UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

João Antônio Miranda Gondim

Teoria de Persistência e de Matrizes Irredutíveis: Aplicações em Epidemiologia

Recife

2017

João Antônio Miranda Gondim

Teoria de Persistência e de Matrizes Irredutíveis: Aplicações em Epidemiologia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho

Recife

2017

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

G637t Gondim, João Antônio Miranda
Teoria de persistência e de matrizes irredutíveis: aplicações em epidemiologia / João Antônio Miranda Gondim. – 2017.
77 f.

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2017.
Inclui referências.

1. Epidemias (matemática). 2. Biomatemática. I. Castilho, César Augusto Miranda (orientador). II. Título.

519.85 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-187

JOÃO ANTÔNIO MIRANDA GONDIM

TEORIA DE PERSISTÊNCIA E DE MATRIZES IRREDUTÍVEIS: APLICAÇÕES EM EPIDEMIOLOGIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 17/02/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho(Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Bruno Carneiro da Cunha (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Aos meus alunos, passados, presentes e futuros, que me motivam a continuar estudando para ser o melhor professor e matemático que eu posso ser.

AGRADECIMENTOS

Essa Dissertação não teria sido possível sem as valorosas contribuições de:

Minha família, principalmente meus pais Kléber e Socorro, minha irmã Juliana, meus avós João e Luiza, Antônio e Zenayde e minha tia Ana, que com o amor, carinho e pela educação de qualidade que me deram ajudaram a formar o meu caráter.

Minha noiva Rafa, por todo o seu amor, por me ajudar a ser uma pessoa melhor, por estar sempre ao meu lado tornando a minha vida muito mais feliz. Te amo muito!

Todos os professores que contribuíram em algum momento para fazer com que minha paixão pela Matemática crescesse. Nesse ponto, gostaria de citar alguns nominalmente:

- Kenji Chung e Fabiano Nader, que me fizeram ver como a Matemática podia ser bonita. Graças a eles eu decidi que também seria professor.
- Airton Castro, por ser um grande amigo e ter me aconselhado em diversos momentos. Além disso, foi o professor que mais me ensinou Matemática até hoje, já que já foi meu professor em sete disciplinas.
- Antônio Carlos, que foi quem me fez querer ser Matemático e motivou minha mudança da Licenciatura para o Bacharelado. Suas aulas foram e sempre serão uma grande inspiração para mim e seus conselhos e sermões contribuíram muito para minha formação.
- César Castilho, meu orientador, pela orientação impecável, por me apresentar esse belo tema de pesquisa, por acreditar tanto no meu potencial (mais do que eu mesmo às vezes) e, principalmente, pela amizade.

Agradeço ainda amigos que fiz na Matemática e que tornaram meus dias no DMat melhores desde a Graduação, principalmente Tanaka, Gabriel Coutinho, Gabriel Carvalho, Serginei, Cláudia, Ana Clara, Josué, Júlio, Rafael, Izabelly, Islanita, Fiel e Larissa (que ajudou muito com a versão final deste texto).

Aos amigos de fora da Matemática: Dodi, Mané, Kaio, Mauro, Rosinha, Fernando, Gordinho, Mayara, Mila e Renart. Em especial a mais duas referências que tenho de professores: Bruno por ser uma das pessoas mais competentes que conheço e ser um exemplo pra mim em vários aspectos e Alyson por ser Alyson.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro.

A todos, muito obrigado!

"And in the end
The love you take
Is equal to the love
You make"

(The Beatles)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é fornecer uma Introdução à Teoria Matemática da Persistência (fraca e forte) e exibir algumas de suas aplicações em Epidemiologia. Aplicamos essa Teoria em duas ocasiões: na primeira estudamos um modelo SI para uma doença que reduz fertilidade. O modelo é simples, mas nos permite visualizar como podemos fazer para provar primeiro a persistência fraca e então usar resultados auxiliares para garantir a persistência forte. Por outro lado, na segunda analisamos um modelo $SEIRS$ em uma população dividida em compartimentos, que podem ser interpretados como vários bairros de uma cidade, por exemplo. Para facilitar a abordagem nesse caso, apresentamos ainda uma introdução à Análise Matricial de matrizes irredutíveis, quase positivas e o Teorema de Perron-Frobenius, uma poderosa ferramenta em diversas áreas, que garante que esses tipos de matrizes possuem um autovalor e um autovetor especiais em um certo sentido. Exibimos também uma introdução aos Sistemas Dinâmicos, mais especificamente a Teoria de Semifluxos, que nos fornece uma base sólida para os resultados posteriores ao longo de todo o texto.

Palavras-chave: Modelos Epidemiológicos. Teoria de Persistência. Matrizes Irredutíveis. Matrizes Quase Positivas. Teoria de Perron-Frobenius. Teoria de Semifluxos.

ABSTRACT

The goal of this work is to provide an Introduction to the Mathematical Theory of Persistence (weak and strong) and show a few of its applications in Epidemiology. We apply this Theory in two occasions: in the first one we study a SI model for a fertility reducing disease. The model is simple, but it allows us to visualize how one can prove weak persistence at first and then use ancillary results in order to guarantee strong persistence. On the other hand, in the second one we analyze a $SEIRS$ model in a patchy host population, where the patches can be interpreted as many neighborhoods in a city, for example. To simplify our approach in this last case, we also present an introduction to the Matrix Analysis of irreducible and quasipositive matrices and the Perron-Frobenius Theorem, a powerful tool in many areas, which tells us that these kinds of matrices have an eigenvalue and an eigenvector that are special in some sense. We also give an introduction to Dynamical Systems, specifically Semiflow Theory, providing us with a solid background for the forthcoming results throughout the text.

Keywords: Epidemic Models. Persistence Theory. Irreducible Matrices. Quasipositive Matrices. Perron-Frobenius Theory. Semiflow Theory.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta é uma dissertação sobre Biomatemática, mais especificamente sobre Epidemiologia. Modelos matemáticos começaram a ser usados para estudar doenças quando Daniel Bernoulli formulou e resolveu um modelo para varíola em 1760 com o objetivo de analisar os efeitos da variolação de indivíduos saudáveis com o vírus da varíola, um processo precursor da vacinação como a conhecemos atualmente. No entanto, a Epidemiologia Matemática começou a crescer apenas no século 20, especialmente a partir da metade desse século, de modo que uma enorme variedade de modelos têm sido formulados, analisados e aplicados a doenças infecciosas.

Costuma-se dividir as populações estudadas em *classes epidemiológicas*. Por exemplo, representamos pela letra S a classe dos indivíduos suscetíveis à doença, isto é, que podem ser contaminados; pela letra E representamos indivíduos expostos à doença, mas que não podem transmiti-la (como em uma etapa de incubação); a letra I denota indivíduos infecciosos, ou seja, que podem transmitir a doença, e finalmente a letra R denota indivíduos que se recuperaram da doença. De acordo com as características da doença e com os objetivos da modelagem, os modelos são batizados de acordo com as classes que ele envolve, como SI, SIR, $SEIR$, etc.

Nesse trabalho apresentamos dois modelos. O primeiro, mais simples, aparece no final do Capítulo 2 e considera apenas as classes dos suscetíveis e dos infecciosos, sendo portanto do tipo SI. Para tornar a análise mais interessante, acrescentamos um fator de redução de fertilidade, de modo que o modelo possa representar uma doença como a Clamídia. Entretanto, nosso principal trabalho está no Capítulo 4, onde estudamos um modelo $SEIRS$ (isso significa que os indivíduos podem voltar a se tornar suscetíveis após a recuperação). O diferencial deste modelo é que além de dividirmos a população em classes epidemiológicas, também a dividimos em compartimentos, que podem representar bairros de uma cidade, por exemplo, e estudamos a dinâmica da doença em cada um dos compartimentos.

Dessa forma, se tivermos n compartimentos na população, o sistema de equações diferenciais que determina a evolução temporal da doença tem $4n$ equações, portanto é necessário fazer uma análise matricial do problema. Essa análise é feita no Capítulo 3, introduzindo os conceitos de matrizes irredutíveis, quase positivas e algumas de suas propriedades, como o importantíssimo Teorema de Perron-Frobenius. Essa Teoria fornece uma poderosa ferramenta, que é utilizada ao longo de todo o Capítulo 4 no estudo do nosso modelo.

As perguntas que fazemos sobre os modelos são, por exemplo, se a população de hospedeiros ou a doença serão extintos. Uma boa forma de responder a essas perguntas é usando a Teoria de Persistência Populacional, que pode estabelecer uma cota inferior para o valor a longo prazo de um componente de um sistema dinâmico, como a população total ou o total de indivíduos infecciosos, que seja independente de condições iniciais. Após uma revisão de fatos de Sistemas Dinâmicos feita no Capítulo 1, a formulação desta Teoria é feita no início do Capítulo 2, onde mostramos dois tipos de persistência, fraca e forte, e como obter persistência forte uma vez que a persistência fraca já tenha sido garantida.

Seguimos, principalmente, o material exposto em (THIEME, 2010) e (THIEME, 2003). Uma ótima introdução à Epidemiologia Matemática pode ser encontrada em (HETHCOTE, 2000).

2 SEMIFLUXOS E ATRATORES COMPACTOS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo apresentamos as bases para os capítulos seguintes. Na primeira seção, faremos uma introdução sobre semifluxos, tema constante ao longo de todo o texto, com exceção do Capítulo 3. Apresentaremos alguns conceitos também vistos na teoria de Equações Diferenciais Ordinárias como conjuntos (positivamente e negativamente) invariantes, trajetórias totais e equilíbrios. Na segunda seção abordaremos o conceito de atratores de conjuntos, em particular de atratores compactos. Para tanto, introduziremos os conceitos de conjunto ω-limite e de compacidade assintótica de uma função.

Para este Capítulo, seguimos principalmente (THIEME, 2010), (HALE, 1980) e (MUNKRES, 2000).

2.1 Semifluxos

Definição 2.1. *Diremos que $J \subset [0, \infty)$ é um* ***conjunto de tempo*** *se J tiver as seguintes propriedades:*

(i) $0 \in J, 1 \in J$;

(ii) $s, t \in J \Rightarrow s + t \in J$;

(iii) $s, t \in J, s < t \Rightarrow t - s \in J$.

Diremos ainda que J é fechado se for um subconjunto fechado de $[0, \infty)$.

Proposição 2.2. *Se J for fechado, então $J = [0, \infty)$ ou $J = \{m/n : m \in \mathbb{Z}_+\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $h = \inf\{t \in J : t > 0\}$. Se $h = 0$, então existe uma sequência $(a_j) \subset J \cap (0, \infty)$ com $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Com isso, dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_k < \epsilon \tag{2.1.1}$$

Assim, dado $x \in \mathbb{R}_+$, pela propriedade arquimediana existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(m-1)a_k \leq x < ma_k \tag{2.1.2}$$

Podemos reescrever (2.1.2) como $ma_k - a_k \leq x < ma_k = (m-1)a_k + a_k$. Mas então (2.1.1) e (2.1.2) nos dão

$$x - \epsilon < ma_k < x + \epsilon \tag{2.1.3}$$

Como J é conjunto de tempo e $a_k \in J$, temos que $ma_k = \underbrace{a_k + \ldots a_k}_{\text{m vezes}} \in J$, o que mostra que J é denso em $\mathbb{R}_+$. Como J é fechado, segue que $J = \mathbb{R}_+$.

Suponha agora que $h > 0$, de modo que $J = \{t \in J : t > 0\}$. Como J é fechado, temos $h \in J$, logo $h\mathbb{Z}_+ = \{mh : m \in \mathbb{Z}_+\} \subseteq J$. Se existisse $x \in J \setminus (h\mathbb{Z}_+)$, novamente a propriedade arquimediana nos fornece $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$(m-1)h < x < mh \tag{2.1.4}$$

Observe que as duas desigualdades são estritas visto que $x \notin h\mathbb{Z}_+$. Assim, teríamos

$$0 < mh - x < mh - (m-1)h = h.$$

Ora, isso contraria a minimalidade de h, pois $mh - x \in J$. Logo, $J = h\mathbb{Z}_+$. Como $1 \in J$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 = hn$, ou seja, $h = 1/n$ e $J = \{m/n : m \in \mathbb{Z}_+\}$, como queríamos. □

Os dois tipos mais comuns de conjuntos de tempo são $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{Z}_+$. Qualquer que seja o conjunto de tempo J, temos $\mathbb{Z}_+ \subseteq J$ e $mJ = \{mj : j \in J\} \subseteq J$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Vamos agora definir o principal objeto deste capítulo.

Definição 2.3. *Seja J um conjunto de tempo e $X \neq \emptyset$. Então $\Phi : J \times X \to X$ é um* ***semifluxo (global autônomo)*** *se*

(i) $\Phi(0, x) = x$, *para todo* $x \in X$;

(ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi\big(t, \Phi(s, x)\big)$, *para todos* $t, s \in J$ *e* $x \in X$.

X será chamado de ***espaço de fase*** *(**ou espaço de estado**) do semifluxo.*

Seja $x' = f(x)$ uma EDO autônoma, onde f é um campo localmente lipschitziano. Se $x = x(t)$ é uma solução do PVI

$$\begin{cases} x' & = & f(x) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

então $\Phi(t, x_0) = x(t)$ é um semifluxo. Com efeito, $\Phi(0, x_0) = x_0$ por definição. Além disso, fixado $s \in \mathbb{R}_+$, $\Phi(t + s, x_0) = x(t + s) = y(t)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= x(s) \end{cases}$$

Por outro lado, $\Phi\Big(t, \Phi(s, x_0)\Big)$ é solução de

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= \Phi(s, x_0) = x(s) \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, concluímos que $\Phi(t+s, x_0) = \Phi\Big(t, \Phi(s, x_0)\Big)$ para todos $t, s \in \mathbb{R}_+$ e $x_0 \in X$.

Observe também que, para cada $t \in J$ fixado, obtemos uma função $\Phi_t : X \to X$ dada por $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$. Em termos dessas funções, as propriedades de semifluxo podem ser escritas como

(i) $\Phi_0 =$ identidade de X;

(ii) $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$.

Definição 2.4. *Seja X um espaço métrico, com métrica d, e $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo.*

(i) Φ é contínuo em estado se Φ_t for contínuo para todo $t \in J$;

(ii) Φ é contínuo em estado, uniformemente em tempo finito se, $\forall x \in X$, $\forall t \in J$ e $\forall \epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $d(y, x) < \delta$, $s \in [0, t] \cap J \Rightarrow d\Big(\Phi(s, y), \Phi(s, x)\Big) < \epsilon$;

(iii) Φ é contínuo no tempo se $\forall x \in X$, $\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$ for contínua;

(iv) Φ é contínuo se for uma aplicação contínua de $J \times X$ (com a topologia produto) em X;

(v) Φ é discreto se $J = \mathbb{Z}_+$;

Teorema 2.5. *Sejam J um conjunto de tempo fechado e X um espaço métrico.*

(i) Todo semifluxo contínuo é contínuo em estado, uniformemente em tempo finito.

(ii) Todo semifluxo contínuo em estado, uniformemente em tempo finito e contínuo no tempo é contínuo.

(iii) Seja Φ um semifluxo discreto tal que Φ_1 é contínuo. Então Φ é contínuo.

Demonstração. Começamos provando (i). Seja $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo contínuo e suponha que a afirmação é falsa, ou seja, que existem $x \in X$, $t \in J$ e $\epsilon > 0$ tais que, $\forall \delta > 0$, existam $s \in [0,t] \cap J$ e $y \in X$ com $d(x,y) < \delta$ e $d\Big(\Phi(s,x), \Phi(s,y)\Big) \geq \epsilon$. Tomando $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos sequências $(s_n) \subset [0,t] \cap J$ e $(y_n) \subset X$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x, y_n) < 1/n \tag{2.1.5}$$

e

$$d\Big(\Phi(s_n, y_n), \Phi(s_n, x)\Big) \geq \epsilon \tag{2.1.6}$$

Como J é fechado, temos que $[0,t] \cap J$ é um subconjunto fechado do compacto $[0,t]$, portanto $[0,t] \cap J$ é compacto. Logo, (s_n) tem uma subsequência (s_{n_k}) que converge para algum $s \in [0,t] \cap J$. Além disso, (2.1.5) nos diz que $y_n \to x$. Em particular, $y_{n_k} \to x$, logo $(s_{n_k}, y_{n_k}) \to (s,x)$. Pela continuidade de Φ, concluímos que

$$d\Big(\Phi(s_{n_k}, y_{n_k}), \Phi(s_{n_k}, x)\Big) \to 0 \tag{2.1.7}$$

Pelo mesmo motivo, também obtemos

$$d\Big(\Phi(s_{n_k}, x), \Phi(s, x)\Big) \to 0 \tag{2.1.8}$$

Assim, a desigualdade triangular nos fornece

$$d\Big(\Phi(s_{n_k}, y_{n_k}), \Phi(s_{n_k}, x)\Big) \leq d\Big(\Phi(s_{n_k}, y_{n_k}), \Phi(s, x)\Big) + d\Big(\Phi(s_{n_k}, x), \Phi(s, x)\Big) \tag{2.1.9}$$

Daí, (2.1.7) e (2.1.8) implicam $d\Big(\Phi(s_{n_k}, y_{n_k}), \Phi(s_{n_k}, x)\Big) \to 0$, mas isso contraria (2.1.6).

Para (ii), seja $((t_n, x_n))$ uma sequência em $J \times X$. Como X é um espaço métrico, $J \times X$ também é, logo basta mostrar que, se $(t_n, x_n) \to (t,x)$, então $\Phi(t_n, x_n) \to \Phi(t,x)$. Para tanto, considere $\epsilon > 0$ fixado.

Sejam $\pi_1, \pi_2 : J \times X \to X$ as projeções na primeira e na segunda coordenadas, respectivamente. Como $J \times X$ tem a topologia produto, π_1 e π_2 são contínuas, logo

$$t_n = \pi_1(t_n, x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \pi_1(t,x) = t \tag{2.1.10}$$

e

$$x_n = \pi_2(t_n, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_2(t, x) = x \tag{2.1.11}$$

Por (2.1.10), (t_n) é convergente, logo é limitada. Assim, existe $T \geq 0$ tal que $t_n \leq T$ para todo n. Como J é ilimitado (pois contém os naturais), então não há perda de generalidades em supor que $T \in J$.

Como Φ é contínuo em estado, uniformemente em tempo finito, existe $\delta > 0$ tal que $d(y,x) < \delta \Rightarrow d\Big(\Phi(t_n, y), \Phi(t_n, x)\Big) < \epsilon/2$. Por outro lado, de (2.1.11) podemos obter $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1 \Rightarrow d(x_n, x) < \delta \Rightarrow d\Big(\Phi(t_n, x_n), \Phi(t_n, x)\Big) < \epsilon/2$.

Φ também é contínua no tempo, logo $\Phi_x(t) = \Phi(t,x)$ é contínua. Assim, $\Phi(t_n, x) \to \Phi(t,x)$, portanto existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_2 \Rightarrow d\Big(\Phi(t_n, x), \Phi(t,x)\Big) < \epsilon/2$. Então, se $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, temos

$$\begin{aligned} d\Big(\Phi(t_n, x_n), \Phi(t,x)\Big) &\leq d\Big(\Phi(t_n, x_n), \Phi(t_n, x)\Big) + d\Big(\Phi(t_n, x), \Phi(t,x)\Big) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

como queríamos. Finalmente, em (iii) temos Φ discreto, logo $J = \mathbb{Z}_+$ e $\Phi_x(t)$ é contínua para todo $t \in J$ (dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = 1/2$, por exemplo), logo Φ é contínua no tempo. Além disso, Φ_0 é a identidade em X, logo é trivialmente contínua, e dado $m \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$\Phi_m = \underbrace{\Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_1}_{\text{m vezes}} \tag{2.1.12}$$

Como Φ_1 é contínua (por hipótese), concluímos que Φ_m é contínua para todo m. Dados $x \in X$, $m \in \mathbb{Z}_+$ e $\epsilon > 0$, para todo $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ existe $\delta_n > 0$ tal que

$$d(y,x) < \delta_n \Rightarrow d\Big(\Phi(n,y), \Phi(n,x)\Big) < \epsilon \tag{2.1.13}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Então $d(y,x) < \delta$ implica $d(y,x) < \delta_n$ para todo $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$, logo $d\Big(\Phi(n,y), \Phi(n,x)\Big) < \epsilon$ para todos $n \in [0,m] \cap \mathbb{Z}_+$, mas isso significa que Φ é contínuo em estado, uniformemente em tempo finito. Por (ii), Φ é contínuo. $\square$

Definição 2.6. *Seja $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo e $K \subset X$, $K \neq \emptyset$.*

(i) *K é dito positivamente invariante se $\Phi_t(K) \subseteq K$ para todo $t \in J$;*

(ii) *K é dito negativamente invariante se $K \subseteq \Phi_t(K)$ para todo $t \in J$;*

(iii) *K é invariante se $\Phi_t(K) = K$ para todo $t \in J$, ou seja, K é positivamente e negativamente invariante;*

(iv) *K é minimal se for fechado e invariante, e se K não contiver nenhum subconjunto próprio não-vazio com essas duas propriedades.*

Note que se K for positivamente invariante, então $\Phi_s(K)$ também é, para todo $s \in J$. Com efeito, dado $t \in J$, temos

$$\begin{aligned}\Phi_t(\Phi_s(K)) &= \Phi_t \circ \Phi_s(K) \\ &= \Phi_{t+s}(K) \\ &= \Phi_{s+t}(K) \\ &= \Phi_s \circ \Phi_t(K) \\ &= \Phi_s(\Phi_t(K)) \\ &\subseteq \Phi_s(K),\end{aligned}$$

já que $\Phi_t(K) \subseteq K$ para todo $t \in J$. É claro que um resultado análogo vale se K for negativamente invariante.

Proposição 2.7. *Seja $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo contínuo em estado. Então:*

(i) *Se K é positivamente invariante, então $\overline{K}$ é positivamente invariante;*

(ii) *Se K é negativamente invariante e $\overline{K}$ é compacto, então $\overline{K}$ é negativamente invariante.*

Demonstração. Sejam $t \in J$ fixado e $\alpha \in \Phi_t(\overline{K})$. Existe $x \in \overline{K}$ tal que $\alpha = \Phi_t(x)$. Seja $(x_j) \subset K$ uma sequência tal que $\lim x_j = x$. Como Φ_t é contínua, temos $\lim \Phi_t(x_j) = \Phi_t(x) = \alpha$. Mas $\Phi_t(x_j) \in K$, pois K é positivamente invariante. Assim, α é limite de uma sequência de pontos em K, portanto $\alpha \in \overline{K}$, o que prova (i).

Para (ii), sejam $t \in J$ e $x \in \overline{K}$. Existe sequência $(x_j) \subset K$ tal que $\lim x_j = x$. Como K é negativamente invariante, $x_j \in \Phi_t(K) \subset \Phi_t(\overline{K})$, de modo que (x_j) é uma sequência de pontos em $\Phi_t(\overline{K})$ cujo limite é x. Por hipótese, Φ_t é contínua e $\overline{K}$ é compacto, logo $\Phi_t(\overline{K})$ é compacto, portanto $x \in \Phi_t(\overline{K})$, o que completa a demonstração. □

Na demonstração do Teorema a seguir precisaremos de um Lema de Topologia, cuja demonstração pode ser encontrada em (MUNKRES, 2000).

Definição 2.8. *Uma coleção C de subconjuntos de X tem a* ***propriedade das interseções finitas*** *se, para toda subcoleção finita $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de C, a interseção $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ for não-vazia.*

Lema 2.9. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

(i) X é compacto;

(ii) Se C é uma coleção de fechados de X com a propriedade das interseções finitas, então a interseção $\bigcap C$ de todos os elementos de C é não-vazia.

Teorema 2.10. *Seja $\Phi : J \times X \to X$ contínuo em estado e seja $K \subset X$ compacto e positivamente invariante. Então K contém um conjunto minimal compacto K_0.*

Demonstração. Seja

$$F = \{A \subset K : A \neq \emptyset \text{ é compacto e positivamente invariante}\}$$

Definamos uma ordem parcial em F pondo $A_1 \leq A_2 \Leftrightarrow A_2 \subseteq A_1$. Seja C uma cadeia em F. Mostremos que $M = \bigcap C$ é uma cota superior para C em F. Observe que:

- C é uma coleção de fechados de K. Como C é totalmente ordenado, então a interseção de qualquer quantidade finita de elementos de C é não-vazia, de modo que C tem a propriedade das interseções finitas. Como K é compacto, o Lema 2.9 garante que $M \neq \emptyset$;

- Por ser interseção de fechados, M é fechado. Como $M \subset K$ e K é compacto, concluímos que M é compacto;

- Seja $A \in C$. Então $M \subset A$, logo $\Phi_t(M) \subset \Phi_t(A) \subset A$, já que todo elemento de C é positivamente invariante. Como $A \in C$ foi arbitrário, temos $\Phi_t(M) \subset \bigcap C = M$, e M é positivamente invariante.

Assim, $M \in F$, e toda cadeia em F tem cota superior. Pelo Lema de Zorn, F tem um elemento maximal K_0. Vamos mostrar que K_0 é um conjunto minimal para Φ. Para isso, ainda falta mostrar que K_0 é invariante. Como K_0 é positivamente invariante, temos $\Phi_t(K_0) \subset K_0$ para todo $t \in J$. Mas $\Phi_t(K_0)$ é não-vazio, compacto (pois Φ_t é contínua e K_0 compacto) e positivamente invariante, logo $\Phi_t(K_0) \in F$ e $K_0 \leq \Phi_t(K_0)$. Pela maximalidade de K_0 com relação a esta ordem, isso só é possível se $\Phi_t(K_0) = K_0$ para todo $t \in J$, ou seja, K_0 tem que ser invariante.

Assim, seja $K_1 \subset K_0$ não-vazio, fechado e invariante. Temos que K_1 é compacto, pois K_0 o é, e positivamente invariante, logo $K_1 \in F$. Se $K_1 \neq K_0$, teríamos $K_0 < K_1$, um absurdo pela maximalidade de K_0. Logo, K_0 é um conjunto minimal para Φ. □

Definição 2.11. *Uma função $\phi : J \cup (-J) \to X$ é uma **trajetória total** (de Φ) se*

$$\Phi(t, \phi(s)) = \phi(t + s)$$

*para todos $t \in J, s \in J \cup (-J)$. Se $t_0 \in J$ e $x_0 \in X$ são tais que $\phi(t_0) = x_0$, diremos que ϕ é uma trajetória total passando por (t_0, x_0). A imagem de uma trajetória total será chamada de **órbita total**.*

No caso de um semifluxo induzido por uma EDO autônoma $x' = f(x)$ uma trajetória total passando por (t_0, x_0) nada mais é que uma solução que satisfaz $x(t_0) = x_0$. Para simplificar a notação, escreveremos $\hat{J} = J \cup (-J)$.

Proposição 2.12. *Órbitas totais são invariantes.*

Demonstração. Seja $\phi : \hat{J} \to X$ uma trajetória total do semifluxo $\Phi : J \times X \to X$. Ponha $M = \phi(\hat{J})$ e, fixado $t \in J$, seja $x \in \Phi_t(M)$. Existe $y = \phi(s) \in M$ tal que $x = \Phi_t(y) = \Phi(t, \phi(s)) = \phi(t + s) \in M$. Por outro lado, se $x \in M$, então existe $s \in \hat{J}$ tal que $x = \phi(s) = \phi(t + s - t) = \Phi(t, \phi(s - t)) = \Phi_t(\phi(s - t)) \in \Phi_t(M)$. Como t foi arbitrário, M é invariante. □

Teorema 2.13. *$K \subset X$ é invariante se, e somente se, para todo $x_0 \in K$ existir uma trajetória total passando por $(0, x_0)$ com valores em K.*

Demonstração. Seja $x \in K$ e suponha que existe uma trajetória total ϕ com valores em K tal que $\phi(0) = x$. Seja $M = \phi(\hat{J})$. Pela proposição anterior, M é invariante, logo $x \in M = \Phi_t(M) \subset \Phi_t(K)$, já que $M \subset K$. Por outro lado, se $y \in \Phi_t(K)$, então existe $x \in K$ com

$$y = \Phi_t(x) = \Phi_t(\phi(0)) = \phi(t) \in M \subset K.$$

Logo, K é invariante.

Reciprocamente, suponha que $\Phi_t(K) = K$ para todo $t \in J$ e seja $x_0 \in K$. Existe $x_{-1} \in K$ tal que $\Phi_1(x_{-1}) = x_0$. Analogamente, existe $x_{-2} \in K$ tal que $\Phi_1(x_{-2}) = x_{-1}$. Repetindo o processo, obtemos uma sequência $(x_{-n}) \subset K$ tal que $\Phi_1(x_{n-1}) = x_{-n}$. Além disso, se $k \in \mathbb{Z}_+$ for tal que $m \geq k$, temos

$$\Phi_k(x_{-m}) = x_{k-m} \tag{2.1.14}$$

Basta notar que $\Phi_0(x_{-m}) = x_{-m}$ e que $\Phi_k(x_{-m}) = \underbrace{\Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_1}_{\text{k vezes}}(x_{-m})$. Afirmamos que, para todo $t \in \hat{J}$, existem $k \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in J$ tais que $t = -k + r$. Com efeito, se $t \in J$, basta tomar $k = 0$ e $r = t$. Se $t \in (-J)$, seja m o maior inteiro não-negativo tal que $m \leq -t$. Como J é conjunto de tempo, temos $-t - m = s \in J$. Pela maximalidade de m, devemos ter $s < 1$, logo $1 - s \in J$. Daí,

$$t = -m - s = -\underbrace{(m+1)}_{k \in \mathbb{Z}_+} + \underbrace{(1-s)}_{r \in J}.$$

Dessa forma, definamos $\phi(t) = \Phi_r(x_{-k})$, onde $t = -k + r$, com $k \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in J$. Note que $\phi(t) \in K$ para todo t, já que $x_{-k} \in K$ e K é invariante. Precisamos mostrar que ϕ está bem definida. Suponha que $t = -k + r = -m + s$, com $k, m \in \mathbb{Z}_+$ e $r, s \in J$. Suponha, sem perda de generalidades, que $m < k$. Então, temos $k - m = r - s \in \mathbb{Z}_+$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi_r(x_{-k}) &= \Phi_s\Big(\Phi_{r-s}(x_{-k})\Big) \\
&= \Phi_s\Big(\Phi_{k-m}(x_{-k})\Big) \\
&= \Phi_s(x_{k-m-k}) \\
&= \Phi_s(x_{-m}),
\end{aligned}$$

por (2.1.14), já que $k \geq k - m$.

Falta apenas mostrar que ϕ é uma trajetória total passando por $(0, x_0)$. Seja $t \in \hat{J}$. Escolha $k \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in J$ tais que $t = -k + r$. Então, dado $s \in J$, temos

$$\begin{aligned}
\phi(s+t) &= \phi(s + r - k) \\
&= \Phi_{s+r}(x_{-k}) \\
&= \Phi_s\Big(\Phi_r(x_{-k})\Big) \\
&= \Phi_s(\phi(t)).
\end{aligned}$$

Finalmente, como $0 = 0 + 0$, temos $\phi(0) = \Phi_0(x_0) = x_0$, logo ϕ passa por $(0, x_0)$. $\square$

Corolário 2.14. *Todo conjunto minimal compacto K de um semifluxo Φ contínuo em estado é o fecho de alguma órbita total.*

Demonstração. Como K é invariante, existe uma óbita total contida em K pelo Teorema anterior. O fecho dessa órbita total é não-vazio, fechado, positivamente invariante pela Proposição 2.7 e está contido em K, já que K é compacto, logo é igual a K, pois K é minimal. $\square$

A recíproca, em geral, é falsa! Considere uma trajetória total ligando dois pontos de equilíbrio. A órbita total correspondente é compacta e invariante, mas se x for um dos pontos de equilíbrio então a órbita constante em x também é fechada, invariante e está contida propriamente na anterior que, portanto, não é minimal.

Definição 2.15.

- *Um ponto $x^* \in X$ é um ponto fixo ou ponto de equilíbrio do semifluxo Φ se $\Phi_t(x^*) = x^*$ para todo $t \in J$.*
- *Uma trajetória total ϕ é dita periódica, com período p, se $\phi(t+p) = \phi(t)$ para todo $t \in \hat{J}$ e $\phi(t)$ não é ponto de equilíbrio para todo $t \in \hat{J}$. A órbita de uma trajetória periódica é chamada de órbita periódica.*

Se x^* é ponto de equilíbrio, então $\phi(t) = x^*$ para todo $t \in \hat{J}$ define uma trajetória total constante. Pontos de equilíbrio e órbitas periódicas são os exemplos mais comuns de conjuntos minimais compactos.

2.2 Atratores Compactos

Comecemos a seção definindo alguns conceitos auxiliares.

Definição 2.16.

- *Sejam $\emptyset \neq B \subset X$ e $x \in X$. A distância de x a B é definida por*

$$d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\}.$$

- *Sejam $A, B \subset X$, com $A, B \neq \emptyset$. A distância de A a B será definida por*

$$d(A, B) = \sup\{d(x, B) : x \in A\}.$$

- *Dado $\emptyset \neq B \subset X$, a ϵ-vizinhança de B é o conjunto*

$$U_\epsilon(B) = \{x \in X : d(x, B) < \epsilon\}.$$

Para simplificar a notação no que vem a seguir, denotaremos por J_r o conjunto $J \cap [r, +\infty]$.

Definição 2.17. *Seja $\{Y_t\}_{t \in J}$ uma família de subconjuntos de X.*

- *Diremos que Y_t converge para Y, o que denotaremos por $Y_t \to Y$, se para todo aberto U de X com $Y \subset U$ existir $r \in J$ tal que $Y_t \subset U$ para todo $t \in J_r$.*
- *Diremos que $\{Y_t\}$ é atraído por Y (quando $t \to \infty$) se, para todo $\epsilon > 0$, existir $r \in J$ tal que $Y_t \subset U_\epsilon(Y)$ para todo $t \in J_r$.*

Vejamos algumas propriedades:

Lema 2.18. *Se $\emptyset \neq B \subset X$ e $x, y \in X$, então $|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y)$.*

Demonstração. Seja $\beta \in B$. Então

$$d(x,B) \leq d(x,\beta) \leq d(x,y) + d(y,\beta).$$

Passando para o outro lado, obtemos

$$d(x,B) - d(x,y) \leq d(y,\beta).$$

Como $\beta \in B$ foi arbitrário, temos $d(x,B) - d(x,y) \leq d(y,B)$, logo $d(x,B) - d(y,B) \leq d(x,y)$. Trocando os papeis de x e y obtemos $d(y,B) - d(x,B) \leq d(x,y)$, portanto $|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y)$. □

Observe que essa distância entre conjuntos *não* é simétrica. Se considerarmos A contido propriamente em B, então teremos $d(A,B) = 0$, mas $d(B,A) > 0$. Ainda assim, vale a desigualdade triangular:

Lema 2.19. *Sejam $A, B, C \subset X$ não-vazios. Então $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.*

Demonstração. Se $d(C,B) = \infty$, o resultado é trivial. Suponha então que $d(C,B) < \infty$ e sejam $x \in A$ e $y \in C$. Pelo lema anterior, temos $|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y)$, logo

$$d(x,B) \leq d(y,B) + d(x,y) \leq d(C,B) + d(x,y).$$

Como $d(C,B) < \infty$, podemos subtraí-lo, obtendo

$$d(x,B) - d(C,B) \leq d(x,y).$$

Como y foi arbitrário, concluímos que

$$\begin{aligned} d(x,B) - d(C,B) &\leq d(x,C) \\ &\leq d(A,C). \end{aligned}$$

Daí, $d(x,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ para todo $x \in A$, logo $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$. □

Observe que as ϵ-vizinhanças são conjuntos abertos. Com efeito, se $x \in U_\epsilon(Y)$, então $d(x, Y) < \epsilon$. Seja $r = d(x, Y)$. Mostremos que a bola aberta $B_{\epsilon - r}(x) \subset U_\epsilon(Y)$. Dado $\alpha \in B_{\epsilon-r}(x)$, temos $|d(\alpha, Y) - d(x, Y)| \leq d(\alpha, x)$, pelo lema 2.18. Logo, $|d(\alpha, Y) - r| \leq d(\alpha, x) < \epsilon - r$, portanto $-\epsilon + r < d(\alpha, Y) - r < \epsilon - r$. Em particular, $d(\alpha, Y) < \epsilon$, logo $\alpha \in U_\epsilon(Y)$. Com isso, concluímos que se $Y_t \to Y$, então Y_t é atraído por Y (quando $t \to \infty$).

Note também que $\{Y_t\}$ é atraída por Y se e somente se $d(Y_t, Y) \to 0$. Com efeito, se $\{Y_t\}$ é atraída por Y, dado $\epsilon > 0$, existe $r \in J$ tal que $Y_t \subset U_{\epsilon/2}(Y)$ se $t \in J_r$. Nesse caso, se $\alpha \in Y_t$, então $d(\alpha, Y) < \epsilon/2$, logo $d(Y_t, Y) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ se $t \in J_r$, portanto $d(Y_t, Y) \to 0$. Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$, existe $r \in J$ tal que $d(Y_t, Y) < \epsilon$ se $t \in J_r$. Logo, se $\alpha \in Y_t$, temos $d(\alpha, Y) \leq d(Y_t, Y) < \epsilon$ se $t \in J_r$, ou seja, $Y_t \subset U_\epsilon(Y)$ se $t \in J_r$ e $\{Y_t\}$ é atraída por Y.

Nossa próxima proposição relaciona os conceitos acima. Para demonstrá-la, necessitaremos de dois resultados auxiliares, o primeiro dos quais é um conhecido resultado de Topologia. Ele afirma que dados um ponto x e um compacto K em um espaço métrico, existe um ponto em K que realiza a distância de x a K.

Lema 2.20. *Sejam $K \subset X$ um compacto não-vazio e $x \in X$. Então existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.*

Demonstração. Por definição, $d(x, K) = \inf\{d(x, y) : y \in K\}$. Assim, existe uma sequência (y_n) em K tal que $d(x, y_n) \to d(x, K)$. Como K é compacto, após escolhermos uma subsequência teremos $y_n \to y \in K$. Assim, $(x, y_n) \to (x, y)$ e portanto $d(x, y_n) \to d(x, y) = d(x, K)$ por continuidade e por unicidade do limite. $\square$

O segundo resultado auxiliar também é um resultado de Topologia, e está demonstrado a seguir.

Lema 2.21. *Se $K \subset X$ é compacto e $F \subset X$ é fechado, com $K \cap F = \emptyset$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $U_\epsilon(K) \cap F = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que não. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos $y_n \in U_{1/n}(K) \cap F$. Isso nos fornece $d(y_n, K) < 1/n$ e $y_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, o lema anterior garante que existe uma sequência (x_n) em K tal que $d(y_n, x_n) = d(y_n, K) < 1/n$. Ainda pela compacidade de K, podemos escolher uma subsequência tal que $x_n \to x \in K$. Daí, usando os mesmos índices para escolher uma subsequência de y_n temos

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) \to 0,$$

ou seja, $y_n \to x$. Como (y_n) está no fechado F, temos também $x \in F$, um absurdo pois $K \cap F = \emptyset$. $\square$

Agora vamos à proposição, que relaciona os conceitos de atração e convergência de conjuntos com as noções de distância do início desta seção.

Proposição 2.22. *Sejam $\{Y_t\}_{t\in J}$ uma família de subconjuntos não-vazios de X e $\emptyset \neq Y \subset X$. Então:*

(i) se $Y_t \to Y$, então $d(Y_t, Y) \to 0$;

(ii) se Y é compacto e $d(Y_t, Y) \to 0$, então $Y_t \to Y$;

(iii) se Y é aberto, então $Y_t \to Y$ se e somente se existir $r \in J$ tal que $Y_t \subset Y$ se $t \in J_r$.

Demonstração. Para o item (i), já vimos que $U_\epsilon(Y)$ é aberto, logo $Y_t \to Y$ garante que $\{Y_t\}$ é atraída por Y, e portato $d(Y_t, Y) \to 0$.

Para (ii), sejam U um aberto de X, com $Y \subset U$, e considere $K = Y$ e $F = X \setminus U$. Pelo lema acima, existe $\epsilon > 0$ tal que $U_\epsilon(Y) \cap F = \emptyset$, ou seja, $U_\epsilon(Y) \subset U$. Como vimos, $d(Y_t, Y) \to 0$ equivale a $\{Y_t\}$ ser atraído por Y, logo existe $r \in J$ tal que $Y_t \subset U_\epsilon(Y) \subset U$ se $t \in J_r$, o que garante que $Y_t \to Y$.

No item (iii), como Y é um aberto contendo Y, existe $r \in J$ tal que $Y_t \subset Y$ se $t \in J_r$. Reciprocamente, seja U um aberto contendo Y. Por hipótese, existe $r \in J$ tal que $t \in J_r \Rightarrow Y_t \subset Y \subset U$, portanto $Y_t \to Y$. □

Observação 2.23. *Se Y fosse apenas fechado em (ii), o resultado poderia ser falso. Por exemplo, considere $Y = \mathbb{N}$ e $Y_n = \{n + 1/n\}$. Então $d(Y_n, Y) \leq 1/n$, mas Y_n não converge para $\mathbb{N}$. Com efeito, considere o aberto*

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}\right).$$

Temos $\mathbb{N} \subset U$, mas $Y_n \not\subset U$ se $n \geq 2$.

A próxima definição condensa os resultados e definições do início desta seção para o contexto de semifluxos.

Definição 2.24. *Sejam J um conjunto de tempo e $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo.*

(i) Diremos que $K \subset X$ atrai um conjunto $M \subset X$ se $K \neq \emptyset$ e $d(\Phi_t(M), K) \to 0$. Diremos também que M é atraído por K.

(ii) K é um atrator de M se for invariante e atrair M. Se além disso K for compacto, diremos que é um atrator compacto.

Provemos mais um lema:

Lema 2.25. *Sejam $K, M \subset X$. São equivalentes:*

(i) *K atrai M.*

(ii) *$d(\Phi_t(x), K) \to 0$ uniformemente para $x \in M$.*

(iii) *Se (t_j) é uma sequência em J com $t_j \to \infty$ e (x_j) é uma sequência em M, então*

$$d(\Phi(t_j, x_j), K) \to 0.$$

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Dado $\epsilon > 0$, existe $r \in J$ tal que $\Phi_t(M) \subset U_\epsilon(K)$ se $t \in J_r$. Se $x \in M$, então $\Phi_t(x) \in \Phi_t(M)$, logo $\Phi_t(x) \in U_\epsilon(K)$ se $t \in J_r$. Assim, $t \in J_r$ implica $d(\Phi_t(x), K) < \epsilon$ para todo $x \in M$, mostrando que $d(\Phi_t(x), K) \to 0$ uniformemente para $x \in M$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Dado $\epsilon > 0$, existe $r \in J$ tal que $t \in J_r \Rightarrow d(\Phi_t(x_j), K) < \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $t_j \to \infty$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_j > r$ se $j > j_0$. Assim, se $j > j_0$, temos $t_j \in J_r$, logo $d(\Phi(t_j, x_j), K) < \epsilon$, mostrando que $d(\Phi(t_j, x_j), K) \to 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Queremos mostrar que $d(\Phi_t(K), M) \to 0$, o que equivale a mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $r \in J$ tal que $\Phi_t(M) \subset U_\epsilon(K)$ se $t \in J_r$. Suponha que não. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $r \in J$ existem $t \in J_r$ e $x \in M$ com $\Phi_t(x) \notin U_\epsilon(K)$. Fazendo r percorrer os naturais, obtemos sequências (t_j) em J e (x_j) em M tais que $t_j \in J_j$ (logo $t_j \geq j$, portanto $t_j \to \infty$) e $d(\Phi(t_j, x_j), K) \geq \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$, um absurdo. Logo, K atrai M. □

Definição 2.26. *O conjunto ω-limite de $M \subset X$ é*

$$\omega(M) = \bigcap_{t \in J} \overline{\Phi(J_t \times M)},$$

com $J_t = J \cap [t, \infty)$.

O lema abaixo fornece um critério mais prático para determinar quando vale $x \in \omega(M)$ para algum $x \in X$.

Lema 2.27. *Um elemento $x \in X$ satisfaz $x \in \omega(M)$ se, e somente se existirem sequências (t_j) em J, com $t_j \to \infty$, e (x_j) em M tais que $\Phi(t_j, x_j) \to x$.*

Demonstração. Suponha que $x \in \omega(M)$. Então $x \in \overline{\Phi(J_t \times M)}$ para todo $j \in J$. Em particular, $x \in \overline{\Phi(J_j \times M)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma sequência (a_n^j) em $\Phi(J_j \times M)$ com $a_n^j \to x$ quando $n \to \infty$. Dessa forma, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_{N_j}^j, x) < 1/j$. Ponha $z_j = a_{N_j}^j$. Então $z_j \to x$ quando $j \to \infty$ e $z_j \in \Phi(J_j \times M)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, $z_j = \Phi(t_j, x_j)$, com $t_j \in J_j \subset J$ (em particular, $t_j \geq j$, logo $t_j \to \infty$), (x_j) em M e $d(\Phi(t_j, x_j), x) < 1/j$ para todo j, donde segue que $\Phi(t_j, x_j) \to x$.

Reciprocamente, suponha que existam sequências (t_j) em J e (x_j) em M com $t_j \to \infty$ e $\Phi(t_j, x_j) \to x$. Dado $t \in J$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_j \in J_t$ se $j \geq j_0$. Assim, existe uma sequência $s_j = t_{j+j_0} \in J_t$ tal que $\Phi(s_j, x_j) \to x$. Como $(s_j, x_j) \in J_t \times M$, concluímos que $x \in \overline{\Phi(J_t \times M)}$. Como t foi arbitrário, segue que $x \in \omega(M)$. □

Definição 2.28. *Sejam J um conjunto de tempo, $\Phi : J \times X \to X$ uma função e $M \subset X$. Diremos que Φ é assintoticamente compacta em M se para quaisquer sequências (t_i) em J com $t_i \to \infty$ e (x_i) em M a sequência $(\Phi(t_i, x_i))$ tiver uma subsequência convergente.*

Como indicam o último lema e a definição acima, os conceitos de conjunto ω-limite e de função assintoticamente compacta em um conjunto parecem estar relacionados. Os próximos resultados nos ajudam a entender melhor essa relação.

Proposição 2.29. *Sejam J um conjunto de tempo, $\Phi : J \times X \to X$ uma função (não necessariamente um semifluxo) e $M \subset X$. São equivalentes:*

(i) Φ é assintoticamente compacto em M.

(ii) $\omega(M)$ é não-vazio, compacto e atrai M.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Comecemos mostrando que $\omega(M) \neq \emptyset$. Como $M \neq \emptyset$, escolha $x \in M$ e considere a sequência $(\Phi(k, x))$, com $k \in \mathbb{N}$. Como Φ é assintoticamente compacto em M, existe uma subsequência convergente, cujo limite pertence a $\omega(M)$ pelo lema anterior.

Agora mostramos que $\omega(M)$ é compacto. Seja (z_k) uma sequência em $\omega(M)$. Novamente o lema anterior garante que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem sequências (t_j^k) em J e (x_j^k) em M satisfazendo $t_j^k \xrightarrow{j\to\infty} \infty$ e $\Phi(t_j^k, x_j^k) \xrightarrow{j\to\infty} z_k$. Dessa forma, para todo k existe $j_k \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_k$ implica $d(\Phi(t_j^k, x_j^k), z_k) < 1/k$. Note ainda que existe $j'_k \in \mathbb{N}$ tal que $t_j^k > k$ se $j > j'_k$. Tome $t_k = \max\{t_{j_k}^k, t_{j'_k}^k\}$ e $x_k = x_{j_k}^k$. Então $t_k \in J$, $t_k > k$ e $d(\Phi(t_k, x_k), z_k) < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora note que $t_k \to \infty$, logo escolhendo subsequências temos $\Phi(t_k, x_k) \to x$, logo $z_k \to x$ também. Pelo lema anterior, $x \in \omega(M)$, e então z_k tem uma subsequência que converge para um elemento de $\omega(M)$, que portanto é compacto.

Finalmente, mostramos que $\omega(M)$ atrai M. Suponha que não. Então o lema 2.25 garante que existem sequências (t_j) em X com $t_j \to \infty$ e (x_j) em M, bem como um $\epsilon > 0$ tais que para todo $j \in \mathbb{N}$ existe $n_j > j$ com

$$d(\Phi(t_{n_j}, x_{n_j}), \omega(M)) \geq \epsilon.$$

Isso nos permite obter uma subsequência (s_k) de (t_k) e uma subsequência (y_k) de (x_k) tais que para todo $k \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$d(\Phi(s_k, y_k), \omega(M)) \geq \epsilon.$$

Como Φ é assintoticamente compacto em M, podemos escolher uma subsequência tal que $\Phi(s_k, y_k) \to z \in X$, portanto temos $d(\Phi(s_k, y_k), z) < \epsilon$ para todo n suficientemente grande. Pelo lema anterior, $z \in \omega(M)$, logo

$$d(\Phi(s_k, y_k), z) \geq d(\Phi(s_k, y_k), \omega(M)) \geq \epsilon$$

para todo n. Essa contradição prova que $\omega(M)$ atrai M.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sejam $J \ni t_j \to \infty$ e (x_j) em M. Novamente o lema 2.25 garante que

$$d(\Phi(t_j, x_j), \omega(M)) \to 0.$$

Seja $z_j \in \omega(M)$ tal que

$$d(\Phi(t_j, x_j), z_j) = d(\Phi(t_j, x_j), \omega(M)) \to 0,$$

como no lema 2.20. Como K é compacto, passando a uma subsequência obtemos $z_k \to z \in K$, logo também passando a uma subsequência temos $\Phi(t_k, x_k) \to z$, provando que Φ é assintoticamente compacto em M. $\square$

Teorema 2.30. *Sejam $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo contínuo em estado e $\emptyset \neq M \subset X$. Então:*

(i) $\omega(M)$ é positivamente invariante.

(ii) Se Φ for assintoticamente compacto em M, então $\omega(M)$ é um atrator compacto de M.

Demonstração. Comecemos mostrando que $\omega(M)$ é positivamente invariante. Para isso, sejam $x \in \omega(M)$ e $t \in J$. Existem sequências $J \ni t_j \to \infty$ e (x_j) em M tais que $\Phi(t_j, x_j) \to x$. Dessa forma, pela continuidade de Φ_t e pela propriedade de semifluxo, temos que

$$\Phi_t(x) = \Phi_t\Big(\lim_{j\to\infty} \Phi(t_j, x_j)\Big) = \lim_{j\to\infty} \Phi_t(\Phi(t_j, x_j)) = \lim_{j\to\infty} \Phi(t + t_j, x_j) \in \omega(M),$$

pois $J \ni t + t_j \to \infty$. Como x e t foram arbitrários, o resultado segue.

Suponha agora que Φ é assintoticamente compacto em M. Então a proposição anterior já garante que $\omega(M)$ é não-vazio, compacto e atrai M, e pelo que vimos no item (i), só falta mostrar que $\omega(M)$ é negativamente invariante. Dessa forma, sejam $x \in \omega(M)$ e $t \in J$. Como acima, existem sequências $J \ni t_j \to \infty$ e (x_j) em M tais que $\Phi(t_j, x_j) \to x$. Como $t_j - t \in J$ para todo j suficientemente grande, podemos escolher subsequências tais que

$$x = \lim_{j\to\infty} \Phi(t_j, x_j) = \lim_{j\to\infty} \Phi(t_j - t + t, x_j) = \lim_{j\to\infty} \Phi_t(\Phi(t_j - t, x_j))$$

para todo j.

Assim, como Φ é assintoticamente compacto em M e $t_j - t \to \infty$, podemos escolher subsequências novamente de modo que $\Phi(t_j - t, x_j) \to y \in \omega(M)$. Daí, a continuidade de Φ_t nos fornece

$$x = \lim_{j\to\infty} \Phi_t(\Phi(t_j - t, x_j)) = \Phi_t\Big(\lim_{j\to\infty} \Phi(t_j - t, x_j)\Big) = \Phi_t(y),$$

ou seja, provamos que $\omega(M) \subset \Phi_t(\omega(M))$, completando a demonstração. $\square$

3 TEORIA DE PERSISTÊNCIA

Este é o capítulo que introduz a principal teoria desta dissertação. Na primeira seção, definimos os conceitos de persistência uniforme (fraca e forte) de um semifluxo relativamente a uma função ρ (chamada função persistência). Além disso, mostramos alguns resultados que nos permitem obter a persistência forte a partir da fraca, e um resultado que mostra como podemos lidar com funções persistência diferentes quando sabemos que o semifluxo persiste uniformemente com relação a uma delas.

Na segunda seção começamos a aplicar os resultados. Apresentamos um modelo SI para uma doença que causa redução de fertilidade. O modelo é simples, mas nos permite visualizar como podemos fazer para provar primeiro a persistência fraca uniforme tanto para a população de hospedeiros quanto para a população humana, e usamos resultados da primeira seção para garantir persistência uniforme.

Seguimos, sobretudo, o material exposto em (THIEME, 2010). Para uma revisão de $\limsup$ e $\liminf$, o leitor pode consultar (LIMA, 2009).

3.1 Definições e Resultados

Definição 3.1 (Definições de Persistência)**.** *Sejam* $\Phi : J \times X \to X$ *um semifluxo e* $\rho : X \to \mathbb{R}_+$.

- Φ *é* ***uniformemente fracamente*** ρ***-persistente*** *se existe algum* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\limsup_{t\to\infty} \rho(\Phi(t,x)) > \epsilon$$

  para todo $x \in X$ *tal que* $\rho(x) > 0$*;*

- Φ *é* ***uniformemente (fortemente)*** ρ***-persistente*** *se existe algum* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} \rho(\Phi(t,x)) > \epsilon$$

  para todo $x \in X$ *tal que* $\rho(x) > 0$*.*

É claro que poderíamos trocar a expressão “$> \epsilon$” por “$\geq \epsilon$” nas definições acima. Na próxima seção e no Capítulo 4 mostraremos aplicações dos resultados desta seção. Em geral, para demonstrar que um semifluxo é uniformemente persistente, provamos que é uniformemente fracamente persistente e usamos algum resultado como os que estudaremos a seguir. A persistência fraca é menos desejável, pois ela permite que $\rho(\Phi(t,x))$ torne-se arbitrariamente próximo de zero, o que em termos de dinâmica populacional significa que a população chega arbitrariamente perto da extinção. Por isso é mais interessante termos a persistência forte, pois ela fornece um limiar acima do qual $\rho(\Phi(t,x))$ está para todo t suficientemente grande.

Sejam J um conjunto de tempos fechado, que pela Proposição 2.2 significa que $J = \mathbb{R}_+$ ou que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $J = \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+$ (portanto não há perda de generalidades em supor que $J = \mathbb{R}_+$ ou $J = \mathbb{Z}_+$), $X \neq \emptyset$, $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo e $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ a função persistência. Defina

$$\sigma(t,x) = \rho(\Phi(t,x)).$$

Pela propriedade de semifluxo, temos que

$$\sigma(t+s,x) = \sigma(t,\Phi(s,x)).$$

Consideremos ainda o seguinte conjunto de hipóteses:

$\clubsuit$ Existem $B \subset X$ e uma sequência (B_k) de subconjuntos de X tais que :

$\clubsuit_0$ Para todo $x \in X$, $\sigma(t,x)$ é uma função contínua de $t \geq 0$;

$\clubsuit_1$ Não existem $y \in B$, $s,t \in J$ tais que $\rho(y) > 0$, $\sigma(s,y) = 0$ e $\sigma(s+t,y) > 0$;

$\clubsuit_2$ Para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $x \in X$ com $\rho(x) > 0$ existem algum $\tau_k \in J$ tal que $\Phi(t,x) \in B_k$ para todo $t \geq \tau_k$, $t \in J$;

$\clubsuit_3$ Se (y_k) é uma sequência em X tal que $y_k \in B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então, após possivelmente tomar uma subsequência, existe $y \in B$ tal que $\sigma(s,y_k) \to \sigma(s,y)$ quando $k \to \infty$, uniformemente para s em qualquer conjunto da forma $[0,t] \cap J$, $t \in (0,\infty)$.

Teorema 3.2. *Suponha que $J = \mathbb{R}_+$ ou $J = \mathbb{Z}_+$. Sob as hipóteses $\clubsuit$ acima, o semifluxo Φ é uniformemente ρ-persistente sempre que for uniformemente fracamente ρ-persistente.*

Demonstração. Suponha que Φ é uniformemente fracamente ρ-persistente, mas não uniformemente ρ-persistente. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$, tem-se

$$\limsup_{t\to\infty} \sigma(t,x) > \epsilon.$$

Da mesma forma, se (ϵ_j) é uma sequência em $(0,\epsilon)$ tal que $\epsilon_j \to 0$, obtemos uma sequência (x_j) em X com $\rho(x_j) > 0$ para todo j tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \sigma(t,x_j) < \epsilon_j.$$

Afirmação 3.3. *Existem sequências (r_j), (s_j), (t_j), (u_j) e (v_j) em J tais que $r_j \to \infty$, $s_j, v_j \leq 1$ e*

$$\sigma(r_j, x_j) \geq \epsilon, \Phi(r_j, x_j) \in B_j,$$

$$\sigma(r_j + s_j + t_j, x_j) < \epsilon_j;$$

$$\sigma(r_j + s_j + s, x_j) \leq \epsilon \text{ para todo } s \in [0, t_j + u_j] \cap J;$$

$$\sigma(r_j + s_j + t_j + u_j + v_j, x_j) \geq \epsilon.$$

Com efeito, fixe $r_0 = 0$. Por $\clubsuit_2$, dado $j \in \mathbb{N}$, existe $\tau_j \in J$ tal que $\Phi(t, x_j) \in B_j$ para todo $t \geq \tau_j$, $t \in J$. Existem também $\beta_j > \max\{\tau_j, r_{j-1}\}$ tal que $\sigma(\beta_j, x_j) > \epsilon$, $\gamma_j > \beta_j$ tal que $\sigma(\gamma_j, x_j) < \epsilon_j$ e $\alpha_j > \gamma_j$ tal que $\sigma(\alpha_j, x_j) > \epsilon$.

Agora considere os conjuntos

$$S_j^1 = \{t \in [\beta_j, \gamma_j] \cap J : \sigma(t, x_j) = \epsilon\}$$

e

$$S_j^2 = \{t \in [\gamma_j, \alpha_j] \cap J : \sigma(t, x_j) = \epsilon\}.$$

Como $\sigma(t, x)$ é uma função contínua de $t \geq 0$ por $\clubsuit_0$ e J é fechado, esses conjuntos são compactos, portanto podemos definir

$$\mu_j = \max S_1 \text{ e } \theta_j = \min S_2.$$

Além disso, o conjunto

$$T_j^1 = \{t \in J : t > \beta_j, 0 \leq \mu_j - t \leq 1, \sigma(t, x_j) \geq \epsilon\}$$

é não-vazio, já que $\mu_j \in T_j^1$. Tome $r_j \in T_j^1$ e defina $s_j = \mu_j - r_j \leq 1$, $t_j = \gamma_j - r_j - s_j$ e $u_j = \theta_j - \gamma_j$. Analogamente, o conjunto

$$T_j^2 = \{t \in J : 0 \leq t - \theta_j \leq 1, \sigma(t, x_j) \geq \epsilon\}$$

também é não-vazio, pois $\theta_j \in T_J^2$. Escolha $\kappa_j \in T_j^2$ e defina $v_j = \kappa_j - \theta_j \leq 1$.

Assim, como temos $r_j \in T_j^1$, então $r_j > \beta_j$, logo $\sigma(r_j, x_j) \geq \epsilon$, $r_j > r_{j-1}$, donde $r_j \to \infty$, e $r_j > \tau_j$, donde $\Phi(r_j, x_j) \in B_j$. Além disso, $\sigma(r_j + s_j + t_j, x_j) = \sigma(\gamma_j, x_j) < \epsilon_j$, e por construção, $\sigma(t, x_j) \leq \epsilon$ para todo $t \in [\mu_j, \theta_j] \cap J = [r_j + s_j, r_j + s_j + t_j + u_j] \in J$, o que pode ser reescrito como $\sigma(r_j + s + j + s, x_j) \leq \epsilon$ para todo $s \in [0, t_j + u_j] \cap J$. Finalmente, também temos $\sigma(r_j + s_j + t_j + u_j + v_j, x_j) = \sigma(\kappa_j, x_j) \geq \epsilon$, como queríamos.

Prosseguindo, defina

$$y_j = \Phi(r_j, x_j).$$

Então,

$$\sigma(0, y_j) \geq \epsilon \text{ e } y_j \in B_j;$$

$$\sigma(s_j + t_j, y_j) < \epsilon_j,$$

$$\sigma(s_j + s, y_j) \leq \epsilon \text{ para todo } s \in [0, t_j + u_j] \cap J,$$

$$\sigma(s_j + t_j + u_j + v_j, y_j) \geq \epsilon.$$

Por $\clubsuit_3$, possivelmente após tomar uma subsequência, existe $y \in B$ tal que

$$\sigma(s, y_k) \to \sigma(s, y)$$

quando $k \to \infty$ uniformemente para s em qualquer conjunto da forma $[0, t] \cap J$, $t \in (0, \infty)$. Em particular,

$$\rho(y) = \sigma(0, y) = \lim_{j \to \infty} \sigma(0, y_j) \geq \epsilon > 0.$$

Após tomarmos subsequências novamente, podemos supor que $s_j \to s^*$ e $v_j \to v^*$, com $s^*, v^* \in [0, 1] \cap J$.

Afirmação 3.4. *$t_j + u_j \to \infty$ quando $j \to \infty$.*

Suponha que não. Assim, existe uma subsequência limitada de $(t_j + u_j)$, que chamaremos pelo mesmo nome. Dessa forma, existe $t > 0$ tal que $t_j + u_j \leq t$ para todo j. Como (t_j) e (u_j) também são limitadas, logo tomando subsequências novamente podemos supor que $t_j \to t^*$ e $u_j \to u^*$, com $t^*, u^* \in [0, t] \cap J$.

Daí,

$$\sigma(s^* + t^*, y) = \lim_{j \to \infty} \sigma(s_j + t_j, y) = \lim_{j \to \infty} \sigma(s_j + t_j, y_j) < \lim_{j \to \infty} \epsilon_j = 0.$$

Por outro lado,

$$\sigma(s^* + t^* + u^* + v^*, y) = \lim_{j \to \infty} \sigma(s_j + t_j + u_j + v_j, y_j) \geq \epsilon > 0.$$

Como $\rho(y) > 0$, isso contradiz $\clubsuit_1$, provando a afirmação.

Seja $s \in J$. Como $t_j + u_j \to \infty$, concluímos que

$$t_j + u_j \geq s$$

para todo j suficientemente grande. Daí,

$$\sigma(s^* + s, y) = \lim_{j \to \infty} \sigma(s_j + s, y_j) \leq \epsilon.$$

Como s foi arbitrário, temos

$$\sigma(t, y) \leq \epsilon$$

para todo $t \in J$ e $t \geq s^*$. Assim, temos $\rho(y) > 0$ e

$$\limsup_{t \to \infty} \sigma(t, y) \leq \epsilon,$$

uma contradição, provando que Φ é uniformemente ρ-persistente. $\square$

Em geral, não precisamos usar o Teorema anterior nessa generalidade. Apresentamos a seguir uma forma mais amigável e que funciona se X for um espaço métrico. Considere as seguintes hipóteses:

$\tilde{\clubsuit}_0$ X é um espaço métrico, $J = \mathbb{R}_+$ ou $J = \mathbb{Z}_+$ e $\sigma = \rho \circ \Phi : J \times X \to X$ é contínua.

Além disso, existe um conjunto não-vazio e compacto $B \subset X$ tal que:

- $\tilde{\clubsuit}_1$ Não existem $y \in B$, $s, t \in J$ tais que $\rho(y) > 0$, $\sigma(s, y) = 0$ e $\sigma(s + t, y) > 0$;
- $\tilde{\clubsuit}_2$ Para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$ tem-se $d(\Phi(t, x), B) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Antes de provarmos o novo Teorema, precisaremos do seguinte Lema, que é semelhante ao que fizemos no Teorema 2.5.

Lema 3.5. *Se σ é contínua e J é fechado, então σ é contínua em estado, uniformemente em tempo finito: para todos $x \in X$, $t > 0$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\sigma(s, y) - \sigma(s, x)| < \epsilon$ sempre que $s \in [0, t] \cap J$, $y \in X$ e $d(y, x) < \delta$.*

Demonstração. Suponha que não. Então existem $x \in X$, $t \in J$ e $\epsilon > 0$ tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $s_n \in [0, t] \cap J$ e $y_n \in X$ satisfazendo

$$|\sigma(s_n, y_n) - \sigma(s_n, x)| \geq \epsilon \text{ e } d(y_n, x) < \frac{1}{n}.$$

Como J é fechado, temos que $[0, t] \cap J$ é compacto, logo tomando subsequências podemos supor que $s_n \to s \in [0, t] \cap J$. Também temos $y_n \to x$.

Como σ é contínua, segue que $|\sigma(s_n, y_n) - \sigma(s, x)| \to 0$ quando $n \to \infty$. Mas então

$$|\sigma(s_n, y_n) - \sigma(s_n, x)| \leq |\sigma(s_n, y_n) - \sigma(s, x)| + |\sigma(s, x) - \sigma(s_n, x)| \to 0$$

quando $n \to \infty$, uma contradição. □

Teorema 3.6. *Sob as hipóteses $\tilde{\clubsuit}$, o semifluxo Φ é uniformemente ρ-persistente sempre que for uniformemente fracamente ρ-persistente.*

Demonstração. É claro que $\tilde{\clubsuit}_0$ implica $\clubsuit_0$ e que $\tilde{\clubsuit}_1$ implica $\clubsuit_1$. Defina

$$B_k = U_{1/k}(B) = \{x \in X : d(x, B) < 1/k\}.$$

Assim, $B_{k+1} \subset B_k$. Daí, se $x \in X$ com $\rho(x) > 0$, temos $d(\Phi(t, x), B) \to 0$, ou seja, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $t_k \in J$ tal que $t \geq t_k$, $t \in J$ tenhamos $d(\Phi(t, x), B) < 1/k$, ou seja, $\Phi(t, x) \in B_k$ se $t \geq t_k$, logo $\tilde{\clubsuit}_2$ implica $\clubsuit_2$.

Falta verificar $\clubsuit_3$. Suponha que $y_k \in B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como B é compacto, existem $z_k \in B$ tais que $d(y_k, z_k) < 1/k$. Novamente por B ser compacto, após tomar uma subsequência, temos $z_k \to y \in B$. Tomando em y_k os mesmos índices que aparecem nessa subsequência, obtemos uma subsequência de y_k, que chamaremos pelo mesmo nome, que satisfaz

$$d(y_k, y) \leq d(y_k, z_k) + d(z_k, y) \to 0.$$

Daí, sejam $t \in (0, \infty)$ e $\epsilon > 0$. Como σ é contínua em estado, uniformemente em tempo finito, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| < \epsilon$$

se $s \in [0, t] \cap J$ e $d(x, y) < \delta$. Pelo que acabamos de ver, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_k, y) < \delta$ se $k \geq k_0$, logo

$$|\sigma(s, y_k) - \sigma(s, y)| < \epsilon$$

se $k \geq k_0$, mostrando que $\sigma(s, y_k) \to \sigma(s, y)$ uniformemente para $s \in [0, t] \cap J$, qualquer que seja $t > 0$, provando $\clubsuit_3$. $\square$

Para o próximo resultado, considere as seguintes hipóteses:

$\heartsuit_0$ Para todo $x \in X$, $\sigma(t, x)$ é uma função contínua de $t \geq 0$;

Além disso, existe um subconjunto não-vazio B de X e uma sequência (B_k) de subconjuntos de X tais que $B \subset B_{k+1} \subset B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e valem as seguintes propriedades:

- $\heartsuit_1$ Para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$ existe algum $\tau_k \geq 0$ tal que $\Phi(t, x) \in B_k$ para todo $t \geq \tau_k$;
- $\heartsuit_2$ Se (y_k) é uma sequência em X tal que $y_k \in B_k$ para todo k e $\rho(y_k) = \rho(y_1) > 0$ para todo k então, após possivelmente extrair uma subsequência, existe $y \in B$ tal que $\sigma(s, y_k) \to \sigma(s, y)$ quando $k \to \infty$, uniformemente, para s em cada intervalo $[0, t]$, $t > 0$;
- $\heartsuit_3$ Não existem $x \in B$, $r, s > 0$ tais que $\rho(x) > 0$, $\sigma(s, x) = 0$ e $\sigma(s + r, x) > 0$.

Teorema 3.7. *Seja Φ um semifluxo com tempo $J = \mathbb{R}_+$ satisfazendo as hipóteses $\heartsuit$. Então Φ é uniformemente ρ-persistente sempre que for uniformemente fracamente ρ-persistente.*

Demonstração. Suponha que Φ é uniformemente fracamente ρ-persistente mas não uniformemente ρ-persistente. Então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\limsup_{t \to \infty} \sigma(t, x) > \epsilon$$

para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$. Além disso, se (ϵ_j) é uma sequência em $(0, \epsilon)$ tal que $\epsilon_j \to 0$, podemos obter uma sequência (x_j) em X tal que $\rho(x_j) > 0$ e

$$\liminf_{t \to \infty} \sigma(t, x_j) < \epsilon_j.$$

Faremos uma construção semelhante ao que fizemos no Teorema 3.2. Dado $j \in \mathbb{N}$, temos $\rho(x_j) > 0$, logo existe $\tau_j \geq 0$ tal que $\Phi(t, x_j) \in B_j$ para todo $t \geq \tau_j$ por $\heartsuit_1$. Existe $\alpha_j > \tau_j$ tal que $\sigma(\alpha_j, x_j) > \epsilon$. Existe também $\theta_j > \alpha_j$ tal que $\sigma(\theta_j, x_j) < \epsilon_j$. Finalmente, existe $\beta_j > \theta_j$ tal que $\sigma(\beta_j, x_j) > \epsilon$. Sejam r_j o maior número real menor que θ_j tal que $\sigma(r_j, x_j) = \epsilon$ e γ_j o menor número real maior que θ_j tal que $\sigma(\gamma_j, x_j) = \epsilon$. Esses números existem pois

$$S_j = \{t \in [\alpha_j, \beta_j]] : \sigma(t, x_j) = \epsilon\} \text{ e } T_j = \{t \in [\theta_j, \beta_j] : \sigma(t, x_j) = \epsilon\}$$

são compactos, uma vez que $\sigma(t, x_j)$ é contínua por $\heartsuit_0$. Basta tomar $r_j = \max S_j$ e $\gamma_j = \min T_j$. Defina $u_j = \gamma_j - \theta_j$ e $t_j = \theta_j - r_j$.

Com isso, temos

$$\sigma(r_j, x_j) = \epsilon, \Phi(r_j, x_j) \in B_j,$$

$$\sigma(r_j + s, x_j) < \epsilon_j \text{ para todo } s \in (0, t_j + u_j),$$

$$\sigma(r_j + t_j, x_j) < \epsilon_j \text{ e } \sigma(r_j + t_j + u_j, x_j) = \epsilon.$$

Ponha $y_j = \Phi(r_j, x_j)$, de modo que

$$\rho(y_j) = \epsilon, y_j \in B_j,$$

$$\sigma(s, y_j) \leq \epsilon \text{ para todo } s \in [0, t_j + u_j],$$

$$\sigma(t_j, y_j) < \epsilon_j \text{ e } \sigma(t_j + u_j, y_j) = \epsilon.$$

Por $\heartsuit_2$, após extrair uma subsequência, obtemos um $y \in B$ tal que $\sigma(s, y_k) \to \sigma(s, y)$ uniformemente para $s \in [0, t]$, qualquer que seja $t > 0$. Note que $\rho(y) = \lim_{j\to\infty} \rho(y_j) = \epsilon > 0$. Afirmamos novamente que $t_j + u_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Com efeito, se isso não fosse verdade, após novamente extrair uma subsequência podemos obter $t > 0$ tal que $t_j + u_j \leq t$ para todo j. Novamente tomando subsequências, temos $t_j \to t^*$ e $u_j \to u^*$, com $t^*, u^* \in [0, t]$. Daí,

$$\sigma(t^*, y) = \lim_{j\to\infty} \sigma(t_j, y) = \lim_{j\to\infty} \sigma(t_j, y_j) \leq \lim_{j\to\infty} \epsilon_j = 0.$$

Por outro lado,

$$\sigma(t^* + u^*, y) = \lim_{j\to\infty} \sigma(t_j + u_j, y) = \lim_{j\to\infty} \sigma(t_j + u_j, y_j) = \epsilon,$$

mas isso contradiz $\heartsuit_3$. Logo, $t_j + u_j \to \infty$.

Agora seja $s \geq 0$. Pelo que acabamos de mostrar, temos $t_j + u_j \geq s$ para todo t suficientemente grande. Com isso, $\sigma(s, y_j) \leq \epsilon$ para todo t suficientemente grande, de modo que

$$\sigma(s, y) = \lim_{j\to\infty} \sigma(s, y_j) \leq \epsilon$$

para todo $s \geq 0$. Logo, temos $\rho(y) > 0$ e

$$\limsup_{t\to\infty} \sigma(t, y) \leq \epsilon,$$

uma contradição que prova o Teorema. $\square$

Como no Teorema 3.6, apresentamos as seguintes hipóteses menos gerais, mas que são mais fáceis de usar quando se aplicam:

$\tilde{\heartsuit}_0$ X é um espaço métrico, ρ é contínua e $\sigma = \rho \circ \Phi$ é contínua.

Além disso, existe $B \subset X$ não-vazio tal que:

$\tilde{\heartsuit}_1$ Para todo $x \in X$ tal que $\rho(x) > 0$, temos

$$\Phi(t, x) \to B;$$

$\tilde{\heartsuit}_2$ Se $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \infty$, então $B \cap \{x \in X : \epsilon_1 \leq \rho(x) \leq \epsilon_2\}$ é compacto;

$\tilde{\heartsuit}_3$ Não existem $x \in B$, $r, s > 0$ tais que $\rho(x) > 0$, $\sigma(s, x) = 0$ e $\sigma(s + r, x) > 0$.

Teorema 3.8. *Seja Φ um semifluxo, com tempo $\mathbb{R}_+$. Sob as hipóteses $\tilde{\heartsuit}$, Φ é uniformemente ρ-persistente sempre que for uniformemente fracamente ρ-persistente.*

Demonstração. É claro que $\heartsuit_0$ e $\heartsuit_3$ são satisfeitas. Para $\heartsuit_1$, defina

$$B_k = \{y \in X : \text{ existe } z \in B \text{ com } d(y, z) < 1/k \text{ e } |\rho(y) - \rho(z)| < 1/k\}.$$

Então $B \subset B_{k+1} \subset B_k$ para todo k, e como

$$B_k = \bigcup_{z\in B} \Big[U_{1/k}(z) \cap \rho^{-1}(\rho(z) - 1/k, \rho(z) + 1/k)\Big],$$

temos que B_k é um aberto (pois ρ é contínua) contendo B, logo $\Phi(t, x) \to B$ garante que existe $\tau_k \geq 0$ tal que $t \geq \tau_k$ implica $\Phi(t, x) \in B_k$, como queríamos.

Finalmente, para $\heartsuit_2$ considere uma sequência (y_k) tal que $y_k \in B_k$ e $\rho(y_k) = \rho(y_1) > 0$ para todo k. Existe uma sequência $z_k \in B$ tal que

$$d(z_k, y_k) < 1/k \text{ e } |\rho(y_k) - \rho(z_k)| < 1/k$$

para todo k, logo

$$\rho(z_k) \in \left[\frac{\rho(y_1)}{2}, \frac{3\rho(y_1)}{2}\right]$$

para todo k suficientemente grande. Assim,

$$z_k \in B \cap \left\{x \in X : \frac{\rho(y_1)}{2} \leq \rho(x) \leq \frac{3\rho(y_1)}{2}\right\}$$

para todo k suficientemente grande. Como esse conjunto é compacto, podemos escolher uma subsequência tal que $z_k \to y \in B$. Como $d(y_k, z_k) \to 0$, podemos também escolher uma subsequência tal que $y_k \to y$.

Fixe $t > 0$ e $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que, para todos $s \in [0, t]$ e $x \in X$ com $d(x, y) < \delta$ temos $|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| < \epsilon$ (pelo Lema 3.5, σ é contínua em estado, uniformemente em tempo finito). Se $s \in [0, t]$, existe k_0 (que não depende de s, apenas de δ, que por sua vez só depende de t e de ϵ) tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow d(y_k, y) < \delta \Rightarrow |\sigma(s, y_k) - \sigma(s, y)| < \epsilon,$$

mostrando que $\sigma(s, y_k) \to \sigma(s, y)$ uniformemente para $s \in [0, t]$, qualquer que seja $t > 0$. $\square$

Para o próximo resultado vamos considerar as hipóteses gerais abaixo:

Sejam X um espaço métrico, $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ um semifluxo contínuo em estado, $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ e suponha que $\sigma : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R}_+$ dada por $\sigma(t, x) = \rho(\Phi(t, x))$ é contínua.

Suponha que existe um fechado $B \subset X$ tal que

$\diamondsuit_0$ para cada $x \in X \cap \{\rho > 0\}$ existe $\tau \in \mathbb{R}_+$ tal que $\Phi([\tau, \infty) \times \{x\}) \subset B$.

Além disso, suponha que existe $\tilde{\epsilon} \in (0, \infty]$ tal que para cada $\epsilon \in (0, \tilde{\epsilon})$ existem $D \subset X$ e $\delta > 0$ com as seguintes propriedades:

$\diamondsuit_1$ $B \cap D \cap \rho = \epsilon$ é compacto;

$\diamondsuit_2$ Se $x \in X \cap D$ e $t \geq 0$ são tais que $\Phi(\mathbb{R}_+ \times \{x\}) \subset B$, $\rho(x) = \epsilon = \sigma(t, x)$ e $\sigma(s, x) \leq \epsilon$ para todo $s \in (0, t)$, então $\sigma(s, x) > 0$ para todo $s \in [0, t]$;

$\diamondsuit_3$ Se $x \in X \setminus D$ e $t \geq 0$ são tais que $\Phi(\mathbb{R}_+ \times \{x\}) \subset B$, $\rho(x) = \epsilon = \sigma(t, x)$ e $\sigma(s, x) \leq \epsilon$ para todo $s \in (0, t)$, então $\sigma(s, x) \geq \delta$ para todo $s \in [0, t]$.

Teorema 3.9. *Sob as hipóteses $\diamondsuit$ acima, Φ é uniformemente ρ-persistente se for uniformemente fracamente ρ-persistente.*

Demonstração. Suponha que Φ é uniformemente fracamente ρ-persistente mas não uniformemente ρ-persistente. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$ tenhamos

$$\limsup_{t \to \infty} \sigma(t, x) > \epsilon \tag{3.1.1}$$

Sem perda de generalidades, suponhamos que $\epsilon \in (0, \tilde{\epsilon})$. Além disso, seja (ϵ_j) uma sequência em $(0, \epsilon)$ tal que $\epsilon_j \to 0$. Como Φ não é uniformemente ρ-persistente, podemos obter uma sequência (x_j) em X com $\rho(x_j) > 0$ e

$$\liminf_{t\to\infty} \sigma(t, x_j) < \epsilon_j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Afirmação 1 Existem sequências (u_j) e (t_j) em $\mathbb{R}_+$ e $y_j \in B$ tais que

$$\rho(y_j) = \sigma(0, y_j) = \epsilon, \;\; \Phi(s, y_j) \in B \text{ para todo } s \geq 0,$$

$$\sigma(s, y_j) < \epsilon \text{ para todo } s \in (0, t_j + u_j)$$

$$\sigma(t_j, y_j) < \epsilon_j,$$

$$\sigma(u_j + t_j, y_j) = \epsilon.$$

Sabemos que, para cada j, existe $\tau_j \geq 0$ tal que $\Phi([\tau_j, \infty) \times \{x_j\}) \subset B$ por $\diamondsuit_0$, já que $\rho(x_j) > 0$. Por construção, sabemos que existem $a_j > \tau_j$, $b_j > a_j$ e $c_j > b_j$ tais que $\sigma(a_j, x_j) > \epsilon$, $\sigma(b_j, x_j) < \epsilon_j$ e $\sigma(c_j, x_j) > \epsilon$. Como σ é contínua, podemos definir r_j como o maior valor de t no intervalo $[a_j, b_j]$ tal que $\sigma(r_j, x_j) = \epsilon$. Em particular, $r_j > \tau_j$, logo $\Phi(s + r_j, x_j) \in B$ para todo $s \geq 0$. Analogamente, podemos definir d_j como o menor valor de t no intervalo $[b_j, c_j]$ tal que $\sigma(d_j, x_j) = \epsilon$. Defina agora $t_j = b_j - r_j$ e $u_j = d_j - b_j$.

Com isso, $\sigma(t_j + r_j, x_j) < \epsilon_j$, $\sigma(s + r_j, x_j) < \epsilon$ para todo $s \in (0, t_j + u_j)$ e $\sigma(u_j + t_j + r_j, x_j) = \epsilon$. Assim, a sequência $y_j = \Phi(r_j, x_j) \in B$ satisfaz todas as exigências feitas na afirmação.

Caso 1 Existem infinitos índices $j \in \mathbb{N}$ tais que $y_j \in D$.

Após escolher uma subsequência, temos $y_j \in B \cap D \cap \{\rho = \epsilon\}$. Como esse conjunto é compacto por $\diamondsuit_1$, após novamente escolhermos uma subsequência teremos $y_j \to y$, com $y \in B \cap D \cap \{\rho = \epsilon\}$. Como Φ é contínuo em estado e B é fechado, temos que

$$\Phi(s, y) = \Phi_s(\lim y_j) = \lim \Phi(s, y_j) \in B$$

para todo $s \geq 0$.

Afirmamos que $u_j + t_j \to \infty$. Com efeito, suponha que não. Então após mais uma vez escolhermos uma subsequência, teremos $u_j + t_j \leq t$ para algum $t > 0$. Em particular, $u_j, t_j \in [0, t]$, logo escolhendo novamente subsequências temos $u_j \to u^* \in [0, t]$ e $t_j \to t^* \in [0, t]$. Daí

$$\sigma(t^* + u^*, y) = \lim \sigma(t_j + u_j, y_j) = \epsilon.$$

Além disso, seja $s \in (0, t^* + u^*)$. Como $t_j + u_j \to t^* + u^*$, sabemos que $s < t_j + u_j$ para todo j suficientemente grande. Assim,

$$\sigma(s, y) = \lim \sigma(s, y_j) \leq \epsilon.$$

Por outro lado,

$$0 \leq \sigma(t^*, y) = \lim \sigma(t_j, y_j) \leq \lim \epsilon_j = 0.$$

Isso contraria $\diamondsuit_2$, logo $u_j + t_j \to \infty$.

Dessa forma, temos $\rho(y) = \epsilon > 0$ e dado $s > 0$, teremos $s < t_j + u_j$ para todo j suficientemente grande, portanto

$$\sigma(s, y) = \lim \sigma(s, y_j) \leq \epsilon$$

e concluímos que

$$\limsup_{t\to\infty} \sigma(s, y) \leq \epsilon,$$

o que contraria a equação (3.1.1).

Caso 2 Existem infinitos índices $j \in \mathbb{N}$ tais que $y_j \notin D$.

Após escolher uma subsequência, teremos $y_j \notin D$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Tomando $x = y_j$ e $t = u_j + t_j$, vemos que $\sigma(t_j, y_j) \geq \delta$ para todo $j \in \mathbb{N}$ por $\diamondsuit_3$. Como $\delta > 0$ não depende de j, temos

$$\limsup \sigma(t_j, y_j) \geq \delta > 0,$$

mas

$$\limsup \sigma(t_j, y_j) \leq \limsup \epsilon_j = 0,$$

uma contradição. $\square$

Estamos estudando persistência relativamente a uma certa função $\rho : X \to \mathbb{R}_+$, portanto temos liberdade de, ao mesmo tempo, estudar persistência em relação a uma outra função $\tilde{\rho} : X \to \mathbb{R}_+$. Por exemplo, se tivermos $\rho(x) \leq \tilde{\rho}(x)$ para todo $x \in X$, então se um semifluxo $\Phi : J \times X \to X$ for uniformemente ρ-persistente, ele automaticamente será também uniformemente $\tilde{\rho}$-persistente. Feitas essas considerações, vamos ao último Teorema desta seção. Diremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}_+$ é semicontínua inferiormente se

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x)$$

sempre que $x_k \to x$. É claro que toda função contínua é semicontínua inferiormente.

Teorema 3.10. *Sejam J um conjunto de tempo, X um espaço métrico e $\Phi : J \times X \to X$ um semifluxo contínuo em estado.*

Sejam $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ contínua, Φ uniformemente ρ-persistente e $\tilde{\rho} : X \to \mathbb{R}_+$ semicontínua inferiormente.

Além disso, suponha que existe um subconjunto fechado C de X com as seguintes propriedades:

(i) Para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$ tem-se $\Phi(t,x) \to C$.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $C_\epsilon = C \cap \{\rho(x) \geq \epsilon\}$ é compacto, e toda trajetória total

$$\phi : J \cup (-J) \to C_\epsilon$$

satisfaz $\tilde{\rho}(\phi(0)) > 0$.

Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \tilde{\rho}(\Phi(t,x)) \geq \epsilon_0$$

para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$.

Demonstração. Como Φ é uniformemente ρ-persistente, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \rho(\Phi(t,x)) \geq \epsilon_1$$

para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$. Escolha $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$.

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Mostrar que Φ é assintoticamente compacto em todos os conjuntos unitários $\{x\}$ com $\rho(x) > 0$.

Sejam $x \in X$ com $\rho(x) > 0$ e t_k uma sequência em J tal que $t_k \to \infty$. Para cada k considere

$$U_k = \{x \in X : \exists y \in C \text{ com } d(x,y) < 1/k \text{ e } |\rho(x) - \rho(y)| < 1/k\}.$$

Então

$$U_k = \bigcup_{y \in C} \left[U_{1/k}(y) \cap \rho^{-1}(\rho(y) - 1/k, \rho(y) + 1/k)\right]$$

é aberto e contém C. Por (i), após escolhermos uma subsequência, temos

$$\Phi(t_k, x) \in U_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Com efeito, usaremos indução: para o caso $n = 1$, existe $\tau_1 \geq 0$ tal que $t \geq \tau_1 \Rightarrow \Phi(t, x) \in U_1$. Existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k_1} > \tau_1$, logo $\Phi(t_{k_1}, x) \in U_1$. Agora suponha que já escolhemos $t_{k_1} < t_{k_2} < \ldots < t_{k_n}$ tais que $\Phi(t_{k_j}, x) \in U_j$, $j = 1, \ldots, n$. Existe $\tau_{n+1} \geq 0$ tal que $t \geq \tau_{n+1} \Rightarrow \Phi(t, x) \in U_{n+1}$. Existe também $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k_{n+1}} > \max\{t_{k_n}, \tau_{n+1}\}$, de modo que $t_{k_n} < t_{k_{n+1}}$ e $\Phi(t_{k_{n+1}}, x) \in U_{n+1}$.

Por definição de U_k, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $y_k \in C$ tal que

$$d(\Phi(t_k, x), y_k) < \frac{1}{k} \text{ e } |\rho(\Phi(t_k, x) - \rho(y_k)| < \frac{1}{k} \tag{3.1.2}$$

Daí,

$$\rho(y_k) - \frac{1}{k} < \rho(\Phi(t_k, x)) < \rho(y_k) + \frac{1}{k},$$

logo

$$\liminf \rho(y_k) \leq \liminf \rho(\Phi(t_k, x)) \leq \liminf \rho(y_k),$$

pois $1/k \to 0$. Como $\liminf \rho(\Phi(t_k, x)) \geq \epsilon_1$, temos também

$$\liminf \rho(y_k) \geq \epsilon_1.$$

Daí, $\liminf \rho(y_k) > \epsilon$, logo $\rho(y_k) > \epsilon$ para todo k suficientemente grande. Tomando novamente subsequências, temos $y_k \in C \cap \{\rho \geq \epsilon\} = C_\epsilon$ para todo k. Como C_ϵ é compacto, tomando mais uma vez uma subsequência, temos $y_k \to y \in C_\epsilon$. Mas então (3.1.2) garante que uma subsequência de $\Phi(t_k, x)$ converge para y, e Φ é assintoticamente compacto em $\{x\}$.

$\boxed{\text{Passo 2:}}$ Existe um atrator compacto, K, de pontos $x \in X$ com $\rho(x) > 0$.

Pelo Passo 1 e pelo Teorema 2.30, sabemos que $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai $\{x\}$ para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$. Vamos mostrar que $\omega(x) \subset C_\epsilon$. Se $z \in \omega(x)$, então existe uma sequência $J \ni t_j \to \infty$ tal que

$$\Phi(t_j, x) \to z.$$

Como fizemos acima, podemos extrair uma subsequência tal que $\Phi(t_j, x) \in U_j$ para todo j. Repetindo a argumentação, concluímos que $(\Phi(t_j, x))$ tem uma subsequência que converge para um $y \in C_\epsilon$, mas então $z = y \in C_\epsilon$.

Defina

$$\tilde{K} = \bigcup_{\substack{x \in X \\ \rho(x) > 0}} \omega(x).$$

Então $\tilde{K}$ é invariante:

$$\Phi_t(\tilde{K}) = \Phi_t\left(\bigcup_{\substack{x \in X \\ \rho(x) > 0}} \omega(x) \right) = \bigcup_{\substack{x \in X \\ \rho(x) > 0}} \Phi_t(\omega(x)) = \bigcup_{\substack{x \in X \\ \rho(x) > 0}} \omega(x) = \tilde{K},$$

$\Phi(t,x) \to \tilde{K}$ para todo $x \in X$ com $\rho(x) > 0$ e $\tilde{K} \subset C_\epsilon$. Seja K o fecho de $\tilde{K}$. Então K também é invariante, atrai todo x com $\rho(x) > 0$ e é compacto, pois é um subconjunto fechado do compacto C_ϵ.

$\boxed{\text{Passo 3:}}$ Mostrar que $0 < \inf\limits_{x\in K} \tilde{\rho}(x) =: \epsilon_0$.

Seja $x \in K$. Como K é invariante, o Teorema 2.13 garante que existe uma trajetória total $\phi : J \cup (-J) \to K$ com $\phi(0) = x$. Como ϕ tem valores em C_ϵ, temos $\tilde{\rho}(x) > 0$ por (ii). Suponha que $\inf\limits_{x\in K} \tilde{\rho}(x) = 0$. Então dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ com $0 \leq \tilde{\rho}(x_n) < 1/n$, logo $\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(x_n) = 0$. Como K é compacto, após escolher uma subsequência, temos $x_n \to x \in K$, mas então pela semicontinuidade inferior de $\tilde{\rho}$,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(x_n) = \liminf \tilde{\rho}(x_n) \geq \tilde{\rho}(x) \geq 0,$$

portanto $\tilde{\rho}(x) = 0$, uma contradição. Logo $\epsilon_0 > 0$.

$\boxed{\text{Passo 4:}}$ Finalizar.

Seja $x \in X$ com $\rho(x) > 0$. Afirmamos que

$$\liminf_{t\to\infty} \tilde{\rho}(\Phi(t,x)) \geq \epsilon_0.$$

Suponha que não. Como $\Phi(t,x) \to K$ e K é compacto, existe uma sequência (t_k) em J com $t_k \to \infty$ e $\liminf \tilde{\rho}(\Phi(t_k,x)) < \epsilon_0$. Com efeito, escolha $\delta > 0$ tal que

$$\epsilon_0 - \delta > \liminf_{t\to\infty} \tilde{\rho}(\Phi(t,x)).$$

Podemos obter $t_1 > 1$ tal que $\tilde{\rho}(\Phi(t_1,x)) < \epsilon_0 - \delta$, $t_2 > t_1$ tal que $\tilde{\rho}(\Phi(t_2,x)) < \epsilon_0 - \delta$, etc. Logo, obtemos $t_n \to \infty$ com $\tilde{\rho}(\Phi(t_n,x)) < \epsilon_0 - \delta$, de modo que

$$\liminf \tilde{\rho}(\Phi(t_n,x)) \leq \epsilon_0 - \delta < \epsilon_0.$$

Já vimos no Lema 2.25 que K atrai M se e só se todas as sequências (t_j) em J com $t_j \to \infty$ e (x_j) em M satisfazem $d(\Phi(t_j,x_j)) \to 0$. Como $\Phi(t,x) \to K$, temos que K atrai $\{x\}$, logo $d(\Phi(t_n,x),K) \to 0$. Como K é compacto, existem $y_n \in K$ tais que

$$d(\Phi(t_n,x),K) = d(\Phi(t_n,x),y_n).$$

Escolhendo uma subsequência, temos $y_n \to y \in K$, logo $\Phi(t_n,x) \to y \in K$ também, pela desigualdade triangular!

Assim, temos $\tilde{\rho}(y) \geq \epsilon_0$, pelo Passo 3, mas então

$$\epsilon_0 > \liminf \tilde{\rho}(\Phi(t_k,x)) \geq \tilde{\rho}(y) \geq \epsilon_0$$

pela semicontinuidade inferior de $\tilde{\rho}$, um absurdo. $\square$

3.2 Modelo SI com redução de fertilidade

Considere o seguinte modelo SI para uma doença infecciosa que reduz fertilidade

$$\begin{cases} S' &= (\beta - \mu)S + q\beta I - \kappa SI \\ I' &= \kappa SI - (\mu + \alpha)I \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Como o sistema é autônomo e as expressões que definem S' e I' são localmente lipschitzianas, temos garantia de existência e unicidade de soluções, portanto ele define um semifluxo em $X = \mathbb{R}^2_+$ e conjunto de tempo $J = \mathbb{R}_+$. Esse semifluxo é contínuo pelo Teorema 2.5: ele é claramente contínuo no tempo, e a continuidade em estado uniforme para tempo finito decorre da dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais. Os parâmetros $\beta, \mu, \kappa > 0$ correspondem, respectivamente, às taxas de natalidade, mortalidade e de infecção per capita. A taxa de mortalidade per capita adicional por causa da doença é representada por $\alpha \geq 0$, e o fator $q \in [0, 1]$ indica a redução de fertilidade para um indivíduo infectado.

Trocando as variáveis para $N = S + I$ (a população total) e $y = \frac{y}{N}$ (a fração de infectados presente na população) e fazendo algumas contas, obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} N' &= N\Big(\beta(1-y) - \mu + (q\beta - \alpha)y\Big) \\ y' &= y\Big((\kappa N - \alpha - \beta)(1-y) - q\beta y\Big) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Vamos supor que $q \neq 0$ (ou seja, a doença não é esterilizante). Suponha ainda que $0 < q\beta < \mu + \alpha$, ou seja, morrem mais indivíduos infectados do que nascem, e que $\beta > \mu$. Consideraremos o semifluxo induzido pelas soluções em

$$X = \{(N, y) : N > 0, 0 < y \leq 1\}.$$

Convém também considerar o espaço de estado $\tilde{X} = \{(N, y) : N \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. É fácil ver que na fronteira de $\tilde{X}$ o campo de vetores não aponta para fora de $\tilde{X}$, portanto este conjunto é positivamente invariante. Por existência e unicidade de soluções, concluímos que X também é positivamente invariante.

Teorema 3.11. *Seja $\rho(N, y) = N$. Então o semifluxo é uniformemente fracamente ρ-persistente em X. Em outras palavras, a população persiste fracamente uniformemente.*

Demonstração. Suponha que Φ não é uniformemente fracamente ρ-persistente. Então para todo $\epsilon > 0$ existe uma solução $(N(t), y(t))$ tal que $N(0) > 0$ e $\limsup_{t\to\infty} N(t) < \epsilon$. Assim, $y(0) > 0$, caso contrário $N(t) \to \infty$, portanto $N(t), y(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ pois X é positivamente invariante. Além disso, existe $t_0 > 0$ tal que $N(t) < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Se $t \geq t_0$, temos

$$y' \leq y((\kappa\epsilon - \alpha - \beta)(1-y) - q\beta y).$$

Escolha $\epsilon < \frac{\alpha+\beta}{\kappa}$, de modo que tenhamos $y' \leq 0$. Daí, $y(t)$ é decrescente, e como é limitada inferiormente por 0, existe $\tilde{y} \in [0,1]$ tal que $y(t) \to \tilde{y}$.

Como $y(t)$ é monótona, devemos ter $y'(t) \to 0$. Suponha que $\tilde{y} > 0$. Se $q > 0$, então temos $y' \leq -q\beta y^2$. No limite, obtemos $0 \leq -q\beta\tilde{y}^2 < 0$, um absurdo. Assim, concluímos que $y(t) \to 0$.

Finalmente, como $\frac{N'}{N} = \beta(1-y) - \mu + (q\beta - \alpha)y$, temos que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N'(t)}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} [\beta(1-y) - \mu + (q\beta-\alpha)y] = \beta - \mu > 0,$$

portanto existe $t_0 > 0$ tal que $\frac{N'(t)}{N(t)} > 0$ para todo $t \geq t_0$, ou seja, $N(t)$ cresce exponencialmente, uma contradição. □

Como aplicação do Teorema acima e do Teorema 3.8, provamos que a população persiste uniformemente.

Teorema 3.12. *Se $q \in (0,1]$, então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} N(t) \geq \epsilon$$

para todas as soluções do sistema que satisfazem $N(0) > 0$.

Demonstração. Considere $B = \tilde{X}$ e $\rho(N,y) = N$. Então ρ e σ são contínuas, logo $\tilde{\heartsuit}_0$ é satisfeita. $\tilde{\heartsuit}_1$ é obviamente satisfeita. Se $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \infty$, então $B \cap \{\epsilon_1 \leq \rho(x) \leq \epsilon_2\} = \tilde{X} \cap \{\epsilon_1 \leq N \leq \epsilon_2\} = [\epsilon_1, \epsilon_2] \times [0,1]$ é compacto, mostrando que $\tilde{\heartsuit}_2$ é satisfeita. Finalmente, como todas as soluções consideradas começam em X, que é positivamente invariante, temos que $N(t) > 0$ para todo $t > 0$, logo $\tilde{\heartsuit}_3$ também é satisfeita e o resultado segue do Teorema 3.8. □

Nosso próximo objetivo será mostrar que o parasita também persiste uniformemente. Começamos mostrando que a persistência fraca uniforme é alcançada.

Proposição 3.13. *Se $q \in (0,1]$, então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) \geq \epsilon$$

para toda solução do sistema que satisfaça $N(0) > 0$ e $y(0) > 0$.

Demonstração. Suponha que não. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe uma solução do sistema satisfazendo $N(0) > 0$ e $y(0) > 0$ e tal que

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) < \epsilon.$$

Escolhamos

$$\epsilon < \frac{\beta - \mu}{\beta + \alpha}.$$

Assim, teremos

$$y(t) < \epsilon < \frac{\beta - \mu}{\beta + \alpha}$$

para todo t suficientemente grande, digamos $t \geq t_1$.

Com isso, note que

$$\begin{aligned} N' &= N(\beta(1-y) - \mu + (q\beta - \alpha)y) \\ &= N(\beta - \mu + (\beta(q-1) - \alpha)y) \\ &= N(\beta - \mu - (\alpha + \beta(1-q)y) \\ &> N(\beta - \mu - (\beta + \alpha)\epsilon) \end{aligned}$$

se $t \geq t_1$, pois $1 - q < 1$. Daí, decorre que

$$\frac{N'(t)}{N(t)} > \beta - \mu - (\beta + \alpha)\epsilon > 0$$

se $t \geq t_1$, logo $N(t)$ é crescente se $t \geq t_1$ e $N(t) \to \infty$. Tome $t_2 > t_1$ tal que

$$N(t_2) > \frac{2\beta + \alpha}{\kappa(1-\epsilon)}.$$

Como $N(t)$ é crescente se $t \geq t_1$, temos $N(t) \geq N(t_2)$ se $t \geq t_2$.

Agora note que se $t \geq t_2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= (\kappa N - \alpha - \beta)(1-y) - q\beta y \\ &\geq (\kappa N - \alpha - \beta)(1-y) - \beta y \\ &= N\kappa(1-y) - (\beta + \alpha)(1-y) - \beta y \\ &\geq N\kappa(1-y) - (\beta + \alpha) - \beta \\ &\geq N(t_2)\kappa(1-\epsilon) - (2\beta + \alpha) > 0, \end{aligned}$$

pois $q \leq 1$, $1 - y \leq 1$ e $y \leq 1$, logo $y(t) \to \infty$, uma contradição. □

Como aplicação da Proposição acima e do Teorema 3.9, mostramos que o parasita persiste uniformemente.

Teorema 3.14. *Se $\beta > \mu$ e $q \in (0,1]$, então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) > \epsilon$$

para toda solução do sistema com $N(0) > 0$ e $y(0) > 0$.

Demonstração. Já sabemos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} N(t) > \epsilon_0$$

para toda solução com $N(0) > 0$ e

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) > \epsilon_0$$

para toda solução com $N(0) > 0$ e $y(0) > 0$.

Considere $X = \{(N, y) : N > 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Já sabemos que X é positivamente invariante. Considere também $\rho(N, y) = y$. Então o semifluxo das soluções é uniformemente fracamente ρ-persistente. Escolha $B = \{(N, y) : N \geq \epsilon_0/2, 0 \leq y \leq 1\}$ e considere $(N(t), y(t))$ a solução começando em $(N_0, y_0) \in X$. Então B é fechado e existe $\tau \geq 0$ tal que $N(t) > \epsilon_0/2$ para todo $t \geq \tau$, logo $(N(t), y(t)) \in B$ para todo $t \geq \tau$, ou seja, $\Phi([\tau, \infty) \times \{(N_0, y_0)\}) \in B$, logo $\diamondsuit_0$ é satisfeita.

Dado $\epsilon \in (0, 1)$, escolha N_ϵ grande o suficiente para que tenhamos

$$(\kappa N_\epsilon - \alpha - \beta)(1 - \epsilon) - q\beta\epsilon > 0.$$

Daí, defina

$$D_\epsilon = \{(N, y) : N \leq N_\epsilon, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Então $B \cap D_\epsilon = [\epsilon_0/2, N_\epsilon] \times [0, 1]$ é compacto, logo $B \cap D_\epsilon \cap \{\rho = \epsilon\}$ também é pois ρ é contínua, logo $\diamondsuit_1$ também é satisfeita.

Como o conjunto $\hat{X} = \{(N, y) : N > 0, 0 < y \leq 1\}$ também é positivamente invariante, teremos $\sigma(t, N_0, y_0) = y(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, logo $\diamondsuit_2$ é trivialmente satisfeita.

Finalmente, se $(N_0, y_0) \notin D_\epsilon$ e $\rho(N_0, y_0) = y_0 = \epsilon$, então $N_0 > N_\epsilon$, e daí a solução satisfazendo $(N(0), y(0)) = (N_0, y_0)$ satisfaz

$$y'(0) = y_0((\kappa N_0 - \alpha - \beta)(1 - y_0) - q\beta y_0) > y_0((\kappa N_\epsilon - \alpha - \beta)(1 - \epsilon) - q\beta\epsilon) > 0,$$

logo nunca teremos $\rho(N_0, y_0) = \epsilon = \sigma(t, N_0, y_0) = y(t)$ e $\sigma(s, N_0, y_0) = y(s) \leq \epsilon$ para todo $s \in (0, t)$, pois isso contraria $y'(0) > 0$, portanto $\diamondsuit_3$ é satisfeita por vacuidade. Assim, o Teorema segue do Teorema 3.9. $\square$

4 TEORIA DE PERRON-FROBENIUS

Este capítulo aborda Análise Matricial. Essa teoria é bastante rica, e teve seu início com o Teorema de Perron, que é demonstrado na primeira seção. A segunda seção dedica-se às matrizes irredutíveis, que fornecem a generalização do Teorema de Perron para matrizes não-negativas.

Finalmente, a terceira seção introduz o conceito de matriz quase positiva, bastante recorrente em aplicações na Biologia, como a que apresentamos no Capítulo 4. Estendemos o Teorema de Perron-Frobenius para essas matrizes e mostramos algumas propriedades, inclusive para a exponencial e^{At} quando A é quase positiva.

Seguimos, principalmente, os textos de (MINC, 1988), (RAGHAVAN, 1997) e (MAHONEY, 2016).

4.1 O Teorema de Perron

Definição 4.1. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$. Diremos que A é uma matriz não-negativa ($A \geq 0$) se $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$. Se $a_{ij} > 0 \ \forall i, j$, escrevemos $A > 0$ e dizemos que A é uma matriz positiva. Desse modo, diremos por exemplo que $A \geq B$ se $A - B \geq 0$.*

Denotaremos por $\sigma(A)$ o conjunto dos autovalores da matriz A. Com isso, definimos o **raio espectral** de A como

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

e a **cota espectral** de A como

$$s(A) = \max\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

O resultado fundamental sobre matrizes positivas é o Teorema a seguir, demonstrado pela primeira vez por Oskar Perron em 1907:

Teorema 4.2 (Perron)**.** *Seja $A = (a_{ij}) > 0$ uma matriz $n \times n$. Então:*

(i) Existem $\lambda_0 > 0$ e $y > 0$ tais que $Ay = \lambda_0 y$;

(ii) Para todo autovalor μ de A, tem-se $|\mu| \leq \lambda_0$;

Antes de começarmos a demonstração, enunciamos um resultado que nos auxiliará:

Lema 4.3 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja S um subconjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo de $\mathbb{R}^n$. Se $f : S \to S$ é contínua, então existe $x \in S$ tal que $f(x) = x$.*

Agora provamos o Teorema de Perron:

Demonstração. Seja

$$S = \{(x_1, \dots, x_n)^T : \sum_i x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0 \text{ para todo } i\}.$$

Então S é não-vazio, fechado, limitado e convexo. Defina um mapa , para $x \in S$, o mapa

$$f(x) = \Big(\sum_i (Ax)_i\Big)^{-1} Ax.$$

Como $A > 0$ e $x \in S$, temos $x \geq 0$ e $x \neq 0$, logo $\sum_i (Ax)_i > 0$ e f está bem definida. É claro que $f(S) \subset S$ e que f é contínua, logo existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$ pelo Lema acima.

Temos

$$\Big(\sum_i (Ay)_i\Big)^{-1} Ay = y.$$

Defina

$$\lambda_0 = \sum_i (Ay)_i.$$

Assim, $Ay = \lambda_0 y$ e $\lambda_0 > 0$. Como $A > 0$, temos $Ay > 0$, portanto $y > 0$ pela igualdade acima (mais ainda, todo autovetor não-negativo é positivo) e (i) está provado. Se aplicarmos (i) a A^T, obtemos $\lambda_1 > 0$ e $z > 0$ tais que

$$A^T z = \lambda_1 z.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lambda_1 y^T z &= y^T A^T z \\ &= (Ay)^T z \\ &= \lambda_0 y^T z. \end{aligned}$$

Como $y^T z > 0$, temos $\lambda_0 = \lambda_1$, logo $A^T z = \lambda_0 z$.

Seja μ um autovalor de A, e tome $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ um autovetor associado tal que

$$\sum_i |u_i| = 1.$$

Assim, $u^+ = (|u_1|, \ldots, |u_n|)^T \in S$, e temos

$$\begin{aligned}
(Au^+)_i &= \sum_j a_{ij}|u_j| \\
&\geq \left|\sum_j a_{ij}u_j\right| \\
&= |(Au)_i| \\
&= |\mu u_i| \\
&= |\mu||u_i| \\
&= |\mu|u_i^+,
\end{aligned}$$

logo $Au^+ \geq |\mu|u^+$. Multiplicando por z^T pela esquerda e notando que $z^T u^+ > 0$, pois $z > 0$, $u^+ \geq 0$ e $u^+ \neq 0$, temos

$$z^T Au^+ \geq |\mu|z^T u^+ \Rightarrow (A^T z)^T u^+ \geq |\mu|z^T u^+ \Rightarrow \lambda_0 z^T u^+ \geq |\mu|z^T u^+ \Rightarrow \lambda_0 \geq |\mu|,$$

provando (ii).

□

4.2 Matrizes Irredutíveis

O Teorema de Perron não se estende naturalmente para todas as matrizes não-negativas. Por exemplo, é fácil ver que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem apenas 0 como autovalor e não possui nenhum autovetor positivo. No entanto, Frobenius descobriu que existe uma classe de matrizes não-negativas para a qual o Teorema de Perron se generaliza. Estudar essa clase é o objetivo desta seção.

Definição 4.4. *Uma matriz P $n \times n$ é dita uma* ***matriz de permutação*** *de ordem n se puder ser obtida da matriz identidade $n \times n$ por meio de uma permutação de suas linhas (e colunas). Note que se P é uma matriz de permutação, então P^T também é, e $PP^T = P^T P = I_n$.*

Observação 4.5. *Suponha que permutamos as linhas de uma matriz A para obter uma matriz B. Se P é a matriz de permutação obtida da identidade da mesma forma que B é obtida de A, então $B = PA$. Similarmente, se C é obtida de A permutando suas colunas, então existe uma matriz de permutação P tal que $C = AP$.*

Definição 4.6. *Uma matriz $n \times n$ A é **redutível** se for a matriz nula 1×1 ou se $n \geq 2$ e existir uma matriz de permutação P tal que*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

*onde B e D são matrizes quadradas e 0 é uma matriz nula. A é dita **irredutível** se não for redutível.*

Lema 4.7. *Seja A uma matriz $n \times n$, com $n \geq 2$. Suponha que exista um subconjunto próprio $S \neq 0$ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $a_{ij} = 0$ $\forall i \in S, j \notin S$. Então A é redutível.*

Demonstração. Seja $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, com $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Seja $S^c = T = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$, com $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-k}$. Considere a permutação σ de $\{1, \ldots, n\}$ dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Note que σ pode ser representada pela matriz de permutação $P = (p_{ij})$, onde $p_{rs} = 1$ se $\sigma(r) = s$ (ou seja, na linha r o 1 está na coluna $\sigma(r)$). Mostremos que

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

onde B e D são matrizes quadradas e 0 é a matriz nula $k \times (n-k)$. Considere a linha α e a coluna β, com $1 \leq \alpha \leq k$ e $k+1 \leq \beta \leq n$. Temos

$$(PAP^T)_{\alpha\beta} = \sum_i \sum_j p_{\alpha i} a_{ij} p_{\beta j}.$$

Basta mostrar que cada termo no somatório vale zero. Só temos algo a fazer se $p_{\alpha i} = p_{\beta j} = 1$. Então $\sigma(\alpha) = i$ e $\sigma(\beta) = j$. Como $1 \leq \alpha \leq k$ e $k+1 \leq \beta \leq n$, temos $i \in S$ e $j \in T$. Por hipótese, $a_{ij} = 0$, o que completa a demonstração. □

A recíproca do resultado acima também é verdadeira, como mostra o lema a seguir:

Lema 4.8. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$, com $n \geq 2$. Se A é redutível, então existe um subconjunto próprio $S \subset \{1, \ldots, n\}$ não-vazio tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i \in S$ e $j \notin S$.*

Demonstração. Como A é redutível, existe uma matriz de permutação $P = (p_{ij})$ tal que

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Seja σ a permutação de $\{1, \ldots, n\}$ associada a P, isto é, $p_{ij} = 1$ se e somente se $j = \sigma(i)$. Suponha que as matrizes quadradas B e D são de ordens $m \times m$ e $(n-m) \times (n-m)$, respectivamente. Então, $(PAP^T)_{\alpha\beta} = 0$ sempre que $\alpha \in \{1, \dots, m\}$ e $\beta \in \{m+1, \dots, n\}$. Considere $S = \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$. Se $i \in S$ e $j \notin S$, então $i = \sigma(\alpha)$, $j = \sigma(\beta)$, com $\alpha \in \{1, \dots, m\}$ e $\beta \in \{m+1, \dots, n\}$. Então, temos

$$(PAP^T)_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} p_{\alpha k} a_{kl} p_{\beta l} = 0.$$

Se $k \neq i$ ou se $l \neq j$, então $p_{\alpha k} = 0$ ou $p_{\beta l} = 0$. O único termo que resta no somatório é

$$a_{ij} = p_{\alpha i} a_{ij} p_{\beta j} = 0,$$

já que $p_{\alpha i} = p_{\beta j} = 1$, concluindo a demonstração. □

O Teorema a seguir oferece um par de importantes caracterizações das matrizes irredutíveis não-negativas.

Teorema 4.9. *Seja $A \geq 0$ uma matriz $n \times n$. São equivalentes:*

(I) A é irredutível;

(II) $(I + A)^{n-1} > 0$;

(III) Para cada par (i, j), $1 \leq i, j \leq n$, existe um inteiro positivo $t = t(i, j) \leq n$ tal que $(A^t)_{ij} = a_{ij}^{(t)} > 0$.

Demonstração. Mostremos que $(I) \Rightarrow (II)$. Seja $y \geq 0$, $y \neq 0$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. Note que se uma coordenada de y for positiva, então a mesma coordenada será positiva em $y + Ay = (I + A)y$, pois $Ay \geq 0$. Afirmamos que $(I + A)y$ tem menos coordenadas nulas que y, desde que y tenha alguma coordenada nula. Com efeito, se isso não fosse verdade, então $y_j = 0$ implicaria $y_j + (Ay)_j = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Considere $J = \{j : y_j > 0\}$. Assim, se $j \notin J$ e $r \in J$, temos

$$(Ay)_j = \sum_k a_{jk} y_k = 0$$

e $y_r > 0$, logo $a_{jr} = 0$. Pelo Lema 4.7, A seria redutível, uma contradição. Dessa forma, como $y \neq 0$, vemos que y tem no máximo $n - 1$ coordenadas nulas, portanto $(I + A)y$ tem no máximo $n - 2$ coordenadas nulas.

Repetindo o argumento, vemos que $(I + A)^{n-1} y > 0$. Agora escolha $y = e_j$, a j-ésima coluna da matriz identidade, de modo que a j-ésima coluna de $(I + A)^{n-1}$ é positiva, logo $(I + A)^{n-1} > 0$.

Agora provaremos que $(II) \Rightarrow (III)$. Como $(I + A)^{n-1} > 0$ e $A \geq 0$, temos que nenhuma linha de A é nula, portanto $A(I + A)^{n-1} > 0$. Pelo Teorema Binomial,

$$A(I + A)^{n-1} = A \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} A^k > 0.$$

Assim, para todos i, j, alguma das matrizes $A, A^2, \ldots, A^n$ tem que ter a coordenada i, j positiva.

Finalmente, mostraremos que $(III) \Rightarrow (I)$. Suponha que A é redutível. Então existe uma matriz de permutação P tal que

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, como $PAP^T PAP^T = PA^2P^T$, existem matrizes quadradas B_2 e D_2 tais que

$$PA^2P^T = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}.$$

Em geral, temos

$$PA^tP^T = \begin{bmatrix} B_t & 0 \\ C_t & D_t \end{bmatrix},$$

logo $(PA^tP^T)_{\alpha\beta} = 0 \ \forall t = 0, 1, \ldots, n$ e para todos α, β correspondendo a entradas da submatriz nula de PAP^T.

Assim,

$$0 = (PA^tP^T)_{\alpha\beta} = \sum_k \sum_\ell p_{\alpha k} a_{k\ell}^{(t)} p_{\beta\ell}$$

para todo $t = 1, \ldots, n$. Escolha k, ℓ tais que $p_{\alpha k} = p_{\beta\ell} = 1$. Então $a_{k\ell}^{(t)} = 0 \ \forall t \in \{1, \ldots, n\}$, contradizendo a hipótese e completando a demonstração. $\square$

Corolário 4.10. *Seja $A \geq 0$ uma matriz $n \times n$. Se A for irredutível, então A^T é irredutível.*

Observação 4.11. *Seja $A \geq 0$ uma matriz não-negativa. O grafo orientado associado a A, o qual denotaremos por $G(A)$, tem n vértices, que serão representados por $1, 2, \ldots n$, e existe uma aresta do vértice i para o vértice j se e somente se $a_{ij} > 0$.*

*Um grafo orientado é dito **fortemente conexo** se existe um caminho de qualquer vértice para qualquer outro vértice. Note que $a_{ij}^{(t)} > 0$ se e somente se existe um caminho de comprimento t do vértice i ao vértice j em $G(A)$. Daí, o Teorema anterior garante que A é irredutível se e somente se $G(A)$ é fortemente conexo.*

Proposição 4.12. *Autovetores não-negativos de matrizes irredutíveis não-negativas são positivos.*

Demonstração. Suponha que $Ax = \lambda x$, com $A \geq 0$ irredutível, $x \geq 0$ e $x \neq 0$. Como Ax e x são não-negativos, então é claro que $\lambda \geq 0$. Além disso, $(I + A)x = (1 + \lambda)x$. Já vimos na demonstração do Teorema 4.9 que $(I + A)x$ tem menos coordenadas nulas que x, desde que x tenha alguma coordenada nula. Assim, se x tiver k coordenadas nulas, então $(1 + \lambda)x$ também tem k coordenadas nulas, enquanto $(I + A)x$ tem menos que k coordenadas nulas, um absurdo. Assim, x não pode ter coordenadas nulas, de modo que $x > 0$. □

4.3 O Teorema de Perron-Frobenius

Definição 4.13. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ irredutível não-negativa. A função $f_A : \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$ definida por*

$$f_A(x) = \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i},$$

*onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, é chamada de **função de Collatz-Wielandt** de A.*

Proposição 4.14. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz não-negativa irredutível $n \times n$ e f_A sua função de Collatz-Wielandt. Então:*

(i) $f_A(tx) = f_A(x)$ para todos $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ e $t > 0$;

(ii) Se x é não-negativo, não-nulo e ρ é o maior número real tal que $Ax - \rho x \geq 0$, então $\rho = f_A(x)$;

(iii) Se $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ e $y = (I + A)^{n-1}x$, onde I é a matriz identidade de ordem n, então $f_A(y) \geq f_A(x)$.

Demonstração. Para (i), basta notar que

$$f_A(tx) = \min_{tx_i \neq 0} \frac{(A(tx))_i}{tx_i} = \min_{tx_i \neq 0} \frac{t(Ax)_i}{tx_i} = \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i} = f_A(x).$$

Para (ii), observe que, por definição,

$$f_A(x) \leq \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

sempre que $x_i \neq 0$, de modo que

$$(Ax)_i \geq f_A(x)x_i$$

sempre que $x_i \neq 0$. Quando $x_i = 0$, a desigualdade continua válida, já que A e x são não-negativos, portanto

$$(Ax)_i - f_A(x)x_i \geq 0$$

para todo i, o que é o mesmo que

$$Ax - f_A(x)x \geq 0.$$

Como ρ é o maior número real que satisfaz essa desigualdade, concluímos que $f_A(x) \leq \rho$.

Suponha agora que $f_A(x) < \rho$. Observe que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_k \neq 0$ e

$$\frac{(Ax)_k}{x_k} = f_A(x),$$

de modo que $(Ax)_k - f_A(x)x_k = 0$ e a k-ésima coordenada de $Ax - f_A(x)x$ é nula. Assim, $(Ax)_k - \rho x_k < (Ax)_k - f_A(x)x_k = 0$, um absurdo pois $Ax - \rho x \geq 0$, mostrando que $f_A(x) = \rho$.

Para (iii), vimos acima que

$$Ax - f_A(x)x \geq 0.$$

Como A é irredutível, sabemos do Teorema 4.9 que $(I + A)^{n-1} > 0$, logo

$$(I + A)^{n-1}(Ax - f_A(x)x) \geq 0.$$

Como A e $(I + A)^{n-1}$ comutam (por serem polinômios em A), podemos escrever

$$A(I + A)^{n-1}x - f_A(x)(I + A)^{n-1}x \geq 0,$$

ou seja,

$$Ay - f_A(x)y \geq 0.$$

Pelo item (ii), $f_A(y)$ é o maior número real que satisfaz essa desigualdade, portanto $f_A(y) \geq f_A(x)$, como queríamos. $\square$

Considere $E^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{j=1}^n x_j = 1\right\}$. Então E^n é compacto. Se mostrarmos que f_A atinge seu máximo em E^n, então esse valor também é o máximo de f_A em todo o $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. Com efeito, seja $x^0 \in E^n$ tal que $f_A(x) \leq f_A(x^0)$ para todo $x \in E^n$. Dado $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, seja

$$x = \frac{y}{\sum_{j=1}^n y_j} \in E^n.$$

Como vimos no item (i) da proposição anterior, $f_A(x) = f_A(y)$, logo $f_A(y) = f_A(x) \leq f_A(x^0)$.

Se f_A fosse contínua em E^n, esse fato estaria garantido. Note que $f_A(x)$ é contínua em todo ponto cujas coordenadas são todas positivas, mas que isso pode não ocorrer se uma das coordenadas de x for nula, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.15. *Considere*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 5 \\ 8 & 10 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que A é irredutível. Considere também, para cada $\epsilon \geq 0$, o vetor

$$x(\epsilon) = \frac{(1, 0, \epsilon)}{1 + \epsilon} \in E^n.$$

Quando $\epsilon \to 0$, temos $x(\epsilon) \to x(0) = (1, 0, 0)$. Como $Ax(0) = (2, 2, 0)$, temos que $f_A(x(0)) = 2$.

Por outro lado, temos

$$A(x(\epsilon)) = \frac{(2 + \epsilon, 2 + \epsilon, \epsilon)}{1 + \epsilon},$$

logo

$$f_A((x(\epsilon)) = \min\{2 + \epsilon, 1\} = 1,$$

portanto

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_A(x(\epsilon)) = 1 \neq 2 = f_A(x(0)),$$

provando que f_A não é contínua em $(1, 0, 0)$.

Teorema 4.16. *Seja A uma matriz não-negativa e irredutível $n \times n$. Então f_A atinge seu máximo em E^n.*

Demonstração. Seja

$$G = (I + A)^{n-1} E^n.$$

Então G é compacto, e como A é irredutível, temos que $(I + A)^{n-1} > 0$, logo todos os elementos de G são positivos, já que os elementos de E^n são não-negativos e não-nulos. Com isso, f_A é contínua em G, e portanto existe $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0) \in G$ tal que $f_A(y) \leq f_A(y^0)$ para todo $y \in G$.

Sejam $x \in E^n$, $y = (I + A)^{n-1} x \in G$ e

$$x^0 = \frac{y^0}{\sum_{j=1}^n y_j^0} \in E^n.$$

Pelos itens (i) e (iii) da proposição anterior, temos $f_A(x^0) = f_A(y^0)$ e $f_A(x) \leq f_A(y)$. Daí,

$$f_A(x) \leq f_A(y) \leq f_A(y^0) = f_A(x^0),$$

e portanto $f_A(x^0)$ é o máximo de f_A em E^n, e pela observação acima, também é o máximo de f_A em $\mathbb{R}_+^n$. □

Teorema 4.17 (Perron-Frobenius)**.** *Toda matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ não-negativa e irredutível possui um autovalor positivo r tal que $r \geq |\lambda|$ para todo autovalor λ de A. Além disso, existe um autovetor positivo associado a r.*

Demonstração. Defina $r = \max f_A = f_A(x^0)$, como na demonstração do Teorema anterior. Seja $u = (1/n, \ldots, 1/n) \in E^n$. Então

$$r \geq f_A(u) = \min_i \frac{(Au)_i}{u_i} = \min_i \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\frac{1}{n}} = \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} > 0,$$

pois A não pode ter uma linha nula por ser irredutível. Com isso, r é positivo.

Já sabemos que $Ax^0 - rx^0 \geq 0$. Se for $Ax^0 - rx^0 \neq 0$, então como $(I + A)^{n-1} > 0$ temos que

$$(I + A)^{n-1}(Ax^0 - rx^0) > 0.$$

Novamente usando que A e $(I + A)^{n-1}$ comutam, obtemos

$$A(I + A)^{n-1}x^0 - r(I + A)^{n-1}x^0 > 0.$$

Se $y^0 = (I + A)^{n-1}x^0$, então

$$Ay^0 - ry^0 > 0.$$

Daí, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$Ay^0 - (r + \epsilon)y^0 \geq 0,$$

mas então

$$r < (r + \epsilon) \leq f_A(y^0),$$

contrariando a maximalidade de r em $\mathbb{R}^n_+$. Isso mostra que $Ax^0 = rx^0$, logo r é autovetor de A. Além disso, como x^0 é um autovetor não-negativo da matriz não-negativa e irredutível A, temos que $x^0 > 0$ pela Proposição 4.12.

Finalmente, seja λ um autovalor de A. Então, existe $z = (z_1, \ldots, z_n) \neq 0$ tal que $Az = \lambda z$. Essa igualdade pode ser escrita coordenada a coordenada como

$$\lambda z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j,$$

$1 \leq i \leq n$. Daí, pela desigualdade triangular,

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|z_j|.$$

Assim, se $|z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|) \in \mathbb{R}^n_+$, essa equação equivale a

$$|\lambda||z| \leq A|z|,$$

ou seja, $A|z| - |\lambda||z| \geq 0$. Assim,

$$|\lambda| \leq f_A(|z|) \leq r$$

pela maximalidade de r. □

Em particular, se A é não-negativa e irredutível, $s(A) = r(A) = r$ é um autovalor positivo de A, com autovetor positivo associado. Note que mostramos acima que, se $x \geq 0$ não-nulo é tal que $Ax - s(A)x \geq 0$, então x é autovetor com autovalor $s(A)$, e $x > 0$ pela Proposição 4.12. Daí, se $f_A(x) = s(A)$, então

$$Ax - s(A)x = Ax - f_A(x)x \geq 0,$$

portanto $Ax = s(A)x$ e $x > 0$.

Além disso, como A é não-negativa e irredutível, sabemos que A^T também é. Podemos então aplicar o Teorema de Perron-Frobenius a A^T e concluir que também existe um autovetor positivo de A^T associado a $s(A) = s(A^T)$.

Teorema 4.18. *Suponha que* $0 \leq B \leq A$*, com* $B \neq A$ *e* A *irredutível. Então* $r(B) < s(A)$*. Em particular, se* B *também for irredutível, então* $s(B) < s(A)$*.*

Demonstração. Suponha que $Bz = \lambda z$, com $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Repetindo o final da demonstração do Teorema de Perron-Frobenius, obtemos

$$|\lambda||z| \leq B|z|.$$

Como $B \leq A$, temos

$$|\lambda||z| \leq A|z|,$$

logo

$$|\lambda| \leq f_A(|z|) \leq s(A),$$

pois A é irredutível. Em particular, $r(B) \leq s(A)$.

Se tivéssemos $r(B) = s(A)$, então existiria autovalor λ (com autovetor z) de B tal que $|\lambda| = s(A)$. Pelo que acabamos de ver, isso implica em $f_A(|z|) = s(A)$, e pelo comentário acima, $|z|$ é autovetor de A com autovalor $s(A)$ e $z > 0$. Assim,

$$A|z| = s(A)|z| = |\lambda||z|$$

logo, também pelo que acabamos de ver, $A|z| = B|z|$ com $z > 0$, mas isto só é possível se $A = B$, uma contradição, logo $r(B) < s(A)$. □

4.4 Matrizes quase positivas

Definição 4.19. *Diremos que A é uma matriz* ***quase positiva*** *se for quadrada, não for a matriz nula e se todos os elementos fora da diagonal forem não-negativos.*

Note que A é quase positiva se e somente se $A + sI = B$ é não-negativa para todo s suficientemente grande. Nessas condições, temos $\sigma(B) = \sigma(A) + s$. Com efeito, se $\lambda \in \sigma(B)$, então $0 = \det(B - \lambda I) = \det(A - (s - \lambda)I)$, mostrando que $\lambda - s$ é autovalor de A, logo $\lambda = (\lambda - s) + s \in \sigma(A) + s$. Analogamente, se $\lambda \in \sigma(A)$, então $\det(B - (\lambda + s)I) = \det(A + \cancel{sI} - \cancel{sI} - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = 0$, logo $\lambda + s \in \sigma(B)$. Dessa forma, $s(B) = r(B) = s(A) + s$, pois B é não-negativa. Assim, o Teorema de Perron-Frobenius nos fornece:

Teorema 4.20. *Seja A uma matriz quase positiva. Então sua cota espectral, $s(A)$, é um autovalor associado tanto a um autovetor não-negativo v de A como a um autovetor não-negativo w de A^T. Se, além disso, A for irredutível, $v > 0$ e $w > 0$.*

Corolário 4.21. *Se A e B são matrizes quase positivas irredutíveis, com $B \leq A$ e $B \neq A$, então $s(B) < s(A)$.*

Demonstração. Existe $s > 0$ tal que $\tilde{A} = A + sI$ e $\tilde{B} = B + sI$ satisfazem $0 \leq B \leq A$. Note que a irredutibilidade de A e B garante que $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ também são irredutíveis pelos Lemas 4.7 e 4.8. Pelo Teorema 4.18, temos $s(\tilde{B}) < s(\tilde{A})$, mas como $s(\tilde{A}) = s(A) + s$ e $s(\tilde{B}) = s(B) + s$, segue que $s(B) < s(A)$. □

Vamos precisar também de algumas propriedades de e^{At} quando A for uma matriz quase positiva irredutível. Para isso, vamos considerar um sistema

$$x' = A(t)x,$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ contínua em um intervalo $[t_0, b)$.

Proposição 4.22. *Se $A(t)$ é quase positiva em $[t_0, b)$ e $x(t)$ é uma solução não-nula do sistema acima tal que $x(t_0) \geq 0$, então $x(t) \geq 0$, $t_0 \leq t < b$, e $x(t) > 0$, $t_0 < t < b$, se $A(t_0)$ for irredutível.*

Demonstração. Note que, para cada i,

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq a_{ii} x_i,$$

logo por integração temos

$$x_i(t) \geq x_i(s) e^{\int_s^t a_{ii}(\eta) d\eta}$$

se $t > s$. Logo, se uma componente torna-se positiva, ela permanece positiva no futuro, provando a primeira afirmação.

Suponha agora que $A(t_0)$ é irredutível e seja

$$I = \{i : x_i(t) > 0 \text{ para todo } t \in (t_0, b)\}.$$

Pelo que acabamos de provar, $I \neq \emptyset$. Se $I = \{1, \ldots, n\}$, não há o que provar, então suponha que $I \neq \{1, \ldots, n\}$. Assim, existem $j \in I$ e $k \notin I$ tais que $a_{kj}(t_0) > 0$, pois $A(t_0)$ é irredutível, e por continuidade, continua positivo perto de t_0. Como $k \notin I$, $x_k(s) = 0$ para todo $s > t_0$ suficientemente perto de t_0 pelo parágrafo anterior. Logo, para $s > t_0$ suficientemente próximo de t_0 de tal forma que $x_k(s) = 0$ e $a_{kj}(s) > 0$, temos

$$x_k'(s) \geq a_{kk}(s) \overbrace{x_k(s)}^{0} + a_{kj}(s)x_j(s) > 0,$$

uma contradição, pois deveríamos ter $x_k'(s) = 0$. $\square$

Corolário 4.23. *Se A for uma matriz quase positiva e irredutível, então e^{At} é positiva para todo $t > 0$.*

Demonstração. Basta considerar o sistema $x' = Ax$, cuja solução geral é da forma $x(t) = e^{At}x(0)$. Escolhendo $x(0) = e_i$, o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos $x(0) \geq 0$, e $x(t)$ é a i-ésima coluna de e^{At}. Pela Proposição anterior, $x(t) > 0$, logo $e^{At} > 0$. Note que se A fosse redutível, teríamos $e^{At} \geq 0$. $\square$

Proposição 4.24. *Seja A uma matriz quadrada tal que $s(A) < 0$. Então*

$$A^{-1} = -\int_0^{\infty} e^{At} dt.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
A\int_0^{\infty} e^{At}dt &= \int_0^{\infty} Ae^{At}dt \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{de^{At}}{d\tau}\bigg|_{\tau=t} \right) dt \\
&= e^{At}\bigg|_0^{\infty} \\
&= \overbrace{\lim_{t\to\infty} e^{At}}^{0} - e^0 \\
&= -I
\end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo fato de $s(A) < 0$, logo todos os autovalores de A têm parte real negativa. Daí, A é invertível e

$$A^{-1} = -\int_0^{\infty} e^{At} dt.$$

$\square$

Corolário 4.25. *Se A for quase positiva com $s(A) < 0$, então $-A^{-1} \geq 0$. Se A for irredutível, então $-A^{-1} > 0$.*

Demonstração. Basta usar o Corolário 4.23 e a Proposição 4.24. □

Nosso próximo objetivo será provar que se A é uma matriz quase positiva cujas colunas têm somas negativa, então todos os autovalores de A têm parte real negativa. Em particular, $s(A) < 0$. Para isso usaremos um Teorema auxiliar. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz complexa $n \times n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ a soma dos elementos fora da diagonal da i-ésima linha. Seja $D(a_{ii}, r_i)$ o disco fechado centrado em a_{ii} e de raio r_i. Cada um desses discos é chamado de *disco de Gershgorin*.

Teorema 4.26 (Teorema do Disco de Gershgorin)**.** *Todo autovalor de A pertence a pelo menos um disco de Gershgorin $D(a_{ii}, r_i)$.*

Demonstração. Seja λ um autovalor de A e $x = (x_j)$ um autovetor associado. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|x_i| = \max\{|x_j|\}$, de modo que $|x_i| > 0$ (caso contrário teríamos $x = 0$). Como $Ax = \lambda x$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i.$$

Logo,

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = \lambda x_i - a_{ii} x_i.$$

Dividindo por x_i e tomando o valor absoluto, obtemos

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = r_i,$$

pois $|x_j / x_i| \leq 1$ para todo $j \neq i$. □

Corolário 4.27. *Os autovalores de A também estão contidos em algum dos discos de Gershgorin relativos às colunas de A: $D(a_{jj}, r_j)$, onde $r_j = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema para A^T, usando o fato de que A e A^T possuem os mesmos autovalores. □

Corolário 4.28. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quase positiva cujas colunas têm somas negativas. Então todo autovalor de A tem parte real negativa.*

Demonstração. Usamos o Corolário anterior. Se λ é autovalor de A, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|\lambda - a_{jj}| \leq r_j$. Como A é quase positiva, temos $a_{ij} \geq 0$ se $i \neq j$, e $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 0$, portanto $r_j = \sum_{i \neq j} a_{ij} < -a_{jj} = |a_{jj}|$. Daí, $\Re(\lambda) - a_{jj} = \Re(\lambda - a_{jj}) \leq |\lambda - a_{jj}| \leq r_j < |a_{jj}|$, de modo que $\Re(\lambda) < a_{jj} + |a_{jj}| = 0$. □

5 MODELO SEIRS EM POPULAÇÕES COMPARTIMENTADAS

Este é o principal capítulo dessa Dissertação. Nele as teorias e técnicas dos outros três capítulos são aplicadas em um modelo epidemiológico mais complexo, mostrando o potencial da Análise Matricial feita no Capítulo 3 para estudar Epidemiologia em populações compartimentadas. Na primeira seção explicamos o modelo e fazemos algumas considerações preliminares. Na segunda seção estudamos o Equilíbrio Livre de Doença do modelo. Mostramos que a estabilidade desse sistema está atrelada a uma certa matriz B: quando $s(B) > 0$, o equilíbrio é instável, e quando $s(B) < 0$, é (globalmente assintoticamente) estável.

Na terceira seção mostramos que se $s(B) > 0$ a doença é uniformemente fracamente persistente, e na seção seguinte fazemos uma perturbação no sistema para mostrar que existe um equilíbrio endêmico. Finalmente, a última seção utiliza resultados do Capítulo 2 para mostrar que a doença persiste (fortemente) uniformemente.

Seguimos principalmente o material exposto em (THIEME, 2010). A teoria de equações diferenciais ordinárias necessária (como a exponencial de matrizes) pode ser encontrada em (HALE, 1980) e (TESCHL, 2012).

5.1 O Modelo

Consideremos uma população de hospedeiros que está dividida geograficamente em n compartimentos (países, estados, cidades, por exemplo). Cada compartimento é dividido pela doença em quatro classes epidemiológicas: indivíduos suscetíveis (representados pela letra S), expostos, mas não ainda infecciosos (E), infecciosos (I) e recuperados (R). Vamos permitir que um indivíduo recuperado torne-se novamente suscetível, portanto o modelo será do tipo $SEIRS$. Usaremos $C \in \{S, E, I, R\}$ como uma letra genérica para uma classe não especificada. Além disso, vamos supor que a transmissão da doença e a transição entre a classes epidemiológicas ocorre apenas dentro dos compartimentos.

Sejam $S_i(t)$, $E_i(t)$, $I_i(t)$ e $R_i(t)$ os números de indivíduos suscetíveis, expostos, infectados e recuperados, respectivamente, no compartimento i no instante t, e $N_i(t)$ a população total do compartimento i no instante t. Usaremos a notação vetorial $S = (S_1, \dots, S_n)$, $E = (E_1, \dots, E_n)$, $I = (I_1, \dots, I_n)$ e $R = (R_1, \dots, R_n)$. A dinâmica da população hospedeira e da doença é descrita pelas equações:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_i}{dt} &= \Lambda_i - \kappa_i \frac{S_i I_i}{N_i} - \mu_i^S S_i + \gamma_i^R R_i + \sum_{k=1}^{n} (m_{ik}^S S_k - m_{ki}^S S_i) \\
\frac{dE_i}{dt} &= \kappa_i \frac{S_i I_i}{N_i} - (\gamma_i^E + \mu_i^E) E_i + \sum_{k=1}^{n} (m_{ik}^E E_k - m_{ki}^E E_i) \\
\frac{dI_i}{dt} &= \gamma_i^E E_i - (\gamma_i^I + \mu_i^I) I_i + \sum_{k=1}^{n} (m_{ik}^I I_k - m_{ki}^I I_i) \\
\frac{dR_i}{dt} &= \gamma_i^I I_i - (\gamma_i^R + \mu_i^R) R_i + \sum_{k=1}^{n} (m_{ik}^R R_k - m_{ki}^R R_i) \\
N_i &= S_i + E_i + I_i + R_i
\end{aligned}$$

Nas equações acima, Λ_i denota a taxa segundo a qual indivíduos são recrutados para a população i, o que pode ocorrer, por exemplo, por imigração ou nascimento, ou no caso de uma doença sexualmente transmissível, pela entrada na faixa etária sexualmente ativa; indivíduos no compartimento i e na classe C morrem a uma taxa per capita μ_i^C e passam para a próxima classe epidemiológica a uma taxa per capita γ_i^C; a transmissão da doença é modelada pelo termo $S_i I_i / N_i$, que representa a probabilidade de um indivíduo suscetível encontrar um infeccioso, e κ_i denota a taxa de infecção per capita no compartimento i. Finalmente, m_{ik}^C denota a taxa de migração per capita do compartimento k para o i na classe C. Vamos supor que $m_{kk}^C = 0$ para $1 \leq k \leq n$ e $C \in \{S, E, I, R\}$.

Considere as matrizes $M^C = (M_{ij}^C)$, $C = S, E, I, R$, as *matrizes de migração*, definidas por $M_{ij}^C = m_{ij}^C$ se $i \neq j$ e $M_{ii}^C = -\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^C$, $1 \leq i \leq n$. Então M^C é quase positiva, e cada coluna tem soma igual a zero. Sejam ainda γ^C, μ^C e κ matrizes diagonais com os coeficientes naturalmente obtidos do sistema acima.

Vamos supor que:

- Todos os parâmetros constantes são não-negativos;
- $\mu_i^C > 0$, $\kappa_i > 0$ e $\gamma_i^E > 0$ para todo i;
- $\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i > 0$;
- As matrizes M^S, M^E e M^I são irredutíveis.

A segunda hipótese garante que as taxas de mortalidade e de infecção são positivas e que a progressão da doença não estagna na classe dos indivíduos expostos. Como as taxas de mortalidade são positivas, precisamos que haja uma renovação da população, o que é garantido pela terceira hipótese. A quarta hipótese garante que indivíduos suscetíveis, expostos e infecciosos chegam a todos os compartimentos.

Para $N_i = 0$, definimos $\frac{S_i I_i}{N_i} = 0$. Assim, é possível mostrar, usando argumentos usuais da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, que a expressão $\frac{S_i I_i}{N_i}$ é uma função localmente lipschitziana de $(S_i, E_i, I_i, R_i) \in \mathbb{R}^4_+$. Isso garante existência e unicidade das soluções do sistema acima.

Além disso, é fácil ver que $\mathbb{R}^{4n}_+$ é positivamente invariante. Com efeito, basta mostrar que se $C_i = 0$, $C \in \{S, E, I, R\}$, então $\frac{dC_i}{dt} \geq 0$, o que pode ser comprovado facilmente a partir das equações do sistema. Dessa forma, soluções que iniciem em $\mathbb{R}^{4n}_+$ permanecem nesse conjunto, e o problema fica matematicamente e biologicamente bem posto.

Denotaremos por $N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t)$ a população total.

Teorema 5.1. *Para todos $S^0, E^0, I^0, R^0 \in \mathbb{R}^n_+$ existe uma única solução $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ do sistema acima com valores em $\mathbb{R}^{4n}_+$ e com valores iniciais (S^0, E^0, I^0, R^0) que está definida para todo $t \geq 0$ e tem valores em $\mathbb{R}^{4n}_+$. Existe $c > 0$ tal que, para toda solução não-negativa tem-se $\limsup_{t\to\infty} N(t) \leq c$ e $N(t) \leq \max\{c, N(0)\}$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Sabemos que existe solução única do sistema pela observação anterior, e se ela estiver definida apenas em um intervalo da forma $[0, b)$, com $b < \infty$, deveremos ter

$$\limsup_{t\to b^-} N(t) = \infty.$$

Somando todas as equações do sistema, obtemos

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^n \Big(\Lambda_i - \mu_i^S S_i - \mu_i^E E_i - \mu_i^I I_i - \mu_i^R R_i\Big).$$

Ponha $\mu_m = \min\{\mu_i^C : C = S, E, I, R; i = 1, \ldots, n\}$. Então $\mu_m > 0$ e

$$N' \leq \Lambda - \mu_m N,$$

onde $\Lambda = \sum_{i=1}^n \Lambda_i$. Integrando, obtemos, para $t \geq 0$,

$$N(t) \leq N(0)e^{-\mu_m t} + \frac{\Lambda}{\mu_m}(1 - e^{-\mu_m t}).$$

Como tanto $e^{-\mu_m t}$ quanto $1 - e^{\mu_m t}$ são menores ou iguais a 1 para todo $t \geq 0$, concluímos que

$$N(t) \leq \max\left\{\frac{\Lambda}{\mu_m}, N(0)\right\} \text{ e } \limsup_{t\to\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu_m}.$$

□

Proposição 5.2. *Temos $S(t) > 0$ para $t > 0$. A população em cada compartimento persiste uniformemente: existe $c > 0$ tal que para toda solução e para todo i, $\liminf_{t\to\infty} S_i(t) > c$.*

Demonstração. Podemos escrever

$$S' \geq \Lambda + (M^S - \mu^S - \kappa^S)S.$$

Daí,

$$S(t) \geq e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)t}S(0) + \int_0^t e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)(t-s)}\Lambda ds.$$

Note que $M^S - \mu^S - \kappa^S$ é quase positiva e irredutível (pois M^S é). Dessa forma,

$$e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)t} > 0$$

para todo $t > 0$, e como as somas das colunas de $M^S - \mu^S - \kappa^S$ são negativas, temos

$$s(M^S - \mu^S - \kappa^S) < 0,$$

e daí

$$-(M^S - \mu^S - \kappa^S)^{-1} = \int_0^\infty e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)t}dt > 0.$$

Finalmente, como $e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)}t > 0$ e $\Lambda \geq 0$, temos que $S(t) > 0$ para todo $t > 0$. Além disso, fazendo $t \to \infty$, temos $e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)t}S(0) \to 0$ pois $s(M^S - \mu^S - \kappa^S) < 0$, e

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)(t-s)}\Lambda ds = \Lambda \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{(M^S-\mu^S-\kappa^S)u}du = -(M^S - \mu^S - \kappa^S)^{-1}\Lambda,$$

logo

$$\liminf_{t\to\infty} S(t) \geq -(M^S - \mu^S - \kappa^S)^{-1}\Lambda > 0.$$

□

5.2 O Equilíbrio Livre de Doença

O subespaço $E = I = R = 0$ é invariante e fornece a dinâmica livre de doença, na qual $S = N$ e

$$\frac{dN_i}{dt} = \Lambda_i - \mu_i N_i + \sum_{k=1}^n (m_{ik}^S N_k - m_{ki}^S N_i),$$

ou ainda

$$N' = \Lambda + (M^S - \mu^S)N.$$

Como a soma de cada coluna de $M^S - \mu^S$ é negativa, temos $s(M^S - \mu^S) < 0$ e $-(M^S - \mu^S)^{-1} > 0$. Além disso, a solução de equilíbrio do sistema livre de doença é dada por

$$N = \hat{S} = -(M^S - \mu^S)^{-1}\Lambda > 0.$$

O equilíbrio livre de doença (ELD) do sistema é dado por

$$S_i = \hat{S}_i, E_i = I_i = R_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

Vamos linearizar o sistema em (ELD). A matriz Jacobiana, com variáveis ordenadas como (S, E, I, R), está representada abaixo, onde cada entrada é uma matriz $n \times n$:

$$J = \begin{pmatrix} M^S - \mu^S & 0 & -\kappa & \gamma^R \\ 0 & M^E - \mu^E - \gamma^E & \kappa & 0 \\ 0 & \gamma^E & M^I - \mu^I - \gamma^I & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^I & M^R - \mu^R - \gamma^R \end{pmatrix}.$$

Lema 5.3. *Se* $J = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *é uma matriz em blocos, com* A *e* C *quadradas e* 0 *uma matriz nula, então* $\sigma(J) = \sigma(A) \cup \sigma(C)$.

Demonstração. Suponha que $\lambda \in \sigma(J)$. Então, existe $v = (v_1, v_2) \neq 0$ tal que $Jv = \lambda v$. Daí,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Av_1 + Bv_2 \\ Cv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} Av_1 + Bv_2 & = \lambda v_1 \\ Cv_2 & = \lambda v_2 \end{cases}.$$

Assim, se $v_2 \neq 0$ temos $\lambda \in \sigma(C)$, e se $v_2 = 0$, então $v_1 \neq 0$, caso contrário teríamos $v = 0$, e daí $\lambda \in \sigma(A)$.

Suponha agora que $\lambda \in \sigma(A)$. Então existe $v_1 \neq 0$ tal que $Av_1 = \lambda v_1$. Se $v = (v_1, 0)$, então

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda 0 \end{pmatrix} = \lambda v,$$

logo $\lambda \in \sigma(J)$. Finalmente, se $\lambda \in \sigma(C)$, então $\lambda \in \sigma(C^T)$, já que uma matriz e sua transposta possuem os mesmos autovalores. Daí, existe $v_2 \neq 0$ tal que $C^T v_2 = \lambda v_2$, logo definindo $v = (0, v_2)$, temos

$$J^T v = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C^T v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 0 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = \lambda v,$$

e $\lambda \in \sigma(J^T) = \sigma(J)$. $\square$

Corolário 5.4. *Temos*

$$\sigma(J) = \sigma(M^S - \mu^S) \cup \sigma(M^R - \gamma^R - \mu^R) \cup \sigma(B),$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} M^E - \gamma^E - \mu^E & \kappa \\ \gamma^E & M^I - \gamma^I - \mu^I \end{pmatrix}.$$

Corolário 5.5. *(ELD) é estável se* $s(B) < 0$ *e instável se* $s(B) > 0$.

Demonstração. Basta notar que, como as matrizes $M^S - \mu^S$ e $M^R - \mu^R - \gamma^R$ são quase positivas e suas colunas têm somas negativas, então $s(M^S - \mu^S) < 0$ e $s(M^R - \mu^R - \gamma^R) < 0$. Daí, se $s(B) < 0$ então $s(J) < 0$ e (ELD) é estável, e se $s(B) > 0$, então $s(J) > 0$ e (ELD) é instável. □

Proposição 5.6. *B é uma matriz irredutível.*

Demonstração. Suponha que $B = (b_{ij})$. Lembramos que entre nossas hipóteses sobre o sistema supomos que $\kappa_i, \gamma_i^E > 0$ para todo i e que as matrizes M^E e M^I são irredutíveis. Suponha por absurdo que B é redutível. Então existe um subconjunto próprio e não-vazio $P \subset \{1, \ldots, 2n\}$ tal que $b_{jk} = 0$ se $k \in P$ e $j \notin P$. Se tivéssemos $P \subset \{n+1, \ldots, 2n\}$, então $1 \notin P$, logo

$$b_{1(n+1)} = \kappa_1 = 0,$$

mas isso não ocorre. Analogamente, se tivéssemos $P \subset \{1, \ldots, n\}$, então $n + 1 \notin P$, de modo que

$$b_{(n+1)1} = \gamma_1^E = 0,$$

o que também não é verdade. Dessa forma, $S = P \cap \{1, \ldots, n\}$ é um subconjunto próprio e não-vazio de $\{1, \ldots, n\}$.

Assim, se $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, com $k \in S$ e $j \notin S$, obtemos $b_{jk} = 0$, mas nesse caso b_{jk} são os coeficientes da matriz $M^E - \mu^E - \gamma^E$, que portanto é redutível. Como essa matriz e M^E possuem os mesmos elementos fora da diagonal, isso implica que M^E também é redutível, um absurdo. Logo, B é irredutível. □

Além disso, temos o seguinte

Teorema 5.7. *Se $s(B) < 0$, então $(E, I) \to 0$ quando $t \to 0$ para todas as soluções do sistema.*

Demonstração. Do sistema, vemos que E e I satisfazem

$$\begin{cases} E' & \leq & \kappa I + (M^E - \gamma^E - \mu^E)E \\ I' & = & \gamma^E E + (M^I - \gamma^I - \mu^I)I \end{cases}.$$

Em outras palavras, se $z = (E, I)^T$, temos que

$$z' \leq Bz$$

para toda solução do sistema. Por integração, obtemos

$$z(t) \leq z(0)e^{Bt} \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

pois como $s(B) < 0$, todos os autovetores possuem parte real negativa. □

Observe que se $I(t) \to 0$, então $R(t) \to 0$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que $I(t) < \epsilon$ para todo $t > t_0$. Dessa forma, o sistema nos fornece

$$R' < \epsilon\gamma^I + (M^R - \gamma^R - \mu^R)R$$

se $t > t_0$ (aqui estamos entendendo γ^I como vetor coluna). Por integração, obtemos

$$R(t) < e^{(M^R-\gamma^R-\mu^R)t}R(0) + \epsilon\int_0^t e^{(M^R-\gamma^R-\mu^R)(t-s)}\gamma^I ds.$$

Como a matriz $M^R - \gamma^R - \mu^R$ é quase positiva e suas colunas possuem somas negativas, temos que $s(M^R - \gamma^R - \mu^R) < 0$ e

$$-(M^R - \gamma^R - \mu^R)^{-1} = \int_0^\infty e^{(M^R-\gamma^R-\mu^R)t}dt.$$

Daí, fazendo $t \to \infty$ vamos obter

$$\limsup_{t\to\infty} R(t) \le \epsilon\Big[-(M^R - \gamma^R - \mu^R)^{-1}\gamma^I\Big].$$

Como $R(t) \ge 0$ para todo t, concluímos que

$$0 \le \liminf_{t\to 0} R(t) \le \limsup_{t\to\infty} R(t) = 0$$

pois ϵ foi arbitrário, como queríamos. Em particular, o Teorema anterior mostra que toda solução converge para o equilíbrio livre de doença quando $t \to \infty$ se $s(B) < 0$. Em outras palavras, esse equilíbrio é globalmente assintoticamente estável.

Podemos entender a matriz B como uma função de seus parâmetros, digamos κ: $B = B(\kappa)$. Quando $\kappa = 0$, a matriz B é quase positiva e suas colunas possuem somas negativas, portanto $s(B(0)) < 0$. Ainda não sabemos se é possível termos $s(B(\kappa)) > 0$. Mostraremos que isso é possível para κ suficientemente grande.

Proposição 5.8. $s(B(\kappa)) > 0$ *para* κ *suficientemente grande.*

Demonstração. Temos $Bv = (Cv_1 + \kappa v_2, \gamma^E v_1 + Dv_2)$, onde $C = M^E - \mu^E - \gamma^E$ e $D = M^I - \mu^I - \gamma^I$. Por hipótese, M^E e M^I são irredutíveis, portanto o mesmo vale para C e D. Assim, pelo Teorema de Perron-Frobenius, existem $v_1, v_2 > 0$ tais que $Cv_1 = r_1v_1$, $Dv_2 = r_2v_2$, com $r_1 = s(C) < 0$ e $r_2 = s(D) < 0$, já que C e D são quase positivas com colunas com somas negativas.

Assim, $Bv = (r_1v_1 + \kappa v_2, \gamma^E v_1 + r_2v_2)$. Escolha t grande o suficiente para que $\gamma^E(tv_1) + r_2v_2 \ge v_2$. Agora escolha κ grande o suficiente de modo que $r_1v_1 + \kappa v_2 \ge v_1$. Pondo $v = (tv_1, v_2)$, temos $B(\kappa)v \ge v$, portanto $s(B(\kappa)) \ge 1$.

Como $B = B(\kappa)$ é quase positiva, existe $s > 0$ tal que $A = B + sI$ é não-negativa. Temos $Av = Bv + sv \ge (1 + s)v$, de modo que $1 + s \le s(A) = s(B) + s$ pelo que vimos no Capítulo 3, portanto $s(B) \ge 1$, como queríamos. □

5.3 Persistência Uniforme Fraca da Doença

Começamos esta seção mostrando que a doença persiste uniformemente fracamente em pelo menos um dos compartimentos da população.

Teorema 5.9.

$$\sum_{i=1}^{n}(I_i(0)+E_i(0))>0 \Rightarrow E_j>0, I_j>0, 1\le j\le n, t>0.$$

Se, além disso, $s(B)>0$*, então existe* $\epsilon>0$ *tal que*

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n} I_i(t)>\epsilon$$

para todas as soluções do sistema satisfazendo $\sum_{i=1}^{n}(I_i(0)+E_i(0))>0$.

Demonstração. Seja $v(t)$ o vetor coluna $(E(t),I(t))^T$. Considere a matriz

$$\tilde{B}(t)=\begin{bmatrix} M^E-\gamma^E-\mu^E & D \\ \gamma^E & M^I-\gamma^I-\mu^I \end{bmatrix},$$

onde D é a matriz diagonal com entradas $\kappa_i\frac{S_i}{N_i}$ ao longo da diagonal. Da Proposição 5.2, sabemos que $S(t)>0$ para todo $t>0$, logo essas entradas são todas positivas, portanto a irredutibilidade de B garante que $\tilde{B}(t)$ também é irredutível, para todo $t>0$. Do sistema, vemos que

$$v'(t)=\tilde{B}(t)v(t).$$

Como $v(0)\ge 0$ por hipótese, concluímos que $v(t)\ge 0$ pela Proposição 4.22 (note que não sabemos se $\tilde{B}(0)$ é irredutível). Agora fixado $t_0>0$, já sabemos que $\tilde{B}(t)$ é quase-positiva para todo $t>t_0$ e além disso $\tilde{B}(t_0)$ é irredutível. Como $v(t_0)\ge 0$ pelo que acabamos de mostrar, novamente a Proposição 4.22 garante que $v(t)>0$ para todo $t>t_0$. Como $t_0>0$ foi arbitrário, segue que $v(t)>0$ para todo $t>0$, como queríamos.

Para a segunda parte, suponha que $s(B)>0$ e suponha que a afirmação é falsa. Então para todo $\epsilon>0$ existe uma solução satisfazendo $\sum_{i=1}^{n}(I_i(0)+E_i(0))>0$ e

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(t)<\frac{\epsilon}{2}$$

para todo t suficientemente grande. Em particular, $I_i(t)<\epsilon$ para todos $i\in\{1,\dots,n\}$ e t suficientemente grande. Pelo que acabamos de mostrar, $E_i(t)>0$ e $I_i(t)>0$ para todo $t>0$.

Do sistema, vemos que (daqui em diante o símbolo κ será usado para representar tanto uma matriz diagonal quanto um vetor coluna)

$$E'\le\kappa I+(M^E-\gamma^E-\mu^E)E<\frac{\epsilon}{2}\kappa+(M^E-\gamma^E-\mu^E)E.$$

Por integração, obtemos

$$E(t) < e^{(M^E-\gamma^E-\mu^E)t}E(0) + \frac{\epsilon}{2}\int_0^t e^{(M^E-\gamma^E-\mu^E)(t-s)}\kappa ds.$$

Como M^E é irredutível, a matriz quase positiva $M^E - \gamma^E - \mu^E$ também é, e como as colunas dessa matriz possuem somas negativas, temos que

$$s(M^E - \gamma^E - \mu^E) < 0 \text{ e } -(M^E - \gamma^E - \mu^E)^{-1} > 0.$$

Daí,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t) \le \frac{\epsilon}{2}\Big[-(M^E - \gamma^E - \mu^E)^{-1}\kappa\Big] < \epsilon\Big[-(M^E - \gamma^E - \mu^E)^{-1}\kappa\Big],$$

de modo que

$$E(t) < \epsilon\Big[-(M^E - \gamma^E - \mu^E)^{-1}\kappa\Big]$$

para todo t suficientemente grande. Tomando a norma da soma $||\cdot||_1$ de $\mathbb{R}_n$, obtemos

$$\sum_{i=1} E_i(t) < c_1\epsilon,$$

com $c_1 = ||(M^E - \gamma^E - \mu^E)^{-1}\kappa||_1$.

Analogamente, de

$$R' = \gamma^I I + (M^I - \gamma^I - \mu^I)R$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^n R_i(t) < c_2\epsilon.$$

Basta repetir as contas feitas após o Teorema 5.7 e proceder como acima. Lembramos ainda que existe $c > 0$ tal que para toda solução e todo i tem-se

$$\liminf_{t\to\infty} S_i(t) > c,$$

de modo que

$$S_i(t) > c$$

para todo t suficientemente grande e para todo i. Agora vamos mostrar que existe $\alpha > 0$ tal que

$$1 - \frac{S_i(t)}{N_i(t)} < \alpha\epsilon.$$

Com feito, temos

$$1 - \frac{S_i(t)}{N_i(t)} = \frac{N_i(t) - S_i(t)}{N_i(t)} = \frac{E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)}{S_i(t) + E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)} = f(t).$$

Então

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{S_i(t) + E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)}{E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)} > \frac{S_i(t)}{E_i(t) + I_i(t) + R_i(t)} > \frac{c}{(c_1 + c_2 + 1)\epsilon}$$

para todo t suficientemente grande. Daí,

$$f(t) < \left(\frac{c_1 + c_2 + 1}{c}\right)\epsilon = \alpha\epsilon.$$

Com isso,

$$\frac{S_i(t)}{N_i(t)} > 1 - \alpha\epsilon$$

para todo t suficientemente grande. Assim, o sistema nos fornece

$$\begin{array}{ccc} E' & > & (M^E - \gamma^E - \mu^E)E + (1-\alpha\epsilon)\kappa I \\ I' & = & \gamma^E E + (M^I - \gamma^I - \mu^I)I \end{array},$$

ou ainda, pondo $z = (E, I)^T$,

$$z' > \hat{B}z,$$

com

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} M^E - \gamma^E - \mu^E & (1-\alpha\epsilon)\kappa \\ \gamma^E & M^I - \gamma^I - \mu^I \end{bmatrix}.$$

Como $s(B) > 0$ por hipótese e $s(B)$ varia continuamente com os coeficientes de B, podemos escolher ϵ pequeno o suficiente para que também tenhamos $s(\hat{B}) > 0$ e $(1-\alpha\epsilon)\kappa > 0$. Com isso, $\hat{B}$ é irredutível, logo existe $w > 0$ tal que

$$\hat{B}^T w = s(\hat{B})w$$

pelo Teorema de Perron-Frobenius. Como vimos, $z(t) > 0$ para todo $t > 0$, logo se

$$u(t) = w^T z(t),$$

então $u(t) > 0$ para todo $t > 0$. Agora multipliquemos $z' > \hat{B}z$ à esquerda por w^T. Como $u'(t) = w^T z'(t)$, isso nos fornece

$$\begin{array}{rcl} u'(t) & > & w^T\hat{B}z \\ & = & (\hat{B}^T w)^T z \\ & = & (s(\hat{B})w)^T z \\ & = & s(\hat{B})w^T z \\ & = & s(\hat{B})u(t), \end{array}$$

portanto $u(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ já que $s(\hat{B}) > 0$. Por outro lado, pondo $w^T = (w_1, w_2)$, com $w_1 = (w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}) \in \mathbb{R}^n$ e $w_2 = (w_1^{(2)}, \ldots, w_n^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, obtemos de

$$u(t) = (w_1 w_2)\begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

que

$$\begin{aligned} u(t) &= w_1E(t) + w_2I(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)}E_i(t) + \sum_{i=1}^{n} w_i^{(2)}I_i(t) \\ &\leq ||w_1||_\infty \sum_{i=1}^{n} E_i(t) + ||w_2||_\infty \sum_{i=1}^{n} I_i(t) \\ &< (||w_1||_\infty c_1 + ||w_2||_\infty)\epsilon \end{aligned}$$

para todo t suficientemente grande, onde $|| \cdot ||_\infty$ representa a norma do máximo de $\mathbb{R}^n$. Essa contradição prova o Teorema. □

5.4 Existência de um Equilíbrio Endêmico

Nesta seção mostraremos que no caso $s(B) > 0$ existe um equilíbrio endêmico, isto é, um equilíbrio $(S^*, E^*, I^*, R^*) \in \mathbb{R}_+^{4n}$ satisfazendo $C^* > 0$, $C = S, E, I, R$. Para isso, faremos uma perturbação no nosso sistema, acrescentando um fator η constante a todas as equações para E, I e R, o que pode ser compreendido como imigração de indivíduos não suscetíveis. O sistema perturbado é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{dt} &= \Lambda_i - \kappa_i\frac{S_iI_i}{N_i} - \mu_i^S S_i + \gamma_i^R R_i + \sum_{k=1}^{n}(m_{ik}^S S_k - m_{ki}^S S_i) \\ \frac{dE_i}{dt} &= \eta + \kappa_i\frac{S_iI_i}{N_i} - (\gamma_i^E + \mu_i^E)E_i + \sum_{k=1}^{n}(m_{ik}^E E_k - m_{ki}^E E_i) \\ \frac{dI_i}{dt} &= \eta + \gamma_i^E E_i - (\gamma_i^I + \mu_i^I)I_i + \sum_{k=1}^{n}(m_{ik}^I I_k - m_{ki}^I I_i) \\ \frac{dR_i}{dt} &= \eta + \gamma_i^I I_i - (\gamma_i^R + \mu_i^R)R_i + \sum_{k=1}^{n}(m_{ik}^R R_k - m_{ki}^R R_i) \\ N_i &= S_i + E_i + I_i + R_i \end{aligned}$$

Proposição 5.10. *$E_i(t) > 0$ e $I_i(t) > 0$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $t > 0$ e toda solução do sistema perturbado acima. Além disso, se $s(B) > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\eta \in (0, \epsilon]$ vale*

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} I_i(t) > \epsilon$$

para todas as soluções do sistema perturbado.

Demonstração. Do sistema, vemos que

$$E' \geq \eta + (M^E - \gamma^E - \mu^E)E,$$

onde η corresponde à matriz coluna cujas n entradas são iguais a η. Daí, por integração obtemos

$$E(t) \geq e^{(M^E-\gamma^E-\mu^E)t}E(0) + \int_0^t e^{(M^E-\gamma^E-\mu^E)(t-s)}\eta ds,$$

mas $e^{(M^E-\gamma^E-\mu^E)t} > 0$ para todo $t > 0$ pois $M^E - \gamma^E - \mu^E$ é quase positiva e irredutível, logo $E(t) > 0$ para todo $t > 0$. Analogamente, como

$$I' \geq \eta + (M^I - \gamma^I - \mu^I)I$$

e a matriz $M^I - \gamma^I - \mu^I$ também é quase positiva e irredutível, temos $I(t) > 0$ para todo $t > 0$.

O resto da demonstração é exatamente igual ao que fizemos no Teorema anterior, com uma leve modificação, que mostramos a seguir. Suponha que $s(B) > 0$ e que a afirmação é falsa. Então para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta \in (0, \epsilon]$ tal que o sistema para esse η possui uma solução que satisfaz

$$\sum_{i=1}^n I_i(t) < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo t suficientemente grande. Novamente, o sistema nos fornece

$$\begin{aligned} E' &\leq \eta + \kappa I + (M^E - \gamma^E - \mu^E)E \\ &< \epsilon\Big(1 + \frac{\kappa}{2}\Big) + (M^E - \gamma^E - \mu^E)E \end{aligned}$$

para todo t suficientemente grande, logo

$$E(t) < e^{(M^E-\gamma^E-\mu^E)t}E(0) + \epsilon \int_0^t e^{(M^E-\gamma^E-\mu^E)(t-s)}\Big(1 + \frac{\kappa}{2}\Big)ds.$$

Daí,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t) < \epsilon\Big[-(M^E - \gamma^E - \mu^E)^{-1}\Big(1 + \frac{\kappa}{2}\Big)\Big],$$

portanto

$$\sum_{i=1}^n E_i(t) < c_1\epsilon,$$

com $c_1 = \Big\|-(M^E-\gamma^E-\mu^E)^{-1}\Big(1+\frac{\kappa}{2}\Big)\Big\|_1$, para todo t suficientemente grande. Analogamente, também obtemos

$$\sum_{i=1}^n R_i(t) < c_2\epsilon$$

para todo t suficientemente grande. Como as equações para os S_i's não envolvem η, existe $c > 0$ tal que para todas as soluções do sistema perturbado e todo i, tem-se

$$\liminf_{t\to\infty} S_i(t) > c,$$

e a demonstração é exatamente igual à que fizemos para o sistema original. Com isso, podemos repetir o resto da demonstração do Teorema anterior. $\square$

Precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.11. *Considere o semifluxo Φ induzido pelas soluções do sistema autônomo $x' = f(x)$, com f localmente lipschitziana. Se K é compacto, convexo e positivamente invariante, então existe pelo menos um equiíbrio de Φ em K.*

Demonstração. Para cada $\tau > 0$, considere o mapa que leva $x \in K$ em $\Phi(\tau, x) \in K$ (já que K é positivamente invariante). Como esse mapa é contínuo, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Lema 4.3) garante que existe $p \in K$ tal que $\Phi(\tau, p) = p$, o que nos fornece uma órbita de período τ.

Considere agora uma sequência $\tau_m > 0$ com $\tau_m \to 0$ e os pontos fixos $p_m \in K$ correspondentes, de modo que

$$\Phi(\tau_m, p_m) = p_m.$$

Tomando uma subsequência caso necessário, suponha que $p_m \to p^* \in K$. Pela propriedade arquimediana, para todo t e todo $m \in \mathbb{N}$, existe um inteiro $k_m(t)$ tal que

$$k_m(t)\tau_m \leq t < k_m(t)\tau_m + \tau_m$$

e

$$\Phi(k_m(t)\tau_m, p_m) = p_m$$

já que $\Phi(t, p_m)$ é periódica de período τ_m. Assim,

$$0 \leq t - k_m(t)\tau_m < \tau_m,$$

logo $t - k_m(t)\tau_m \to 0$ quando $m \to \infty$ para cada t fixado. Daí,

$$\begin{aligned} |\Phi(t, p^*) - p^*| &\leq |\Phi(t, p^*) - \Phi(t, p_m)| + |\Phi(t, p_m) - p_m| + |p_m - p^*| \\ &= |\Phi(t, p^*) - \Phi(t, p_m)| + |\Phi(t - k_m(t)\tau_m, p_m) - p_m| + |p_m - p^*| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

quando $m \to \infty$ para todo t, mostrando que $\Phi(t, p^*) = p^*$ para todo t, como queríamos. □

Teorema 5.12. *Se $s(B) > 0$ então existe um equilíbrio (S^*, E^*, I^*, R^*) do sistema original satisfazendo $C^* > 0$, $C = S, E, I, R$.*

Demonstração. Some $\eta \in (0, 1]$ a cada uma das equações para C_i, $C = E, I, R$, $1 \leq i \leq n$. Seja

$$N = \sum_C \sum_i C_i$$

e some todas as equações, obtendo

$$N' \leq \sum_i \Lambda_i + 3n - \mu N$$

uniformemente para $\eta \in (0,1]$, onde $\mu = \min\{\mu_i^C : C = E, I, R, i = 1, \ldots, n\}$. Daí,

$$P = \left\{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}_+^{4n} : N \leq \left(\sum_i \Lambda_i + 3n\right)/\mu\right\}$$

é positivamente invariante para o sistema perturbado para todo $\eta \in (0,1]$, pois na fronteira de P o campo de vetores não aponta para fora.

Como P é compacto e convexo, para cada $\eta \in (0,1]$ existe um equilíbrio $(S_\eta, E_\eta, I_\eta, R_\eta) \in P$ pelo lema anterior. Pela Proposição 5.10, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (I_\eta)_i(t) > \epsilon$$

se $0 < \eta < \epsilon$, o que garante que existem valores de t arbitrariamente grandes tais que

$$\sum_{i=1}^{n} (I_\eta)_i > \epsilon$$

se $0 < \eta < \epsilon$, já que I_η é constante.

Agora tome uma sequência positiva $\eta_k \to 0$ e denote por $(S_k, E_k, I_k, R_k) \in P$ a sequência de equilíbrios correspondendo aos η_k's. Como P é compacto, existe uma subsequência que converge para um ponto $(S^*, E^*, I^*, R^*) \in P$, que por continuidade, é um equilíbrio do sistema original (pela dependência contínua das soluções em relação aos parâmetros).

Como

$$\sum_i (I_k)_i > \epsilon$$

para todo n suficientemente grande (pois precisamos ter $0 < \eta_k < \epsilon$), segue que

$$\sum_i I_i^* \geq \epsilon > 0,$$

logo $I^* > 0$ e $E^* > 0$ pela primeira parte do Teorema 5.9. Também sabemos que $S^* > 0$ pela Proposição 5.2, e se tivéssemos $R_i^* = 0$, como $I_i^* > 0$ teríamos

$$\frac{dR_i}{dt} = \gamma_i^I I_i - (\gamma_i^R + \mu_i^R)R_i + \sum_{i=1}^{n} (m_{ik}^R R_k - m_{ki}^R R_i) > 0$$

em (S^*, E^*, I^*, R^*), uma contradição, logo também temos $R^* > 0$, completando a demonstração. □

5.5 Persistência Uniforme da Doença

Nesta seção combinamos o Teorema 5.9 com os resultados do Capítulo 2 para obter a persistência uniforme da doença no nosso modelo. Começamos mostrando que a doença persiste uniformemente em pelo menos um compartimento da população.

Teorema 5.13. *Se $s(B) > 0$, então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} I_i(t) > \epsilon$$

para todas as soluções do sistema tais que $\sum_{i=1}^{n}(I_i(0) + E_i(0)) > 0$.

Demonstração. Usamos o Teorema 3.6. Já vimos que o semifluxo é uniformemente fracamente ρ-persistente, com

$$\rho(S, E, I, R) = \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Temos $X = \mathbb{R}_+^{4n}$, $J = \mathbb{R}_+$ e, considerando $x = (S, E, I, R) \in X$, temos que

$$\sigma(t, x) = \sum_{i=1}^{n} I_i(t)$$

é contínua, logo $\tilde{\clubsuit}_0$ é satisfeita. Vimos também que existe $c > 0$ tal que, para toda solução não-negativa do sistema, tem-se

$$\limsup_{t\to\infty} N(t) < c,$$

onde $N(t)$ é a população total no instante t. Defina

$$B = \{x \in X : N(t) \leq c\}.$$

Então B é compacto. Se $\rho(x) > 0$, então $\sum_{i=1}^{n} I_i > 0$, logo a solução que começa em x satisfaz $\sum_{i=1}^{n}(E_i(0) + I_i(0)) > 0$, portanto $I_i(t) > 0$ para todo $t > 0$, $i = 1, \ldots, n$, ou seja, $\sigma(t, x) > 0$ para todo $t > 0$, o que garante que $\tilde{\clubsuit}_1$ é satisfeita. Finalmente, como

$$\limsup_{t\to\infty} N(t) < c,$$

temos que $N(t) < c$ para todo t suficientemente grande, logo $(S(t), E(t), I(t), R(t)) \in B$ para todo t suficientemente grande, ou seja, $d(\Phi(t, x), B) \to 0$, e $\tilde{\clubsuit}_2$ também é satisfeita, finalizando a demonstração. □

Finalmente, demonstramos que a doença persiste uniformemente em todos os compartimentos da população. Para isso, usaremos o Teorema 3.10.

Teorema 5.14. *Existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} \min_i I_i(t) > \epsilon \ \ e \ \ \liminf_{t\to\infty} \min_i E_i(t) > \epsilon$$

para todas as soluções do sistema que satisfazem $\sum_{i=1}^{n}(E_i(0) + I_i(0)) > 0$.

Demonstração. Denotaremos por x um ponto $(S, E, I, R) \in X = \mathbb{R}_+^{4n}$. Defina

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{n}(E_i + I_i) \text{ e } \tilde{\rho}(x) = \min_{i=1}^{n} \min\{E_i, I_i\}.$$

Já vimos que o semifluxo é uniformemente ρ-persistente (na verdade, vimos com $\rho(x) = \sum_{i=1}^n I_i$, mas como $\sum_{i=1}^n(E_i+I_i) \geq \sum_{i=1}^n I_i$ em $\mathbb{R}_+^{4n}$, nossa afirmação acima segue). Aplicamos o Teorema 3.10 em

$$C = \{x \in X : \sum_{i=1}^{n} N_i \leq c\},$$

onde c é como visto no Teorema 5.1: existe $c > 0$ tal que para toda solução não-negativa do sistema tenha-se

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} N_i(t) < c.$$

Então C é compacto, e como $\sum_{i=1}^n N_i(t) < c$ para toda solução não-negativa para todo t suficientemente grande, temos $\Phi(t, x) \to C$ como em (i).

Para (ii), dado $\epsilon > 0$, o conjunto

$$C_\epsilon = C \cap \{\rho(x) \geq \epsilon\}$$

é compacto, e se $\phi : J \cup (-J) \to C_\epsilon$ é uma trajetória total, então trata-se de uma solução do sistema com $\rho(\phi(t)) \geq \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que $\sum_{i=1}^n(E_i(t) + I_i(t)) \geq \epsilon > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Já vimos que $\sum_{i=1}^n(E_i(0) + I_i(0)) > 0 \Rightarrow E_i(t) > 0$ e $I_i(t) > 0$ para todo $t > 0$. De modo análogo podemos mostrar que $\sum_{i=1}^n(E_i(t_0)+I_i(t_0)) > 0 \Rightarrow E_i(t) > 0$ e $I_i(t) > 0$ para todo $t > t_0$. Concluímos então que $E_i(t) > 0$ e $I_i(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, $E_i(0) > 0$ e $I_i(0) > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, portanto $\tilde{\rho}(\phi(0)) > 0$. Do Teorema 3.10, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{i=1}^{n} \min\{E_i(t), I_i(t)\} \geq \epsilon$$

para toda solução do sistema tal que $\sum_{i=1}^n(E_i(0) + I_i(0)) > 0$, e o resultado segue. □

REFERÊNCIAS

HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Krieger Publishing Company, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 61.

HETHCOTE, H. The mathematics of infeccious diseases. *SIAM Review*, v. 42, 2000. Citado na página 11.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. [S.l.]: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009. v. 1. Citado na página 29.

MAHONEY, M. W. Lecture notes on spectral graph methods. *CoRR*, abs/1608.04845, 2016. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1608.04845>. Citado na página 47.

MINC, H. *Nonnegative Matrices*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1988. Citado na página 47.

MUNKRES, J. R. *Topology*. [S.l.]: Prentice Hall, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.

RAGHAVAN, R. B. e T. *Nonnegative Matrices and Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. Citado na página 47.

TESCHL, G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2012. Citado na página 61.

THIEME, H. *Mathematics in Population Biology*. [S.l.]: Princeton University Press, 2003. Citado na página 11.

THIEME, H. L. S. e H. R. *Dynamical Systems and Population Persistence*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 29 e 61.