



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Tecnologia e Geociências  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Fernando Raul Licapa Contreras

# **Métodos de Volumes Finitos Robustos para a Simulação de Escoamentos Bifásicos de Água e Óleo em Reservatórios de Petróleo**

Recife

2017

Fernando Raul Licapa Contreras

**Métodos de Volumes Finitos Robustos para a Simulação  
de Escoamentos Bifásicos de Água e Óleo em  
Reservatórios de Petróleo**

Tese submetida ao corpo docente do curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de doutor em ciencias de Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Energia

Orientador: Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho

Coorientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra

Recife

2017

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

C764m Contreras, Fernando Raul Licapa.  
Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo / Fernando Raul Licapa Contreras. - 2017.  
118 folhas, il., tabs. e simbs.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

Inclui Referências e Apêndice.

1. Engenharia Mecânica. 2. Simulação de escoamentos bifásicos de óleo e água.  
3. Reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. 4. Método de volumes finitos lineares do tipo MPFA. 5. Método dos volumes finitos não lineares (NLFV). 6. MOOD.  
I. Carvalho, Darlan Karlo Elisiário de (Orientador). II. Lyra, Paulo Roberto Maciel (Coorientador). III. Título

UFPE

621 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-318

10 de Janeiro de 2017

“MÉTODOS DE VOLUMES FINITOS ROBUSTOS PARA A SIMULAÇÃO DE  
ESCOAMENTOS BIFÁSICOS DE ÁGUA E ÓLEO EM RESERVATÓRIOS DE  
PETRÓLEO”

FERNANDO RAUL LICAPA CONTRERAS

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENERGIA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA/CTG/EEP/UFPE

---

Prof. Dr. DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO  
ORIENTADOR/PRESIDENTE

---

Prof. Dr. PAULO ROBERTO MACIEL LYRA  
COORIENTADOR

---

Prof. Dr. CEZAR HENRIQUE GONZALEZ  
COORDINADOR DO PROGRAMA

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO (UFPE)

---

Prof. Dr. FABIO SANTANA MAGNANI (UFPE)

---

Prof. Dr. IGOR FERNANDES GOMES (UFPE)

---

Prof. Dr. LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES (UFPE)

---

Prof. Dr. ALESSANDRO ROMÁRIO ECHEVARRIA ANTUNES (UFPE)

*"Dedico el presente trabajo a mis padres  
Manuela y Copertino y mis hermanos  
Ronald, Doris y Luis"*

# AGRADECIMENTOS

À Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pela bolsa de estudos concedida durante o período de desenvolvimento do doutorado. À Rede Temática de Simulação e Gerenciamento de Reservatórios (SIGER), patrocinado pela empresa PETROBRAS S.A., pela bolsa de estudos fornecidos e pelo incentivo nas pesquisas que motivaram a realizar o presente trabalho.

A meus orientadores Darlan K. E. de Carvalho e Paulo R. M. Lyra pelo apoio prestado, a confiança depositada, dedicação e exigência indispensáveis, muito obrigado professores.

Ao meu amigo e colega Marcio R. de Araújo Souza, pelas conversas compartilhadas, além da sua incalculável contribuição no pré-processador e em tantas outras rotinas computacionais.

Aos meus pais, Manuela e Cupertino, pelo carinho e o apoio moral nos momentos de decaimento, e a boa formação para o caminhar na vida. Aos meus irmãos, Ronal, Doris, Luis Angel e Paulo Andre pelo carinho e confiança depositada em mim.

E finalmente, agradecimento aos meus colegas e amigos do Recife pelo apoio prestado direta ou indiretamente durante minha estadia.

# RESUMO

No presente trabalho apresentamos formulações numéricas para a discretização de um modelo matemático que descreve o escoamento bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. Estas equações são resolvidas através da metodologia IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation) que é, em particular, um método segregado para tratar escoamento bifásico (água-óleo) em que, o campo de pressão é obtida implicitamente e o campo de saturação é obtida explicitamente. Para resolver a equação de pressão propomos formulações numéricas baseadas no método de volumes finitos lineares (a saber: MPFA-HD e MPFA-H) e no método de volumes finitos não lineares (a saber: NLFV-PP e NLFV-DMP), estas formulações em geral lidam com meios altamente heterogêneos e anisotrópicos sobre malhas poligonais em geral. De outra parte, neste trabalho são estudadas as varias propriedades numéricas que satisfazem as formulações numéricas propostas. Além disso, no caso do método não linear que satisfaz o principio do máximo discreto (DMP), mostramos que este possui um estêncil pequeno desde que os pontos de interpolação sejam calculados a partir dos pontos harmônicos. Para resolver a equação de saturação, utilizamos um método multidimensional nomeada MOOD (*Multi-dimensional Optimal Order Detection*), esta método é baseada numa discretização espacial de alta ordem com procedimento de limitação *a posteriori* das variáveis de estado (i. e. saturação) não físicos. Em cada volume de controle o grau polinomial ótimo é determinado para construir uma aproximação das soluções respeitando o principio do máximo discreto. Mediante um processo iterativo o grau polinomial é reduzido quando o volume de controle em questão não satisfaz as condições de estabilidade. Neste método, uma estratégia baseada na Técnica de Mínimos Quadrados é usada para a reconstrução polinomial. Todos métodos propostos são localmente conservativos, e todas as incógnitas são completamente centradas nos volumes de controle, e possuem a habilidade de representar reservatórios com propriedades geológicas complexas utilizando malhas poligonais quaisquer. O desempenho dessas foi avaliado a partir da solução de problemas relevantes encontrados na literatura.

**Palavras-Chave:** Simulação de escoamentos bifásicos de óleo e água. Reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. Método de volumes finitos lineares do tipo MPFA. Método dos volumes finitos não lineares (NLFV). MOOD.

# ABSTRACT

In the present work we present numerical formulations for the discretization of a mathematical models that describes the two-phase flow of water and oil in heterogenous and anisotropic oil reservoirs. These equations are solved through Implicit Pressure Explicit Saturation (IMPES) methodology which is in particular a segregated method to treat two-phase (water-oil) flow in which the pressure field is implicitly obtained and the saturation field is obtained explicitly . In order to solve the pressure equation we propose numerical formulations based on the finite linear volume method ( MPFA-HD and MPFA-H) and non-linear finite volume method (NLFV-PP and NLFV-DMP). Formulations generally deal with highly heterogeneous and anisotropic media over polygonal meshes in general. On the other hand, in this work the numerical properties that satisfy the proposed numerical formulations are studied. In addition, in the case of the non-linear method that satisfies the discrete maximum principle (DMP), we show that it has a small stencil since the interpolation points are calculated from the harmonic points. To solve the saturation equation, we use a multidimensional method named MOOD (Multidimensional Optimal Order Detection), this method is based on a high order spatial discretization with a posteriori limitation procedure of the non-physical state variables (saturation). In each control volume the optimum polynomial degree is determined to construct an approximation of the solutions respecting the discrete maximum principle. By means of an iterative process the polynomial degree is reduced when the control volume in question does not satisfy the stability conditions. In this method, a strategy based on the Least Squares technique is used for polynomial reconstruction. All proposed methods are locally conservative, and all unknowns are completely centered on control volumes, and have the ability to represent reservoirs with complex geological properties using any polygonal meshes. The performance of these was evaluated from the solution of relevant problems found in the literature.

**Keywords:** Two-phase simulation oil and water. Heterogeneous and anisotropic oil reservoirs. Linear finite volume method type MPFA. Non-linear finite volume method (NLFV). MOOD.

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Domínio computacional identificando os poços injetores, produtores e os contornos de Dirichlet ( $\Gamma_D$ ) e Neumann ( $\Gamma_N$ ) . . . . .	32
Figura 2 – Algoritmo da estratégia IMPES . . . . .	34
Figura 3 – As figuras representam a escolha do par de pontos que viola a condição 2 sem violar a condição 1 (a) e a escolha do par de pontos que viola a condição 1 sem violar a condição 2 (b) . . . . .	40
Figura 4 – Pontos de interpolação que coincidem com: os vértices formando uma região <i>Half-Diamond</i> (a) e os pontos harmônicos (b) . . . . .	41
Figura 5 – Mostramos os fluxos utilizando os vértices e os pontos harmônicos . . . . .	44
Figura 6 – Mostram os fluxos e faces que atuam no momento de escrever o balanço de massa . . . . .	48
Figura 7 – Região de iteração para interpolação LP . . . . .	54
Figura 8 – Região de iteração para interpolação do nó na fronteira de Neumann . . . . .	55
Figura 9 – Estêncil para o calculo do fluxo utilizando os pontos interpolação centrados nos vértices: estêncil do método MPFA-HD (esquerda) e estêncil usado pelo método MPFA-D (direita) . . . . .	57
Figura 10 – Entes geométricos sobre uma malha K-ortogonal . . . . .	58
Figura 11 – Fluxo na face de Neumann . . . . .	59
Figura 12 – Os pontos harmônicos . . . . .	66
Figura 13 – Na figura esquerda são mostrados os pontos de interpolação obtidos pela equação (3.115) e na direita os pontos harmônicos obtidos pela equação (3.119) . . . . .	67
Figura 14 – Na figura esquerda são mostrados os ponto de interpolação obtida pela equação (3.115) e na direita são mostradas os pontos harmônicos considerado como ponto médio da superfície de controle . . . . .	68
Figura 15 – Fluxo no contorno de Dirichlet . . . . .	71
Figura 16 – Fluxo no contorno de Neumann para o caso 1 . . . . .	72
Figura 17 – Fluxo no contorno de Neumann para caso 2 . . . . .	72
Figura 18 – Fluxo no contorno de Neumann para o caso 3 . . . . .	73
Figura 19 – Malha quadrilateral (a) e o campo de permeabilidade (b) . . . . .	79
Figura 20 – Perfil do campo de pressão obtido pelo método NLFV-PP . . . . .	79
Figura 21 – Malha triangular não estruturada (a) com 158 e (b) 576 volumes de controle . . . . .	80
Figura 22 – Perfil do campo de pressão obtido com o método MPFA-HD (a) e NLFV-PP (b) . . . . .	82
Figura 23 – Malha triangular alinhada (a) e malha Kershaw quadrilateral (b) . . . . .	83

Figura 24 – Perfil do campo de pressões obtido sobre uma malha triangular alinhada 24x24: (a) MPFA-O (cor de branco denota as regiões com valores negativos e a região cor de rosa denota valores maiores que 1), (b) MPFA-HD e (c) NLFV-DMP . . . . .	83
Figura 25 – Malha não estruturada triangular . . . . .	85
Figura 26 – O perfil de pressão obtido pelo método: MPFA-H (a), MPFA-HD (b), NLFV-PP (c) e NLFV-DMP (d). . . . .	86
Figura 27 – Múltiplos valores para a saturação (situação não-física) . . . . .	89
Figura 28 – Estêncil utilizado para obter uma aproximação de alta ordem . . . . .	93
Figura 29 – Ideia do método clássico de alta ordem tipo MUSCL (acima) e ideia do MOOD (baixo) . . . . .	96
Figura 30 – Malha não estruturada triangular com 1054 volumes de controle (esquerda) e Campo de permeabilidade (direita) . . . . .	99
Figura 31 – Perfil de saturação obtido pelo método MPFA-HD acoplado a: FOU (esquerda) e solução de referencia foi obtido com o método MPFA-O/FOU . . . . .	100
Figura 32 – Perfil de saturação obtido pelo método MPFA-HD acoplado a: HOMFV (esquerda) e MOOD (direita). . . . .	100
Figura 33 – Curvas de corte de água no poço produtor . . . . .	101
Figura 34 – Domínio computacional para um problema de três poços, para $\theta = 0$ (esquerda) e $\theta = \pi/6$ (direita). A região circular interior este me branco e o outro em cinza. O poço superior é poço injetor, e os poços inferiores são produtores 1 (esquerda) e 2 (direita), adaptado de Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011) . . . . .	101
Figura 35 – Curvas de corte de água para o problema homogêneo de três de poços, utilizando: método NLFV-PP/FOU (esquerda); NLFV-PP/HOMFV (centro) e NLFV-PP/MOOD (direita). As linhas tracejadas referem-se ao poço produtor 1 e as linhas contínuas referem-se ao poço produtor 2 . . . . .	102
Figura 36 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com angulo $\theta = 0$ (esquerdo), $\theta = \pi/12$ (centro) e $\theta = \pi/8$ (esquerda) obtido com o método, NLFV-PP/MOOD . . . . .	103
Figura 37 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com angulo $\theta = \pi/6$ (esquerdo) e $\theta = \pi/4$ (centro) obtido com o método NLFV-PP/MOOD, o perfil da solução de referencia esta a esquerda da figura . . . . .	103
Figura 38 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com angulo $\theta = 0$ (esquerdo), $\theta = \pi/12$ (centro) e $\theta = \pi/8$ (esquerda) obtido com o método, NLFV-PP/FOU . . . . .	104
Figura 39 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com angulo $\theta = \pi/6$ (esquerdo) e $\theta = \pi/4$ (centro) obtido com o método NLFV-PP/FOU, o perfil da solução de referencia esta a esquerda da figura. . . . .	104

Figura 40 – Representação do estêncil para o cálculo do fluxo utilizando os pontos harmônicos: figura esquerda é o estêncil do método MPFA-H e da direita é estêncil usando pelo método MPFA-HD . . . . . 115

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Acrônimos dos métodos numéricos utilizados. . . . .	78
Tabela 2 – Erros entre solução exata e a solução numérica. . . . .	78
Tabela 3 – Erros e taxas de convergência do campo de pressões. . . . .	81
Tabela 4 – Erros e taxas de convergência do campo de velocidades. . . . .	81
Tabela 5 – Campo pressões máximos e mínimos obtidos pelos diferentes métodos, utilizando malha Kershaw quadrilateral. . . . .	82
Tabela 6 – Pressões máximos e mínimos obtidos pelos diferentes métodos, utilizando malha triangular não estruturada. . . . .	84
Tabela 7 – Pressões máximos e mínimos obtidos pelos diferentes métodos, utilizando malha triangular não estruturada. . . . .	85

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EOR	"Enhanced Oil Recovery"
MFE	"Mixed Finite Element"
EMPFA	"Enriched Multipoint Flux Approximation"
ENO	"Essentially Non-Oscillatory"
DG	"Discontinuous Galerking"
DMP	"Discrete Maximum Principle"
FOU	"First Order Upwind"
IFNLV	"Interpolation Finite Non-Linear Finite Volume"
LPEW	"Linearity Preserving Explicit weights"
LED	"Local Extremum Diminishing"
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
MOOD	"Multidimensional Optimal Order Detection"
MPFA	"Multipoint Flux Approximation"
MPFA-HD	"Multipoint Flux Approximation with Half-Diamond region"
MPFA-H	"Multipoint Flux Approximation using Harmonic Points"
MUSCL	"Monotone Upstream Scheme Conservation Laws"
MVF	Método dos Volumes Finitos
NLFV-PP	"Non Linear Finite Volume that Positive Preserving"
NLFV-DMP	"Non Linear Finite Volume that satisfies the Discrete Maximum Principle"
SFV	Spectral Finite Volume
TPFA	"Two Point Flux Approximation"
TVD	"Total Variation Diminishing"
TVB	"Total Variation Boundary"
WENO	"Weighted Essentially Non-Oscillatory"

# LISTA DE SÍMBOLOS

$i$  Subíndice que representa a fase água ou óleo

$S_i$  Saturação da fase  $i = w, o$

$\bar{S}_w$  Saturação prescrita da fase água no poço injetor

$\bar{S}_w^0$  Saturação inicial do reservatório

$\lambda$  Mobilidade

$\underline{\underline{K}}$  Permeabilidade absoluta

$\rho_w$  Densidade da fase  $i = w, o$

$\vec{v}_i$  Velocidade da fase  $i = w, o$

$\vec{v}$  Velocidade total

$t$  Tempo

$t^k$  Tempo na k-ésima iteração

$\Delta t$  passo de tempo

$k_{ro}$  Permeabilidade relativa da fase óleo

$k_{rw}$  Permeabilidade relativa da fase água

$\Omega$  Domínio contínuo

$\mu_i$  Viscosidade da fase  $i = w, o$

$q_i$  Termo de fonte ou sumidouro  $i = w, o$

$n_i$  São expoentes do modelo de Brook-Corey  $i = w, o$

$M$  Razão de mobilidade

$\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  Fronteira de Dirichlet e Neumann, respectivamente

$\vec{g}$  Vetor aceleração gravitacional

$\rho_{med}$  Densidade de média

$p$  Campo de pressão

$p_{prod}$  Pressão fornecida no poço produtor

- $p_c$  Pressão capilar
- $\tilde{p}$  Campo de pressão analítica
- $p_{\hat{L}}$  Pressão no volume de controle  $\hat{L}$
- $\nabla p$  Gradiente de pressão
- $\vec{F}$  Fluxo numérico
- $\vec{F}_{IJ}$  Fluxo numérico na superfície de controle  $IJ$
- $\vec{F}_{IJ}^{Roe}$  Fluxo numérico de *Upwind* na superfície de controle  $IJ$
- $\vec{F}_{IJ}^{LLF}$  Fluxo numérico de *Local Lax Friedrichs* na superfície de controle  $IJ$
- $f_w$  Fluxo fracional da fase água
- $\hat{L}$  Volume de controle a esquerda da face  $IJ$  ou volume de controle arbitrário
- $\hat{R}$  Volume de controle a direita da face  $IJ$
- $V_{\hat{L}}$  Volume do volume de controle  $\hat{L}$
- $\partial\hat{L}$  Contorno do volume de controle  $\hat{L}$
- $\mathcal{M}$  Família finita de volumes de controle
- $\mathcal{E}$  Família de faces ou superfícies de controle do domínio computacional
- $\mathcal{E}^{int}$  Representa o conjunto de faces interiores do domínio computacional
- $\mathcal{E}^{ext}$  Representa o conjunto de faces do contorno da malha computacional
- $x_{\hat{L}}$  Baricentro do volume de controle  $\hat{L}$
- $\vec{v}$  Velocidade de Darcy total
- $\vec{v}_{IJ}$  Velocidade de Darcy total média na face  $IJ$
- $\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}}$  Velocidade média na face  $IJ$  correspondente ao volume de controle  $\hat{L}$
- $\vec{N}_{IJ}$  Vetor área normal a face  $IJ$
- $\vec{n}_{IJ}$  Vetor normal unitário a face  $IJ$
- $\lambda_{IJ}$  Mobilidade ponderada na face  $IJ$
- $w_{\hat{L},IJ}$  Pesos sobre a face  $IJ$  utilizados nos métodos NLFV-PP e MPFA-HD
- $\tilde{\mathcal{A}}$  Matriz global do sistema discreto

$\underline{\mathcal{P}}$  Vetor de campo de pressão

$\underline{\mathcal{B}}$  Vetor termo de fonte

$\underline{\mathcal{A}}_{IJ}$  Matriz local da face  $IJ$

$\omega_{\hat{i}}$  Pesos correspondentes ao estratégia de interpolação LPEW

$\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)}$  e  $\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}$  Fluxos parciais, correspondentes ao volume de controle a esquerda  $\hat{L}$

$y_{IJ}$  Ponto harmônico

$p_{IJ}$  Pressão no ponto harmônico

$A_{IJ}$  Área ponderada correspondente a face  $IJ$

$C$  Número de Courant

$\alpha_{IJ}$  Velocidade característica na superfície de controle  $IJ$

$d_{\hat{L}}$  Grau do polinômio reconstrutor no volume de controle  $\hat{L}$

$d_{IJ}$  Grau do polinômio reconstrutor na superfície de controle  $IJ$

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Estado de Arte</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>1.4</b>	<b>Contribuições do Presente Trabalho</b> . . . . .	<b>24</b>
1.4.1	Trabalhos Publicados em Artigos de Revista e Congressos . . . . .	26
<b>1.5</b>	<b>Organização da Tese</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES GOVERNANTES</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>2.1</b>	<b>Equação de Conservação de Massa e a Lei de Darcy</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>2.2</b>	<b>Equações de Pressão e Saturação</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE PRESSÃO</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Método de Volumes Finitos Centradas no Volume de Controle</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulação Numérica Implícita da Equação de Pressão</b> . . . . .	<b>39</b>
3.2.1	Método de Volumes Finitos Não Linear que Preserva Positividade (NLFV-PP) . . . . .	44
3.2.1.1	<i>Tratamento do Fluxo nas Faces de Contorno do Método NLFV-PP</i> . . . . .	47
3.2.1.2	<i>Sistema Discreto do Método NLFV-PP</i> . . . . .	48
3.2.1.3	<i>Estratégia de Interpolação que Preserva Linearidade (LPEW)</i> . . . . .	52
3.2.2	Método dos Volumes Finitos Não Ortodoxo tipo MPFA . . . . .	54
3.2.2.1	<i>Tratamento do Fluxo nas Faces de Contorno do Método MPFA-HD</i> . . . . .	58
3.2.2.2	<i>Sistema Discreto do Método MPFA-HD</i> . . . . .	60
3.2.3	Método dos Volumes Finitos Não Linear que Satisfaz o Princípio do Máximo Discreto (NLFV-DMP) . . . . .	61
3.2.3.1	<i>Estratégia de Interpolação Utilizando Pontos Harmônicos (HP)</i> . . . . .	64
3.2.3.2	<i>Tratamento dos Fluxos nas Faces de Contorno do Método NLFV-DMP</i> . . . . .	71
3.2.3.3	<i>Sistema Discreto do Método NLFV-DMP</i> . . . . .	74
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS: ESCOAMENTO MONOFÁSICO</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>4.1</b>	<b>Teste de Linearidade: escoamento Monofásico com Drenagem Oblíqua</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>4.2</b>	<b>Teste de Convergência</b> . . . . .	<b>80</b>
4.2.1	Escoamento Monofásico num Reservatório Homogêneo Suavemente Anisotrópico . . . . .	80
<b>4.3</b>	<b>Teste de Preservar Positividade (PP) e/ou Satisfaz o Princípio do Máximo Discreto (DMP)</b> . . . . .	<b>81</b>

4.3.1	Escoamento Monofásico Utilizando Condições de Contorno com Gradiente Inclínada . . . . .	81
4.3.2	Escoamento Monofásico em Reservatório Muito Heterogêneo e Anisotrópico	84
<b>5</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO . . .</b>	<b>87</b>
<b>5.1</b>	<b>Formulação Numérica Explícita para a Equação de Saturação . . .</b>	<b>87</b>
5.1.1	Problema de Riemann e Método de Godunov . . . . .	88
5.1.2	Fluxo Numérico e Resolvedores do Problema de Riemann . . . . .	90
5.1.3	Método TVD ( <i>Total Variation Diminishing</i> ) . . . . .	92
5.1.4	Formulação Numérica de Alta Ordem tipo MUSCL de Volumes Finitos (HOMFV) . . . . .	93
5.1.4.1	<i>Processo de Limitação</i> . . . . .	94
5.1.5	Formulação Numérica Multidimensional de Detecção Ótima Ordem (MOOD)	96
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS: ESCOAMENTO BIFÁSICO . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>6.1</b>	<b>Escoamento num Reservatório Altamente Heterogêneo . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>6.2</b>	<b>Escoamento Bifásico num Meio Homogêneo com Três Poços . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>105</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>108</b>
	<b>APÊNDICE A – MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS LINEAR UTILIZANDO PONTOS HARMÔNICOS (MPFA-H) . . . . .</b>	<b>114</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

A modelagem do escoamento multifásico e multicomponente de fluidos em reservatórios de petróleo compreende um conjunto de fenômenos físicos e químicos bastante complexos e de difícil modelagem física e matemática, assim como numérico-computacional (EWING, 1983; CARVALHO, 2005). Geralmente, as pressões no interior das rochas reservatório são bastante altas, de tal forma que a simples perfuração de um poço através da rocha reservatório pode causar a saída espontânea de parte do óleo residente. Este tipo de processo é conhecido como recuperação primária sendo responsável por baixas recuperações do óleo residente (em torno de 20 por cento), que persistem até que as pressões no interior da rocha reservatório sejam insuficientes para posterior expulsão do óleo. A recuperação secundária envolve a injeção de água por meio de poços injetores, de modo que esta água aumenta a pressão no interior dos reservatórios, além de promover o varrido do óleo na direção de poços produtores. É importante lembrar que, apesar da importância da recuperação secundária, grandes quantidades de óleo podem permanecer no reservatório. Desta forma, todas as técnicas que são utilizadas na tentativa de retirar o óleo remanescente são conhecidas como técnicas de recuperação terciária ou avançada (Enhanced Oil Recovery - EOR) (EWING, 1983).

A indústria de “Petróleo e Gás” é um exemplo importante de demanda pelo uso de modelagem computacional com metodologias robustas e de alto desempenho. No Brasil, com os desafios associados à exploração do Pré-Sal, ao invés dos arenitos turbidíticos característicos do Pós-Sal, são encontrados carbonatos microbiais (microbiolitos) e formações de características muito heterogêneas, praticamente sem parâmetros na história mundial, e cujo comportamento com respeito à recuperação de petróleo é completamente desconhecido pela indústria, dificultando a utilização de modelos físicos e geológicos adotados em outros reservatórios de petróleo. Neste contexto, o analista numérico tem de enfrentar problemas associados à presença de características geológicas complexas como, por exemplo, falhas selantes, camadas estratificadas inclinadas, canais, e a existência de poços inclinados que são cada vez mais utilizados na indústria petrolífera. As falhas geológicas, comuns nos reservatórios de petróleo, podem gerar descontinuidades em propriedades físicas de interesse, tais como porosidade e permeabilidade. Além do mais, as camadas sedimentares podem se depositar de diferentes modos, gerando múltiplas direções preferenciais para o escoamento de fluidos. Desta forma, os reservatórios devem ser tratados como sistemas anisotrópicos fazendo uso de tensores de permeabilidade completos (Full Tensor), (EDWARDS, 2000; CARVALHO, 2005). Tais características dificultam tanto a análise matemática, quanto a análise numérica dos processos envolvidos no escoamento de fluidos nas rochas reservatório (EWING, 1983). A modelagem do escoamento de água, óleo e gás, em

reservatórios de petróleo envolve a solução de um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares mais ou menos acopladas (EWING, 1983; CARVALHO, 2005), cuja solução analítica só é conseguida nos casos mais simples e com geometrias muito simplificadas (HELMIG, 1997). Portanto, a complexidade das equações governantes exigem técnicas computacionais sofisticadas e formulações numéricas robustas que sejam capazes de tratar adequadamente as características complexas dos reservatórios de petróleo.

## 1.2 Estado de Arte

Modernamente, existem, na literatura, diversas formulações numéricas que podem ser utilizadas para a simulação de fluxo em reservatórios de petróleo. Por exemplo, o tradicional método de diferenças finitas baseado no volume de controle, também chamado *Two Point Flux Approximation (TPFA)*, é utilizado para a discretização dos termos de difusão, e o método de ponderação a montante de primeira ordem, ou *First Order Upwind (FOU)* que é utilizado para a discretização do termo de advecção são implementados em vários simuladores comerciais devido ao baixo custo computacional, simplicidade e robustez em malhas K-ortogonais (ERTEKIN, 2001). O uso de tensores completos e/ou malhas não K-ortogonais em métodos TPFA produzem fluxos aproximados inconsistentes nas superfícies de controle, levando a erros de primeira ordem ( $O(1)$ ), esses erros não desaparecem com o refinamento da malha (EDWARDS; ZHENG, 2008). Segundo Carvalho (2005), as principais desvantagens do método TPFA é sua incapacidade de produzir soluções convergentes quando o uso de tensores completos ou malhas não-ortogonais e não-estruturadas, o que adicionalmente dificulta o uso de estratégias automáticas de adaptação de malhas. Para uma modelagem adequada do fluxo em reservatórios muito heterogêneos e anisotrópicos (AAVATSMARK, 2008; EDWARDS; ROGERS, 1998; QUEIROZ, 2014; CONTRERAS, 2016), numerosos métodos têm sido propostos na literatura. Idealmente os métodos que aproximam numericamente o operador elíptico de pressão deveriam satisfazer as seguintes propriedades: (1) conservação local, (2) preservação da positividade da solução numérica, ou pelo menos o princípio do máximo discreto *Discrete Maximum Principle (DMP)*, (3) capacidade de lidar com malhas poligonais e distorcidas em geral, (4) produção de soluções convergentes mesmo com o uso de tensores de permeabilidade completos e, potencialmente, muito anisotrópicos, (5) capacidade de reproduzir soluções lineares por partes (LP) exatamente "*LP preserving*" e (6) possuir acurácia maior que um ( $O(h) > 1$ ). Até onde sabemos não existe método numérico que satisfaz todos os requerimentos anteriores simultaneamente (CRUMPTON, 1995; AAVATSMARK, 1998; EDWARDS; ZHENG, 2008; LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; YUAN; SHENG, 2008; SHENG; YUAN, 2011; GAO; WU, 2011; GAO; WU, 2013; QUEIROZ, 2014). Uma formulação bastante robusta e utilizada na literatura é o método dos Elementos Finitos (MEF), formulado originalmente por Raviart e Thomas, neste método, pressões e velocidades são variáveis incógnitas primárias de tal maneira que os fluxos são obtidas mais acuradas, utilizando técnicas Eulerianas ou Lagrangeanas como, *Front Tracking* ou *Level*

*Set Method* (CARVALHO, 2005). Em meados dos anos noventa surgiu uma nova família de métodos localmente conservativos capazes de lidar com tensores de difusão completos e malhas não estruturadas e não-ortogonais: o método *Multi-Point Flux Approximation (MPFA)* inspirados no trabalho de Crumpton, Shaw e Ware (1995), Aavatsmark, Barkve, Bøe e Mannseth (1998), Edwards e Rogers (1998). Duas características fundamentais do método MPFA são: (a) aproximação dos fluxos nas superfícies de controle são calculados utilizando múltiplos pontos e (b) a imposição da continuidade dos fluxos nas superfícies de controle. Embora, o clássico método MPFA satisfaça boa parte das propriedades de um método numérico ideal, ainda assim, todas as versões lineares do mesmo violam o princípio do máximo discreto (LIPNIKOV, 2007; GAO; WU, 2013), nesse caso oscilações espúrias podem-se perceber nos resultados, isso implica que o método MPFA ainda tem dificuldade de lidar com meios onde o tensor possui elevada razão de anisotropia e/ou malhas severamente distorcidas. A análise de monotonicidade do método MPFA começou com Eigestad e Klausen (2005) que propõe modificar os volumes de controle do MPFA a fim de tornar o sistema, uma Matriz-M e garantir a monotonicidade das soluções numéricas. Mais tarde, o método *Enriched Multipoint Flux Approximation (EMPFA)* formulado por Chen, Wan, Yang e Mifflin (2008) nasceu como uma alternativa de solução aos problemas de monotonicidade a partir da constatação de que as oscilações espúrias estão associadas com a aproximação pobre do gradiente de pressão nas superfícies de controle. O EMPFA produz resultados quase não oscilatórios para meios altamente heterogêneos e anisotrópicos. A aparente robustez obtida com as formulações mencionadas acima não tem sido a solução definitiva para problemas verdadeiramente desafiadores. Este fato sugere o uso de formulações numéricas mais robustas com expressões para os fluxos que representem adequadamente as heterogeneidades e a anisotropia dos reservatórios. Diante disso, vários autores (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; YUAN; SHENG, 2008; GAO; WU, 2013) propõem formulações numéricas que, preferencialmente, devem satisfazer a maioria das propriedades mencionadas anteriormente. É importante ressaltar que em casos lineares, o requerimento de monotonicidade é equivalente a atender o critério de DMP (SHENG; YUAN, 2011). Embora, para o caso geral, o critério de DMP é mais restritivo que o critério de monotonicidade (SHENG; YUAN, 2011; GAO; WU, 2013). No contexto da simulação de reservatórios de petróleo, a incapacidade de satisfazer o DMP ou produzir soluções monótonas, implica em se obter soluções com oscilações espúrias no campo de pressões que podem representar, por exemplo, o aparecimento de gás “fictício” em regiões do reservatório onde a pressão cai erroneamente abaixo do ponto de bolha ou campos de velocidades de Darcy sem significado físico algum (QUEIROZ, 2014). Atualmente configura-se como um desafio na área de simulação numérica de reservatórios, formular métodos que possa satisfazer simultaneamente, todas as propriedades citadas acima. Recentemente, diferentes métodos não lineares fundamentados no método de volumes finitos foram propostos, a partir do trabalho pioneiro de Le Potier (2005). A principal ideia desses métodos, com operador elíptico discreto não-linear, é aproximar o gradiente de pressões usando uma formulação numérica cujos coeficientes são dependentes da própria variável a ser calculada. Como em todo método de volumes

finitos, a definição desses coeficientes é fundamentada na imposição de continuidade de fluxo nas superfícies de controle. Variáveis auxiliares, localizadas, por exemplo, no ponto médio de cada superfície de controle e nos vértices que definem essa superfície de controle têm seu valor interpolado a partir de uma combinação linear das incógnitas centradas nos volumes de controle que concorrem nesses vértices. No trabalho original de Le Potier (2005), estes métodos são restritos somente a malhas triangulares. A posição dos pontos de colocação em cada volume de controle segue uma métrica fundamental para a obtenção da positividade dos coeficientes. Além disso, os pesos das interpolações empregadas pelos referidos autores são caracterizados pela positividade dos coeficientes, necessária para produzir soluções monótonas. Um efeito colateral disso é a suavização exagerada no campo de solução em regiões de descontinuidade do campo de permeabilidade, tal como observado em Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014). A aplicação dos métodos não lineares propostos por Le Potier (2005) e Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007) em problemas muito heterogêneos ou em malhas severamente distorcidas, produz soluções de baixa acurácia, dada a deficiência das estratégias de interpolação consideradas. Lipnikov, Svyatskiy e Vassilevski (2009), propuseram uma variante dos métodos de volumes finitos não lineares monótonos, chamada pelos autores de “livre de interpolação” (*Interpolation Free Non-Linear Finite Volume*). Segundo estes autores, e de maneira um tanto quanto óbvia, a escolha da estratégia de interpolação afeta fortemente a acurácia do método numérico utilizada na discretização do operador elíptico de pressão. De qualquer modo, fica claro neste trabalho, que a escolha do melhor método de interpolação depende fortemente do problema sendo tratado. Os autores mostraram que o IFNLFV era capaz de lidar com malhas poligonais quaisquer além de ser mais acurado e mais eficiente computacionalmente que os métodos até então desenvolvidos, apesar de ainda existirem algumas restrições fortes impostas no tensor de permeabilidades. Há na literatura trabalhos sobre formulações não lineares que preservam o critério DMP, por exemplo, o método não linear de (LIPNIKOV, 2012) que satisfaz o critério de DMP. Neste método os pontos de interpolação são baseadas nos pontos harmônicos (AGÉLAS, 2009), onde os pesos de interpolação preservam positividade naturalmente por construção. Baseado nos trabalhos de Le Potier (2005), Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Yuan e Sheng (2008) introduzem um método não linear, capaz de produzir soluções monótonas mesmo considerando meios altamente anisotrópico ou malhas poligonais em geral. Neste método, as variáveis primárias estão localizadas nos baricentros do volume de controle e os pontos de interpolação são os vértices da malha primal. Os pesos de interpolação são obtidos a partir da solução de um sistema de equações locais associadas a um problema auxiliar de conservação. A estratégia de interpolação utilizada possui erro de truncamento de segunda ordem no espaço. Quando os pesos de interpolação não preservam a positividade, utiliza-se alguma estratégia de interpolação com coeficientes positivos, como, por exemplo, a interpolação com o inverso da distância. Em Sheng e Yuan (2011) foi apresentado um método não linear que satisfaz o critério DMP sobre malhas poligonais bastante arbitrárias. Neste trabalho, o ponto de interpolação é o ponto médio da face, os pesos da interpolação são calculados impondo

a continuidade de fluxo nas superfícies de controle e, sendo obtidos em função das variáveis primárias adjacentes a superfície de controle em questão. Essa estratégia de interpolação é mais robusta do que as utilizadas por Le Potier (2005), Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007). As soluções produzidas por este método mantêm a acurácia, mesmo em meios muito heterogêneos e anisotrópicos e para malhas distorcidas. Sheng e Yuan (2012) propõem um método melhorado de volumes finitos não linear, cuja estratégia de interpolação se baseia no método linear MPFA-O (AAVATSMARK, 1998; EDWARDS; ROGERS, 1998). Este método não linear produz resultados bastante robustos e acurados mesmo que os coeficientes de interpolação sejam negativos. No trabalho de Gao e Wu (2013) foi proposto um esquema numérico não linear e que satisfaz o critério DMP. Os pontos de interpolação são os pontos harmônicos, cuja construção é muito similar aos métodos clássicos introduzidos por Le Potier (2005), Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007). Os autores provam a estabilidade do método, que, em geral, não é discutida em outras publicações anteriores. Este método é capaz de lidar com meios heterogêneos e anisotrópicos. Os autores também observam, como única restrição, que, quando o ponto harmônico não pertence à face avaliada ou quando não existem os eixos auxiliares que contenham a sua co-normal, nem sempre é garantida a satisfação do critério DMP. Nos trabalhos de Wu e Gao (2014), Gao e Wu (2015), os pontos de interpolação são os pontos harmônicos ou os vértices. Na estratégia de interpolação dos vértices, o método de interpolação LPEW-M (*Linearity preserving with explicit weights - modified*) é utilizada. Essa estratégia de interpolação é bastante robusta e se mostra capaz de lidar com meios anisotrópicos e malhas poligonais em geral.

Para discretizar a equação de saturação o método utilizado em vários simuladores comerciais é o método de ponderação a montante de primeira ordem ou *First Order Upwind (FOU)*, este método caracteriza-se por produzir soluções não oscilatórias perto das regiões de choque (HIRSCH, 1990). A desvantagem do método FOU é que este produz soluções com excessiva difusão numérica, característica natural de métodos de primeira ordem, além disso, é sensível a efeito de orientação de malhas quando o razão de mobilidade é bastante adversa (KEILEGAVLEN, 2012), essas desvantagem podem causar predições totalmente errôneas sobre o comportamento de variáveis de interesse, como o tempo de irrupção de água nos poços produtores ou a produção acumulada de óleo. Para melhorar essas desvantagens do método FOU precisamos utilizar métodos de ordem mais alta e multidimensionais. Para resolver a equação de saturação não-linear com melhor precisão são propostas diferentes estratégias. Por exemplo, o método MUSCL (*Monotone Upstream Centered Scheme for Conservation Laws*) de Van Leer (1979) baseado nos trabalhos de Gudonov, Engquist, Osher e Roe usando o critério de TVD (total variation diminishing) pode ser utilizado para resolver numericamente a equação de saturação (BELL; SHUBIN, 1985; DURLOFSKY, 1993; EDWARDS, 1996; EDWARDS, 2006; CONTRERAS, 2016). Neste método, a precisão de segunda ordem é obtida por um processo de reconstrução linear local, e os extremos locais associados a fortes gradientes de solução são eliminados por um procedimento de limitação *a priori*, vários tipos de limitadores são propostos

na literatura (VAN LEER, 1979; SWEBY, 1984). Este método pode ser adaptado para malhas não estruturadas de uma forma muito robusta (WOODFIELD, 2004; CONTRERAS, 2016). Variantes dos métodos de alta ordem foram introduzidos por Osher-Shu e Harten: ENO (Essentially Non Oscillatory), WENO (Weighted Essentially non oscillatory), respectivamente. Os métodos ENO e o WENO são métodos essencialmente não oscilatórios, ou seja, que não precisam utilizar limitadores, mas a reconstrução polinomial da variável primária precisa de um estêncil estendido a cada passo de tempo, implicando utilizar técnicas de extrapolação, tornando ao método custoso do ponto de vista computacionalmente. O esquema DG (Discontinuous-Galerkin) é um método de alta ordem capaz de ser adaptado para malhas poligonais em geral. Este método tem a característica de ser local e de exigir o cálculo de integrais de volume e de superfície o que pode ser computacionalmente custoso. Outros métodos mais recentes incluem o método de volumes finitos espectrais (Spectral Finite Volume-SFV) proposto por (WANG, 2002; CHOI, 2004) e recentemente aplicado na simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo na versão unidimensional por Ramirez, Souza, Carvalho e Lyra (2013). No contexto de simulação numérica de reservatórios de petróleo, Rubin e Blunt em 1991, introduzem métodos de alta ordem do tipo TVD em 1-D. Durlofsky, Engquist e Osher (1992) introduze um método de alta ordem tipo TVD baseado na formulação MUSCL; qual é aplicado em malhas não-estruturadas. Em geral este método utiliza um procedimento de interpolação de fluxo adaptativo para alcançar ordem superior. Seguindo o trabalho anterior Durlofsky (1993) introduz um método de alta ordem para resolver a equação de saturação incluindo os efeitos de gravidade, pressão capilar e a compressibilidade, utilizando malhas triangulares. Utilizando o MEF para o cálculo dos campos de pressões e de velocidades. Pouco depois Edwards (1996) publicou um método de alta ordem no contexto de simulação numérica de reservatórios onde o método de alta ordem de Godunov é acoplado com um processo de refinamento local. Posteriormente, (EDWARDS; ZHENG, 2008), o mesmo autor acopla o método de alta ordem ao método MPFA. Os resultados mostram uma leve melhoria em reduzir o efeito de orientação de malha. Lamine e Edwards (2010) propuseram, também para a equação de saturação, um esquema de alta ordem com características de multidimensionalidade. Tendo inspiração no trabalho de Colella (1990), o referido esquema tem estêncil definido de acordo com a orientação da direção característica do problema. Dessa forma, os resultados produzidos sofrem menos influência de orientação da malha quando se compara aos métodos de alta ordem tradicional, baseados apenas na avaliação do sinal da velocidade em cada superfície de controle. No contexto de reduzir o efeito de orientação de malhas (GOE), vários trabalhos foram propostos na literatura desde 1972, (TODD, 1972; KO; AU, 1979; YANOSIK; MCCRACKEN, 1979; BAJOR; CORMACK, 1989; BRAND, 1991; HURTADO, 2007; KOZDON, 2011; EYMARD, 2011; LAMINE; EDWARDS, 2013).

### 1.3 Objetivos

Estudar, formular e implementar formulações numéricas robustas para simular o escoamento monofásico e bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos utilizando malhas não-estruturadas em 2-D. Para atingir nosso objetivo vamos enumerar nossos objetivos específicos nas seguintes item:

- Desenvolver e implementar métodos de volumes finitos lineares do tipo MPFA para a solução aproximada do problema elíptico de pressão.
- Desenvolver e implementar métodos de volumes finitos não-lineares (monótonos ou que satisfaçam o DMP) para a solução aproximada do problema elíptico de pressão.
- Desenvolver e implementar métodos de alta ordem e multidimensionais para a solução do problema de saturação.
- Após implementar as formulações numéricas avaliar a acurácia e robustez das mesmas, quando comparadas com outras formulações encontradas na literatura.

### 1.4 Contribuições do Presente Trabalho

No presente trabalho para resolver o operador elíptico característico da equação de pressão propomos métodos de volumes finitos lineares e não lineares. O método de volumes finitos não linear que preserva positividade (NLFV-PP) foi essencialmente inspirado nos trabalhos de Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Yuan e Sheng (2008), Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014), utilizando uma estratégia de interpolação LPEW proposto por Gao e Wu (2011). Neste método, as variáveis auxiliares são centrados nos vértices da malha primal e a estratégia de interpolação adotada é bastante robustos e capazes de representar adequadamente reservatórios com tensores de permeabilidade heterogêneos e potencialmente descontínuos, ou meios altamente anisotrópicos (QUEIROZ, 2014; GAO; WU, 2011). Além disso, para calcular os pesos de interpolação, não precisamos resolver sistemas locais de equações como em outros métodos de interpolação (AAVATSMARK, 1998). Os possíveis pesos negativos gerados pela estratégia de interpolação (LPEW), não afeta a acurácia nem a robustez do método podendo produzir soluções com taxas de convergência de segunda ordem para o campo de pressão mesmo em malhas distorcidas ou em reservatórios altamente heterogêneos e anisotrópicos.

Por outro lado, propomos um método de volumes finitos não linear que satisfaz o critério do princípio do máximo discreto (NLFV-DMP), este método foi inspirado nos trabalhos de Sheng e Yuan (2011), Gao e Wu (2013). Segundo Sheng e Yuan (2011), o critério DMP é más restrito que o critério de monotonicidade, embora em problemas lineares estes dois critérios coincidem. No presente método, os pontos de interpolação são localizadas sobre as superfícies de controle, e são chamados como pontos harmônicos inicialmente proposto por Agélas, Eymard e Herbin (2009),

as variáveis auxiliares centrado nos pontos harmônicos são interpolados como combinação convexa das pressões centradas nos volumes de controle adjacentes ao superfície de controle em questão. A utilização destes pontos harmônicos como estratégia de interpolação é vantajoso já que pela mesma construção preserva a positividade, melhora a robustez do método em problemas heterogêneos e anisotrópicos, além disso, permite que o método possua um estêncil reduzido em comparação com outros métodos clássicos propostos por Bertolazzi e Manzini (2005), Le Potier (2009) e Sheng e Yuan (2011). O principal algoritmo de nosso método foi adaptado de Sheng e Yuan (2011), em quanto a montagem do sistema discreto foi adotado de Gao e Wu (2013).

Como consequência dos métodos de volumes finitos não lineares NLFV-PP e NLFV-DMP, nós propusemos ainda dois métodos de volumes finitos lineares, a saber: método de aproximação do fluxo por múltiplos pontos utilizando uma região *Half Diamond* (MPFA-HD) e outro método de aproximação do fluxo múltiplos pontos utilizando pontos harmônicos (MPFA-H). O método MPFA-HD foi obtido a partir de modificar os diversos procedimentos numéricos do método NLFV-PP, como o objetivo de obter um método capaz de produzir soluções aproximadas mas acuradas para os fluxos, considerando tensores de permeabilidade heterogêneos e anisotrópicos, possivelmente descontínuos, mesmo para malhas poligonais distorcidas e não estruturadas. Em contraste com o método MPFA clássico (AAVATSMARK, 1998; EDWARDS; ROGERS, 1998), no nosso método MPFA-HD, o fluxo em cada superfície de controle (SC) é explicitamente expresso por incógnitas definidas nos volumes de controle que compartilham essa SC em questão e dois pontos auxiliares definidos nas extremidades da SC que não necessariamente pertencem à mesma SC em questão. Como desejamos um método completamente centrado nos volumes de controle, as variáveis auxiliares centrados nos vértices são interpolados utilizando a estratégia de interpolação LPEW.

Inspirado nos métodos propostos por Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Yuan e Sheng (2008), Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014), (GAO; WU, 2014) propoe um método linear que aproxima o fluxo por múltiplos pontos utilizando os pontos harmônicos (MPFA-H). Este método inicialmente foi proposto para resolver problemas de difusão em meios levemente heterogêneos e anisotrópicos, no presente trabalho nós utilizamos o método MPFA-H para simular escoamentos bifásicos em reservatórios de petróleo. Neste método, os autores recomendam primeiro construir os fluxos laterais em cada superfície de controle de forma independente, logo uma expressão de fluxo único é obtida por uma combinação convexa de fluxos laterais. Diferentemente de outros métodos MPFA clássicos, neste método, os fluxos em cada SC são explicitamente expressos pelas incógnitas centradas no volume de controle e pelas variáveis auxiliares definidos nas SC que não necessariamente pertencem à mesma SC compartilhada pelos volumes de controle adjacentes.

Para resolver numericamente a equação de saturação, adotamos uma estratégia inicialmente proposto por Clain, Diot e Loubere (2011) nomeado *Multidimensional Optimal Order Detection (MOOD)*, que foi originalmente desenvolvido para aplicações de hidrodinâmica e atualmente aplicado em varias áreas de engenharia. Este método é radicalmente diferente dos métodos

tradicionais de alta ordem descrito no estado de arte, uma vez que se baseia num procedimento de limitação *a posteriori*. Em resumo, o esquema MOOD consiste em determinar uma reconstrução de grau polinomial ótimo para cada volume de controle a cada passo de tempo, satisfazendo alguma restrição física, por exemplo, o princípio do máximo discreto (DMP). Em seguida, a solução candidata em todos os volumes de controle é rigorosamente analisada pelos critérios físicos. Sempre que os critérios físicos são violados no volume de controle, este último é qualificado como um volume controle "ruim" e esta solução é descartada automaticamente e o grau do polinômio é diminuído até que a restrição física seja satisfeita só naquele volume de controle "ruim". Este esquema de alta resolução é relativamente simples, muito eficiente e preciso, produzindo soluções de natureza multidimensional, sendo muito competitivo com outros encontrados na literatura.

As equações que descrevem o escoamento bifásico óleo-água são resolvidas usando a metodologia *Implicit Pressure and Explicit Saturation (IMPES)*. Nesta técnica IMPES, as equações de fluxo e de transporte são resolvidas de maneira segregada e sequencial de modo que o campo de pressões é resolvido de maneira implícita a partir de uma saturação inicial. Daí obtemos as vazões ou velocidades nas superfícies de controle e, assim, o campo de saturação é calculado explicitamente, este procedimento é repetido até o alcance do tempo final de simulação. Os programas acadêmicos foram construídos no ambiente MATLAB, fazendo uso de uma série de vantagens da sua estrutura de dados e na realização de operações algébricas vetorizadas.

#### 1.4.1 Trabalhos Publicados em Artigos de Revista e Congressos

Como consequência direta da nossa pesquisa durante o doutoramento temos escrito os seguintes artigos publicados em revistas, congressos e conferencias internacionais, a saber:

##### **Artigos Publicados em Revista**

- *A Higher Resolution Flow Oriented Scheme Coupled with the Robust MPFA-Half-Diamond Applied for the Solution of Two-Phase Flows in Heterogeneous and Anisotropic Petroleum Reservoirs* (em preparação, 2017).
- *A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs*, publicado na revista *Computers and Fluids* -2016.
- *On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies*, publicado na revista *International Journal Numerical Methods in Fluids* -2013.

### Artigos Publicados em Congressos e Conferências Mundiais

- *A Non-Orthodox MPFA Method Coupled to a High Order Modified Flow Oriented Scheme for the Simulation of Two-Phase Flows in Heterogeneous and Anisotropic Reservoirs*, (SPE Reservoir Simulation Conference in Montgomery, Texas, USA, 2017). Aceito para Fevereiro 2017.
- *A MPFA method using harmonic points coupled to a multidimensional optimal order detection method (MOOD) for the simulation of oil-water displacements in petroleum reservoirs*, publicado em XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2016.
- *A MPFA-Diamond Method Coupled to a Very Higher Order Multidimensional Upstream Scheme for the Solution of Two-Phase Flows in Heterogeneous and Non-Isotropic Petroleum Reservoirs*, publicado em 1st Pan-american Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, 2015.
- *A High Resolution Finite Volume Method for the Simulation of Oil-Water Displacements in Anisotropic and Heterogeneous Petroleum Reservoirs Using a Multidimensional Limiting Process*, publicado em SIAM, Conference Mathematical and Computational Issues in the Geosciences, Stanford, California, USA, 2015.
- *Numerical simulation of fluid flows in petroleum reservoirs using a cell centered non-linear finite volume method in unstructured polygonal meshes*, publicado em XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2015.
- *A Higher-order Multidimensional Upstream Scheme for the Simulation of Two-Phase Flows in Porous Media*, publicado em World Congress Computational Mechanics, Barcelona, Spain, WCCM 2014.
- *Numerical simulation in heterogeneous and anisotropic oil reservoirs using a MPFA-D method coupled with a multidimensional upstream scheme*, publicado em XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2014.
- *Numerical simulation in heterogeneous and anisotropic oil reservoir using a finite volume method*, publicado em XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2013.
- *A cell-centered finite volume method for the simulation of two-phase flows in heterogeneous and anisotropic oil reservoirs*, publicado em 22nd International Congress of Mechanical Engineering, COBEM 2013.

## 1.5 Organização da Tese

Dividimos a presente tese principalmente em sete capítulos, além da referência bibliográfica e de um apêndice. No Capítulo 1 consideramos a introdução onde detalhamos a motivação, estado de arte, objetivos e contribuições do trabalho.

No Capítulo 2, detalhamos brevemente as propriedades da rocha e fluido, em seguida descrevemos as equações constitutivas e suas hipóteses simplificadoras, que finalmente são utilizadas para derivar as equações governantes, a saber: a equação de pressão e a equação de saturação.

No Capítulo 3, desenvolvemos as técnicas numéricas empregadas na solução das equações governantes introduzidas no Capítulo 2. Primeiramente descrevemos as varias formulações numéricas utilizadas para discretizar a equação de pressão: nesta seção introduzimos a descrição de métodos de volumes finitos lineares (MPFA-HD e MPFA-H) e não lineares (NLFV-PP e NLFV-DMP).

No Capítulo 4, resolvemos alguns problemas *benchmark*, com o objetivo de validar nossas formulações numéricas propostas. Os resultados são interpretados e comparados com outros métodos clássicos disponíveis na literatura. Neste, capítulo resolvemos problemas relacionados com escoamento monofásico, e analisamos as propriedades numéricas que devem satisfazer nossas formulações numéricas, por exemplo, a linearidade, satisfazer o critério de monotonicidade e/ou princípio de máximo discreto.

No Capítulo 5, desenvolvemos as formulações numéricas que discretizam a equação de saturação, neste capítulo dois métodos são descritos de maneira mais detalhada, a saber o método de alta ordem tipo MUSCL (HOFMV) com um processo de limitação *a priori* e um método de alta ordem multidimensional (MOOD) com um processo de limitação *a posteriori*.

No Capítulo 6, resolvemos alguns problemas *benchmark* envolvendo escoamento bifásico óleo-água. Neste capítulo, avaliamos a robustez das formulações propostas (HOMFV e MOOD) utilizando malhas poligonais em geral e meios altamente heterogêneos e anisotrópicos, além disso, analisamos o fenômeno de efeito de orientação de malha (GOE) com alta razão de mobilidade.

No Capítulo 7, descrevemos, as conclusões e indicamos os trabalhos futuros.

Finalmente apresentamos um apêndice: No apêndice A, descrevemos um método multidimensional com estêncil tipo MPFA proposto por Eymard, Guichard e Masson (2011), para malhas quadrilaterais ortogonais.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Neste capítulo, discutimos brevemente o conjunto das equações que governam a dinâmica dos fluidos no interior dos reservatórios. Essas equações são derivadas a partir da equação de Conservação de Massa e a Lei de Darcy generalizada, considerando as seguintes hipóteses simplificadoras: os fluidos são Newtonianos e incompressíveis, o meio poroso é rígido, não existem reações químicas entre os fluidos e a rocha porosa, o escoamento é laminar e a permeabilidade absoluta é uma propriedade do meio poroso que é independente da pressão, da temperatura e do escoamento. Além disso, são desprezados os efeitos de Klinkenberg e electrocinéticos, assim como os efeitos de capilaridade (ERTEKIN, 2001; CARVALHO, 2005). Um modelo matemático que rege o escoamento bifásico (óleo-água) em meios porosos é composto por duas equações sendo uma equação elíptica (de pressão) e uma equação hiperbólica (de saturação), cujo acoplamento é feito através da velocidade de Darcy. Estas equações deverão estar munidas com as respectivas condições de contorno e/ou iniciais adequadas, as quais dependem das características geológicas da vizinhança do reservatório e da existência de poços produtores e injetores.

### 2.1 Equação de Conservação de Massa e a Lei de Darcy

A equação de Conservação de Massa para escoamento bifásico imiscível óleo (*o*)-água (*w*) é definido sobre o domínio  $\Omega \times [0, t]$ . Essa equação é desenvolvida a partir de uma aproximação Euleriana da equação de balanço sobre um volume de controle arbitrário que, após manipulações algébricas (CHEN, 2006), podemos expressar na forma diferencial como:

$$\frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i, \quad i = w, o \quad \text{em } \Omega \times [0, t] \quad (2.1)$$

aqui, a porosidade é denotada por  $\phi$ . por outro lado, na equação (2.1)  $\rho_i$  representa a densidade da fase *i* e a fração de volume poroso ocupado pela fase *i* é representada por  $S_i$ . Finalmente  $q_i$  é o termo de fonte ou sumidouro, que, no presente contexto pode representar poços produtores ou injetores. Para modelar a velocidade do fluido no interior da rocha utilizamos a velocidade de Darcy denotada, para uma fase *i*, por  $\vec{v}_i$ . Assumimos ainda que a rocha reservatório é totalmente saturada pelas fases óleo e água, de modo que:

$$S_o + S_w = 1 \quad (2.2)$$

A Lei de Darcy afirma que a taxa volumétrica do escoamento no meio poroso é linearmente proporcional ao gradiente de pressão e a uma área transversal normal à direção do fluido, e

inversamente proporcional a viscosidade do fluido (EWING, 1983). Dessa forma podemos definir a velocidade de Darcy (equação (2.1)) através da seguinte equação:

$$\vec{v}_i = -\lambda_i \underline{\underline{K}} (\nabla p_i - \rho_i \vec{g}) \quad \text{com} \quad \lambda_i = k_{ri} / \mu_i, \quad i = w, o \quad \text{em} \quad \Omega \quad (2.3)$$

onde  $\lambda_i$ ,  $k_{ri}$ ,  $\mu_i$  e  $\vec{g}$  são, respectivamente, a mobilidade, a permeabilidade relativa, a viscosidade da fase  $i$  e o vetor gravidade.

Na equação (2.3)  $\underline{\underline{K}}$  representa o tensor de permeabilidade do meio poroso que é dado pelo seguinte tensor:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

A permeabilidade é uma propriedade intrínseca da rocha que foi introduzida na Lei de Darcy para quantificar a capacidade da rocha de transmitir fluidos. Do ponto de vista matemático, este tensor, além de ser simétrico, deve satisfazer as condições de elipticidade, ou seja,  $k_{11}k_{22} \geq k_{12}^2$  (CRUMPTON, 1995; EDWARDS; ROGERS, 1998; AAVATSMARK, 1998).

A permeabilidade relativa ( $k_{ri}$ ) dada na equação (2.3) é uma medida adimensional da facilidade com que uma fase do fluido pode escoar na rocha porosa em presença de outras fases. Um modelo muito utilizado na literatura é o de Brook e Corey (HELMIG, 1997), dado pela seguinte expressão:

$$k_{rw} = \left( \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^{n_w} \quad \text{e} \quad k_{ro} = \left( \frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^{n_o} \quad (2.5)$$

onde  $S_{wi}$  é a saturação irreduzível da fase água e  $S_{or}$  é saturação residual da fase óleo, e os expoentes  $n_w$  e  $n_o$  podem assumir valores diferentes (AZIZ; SETTARI, 1979; HELMIG, 1997). Existem outros modelos como o de van Genuchten que também podem ser utilizados em problemas que envolvem escoamentos multifásicos em meios porosos (SOUZA, 2015 apud BASTIAN, 2003) e (SOUZA, 2015 apud FUCÍK, 2005).

Em problemas tipo pistão (*piston-like*), Yanosik e McCracken (1979) propuseram as seguintes relações para calcular as permeabilidades relativas:

$$k_{rw} = \frac{S_w^2}{M(1 - S_w^2) + S_w^2}, \quad k_{ro} = 1 - k_{rw} \quad \text{e} \quad M = \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \quad (2.6)$$

onde  $M$  é a razão das mobilidades.

## 2.2 Equações de Pressão e Saturação

Utilizando as equações(2.1)-(2.3) e através de manipulações algébricas adequadas (AZIZ; SETTARI, 1979; EWING, 1983; HELMIG, 1997; CHEN, 2007) a equação de pressão global para escoamento bifásico é dada pela seguinte equação:

$$\nabla \cdot \vec{v} = Q \quad \text{com} \quad \vec{v} = -\lambda \underline{K} (\nabla p + \rho_{med} \vec{g}) \quad (2.7)$$

onde  $\nabla p$  e  $\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_o$  representam o gradiente de pressão e a velocidade total do fluido, respectivamente. A mobilidade total e a vazão volumétrica total, são denotados por  $\lambda$  e  $Q = Q_w + Q_o$  com  $Q_i = q_i/\rho_i$ , respectivamente. Além disso,  $\rho_{med}$  representa a densidade média, ponderada pelas mobilidades (HURTADO, 2011), ou seja:

$$\rho_{med} = \frac{\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o}{\lambda} \quad \text{com} \quad \lambda = \lambda_w + \lambda_o \quad (2.8)$$

Um caso particular da equação (2.7) obtêm-se assumindo que os efeitos gravitacionais são desprezíveis e que o reservatório esta saturado apenas por uma fase, implicando que a mobilidade total é unitária (CARVALHO, 2005; SOUZA, 2015). Dessa forma, desprezando o efeito gravitacional, podemos escrever a equação que modela o escoamento monofásico num reservatório, como:

$$-\nabla \cdot (\underline{K} \nabla p) = Q \quad \text{em} \quad \Omega \quad (2.9)$$

No contexto de simulação de reservatórios, além das condições de contorno tradicionais, podemos falar nas condições de contorno internas que podem representar poços produtores e/ou injetores. A vazão do fluido injetado ( $Q_{inj}$ ) nos poços injetores é equivalente a condição de contorno de Neumann, da mesma forma que a pressão ( $P_{prod}$ ) nos poços produtores ou injetores é equivalente a condição de contorno de Dirichlet. No caso de toda a fronteira ser impermeável, ou seja, contorno com fluxo nulo, a entrada e a saída de massa somente ocorre através dos poços injetores e produtores. O contorno do domínio  $\Omega$  é representado por  $\partial\Omega$ , que pode ser considerado como a união disjunta dos diferentes tipos de contorno

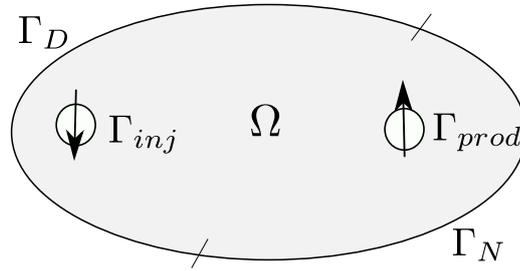
$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_{inj} \cup \Gamma_{prod} \quad (2.10)$$

onde  $\Gamma_{inj}$  e  $\Gamma_{prod}$  representam os poços injetores e os poços produtores, respectivamente (vide Figura 1).

As condições de contorno para a equação de pressão em um reservatório são dadas por:

$$\begin{cases} p(\vec{x}, t) = g_D, & \text{em} \quad \Gamma_D \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = g_N, & \text{em} \quad \Gamma_N \end{cases} \quad (2.11)$$

Figura 1 – Domínio computacional identificando os poços injetores, produtores e os contornos de Dirichlet ( $\Gamma_D$ ) e Neumann ( $\Gamma_N$ )



Fonte – Produzido pelo autor

ou

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{n} & = Q_{inj}, & \text{em } \Gamma_{inj} \\ p(\vec{x}, t) & = P_{prod}, & \text{em } \Gamma_{prod} \end{cases} \quad (2.12)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor área normal unitária,  $g_D$  representa a pressão prescrita no contorno de Dirichlet e  $g_N$  é o fluxo prescrita no contorno de Neumann.

A equação de saturação é obtida a partir da equação (2.3), onde as velocidades  $\vec{v}_w$  e  $\vec{v}_o$  são multiplicadas por  $\lambda_o$  e  $\lambda_w$ , respectivamente. E após manipulações algébricas temos a seguinte equação:

$$\vec{v}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} \vec{v} + \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda} \underline{K} (\nabla p_c + (\rho_w - \rho_o) \vec{g}) \quad (2.13)$$

onde a pressão capilar é denotado por  $p_c = p_o - p_w$ .

Uma vez que pressão capilar é desprezada, a equação (2.13) é substituída na equação de conservação de massa (2.1) quando consideramos a fase água ( $\gamma = w$ ), e após manipulações algébricas, obtêm-se:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}(S_w) + Q_w \quad \text{em } \Omega \times [0, t] \quad (2.14)$$

Na equação anterior a função fluxo hiperbólico  $\vec{F}(S_w)$  é definido por:

$$\vec{F}(S_w) = f_w(S_w) \vec{v} + f_w(S_w) \lambda_o \underline{K} (\rho_w - \rho_o) \vec{g} \quad (2.15)$$

onde  $f_w(S_w) = \lambda_w / \lambda$  é o fluxo fracional da fase água, que representa a fração de massa da fase molhante no meio poroso. A equação (2.14) caracteriza-se por ser uma equação hiperbólica não linear (AZIZ; SETTARI, 1979; EWING, 1983; HELMIG, 1997; CHEN, 2007).

Com base na equação de saturação podemos obter um modelo simplificado unidimensional denominado Modelo de Buckley-Leverett. Esse modelo é obtido considerando que a razão de mobilidade é unitária e o tensor de permeabilidade é homogêneo e isotrópico, além disso, os efeitos gravitacionais são desprezados e a velocidade de Darcy é constante ( $\vec{v} = cte$ ) ao longo do tempo, obtendo-se assim a seguinte equação:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (f_w(S_w) \vec{v}) = 0 \quad (2.16)$$

A equação anterior é uma equação hiperbólica não linear de transporte e segundo Souza (2015 apud HELMIG, 1997) essa equação se caracteriza pela propagação da saturação da massa de água ao longo da direção das linhas características.

Para o mesmo reservatório, as condições de contorno para a equação de saturação (2.14) são dadas por:

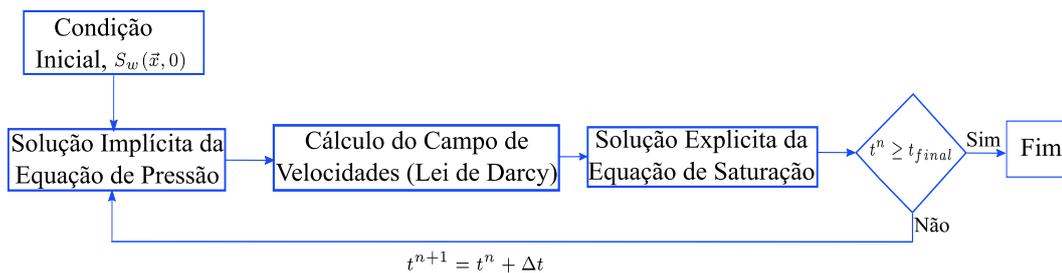
$$S_w(x_0, t) = \bar{S}_w \quad \text{em } \Gamma_{inj} \quad (2.17)$$

onde  $\bar{S}_w$  representa a saturação prescrita da fase água em um conjunto de poços injetores e a condição inicial pode ser expressa como:

$$S_w(x, 0) = \begin{cases} 1 - S_w & \text{para } x \leq x_0 \\ S_w & \text{para } x > x_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

No início deste capítulo, as equações governantes foram obtidas a partir de várias hipóteses simplificadoras. Ainda assim, obter soluções analíticas continua sendo um desafio, nestes casos a literatura recomenda utilizar métodos numéricos que ajudem a obtermos uma solução aproximada de tais equações. Com esse intuito, neste capítulo apresentamos a formulações numéricas para resolver tais equações governantes. A estratégia numérica adotada para tal caso é nomeada IMPES (IMplicit Pressure Explicit Saturation), o qual é um método segregado introduzido por Sheldon e Cardwaell (1959) e Stone e Gardner (1961) que resolve o problema pressão-saturação separadamente de maneira sequencial: essa estratégia é bastante popular na indústria de petróleo (AZIZ; SETTARI, 1979; EWING, 1983; COATS, 2001; CHEN, 2004; CONTRERAS, 2016), já que a implementação computacional é bastante eficiente e simples, a desvantagem desta estratégia é a utilização de um passo de tempo pequeno para garantir a estabilidade. Segundo Chen, Huan e Li (2004) considerar passo de tempo pequeno pode ser prejudicial em problemas de simulação de longo tempo ou quando o domínio contínuo é discretizado por malhas muito refinadas. A estratégia IMPES consiste em, a partir de atribuir uma distribuição inicial de saturação no reservatório calcularmos o campo de pressão de maneira implícita e, posteriormente, calculamos o campo de velocidades, o qual utilizamos como dado de entrada para o cálculo do campo de saturações, de tal maneira que as equações de pressão e

Figura 2 – Algoritmo da estratégia IMPES



Fonte – Souza (2015)

saturação são acopladas (fracamente) através do campo de velocidades. Com a nova distribuição de saturação, retornamos para a equação de pressão, repetindo o processo até o instante de tempo desejado (EWING, 1983; CARVALHO, 2005; CONTRERAS, 2016), ver figura 2.

### 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE PRESSÃO

As equações que regem o comportamento da dinâmica dos fluidos no interior dos reservatórios de petróleo foram obtidas a partir das leis de conservação de massa, a lei de Darcy e algumas equações de fechamento. Estas equações pela complexidade do fenômeno podem não admitir soluções analíticas ou se tiverem são apenas para fenômenos com condições muito restritivas. Nesse sentido, os métodos numéricos são fundamentais já que nos permitem obter soluções aproximadas respeitando as leis e certas condições físicas que envolve o problema.

A introdução do método dos volumes finitos (MVF) destacou a importância para aplicações na indústria do petróleo para desenvolver ferramentas de simulação de reservatórios que refletem as fortes restrições impostas pelo ambiente natural. Cronologicamente, como indicado na introdução, uma das primeiras formulações numéricas utilizadas nas últimas décadas na simulação de reservatórios de petróleo é o método *Two Point Flux Approximation (TPFA)* Aavatsmark, Barkve, Bøe e Mannseth (1998), Edwards e Rogers (1998), Aavatsmark (2002). Para este método, o fluxo que atravessa a superfície de controle é escrito em função das pressões centradas nos volumes de controle adjacentes a SC em questão. No entanto, sua principal desvantagem é a convergência quando tratamos meios discretizados por malhas não K-ortogonais (AAVATSMARK, 1998; EDWARDS; ROGERS, 1998). Usualmente, é necessário utilizar malhas não estruturadas na simulação de reservatórios com o objetivo de capturar de maneira adequada a representação geológica dos reservatórios, por exemplo, as fraturas ou muitas vezes precisamos de malhas localmente refinadas próximo dos poços para poder capturar as regiões de singularidade. A gênese de novos métodos de volumes finitos para superar as dificuldades do método TPFA foi formulado por Crumpton, Shaw e Ware (1995). Nesse sentido, nós propomos outras novas formulações numéricas baseadas nos diferentes métodos clássicos de volumes finitos formulados pelos autores (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; YUAN; SHENG, 2008; BERTOLAZZI; MANZINI, 2005; LE POTIER, 2009; SHENG; YUAN, 2011), a saber: um método de volumes finitos não linear que preserva positividade (NLFV-PP) e outro método de volumes finitos não linear que satisfaz o princípio do máximo discreto (NLFV-DMP) e finalmente um método de volumes finitos linear com aproximação de fluxo por múltiplos pontos não ortodoxo (MPFA-HD). Estas formulações satisfazem a maioria das propriedades numéricas de um método numérico ideal, como descrito no capítulo 1.

### 3.1 Método de Volumes Finitos Centradas no Volume de Controle

Duas componentes caracterizam o método de volumes finitos centrada no volume de controle, que são a subdivisão do domínio espacial em volumes finitos e a sua forma integral ou forma conservativa (WU; GAO, 2014; SHENG; YUAN, 2015; BLANC; LABOURASSE, 2015).

A primeira componente, no sentido de uma aproximação do método dos volumes finitos, é a subdivisão do domínio espacial em volumes menores. Essa subdivisão transforma o domínio contínuo em um domínio discretizado envolvendo superfícies de controle, centroides e volumes de controle poligonal e/ou poligonal *star-shape*.

**Definição 1.** A discretização do domínio contínuo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  envolve um conjunto de poligonais abertos, e o contorno denotado por  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$  (o fecho de  $\Omega$  é denotado por  $\overline{\Omega}$ ). Uma discretização admissível de  $\Omega$  envolve a composição de três superconjuntos denotado por  $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{O})$ , onde:

- $\mathcal{M} = \{\hat{L}\}$  é família finita de volumes de controle, tal que:  $\bigcup_{\hat{L} \in \mathcal{M}} \hat{L} = \overline{\Omega}$ . O volume de cada volume de controle  $\hat{L} \in \mathcal{M}$  é representado por  $V_{\hat{L}}$  e o cardinal do conjunto  $\mathcal{M}$  é denotada por  $|\mathcal{M}| = n$ .
- $\mathcal{E} = \{IJ, I \text{ é vértice de início e } J \text{ é o vértice final da face em sentido anti-horário}\}$  é uma família finita de subconjuntos de  $\overline{\Omega}$  (chamados de faces ou superfícies de controle). Para cada  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ , existe um subconjunto  $\mathcal{E}_{\hat{L}}$  de  $\mathcal{E}$  tal que:  $\partial\hat{L} = \bigcup_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \overline{IJ}$ . Também assumimos que para todo  $IJ \in \mathcal{E}$ , temos que  $IJ \subset \partial\Omega$  ou  $IJ \subseteq \overline{\hat{L}} \cap \overline{\hat{R}}$ , para algum  $(\hat{L}, \hat{R}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ . O conjunto de faces internas e de contorno são representadas respectivamente pelos conjuntos  $\mathcal{E}^{int} = \mathcal{E} \cap \Omega$  e  $\mathcal{E}^{ext} = \mathcal{E} \cap \partial\Omega$ . Finalmente o comprimento da face em geral calculado pela norma Euclidiana do vetor  $\vec{IJ}$  ( $\|\vec{IJ}\|$ ).
- $\mathcal{O} = \{x_{\hat{L}}\}_{\hat{L} \in \mathcal{M}}$  é a família de pontos (centros da célula, não necessariamente o centro de gravidade das células) de  $\Omega$ , de modo que, para todo  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ ,  $x_{\hat{L}} \in \hat{L}$ . Note-se que as variáveis primarias são centrados nestes pontos.

**Definição 2.** Consideremos um domínio contínuo  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R}^2$ , discretizados por uma família de polígonos  $\mathcal{M}$ . Um volume de controle  $\hat{L} \in \mathcal{M}$  é dito um polígono *star-shape*, se existe um ponto  $z$  que pertence a  $\hat{L}$  tal que todo os pontos do polígono são visíveis a partir de ponto  $z$ . O conjunto de pontos  $z$  de  $\hat{L}$  é chamado de *Kernel*, que geralmente é um polígono convexo. Em todo o trabalho assumirmos que todo volume de controle é um polígono *star-shape* com respeito ao baricentro.

A segunda característica do método de volumes finitos é a forma integrada do modelo ou forma fraca como chamam outros autores, a qual resulta basicamente de integrar as equações

governantes. Assim, a equação de pressão (2.7) é integrado sobre o domínio  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} dV = \int_{\Omega} Q dV \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\lambda \underline{\kappa} \nabla p \quad (3.1)$$

onde  $dV$  é o elemento de volume e  $p$  é a variável pressão. Essa variável (matematicamente) deve ser uma função suave. Utilizando a propriedade das integrais sobre o conjunto  $\mathcal{M}$  a equação (3.1) é equivalente a

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} dV = \sum_{\hat{L} \in \mathcal{M}} \int_{\hat{L}} \nabla \cdot \vec{v} dV = \sum_{\hat{L} \in \mathcal{M}} \int_{\hat{L}} Q dV \quad (3.2)$$

Considerando um volume de controle genérico  $\hat{L}$  de  $\mathcal{M}$ , e aplicando o teorema de divergência sobre este, temos:

$$\int_{\hat{L}} \nabla \cdot \vec{v} dV = \int_{\partial \hat{L}} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{\hat{L}} Q dV \quad (3.3)$$

onde  $dS$  é um elemento de área e  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário externa à  $\partial \hat{L}$ . A equação anterior ((3.3)) é uma lei de conservação, o fluxo que sai do volume de controle  $\hat{L}$  é igual ao termo de fonte/sumidouro no interior de  $\hat{L}$ .

As integrais na equação (3.3) são aproximadas utilizando o teorema de valor médio

$$\vec{v}_{IJ} = \frac{1}{\|\vec{IJ}\|} \int_{IJ} \vec{v} dS \quad \text{e} \quad \bar{Q}_{\hat{L}} = \frac{1}{V_{\hat{L}}} \int_{\hat{L}} Q dV \quad (3.4)$$

onde  $\vec{v}_{IJ}$  é a velocidade média na face  $IJ$ . O valor médio do termo de fonte ou sumidouro é dada por  $\bar{Q}_{\hat{L}}$  e o volume do elemento  $\hat{L}$  é denotado por  $V_{\hat{L}}$ . Então, a partir das equações (3.1)-(3.4) obtemos a seguinte definição

**Definição 3.** Considerando um estêncil admissível  $\mathcal{D}$  de  $\Omega$ . Dizemos que o método numérico é conservativo se existe uma família  $\left\{ \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right\}_{IJ \in \mathcal{E}}$  finita de fluxos numéricos de modo que:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \vec{v}_{JI} \cdot \vec{N}_{JI} = 0, \quad IJ \in \mathcal{E} \quad (3.5)$$

e

$$\sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}}, \quad \forall \hat{L} \in \mathcal{M} \quad (3.6)$$

Na definição anterior o vetor área normal à superfície de controle  $IJ$  é denotado por  $\vec{N}_{IJ}$  e  $\vec{N}_{JI} = \mathcal{R} \vec{N}_{IJ}$ , sendo que  $\mathcal{R}$  é uma matriz de rotação em sentido anti-horário, ou seja:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $\theta$  é ângulo de rotação desejada, no presente texto consideramos  $\theta = \pi/2$ .

Na equação (3.6) a vazão  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  pode ser aproximada utilizando algum método dos volumes finitos. Para se obter uma aproximação numérica da vazão  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$ , previamente precisamos aproximar a mobilidade referente a superfície de controle em questão. Assim, a literatura ligada à simulação numérica de reservatórios propõem varias estratégias numéricas, por exemplo, Souza (2015) propõe várias estratégias que consiste em aproximar a mobilidade pela média ponderada pelos volumes dos VC adjacentes à superfície de controle em questão:

$$\lambda_{IJ} = \frac{\lambda(S_{w_{\hat{L}}})V_{\hat{L}} + \lambda(S_{w_{\hat{R}}})V_{\hat{R}}}{V_{\hat{L}} + V_{\hat{R}}} \quad (3.8)$$

onde  $\lambda(S_{w_{\hat{L}}})$  e  $\lambda(S_{w_{\hat{R}}})$  são as mobilidades totais nos volumes de controle adjacentes à face  $IJ$ . É notório que a mobilidade aproximada é influenciada pelo volume de controle que tem maior volume.

A fim de manter uma aproximação mais robusta, Friis e Evje (2012) escreve a mobilidade na face como a média aritmética das mobilidades nodais  $\lambda_I$  e  $\lambda_J$

$$\lambda_{IJ} = \frac{\lambda_I + \lambda_J}{2} \quad (3.9)$$

onde as mobilidades nodais  $\lambda_I$  e  $\lambda_J$  são aproximadas pela média ponderada pelos volumes dos VC na vizinhança do nó em questão, ou seja:

$$\lambda_i = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} \lambda(S_{w_{\hat{k}}})V_{\hat{k}}}{\sum_{k=1}^{n_i} V_{\hat{k}}}, \quad i = I, J \quad (3.10)$$

onde  $n_i$  representa o número de volumes de controle na vizinhança do nó (ou vértice) em questão. Segundo Souza (2015), as mobilidades aproximadas na equação (3.8) produzem soluções menos influenciadas pela orientação da malha do que as obtidas com a aproximação dada na equação (3.9).

Outros autores como Aziz e Settari (1979), Brenier e Jaffré (1991), Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011), Nikitin, Terekhov e Vassilevski (2014), Lee, Efendiev e Tchelepi (2015), utilizam uma aproximação à montante no tempo anterior para aproximar a mobilidade na face em questão

$$\lambda_{IJ} = \begin{cases} \lambda(S_{w_{\hat{L}}}), & \text{se o fluxo sai do elemento } \hat{L} \\ \lambda(S_{w_{\hat{R}}}), & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.11)$$

os autores simplesmente não justificam a escolha deste critério, na presente tese tentaremos explicar a partir das nossas experiências numéricas.

## 3.2 Formulação Numérica Implícita da Equação de Pressão

Nesta seção descrevemos de maneira detalhada as formulações numéricas propostas para resolver a equação de pressão dada em (2.9). Desde a equação (3.3) para uma face do volume de controle arbitrário  $\hat{L}$ , temos:

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} \lambda \underline{K}_{\hat{L}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} \lambda \nabla p \cdot (\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}) ds, \quad \forall IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}} \quad (3.12)$$

onde  $\vec{n}_{IJ}$  é o vetor normal unitário associado à face  $IJ$ ,  $\underline{K}_{\hat{L}}$  representa o tensor de permeabilidade no volume de controle  $\hat{L}$  e a transposta é denotado por  $\underline{K}_{\hat{L}}^{\top}$ . Na equação anterior precisamos aproximar os termos da integral, sendo que o valor aproximado da mobilidade  $\lambda$  já foi dada nas equações (3.8), (3.9) e (3.11). O termo  $\nabla p \cdot (\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ})$  é aproximado numericamente utilizando os trabalhos clássicos de Le Potier (2005), Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Yuan e Sheng (2008), antes de desenvolver, precisamos enunciar um lema que nos ajude entender a natureza do vetor  $\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}$ , este vetor na literatura clássica é nomeado de vetor co-normal relativo à face  $IJ$ .

**Lema 1.** *Para cada face  $IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}$ , sempre é possível encontrar dois pontos auxiliares  $x_{\hat{L},i(IJ)}$ ,  $x_{\hat{L},j(IJ)}$  que não necessariamente pertence à face em questão, de modo que os vetores  $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}$ ,  $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}$  são não colineares, isso implica que existem duas constantes  $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$  e  $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$  associados a tais pontos auxiliares, tal que:*

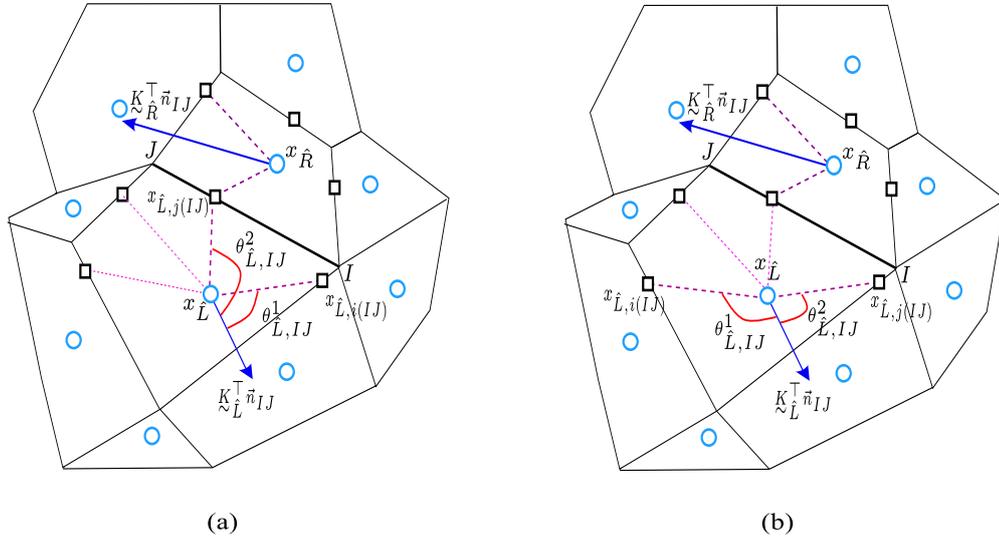
$$\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ} = \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}} \quad (3.13)$$

Na equação anterior os coeficientes  $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$  e  $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$  são calculados obedecendo as seguintes condições:

- *Condição 1.* O ângulo formado pelos raios  $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}$  e  $\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}$  é denotada por  $\theta_{\hat{L},IJ}^1$  e esta restrito ao intervalo  $0 \leq \theta_{\hat{L},IJ}^1 < \pi$ . E o ângulo formado pelos raios  $\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}$  e  $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}$  é denotado por  $\theta_{\hat{L},IJ}^2$  e esta restrito ao intervalo  $0 \leq \theta_{\hat{L},IJ}^2 < \pi$ . Tendo assim, que a somatória dos ângulos devem pertencer ao intervalo  $0 < \theta_{\hat{L},IJ}^1 + \theta_{\hat{L},IJ}^2 < \pi$ .

Estas condições ainda não são suficientes para calcular os coeficientes, por exemplo, veja a figura 4 a mesmo que satisfazendo condição 1 o vetor *co-normal* não pertence ao eixo auxiliar em questão. Nesse sentido, introduzimos a seguinte condição.

Figura 3 – As figuras representam a escolha do par de pontos que viola a condição 2 sem violar a condição 1 (a) e a escolha do par de pontos que viola a condição 1 sem violar a condição 2 (b)



Fonte – Produzido pelo autor

- **Condição 2.** O sinal do produto vetorial deve ser satisfeita  $\overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}} \times \underline{K}_L^\top \vec{n}_{IJ} \geq 0$  e  $\underline{K}_L^\top \vec{n}_{IJ} \times \overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}} \geq 0$ . Na figura 3b mostramos o caso em que pode satisfazer a condição 2 sem satisfazer a condição 1.

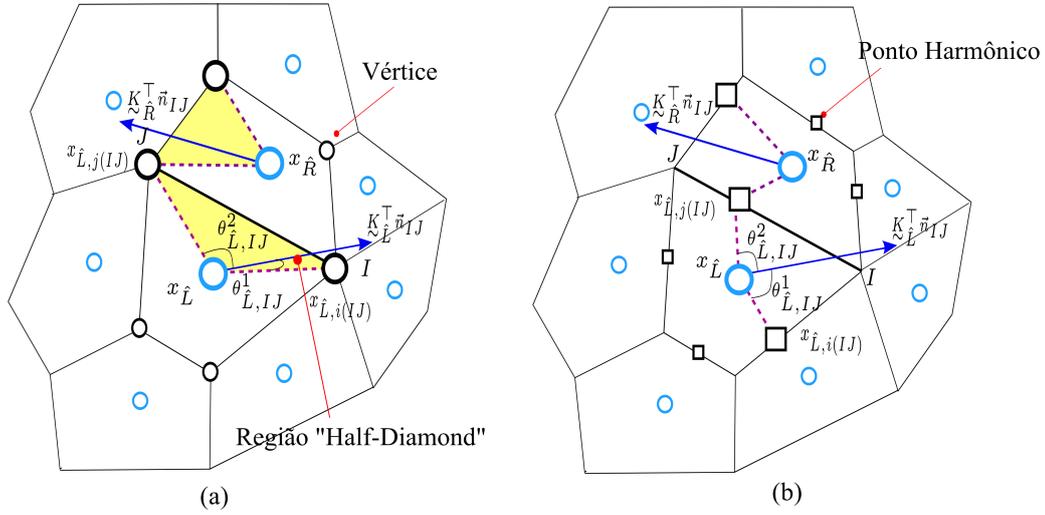
A estratégia para calcular os coeficientes consiste em percorrer cada par de pontos composto por vértices ou pontos harmônicos em sentido anti-horário pertencentes ao volume de controle em questão, e avaliar as condições 1 e 2, quando ambas condições são satisfeitas, então o par de pontos são chamados pontos de interpolação e são aqueles que contém ao vetor co-normal.

Os coeficientes são calculados a partir dos seguintes métodos clássicos não-lineares (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; LIPNIKOV, 2009; YUAN; SHENG, 2008)

$$\alpha_{L,i(IJ)} = \frac{\|\underline{K}_L^\top \vec{n}_{IJ}\| \sin(\theta_{L,IJ}^2)}{\sin(\theta_{L,IJ}^1 + \theta_{L,IJ}^2)} \quad \text{e} \quad \alpha_{L,j(IJ)} = \frac{\|\underline{K}_L^\top \vec{n}_{IJ}\| \sin(\theta_{L,IJ}^1)}{\sin(\theta_{L,IJ}^1 + \theta_{L,IJ}^2)} \quad (3.14)$$

na equação anterior podemos observar claramente que os coeficientes são não-negativos, ou seja,  $\alpha_{L,i(IJ)} \geq 0$  e  $\alpha_{L,j(IJ)} \geq 0$ , esta propriedade é essencial em método não lineares ja que contribuem a preservar os critérios de positividade ou satisfazer o principio de máximo discreto (DMP).

Na atualidade métodos mais sofisticados propõem diferentes maneiras de calcular os coeficientes, por exemplo, Gao e Wu (2013) e Nikitin, Terekhov e Vassilevski (2014) calcula os

Figura 4 – Pontos de interpolação que coincidem com: os vértices formando uma região *Half-Diamond* (a) e os pontos harmônicos (b)


Fonte – Produzido pelo autor

coeficientes a partir de uma razão entre dois produtos mistos

$$\alpha_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\left( \underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}} \right)}{\left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}} \right), \vec{e}_z} \quad \text{e} \quad \alpha_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}, \underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}, \vec{e}_z \right)}{\left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}, \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}} \right), \vec{e}_z} \quad (3.15)$$

onde  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  é o produto misto de vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , o vetor unitário que representa ao eixo  $z$  é denotado por  $\vec{e}_z$  e é paralelo ao produto vetorial  $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}} \times \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}$ .

Em 2015 Gao e Wu propõe uma maneira diferente de calcular os coeficientes:

$$\alpha_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\vec{n}_{IJ} \underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \mathcal{R} \left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}} \right)}{\left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}} \right)^{\top} \mathcal{R} \left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}} \right)} \quad \text{e} \quad \alpha_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\vec{n}_{IJ} \underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \mathcal{R} \left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}} \right)}{\left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}} \right)^{\top} \mathcal{R} \left( \overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}} \right)} \quad (3.16)$$

onde  $\mathcal{R}$  é uma matriz de rotação em sentido anti-horário. Nas equações (3.15) e (3.16) os coeficientes produzem valores não-negativos.

Em nossos testes numéricos os valores dos coeficientes  $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$  e  $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$  não fazem muita diferença em quanto robustez, além disso, em todos os casos o vetor *co-normal* pertence ao mesmo eixo auxiliar quando calculado por qualquer das estratégias. Assim, os pontos de interpolação já  $x_{\hat{L},i(IJ)}$ ,  $x_{\hat{L},j(IJ)}$  e  $x_{\hat{R},i(IJ)}$  definem a mesma região de suporte para aproximar os fluxos laterais, veja a figuras 4. Na figura 4a, observamos que a região de suporte para calcular dos fluxos laterais é nomeado como "Half-Diamond", já que em 3-D é similar a um diamante dividido pela metade. E na figura 4b os pontos harmônicos influem na aproximação dos fluxos laterais.

De maneira similar para um volume de controle  $\hat{R}$  que compartilhe à face  $IJ$  com o volume de controle  $\hat{L}$ , o lema 1 pode ser escrito da forma seguinte:

$$\underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{JI} = \alpha_{\hat{R},i(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}} \quad (3.17)$$

onde os coeficientes  $\alpha_{\hat{R},i(IJ)}$  e  $\alpha_{\hat{R},j(IJ)}$  são calculados respeitando as condições 1 e 2, utilizando a seguinte equação

$$\alpha_{\hat{R},i(IJ)} = \frac{\left\| \underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{IJ} \right\| \sin(\theta_{\hat{R},IJ}^2)}{\sin(\theta_{\hat{R},IJ}^1 + \theta_{\hat{R},IJ}^2)} \quad \text{e} \quad \alpha_{\hat{R},j(IJ)} = \frac{\left\| \underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{IJ} \right\| \sin(\theta_{\hat{R},IJ}^1)}{\sin(\theta_{\hat{R},IJ}^1 + \theta_{\hat{R},IJ}^2)} \quad (3.18)$$

**Definição 4.** A derivada direcional de uma função  $p$  no ponto  $\vec{x}$  na direção do vetor não nulo  $\vec{z}$ , é denotado por  $\frac{\partial p}{\partial \vec{z}}$  e definida como:

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{z}} = \frac{\nabla p \cdot \vec{z}}{\|\vec{z}\|} \quad (3.19)$$

A partir da definição anterior assumirmos que o vector  $\vec{z}$  é substituído pelo vector co-normal  $\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}$  na equação (3.19), logo temos:

$$\frac{\partial p}{\partial \left( \underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ} \right)} \left\| \underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ} \right\| = \nabla p \cdot \left( \underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ} \right) = \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} - \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \quad (3.20)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial \left( \underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{JI} \right)} \left\| \underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{JI} \right\| = \nabla p \cdot \left( \underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{JI} \right) = \alpha_{\hat{R},i(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}} - \alpha_{\hat{R},j(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}} \quad (3.21)$$

As equações anteriores são substituídas na equação (3.12)

$$\int_{IJ} \vec{\psi} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \int_{IJ} \lambda \left( \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} - \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \right) ds \quad (3.22)$$

e

$$\int_{IJ} \vec{\psi} \cdot \vec{n}_{JI} ds = - \int_{IJ} \lambda \left( \alpha_{\hat{R},i(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}} - \alpha_{\hat{R},j(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}} \right) ds \quad (3.23)$$

Utilizando o método de diferenças finitas por expansão em séries de Taylor podemos aproximar a derivada parcial  $\nabla p$ , ao longo da direção dos vetores  $\overrightarrow{\cdot x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}}$  (resp.  $\overrightarrow{\cdot x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}}$ ) e  $\overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}}$  (resp.  $\overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}}$ ) logo substituímos nas equações anteriores, assim temos:

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \left( \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \frac{P_{\hat{L},i(IJ)} - P_{\hat{L}}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} \right\|} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \frac{P_{\hat{L},j(IJ)} - P_{\hat{L}}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \right\|} \right) \int_{IJ} \lambda ds + O(\|\vec{IJ}\|) \quad (3.24)$$

e

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = - \left( \alpha_{\hat{R},i(IJ)} \frac{P_{\hat{R},i(IJ)} - P_{\hat{R}}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}} \right\|} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} \frac{P_{\hat{R},j(IJ)} - P_{\hat{R}}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}} \right\|} \right) \int_{IJ} \lambda ds + O(\|\vec{IJ}\|) \quad (3.25)$$

Adicionalmente a mobilidade na face  $IJ$  é aproximada utilizando o teorema de valor médio

$$\lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| = \int_{IJ} \lambda ds \quad (3.26)$$

logo substituindo o valor médio da mobilidade nas equações (3.24) e (3.25), temos:

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \alpha_{\hat{L},i(IJ)} \frac{P_{\hat{L}} - P_{\hat{L},i(IJ)}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} \right\|} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \frac{P_{\hat{L}} - P_{\hat{L},j(IJ)}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \right\|} \right) + O(\|\vec{IJ}\|) \quad (3.27)$$

e

$$\int_{IJ} \vec{v} \cdot \vec{n}_{IJ} ds = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \alpha_{\hat{R},i(IJ)} \frac{P_{\hat{R}} - P_{\hat{R},i(IJ)}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}} \right\|} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} \frac{P_{\hat{R}} - P_{\hat{R},j(IJ)}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}} \right\|} \right) + O(\|\vec{IJ}\|) \quad (3.28)$$

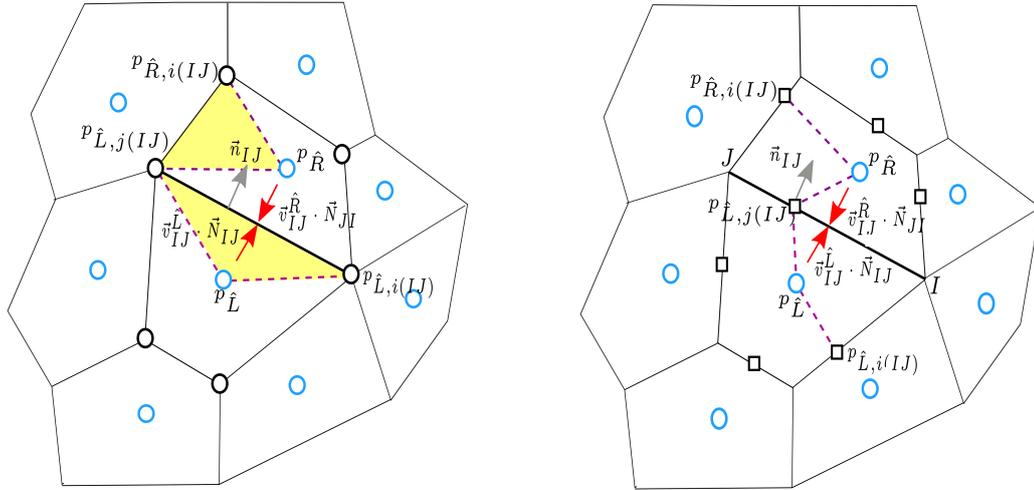
Quando  $\|\vec{IJ}\| \rightarrow 0$  nas equações (3.27) e (3.28), obtemos os fluxos laterais aproximadas na superfície de controle  $IJ$  correspondente ao volume de controle  $\hat{L}$

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \xi_{\hat{L},i(IJ)} \left( P_{\hat{L}} - P_{\hat{L},i(IJ)} \right) + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \left( P_{\hat{L}} - P_{\hat{L},j(IJ)} \right) \right) \quad (3.29)$$

onde

$$\xi_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{L},i(IJ)}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},i(IJ)}} \right\|} \quad \text{e} \quad \xi_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{L},j(IJ)}}{\left\| \overrightarrow{x_{\hat{L}} x_{\hat{L},j(IJ)}} \right\|} \quad (3.30)$$

Figura 5 – Mostramos os fluxos utilizando os vértices e os pontos harmônicos



Fonte – Produzido pelo autor

 Correspondente ao volume de controle  $\hat{R}$ , temos:

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \xi_{\hat{R},i(IJ)} \left( p_{\hat{R}} - p_{\hat{R},i(IJ)} \right) + \xi_{\hat{R},j(IJ)} \left( p_{\hat{R}} - p_{\hat{R},j(IJ)} \right) \right) \quad (3.31)$$

onde

$$\xi_{\hat{R},i(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{R},i(IJ)}}{\|\vec{x}_{\hat{R}} x_{\hat{R},i(IJ)}\|} \quad \text{e} \quad \xi_{\hat{R},j(IJ)} = \frac{\alpha_{\hat{R},j(IJ)}}{\|\vec{x}_{\hat{R}} x_{\hat{R},j(IJ)}\|} \quad (3.32)$$

podemos observar nas equações anteriores que os coeficientes  $\xi_{\hat{L},i(IJ)}$ ,  $\xi_{\hat{L},j(IJ)}$ ,  $\xi_{\hat{R},i(IJ)}$  e  $\xi_{\hat{R},j(IJ)}$  ainda mantém a não negatividade dos seus valores desde que os outros coeficientes  $\alpha_{\hat{L},i(IJ)}$ ,  $\alpha_{\hat{L},j(IJ)}$ ,  $\alpha_{\hat{R},i(IJ)}$  e  $\alpha_{\hat{R},j(IJ)}$  são não negativos, graficamente os fluxos laterais são mostrados na figura 5.

### 3.2.1 Método de Volumes Finitos Não Linear que Preserva Positividade (NLFV-PP)

Nesta seção derivamos um método dos volumes finitos não linear inspirado nos trabalhos clássicos dos autores Le Potier (2005), Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Yuan e Sheng (2008) e Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014). O método que apresentamos satisfaz as seguintes propriedades numéricas:

- É localmente conservativo.
- É monótono, isto é, preserva positividade da solução das soluções numéricas.

- Preserva linearidade.
- Lida com malhas não estruturadas e severamente distorcidas.
- Permite tensores de permeabilidade com alta razão de anisotropia.
- Possui taxas de convergência de segunda ordem para o campo de pressão e aproximadamente de primeira ordem para o fluxo.

Uma das propriedades essenciais que todo método numérico deveria satisfazer é a monotonicidade. No contexto da condução térmica anisotrópica, o método que não preservar monotonicidade pode levar à violação das restrições de entropia da segunda lei da termodinâmica fazendo com que o calor flua de regiões de temperatura mais baixa para temperatura mais alta. Em regiões de grandes variações de temperatura, isso pode fazer com que a temperatura se torne negativa. A fim de evitar a temperatura negativa, o método portanto deve ser monótono (YUAN; SHENG, 2008). E no contexto de simulação de reservatórios de petróleo, um método que não satisfaz a monotonicidade podem produzir com campo de pressões com oscilações espúrias, que conseqüentemente podem gerar gás fictício em regiões do reservatório onde a pressão cai erroneamente abaixo do ponto de bolha e esses campos de pressão estão associados a velocidades/fluxos não físicos de Darcy (QUEIROZ, 2014). Obviamente, resultados semelhantes enganosos podem acontecer em outras aplicações. Para os casos lineares, a monotonicidade é equivalente ao princípio discreto máximo (DMP), isso será mostrado nos experimentos numéricos no próximo capítulo. Contudo, para os casos gerais, o princípio do máximo discreto é mais restritivo do que a monotonicidade (YUAN; SHENG, 2008).

Nos trabalhos clássicos o fluxo único na face  $IJ \in \mathcal{E}^{int}$  é expressado como combinação convexa dos fluxos laterais dadas nas equações (3.29) e (3.31), isto é:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = w_{\hat{L},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - w_{\hat{R},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.33)$$

onde os pesos  $w_{\hat{L},IJ}$  e  $w_{\hat{R},IJ}$  devem satisfazer a seguinte equação de restrição:

$$w_{\hat{L},IJ} + w_{\hat{R},IJ} = 1 \quad (3.34)$$

A equação anterior satisfaz a condição de conservação local dada na equação (3.5).

Substituindo a expressão que representa os fluxos  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}$  e  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}$  em equação (3.33) e arranjando adequadamente, temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R},IJ} p_{\hat{R}} - \left( w_{\hat{L},IJ} \zeta_{\hat{L},IJ} - w_{\hat{R},IJ} \zeta_{\hat{R},IJ} \right) \quad (3.35)$$

onde

$$\mathcal{A}_{\gamma,IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| w_{\gamma,IJ} (\xi_{\gamma,i(IJ)} + \xi_{\gamma,j(IJ)}), \quad \gamma = \hat{L}, \hat{R} \quad (3.36)$$

e

$$\varsigma_{\gamma,IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| (\xi_{\gamma,i(IJ)} p_{i,i(IJ)} + \xi_{\gamma,j(IJ)} p_{i,j(IJ)}), \quad \gamma = \hat{L}, \hat{R} \quad (3.37)$$

Os coeficientes  $\xi_{\gamma,i(IJ)}$  e  $\xi_{\gamma,j(IJ)}$  na equação (3.37) já foram calculados nas equações (3.30) e (3.32). Além disso, devemos notar que as variáveis auxiliares  $p_{i,i(IJ)}$  e  $p_{i,j(IJ)}$  são interpoladas utilizando uma estratégia de interpolação, em nosso caso utilizamos a estratégia de interpolação proposto por Gao e Wu (2011) e utilizado arduamente pelos autores Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014), Contreras, Lyra, Souza e Carvalho (2016).

A fim de derivar uma aproximação de fluxo consistente de dois pontos que leve a um método que preserva positividade utilizamos as ideias introduzidos por Le Potier (2005), Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Yuan e Sheng (2008), nesse sentido os pesos  $w_{\hat{L},IJ}$  e  $w_{\hat{R},IJ}$  devem ser calculados satisfazendo o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} w_{\hat{R},IJ} \varsigma_{\hat{R},IJ} - w_{\hat{L},IJ} \varsigma_{\hat{L},IJ} = 0 \\ w_{\hat{L},IJ} + w_{\hat{R},IJ} = 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

Resolvendo o sistema anterior, temos:

$$w_{\hat{L},IJ} = \frac{|\varsigma_{\hat{R},IJ}| + \varepsilon}{|\varsigma_{\hat{L},IJ}| + |\varsigma_{\hat{R},IJ}| + 2\varepsilon} \quad \text{e} \quad w_{\hat{R},IJ} = 1 - w_{\hat{L},IJ} \quad (3.39)$$

onde o valor de  $\varepsilon$  é um número muito pequeno imposto simplesmente para evitar uma divisão por zero.

Segundo Blanc e Labourasse (2015) essa estratégia pode fazer com que a função fluxo seja descontínua com respeito a  $p$ , para evitar esse tipo de anomalias, ele recomenda utilizar funções de pesos que sejam contínuas

$$w_{\hat{L},IJ} = \frac{|\varsigma_{\hat{R},IJ}| + \varepsilon_1^2}{|\varsigma_{\hat{L},IJ}| + |\varsigma_{\hat{R},IJ}| + 2\varepsilon_1^2} \quad \text{e} \quad w_{\hat{R},IJ} = 1 - w_{\hat{L},IJ} \quad (3.40)$$

onde  $\varepsilon_1 = \max \{ \|\vec{IJ}\|, \quad IJ \in \mathcal{E} \}$  representa um máximo global, também de maneira similar podemos considerar um máximo local  $\varepsilon_1 = \max \{ \|\vec{IJ}\|, \quad IJ \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E}_{\hat{L}} \cup \mathcal{E}_{\hat{R}}) \}$ , em malhas finas este ultimo é numericamente mas relevante.

O fluxo na face correspondente ao volume de controle  $\hat{L}$  é escrito em função das pressões centrados nos volumes de controle adjacentes à face  $IJ \in \mathcal{E}^{int}$ :

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \mathcal{A}_{\hat{L},IJ}(p) p_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R},IJ}(p) p_{\hat{R}} \quad (3.41)$$

e o fluxo correspondente ao volume de controle  $\hat{R}$  é dada por:

$$\vec{\mathcal{V}}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = \mathcal{A}_{\hat{R},IJ}(p)p_{\hat{R}} - \mathcal{A}_{\hat{L},IJ}(p)p_{\hat{L}} \quad (3.42)$$

veja que os fluxos anteriores satisfazem a equação de continuidade de fluxo dada na equação (3.5). Os coeficientes  $\mathcal{A}_{\hat{L},IJ}$  e  $\mathcal{A}_{\hat{R},IJ}$  são definidas na equação (3.36).

O valor absoluto aplicado nas componentes das equações (3.39) e (3.40) é empregado para forçar a positividade dos pesos  $w_{\hat{L},IJ}$  e  $w_{\hat{R},IJ}$  (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; YUAN; SHENG, 2008), quando se utiliza métodos de interpolação de primeira ordem não é necessário forçar a positividade, ja que pela própria construção o método de interpolação mantém positividade, mas isto pode causar problemas de acurácia no método em geral.

### 3.2.1.1 Tratamento do Fluxo nas Faces de Contorno do Método NLFV-PP

Quando a superfície de controle em questão pertence ao contorno exterior  $IJ \in \mathcal{E}^{ext} \cap \Gamma_D$  do domínio  $\Omega$ , más explicitamente ao contorno de Dirichlet, o fluxo pode ser diretamente expresso da equação (3.29), como:

$$\vec{\mathcal{V}}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \vec{\mathcal{V}}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \zeta_{\hat{L},IJ} \quad (3.43)$$

onde

$$\mathcal{A}_{\hat{L},IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \right) \quad (3.44)$$

e

$$\zeta_{\hat{L},IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \xi_{\hat{L},i(IJ)} g_{D,i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} g_{D,j(IJ)} \right) \quad (3.45)$$

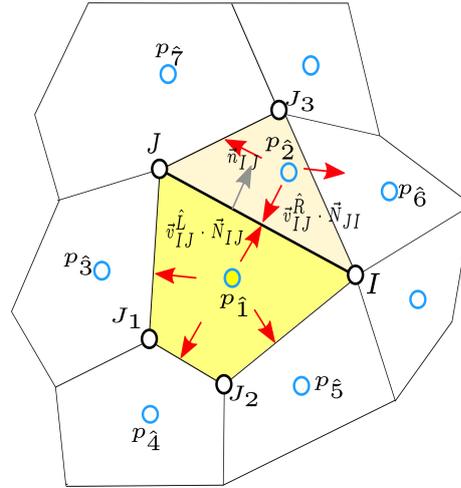
na equação anterior  $g_{D,i(IJ)}$  e  $g_{D,j(IJ)}$  representam as pressões nos vértices que pertence à face em questão e seus valores são diretamente fornecidos pela condição de contorno de Dirichlet.

De outra parte, quando a superfície de controle pertence ao contorno de Neumann, isto é,  $IJ \in \mathcal{E}^{ext} \cap \Gamma_N$ , as pressões nos pontos auxiliares devem ser interpoladas pela estratégia adotada e o fluxo é fornecido pela física do problema

$$\vec{\mathcal{V}}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = g_N \|\vec{IJ}\| \quad (3.46)$$

onde  $g_N$  representa o valor do fluxo fornecido.

Figura 6 – Mostram os fluxos e faces que atuam no momento de escrever o balanço de massa



Fonte – Produzido pelo autor

### 3.2.1.2 Sistema Discreto do Método NLFV-PP

Tendo definido o fluxo em cada superfície de controle do domínio computacional  $\Omega$  estamos na capacidade de montar o sistema de equações não lineares e logo resolver por algum método iterativo. A partir, dos fluxos definidos nas equações (3.41), (3.42) e (3.43) podemos obter a equação discreta de balanço de massa para cada volume de controle  $\hat{L}$

$$\sum_{IJ \in \partial \hat{L}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}}, \quad \forall \hat{L} \in \Omega \quad (3.47)$$

A maneira de mostrar a natureza da matriz global, consideramos dois volumes de controle  $\hat{1}$  e  $\hat{2}$  mostrados na figura 6, podemos desenvolver o balanço de massa dado na equação anterior como segue:

- Volume de controle  $\hat{1}$ :  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \vec{v}_{J_1 J_1} \cdot \vec{N}_{J_1 J_1} + \vec{v}_{J_1 J_2} \cdot \vec{N}_{J_1 J_2} + \vec{v}_{J_2 I} \cdot \vec{N}_{J_2 I} = \bar{Q}_{\hat{1}} V_{\hat{1}}$ .

e

- Volume de controle  $\hat{2}$ :  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} + \vec{v}_{I J_3} \cdot \vec{N}_{I J_3} + \vec{v}_{J_3 J} \cdot \vec{N}_{J_3 J} = \bar{Q}_{\hat{2}} V_{\hat{2}}$ .

Agora representamos em uma matriz, como:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{IJ}^{\hat{1}} + \mathcal{A}_{1,J_1} + \mathcal{A}_{1,J_1 J_2} + \mathcal{A}_{1,J_2 I} & -\mathcal{A}_{2,IJ} & -\mathcal{A}_{3,J_1 J_1} & -\mathcal{A}_{4,J_1 J_2} & -\mathcal{A}_{5,J_2 I} & \dots & \dots \\ -\mathcal{A}_{1,JI} & \mathcal{A}_{2,J_1} + \mathcal{A}_{2,J_1 J_3} + \mathcal{A}_{2,J_3 J} & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{A}_{6,IJ_3} & -\mathcal{A}_{7,J_3 J} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\hat{1}} \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{\hat{1}} V_{\hat{1}} \\ \bar{Q}_{\hat{2}} V_{\hat{2}} \\ \bar{Q}_3 V_3 \\ \bar{Q}_4 V_4 \\ \bar{Q}_5 V_5 \\ \bar{Q}_6 V_6 \\ \bar{Q}_7 V_7 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Na matriz acima observamos que os elementos são positivos ao longo da diagonal principal e são não positivos ao longo da diagonal secundária. Essa característica pode satisfazer várias propriedades de uma “M-matrix” (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; YUAN; SHENG, 2008), a forma compacta da matriz é representada como:

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}(p)\underline{\underline{\mathcal{P}}} = \underline{\underline{\mathcal{B}}} \quad (3.49)$$

Na literatura a matriz  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  é usualmente chamada de matriz de transmissibilidade ou matriz discreta, já que cada elemento da matriz contém informação tanto física quanto geométrica, o vetor do campo pressão é dado por  $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$  e o vetor  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$  cujos elementos são representados tanto pelo termo de fonte/sumidouro, quanto pela informação das condições de contorno. Esta matriz de transmissibilidade é obtida a partir da montagem de matrizes locais associadas a cada face interior do domínio  $\mathcal{E}^{int}$ , assim temos:

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}(p)_{IJ} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{L,IJ}(p) & -\mathcal{A}_{R,IJ}(p) \\ -\mathcal{A}_{L,IJ}(p) & \mathcal{A}_{R,IJ}(p) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Quando a face em questão pertence ao contorno do domínio  $\mathcal{E}^{ext}$ , a matriz local é de dimensão 1x1, já que somente recebe a própria contribuição do elemento do contorno, isto é;

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}(p)_{IJ} = \mathcal{A}_{L,IJ}(p) \quad (3.51)$$

Diz-se que uma matriz  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  é monótona para todo vetor  $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$  quando  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}\underline{\underline{\mathcal{P}}} \geq 0$ , implica em  $\underline{\underline{\mathcal{P}}} \geq 0$ . Na solução de problemas elípticos, os métodos numéricos que resultam em matrizes monótonas são comumente chamados de métodos monótonos. No entanto, com frequência, o mesmo termo é usado para denotar métodos numéricos utilizados na discretização de leis de conservação descritas por equações hiperbólicas, com sentido um pouco diferente (HIRSCH, 1990; COLELLA, 2011). No presente contexto, seguindo a literatura, quando nos referimos aos métodos para a solução da equação elíptica de pressão, utilizaremos a expressão “método monótono” para esquemas que resultam em matrizes monótonas, sem que, necessariamente, ocorra a satisfação de um princípio do máximo discreto (DMP) (VIDOVIĆ, 2011).

Antes de demonstrar o teorema que garante a positividade do nosso método vamos introduzir algumas definições preliminares

**Definição 5.** (WOOD; O’NEILL, 2004). Uma matriz  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  de dimensão  $n \times n$  com elementos  $\mathcal{A}_{ij}$  é dito uma matriz (M-matrix) se satisfaz as seguintes propriedades:

- $\mathcal{A}_{ii} > 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ .
- $\mathcal{A}_{ij} \leq 0$ , para  $i \neq j$  e  $i, j = 1, \dots, n$ .
- $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  é não singular.
- $\underline{\underline{\mathcal{A}}}^{-1} \geq 0$ .

A próxima definição caracteriza uma matriz monótona

**Definição 6.** (PRICE, 1968). Seja  $\tilde{\mathcal{A}}$  uma matriz de dimensão  $n \times n$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$  é matriz monótona se para qualquer vetor  $\tilde{\mathcal{P}}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{P}} \geq 0$ , implica que  $\tilde{\mathcal{P}} \geq 0$ .

A matriz global  $\tilde{\mathcal{A}}$  dada na equação (3.49) possui as seguintes propriedades (LIPNIKOV, 2009; GAO; WU, 2015; SHENG; YUAN, 2015):

1. Todas as entradas da diagonal da matriz são positivas, i.e.  $\mathcal{A}_{ii} > 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .
2. Todas as entradas fora da diagonal principal da matriz são positivos, i.e.  $\mathcal{A}_{ij} \leq 0$ ,  $i \neq j$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .
3. A soma de cada coluna da matriz global é não negativa e existe ao menos uma coluna com soma positiva, i.e.  $\sum_i \mathcal{A}_{ij} \geq 0$  e existe ao menos  $j$  tal que  $\sum_i \mathcal{A}_{ij} > 0$ , para cada  $j = 1, \dots, n$ .

No presente trabalho foram verificadas todas essas propriedades cuidadosamente. As propriedades anteriores implicam que a matriz global  $\tilde{\mathcal{A}}$  é diagonalmente dominante fraco, isto é  $\mathcal{A}_{ii} \geq \sum_{i \neq j} |\mathcal{A}_{ij}|$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 1.** Seja  $\tilde{\mathcal{A}}$  uma matriz diagonal dominante, isso implica que é *M-matrix*.

O sistema não linear da equação (3.49) pode ser resolvido por diferentes métodos iterativos. Seguindo os trabalhos de Le Potier (2005), Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Yuan e Sheng (2008), Sheng e Yuan (2011) e Gao e Wu (2013), utilizamos o método de iteração de Picard, pois este garante, que soluções inicialmente positivas sejam mantidas positivas durante o processo iterativo. Assim, inicialmente escolhemos um valor pequeno ( $\epsilon_{tol} > 0$ ) e um vetor inicial com entradas positivas  $\tilde{\mathcal{P}}^0$  e repeti até o método convergir.

---

**Algoritmo 1:** Geração de Solução do Sistema Não Linear

---

- 1 Calcule os coeficientes dados nas equações (3.30) e (3.32).
  - 2 Escolha um vetor inicial  $\tilde{\mathcal{P}}^0 \geq 0$  e uma tolerância muito pequena *tol*.
  - 3 Montagem da matriz global  $\tilde{\mathcal{A}}^0$  a partir das matrizes locais  $\tilde{\mathcal{A}}_{IJ}$  dada na equação (3.44).
  - 4 Calcule o vetor de termo fonte  $\tilde{\mathcal{B}}^0$ .
  - 5 **início**
  - 6     Resolve o sistema:  $\tilde{\mathcal{A}}^k \tilde{\mathcal{P}}^{k+1} = \tilde{\mathcal{B}}^k$ .
  - 7     Montagem da matriz global  $\tilde{\mathcal{A}}^{k+1}$  a partir das matrizes locais  $\tilde{\mathcal{A}}_{IJ}^{k+1}$  dada na equação (3.44).
  - 8     Calcule o vetor de termo fonte  $\tilde{\mathcal{B}}^{k+1}$ .
  - 9     Pare quando:  $\left\| \tilde{\mathcal{A}}(p^{k+1}) \tilde{\mathcal{P}}^{k+1} - \tilde{\mathcal{B}}(p^{k+1}) \right\| \leq \epsilon_{tol} \left\| \tilde{\mathcal{A}}(p^0) \tilde{\mathcal{P}}^0 - \tilde{\mathcal{B}}(p^0) \right\|$ .
  - 10    Caso contrário retorne a 6, com  $k = k + 1$ .
  - 11 **fin**
-

Quando utilizamos malhas distorcidas ou meios altamente anisotrópicos o método iterativo de Picard pode ter dificuldade de convergir, nesse caso Lipnikov, Svyatskiy e Vassilevski (2010) recomenda usar uma estratégia de relaxação, o qual ajuda a melhorar a robustez do método. Também é possível implementar métodos que ajudem acelerar a convergência do método de Picard. Este acelerador de convergência é baseado no método Aitkin generalizado para uma sequência de vetores e no método de extrapolação polinomial, qual inclui uma extrapolação polinomial mínima (MPE) ou uma extrapolação que reduz o intervalo (RRE). É sabido que estes métodos não garantem satisfazer o princípio de máximo de discreto (DMP).

Na literatura existem outros métodos como Newton-Raphson, os quais podem diminuir o número de iterações consideravelmente já que possui uma convergência quadrática, mas requer uma derivada analítica para discretização da matriz. Aproximar estas derivadas tem levado a vários métodos tipo Newton com convergência semi-quadrático. Um método bastante robusto foi o método Newton-Krylov que evita calcular derivadas analíticas e oferece uma convergência rápida, sempre que se utilize algum preconditionador. Embora este método não garanta soluções positivas em cada iteração, forçar a positividade com algumas restrições podem deteriorar as propriedades de convergência (LIPNIKOV, 2009). No futuro Próximo estes métodos serão implementados de maneira adequada em todos nossos métodos não lineares e comparar a eficiência computacional.

**Teorema 2.** (WU; GAO, 2014; SHENG; YUAN, 2015) *Seja o termo fonte  $Q$  não negativo, considerando as condições de Dirichlet não negativas e o fluxo sobre contorno de Neumann não positivo, pressão inicial  $\underline{p}^0$  não negativa, além disso, temos que os coeficientes na equação (3.41) e (3.42) são não-negativos. Então temos que para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \geq 1$ ,  $\underline{p}^k \geq 0$ .*

*Demonstração.* Primeiramente provamos que a matriz  $\underline{\underline{A}}$  é monótona para qualquer vetor  $\underline{p}$  não negativo. Em efeito, quando a matriz  $\underline{\underline{A}}$  é diagonal dominante temos que a matriz transposta  $\underline{\underline{A}}^\top$ , também é diagonal dominante o que implica que é uma M-matrix pelo teorema 1. que todas as entradas  $\left(\underline{\underline{A}}^\top\right)^{-1}$  são não negativos. A operação transposta e a inversa comutam convenientemente  $\left(\underline{\underline{A}}^\top\right)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^\top$ , logo concluímos que as entradas da matriz  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  são todas positivos, logo a matriz  $\underline{\underline{A}}$  é monótona, para qualquer  $\underline{p} \geq 0$ . Pela hipótese temos que:  $\underline{p}^0 \geq 0$ , assumimos uma hipótese auxiliar  $\underline{p}^{k-1} \geq 0$  para  $k > 0$ , logo temos que  $\underline{\underline{A}}^{k-1}$  é uma matriz monótona, isso implica que  $\left(\underline{\underline{A}}^{k-1}\right)^{-1} \geq 0$ . Note pela hipótese que  $\underline{b} \geq 0$ , isto segue que a solução de  $\underline{p}^k$  de  $\underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{p}^k = \underline{b}$  é um vetor não negativo, ou seja,  $\underline{p}^k \geq 0$ .  $\square$

A fim de tornar nosso método totalmente centrado na célula precisamos interpolar as variáveis auxiliares localizadas nos vértices do domínio computacional, na literatura existem vários métodos de interpolação, por exemplo, os métodos não lineares clássicos utilizam métodos de interpolação de primeira ordem como ponderados pela distancia inversa (IW), estes métodos por serem de ordem baixa garantem a positividade dos métodos, embora perde acurácia em

malhas distorcidas ou meios altamente anisotrópicos (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007). Nesse sentido, Yuan e Sheng (2008) utiliza um método de interpolação de segunda ordem proposto num método linear dos volumes finitos, embora quando o método não linear viola a positividade usa um método de interpolação de baixa ordem. Gao e Wu (2015) propõe outra estratégia de interpolação baseada na aproximação de mínimos quadrados. Segundo os testes esta estratégia é bastante robusta que o método de interpolação proposto pelo mesmo autor em Gao e Wu (2011).

### 3.2.1.3 Estratégia de Interpolação que Preserva Linearidade (LPEW)

Na presente seção descrevemos brevemente um método de interpolação formulado por Gao e Wu (2011) e utilizado arduamente pelos autores Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014), Contreras, Lyra, Souza e Carvalho (2016). Como mencionado na seção anterior, aquelas variáveis auxiliares situadas nos vértices pertencentes à  $\mathcal{E}^{int}$  precisam ser interpolados em função das variáveis primárias centradas nos volumes de controle, isto é:

$$p_I = \sum_{i=1}^{n_I} \omega_i p_{\hat{i}} \quad (3.52)$$

onde  $\omega_i$  são os pesos atribuídos a cada volume de controle  $\hat{i}$  na vizinhança do vértice  $I$  e  $n_I$  número de volumes de controle na vizinhança do vértice  $I$ .

A estratégia de interpolação adotada escreve a pressão dos vértices como combinação de outras pressões centradas na sua vizinhança, onde os pesos de interpolação são obtidos de maneira explícita. Uma versão ligeiramente modificada pode ser vista em (WU; GAO, 2014). Estes pesos são chamadas de “explícitos” para indicar que são calculados sem a necessidade de resolver um sistema local de equações, como em outros métodos MPFA clássicos (AAVATSMARK, 2002). O cálculo dos pesos explícitos na equação (3.52) é formulado utilizando a equação da continuidade através das regiões auxiliares construídas na vizinhança de cada vértice em questão. Na 7, apresentamos a região de iteração e alguns parâmetros físicos para a interpolação LPEW adotada neste trabalho. Seguindo Gao e Wu (2011), os pesos explícitos podem ser calculados como:

$$\omega_i = \frac{\bar{\omega}_i}{\sum_{i=1}^{n_I} \bar{\omega}_i} \quad (3.53)$$

Na equação anterior, os coeficientes  $\bar{\omega}_i$  são dados por:

$$\bar{\omega}_i = K_{i,1}^{(n)} \eta_{i,1} \zeta(\hat{i}) + K_{i,2}^{(n)} \eta_{i,2} \zeta(\hat{i}) \quad \text{e} \quad \zeta(\hat{i}) = \lambda_i \kappa_i + \lambda_{i-1} \kappa_{i-1} \quad (3.54)$$

onde  $\lambda_{\hat{i}}$  é a mobilidade total em cada volume de controle  $\hat{i}$ ,  $\eta_{\hat{i},1}$ ,  $\eta_{\hat{i},2}$ ,  $K_{\hat{i},1}^{(n)}$  e  $K_{\hat{i},1}^{(t)}$  são dadas por:

$$\eta_{\hat{i},1} = \frac{\|\vec{IM}_{\hat{i}}\|}{h_{JJ_{\hat{i}}}^{\hat{i}}} \quad \text{e} \quad \eta_{\hat{i},2} = \frac{\|\vec{IM}_{\hat{i}+1}\|}{h_{JJ_{\hat{i}+1}}^{\hat{i}}} \quad (3.55)$$

onde  $\bar{M}$  é ponto médio da face em questão, e

$$K_{\hat{i},k}^{(t)} = \left[ \vec{N}_{\bar{M}\alpha}^{\top} \underline{K}_{\hat{i}} \vec{IM}_{\alpha} \right] / \left\| \vec{IM}_{\alpha} \right\|^2 \quad \text{e} \quad K_{\hat{i},k}^{(n)} = \left[ \vec{N}_{\bar{M}\alpha}^{\top} \underline{K}_{\hat{i}} \vec{N}_{\bar{M}\alpha} \right] / \left\| \vec{IM}_{\alpha} \right\|^2 \quad (3.56)$$

com,  $\alpha = \hat{i} + k - 1$ ,  $k = 1, 2$ . Além disso:

$$\kappa_{\hat{i}} = \frac{\bar{K}_{\hat{i}}^{(n)} \cot(\vartheta_{\hat{i},2}) - \bar{K}_{\hat{i}}^{(t)}}{K_{\hat{i}-1,2}^{(n)} \cot(\theta_{\hat{i}-1,2}) + K_{\hat{i},1}^{(n)} \cot(\theta_{\hat{i},1}) - K_{\hat{i},2}^{(t)} + K_{\hat{i},1}^{(t)}} \quad (3.57)$$

e

$$\kappa_{\hat{i}-1} = \frac{\bar{K}_{\hat{i}-1}^{(n)} \cot(\vartheta_{\hat{i}-1,1}) - \bar{K}_{\hat{i}-1}^{(t)}}{K_{\hat{i}-1,2}^{(n)} \cot(\theta_{\hat{i}-1,2}) + K_{\hat{i},1}^{(n)} \cot(\theta_{\hat{i},1}) - K_{\hat{i},2}^{(t)} + K_{\hat{i},1}^{(t)}} \quad (3.58)$$

onde

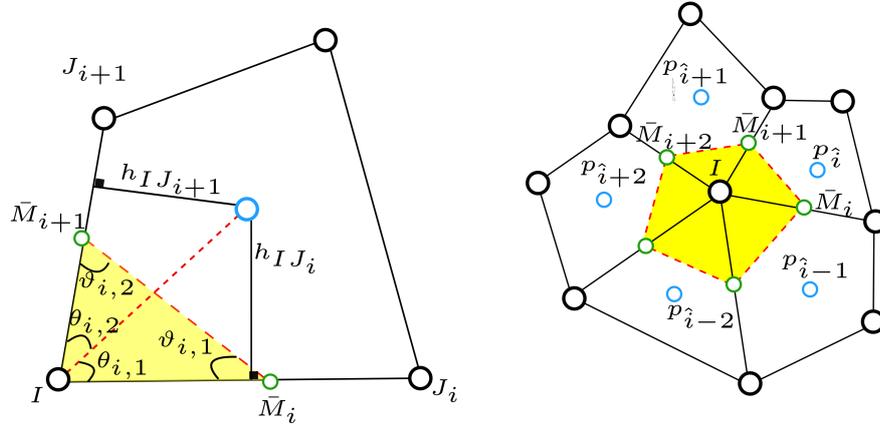
$$\bar{K}_{\hat{i}}^{(t)} = \left[ \vec{N}_{\bar{M}_i \bar{M}_{i+1}}^{\top} \underline{K}_{\hat{i}} \vec{M}_i \bar{M}_{i+1} \right] / \left\| \vec{M}_i \bar{M}_{i+1} \right\|^2 \quad (3.59)$$

$$\bar{K}_{\hat{i},k}^{(n)} = \left[ \vec{N}_{\bar{M}_i \bar{M}_{i+1}}^{\top} \underline{K}_{\hat{i}} \vec{N}_{\bar{M}_i \bar{M}_{i+1}} \right] / \left\| \vec{M}_i \bar{M}_{i+1} \right\|^2 \quad (3.60)$$

Os coeficientes físico-geométricos  $\kappa_{\hat{i}}$ ,  $\bar{K}_{\hat{i}}^{(n)}$  e  $\bar{K}_{\hat{i}}^{(t)}$  são calculados durante uma etapa de pré-processamento. Mais detalhes sobre este método de interpolação podem ser encontrados em Gao e Wu (2011) e (QUEIROZ, 2014), veja a figura 7 para identificar algumas contantes geométricas.

Apesar dos pesos dados na equação (3.53) poderem admitir valores negativos ( $\omega_{\hat{i}} < 0$ ), isto não causa problemas de monotonicidade no método não linear proposto, diferentemente de outras estratégica não-lineares encontradas na literatura. A aplicação do método LPEW em métodos não lineares clássicos podem causar problemas de monotonicidade (QUEIROZ, 2014), quando isto acontece, sugere-se que se utilize métodos de interpolação de baixa de ordem que preservem a positividade, por exemplo, a interpolação ponderada pelo inverso da distância (IDW – Inverse Distance Weighting) (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; QUEIROZ, 2014). Como ja dito em seções anteriores, quando tratamos reservatórios altamente anisotrópico e/ou discretizado por malhas severamente distorcidas os pesos de interpolação podem ter valores negativos.

Figura 7 – Região de iteração para interpolação LP



Fonte – (CONTRERAS, 2016)

Quando o vértice em questão pertence à  $\mathcal{E}^{ext} \cap \Gamma_N$ , veja figura 8, a interpolação é similar a (3.53)

$$p_I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_I} \varpi_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n_I} \varpi_i p_i - \sum_{t=1, n_I} [1 + \Theta_t] \|\overrightarrow{IM_t}\| g_{IM_t} \right\} \quad (3.61)$$

onde o parâmetro físico-geométrico  $\Theta_t$  é definido na equação

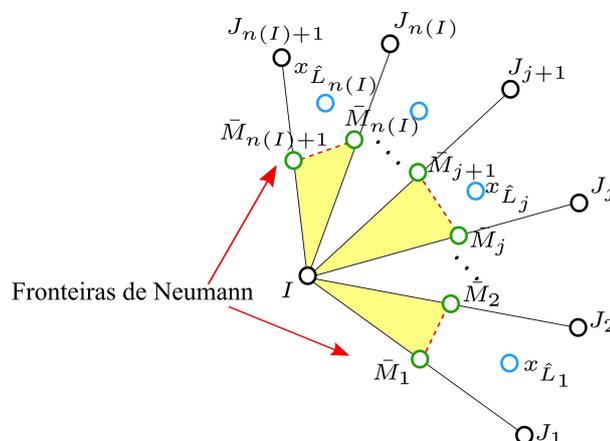
$$\Theta_t = \begin{cases} \frac{\overline{K}_{i-1}^{(n)} \cot(\vartheta_{1,2}) - \overline{K}_i^{(t)}}{K_{i,1}^{(n)} \cot(\theta_{1,1}) + K_{i,1}^{(n)}}, & t = 1 \\ \frac{\overline{K}_{\hat{n}_I}^{(n)} \cot(\vartheta_{\hat{n}_I,1}) - \overline{K}_{\hat{n}_I}^{(t)}}{K_{\hat{n}_I,1}^{(n)} \cot(\theta_{\hat{n}_I,2}) + K_{\hat{n}_I,1}^{(n)}}, & t = n_I + 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

Como consequência do método não linear proposto, surge um método dos volumes finitos linear não ortodoxo onde a aproximação do fluxo envolve múltiplos pontos centrados nos volumes de controle, a construção deste método consiste em utilizar os fluxos laterais definidos nas equações (3.29) e (3.31), e logo expressa como uma combinação convexa destes, as variáveis auxiliares são interpoladas utilizando o método LPEW descrito anteriormente, este método em casos particulares pode recair no método TPFA.

### 3.2.2 Método dos Volumes Finitos Não Ortodoxo tipo MPFA

Nesta seção, combinamos alguns procedimentos numéricos a fim de se obter um método capaz de produzir soluções aproximadas robustas para fluxos com altas relações de mobilidade considerando tensores de permeabilidade anisotrópicos e heterogêneos, possivelmente descontínuos, mesmo para malhas poligonais distorcidas e não estruturadas. Neste contexto, a equação de pressão é discretizada por um método linear não-ortodoxo centrado nos volumes de controle

Figura 8 – Região de iteração para interpolação do nó na fronteira de Neumann



Fonte – Produzido pelo autor

tipo MPFA com um estêncil tipo *Half – diamond* (MPFA-HD). Este método baseou-se no método NLFV-PP e outros métodos não lineares clássicos (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; YUAN; SHENG, 2008). Em contraste com o método MPFA-O Aavatsmark, Barkve, Bøe e Mannseth (1998) ou MPFA-FPS (EDWARDS; ZHENG, 2008), no método MPFA-HD, o fluxo em cada face celular é explicitamente definido em função das pressões nos vértices (variáveis auxiliares) não necessariamente pertencentes a mesma face compartilhada pelos volumes de controle adjacentes. Como o método é centrado nos volumes de controle, as incógnitas auxiliares são expressas como combinações lineares ponderadas pelas incógnitas vizinhas centradas nos volumes de controle, de modo a reduzir o método para uma formulação completamente centrada nos volumes de controle. No método proposto por Gao e Wu (2011), os pesos de interpolação não dependem nem da descontinuidade nem topologia da malha e podem ser usados mesmo para problemas com tensores completos (*full tensor*). O que estamos propondo (MPFA-HD) satisfaz as seguintes propriedades numéricas:

- Possui um estêncil local.
- Satisfaz o critério de preservar linearidade.
- Permite tensores com razão de anisotropia elevada.
- Lida com malhas poligonais e severamente distorcidas.
- Os pesos são explicitamente calculados.
- Possui taxas de convergência de segunda ordem para o campo de pressões e primeira ordem para a fluxo.

De maneira similar ao método NLFV-PP, o fluxo único sobre a face  $IJ \in \mathcal{E}^{int}$  pode ser expressa como a combinação convexa dos fluxos laterais definidos nas equações (3.29) e (3.31)

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = w_{\hat{R},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - w_{\hat{L},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.63)$$

Note que a equação anterior satisfaz a equação da conservação local definida em (3.5). A diferença dos métodos não lineares é que neste método linear os pesos  $w_{\hat{L},IJ}$  e  $w_{\hat{R},IJ}$  são definidos tendo influência somente de parâmetros físicos-geométricos, sem envolver as variáveis auxiliares e respeitando a equação de restrição dada em (3.34), assim:

$$w_{\hat{L},IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)}}{h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)} + h_{\hat{L},IJ} K_{\hat{R},IJ}^{(n)}} \quad \text{e} \quad w_{\hat{R},IJ} = 1 - w_{\hat{L},IJ} \quad (3.64)$$

onde  $h_{\hat{L},IJ}$  e  $h_{\hat{R},IJ}$  representam as distancias ortogonais à face  $IJ$  projetadas desde os centroides dos volumes de controle  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$ , respectivamente.

As projeções normais dos tensores de permeabilidade  $\underline{K}_{\hat{L}}$  (resp.  $\underline{K}_{\hat{R}}$ ) sobre a face  $IJ$  são denotados por  $K_{\hat{L},IJ}^{(n)}$  (resp.  $K_{\hat{R},IJ}^{(n)}$ ) e dadas na seguinte equação:

$$K_{\hat{L},IJ}^{(n)} = \vec{n}_{IJ}^\top \underline{K}_{\hat{L}} \vec{n}_{IJ} \quad \text{e} \quad K_{\hat{R},IJ}^{(n)} = \vec{n}_{JI}^\top \underline{K}_{\hat{R}} \vec{n}_{JI} \quad (3.65)$$

onde  $\vec{n}_{IJ}$  é o vetor normal unitário a face  $IJ$ .

A seguinte igualdade  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = -\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} = \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}$  foi proposto por Gao e Wu (2011) no método MPFA-D para garantir a conservação de massa, nesse caso os pesos se reduzem a  $w_{\hat{L},IJ} = w_{\hat{R},IJ} = 0.5$ , ou seja teríamos o seguinte fluxo único na face  $IJ$  expressada como:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{1}{2} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - \frac{1}{2} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.66)$$

Percebemos que a ponderação utilizada na equação anterior não toma em conta nenhum parâmetro físico-geométrico, sendo a formulação menos robusta, nos testes numéricos vamos mostrar o potencial da nossa formulação com respeito a outros métodos clássicos. Lembrando que os pesos dados na equação (3.64) somente se reduzem a 0.5 quando consideramos meio homogêneo, isotrópico e malha ortogonal.

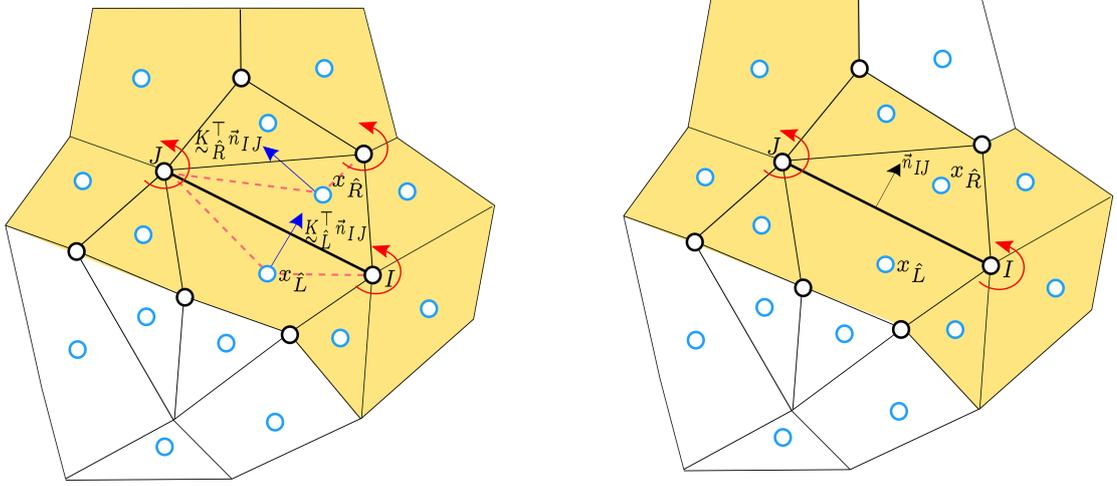
Substituindo as equações (3.29) e (3.31) em (3.63) e manipulando algebricamente, temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R},IJ} p_{\hat{R}} + \sum_{\gamma=i,j} \left( \mathcal{D}_{\hat{R},\gamma(IJ)} p_{\hat{R},\gamma(IJ)} - \mathcal{D}_{\hat{L},\gamma(IJ)} p_{\hat{L},\gamma(IJ)} \right) \right) \quad (3.67)$$

os novos coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{D}$  são expressos como segue:

$$\mathcal{A}_{\hat{L},IJ} = w_{\hat{L},IJ} \left( \xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \right), \quad \mathcal{A}_{\hat{R},IJ} = w_{\hat{R},IJ} \left( \xi_{\hat{R},i(IJ)} + \xi_{\hat{R},j(IJ)} \right), \quad (3.68)$$

Figura 9 – Estêncil para o calculo do fluxo utilizando os pontos interpolação centrados nos vértices: estêncil do método MPFA-HD (esquerda) e estêncil usado pelo método MPFA-D (direita)



Fonte – Produzido pelo autor

$$\mathcal{D}_{\hat{L},\gamma(IJ)} = w_{\hat{L},IJ} \xi_{\hat{L},\gamma(IJ)} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{\hat{R},\gamma(IJ)} = w_{\hat{R},IJ} \xi_{\hat{R},\gamma(IJ)} \quad \text{para} \quad \gamma = i, j. \quad (3.69)$$

onde os parâmetros  $\xi_{\hat{L},\gamma(IJ)}$  e  $\xi_{\hat{R},\gamma(IJ)}$  com  $\gamma = i, j$  são dados nas equações (3.30) e (3.32).

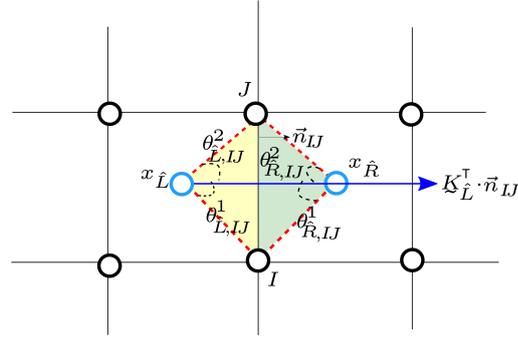
As pressões nos vértices  $p_{\hat{L},i(IJ)}$ ,  $p_{\hat{L},j(IJ)}$ ,  $p_{\hat{R},i(IJ)}$  e  $p_{\hat{R},j(IJ)}$  são interpoladas utilizando a estratégia de interpolação LPEW descrito na seção anterior.

Na figura 9, notamos por exemplo, que o estêncil de interpolação para obter o fluxo na superfície de controle em questão é ainda maior do que o estêncil de outros métodos MPFA clássicos, como o MPFA-O (AAVATSMARK, 2002) ou MPFA-D (GAO; WU, 2011; CONTRERAS, 2016). A construção dos fluxos laterais é feita a partir de uma região que é similar a metade de um diamante “Half Diamond” em 3-D (vide figura 4a), nesse sentido o método é nomeado MPFA-HD.

Em casos particulares, por exemplo, quando o meio é homogêneo isotrópico e a malha é ortogonal, o método MPFA-HD torna-se um método clássico chamado aproximação de fluxo por dois pontos (TPFA). Para verificar esta observação consideramos a equação (3.63) sobre uma malha ortogonal e meio homogêneo é isotrópico, a partir dos entes geométricos definidos na figura 10 e de assumirmos que  $\theta_{\hat{L},IJ}^2 = \theta_{\hat{R},IJ}^1 = \pi/4$  então, pela equação (3.14), temos:

$$\alpha_{\hat{L},i(IJ)} = \alpha_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\|\vec{n}_{IJ}\|}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \alpha_{\hat{R},i(IJ)} = \alpha_{\hat{R},j(IJ)} = \frac{\|\vec{n}_{JI}\|}{\sqrt{2}} \quad (3.70)$$

Figura 10 – Entes geométricos sobre uma malha K-ortogonal



Fonte – Produzido pelo autor

o que implica ter a seguinte expressão reduzida para os parâmetros

$$\xi_{\hat{L},i(IJ)} = \xi_{\hat{L},j(IJ)} = \frac{\|\vec{n}_{IJ}\|}{\sqrt{2}\|\vec{x}_{\hat{L}}\|} \quad \text{e} \quad \xi_{\hat{R},j(IJ)} = \xi_{\hat{R},i(IJ)} \frac{\|\vec{n}_{IJ}\|}{\sqrt{2}\|\vec{x}_{\hat{R}}\|} \quad (3.71)$$

onde  $\|\vec{n}_{IJ}\| = \|\vec{n}_{JI}\| = 1$  já que o vetor  $\vec{n}_{IJ}$  é normal unitário a face  $IJ$ . E os coeficientes dados na equação (3.71) são substituídos na expressão do fluxo dado na equação (3.67), assim temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \sqrt{2}\lambda_{IJ}\|\vec{IJ}\| \left\{ \frac{w_{\hat{R},IJ}}{\|\vec{x}_{\hat{L}}\|} p_{\hat{L}} - \frac{w_{\hat{L},IJ}}{\|\vec{x}_{\hat{R}}\|} p_{\hat{R}} + \left( \frac{w_{\hat{L},IJ}}{2\|\vec{x}_{\hat{R}}\|} - \frac{w_{\hat{R},IJ}}{2\|\vec{x}_{\hat{L}}\|} \right) (p_I + p_J) \right\} \quad (3.72)$$

Na equação (3.64) é fácil verificar que os pesos possuem o mesmo valor, ou seja,  $w_{\hat{L},IJ} = w_{\hat{R},IJ} = 0.5$ , e também temos a seguinte igualdade  $\|\vec{x}_{\hat{R}}\| = \|\vec{x}_{\hat{L}}\|$ , então após manipulações algébricas obtemos a seguinte expressão do fluxo:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \lambda_{IJ}\|\vec{IJ}\| \frac{\sqrt{2}w_{\hat{R},IJ}}{\|\vec{x}_{\hat{L}}\|} \{p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}\} \quad (3.73)$$

a expressão do fluxo anterior é descrito como função somente das pressões  $p_{\hat{L}}$  e  $p_{\hat{R}}$ , tornando-se um método clássico de aproximação dos fluxos por dois pontos (TPFA).

### 3.2.2.1 Tratamento do Fluxo nas Faces de Contorno do Método MPFA-HD

Quando a face em questão pertence ao contorno do domínio  $\partial\Omega$ , analisamos dois casos. Primeiro quando aquela face  $IJ \in \mathcal{E}^{ext} \cap \mathcal{E}_{\hat{L}} \subset \Gamma_D$ , neste caso a variável pressão sobre os vértices são conhecidas, portanto não precisam ser interpoladas. Desde a equação (3.29), temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \lambda_{IJ}\|\vec{IJ}\| \left( \xi_{\hat{L},i(IJ)} p_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} p_{\hat{L},j(IJ)} \right) \quad (3.74)$$



onde  $g_N$  representa o valor prescrito na fronteira de Neumann. Embora as pressões nos vértices desta face precisem ser interpolados utilizando o método de interpolação LPEW dada na equação (3.61).

### 3.2.2.2 Sistema Discreto do Método MPFA-HD

Utilizando as equações (3.67), (3.74) e (3.78) sobre cada superfície de controle  $IJ$  obtemos uma equação onde as incógnitas são pressões totalmente centradas nos volumes de controle

$$\sum_{IJ \in \mathcal{E}_L} \vec{\nu}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_L V_L, \quad \forall \hat{L} \in \mathcal{M} \quad (3.79)$$

A equação anterior escrita para cada volume de controle  $\hat{L}$ , gera um sistema de equações, escrita na forma compacta como:

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}} \underline{\underline{\mathcal{P}}} = \underline{\underline{\mathcal{B}}} \quad (3.80)$$

onde  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  é matriz de transmissibilidade de dimensão  $n \times n$ ,  $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$  é o vetor de pressões com dimensão  $n \times 1$  e  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$  é o vetor de dimensão  $n \times 1$  cujas entradas são obtidos a partir das condições de contorno e termos de fonte/sumidouro.

Na equação (3.80) a montagem da matriz global é feita a partir de matrizes locais referentes as faces. Consideramos uma face interior  $IJ \in \mathcal{E}^{int}$ , para o qual representamos a matriz local

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{IJ} = [\tau_{ij}]_{2 \times n_\ell}, \quad i = \hat{L}, \hat{R} \quad \text{e} \quad j = \hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_{n_\ell} \quad (3.81)$$

onde  $n_\ell \leq n$  é número de volumes de controle presente no estêncil correspondente a face  $IJ$ , os volumes de controle  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_{n_\ell}$  que conformam a vizinhança dos volumes de controle  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$  (incluindo eles mesmos) sem repetição são obtidos a partir da estratégia de interpolação dada na equação (3.52).

Os componentes do vetor  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}^G$  são calculados a partir das contribuições dos condições de contorno e termos de fonte e/ou sumidouro, assim:

$$\mathcal{B}_i = \bar{Q}_i V_i - \left( \sum_{IJ \in \mathcal{E}^{ext} \cap \mathcal{E}_i} \tau_{ii} + g_N \|\vec{IJ}\| \right) \quad (3.82)$$

Idealmente, o sistema descrito na equação (3.80) deveria ser monótono e satisfazer o princípio de máximo discreto, isto para assegurar que as soluções sejam de livre de oscilações

espúrias, mas pela construção da estratégia de interpolação os pesos de interpolação não preservam positividade, portanto o nosso método linear MPFA-HD pode violar o princípio do máximo discreto. Os autores (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV, 2007; YUAN; SHENG, 2008) fundamentam que qualquer método linear é propenso a produzir oscilações espúrias.

### 3.2.3 Método dos Volumes Finitos Não Linear que Satisfaz o Princípio do Máximo Discreto (NLFV-DMP)

O método que apresentamos nesta seção foi concebido a partir dos métodos propostos por Sheng e Yuan (2011) e Gao e Wu (2013), respectivamente. Este método satisfaz as seguintes propriedades numéricas:

- É localmente conservativo.
- Satisfaz o princípio de máximo discreto.
- Possui um estêncil local.
- Permite trabalhar com tensores de permeabilidade anisotrópicos.
- Possui taxas de convergência de segunda ordem para soluções suaves e primeira ordem para o fluxo.
- Preserva linearidade.

Uma das características relevantes deste método frente a outros métodos clássicos é a utilização de uma técnica de interpolação que é bastante robusta e faz com que o método possua estêncil local. Os pontos de interpolação são introduzidos em cada face do volume de controle, e na literatura são conhecidos como os pontos harmônicos (AGÉLAS, 2009; GAO; WU, 2013). O uso dos pontos harmônicos não somente simplifica o processo de interpolação, mas também preserva a positividade de este. Por exemplo, o estêncil em malhas triangulares é de 4 *pontos*, em uma malha não estruturada quadrilateral o estêncil é de 5 *pontos*.

A partir das equações (3.12) até (3.32), os pontos de interpolação são substituídos pelos pontos harmônicos, a estratégia de interpolação sobre estes pontos fornece pesos que preservam positividade, essa condição de positividade é vantajosa no presente método, já que é uma das condições para satisfazer o princípio do máximo discreto.

A partir dos fluxos laterais dados nas equações (3.29) e (3.31) sobre uma face interior  $IJ \in \mathcal{E}^{int}$ , podemos definir o fluxo único como uma combinação linear dos fluxos laterais, assim:

$$\vec{\mathcal{V}}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \Upsilon_{\hat{L},IJ} \vec{\mathcal{V}}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - \Upsilon_{\hat{R},IJ} \vec{\mathcal{V}}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \quad (3.83)$$

onde os parâmetros não lineares  $\Upsilon_{\hat{L},IJ}$  e  $\Upsilon_{\hat{R},IJ}$  são definidos como:

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \frac{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}|}{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| + |\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}|} \quad \text{e} \quad \Upsilon_{\hat{R},IJ} = 1 - \Upsilon_{\hat{L},IJ} \quad (3.84)$$

As equações acima são definidas quando  $|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| + |\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}| \neq 0$ , caso contrário  $\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \Upsilon_{\hat{R},IJ} = 0.5$ , quando acontece este último, caso pode acontecer que  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = 0$ , este caso patológico será estudado nas próximas equações.

Quando a face em questão pertence ao contorno do domínio ( $IJ \in \mathcal{E}^{ext}$ ) o fluxo único pode ser escrito como:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.85)$$

Substituindo os pesos dados na equação (3.84) em (3.83), temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}|}{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| + |\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}|} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - \frac{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}|}{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| + |\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}|} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.86)$$

Para derivar a expressão estendida do fluxo único analisamos dois casos, este tipo de análise foi adaptado de Sheng e Yuan (2011).

Para começar, assumirmos que  $(\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ})(\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}) \leq 0$ , o que implica  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \leq 0$  e  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \geq 0$  ou  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \geq 0$  e  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \leq 0$ , o que é equivalente a  $|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = -|\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}$ . Logo substituindo na equação anterior,obtemos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{2|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}|}{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| + |\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}|} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.87)$$

e

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{2|\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}|}{|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| + |\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}|} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.88)$$

Os fluxos laterais dados nas equações (3.29) e (3.31) são substituídos nas equações anteriores, logo temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = 2\lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| \Upsilon_{\hat{L},IJ} \sum_{\gamma=i,j} \xi_{\hat{L},\gamma(IJ)} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},\gamma(IJ)}) \quad (3.89)$$

e

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = 2\lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| \Upsilon_{\hat{R},IJ} \sum_{\gamma=i,j} \xi_{\hat{R},\gamma(IJ)} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{R},\gamma(IJ)}) \quad (3.90)$$

onde os coeficientes  $\xi_{\hat{L},i(IJ)}$  e  $\xi_{\hat{L},j(IJ)}$  (resp.  $\xi_{\hat{R},i(IJ)}$  e  $\xi_{\hat{R},j(IJ)}$ ) são dadas na equação (3.30) (resp. (3.32)). E as variáveis auxiliares  $p_{\hat{L},\gamma(IJ)}$  e  $p_{\hat{R},\gamma(IJ)}$ ,  $\gamma = i, j$  são interpoladas utilizando uma estratégia de interpolação.

Agora vamos assumir que  $(\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ})(\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}) > 0$ , o que implica  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} < 0$  e  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} < 0$  ou  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} > 0$  e  $\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} > 0$  o que é equivalente a seguinte igualdade  $|\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = |\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ}$ , logo substituindo na equação (3.86), obtemos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = 0 \quad (3.91)$$

Considerar fluxo nulo na nossa formulação pode causar problemas de conservação de massa. Para evitar este tipo de problemas utilizamos o critério proposto por Sheng e Yuan (2011) e Gao e Wu (2013), este critério consiste em dividir os fluxos laterais dados nas equações (3.29) e (3.31):

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} + \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} + \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \quad (3.92)$$

Os fluxos parciais são expressados por:

$$\mathcal{F}_{r,IJ}^{(1)} = (1 - \chi) \lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| \xi_{r,i(IJ)} (p_r - p_{r,i(IJ)}) \quad (3.93)$$

e

$$\mathcal{F}_{r,IJ}^{(2)} = \chi \lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| \xi_{r,i(IJ)} (p_r - p_{r,i(IJ)}) + \lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| \xi_{r,j(IJ)} (p_r - p_{r,j(IJ)}) \quad (3.94)$$

onde  $r = \hat{L}, \hat{R}$  e  $\chi \in [0, 1]$ .

Neste caso os coeficientes não lineares  $\Upsilon_{\hat{L},IJ}$  e  $\Upsilon_{\hat{R},IJ}$  são definidos em função dos fluxos parciais, isto é:

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \frac{|\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}|}{|\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}| + |\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}|} \quad \text{e} \quad \Upsilon_{\hat{R},IJ} = \frac{|\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}|}{|\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}| + |\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}|} \quad (3.95)$$

Notamos que os coeficientes definidos na equação acima além de depender das variáveis auxiliares  $p_{r,i(IJ)}$  e  $p_{r,j(IJ)}$  com  $r = \hat{L}, \hat{R}$  também dependem das variáveis primárias  $p_{\hat{L}}$  e  $p_{\hat{R}}$  o que caracteriza a não linearidade do método.

Substituindo na equação (3.83) e reorganizando temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} + \Upsilon_{\hat{L},IJ} \left( 1 - \frac{|\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}|}{|\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}|} \frac{|\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}|}{|\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}|} \right) \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \quad (3.96)$$

e

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = \Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} + \Upsilon_{\hat{L},IJ} \left( 1 - \frac{|\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}|}{\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}} \frac{\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}}{|\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}|} \right) \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \quad (3.97)$$

As equações anteriores pode-se expressar de maneira equivalente como:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} + \Upsilon_{\hat{L},IJ} \left( 1 - \text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \times \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \right) \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \quad (3.98)$$

e

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JJ} = \Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} + \Upsilon_{\hat{R},IJ} \left( 1 - \text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \times \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \right) \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \quad (3.99)$$

onde a função  $\text{sgn}$  é denotado por:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.100)$$

Antes de derivar a forma reduzida dos fluxos das equações (3.98) e (3.99), introduzimos o método de interpolação das variáveis auxiliares localizados sobre os pontos harmônicos.

### 3.2.3.1 Estratégia de Interpolação Utilizando Pontos Harmônicos (HP)

Consideremos dois volumes de controle  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$  adjacentes a face  $IJ$ , com os respectivos tensores de permeabilidades  $\underline{K}_{\hat{L}}$  e  $\underline{K}_{\hat{R}}$ , e sejam os baricentros  $x_{\hat{L}} \in \hat{L}$  e  $x_{\hat{R}} \in \hat{R}$ . A fim de obter um método com estêncil pequeno possível, nos procuramos algum ponto sobre a face  $IJ$  onde a solução naquele ponto seja uma combinação somente de  $p_{\hat{L}}$  e  $p_{\hat{R}}$ . Então, nesse sentido sempre é possível escrever as co-normais  $\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ}$  e  $\underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{IJ}$  como segue:

$$\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ} = a_{\hat{L}} (y_{IJ} - x_{\hat{L}}) + b_{\hat{L}} (J - I) \quad (3.101)$$

e

$$\underline{K}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{IJ} = a_{\hat{R}} (x_{\hat{R}} - y_{IJ}) + b_{\hat{R}} (J - I) \quad (3.102)$$

Os coeficientes  $a_{\hat{L}}$  e  $a_{\hat{R}}$  são dados por:

$$a_{\hat{L}} = \frac{K_{\hat{L},IJ}^{(n)}}{h_{\hat{L},IJ}}, \quad a_{\hat{R}} = \frac{K_{\hat{R},IJ}^{(n)}}{h_{\hat{R},IJ}}, \quad K_{\hat{L},IJ}^{(n)} = \vec{n}_{IJ}^{\top} \underline{K}_{\hat{L}} \vec{n}_{IJ}, \quad \text{e} \quad K_{\hat{R},IJ}^{(n)} = \vec{n}_{IJ}^{\top} \underline{K}_{\hat{R}} \vec{n}_{IJ} \quad (3.103)$$

onde  $h_{\hat{L},IJ}$  (resp.  $h_{\hat{R},IJ}$ ) são as distancias ortogonais do ponto  $x_{\hat{L}}$  (resp.  $x_{\hat{R}}$ ) a face  $IJ$ .

Subtraindo a equação (3.102) de (3.101), temos:

$$\left(\underline{\underline{K}}_{\hat{L}}^{\top} - \underline{\underline{K}}_{\hat{R}}^{\top}\right) \vec{n}_{IJ} = -a_{\hat{R}}x_{\hat{R}} - a_{\hat{L}}x_{\hat{L}} + (a_{\hat{R}} + a_{\hat{L}})y_{IJ} - b_{\hat{R}}(J - I) + b_{\hat{L}}(J - I) \quad (3.104)$$

logo isolando o ponto  $y_{IJ}$  em função dos parâmetros físicos-geométricos conhecidos, têm-se:

$$y_{IJ} = \frac{a_{\hat{R}}x_{\hat{R}} + a_{\hat{L}}x_{\hat{L}} + \left(\underline{\underline{K}}_{\hat{L}}^{\top} - \underline{\underline{K}}_{\hat{R}}^{\top}\right) \vec{n}_{IJ}}{a_{\hat{R}} + a_{\hat{L}}} + \frac{b_{\hat{R}}(J - I) - b_{\hat{L}}(J - I)}{a_{\hat{R}} + a_{\hat{L}}} \quad (3.105)$$

os coeficientes  $a_{\hat{L}}$  e  $a_{\hat{R}}$  dadas na equação (3.103) são substituídos na equação anterior, assim temos:

$$y_{IJ} = \frac{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)}x_{\hat{R}} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}x_{\hat{L}} + h_{\hat{L},IJ}h_{\hat{R},IJ}\left(\underline{\underline{K}}_{\hat{L}}^{\top} - \underline{\underline{K}}_{\hat{R}}^{\top}\right) \vec{n}_{IJ}}{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}} + \frac{h_{\hat{L},IJ}h_{\hat{R},IJ}(b_{\hat{R}} - b_{\hat{L}})(J - I)}{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}} \quad (3.106)$$

De outra parte, utilizando a expansão em series de Taylor, temos que:

$$p(y_{IJ}) - p(x_{\hat{L}}) \cong \nabla p \cdot (y_{IJ} - x_{\hat{L}}), \quad p(x_{\hat{R}}) - p(y_{IJ}) \cong \nabla p \cdot (x_{\hat{R}} - y_{IJ}) \quad \text{e} \quad p_J - p_I \cong \nabla p \cdot (J - I) \quad (3.107)$$

utilizando as equações (3.101) e (3.102), temos:

$$-\underline{\underline{K}}_{\hat{L}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} = -\nabla p \cdot \underline{\underline{K}}_{\hat{L}}^{\top} \vec{n}_{IJ} = -a_{\hat{L}} \nabla p \cdot (y_{IJ} - x_{\hat{L}}) - b_{\hat{L}} \nabla p \cdot (J - I) \quad (3.108)$$

e

$$-\underline{\underline{K}}_{\hat{R}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} = -\nabla p \cdot \underline{\underline{K}}_{\hat{R}}^{\top} \vec{n}_{IJ} = -a_{\hat{R}} \nabla p \cdot (x_{\hat{R}} - y_{IJ}) - b_{\hat{R}} \nabla p \cdot (J - I) \quad (3.109)$$

Integrando ambas as equações sobre a face  $IJ$  e pela equação (3.107), obtemos:

$$\int_{IJ} -\underline{\underline{K}}_{\hat{L}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} dS = \|\vec{IJ}\| \left( -a_{\hat{L}} (p(y_{IJ}) - p(x_{\hat{L}})) - b_{\hat{L}} (p_J - p_I) \right) \quad (3.110)$$

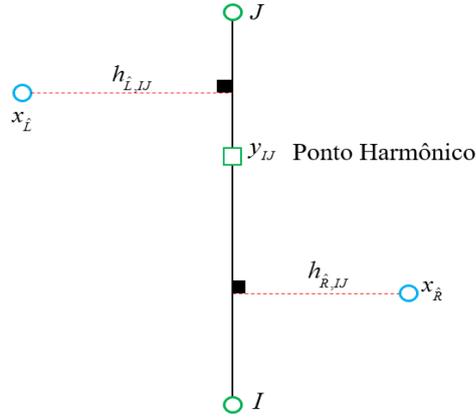
e

$$\int_{IJ} -\underline{\underline{K}}_{\hat{R}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} dS = \|\vec{IJ}\| \left( -a_{\hat{R}} (p(x_{\hat{R}}) - p(y_{IJ})) - b_{\hat{R}} (p_J - p_I) \right) \quad (3.111)$$

Os fluxos definidos nas equações acima devem satisfazer a seguinte equação de continuidade

$$\int_{IJ} -\underline{\underline{K}}_{\hat{L}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} dS + \int_{IJ} -\underline{\underline{K}}_{\hat{R}} \nabla p \cdot \vec{n}_{IJ} dS = 0 \quad (3.112)$$

Figura 12 – Os pontos harmônicos



Fonte – Produzido pelo autor

logo substituindo as equações (3.110) e (3.111) na equação anterior e após manipulações algébricas, temos:

$$p(y_{IJ}) = \frac{a_{\hat{L}}p(x_{\hat{L}}) + a_{\hat{R}}p(x_{\hat{R}})}{a_{\hat{L}} + a_{\hat{R}}} + \frac{b_{\hat{R}} - b_{\hat{L}}}{a_{\hat{L}} + a_{\hat{R}}}(p_J - p_I) \quad (3.113)$$

substituindo os coeficientes  $a_{\hat{L}}$  e  $a_{\hat{R}}$  dada em equação (3.103), obtemos:

$$p(y_{IJ}) = \frac{h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}p(x_{\hat{L}}) + h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)}p(x_{\hat{R}})}{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}} + \frac{h_{\hat{L},IJ}h_{\hat{R},IJ}(b_{\hat{R}} - b_{\hat{L}})}{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}}(p_J - p_I) \quad (3.114)$$

A condição suficiente para derivar um método com estêncil local deve assumir que  $b_{\hat{L}} = b_{\hat{R}}$ , logo da equação (3.106), temos:

$$y_{IJ} = \frac{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)}x_{\hat{R}} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}x_{\hat{L}} + h_{\hat{L},IJ}h_{\hat{R},IJ}\left(\underline{K}_{\hat{L}}^{\top} - \underline{K}_{\hat{R}}^{\top}\right)\vec{n}_{IJ}}{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}} \quad (3.115)$$

o ponto  $y_{IJ}$  é representado na figura 12.

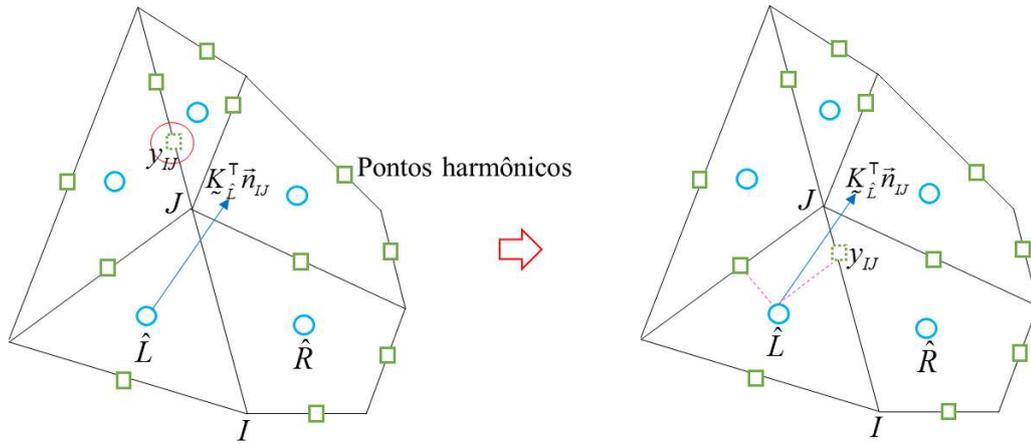
E a pressão naquele ponto  $y_{IJ}$  é obtida pela seguinte equação

$$p_{IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}p_{\hat{L}} + h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)}p_{\hat{R}}}{h_{\hat{L},IJ}K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ}K_{\hat{L},IJ}^{(n)}}, \quad p(x_{\hat{L}}) = p_{\hat{L}}, \quad p(x_{\hat{R}}) = p_{\hat{R}} \quad \text{e} \quad p_{IJ} = p(y_{IJ}) \quad (3.116)$$

De maneira equivalente a equação acima pode ser escrita como uma combinação convexa

$$p_{IJ} = w_{\hat{L},IJ}p_{\hat{L}} + w_{\hat{R},IJ}p_{\hat{R}} \quad (3.117)$$

Figura 13 – Na figura esquerda são mostrados os pontos de interpolação obtidos pela equação (3.115) e na direita os pontos harmônicos obtidos pela equação (3.119)



Fonte – Produzido pelo autor

onde

$$w_{\hat{L},IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)}}{h_{\hat{L},IJ} K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)}} \quad \text{e} \quad w_{\hat{R},IJ} = 1 - w_{\hat{L},IJ} \quad (3.118)$$

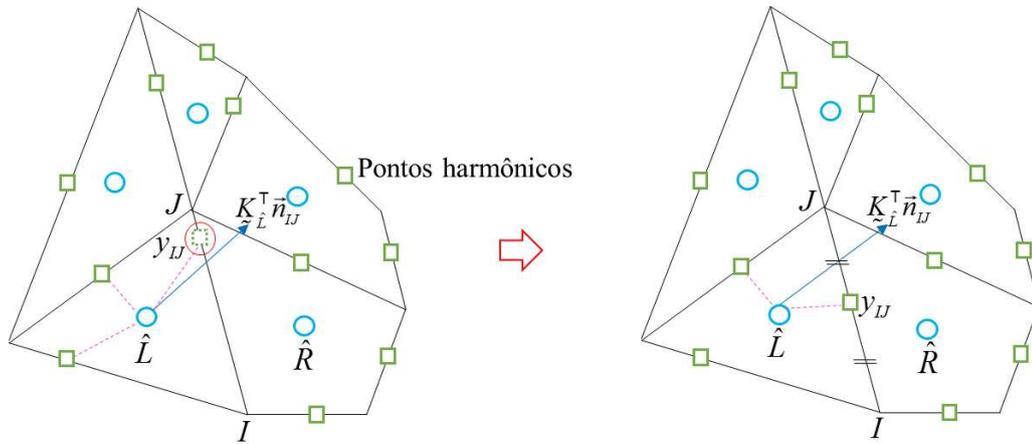
Segundo Gao e Wu (2013) os pontos definidos em (3.115) devem satisfazer duas condições para serem chamados de pontos harmônicos. Primeiro, o ponto  $y_{IJ}$  deve ser definida sobre face interior da malha computacional, ou seja,  $IJ \in \mathcal{E}^{int}$  e segundo que  $\{x_{\hat{L}} + h_{\hat{L},IJ} \vec{n}_{IJ}, x_{\hat{R}} - h_{\hat{R},IJ} \vec{n}_{IJ}\} \cap IJ \neq \Phi$ . Esta nomeação foi inicialmente introduzida por Agélas, Eymard e Herbin (2009) num método linear sobre malhas quadrilaterais. Quando a face em questão  $IJ \in \mathcal{E}^{ext}$  ponto harmônico torna-se ponto médio de aquela face.

Devemos observar ainda que, se o ponto de interpolação dado na equação (3.115) não pertencer à face  $IJ$ , a fórmula (3.116) ainda pode ser utilizada. Este método de interpolação caracteriza-se por produzir soluções lineares por partes, além disso, os pesos da equação (3.118) preservam a positividade da solução e podem ser utilizados em métodos monótonos ou que dispõem a satisfazer o princípio do máximo discreto.

A desvantagem de utilizar os pontos harmônicos é que, quando aplicado a malhas severamente distorcidas ou reservatórios de petróleo com elevada razão de anisotropia, os coeficientes da equação (3.18) podem se tornar negativos levando a não existência de um eixo auxiliar tal que o vetor co-normal pertença ao mesmo. Apresentamos dois casos onde os pontos harmônicos podem não existir:

*Caso 1.* Consideramos a malha dada na figura 13, patologicamente o ponto de interpolação pode cair em uma projeção da superfície de controle em questão, neste caso recomendamos

Figura 14 – Na figura esquerda são mostrados os pontos de interpolação obtida pela equação (3.115) e na direita são mostradas os pontos harmônicos considerado como ponto médio da superfície de controle



Fonte – Produzido pelo autor

considerar

$$y_{IJ} = \frac{h_{\hat{L},IJ} K_{\hat{R},IJ}^{(n)} x_{\hat{R}} + h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)} x_{\hat{L}}}{h_{\hat{L},IJ} K_{\hat{R},IJ}^{(n)} + h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)}} \quad (3.119)$$

*Caso 2.* Mesmo se os pontos de interpolação forem localizados sobre a superfície de controle  $IJ$  pode acontecer que não existe uma região que contém o co-normal, veja a figura 14, neste caso recomendamos utilizar o ponto médio da face como ponto de interpolação. Em ambos os casos, considerar essas estratégias de solução podem prejudicar a acurácia, embora representam de maneira adequada a física do problema.

*Caso 3.* Quando consideramos meios com razão de anisotrópicos alta e heterogêneo sobre malhas severamente distorcidas, os dois casos anteriores não são suficientes para solucionar problemas. Neste caso, os métodos NLFV-DMP e o MPFA-H (FUHRMANN J.; ROHDE, 2014) produzem matrizes singulares. A utilização de métodos baseados em pontos harmônicos não recomendável para problemas em malhas distorcidas e meios com alta razão de anisotropia e heterogênea. Neste caso ainda não temos uma solução adequada.

As equações (3.98) e (3.99) podem ainda ser reduzidas utilizando a seguinte simplificação

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} = v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) \quad \text{e} \quad \Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} = v_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) \quad (3.120)$$

Em efeito, assumindo que um dos pontos de interpolação (ponto harmônico) esta definido sobre a face em questão tanto para o volumes de controle  $\hat{L}$  quanto para o volume de controle  $\hat{R}$ , então a pressão naquele ponto de interpolação tanto para  $\hat{L}$  quanto para  $\hat{R}$  é dada por  $p_{\hat{L},i(IJ)} =$

$p_{\hat{R},i(IJ)}$ , logo temos que  $p_{\hat{L},i(IJ)} = p_{\hat{R},i(IJ)} = w_{\hat{L},IJ}p_{\hat{L}} + w_{\hat{R},IJ}p_{\hat{R}}$ , substituindo na seguinte equação

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ}\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{R},IJ}\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} = \lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| (1 - \chi) \left( \Upsilon_{\hat{L},IJ}\xi_{\hat{L},i(IJ)} \left( p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},i(IJ)} \right) - \Upsilon_{\hat{R},IJ}\xi_{\hat{R},i(IJ)} \left( p_{\hat{R}} - p_{\hat{R},i(IJ)} \right) \right) \quad (3.121)$$

temos:

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ}\mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(1)} - \Upsilon_{\hat{R},IJ}\mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(1)} = v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) \quad (3.122)$$

onde  $v_{IJ} = \lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| (1 - \chi) \left( \Upsilon_{\hat{L},IJ}\xi_{\hat{L},i(IJ)}w_{\hat{R},IJ} + \Upsilon_{\hat{R},IJ}\xi_{\hat{R},i(IJ)}w_{\hat{L},IJ} \right)$  é um coeficiente não negativo.

Assim, as equações (3.98) e (3.99) podem ser reescritas como:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + \Upsilon_{\hat{L},IJ} \left( 1 - \text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \right) \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \quad (3.123)$$

e

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = v_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) + \Upsilon_{\hat{R},IJ} \left( 1 - \text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \right) \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \quad (3.124)$$

Após simplificar a expressão do fluxo, agora vamos analisar alguns casos a partir da função signo.

Quando  $\left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right) \left( \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \leq 0$ , implica que  $\text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) = 0$  ou  $\text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) = -1$ , então temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \begin{cases} v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + \Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} & \text{ou} \\ v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + 2\Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \end{cases} \quad (3.125)$$

e

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = \begin{cases} v_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) + \Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} & \text{ou} \\ v_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) + 2\Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \end{cases} \quad (3.126)$$

Quando  $\left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right) \left( \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) > 0$ , implica que  $\text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) = 1$ , então obtemos os fluxos ainda mas simplificados

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) \quad \text{e} \quad \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = v_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) \quad (3.127)$$

Aplicando o algoritmo proposto por Sheng e Yuan (2011), podemos fazer um resumo geral do método:

$$\text{Caso 1. Se } \left( \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right) \left( \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right) \leq 0$$

$$\text{Caso 1.1 Se } \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right| + \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right| \neq 0$$

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \frac{\left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right|}{\left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right| + \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right|} \quad \text{e} \quad \Upsilon_{\hat{R},IJ} = 1 - \Upsilon_{\hat{L},IJ}.$$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{2 \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right| \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right|}{\left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right| + \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right|} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = \frac{2 \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right| \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right|}{\left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right| + \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right|}.$$

$$\text{Caso 1.2 Se } \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right| + \left| \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right| = 0$$

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \Upsilon_{\hat{R},IJ} = 0.5.$$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = 2\Upsilon_{\hat{L},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = 2\Upsilon_{\hat{R},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI}.$$

$$\text{Caso 2. Se } \left( \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \right) \left( \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \right) > 0$$

$$\text{Caso 2.1. Se } \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right) \left( \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \leq 0$$

$$\text{Caso 2.1.1. Se } \left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right| + \left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right| \neq 0$$

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \frac{\left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right|}{\left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right| + \left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right|} \quad \text{e} \quad \Upsilon_{\hat{R},IJ} = \frac{\left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right|}{\left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right| + \left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right|}.$$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \nu_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + 2\Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \quad \text{e}$$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = \nu_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) + 2\Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}.$$

$$\text{Caso 2.1.2. Se } \left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right| + \left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right| = 0$$

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \Upsilon_{\hat{R},IJ} = 0.5.$$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \nu_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + 2\Upsilon_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \quad \text{e}$$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = \nu_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) + 2\Upsilon_{\hat{R},IJ} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)}.$$

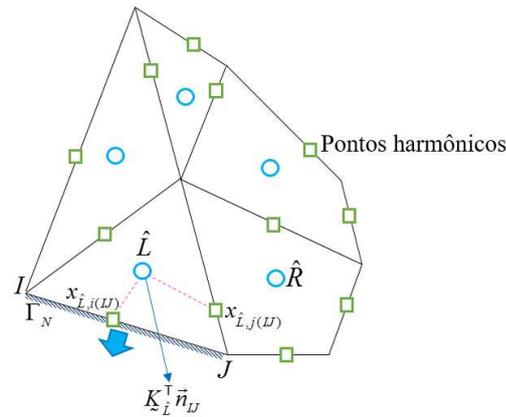
$$\text{Caso 2.2. Se } \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right) \left( \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) > 0$$

$$\Upsilon_{\hat{L},IJ} = \frac{\left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right|}{\left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right| + \left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right|} \quad \text{e} \quad \Upsilon_{\hat{R},IJ} = \frac{\left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right|}{\left| \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \right| + \left| \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right|}.$$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \nu_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) \quad \text{e} \quad \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{JI} = \nu_{IJ} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}).$$

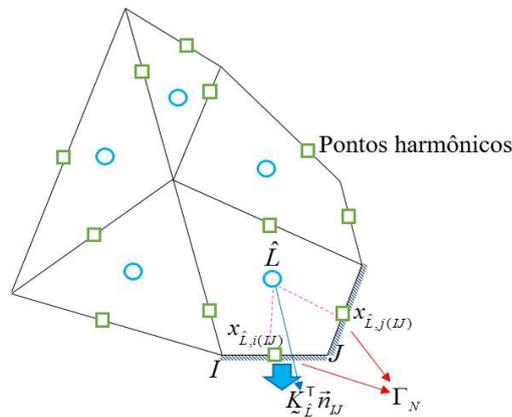


Figura 16 – Fluxo no contorno de Neumann para o caso 1



Fonte – Produzido pelo autor

Figura 17 – Fluxo no contorno de Neumann para caso 2



Fonte – Produzido pelo autor

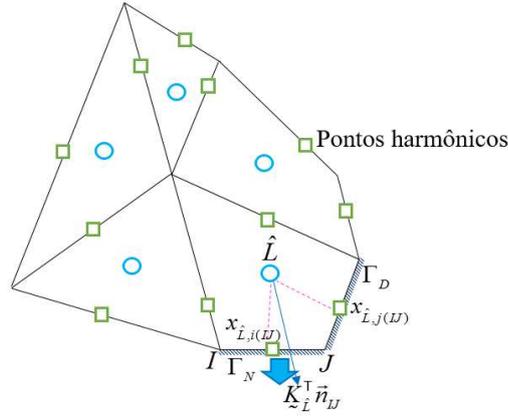
sobre a face  $IJ$  e o outro ponto de interpolação esta localizado sobre alguma face interna da malha computacional, veja figura 16. Então, aquela pressão sobre a contorno de Neumann ( $p_{\hat{L},i(IJ)}$ ) deve ser interpolado a partir da equação do fluxo. Vamos assumir que pela equação (3.128) que  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = g_N \|\vec{IJ}\|$ , logo temos:

$$p_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{\mathcal{A}_{\hat{L},IJ}}{\xi_{\hat{L},i(IJ)}} p_{\hat{L}} - \frac{\xi_{\hat{L},j(IJ)}}{\xi_{\hat{L},i(IJ)}} p_{\hat{L},j(IJ)} - \frac{g_N}{\lambda_{IJ} \xi_{\hat{L},i(IJ)}} \quad (3.131)$$

*Caso 3.* Segundo a figura 17, temos duas fronteiras de Neumann  $IJ, IJ^* \in \Gamma_N \subset \mathcal{E}_{\hat{L}} \cap \mathcal{E}^{ext}$ , sendo que a co-normal pertence a região formada por essas. consequentemente teríamos duas pressões que temos que interpolar, a saber:  $p_{\hat{L},i(IJ)} = p_{\hat{L},j(IJ^*)} = m_1$  e  $p_{\hat{L},i(IJ)} = p_{\hat{L},i(IJ^*)} = m_2$ . Considerando fluxos definidos nas superfícies de controle  $IJ, IJ^*$

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \xi_{\hat{L},i(IJ)} p_{\hat{L},i(IJ)} - \xi_{\hat{L},j(IJ)} p_{\hat{L},j(IJ)} \right) \quad (3.132)$$

Figura 18 – Fluxo no contorno de Neumann para o caso 3



Fonte – Produzido pelo autor

e

$$\vec{v}_{IJ^*} \cdot \vec{N}_{IJ^*} = \lambda_{IJ^*} \left\| \vec{IJ^*} \right\| \left( \mathcal{A}_{\hat{L},IJ^*} p_{\hat{L}} - \xi_{\hat{L},i(IJ^*)} p_{\hat{L},i(IJ^*)} - \xi_{\hat{L},j(IJ^*)} p_{\hat{L},j(IJ^*)} \right) \quad (3.133)$$

de maneira equivalente pode ser escrito como:

$$\frac{g_{N,1}}{\lambda_{IJ}} = \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \xi_{\hat{L},i(IJ)} m_1 - \xi_{\hat{L},j(IJ)} m_2 \quad (3.134)$$

e

$$\frac{g_{N,2}}{\lambda_{IJ^*}} = \mathcal{A}_{\hat{L},IJ^*} p_{\hat{L}} - \xi_{\hat{L},i(IJ^*)} m_2 - \xi_{\hat{L},j(IJ^*)} m_1 \quad (3.135)$$

Das equações acima temos duas equações e duas incógnitas ( $m_1$  e  $m_2$ ), resolvendo o sistema temos:

$$m_1 = \frac{\frac{-g_{N,1} \xi_{\hat{L},i(IJ^*)}}{\lambda_{IJ}} + \frac{g_{N,2} \xi_{\hat{L},j(IJ)}}{\lambda_{IJ^*}}}{\xi_{\hat{L},i(IJ^*)} \xi_{\hat{L},i(IJ)} - \xi_{\hat{L},j(IJ)} \xi_{\hat{L},j(IJ^*)}} + \frac{\xi_{\hat{L},i(IJ^*)} \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} - \xi_{\hat{L},j(IJ)} \mathcal{A}_{\hat{L},IJ^*}}{\xi_{\hat{L},i(IJ^*)} \xi_{\hat{L},i(IJ)} - \xi_{\hat{L},j(IJ)} \xi_{\hat{L},j(IJ^*)}} p_{\hat{L}} \quad (3.136)$$

e

$$m_2 = \frac{\frac{-g_{N,1} \xi_{\hat{L},j(IJ^*)}}{\lambda_{IJ}} + \frac{g_{N,2} \xi_{\hat{L},i(IJ)}}{\lambda_{IJ^*}}}{\xi_{\hat{L},j(IJ^*)} \xi_{\hat{L},j(IJ)} - \xi_{\hat{L},i(IJ)} \xi_{\hat{L},i(IJ^*)}} + \frac{\xi_{\hat{L},j(IJ^*)} \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} - \xi_{\hat{L},i(IJ)} \mathcal{A}_{\hat{L},IJ^*}}{\xi_{\hat{L},j(IJ^*)} \xi_{\hat{L},j(IJ)} - \xi_{\hat{L},i(IJ)} \xi_{\hat{L},i(IJ^*)}} p_{\hat{L}} \quad (3.137)$$

Na equação anterior foram interpolados as pressões  $p_{\hat{L},i(IJ)} = p_{\hat{L},j(IJ^*)} = m_1$  e  $p_{\hat{L},i(IJ)} = p_{\hat{L},i(IJ^*)} = m_2$  sobre as fronteiras de Neumann.

*Caso 4.* Neste caso vamos assumir que a superfície de controle em questão pertence ao contorno de Neumann  $IJ \in \Gamma_N \subset \mathcal{E}_{\hat{L}} \cap \mathcal{E}^{ext}$ , necessariamente a pressão localizada sobre esta superfície de controle deve ser interpolada, além disso, assumirmos que a superfície de controle contrária está localizada sobre o contorno de Dirichlet (veja figura 18), então a pressão localizada

naquela superfície de controle é fornecida pela física do problema. Interpolamos a pressão localizada sobre  $IJ \in \Gamma_N$

$$p_{\hat{L},j(IJ)} = -\frac{g_N}{\xi_{\hat{L},j(IJ)}} + \frac{\mathcal{A}_{\hat{L},IJ}}{\xi_{\hat{L},j(IJ)}} p_{\hat{L}} - \frac{\xi_{\hat{L},i(IJ)}}{\xi_{\hat{L},j(IJ)}} g_D \quad (3.138)$$

onde  $g_D = p_{\hat{L},i(IJ)}$ .

### 3.2.3.3 Sistema Discreto do Método NLFV-DMP

A partir da equação (3.6), temos:

$$\sum_{IJ \in \mathcal{O}_{\hat{L}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}}, \quad \forall \hat{L} \in \mathcal{M} \quad (3.139)$$

Logo  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  é definido como:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \begin{cases} v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + \Upsilon_{\hat{L},IJ} \left\{ 1 - \text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \right\} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)}, & IJ \in \mathcal{O}^{int} \\ \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ}, & IJ \in \mathcal{O}^{ext} \cap \mathcal{O}_{\hat{L}} \end{cases} \quad (3.140)$$

Desde equação (3.139), obtemos:

$$\sum_{IJ \in \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}_{\hat{R}} \subset \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}^{int}} v_{IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + \sum_{IJ \in \mathcal{O}_{\hat{L}}} \beta_{\hat{L},IJ} \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} + \sum_{IJ \in \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}^{ext}} \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \xi_{\hat{L},IJ} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},IJ}) = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}} \quad (3.141)$$

onde

$$\beta_{\hat{L},IJ} = \begin{cases} \Upsilon_{\hat{L},IJ} \left\{ 1 - \text{sgn} \left( \mathcal{F}_{\hat{L},IJ}^{(2)} \mathcal{F}_{\hat{R},IJ}^{(2)} \right) \right\}, & IJ \in \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}_{\hat{R}} \subset \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}^{int} \\ 1, & IJ \in \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}^{ext} \end{cases} \quad (3.142)$$

Mantendo fixo o volume de controle  $\hat{L}$  e percorrendo todas as superfícies de controle do mesmo, além disso, utilizando as estratégia de interpolação temos:

$$\sum_{\hat{R} \in \mathcal{M}} A_{\hat{L},\hat{R}} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{R}}) + \lambda_{IJ^*} \|\vec{IJ^*}\| \sum_{IJ^* \in \mathcal{O}^{ext}} B_{\hat{L},IJ^*} (p_{\hat{L}} - p_{IJ^*}) = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}}, \quad \forall \hat{L} \in \mathcal{M} \quad (3.143)$$

onde

$$A_{\hat{L},\hat{R}} = \begin{cases} \sum_{IJ^* \in \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}_{\hat{R}}} v_{IJ^*} + \lambda_{IJ^*} \|\vec{IJ^*}\| w_{\hat{R},IJ^*} \left( \beta_{\hat{L},IJ^*} \chi \xi_{\hat{L},IJ^*} + \sum_{IJ \in \mathcal{O}_{\hat{L}}, IJ^* \neq IJ} \beta_{\hat{L},IJ} \xi_{\hat{L},IJ} \right), & \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}_{\hat{R}} \neq \Phi \\ 0, & \mathcal{O}_{\hat{L}} \cap \mathcal{O}_{\hat{R}} = \Phi \end{cases} \quad (3.144)$$

e

$$B_{\hat{L},IJ^*} = \begin{cases} \sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \beta_{\hat{L},IJ} \xi_{\hat{L},IJ}, & IJ^* \in \mathcal{E}_{\hat{L}} \cap \mathcal{E}_{\hat{R}} \text{ e } IJ \neq IJ^* \\ 0, & IJ^* \notin \mathcal{E}_{\hat{L}} \cap \mathcal{E}_{\hat{R}} \end{cases} \quad (3.145)$$

**Teorema 3.** *Assumimos que:*

- i). Para qualquer  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ ,  $\xi_{\hat{L},i(IJ)}$  e  $\xi_{\hat{L},j(IJ)}$  são sempre não negativos.
- ii).  $\bar{Q}_{\hat{L}} = 0$  e a condição de contorno é de tipo Dirichlet.
- iii). A solução da equação (3.143) existe.
- iv). Para cada  $\hat{L}, \hat{R} \in \mathcal{M}$ , existem  $K_{\hat{1}}, K_{\hat{2}}, \dots, K_{\hat{r}} \in \mathcal{M}$  de modo que  $A_{\hat{L},K_{\hat{1}}} A_{K_{\hat{1}},K_{\hat{2}}} \dots A_{K_{\hat{r}},K_{\hat{R}}} \neq 0$ , além disso, existe  $\hat{L} \in \mathcal{M}$  e  $IJ^* \in \mathcal{E}_{ext}$  de modo que  $B_{\hat{L},IJ^*} \neq 0$ .

Então, umas das seguintes alternativas é verdade.

- a). Para qualquer  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ ,  $\min_{IJ \in \mathcal{E}_{ext}} \{p_{IJ}\} < p_{\hat{L}} < \max_{IJ \in \mathcal{E}_{ext}} \{p_{IJ}\}$ .
- b). Para todo  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ ,  $p_{\hat{L}} = c$  e  $\min_{IJ \in \mathcal{E}_{ext}} \{p_{IJ}\} \leq p_{\hat{L}} \leq \max_{IJ \in \mathcal{E}_{ext}} \{p_{IJ}\}$ .

*Demonstração.* A partir da hipótese, podemos concluir que  $A_{\hat{L},\hat{R}} \geq 0$  e  $B_{\hat{L},IJ^*} \geq 0$  para qualquer  $\hat{L}, \hat{R} \in \mathcal{M}$ ,  $IJ^* \in \mathcal{E}_{ext}$ . Suponhamos que a) não satisfeito, isto é,  $p_{\hat{L}} \geq \max_{IJ \in \mathcal{E}_{ext}} \{p_{IJ}\}$  para algum  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ . Certamente nesse caso podemos escolher  $\hat{L}$  de modo que  $p_{\hat{L}} = c = \max_{IJ \in \mathcal{E}_{ext}, \hat{R} \in \mathcal{M}} \{p_{IJ}, p_{\hat{R}}\}$ . Por ii) e equação (3.143), deduzimos que  $p_{IJ^*} = c$  para  $B_{\hat{L},IJ^*} \geq 0$ . Repetindo o argumento e usando iv) podemos provar b). Se a violação é o caso  $p_{\hat{L}} \leq \min_{IJ \in \mathcal{E}_{ext}} \{p_{IJ}\}$  o argumento é similar, com o qual completamos a prova.  $\square$

Seguindo a equação (3.143) conseguimos o sistema linear:

$$\tilde{\mathcal{A}}(p)\mathcal{P} = \mathcal{B}(p) \quad (3.146)$$

onde o vetor  $\mathcal{P}$  denota o vetor de pressões desconhecidos e  $\tilde{\mathcal{A}}(p)$  é matriz de coeficientes. o vetor do lado direito  $\mathcal{B}(p)$  é gerado pelo termo de fonte ou sumidouro e informações fornecidas a partir das condições de contorno.

O sistema não linear (3.144) pode ser resolvido por um número de diferentes métodos. Nós utilizamos as iterações de Picard fornecidas no algoritmo 1 na seções anteriores. Se sabe que a cada iteração de Picard temos que resolver a seguinte equação linearizada, a qual vem desde a equação (3.143)

$$\sum_{\hat{R} \in \mathcal{M}} A_{\hat{L},\hat{R}}^{(k)} \left( p_{\hat{L}}^{(k+1)} - p_{\hat{R}}^{(k+1)} \right) + \lambda_{IJ^*} \|\vec{IJ^*}\| \sum_{IJ^* \in \mathcal{E}_{ext}} B_{\hat{L},IJ^*}^{(k)} \left( p_{\hat{L}}^{(k+1)} - p_{IJ^*} \right) = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}} \quad (3.147)$$

onde  $k$  denota a iteração indexada não linear. Obviamente, o resultado do teorema 3 ainda serve para esta equação. De acordo com nossas evidências numéricas as iterações de Picard sempre convergem.

Temos alguns fatos interessantes sobre a equação linearizada

- A equação (3.147) tem um estêncil pequeno que envolve somente o volume de controle  $\hat{L}$  e volumes de controle que compartilham uma face comum com  $\hat{L}$ .
- Desde as definições dos pontos harmônicos, pode-se ver que os cálculos deste tipo podem ser feitos localmente e somente a informação de uma superfície de controle ou volume de controle é envolvida.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS: ESCOAMENTO MONOFÁSICO

Nesta seção resolvemos alguns problemas benchmark, com o objetivo de analisar as propriedades numéricas. Além disso, vamos comparar o nosso método MPFA-HD com outros métodos lineares clássicos tipo MPFA-O e MPFA-FPS (AAVATSMARK, 1998; EDWARDS; ZHENG, 2008). Logo comparamos os métodos não lineares NLFV-PP e o NLFV-DMP, finalmente os métodos lineares com os métodos não lineares. Para avaliar os erros e taxas de convergência vamos utilizar a norma  $L_2$  e os erros numéricos são denotados por  $\mathcal{E}_i$ ,  $i = p, F$  e expressados nas seguintes equações (EIGESTAD; KLAUSEN, 2005; LIPNIKOV, 2010):

$$\mathcal{E}_p = \left( \sum_{\hat{L} \in \mathcal{M}} (\tilde{p}_{\hat{L}} - p_{\hat{L}})^2 V_{\hat{L}} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

e

$$\mathcal{E}_F = \left( \frac{\sum_{IJ \in \mathcal{E}} (\tilde{F}_{IJ} - F_{IJ})^2 A_{IJ}}{\sum_{IJ \in \mathcal{E}} \tilde{F}_{IJ}^2 A_{IJ}} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

aqui  $F_{IJ} = \vec{v} \cdot \vec{n}$  (onde  $\vec{v} = -\underline{K} \nabla p$ ) é a velocidade normal do escoamento na face  $IJ$ , a área associada a cada face é representada por  $A_{IJ}$  e consiste na média aritmética das áreas dos volumes de controle adjacentes a cada face em questão. Finalmente,  $\tilde{p}$  e  $p$  representam as pressões exatas e as pressões numéricas obtidas por algum método numérico, respectivamente. A velocidade analítica é representado por  $\tilde{F}$ .

As taxas de convergência são calculados pela seguinte expressão

$$R_i = \frac{\log \left( \frac{\mathcal{E}_\alpha(h_2)}{\mathcal{E}_\alpha(h_1)} \right)}{\log \left( \frac{h_2}{h_1} \right)}, \quad i = p, F \quad (4.3)$$

Na tabela 1 denotamos os acrônimos dos métodos clássicos que são utilizados para fazer comparações com os métodos propostos.

### 4.1 Teste de Linearidade: Escoamento Monofásico com Drenagem Oblíqua

Este problema foi adaptada de Herbin e Hubert (2008), Wu e Gao (2014) e representa algumas situações encontrados em simulação de reservatórios. Este problema foi proposto para

Tabela 1 – Acrônimos dos métodos numéricos utilizados.

Notação	Descrição dos Métodos
MPFA-O	Proposto por (AAVATSMARK, 1998)
MPFA-FPS	Proposto por (EDWARDS; ZHENG, 2008)
MPFA-HD	Método proposto na Equação (3.67)
MPFA-H	Método descrito no apêndice B
NLFV-PP	Método proposto na Equação (3.41)
NLFV-DMP	Método proposto nas Equações (3.123) e (3.124)

Fonte – Produzido pelo autor

analisar o critério de preservar linearidade sobre um meio heterogêneo e anisotrópico (veja figura 19b). O domínio é composto pelos seguintes subdomínios

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x,y) \in \Omega \text{ tal que: } \chi_1(x,y) < 0\} \\
\Omega_2 &= \{(x,y) \in \Omega \text{ tal que: } \chi_1(x,y) > 0, \chi_2(x,y) \leq 0\} \\
\Omega_3 &= \{(x,y) \in \Omega \text{ tal que: } \chi_2(x,y) > 0\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Neste caso, vamos considerar uma configuração em que a solução exata é dada por  $\tilde{p}(x,y) = 2 - x - 0.2y$ , para todo  $(x,y) \in \Omega$  e  $(x,y) \in \Gamma_D$ , o contorno exterior coincide com a condição de contorno de Dirichlet. O tensor de permeabilidade é representada nas seguintes equações para cada subdomínio

$$\underline{K}_1(x,y) = \mathcal{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \mathcal{R}^\top \text{ sobre } \Omega_1 \cup \Omega_3 \tag{4.5}$$

e

$$\underline{K}_2(x,y) = \mathcal{R} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \mathcal{R}^\top \text{ sobre } \Omega_2 \tag{4.6}$$

onde

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta = \arctg(0.2) \tag{4.7}$$

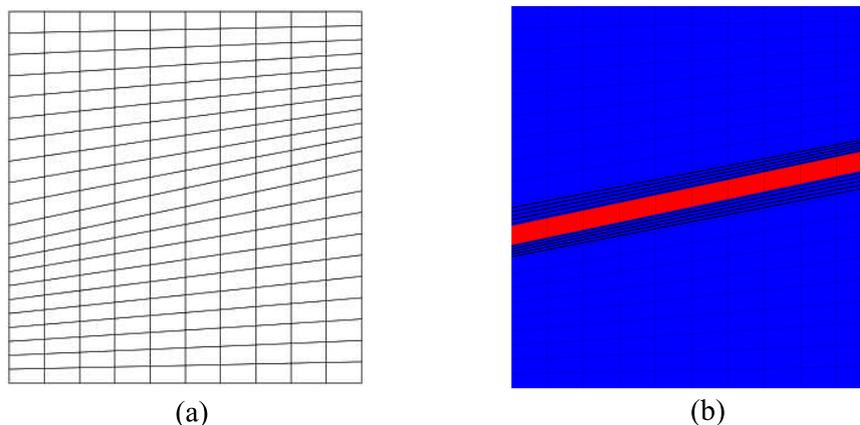
Tabela 2 – Erros entre solução exata e a solução numérica.

Erro	MPFA-H	MPFA-HD	NLFV-PP	NLFV-DMP
$\mathcal{E}_p$	$1.1481 \times 10^{-15}$	$9.8488 \times 10^{-16}$	$3.5372 \times 10^{-12}$	$8.2930 \times 10^{-12}$
$N_{iter}$	—	—	14	22

Fonte – Produzido pelo autor

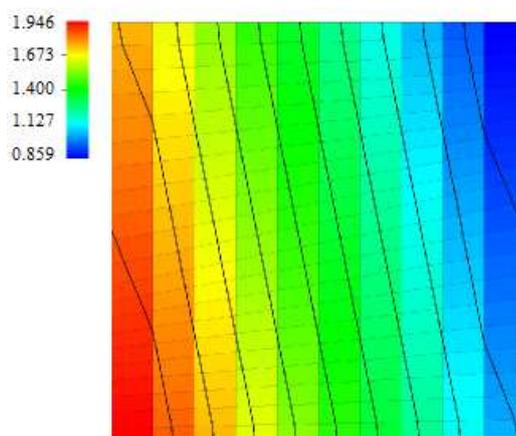
Na figura 19a apresentamos o domínio e malha computacional utilizada com 100 quadriláteros obliquamente dispostos e na figura 19b o campo de permeabilidade. Segundo a tabela

Figura 19 – Malha quadrilateral (a) e o campo de permeabilidade (b)



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Figura 20 – Perfil do campo de pressão obtido pelo método NLFV-PP



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

2, observamos que, tanto os métodos lineares (MPFA-HD e MPFA-H), quanto os métodos não lineares (NLFV-PP e NLFV-DMP), reproduzem exatamente a solução analítica. Por outro lado, o número de iterações para o método NLFV-PP, foram 14 iterações de Picard para a convergência da solução para uma tolerância de ( $tol = 10^{-13}$ ), o que acarretou num custo computacional adicional se comparado com os métodos lineares. Enquanto o método NLFV-DMP precisou de 22 iterações de Picard para a mesma tolerância. Na figura 20 observamos o perfil de pressões obtido com o método NLFV-PP (análogo aos obtidos com os métodos lineares correspondentes). Neste problema a propriedade de monotonicidade é equivalente a satisfazer o princípio do máximo discreto.

## 4.2 Teste de Convergência

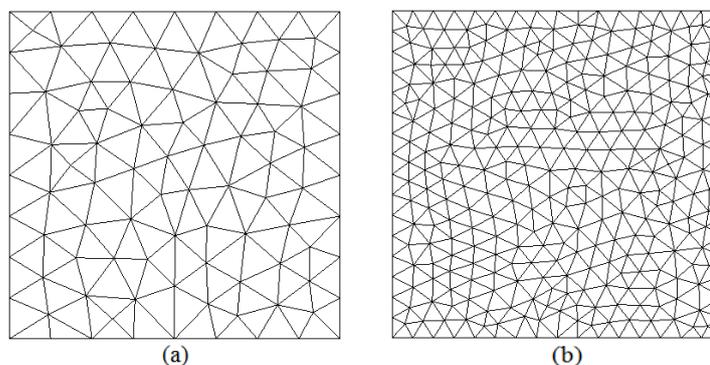
### 4.2.1 Escoamento Monofásico num Reservatório Homogêneo Suavemente Anisotrópico

Este problema foi adaptado de Gao e Wu (2013) com objetivo de testar numericamente a acurácia dos métodos descritos em capítulos anteriores, quando consideramos um reservatório homogêneo e suavemente anisotrópico com solução que não é linear. Neste exemplo o domínio é um quadrado unitário ( $\Omega = [0, 1]^2$ ), discretizado por uma sequência de malhas não estruturadas triangulares refinadas sucessivamente de modo a avaliarmos as taxas de convergência dos métodos não lineares (NLFV-DMP; NLFV-PP) e dos métodos lineares (MPFA-HD; MPFA-H) por meio das soluções obtidas nas diferentes malhas (veja figura 21). No método não linear, utilizamos uma tolerância com respeito a iteração de Picard de  $tol = 10^{-14}$ , onde a solução analítica do problema é dada por:

$$\tilde{p}(x,y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((1-x)(1-y))}{\sin(1)} + (1-x)^3(1-y)^2 \right] \quad (4.8)$$

onde a fronteira do domínio coincide com o contorno de Dirichlet, cujos valores da pressão no contorno são diretamente calculados através da solução analítica.

Figura 21 – Malha triangular não estruturada (a) com 158 e (b) 576 volumes de controle



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

O tensor de permeabilidade é dado por:

$$\underline{K}(x,y) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Na tabela 3 observamos que todos os métodos, tanto os métodos não lineares NLFV-DMP e NLFV-PP, quanto os métodos lineares, MPFA-HD e MPFA-H, alcançam uma acurácia de segunda ordem no espaço para o campo de pressões. Nos casos de métodos não-lineares, também incluímos o número de iterações de Picard necessárias para alcançarmos a convergência.

Tabela 3 – Erros e taxas de convergência do campo de pressões.

Método	Erro/Taxa	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.0313$	$h = 0.0156$
MPFA-H	$\mathcal{E}_p$	$6.4408 \times 10^{-4}$	$2.1186 \times 10^{-4}$	$5.2402 \times 10^{-5}$	$1.2540 \times 10^{-5}$
	$R_p$	—	1.6041	2.0201	2.0536
MPFA-HD	$\mathcal{E}_p$	0.001	$2.6447 \times 10^{-4}$	$7.1291 \times 10^{-5}$	$1.6946 \times 10^{-5}$
	$R_p$	—	1.9233	1.89568	2.0632
NLFV-PP	$\mathcal{E}_p$	0.001	$2.4687 \times 10^{-4}$	$6.4178 \times 10^{-5}$	$1.5344 \times 10^{-5}$
	$R_p$	—	2.0181	1.9483	2.0549
	$N_{iter}$	15	17	17	18
NLFV-DMP	$\mathcal{E}_p$	$6.3642 \times 10^{-4}$	$2.1060 \times 10^{-4}$	$5.0311 \times 10^{-5}$	$1.2714 \times 10^{-5}$
	$R_p$	—	1.5954	2.0656	1.9845
	$N_{iter}$	42	40	54	47

Fonte – Produzido pelo autor

Tabela 4 – Erros e taxas de convergência do campo de velocidades.

Método	Erro/Taxa	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.0313$	$h = 0.0156$
MPFA-H	$\mathcal{E}_F$	0.0062	0.002	$9.3732 \times 10^{-5}$	$4.7137 \times 10^{-5}$
	$R_F$	—	1.6322	1.0959	0.9871
MPFA-HD	$\mathcal{E}_F$	0.0075	0.0024	$7.7195 \times 10^{-4}$	$2.5038 \times 10^{-4}$
	$R_F$	—	1.6438	1.64023	1.6174
NLFV-PP	$\mathcal{E}_F$	0.007	0.0024	$8.0091 \times 10^{-4}$	$2.6060 \times 10^{-4}$
	$R_F$	—	1.5443	1.5869	1.6123
	$N_{iter}$	15	17	17	18
NLFV-DMP	$\mathcal{E}_F$	0.0056	0.0018	$8.4518 \times 10^{-4}$	$4.2730 \times 10^{-4}$
	$R_F$	—	1.6374	1.0906	0.98400
	$N_{iter}$	42	40	54	47

Fonte – Produzido pelo autor

Na tabela 4, mostramos que as taxas de convergência para as velocidades de Darcy numéricas são próximas de 1.6 para todos os métodos propostos. Na figura 22a apresentamos o campo de pressões obtido com o método MPFA-HD que possui um comportamento similar a campo de pressões obtida com o método NLFV-PP (veja figura 22b).

### 4.3 Teste de Preservar Positividade (PP) e/ou Satisfaz o Princípio do Máximo Discreto (DMP)

#### 4.3.1 escoamento Monofásico Utilizando Condições de Contorno com Gradiente Inclinada

Este problema foi adaptado de (GAO; WU, 2013). Neste teste as direções principais do tensor anisotrópico são dadas de acordo com a condição de contorno e a orientação da malha. O domínio computacional é dada por um quadrado unitário  $([0, 1]^2)$ , e o tensor anisotrópico é dado

por

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{com } \theta = 40^\circ. \quad (4.10)$$

Para este problema o termo de fonte é zero ( $Q = 0$ ). As condições de Dirichlet são considerados,  $\tilde{p} = g_D$  sobre  $\partial\Omega$  com  $g_D$  um função linear continua por partes definido por

$$g_D = \begin{cases} 1, & \text{sobre } (0, 0.2) \times 0 \cup 0 \times (0, 0.2) \\ 0, & \text{sobre } (0.8, 1) \times 0 \cup 0 \times (0.8, 1) \\ 0.5, & \text{sobre } (0.3, 1) \times 0 \cup 0 \times (0.3, 1) \\ 0.5, & \text{sobre } (0, 0.7) \times 0 \cup 0 \times (0, 0.7) \end{cases} \quad (4.11)$$

Para comparar os resultados utilizamos dois tipo de malhas, a saber: malha Kershaw quadrilateral e malha triangular, como mostrado na figura 23.

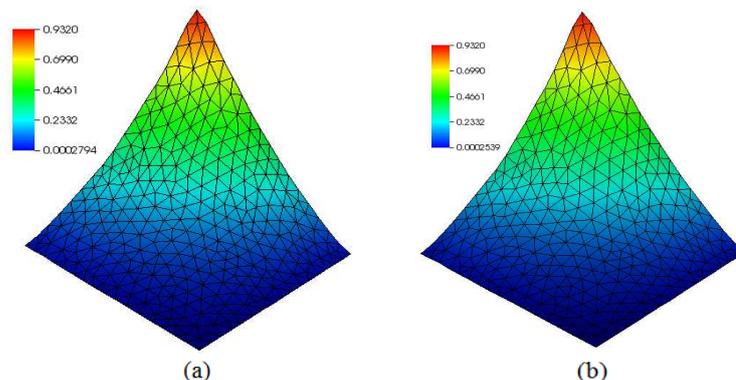
Tabela 5 – Campo pressões máximos e mínimos obtidos pelos diferentes métodos, utilizando malha Kershaw quadrilateral.

Método	24 × 24			96 × 96		
	$p_{min}$	$p_{max}$	$N_{iter}$	$p_{min}$	$p_{max}$	$N_{iter}$
MPFA-H	0.0052	0.9948	—	$9.3754 \times 10^{-4}$	0.9991	—
MPFA-HD	0.0067	0.9933	—	0.0013	0.9987	—
MPFA-O	-0.0061	1.0061	—	-0.0061	1.0061	—
MPFA-FPS	-0.0797	1.0797	—	-0.0829	1.0829	—
NLFV-PP	0.0088	0.9932	111	0.0017	0.9987	391
NLFV-DMP	0.005	0.9950	140	$8.352 \times 10^{-4}$	0.9992	551

Fonte – Produzido pelo autor

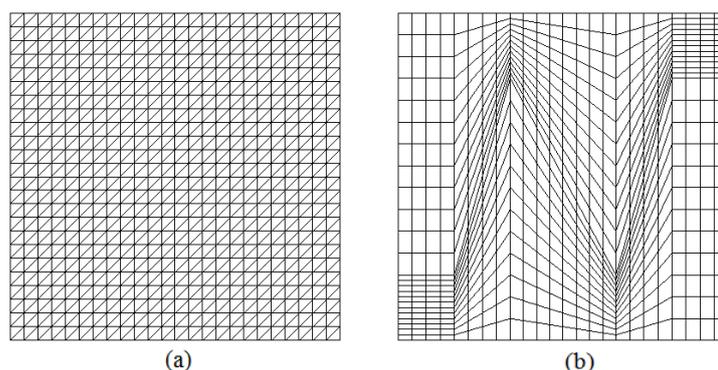
Na tabela 5 observamos que os métodos clássicos (MPFA-O e MPFA-FPS) violam o DMP produzindo oscilações no perfil do campo de pressão, os métodos que estamos propondo

Figura 22 – Perfil do campo de pressão obtido com o método MPFA-HD (a) e NLFV-PP (b)



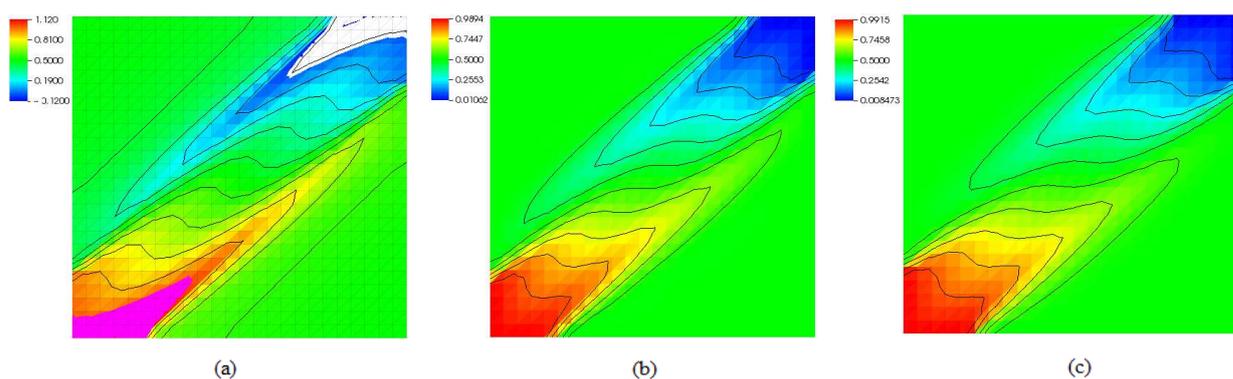
Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Figura 23 – Malha triangular alinhada (a) e malha Kershaw quadrilateral (b)



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Figura 24 – Perfil do campo de pressões obtido sobre uma malha triangular alinhada 24x24: (a) MPFA-O (cor de branco denota as regiões com valores negativos e a região cor de rosa denota valores maiores que 1), (b) MPFA-HD e (c) NLFV-DMP



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

satisfazem o DMP em malha triangular alinhada (veja figura 23b).

Nas figuras 24, observamos que a solução tem característica de  $Z$  através do eixo  $y = x$ . Em figura 24a mostramos o perfil do campo de pressões obtida pelo método clássico MPFA-O sobre uma malha triangular alinhada, percebemos que os valores das pressões são maiores que 1 e menores que 0 violando o DMP, aquelas oscilações desaparecem quando utilizamos os métodos MPFA-HD, NLFV-DMP (veja figuras 24b e 24c). Note que mesmo em malha estruturada uniforme os métodos clássicos continuam com as oscilações numéricas.

Na tabela 6 observamos que os métodos clássicos (MPFA-O e MPFA-FPS) violam o DMP produzindo oscilações no perfil do campo de pressão, os métodos que estamos propondo satisfazem o DMP mesmo em malhas ligeiramente distorcidas (veja figura 23b).

### 4.3.2 Escoamento Monofásico em Reservatório Muito Heterogêneo e Anisotrópico

Este exemplo foi adotado de Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014), com o objetivo de avaliarmos o DMP, considerando um reservatório altamente heterogêneo e com tensor de permeabilidade muito anisotrópico. O domínio consiste de um quadrado unitário  $\Omega = [0, 1]^2$  com um furo no centro do domínio com dimensões  $[4/9, 5/9]$ , as descontinuidades do material ocorre em  $x = 0.5$  e as condições de contorno é puramente Dirichlet, onde a pressão no contorno  $\partial\Omega_{ext} = [0, 1] - [4/9, 4/9]$  é dada por  $\bar{p}_{ext} = 0$  e no contorno  $\partial\Omega_{furo} = [4/9, 4/9]$  é dada por  $\bar{p}_{furo} = 2$ .

Os tensores de permeabilidade foram adotados dos autores Lipnikov, Shashkov, Svyatskiy e Vassilevski (2007), Herbin e Hubert (2008)

$$\underline{K}_1(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \text{se } x \leq 0.5 \quad (4.12)$$

e

$$\underline{K}_2(x, y) = \begin{bmatrix} y_1^2 + ax_1^2 & -(1-a)y_1x_1 \\ -(1-a)y_1x_1 & x_1^2 + ay_1^2 \end{bmatrix} \quad \text{com } a = 10^3, \quad \text{se } x > 0.5 \quad (4.13)$$

onde os valores dos parâmetros  $\theta, x_1$  e  $x_2$  foram adaptados de Queiroz, Souza, Contreras, Lyra e Carvalho (2014) como seguiu:  $\theta = \pi/2, x_1 = x + 10^{-3}$  e  $y_1 = y + 10^{-3}$ .

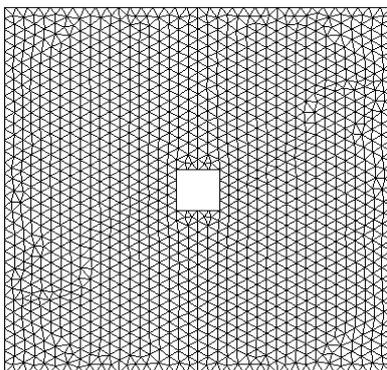
Neste problema utilizamos uma malha não estruturada triangular com 846 volumes de controle e com 2730 volumes de controle, na figura 25 mostramos a malha mas refinada.

Na tabela 7 podemos observar que os valores obtidos pelos métodos NLFV-PP produz valores positivos como esperado, embora viola o DMP. Enquanto o método NLFV-DMP produz resultados no intervalo  $[0, 2]$  para os dois tipos de refinamento de malha, respeitando os valores extremos do intervalo. De outra parte, observamos que os métodos lineares propostos como Tabela 6 – Pressões máximos e mínimos obtidos pelos diferentes métodos, utilizando malha triangular não estruturada.

Método	24 × 24			96 × 96		
	$p_{min}$	$p_{max}$	$N_{iter}$	$p_{min}$	$p_{max}$	$N_{iter}$
MPFA-H	0.009	0.9910	—	0.0018	0.9982	—
MPFA-HD	0.0106	0.9894	—	0.0019	0.9981	—
MPFA-O	-0.1199	1.1199	—	-0.0170	1.0170	—
MPFA-FPS	-0.0987	1.0987	—	-0.0174	1.0174	—
NLFV-PP	0.0110	0.9894	46	0.9982	0.0021	294
NLFV-DMP	0.0085	0.9915	178	0.9979	0.0020	543

Fonte – Produzido pelo autor

Figura 25 – Malha não estruturada triangular



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

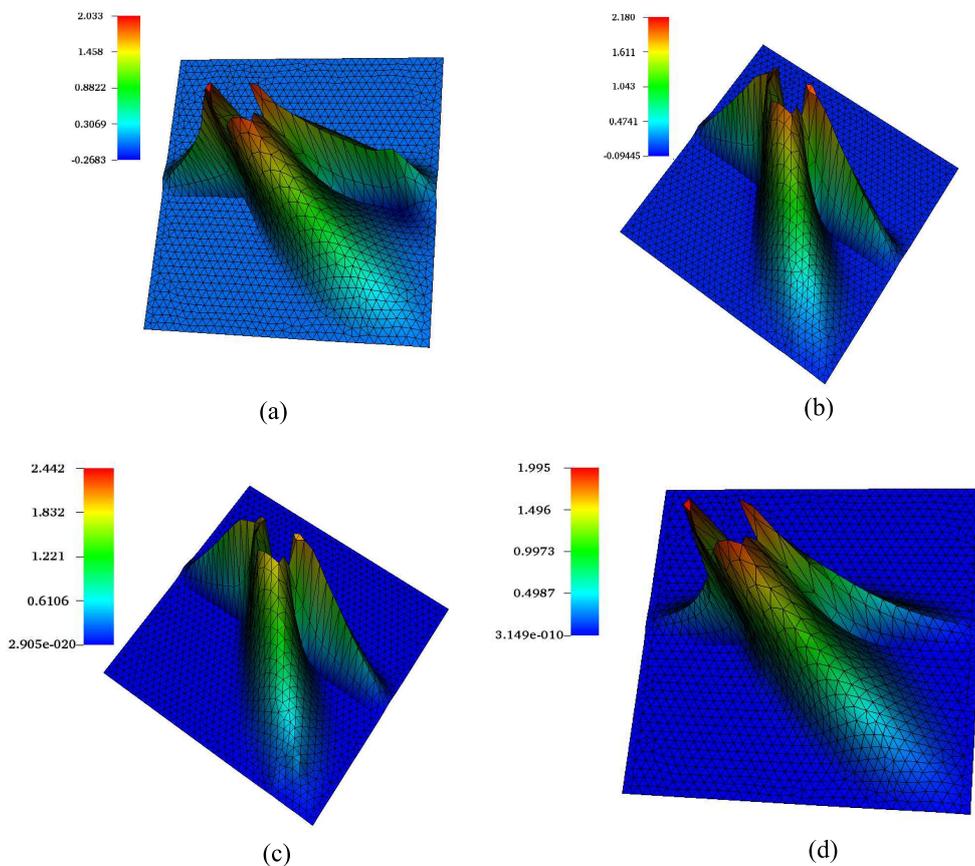
Tabela 7 – Pressões máximas e mínimas obtidos pelos diferentes métodos, utilizando malha triangular não estruturada.

Método	846			2730		
	$p_{min}$	$p_{max}$	$N_{iter}$	$p_{min}$	$p_{max}$	$N_{iter}$
MPFA-H	-0.0694	1.965	—	-0.2683	2.033	—
MPFA-HD	-0.0994	1.913	—	-0.0944	2.180	—
NLFV-PP	$1.223 \times 10^{-8}$	2.169	47	$1.2230 \times 10^{-8}$	3.0110	302
NLFV-DMP	$1.483 \times 10^{-6}$	1.865	180	$3.1488 \times 10^{-10}$	1.9946	643

Fonte – Produzido pelo autor

(MPFA-HD e MPFA-H) violam o DMP para ambas refinamentos das malhas não estruturadas. Nas figuras 26 a e b podemos observar que os métodos lineares ainda conseguem representar a física do problema, embora produzem valores negativos ou maiores que 2. Enquanto, na (figura 26c) o perfil do campo de pressão obtida pelo método NLFV-PP possui valores positivos, embora maiores que 2, dessa forma violando o DMP. Na figura 26d o método NLFV-DMP possui valores que respeitam o DMP tanto para malha grossa (846 volumes de controle) quanto na malha fina (2730 volumes de controle).

Figura 26 – O perfil de pressão obtido pelo método: MPFA-H (a), MPFA-HD (b), NLFV-PP (c) e NLFV-DMP (d).



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

## 5 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO

Em simulação de reservatórios de petróleo, uma maneira de discretizar o termo advectivo que caracteriza a equação hiperbólica de saturação é utilizando o método clássico de ponderação amontante de primeira ordem (FOU) qual é capaz de produzir soluções monótonas a baixo custo computacional, um problema grave do método de primeira ordem, é que o excesso de difusão numérica utilizada para eliminar as oscilações numéricas acaba por afetar sobremaneira a precisão deste método, tornando-o de primeira ordem no espaço de todo o domínio (CARVALHO, 2005). De outra parte, métodos de alta ordem produzem resultados não realísticos, com oscilações numéricas no campo de saturação na vizinhança de choques ou descontinuidades. Por conseguinte, é extremamente importante desenvolver esquemas monótonos, de ordem superior e multidimensionais capazes de manusear o fluxo dos fluidos em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos utilizando malhas não estruturadas poligonais gerais não ortogonais.

### 5.1 Formulação Numérica Explícita para a Equação de Saturação

Integrando a Equação de Saturação, equação (2.14), no intervalo de tempo entre  $t_0$  e  $t$  e no domínio  $\Omega$ , temos:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega} \frac{\partial S_w}{\partial t} dV dt = -\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(S_w) dV dt + \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Omega} Q_w dV dt \quad (5.1)$$

A integral no domínio  $\Omega$  pode ser representada por um somatório de integrais em cada volume de controle  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ . Considerando a equação anterior para um volume de controle genérico  $\hat{L}$  e utilizando o Teorema da Divergência de Gauss no primeiro termo do lado direito da equação (5.1), temos:

$$\int_{t_0}^t \int_{\hat{L}} \frac{\partial S_w}{\partial t} dV dt = -\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{IJ} \vec{F}(S_w) \cdot \vec{n}_{IJ} ds dt + \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\hat{L}} Q_w dV dt \quad (5.2)$$

Integrando a equação acima no intervalo de tempo definido, utilizando o Teorema do Valor Médio e uma aproximação do tipo Euler avançada para a derivada temporal, obtemos:

$$\int_{t_0}^t \int_{\hat{L}} \frac{\partial S_w}{\partial t} dV dt = (S_{w,\hat{L}}^{n+1} - S_{w,\hat{L}}^n) V_{\hat{L}}, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{IJ} \vec{F}(S_w) \cdot \vec{n}_{IJ} ds dt = \frac{\Delta t}{\phi} \sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \vec{F}(S_w)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (5.4)$$

e

$$\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\hat{L}} Q_w dV dt = \frac{\bar{Q}_w \Delta t}{\phi} \quad (5.5)$$

onde  $S_{w,\hat{L}}^n$  e  $S_{w,\hat{L}}^{n+1}$  são, respectivamente, os valores da saturação de água no volume de controle  $\hat{L}$  nos instantes de tempo  $t^n$  e  $t^{n+1}$ . O valor médio do termo fonte ou sumidouro (poços de injeção ou produção) es denotado por  $\bar{Q}_w$  e o passo de tempo por  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

Substituindo as equações (5.3), (5.4) e (5.5) na equação (5.2), temos a equação de saturação na forma discretizada dada pela seguinte equação:

$$S_{w,\hat{L}}^{n+1} = S_{w,\hat{L}}^n - \frac{\Delta t}{\phi V_{\hat{L}}} \sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t \bar{Q}_w}{\phi V_{\hat{L}}} \quad (5.6)$$

onde o fluxo hiperbólico é  $\vec{F}_{IJ} = f_w(S_{w,IJ}^n) \vec{v}_{IJ}$ .

O passo de tempo  $\Delta t$ , deve ser calculado satisfazendo a seguinte condições de estabilidade de Courant-Friedrich-Lewy (CFL) estabelecida por Colella (1990) e modificado para métodos de alta ordem com processo de limitação multidimensional por Park e Kim (2012) e utilizado no contexto simulação de reservatórios de petróleo por Souza (2015):

$$\max_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \left[ \left| (\Delta f_w(S_w) / \Delta S_w)_{IJ} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right| \right] \frac{\Delta t}{V_{\hat{L}}} \leq \frac{C}{2k+1} \quad (5.7)$$

onde  $k$  é utilizado para obtenção de métodos de alta ordem, por exemplo, quando  $k = 0$  estamos tratando um polinômio reconstrutor de grau zero, que neste caso vai gerar naturalmente um método de ponderação amontante de primeira ordem. Assim, o calculo de  $\Delta t$  deve satisfazer a seguinte desigualdade

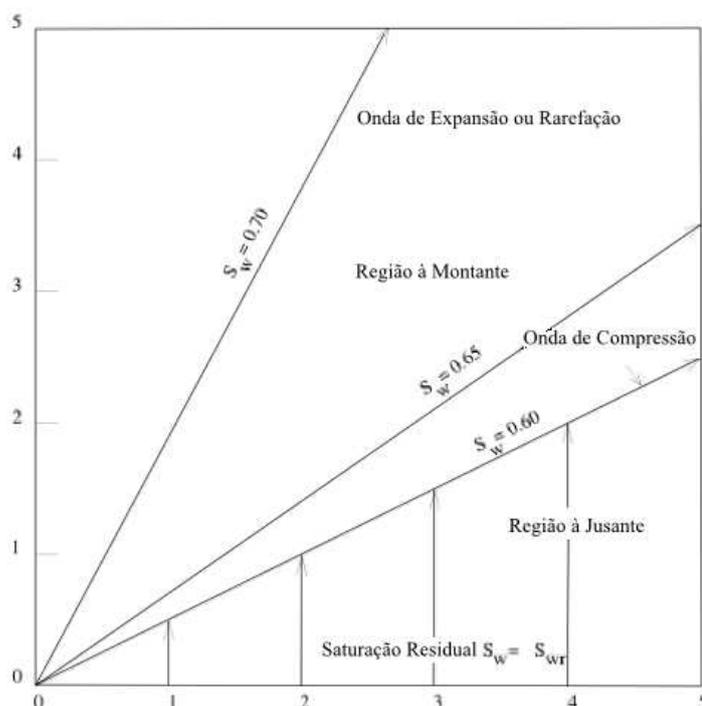
$$\Delta t \leq C \frac{V_{\hat{L}}}{\max_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \left[ \left| (\Delta f_w(S_w) / \Delta S_w)_{IJ} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right| \right]} (2k+1) \quad (5.8)$$

onde  $C$  é número de CFL,  $(\Delta f_w(S_w) / \Delta S_w)_{IJ}$  é valor discreto de  $(\partial f_w(S_w) / \partial S_w)_{IJ}$ , e surge naturalmente ao se definir a velocidade característica em cada face  $IJ$  do volume de controle  $\hat{L}$  (SOUZA, 2015). Note-se que  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  é diretamente calculado a partir da equação de pressão, sendo necessário apenas calcular o fluxo fracionário (veja equação (5.6)). Observe ainda que o fluxo fracionário a ser usado deve ser calculado na superfície de controle  $IJ$ , porém o mesmo é função da saturação conhecida apenas nos pontos de colocação dos volumes de controle adjacentes. Desta forma, através da superfície de controle pode ocorrer uma descontinuidade da propriedade de estado de interesse (i.e., da saturação), caracterizando um problema de Riemann (HIRSCH, 1990).

### 5.1.1 Problema de Riemann e Método de Godunov

As equações (2.16), (2.17) e (2.18) definem um problema de Riemann, no qual certa quantidade da substância é transportada de maneira descontínua através de um dado domínio

Figura 27 – Múltiplos valores para a saturação (situação não-física)



Fonte – Carvalho (2005)

(LEVEQUE, 1992; HELMIG, 1997). Devido ao caráter não convexo do fluxo fracional, as curvas características para o problema de Buckley Leverett, apresentam tanto ondas de compressão  $df/dx \leq 0$ , quanto ondas de rarefação  $df/dx \geq 0$  (CARVALHO, 2005). Na figura 27 de Carvalho (2005), mostra que, para um mesmo ponto, podem existir múltiplas soluções, devido às múltiplas características, representando um fenômeno não-físico, pois fisicamente apenas uma solução é aceitável. Esta intersecção de linhas características se dá porque, ao definirmos as linhas características, não impusemos nenhuma restrição para os valores possíveis das saturações à montante e à jusante do choque de saturações. Para selecionarmos a solução real dentre as várias existentes, utilizamos normalmente a condição de Rankine-Hugoniot e a condição de entropia (LEVEQUE, 1992).

Para encontrar uma solução para o problema de Riemann utilizamos um método numérico proposto por Godunov, que foi desenvolvido no contexto da dinâmica de gases, tendo revolucionado o campo da dinâmica dos fluidos computacional devido ao fato de resolver este problema a partir de três etapas relativamente simples, as quais mencionamos brevemente a seguir (CARVALHO, 2005; HIRSCH, 1990):

- No tempo  $t^k$ , definimos uma aproximação discreta constante da solução no interior de cada volume de controle;
- Obtemos a solução exata local do problema de Riemann na interface de cada volume de controle;

- Ponderamos os estados da variável transportada após um intervalo de tempo  $\Delta t$  (que deve respeitar as condições de CFL) na interface para cada volume de controle.

Os fluxos através das interfaces dos volumes de controle são calculados de modo que uma solução é conservativa e sem oscilações numéricas. Os passos 1 (etapa de projeção) e 3 são puramente numéricos e independem do passo 2 (etapa de evolução), de caráter mais “físico”. Em determinados casos, encontrar a solução exata do problema de Riemann se torna muito custoso, e as soluções podem ser calculadas de forma aproximada, alterando o passo 2 (HIRSCH, 1990). Em outros casos, os passos 1 e 3 podem ser alterados, sem necessariamente mudarmos o passo 2, substituindo aproximações constantes por partes, por aproximações lineares por partes (ou de ordens de ordem superior), definindo esquemas mais acurados, como o método MUSCL ou método MOOD.

### 5.1.2 Fluxo Numérico e Resolvedores do Problema de Riemann

Como dito na seção anterior, as estratégias que discretizam a equação de transporte advectivos são baseadas no método de Gudonov e nos métodos numéricos centrais (SOUZA, 2015), estes métodos são caracterizados por fluxos numéricos de ponderação amontante também chamados fluxos do tipo *Upwind* (VAN LEER, 1979), e aqueles fluxo do tipo Local Lax Friedrichs (LLF) com adição de difusão numérica. Segundo Hirsch (1990) nos métodos centrais a velocidade de propagação não sofre nenhuma preferencia devido a seu aparente estêncil simétrico respeito ao sinal da velocidade, em quanto no método ponderação amontante a discretização é feita seguindo a orientação da malha e o sinal da velocidade de propagação, sendo que em ambos os casos os estados (neste caso a variável saturação) são avaliados a esquerda e a direita. Assim, o fluxo numérico é definido na superfície de controle  $IJ$  de acordo com a estratégia adotada e a ordem de aproximação.

As aproximações de 1ª ordem, são métodos clássicos amplamente utilizados em diferentes áreas da engenharia em particular nos simuladores comerciais da industria petrolífera. Neste método dependendo da direção da velocidade de propagação da informação através da superfície de controle  $IJ$ , escolhemos o valor associado a um dos volumes de controle adjacentes,  $\hat{L}$  ou  $\hat{R}$ , como solução na descontinuidade. Método ponderação à montante de 1ª ordem, foi usado originalmente por Courant et al 1952, baseado no estudo das curvas características da equação  $u_t + au_x = 0$ , em que o sinal de  $a$  prevê o sentido da propagação da informação física. Desde 1981, este resolvedor de Riemann é conhecido como fluxo de Roe (ROE, 1981) é dada pela seguinte relação

$$\vec{F}_{IJ}^{Roe} \cdot \vec{N}_{IJ} = \begin{cases} \vec{F}_{IJ}(S_{w,\hat{L}}) \cdot \vec{N}_{IJ}, & \text{se } \alpha_{IJ} \geq 0 \\ \vec{F}_{IJ}(S_{w,\hat{R}}) \cdot \vec{N}_{IJ}, & \text{se } \alpha_{IJ} < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

aqui  $S_{w,\hat{L}}$  e  $S_{w,\hat{R}}$  representam, os valores de saturação de água nos volumes de controle adjacentes

à superfície de controle  $IJ$ , além disso,  $\vec{F}_{IJ}(S_{w,\hat{L}})$  e  $\vec{F}_{IJ}(S_{w,\hat{R}})$  são os fluxos correspondentes aos volumes de controle  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$ , respectivamente. E a velocidade da onda na superfície de controle (LEVEQUE, 1992; DURLOFSKY, 1993) é aproximada por:

$$\alpha_{IJ} = \left( \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right) \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \quad (5.10)$$

onde o fluxo fracional  $f_w$  é definido na equação (2.15) e  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  é aproximado por algum método numérico descrita nas seções anteriores. Uma característica importante de métodos de ponderação amontante é que ele reproduz soluções não oscilatórias, monótonas, nas regiões de descontinuidade (HIRSCH, 1990).

Para correção de uma possível violação de entropia, quando necessário, o fluxo numérico do tipo Local Lax Friedrichs (LLF) (LEVEQUE, 1992) é dada pela seguinte relação:

$$\vec{F}_{IJ}^{LLF} \cdot \vec{N}_{IJ} = \frac{1}{2} \left( \left( \vec{F}_{IJ}(S_{w,\hat{L}}) + \vec{F}_{IJ}(S_{w,\hat{R}}) \right) \cdot \vec{N}_{IJ} - \max_{\hat{R},\hat{L}} |\alpha_{IJ}| (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \right) \quad (5.11)$$

onde  $\max_{\hat{R},\hat{L}} |\alpha_{IJ}| (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}})$  representa a dissipação numérica artificial.

Tradicionalmente a correção de entropia foi inicialmente proposto por Shu e Osher (1988) para problema de Buckley-Leverett o termo gravitacional. Nessa estratégia o sinal da velocidade característica é avaliada nos estados a esquerda e à direita da superfície de controle genérica  $IJ$ , para isso foi necessário avaliar o produto das primeiras derivadas do fluxo fracional dos estados esquerda e direita, quando aquele produto é estritamente menor que zero pode ocasionar a violação do princípio de entropia na solução produzida. Para essa situação, utilizou o fluxo de LLF já que este método adiciona uma difusão numérica extra para estabilizar o método, mas detalhes sobre esta estratégia pode-se encontrar em Souza (2015). No entanto, em problemas que não possui o termo gravitacional a estratégia de Shu e Osher (1988) não possível aplicar, isto quer dizer que mesmo no tendo o termo gravitacional ainda pode ocorrer a violação do princípio de entropia (LEVEQUE, 1992; HELMIG, 1997; SERNA, 2009). No contexto de magneto-dinâmica, Serna (2009) propos uma estratégia para correção de entropia para problemas que não possua termo gravitacional. Segundo Souza (2015) a autora invoca o fluxo do tipo LLF para a mudança de sinal na primeira derivada, calculado nos dois estados da superfície de controle avaliada  $IJ$ , tal como em Shu e Osher (1988). Uma característica adicional do método é que adiciona a mudança de sinal da segunda derivada igualmente obtida para cada estado, quando o produto das segundas derivadas para ambos estados for menor que zero então o princípio de entropia pode ser violada, nesse caso Serna (2009) recomenda aplicar o LLF. Assim, o fluxo numérico proposto por Serna (2009) é adaptado ao contexto de reservatórios de petróleo por Souza (2015), e o fluxo pode ser

escrito como:

$$\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \begin{cases} \vec{F}_{IJ}^{LLF} \cdot \vec{N}_{IJ}, & \text{se } \begin{cases} \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w, \hat{L}) \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_w, \hat{R}) < 0 \\ \frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2}(S_w, \hat{L}) \frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2}(S_w, \hat{R}) < 0 \end{cases} \\ \vec{F}_{IJ}^{Roe} \cdot \vec{N}_{IJ}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.12)$$

### 5.1.3 Método TVD (*Total Variation Diminishing*)

A solução fraca das equações (2.16), (2.17) e (2.18) tem as seguintes propriedades em função de  $t$ :

- Nenhum extremo local em  $x$  pode ser criado;
- um valor máximo não deve aumentar, e um valor mínimo não deve diminuir.

Segue-se desta propriedade de monotonicidade que a variação total (TV) em  $x$  de  $S_w$  é  $TV(S_w)$  e não esta aumentado em  $t$ , assim:

$$TV(S_w)^{m+1} \leq TV(S_w)^m \quad (5.13)$$

o método é dito TVD (*Total Variation Diminishing*) se satisfaz a equação (5.13) para todo  $t$  e onde

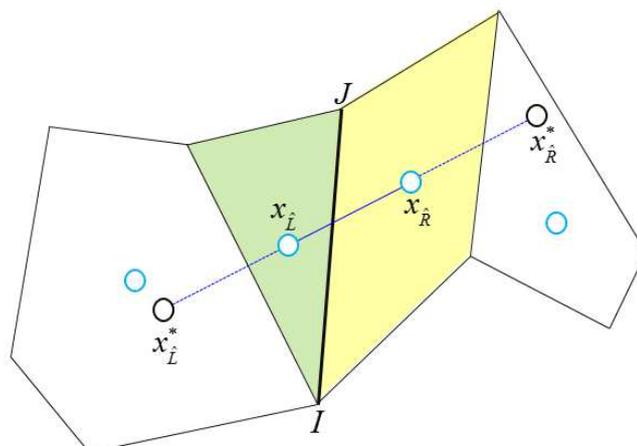
$$TV = \int \left| \frac{\partial S_w}{\partial x} \right| dx \quad (5.14)$$

ou ainda no caso discreto a variação total (TV) de  $S_w$  é dada por

$$TV(S_w) = \sum \left| S_{w,i+1} - S_{w,i} \right| \quad (5.15)$$

Harten (1983) mostrou que todo método numérico monótono é TVD e que todo método TVD preserva a monotonicidade, ou seja, métodos que satisfazem a condição anterior são livres de oscilações, uma vez que a solução inicial seja livre de oscilações. Este método tem sido amplamente utilizado e também estendido ao conceito de métodos TVB (*Total Variation Boundary*) que permitem apenas um aumento limitado da variação total. De acordo com o teorema de Godunov: *Todo método linear monótono para a equação de convecção são necessariamente de primeira ordem* (HIRSCH, 1990). Em uma dimensão, é possível construir um método de alta ordem e que seja TVD, tentando obter uma aproximação de ordem mais alta nas regiões suaves do escoamento e evitando oscilações numéricas nas regiões próximas de gradientes acentuados utilizando métodos monótonos de 1ª ordem. Assim, aproximações de ordem mais alta causam o aparecimento de oscilações espúrias. Em múltiplas dimensões pode-se mostrar que todo método TVD é necessariamente de 1ª ordem e, em geral, usamos critérios menos restritivos como o LED (*Local Extremum Diminishing*). Embora todo método LED é TVD, o recíproco não é verdade.

Figura 28 – Estêncil utilizado para obter uma aproximação de alta ordem



Fonte – Produzido pelo autor

A ideia central por trás da construção de um método de alta resolução e que seja TVD, é tentar obter uma aproximação de ordem mais alta em regiões suaves do escoamento, evitando ainda oscilações nas proximidades de gradientes acentuados, apresentando nestas regiões propriedades similares àquelas de métodos monótonos de ordem mais baixa como os métodos de ponderação à montante de primeira ordem. Em tais métodos a solução é, em geral, de segunda ordem em regiões suaves da solução e de 1ª ordem próximo a “descontinuidades” (SOUZA, 2015). Métodos lineares de ordem superior, embora mais precisos para soluções suaves, não são TVD e tendem a introduzir oscilações espúrias onde surgem descontinuidades ou choques. Para vencer estas desvantagens, foram desenvolvidas várias técnicas não lineares de alta resolução, muitas vezes utilizando limitadores de fluxo (VAN LEER, 1979; HIRSCH, 1990; CARVALHO, 2005).

#### 5.1.4 Formulação Numérica de Alta Ordem tipo MUSCL de Volumes Finitos (HOMFV)

A fim de obter um método de aproximação de segunda ordem nós utilizamos um procedimento de reconstrução linear. Assim as saturações reconstruídas nas superfícies de controle são denotadas por  $S_{w,\hat{L}}^+$  e  $S_{w,\hat{R}}^-$  calculados como (HIRSCH, 1990; LÖHNER, 2008):

$$S_{w,\hat{L}}^+ = S_{w,\hat{L}} + \frac{\psi_{\hat{L}}^*}{4} \left[ (1 - \chi) \Delta_{\hat{L}}^- + (1 + \chi) (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \right] \quad (5.16)$$

$$S_{w,\hat{R}}^- = S_{w,\hat{R}} - \frac{\psi_{\hat{R}}^*}{4} \left[ (1 - \chi) \Delta_{\hat{R}}^+ + (1 + \chi) (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \right] \quad (5.17)$$

Nas equações (5.16) e (5.17), os coeficientes  $\psi_{\hat{L}}^*$  e  $\psi_{\hat{R}}^*$ , são chamados de funções limitadores (que serão detalhadas mais adiante) e “ $\chi$ ” é um parâmetro usado para controlar o grau de aproximação. No presente trabalho  $\chi = 1/3$  que representa um método upwind de terceira

ordem em problemas unidimensionais (HIRSCH, 1990). Ao longo da direção  $\vec{\hat{L}\hat{R}}$  (veja figura 28) definimos a diferença dos operadores, denotado por  $\Delta_{\hat{R}}^+$  e  $\Delta_{\hat{L}}^-$ , como:

$$\Delta_{\hat{L}}^- = S_{w,\hat{L}} - S_{w,\hat{L}^*} = 2\vec{\hat{L}\hat{R}} \cdot \nabla S_{w,\hat{L}} - (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \quad (5.18)$$

$$\Delta_{\hat{R}}^+ = S_{w,\hat{R}^*} - S_{w,\hat{R}} = 2\vec{\hat{L}\hat{R}} \cdot \nabla S_{w,\hat{R}} - (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \quad (5.19)$$

onde  $\vec{\nabla}S_{w,\hat{L}}$  e  $\vec{\nabla}S_{w,\hat{R}}$  representam a reconstrução dos gradientes definida com respeito aos volumes de controle a esquerda e direita, respectivamente.

A reconstrução dos gradientes é calculada a partir dos trabalhos de (BLAZEK, 2015). Esta reconstrução é baseada na expansão em séries de Taylor de primeira ordem para cada volume controle conectado com o VC  $\hat{L}$ .

#### 5.1.4.1 Processo de Limitação

Segundo a literatura é sabido que o uso de métodos estritamente de alta ordem produzem resultados não realísticas, com *overshot* e/ou *undershot* na vizinhança de mudanças abruptas no campo de saturação (HIRSCH, 1990). Então, é preciso utilizar limitadores para suprimir essas oscilações não físicas, sendo que a utilização desses limitadores em regiões de gradientes elevadas reduz a aproximação para aproximações de primeira ordem. Uma estratégia é baseada sobre um processo de limitação sobre a face, a qual é capaz de produzir soluções limitados em geral para muitas aplicações. Embora, o uso de um método de simples extrapolação do gradiente com um limitador por face (DURLOFSKY, 1993) pode ser capaz de produzir soluções não monótonas espacialmente quando utilizamos malhas severamente distorcidas ou meios altamente anisotrópicos (CONTRERAS, 2016). A fim de suprimir esses problemas utilizamos um limitador proposto por Wood e O'Neill (2004), ajustamos para métodos centrados na célula utilizado neste trabalho. Utilizando este limitador junto ao limitador face derivamos um método de alta ordem nomeado HOMFV (CONTRERAS, 2016), assim temos:

$$\psi_i^* = \psi_i \times \psi_{IJ}^{\hat{i}}, \quad \hat{i} = \hat{L}, \hat{R} \quad (5.20)$$

Na equação (5.20),  $\psi_i^*$  é uma função que muda suavemente desde 1 (método de alta ordem) a 0 (método de primeira ordem) na vizinhança de choques,  $\psi_{IJ}^{\hat{i}}$  é responsável em limitar por face as interpolações, i.e. garante que as saturações reconstruídas variam no intervalo  $S_{w,\hat{L}}$ ,  $S_{w,\hat{R}}$  e a função  $\psi_i$ , a qual é definida na equação (5.21) é responsável para mudar o esquema a

primeira ordem sempre que for necessário para garantir a monotonicidade.

$$\psi_{\hat{i}} = \begin{cases} 1, & (S_{w,\max} - S_{w,\min}) \leq \varepsilon_1 \\ 0, & \gamma_{\hat{i}} \geq 1 \text{ ou } \gamma_{\hat{i}} \leq 0 \\ 1, & \delta \leq \gamma_{\hat{i}} \leq (1 - \delta) \\ \gamma_{\hat{i}}/\delta, & 0 < \gamma_{\hat{i}} < \delta \\ (1 - \gamma_{\hat{i}})/\delta, & (1 - \delta) < \gamma_{\hat{i}} < 1 \end{cases} \quad (5.21)$$

onde o parâmetro  $\gamma_{\hat{i}}$  é definido como:

$$\gamma_{\hat{i}} = \frac{S_{w,\hat{i}} - S_{w,\min}}{S_{w,\max} - S_{w,\min}} \quad (5.22)$$

Nas equações (5.21) e (5.22),  $S_{w,\min}$  e  $S_{w,\max}$  são os valores máximos e mínimos da saturação, considerando todos os volumes de controle que são imediatamente vizinhos ao volume de controle  $\hat{i}$  (i.e. aqueles compartilham uma superfície de controle em comum), excluindo a saturação no elemento em questão. Em problemas multidimensionais, a saturação é dita limitada em cada volume de controle do domínio computacional, se satisfaz a seguinte relação,  $0 \leq \gamma_{\hat{i}} \leq 1$ .

O uso de métodos de segunda ordem em todo o domínio computacional, exceto onde a equação (5.22) é aplicada nem sempre é uma estratégia segura, porque não há uma transição suave entre o método de segunda ordem e o método de primeira ordem. Como apontado por Woodfield, Suzuki e Nakabe (2004), uma aproximação segura consiste em introduzir um parâmetro livre  $\delta$  que pertence ao intervalo  $[0, 0.5]$ , tal que:

$$\delta \leq \gamma_{\hat{i}} \leq 1 - \delta \quad (5.23)$$

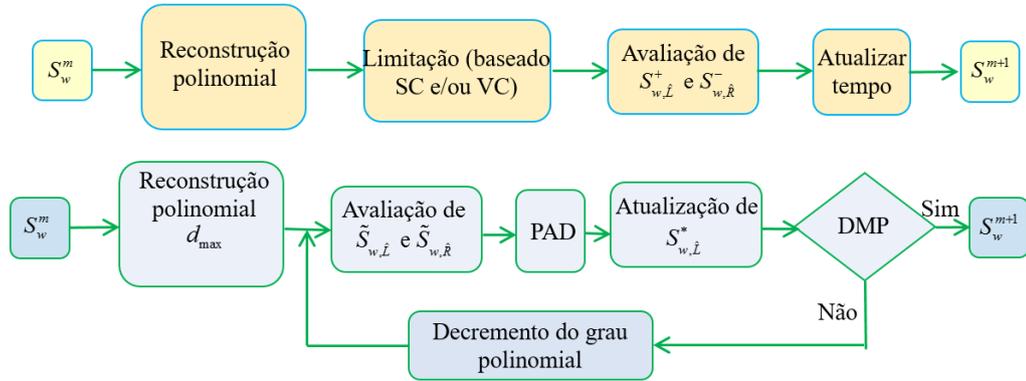
Seguindo o trabalho de Woodfield, Suzuki e Nakabe (2004) na presente tese utilizamos  $\delta = 0.2$  como uma boa escolha que garante robustez e acurácia do método. Note-se que para um valor pequeno do parâmetro, o método é menos difusivo porque o limitador tende a ligar e desligar abruptamente, quanto maior o valor de  $\delta$  produz maior difusividade devido a uma pequena faixa dos valores de  $\gamma_{\hat{i}}$  para o qual o método de segunda ordem é usado. Finalmente, a fim de garantir os valores limitados das saturações nas superfícies de controle, nós utilizamos o limitador de Van Albada (CARVALHO, 2005; LÖHNER, 2008; CONTRERAS, 2016):

$$\psi_{IJ}^{\hat{L}} = \max \left( 0, \frac{2\Delta_{\hat{L}}^- (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) + \varepsilon_2}{\Delta_{\hat{L}}^{-2} + (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}})^2 + \varepsilon_2} \right) \quad (5.24)$$

$$\psi_{IJ}^{\hat{R}} = \max \left( 0, \frac{2\Delta_{\hat{R}}^+ (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) + \varepsilon_2}{\Delta_{\hat{R}}^{+2} + (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}})^2 + \varepsilon_2} \right) \quad (5.25)$$

onde  $\varepsilon_2$  é um valor muito pequeno usado para evitar divisão por zero.

Figura 29 – Ideia do método clássico de alta ordem tipo MUSCL (acima) e ideia do MOOD (baixo)



Fonte – Clain, Diot e Loubere (2011)

Portanto, utilizando as saturações de segunda ordem obtidas nas equações (5.16) e (5.17) e substituindo na aproximação de primeira ordem da equação (5.12) temos:

$$\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \begin{cases} \vec{F}_{IJ}^{LLF}(S_{w,\hat{L}}^+, S_{w,\hat{R}}^-) \cdot \vec{N}_{IJ}, & \text{se } \begin{cases} \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_{w,\hat{L}}^+) \frac{\partial f_w}{\partial S_w}(S_{w,\hat{R}}^-) < 0 \\ \frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2}(S_{w,\hat{L}}^+) \frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2}(S_{w,\hat{R}}^-) < 0 \end{cases} \\ \vec{F}_{IJ}^{Roe}(S_{w,\hat{L}}^+, S_{w,\hat{R}}^-) \cdot \vec{N}_{IJ}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.26)$$

### 5.1.5 Formulação Numérica Multidimensional de Detecção Ótima Ordem (MOOD)

Os métodos clássicos baseados no método de MUSCL de Van Leer (1979) utiliza um procedimento de limitação *a priori* afim de reforçar a monotonicidade (BELL; SHUBIN, 1985; DURLOFSKY, 1993; EDWARDS, 1996; PARK; KIM, 2012; CONTRERAS, 2016), veja figura 29 acima. Ao contrário dos métodos existentes, a estratégia MOOD prossegue com uma limitação *a posteriori*, veja figura 29 baixo. O método MOOD consiste em que as soluções candidatas de ordem superior são primeiramente obtidos por meio de uma formulação robusta tal como uma extrapolação de gradiente ou um método de Galerkin descontínuo. Afim de obter uma aproximação de segunda ordem, empregamos um procedimento de reconstrução linear por partes (VAN LEER, 1979; HIRSCH, 1990; EDWARDS, 1996; EDWARDS, 2006). Portanto, as nossas saturações  $\tilde{S}_{w,\hat{L}}$  e  $\tilde{S}_{w,\hat{R}}$  não limitadas linearmente reconstruídas, são calculados como:

$$\tilde{S}_{w,\hat{L}} = S_{w,\hat{L}} + \frac{1}{4} \left[ (1 - \chi) \Delta_{\hat{L}}^- + (1 + \chi) (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \right] \quad (5.27)$$

$$\tilde{S}_{w,\hat{R}} = S_{w,\hat{R}} - \frac{1}{4} \left[ (1 - \chi) \Delta_{\hat{R}}^+ + (1 + \chi) (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \right] \quad (5.28)$$

onde  $\chi$  representa um parâmetro utilizado para controlar o grau de aproximação (HIRSCH, 1990; LÖHNER, 2008; BLAZEK, 2015). Quando queremos uma aproximação de alta ordem tipo MUSCL, os termos nas equações (5.27) e (5.28) é pre-multiplicado pela função limitadora, veja as equações (5.16) e (5.17). Os parâmetros  $\Delta_{\hat{L}}^-$  e  $\Delta_{\hat{R}}^+$  são definidos nas equações (5.18) e (5.19), respectivamente.

Neste trabalho, o método MOOD considera, inicialmente, o grau polinomial máximo  $d_{max} = 2$  em cada volume de controle para calcular a reconstrução ilimitada na face  $IJ$ , veja as equações (5.27) e (5.28). Para um volume de controle genérico  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ , os valores reconstruídos são utilizados para o cálculo do fluxo numérico dado na equação (5.26) para se obter a seguinte solução candidata:

$$S_{w,\hat{L}}^* = S_{w,\hat{L}}^m - \frac{\Delta t}{\phi V_{\hat{L}}} \left( \sum_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}}} \vec{F}_{IJ}(\tilde{S}_{w,\hat{L}}) \cdot \vec{N}_{IJ} - \bar{Q}_w V_{\hat{L}} \right) \quad \text{para cada } \hat{L} \in \mathcal{M} \quad (5.29)$$

onde  $\tilde{S}_{w,\hat{L}}$  representa o valor da saturação reconstruída sobre a superfície de controle  $IJ$ .

Através de um processo iterativo decremental, determinamos o grau ótimo  $d_{\hat{L}} \leq d_{max}$ , para cada  $\hat{L} \in \mathcal{M}$  quando a solução candidato  $S_{w,\hat{L}}^*$  satisfaz o critério DMP, para todo  $\hat{r} \in \Lambda(\hat{L})$ , assim como:

$$\min_{\hat{r} \in \Lambda(\hat{L})} (S_{w,\hat{L}}^m, S_{w,\hat{r}}^m) \leq S_{w,\hat{L}}^* \leq \max_{\hat{r} \in \Lambda(\hat{L})} (S_{w,\hat{L}}^m, S_{w,\hat{r}}^m) \quad \text{para cada } \hat{L} \in \mathcal{M} \quad (5.30)$$

onde  $\Lambda(\hat{L})$  representa o conjuntos de todos os volumes de controle que são vizinhos imediatos a  $\hat{L}$ .

A estratégia MOOD pode ser resumido como (CLAIN, 2011):

- Inicialização do grau polinomial do volume de controle  $d_{\hat{L}} = d_{max}$  para cada  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ ;
- Avaliação do grau polinomial da superfície de controle  $d_{IJ}$ , utilizando o seguinte critério:

$$d_{IJ} = \begin{cases} \min_{IJ \in \mathcal{E}_{\hat{L}} \cap \mathcal{E}_{\hat{R}}} (d_{\hat{L}}, d_{\hat{R}}) & \text{or} \\ \min_{\hat{R} \in \Lambda(\hat{L})} (d_{\hat{L}}, d_{\hat{R}}) \end{cases}$$

- Atualizar o valor reconstruído  $\tilde{S}_{w,\hat{L}}$  e avaliar o critério PAD para evitar valores reconstruídos negativos, i.e., estabelecemos  $\tilde{S}_{w,\hat{L}} = \max(\tilde{S}_{w,\hat{L}}, 0)$ .
- Atualizar a solução candidato  $S_{w,\hat{L}}^*$ , para cada  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ , utilizando a equação (5.29).

- O grau polinomial é decrementado  $d_{\hat{L}} = \max(0, d_{\hat{L}} - 1)$ , e a solução é recalculado seguindo os passos de 2 a 5 até satisfazer o critério do DMP para todo volumes de controle de  $\mathcal{M}$ .

Então o procedimento iterativo para e  $S_{w,\hat{L}}^{m+1} = \tilde{S}_{w,\hat{L}}$ , para todo  $\hat{L} \in \mathcal{M}$ .

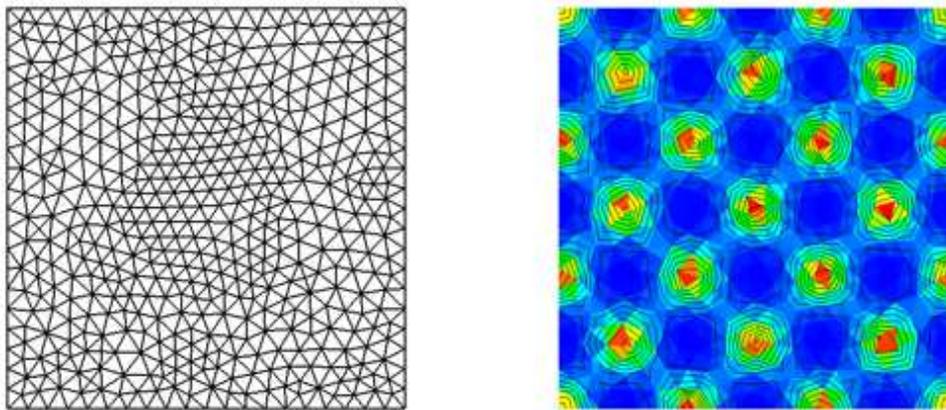
## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS: ESCOAMENTO BIFÁSICO

### 6.1 Escoamento num Reservatório Altamente Heterogêneo

Este exemplo é uma versão adimensionalizada do problema de 1/4 de cinco-poços. Neste caso, o domínio consiste num reservatório altamente heterogêneo isotrópico, em que o valor da porosidade é irrelevante, uma vez que serve apenas para adimensionalizar a equação. A saturação irreduzível de água ( $S_{riw}$ ) e a saturação residual de óleo ( $S_{ro}$ ) são dadas por  $S_{irw} = S_{ro} = 0$ . A razão de mobilidade, essencialmente a razão de viscosidade de óleo e água é dada por  $M = \mu_o/\mu_w = 4$ , e utilizamos a relação de permeabilidade relativa de Brook-Corey da forma  $k_{rw} = S_w^2$  e  $k_{rw} = (1 - S_w)^2$ . A saturação de no poço injetor é um ( $\bar{S}_{winj} = 1$ ), e a pressão no poço produtor é zero ( $p_{prod} = 0$ ). A injeção e os poços de produção são localizados na parte esquerdo inferior e na parte superior direito da malha, respectivamente

$$k(x, y) = \varepsilon^{\sqrt{4}\cos(6\pi x)\cos(6\pi y)} \quad \underline{K}(x, y) = k(x, y)L \quad (6.1)$$

Figura 30 – Malha não estruturada triangular com 1054 volumes de controle (esquerda) e Campo de permeabilidade (direita)

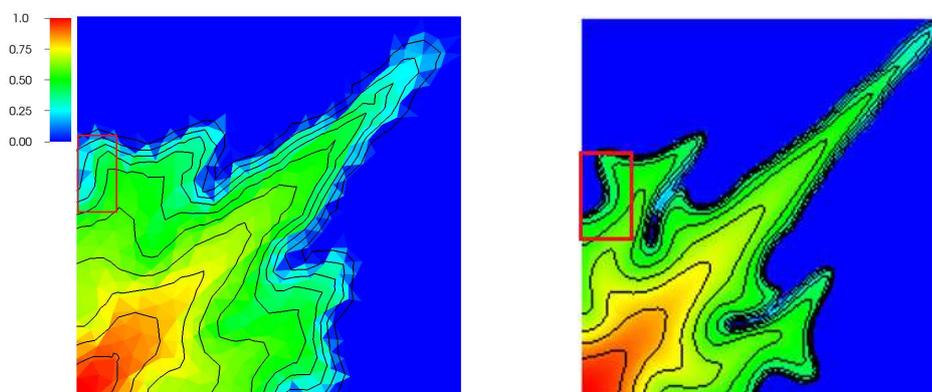


Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Na figura 30 mostramos a malha não estruturada triangular e o campo de permeabilidade utilizado para realizar nossos testes.

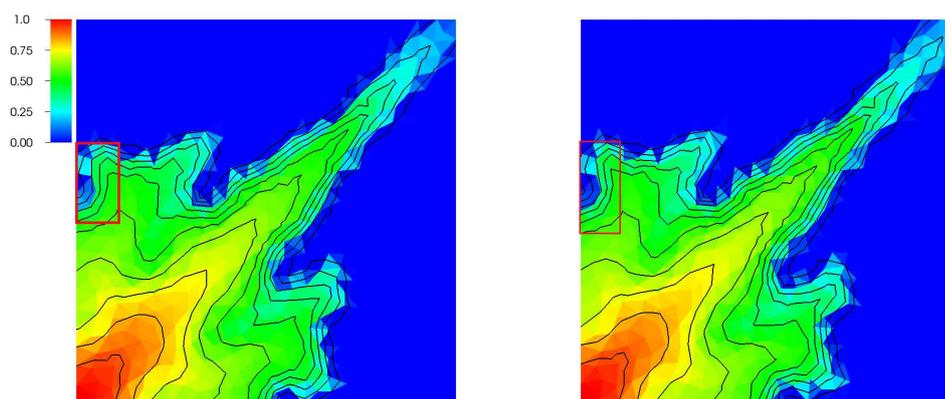
Para os métodos FOU, HOMFV e MOOD, o número CFL adotado foi de 0.6. Como salientado em Chueh, Secanell, Bangerth e Djilali (2010), sempre que uma fase menos viscosa (por exemplo, água) é injetada num reservatório heterogêneo, deslocando um mais viscoso (por exemplo, óleo), devido à distribuição heterogênea do campo da permeabilidade, o fluido mais móvel facilmente avança através das zonas de alta permeabilidade formando dedos viscosos

Figura 31 – Perfil de saturação obtido pelo método MPFA-HD acoplado a: FOU (esquerda) e solução de referencia foi obtido com o método MPFA-O/FOU



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Figura 32 – Perfil de saturação obtido pelo método MPFA-HD acoplado a: HOMFV (esquerda) e MOOD (dereita).

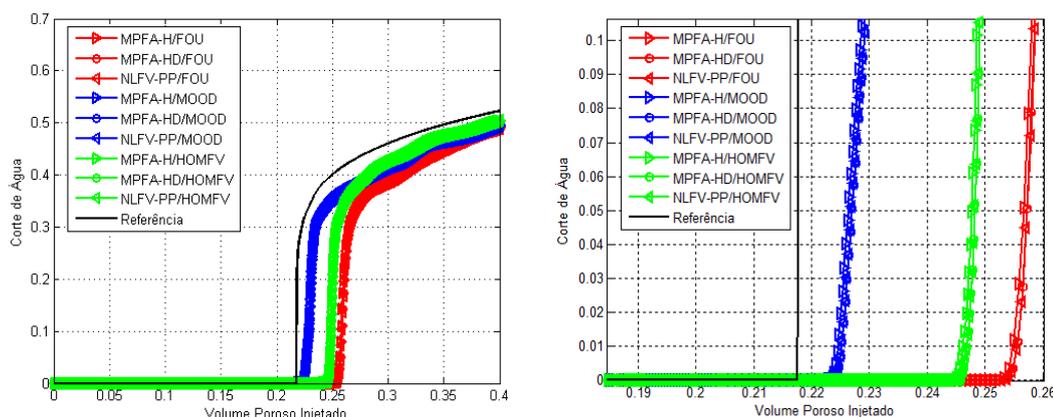


Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

(*fingers*), como pode ser visto nas figuras 31 e 32. Nestas figuras, pode verse claramente que o método MOOD acoplado ao método MPFA-HD é capaz de capturar os dedos viscosos com muita mais precisão que os métodos FOU e HOMFV acoplado ao método MPFA-HD, produzindo um perfil de saturação mais nítida com menos difusão artificial em concordância com a solução de referencia, destacando as rápidas mudanças no campo da permeabilidade, que de alguma forma estão escondidas por o método de baixa ordem.

Na figura 33, observamos que o excesso de difusão produzido pelos métodos propostos acoplado ao método FOU e HOMFV provoca uma irrupção de água bastante retardado em comparação com a curva produzida pela solução de referencia. Em contrapartida, o nossos métodos propostos acoplado ao método MOOD, representam a física do problema de maneira mas acurada, produzindo a curvas de irrupção de água mas aproximado a curva de referencia.

Figura 33 – Curvas de corte de água no poço produtor

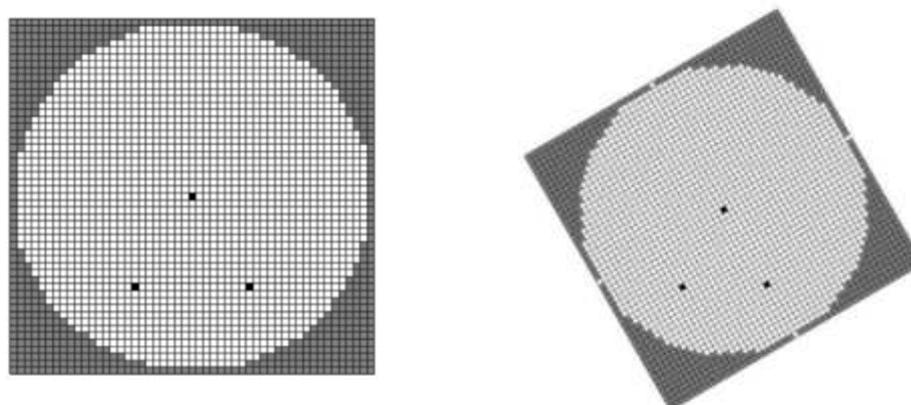


Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

## 6.2 Escoamento Bifásico num Meio Homogêneo com Três Poços

Este problema foi originalmente apresentado por Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011) e foi desenhado para investigar o impacto do GOE em frente a saturação quando começamos a rodar a grade computacional. O domínio, que está totalmente saturado com óleo, é inicialmente definido por um quadrado  $(-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$  rodado pelos seguintes ângulos definidos com a linha horizontal:  $\theta = 0, \pi/4, \pi/6, \pi/8, \pi/12$ .

Figura 34 – Domínio computacional para um problema de três poços, para  $\theta = 0$  (esquerda) e  $\theta = \pi/6$  (direita). A região circular interior este me branco e o outro em cinza. O poço superior é poço injetor, e os poços inferiores são produtores 1 (esquerda) e 2 (direita), adaptado de Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011)

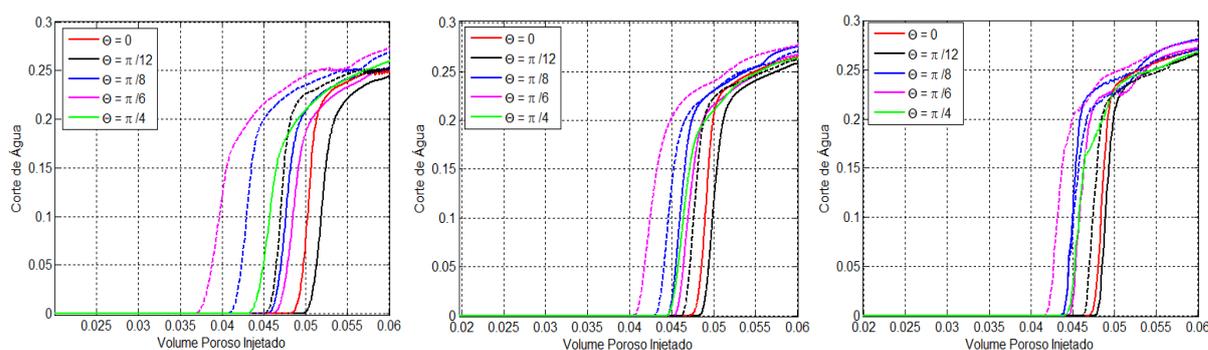


Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Em todos os casos, o domínio foi discretizado com uma malha uniforme quadrilátero  $51 \times 51$  (ver figura 34) e o poço de injeção está localizado no centro do domínio e dois poços de produção são colocados de forma simétrica nos pontos definidos pelas coordenadas

$(\mp 0.3\cos(\pi/6), -0.3\sin(\pi/6))$ . A porosidade é constante em todo o domínio e o tensor de permeabilidade é dada por  $\underline{K} = \underline{L}$  ou  $\underline{K} = 10^{-6}\underline{L}$ , onde  $\underline{L}$  é o segundo tensor identidade fim, dependendo de se a distância do centro do domínio é menos do que 0,48 ou maior, respectivamente. Como apontado por Keilegavlen, Kozdon e Mallison (2010) e Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011), essa estratégia garante o confinamento do fluxo dentro do círculo interno. A razão de viscosidade entre as duas fases é dada por  $M \cong (\mu_o/\mu_w) = 100$ . Neste problema as permeabilidades relativas de água e óleo são definidas, respectivamente como  $k_{rw} = S_w^4$  e  $k_{ro} = (1 - S_w)^2$ . A saturação de água no poço injetor é dada por  $\bar{S}_w^{inj} = 1$  e as pressões nos poços produtores são  $\bar{p}_{prod} = 0$ . Em referência Keilegavlen, Kozdon e Mallison (2010) e Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011), o problema foi resolvido, usando o MPFA-L (AAVATSMARK, 2002) para a solução da equação de pressão e o método de FOU e um método amontante multidimensional. Nestas referências, os autores indicam que a principal vantagem do sistema amontante multidimensional usado é a redução da *biasing* numérica produzido pela relativa orientação do fluxo e a malha subjacente, isto é, o GOE (Grid Orientation Effect). Neste problema, de preferência, o perfil de saturação deve ser simétrica e invariável com os diferentes rotações da malha. Neste caso, vamos nos restringir ao método FOU, HOFVM e MOOD apresentado.

Figura 35 – Curvas de corte de água para o problema homogêneo de três de poços, utilizando: método NLFV-PP/FOU (esquerda); NLFV-PP/HOMFV (centro) e NLFV-PP/MOOD (direita). As linhas tracejadas referem-se ao poço produtor 1 e as linhas contínuas referem-se ao poço produtor 2

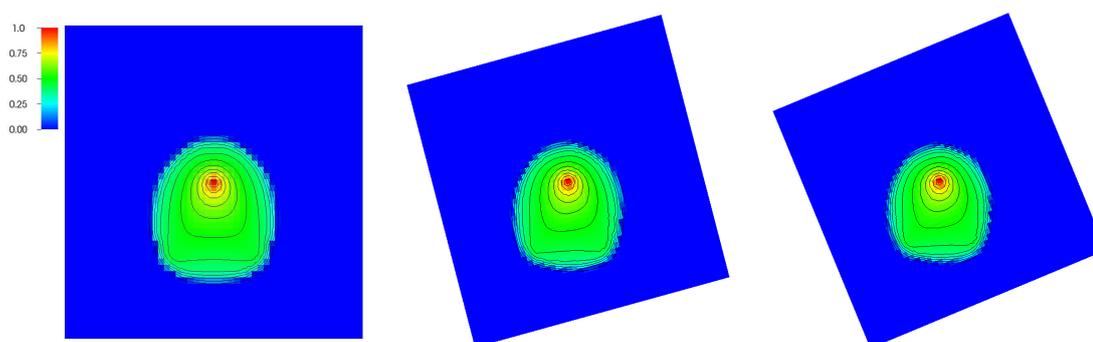


Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software MATLAB

Mesmo que o nosso método adotado MOOD não são "verdadeiramente multidimensional", do ponto de vista dos autores (KEILEGAVLEN, 2010; KOZDON, 2011; EYMARD, 2012) sobre métodos verdadeiramente multidimensional, é evidente que os perfis de saturação mostrado nas figuras 36 e 37 são substancialmente menos afetada pela orientação da malha do que o método FOU mostrado na figura 38 e 39. Os perfis são mais simétrico para todos os ângulos da malha, veja que não foi mostrado os perfis obtidos pelo método HOMFV, já que os perfis são muito parecidos ao método MOOD. Segundo nossas experiencias o perfil de saturação com efeito de orientação mais "patológica" é obtido com o ângulo  $\theta = \pi/6$  e podemos observar

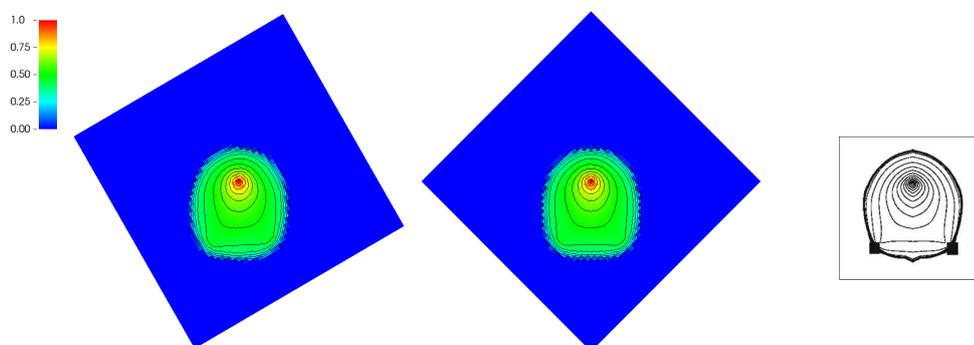
que o método FOU antecipa claramente a romper no poço produtor 2 devido aos fenômenos GOE, além disso, o perfil de saturação foi bastante afeta tendo um *biasing* numérico ao poço produtor 1, veja figura 35 e 38 esquerda. Como pode ser visto nas figuras 35, as curvas de corte de água são muito estreitamente embalado para o MOOD do que para o método FOU e ligeiramente mais estreito do que o método HOMFV, atestando a superioridade sobre o método FOU em todos os ângulos, embora as curvas de corte de água obtidas com o HOMFV e o MOOD ainda sofrem algum espalhamento, indicando que mais melhorias podem ser obtidos se adaptar nossa metodologia para incorporar um cálculo de fluxo verdadeiramente multidimensional no espírito de métodos com fluxo ponderado por massa (EYMARD, 2012; LAMINE; EDWARDS, 2010; HURTADO, 2007).

Figura 36 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com ângulo  $\theta = 0$  (esquerdo),  $\theta = \pi/12$  (centro) e  $\theta = \pi/8$  (esquerda) obtido com o método, NLFV-PP/MOOD



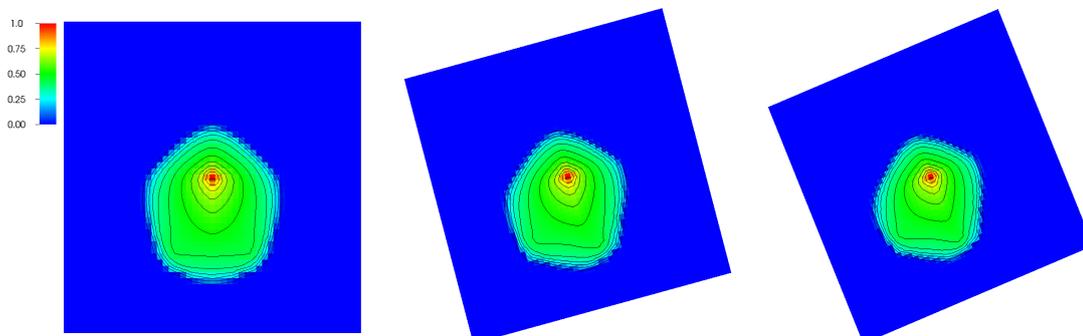
Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Figura 37 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com ângulo  $\theta = \pi/6$  (esquerdo) e  $\theta = \pi/4$  (centro) obtido com o método NLFV-PP/MOOD, o perfil da solução de referencia esta a esquerda da figura



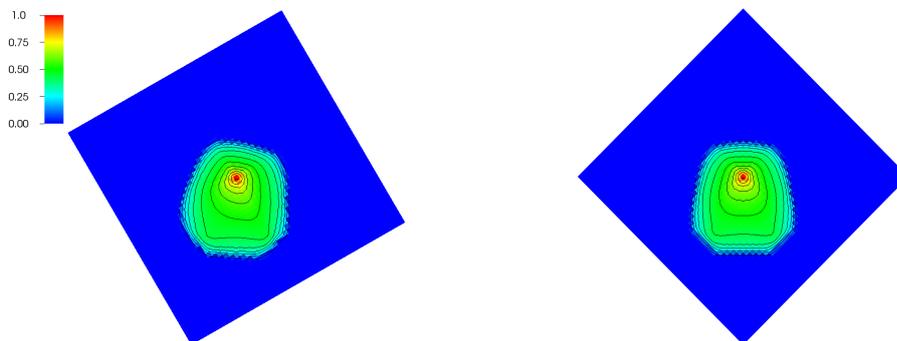
Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Figura 38 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com ângulo  $\theta = 0$  (esquerdo),  $\theta = \pi/12$  (centro) e  $\theta = \pi/8$  (esquerda) obtido com o método, NLFV-PP/FOU



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

Figura 39 – Perfil de saturação para um problema homogêneo com três poços com ângulo  $\theta = \pi/6$  (esquerdo) e  $\theta = \pi/4$  (centro) obtido com o método NLFV-PP/FOU, o perfil da solução de referencia esta a esquerda da figura.



Fonte – Produzido pelo autor utilizando o software de visualização *VisIt*

## 7 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho apresentamos em detalhe formulações de método dos volumes finitos, com incógnitas completamente centrados nos volumes de controle. Utilizando estas formulações para a solução de problemas de escoamento de fluidos incompressíveis em meios porosos rígidos, heterogêneos e anisotrópicos. Os modelos adotados descrevem problemas através de um sistema de equações segregadas, envolvendo uma equação de pressão e uma de saturação, acopladas através da velocidade de Darcy. Uma estratégia tipo IMPES foi utilizada para a solução sequencial dessas equações.

Para a resolver a equação de pressão, formulações robustas são propostas para lidar com tensores de permeabilidade e malhas arbitrários. Essas formulações foram comparadas com métodos clássicos dos Volumes Finitos (MPFA-O e MPFA-FPS). Conforme esperado, nos experimentos numéricos, feitos com problemas benchmark da literatura, verificou-se que todas as formulações propostas, são capazes de produzir soluções exatas para campos lineares de pressão inclusive para reservatórios com permeabilidade descontínua e alta anisotropia. Para as formulações com aproximação de fluxo por múltiplos pontos (MPFA-HD) e formulações não lineares (NLFV-PP e NLFV-DMP), taxas de convergência de 2ª ordem no campo de pressão e ordem superior a 1 no campo de velocidade foram obtidas, mesmo para um reservatório com tensor de permeabilidade ortotrópico, heterogêneo e utilizando malhas distorcidas.

Na avaliação da positividade das soluções em problemas com elevada razão de anisotropia, conforme esperado, nenhum dos métodos clássicos como MPFA-O e MPFA-FPS foram capaz de produzir soluções monótonas para esse problema. Embora nossos métodos propostos como MPFA-HD e o MPFA-H foram capazes de preservar a positividade sem produzir oscilações espúrias. As soluções obtidas com o MPFA-O e MPFA-FPS apresentaram campos de pressão sem apelo físico, que nem foram diminuindo com o refinamento da malha. No entanto, o MPFA-O mantiveram amplitudes maiores do que as observadas para o MPFA-FPS. A aproximação linear da pressão (com suporte triangular), característica do MPFA-O, implica em regiões em que a pressão não é interpolada e sim extrapolada. Dessa forma, é esperado que oscilações espúrias ocorram para problemas com elevada razão de anisotropia e malhas que não são k-ortogonais (LIPNIKOV, 2007; CHEN, 2008; EDWARDS; ZHENG, 2008).

Por outro lado, como esperado nossos métodos não lineares como NLFV-PP respeita a positividade do campo de pressão mesmo em meios altamente heterogêneos e anisotrópicos, mas não respeita o critério do DMP como mostrados em nossos teste numéricos, em contrapartida o método NLFV-DMP respeita o princípio de máximo discreto mesmo em meios altamente heterogêneos e anisotrópicos.

Para discretizar a equação de saturação hiperbólica não-linear, nós utilizamos um método de alta ordem tipo MUSCL nomeado como HOMFV (CONTRERAS, 2016) com base num

mínimo de reconstrução gradiente quadrados com uma adequada estratégia de limitação, a fim de reforçar a monotonia, esta formulação pode ser utilizada em qualquer malha poligonal, além disso, apresentamos o método MOOD no contexto de simulação de reservatórios e comparamos o potencial dele com o método HOMFV e o FOU. Alguns exemplos como modelo foram utilizados para mostrar o potencial dos métodos para lidar com problemas que envolvem malhas estruturadas e não-estruturadas e meios altamente heterogêneas e anisotrópicos com razão de mobilidade moderada, estas características são comuns dos reservatórios de petróleo. Nós pudemos ver uma clara melhoria do método MOOD em nossos resultados quando comparamos os obtidos pela nossa formulação contra os métodos HOMFV e o clássico FOU, particularmente em termos de resolução da frente de saturação e na mitigação do GOE, envolvendo meios heterogêneos e anisotrópicos. Finalmente, os métodos que resolvem a equação de pressão acoplados aos métodos HOMFV e MOOD produziram em geral resultados bastante aceitáveis em todas nossas simulações que o método FOU. No entanto, é importante de mencionar que, mesmo quando consideramos os métodos MPFA-HD, MPFA-H e NLFV-PP acoplado com o método FOU não foram tão confiáveis do que os obtidos com métodos de alta ordem. No futuro próximo, pretendemos usar a presente formulação juntos com um processo de adaptação de malha automática para obter maior acurácia e menos computacional e inferior para melhorar a sua robustez usando uma formulação de ordem superior num método verdadeiramente multidimensional, a fim de minimizar ainda mais o efeito de orientação de malha, como sugerido por (HURTADO, 2007; LAMINE; EDWARDS, 2010; LAMINE; EDWARDS, 2013).

Finalmente, os bons resultados obtidos com as formulações numéricas propostas devem motivar a realização de pesquisas adicionais visando à extensão da formulação para problemas mais gerais. Como extensões imediatas do nosso trabalho, podemos mencionar:

- Empregar técnicas de aproximação de baixa ordem tipo upwind multidimensional. Além disso, método de alta resolução para o cálculo de campo de saturações que sejam verdadeiramente multidimensionais e que, portanto, eliminem ou minimizem efeitos de orientação de malhas;
- Extensão do simulador para geometrias tridimensionais;
- Implementação de toda a formulação desenvolvida em computadores paralelos de memória distribuída a fim de simular problemas complexos em geometrias tridimensionais de grande porte;
- Aperfeiçoamento do modelo físico, introduzindo os termos de gravidade e de capilaridade;
- Aprofundamento do estudo do efeito da orientação de malhas na modelagem e na simulação de escoamentos bifásicos em meios porosos com a metodologia apresentada no presente trabalho;
- Implementação das seguintes metodologias:

“Sequencial Implícita”: Formulação segregada em que, assim como a equação de pressão, a equação de saturação também é resolvida de maneira implícita, permitindo a utilização de intervalos de tempo maiores;

“Totalmente implícita”: Formulação em que as equações de transporte são rearranjadas de maneira que a pressão e a saturação são incógnitas simultâneas das mesmas equações, permitindo a utilização de intervalos de tempo que, independente da complexidade física do problema, são limitados apenas pela precisão da aproximação;

- Estudar e implementar outros métodos iterativos como Newton-Krylov e que preservem monotonicidade para melhorar a eficiência computacional dos métodos NLFV-PP e NLFV-DMP;
- Generalização do MOOD a 3-D e extensão de altíssima ordem ( $>2$ ), o qual necessita um procedimento de reconstrução adequado;
- Num futuro próximo nós acoplaremos o MOOD com um “Flow Oriented Method” verdadeiramente Multidimensional para reduzir ainda mais o GOE mesmo para fluxos com altas taxas de mobilidade.

# REFERÊNCIAS

- AAVATSMARK, I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Computational Geosciences*, Springer, v. 6, n. 3-4, p. 405–432, 2002.
- AAVATSMARK, I.; BARKVE, T.; BØE, O.; MANNSETH, T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part i: Derivation of the methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 19, n. 5, p. 1700–1716, 1998.
- AAVATSMARK, I.; EIGESTAD, G.; MALLISON, B.; NORDBOTTEN, J. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Wiley Online Library, v. 24, n. 5, p. 1329–1360, 2008.
- AGÉLAS, L.; EYMARD, R.; HERBIN, R. A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media. *Comptes Rendus Mathématique*, Elsevier, v. 347, n. 11, p. 673–676, 2009.
- AZIZ, K.; SETTARI, A. *Petroleum reservoir simulation*. [S.l.]: Chapman & Hall, 1979.
- BAJOR, O.; CORMACK, D. A new method for characterizing the grid orientation phenomenon. Society of Petroleum Engineers, 1989.
- BASTIAN, P. *Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media*. [S.l.]: Springer, 2003.
- BELL, J.; SHUBIN, G. Higher-order godunov methods for reducing numerical dispersion in reservoir simulation. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.], 1985.
- BERTOLAZZI, E.; MANZINI, G. A second-order maximum principle preserving finite volume method for steady convection-diffusion problems. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 43, n. 5, p. 2172–2199, 2005.
- BLANC, X.; LABOURASSE, E. A positive scheme for diffusion problems on deformed meshes. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Wiley Online Library, 2015.
- BLAZEK, J. *Computational fluid dynamics: principles and applications*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2015.
- BRAND, C.; HEINEMANN, J.; AZIZ, K. The grid orientation effect in reservoir simulation. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Symposium on Reservoir Simulation*. [S.l.], 1991.
- BRENIER, Y.; JAFFRÉ, J. Upstream differencing for multiphase flow in reservoir simulation. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 28, n. 3, p. 685–696, 1991.
- CARVALHO, D. K. E. de. *Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2005.

- CHEN, Q.-Y.; WAN, J.; YANG, Y.; MIFFLIN, R. T. Enriched multi-point flux approximation for general grids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 227, n. 3, p. 1701–1721, 2008.
- CHEN, Z. *Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery*. [S.l.]: Siam, 2007. v. 77.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; LI, B. An improved impes method for two-phase flow in porous media. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 54, n. 3, p. 361–376, 2004.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. [S.l.]: Siam, 2006. v. 2.
- CHOI, B.-J.; ISKANDARANI, M.; LEVIN, J.; HAIDVOGEL, D. B. A spectral finite-volume method for the shallow water equations. *Monthly Weather Review*, v. 132, n. 7, p. 1777–1791, 2004.
- CHUEH, C.; SECANELL, M.; BANGERTH, W.; DJILALI, N. Multi-level adaptive simulation of transient two-phase flow in heterogeneous porous media. *Computers & fluids*, Elsevier, v. 39, n. 9, p. 1585–1596, 2010.
- CLAIN, S.; DIOT, S.; LOUBERE, R. A high-order finite volume method for systems of conservation laws—multi-dimensional optimal order detection (mood). *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 230, n. 10, p. 4028–4050, 2011.
- COATS, K. Impes stability: The stable step. 2001.
- COLELLA, P. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 87, n. 1, p. 171–200, 1990.
- COLELLA, P.; DORR, M. R.; HITTINGER, J. A.; MARTIN, D. F. High-order, finite-volume methods in mapped coordinates. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 230, n. 8, p. 2952–2976, 2011.
- CONTRERAS, F.; LYRA, P.; SOUZA, M.; CARVALHO, D. A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 127, p. 1–16, 2016.
- CRUMPTON, P.; SHAW, G.; WARE, A. Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 116, n. 2, p. 343–358, 1995.
- DURLOFSKY, L. J. A triangle based mixed finite element finite volume technique for modeling two phase flow through porous media. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 105, n. 2, p. 252–266, 1993.
- DURLOFSKY, L. J.; ENGQUIST, B.; OSHER, S. Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 98, n. 1, p. 64–73, 1992.
- EDWARDS, M. G. A higher-order godunov scheme coupled with dynamic local grid refinement for flow in a porous medium. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 131, n. 3, p. 287–308, 1996.

- EDWARDS, M. G. M-matrix flux splitting for general full tensor discretization operators on structured and unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 160, n. 1, p. 1–28, 2000.
- EDWARDS, M. G. Higher-resolution hyperbolic-coupled-elliptic flux-continuous cvd schemes on structured and unstructured grids in 2-d. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 51, n. 9-10, p. 1059–1077, 2006.
- EDWARDS, M. G.; ROGERS, C. F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Computational Geosciences*, Springer, v. 2, n. 4, p. 259–290, 1998.
- EDWARDS, M. G.; ZHENG, H. A quasi-positive family of continuous darcy-flux finite-volume schemes with full pressure support. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 227, n. 22, p. 9333–9364, 2008.
- EIGESTAD, G.; KLAUSEN, R. On the convergence of the multi-point flux approximation o-method: Numerical experiments for discontinuous permeability. *Numerical methods for partial differential equations*, Wiley Online Library, v. 21, n. 6, p. 1079–1098, 2005.
- ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J. H. K.; GREGORY, R.; ERTEKIN, J. H. T.; GREGORY, R. K. *Basic applied reservoir simulation*. [S.l.: s.n.], 2001.
- EWING, R. E. *The mathematics of reservoir simulation*. SIAM, 1983.
- EYMARD, R.; GUICHARD, C.; MASSON, R. Grid orientation effect and multipoint flux approximation. In: *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 419–427.
- EYMARD, R.; GUICHARD, C.; MASSON, R. Grid orientation effect in coupled finite volume schemes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Oxford University Press, p. drs016, 2012.
- FRIIS, H. A.; EVJE, S. Numerical treatment of two-phase flow in capillary heterogeneous porous media by finite-volume approximations. *Int. J. Numer. Anal. Mod.*, v. 9, p. 505–528, 2012.
- FUCÍK, R.; ILLANGASEKARE, T. H.; MIKYŠKA, J. Evaluation of saturation-dependent flux on two-phase flow using generalized semi-analytic solution. In: CITESEER. *Proc. of the Czech Japanese Seminar in Applied Mathematics, Prague, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Czech Technical University in Prague*. [S.l.], 2005. p. 23–35.
- FUHRMANN J., O. M.; ROHDE, C. *Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2014.
- GAO, Z.; WU, J. A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 67, n. 12, p. 2157–2183, 2011.
- GAO, Z.; WU, J. A small stencil and extremum-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary 2d and 3d meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 250, p. 308–331, 2013.
- GAO, Z.; WU, J. A second-order positivity-preserving finite volume scheme for diffusion equations on general meshes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 37, n. 1, p. A420–A438, 2015.

- GAO, Z.-M.; WU, J.-M. A linearity-preserving cell-centered scheme for the anisotropic diffusion equations. In: *Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects*. [S.l.]: Springer, 2014. p. 293–301.
- HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 49, n. 3, p. 357–393, 1983.
- HELMIG, R. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997.
- HERBIN, R.; HUBERT, F. Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids. In: WILEY. *Finite volumes for complex applications V*. [S.l.], 2008. p. 659–692.
- HIRSCH, C. Numerical computation of internal and external flows. *Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, John Wiley & Sons, v. 2, 1990.
- HURTADO, F.; MALISKA, C.; SILVA, A.; CORDAZZO, J. A quadrilateral element-based finite-volume formulation for the simulation of complex reservoirs. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *Latin American & Caribbean Petroleum Engineering Conference*. [S.l.], 2007.
- HURTADO, F. S. V. *Formulação Tridimensional de Volumes Finitos para Simulação de Reservatórios de Petróleo com Malhas Não-Estruturadas Híbridas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- KEILEGAVLEN, E.; KOZDON, J.; MALLISON, B. Monotone multi-dimensional upstream weighting on general grids normal access. *ECMOR XII - 12th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, 2010.
- KEILEGAVLEN, E.; KOZDON, J. E.; MALLISON, B. T. Multidimensional upstream weighting for multiphase transport on general grids. *Computational Geosciences*, Springer, v. 16, n. 4, p. 1021–1042, 2012.
- KO, S.; AU, A. D. A weighted nine-point finite-difference scheme for eliminating the grid orientation effect in numerical reservoir simulation. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. [S.l.], 1979.
- KOZDON, J. E.; MALLISON, B. T.; GERRITSEN, M. G. Multidimensional upstream weighting for multiphase transport in porous media. *Computational Geosciences*, Springer, v. 15, n. 3, p. 399–419, 2011.
- LAMINE, S.; EDWARDS, M. G. Multidimensional upwind convection schemes for flow in porous media on structured and unstructured quadrilateral grids. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 234, n. 7, p. 2106–2117, 2010.
- LAMINE, S.; EDWARDS, M. G. Higher order cell-based multidimensional upwind schemes for flow in porous media on unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 259, p. 103–122, 2013.
- LE POTIER, C. Schéma volumes finis monotone pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangles non structurés. *Comptes Rendus Mathématique*, Elsevier, v. 341, n. 12, p. 787–792, 2005.

- LE POTIER, C. A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators. *International Journal on Finite Volumes*, p. 1–20, 2009.
- LEE, S.; EFENDIEV, Y.; TCHELEPI, H. Hybrid upwind discretization of nonlinear two-phase flow with gravity. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 82, p. 27–38, 2015.
- LEVEQUE, R. J. *Numerical methods for conservation laws*. [S.l.]: Springer, 1992. v. 132.
- LIPNIKOV, K.; SHASHKOV, M.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 492–512, 2007.
- LIPNIKOV, K.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 228, n. 3, p. 703–716, 2009.
- LIPNIKOV, K.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. A monotone finite volume method for advection–diffusion equations on unstructured polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 229, n. 11, p. 4017–4032, 2010.
- LIPNIKOV, K.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. Minimal stencil finite volume scheme with the discrete maximum principle. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, v. 27, n. 4, p. 369–386, 2012.
- LÖHNER, R. *Applied computational fluid dynamics techniques: an introduction based on finite element methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- NIKITIN, K.; TEREKHOV, K.; VASSILEVSKI, Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations and multiphase flows. *Computational Geosciences*, Springer, v. 18, n. 3-4, p. 311–324, 2014.
- PARK, J. S.; KIM, C. Multi-dimensional limiting process for finite volume methods on unstructured grids. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 65, p. 8–24, 2012.
- PRICE, H. S. Monotone and oscillation matrices applied to finite difference approximations. *Mathematics of Computation*, JSTOR, v. 22, n. 103, p. 489–516, 1968.
- QUEIROZ, L.; SOUZA, M.; CONTRERAS, F.; LYRA, P.; CARVALHO, D. On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 74, n. 4, p. 270–291, 2014.
- RAMIREZ, G. G.; SOUZA, M. R. de A.; CARVALHO, D. K. E. de; LYRA, P. R. M. Spectral (finite) volume method for the solution of 1-d two-phase flows in porous media. *XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, p. 1–20, 2013.
- ROE, P. L. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 43, n. 2, p. 357–372, 1981.
- SERNA, S. A characteristic-based nonconvex entropy-fix upwind scheme for the ideal magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 228, n. 11, p. 4232–4247, 2009.

- SHENG, Z.; YUAN, G. The finite volume scheme preserving extremum principle for diffusion equations on polygonal meshes. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 230, n. 7, p. 2588–2604, 2011.
- SHENG, Z.; YUAN, G. An improved monotone finite volume scheme for diffusion equation on polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 231, n. 9, p. 3739–3754, 2012.
- SHENG, Z.; YUAN, G. A cell-centered nonlinear finite volume scheme preserving fully positivity for diffusion equation. *Journal of Scientific Computing*, Springer, p. 1–25, 2015.
- SHU, C.-W.; OSHER, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 77, n. 2, p. 439–471, 1988.
- SOUZA, M. R. d. A. *Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos "Verdadeiramente" Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2015.
- SWEBY, P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 21, n. 5, p. 995–1011, 1984.
- TODD, M.; O'DELL, P.; HIRASAKI, G. Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulators. *Society of Petroleum Engineers Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 12, n. 06, p. 515–530, 1972.
- VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 101–136, 1979.
- VIDOVIĆ, D.; DIMKIĆ, M.; PUŠIĆ, M. Accelerated non-linear finite volume method for diffusion. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 230, n. 7, p. 2722–2735, 2011.
- WANG, Z. J. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids. basic formulation: Basic formulation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 178, n. 1, p. 210–251, 2002.
- WOOD, R.; O'NEILL, M. An always convergent method for finding the spectral radius of an irreducible non-negative matrix. *ANZIAM Journal*, v. 45, p. 474–485, 2004.
- WOODFIELD, P. L.; SUZUKI, K.; NAKABE, K. A simple strategy for constructing bounded convection schemes for unstructured grids. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 46, n. 10, p. 1007–1024, 2004.
- WU, J.; GAO, Z. Interpolation-based second-order monotone finite volume schemes for anisotropic diffusion equations on general grids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 275, p. 569–588, 2014.
- YANOSIK, J.; MCCRACKEN, T. A nine-point, finite-difference reservoir simulator for realistic prediction of adverse mobility ratio displacements. *Society of Petroleum Engineers Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 19, n. 04, p. 253–262, 1979.
- YUAN, G.; SHENG, Z. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 227, n. 12, p. 6288–6312, 2008.

# APÊNDICE A – MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS LINEAR UTILIZANDO PONTOS HARMÔNICOS (MPFA-H)

Nesta seção, descrevemos um método dos volumes finitos linear proposto por (GAO; WU, 2014), este método foi proposto inicialmente para resolver numericamente problemas de difusão em meios heterogêneos e anisotrópicos sobre malhas poligonais quaisquer. Os valores desconhecidos são centrados nos volumes de controle e o método baseia-se no critério de preservação da linearidade e no uso dos pontos de média harmônica localizados nas superfícies de controle da heterogeneidade. O critério de preservação da linearidade requer que a derivação do método seja exata sempre que a solução seja uma função linear com tensor de difusão seja constante na malha computacional. O ponto chave na construção deste método é a discretização do fluxo através de cada superfície de controle. Nós primeiro construímos os fluxos unilaterais em cada célula independentemente e então, integramos os dois fluxos unilaterais em ambos os lados da superfície de controle para obter a expressão de fluxo única. O ponto harmônico sugerido em Agélas, Eymard e Herbin (2009) é outro fator importante na construção dos fluxos unilaterais. Usualmente, cada superfície de controle possui um ponto harmônica associado a ele, que permite que nossa expressão de fluxo de um lado processe um pequeno estêncil envolvendo apenas o volume de controle em questão e os volumes de controle que têm uma face comum com ela. Esta natureza facilita a implementação do nosso esquema em malhas poligonais não estruturadas.

Este método satisfaz as seguintes propriedades:

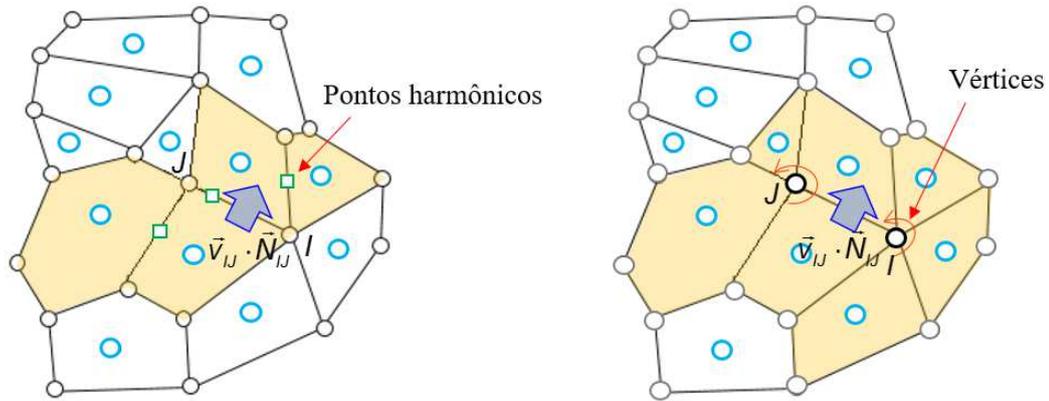
- É localmente conservativo e possui um estêncil local;
- Permite tensores cheios e lida com malhas não estruturadas;
- Possui uma precisão superior a primeira ordem para soluções lisas

De maneira similar ao método NLFV-PP, o fluxo único sobre a face  $IJ \in \mathcal{E}^{int}$  pode ser expressa como a combinação convexa dos fluxos laterais dadas nas equações (3.29) e (3.31)

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = w_{\hat{R},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} - w_{\hat{L},IJ} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (\text{A.1})$$

Note que a equação anterior satisfaz a equação da conservação local definida em (3.5). A diferença dos métodos não lineares, neste método linear os pesos  $w_{\hat{L},IJ}$  e  $w_{\hat{R},IJ}$  são definidos tendo influencia somente de parâmetros físicos-geométricos sem envolver as variáveis auxiliares

Figura 40 – Representação do estêncil para o cálculo do fluxo utilizando os pontos harmônicos: figura esquerda é o estêncil do método MPFA-H e da direita é estêncil usando pelo método MPFA-HD



Fonte – Produzido pelo autor

e respeitando a equação de restrição dada em (3.34), assim:

$$w_{\hat{L},IJ} = \frac{h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)}}{h_{\hat{R},IJ} K_{\hat{L},IJ}^{(n)} + h_{\hat{L},IJ} K_{\hat{R},IJ}^{(n)}} \quad \text{e} \quad w_{\hat{R},IJ} = 1 - w_{\hat{L},IJ} \quad (\text{A.2})$$

onde  $h_{\hat{L},IJ}$  e  $h_{\hat{R},IJ}$  representam as distancias ortogonais à face  $IJ$  projetadas desde os centroides dos volumes de controle  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$ , respectivamente.

As projeções normais dos tensores de permeabilidade  $\underline{K}_{\hat{L}}$  (resp.  $\underline{K}_{\hat{R}}$ ) sobre a face  $IJ$  são denotados por  $K_{\hat{L},IJ}^{(n)}$  (resp.  $K_{\hat{R},IJ}^{(n)}$ ) e dadas na seguinte equação

$$K_{\hat{L},IJ}^{(n)} = \vec{n}_{IJ}^\top \underline{K}_{\hat{L}} \vec{n}_{IJ} \quad \text{e} \quad K_{\hat{R},IJ}^{(n)} = \vec{n}_{JI}^\top \underline{K}_{\hat{R}} \vec{n}_{JI} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\vec{n}_{IJ}$  é o vetor normal unitário a face  $IJ$ .

Substituindo as equações (3.29) e (3.31) em (3.63) e manipulando algebricamente, temos:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \lambda_{IJ} \|\vec{IJ}\| \left( \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R},IJ} p_{\hat{R}} + \sum_{\gamma=i,j} \left( \mathcal{D}_{\hat{R},\gamma(IJ)} p_{\hat{R},\gamma(IJ)} - \mathcal{D}_{\hat{L},\gamma(IJ)} p_{\hat{L},\gamma(IJ)} \right) \right) \quad (\text{A.4})$$

os novos coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{D}$  são expressos como segue:

$$\mathcal{A}_{\hat{L},IJ} = w_{\hat{L},IJ} \left( \xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)} \right), \quad \mathcal{A}_{\hat{R},IJ} = w_{\hat{R},IJ} \left( \xi_{\hat{R},i(IJ)} + \xi_{\hat{R},j(IJ)} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{D}_{\hat{L},\gamma(IJ)} = w_{\hat{L},IJ} \xi_{\hat{L},\gamma(IJ)} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{\hat{R},\gamma(IJ)} = w_{\hat{R},IJ} \xi_{\hat{R},\gamma(IJ)} \quad \text{para} \quad \gamma = i, j. \quad (\text{A.6})$$

onde os parâmetros  $\xi_{\hat{L},\gamma(IJ)}$  e  $\xi_{\hat{R},\gamma(IJ)}$  com  $\gamma = i, j$  são dadas nas equações (3.30) e (3.32).

As pressões nos vértices  $p_{\hat{L},i(IJ)}$ ,  $p_{\hat{L},j(IJ)}$ ,  $p_{\hat{R},i(IJ)}$  e  $p_{\hat{R},j(IJ)}$  são interpoladas utilizando a estratégia de interpolação através dos pontos harmônicos. Na figura 40, notamos por exemplo,

que o estêncil de interpolação para obter o fluxo na superfície de controle em questão é menor do que o estêncil de outros métodos MPFA clássicos, como o MPFA-O (AAVATSMARK, 2002), MPFA-D (GAO; WU, 2011; CONTRERAS, 2016) ou até o nosso método MPFA-HD descrito no capítulo 3.

### Tratamento do Fluxo nas Faces de Contorno

Quando a face em questão pertence ao contorno do domínio  $\partial\Omega$ .

Primeiramente consideramos quando a face em questão pertence ao contorno de Dirichlet, assim o cálculo do fluxo é dada por:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = \lambda_{IJ} \left\| \vec{IJ} \right\| \left( \mathcal{A}_{\hat{L},IJ} p_{\hat{L}} - \sum_{\gamma=i,j} \xi_{\hat{L},\gamma(IJ)} p_{\hat{L},\gamma(IJ)} \right) \quad (\text{A.7})$$

onde  $\mathcal{A}_{\hat{L},IJ} = \xi_{\hat{L},i(IJ)} + \xi_{\hat{L},j(IJ)}$ .

O fluxo no contorno de Neumann é dada pela seguinte expressão

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = g_N \left\| \vec{IJ} \right\| \quad (\text{A.8})$$

onde  $g_N$  representa o valor do fluxo prescrito na face que pertence ao contorno de Neumann.

O análise do tratamento das pressões no contorno são completamente análogos ao do método NLFV-DMP descrito no capítulo 3.