(presença de códigos relativos)

Quantidades	Partição	Quota
Discretas	**(DPP13)** Marcos e Camila foram a uma papelaria e cada um comprou a mesma quantidade de lápis de cor. Marcos tem mais estojos do que Camila para colocar os lápis de cor. Quem vai colocar menos lápis de cor nos estojos, Marcos ou Camila? Por quê? Resposta: Marcos. Ele tem mais estojos, portanto colocará menos lápis de cor nos estojos. Referentes: lápis de cor/ estojos **(DPP15)** Artur e Patrícia foram visitar suas avós e ganharam, cada um, a mesma quantidade de maçãs para colocar em cestas. Artur tem menos cestas do que Patrícia para colocar as maçãs. Quem vai ter as cestas com mais maçãs, Patrícia ou Artur? Por quê? Resposta: Artur. Ele tem menos cestas, portanto mais maçãs. Referentes: maças/cestas **(DPP17)** Bruna e Rodrigo são professores. Cada um deles comprou a mesma quantidade de bombons para presentear os seus alunos. A professora Bruna tem menos alunos do que	**(DPQ14)** Júlia e Rafael são irmãos e estão arrumando o guarda roupa. Cada um deles tem a mesma quantidade de blusas. Júlia vai colocar mais blusas do que Rafael em cada gaveta. Quem vai precisar de menos gavetas para arrumar as blusas, Rafael ou Júlia? Por quê? Resposta: Júlia. Ela vai colocar mais blusas em cada gaveta, portanto ela precisará de menos gavetas. Referentes: camiseta/gavetas **(DPQ16)** Depois do almoço Pedro e Tereza ajudaram a sua tia fazendo biscoitos. Cada um deles fez a mesma quantidade de biscoitos. Pedro vai colocar menos biscoitos do que Tereza em cada bandeja. Quem vai precisar de mais bandejas, Pedro ou Tereza? Por quê? Resposta: Pedro. Ele vai colocar menos biscoitos nas bandejas, portanto ele precisará de mais bandejas. Referentes: biscoitos/bandejas **(DPQ18)** Guilherme e Mateus foram ao cinema e convidaram seus amigos da escola. Cada um comprou a mesma quantidade de pipocas para distribuir com seus amigos. Guilherme tem

	o professor Rodrigo. Quem vai receber mais bombons os alunos da professora Bruna ou os do professor Rodrigo? Por quê? Resposta: Bruna. Ela tem menos alunos, portanto cada um vai receber mais bombons. Referentes: bombons/alunos	menos amigos do que Mateus. Quem vai receber mais pipocas, os amigos de Guilherme ou os amigos de Mateus? Por quê? Resposta: Guilherme. Ele tem menos amigos para distribuir a pipoca. Referentes: pipocas/ amigos
Contínuas	**(CPP19)** Larissa e Douglas fizeram a mesma quantidade de suco de uva para distribuir com seus primos. Larissa distribuiu o suco de uva para mais primos do que Douglas. Quem vai beber menos suco de uva, os primos de Larissa ou os primos de Douglas? Por quê? Resposta: Larissa. Ela vai distribuir o suco de uva para mais primos, portanto vai dar menos suco para cada um Referentes: suco de uva/primos **(CPP21)** Joana e Lucas foram a uma pizzaria e cada um comprou a mesma quantidade de pizza para distribuir com seus amigos. Joana tem menos amigos do que Lucas. Quem vai ter pedaços de pizza maior, os amigos de Lucas ou os de Joana? Por quê? Resposta: Joana. Ela tem menos amigos, portanto maior o pedaço de pizza. Referentes: pizza/amigos **(CPP23)** A equipe de Felipe e a equipe de Paula ganharam em uma competição a mesma quantidade de dinheiro para dividir igualmente. Felipe tem mais colegas do que Paula na equipe. Quem vai receber menos dinheiro, a equipe de	**(CPQ20)** Luana e Bárbara organizaram um piquenique no parque com as amigas e cada uma levou a mesma quantidade de guaraná. Luana quer colocar mais guaraná em cada copo do que Bárbara. Quem vai distribuir o guaraná com menos amigas no piquenique, Luana ou Bárbara? Por quê? Resposta: Luana. Ele vai colocar mais guaraná em cada copo, portanto ela distribuirá com menos amigas. Referentes: guaraná/amigas **(CPQ22)** Sara e Daniel foram a feira do bairro e cada um comprou a mesma quantidade de melancia. Sara quer dar pedaços menores de melancia para seus amigos do que Daniel. Quem vai dividir a sua melancia com mais amigos, Daniel ou Sara?Por quê? Resposta: Sara. Ela vai dar pedaços menores de melancia, portanto terá mais amigos recebendo. Referentes: melancia/amigos **(CPQ24)** Débora e Alex ganharam de seus pais a mesma quantidade de dinheiro para comprar frutas. Eles desejam comprar frutas de preços diferentes. Débora quer comprar frutas mais barata e Alex frutas mais cara. Quem vai comprar menos frutas

	Felipe ou a equipe de Paula? Por quê? Resposta: Felipe. A equipe de Felipe tem mais colegas, portanto receberá menos dinheiro. Referentes: dinheiro/ colegas de equipe	com o dinheiro, Débora ou Alex? Por quê? Resposta: Alex. Ele vai pagar mais caro pelas frutas, portanto poderá comprar menos frutas. Referentes: dinheiro/frutas

É importante destacar que na elaboração dos problemas foi considerada a aproximação dos estudantes com o contexto dos problemas, tendo em vista que segundo Nunes et, al (2008) crianças pequenas tem mais facilidade de resolver problemas desse tipo do que problemas descontextualizados. Além disso, ressalta-se que o dinheiro, o qual está presente em alguns problemas é uma quantidade contínua, mas que pode ser discretizada, como no caso deste estudo.

Em ambas as condições os problemas foram apresentados em cartelas que ficaram à disposição dos estudantes, sendo lidos pelo examinador e pelo estudante, com a seguinte instrução: “*Eu vou ler alguns problemas e gostaria que você tentasse resolvê-los. Se você desejar poderá usar lápis e papel para resolver”*. Após a leitura de cada problema, o examinador, solicitava que o estudante justificasse a sua resposta. Cabe salientar que a cartela que continha o enunciado do problema foi lida quantas vezes o estudante julgou necessário e ficou à disposição durante toda a resolução.

Optou-se por randomizar a apresentação das condições da seguinte forma: metade dos estudantes de cada grupo realizou a Condição 1 na primeira sessão (Ordem A) e a Condição 2 na segunda sessão (Ordem B); e a outra metade iniciou na ordem inversa, ou seja, Condição 2,primeiro (Ordem B) e depois a Condição 1 (Ordem A).

Quanto a ordem de apresentação dos problemas, optou-se por metade dos participantes iniciar por problemas envolvendo quantidades discretas seguidos de problemas envolvendo quantidades contínuas e a outra metade iniciar pela ordem inversa, ou seja, problemas envolvendo quantidades contínuas seguido de problemas envolvendo quantidades discretas, sendo os problemas de partição e de quotas apresentados em ordem alternadas.

O Quadro 3 ilustra como foi a aplicação dos problemas em cada um dos grupos investigados (G1 e G2) considerando as condições, os tipos de quantidades discreta e contínua.

Quadro3 - Randomização na apresentação dos problemas nos anos investigados

Grupos	*Ordem*	*Subgrupo*	*Ordem de aplicação das condições*
Grupo 1 3º ano	Ordem A	**S1** 10 participantes	Condição 1 (discreto – contínuo) Condição 2 (discreto – contínuo)
		S2 10 participantes	Condição 1 (contínuo – discreto) Condição 2 (contínuo-discreto)
	Ordem B	**S3** 10 participantes	Condição 2 (discreto – contínuo) Condição 1 (discreto – contínuo)
		S4 10 participantes	Condição 2 (contínuo – discreto) Condição 1 (contínuo-discreto)
Grupo 2 5º ano	Ordem A	**S1** 10 participantes	Condição 1 (discreto – contínuo) Condição 2 (discreto – contínuo)
		S2 10 participantes	Condição 1 (contínuo – discreto) Condição 2 (contínuo-discreto)
	Ordem B	**S3** 10 participantes	Condição 2 (discreto – contínuo) Condição 1 (discreto – contínuo)
		S4 10 participantes	Condição 2 (contínuo – discreto) Condição 1 (contínuo-discreto)

Ademais, salienta-se que foi realizado, ainda, o controle da quantidade de palavras existentes nos enunciados dos problemas, para que os mesmos ficassem nivelados em relação a este aspecto, com o intuito de controlar efeitos da memória de trabalho (M= 45,7; DP= 1,3). Ficando a seguinte quantidade de palavras na Condição1 (número): Ficando a seguinte quantidade de palavras na Condição1 (número): DPP1[1]= 46 palavras; DPQ2[2]= 45 palavras; DPP3 = 46 palavras; DPQ4 = 47 palavras; DPP5 = 46 palavras; DPQ6 = 46 palavras; CPP7[3] = 49 palavras; DPQ8[4] = 46 palavras; e na Condição 2 (códigos relativos): CPP9 = 46 palavras;

[1] DPP = problema partição discreto.
[2] DPQ=problema quota discreto.
[3] CPP = problema partição contínuo.
[4] CPQ = problema quota contínuo.

CPQ10 = 47 palavras; CPP11 = 45 palavras; CPQ12 = 45 palavras; DPP13 = 45 palavras; DPQ14 = 46 palavras; DPP15 = 44 palavras; DPQ16 = 43 palavras; DPP17 = 47 palavras; DPQ18 = 48 palavras; CPP19 = 46 palavras; CPQ20 = 46 palavras; CPP21 = 45 palavras; CPQ22 = 43 palavras; CPP23 = 46 palavras; CPQ24 = 46 palavras.

3.4 *Material*

Para a realização da investigação foram utilizados os seguintes materiais: MP3, cartelas contendo os problemas de divisão (ver Quadros 1 e 2), lápis, borracha e folhas de papel oficio A4.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados serão apresentados em três tópicos. No primeiro tópico são apresentados os resultados referentes à análise do desempenho dos estudantes (número de acertos) no geral e posteriormente considerando as variáveis investigadas: (i) condição (presença de números vs códigos relativos); quantidades (discretas vs. contínuas); situação(partição vs. quota) e o cruzamento de variáveis. No segundo tópico são apresentados os resultados referentes à análise das justificativas, tomando por base os estudos realizados por Lautert (2005) e Oliveira (2014). No terceiro tópico são apresentados os resultados referentes a relação entre o desempenho (número de acertos) e as justificativas.

Tanto a análise do desempenho (número de acertos) como as justificativas adotadas pelos estudantes foram analisadas por dois juízes independentes, cujo percentual de concordância foi de 94%, sendo os casos discordantes analisados por um terceiro juiz, também independente, cujo julgamento foi considerado para a classificação final. Após essa análise os resultados foram submetidos ao Teste t e ao Qui-quadrado ou X^2, com a finalidade de realizar comparações inter e intragrupos para verificar os níveis de significância das diferenças e associações encontradas, utilizando-se como instrumento o *software* de estatística SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences)*.

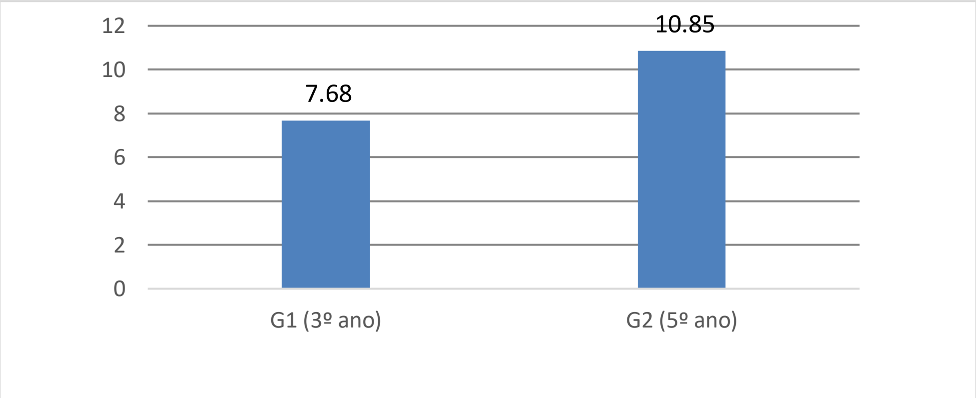
4.1 Análise do desempenho

Inicialmente são apresentados os resultados referentes ao desempenho (número de acertos) no geral considerando os anos investigados, as condições (presença de números vs códigos relativos) e os tipos de quantidade (discreta vs contínua). Posteriormente, são apresentados os resultados referentes ao desempenho em cada uma das condições apresentadas, a saber, Condição 1: presença de número e a Condição 2: presença de código, em que se analisa o tipo de quantidade (discreta vs. contínua) e a situação de divisão (partição e quota). Por fim, são apresentados os resultados referentes ao desempenho nos problemas relacionados a situações que evocam quantidades contínuas envolvendo dinheiro, tanto no geral como em relação as duas condições apresentadas (C1: presença de número e C2: presença de código).

4.1.1 Desempenho geral

Como pode ser observado, no Gráfico 1, os estudantes do G2 (5º ano) apresentam no geral desempenho melhor (M=10,85) do que os estudantes do G1 (3º ano: M=7,68). Esses resultados foram confirmados pelo Teste t que detectou diferenças significativas entre os grupos ($t=-3.185$, $p=.002$). Tais resultados revelam que a instrução escolar influencia no desempenho geral dos estudantes, uma vez que os estudantes do 5º ano que possuem instrução formal acerca da divisão apresentam melhor desempenho do que os estudantes que não foram instruídos sobre a divisão o 3º ano. Embora, os estudantes do 3º ano não apresentem melhor desempenho do que aqueles que foram instruídos sobre a divisão no contexto escolar, verifica-se que estes demonstram ter algum conhecimento sobre as relações inversas da divisão quando o dividendo é mantido constante.

Gráfico 1 - Média de acertos no geral por ano investigado



Nota: Número máximo de acertos 24

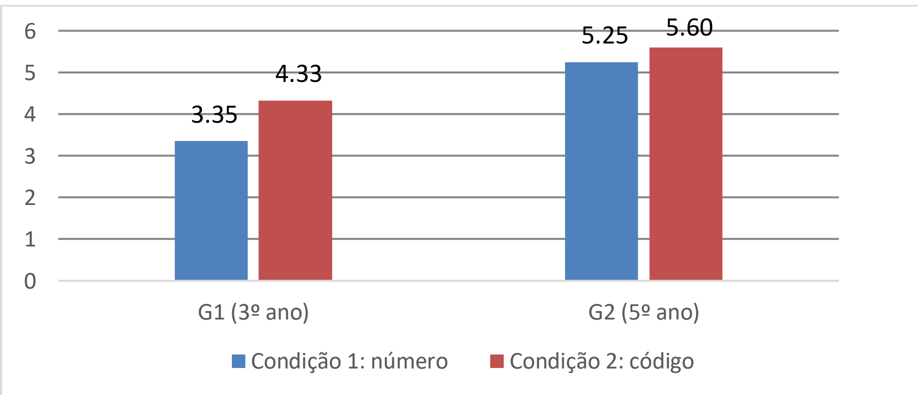
Tendo em vista que os problemas foram apresentados aos estudantes considerando duas condições (C1: presença explícita do número e a C2: presença de códigos relativos), buscou-se investigar se haveria diferença em cada grupo considerando a ordem de apresentação das condições. O teste t aplicado para amostras pareadas para verificar a influência da ordem de apresentação dos problemas (números vs. códigos relativos) não detectou diferenças significativas em ambos os grupos G1 ($t=.667$; $p=.509$) e G2 ($t=-.192$; $p=.848$), ou seja, a ordem de apresentação não exerce influência no desempenho dos estudantes investigados.

Destaca-se, também, que o suporte de representação apresentado no presente estudo, a saber, papel e lápis foi utilizado por apenas 5% dos estudantes do G1 (3º ano) e por 15% dos estudantes do G2 (5º ano). Isso significa que no geral, a maioria dos estudantes realizou cálculo mental para solucionar os problemas de divisão, entretanto os estudantes do G2 utilizaram mais o lápis e o papel quando comparado ao G1. Uma possível explicação para esse fato pode estar relacionada às atividades escolares que em geral solicitam o uso de algoritmos escritos com o avanço dos anos escolares.

4.1.2 Por condição: C1 (presença de números) vs C2 (presença de códigos)

O Gráfico 2 ilustra o desempenho em relação a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante considerando a média de acertos em cada uma das condições (código vs. número) por ano investigado.Como pode ser observado, de modo geral os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho na Condição 2 (G1: M=4,33 e G2: M=5,60) quando comparado a Condição 1 (G1: M=3,35 e G2: M=5,25). Observa-se, também, que os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor desempenho nas duas condições quando comparado aos estudantes do G1 (3º ano). Para examinar as diferenças entre os anos investigados, aplicou-se o teste t para amostras independentes, que detectou diferença significativa tanto na Condição 1 (t= -3, 302, p=.001) quanto na Condição 2 (t= -2,080, p= .041). Esses resultados revelam que os estudantes que foram instruídos sobre a divisão no contexto escolar apresentam melhor desempenho na resolução de problemas de divisão na presença de números e de códigos relativos do que os estudantes que não foram instruídos sobre a divisão no contexto escolar.

Gráfico 2 - Média de acertos na Condição 1 (presença de números) e na Condição 2 (presença de código relativo) por ano.



Nota: Número máximo de acertos 12 em cada condição

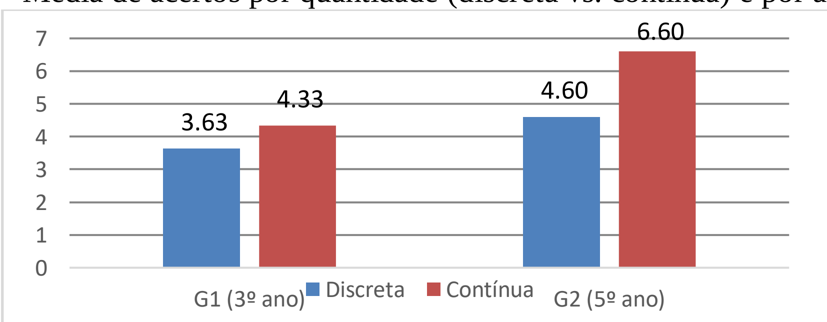
Para examinar as diferenças entre as duas condições em cada um dos grupos aplicou-se o teste t para amostras pareadas. Verifica-se que os dois grupos apresentam desempenhos semelhantes em ambas as condições: Grupo 1: 3º ano (C1:M=3,35 e C2: M=4,33) e Grupo 2: 5º ano (C1: M=5,25 e C2:M=5,60), sendo detectada diferenças significativas entre as condições apenas nos estudantes do G1(DP=2.694; t= -2.289;p=.028), não foram detectadas diferenças significativas nos estudantes do G2 (DP= 3.093; t=-.716;p=.478). Tal fato indica que os estudantes do G1 (3º ano) concentram a sua atenção para os códigos relativos por considerar ser mais relevante na resolução dos problemas, não levando em consideração os códigos e números simultaneamente no enunciado dos problemas. Isso pode ser explicado pelo fato de que as crianças pequenas costumam utilizar códigos relativos quando não conseguem realizar tarefas que exigem cálculo matemático (Correa, 1996; Oliveira, 2014; Nunes, 2016). Já para os estudantes do G2 (5º ano) tanto a condição com a presença de números quanto a condição com a presença de códigos relativos proporcionam um grau de dificuldade equivalentes. Isso pode ser explicado pelo fato desses estudantes já terem sido instruídos pela divisão no contexto escolar.

Um olhar para as médias de acerto em ambos os anos investigados, parece apontar para outras variáveis que possam estar interferindo nesse desempenho, uma vez que os estudantes de ambos os grupos parecem prestar mais atenção para as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante quando existe a presença dos códigos relativos. Será que existem diferenças nos desempenhos quando se considera as quantidades discretas e contínuas no geral e em relação as duas condições apresentadas,considerando os anos investigados?

4.1.3 Por tipo de quantidade: Discreta vs. contínua no geral

O Gráfico 3 ilustra o desempenho em relação a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante considerando a média de acertos por tipo de quantidade (discreto vs contínuo) por ano investigado.

Gráfico 3 - Média de acertos por quantidade (discreta vs. contínua) e por ano



Nota: Número máximo de acertos 12 em cada quantidade

Como pode ser observado no Gráfico 3, de modo geral os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho nas situações envolvendo quantidades contínuas (G1: M=4,33 e G2: M=6,60) quando comparado as situações envolvendo quantidades discretas (G1: M=3,63 e G2: M=4,60). Observa-se, também, ao comparar os grupos que os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor desempenho do que os estudantes do G1 (3º ano) em ambas as quantidades (contínua e discreta). O Teste t para amostras independentes detectou diferenças significativas apenas em relação a quantidade contínua (t= -3.534; p=.001), não foram detectadas diferenças significativas em relação a quantidade discreta (t=-1,809; p=.075). Esses resultados apontam que a instrução escolar acerca da divisão facilita a resolução de problemas que envolvem quantidades contínuas.

Para examinar as diferenças no desempenho considerando os tipos de quantidade em cada um dos grupos foi realizado o Teste t para amostras pareadas que detectou diferença significativa apenas em relação a variável quantidade discreta vs contínua no G2 (DP= 2.917; t= -5.312; p=.000), não foram detectadas diferenças significativas no G1 (DP= 2.420; t= -1.820; p=.075). Os estudantes do G2 (discreta: M=4,60; contínua: M=6,60) apresentaram melhor desempenho com quantidade contínua do que com quantidade discreta, enquanto para os estudantes do G1 (discreta: M=3,63; Contínua: M=4,33) o nível de dificuldade de ambas as quantidades é equivalente. Tais resultados revelam que os estudantes que foram formalmente instruídos sobre a divisão (5º ano) ampliam sua habilidade para pensar nas relações inversas no que se refere a quantidades contínuas. Tais resultados chamam atenção porque em geral a literatura na área (Nunes *et al*., 2005; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Correa, 2006) aponta que o tipo de quantidade discreto seria mais fácil de ser resolvido pelos estudantes. Nossos resultados podem estar divergindo dos apresentados por Correa, Meireles e Curvelo (2000) e Correa (2006) em função das diferenças no delineamento experimental utilizado nos estudos anteriores, na qual o estudante tinha como suporte de representação o material concreto para pensar acerca dessas relações, enquanto que na presente investigação os estudantes foram solicitados a emitir suas respostas (oralmente) e alguns fizeram o uso do lápis e papel para resolver a situação proposta. Entretanto, salienta-se que a maioria dos que fizeram uso do lápis e papel, nesta investigação, para resolver as situações problemas, resolvem através de adições e subtrações, não fazendo uso do algoritmo da divisão ou de uma representação que evoque as relações multiplicativas entre os números presentes nos enunciados dos problemas. Ademais, como pontua Kornilak (1999) não é possível realizar uma comparação direta entre estudos que possuem delineamentos experimentais e contextos diferentes. Nesse sentido, esses resultados podem ser questionáveis e reforçam a necessidade de mais investigações. Isso porque como apontado no presente estudo os estudantes do 3º ano (G1) apresentaram mesmo grau de dificuldade na realização dos problemas envolvendo quantidades discretas e contínuas.

Smith, Solomon e Carey (2005) sugerem que a compreensão pelas crianças da divisibilidade infinita de quantidades físicas contínuas (por exemplo, comprimento ou volume) parece preceder a do número como infinitamente divisível. Nesse sentido, as noções iniciais acerca de transformações multiplicativas poderiam se desenvolver primeiro no contexto de quantidades contínuas (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002).

Entretanto, segundo Smith, Solomon e Carey (2005), naturalmente, as quantidades físicas não são infinitamente divisíveis, mas há muitas evidências de que as crianças compreendem uma quantidade física contínua inicialmente como um todo sólido que não pode ser dividido, para depois compreenderem como uma quantidade que pode ser separada em partes. Por exemplo, antes de aprender sobre átomos, estudantes do ensino fundamental pensam sobre os líquidos como uma quantidade que não pode ser dividida em partículas menores e ficam se questionando ao descobrir que o volume de uma mistura de álcool e água é menor do que a soma do volume de cada líquido (Snir, Smith, & Raz, 2003). Todavia, Barth, Baron, Spelke e Carey (2008) em um estudo realizado apenas com crianças que não foram instruídas formalmente acerca das estruturas multiplicativas, não encontraram evidências de que o raciocínio acerca das quantidades contínuas precede o raciocínio das quantidades discretas nessa faixa etária. Tais divergências apresentadas na literatura, novamente apontam para a necessidade de mais estudos em relação a quantidades discretas e contínuas no que se refere especificamente a questão das relações inversas entre o quociente e o divisor quando o dividendo é mantido constante.

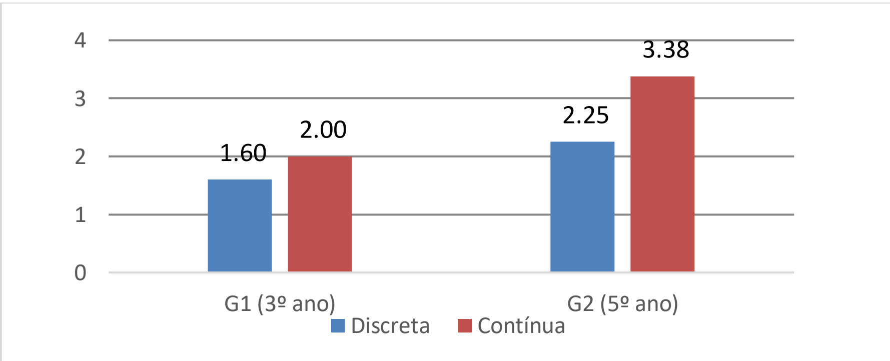
No entanto, uma possível explicação para os estudantes do G2 (5º ano) apresentarem melhor desempenho nos problemas com quantidades contínuas, pode ser o fato da compreensão destas quantidades enquanto um todo divisível preceder a compreensão das quantidades discretas apenas para as crianças que já foram instruídas formalmente acerca da divisão.

Considerando-se que foram apresentadas duas condições buscou-se investigar ainda, se haveria diferença entre as quantidades discreta e contínua quando se considera separadamente cada uma das condições (C1: presença de número e C2: presença de códigos) e entre a situação de divisão (partição e quota).

4.1.4 Condição 1 (presença de número)

O Gráfico 4 ilustra o desempenho dos estudantes Condição 1 (presença de números) considerando a média de acertos nas quantidades discretas e contínuas nos anos investigados. De modo geral observa-se no Gráfico 4 que os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho na Condição 1: presença de números,nos problemas envolvendo quantidades contínuas (G1: M=2,00e G2: M=3,38) quando comparado as quantidades discretas (G1: M=1,60 e G2: M=2,25). Observa-se, também, que os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor desempenho do que os estudantes do G1 (3º ano) em ambas as quantidades. Para verificar se existem diferenças significativas aplicou-se o para amostra independente que detectou diferenças significativas apenas em relação a quantidade contínua (t= -3,496; p=.001) e não foram detectadas diferenças significativas em relação a quantidade discreta (t=-1,767; p=.081).

Gráfico 4 – Média de acertos na Condição 1 (presença de número) por quantidade (discreta vs. contínua) e por ano



Nota: Número máximo de acertos 6 em cada quantidade na Condição 1.

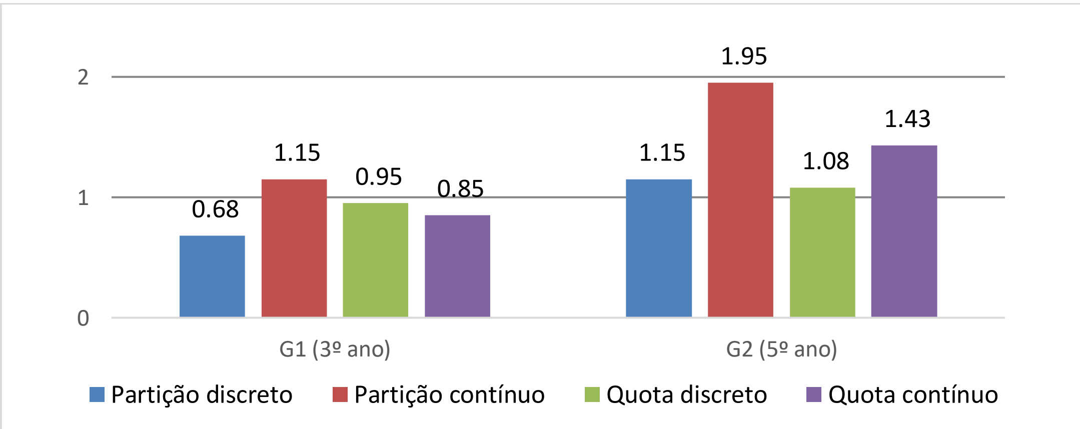
Para verificar se existem diferenças significativas intragrupos aplicou-se o Test t para amostras pareadas. Como pode ser observado no Gráfico 4, os estudantes de ambos os grupos apresentaram melhor desempenho nas situações envolvendo quantidades contínuas quando comparado as quantidades discretas, G1 (discreta: M=1,60; contínua: M=2,00) e G2 (discreta: M=2,25; contínua: M=3,38). Aplicado o Teste t para amostras pareadas foi detectada diferença significativa apenas no G2 em relação aos tipos de quantidade discreta vs contínuaG2 (DP= 2,300; t= -3,93; p= .004), não sendo detectada diferença significativa nos estudantes do G1 (DP= 1,736; t= -1.457; p= .153). Esses resultados apontam que as quantidades contínuas são mais fáceis do que as discretas para os estudantes do G2 (5º ano) na Condição 1 (presença de número). Já para os estudantes do G1 (3º ano) tanto a quantidade discreta como a quantidade contínua apresenta o mesmo grau de dificuldade.

Como comentado anteriormente, uma possível explicação para as quantidades contínuas serem mais fáceis do que a discreta apenas para o G2 (5º ano) se deve a influência da instrução escolar acerca da divisão e da compreensão das quantidades contínuas preceder a compreensão das quantidades discretas. Ressalta-se que o presente estudo apresenta um maior controle de variáveis do que é apresentado pelas pesquisas que envolvem quantidades contínuas (Correa, 2006; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Kornilak & Nunes, 2005), pois estas focalizam apenas códigos relativos e crianças que não foram instruídas formalmente acerca da divisão.

Considerando-se que os estudantes resolveram problemas de divisão por partição e divisão por quotas envolvendo quantidades discretas e contínuas, buscou-se investigar se o desempenho dos estudantes na Condição 1 (presença de número) poderia estar associado ao tipo de quantidade (discreta vs. contínua) e a situação de divisão (partição e quota) por ano.

O Gráfico 5 apresenta o percentual de acertos por tipo de quantidade (discreta e contínua), situação de divisão (partição e quota), em cada ano na Condição 1 (presença de número).

Gráfico 5 - Média de acertos na Condição 1 (presença de número) por quantidade (discreta e contínua), situação de divisão (partição e quota) e por ano



Nota: Número máximo de acertos 3 em cada quantidade e situação de divisão de problema Condição 1.

Como pode ser observado no Gráfico 5, de modo geral os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho nos problemas de partição envolvendo quantidades contínuas (G1: M=1,15; G2: M=1,95) e desempenho inferior nos problemas de divisão por partição discreto no G1 (M=.68) e quota discreto no G2 (5º ano) (M=1,08). Observa-se, também, que os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor desempenho do que os estudantes do G1 (3º ano) em ambas as quantidades (contínua e discreta) considerando as duas situações de divisão (partição e quota).

O Teste t para amostras independentes aplicado para verificar as diferenças estatísticas entre os tipos de problemas considerando as quantidades discretas e contínuas detectou diferenças significativas nos problemas de partição tanto na quantidade discreta (t= -2,154; p= .034) como na quantidade contínua (t= -3.349; p= .001). Em relação aos problemas de divisão por quotas foram detectadas diferenças significativas apenas em relação as quantidades contínuas (t= -2,660; p= .010), não sendo detectada diferença significativa na quantidade discreta (t= -.579; p= .564). Tais resultados indicam que a presença da instrução escolar acerca da divisão facilita a resolução de problemas por partição quando envolvem os tipos de quantidade (contínua e discreta) e por quota quando envolve apenas quantidades contínuas na Condição 1 (presença de número).

Verifica-se, ainda que os estudantes do G1 (3º ano) apresentam melhores desempenho nos problemas de partição contínuo (M=1,15) e de quota discreto (M=.95) quando comparado aos problemas de partição discreto (M=.68) e quota contínuo (M=.85) na Condição 1 (presença de número). Já os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor desempenho nas situações de divisão por partição e por quota envolvendo quantidade contínua respectivamente,M=1,95 e M=1,43, quando comparado aos problemas de partição e quota discreto, respectivamente M=1,15 e M=1,08.

Para verificar as diferenças em cada um dos grupos aplicou-se o Teste t para amostras pareadas que detectou diferença significativa entre as quantidades contínua e discreta na situação de divisão por partição no G1 (3º ano) e G2 (5º ano), respectivamente (DP= 1.358; t= -2.211; p=.033 e DP= 1.418; t= -3.569; p=.001). Não foram detectadas diferenças significativas entre as quantidades contínua e discreta na situação de divisão por quota no G1 (3º ano) e G2 (5º ano), respectivamente (DP= 1,081; t= .585; p=.562) e (DP= 1.231; t= -1,798; p=.080).

Tais resultados revelam que para ambos os grupos a quantidade contínua é mais fácil do que a discreta nas situações de divisão por partição. Como pode ser observado apenas na situação de divisão por partição na Condição 1, as quantidades contínuas são mais fáceis para os estudantes que não possuem instrução formal acerca da divisão. Isso talvez se explique pelo fato de alguns estudos (e.g. Correa, 1996; Correa; Nunes & Bryant, 1998; Fischbein; Deri & Marino, 1985; Kornilaki & Nunes, 1997; Nunes & Bryant, 1997) apontarem que a partição seria mais simples, porque a noção inicial que a criança tem sobre a divisão é decorrente da noção de repartir (distribuir), estando a atenção da criança voltada para a distribuição de quantidades iguais. No entanto, esse resultado, precisa ser melhor investigado, por dois motivos. Primeiro não existe um consenso na literatura da área, outros estudos apontam (e.g. Brown, 1981; Nesher, 1988; Selva, 1993) que os problemas de divisão por quotas podem ser resolvidos com mais facilidade pelas crianças por conduzirem diretamente ao uso da estratégia de subtração repetida[5]. E segundo a necessidade de um maior controle do número de problemas apresentados nessa condição e da natureza dos problemas apresentados, visando controlar melhor os enunciados e as situações vivenciadas pelos estudantes tanto no contexto escolar como nas situações diárias.

4.1.5 Condição 2 (presença de código)

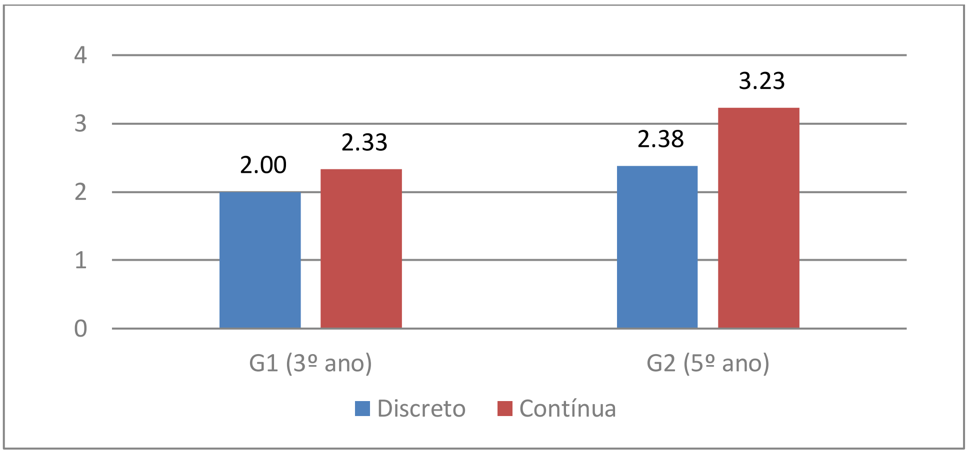
No que se refere à Condição 2 (presença de código), como pode ser observado no Gráfico 6, verifica-se que de modo geral, os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho nos problemas envolvendo quantidades contínuas (G1: M=2,33 e G2: M=3,23), quando comparado as quantidades discretas (G1: M=2,00 e G2: M=2,38). Observa-se, também, que os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor desempenho do que os estudantes do G1 (3º ano) em ambas as quantidades.

Para verificar se existe diferenças significativas aplicou-se o teste t para amostra independente que detectou diferenças significativas apenas em relação a quantidade contínua G1 vs G2 (t= -2.249; p=.027), não sendo detectadas diferenças significativas entre os grupos em relação a quantidade discreta G1 vs G2 (t= -1.188; p=.238).

Tais resultados revelam que os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão apresentam melhor desempenho com código relativo na quantidade contínua do que os estudantes que não possuem instrução formal acerca da divisão, enquanto no que se refere a quantidade discreta o nível de dificuldade é o mesmo para ambos os grupos.

[5]Na estratégia de subtração repetida os indivíduos partem da quantidade total (dividendo) subtraindo a quantidade de elementos determinada pelo problema de divisão por quotas ou por eles estimada em problemas de divisão por partição.

Gráfico 6 – Média de acertos na Condição 2 (presença de código) por quantidade (discreta vs. contínua) e por ano



Nota: Número máximo de acertos 6 em cada quantidade na Condição 2.

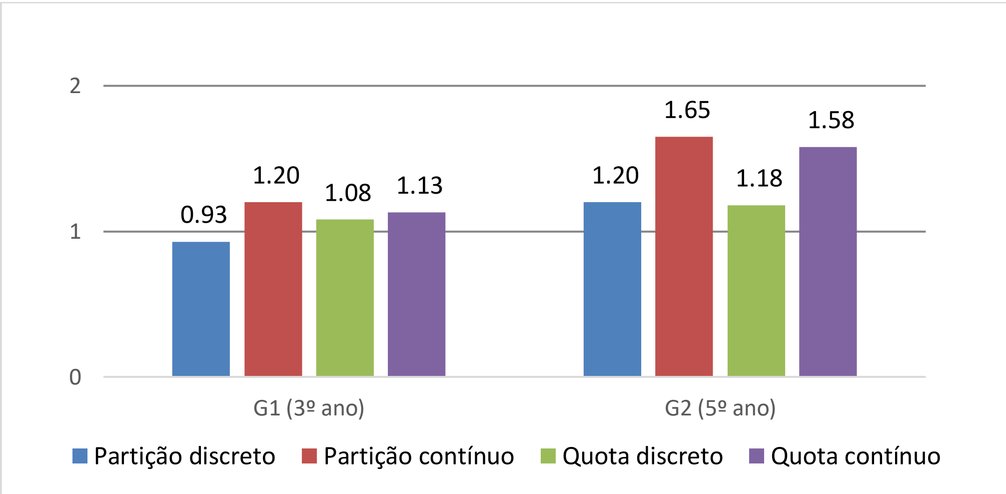
Para examinar as diferenças entre as quantidades (discreta e contínua) em cada um dos grupos aplicou-se o teste t para amostras pareadas. Como pode ser observado no Gráfico 6, os estudantes do G1 (3º ano) apresentam desempenho semelhante em ambas as quantidades (discreto: M=2,00 e contínuo: M=2,33) enquanto os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor êxito na quantidade contínua quando comparado a quantidade discreta, respectivamente M=3,23 e M=2,38. Aplicado o teste t para amostras pareadas foi detectada diferença significativa apenas em relação a quantidade discreta vs contínua no G2 (DP= 1.657; t= -3,244; p= .002), não sendo detectada diferença significativa no G1 (DP= 1.730; t= -1,188; p= .242). Esses dados indicam que na Condição 2, presença de códigos relativos, os estudantes do G1 (3º ano) possuem o mesmo nível de dificuldade em lidar com as quantidades (contínua e discreta) enquanto para os estudantes do G2 (5º ano) a quantidade contínua é um facilitador na resolução de problemas de divisão.

Esse resultado também foi encontrado na Condição 1, (presença explícita do número), como exposto anteriormente, ou seja, independente da condição a quantidade contínua é um facilitador na resolução desse tipo de problema para os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão. Esse dado reforça a descoberta de que apenas a quantidade contínua não exerce influência na melhora do desempenho dos estudantes em problemas de divisão, mas que essa estaria relacionada ao fato dos estudantes terem sido instruídos sobre a divisão no contexto escolar.

Considerando-se que os estudantes resolveram problemas de divisão por partição e divisão por quotas envolvendo quantidades discretas e contínuas, buscou-se investigar se o desempenho dos estudantes na Condição 2 (presença de código) poderia estar associado ao tipo de quantidade (discreta vs. contínua) e a situação de divisão (partição e quota) por ano.

O Gráfico 7 apresenta a média de acertos por tipo de quantidade (discreta e contínua), situação de divisão (partição e quota) em cada ano na Condição 2 (presença de código).

Gráfico 7 - Média de acertos na Condição 2 (presença de código) por tipo de quantidade (discreta e contínua), situação de divisão (partição e quota) e por ano.



Nota: Número máximo de acertos 3 em cada quantidade e tipo de problema Condição 2.

Como pode ser observado no Gráfico 7, de modo geral os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho na Condição 2 (código relativo) com quantidade contínua nas duas situações de divisão, por partição (G1:M=1,20; G2: M=1,65) e por quota (G1:M= 1,13; G2: M=1,58) e desempenho inferior com quantidade discreta por partição (G1:M=.93; G2: M=1,20) e por quota (G1:M=.1,08; G2: M=1,18). Aplicado o Teste t para amostra inter grupo foi detectada diferença significativa apenas no que se refere a quantidade contínua na situação de divisão por quota (t= -2,122; p= .037). Não foram detectadas diferenças significativas na quantidade contínua quando envolve situação de divisão por partição (t= -1,838; p=.070) e na quantidade discreta quando envolve situação de divisão por quota (t= -.556; p=.580) e por partição (t= -1,236; p=.220). Tais resultados revelam o efeito da escolaridade, na condição código relativo nos problemas de quota envolvendo quantidades contínuas. Ao que parece um maior conhecimento escolar sobre a divisão provoca um melhor desempenho no que se refere aos problemas de quotas envolvendo quantidades contínuas. O que pode ter determinado este resultado? Uma possível explicação para essa melhora poderia estar atrelada ao fato de que ao serem instruídos sobre a divisão no contexto escolar os professores tenderiam a apresentar uma maior diversidade de problemas aos estudantes. Entretanto, para afirmar sobre essa questão se faz necessário aprofundar a investigação.

Observa-se, ainda, na Condição 2 (presença de códigos relativos) que o G1 (3º ano) possui desempenho próximos na quantidade contínua em ambas situações de divisão (partição, M=1,20 e quota, M=1,13) e desempenho inferior e próximo na quantidade discreta (partição, M=.93 e quota, M=.1,08). O teste t para amostras pareadas não detectou diferença significativa na situação de divisão por quota (DP= 1.108; t= -.285; p=.777) e por partição (DP= 1.109; t= -1.568; p=.125) quando compara a quantidade discreta e contínua em ambas situações problemas.Já o G2 (5º ano) apresenta melhor desempenho na quantidade contínua nas duas situações de divisão (partição, M=1,65 e quota, M=1,58) quando comparado a quantidade discreta (partição, M=1,20e quota M=1,18). O teste t detectou diferença significativa na situação de divisão por partição (DP= 1.131; t= -2.156; p=.016) e por quota (DP= 1.105; t= -2,290; p=.028) quando compara quantidades discretas e contínuas. Tais resultados revelam que para os estudantes do G2 (5º ano) é mais fácil lidar com quantidades contínuas na presença de códigos relativos em ambas as situações de divisão (partição e quota).Este resultado também foi observado na presença de número no que se refere apenas ao problema de partição. Nesse sentido, a instrução formal sobre a divisão e a quantidade contínua são variáveis que influenciam no desempenho dos estudantes, tanto na resolução de problemas de partição como nos problemas de divisão por quotas, quando esses são solicitados a emitir seus julgamentos sobre as relações de covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Para os estudantes que não possuem instrução formal acerca da divisão as situações de divisão (partição e quota) possuem o mesmo nível de dificuldade quando envolvem quantidades discretas e contínuas. Esse resultado contrasta com o que foi observado no estudo realizado por Correa, Meireles e Curvelo (2000) apenas com criança sem instrução, no qual as autoras verificaram que é mais difícil para as crianças lidar com quantidades contínuas do que discretas em situação de divisão por partição. Os dados do presente estudo também contrastam com o estudo de Correa (2006), no qual foi observado que crianças possuem a mesma dificuldade de lidar com situação de divisão por partição e por quota quando envolvem quantidades contínuas. Entretanto como exposto anteriormente, os resultados desses estudos podem ser questionáveis e mais investigações precisam ser realizadas.

4.1.6 Um olhar para as situações envolvendo dinheiro

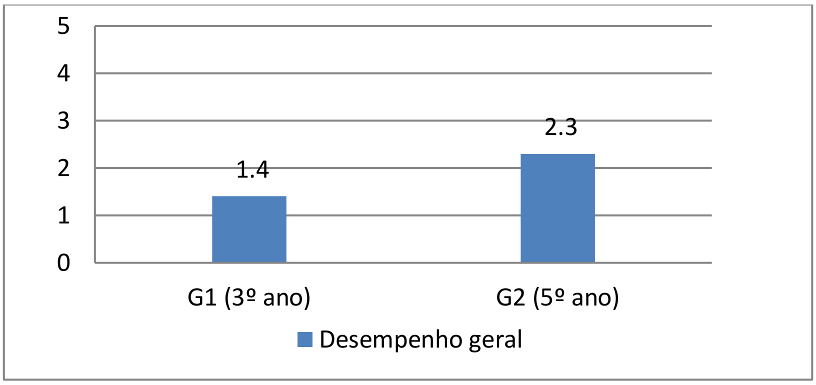
Considerando-se que os estudantes responderam a situações que evocam dinheiro, que são quantidades contínuas, mas que podem ser discretizadas, como no presente estudo. Buscou-se investigar se o fato de discretizar essas quantidades considerando a escolaridade e as condições (número e código) poderia estar influenciando no desempenho dos estudantes. A fim de auxiliar o leitor no entendimento dessa análise são apresentados, novamente os quatro problemas que serão o foco das discussões que seguem, sendo estes ilustrados no Quadro 4.

Quadro 4 - Problemas envolvendo situações com dinheiro

Condição 1 (presença de número)	Condição 2 (presença de código)
(CP11) Antônio e Carla foram visitar seus avós e cada um ganhou 15 reais para dividir igualmente com seus irmãos. Antônio tem 2 irmãos e Carla tem 4 irmãos. Quem vai ficar com menos dinheiro, os irmãos de Carla ou os irmãos de Antônio? Por quê? **(CPQ12)** Maria e Paulo ganharam de suas mães, cada um, 12 reais de mesada. Maria quer comprar doces que custam 3 reais e Paulo quer comprar doces que custam 4 reais. Quem vai comprar menos doces com o dinheiro que recebeu, Maria ou Paulo? Por quê?	**(CPP23)** A equipe de Felipe e a equipe de Paula ganharam em uma competição a mesma quantidade de dinheiro para dividir igualmente. Felipe tem mais colegas do que Paula na equipe. Quem vai receber menos dinheiro, a equipe de Felipe ou a equipe de Paula? Por quê? **(CPQ24)** Débora e Alex ganharam de seus pais a mesma quantidade de dinheiro para comprar frutas. Eles desejam comprar frutas de preços diferentes. Débora quer comprar frutas mais barata e Alex frutas mais cara. Quem vai comprar menos frutas com o dinheiro, Débora ou Alex? Por quê?

O Gráfico 8 ilustra o desempenho dos estudantes no geral considerando os anos investigados nas situações problemas que evocam dinheiro.

Gráfico 8 - Média de acertos no geral

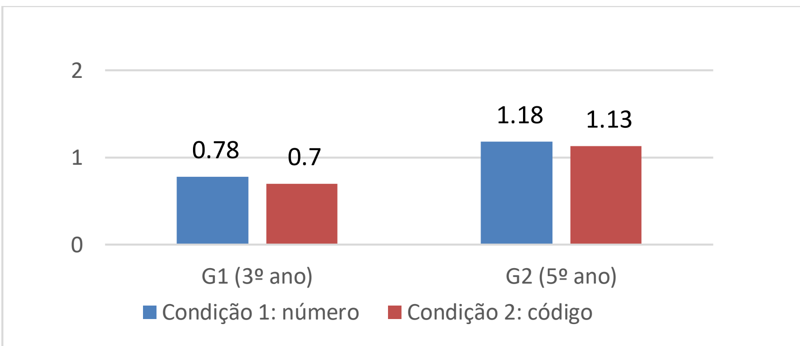


Nota: Número máximo de acertos 4.

De modo geral, constata-se no Gráfico 8, que os estudantes do Grupo 2 (5º ano, M=2,3) apresentam melhor desempenho nos problemas envolvendo situações que evocam dinheiro quando comparado aos estudantes do Grupo 1 (3º ano, M=1,4), sendo esses resultados confirmados pelo Test t (t=-2.876; p= 0.005). Novamente, constata-se o efeito da escolaridade no desempenho dos estudantes. Em outras palavras, os estudantes que foram instruídos sobre a divisão no contexto escolar apresentam melhores desempenhos do que aqueles que não foram instruídos sobre a divisão em problemas que evocam o uso de dinheiro.

O Gráfico 9, ilustra a média de acertos dos estudantes por ano investigado, nos problemas que evocam dinheiro, considerando as duas condições (C1: presença de número e C2: presença de código).

Gráfico 9 - Média de acertos nos problemas envolvendo situações que evocam dinheiro por condição (C1 e C2) e por ano.



Nota: Número máximo de acertos em cada condição 2

De modo geral, verifica-se que os estudantes do G2 (5º ano) apresentam melhor desempenho em problemas envolvendo ambas as Condições (C1: M=1,18 e C2: M=1,13) quando comparado aos estudantes do G1 (3º ano: C1: M=0,78 e C2: M=0,7). Para verificar se existe diferenças significativas foi realizado o teste t para amostras independentes que detectou diferença significativa na Condição 1 (t=-2,362, p=.021) e na Condição 2 (t=-2,311, p=.023). Novamente, constata-se que os estudantes que foram instruídos sobre a divisão no contexto escolar apresentam melhor desempenho em ambas as condições (C1 presença de número e presença de código relativo) quando os problemas apresentam quantidades contínuas que evocam dinheiro.

Observa-se, também, que em cada um dos grupos a média de acertos em ambas as condições são semelhantes, G1 (C1: M=0,78 e C2: M= 0,70) e G2 (C1: M= 1,18 e C2: M=1,13). Aplicado o teste t para amostras pareadas o mesmo não detectou diferenças significativas tanto no G1 (DP=.917, t= .517, p= .603) como no G2 (DP=.932, t= .339, p= .736). Tais resultados tornam-se interessantes, pois confirmam as análises anteriores que a escolaridade tem um efeito maior no desempenho desse tipo de problema do que quando se considera as diferentes condições. Em outras palavras, para os estudantes que possuem instrução formal sobre a divisão é mais fácil lidar com problemas envolvendo situações que evocam dinheiro do que para os estudantes que não foram formalmente instruídos quando se considera as relações de covariação entre os termos quando se mantêm o dividendo constante.

4.2 *Análise das justificativas*

Inicialmente será apresentado o sistema de análise implementado para essa investigação que toma por base as categorias descritas por Lautert (2005) e Oliveira (2014). Posteriormente são apresentados os resultados referentes as justificativas adotadas pelos estudantes considerando as variáveis principais de investigação, a condição: C1 (presença de número vs. C2 (presença de códigos) e a quantidade (discreto vs. contínuo).

3.2.1 Sistema de análise

Como comentado, o sistema de análise para investigar a natureza das justificativas apresentadas pelos estudantes do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental toma por base as categorias descritas por Lautert (2005) e Oliveira (2014). Essas autoras identificaram três tipos de justificativas: (i) as imprecisas ou circulares; (ii) as que indicam que as crianças focam atenção em apenas um dos elementos da divisão, o que demonstra uma não compreensão das relações entre os termos e (iii) as justificativas em que considera a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Nessa investigação foram identificadas outras variações nas justificativas usadas pelos estudantes em função dos tipos de situações-problema apresentadas e da forma como os dados foram coletados. Por exemplo, foi identificado que os estudantes operam com os dados do enunciado através de adições ou subtrações, bem como se observou que os estudantes focalizam atenção no menor divisor, quer seja número ou código relativo. As classificações das justificativas identificadas nessa investigação são descritas e exemplificadas a seguir[6]:

Justificativa 1 (J1) - a criança apresenta explicações imprecisas, circulares, que não permitem identificar se alguma relação entre os termos da divisão foi estabelecida ou alguma relação entre informações contidas no enunciado. Foram incluídas, nessa categoria as respostas sem justificativas[7]e as respostas nas quais as crianças opera com os elementos presentes no enunciado, através da adição ou subtração, não expressando a compreensão de que o enunciado envolve a divisão presente apenas na Condição 1 (presença de números)[8]. Foram observadas três variações:

J1A - A criança apresenta explicações imprecisas, circulares que não permitem identificar se alguma relação entre os termos da divisão foi estabelecida ou alguma relação entre informações não contidas no enunciado.

> **Exemplo 1:** Reprodução do Protocolo 40 – criança do sexo masculino, 9 anos, Grupo 1, Condição 1, problema de quotas envolvendo quantidade discreta.
>
> Luana e Marta foram a uma festa, e cada uma ganhou 15 pulseiras de brinde. Luana quer colocar 3 pulseiras na bolsa e Marta quer colocar 5 pulseiras na bolsa. Quem vai precisar de mais bolsas para colocar todas as pulseiras, Luana ou Marta?
>
> C – Marta.
>
> E – Por quê?
>
> C – Porque ela vai precisar.

[6] Convenções adotadas: (C) Criança e (E) Experimentador

[7] Das 1920 respostas em apenas 1%os estudantes não apresentam justificativas.

[8]Das 1920 respostas em apenas 1,7% os estudantes apresentaram essas justificativas na Condição 1, sendo em 5 casos no 3º ano (0,2%) e 28 casos no 5º ano (1,5%).

Exemplo 2: Reprodução do Protocolo 35 – criança do sexo feminino, 8 anos, Grupo 1, Condição 2, problema de quotas envolvendo quantidade contínua.

Luana e Bárbara organizaram um piquenique no parque com as amigas e cada uma levou a mesma quantidade de guaraná. Luana quer colocar mais guaraná em cada copo do que Bárbara. Quem vai distribuir o guaraná com menos amigas no piquenique, Luana ou Bárbara?

C – Bárbara.

E – Por quê?

C – Porque ela tem 2 litros.

J1B- A criança apresenta resposta sem justificativa.

Exemplo 3: Reprodução do Protocolo 26 – criança do sexo feminino, 8 anos, Grupo 1, Condição 2, problema de quota envolvendo quantidade discreta.

Júlia e Rafael são irmãos e estão arrumando o guarda roupa. Cada um deles tem a mesma quantidade de blusas. Júlia vai colocar mais blusas do que Rafael em cada gaveta. Quem vai precisar de menos gavetas para arrumar as blusas, Rafael ou Júlia?

C - Rafael.

E - Por quê?

C - Não sei.

J1C-A criança apresenta resposta realizando uma operação de adição e ou subtração, não expressando a compreensão de que o enunciado envolve a divisão.

Exemplo 4: Reprodução do Protocolo 25 – criança do sexo masculino, X anos, Grupo 2, Condição 1, problema de quota envolvendo quantidade discreta.

Fernanda e Otávio foram a papelaria e cada um comprou 24 figurinhas. Fernanda quer colar 4 figurinhas em cada página de seu caderno e Otávio quer colar 6 figurinhas. Quem vai precisar de mais páginas para colar todas as figurinhas, Otávio ou Fernanda?

C - Otávio.

E - Por quê?

C - Porque ele tá com menos página no caderno (sic).

E - Como você descobriu?

C - Porque 24 mais 4 dá 28.

E - Me explica melhor.

C - É porque eu somei 24 mais 4 e 24 mais 6. 24 mais 6 dá 30 e 24 mais 4 dá 28.

Exemplo 5: Reprodução do Protocolo 33– criança do sexo masculino, X anos, Grupo 2, Condição 1, problema de partição envolvendo quantidade discreta.

Davi e Gabriel foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 16 carrinhos coloridos. Gabriel quer colocar seus carrinhos em 4 caixas e Davi quer colocar seus carrinhos em 8 caixas. Quem vai ter caixas com menos carrinhos coloridos, Gabriel ou Davi?

C - Quem vai ter mais caixas?

E - Quem vai ter caixas com menos carrinhos coloridos.

C - Gabriel.

E - Por quê?

C - Porque ele comprou 8 carrinhos e Davi comprou 4 carrinhos e 16 dá pra subtrair por 4 e 16 não dá pra subtrair por 8 então é 8 pra chegar em 16.

Justificativa 2 (J2) - Indicam alguma compreensão sobre as relações entre os termos,porém não expressam um entendimento a respeito das relações inversas - a criança considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos, confunde os valores do divisor e do quociente. Foram observadas três variações:

J2A – A criança focaliza a atenção no valor do dividendo apenas.

Exemplo 6: Reprodução do Protocolo 8– criança do sexo masculino, 9 anos, Grupo 1, Condição 1, problema de partição envolvendo quantidade discreta.

Letícia e Alice foram ao parque fazer um piquenique, e cada uma levou 12 biscoitos para comer. Letícia quer colocar seus biscoitos em 2 potes e Alice quer colocar seus biscoitos em 6 potes. Quem vai ter potes com mais biscoitos, Letícia ou Alice?

C - Letícia.

E - Por quê?

C - Porque ela tem 12 biscoitos.

J2B – A criança focaliza a atenção no divisor (maior ou menor) representado por um número ou pela palavra relacionada ao código relativo.

Exemplo 7: Reprodução do Protocolo 9– criança do sexo masculino, 10 anos, Grupo 1, Condição 2, problema de partição envolvendo quantidade contínua.

Joana e Lucas foram a uma pizzaria e cada um comprou a mesma quantidade de pizza para distribuir com seus amigos. Joana tem menos amigos do que Lucas. Quem vai ter pedaços de pizza maior, os amigos de Lucas ou os de Joana?

C - Lucas.

E - Por quê?

C - Porque ele tem mais amigos.

Exemplo 8: Reprodução do Protocolo 10– criança do sexo masculino, 9 anos, Grupo 1, Condição 1, problema de quota envolvendo quantidade contínua.

Antônio e Carla foram visitar seus avós e cada um ganhou 15 reais para dividir igualmente com seus irmãos. Antônio tem 2 irmãos e Carla tem 4 irmãos. Quem vai ficar com menos dinheiro, os irmãos de Carla ou os irmãos de Antônio?

C - (criança aponta para o número 2) [E : Esse número se refere a Antônio] Antônio.

E - Por quê?

C - Porque ele vai ficar com menos porque ele só tem 2 irmãos e ela tem 4.

J2C – A criança confunde o tamanho da parte com o número de partes.

Exemplo 9: Reprodução do Protocolo 22– criança do sexo masculino, 9 anos, Grupo 1, Condição 1, problema de partição envolvendo quantidade discreta.

Davi e Gabriel foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 16 carrinhos coloridos. Gabriel quer colocar seus carrinhos em 4 caixas e Davi quer colocar seus carrinhos em 8 caixas. Quem vai ter caixas com menos carrinhos coloridos, Gabriel ou Davi?

C - Gabriel.

E - Por quê?

C - Porque ele quer botar 4 carrinho em cada caixa. (sic.)

Justificativa 3 (J3) – A criança indica compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante – a criança em sua justificativa consegue explicitar o princípio geral de que uma vez mantido constante o valor do dividendo, as relações entre o tamanho das partes e o número de partes são inversas.

Exemplo 10: Reprodução do Protocolo 20 – criança do sexo masculino, 8 anos, Grupo 1, Condição 2, problema de partição envolvendo quantidade discreta.

Artur e Patrícia foram visitar suas avós e ganharam, cada um, a mesma quantidade de maçãs para colocar em cestas. Artur tem menos cestas do que Patrícia para colocar as maçãs. Quem vai ter as cestas com mais maçãs, Patrícia ou Artur?

C – Artur.

E – Por quê?

C – Porque ele tem menos cestas pra botar, então pra isso ele precisa botar muito em cada cesta, já Patrícia tem que botar menos, porque ela tem mais cesta no caso.

Exemplo 11: Reprodução do Protocolo 40 – criança do sexo masculino, 11 anos, Grupo 2, Condição 1, problema de partição envolvendo quantidade discreta

Letícia e Alice foram ao parque fazer um piquenique, e cada uma levou 12 biscoitos para comer. Letícia quer colocar seus biscoitos em 2 potes e Alice quer colocar seus biscoitos em 6 potes. Quem vai ter potes com mais biscoitos, Letícia ou Alice?

C – Letícia.

E – Por quê?

C – Porque ela tem 2 potes e são 12 né? No caso cada pote que ela tem vai ter 6, já Alice não, porque ela tem 6 potes e cada um só vai ter 2 biscoitos. (sic)

4.2.2 Análise das justificativas: Por condição: C1 (presença de números) vs C2 (presença de códigos)

A Tabela 1 ilustra a frequência e o percentual das justificativas utilizadas pelos estudantes em ambas as condições: C1 (presença de números vs. Condição 2: presença de códigos) considerando os anos investigados.

Tabela 1 - Frequência e percentual (entre parênteses) dos tipos de justificativas por grupo em cada condição.

Grupos	Condição 1(presença de número) (n= 960) *			Condição 2 (presença de códigos relativos) (n= 960)		
	J1**	J2	J3	J1	J2	J3
G1 3º ano	**111** (12)	**275** (28)	**94** (10)	**154** (16)	**213** (22)	**113** (12)
G2 (5º ano)	**108** (11)	**198** (21)	**174** (18)	**71** (7)	**194** (20)	**215** (23)
Total	**219** (23)	**473** (49)	**268** (28)	**225** (23)	**407** (42)	**328** (35)

*** Nota:** n (corresponde ao número total de justificativas)******J1: imprecisas, circulares ou baseadas na adição e subtração; J2: foco em um dos termos ou confunde ambos; J3: compreensão das relações inversas.

De modo geral constata-se que as Justificativas 2, na qual o estudante considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos,confunde os valores do divisor e do quociente, expressando a não compreensão das relações inversas são mais frequentes em ambas as condições (C1: 49% e C2: 42%), seguidas das Justificativas 3 que expressam uma compreensão das relações inversas entre os termos da divisão, quando o valor do dividendo é mantido constante, sendo essa justificativa mais frequente na Condição 2 (presença de códigos relativos) quando comparado a Condição 1 (presença de números), respectivamente 35% e 28%. Observa-se ainda que as Justificativas 1 (imprecisas e circulares ou baseadas na adição e ou subtração)apresentam o mesmo percentual nas duas condições (C1: 23% e C2: 23%). Salienta-se, que as justificativas na qual a criança opera com os elementos presentes no enunciado do problema, através da adição ou subtração, não expressando a compreensão de que o enunciado envolve a divisão, aparece apenas na Condição 1 (presença de número), em 5 casos no 3º ano (0,2%)e 28 casos no 5º ano (1,5%). Dos 33 estudantesque usaram essas justificativas,seis utilizaram algortimos escritos e isso pode estar relacionado as atividades escolares que em geral solicitam o uso de algoritmos escritos com o avanço dos anos escolares.

Ademais, um dos fatores associado às dificuldades que as crianças possuem na solução de problemas matemáticosé a relação entre a tarefa ea operação apropriada, pois há situações em que a ação sugeridapara solucionar um problema não condiz com a operação necessária, por exemploquando o contexto do problema sugere uma subtração e é resolvido pela adição ou vice-versa (Nesher, Greeno & Riley, 1982). Guimarães (2009) em um estudo realizado com crianças da 3ª série apresentou a elas problemas contendo a idade de duas pessoas e questionou quantos anos uma teria a mais do que a outra. Ela verificou que apenas quando a expressão "*a mais*" estava relacionada à operação de adição a maioria das crianças acertava, pois elas possuíam a crença de que esta expressão sugeria uma operação de adição. Bell, Swan e Taylor (1981) afirmam ainda que as crenças das crianças também podem estar rigidamente associadas a operações específicas, como "a multiplicação torna maior" e "a divisão torna menor".

Nesse sentido, uma possível explicação para os estudantes deste estudo utilizarem as operações de adição ou subtração em problemas que exigiam o uso da divisão pode estar atrelada a associação da operação de divisão ou das palavras "mais" e "menos" contidas nos enunciados dos problemas com as operações de adição ou subtração.

Para investigar associação entre as condições (presença de número e códigos relativos) e as justificativas (Justificativa 1, imprecisa, circulares ou baseadas na adição e subtração;Justificativa 2, foco em um dos termos ou confunde ambos, e Justificativa 3, indica a compreensão das relações inversas) no geral foi realizado o Qui Quadrado, o X^2 que detectou associação significativa ($\chi^2_{(1)} = 11.07$; $p<.00039$).

Como encontrado para o resultado geral dos grupos investigados, constatou-se uma associação significativa entre as justificativas utilizadas e os anos escolares [3º ano ($\chi^2_{(1)}$ = 16,6; p= 0.0002 e 5º ano ($\chi^2_{(1)}$ = 17,53; p= 0.0002)]. Como pode ser observado na tabela 1, os estudantes do G1 (3º ano) usam mais a Justificativa 2 (foco em um dos termos ou confunde ambos) em ambas as situações (C1: 28% e C2: 22%), seguidas de Justificativas 1 (imprecisa, circulares ou baseadas na adição e subtração), respectivamente (C1: 12% e C2: 16%). Já Justificativa 3 (compreensão sobre as relações inversas) é menos frequente em ambas as condições (C1:10% e C2:12%). Esses dados atrelados ao fato de que a Justificativa 2evidenciam um tipo de erro com grau mais elevado, na medida em que poderia explicitar um maior esforço da criança pensar inversamente, mas sem a propriedade para fazer, sugerem que apesar dos estudantes sem instrução formal acerca da divisão realizarem estimativas ainda apresentam dificuldade em compreender as relações inversas, conforme também documentado por Oliveira 2014 com estudantes do infantil 3, 1º e 2º ano do Ensino Fundamental.

Os resultados revelaram diferenças significativas em relação a J1 vs. J2 ($\chi^2_{(1)}$ = + 0.14; p = 0.000202) e J2 vs. J3 ($\chi^2_{(1)}$ = -0,1; p = 0.010488). Não foram detectadas diferenças significativas quando se compara J1 vs. J3 ($\chi^2_{(1)}$ = +0,04; p= 0.502335). Esses resultados indicam que a maior dificuldade dos estudantes do 3º ano reside em focalizar a atenção apenas no número do divisor (maior ou menor divisor), não considerando as relações deste com os demais termos da divisão em ambas as condições e que as Justificativas 1 e 3 em ambas as condições apresentam frequências semelhantes.

Os estudantes do G2 (5º ano) em ambas as condições apresentam menor frequência de Justificativas 1 (imprecisas,circulares ou baseadas na adição e subtração), respectivamente C1: 11% e C2: 7%, seguidos de Justificativas 2 na Condição1 (presença de número:21%) e de Justificativas 3 na Condição 2 (códigos relativos: 23%). Esse resultado torna-se interessante, pois parece indicar que os códigos relativos facilitam a compreensão das relações inversas para os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão, no entanto, verifica-se que essas diferenças são muito próximas. Os resultados revelaram diferenças significativas em relação a J1 vs. J3 ($\chi^2_{(1)}$ = -0,14; p = 0.000763) e J1 vs. J2 ($\chi^2_{(1)}$ = -0,09; p = 0.036363). Não foram detectadas diferenças significativas quando se compara J2 vs. J3 ($\chi^2_{(1)}$ = -0,06; p =0.122114). Tais resultados indicam que em ambas as condições os estudantes do G2 (5º ano) diminuem o número de Justificativas (imprecisas, circulares ou baseadas na adição e subtração) e apresentam frequência semelhantes de Justificativas 2 e 3 em ambas as condições.

4.2.3 Análise das justificativas: Por tipo de quantidade

Será que as diferenças detectadas nas justificativas dos estudantes poderiam estar associadas ao fato dos estudantes realizarem estimativas nas duas condições (C1: presença de número e C2: presença de códigos relativos) envolvendo quantidades discretas e contínuas? Em outras palavras, haveria diferenças nas justificativas quando se compara as condições e o fato dessas envolverem quantidades contínuas e discretas? Para responder a esta questão, primeiramente, discute-se os dados referentes à Condição 1 (presença de números) e logo após, os dados referentes à Condição 2 (presença de rótulos).

4.2.3.1 *Por tipo de quantidade: na Condição 1(presença de número)*

A Tabela 2 mostra os tipos de justificativas em cada grupo, por quantidades discretas e contínuas na Condição 1 (presença de número).

Tabela 2 – Frequência e percentual (entre parênteses) de justificativas nas quantidades (discreta e contínua) por grupo, na Condição 1(presença de número).

	Condição 1: presença de número					
Grupos	**Contínua** (n= 480)*			**Discreta** (n= 480)*		
	**J1	J2	J3	J1	J2	J3
G1	**64**	**113**	**63**	**47**	**162**	**31**
3º ano	(13)	(24)	(13)	(10)	(34)	(6)
G2	**47**	**78**	**115**	**61**	**120**	**59**
(5º ano)	(10)	(16)	(24)	(13)	(25)	(12)
Total	**111**	**191**	**178**	**108**	**282**	**90**
	(23)	(40)	(37)	(23)	(59)	(18)

*** Nota:** n (corresponde ao número total de justificativas); J1: imprecisas, circulares ou baseadas na adição e subtração; J2: foco em um dos termos ou confunde ambos; J3: compreensão das relações inversas.

Como pode ser observado na Tabela 2, a Justificativa 3 que demonstra compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante aparece mais frequente na quantidade contínua (37%) quando comparado a quantidade discreta (18%). Já a Justificativa 2, na qual o estudante considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos, confunde os valores do divisor e do quociente, expressando a não compreensão das relações inversas é mais freqüente na quantidade discreta (59%)quando comparado a contínua (40%). A Justificativa 1 (imprecisa ou circular) apresenta a mesma frequência em ambas quantidades contínuo e discreto: 23%.

Para investigar a associação entre as quantidades (contínuo e discreto) e as justificativas (Justificativa 1, imprecisa, circulares ou baseadas na adição e subtração; Justificativa 2, foco em um dos termos ou confunde ambos, e Justificativa 3, que indica a compreensão das relações inversas) na Condição 1 (presença de número) no geral foi realizado o Qui Quadrado, o X^2 que detectou diferença significativa ($\chi^2_{(1)}$ = 46,44; *p*<.0001).

Como encontrado para o resultado geral dos grupos investigados, constatou-se uma associação significativa entre as justificativas utilizadas e os anos escolares quando se investiga as quantidades (discreta e contínua) na Condição 1[3º ano ($\chi^2_{(1)}$ = 22,23 p<.0001 e o 5º ano($\chi^2_{(1)}$ = 28,75; p<.0001)].

De modo geral observa-se na Tabela 2, os estudantes do G1 (3º ano) usam mais a Justificativa 2 (foco em um dos termos ou confunde-se ambos) em ambas as quantidades (contínuo: 34% e discreto: 24%), seguidas de Justificativas 1, imprecisas, circulares ou baseadas na adição e subtração (contínuo: 13% e discreto: 10%) e de Justificativas 3, compreensão sobre as relações inversas (contínuo: 13% e discreto:6%). Os resultados revelaram diferenças significativas em relação a J1 vs J2 ($\chi^2_{(1)}$ = -0.15; p = 0.004451) e J2 vs J3 ($\chi^2_{(1)}$ = +0,23 p < .0001). Não foram detectadas diferenças significativas quando se compara J1 vs J3 ($\chi^2_{(1)}$= +0.11 ; p= 0,217619). Esses resultados indicam que a maior dificuldade dos estudantes do 3º ano reside em focalizar a atenção apenas no número do divisor (maior ou menor divisor), não considerando as relações deste com os demais termos da divisão em ambas quantidades e que as Justificativas 1 e 3 em ambas as quantidades apresentam frequências semelhantes na Condição 1 (presença de número), corroborando com o que discutido anteriormente quando olha-se para as condições (C1 vs. C2).

Os estudantes do G2 (5º ano) apresentam maior frequência de Justificativas 3 (24%), seguidos de Justificativas 2 (16%) e de Justificativas 1 (imprecisas,circulares ou baseadas na adição e subtração:10%) na quantidade contínua. Já na quantidade discreta apresentam maior frequência de Justificativas 2 (25%) seguidos de Justificativas 1 (13%) e de Justificativas 3(12%).

Os resultados revelaram diferenças significativas em relação a J1 vs J3($\chi^2_{(1)}$= +0,22; p= 0.000315) e J2 vs J3 ($\chi^2_{(1)}$= +0.27; p <.0001). Não foram detectadas diferenças significativas quando se compara J1 vs J2($\chi^2_{(1)}$= -0.04; p= 0.559829). Tais resultados indicam que a Justificativa 3 aparece com maior frequência na quantidade contínua quando comparado na quantidade discreta na Condição 1, indicando que a quantidade contínua facilita a compreensão das relações inversas para os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão, enquanto que a Justificativa 2 é mais frequente na quantidade discreta.

4.2.3.2 *Por tipo de quantidade: na Condição 2 (presença de código)*

A Tabela 3 ilustra as justificativas em cada grupo, por quantidades discretas e contínuas na Condição 2 (presença de códigos).

Tabela 3 - Frequência e percentual (entre parênteses) de justificativas nas quantidades (discreta e contínua) por grupo, na Condição 2 (presença de códigos).

	Condição 2: presença de código					
Grupos	**Contínua** (n= 480)*			**Discreta** (n= 480)*		
	J1**	J2	J3	J1	J2	J3
G1	**72**	**106**	**62**	**82**	**107**	**51**
3º ano	(15)	(22)	(13)	(17)	(22)	(11)
G2	**40**	**70**	**130**	**31**	**124**	**85**
(5º ano)	(8)	(15)	(27)	(6)	(26)	(18)
Total	**112**	**176**	**192**	**113**	**231**	**136**
	(23)	(37)	(40)	(23)	(48)	(29)

*** Nota:** n (corresponde ao número total de justificativas)**J1: imprecisas, circulares ou baseadas na adição ou subtração; J2: foco em um dos termos ou confunde ambos; J3: compreensão das relações inversas.

Como pode ser observado na Tabela 3, de modo geral constata-se que as Justificativas 2, na qual o estudante considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos, confunde os valores do divisor e do quociente, expressando a não compreensão das relações inversas são mais frequentes na quantidade discreta (48%) quando comparado as quantidades contínuas (37%). Enquanto que as Justificativas 3 que expressam a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o valor do dividendo é mantido constante são mais frequentes na quantidade contínua (40%) do que na quantidade discreta (29%). Observa-se ainda que as Justificativas 1 (imprecisas, circulares ou baseadas na adição e subtração) apresentam o mesmo percentual em ambas as quantidades (contínuo: 23% e discreto: 23%).

Para investigar a associação entre as quantidades (contínuo e discreto) e as justificativas (Justificativa 1, imprecisas, circulares ou baseadas na adição e subtração; Justificativa 2, foco em um dos termos ou confunde ambos, e Justificativa 3, que indica a compreensão das relações inversas) na Condição 2 (presença de código) no geral foi realizado o Qui Quadrado, o X^2 que detectou associação significativa ($\chi^2_{(1)} = 17$; $p< 0.002$).

Constatou-se uma associação significativa entre as justificativas utilizadas e os anos escolares quando se investiga as quantidades (discreta e contínua) na Condição 2 no5º ano ($\chi^2_{(1)} = 25{,}59$; p <.0001). Não foi detectada associação significativa entre as justificativas no 3º ano ($\chi^2_{(1)} = 1{,}72$; p= 0.4232).

Observa-sena Tabela 3, que os estudantes do G2 (5º ano) apresentam maior frequência de Justificativas 3 que expressam a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o valor do dividendo é mantido constante são mais frequentes na quantidade contínua (27%) quando comparado a quantidade discreta (18%) e de Justificativas 2, na qual o estudante considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos, confunde os valores do divisor e do quociente, expressando a não compreensão das relações inversas é mais frequente na quantidade discreta (26%) quando comparado a quantidade contínua (15%) enquanto que as Justificativas 1 (imprecisas, circulares ou baseadas na adição e subtração) apresentam percentuais semelhantes em ambas quantidades (contínua: 8% e discreta 6%).

Os resultados revelaram diferenças significativas em relação a J1 vs. J2 ($\chi^2_{(1)} = - 0.54$; p= 0.0001) e J2 vs. J3 ($\chi^2_{(1)} = +0.24$; p <.0001). Não foram detectadas diferenças significativas quando se compara J1 vs. J3 ($\chi^2_{(1)} =+0.04$; p= 0.631524).Tais resultados indicam que a Justificativa 3 aparece com maior frequência na quantidade contínua quando comparado na quantidade discreta na Condição 2 e que a Justificativa 2 aparece com maior frequência na quantidade discreta.

Esse resultado indica que a quantidade contínua facilita a compreensão das relações inversas para os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão na Condição 2 (código relativo), assim como foi observado na Condição 1 (número).

4.2.4 Análise qualitativa da Justificativa 2

Uma vez que a justificativa do Tipo 2 configurou-se como a mais frequente nos grupos, fez-se necessário realizar uma análise mais minuciosa, considerando seus subtipos (J2A, J2B, J2C), e compreendendo que essa justificativa sinaliza de forma mais clara as dificuldades que os estudantes apresentam ao pensar sobre a divisão. Isto porque essa justificativa revela os seguintes erros experimentados pelos estudantes: (J2A) foco da atenção no valor do dividendo; (J2B) foco da atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor e J2Cconfundem tamanho da parte com o número de partes.

4.2.4.1 *Por condição: C1 (presença de números) vs C2 (presença de códigos)*

A Tabela 4 ilustra a distribuição dos diferentes tipos de erros que caracterizam a Justificativa 2 no total, considerando as duas condições (C1 e C2).

Tabela 4 - Frequência e percentual (entre parênteses) dos subtipos presentes na Justificativa 2 por condição (C1 e C2).

Condição	J2A foco da atenção no valor do dividendo	J2B foco da atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor	J2C confundem tamanho da parte com o número de partes.
Condição 1: presença de número (n=473)*	9 (1,9)	431 (91,1)	33 (7)
Condição 2: presença de código (n= 406)	7 (1,7)	394 (97)	5 (1,3)

*** Nota:** n (corresponde ao número total de justificativas apresentadas em cada condição.

De modo geral verifica-se que a Justificativa J2B (foco da atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor) é a mais frequente tanto na Condição 1 como na Condição 2, respectivamente 91,1% e 97%. Observa-se, também a Justificativa J2C (confundem tamanho da parte com o número de partes) é mais frequente na Condição 1 (presença de número: 7%) quando comparado a Condição 2 (presença de código: 1,3%). Já as Justificativas 2A apresentam percentuais semelhantes em ambas as Condições (C1: 1,9% e

C2: 1,7). Esses resultados apontam que o erro mais frequente em ambas as condições é o J2B, no qual as crianças prestam mais atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor.

4.2.4.2 *Por condição (C1 e C2) e por quantidade (discreta vs. contínua)*

Será que haveria diferenças nos tipos de erros se considerarmos as quantidades contínua e discreta em cada condição? A Tabela 5 ilustra a distribuição dos erros considerando as duas condições (C1 e C2)no total, considerando as quantidades.

Tabela 5 - Frequência e percentual (entre parênteses) dos subtipos presentes na Justificativa 2 por condição (C1 e C2) e por quantidade (discreta vs. contínua).

Condição	Contínua			Discreta		
	J2A	J2B	J2C	J2A	J2B	J2C
C1 Presença de número (n=473)*	2 (0,4)	180 (38)	9 (2)	7 (1,5)	251 (53)	24 (5,1)
C2 Presença de código (n=406)*	3 (0,7)	171 (42,1)	2 (0,5)	4 (1)	223 (55)	3 (0,7)
Total (n= 879)	5 (1)	351 (40)	11 (1)	11 (1)	474 (54)	27 (3)

Nota: *****n (corresponde ao número total de justificativas apresentadas) **J2A - foco da atenção no valor do dividendo; J2B - foco da atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor; JC - confundem tamanho da parte com o número de partes.

De modo geral, verifica-se na Tabela 5, que as J2B, foco da atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor é a mais frequente tanto na quantidade discreta (54%) como na quantidade contínua (40%) em ambas as condições. Observa-se, ainda, que o percentual desse tipo de justificativa é menor na quantidade contínua quando comparado a quantidade discreta, respectivamente 40% e 54%. A J2A (foco da atenção no valor do dividendo) aparece de forma semelhante tanto na quantidade discreta como na quantidade contínua (1%). Enquanto que a J2C (confundem tamanho da parte com o número de partes) é mais frequente na quantidade discreta (3%) do que na quantidade contínua (1%), embora esses percentuais sejam muito próximos. Salienta-se, ainda, que a Justificativa 2B (foco da atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor) é a mais frequente tanto na Condição 1 (contínuo 38% e discreto 53%) como na Condição 2 (contínuo 42,1% e discreto 55%).

Tais resultados revelam que nos dois tipos de quantidade (contínua e discreta) o erro no qual o foco da atenção está no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor é o mais frequente, embora verifique-se que este diminui quando se considera as quantidades contínuas.Nesse sentido, além da quantidade contínua facilitar a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante, como verificado anteriormente, ela minimiza esse tipo de erro.

4.3 *Relação entre desempenho e justificativas*

Buscou-se investigar ainda se haveria relação entre o desempenho (resposta correta e incorreta) e as justificativas utilizadas pelos estudantes, como ilustra a Tabela 6 a seguir:

Tabela 6 - Percentual de respostas corretas e incorretas em cada justificativa no total

Justificativas	**Respostas**	
	Correta	**Incorreta**
J1 (imprecisas, circulares ou baseadas na adição ou subtração) (n=444)*	33%	67%
J2 (foco em um dos termos ou confunde ambos) (n= 880)	8%	92%
J3 (compreensão das relações inversas) (n= 596)	91%	9%

*** Nota:** n (corresponde ao número total de justificativas nas respostas apresentadas)

De forma geral, percebe-se que a predominância das Justificativas 3, que expressam a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante é mais frequentemente acompanhada de respostas corretas (91%); enquanto que a quase totalidade das Justificativas 2 é acompanhada de respostas incorretas (92%), nesta justificativa os estudantes focalizam em um dos termos ou confunde ambos. Já as justificativas 1, estão associadas tanto a respostas corretas (33%) como incorretas (67%). O número de respostas corretas acompanhadas de Justificativas 1 pode ser derivada de respostas ao acaso ou haver casos em que a criança sabe, porém não consegue explicitar verbalmente as bases de seu raciocínio.

As Justificativas 2 com sua maior frequência reforça os resultados encontrados de forma geral no que diz respeito a predominância de respostas incorretas entre os grupos, uma vez que esta expressa a dificuldade de compreensão das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante, ou porque a criança focaliza a sua atenção em um dos termos, em geral, o divisor maior ou menor ou porque confunde o tamanho das partes com o número de partes. A maior frequência de respostas corretas associadas a Justificativas 3, demonstra que os estudantes conseguiram expressar de forma clara e precisa uma compreensão coerente sobre as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante, tendo êxito na resolução dos problemas apresentados.

CONCLUSÕES

O presente estudo objetivou responder aos seguintes questionamentos: (i) Será que estudantes instruídos formalmente sobre a divisão apresentam melhor desempenho na resolução de problemas de relação inversa entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante considerando a presença de números e códigos relativos envolvendo quantidades *discretas ou contínuas* quando comparado aos que não foram formalmente instruídos sobre este conceito no contexto escolar? (ii) Qual a natureza das justificativas adotadas pelos estudantes para resolverem problemas de relação inversa entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante na presença de números e códigos relativos quando são apresentadas quantidades *discretas e contínuas?*Estariam essas justificativas atreladas ao nível de escolaridade? (iii) Existiria um tipo de erro mais frequente quando se considera as condições (presença de números vs códigos relativos) e as quantidades *discretas e contínuas*?

As respostas a esses questionamentos serão discutidas em três blocos. No primeiro bloco são apresentadas as conclusões referentes ao desempenho considerando as variáveis investigadas (condição, quantidade e situação de divisão) e o conhecimento da divisão, sendo este representado pelo nível de instrução escolar. O segundo bloco apresenta as conclusões referentes a natureza das justificativas adotadas pelos estudantes, as principais dificuldades encontradas considerando-se as variáveis investigadas. No terceiro bloco são discutidas implicações educacionais e pesquisas futuras.

A escolaridade e o desempenho dos estudantes

Os resultados do presente estudo revelam que os estudantes que foram instruídos sobre a divisão no contexto escolar (G2: 5º ano), apresentaram níveis melhores de desempenho sobre as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante quando comparados aos que não foram formalmente instruídos sobre este conceito no contexto escolar (G1: 3º ano), considerando a presença de números e códigos relativos e envolvendo quantidades *discretas ou contínuas.*

Constata-se, um número elevado de respostas incorretas (G2: 53,3% e G1: 66,9%), evidenciando que os estudantes apresentam um conhecimento mais elementar acerca das relações covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Tal resultado corrobora com estudos anteriores (Correa & Spinillo, 2004; Florbela Soutinho & Mamede, 2013; Kornilak & Nunes, 2005; Lautert, 2005; Lautert, Spinillo & Correa, 2012; Nunes & Bryant, 1997; Oliveira, 2014; Squire & Bryant, 2002) que apontam que a escola não tem auxiliado os estudantes na compreensão da divisão enquanto operação matemática.

No que se refere ao desempenho nas duas condições: Condição 1 (presença de número) e a Condição 2 (presença de códigos relativos), os resultados revelaram que, de modo geral ambos os grupos apresentam melhor desempenho na Condição 2 (G1: M=4,33 e G2: M=5,60) quando comparado a Condição 1 (G1: M=3,35 e G2: M=5,25), apesar da diferença ser significativa apenas para o 3º ano. No que se refere ao desempenho em relação as quantidades, os dados indicam que, de modo geral os de ambos os grupos apresentam melhor desempenho nos problemas envolvendo quantidades contínuas quando comparado aos problemas envolvendo quantidades discretas, embora a diferença seja significativa apenas para o 5º ano.

Considerando apenas a Condição 1 (número), os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho nos problemas envolvendo quantidades contínuas e nos problemas de partição envolvendo quantidades contínuas. Resultados semelhantes foram observados considerando a Condição 2 (código), a saber os estudantes de ambos os grupos apresentam melhor desempenho nos problemas envolvendo quantidades contínuase em ambas as situações de divisão (partição e quota) com quantidade contínua.

Em outras palavras, os resultados permitiram verificar que os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão (5º ano) apresentam melhor desempenho em ambas às condições (número e código), na quantidade contínua e em ambas as situações de divisão (partição e quota) quando comparado aos estudantes do G1 (3º ano). Isso indica que ser instruído sobre a divisão no contexto escolar contribui mais para a compreensão das quantidades contínuas do que as quantidades discretas. Uma possível explicação para esse fato poderia estar relacionada ao fato de que no início da escolarização as atividades apresentadas no contexto escolar tendem a enfatizar as quantidades discretas e com o avanço na escolaridade apresentar mais situações que envolvem quantidades contínuas.

Além disso, existem estudos (e.g. Correa, 2006; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Nunes et. al., 2005) que apontam que as quantidades contínuas são mais difíceis para as crianças e que o avanço na escolaridade contribuiria para um melhor entendimento. Os resultados encontrados no presente estudo podem divergir com aqueles apresentados por Correa, Meireles e Curvelo (2000) e Correa (2006) em função das diferenças no delineamento experimental utilizado nos estudos anteriores, na qual o estudante tinha como suporte de representação o material concreto para pensar acerca dessas relações, enquanto que na presente investigação os estudantes foram solicitados a emitir suas respostas (oralmente) e alguns utilizaram lápis e papel, porém, a maioria dos registros escritos representava operações de adição e subtração.

Ressalta-se ainda que o presente estudo realizou um maior controle de variáveis se comparado às pesquisas que envolvem quantidades contínuas (Correa, 2006; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Kornilak & Nunes, 2005), pois estas focalizaram apenas códigos relativos e os participantes eram crianças que não foram instruídas formalmente acerca da divisão. Apenas o estudo de Kornilak e Nunes (2005) considerou a quantidade discreta além da contínua. Ademais, como pontua Kornilak (1999) não é possível realizar uma comparação direta entre estudos que possuem delineamentos experimentais e contextos diferentes. Nesse sentido, esses resultados podem ser questionáveis e reforçam a necessidade de mais investigações acerca das quantidades contínuas e a covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante.

Ainda no que se refere ao questionamento acerca do desempenho dos estudantes, este foi investigado considerando as condições (número e código), o tipo de quantidade (discreta vs. contínua) e a situação de divisão (partição e quota). Foi possível verificar que para ambos os grupos (3º e 5º ano) a quantidade contínua é mais fácil do que a discreta nas situações de divisão por partição na Condição 1. Esse resultado torna-se interessante, pois, apenas nesta situação de divisão e na Condição 1, as quantidades contínuas são mais fáceis para os estudantes que não possuem instrução formal acerca da divisão. Isso talvez se explique pelo fato de alguns estudos (e.g. Correa, 1996; Correa; Nunes & Bryant, 1998; Fischbein, Deri & Marino, 1985; Kornilaki & Nunes, 1997; Nunes & Bryant, 1997) apontarem que a partição seria mais simples, porque a noção inicial que a criança tem sobre a divisão é decorrente da noção de repartir (distribuir), estando a atenção da criança voltada para a distribuição de quantidades iguais. No entanto, esse resultado, precisa ser melhor investigado por não existir um consenso na literatura da área e pela necessidade de um maior controle do número de problemas apresentados nessa condição e da natureza dos problemas apresentados, visando controlar melhor os enunciados e as situações vivenciadas pelos estudantes tanto no contexto escolar como nas situações diárias.

Os resultados revelam que para os estudantes do G2 (5º ano) é mais fácil lidar com quantidades contínuas na presença de códigos relativos em ambas as situações de divisão (partição e quota). Uma possível explicação para essa melhora poderia estar atrelada ao fato de que ao serem instruídos sobre a divisão no contexto escolar os professores tenderiam a apresentar uma maior diversidade de problemas aos estudantes. Entretanto, para afirmar sobre essa questão se faz necessária a realização de novos estudos que aprofundem essa investigação. Nesse sentido, a instrução formal sobre a divisão e a quantidade contínua são variáveis que influenciam no desempenho dos estudantes, tanto na resolução de problemas de partição como nos problemas de divisão por quotas, quando esses são solicitados a emitir seus julgamentos sobre as relações de covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. Para os estudantes que não possuem instrução formal acerca da divisão as situações de divisão (partição e quota) possuem o mesmo nível de dificuldade quando envolvem quantidades discretas e contínuas.

Esse resultado contrasta com o que foi observado no estudo realizado por Correa, Meireles e Curvelo (2000) apenas com criança sem instrução, no qual as autoras verificaram que é mais difícil para as crianças lidar com quantidades contínuas do que discretas em situação de divisão por partição. Os dados do presente estudo também contrastam com o estudo de Correa (2006), no qual foi observado que crianças possuem a mesma dificuldade de lidar com situação de divisão por partição e por quota quando envolvem quantidades contínuas. Entretanto como exposto anteriormente, os resultados desses estudos podem ser questionáveis em função da forma como as investigações foram realizadas.

Observou-se ainda, que apesar do desempenho inferior no geral observado nos estudantes que não possuem instrução formal (G1: 3º ano), eles demonstram ter algum conhecimento sobre as relações inversas da divisão quando o dividendo é mantido constante. Constatou-se, que esses prestam mais atenção nas relações de covariação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante na presença de códigos relativos do que na presença de números. Este dado torna-se relevante tendo em vista que a compreensão das crianças mais novas acerca da divisão seria subestimada, pois esta operação exigiria cálculo numérico, porém, as crianças pequenas costumam utilizar códigos relativos quando não conseguem pensar sobre as operações em termos absolutos (tarefas de cálculo), como foi observado também por Correa, Nunes e Bryant (1998). Para Nunes (2016) um problema só pode ser resolvido quando as crianças utilizam relações contextuais, ou seja, quando quantidades são conectadas a uma operação, e a criança entende as relações necessárias (comutatividade e relações inversas) para aquela operação.

O fato dos problemas nessa investigação apresentarem códigos relativos direciona mais a atenção das crianças menores para as relações contextuais presentes nos enunciados dos problemas, o que as ajudaria no entendimento das relações de co-variação entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante. No entanto, como pontua Nunes (2016) mais pesquisas precisam ser implementadas para investigar as relações contextuais e a focalização em números específicos de um problema para resolvê-lo.

Ademais, o fato de esses estudantes demonstrarem ter algum conhecimento sobre as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante pode ser explicado pelo uso do raciocínio intuitivo defendido por diversos autores (e.g. Andrà & Santi, 2013; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Fischbein, 1987; Greer, 1992; Harel, Behr, Post, &Lesh, 1994; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Spinillo, 1994;1995). Entretanto, de acordo com Steffe (1994) esse raciocínio torna-se distorcido quando as crianças entram na escola, pois o mesmo é desestimulado em favor de métodos padronizados.Segundo Fischbein (1987), a instrução escolar deveria utilizar essas estratégias intuitivas como ponto de partida para construir novas representações coerentes com o conhecimento formal. Kornilak e Nunes (2005), também,ressaltam que o desempenho das crianças para resolverem problemas de divisão pode ser influenciado não apenas pelo uso do raciocínio intuitivo, mas pelo nível das tarefas impostas.Diante deste cenário, sugere-se que o ensino da divisão seja iniciado mais cedo e que este envolva situações-problema que considerem o uso de códigos relativos e o uso de estimativas para serem resolvidas, diferente do que é tradicionalmente adotado na escola.

Natureza das justificativas adotadas pelos estudantes

Diante do exposto, direciona-se o olhar para os questionamentos relacionados as justificativas mencionadas anteriormente, a saber: Qual a natureza das justificativas adotadas pelos estudantes para resolverem problemas de relação inversa entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante com a presença de números e códigos relativos e quando são apresentadas quantidades *discretas e contínuas*? Estariam essas justificativas atreladas ao nível de escolaridade? Existiria um tipo de erro mais frequente quando se considera as condições e as quantidades envolvidas? Existiria diferenças no desempenho e nas justificativas em relação às principais variáveis investigadas (condição e quantidade) quando se considera os anos escolares investigados?

Nesta investigação foram observados três tipos de justificativas, a saber: Justificativa 1 (a criança apresenta explicações imprecisas, circulares, que não permitem identificar se alguma relação entre os termos da divisão foi estabelecida ou alguma relação entre informações contidas no enunciado); Justificativa 2 (a criança apresenta explicações que indicam alguma compreensão sobre as relações entre os termos,porém não expressam um entendimento a respeito das relações inversas, pois ela considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos, confunde os valores do divisor e do quociente) e a Justificativa 3 (a criança apresenta explicações que indicam a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão, explicitando o princípio geral de que uma vez mantido constante o valor do dividendo, as relações entre o tamanho das partes e o número de partes são inversas).

De modo geral constata-se que para ambos os grupos as Justificativas 2 são mais frequentes em ambas as condições (C1: presença de números e C2: presença de códigos). Já a Justificativa 3 que demonstra compreensão das relações inversas aparece mais frequente na quantidade contínua em ambas as condições e as Justificativas 1, imprecisas e circulares ou baseadas na adição e ou subtração apresentam o mesmo percentual nas duas condições.

As justificativas na qual a criança opera com os elementos presentes no enunciado do problema, através da adição ou subtração, não expressando a compreensão de que o enunciado envolve a divisão, aparece apenas na Condição 1 (presença de número), em 5 casos no 3º ano (0,2%) e 28 casos no 5º ano (1,5%). Uma possível explicação para os estudantes deste estudo utilizarem as operações de adição ou subtração pode estar atrelada a associação da operação de divisão ou das palavras “mais” e “menos” contidas nos enunciados dos problemas com as operações de adição ou subtração. Segundo Nunes (2010) pessoas que aprendem matemática através da experiência informal, ou seja, fora da escola não cometem esse tipo erro, ou seja, utilizar esquemas de raciocínio aditivo ou multiplicativo inapropriados para outros domínios.

Ressalta-se que dos 33 estudantesque usaram estas justificativas baseadas na adição ou subtração, seis utilizaram algortimos escritos, sendo a maioria do G2: 5º ano. Além disso, alguns estudantes mencionaram que faltava o número para operar. Isso significa que no geral, a maioria dos estudantes realizou cálculo mental para solucionar os problemas de divisão, entretanto os estudantes do G2 (5º ano) utilizaram mais o lápis e o papel. Uma possível explicação para esse fato pode estar relacionada às atividades escolares que em geral solicitam o uso de algoritmos escritos com o avanço dos anos escolares e como consequência os estudantes entendem que a matemática tem que ser sinônimo de cálculo numérico.

Ademais, Sowder (1988) comparou métodos baseados no uso de algoritmos escritos com aqueles baseados em cálculos mentais e constatou que os cálculos mentais são variáveis, flexíveis, ativos permitindo ao usuário escolher um método conscientemente ou não e holísticos, lidam com números completos ao invés de dígitos individuais. Já os métodos algoritmos escritos são padronizados, automáticos, eficientes, reduzidos, simbólicos, analíticos e não são facilmente internalizados, porque não correspondem ao modo como as pessoas pensam naturalmente sobre os números e encorajam a suspensão do pensamento.

Quanto a análise das justificativas considerando cada grupo verificou-se no geral que os estudantes do G1 (3º ano) usam mais a Justificativa 2, na qual o estudante considera apenas um dos termos da divisão, ou quando considera ambos os termos,confunde os valores do divisor e do quociente, expressando a não compreensão das relações inversas em ambas as condições (número e código) e quantidades (discreta e contínua). Enquanto os estudantes do G2 (5º ano) usam mais a Justificativas 3 que demonstra compreensão das relações inversas na quantidade contínua em ambas as condições (presença de número e presença de códigos). Esse resultado indica novamente que a quantidade contínua facilita a compreensão das relações inversas da divisão quando o dividendo é mantido constante para os estudantes que possuem instrução formal acerca da divisão corroborando com o que foi observado no desempenho.

Tendo em vista que justificativa do Tipo 2 configurou-se como a mais frequente nos grupos, foi realizada uma análise mais minuciosa, considerando seus subtipos:Justificativa 2A - focaliza a atenção no valor do dividendo apenas; Justificativa 2B - focaliza a atenção no divisor (maior ou menor) representado por um número ou pela palavra relacionada ao código relativo; Justificativa 2C - confunde o tamanho da parte com o número de partes).Os resultados apontaram que o erro mais frequente em ambas as condições (número e código) e quantidades(contínua e discreta) foi o J2B, no qual as crianças prestam mais atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor, porém ele diminui na quantidade contínua.Este resultado difere do observado no estudo de Correa, Nunes e Bryant (1998), Lautert (2005), Oliveira (2014) e Correa (2006), no quais os estudantes focalizavam a atenção apenas no maior divisor. Entretanto, nessa investigação os problemas envolviam questionamentos acerca do maior ou menor número de partes em que uma quantidade inicial havia sido distribuída (problemas de quota) e se o tamanho de cada parte em que uma quantidade inicial foi distribuída era maior ou menor (problema de partição), enquanto nos demais estudos o questionamento foi apenas acerca do maior divisor em ambas as situações.

Implicações educacionais e pesquisas futuras

É reconhecida a importância das crianças compreenderem o significado dos números na cultura e de aprenderem a pensar sobre o mundo em termos de números, quantidades, operações e relações para ampliarem a precisão e o poder do raciocínio delas, ou seja, de utilizar o raciocínio quantitativo (Nunes, 2016). Entretanto, como pode ser observado nesse estudo a maioria das crianças tem dificuldade em lidar com as relações inversas quando o dividendo é mantido constante em problemas de divisão que envolve as variáveis investigadas (condição, tipo de quantidade e situação de divisão), visto que prestam mais atenção no número ou palavra que representa o maior ou o menor divisor.

Defende-se que os erros das crianças podem se tornar uma ferramenta didática importante (Pinto, 2000), pois ele está relacionado ao processo de aquisição de conhecimentos e indica especificidades acerca da organização do raciocínio dos indivíduos. Assim, poderiam ser inseridos na prática do professor por meio do planejamento e da dinâmica das aulas, nas quais seriam incluídas atividades que colocassem o erro em evidência para ser objeto de reflexão e análise (Spinillo, Pacheco, Gomes & Cavalcanti, 2014).

Ainda quanto as implicações do estudo para a educação, Vergnaud (1988) chama atenção para o fato de que é preciso organizar situações didáticas com objetivos de curto prazo, que permitam aos estudantes desenvolver competências e concepções para uso imediato, quanto de longo prazo, que ofereceram uma base para os conceitos que serão essenciais no futuro.

Voltando o olhar para o presente estudo defende-se a relevância do ensino formal focalizar: as relações, as quantidades contínuas e discretas, bem como, o uso do cálculo mental para ajudar os estudantes a lidarem com as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e para evitar que eles fiquem presos à estreita concepção de números e de operações baseadas em algoritmos, o que poderia tornar-se um obstáculo para a aprendizagem da matemática.

Em concordância com esta ideia Nunes (2010) afirma que a educação matemática deveria desde o início focar no desenvolvimento de modelos de raciocínio ao invés de operações aritméticas, as quais deveriam ser instrumentais e secundárias na resolução de problemas, pois crianças pequenas utilizam ambos os esquemas de raciocínio (aditivo e multiplicativo) na resolução de problemas antes de aprenderem as operações aritméticas na escola e apesar desse conhecimento ser implícito, pesquisadores sugerem formas de transformá-lo em explícito.

Por fim, vale salientar que uma única situação não é suficiente para apreender um conceito plenamente e uma mesma situação envolve vários conceitos, por isso neste estudo o conceito de divisão foi trabalhado em situações de partição e quota e envolvendo variáveis diversas (a presença de números, códigos, quantidades discretas e contínuas). Entretanto, essas situações de acordo com Spinillo e Lautert (2006b) devem combinar suportes de representação diferentes (material concreto, icônico, linguagem e simbolismo matemático), pois um suporte pode ser apropriado para um conceito e insuficiente para outro e para possibilitar a passagem do sistema de representação icônico ou concreto para o simbólico.

No presente estudo alguns estudantes utilizaram o lápis e papel para fazer operações aritméticas ou representações icônicas. Nunes (2016) afirma que os suportes de representação gráfico, especificamente os diagramas podem auxiliar as crianças a lidar com relações contextuais facilitando a resolução de problemas. Ela afirma ainda que pesquisadores do Instituto Freudenthal defendem que as representações se desenvolvem de ativas para icônicas e depois simbólicas. A partir disso e das diferenças entre os suportes de representação utilizados nesse estudo e nos de Correa, Meireles e Curvelo (2000), Correa (2006) e Kornilak e Nunes (2005), os quais somados a outras questões podem estar influenciando no desempenho das crianças, sugere-se que estudos futuros investiguem a influência do uso de diferentes suportes de representações (icônicas e lápis e papel) na compreensão de crianças acerca das relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante considerando quantidades contínuas e discretas em uma mesma investigação.

Para finalizar, essa investigação aponta que as quantidades contínuas podem se tornar-se um recurso didático poderoso para o ensino da divisão, pois além de facilitar a compreensão das relações inversas da divisão quando o dividendo é mantido constante, como verificado, ela auxilia os estudantes que não possuem esta compreensão a reduzir os tipos de erros. Já as quantidades discretas levam os estudantes a se concentrarem nos números e não pensar nas relações envolvidas na resolução dos problemas. Ademais, para que a quantidade contínua se torne um recurso didático ela precisa ser inserida em um ambiente propício para discussões matemáticas, que não apenas considere essa ferramenta nos problemas matemáticos, mas incentive a comunicação e o debate em sala de aula durante e após a resolução de problemas envolvendo esse tipo de quantidade.

REFERÊNCIAS

Andrà, C., & Santi, G. (2013).Intuitive thinking in a context of learning. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Ed.), *Proceedings of the 37th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp 25-32). Kiel, GE: PME.

Barth, H., Baron, A., Spelke, E., Carey, S. (2009). Children's multiplicative transformations of discrete and continuous quantities. *Journal of Experimental Child Psychology.*103, 441–454.

Bell, A., Greer, B., Grimison,L. & Mangan, C. (1989) Children's Performance on Multiplicative Word Problems: Elements of a Descriptive Theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (5), 434-449.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 399-420.

Boavida, A. M. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores* (Dissertação de mestrado). Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.

Brasil (1997). Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF. Recuperado em 10 de outubro, 2015, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf.

Brito, M. R. F. de. (2000). "Este problema é difícil porque não é de escola": a compreensão de problemas aritméticos verbais por crianças da escola fundamental. *Temas de Psicologia*, 8(1), 93-109.

Brown, M. (1981). Numbers operations. In K. M. Hart (Ed), *Children's understanding of Mathematics* (pp. 11-16). London: John Murrayp.

Caldonazzo, A., Salgado, C. A., Capellini, S. A., & Ciasca, S. M. (2006). Desempenho na resolução de problemas envolvendo o conceito aditivo em sujeitos com dislexia do desenvolvimento. *Revista Psicopedagogia*, 23(71), 116-123.

Campos, T. M., Nunes, T., da Costa, N. M. L., & Ceragioli, L. (2012). A Representação de Quantidades Menores do que uma Unidade. *Revista Acta Scientiae*, 14, 363-373.

Chahon, M. (2006). Metacognição e resolução de problemas aritméticos verbais: Teoria e implicações pedagógicas. *Revista do Departamento de Psicologia-UFF*, 18(2), p. 163-176.

Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. Em M. H. Novaes & M. R. F. de Brito (Orgs.). *Psicologia na educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica* (Coletâneas da ANPEPP, vol1, nº 5, pp. 151-165). Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Psicologia/Xenon.

Correa, J. (2004). A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. *Estudos de Psicologia*,9(1),144-155.

Correa, J. (2006). A compreensão intuitiva da criança acerca do conceito de divisão por cotas de quantidades contínuas. In: Brito, M. R. F. (Org.). *Solução de problemas e a matemática escolar*. Campinas, Alínea, p. 13-53.

Correa, J., Meireles, E., & Curvelo, C.(2000). A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. *Estudos de Psicologia*, *5*(1), 11-31.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998).Young children's understanding of division: the relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2),321-329.

Correa, J., & Spinillo, A. G. (2004). O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In R. M. Pavanello (Org.), *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula* (pp. 103-127). São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM.

Da Rocha Falcão, J. R. (2008). *Psicologia da Educação Matemática: uma introdução*. Belo Horizonte: Autêntica.

Fávero, M. H., & Neves, R. S. P. (2009). Competências para resolver problemas e para analisar a resolução de problemas. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional*, 13(1), p. 113-124

Fischbein, E., Deri M., Nello., Marino, M. S. (1985). The hole of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal Research in Mathematics Education.*16 (1), 3-17.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

FlorbelaSoutinho., & Mamede, E. (2013).Young Children’s additive and multiplicative reasoning. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Ed.), *Proceedings of the 37th Conference of the Psychology of Mathematics Education (*Vol.4, pp 241-248). Kiel, GE: PME.

Frydman, O., & Bryant P (1988). Sharing and understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, 3, 323-339.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: MacMillan.

Guimarães, S. D. (2009). Problemas de estrutura aditiva: Análise da resolução de alunos de 3ª série do ensino fundamental. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 4(1), p.5-17.

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1994). The impact of number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 365-388)

Kornilaki, E. & Nunes, T. (1997). What do young children understand about division*?21st Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education,* Lahti, Finland.

Kornilaki, E. (1999). *Young childrens understanding of multiplicative concepts: A psychological approach.* (PhD thesis).Institute of Education, University of London.

Kornilaki, E., & Nunes, T. (2005). Generalising Principles in spite of Procedural Differences: Children's Understanding of Division. *Cognitive Development*, 20, 388-406.

Lautert, S. L. (2005). *As dificuldades das crianças com divisão: Um estudo de intervenção* (Tese de doutorado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE, Brasil.

Lautert, S. L., & Spinillo, A. (2002). As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. *Psicologia. Teoria e Pesquisa*,18(3), 237-246.

Lautert, S. L., & Spinillo, A. G. (2011). Estudo de intervenção sobre a divisão: Ilustrando as relações entre metacognição e aprendizagem. *Educar em Revista, 1,* 93-107.

Lautert, S. L., Spinillo, A., & Correa, J. (2012). Children's difficulties with division: an intervention study. *Journal of Medicine and Medical Sciences - JMMS*, (1),447-456.

Lautert, S. L., & Spinillo, A. (2015). Resolução de problemas de divisão inexata a partir de reflexões sobre o significado do resto. *Temas em Psicologia*, 23(1), 15-27.

Magina, S., &Campos, T. M. M. (2008). A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. *Boletim de Educação Matemática,* 21(31), 23-40.

Magina, S., Campos, T. M. M., Nunes, T., & Gitirana, V. (2001) Representando adição e subtração. *Contribuição da Teoria dos campos conceituais*. São Paulo: PROEM.

Magina, S. M. P., Dos Santos, A., & Merlini, L. V. (2014). O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. *Ciência & Educação*, 20(2), 517-533.

Mix, K., Levine, S., & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, 35, 164–174.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28 (3), p. 309-330

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theorical approaches and empirical findings. In J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13*(4),373-394.

Nunes, T. (2010). Continuities and discontinuities between informal and scientific mathematical thinking: insights for education. In Márcia M. F. Pinto & Teresinha F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*vol 1, (pp. 328-332).Belo Horizonte, Brazil: PME.

Nunes, T. (2011). *Na vida dez, na escola zero*. Apresentação à 16ª Edição. In: Nunes, T., Carraher, D. & Schliemann, A. L. São Paulo: Editora Cortez.

Nunes, T. (2016). Números, quantidades e relações: entendendo o raciocínio matemático nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In J. A. C. Filho.,M. C.Barreto.,P. M. Barguil., D. M. Maia., &J. L. Pinheiro (Orgs.). *Matemática, Cultura e Tecnologia: Perspectivas Internacionais*. Curitiba: CRV.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Bryant, P., Burman, D., Bell., D., Evans., D., Hallett, D., & Montgomery, L. (2008). Deaf Children’s Understanding of Inverse Relations. In M. Marschark & P. C. Hauser (Eds.), *Cognitive Underpinnings of Learning by Deaf and Hard-of-Hearing Students*.Oxford: Oxford University Press.

Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S., & Bryant, P. (2005). As estruturas multiplicativas:

avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula. *Educação matemática 1: números e operações numéricas.*São Paulo: Cortez.

Nunes, T., Desli, D.& Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research*, 39, 651–675.

Oliveira, D. C. A. (2014). *A compreensão das relações inversas da divisão por crianças nos anos iniciais de escolarização: um estudo acerca da não explicitação numérica em problemas.* (Dissertação de mestrado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012).Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 61-83.

Pinto, N. B. (2000).*O erro como estratégia didática: o estudo do erro no ensino da matemática elementar*. São Paulo: Papirus.

Rasmussen, C.,Ho. E.,& Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85(2),89-102.

Selva, A. C. V. (1993). *A influência de diferentes tipos de representação na resolução de problemas de divisão*. (Dissertação de mestrado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.

Selva, A. C. V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In A. Schliemann & D. Carraher (Eds), *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e Pesquisa* (pp. 95-119). São Paulo: Papirus.

Smith, C., Solomon, G., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, 51, 101–140.

Snir, J., Smith, C. L., & Raz, G. (2003). Linking phenomena with competing underlying models: A software tool for introducing students to the particulate model of matter. *Science Education, 87*, 794–830.

Spinillo, A. G. (1994). O conhecimento matemático de crianças antes da matemática na escola. *A Educação Matemática em Revista, 2*(3), 41-50.

Spinillo, A.G. (1995). Can young children learn how to reason proportionally? An intervention study. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME).vol. 3, pp.* 192–199. Recife, Brazil.

Spinillo, A. G., & Lautert, S. L. (2006a). Exploring the role played by the remaider in the solution of division problems. In J. Novotná., H. Moraová., M. Krátká & N. Stehlíková (Eds).*Proceedings of the 30thConference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol 5, pp. 153-162, Praga, Czech Republic: PME.

Spinillo, A. G., & Lautert, S. (2006b). O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: Luciano Meira; Alina Spinillo. (Org.). *Psicologia Cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem*. Recife: Universitária da UFPE, v. 1, p. 46-80.

Spinillo, A. G., Pacheco, A. B., Gomes, J. F., & Cavalcanti, L. (2014). O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? *Boletim GEPEM (Online*), 64, 1-12.

Squire, S., & Bryant, P. (2002). The influence of sharing of children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology,*81, 1- 43.

Steffe L. P. (1994) Children's multiplying schemes. In: Harel G. & Confrey J. (eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. SUNY Press, New York: 3–39.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Estructures.In Lesh, R., Landau, M. (Eds). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic press.

Vergnaud, G. (1988). Structures Multiplicatives. In H. Hiebert., & M. Behr (Ed).*Research agenda in mathematics education: Number concepts and operations in Middle Grades*. Hillsdale:LaurenceErlbaum, p. 141-161.

Vergnaud, G. (1991). La théorie dês champs conceptuels. *Recherches em Didactique des Mathématiques*,10(23), 133-170.Salvador: BA

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos campos conceituais. In: Grossi, E. P. (org). *Porque ainda há quem não aprende? A teoria*. Rio de Janeiro: Vozes, p. 21-64.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escolar elementar* (Moro, M. L. F, Trad.). Curitiba: Editora da UFPR.

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista.* Curitiba, Brasil, nº. Especial 1, 15-27.Editora UFPR.

APÊNDICE A – MODELO DE PROTOCOLO DE TRANSCRIÇÃO

Protocolo de Transcrição

Grupo 2 - 5º ano – Ordem B/ Subgrupo 2

Sujeito 59

Nome: L. M.

Idade: 11 anos

E- Examinadora

C- Criança

(DPP1) Ivete e Diana foram a uma floricultura próxima à casa delas e cada uma comprou 21 rosas. Ivete quer colocar suas rosas em 3 vasos e Diana quer colocar suas rosas em 7 vasos. Quem vai ter vasos com mais rosas, Ivete ou Diana? Por quê?

C – Diana.

E – Por quê?

C – Porque ela vai colocar em mais vasos.

(DPQ2) Fernanda e Otávio foram a papelaria e cada um comprou 24 figurinhas. Fernanda quer colar 4 figurinhas em cada página de seu caderno e Otávio quer colar 6 figurinhas. Quem vai precisar de mais páginas para colar todas as figurinhas, Otávio ou Fernanda? Por quê?

C – Otávio.

E – Por quê?

C – Porque ele vai colocar mais do que a Fernanda.

(DPP3) Davi e Gabriel foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 16 carrinhos coloridos. Gabriel quer colocar seus carrinhos em 4 caixas e Davi quer colocar seus carrinhos em 8 caixas. Quem vai ter caixas com menos carrinhos coloridos, Gabriel ou Davi? Por quê?

C – Davi.

E – Por quê?

C – Porque ele quer colocar em mais caixas.

(DPQ4) Miguel e João foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 18 bolinhas. Miguel quer guardar 3 bolinhas em cada saquinho e João quer guardar 6 bolinhas em cada saquinho. Quem vai precisar de menos saquinhos para colocar todas as bolinhas, Miguel ou João?Por quê?

C – Miguel.

E – Por quê?

C – Porque ele vai colocar menos bolinhas.

(DPP5) Letícia e Alice foram ao parque fazer um piquenique, e cada uma levou 12 biscoitos para comer. Letícia quer colocar seus biscoitos em 2 potes e Alice quer colocar seus biscoitos em 6 potes. Quem vai ter potes com mais biscoitos, Letícia ou Alice? Por quê?

C – Alice.

E – Por quê?

C – Porque ela vai colocar em 6 potes.

(DPQ6) Luana e Marta foram a uma festa, e cada uma ganhou 15 pulseiras de brinde. Luana quer colocar 3 pulseiras na bolsa e Marta quer colocar 5 pulseiras na bolsa. Quem vai precisar de mais bolsas para colocar todas as pulseiras, Luana ou Marta? Por quê?

C – Marta.

E – Por quê?

C – Porque ela vai colocar em 5 pulseiras em cada.

(CPP7) Andréia e Bruno fizeram na hora do lanche cada um, 1 litro de suco para distribuir igualmente com seus primos. Andréia deu o suco para 4 primos e Bruno para 6 primos. Quem vai ter copos com mais suco os primos de Andréia ou os de Bruno? Por quê?

C – Andréia.

E – Por quê?

C – Porque ela vai dar pra menos pessoas e vai distribuir cheio.

(CPQ8) Manoela e Fernanda fizeram cada uma, 1litro de suco de laranja para distribuir igualmente com seus amigos. Manoela colocou o suco em copos de 100ml e Fernanda em copos de 200ml. Quem vai distribuir o suco de laranja com mais amigos, Manoela ou Fernanda? Por quê?

C – Manoela.

E – Por quê?

C – Porque ela vai colocar em copos de 100ml.

(CPP9) Carol e Diego foram a padaria e cada um comprou 1 bolo do mesmo tamanho. Carol quer distribuir igualmente o bolo com 3 amigos e Diego com 7 amigos. Quem vai ter os pedaços de bolo menor, os amigos de Carol ou de Diego? Por quê?

C – Diego.

E – Por quê?

C – Porque ele vai dar pra 7 amigos.

(CPQ10) Dara e Joana compraram cada uma 1 pizza grande de calabresa. Dara quer dar 3 pedaços de pizza para cada um de seus amigos e Joana quer dar 4 pedaços de pizza. Quem vai dar pedaços de pizza menores aos seus amigos, Dara ou Joana? Por quê?

C – Joana.

E – Por quê?

C – Porque ela vai dar para mais amigos.

(CP11) Antônio e Carla foram visitar seus avós e cada um ganhou 15 reais para dividir igualmente com seus irmãos. Antônio tem 2 irmãos e Carla tem 4 irmãos. Quem vai ficar com menos dinheiro, os irmãos de Carla ou os irmãos de Antônio? Por quê?

C – Carla.

E – Por quê?

C – Porque ela tem 4 irmãos.

(CPQ12) Maria e Paulo ganharam de suas mães, cada um, 12 reais de mesada. Maria quer comprar doces que custam 3 reais e Paulo quer comprar doces que custam 4 reais. Quem vai comprar menos doces com o dinheiro que recebeu, Maria ou Paulo? Por quê?

C – Paulo.

E – Por quê?

C – Porque ele quer comprar por 4 reais.

(DPP13) Marcos e Camila foram a uma papelaria e cada um comprou a mesma quantidade de lápis de cor. Marcos tem mais estojos do que Camila para colocar os lápis de cor. Quem vai colocar menos lápis de cor nos estojos, Marcos ou Camila? Por quê?

C – Quem vai colocar menos é Camila.

E – Por quê?

C – Porque ele tem mais estojo do que ela.

(DPQ14) Júlia e Rafael são irmãos e estão arrumando o guarda roupa. Cada um deles tem a mesma quantidade de blusas. Júlia vai colocar mais blusas do que Rafael em cada gaveta. Quem vai precisar de menos gavetas para arrumar as blusas, Rafael ou Júlia? Por quê?

C – Rafael.

E – Por quê?

C – Porque ela vai colocar mais blusas do que Rafael.

(DPP15) Artur e Patrícia foram visitar suas avós e ganharam, cada um, a mesma quantidade de maçãs para colocar em cestas. Artur tem menos cestas do que Patrícia para colocar as maçãs. Quem vai ter as cestas com mais maçãs, Patrícia ou Artur? Por quê?

C – Patrícia.

E – Por quê?

C – Porque ela tem mais cestas.

(DPQ16) Depois do almoço Pedro e Tereza ajudaram a sua tia fazendo biscoitos. Cada um deles fez a mesma quantidade de biscoitos. Pedro vai colocar menos biscoitos do que Tereza em cada bandeja. Quem vai precisar de mais bandejas, Pedro ou Tereza? Por quê?

C – Tereza.

E – Por quê?

C – Porque Tereza vai fazer mais do que Pedro.

(DPP17) Bruna e Rodrigo são professores. Cada um deles comprou a mesma quantidade de bombons para presentear os seus alunos. A professora Bruna tem menos alunos do que o professor Rodrigo. Quem vai receber mais bombons os alunos da professora Bruna ou os do professor Rodrigo? Por quê?

C – Do professor Rodrigo.

E – Por quê?

C – Porque ele tem mais alunos do que a professora Bruna.

(DPQ18) Guilherme e Mateus foram ao cinema e convidaram seus amigos da escola. Cada um comprou a mesma quantidade de pipocas para distribuir com seus amigos. Guilherme tem menos amigos do que Mateus. Quem vai receber mais pipocas, os amigos de Guilherme ou os amigos de Mateus? Por quê?

C – Guilherme.

E – Por quê?

C – Porque ele tem menos amigos.

(CPP19) Larissa e Douglas fizeram a mesma quantidade de suco de uva para distribuir com seus primos. Larissa distribuiu o suco de uva para mais primos do que Douglas. Quem vai beber menos suco de uva, os primos de Larissa ou os primos de Douglas? Por quê?

C – De Douglas.

E – Por quê?

C – Porque ela tem mais amigos, porque ela vai dar pra mais primos e ele vai dar pra menos.

(CPQ20) Luana e Bárbara organizaram um piquenique no parque com as amigas e cada uma levou a mesma quantidade de guaraná. Luana quer colocar mais guaraná em cada copo do que Bárbara. Quem vai distribuir o guaraná com menos amigas no piquenique, Luana ou Bárbara? Por quê?

C – Bárbara.

E – Por quê?

C – Porque ela vai distribuir para menos amigos.

(CPP21) Joana e Lucas foram a uma pizzaria e cada um comprou a mesma quantidade de pizza para distribuir com seus amigos. Joana tem menos amigos do que Lucas. Quem vai ter pedaços de pizza maior, os amigos de Lucas ou os de Joana? Por quê?

C – Joana.

E – Por quê?

C – Porque ela tem menos amigos.

(CPQ22) Sara e Daniel foram a feira do bairro e cada um comprou a mesma quantidade de melancia. Sara quer dar pedaços menores de melancia para seus amigos do que Daniel. Quem vai dividir a sua melancia com mais amigos, Daniel ou Sara?Por quê?

C – Daniel.

E – Por quê?

C – Porque ele vai dar pedaços menores.

(CPP23) A equipe de Felipe e a equipe de Paula ganharam em uma competição a mesma quantidade de dinheiro para dividir igualmente. Felipe tem mais colegas do que Paula na equipe. Quem vai receber menos dinheiro, a equipe de Felipe ou a equipe de Paula? Por quê?

C – De Paula.

E – Por quê?

C – Porque tem mais gente, tem mais colegas.

(CPQ24)Débora e Alex ganharam de seus pais a mesma quantidade de dinheiro para comprar frutas. Eles desejam comprar frutas de preços diferentes. Débora quer comprar frutas mais baratas e Alex frutas mais caras. Quem vai comprar menos frutas com o dinheiro, Débora ou Alex? Por quê?

C – Alex.

E – Por quê?

C – Porque ele quer comprar de frutas caras.

APÊNDICE B - CARTELAS COM PROBLEMAS UTILIZADAS NAS CONDIÇÕES INVESTIGADAS

(DPP1) Ivete e Diana foram a uma floricultura próxima à casa delas e cada uma comprou 21 rosas. Ivete quer colocar suas rosas em 3 vasos e Diana quer colocar suas rosas em 7 vasos. Quem vai ter vasos com mais rosas, Ivete ou Diana? Por quê?
(DPQ2) Fernanda e Otávio foram a papelaria e cada um comprou 24 figurinhas. Fernanda quer colar 4 figurinhas em cada página de seu caderno e Otávio quer colar 6 figurinhas. Quem vai precisar de mais páginas para colar todas as figurinhas, Otávio ou Fernanda? Por quê?
(DPP3) Davi e Gabriel foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 16 carrinhos coloridos. Gabriel quer colocar seus carrinhos em 4 caixas e Davi quer colocar seus carrinhos em 8 caixas. Quem vai ter caixas com menos carrinhos coloridos, Gabriel ou Davi? Por quê?
(DPQ4) Miguel e João foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 18 bolinhas. Miguel quer guardar 3 bolinhas em cada saquinho e João quer guardar 6 bolinhas em cada saquinho. Quem vai precisar de menos saquinhos para colocar todas as bolinhas, Miguel ou João?Por quê?
(DPP5) Letícia e Alice foram ao parque fazer um piquenique, e cada uma levou 12 biscoitos para comer. Letícia quer colocar seus biscoitos em 2 potes e Alice quer colocar seus biscoitos em 6 potes. Quem vai ter potes com mais biscoitos, Letícia ou Alice? Por quê?
(DPQ6) Luana e Marta foram a uma festa, e cada uma ganhou 15 pulseiras de brinde. Luana quer colocar 3 pulseiras na bolsa e Marta quer colocar 5 pulseiras na bolsa. Quem vai precisar de mais bolsas para colocar todas as pulseiras, Luana ou Marta? Por quê?
(CPP7) Andréia e Bruno fizeram na hora do lanche cada um, 1 litro de suco para distribuir igualmente com seus primos. Andréia deu o suco para 4 primos e Bruno para

6 primos. Quem vai ter copos com mais suco os primos de Andréia ou os de Bruno? Por quê?
(CPQ8) Manoela e Fernanda fizeram cada uma, 1litro de suco de laranja para distribuir igualmente com seus amigos. Manoela colocou o suco em copos de 100ml e Fernanda em copos de 200ml. Quem vai distribuir o suco de laranja com mais amigos, Manoela ou Fernanda? Por quê?
(CPP9) Carol e Diego foram a padaria e cada um comprou 1 bolo do mesmo tamanho. Carol quer distribuir igualmente o bolo com 3 amigos e Diego com 7 amigos. Quem vai ter os pedaços de bolo menor, os amigos de Carol ou de Diego? Por quê?
(CPQ10) Dara e Joana compraram cada uma 1 pizza grande de calabresa. Dara quer dar 3 pedaços de pizza para cada um de seus amigos e Joana quer dar 4 pedaços de pizza. Quem vai dar pedaços de pizza menores aos seus amigos, Dara ou Joana? Por quê?
(CP11) Antônio e Carla foram visitar seus avós e cada um ganhou 15 reais para dividir igualmente com seus irmãos. Antônio tem 2 irmãos e Carla tem 4 irmãos. Quem vai ficar com menos dinheiro, os irmãos de Carla ou os irmãos de Antônio? Por quê?
(CPQ12) Maria e Paulo ganharam de suas mães, cada um, 12 reais de mesada. Maria quer comprar doces que custam 3 reais e Paulo quer comprar doces que custam 4 reais. Quem vai comprar menos doces com o dinheiro que recebeu, Maria ou Paulo? Por quê?
(DPP13) Marcos e Camila foram a uma papelaria e cada um comprou a mesma quantidade de lápis de cor. Marcos tem mais estojos do que Camila para colocar os lápis de cor. Quem vai colocar menos lápis de cor nos estojos, Marcos ou Camila? Por quê?
(DPQ14) Júlia e Rafael são irmãos e estão arrumando o guarda roupa. Cada um deles tem a mesma quantidade de blusas. Júlia vai colocar mais blusas do que Rafael em cada gaveta. Quem vai precisar de menos gavetas para arrumar as blusas, Rafael ou Júlia? Por quê?
(DPP15) Artur e Patrícia foram visitar suas avós e ganharam, cada um, a mesma

quantidade de maçãs para colocar em cestas. Artur tem menos cestas do que Patrícia para colocar as maçãs. Quem vai ter as cestas com mais maçãs, Patrícia ou Artur? Por quê?
(DPQ16) Depois do almoço Pedro e Tereza ajudaram a sua tia fazendo biscoitos. Cada um deles fez a mesma quantidade de biscoitos. Pedro vai colocar menos biscoitos do que Tereza em cada bandeja. Quem vai precisar de mais bandejas, Pedro ou Tereza? Por quê?
(DPP17) Bruna e Rodrigo são professores. Cada um deles comprou a mesma quantidade de bombons para presentear os seus alunos. A professora Bruna tem menos alunos do que o professor Rodrigo. Quem vai receber mais bombons os alunos da professora Bruna ou os do professor Rodrigo? Por quê?
(DPQ18) Guilherme e Mateus foram ao cinema e convidaram seus amigos da escola. Cada um comprou a mesma quantidade de pipocas para distribuir com seus amigos. Guilherme tem menos amigos do que Mateus. Quem vai receber mais pipocas, os amigos de Guilherme ou os amigos de Mateus? Por quê?
(CPP19) Larissa e Douglas fizeram a mesma quantidade de suco de uva para distribuir com seus primos. Larissa distribuiu o suco de uva para mais primos do que Douglas. Quem vai beber menos suco de uva, os primos de Larissa ou os primos de Douglas? Por quê?
(CPQ20) Luana e Bárbara organizaram um piquenique no parque com as amigas e cada uma levou a mesma quantidade de guaraná. Luana quer colocar mais guaraná em cada copo do que Bárbara. Quem vai distribuir o guaraná com menos amigas no piquenique, Luana ou Bárbara? Por quê?
(CPP21) Joana e Lucas foram a uma pizzaria e cada um comprou a mesma quantidade de pizza para distribuir com seus amigos. Joana tem menos amigos do que Lucas. Quem vai ter pedaços de pizza maior, os amigos de Lucas ou os de Joana? Por quê?

(CPQ22) Sara e Daniel foram a feira do bairro e cada um comprou a mesma quantidade de melancia. Sara quer dar pedaços menores de melancia para seus amigos do que Daniel. Quem vai dividir a sua melancia com mais amigos, Daniel ou Sara?Por quê?
(CPP23) A equipe de Felipe e a equipe de Paula ganharam em uma competição a mesma quantidade de dinheiro para dividir igualmente. Felipe tem mais colegas do que Paula na equipe. Quem vai receber menos dinheiro, a equipe de Felipe ou a equipe de Paula? Por quê?
(CPQ24) Débora e Alex ganharam de seus pais a mesma quantidade de dinheiro para comprar frutas. Eles desejam comprar frutas de preços diferentes. Débora quer comprar frutas mais barata e Alex frutas mais cara. Quem vai comprar menos frutas com o dinheiro, Débora ou Alex? Por quê?

APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS - Resolução 466/12)

Solicitamos a sua autorização para convidar o (a) seu/sua filho (a)________________ {ou menor que está sob sua responsabilidade} para participar, como voluntário (a), da pesquisa "Quantidades contínuas e discretas: um olhar sobre a compreensão de estudantes acerca das relações inversas em problemas de divisão". Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) Clara Raíssa Fernandes de Melo que reside na Rua Rejane Freire Correia, número 115, apartamento 202, Bairro Jardim Cidade Universitária, CEP 58052-197, João Pessoa–PB/ telefone: (83) 988276048/ (83) 32354337/ e-mail: clararfm1@hotmail.com. A pesquisa está sob a orientação de: Síntria Labres Lautert, Telefone: (81)2126 8272/ (81)21267030 ou (81)999159504, e-mail sintrialautert@gmail.com.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde que o (a) menor faça parte do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Caso não concorde, não haverá penalização nem para o (a) Sr.(a) nem para o/a voluntário/a que está sob sua responsabilidade, bem como será possível ao/a Sr. (a) retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

A pesquisa tem por objetivo investigar a compreensão de estudantes dos 3º e 4º anos do Ensino Fundamental I sobre as relações inversas em problemas de divisão que envolvam unidades discretas e contínuas. Nesta pesquisa a criança será solicitada a resolver vinte e quatro problemas de divisão semelhantes aos propostos no contexto escolar, sendo solicitada uma resolução verbal dos problemas, acompanhada das justificativas das crianças para tal resolução. A investigação será realizada em duas sessões individuais, com intervalos de dois a quatro dias entre as sessões e em cada uma o estudante será solicitado a resolver 12 problemas de divisão. As sessões serão gravadas em MP3 e posteriormente transcritas em protocolos individuais para realização da análise.

Os riscos do ponto de vista psicológico são mínimos, tendo em vista que o estudante será solicitado a resolver atividades semelhantes às propostas no contexto escolar, podendo haver o constrangimento da criança, no entanto serão tomados os cuidados necessários para que isso não venha a ocorrer. Já com relação aos benefícios são superiores, uma vez que o estudante ao realizar essa atividade poderá estar explicitando a sua forma de raciocinar que poderá em outro momento ser discutida pela professora para ajudar o estudante na superação de suas dificuldades.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a participação do/a voluntário (a). Os dados coletados nesta pesquisa (gravações das sessões transcritas em protocolos individuais) ficarão armazenados em pastas de arquivo, sob a responsabilidade da Prof.ª Síntria Labres Lautert no endereço (Núcleo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática, no 8º andar do Centro de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Pernambuco, Av. Acadêmico Hélio Ramos s/n – CEP: 50670-901) pelo período de mínimo 5 anos.

O (a) senhor (a) não pagará nada e nem receberá nenhum pagamento para ele/ela participar desta pesquisa, pois deve ser de forma voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação dele/a na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento com transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

____

Assinatura da pesquisadora

CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO/A VOLUNTÁRIO

Eu, ____, CPF__________________, abaixo assinado, responsável por _________________________________, autorizo a sua participação no estudo “Quantidades contínuas e discretas: um olhar sobre a compreensão de estudantes acerca das relações inversas em problemas de divisão”, como voluntário(a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele (a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade para mim ou para o (a) menor em questão.

Local e data ____________________

Assinatura do (da) responsável: ____________________________

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do sujeito em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura: