



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Nicolás Eduardo Zumelzu Cárcamo

Um estudo qualitativo das Estruturas Flexíveis

Recife

2017

Nicolás Eduardo Zumelzu Cárcamo

Um estudo qualitativo das Estruturas Flexíveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Claudio Cuevas Henríquez

Recife

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C265e Cárcamo, Nicolás Eduardo Zumelzu
Um estudo qualitativo das estruturas flexíveis / Nicolás Eduardo Zumelzu
Cárcamo. – 2017.
109 f.

Orientador: Claudio Cuevas Henríquez.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2017.
Inclui referências.

1. Análise funcional. 2. Equações de evolução. I. Henríquez, Claudio
Cuevas (orientador). II. Título.

515.7 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-53

NICOLÁS EDUARDO ZUMELZU CÁRCAMO

UM ESTUDO QUALITATIVO DAS ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 16/02/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

À minha mãe e minhas irmãs... e, em especial, a minha Suelly .

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo que proporcionou em minha vida.

A minha mãe, Eliana, pelo amor, pelos ensinamentos e por sempre ter me incentivado aos estudos.

As minhas irmãs: Karim, Andrea e Victoria, por ter sido um dos meus principais alicerces nesses anos. As amo e as admiro demais.

Aos meus cunhados: Oscar e Ariel que fazem a minhas duas irmãs felizes, agradeço todo seu apoio.

Aos meus amigos do Judô, em especial a os sensei Edrremulos e Jéssica pelas bem-vindas ao Judo de Pernambuco.

Aos amigos do Dmat, Jaime, Andre, Renato (s), Juscelino, Edgar, Lorena, Gilson, Ana, Bob, Rafael (s), Thiago, Milena, Willikat, Claudia, Marcelo, Rúbia, Felix, Joelma, Izabelly e Larissa, por tornarem os dias de meu mestrado tão mais agradáveis, pelas diversas conversas na sala do café, pelas festas, enfim, foi muito bom conviver com todos vocês, obrigado por isso.

Aos meus amigos e amigas: Aldryn, Adriele, Aritana, Katarina, Job, Cristian, Mauricio, Roberto, Suhany e Sebastian agradeço pela imensa amizade. Vocês são essenciais em minha vida, espero tê-los sempre como amigos.

Aos professores da Graduação, em especial ao Profesor Edmundo Mansilla por ter me apoiado neste projeto de estudar no Dmat-UFPE. Também a todos os professores e mestres, entre eles Esptiben Rojas e Rigoberto Medina, que foram canais de conhecimento para mim.

Aos professores do Dmat, por toda a matemática ensinada. Em especial, agradeço aos professores Diana Serrano, Airton Gonçalves, Cesar Castilho e Tony de Sousa, pela confiança, ensinamentos e o apoio. Também aos professores Pablo Braz e Miguel Loayza, coordenadores da Pos Graduação na época.

Ao meu orientador Claudio Cuevas, pela forma dedicada e bacana de me conduzir na preparação da dissertação. Prof. Claudio, você é um exemplo que quero seguir, obrigado pela matemática ensinada e pela amizade construída. Ao senhor e a sua esposa Gilca sou muito grato pelos diversos ensinamentos e pelo incentivo aos estudos.

Aos professores que compuseram a banca examinadora, Filipe Andrade e Clessius Silva, pelas diversas e importantes colaborações dadas para melhorar o trabalho, pelas sugestões de problemas a serem pesquisados e também pelos projetos futuros.

Aos funcionários do dmat, pela disponibilidade, pelo carinho e por desburocratizar nossas vidas. Em especial, agradeço a Claudia, Cynthia e Nilza, pela paciência e amor em seus trabalhos.

Agradeço finalmente a todas as pessoas que não foram citadas aqui mas que contribuíram de alguma forma nesta aventura.

Ao CAPES, pelo apoio financeiro.

“Um cão sem dono divaga livre. O falcão do daimyo voa mais alto”.
(Mirumoto Jinto)

RESUMO

Uma equação diferencial é uma fórmula matemática que relaciona uma função com suas derivadas. Na matemática aplicada, as funções geralmente representam quantidades físicas, os derivados representam suas proporções de mudança e a equação define a relação entre elas. Como essas relações são muito comuns, as equações diferenciais desempenham um papel importante em várias disciplinas, incluindo engenharia, física, química, economia e biologia. Em matemática pura, as equações diferenciais são estudadas a partir de diferentes perspectivas, mais sobre o conjunto de soluções das funções que satisfazem a equação. Somente as equações diferenciais mais simples podem ser resolvidas por fórmulas explícitas; no entanto, algumas propriedades das soluções de uma determinada equação diferencial podem ser determinadas sem encontrar a sua forma exata. Se a solução exata não puder ser encontrada, ela pode ser obtida numericamente por uma aproximação usando computadores. A teoria dos sistemas dinâmicos enfatiza a análise qualitativa dos sistemas descritos por equações diferenciais, enquanto muitos métodos numéricos foram desenvolvidos para determinar soluções com um certo grau de precisão. As equações diferenciais podem ser divididas em vários tipos. Além de descrever as propriedades da própria equação, as classes das equações diferenciais podem ajudar a buscar a escolha da aproximação de uma solução. É muito comum que essas distinções incluam se a equação é: Derivados Ordinários ou Parciais, Lineares ou Não-Lineares e Homogêneos ou não Homogêneos. Esta lista é muito grande; existem muitas outras propriedades e subclasses de equações diferenciais que podem ser muito úteis em contextos específicos. Utilizando ferramentas de Análise Funcional e Topologia, estudamos propriedades de limitação e periodicidade assintótica de soluções brandas para a equação que modela as vibrações de Estruturas Flexíveis $u'' + \alpha u''' = \beta \Delta u + \Delta u' + f$ que possuem material com amortecimento interno e força externa f . Provamos que o conjunto composto de soluções brandas para este problema é compacto e conexo no espaço de funções contínuas. Esta propriedade é conhecida na literatura como propriedade de Kneser.

Palavras-chave: Equações de evolução. Periodicidade. Periodicidade assintótica. Estruturas flexíveis. Soluções brandas. Propriedade de Kneser. Famílias regularizadas.

ABSTRACT

A differential equation is a mathematical equation that relates some function with its derivatives. In applications, the functions usually represent physical quantities, the derivatives represent their rates of change, and the equation defines a relationship between the two. Because such relations are extremely common, differential equations play a prominent role in many disciplines including engineering, physics, economics, and biology. In pure mathematics, differential equations are studied from several different perspectives, mostly concerned with their solutions—the set of functions that satisfy the equation. Only the simplest differential equations are solvable by explicit formulas; however, some properties of solutions of a given differential equation may be determined without finding their exact form. If a self-contained formula for the solution is not available, the solution may be numerically approximated using computers. The theory of dynamical systems puts emphasis on qualitative analysis of systems described by differential equations, while many numerical methods have been developed to determine solutions with a given degree of accuracy. Differential equations can be divided into several types. Apart from describing the properties of the equation itself, these classes of differential equations can help inform the choice of approach to a solution. Commonly used distinctions include whether the equation is: Ordinary/Partial, Linear/Non-linear, and Homogeneous/Inhomogeneous. This list is far from exhaustive; there are many other properties and subclasses of differential equations which can be very useful in specific contexts. Using tools from Functional Analysis and Topology we study L^p -boundedness and asymptotic periodicity of mild solutions for an abstract version of the damped wave equation $u'' + \alpha u''' = \beta \Delta u + \Delta u' + f$ which models the vibrations of flexible structures possessing internal material damping and external force f . We prove that the set consisting of mild solutions for this problem is compact and connected in the space of continuous functions. This property is known in the literature as the Kneser's property.

Keywords: Evolution equations. Periodicity. Asymptotic periodicity. Flexible structure. Mild solution. Kneser property. Regularized families.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	16
2.1	Solução do problema linear	19
2.2	Funções periódicas e suas generalizações	24
2.2.1	Funções S-assintoticamente ω -periódicas	25
2.2.2	Funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas	26
2.3	Métodos Topológicos	28
2.4	Medida de não compacidade	30
3	ESTIMATIVAS L^p PARA SOLUÇÕES	32
3.1	Caso linear	32
3.2	Caso semilinear	35
4	PERIODICIDADE ASSINTÓTICA PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS	48
4.1	Regularidade da convolução	48
4.2	Existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas . . .	50
4.2.1	O caso linear	50
4.2.2	O caso semilinear	52
5	PROPRIEDADE DE KNESER PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS .	78
5.1	Preliminares	78
5.2	Propriedade de Kneser	83
	REFERÊNCIAS	102

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios do estudo das equações diferenciais, um dos principais problemas ao se tentar compreender um certo modelo (tanto abstrato como concreto) é determinar se tal problema possui solução. Após esse primeiro desafio, os demais variam dependendo das necessidades e curiosidades daqueles que investigam tal problema. Em alguns casos, o próximo passo, ao determinar se o modelo com tais parâmetros possui solução, é estabelecer se a solução é única ou não. Da unicidade ou não das soluções podemos seguir alguns caminhos. Por exemplo, podemos estudar as propriedades qualitativas da solução para compreendermos melhor o modelo, propriedades tais como a estabilidade, a peridodicidade, a quase-periodicidade, a periodicidade assintótica, a controlabilidade, dentre outras. Ou também no caso que a solução não é única, podemos nos perguntar se o conjunto formado pelas soluções desse problema satisfaz alguma propriedade estrutural do tipo topológico, como por exemplo, se o conjunto dessas soluções é compacto ou conexo. Um outro caso interessante é o estudo das propriedades L^p para soluções o qual é um tópico muito importante na análise clássica e EDOs. Na atualidade, existem muitos trabalhos onde se estudam propriedades L^p , alguns dos quais podemos citar (LUBINSKY; MASHELE, 2002; PENGTAO; LIZHONG, 2012; CUEVAS et al., 2013; CONSTANTIN; PELÁEZ, 2015; CHEN; MAGNIEZ; OUHABAZ, 2015; CHEN, 2016; GOLDBERG; GREEN, 2016; OTTEN, 2016; KYED; SAUER, 2017).

No início do século 20, o matemático dinamarquês Harald Bohr introduziu o conceito de função quase periódica, tal conceito generaliza de maneira natural as funções periódicas. A teoria de Bohr rapidamente atraiu a atenção de muitos matemáticos famosos da época, entre eles A. S. Besicovitch, S. Bochner, J. von Neumann, V. V. Stepanov, H. Weyl, N. Wiener e M. Fréchet. A noção de quase periodicidade desempenha um papel crucial em vários campos, incluindo a análise harmônica, física, sistemas dinâmicos, etc. Atualmente, têm aparecido na literatura vários conceitos que representam a ideia de função aproximadamente periódica, por exemplo: as funções assintoticamente quase periódicas¹, as funções assintoticamente periódicas² e as funções quase automórficas³.

O problema de periodicidade assintótica é hoje um dos assuntos mais ativos na teoria de comportamento de solução para equações diferenciais. Observamos que os sistemas concretos normalmente são submetidos a perturbações externas que não são periódicas. Em muitas situações reais, podemos supor que estas perturbações são aproximadamente

¹ As funções assintoticamente quase periódicas foram definidas em 1941 por M. Fréchet (ver (FRÉCHET, 1941a; FRÉCHET, 1941b)).

² As funções assintoticamente periódicas foram definidas em 1949 por N.G. De Bruijn (ver (BRUIJN, 1949)).

³ As funções quase automórficas foram definidas em 1962 por Bochner (ver (BOCHNER, 1962)).

periódicas em um sentido amplo. Recentemente surgiu a noção de S-assintoticamente ω -periodicidade (ver (HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008)) que é uma generalização da noção clássica de ω -periodicidades assintótica. Esta nova noção tem interessantes aplicações em vários ramos das equações diferenciais, e isso tem motivado considerável interesse no tópico por parte dos pesquisadores. Indicamos ao leitor as referências (CAICEDO et al., 2012; CUEVAS; DE SOUZA, 2009; CUEVAS; LIZAMA, 2010; CUEVAS; DE SOUZA, 2010; DIMBOUR; N'GUÉRÉKATA, 2012; HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008; DOS SANTOS; HENRÍQUEZ, 2015). Em adição, em (PIERRI; ROLNIK, 2013) foi introduzido um novo espaço de funções S-assintoticamente ω -periódicas, ele é chamado o espaço das funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas ($PSAP_\omega$ abreviado). Vamos estudar aqui propriedades qualitativas deste tipo de funções, e também discutiremos a existência de soluções brandas pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para uma equação abstrata de tercer ordem. Em (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) os autores estudaram a existência e a unicidade de soluções (brandas) $PSAP_\omega$ para uma classe de equações diferenciais fracionárias abstratas, eles também provaram propriedades interessantes sobre esse tipo de funções, muitas das quais são fundamentais em nossos métodos.

Nesta dissertação, estamos interessados em estudar propriedades L^p , periodicidade assintótica e propriedades topológicas do conjunto solução para a equação abstrata que modela as vibrações de estruturas flexíveis, dos artigos (ANDRADE et al., 2015; DE ANDRADE et al., 2015). O interesse em compreender como as estruturas flexíveis se comportam em satélites ou em veículos espaciais é uma das motivações de estudar tal problema. Em (NOLL; ZVAVA; DEYST, 1969), que é um “nota técnica” da NASA⁴, são disseminadas informações práticas para os engenheiros que trabalhavam na teoria de controle para tais tipos de veículos.

Durante as últimas décadas, o uso de sistemas de estruturas flexíveis tem aumentado em importância (BALAS, 1978a; BALAS, 1978b; BOSE; GORAIN, 1998; CHEN; ZHOU, 1990; CHOU; CHEN; CHAO, 1998; GORAIN, 1997; GORAIN; BOSE, 2002). O estudo de uma estrutura aeroespacial flexível é um problema da teoria de sistemas dinâmicos regido por equações diferenciais parciais. Nós consideramos (ver (1)) aqui um modelo matemático de uma estrutura espacial flexível como um painel retangular uniforme fino, por exemplo, um conjunto de células solares ou um veículo espacial com acessórios flexíveis. Este problema é motivado tanto por considerações da engenharia quanto da matemática.

A dinâmica de vibrações lineares de estruturas elásticas é regida pela equação de onda (ver (GORAIN, 2009)) $u''(x, t) = c^2 \Delta u(x, t)$, em algum domínio adequado, em que Δ denota o Laplaciano tomado na variável espacial x e $c > 0$ é a constante velocidade de onda. Esta equação está formulada com base na lei de Hook, em que o estresse σ é simplesmente proporcional à tensão e , que significa $\sigma = Ee$, E sendo o módulo de Young

⁴ Agência nacional de aeronautica espacial.

da estrutura elástica. Mas a dinâmica das vibrações elásticas de estruturas flexíveis é, na prática, não-linear. Um modelo linear mais realista das vibrações não-lineares de uma estrutura elástica, em que o estresse σ não é proporcional à tensão e é descrito pela relação constitutiva $\sigma + \lambda\sigma' = E(e + \mu e')$, em que λ e μ são constantes pequenas satisfazendo $0 < \lambda < \mu$ (GORAIN, 2009). Por (BOSE; GORAIN, 1998), a dinâmica de vibrações das estruturas elásticas são regidas mais precisamente pela equação diferencial de terceira ordem

$$\lambda u'''(t, x) + u''(t, x) = c^2(\Delta u(t, x) + \mu \Delta u'(t, x)),$$

que pela equação de onda simples. Em relação às propriedades qualitativas, (BOSE; GORAIN, 1998; GORAIN, 2009) estudaram estabilização e obtiveram uma taxa de decaimento exponencial da energia, para a solução do problema matemático acima, sujeito a condições de fronteira mistas.

Tendo na mente, um dos nossos objetivos é analisar a periodicidade assintótica da equação⁵

$$\lambda u'''(t, x) + u''(t, x) - c^2(\Delta u(t, x) + \mu \Delta u'(t, x)) = g(t, u(t, x)), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Recentemente, De Andrade e Lizama (2011) estudaram a existência de soluções (brandas) assintoticamente quase periódicas para a equação (1). Agarwal et al. (2011) trataram do problema de existência de soluções (brandas) assintoticamente periódicas da equação (1). Andrade et al. (2015) estudaram a estrutura topológica do conjunto das soluções brandas da equação (1), mais especificamente, os autores mostraram que o conjunto das soluções brandas deste problema, sobre $[0, 1]$, é compacto e conexo no espaço das funções contínuas, esta propriedade é conhecida na literatura como a propriedade de Kneser. Observamos que por Fernández, Lizama e Poblete (2010) o operador Δ é o gerador de uma família $(\lambda, c^2, c^2\mu)$ -regularizada em L^2 (ver Definição 2.1.1).

Consideremos as seguintes equações abstratas

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

em que A é um operador linear fechado agindo sobre um espaço de Banach X , $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ e f é uma função com valores em X . Observamos que em geral não podemos esperar que (2) esteja bem posta, ver (XIAO; LIANG, 1998). Também é conhecido que, a fim de analisar a boa colocação, uma abordagem direta leva a melhores resultados do que os obtidos por uma redução a uma equação de primeira ordem, ver (CHILL; SRIVASTAVA, 2005).

⁵ A motivação para incorporar g como uma perturbação de entrada na equação diferencial que modela o fenômeno origina-se do fato de serem muito pequenos os valores que estas assumem e estão sempre presentes em materiais reais (ver por exemplo (CHRISTENSEN, 2012)), desde que o sistema vibre.

Gostaríamos de salientar que, em geral, a desvantagem prática da última abordagem é que encontrar um espaço de estado ideal é geralmente difícil, e a estrutura do espaço de fase pode ser complicado e inconveniente desde o ponto de vista de aplicações computacionais.

A regularidade maximal em espaços de Hölder para a equação (2) foi recentemente caracterizada por Cuevas e Lizama (2009). Os métodos para se obter este estudo estão contidos em (BATTY; BU, 2004). Poblete e Pozo (2013) caracterizaram a regularidade maximal (2) em espaços de Besov. Por outro lado, Fernández, Lizama e Poblete (2010) caracterizaram a L^p -regularidade maximal de (2). Para obter esta caracterização, os autores introduziram a noção de famílias (α, β, γ) -regularizadas e eles usaram a técnica de multiplicador de Fourier com valores em operadores em espaços UMD (sobre este assunto sugerimos ao leitor à referência (AGARWAL; CUEVAS; LIZAMA, 2014, Capítulo 2)). Em (FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2011), os autores estudaram regularidade de soluções brandas e fortes para (2) em um espaço de Hilbert com condições iniciais apropriadas (ver também (KALTENBACHER; LASIECKA; POSPIESZALSKA, 2012)).

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. O Capítulo 2, intitulado “Preliminares”, possui o objetivo de tornar o texto o mais autossuficiente possível. Nele algumas definições e propriedades dos elementos envolvidos neste trabalho serão lembrados. Por exemplo, se apresentara uma revisão das generalizações de funções periódicas, revisamos também alguns conceitos da Análise Funcional, tais como normas, desigualdades, espaço de L^p e a transformada de Laplace. Na seguinte seção, desenvolveremos o problema linear finalizando com o enunciado o teorema de existência e unicidade de solução forte de (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011). Por fim, nas últimas seções deste capítulo enunciaremos diversos teoremas da teoria de ponto fixo e a medida de não compacidade que serão usados de maneira chave ao longo do texto.

No Capítulo 3, chamado “Estimativas L^p para soluções”, estudaremos a propriedades de L^p -limitação mostrando existência e unicidade de soluções fortes para a equação (2), além de demonstrar que as soluções brandas da equação (3) possuem estas características quando satisfazem condições de Lipschitz. Neste capítulo também enunciamos resultados novos na literatura de estruturas flexíveis.

No Capítulo 4, chamado “Periodicidade assintótica para estruturas flexíveis”, estudaremos a teoria de existência de soluções brandas pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para uma versão abstrata da equação de onda amortecida (2) a qual modela as vibrações de estruturas flexíveis que possuem material de amortecimento interno e força externa f .

Nos concentraremos no estudo de condições suficientes para a existência e unicidade de uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica para equações semilineares abstratas da forma (3). Isto é conseguido por um método misto, combinando ferramentas de certas famílias fortemente contínuas da teoria de operadores com a teoria de ponto fixo.

Os resultados deste capítulo foram obtidos no artigo de De Andrade et al. (2015).

E finalizamos no Capítulo 5, estudando um caso em que não temos a unicidade da solução para o problema que modela estruturas flexíveis. Nosso interesse é mostrar a propriedade de Kneser para o conjunto das soluções brandas da equação (3) com condições iniciais:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = y, \quad u''(0) = z, \quad (4)$$

Ou seja, que o conjunto das soluções do problema (3)-(4) é não vazio, compacto e conexo.

Um resultado obtido por Peano (1890), mostra que ao trocarmos a hipótese de Lipschitz apenas pela continuidade da f no problema de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (5)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

definido em $\mathbb{R}$, continuamos obtendo uma solução local, mas no geral não temos a unicidade da solução. E para um x_0 fixado, o conjunto das soluções de (5)-(6) é chamado “Peano funnel”.

A partir desse resultado começou-se a estudar as estruturas de tais conjuntos, com o objetivo de descrever completamente suas propriedades topológicas e algébricas.

O que Peano fez, foi mostrar que, se $\mathcal{S}$ é o conjunto das soluções do problema (5)-(6), então $\mathcal{S}(t) = \{x(t) : x \in \mathcal{S}\}$ é sempre não vazio, compacto e conexo na topologia da reta, para t numa vizinhança de t_0 . E esse resultado, por sua vez, foi estendido em Kneser (1923) para equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ e cinco anos depois em Fukuhara (1928) prova que o conjunto $\mathcal{S}$ é um continuum⁶ no espaço de Banach das funções contínuas com a norma do supremo.

⁶ Um continuum é um conjunto que satisfaz as propriedades de ser não vazio, conexo e compacto.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo iremos expor os principais resultados que iremos utilizar no decorrer deste trabalho, e no caso de informações mais específicas complementaremos no respectivo capítulo.

Definição 2.0.1 (Norma). Dado um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de norma se, para quaisquer $x, y \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

- i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ se, e somente, se $x = 0$.
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se o espaço vetorial X esta munido com norma, ele passa a ser chamado de espaço normado e é denotado por $(X, \|\cdot\|)$.

Definição 2.0.2 (Espaço de Banach). Um Espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado completo, isto é, para cada sequência de Cauchy $\{x_n\}$ em X , existe um elemento $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

ou equivalentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Definição 2.0.3 (Domínio). Chamamos de domínio do operador T ao conjunto no qual o operador está bem definido e denotaremos por $D(T)$.

Definição 2.0.4 (Operador Limitado). Um operador $T : X \rightarrow Y$ é dito limitado se satisfaz a seguinte condição:

$$\text{Existe um } K \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \|T(v)\|_Y \leq K, \text{ para todo } v \in X.$$

Definição 2.0.5 (Espaço dos Operadores Limitados). O conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$ é chamado espaço dos operadores limitados e é definido como

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y : T \text{ limitado}\},$$

equipado com a norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{B}(X, Y) &\rightarrow \mathbb{K} \\ T &\rightarrow \|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \|T\|. \end{aligned}$$

Note que $(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X, Y)})$ é um espaço de Banach.

Definição 2.0.6 (Norma Uniforme). Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador limitado, a norma de operadores é definida como:

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \sup \{ \|T(v)\|_Y : v \in X \}. \quad (2.0.1)$$

Notação 2.0.1. Quando $X = Y$ denotaremos $\mathcal{B}(X)$ e sua norma com $\|\cdot\|$.

Seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T^n é chamado a n -ésima iteração de T , com $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Denotaremos como $B_\sigma(X)$ a bola fechada com centro na origem e raio σ , no espaço X . Consideramos $D(T)$, $T \in \mathcal{B}(X)$, como um espaço de Banach $(D(T), \|\cdot\|_{D(T)})$ munido com a norma do gráfico, isto é,

$$\|x\|_{D(T)} = \|x\|_X + \|T(x)\|_X, \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 2.0.7 (Operador Fechado). Sejam X, Y dois espaços de Banach. Um operador linear $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ é fechado se, para cada sequência $\{x_n\}$ em $D(T)$ convergindo para x em X tal que $Tx_n \longrightarrow y \in Y$ com $n \longrightarrow \infty$, tem-se que $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Definição 2.0.8 (Resolvente e Espectro). Seja $T \in \mathcal{B}(X)$. O conjunto Resolvente denotado por $\rho(T)$, é definido por

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists (T - \lambda I) \in \mathcal{B}(X) \text{ é bijectiva}\}.$$

O Espectro, denotado por $\sigma(T)$, é o complemento do conjunto resolvente, ou seja, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$. Um elemento $\lambda \in \mathbb{C}$ é dito autovalor de T se $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$.

O conjunto de todos os autovalores é dotado por $\sigma_p(T)$ (= espectro pontual). É bom ter em mente que se $\lambda \in \rho(T)$ então $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. (BREZIS, 2010, Corolário 2.7).

Teorema 2.0.1. (ARENDT et al., 2001, Teorema 1.1.8) *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita e (f_n) uma sequência de funções Bochner integrável de valores X em Ω . Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ em μ -mensurável e se existe uma função Lebesgue integrável de valores reais g em Ω com $\|f_n\| \leq g$ q.t.p., então f é Bochner integrável e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. De fato, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0$.*

Definição 2.0.9 (Espaço de Bochner). O Espaço das funções p -integráveis no sentido de Bochner é o conjunto das funções $f : [0, \infty) \longrightarrow X$ tal que

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty \|f\|_X^p d\mu \right)^{1/p} < +\infty.$$

Quando $p = \infty$ a norma definida é

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } \|f\|_X < +\infty^1.$$

Denotaremos este conjunto por $L^p(0, \infty; X)$ ou $L^\infty(0, \infty; X)$ respectivamente.

¹ $\text{ess sup } \|f\|_X$ é definido por $\text{ess sup } \|f\|_X = \inf \{C; \|f(x)\|_X \leq C \text{ q.t.p.}\}.$

Definição 2.0.10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $f : [0, \infty) \rightarrow X$. A função $f \in L_{loc}^p(0, \infty; X)$ se $f\chi_K \in L^p(0, \infty; X)$ para cada $K \subset \Omega$ compacto.

Teorema 2.0.2. (DIESTEL; UHL, 1977, Corolario 8) Seja f Bochner integrável respeito de μ . Então

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in \overline{\text{co}}(f(E)),$$

onde $E \in \Sigma$ com $\mu(E) > 0$.

Definição 2.0.11. Denotamos por I o intervalo fechado $[0, 1]$, e $C(I; X)$ denota o espaço de todas as funções contínuas de I em X com a norma supremo. Para um conjunto $F \subset C(I; X)$, denotamos por $F(I)$ o conjunto $\{x(t) : t \in I, x \in F\}$. $C^k(\mathbb{R}^+, X)$ denota o espaço das funções diferenciáveis k -vezes contínuas de $\mathbb{R}^+$ em X .

Teorema 2.0.3. (BREZIS, 2010, Teorema 4.6) Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $p, q > 1$ expoentes conjugados. Então $fg \in L^1$ e

$$\int_0^\infty |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (2.0.2)$$

Teorema 2.0.4 (Minkowski). Sejam $f, g \in L^p$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então

$$\left(\int |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.0.3)$$

Teorema 2.0.5 (Desigualdade de Gronwal). Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ tais que:

$$0 \leq f(x) \leq A + B \int_{x_0}^x f(s) ds, \quad \forall x \in I.$$

com A e $B \geq 0$ constantes. Então $f(x) \leq A e^{B(x-x_0)}$.

Teorema 2.0.6. (HÖNIG, 2011) Se $g \in \mathcal{C}([c, d] \times [c, d], X)$, onde X é um espaço de Banach, então temos

$$\int_c^d \left[\int_c^\tau g(\tau, \sigma) d\sigma \right] d\tau = \int_c^d \left[\int_\sigma^d g(\tau, \sigma) d\tau \right] d\sigma.$$

Definição 2.0.12 (Transformada de Laplace). Seja $f(t)$ uma função localmente Bochner integrável $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$, com X espaço de Banach. A transformada de Laplace de $f(t)$ é definida por:

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, se o limite existe.

2.1 Solução do problema linear

Nesta seção desenvolveremos a solução da equação (2) a qual é tratada nos artigos (FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2010; DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) e é estudada nos artigos (ANDRADE et al., 2015; DE ANDRADE et al., 2015). Consideremos a equação (2) com as seguintes condições iniciais

$$u(0) = x \in D(A^2); \quad u'(0) = y \in D(A^2), \quad u''(0) = z \in D(A^2).$$

Resolveremos esta equação formalmente usando a transformada de Laplace. Inicialmente, diminuimos o grau da equação (2) integrando da seguinte forma,

$$\alpha [u''(t) - u''(0)] + [u'(t) - u'(0)] - \beta \int_0^t Au(s)ds - \gamma \int_0^t Au'(s)ds = \int_0^t f(s)ds. \quad (2.1.4)$$

Agora aplicando (ARENDT et al., 2001, Proposição 1.1.7) temos,

$$\alpha u''(t) + u'(t) - \beta A \int_0^t u(s)ds - \gamma Au(t) = \int_0^t f(s)ds + \alpha z + y + \gamma Ax. \quad (2.1.5)$$

Agora aplicamos a transformada de Laplace à (2.1.5),

$$\mathcal{L} \left(\alpha u''(t) + u'(t) - \beta A \int_0^t u(s)ds - \gamma Au(t) \right) = \mathcal{L} \left(\int_0^t f(s)ds + \alpha z + y + \gamma Ax \right),$$

da linearidade e (ARENDT et al., 2001, Corolário 1.6.6, Proposição 1.6.3) obtemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left(\alpha u''(t) + u'(t) - \beta A \int_0^t u(s)ds - \gamma Au(t) \right) \\ &= \alpha \mathcal{L} (u''(t)) + \mathcal{L} (u'(t)) - \beta A \mathcal{L} \left(\int_0^t u(s)ds \right) - \gamma A \hat{u}(t) \\ &= \alpha \mathcal{L} (u''(t)) + \mathcal{L} (u'(t)) - \beta A \frac{\hat{u}(\lambda)}{\lambda} - \gamma A \hat{u}(\lambda) \\ &= \alpha \lambda^2 \hat{u}(\lambda) - \alpha \lambda x - \alpha y + \lambda \hat{u}(\lambda) - x - \beta A \frac{\hat{u}(\lambda)}{\lambda} - \gamma A \hat{u}(\lambda) \\ &= \left(\alpha \lambda^2 \hat{u}(\lambda) + \lambda \hat{u}(\lambda) - \beta A \frac{\hat{u}(\lambda)}{\lambda} - \gamma A \hat{u}(\lambda) \right) - \alpha \lambda x - \alpha y - x \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\alpha \lambda^3 \hat{u}(\lambda) + \lambda^2 \hat{u}(\lambda) - \beta A \hat{u}(\lambda) - \gamma \lambda A \hat{u}(\lambda) \right) - (\alpha \lambda x + \alpha y + x) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\alpha \lambda^3 + \lambda^2) \left(I - \frac{\beta + \gamma \lambda}{\alpha \lambda^3 + \lambda^2} A \right) \hat{u}(\lambda) - (\alpha \lambda x + \alpha y + x). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos para o segundo termo a seguinte fórmula

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left(\int_0^t f(s)ds \right) + \alpha \mathcal{L} (z) + \mathcal{L} (y) + \gamma A \mathcal{L} (x) \\ &= \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda} + \frac{\alpha z}{\lambda} + \frac{y}{\lambda} + \frac{\gamma Ax}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\hat{f}(\lambda) + \alpha z + y + x \gamma A \right). \end{aligned}$$

Daí temos

$$(\alpha\lambda^3 + \lambda^2) \frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{\beta + \gamma\lambda}{\alpha\lambda^3 + \lambda^2} A \right) \hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\hat{f}(\lambda) + \alpha z + y(1 + \alpha\lambda) + x(\gamma A + \alpha\lambda^2 + \lambda) \right).$$

Se $\left\{ \frac{\alpha\lambda^3 + \lambda^2}{\beta + \gamma\lambda} : \operatorname{Re}(\lambda) > \omega \right\} \subset \rho(A)$, por último obtemos

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\alpha\lambda^3 + \lambda^2} \left(I - \frac{\beta + \gamma\lambda}{\alpha\lambda^3 + \lambda^2} A \right)^{-1} \left(\hat{f}(\lambda) + \alpha z + y(1 + \alpha\lambda) + x(\gamma A + \alpha\lambda^2 + \lambda) \right).$$

Sejam

$$\hat{k}(\lambda) = \frac{1}{\alpha\lambda^3 + \lambda^2}, \quad \hat{a}(\lambda) = \frac{\beta + \gamma\lambda}{\alpha\lambda^3 + \lambda^2} \quad (2.1.6)$$

e

$$\hat{\mathcal{R}}(\lambda)x := \frac{1}{\beta + \gamma\lambda} \left(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} - A \right)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{R}(t)x dt, \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega, \quad x \in X.$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(\lambda) &= \hat{k}(\lambda) (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} \\ \hat{\mathcal{R}}(\lambda) (I - \hat{a}(\lambda)A) &= \hat{k}(\lambda) \\ \hat{\mathcal{R}}(\lambda) - \hat{a}(\lambda)\hat{\mathcal{R}}(\lambda)A &= \hat{k}(\lambda) \\ \hat{\mathcal{R}}(\lambda) &= \hat{k}(\lambda) + \hat{a}(\lambda)\hat{\mathcal{R}}(\lambda)A. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [\hat{\mathcal{R}}(\lambda)] x &= \mathcal{L}^{-1} [\hat{k}(\lambda)] x + \mathcal{L}^{-1} [\hat{a}(\lambda)\hat{\mathcal{R}}(\lambda)A] x \\ \mathcal{R}(t)x &= k(t)x + \int_0^t a(t-s)\mathcal{R}(s)A x ds \end{aligned}$$

onde $\hat{a}(\lambda)$ e $\hat{k}(\lambda)$ são as transformadas de $a(t)$ e $k(t)$. A unicidade de $\mathcal{R}$ está dada pelo (ARENDT et al., 2001, Teorema 1.7.3).

Sejam $\alpha, \beta, \gamma > 0$ dados. Seguindo (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) consideramos

$$a(t) = -(\alpha\beta - \gamma) + \beta t + (\alpha\beta - \gamma)e^{-t/\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1.7)$$

e

$$k(t) = -\alpha + t + \alpha e^{-t/\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.1.8)$$

Que se obtem das tranformadas inversas de Laplace² das funções (2.1.6), veja que, com $\hat{k}(\lambda)$ obtemos,

$$\begin{aligned} k(t) = \mathcal{L}^{-1} [\hat{k}(\lambda)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{\alpha}{\lambda - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \right] \\ &= -\alpha + t + \alpha e^{-t/\alpha}. \end{aligned}$$

² Ver tabelas de fórmulas da transformada de Laplace em (FERNÁNDEZ, 2006).

Analogamente obtemos $a(t)$ de $\hat{a}(\lambda)$. De fato,

$$\begin{aligned} a(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{a}(\lambda)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{(\alpha\beta - \gamma)}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda^2} + \left(\frac{\alpha\beta - \gamma}{\lambda - (-\frac{1}{\alpha})}\right)\right] \\ &= -(\alpha\beta - \gamma) + \beta t + (\alpha\beta - \gamma)e^{-t/\alpha}. \end{aligned}$$

A fim de dar uma definição consistente de solução branda para a equação (3) com base em uma abordagem da teoria de operadores, definimos as famílias (α, β, γ) -regularizadas como segue.

Definição 2.1.1. (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) Seja A um operador linear fechado com domínio $D(A)$ definido sobre um espaço de Banach X . Dizemos que A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$, se as seguintes condições são satisfeitas:

($\mathcal{R}_1$) $\mathcal{R}(t)$ é fortemente contínua sobre $\mathbb{R}^+$ e $\mathcal{R}(0) = 0$;

($\mathcal{R}_2$) $\mathcal{R}(t)D(A) \subseteq D(A)$ e $A\mathcal{R}(t)x = \mathcal{R}(t)Ax$, para todo $x \in D(A)$, $t \geq 0$;

($\mathcal{R}_3$) A seguinte equação se verifica:

$$\mathcal{R}(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)\mathcal{R}(s)Axd s, \text{ para todo } x \in D(A), t \geq 0.$$

Neste caso, $\mathcal{R}(t)$ é chamada família (α, β, γ) -regularizada gerada³ por A .

Observação 2.1.1. (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada se, e somente se, existe $\tilde{\mu} \geq 0$ e uma função fortemente contínua $\mathcal{R} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\left\{ \frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} : \operatorname{Re}(\lambda) > \tilde{\mu} \right\} \subseteq \rho(A)$$

e

$$\frac{1}{\beta + \gamma\lambda} \left(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} - A \right)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{R}(t)x dt, \operatorname{Re}(\lambda) > \tilde{\mu}, x \in X.$$

Por outra parte, se assumirmos a existência de uma aplicação fortemente contínua $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\left(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} I - A \right)^{-1} x = \hat{S}x, x \in X \text{ e } \operatorname{Re}(\lambda) > \omega,$$

³ Resultados sobre perturbação, aproximação, comportamento assintótico, representação bem como tipos de teoremas ergódicos para famílias (α, β, γ) -regularizadas podem ser deduzidos do contexto mais geral de famílias (a, k) -regularizadas. Notamos que uma família (α, β, γ) -regularizada corresponde exatamente a uma família (a, k) -regularizada com a e k definidas em (2.1.7) e (2.1.8), respectivamente (ver (LIZAMA, 2000)).

então $\mathcal{R}' : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ é uma função fortemente contínua tal que:

$$S(t)x = \beta \mathcal{R}(t)x + \gamma \mathcal{R}'(t)x. \quad (2.1.9)$$

De fato, é bem conhecido que $\mathcal{L} \left(\int_0^t \mathcal{R}(s)x ds \right) = \frac{1}{\lambda} \hat{\mathcal{R}}(\lambda)x$. Como

$$\hat{S}(\lambda)x = (\beta + \gamma\lambda)\hat{\mathcal{R}}(\lambda)x,$$

então

$$\frac{1}{\lambda} \hat{S}(\lambda)x = \frac{\beta}{\lambda} \hat{\mathcal{R}}(\lambda)x + \gamma \hat{\mathcal{R}}(\lambda)x,$$

o que implica, usando a observação anterior, que

$$\int_0^t S(s)x ds = \beta \int_0^t \mathcal{R}(s)x ds + \gamma \mathcal{R}(t)x$$

e

$$\mathcal{R}(t)x = \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^t S(s)x ds - \beta \int_0^t \mathcal{R}(s)x ds \right].$$

Assim, $\mathcal{R}(\cdot)x$ é uma função de classe C^1 que satisfaz (2.1.9).

Note que neste caso a função $\mathcal{R} : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ satisfaz uma condição de Lipschitz, em particular, é uma função contínua, para a norma de operadores. De fato, para $0 \leq t_1, t_2 \leq a$, do teorema da limitação uniforme, temos que existe $M \geq 0$ tal que $\|\mathcal{R}'(t)\| \leq M$ para todo $0 \leq t \leq a$. Portanto,

$$\|\mathcal{R}(t_2)x - \mathcal{R}(t_1)x\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}'(s)x ds \right\| \leq M|t_2 - t_1|\|x\|,$$

o que implica

$$\|\mathcal{R}(t_2) - \mathcal{R}(t_1)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M|t_2 - t_1|.$$

Surge assim o problema de caracterizar aqueles operadores A tais que geram uma resolvente $\mathcal{R}(\cdot)$ com derivada $\mathcal{R}'(\cdot)$ fortemente contínua.

Observação 2.1.2. Outro resultado sobre o gerador da família (α, β, γ) -regularizada é o seguinte. Seja $-B$ um operador auto-adjunto positivo sobre um espaço de Hilbert H tal que $\alpha\beta \leq \gamma$. Então B é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada limitada sobre H , $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0}$, que é dada por

$$\hat{\mathcal{R}}(\lambda) = \frac{1}{\beta + \gamma\lambda} \left(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} - B \right)^{-1},$$

$\operatorname{Re} \lambda > 0$, em que $\hat{\mathcal{R}}$ denota a Transformada de Laplace de $\mathcal{R}$ (ver (FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2010) para detalhes).

Para o nosso propósito estaremos interessado em estudar o conjunto das soluções brandas para o problema (3) com condições

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = y, \quad u''(0) = z, \quad (2.1.10)$$

a qual definiremos a seguir.

Definição 2.1.2. (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada em X com gerador A . Uma função contínua $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ satisfazendo a equação

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds, \quad t \geq 0, \quad (2.1.11)$$

onde $y, z \in X$ é chamada uma solução branda do problema (3)-(2.1.10).

Para mais detalhes e algumas propriedades das famílias (α, β, γ) -regularizadas, veja por exemplo (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011).

Como na teoria de semigrupo, temos diversas relações para uma família (α, β, γ) -regularizada e seu gerador.

Proposição 2.1.1. (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A . Então:

(a) $\mathcal{R}(\cdot)x \in C^2(\mathbb{R}^+; X)$, para todo $x \in D(A)$;

(b) Seja $x \in X$ e $t \geq 0$, então $\int_0^t a(t-s)\mathcal{R}(s)xds$ pertence à $D(A)$ e

$$\mathcal{R}(t)x = k(t)x + A \int_0^t a(t-s)\mathcal{R}(s)xds.$$

O seguinte resultado é uma extensão da fórmula de variação de parâmetros para o problema de Cauchy de segunda ordem, o qual dá uma descrição completa das soluções para a equação linear abstrata (2) com condições iniciais $u(0) = x$, $u'(0) = y$, $u''(0) = z$, considerando A o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$. Por uma solução forte de (2) nós entendemos que é uma função $u \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^3(\mathbb{R}^+; X)$ tal que $u' \in C(\mathbb{R}^+; D(A))$ e que verifica (2).

Proposição 2.1.2. (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada em X gerada por A . Se $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+, D(A^2))$, $x \in D(A^3)$, $y \in D(A^2)$ e $z \in D(A^2)$, então u esta dada por

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}''(t)x + \mathcal{R}'(t)x - \gamma A \mathcal{R}'(t)x + \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s)ds, \quad (2.1.12)$$

para $t \geq 0$, é solução de (2).

Demonstração. Ver (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011, Proposição 3.1)

□

2.2 Funções periódicas e suas generalizações

O propósito desta seção é relembrar as definições e enunciar algumas das propriedades básicas da teoria de periodicidade que serão essenciais no decorrer deste trabalho. Começaremos definindo o espaço das funções periódicas.

Definição 2.2.1. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada *periódica*, se existe uma constante $\omega > 0$ tal que

$$f(t + \omega) = f(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, dizemos que ω é o período de f e dizemos que f é uma função ω periódica.

Denotamos por $P_\omega(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ que são ω -periódicas. Não é difícil verificar que $P_\omega(X)$ é um subespaço de $C_b(\mathbb{R}; X)$ e que $P_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach.

A seguir, daremos o conceito de funções quase periódicas. Esse conceito é devido à H. Bohr.

Definição 2.2.2. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada *quase periódica*, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $l(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo intervalo de comprimento $l(\varepsilon)$ contém um número τ com a propriedade

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| \leq \varepsilon,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. O número τ é chamado de ε -período de f . O conjunto de todas as funções quase periódicas $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ será denotado por $AP(X)$.

Observamos que $AP(X)$ é um subespaço de $C_b([0, \infty); X)$. Além disso, $AP(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach (ver (CORDUNEANU, 2009, Seção 3.5)). É fácil observar que toda função periódica é quase periódica, porém a recíproca não é verdadeira (ver (CORDUNEANU, 2009, Observação 3.10)). A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela regra

$$f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t),$$

é uma função quase periódica que não é periódica (ver Figura 1).

Em geral, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por

$$f(t) = ae^{it} + be^{i\sqrt{2}t}, \quad a, b \in X, a \neq 0, b \neq 0,$$

é uma função quase periódica que não é periódica.

Introduziremos agora a noção de quase periodicidade assintótica. Este conceito que generaliza as funções quase periódicas é devido M. Fréchet (ver (FRÉCHET, 1941a;

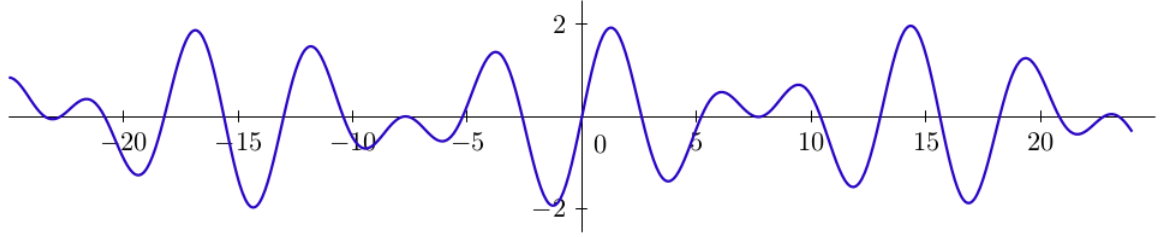


Figura 1: Gráfico da função $f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t)$.

FRÉCHET, 1941b)). Denotaremos por $C_0([0, \infty); X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $h : [0, \infty) \rightarrow X$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$. É um fato bem conhecido que $C_0([0, \infty); X)$ equipado com a norma do supremo é um espaço de Banach.

Definição 2.2.3. Uma função contínua $f : [0, \infty) \rightarrow X$ é chamada *assintoticamente quase periódica* se admite uma decomposição $f = g + h$, em que $g \in AP(X)$ e $h \in C_0([0, \infty); X)$. Representaremos por $AAP(X)$ o conjunto das funções assintoticamente quase periódicas.

Em (ZAIDMAN, 1985, Proposição 5.1.1) é mostrado que

$$AAP(X) = AP(X) \oplus C_0([0, \infty), X).$$

Além disso, por (ZAIDMAN, 1985, Proposição 5.1.1), $(AAP(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Um fato conhecido é que as funções assintoticamente quase periódicas são limitadas e uniformemente contínuas (ver (ZAIDMAN, 1985, Proposição 5.1.2)).

De maneira análoga, para $\omega > 0$, o espaço das funções *assintoticamente ω -periódicas*⁴ é definido por

$$AP_\omega(X) := P_\omega(X) \oplus C_0([0, \infty), X).$$

O espaço $AP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach. Além disso, $AP_\omega(X)$ é um subespaço próprio de $AAP(X)$.

2.2.1 Funções S-assintoticamente ω -periódicas

O conceito de função S-assintoticamente ω -periódica com valores num espaço de Banach X é recente. Nos últimos anos, alguns autores têm estudado as propriedades e as aplicações dessas funções (ver (DE ANDRADE; CUEVAS, 2010; CAICEDO et al., 2012; CUEVAS; DE SOUZA, 2009; CUEVAS; DE SOUZA, 2010; HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008)). O seguinte conceito foi introduzido por Henríquez, Pierri e Táboas (2008).

⁴ Funções assintoticamente periódicas apareceram pela primeira vez no artigo de N.G. De Bruijn (BRUIJN, 1949).

Definição 2.2.4. Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}^+; X)$ é chamada S-assintoticamente ω -periódica se $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0$. Nesse caso, dizemos que ω é um período assintótico de f .

Usamos a notação $SAP_\omega(X)$ para representar o subespaço de $C_b(\mathbb{R}^+; X)$ formado por todas as funções S-assintoticamente ω -periódica. Observamos que o espaço $SAP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach. É claro que toda função assintoticamente ω -periódica é uma função S-assintoticamente ω -periódica. No entanto, a recíproca não é verdadeira (HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008, Exemplos 3.1 e 3.2). Uma diferença importante entre esses dois tipos de funções é que a imagem de uma função assintoticamente ω -periódica é um conjunto relativamente compacto, enquanto a imagem de uma função S-assintoticamente ω -periódica é apenas um conjunto limitado.

Definição 2.2.5. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y$ é uniformemente S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , se para todo subconjunto limitado K de X , o conjunto $\{f(t, x) : t \geq 0, x \in K\}$ for limitado, e para cada $\varepsilon > 0$ existir $T(K, \varepsilon) \geq 0$ tal que, $\|f(t, x) - f(t + \omega, x)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq T(K, \varepsilon)$ e todo $x \in K$.

Definição 2.2.6. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y$ é chamada assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X se para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto limitado $K \subseteq X$, existirem constantes $T = T_{\varepsilon, K}$ e $\delta = \delta_{\varepsilon, K} > 0$ tais que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq T$ e $x, y \in K$ com $\|x - y\| < \delta$.

Lema 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y$ uma função uniformemente S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X . Se $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ for uma função S-assintoticamente ω -periódica, então a função de Nemytskii $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow Y$ definida por $F(t) = f(t, u(t))$ é S-assintoticamente ω -periódica.*

2.2.2 Funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas

Começamos com alguns conceitos e notações.

Definição 2.2.7. (PIERRI; ROLNIK, 2013) Uma função $f \in C_b([0, \infty); X)$ é chamada pseudo S-assintoticamente periódica, se existir $\omega > 0$ tal que,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h \|f(s + \omega) - f(s)\|_X ds = 0. \quad (2.2.13)$$

Nesse caso, dizemos que f é pseudo S-assintoticamente ω -periódica.

Usamos a notação $PSAP_\omega(X)$ para representar o subespaço de $C_b([0, \infty); X)$ formado por todas as funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas. Observamos que $PSAP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach. Além disso, em (PIERRI; ROLNIK, 2013, Proposição 2.1) foi mostrado que

$$AP_\omega(X) \hookrightarrow SAP_\omega(X) \hookrightarrow PSAP_\omega(X), \quad \text{com } PSAP_\omega(X) \neq SAP_\omega(X).$$

Observação 2.2.1. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Observamos que u pertence ao conjunto $PSAP_\omega(X)$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon = \{t \in [0, \infty) : \|u(t + \omega) - u(t)\|_X \geq \varepsilon\}$ for um conjunto ergódico⁵.

Definição 2.2.8. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in K} \|f(s + \omega, x) - f(s, x)\|_Y ds = 0. \quad (2.2.14)$$

Observação 2.2.2. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Para $\varepsilon > 0$ e $x \in K$, definimos $C_{\varepsilon, x} = \{t \in [0, \infty) : \|f(t + \omega, x) - f(t, x)\|_Y \geq \varepsilon\}$. Então (2.2.14) é equivalente à

$$\frac{\lambda \left(\bigcup_{x \in K} C_{\varepsilon, x} \cap [0, t] \right)}{t} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Definição 2.2.9. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ é chamada assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$, existir $T_K > 0$ de forma que o conjunto $\{f(t, x) : t \geq T_K, x \in K\}$ seja limitado.

É bem conhecido que o estudo da composição de duas funções com propriedades especiais é básico e importante para nossas investigações de comportamento assintótico e periódico. Começamos com o seguinte resultado na teoria de funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas.

Lema 2.2.2. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X . Se $u : [0, \infty) \rightarrow X$ for uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

Corolário 2.2.1. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X que satisfaz a seguinte condição:*

($\mathcal{C}_{loc}$) *Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e quaisquer $x, y \in B_\sigma(X)$ temos*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_Y \leq L_f(\sigma) \|x - y\|_X,$$

em que $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

⁵ Um conjunto mensurável $C \subseteq [0, \infty)$ é um conjunto ergódico se $\frac{\lambda(C \cap [0, t])}{t} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, onde λ denota a medida de Lebesgue. (ZHANG, 2003)

Se $u : [0, \infty) \rightarrow X$ for uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Lema 2.2.3. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição:*

$$(C_1) \text{ Para quaisquer } u, v \in C_b([0, \infty); X), \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds = 0 \text{ implica que}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_Y ds = 0.$$

Se $u : [0, \infty) \rightarrow X$ for uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

2.3 Métodos Topológicos

Para conveniência do leitor, nesta seção, enunciaremos diversos resultados utilizados no texto.

Iniciaremos enunciando o Princípio de Contração de Banach, a demonstração desse resultado pode ser encontrada em (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema 1.1.1).

Teorema 2.3.1 (Princípio de Contração de Banach). *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Corolário 2.3.1 (Princípio dos Iterados). *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \rightarrow M$ um mapa tal que, para algum $n \in \mathbb{N}$, F^n é uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

O próximo resultado de ponto fixo é uma generalização do conhecido Teorema de ponto fixo de Darbo (a definição de ξ esta dada na Seção 2.4).

Lema 2.3.1. (LIU et al., 2005) *Sejam B um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X e $F : B \rightarrow B$ um operador contínuo tal que $F(B)$ é limitado. Para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$, defina $F^1(C) = F(C)$ e $F^n(C) = F(\overline{\text{co}(F^{n-1}(C))})$, $n = 2, 3, \dots$. Se existe uma constante $0 \leq k < 1$ e um inteiro positivo n_0 tal que para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$,*

$$\xi(F^{n_0}(C)) \leq k\xi(C),$$

então F possui um ponto fixo em B .

A demonstração dos próximos resultados podem ser encontrada em (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema 6.3.2 e Teorema 6.5.4) respectivamente.

Teorema 2.3.2 (Teorema do ponto fixo de Schauder). *Seja C um subconjunto convexo (não necessariamente fechado) de um espaço linear normado E . Então um mapa compacto $F : C \rightarrow C$ possui ao menos um ponto fixo.*

Teorema 2.3.3 (Leray-Schauder). *Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach X , e assumamos que $0 \in C$. Considere $F : C \rightarrow C$ uma função completamente contínua, e seja*

$$\varepsilon(F) = \{x \in C; x = \lambda F(x) \text{ para algum } 0 < \lambda < 1\}.$$

Então $\varepsilon(F)$ é ilimitado ou F possui um ponto fixo.

Seja $h^* : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $h^*(t) \geq 1$ para todo $t \in [0, \infty)$, e $h^*(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Consideremos o seguinte espaço

$$C_{h^*}(X) = \left\{ u \in C([0, \infty), X); \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h^*(t)} = 0 \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{h^*} = \sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|}{h^*(t)}.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em (DE ANDRADE; CUEVAS; HENRÍQUEZ, 2012, Lema 2.8).

Lema 2.3.2. *Um conjunto $K \subseteq C_{h^*}(X)$ é um conjunto relativamente compacto em $C_{h^*}(X)$ se ele verifica as seguintes condições:*

- (c-1)* *Para todo $b \geq 0$, o conjunto $K_b = \{u|_{[0,b]}; u \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0,b]; X)$.*
- (c-2)* *$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|u(t)\|}{h^*(t)} = 0$ uniformemente para todo $u \in K$; isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $T > 0$ tal que $\frac{\|u(t)\|}{h^*(t)} < \varepsilon$, para cada $t \geq T$, para todo $u \in K$.*

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $h(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h(t) \rightarrow \infty$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Consideramos o espaço

$$C_h(X) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}; X); \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0 \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_h = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}.$$

O seguinte lema pode ser encontrado em (AGARWAL; DE ANDRADE; CUEVAS, 2010, Lema 2.6).

Lema 2.3.3. *Um conjunto $K \subseteq C_h(X)$ é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X)$ se ele verifica as seguintes condições:*

- (c-1) *O conjunto $K(t) = \{u(t); u \in K\}$ é relativamente compacto em X para cada $t \in \mathbb{R}$.*
- (c-2) *O conjunto K é equicontínuo.*
- (c-3) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $L > 0$ tal que $\|u(t)\| \leq \varepsilon h(t)$ para todo $u \in K$ e todo $|t| > L$.*

2.4 Medida de não compacidade

A definição de medida de não compacidade de um subconjunto limitado em espaços normados foi introduzida por K. Kuratowski na década de 30. Algumas décadas depois tal definição voltou a ser utilizada devido aos avanços na teoria de equações diferenciais em espaços de Banach abstratos, onde tal medida se mostra uma grande ferramenta, principalmente para o estudo de existência de pontos fixo. A seguir definiremos a medida de não compacidade e enunciaremos algumas propriedades e um teorema de ponto fixo que utilizaremos no Capítulo 3.

Sejam E espaço de Banach, B um subconjunto limitado de E , e $\varepsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de B é uma ε -cobertura se $\text{diam}(V_i) \leq \varepsilon$ para todo i . A medida de não compacidade de Kuratowski de B é definida por

$$\alpha_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura finita de } B\}.$$

Uma cobertura $\{B_i\}$ de B por bolas de raio $< \varepsilon$ chamamos de ε -cobertura restrita de B . Assim a medida de não compacidade de Hausdorff de B é definida por

$$\tilde{\alpha}_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura restrita finita de } B\}.$$

A seguir apresentaremos várias propriedades das medidas de não compacidade.

Proposição 2.4.1. *Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach E . Então*

- (i) $\alpha_E(A) = 0$, se e somente se, $\overline{A}$ é compacto, sendo $\overline{A}$ o fecho de A .
- (ii) $\alpha_E(\overline{A}) = \alpha_E(A) = \alpha_E(\text{co}\{A\})$, onde $\text{co}\{A\}$ denota a envoltória convexa de A .
- (iii) $\alpha_E(\lambda A) = |\lambda| \alpha_E(A)$.
- (iv) $\alpha_E(A) \leq \alpha_E(B)$ se $A \subset B$.

$$(v) \quad \alpha_E(A + B) \leq \alpha_E(A) + \alpha_E(B).$$

$$(vi) \quad \tilde{\alpha}_E(A) \leq \alpha_E(A) \leq 2\tilde{\alpha}_E(A).$$

Para mais detalhes sobre medida de não compacidade veja por exemplo (AKHME-ROV et al., 1992; CHUONG; KE, 2012; DEIMLING, 2010).

Definição 2.4.1. Seja M um espaço métrico e $X \subset M$, X conjunto não vazio e limitado. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ é dita condensante se para todo $A \subset X$ com $\alpha(A) > 0$, f satisfaz:

$$\alpha(f(A)) < \alpha(A).$$

Enunciaremos agora um resultado de ponto fixo devido a Sadovskii (SADOVSKII, 1967).

Teorema 2.4.1 (Princípio de Sadovskii). *Se um operador condensante f mapeia um subconjunto X convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach E nele próprio, então, ele possui pelo menos um ponto fixo em X .*

3 ESTIMATIVAS L^p PARA SOLUÇÕES

Neste capítulo, faremos um estudo do trabalho realizado pelos autores Andrade et al. (2015, Seção 3). Os quais abordam as propriedades L^p das soluções brandas para a versão abstrata da equação de onda amortecida (2) que modela as vibrações de estruturas flexíveis que possuem material com amortecimento interno e estão sujeitas a uma força externa f . Na seguinte seção, consideramos a equação linear (2) com condições iniciais

$$u(0) = 0, u'(0) = y \in D(A^2), u''(0) = z \in D(A^2). \quad (3.0.1)$$

3.1 Caso linear

Seja A um gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ sobre X que é diferenciável (veja Definição 2.1.1).

A seguinte hipótese foi introduzida em De Andrade e Lizama (2011):

(ED). Dizemos que $\mathcal{R}(t)$ e $\mathcal{R}'(t)$ são exponencialmente estáveis se existem constantes M e μ positivas tais que

$$\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M e^{-\mu t}, \text{ com } t \geq 0. \quad (3.1.2)$$

Começaremos com o primeiro resultado enunciado em Andrade et al. (2015, Teorema 3.1).

Teorema 3.1.1. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X , assumamos a hipótese (ED). Se $f \in L^p(0, \infty; X)$ e com $f(t) \in D(A^2)$, para todo $t \geq 0$, então o sistema (2)-(3.0.1) tem uma única solução forte $u \in L^p(0, \infty; X)$ da forma $u = u_{sp} + u_{hom}$, onde*

$$u_{sp}(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s)ds \quad e \quad u_{hom} = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z. \quad (3.1.3)$$

Esta solução satisfaz $u \in L^{p'}(0, \infty; X)$ para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ e garante a seguinte estimativa:

$$\mu^{1+\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} \|u_{sp}\|_{L^{p'}(0, \infty; X)} + \mu^{\frac{1}{p'}} \|u_{hom}\|_{L^{p'}(0, \infty; X)} \leq M \|f\|_{L^p(0, \infty; X)} + \frac{M}{\sqrt[p']{p'}} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X). \quad (3.1.4)$$

Em particular, se $p' = \infty$, temos que

$$\mu \|u_{us}\|_{L^\infty} + \|u_{hom}\|_{L^\infty} \leq M (\|f\|_{L^\infty} + (\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X). \quad (3.1.5)$$

Demonstração. Da Definição 2.0.10 obtemos que

$$L^p(0, \infty; X) \subset L^p_{loc}(0, \infty; X) \subset L^1_{loc}(0, \infty; X),$$

daí $f \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$ desse modo, pela Proposição 2.1.2 $u = u_{sp} + u_{hom}$. Dados p e q expoentes conjugados, $t \in \mathbb{R}^+$, temos:

$$\begin{aligned} \|u_{sp}(t)\|_X^{p'} &\leq \left(\int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s)\|_X ds \right)^{p'} \\ &\leq \left(\int_0^t M e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X ds \right)^{p'} \\ &= M^{p'} \left(\int_0^t e^{-\frac{\mu}{p}|t-s|} e^{-\frac{\mu}{q}|t-s|} \|f(s)\|_X ds \right)^{p'}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Definindo $g(s) = e^{-\frac{\mu}{q}|t-s|}$ e $h(s) = e^{-\frac{\mu}{p}|t-s|} \|f(s)\|_X$, aplicamos a desigualdade de Hölder. Para obter

$$M^{p'} \left(\int_0^t g(s)h(s)ds \right)^{p'} \leq M^{p'} \left[\left(\int_0^\infty e^{\mu(s-t)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p'}. \quad (3.1.7)$$

Considere $\eta = \mu(s-t)$, derivando, temos que $d\eta = \mu ds$, isto é, $ds = \frac{d\eta}{\mu}$. Logo, fazendo as mudanças, obtemos $\frac{e^\eta}{\mu}$, onde $\int_0^\infty \frac{e^\eta}{\mu} d\eta = \frac{1}{\mu}$. Substituindo em (3.1.7), temos

$$\begin{aligned} M^{p'} \left(\int_0^t g(s)h(s)ds \right)^{p'} &\leq M^{p'} \left[\left(\frac{1}{\mu} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p'} \\ &= \frac{M^{p'}}{\mu^{\frac{p'}{q}}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{p'}{p}} \\ &= M^{p'} \mu^{-\frac{p'}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{p'}{p}}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{p'}{p}} &= \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{p'-p+p}{p}} \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{p'-p}{p}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{p}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{p'-p}{p}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right) \\ &= \|f\|_{L^p}^{p'-p} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds \right). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Desse modo, substituindo (3.1.9) em (3.1.8), obtemos:

$$\|u_{sp}(t)\|_X^{p'} \leq M^{p'} \mu^{-\frac{p'}{q}} \|f\|_{L^p}^{p'-p} \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds.$$

Integrando obtemos (Veja Teorema 2.0.6),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|u_{sp}\|_X^{p'} &\leq M^{p'} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{p'}{q}} \|f\|_{L^p}^{p'-p} \int_0^\infty \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s)\|_X^p ds dt \\
&= M^{p'} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{p'}{q}} \|f\|_{L^p}^{p'-p} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\mu|t-s|} dt\right) \|f(s)\|_X^p ds \\
&= M^{p'} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{1+\frac{p'}{q}} \|f\|_{L^p}^{p'-p} \|f\|_{L^p}^p \\
&= \left[M \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} \right]^{p'} \\
&= \left[M \mu^{-\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} \right]^{p'},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu^{1+\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} \|u_{us}\|_{L^{p'}} \leq M \|f\|_{L^p}, \quad (3.1.10)$$

onde $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Para o segundo termo no lado esquerdo da equação (3.1.4), tem-se:

$$\begin{aligned}
\|u_{hom}\|_{L^{p'}}^{p'} &\leq \int_0^\infty [\|\alpha \mathcal{R}'(t)y\|_X + \|\mathcal{R}(t)y\|_X + \|\alpha \mathcal{R}(t)z\|_X]^{p'} dt \\
&\leq \int_0^\infty [\alpha \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|y\|_X + \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|y\|_X + \alpha \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|z\|_X]^{p'} dt \\
&= M^{p'} \left(\int_0^\infty [\alpha e^{-\mu t} \|y\|_X + e^{-\mu t} \|y\|_X + \alpha e^{-\mu t} \|z\|_X]^{p'} dt \right) \\
&= M^{p'} \left(\int_0^\infty e^{-\mu p' t} [\alpha \|y\|_X + \|y\|_X + \alpha \|z\|_X]^{p'} dt \right) \\
&= M^{p'} \left(\int_0^\infty e^{-\mu p' t} dt \right) ((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X)^{p'} \\
&= \left[\frac{M}{(\mu p')^{\frac{1}{p'}}} ((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X) \right]^{p'}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu^{\frac{1}{p'}} \|u_{hom}\|_{L^{p'}} \leq \frac{M}{\sqrt[p']{p'}} ((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X). \quad (3.1.11)$$

De (3.1.10) e (3.1.11), obtemos a estimativa (3.1.4). O que completa a demonstração. $\square$

Observação 3.1.1. Em Beyn e Lorenz (2006), obtiveram um resultado semelhante para o problema $Lz := Z_x - M(x)z = h$, $x \in [x_+, x_-]$ com condições iniciais $\Pi(x_-)z(x_-) = \gamma_-$, $(I - \Pi(x_+))z(x_+) = \gamma_+$, onde L possui uma dicotomia exponencial¹ em $[x_+, x_-]$ com dados em $(\alpha, \beta, \Pi(x))$, onde $\Pi(x)$ são projeções em $\mathbb{R}^N$ e $M(x)$ representa matrizes $N \times N$, contínuas em $x \in J$.

¹ A teoria das dicotomias foi introduzido nas equações diferenciais ordinárias pelas obras de Perron (1930), Levinson (1946) e Massera e Schäffer (1966). Desenvolvimentos importantes desta teoria têm aparecido nas obras de Coppel (1978) e Dalietzkii e Krein (1978).

Observação 3.1.2. O estudo do caso discreto do Teorema 3.1.1 é ainda incipiente e deve ser extensivamente estudado. Salientamos ainda que casos discretos apresentam dificuldades distintas. Desse modo, não podemos traduzir diretamente por meio de pequenos ajustes a demonstração do caso contínuo para o caso discreto. Neste sentido um resultado semelhante, foi obtido em (CUEVAS et al., 2013) no âmbito das equações em diferença de Volterra², as quais possuem uma longa história de aplicações à dinâmica de populações.

Observação 3.1.3. Em (POZO, 2013), estuda-se a existência de soluções periódicas fortes para equação de terceira ordem $\alpha u'''(t) + u''(t) = \beta Au(t) + \gamma Bu'(t) + f(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, com condições de contorno $u(0) = u(2\pi)$, $u'(0) = u'(2\pi)$ e $u''(0) = u''(2\pi)$, onde A e B são operadores lineares e fechados definidos em um espaço de Banach X e satisfazem $D(A) \cap D(B) \neq \{0\}$, as constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ e f pertence ou a espaços periódicos de Lebesgue, ou espaços periódicos de Besov ou espaços periódicos de Triebel-Lizorkin. O autor faz um abordagem baseada na propriedade de regularidade maximal e Teoremas de Multiplicadores de Fourier com valores a operadores³.

Observação 3.1.4. Em (FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2010), caracteriza-se a regularidade maximal da equação (2) em espaços de Lebesgue, tal resultado é complementar ao Teorema 3.1.1. Além disso, em (FERNÁNDEZ; LIZAMA; POBLETE, 2011) os autores estudaram a regularidade de soluções brandas e fortes definidas em $\mathbb{R}$ quando o espaço de estado é Hilbert.

3.2 Caso semilinear

Nessa seção, consideraremos o problema de existência e unicidade de soluções brandas (Ver Definição 2.1.2) para o problema (3) considerando as condições iniciais

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = y, \quad u''(0) = z. \quad (3.2.12)$$

Com isto enunciaremos o seguinte resultado do artigo (ANDRADE et al., 2015), cuja demonstração consiste em usar o Princípio de Contração de Banach (Teorema 2.3.1).

² Propriedades das soluções de equações em diferenças de Volterra têm sido estudadas em vários contextos. Como a teoria das variedades invariantes, teoria de convergência, a regularidade máxima discreta, comportamento assintótico, dicotomia exponencial e robustez, estabilidade e periodicidade (nos referimos o leitor para as indicações contidas na (CUEVAS et al., 2013)).

³ Em caso de espaços periódicos de Lebesgue, os resultados envolvem as noções fundamentais de espaço UMD (Propriedade Incondicional Martingala de Diferença) e $\mathbb{R}$ -limitação das famílias dos operadores $\{kB(i\alpha k^3 + k^2 + i\gamma kB + \beta A)^{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{ik^3(i\alpha k^3 + k^2 + i\gamma kB + \beta a)^{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Desde a sua concepção, na metade da década de 1990, este conceito provou ser uma ferramenta importante na teoria de regularidade máxima de equações de evolução, na teoria dos operadores, análise harmônica, equações diferenciais parciais e operadores pseudo diferenciais (consulte (AGARWAL; CUEVAS; LIZAMA, 2014)). Observamos ainda que, no caso de espaços periódicos de Besov e de Triebel-Lizorkin, os resultados envolvem condição de fronteira das famílias anteriores.

Teorema 3.2.1. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X satisfazendo (ED). Assuma $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua com $f(\cdot, 0) \in L^p(0, \infty; X)$, que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f \|x - y\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x, y \in X. \quad (3.2.13)$$

Se $\frac{M}{\mu} L_f < 1$, então existe uma única solução branda do problema (3)-(3.2.12) tal que $u(\cdot) \in L^p(0, \infty; X)$.

Demonstração. Definimos o operador Λ sobre o espaço $L^p(0, \infty; X)$ através da expressão

$$(\Lambda u)(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds. \quad (3.2.14)$$

Para abreviar a notação, escrevemos

$$(\Lambda u)_{hom}(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z \quad \text{e} \quad (\Lambda u)_{sp}(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Em primeiro lugar, temos, de maneira similar a (3.1.11) a seguinte desigualdade

$$\|(\Lambda u)_{hom}\|_{L^p(0, \infty; X)} \leq \frac{M}{\sqrt[p]{\mu p}} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X). \quad (3.2.15)$$

Em segundo lugar, seja u em $L^p(0, \infty; X)$ e considere p e q expoentes conjugados. Temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|(\Lambda u)_{sp}(t)\|_X^p dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)[f(s, u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)]\|_X ds \right)^p dt \\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t M e^{-\mu|t-s|} \|f(s, u(s)) - f(s, 0)\|_X ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t M e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X ds \right)^p dt \\ &\leq \int_0^\infty M^p \left(L_f \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s)\|_X ds + \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X ds \right)^p dt. \end{aligned}$$

Por meio da desigualdade $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|(\Lambda u)_{sp}(t)\|_X^p dt &\leq \int_0^\infty M^p \left((L_f 2)^p \left[\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s)\|_X ds \right]^p \right. \\ &\quad \left. + 2^p \left[\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X ds \right]^p \right) dt \\ &\leq (2M L_f)^p \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s)\|_X ds \right)^p dt \\ &\quad + (2M)^p \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X ds \right)^p dt. \quad (3.2.16) \end{aligned}$$

Usando em (3.2.16) um método similar ao utilizado para obter (3.1.8), temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|(\Lambda u)_{sp}(t)\|_X^p dt &\leq \frac{(2ML_f)^p}{\sqrt[p]{\mu^p}} \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|u(s)\|_X^p ds \right) dt \\
&\quad + \frac{(2M)^p}{\sqrt[p]{\mu^p}} \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, 0)\|_X^p ds \right) dt \\
&\leq \frac{(2ML_f)^p}{\sqrt[p]{\mu^p}} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\mu(t-s)} dt \right) \|u(s)\|_X^p ds \\
&\quad + \frac{(2M)^p}{\sqrt[p]{\mu^p}} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\mu(t-s)} dt \right) \|f(s, 0)\|_X^p ds \\
&= \frac{(2ML_f)^p}{\mu^{\frac{p}{q}+1}} \int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds + \frac{(2M)^p}{\mu^{\frac{p}{q}+1}} \int_0^\infty \|f(s, 0)\|_X^p ds.
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Lembre que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, daí $\frac{p}{q} = p - 1$. Logo, substituindo em (3.2.17) obtem-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|(\Lambda u)_{sp}(t)\|_X^p dt &\leq \frac{(2ML_f)^p}{\mu^p} \int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds + \frac{(2M)^p}{\mu^p} \int_0^\infty \|f(s, 0)\|_X^p ds \\
&= \left(\frac{2M}{\mu} \right)^p \left(L_f^p \int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds + \int_0^\infty \|f(s, 0)\|_X^p ds \right). \tag{3.2.18}
\end{aligned}$$

Pela Definição 2.0.9 e de (3.2.18) temos que:

$$\|(\Lambda u)_{sp}\|_{L^p(0, \infty; X)} \leq \left(\left(\frac{2M}{\mu} \right)^p \left(L_f^p \int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds + \int_0^\infty \|f(s, 0)\|_X^p ds \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí, aplicando o Teorema 2.0.4, temos:

$$\begin{aligned}
\|(\Lambda u)_{sp}\|_{L^p(0, \infty; X)} &\leq \frac{2M}{\mu} \left(L_f \left(\int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \|f(s, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \frac{2M}{\mu} (L_f \|u\|_{L^p} + \|f(\cdot, 0)\|_{L^p}). \tag{3.2.19}
\end{aligned}$$

De (3.2.15) e (3.2.19), temos a seguinte L^p -limitação para Λu .

$$\|\Lambda u\|_{L^p(0, \infty; X)} \leq \frac{M}{\sqrt[p]{\mu^p}} ((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X) + \frac{2M}{\mu} (L_f \|u\|_{L^p(0, \infty; X)} + \|f(\cdot, 0)\|_{L^p(0, \infty; X)}).$$

Portanto, o operador Λ está bem definido.

Sejam u e v duas funções em $L^p(0, \infty; X)$. Da condição (3.2.13),

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L^p(0, \infty; X)} &\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t M e^{-\mu|t-s|} L_f \|(u(s) - v(s))\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= M L_f \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s) - v(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.20}
\end{aligned}$$

Usando em (3.2.20) procedimentos similares aos utilizados para obter (3.1.8) e (3.2.17), temos que:

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L^p(0,\infty;X)} &\leq ML_f \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s) - v(s)\|_X^p ds dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ML_f \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\mu|t-s|} dt\right) \|u(s) - v(s)\|_X^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ML_f \left(\frac{1}{\mu^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}}}\right) \left(\int_0^\infty \|u(s) - v(s)\|_X^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{ML_f}{\mu} \|u - v\|_{L^p(0,\infty;X)}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{ML_f}{\mu} < 1$, logo Λ é uma $\frac{ML_f}{\mu}$ -contração. Sendo assim, pelo Teorema 2.3.1, existe uma única solução branda $u(\cdot)$ de (3)-(3.2.12) de modo que $u(\cdot) \in L^p(0, \infty; X)$. O que finaliza a demonstração. $\square$

De forma análoga a proposição anterior, mas considerando p e q expoentes conjugados e $a = \frac{p}{p-q}$ e $b = \frac{p}{q}$ os quais são expoentes conjugados, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. *Com as hipóteses do Teorema 3.2.1 e considerando a condição Lipschitz sobre $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ dada por*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f(t) \|x - y\|_X, \text{ para todo } x, y \in X \text{ e para todo } t \geq 0,$$

onde $L_f \in L^p(0, \infty)$ e $f(\cdot, 0) \in L^p(0, \infty; X)$. Se $2M\mu^{\frac{1}{p}-1} \|L_f\|_{L^p(0,\infty)} < 1$, então temos que o problema (3)-(3.2.12) possui uma única solução branda tal que $u(\cdot) \in L^p(0, \infty; X)$.

Demonstração. Definimos o operador Λ sobre $L^p(0, \infty; X)$ como

$$\begin{aligned}
(\Lambda u)(t) &= \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds \\
&= (\Lambda u)_{hom}(t) + (\Lambda u)_{sp}(t), \text{ para } u \in L^p(0, \infty; X).
\end{aligned}$$

Vemos que Λ está bem definido em $L^p(0, \infty; X)$. Observe que

$$\|(\Lambda u)_{hom}\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq \frac{M((\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X)}{\sqrt[p]{u^p}}$$

e

$$\|(\Lambda u)_{sp}\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq 2M \left(u^{\frac{1}{p}-1} \|L_f\|_{L^p(0,\infty)} \|u\|_{L^p(0,\infty;X)} + \frac{1}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{L^p} \right).$$

Depois de alguns cálculos, obtemos a seguinte estimativa

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq 2M\mu^{\frac{1}{p}-1} \|L_f\|_{L^p(0,\infty)} \|u - v\|_{L^p(0,\infty;X)}$$

para $u, v \in L^p(0, \infty; X)$. $\square$

No seguinte exemplo exibiremos uma função $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a qual é Lipchitz na segunda variável com $L_f(t)$ em $L^p([0, \infty); \mathbb{R})$ a qual não é limitada e Lipschitz, mostrando assim a importância de nossos novos resultados na teoria de estimativas L^p para Estruturas Flexíveis, pois o resultado do trabalho Andrade et al. (2015, Teorema 3.2) não nos traz respostas neste caso mais geral.

Exemplo 3.2.1. Seja uma função $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t, x) = L_f(t)V(x)$ com

$$L_f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t+1)^{\frac{4}{3}}}, & t \in [0, \infty) \setminus \mathbb{N}, \\ t, & t \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad \text{e} \quad V(x) = \frac{x}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vemos que de fato, V é Lipschitz, pois $|V(x) - V(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$, para todo x e y em $\mathbb{R}$. Por outro lado, ao computar as integrais de L_f , para $p = 1, 2, \dots, 8$, lembrando que o conjunto de descontinuidades é de medida nula, resulta que⁴,

$$\begin{aligned} (p=1) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}}|} \right] &= 3, & (p=5) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}|^5}} \right]^{\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{\frac{3}{17}}, \\ (p=2) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}|^2}} \right]^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{3}{5}}, & (p=6) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}|^6}} \right]^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{\frac{1}{7}}, \\ (p=3) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}|^3}} \right]^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, & (p=7) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}|^7}} \right]^{\frac{1}{7}} &= \sqrt[7]{\frac{3}{25}}, \\ (p=4) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}|^4}} \right]^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{\frac{3}{13}}, & (p=8) \quad \left[\int_0^\infty \frac{dt}{|(t+1)^{\frac{4}{3}|^8}} \right]^{\frac{1}{8}} &= \sqrt[8]{\frac{3}{39}}. \end{aligned}$$

Notamos que a integral sempre é uma quantidade finita. Assim, pelo fato seguinte: Seja uma função $f(t) = \frac{1}{(x+1)^\lambda}$. A função $f \in L^p([0, \infty))$, se e somente se $p > \frac{1}{\lambda}$. Neste caso $\lambda = \frac{4}{3}$ e $p \geq 1$.

Concluimos que nossa função L_f é $L^p(0, \infty)$, como para $t \in \mathbb{N}$ é a função identidade, temos que L_A não é limitada. Terminando a discussão do exemplo.

Em (ANDRADE et al., 2015) existe um resultado similar ao Teorema 3.2.1 quando os operadores $\mathcal{R}(t)$ e $\mathcal{R}'(t)$ são limitados sem necessariamente ter decaimento exponencial. Neste caso podemos considerar uma condição Lipschitz sendo uma função integrável variando no tempo t e uma perturbação $f(\cdot, 0)$ em $L^1(0, \infty; X)$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

⁴ As contas são feitas em <http://www.wolframalpha.com/> considerando a seguinte fórmula `[int_0^inf 1/|(t+1)^(4/3)|^p dt]^(1/p)`, com $p = 1, 2, \dots$

Teorema 3.2.3. *Suponhamos que A gera uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ de modo que as funções $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ e $t \rightarrow \mathcal{R}'(t)$ sejam limitadas. Denotamos*

$$\mathcal{A} := \sup_{t \geq 0} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \sup_{t \geq 0} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)}. \quad (3.2.21)$$

Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função que satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f(t) \|x - y\|_X, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+, \text{ para todos } x, y \in X, \quad (3.2.22)$$

com $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função integrável e $f(\cdot, 0) \in L^1(0, \infty; X)$. O problema (3)-(3.2.12) admite uma única solução branda limitada.

Demonstração. Para uma melhor compreensão e conveniência do leitor, exibiremos alguns argumentos da prova. Nós definimos o operador Λ sobre o espaço $L^\infty(0, \infty; X)$ por (3.2.14). Em seguida, podemos ver que

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t)\|_X &\leq \alpha \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|y\|_X + \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|y\|_X + \alpha \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|z\|_X \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) [f(s, u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)] ds \right\|_X \\ &\leq \alpha \mathcal{A} \|y\|_X + \mathcal{A} \|y\|_X + \alpha \mathcal{A} \|z\|_X \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) [f(s, u(s)) - f(s, 0)] ds \right\|_X + \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, 0) ds \right\|_X \\ &\leq \mathcal{A} ((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X) + \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, u(s)) - f(s, 0)\|_X ds \\ &\quad + \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, 0)\|_X ds \\ &\leq \mathcal{A} ((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X) + \int_0^t \mathcal{A} L_f(s) \|u(s)\|_X ds \\ &\quad + \int_0^t M^\infty \|f(s, 0)\|_X ds \\ &\leq \mathcal{A} \left((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X + \int_0^t L_f(s) \|u(s)\|_X ds + \|f(\cdot, 0)\|_1 \right) \\ &\leq \mathcal{A} ((\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X + \|u\|_\infty \|L_f\|_1 + \|f(\cdot, 0)\|_1). \end{aligned}$$

Tomando o supremo, temos

$$\|\Lambda u\|_{L^\infty(0, \infty; X)} \leq \mathcal{A} [(\alpha + 1) \|y\|_X + \alpha \|z\|_X + \|L_f\|_{L^1(0, \infty)} \|u\|_{L^\infty(0, \infty; X)} + \|f(\cdot, 0)\|_{L^1(0, \infty; X)}].$$

Consequentemente, Λ está bem definido. Além disso, dados u e v em $L^\infty(0, \infty; X)$, então

$$\begin{aligned} \|(\Lambda u)(t) - (\Lambda v)(t)\|_X &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s) [f(s, u(s)) - f(s, v(s))]\|_X ds \\ &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &\leq \mathcal{A} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right) \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_\infty \leq \mathcal{A} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right) \|u - v\|_\infty. \quad (3.2.23)$$

Além disso

$$\begin{aligned} \|(\Lambda^2 u)(t) - (\Lambda^2 v)(t)\|_X &= \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s) [f(s, (\Lambda u)(s)) - f(s, (\Lambda v)(s))] ds \right\|_X \\ &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s) [f(s, (\Lambda u)(s)) - f(s, (\Lambda v)(s))]\|_X ds \\ &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, (\Lambda u)(s)) - f(s, (\Lambda v)(s))\|_X ds \\ &\leq \mathcal{A} \int_0^t L_f(s) ds \|\Lambda u - \Lambda v\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Substituindo (3.2.23) em (3.2.24) segue que

$$\begin{aligned} \|(\Lambda^2 u)(t) - (\Lambda^2 v)(t)\|_X &\leq \mathcal{A} \int_0^t L_f(s) \left(\mathcal{A} \int_0^s L_f(\tau) d\tau \|u - v\|_\infty \right) ds \\ &= \mathcal{A}^2 \left(\int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right) ds \right) \|u - v\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Consideremos, $u(s) = \int_0^s L_f(\tau) d\tau$ e $v'(t) = L_f(t)$ obtemos $u'(s) = L_f(s)$ e $v(t) = \int_0^t L_f(s) ds$. Desse modo, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t L_f(t) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right) ds &= \int_0^t L_f(s) ds \cdot \int_0^t L_f(s) ds \\ &\quad - \int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \left(\int_0^t L_f(s) ds \right)^2 - \int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right) ds = \frac{1}{2} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right)^2. \quad (3.2.26)$$

Assim, substituindo (3.2.26) em (3.2.25) chegamos a

$$\|(\Lambda^2 u)(t) - (\Lambda^2 v)(t)\|_X \leq \frac{\mathcal{A}^2}{2!} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right)^2 \|u - v\|_\infty \leq \frac{(\mathcal{A} \|L_f\|_{L^1})^2}{2!} \|u - v\|_\infty.$$

Indutivamente, podemos demonstrar que

$$\|(\Lambda^n u)(t) - (\Lambda^n v)(t)\|_X \leq \frac{\mathcal{A}^n}{n!} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right)^n \|u - v\|_{L^\infty(0, \infty; X)}. \quad (3.2.27)$$

De fato, suponha que (3.2.27) é verdadeiro para $n = k$, ou seja,

$$\|(\Lambda^k u)(t) - (\Lambda^k v)(t)\|_X \leq \frac{\mathcal{A}^k}{k!} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right)^k \|u - v\|_{L^\infty(0, \infty; X)}. \quad (3.2.28)$$

Demonstraremos que é verdadeiro para $n = k + 1$, isto é,

$$\|(\Lambda^{k+1}u)(t) - (\Lambda^{k+1}v)(t)\|_X \leq \frac{\mathcal{A}^{k+1}}{(k+1)!} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right)^{k+1} \|u - v\|_{L^\infty(0,\infty;X)}.$$

Primeiro, temos que

$$\begin{aligned} \|(\Lambda^{k+1}u)(t) - (\Lambda^{k+1}v)(t)\|_X &\leq \int_0^t \left\| \mathcal{R}(t-s) \left[f(s, \Lambda^k u(s)) - f(s, \Lambda^k v(s)) \right] \right\|_X ds \\ &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, \Lambda^k u(s)) - f(s, \Lambda^k v(s))\|_X ds \\ &\leq \int_0^t \mathcal{A} L_f(s) \|\Lambda^k u(s) - \Lambda^k v(s)\|_X ds \\ &\leq \mathcal{A} \int_0^t L_f(s) ds \|\Lambda^k u - \Lambda^k v\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Fazendo uso de nossa hipótese indutiva (3.2.28) em (3.2.29), chegamos a

$$\|(\Lambda^{k+1}u)(t) - (\Lambda^{k+1}v)(t)\|_X \leq \frac{\mathcal{A}^{k+1}}{k!} \int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right)^k ds \|u - v\|_\infty. \quad (3.2.30)$$

Considerando $u(s) = \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right)^k$ e $v'(s) = L_f(s)$ temos,

$u'(s) = k \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right)^{k-1} L_f(s)$ e $v(t) = \int_0^t L_f(s) ds$. Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right)^k ds &= \left(\int_0^t L_f(\tau) d\tau \right)^k \int_0^t L_f(\tau) d\tau \\ &\quad - k \int_0^t \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right)^{k-1} L_f(s) \int_0^s L_f(\tau) d\tau \\ &= \left(\int_0^t L_f(\tau) d\tau \right)^{k+1} - k \int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right)^k ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right)^k ds = \frac{1}{(k+1)} \left(\int_0^t L_f(s) ds \right)^{k+1}. \quad (3.2.31)$$

Substituindo (3.2.31) em (3.2.30), obtemos

$$\begin{aligned} \|(\Lambda^{k+1}u)(t) - (\Lambda^{k+1}v)(t)\|_X &\leq \frac{\mathcal{A}^{k+1}}{k!} \frac{1}{(k+1)} \left(\int_0^t L_f(\tau) d\tau \right)^{k+1} \|u - v\|_\infty \\ &= \frac{\mathcal{A}^{k+1}}{(k+1)!} \left(\int_0^t L_f(\tau) d\tau \right)^{k+1} \|u - v\|_\infty \\ &\leq \frac{(\mathcal{A} \|L_f\|_{L^1(0,\infty;X)})^{k+1}}{(k+1)!} \|u - v\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Portanto, por indução segue que (3.2.27) é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Princípio dos Iterados (Corolário 2.3.1), Λ tem um único ponto fixo $u \in L^\infty(0, \infty; X)$. $\square$

O seguinte resultado é uma extensão do Teorema 3.2.1 em espaços de Sobolev, dado por Andrade et al. (2015).

Teorema 3.2.4. *Consideremos as condições do Teorema 3.2.1 com a constante L_f tal que $\frac{2^{\frac{1}{p}} ML_f}{\mu} < 1$, então o problema (3) com as condições iniciais $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u''(0) = z \in D(A)$ possui uma única solução branda⁵ $u \in W^{1,p}(0, \infty; X)$, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Definimos o operador $\mathcal{F}$ no espaço $W^{1,p}(0, \infty; X)$ como

$$(\mathcal{F}u)(t) = \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Notação $(\mathcal{F}u)_{hom}(t) = \alpha \mathcal{R}(t)z$ e $(\mathcal{F}u)_{sp}(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds$. Seja $u \in W^{1,p}(0, \infty; X)$, temos as seguintes estimativas responsáveis pelo o fato de que $\mathcal{F}$ ser bem definido:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{F}u)_{hom}\|_{W^{1,p}} &\leq \left(\alpha^p \|z\|_X^p \int_0^\infty \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)}^p dt + \alpha^p \|z\|_X^p \int_0^\infty \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha \|z\|_X \left(\int_0^\infty M^p e^{-\mu p t} dt + \int_0^\infty M^p e^{-\mu p t} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \alpha \|z\|_X M \left(\frac{2}{\mu p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\|(\mathcal{F}u)_{hom}\|_{W^{1,p}} \leq \left(\frac{2}{\mu p} \right)^{\frac{1}{p}} \alpha M \|z\|_X. \quad (3.2.33)$$

Por outro lado⁶,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s, u(s))ds - \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_0^t [\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)]f(s, u(s))ds + \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s, u(s))ds \right) \\ &= \int_0^t \frac{\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)}{h} f(s, u(s))ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s, u(s))ds \end{aligned}$$

Assim

$$\left\| \left(\int_0^\cdot \mathcal{R}(\cdot-s)f(s, u(s))ds \right)' \right\|_{L^p}^p = \left\| \int_0^\cdot \mathcal{R}'(\cdot-s)f(s, u(s))ds \right\|_{L^p}^p \quad (3.2.34)$$

⁵ O espaço de Sobolev $W^{1,p}(0, \infty; X)$, $1 \leq p < \infty$ consiste em todas as funções $u \in L^p(0, \infty; X)$ tais que existe u' no sentido fraco e pertence ao espaço $L^p(0, \infty; X)$ com a norma $\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$.

⁶ O resultado necessário encontra-se no livro Arendt et al. (2001, Proposição 1.2.2)

pois, $\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s, u(s))ds \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$. Daí

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}} &\leq \left(\int_0^\infty \left\| \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds \right\|_X^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left\| \int_0^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, u(s)) \right\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))\|_X ds \right)^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\int_0^t \|\mathcal{R}'(t-s)f(s, u(s))\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} M \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, u(s))\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} M \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} M \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} L_f \|u(s)\|_X ds + \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} M \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} L_f \|u(s)\|_X ds + \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Por meio da desigualdade $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}} &\leq 2^{\frac{1}{p}+1} M \left(\int_0^\infty L_f^p \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s)\|_X ds \right)^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.35}
\end{aligned}$$

Usando em (3.2.35), um método similar ao usado em (3.1.8), com p, q expoentes conjugados, e aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}} &\leq 2^{\frac{1}{p}+1} M \left(\int_0^\infty L_f^p \left(\left(\int_0^\infty e^{-\mu|t-s|} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\left(\int_0^\infty e^{-\mu|t-s|} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}+1} M \left(\int_0^\infty L_f^p \left(\left(\frac{1}{\mu} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\left(\frac{1}{\mu} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{p}+1} M}{\mu^{\frac{1}{q}}} \left(L_f^p \int_0^\infty \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s)\|_X^p ds dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s, 0)\|_X^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema 2.0.6, segue que

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}} &\leq \frac{2^{\frac{1}{p}+1}M}{\mu^{\frac{1}{q}}} \left(L_f^p \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\mu|t-s|} dt \right) \|u(s)\|_X^p ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} dt \right) \|f(s,0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{p}+1}M}{\mu^{\frac{1}{q}}} \left(L_f^p \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu} \right) \|u(s)\|_X^p ds + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu} \right) \|f(s,0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{p}+1}M}{\mu^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}} \left(L_f^p \int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds + \int_0^\infty \|f(s,0)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Minkowski (Teorema 2.0.4), segue

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}} &\leq \frac{2^{\frac{1}{p}+1}M}{\mu} \left(\left[L_f^p \int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^\infty \|f(s,0)\|_X^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \frac{2^{\frac{1}{p}+1}M}{\mu} \left(L_f \left[\int_0^\infty \|u(s)\|_X^p ds \right]^{\frac{1}{p}} + \|f(\cdot,0)\|_{L^p} \right).
\end{aligned}$$

$$\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{p}+1}M}{\mu} \left(L_f [\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}} + \|f(\cdot,0)\|_{L^p} \right).$$

Daí,

$$\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{p}+1}ML_f}{\mu} \|u\|_{W^{1,p}} + \frac{2^{\frac{1}{p}+1}M}{\mu} \|f(\cdot,0)\|_{L^p}. \quad (3.2.36)$$

Das estimativas (3.2.33) e (3.2.36) $\mathcal{F}u$ está bem definido.

Afirmamos que o operador $\mathcal{F}$ é uma contração. De fato, usando um método similar ao usado para obter (3.2.34), temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{W^{1,p}} &\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|_X ds \right)^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\int_0^t \|\mathcal{R}'(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t M e^{-\mu|t-s|} L_f \|u(s) - v(s)\|_X ds \right)^p dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(\int_0^t M e^{-\mu|t-s|} L_f \|u(s) - v(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} M L_f \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s) - v(s)\|_X ds \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Sejam p, q expoentes conjugados. Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{W^{1,p}} \\
& \leq 2^{\frac{1}{p}} M L_f \left(\int_0^\infty \left(\left(\int_0^\infty e^{-\mu|t-s|} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s) - v(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \frac{2^{\frac{1}{p}} M L_f}{\mu^{\frac{1}{q}}} \left(\int_0^\infty \left(\left(\int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|u(s) - v(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \frac{2^{\frac{1}{p}} M L_f}{\mu^{\frac{1}{q}}} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\mu|t-s|} dt \right) \|u(s) - v(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \frac{2^{\frac{1}{p}} M L_f}{\mu^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}}} \left(\int_0^\infty \|u(s) - v(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \frac{2^{\frac{1}{p}} M L_f}{\mu} (\|u - v\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \frac{2^{\frac{1}{p}} M L_f}{\mu} \|u - v\|_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{W^{1,p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{p}} M L_f}{\mu} \|u - v\|_{W^{1,p}},$$

para $u, v \in W^{1,p}$. Isso completa a demonstração. $\square$

De forma análoga ao Teorema 3.2.2, podemos estender à proposição anterior, e enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.5. *Consideremos as condições do Teorema 3.2.2 com a função $L_f \in L^p(0, \infty; X)$ tal que $2^{\frac{1}{p}} M \mu^{\frac{1}{p}-1} \|L_f\|_{L^p(0, \infty; X)} < 1$, então o problema (3) com as condições iniciais $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $u''(0) = z \in D(A)$ possui uma única solução branda $u \in W^{1,p}(0, \infty; X)$, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Definimos o operador $\mathcal{F} \in W^{1,p}(0, \infty; X)$ por

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}u)(t) &= \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds \\
&= (\mathcal{F}u)_{hom}(t) + (\mathcal{F}u)_{sp}(t).
\end{aligned}$$

Com as estimativas a seguir, vemos que Λ está bem definido em $W^{1,p}(0, \infty; X)$

$$\|(\mathcal{F}u)_{hom}\|_{W^{1,p}(0, \infty; X)} \leq \frac{2\alpha M \|z\|_X}{\sqrt[p]{\mu p}}$$

e

$$\|(\mathcal{F}u)_{sp}\|_{W^{1,p}(0, \infty; X)} \leq 2^{\frac{1}{p}} M \left(u^{1-p} \|L_f\|_{L^p(0, \infty; X)} \|u\|_{W^{1,p}(0, \infty; X)} + \frac{1}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{L^p} \right).$$

Depois de cálculos análogos, obtemos a seguinte estimativa

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{W^{1,p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} M \mu^{\frac{1}{p}-1} \|L_f\|_{L^p(0,\infty;X)} \|u - v\|_{W^{1,p}},$$

para $u, v \in W^{1,p}(0, \infty; X)$.

□

4 PERIODICIDADE ASSINTÓTICA PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

4.1 Regularidade da convolução

Nosso propósito é analisar a periodicidade assintótica da equação

$$\lambda u'''(t, x) + u''(t, x) - c^2(\Delta u(t, x) + \mu \Delta u'(t, x)) = g(t, u(t, x)), \quad t \geq 0.$$

Observamos que por Fernández, Lizama e Pobleto (2010) o operador Δ é o gerador de uma família $(\lambda, c^2, c^2\mu)$ -regularizada em L^2 (Definição 2.1.1).

Assim podemos modelar a equação anterior como a equação abstrata (2), em que A é um operador linear fechado agindo sobre um espaço de Banach X com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ e f é uma função com valores em X . No artigo De Andrade et al. (2015) os autores estudaram de condições suficientes para a existência e unicidade de soluções brandas pseudo S-assintoticamente ω -periódica para equações semilineares abstratas da forma (3). Isto é obtido por um método misto, combinando propriedades de certas famílias fortemente contínuas, da teoria de operadores e teoria de pontos fixos.

Assuma que A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ que é diferenciável. O seguinte resultado sobre regularidade da convolução para funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas é um ingrediente essencial para obtermos nossos resultados.

Lema 4.1.1 (da Convolução). *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A e satisfazendo (ED). Se u pertence a $PSAP_\omega(X)$, então a função $v : [0, \infty) \rightarrow X$ definida por*

$$v(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)u(s)ds$$

pertence a $PSAP_\omega(X)$.

Demonstração. Nesta demonstração vamos verificar que v satisfaz a Definição 2.2.7. Pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 2.0.1) v é contínua. Vamos primeiro provar que $v(\cdot)$ é limitada

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_X &\leq M \left(\int_0^t e^{\mu(s-t)} ds \right) \|u\|_\infty \\ &\leq M \left(\frac{1}{\mu} \right) \|u\|_\infty. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Logo, temos a seguinte estimativa

$$\|v\|_\infty \leq \frac{M}{\mu} \|u\|_\infty,$$

em que M e μ são as constantes envolvidas na condição (ED). Consequentemente $v \in C_b([0, \infty); X)$. Além disso, para $t \geq \sigma \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_0^t \|v(\tau + \omega) - v(\tau)\|_X d\tau &= \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \int_0^{\tau+\omega} \mathcal{R}(\tau + \omega - \xi) u(\xi) d\xi - \int_0^\tau \mathcal{R}(\tau - \xi) u(\xi) d\xi \right\|_X d\tau \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \int_0^\omega \mathcal{R}(\tau + \omega - \xi) u(\xi) d\xi + \int_\omega^{\tau+\omega} \mathcal{R}(\tau + \omega - \xi) u(\xi) d\xi \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\tau \mathcal{R}(\tau - \xi) u(\xi) d\xi \right\|_X d\tau. \tag{4.1.2}
\end{aligned}$$

Se $-\xi' = \omega - \xi$, temos, $-d\xi' = -d\xi$, além disso, se $\xi = \omega$, então $\xi' = 0$ e quando $\xi = \tau + \omega$ temos $-\xi' = \omega - \tau - \omega = -\tau$. Com isto, substituindo em (4.1.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_0^t \|v(\tau + \omega) - v(\tau)\|_X d\tau &= \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \int_0^\omega \mathcal{R}(\tau + \omega - \xi) u(\xi) d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau \mathcal{R}(\tau - \xi) [u(\omega + \xi) - u(\xi)] d\xi \right\|_X d\tau \\
&\leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^\omega \|\mathcal{R}(\tau + \omega - \xi) u(\xi)\|_X d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau \|\mathcal{R}(\tau - \xi) [u(\omega + \xi) - u(\xi)]\|_X d\xi \right) d\tau \\
&\leq \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^\omega \|\mathcal{R}(\tau + \omega - \xi)\|_{\mathcal{B}(X)} \|u(\xi)\|_X d\xi d\tau \\
&\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^\tau \|\mathcal{R}(\tau - \xi)\|_{\mathcal{B}(X)} \|u(\omega + \xi) - u(\xi)\|_X d\xi d\tau \\
&\leq \frac{M}{t} \int_0^t \int_0^\omega e^{-\mu|\tau+\omega-\xi|} \|u(\xi)\|_X d\xi d\tau \\
&\quad + \frac{M}{t} \int_0^t \int_0^\tau e^{-\mu|\tau-\xi|} \|u(\omega + \xi) - u(\xi)\|_X d\xi d\tau. \tag{4.1.3}
\end{aligned}$$

Se $\xi' = \tau + \omega - \xi$, daí, $d\xi' = -d\xi$, além disso, quando $\xi = 0$, temos $\xi' = \tau + \omega$ e quando $\xi = \omega$ ficamos com $\xi' = \tau + \omega - \omega = \tau$. Com isto, substituindo em (4.1.3) e aplicando o Teorema 2.0.6 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_0^t \|v(\tau + \omega) - v(\tau)\|_X d\tau &\leq -\frac{M}{t} \int_0^t \int_{\tau+\omega}^\tau e^{-\mu\xi} \|u(\tau + \omega - \xi)\|_X d\xi d\tau \\
&\quad + \frac{M}{t} \int_0^t \left(\int_\xi^\tau e^{-\mu(\tau-\xi)} d\tau \right) \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \\
&= \frac{M}{t} \int_0^t \int_\tau^{\tau+\omega} e^{-\mu\xi} \|u(\tau + \omega - \xi)\|_X d\xi d\tau \\
&\quad + \frac{M}{t} \int_0^t \left(\int_\xi^\tau e^{-\mu(\tau-\xi)} d\tau \right) \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \\
&:= I_1(t) + I_2(t).
\end{aligned}$$

Estimaremos os termos $I_i(t)$ separadamente.

$$I_1(t) \leq \frac{M\|u\|_\infty}{t} \int_0^t \int_\tau^{\tau+\omega} e^{-\mu\xi} d\xi d\tau \leq \frac{M\|u\|_\infty \omega}{t} \int_0^t e^{-\mu\tau} d\tau \leq \frac{M\|u\|_\infty \omega}{\mu t},$$

donde inferimos que

$$I_1(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (4.1.4)$$

Estimamos o segundo termo por

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{M}{t} \int_0^t \left(\int_0^{t-\xi} e^{-\mu\tau} d\tau \right) \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \\ &\leq \frac{M}{t} \left(\int_0^\infty e^{-\mu\tau} d\tau \right) \left(\int_0^t \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \right) \\ &= \frac{M}{\mu} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \right), \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0. \quad (4.1.5)$$

Juntando (4.1.4) e (4.1.5) completamos a prova que $v \in PSAP_\omega(X)$. $\square$

4.2 Existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas

Nesta seção, discutimos a existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para as equações (2) e (3).

4.2.1 O caso linear

Nesta subseção, examinamos a existência e unicidade de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para a equação linear abstrata (2).

Teorema 4.2.1. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição (ED). Se $f \in PSAP_\omega(X)$ é tal que $f(t) \in D(A^2)$ para todo $t \geq 0$, então a equação (2) com condições iniciais $u(0) = 0$, $u'(0) = y \in D(A^2)$ e $u''(0) = z \in D(A^2)$ possui uma única solução forte $u \in PSAP_\omega(X)$.*

Demonstração. Considere f em $PSAP_\omega(X)$ tal que $f(t) \in D(A^2)$ e $y, z \in D(A^2)$. Da Proposição 2.1.2, a solução para a equação (2) é dada por

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s)ds.$$

Assim, verificamos a Definição 2.2.7 que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t} \int_0^t \|u(\tau + \omega) - u(\tau)\|_X d\tau \\
& \leq \frac{\alpha}{t} \int_0^t \|\mathcal{R}'(\tau + \omega) - \mathcal{R}'(\tau)\|_{\mathcal{B}(X)} \|y\|_X d\tau \\
& \quad + \left(\frac{\|y\|_X + \alpha \|z\|_X}{t} \right) \int_0^t \|\mathcal{R}(\tau + \omega) - \mathcal{R}(\tau)\|_{\mathcal{B}(X)} d\tau \\
& \quad + \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \int_0^{\tau+\omega} \mathcal{R}(\tau + \omega - \xi) f(\xi) d\xi - \int_0^\tau \mathcal{R}(\tau - \xi) f(\xi) d\xi \right\| d\tau \\
& := I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)
\end{aligned}$$

Em $I_3(t)$ aplicamos o Lema 4.1.1. Para $I_1(t)$, temos

$$\begin{aligned}
I_1 & \leq \frac{\alpha}{t} \int_0^t \|\mathcal{R}'(\tau + \omega) - \mathcal{R}'(\tau)\|_{\mathcal{B}(X)} d\tau \|y\|_X \\
& \leq \frac{\alpha M}{t} \left(\int_0^t e^{-\mu|\tau+\omega|} d\tau + \int_0^t e^{-\mu|\tau|} d\tau \right) \|y\|_X \\
& \leq \frac{2M\alpha}{t} \left(\int_0^t e^{-\mu\tau} d\tau \right) \|y\|_X \\
& \leq \frac{2M\alpha}{\mu t},
\end{aligned}$$

por isso

$$\alpha \|y\|_X \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|\mathcal{R}'(\tau + \omega) - \mathcal{R}'(\tau)\|_{\mathcal{B}(X)} d\tau = 0. \quad (4.2.6)$$

Podemos mostrar analogamente que $I_2(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, $u \in PSAP_\omega(X)$. $\square$

Observação 4.2.1. (a) Um resultado similar ao teorema anterior foi obtido em (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) onde a perturbação f é uma função assintoticamente quasi ω -periódica.

(b) Em (CUEVAS; LIZAMA, 2009), foi estudado a boa colocação em espaços de Hölder para a equação (2) definida em $\mathbb{R}$. Para obter seus resultados, eles usaram um teorema de multiplicador devido a Arendt et al. (2001).

Corolário 4.2.1. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família $(0, \beta, \beta)$ -regularizada sobre X com gerador A e assumamos que $\mathcal{R}(t)$ tende a zero exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Se $f \in PSAP_\omega(X)$ é tal que $f(t) \in D(A^2)$ para todo $t \geq 0$, então a equação*

$$\begin{cases} u''(t) = \beta(Au(t) + Au'(t)) + f(t), & t \geq 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = y \in D(A^2), \end{cases} \quad (4.2.7)$$

possui uma solução $u \in PSAP_\omega(X)$.

Demonstração. Considere f em $PSAP_\omega(X)$ tal que $f(t) \in D(A^2)$ e $y \in D(A^2)$. Da Proposição 2.1.2, a solução para o sistema (4.2.7) é dada por

$$u(t) = \mathcal{R}(t)y + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s)ds.$$

Da Demonstração do Teorema 4.2.1 e Lema 4.1.1, u é função Pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Portanto, $u \in PSAP_\omega(X)$. $\square$

4.2.2 O caso semilinear

Agora, nós vamos considerar a equação (3) com condições iniciais

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = y, \quad u''(0) = z. \quad (4.2.8)$$

Inicialmente nós estudaremos condições para existência e unicidade de soluções brandas (veja a Definição 2.1.2) do problema (3)-(4.2.8) quando a função f for Lipschitz contínua.

Teorema 4.2.2. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição (ED). Assuma que $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua, assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , e que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f \|x - y\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x, y \in X. \quad (4.2.9)$$

Se $\frac{M}{\mu} L_f < 1$, então existe uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica $u(\cdot)$ de (3)-(4.2.8).

Demonstração. Definimos o operador Λ sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$ pela expressão (3.2.14)

Mostraremos inicialmente que Λu está em $PSAP_\omega(X)$ sempre que seja $u \in PSAP_\omega(X)$, segue de nossas hipóteses que $f(\cdot, u(\cdot))$ é uma função limitada. Além disso, usando a condição (ED), obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|\Lambda u\|_X &\leq \alpha \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|y\|_X + \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|y\|_X + \alpha \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|z\|_X \\ &\quad + \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, u(s))\|_X ds \\ &\leq \alpha M \|y\|_X + M \|y\|_X + \alpha M \|z\|_X + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s))\|_X ds \\ &\leq \alpha M \|y\|_X + M \|y\|_X + \alpha M \|z\|_X + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} ds \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq (\alpha + 1)M \|y\|_X + \alpha M \|z\|_X + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C_b([0, \infty); X)}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Por outro lado, pelo Lema 2.2.2, a função $s \rightarrow f(s, u(s))$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica, logo, pelo Lema 4.1.1, $h(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds \in PSAP_\omega(X)$. Além disso, para $u, v \in PSAP_\omega(X)$, temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq M L_f \left(\int_0^t e^{-\mu s} ds \right) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq \frac{M L_f}{\mu} \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}, \end{aligned}$$

o que prova que Λ é uma contração sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$, assim concluímos que Λ possui um único ponto fixo $u \in PSAP_\omega(X)$. $\square$

Observação 4.2.2. Sob as condições do Teorema 4.2.2, temos a seguinte estimativa para a solução $u(\cdot)$ de (3)-(4.2.8):

$$\sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|_X}{e^{ML_f t}} \leq M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{C_b([0, \infty); X)}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_X &\leq M e^{-\mu t} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s))\|_X ds \\ &\leq M e^{-\mu t} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) \\ &\quad + M e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} \|f(s, 0) + f(s, u(s)) - f(s, 0)\|_X ds \\ &\leq M e^{-\mu t} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) \\ &\quad + M e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} \|f(s, 0)\|_X ds + M e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} L_f \|u(s)\|_X ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^{\mu t} \|u(t)\|_X \leq M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M \int_0^t e^{\mu s} \|f(s, 0)\|_X ds + M L_f \int_0^t e^{\mu s} \|u(s)\|_X ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwal (ver Teorema 2.0.5) segue que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_X &\leq \left(\frac{M}{e^{\mu t}} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} ds \|f(\cdot, 0)\|_{C_b} \right) e^{ML_f t} \\ &\leq \left(M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{C_b([0, \infty); X)} \right) e^{ML_f t}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\|u(t)\|_X}{e^{ML_f t}} \leq M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{C_b([0, \infty); X)}.$$

Isto conclui a discussão da Observação 4.2.2.

A observação seguinte pode ser pensada como um resultado de perturbação.

Observação 4.2.3. Sob as condições do Teorema 4.2.2 com a constante de Lipschitz L_f não necessariamente pequena, existe um $\lambda_0 > 0$ tal que, para qualquer $\lambda \in [0, \lambda_0]$, o Teorema 4.2.2 pode ser aplicado para a função $\lambda f(t, x)$.

Observação 4.2.4. Um resultado similar ao teorema anterior foi obtido em (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) quando f é assintoticamente quase periódica satisfazendo (4.2.9).

Definição 4.2.1. Dizemos que f é uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica diferenciável se $f, f' \in PSAP_\omega(X)$. Note que se $f \in PSAP_\omega(X)$ é diferenciável e f' é uniformemente contínua, então $f' \in PSAP_\omega(X)$. Denotamos por $PSAP_\omega^1(X)$ o conjunto de todas as funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas diferenciáveis. O conjunto $PSAP_\omega^1(X)$ é um espaço de Banach munido com a norma $\|f\|_{PSAP_\omega^1(X)} = \|f\|_{C_b([0, \infty); X)} + \|f'\|_{C_b([0, \infty); X)}$.

Antes de discutir o próximo teorema, temos a seguinte observação.

Definição 4.2.2. (ARAYA; LIZAMA, 2012) Uma função contínua $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ satisfazendo a equação integral

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds, \quad \forall t \geq 0,$$

onde $z \in D(A)$, é chamada solução branda para o problema (4.2.11)-(4.2.12).

Observação 4.2.5. Consideremos o problema semilinear

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.2.11)$$

com condições iniciais

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = z, \quad (4.2.12)$$

em que A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ que satisfaz a condição (ED), e $f : [0, \infty) \times X \times X \rightarrow X$ é uma função contínua, assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de $X \times X$ e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $X \times X$ tal que

$$\|f(t, x, x') - f(t, y, y')\|_X \leq L_1 \|x - y\|_X + L_2 \|x' - y'\|_X, \quad \forall x, y, x', y' \in X, t \geq 0.$$

Repetindo os passos das demonstrações anteriores, não é difícil observar que se

$$2 \max\{L_1, L_2\} M \mu^{-1} < 1,$$

então o problema (4.2.11)-(4.2.12) possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica diferenciável.

Demonstração. Definimos o operador Λ sobre o espaço $PSAP_\omega^1(X)$ por

$$\Lambda u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds.$$

Como $\mathcal{R}(0) = 0$ e $z \in D(A)$, então

$$(\Lambda u)'(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)z + \int_0^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds.$$

Pelos Lemas 2.2.2 e 4.1.1, as funções Λu e $(\Lambda u)'$ pertencem a $PSAP_\omega(X)$. Portanto, $\Lambda : PSAP_\omega^1(X) \rightarrow PSAP_\omega^1(X)$ está bem definido. Sejam u e v em $PSAP_\omega^1(X)$ temos

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, u(s), u'(s)) - f(s, v(s), v'(s))\|_X ds \\ &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} [L_1 \|u(s) - v(s)\|_X + L_2 \|u'(s) - v'(s)\|_X] ds \\ &\leq \max\{L_1, L_2\} M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} [\|u(s) - v(s)\|_X + \|u'(s) - v'(s)\|_X] ds \\ &\leq \max\{L_1, L_2\} M \left(\int_0^t e^{-\mu(t-s)} ds \right) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\quad + \max\{L_1, L_2\} M \left(\int_0^t e^{-\mu(t-s)} ds \right) \|u' - v'\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq \frac{2 \max\{L_1, L_2\} M}{\mu} \|u - v\|_{PSAP_\omega^1(X)}. \end{aligned}$$

Com isto, mostra-se que o operador Λ é uma $2 \max\{L_1, L_2\} M \mu^{-1}$ -contração. Então possui uma única solução branda. $\square$

Teorema 4.2.3. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição (ED). Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f(t) \|x - y\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x, y \in X, \quad (4.2.13)$$

onde $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável e limitada sobre $[N, \infty)$, para alguma constante $N > 0$. Então o problema (3)-(4.2.8) possui uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Vamos realizar esta demonstração em dois passos. Primeiro não é possível aplicar o Lema 4.1.1 diretamente, sem antes comprovar a composição das funções f e u aplicando o Lema 2.2.2. Segundo, faremos uso do Corolário 2.3.1 com contas similares as feitas no Teorema 3.2.3. Usaremos as mesmas notações da demonstração do Teorema 4.2.2.

Passo 1. O primeiro passo em nossa análise será provar que Λ está bem definido. O operador Λ sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$ está dado por (3.2.14). Inicialmente observamos que

f satisfaz a condição (C_1) do Lema 2.2.3. De fato, sejam u e v pertencentes a $C_b([0, \infty); X)$ tais que $v - u$ está no espaço ergódico¹ $PAP_0(X)$. Tomamos $K = \text{Im}(u) \cup \text{Im}(v)$. Pela Definição 2.2.9, existe $T_K > 0$ tal que o conjunto $\{f(t, x) : t \geq T_K, x \in K\}$ é limitado. Por outro lado, da hipóteses sobre $L_f(t)$ temos que, existe $N > 0$ tal que $\{L_f(t) : t \geq N\}$ é limitado. Escolhemos $T = \max\{N, T_K\}$. Como f , u e v são funções contínuas, logo $f(\cdot, u(\cdot))$ e $f(\cdot, v(\cdot))$ são limitadas em $[0, T]$. Tomamos

$$L_f^\infty := \sup_{t \geq N} L_f(t),$$

$$\mathcal{K}_{u,v} := \sup_{t \in [0, T]} \|f(s, u(s))\|_X + \sup_{t \in [0, T]} \|f(s, v(s))\|_X,$$

$$\mathcal{K}_{T,K} := \sup_{(t,x) \in [T, \infty) \times K} \|f(t, x)\|_X,$$

e para $\varepsilon > 0$, tomamos $C_\varepsilon = \{t \in [0, \infty) : \|v(t) - u(t)\| \geq \varepsilon\}$. Para $t \geq T$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^T \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds + \frac{1}{t} \int_T^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^T (\|f(s, u(s))\|_X + \|f(s, v(s))\|_X) ds + \frac{1}{t} \int_{C_\varepsilon \cap [T, t]} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_{[T, t] \setminus C_\varepsilon} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &\leq \frac{\mathcal{K}_{u,v}}{t} T + \frac{1}{t} \left(\int_{C_\varepsilon \cap [T, t]} \|f(s, u(s))\|_X ds + \int_{C_\varepsilon \cap [T, t]} \|f(s, v(s))\|_X ds \right) \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_{[T, t] \setminus C_\varepsilon} L_f(s) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq \frac{1}{t} \mathcal{K}_{u,v} T + \frac{2}{t} \mathcal{K}_{T,K} \lambda(C_\varepsilon \cap [T, t]) + \frac{L_f^\infty \varepsilon}{t} (t - T). \end{aligned}$$

Como C_ε é um conjunto ergódico, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds = 0$. Por conseguinte, se u pertence a $PSAP_\omega(X)$, então segue do Lema 2.2.3 que a função $s \rightarrow f(s, u(s))$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica, e, pelo Lema 4.1.1, $\Lambda u \in PSAP_\omega(X)$. Portanto Λ está bem definido.

Passo 2. O mapa Λ possui um único ponto fixo em $PSAP_\omega(X)$. Se $u, v \in PSAP_\omega(X)$, então

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq M \left(\int_0^t L_f(s) ds \right) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq M \|L_f\|_1 \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}. \end{aligned}$$

¹ $PAP_0(X) = \left\{ \phi \in C_b([0, \infty); X) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\phi(t)\|_X dt = 0 \right\}$. É conhecido que uma função u pertence a $PAP_0(X)$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto $C_\varepsilon = \{t \in [0, \infty) : \|u(t)\|_X \geq \varepsilon\}$ é um conjunto ergódico (ver (ZHANG, 2003)).

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|(\Lambda^2 u)(t) - (\Lambda^2 v)(t)\|_X &\leq M^2 \left(\int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right) ds \right) \|u - v\|_{C_b([0,\infty);X)} \\
&\leq \frac{M^2}{2} \left(\int_0^t L_f(\tau) d\tau \right)^2 \|u - v\|_{C_b([0,\infty);X)} \\
&\leq \frac{(M\|L_f\|_1)^2}{2} \|u - v\|_{C_b([0,\infty);X)}.
\end{aligned}$$

Em geral, temos a seguinte estimativa (as contas são similares as feitas para demonstrar por indução (3.2.27) na Seção 3.2)

$$\|\Lambda^n u - \Lambda^n v\|_{C_b([0,\infty);X)} = \sup_{t \geq 0} \|(\Lambda^n u)(t) - (\Lambda^n v)(t)\|_X \leq \frac{(M\|L_f\|_1)^n}{n!} \|u - v\|_{C_b([0,\infty);X)}. \quad (4.2.14)$$

Como $\frac{(M\|L_f\|_1)^n}{n!} < 1$ para n suficientemente grande, pelo Princípio dos Iterados (ver Corolário 2.3.1), Λ possui um único ponto fixo $u \in PSAP_\omega(X)$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Observação 4.2.6. Observamos que para obter (4.2.14) é suficiente supor que a função $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ seja limitada, isto é, $\sup_{t \in [0,\infty)} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} < +\infty$. Mas a condição de $\mathcal{R}(t)$ ser integrável foi necessária para usar o Lema 4.1.1.

Um resultado similar pode ser estabelecido quando f satisfaz uma condição Lipschitz local. Denotamos

$$\theta := (\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X, \quad S_1 := L_f(\theta)\theta + \sup_{s \geq 0} \|f(s, 0)\|_X,$$

onde M é a constante da condição (ED). Temos o seguinte resultado no qual aplicamos o teorema do ponto fixo de Liu et al. (2005) (Lema 2.3.1).

($\mathcal{C}_{loc}$). Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e quaisquer $x, y \in \mathcal{B}_\sigma(X)$ temos que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_Y \leq L_f(\sigma)\|x - y\|_X,$$

onde $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

Teorema 4.2.4. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição (ED). Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , e que satisfaz a condição ($\mathcal{C}_{loc}$). Se existe $r > 0$ tal que $\frac{M}{\mu} \left(L_f(\theta + r) + \frac{S_1}{r} \right) < 1$, então existe uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica $u(\cdot)$ de (3)-(4.2.8).*

Demonstração. Observamos que como f é assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , logo $f(\cdot, 0)$ é uma função limitada sobre $\mathbb{R}^+$, portanto $S_1 < +\infty$. Tomamos

$$PSAP_\omega^0(X) = \{u \in PSAP_\omega(X) : u(0) = 0\}.$$

É claro que $PSAP_\omega^0(X)$ é um subespaço fechado de $PSAP_\omega(X)$. Seja $\Lambda^\odot : PSAP_\omega^0(X) \longrightarrow PSAP_\omega^0(X)$ o mapa definido por

$$\Lambda^\odot u(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s)) ds, \quad (4.2.15)$$

onde $u \in PSAP_\omega^0(X)$. Visto que $s \rightarrow \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z$ é uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica, do Corolário 2.2.1, a função

$$s \rightarrow f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s)),$$

é pseudo S-assintoticamente ω -periódica, e usando o Lema 4.1.1, concluimos que $\Lambda^\odot$ está bem definido.

Para $u, v \in PSAP_\omega^0(X)$ com $\|u\|_{C_b([0, \infty); X)}, \|v\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq r$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^\odot u(t) - \Lambda^\odot v(t)\|_X \\ & \leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s)) \\ & \quad - f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + v(s))\|_X ds \\ & \leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f((\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|u(s)\|_X) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ & \leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(\theta + r) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ & \leq M \left(\int_0^t e^{-\mu s} ds \right) L_f(\theta + r) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ & \leq \frac{M}{\mu} L_f(\theta + r) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Lambda^\odot u - \Lambda^\odot v\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq \frac{M}{\mu} L_f(\theta + r) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}.$$

Por outro lado, para $u \in PSAP_\omega^0(X)$ com $\|u\|_{C_b([0,\infty);X)} \leq r$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Lambda^\odot u\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y \\
&\quad + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)\|_X ds \\
&\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} (\|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y \\
&\quad + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s)) - f(s, 0)\|_X + \|f(s, 0)\|_X) ds \\
&\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f ((\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r) ds \|u\|_{C_b([0,\infty);X)} \\
&\quad + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} ds \sup_{s \geq 0} \|f(s, 0)\|_X \\
&\leq \frac{M}{\mu} L_f(\theta + r) \|u\|_{C_b([0,\infty);X)} + \frac{M}{\mu} S_1 \\
&\leq \frac{M}{\mu} L_f(\theta + r) r + \frac{M}{\mu} S_1 \\
&\leq \frac{M}{\mu} \left(L_f(\theta + r) + \frac{S_1}{r} \right) r \leq r.
\end{aligned}$$

Das estimativas acima, segue que $\Lambda^\odot$ é uma contração sobre $B_r(PSAP_\omega^0(X))$. Então existe um único ponto fixo $u \in B_r(PSAP_\omega^0(X))$ para o operador $\Lambda^\odot$. Para finalizar a demonstração, nós observamos que

$$v(t) = u(t) + \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z$$

é uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica de (3)-(4.2.8). $\square$

Observação 4.2.7. A existência da solução pseudo S-assintoticamente ω -periódica é obtida através do Teorema de Ponto Fixo de Banach e este teorema dá unicidade no espaço onde o argumento de ponto fixo é aplicado. Neste caso, o espaço é a bola $B_r(PSAP_\omega^0(X))$, que não é o espaço todo. Esta é a razão para a unicidade não ser obtida.

Teorema 4.2.5. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A e que satisfaz a condição (ED). Assuma que $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição de Lipschitz (4.2.13), onde $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é localmente integrável. Definimos*

$$W_f(t) = M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) ds,$$

com M e μ são as constantes envolvidas na condição (ED). Suponha que as seguintes condições são verificadas:

$$(W_1) \sup_{t \geq 0} W_f(t) < 1,$$

$$(W_2) \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l W_f(t) dt = 0.$$

Então o problema (3)-(4.2.8) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Definimos o mapa Λ sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$ pela expressão (3.2.14). Para $u \in PSAP_\omega(X)$ abreviamos a notação escrevendo

$$\mathcal{V}(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds. \quad (4.2.16)$$

Primeiro provaremos que Λ é bem definido. Tomamos $\varepsilon > 0$ e o conjunto $B = Im(u)$, dado que f é uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X (veja as Definições 2.2.7 e 2.2.9), existe $T = T(B)$ suficientemente grande tal que $\{f(t, u(t)) : t \geq T\}$ é limitado e

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in B} \|f(s + \omega, x) - f(s, x)\|_X ds \leq \frac{\mu\varepsilon}{2M}, \text{ para } t > T. \quad (4.2.17)$$

Escolhemos

$$\mathcal{K}_u = \sup_{t \geq T} \|f(t, u(t))\|_X,$$

$$\mathcal{K}_T = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t, u(t))\|_X.$$

Uma vez que $f(\cdot, u(\cdot))$ é uma função contínua, $\mathcal{K}_T < +\infty$. Observamos que

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t, u(t))\|_X \leq \mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T.$$

Dai,

$$\begin{aligned} \|\Lambda u\|_X &\leq (\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + M \left(\int_0^T e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s))\|_X ds \right. \\ &\quad \left. + \int_T^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s))\|_X ds \right) \\ &\leq (\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X \\ &\quad + M \left(\int_0^T e^{-\mu(t-s)} ds K_T + \int_T^t e^{-\mu(t-s)} ds K_u \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Lambda u\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq (\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \frac{M}{\mu}(\mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T),$$

o que mostra que Λu é uma função limitada em $[0, \infty)$. Como $\alpha \mathcal{R}'(\cdot)y$, $\mathcal{R}(\cdot)y$ e $\alpha \mathcal{R}(\cdot)z$ pertencem à $PSAP_\omega(X)$, da demonstração do Teorema 4.2.1, resta mostrar que a função $\mathcal{V}(\cdot)$ dada por (4.2.16) pertence a $PSAP_\omega(X)$. Visto que f não é necessariamente assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , não podemos usar o Lema 2.2.2. Para superar esta dificuldade precisamos usar uma decomposição adequada

da função $\int_0^l (\mathcal{V}(t + \omega) - \mathcal{V}(t))dt$ e verificar a Definição 2.2.7. Para $l > T$, temos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \int_0^l (\mathcal{V}(t + \omega) - \mathcal{V}(t))dt &= \frac{1}{l} \int_0^l \left(\int_0^{t+\omega} \mathcal{R}(t + \omega - s) f(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \mathcal{R}(t - s) f(s, u(s)) ds \right) dt \\
&= \frac{1}{l} \int_0^l \left(\int_0^\omega \mathcal{R}(t + \omega - s) f(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_\omega^{t+\omega} \mathcal{R}(t + \omega - s) f(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \mathcal{R}(t - s) f(s, u(s)) ds \right) dt \\
&= \frac{1}{l} \int_0^l \left(\int_0^\omega \mathcal{R}(t + \omega - s) f(s, u(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \mathcal{R}(t - s) [f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))] ds \right) dt \\
&= \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^t \mathcal{R}(t - s) [f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))] ds dt \\
&\quad + \frac{1}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} \mathcal{R}(s) f(t + \omega - s, u(t + \omega - s)) ds dt \\
&= \frac{1}{l} \int_0^T \int_0^t \mathcal{R}(t - s) (f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))) ds dt \\
&\quad + \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^t \mathcal{R}(t - s) (f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))) ds dt \\
&\quad + \frac{1}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} \mathcal{R}(s) f(t + \omega - s, u(t + \omega - s)) ds dt \\
&:= I_1(l) + I_2(l) + I_3(l) + I_4(l).
\end{aligned}$$

Abaixo, estimaremos cada um dos termos $I_i(l)$, $1 \leq i \leq 4$, da expressão acima separadamente.

Para o termo $I_1(l)$ podemos verificar a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|I_1(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_0^T \int_0^t e^{-\mu|t-s|} \|f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s))\|_X ds dt \\
&\leq \frac{M}{l} \int_0^T \int_0^t e^{-\mu|t-s|} (\|f(s+\omega, u(s+\omega))\|_X + \|f(s, u(s))\|_X) ds dt \\
&\leq \frac{2M}{l} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-\mu s} ds dt \right) \sup_{t \geq 0} \|f(t, u(t))\|_X \\
&\leq \frac{2M}{\mu l} \left(T + \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu T}) \right) (\mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T) \\
&\leq \frac{2M}{\mu} \left(T + \frac{1}{\mu} \right) (\mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T) \frac{1}{l},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_1(l) = 0. \quad (4.2.18)$$

Para estimar $I_2(l)$, primeiro vamos decompor $I_2(l)$ como abaixo

$$\begin{aligned}
I_2(l) &= \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^t \mathcal{R}(t-s) (f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))) ds dt \\
&= \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^T \mathcal{R}(t-s) (f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))) ds dt \\
&\quad + \frac{1}{l} \int_T^l \int_T^t \mathcal{R}(t-s) (f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))) ds dt \\
&:= I_2^1(l) + I_2^2(l).
\end{aligned}$$

Agora nós estimaremos os termos $I_2^i(l)$, $i = 1, 2$.

Para o termo $I_2^1(l)$, nós obtemos

$$\begin{aligned}
\|I_2^1(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_0^T e^{-\mu(t-s)} \|f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))\|_X ds dt \\
&\leq \frac{M}{l} \int_T^l e^{-\mu(t-T)} \left(\int_0^T \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \right) dt \\
&\leq \frac{M}{l} \int_T^l t e^{-\mu(t-T)} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \right) dt \\
&\leq \frac{M}{l} l \left(\int_0^{l-T} e^{-\mu t} dt \right) \frac{\mu}{M} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Para o termo $I_2^2(l)$ nós temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|I_2^2(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_T^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))\|_X ds dt \\
&\leq \frac{M}{l} \int_T^l \left(\int_s^t e^{-\mu(t-s)} dt \right) \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \\
&\leq \frac{M}{\mu} \frac{1}{l} \int_0^l \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \quad (4.2.20)$$

De (4.2.19) e (4.2.20) segue que $\|I_2(l)\|_X \leq \varepsilon$, para todo $l \geq T$, portanto

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_2(l) = 0. \quad (4.2.21)$$

Estimamos o termo $I_3(l)$ por

$$\begin{aligned} \|I_3(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s+\omega)) - f(s, u(s))\|_X ds dt \\ &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) \|u(s+\omega) - u(s)\|_X ds dt \\ &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) (\|u(s+\omega)\|_X + \|u(s)\|_X) ds dt \\ &\leq \frac{2\|u\|_{C_b([0,\infty);X)}}{l} \int_T^l \left(M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) ds \right) dt \\ &\leq 2\|u\|_{C_b([0,\infty);X)} \frac{1}{l} \int_T^l W_f(t) dt, \end{aligned}$$

Por (W_2) temos

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_3(l) = 0. \quad (4.2.22)$$

Finalmente, para o termo $I_4(l)$ nós temos

$$\begin{aligned} \|I_4(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} e^{-\mu s} \|f(t+\omega-s, u(t+\omega-s))\|_X ds dt \\ &\leq \frac{M}{l} \left(\sup_{t \geq 0} \|f(t, u(t))\|_X \right) \int_0^l \int_t^{t+\omega} e^{-\mu s} ds dt \\ &\leq \frac{M}{l} \left(\sup_{t \geq 0} \|f(t, u(t))\|_X \right) \int_0^l \left(\int_t^{t+\omega} ds \right) e^{-\mu t} dt \\ &\leq \frac{M\omega}{l} \left(\sup_{t \geq 0} \|f(t, u(t))\|_X \right) \int_0^l e^{-\mu t} dt \\ &\leq \frac{M\omega}{\mu l} \left(\sup_{t \geq 0} \|f(t, u(t))\|_X \right), \end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_4(l) = 0. \quad (4.2.23)$$

De (4.2.18), (4.2.21), (4.2.22) e (4.2.23), segue que

$$\frac{1}{l} \int_0^l \|\mathcal{V}(t+\omega) - \mathcal{V}(t)\|_X dt \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Por fim, provaremos que Λ é uma contração de $PSAP_\omega(X)$ nele mesmo. Se $u, v \in PSAP_\omega(X)$ e $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq \left(M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) ds \right) \|u - v\|_{C_b([0,\infty);X)} \\ &\leq \left(\sup_{t \geq 0} W_f(t) \right) \|u - v\|_{C_b([0,\infty);X)}. \end{aligned}$$

Da condição (W_1) concluímos nossa afirmação. Isto completa a demonstração do Teorema 4.2.5. $\square$

Observação 4.2.8. Resultados similares aos Teoremas 4.2.4 e 4.2.5 foram obtidos em (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) para equações de evolução fracionárias.

Observação 4.2.9. A função $W_f(\cdot)$ possui as seguintes propriedades (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014, Teorema 3.3):

- (i) Se $W_f \in L^1([0, \infty))$, então (W_2) é satisfeita.
- (ii) Se $L_f \in L^1([0, \infty))$ com $M\|L_f\|_{L^1([0, \infty))} < 1$, onde M é dado em (ED) , então (W_1) e (W_2) são asseguradas.
- (iii) Se $L_f \in L^1_{loc}([0, \infty))$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L_f(s) ds = 0$, então (W_2) é satisfeita.

Abaixo iremos considerar perturbações mais gerais para o problema (3)-(4.2.8) do que as consideradas até agora. Uma investigação em tal direção é justificada não somente pela aspiração por generalidade, mas também pelo fato que a maioria dos problemas reais são não lineares.

Usaremos o Teorema de ponto fixo de Schauder (ver o Teorema 2.3.2). Gostaríamos de salientar aqui que este teorema apresenta uma desvantagem quando tratamos com um dos mais importantes casos (BURTON; ZHANG, 2014): que é quando o espaço de trabalho M consiste de funções contínuas $\phi : [0, \infty) \rightarrow X$ e $P : M \rightarrow M$ com P contínua e M fechado, convexo e não-vazio. O Teorema de Schauder requer que M seja compacto ou que P mapeie M em um subconjunto compacto K do espaço M . Estas condições não são difíceis quando M consiste de funções contínuas $\phi : [a, b] \rightarrow X$ uma vez que podemos frequentemente organizar as coisas de modo que PM é equicontínuo² e então aplicamos o Teorema de Arzela-Ascoli. Mas quando tratamos com a compacidade, pode ser bastante complicado estabelecê-la no caso de considerarmos o intervalo inteiro $[0, \infty)$. Para superar esta dificuldade, introduzimos um espaço adequado contendo M .

Seja $h : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ uma função contínua não-decrescente tal que $h(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Denotamos por $C_h(X)$ o espaço

$$C_h(X) = \left\{ u \in C([0, \infty); X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0 \right\}, \quad (4.2.24)$$

munido com a norma

$$\|u\|_h = \sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}.$$

² Seja E um espaço topológico e F um espaço métrico; dizemos que um conjunto $\mathcal{E}$ de aplicações de E em F é equicontínuo no ponto $x_0 \in E$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V_{x_0} de x_0 tal que $x \in V_{x_0}$ implica $d[f(x), f(x_0)] \leq \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{E}$; é claro que, então, todas as funções $f \in \mathcal{E}$ são contínuas no ponto x_0 . Dizemos que $\mathcal{E}$ é equicontínuo se é equicontínuo em todo ponto $x \in E$.

Para estabelecer nosso próximo resultado, consideramos funções f que satisfazem a seguinte condição de limitação.

$(W_1)^*$ Existe uma função contínua não-decrescente $\widetilde{W} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\|f(t, x)\|_X \leq \widetilde{W}(\|x\|_X)$ para todo $t \in [0, \infty)$ e $x \in X$.

Denotamos

$$\beta(\xi) = \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)} \widetilde{W}(\xi h(s)) ds. \quad (4.2.25)$$

Teorema 4.2.6. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A e que satisfaz a condição (ED). Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz $(W_1)^*$. Assuma ainda que as seguintes propriedades são asseguradas.*

(D_1) Para cada $\xi > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W}(\xi h(s)) ds = 0.$$

(D_2) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $u, v \in C_h(X)$, $\|u - v\|_h \leq \delta$ implica

$$\sup_{t \geq 0} M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \leq \varepsilon.$$

(D_3) Para cada $a \geq 0$ e $r > 0$ o conjunto $\{\mathcal{R}(a-t)f(t, x) : 0 \leq t \leq a, x \in X, \|x\|_X \leq r\}$ é relativamente compacto em X e para cada $0 \leq \xi \leq a$, $(\mathcal{R}(a+s-\xi) - \mathcal{R}(a-\xi))f(\xi, x) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$, uniformemente para $\|x\| \leq r$.

Se

$$\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1, \quad (4.2.26)$$

então o problema (3)-(4.2.8) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. A ideia principal na demonstração é o uso do Teorema 2.3.3, onde precisamos provar que o operador associado as soluções brandas é completamente contínuo, fazemos uso do Teorema de Arzelá-Ascoli, com o critério de compacidade dado no Lema 2.3.2. Seja $C_h^0(X)$ o espaço das funções $u \in C_h(X)$ tais que $u(0) = 0$. É claro que $C_h^0(X)$ é um subespaço fechado de $C_h(X)$. Definimos o operador $\Lambda^\odot$ sobre $C_h^0(X)$ por (4.2.15)

Nesta primeira parte mostraremos que o operador está bem definido. Para $v \in C_h^0(X)$,

$$\begin{aligned} \frac{\|\Lambda^\odot v(t)\|_X}{h(t)} &\leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + v(s))\|_X ds \\ &\leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W} (\|\alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + v(s)\|_X) ds \\ &\leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W} \left((M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X) e^{-\mu s} + \|v(s)\|_X \right) ds \\ &\leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W}(h(s)\tilde{L}) ds \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Da condição (D_1) obtemos que $\Lambda^\odot$ está bem definido, onde $\tilde{L} = M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|v\|_h$. Portanto, $\Lambda^\odot v \in C_h^0(X)$ sempre que $v \in C_h^0$.

Agora dividimos o resto da demonstração nos seguintes passos:

Passo 1. O mapa $\Lambda^\odot$ é contínuo de $C_h^0(X)$ em $C_h^0(X)$. Esta afirmação é uma consequência direta da condição (D_2) . De fato, sejam u_n, u em $C_h^0(X)$ tais que $u_n \rightarrow u$ em $C_h(X)$ quando $n \rightarrow \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, seja δ a constante envolvida na condição (D_2) . Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u\|_h < \delta$ sempre que $n > n_0$, então

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u_n - \Lambda^\odot u\|_h &= \sup_{t \geq 0} \frac{\|\Lambda^\odot u_n(t) - \Lambda^\odot u(t)\|_X}{h(t)} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u_n(s)) \\ &\quad - f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s))\|_X ds \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação.

Passo 2. Afirmamos que $\Lambda^\odot$ é uma função completamente contínua. Tomamos $r > 0$ e definimos os conjuntos $V = \Lambda^\odot(B_r(C_h^0(X)))$ e $V(t) = \{\Lambda^\odot u(t) : u \in B_r(C_h^0(X))\}$. Primeiro mostraremos que $V(t)$ é um conjunto relativamente compacto em X para cada $t \geq 0$. Levando-se em conta o Teorema do Valor Médio para a integral de Bochner (ver Teorema 2.0.10), temos que $V(t) \subseteq \overline{tco(\mathcal{K})}$, em que $co(\mathcal{K})$ denota a envoltória convexa do conjunto³

$$\mathcal{K} = \left\{ \mathcal{R}(t-s)f(s, x) : s \in [0, t], \|x\|_X \leq h(t) \left(M[(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X] + r \right) \right\}. \quad (4.2.27)$$

Usando a condição (D_3) , inferimos que $V(t)$ é relativamente compacto em X . Agora, consideramos $b > 0$ fixado e V_b o conjunto formado por todas as funções $v \in V$ restritas ao intervalo $[0, b]$. Tomemos $v = \Lambda^\odot u$ com $u \in B_r(C_h^0(X))$ e $s \geq 0$. Uma vez que para cada $\tau > 0$ e $0 \leq \zeta \leq a$, $(\mathcal{R}(a + \rho - \zeta) - \mathcal{R}(a - \zeta))f(\zeta, x) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0$, uniformemente

³ $\overline{co(E)}$ denota o fecho da envoltória convexa de E . Como o nome sugere, a envoltória convexa sempre é um conjunto convexo. É o menor conjunto convexo que contém E .

para $\|x\|_X \leq \tau$, da seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|v(t+s) - v(t)\|_X &\leq \int_t^{t+s} \|\mathcal{R}(t+s-\xi)f(\xi, \alpha\mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha\mathcal{R}'(\xi)z + v(\xi))\|_X d\xi \\
&\quad + \int_0^t \|[\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi)]f(\xi, \alpha\mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha\mathcal{R}'(\xi)z + v(\xi))\|_X d\xi \\
&\leq \int_t^{t+s} \|\mathcal{R}(t+s-\xi)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(\xi, \alpha\mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha\mathcal{R}'(\xi)z + v(\xi))\|_X d\xi \\
&\quad + \int_0^t \|[\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi)]f(\xi, \alpha\mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha\mathcal{R}'(\xi)z + v(\xi))\|_X d\xi \\
&\leq M \int_t^{t+s} e^{-\mu(t+s-\xi)} \widetilde{W}\left(h(\xi)(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r)\right) d\xi \\
&\quad + \int_0^t \|(\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi))f(\xi, \alpha\mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha\mathcal{R}'(\xi)z + v(\xi))\|_X d\xi,
\end{aligned}$$

inferimos que V_b é equicontínuo. Com as mesmas notações, mostraremos agora que $\frac{v(t)}{h(t)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, independente de $u \in B_r(C_h^0(X))$. De fato, isto segue de (D_1) e da estimativa

$$\frac{\|v(t)\|_X}{h(t)} \leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W}\left(h(s)(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r)\right) ds.$$

Pelo Lema 2.3.2 obtemos que V é um conjunto relativamente compacto em $C_h^0(X)$. Isto prova que $\Lambda^\odot$ é completamente contínuo.

Passo 3. Afirmamos que existe $\rho > 0$ tal que $\Lambda^\odot(B_\rho(C_h^0(X))) \subseteq B_\rho(C_h^0(X))$. De fato, se assumirmos que a afirmação é falsa, então para todo $\rho > 0$ podemos escolher $u^\rho \in B_\rho(C_h^0(X))$ tal que $\|\Lambda^\odot(u^\rho)\|_h > \rho$. Obtemos

$$\rho < \|\Lambda^\odot u^\rho\|_h < \beta(M[(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X] + \rho).$$

Consequentemente, considerando $\xi = M[(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X] + \rho$, temos

$$\begin{aligned}
1 &< \frac{\beta(\xi)}{\rho} \\
&= \frac{(\xi - \rho + \rho)\beta(\xi)}{\xi\rho} \\
&= \frac{\beta(\xi)}{\xi} + \frac{(M[(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X])}{\rho} \frac{\beta(\xi)}{\xi}.
\end{aligned}$$

Portanto $1 \leq \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi}$, o que é contrário a (4.2.26).

Passo 4. Considerando $u \in PSAP_\omega^0(X)$, uma vez que f satisfaz todas as condições do Lema 2.2.2, concluimos que a função

$$s \rightarrow f(s, \alpha\mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha\mathcal{R}(s)y + u(s))$$

é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Aplicando o Lema 4.1.1, obtemos que

$$\Lambda^\odot(PSAP_\omega^0(X)) \subseteq PSAP_\omega^0(X).$$

Consequentemente, combinando com o **Passo 3**, nós inferimos que

$$\Lambda^\odot \left(B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X) \right) \subseteq B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X),$$

e também

$$\begin{aligned} \Lambda^\odot \left(\overline{B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)}^h \right) &\subseteq \overline{\Lambda^\odot(B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X))}^h \\ &\subseteq \overline{B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)}^h, \end{aligned}$$

em que $\overline{B}^h$ denota o fecho de B em $C_h(X)$. Aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (ver Teorema 2.3.2), deduzimos que o mapa $\Lambda^\odot$ possui um ponto fixo $u \in \overline{B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)}^h$.

Passo 5. Finalmente, vamos mostrar que $u \in PSAP_\omega^0(X)$. Seja $(u^n)_n$ uma sequência em $B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)$ que converge para u na norma de $C_h(X)$. Da condição (D_2) e da desigualdade

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u^n - u\|_{C_b([0,\infty);X)} &= \|\Lambda^\odot u^n - \Lambda^\odot u\|_{C_b([0,\infty);X)} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u_n(s)) \\ &\quad - f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s))\|_X ds, \end{aligned}$$

obtemos que $\Lambda^\odot u^n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente no intervalo $[0, \infty)$. Uma vez que $\Lambda^\odot u^n \in PSAP_\omega^0(X)$, então $u \in PSAP_\omega^0(X)$, o que conclui a demonstração do Teorema 4.2.6. $\square$

Faremos agora uma importante observação que permitirá futuras aplicações.

Observação 4.2.10. A hipótese (D_3) do Teorema 4.2.6 é cumprida nas seguintes situações:

- (a) Para cada $a \geq 0$ e $r > 0$ o conjunto $\{f(t, x) : 0 \leq t \leq a, x \in X, \|x\| \leq r\}$ é relativamente compacto em X .
- (b) O operador $\mathcal{R}(t)$ é compacto para $t > 0$ e $\mathcal{R}(\cdot)$ é uniformemente contínuo sobre $(0, \infty)$.

Para prosseguir, vale ressaltar, que em um artigo recente de Burton e Zhang (2014, Teorema 2.1a) foi analisado o segundo Teorema de Ponto Fixo de Schauder no espaço de funções contínuas limitadas em $[0, \infty)$, com vista a exigir que o mapa seja localmente equicontínuo ao invés de exigir que o mapa seja compacto. Esta importante simplificação nos permite deduzir a existência de uma solução branda contínua limitada para o problema (3)-(4.2.8). Seremos mais específicos na seguinte observação

Observação 4.2.11. Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a hipótese (ED) e também que para cada $r > 0$, $a > 0$ e $\xi \in [0, a]$, $(\mathcal{R}(a + s - \xi) - \mathcal{R}(a - \xi))f(\xi, x) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$, uniformemente para $\|x\| \leq r$. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados⁴ de X que satisfaz $(W_1)^*$ e (4.2.26) onde M e μ são dados em (ED), então o problema (3)-(4.2.8) possui uma solução branda contínua limitada.

Demonstração. Seja C_b^0 o espaço das funções $u \in C_b([0, \infty); X)$ tais que $u(0) = 0$. É claro que C_b^0 é um subespaço fechado de $C_b([0, \infty); X)$. Definimos o operador $\Lambda^\odot$ sobre C_b^0 por (4.2.15). Para $u \in C_b^0$ podemos mostrar as seguintes estimativas:

$$\|\Lambda^\odot u\|_\infty \leq \frac{M}{\mu} \widetilde{W} \left(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|u\|_{C_b([0, \infty); X)} \right). \quad (4.2.28)$$

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u(t + s) - \Lambda^\odot u(t)\|_X &\leq M \left(\int_0^s e^{-\mu\tau} d\tau \right) \widetilde{W} \left(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X \right. \\ &\quad \left. + \|u\|_{C_b([0, \infty); X)} \right) + \int_0^t \|(\mathcal{R}(t + s - \tau) \\ &\quad - \mathcal{R}(t - s))f(\tau, \alpha\mathcal{R}'(\tau)y + \mathcal{R}(\tau)y \\ &\quad + \alpha\mathcal{R}(\tau)y + u(\tau))\|_X d\tau. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Segue dessas estimativas que o operador $\Lambda^\odot$ está bem definido. Afirmamos que existe $\sigma > 0$ tal que $B_\sigma(C_b^0)$ é invariante por $\Lambda^\odot$. De fato, se assumirmos que a afirmação é falsa, então para todo $\sigma > 0$ podemos escolher $u^\sigma \in B_\sigma(C_b^0)$ tal que $\|\Lambda^\odot u^\sigma\|_{C_b([0, \infty); X)} > \sigma$. Disto, não é difícil provar que

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{M}{\mu} \frac{\widetilde{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma)}{M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma} \\ &\quad + \frac{M}{\mu\sigma} (M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X) \frac{\widetilde{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma)}{M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma}. \end{aligned}$$

Essa desigualdade implica que $1 \leq \frac{M}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{W}(\xi)}{\xi}$, o que contradiz as hipóteses. Por conseguinte, nossa afirmação está provada.

Note que $\Lambda^\odot$ é um mapa contínuo de $B_\sigma(C_b^0)$ em si mesmo. Sejam u_n e u pertencentes à $B_\sigma(C_b^0)$ tais que $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente no intervalo $[0, \infty)$. Cálculos não muito difíceis mostram que $(\Lambda^\odot u_n)_n$ converge para $\Lambda^\odot u$.⁵

⁴ Para sermos mais precisos, relembramos que uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é chamada uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X se para todo $\varepsilon > 0$ e todo subconjunto limitado K de X existe $\delta = \delta_{\varepsilon, K} > 0$ tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ e quaisquer $x, y \in K$ tais que $\|x - y\|_X \leq \delta$. Esta definição vem essencialmente de (AGARWAL; DE ANDRADE; CUEVAS, 2010).

⁵ Para ver isso, seja ε um número positivo qualquer, tome $\rho := M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma$. Visto que f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , existe $\delta > 0$ tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq \frac{\mu}{M}\varepsilon$ para todo $t \geq 0$ e $\|x - y\|_X \leq \delta$ com $\|x\|_X \leq \rho$, e $\|y\|_X \leq \rho$. Podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u\|_{C_b([0, \infty); X)} < \delta$ sempre que $n \geq n_0$. Disto, nós obtemos que $\|\Lambda^\odot u^n - \Lambda^\odot u\|_\infty \leq \varepsilon$.

Por outro lado, da estimativa (4.2.29) inferimos que $\Lambda^\odot(B_\sigma(C_b^0))$ é localmente equicontínuo⁶. O fecho de $\Lambda^\odot(B_\sigma(C_b^0))$ na norma $\|\cdot\|_h$ está em $B_\sigma(C_b^0)$. Para ver isto, é suficiente mostrar que $B_\sigma(C_b^0)$ é fechado em $C_h(X)$. Considere u_n em $B_\sigma(C_b^0)$ e suponha que existe $u \in C_h(X)$ com $\|u_n - u\|_h \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\|u(0)\|_X = \|u_n(0) - u(0)\|_X \leq h(0)\|u_n - u\|_h$$

e

$$\|u(t) - u(t_0)\|_X \leq \|u_n - u\|_h(h(t) + h(t_0)) + \|u_n(t) - u_n(t_0)\|_X.$$

Assim, mostramos que $u(0) = 0$ e $u \in C([0, \infty); X)$. Visto que

$$\|u\|_\infty \leq \sup_{n \geq 1} \|u_n\|_\infty \leq \sigma,$$

nós deduzimos que $u \in B_\sigma(C_b^0)$. Isto prova que $B_\sigma(C_b^0)$ é fechado em $C_h(X)$. Finalmente, Burton e Zhang (2014, Teorema 2.1a) nos leva a deduzir que $\Lambda^\odot$ possui um ponto fixo $u \in B_\sigma(C_b^0)$. Podemos facilmente concluir que $v(t) = \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(t)$ é uma solução branda contínua e limitada de (3)-(4.2.8). Isto finaliza a demonstração da observação. $\square$

Teorema 4.2.7. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a hipótese (ED). Considere que $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , e que $f(\cdot, 0)$ é limitada em $[0, \infty)$. Assuma ainda que as seguintes propriedades são verificadas.*

(E₁) *Existe uma função contínua não decrescente $\mathcal{W} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $\mathcal{W}(0) = 0$ tal que*

$$\|f(t, h(t)x) - f(t, h(t)y)\|_X \leq \mathcal{W}(\|x - y\|_X),$$

para todo $t \geq 0$ e quaisquer $x, y \in X$, onde h é dada em (4.2.24)

(E₂) *$u \in PAP_0(X)$ implica que $\mathcal{W}\left(\frac{\|u(\cdot)\|_X}{h(\cdot)}\right) \in PAP_0(\mathbb{R})$.*

(E₃) *Para cada $a \geq 0$ e cada $r > 0$, o conjunto $\{f(t, x) : 0 \leq t \leq a, x \in X, \|x\|_X \leq r\}$ é relativamente compacto em X .*

(E₄) *$\frac{M}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(\xi)}{\xi} < 1$, onde M e μ são as constantes dadas em (ED).*

Então o problema (3)-(4.2.8) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

⁶ Isto é, para cada $T > 0$ as funções em $\Lambda^\odot(B_\sigma(C_b^0))$ restritas ao domínio $[0, T]$ são equicontínuas. Vemos que alguns autores chamam isso de equicontinuidade, e não de equicontinuidade local (BURTON; ZHANG, 2014).

Demonstração. Usaremos as mesmas notações que na demonstração do Teorema 4.2.6. Sejam u e v pertencentes à $C_h^0(X)$ e sejam $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ pertencentes à $C_b([0, \infty); X)$. Temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \mathcal{W} \left(\frac{\|\alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s)\|_X}{h(s)} \right) ds \\ &\quad + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, 0)\|_X ds \\ &\leq \frac{M}{\mu} \left(\mathcal{W} \left(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|u\|_h \right) \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X \right), \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

$$\int_0^t \|f(s, \tilde{u}(s)) - f(s, \tilde{v}(s))\|_X ds \leq \int_0^t \mathcal{W} \left(\frac{\|\tilde{u}(s) - \tilde{v}(s)\|_X}{h(s)} \right) ds, \quad (4.2.31)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds &\leq \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \mathcal{W} \left(\frac{\|u(s) - v(s)\|_X}{h(s)} \right) ds \\ &\leq \frac{1}{\mu} \mathcal{W}(\|u - v\|_h), \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u - \Lambda^\odot v\|_h &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \mathcal{W} \left(\frac{\|u(s) - v(s)\|_X}{h(s)} \right) ds \\ &\leq \frac{M}{\mu} \mathcal{W}(\|u - v\|_h). \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

Observamos que (4.2.30) implica que $\Lambda^\odot$ está bem definido e por outro lado, (4.2.31) implica que (C_1) do Lema 2.2.3 é satisfeita. Visto que $\mathcal{W}$ é contínua, a estimativa (4.2.32) mostra que (D_2) está assegurada. Usando novamente que $\mathcal{W}$ é contínua e (4.2.33) nós obtemos que $\Lambda^\odot$ é um mapa contínuo de $C_h^0(X)$ em $C_h^0(X)$.

Afirmamos que $\Lambda^\odot$ é um mapa completamente contínuo. Observamos que $V(t) \subseteq \overline{tco(\mathcal{K})}$, onde $\mathcal{K}$ é dado em (4.2.27). Da condição (E_3) segue que $\mathcal{K}$ é relativamente compacto, o que implica que $\overline{V(t)}$ é compacto. Agora, tomando $v = \Lambda^\odot u$, com $u \in B_r(C_h^0(X))$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v(t+s) - v(t)\|_X &\leq M \int_t^{t+s} e^{-\mu(t+s-\xi)} \left(\mathcal{W} \left(\left\| \frac{\alpha \mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha \mathcal{R}(\xi)z}{h(\xi)} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{u(\xi)}{h(\xi)} \right\|_X \right) + \|f(\xi, 0)\|_X \Big) d\xi + \int_0^t \left\| \left(\mathcal{R}(t+s-\xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{R}(t-\xi) \right) f \left(\xi, \alpha \mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha \mathcal{R}(\xi)z + u(\xi) \right) \right\|_X d\xi \\ &\leq \frac{M}{\mu} (1 - e^{-\mu s}) \left(\mathcal{W} \left(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r \right) \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X \right) + \int_0^t \left\| \left(\mathcal{R}(t+s-\xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{R}(t-\xi) \right) f \left(\xi, \alpha \mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha \mathcal{R}(\xi)z + u(\xi) \right) \right\|_X d\xi \end{aligned}$$

e aplicando (E_3) novamente, obtemos que V_b é equicontínuo. Por outro lado,

$$\frac{\|v(t)\|_X}{h(t)} \leq \frac{M}{h(t)\mu} \left(\mathcal{W}(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r) + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X \right).$$

Consequentemente,

$$\frac{v(t)}{h(t)} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ independente de } u \in B_r(C_h^0(X)).$$

Pelo Lema 2.3.2 concluímos que $\Lambda^\odot$ é completamente contínuo.

Observamos que existe $r_0 > 0$ tal que $\Lambda^\odot(B_{r_0}(C_h^0(X))) \subseteq B_{r_0}(C_h^0(X))$. De fato, se assumirmos que a afirmação é falsa, então para cada $r > 0$ podemos escolher $u^r \in B_r(C_h^0(X))$ tal que $\|\Lambda^\odot(u^r)\|_h > r$. Portanto,

$$1 < \frac{M}{\mu} \left(\frac{M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X}{r} + 1 \right) \frac{\mathcal{W}(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r)}{M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r} + \frac{M}{\mu} \frac{1}{r} \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X.$$

Sendo assim, deduzimos que $1 \leq \frac{M}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(\xi)}{\xi}$, o que contradiz nossa hipótese (E_4) . Para o resto da demonstração, faz-se uso de um argumento similar já usado na demonstração do Teorema 4.2.6. $\square$

É conhecido na literatura que o estudo de propriedades das soluções quando a perturbação da equação não é necessariamente globalmente Lipschitz é tecnicamente mais difícil. Porque, nestes casos, é crucial lidar com teoremas de ponto fixo mais gerais que o princípio de contração. Para concluir esta seção, estudaremos a existência de soluções brandas de (4.2.34)-(4.2.35) com condições não-locais como suplemento do teorema anterior. Tal aspecto será explorado por nós usando uma generalização do bem conhecido Teorema do Ponto Fixo de Darbo (ver Lema 2.3.1). Mais precisamente, consideramos

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta A u(t) - \gamma A u'(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (4.2.34)$$

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = g(u), \quad (4.2.35)$$

em que $f : [0, 1] \times X \times X \rightarrow X$ e $g : C([0, 1], X) \rightarrow X$ são funções adequadas e o operador A gera uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ tal que as funções $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ e $t \rightarrow \mathcal{R}'(t)$ são contínuas de $[0, 1]$ em $\mathcal{B}(X)$.

Observação 4.2.12. As condições não-locais podem ser aplicadas na física com melhor efeito que no problema de Cauchy usual. Por exemplo, considere o fenômeno de difusão de u , uma pequena quantidade de gás em um tubo, e assuma que a difusão é observada através da superfície do tubo. Se existe também uma pequena quantidade de gás no tempo inicial, então a medição em $u(0, x)$ da quantidade do gás nesse instante pode ser menos precisa que a medição $u(0, x) + \sum_{i=1}^k \beta_i u(T_i, x)$. Indicamos ao leitor os artigos (CHABROWSKI et al., 1984; DENG, 1993; KEREF OV, 1979; VABISHCHEVICH, 1982).

Denotamos

$$M_{\mathcal{R}} = \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)}. \quad (4.2.36)$$

A seguir, forneceremos os resultados preliminares que serão usados para demonstrar o seguinte resultado (ver Teorema 4.2.8). Sem temor a confusão, usaremos ξ para denotar a medida de não-compacidade de Kuratowski em X e $C([0, 1]; X)$. Como o nome sugere, a medida de não-compacidade dá uma ideia da “falta de compacidade” de um conjunto ou operador dado. Tal situação aparece em muitos campos: equações integrais com núcleos fortemente singulares, operadores de superposição não-lineares entre vários espaços de funções e muito mais (ver (APPELL, 2005)).

Definição 4.2.3. Uma função $u : [0, 1] \rightarrow X$ é chamada uma solução branda de (4.2.34)-(4.2.35) se satisfaz a equação integral

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)g(u) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds, \quad t \in [0, 1].$$

Para um conjunto B de funções $u : [0, 1] \rightarrow X$ introduzimos a notação

$$B(t) := \{u(t) : u \in B\} \quad \text{e} \quad \int_0^1 B(t)dt := \left\{ \int_0^1 u(t)dt : u \in B \right\}.$$

Para qualquer $M \subseteq C^1([0, 1]; X)$ limitado, considere $M' = \{x' : x \in M\} \subseteq C([0, 1]; X)$. Pode-se (ver (LAKSHMIKANTHAM; LEELA, 1981, Teorema 1.4.3)) mostrar que $\widehat{\xi}(M) = \xi(M')$ é uma medida de não-compacidade sobre $C^1([0, 1]; X)$.

Lema 4.2.1. (LIU et al., 2005) *Seja $B \subseteq C([0, 1]; X)$ limitado e equicontínuo, então $\overline{\text{co}}(B) \subseteq C([0, 1]; X)$ também é limitado e equicontínuo.*

Lema 4.2.2. (BANAS; GOEBEL, 1979; LIU et al., 2005) *Seja $B \subseteq C([0, 1]; X)$ um conjunto limitado e equicontínuo. Então $t \rightarrow \xi(B(t))$ é contínua sobre $[0, 1]$,*

$$\xi(B) = \sup\{\xi(B(s)) : s \in [0, 1]\} \quad \text{e} \quad \xi\left(\int_0^1 B(s)ds\right) \leq \int_0^1 \xi(B(s))ds.$$

$$\text{Denotamos } C_m^n = \binom{n}{m}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad \text{e} \quad S_n = \sum_{j=0}^n C_j^n \varepsilon^{n-j} \frac{h^j}{j!}.$$

Lema 4.2.3. (ZHANG; LIU; WU, 2007) *Suponha que $0 < \varepsilon < 1$, $h > 0$. Então $S_n = o\left(\frac{1}{n^s}\right)$, quando $n \rightarrow \infty$, em que $s > 1$ é um número real arbitrário.*

Para estabelecer nosso resultado (ver Teorema 4.2.8), precisamos introduzir as seguintes hipóteses:

(F₁) $g : C^1([0, 1]; X) \rightarrow X$ é contínua e compacta.

(F₂) $f : [0, 1] \times X \times X \longrightarrow X$ satisfaz as condições tipo Carathéodory, isto é, $f(\cdot, x, y)$ é fortemente mensurável para quaisquer $x, y \in X$ e $f(t, \cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow X$ é contínua q.t.p para todo $t \in [0, 1]$.

(F₃) Existe uma função $m \in L^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ e uma função contínua não-decrescente $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|f(t, x, y)\|_X \leq m(t)\Phi(\|x\|_X + \|y\|_X)$, para quaisquer $x, y \in X$ e quase todo $t \in [0, 1]$.

(F₄) Existe uma função $H \in L^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ tal que para qualquer subconjunto de funções $S \subseteq C^1([0, 1]; X)$,

$$\xi(f(t, S(t), S'(t))) \leq H(t)\xi(S'(t)),$$

para quase todo $t \in [0, 1]$.

Observação 4.2.13. Assumindo que a função g satisfaz a hipótese (F₁), é claro que g leva conjunto limitado em conjunto limitado. Por esta razão, para cada $R \geq 0$ denotaremos por g_R o número

$$g_R = \sup\{\|g(u)\| : \|u\|_{C^1([0,1];X)} \leq R\}.$$

Estamos na posição de estabelecer o resultado seguinte.

Teorema 4.2.8. *Sob as condições anteriores⁷. Se existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$\alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}} g_R + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \Phi(R) \int_0^1 m(s) ds \leq R,$$

então o problema (4.2.34)-(4.2.35) possui ao menos uma solução branda.

Demonstração. Definimos o operador $\Lambda : C^1([0, 1]; X) \longrightarrow C^1([0, 1]; X)$ pela expressão

$$\Lambda u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)g(u) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds. \quad (4.2.37)$$

Primeiro mostraremos que Λ é um mapa contínuo. Para fazer isso nós consideramos uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $C^1([0, 1]; X)$ tal que $u_n \rightarrow u$ na norma $\|\cdot\|_{C^1([0,1];X)}$. Podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \|\Lambda u_n - \Lambda u\|_{C([0,1];X)} &\leq \alpha \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|g(u_n) - g(u)\|_X + \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \\ &\quad \int_0^1 \|f(s, u_n(s), u'_n(s)) - f(s, u(s), u'(s))\|_X ds. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \|(\Lambda u_n)' - (\Lambda u)'\|_{C([0,1];X)} &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \left(\alpha \|g(u_n) - g(u)\|_X \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \|f(s, u_n(s), u'_n(s)) - f(s, u(s), u'(s))\|_X ds \right). \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

⁷ Tomamos nota de que condições semelhantes às feitas no Teorema 4.2.8 foram consideradas anteriormente na literatura por Pozo (2013, Teorema 3.2).

Segue das desigualdades (4.2.38) e (4.2.39) que

$$\begin{aligned} \|\Lambda u_n - \Lambda u\|_{C^1([0,1];X)} &\leq \alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \|g(u_n) - g(u)\|_X \\ &\quad + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^1 \|f(s, u_n(s), u'_n(s)) - f(s, u(s), u'(s))\|_X ds. \end{aligned}$$

Em seguida, visto que g é um mapa contínuo e que f satisfaz as condições Carathéodory, concluímos que

$$\|\Lambda u_n - \Lambda u\|_{C^1([0,1];X)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, para $u \in B_R(C^1([0,1];X))$,

$$\begin{aligned} \|\Lambda u\|_{C^1([0,1];X)} &\leq \alpha \left(\sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \right) \|g(u)\|_X \\ &\quad + \left(\sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \right) \\ &\quad \int_0^1 m(s) \Phi(\|u(s)\|_X + \|u'(s)\|_X) ds \\ &\leq \alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} g_R + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \Phi(R) \int_0^1 m(s) ds \leq R. \end{aligned}$$

Isto significa que $B_R(C^1([0,1];X))$ é invariante por Λ e $\Lambda(B_R(C^1([0,1];X)))$ é um conjunto limitado. Tomando $v = \Lambda u$, com $u \in B_R(C^1([0,1];X))$, da decomposição

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= \alpha(\mathcal{R}(t+s) - \mathcal{R}(t))g(u) + \int_t^{t+s} \mathcal{R}(t+s-\xi)f(\xi, u(\xi), u'(\xi))d\xi \\ &\quad + \int_0^t (\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi))f(\xi, u(\xi), u'(\xi))d\xi, \end{aligned}$$

deduzimos que $\Lambda(B_R(C^1([0,1];X)))$ é um conjunto de funções equicontínuas.

Defina $\mathcal{B} = \overline{\Lambda(B_R(C^1([0,1];X)))}$, então, pelo Lema 4.2.1, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são equicontínuos. Note também que $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é um operador contínuo e limitado. Tendo em mente as propriedades da medida de não-compacidade com o Lema 4.2.2 inferimos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \xi(\Lambda(\mathcal{B})'(t)) &\leq \alpha \xi(\mathcal{R}'(t)g(\mathcal{B})) + \xi\left(\int_0^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, \mathcal{B}(s), \mathcal{B}'(s))ds\right) \\ &\leq \alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \xi(g(\mathcal{B})) + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t \xi\left(f(s, \mathcal{B}(s), \mathcal{B}'(s))\right)ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s) \xi(\mathcal{B}'(s))ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \xi(\mathcal{B}') \int_0^t H(s)ds = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \hat{\xi}(\mathcal{B}) \int_0^t H(s)ds. \end{aligned}$$

Uma vez que $H \in L^1([0,1];\mathbb{R}^+)$, para $\delta < \frac{1}{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}$, existe $\varphi \in C([0,1];\mathbb{R}^+)$ tal que $\int_0^1 |H(s) - \varphi(s)|ds < \delta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \xi(\Lambda(\mathcal{B})'(t)) &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \hat{\xi}(\mathcal{B}) \left(\int_0^t |H(s) - \varphi(s)|ds + \int_0^t \varphi(s)ds \right) \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \hat{\xi}(\mathcal{B}) \left(\delta + \|\varphi\|_{C([0,1];\mathbb{R}^+)} t \right). \end{aligned}$$

Visto que $\Lambda(\mathcal{B})'$ é limitado e equicontínuo⁸, tomando $a = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\delta$ e $b = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\|\varphi\|_{C([0,1];\mathbb{R}^+)}$ e usando novamente o Lema 4.2.2 podemos portanto concluir que

$$\widehat{\xi}(\Lambda(\mathcal{B})) = \xi(\Lambda(\mathcal{B})') \leq (a + b)\widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Do mesmo modo, temos a estimativa:

$$\begin{aligned} \xi(\Lambda^2(\mathcal{B})'(t)) &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s) \xi(\overline{co}(\Lambda(\mathcal{B})'(s))) ds \\ &= M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s) \xi(\Lambda(\mathcal{B})'(s)) ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \widehat{\xi}(\mathcal{B}) \int_0^t H(s) (a + bs) ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \widehat{\xi}(\mathcal{B}) \left(\int_0^t |H(s) - \varphi(s)| (a + bs) ds + \int_0^t \varphi(s) (a + bs) ds \right) \\ &\leq \left(a(a + tb) + b \left(at + \frac{t^2}{2} b \right) \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Isto significa que para todo $t \in [0, 1]$ temos a estimativa

$$\xi(\Lambda^2(\mathcal{B})'(t)) \leq \left(a^2 + 2abt + \frac{(bt)^2}{2} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Além disso, uma vez que $\Lambda^2(\mathcal{B})'$ é limitado e equicontínuo, então

$$\widehat{\xi}(\Lambda^2(\mathcal{B})) = \xi(\Lambda^2(\mathcal{B})') \leq \left(a^2 + 2ab + \frac{b^2}{2} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Segue por indução⁹ que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\xi(\Lambda^n(\mathcal{B})'(t)) \leq \left(\sum_{j=0}^n C_j^n a^{n-j} \frac{(bt)^j}{j!} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}). \quad (4.2.40)$$

⁸ A equicontinuidade do conjunto $\Lambda(\mathcal{B})'$ é uma consequência da seguinte decomposição

$$\begin{aligned} (\Lambda u)'(t + s) - (\Lambda u)'(t) &= \alpha(\mathcal{R}'(t + s) - \mathcal{R}'(t))g(u) \\ &\quad + \int_t^{t+s} \mathcal{R}'(t + s - \xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi \\ &\quad + \int_0^t (\mathcal{R}'(t + s - \xi) - \mathcal{R}'(t - \xi)) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi, \quad u \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

⁹ Para lidar com isso, supomos que (4.2.40) é satisfeita. Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \xi(\Lambda^{n+1}(\mathcal{B})'(t)) &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s) \xi(\Lambda^n(\mathcal{B})'(s)) ds \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^n C_j^n a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}) + \left(\sum_{j=1}^{n+1} C_{j+1}^n a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}) \\ &= \left(a^{n+1} + \sum_{j=1}^n (C_{j-1}^n + C_j^n) a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!} + \frac{(bt)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n+1} C_j^{n+1} a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto de funções $\Lambda^n(\mathcal{B})'$ é equicontínuo, logo

$$\widehat{\xi}(\Lambda^n(\mathcal{B})) \leq \left(\sum_{j=0}^n C_j^n a^{n-j} \frac{b^j}{j!} \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Ademais, como $0 < a < 1$ e $b > 0$, segue do Lema 4.2.3 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=0}^{n_0} C_j^{n_0} a^{n_0-j} \frac{b^j}{j!} = r < 1$. Por conseguinte,

$$\widehat{\xi}(\Lambda^{n_0}(\mathcal{B})) \leq r \widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Segue do Lema 2.3.1 que Λ possui um ponto fixo em $\mathcal{B}$. Este ponto fixo é uma solução branda do problema (4.2.34)-(4.2.35). $\square$

Observação 4.2.14. Sob as condições do Teorema 4.2.8, apenas substituindo (F_4) pela condição:

$$(F_4)^* \xi(f(t, S(t), S'(t))) \leq v \xi(S'(t)) \text{ para qualquer subconjunto de funções } S \subseteq C^1([0, 1]; X)$$

e para quase todo $t \in [0, 1]$, com $0 < v < \frac{1}{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}$.

Então o conjunto de todas as soluções brandas do problema (4.2.34)-(4.2.35) é compacto. Com efeito, isto é uma consequência de (MARTIN, 1976, Teorema 3.2).

5 PROPRIEDADE DE KNESER PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Neste capítulo, iremos estudar as propriedades topológicas do conjunto das soluções brandas para a equação (3)

5.1 Preliminares

Com o objetivo de estabelecer apropriadamente as nossas definições, inicialmente vamos resolver a equação (3) com condições iniciais $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ e $u''(0) = z$ numa situação particularmente interessante a modo de ilustração.

Consideramos as vibrações de uma barra metálica no domínio $[0, \pi]$, com extremos fixos. Neste caso, defina o espaço de trabalho como sendo $X = L^2([0, \pi])$ e defina o operador

$$Ax(\zeta) = x''(\zeta)$$

com domínio $D(A) = \{x \in L^2([0, \pi]) : x'' \in L^2([0, \pi]), x(0) = x(\pi) = 0\}$. Usando método de separação de variáveis,

$$u(t, \zeta) = T(t)P(\zeta)$$

e, substituindo na equação homogênea (3), obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) \\ &= \alpha (T(t)P(\zeta))''' + (T(t)P(\zeta))'' - \beta AT(t)P(\zeta) - \gamma A(T(t)P(\zeta))' \\ &= \alpha T'''(t)P(\zeta) + T''(t)P(\zeta) - \beta T(t)AP(\zeta) - \gamma T'(t)AP(\zeta). \end{aligned}$$

E assim,

$$\alpha T'''(t)P(\zeta) + T''(t)P(\zeta) - \beta T(t)P''(\zeta) - \gamma T'(t)P''(\zeta) = 0,$$

Com isto,

$$[\alpha T'''(t) + T''(t)] P(\zeta) - [\beta T(t) - \gamma T'(t)] P''(\zeta) = 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{\alpha T'''(t) + T''(t)}{T(t)} = \left(\beta + \gamma \frac{T'(t)}{T(t)} \right) \frac{P''(\zeta)}{P(\zeta)}$$

e

$$\frac{\alpha T'''(t) + T''(t)}{\beta T(t) + \gamma T'(t)} = \frac{P''(\zeta)}{P(\zeta)} = -\lambda.$$

De $P''(\zeta) = -\lambda P(\zeta)$ e considerando a solução $P(\zeta) = e^{k\zeta}$ temos:

$$k^2 e^{k\zeta} + \lambda e^{k\zeta} = e^{k\zeta} (k^2 + \lambda),$$

como $e^{k\zeta} \neq 0, \forall \zeta \in D(A)$, então $k = -\sqrt{\lambda}i$ ou $k = \sqrt{\lambda}i$. Se $\lambda \neq 0$, temos

$$P(\zeta) = d_1 e^{\sqrt{\lambda}i\zeta} + d_2 e^{-\sqrt{\lambda}i\zeta},$$

de $P(0) = P(\pi) = 0$ segue-se que $d_1 + d_2 = 0$, e além disso, temos

$$\begin{aligned} 0 &= d_1 e^{\sqrt{\lambda}i\pi} + d_2 e^{-\sqrt{\lambda}i\pi} \\ &= d_1 e^{\sqrt{\lambda}i\pi} - d_1 e^{-\sqrt{\lambda}i\pi} \\ &= d_1 (e^{\sqrt{\lambda}i\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}i\pi}), \end{aligned}$$

se e somente se, $e^{\sqrt{\lambda}i\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}i\pi} = 0$, ou seja, $e^{2\sqrt{\lambda}i\pi} = 1$, com isto

$$e^{2\sqrt{\lambda}i\pi} = \cos(2\pi\sqrt{\lambda}) + i \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 1,$$

então

$$\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) = 1 \quad \text{e} \quad \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0,$$

daí, $2\pi\sqrt{\lambda} = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$. Portanto $\lambda = n^2$ e $P_n(\zeta) = (d_1 + d_2) \cos(n\zeta) + (d_2 - d_1)i \sin(n\zeta)$. Como $d_1 + d_2 = 0$ segue-se $d_2 - d_1 = 2d_2$. Com isto concluímos que

$$P_n(\zeta) = 2d_2 i \sin(n\zeta).$$

Além disso,

$$\alpha T'''(t) + T''(t) + \gamma n^2 T'(t) + \beta n^2 T(t) = 0,$$

que é uma equação de terceira ordem com coeficientes constantes. Considerando $T(t) = e^{st}$, obtemos $\alpha s^3 e^{st} + s^2 e^{st} + \beta n^2 e^{st} + \gamma n^2 e^{st} = 0$, ou seja $(\alpha s^3 + s^2 + \beta n^2 + \gamma n^2) e^{st} = 0$. Como $e^{st} \neq 0, \forall t \geq 0$, temos

$$\alpha s^3 + s^2 + \gamma n^2 s + \beta n^2 = 0,$$

cujas soluções são $-r_n, z_n, \bar{z}_n$, onde $r \in \mathbb{R}$. Então de

$$s^3 + \frac{1}{\alpha} s^2 + \frac{\gamma n^2}{\alpha} s + \frac{\beta n^2}{\alpha} = (s + r_n)(s - z_n)(s - \bar{z}_n) = (s + r_n)(s^2 - 2\operatorname{Re}(z_n)s + |z_n|^2),$$

com $z_n = a_n + ib_n$, onde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$r_n - 2a_n = \frac{1}{\alpha}, \tag{5.1.1a}$$

$$-2a_n r_n + |z_n|^2 = \frac{\gamma n^2}{\alpha}, \tag{5.1.1b}$$

$$r_n |z_n|^2 = \frac{\beta n^2}{\alpha}. \tag{5.1.1c}$$

Dividiremos em dois casos, primeiramente analisemos para o caso $a_n \geq 0$. Logo, de (5.1.1a) tem-se

$$a_n = \frac{1}{2} \left(r_n - \frac{1}{\alpha} \right) \geq 0,$$

ou seja

$$r_n \geq \frac{1}{\alpha} > 0, \quad (5.1.2)$$

pois $\alpha > 0$ e de (5.1.1b) temos

$$|z_n|^2 = \frac{\gamma n^2}{\alpha} + 2a_n r_n. \quad (5.1.3)$$

Logo, substituindo a equação (5.1.3) em (5.1.1c), segue-se

$$r_n |z_n|^2 = \frac{\beta n^2}{\alpha} = 2a_n r_n^2 + \frac{\gamma n^2}{\alpha} r_n.$$

Daí, $\frac{\beta n^2}{\alpha} \geq \frac{\gamma n^2}{\alpha} r_n$, ou seja $r_n \leq \frac{\beta}{\gamma}$ com isto, chegamos à desigualdade

$$\frac{1}{\alpha} \leq r_n < \frac{\beta}{\alpha}.$$

Além disso, substituindo em (5.1.1c) temos

$$|z_n|^2 = \frac{\beta n^2}{\alpha r_n} \geq \frac{\beta n^2}{\alpha \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)} = \frac{\gamma n^2}{\alpha}.$$

Logo,

$$b_n^2 \geq \frac{\gamma n^2}{\alpha} - a_n^2.$$

Agora suponhamos que $a < 0$, de (5.1.1a) temos $r_n = \frac{1}{\alpha} + 2a_n$, daí

$$r_n \geq \frac{1}{\alpha}, \quad (5.1.4)$$

de (5.1.1b), $|z_n|^2 = \frac{\gamma n^2}{\alpha} + 2a_n r_n \leq \frac{\gamma n^2}{\alpha}$, daí substituindo em (5.1.1c)

$$r_n |z_n|^2 = \frac{\beta n^2}{\alpha} \leq r_n \left(\frac{\gamma n^2}{\alpha} \right),$$

ou seja,

$$\frac{\beta}{\gamma} \leq r, \quad (5.1.5)$$

de (5.1.4) e (5.1.5) temos

$$\frac{\beta}{\gamma} \leq r_n \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Assumindo $\alpha\beta \leq \gamma$, obtemos¹ que

$$0 \leq a_n^2 \leq \frac{1}{4\alpha^2},$$

¹ Note que $\frac{1}{2}(\frac{\beta}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}) < a_n < 0$ então $\frac{-\gamma}{\alpha\gamma} = -\frac{1}{\alpha} < a_n < 0$

e

$$b_n^2 \geq \frac{\gamma}{\alpha} n^2 - a_n^2 \geq \frac{\gamma}{\alpha} n^2 - \frac{1}{4\alpha^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tendo em vista que as raízes são $-r_n$, z_n e $\bar{z}_n$ temos

$$\begin{aligned} T_n(t) &= d_3 e^{-r_n t} + d_4 e^{z_n t} + d_5 e^{\bar{z}_n t} \\ &= d_3 e^{-r_n t} + e^{a_n t} (d_4 e^{b_n i t} + d_5 e^{-b_n i t}). \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Note que

$$d_4 e^{b_n i t} = d_4 (\cos(b_n t) + i \sin(b_n t)) \quad (5.1.7a)$$

$$d_5 e^{-b_n i t} = d_5 (\cos(b_n t) - i \sin(b_n t)). \quad (5.1.7b)$$

De (5.1.7a) e (5.1.7b) vem:

$$d_4 e^{b_n i t} + d_5 e^{-b_n i t} = (d_4 + d_5) \cos(b_n t) + (d_5 - d_4) i \sin(b_n t). \quad (5.1.8)$$

Substituindo (5.1.8) em (5.1.6) teremos que:

$$T_n(t) = d_3 e^{-r_n t} + e^{a_n t} ((d_4 + d_5) \cos(b_n t) + (d_5 - d_4) i \sin(b_n t)).$$

Daí,

$$\begin{aligned} u(t, \zeta) &= T_n(t) P_n(\zeta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [d_3 e^{-r_n t} + e^{a_n t} ((d_4 + d_5) \cos(n\zeta) + (d_5 - d_4) i \sin(n\zeta))] 2d_2 i \sin(n\zeta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [2d_2 d_3 i e^{-r_n t} + e^{a_n t} (2d_2 (d_4 + d_5) i \cos(n\zeta) - 2d_2 (d_5 - d_4) \sin(n\zeta))] \sin(n\zeta). \end{aligned}$$

Como $u(0, \zeta) = 0$, então

$$u(0, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} [2d_2 d_3 i + 2d_2 (d_4 + d_5) i] \sin(n\zeta),$$

se e somente se,

$$2d_2 d_3 = -2d_2 (d_4 + d_5).$$

Fazendo $A_n = d_2 d_3 i$ e $B_n = 2d_2 (d_4 + d_5) i$, obtemos a solução geral da equação

$$u(t, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-r_n t} + [B_n \cos(b_n t) + C_n \sin(b_n t)] e^{a_n t}) \sin(n\zeta).$$

Lembrando $A_n + B_n = 0$, assim

$$u(t, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-r_n t} + [-A_n \cos(b_n t) + C_n \sin(b_n t)] e^{a_n t}) \sin(n\zeta). \quad (5.1.9)$$

Dai,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(A_n e^{-r_n t} + [-A_n \cos(b_n t) + C_n \sin(b_n t)] e^{a_n t} \right) \sin(n\zeta) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n r_n e^{-r_n t} - A(a_n e^{a_n t} \cos(b_n t) - b_n e^{b_n t} \sin(b_n t)) \right. \\
&\quad \left. + C_n(a_n e^{a_n t} \sin(b_n t) + b_n e^{a_n t} \cos(b_n t)) \right] \sin(n\zeta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-r_n A_n e^{-r_n t} + (b_n C_n - a_n A_n) e^{a_n t} \cos(b_n t) + (b_n A_n + a_n C_n) e^{a_n t} \sin(b_n t) \right] \sin(n\zeta).
\end{aligned}$$

Como,

$$u'(0, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} [-r_n A_n + (b_n C_n - a_n A_n)] \sin(n\zeta),$$

se e somente se,

$$-r_n - a_n A_n + b_n C_n = -(r_n + a_n) A_n + b_n C_n = 0.$$

Logo

$$C_n = \frac{(r_n + a_n) A_n}{b_n}. \quad (5.1.10)$$

Novamente calculamos a derivada parcial em relação de t a (5.1.9), isto é

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(t, \zeta)}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n^2 A_n e^{-r_n t} + (b_n C_n - a_n A_n) (a_n e^{a_n t} \cos(b_n t) - b_n e^{a_n t} \sin(b_n t)) \right. \\
&\quad \left. + (b_n A_n + a_n C_n) (a_n e^{a_n t} \sin(b_n t) + b_n e^{a_n t} \cos(b_n t)) \right) \sin(n\zeta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n^2 A_n e^{-r_n t} + [(b_n C_n - a_n A_n) a_n + (b_n A_n + a_n C_n) b_n] e^{a_n t} \cos(b_n t) \right. \\
&\quad \left. + [(b_n A_n + a_n C_n) a_n - (b_n C_n - a_n A_n) b_n] e^{a_n t} \sin(b_n t) \right) \sin(n\zeta).
\end{aligned}$$

Pela condição inicial $u''(0, \zeta) = 0$ temos

$$u''(0, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} [r_n^2 A_n + (b_n C_n - a_n A_n) a_n + (b_n A_n + a_n C_n) b_n] \sin(n\zeta).$$

Substituindo (5.1.10) vem:

$$\begin{aligned}
u''(0, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [r_n^2 A_n + a_n(r_n + a_n) A_n - a_n^2 A_n + b_n^2 A_n + a_n(r_n + a_n) A_n] \sin(n\zeta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [r_n^2 + 2a_n r_n + a_n^2 + b_n^2] A_n \sin(n\zeta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [(r_n + a_n)^2 + b_n^2] A_n \sin(n\zeta) \\
&= z(\zeta). \quad (5.1.11)
\end{aligned}$$

Usando agora a série de Fourier de $z(\cdot)$ no intervalo $[0, \pi]$, nós obtemos os coeficientes A_n .

Juntando tudo isso,

$$\begin{aligned} R(t)z &= \frac{1}{\alpha} u(t, \zeta) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [-e^{-r_n t} + (\cos(b_n t) - \frac{r_n + a_n}{b_n} \operatorname{sen}(b_n t)) e^{a_n t}] \operatorname{sen}(n\zeta) \end{aligned}$$

é a expressão para o resolvente do problema (3).

Observamos que com as hipóteses $\alpha\beta \leq \gamma$ nós obtemos uma resolvente assintoticamente estável. No entanto, se $\alpha\beta > \gamma$, obtemos uma resolvente que é limitada exponencialmente mas não é assintoticamente estável.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma > 0$ números reais. Seguindo a notação de (DE ANDRADE; LIZAMA, 2011) considerando (2.1.7) e (2.1.8).

Para dar uma definição consistente para a solução branda da equação (3) com condições iniciais

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = y, \quad u''(0) = z. \quad (5.1.12)$$

baseada na abordagem de operadores, definimos a família (α, β, γ) -regularizada (ver Definição 2.1.1).

5.2 Propriedade de Kneser

Daqui em diante denotaremos por I o intervalo fechado $[0, 1]$. Para estudarmos nosso problema, iremos supor inicialmente algumas hipoteses sobre a função f .

($\mathcal{C}_{car}$). A função $f : I \times X \longrightarrow X$ satisfaz as seguinte condições de Carathéodory:

- (i) $f(t, \cdot) : X \longrightarrow X$ é contínua q.t.p. $t \in I$;
- (ii) Para cada $x \in X$, a função $f(\cdot, x) : I \longrightarrow X$ é fortemente mensurável.

Com isso podemos mostrar o seguinte resultado de existência e compacidade.

Teorema 5.2.1. *Suponha que o operador A gera uma família (α, β, γ) -regularizada $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X tais que as funções $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ e $t \rightarrow \mathcal{R}'(t)$ são contínuas de I em $\mathcal{B}(X)$. Assuma que a condição ($\mathcal{C}_{car}$) é válida e além disso que as seguintes condições são satisfeitas.*

(Kn-1) *Para cada $R > 0$ existe uma função positiva e integrável $\gamma_R \in L^1(I)$ tal que*

$$\sup\{\|f(t, x)\|_X : \|x\|_X \leq R\} \leq \gamma_R(t), \text{ q.t.p. } t \in I.$$

(Kn-2) Para cada $0 \leq t \leq 1$ e $R > 0$ o conjunto $\{\mathcal{R}(t)f(s, x) : 0 \leq s \leq 1, \|x\|_X \leq R\}$ é relativamente compacto.

(Kn-3) $\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}{R} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds < 1$, onde $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$ é dada por

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = \sup\{\|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} : t \in [0, 1]\} + \sup\{\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} : t \in [0, 1]\}. \quad (5.2.13)$$

Então, existe uma solução branda para (3)-(5.1.12) em I . Além disso, se a seguinte condição é satisfeita:

(Kn-4) $\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}{R} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds < 1$,

então o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (3)-(5.1.12) é compacto em $C(I; X)$.

Demonstração. Começamos definindo o mapa $\Lambda : C(I; X) \rightarrow C(I; X)$ por (3.2.14). Então Λ é bem definido e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos que o mesmo é contínuo. Afirmamos que existe $\rho > 0$ tal que $\Lambda : B_\rho(C(I; X)) \rightarrow B_\rho(C(I; X))$, onde $B_\rho(C(I; X))$ são as bolas fechadas em $C(I; X)$ de raio ρ e centradas na origem. Para isso, assumiremos que tal afirmação é falsa, então para cada $\rho > 0$ podemos escolher $u^\rho \in B_\rho(C(I; X))$ tal que $\|\Lambda u^\rho\|_{C(I; X)} > \rho$. Então,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}{\rho} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}{\rho} \int_0^t (t-s)\gamma_\rho(s)ds \\ &\leq \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}{\rho} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}{\rho} \int_0^1 (1-s)\gamma_\rho(s)ds. \end{aligned}$$

O que implica

$$1 \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}{R} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds,$$

e esta desigualdade contradiz a hipótese **(Kn-3)**. A seguir, iremos mostrar que o mapa Λ é completamente contínuo.

Pelo teorema de Arzelà-Ascoli é suficiente mostrarmos que para cada $R \geq 0$ o conjunto $\{\Lambda_0(u)(t) : \|u\|_{C(I; X)} \leq R\}$ é relativamente compacto em X para todo $0 \leq t \leq 1$ e o conjunto $\{\Lambda_0(u) : \|u\|_{C(I; X)} \leq R\}$ é equicontínuo, onde

$$\Lambda_0(u)(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Começamos com a primeira afirmação. Seja ε um número real positivo. Como $\mathcal{R}(\cdot)$ é contínuo na norma dos operadores, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{R}(s) - \mathcal{R}(s')\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\xi)d\xi \right)^{-1}, \quad |s - s'| < \delta. \quad (5.2.14)$$

Selecioneamos então $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ tal que $|s_i - s_{i-1}| \leq \delta$. Escrevemos então Λ_0 como segue

$$\begin{aligned} \Lambda_0(u)(t) &= \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} (\mathcal{R}(t-s) - \mathcal{R}(t-s_{i-1}))f(s, u(s))ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathcal{R}(t-s_{i-1})f(s, u(s))ds. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Começemos notando que o primeiro termo do lado direito (5.2.15) é dominada por ε , pois

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \|\mathcal{R}(t-s) - \mathcal{R}(t-s_{i-1})\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, u(s))\|_X ds &\leq \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \gamma_R(s) ds \\ &= \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \int_0^t \gamma_R(s) ds \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pela condição **(Kn-2)** temos que o segundo termo do lado direito de (5.2.15) está contido em um conjunto compacto que não depende da função u , que verificamos aplicando o teorema do valor médio para integral de Bochner como segue²

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathcal{R}(t-s_{i-1})f(s, u(s))ds \in (s_i - s_{i-1}) \overline{co(\mathcal{R}(t-s_i)f([0, t] \times B_R(C(I; X)))} := K_i.$$

O que nos leva imediatamente ao seguinte

$$\Lambda_0(B_R(C(I; X)))(t) \subset K + B_\varepsilon(X), \quad (5.2.16)$$

onde $K = K_1 + \dots + K_n$. Como a escolha do $\varepsilon > 0$ foi arbitrária, temos que $\Lambda_0(B_R(C(I; X)))(t)$ é relativamente compacto. Veremos inicialmente que o conjunto $\{\Lambda_0(u) : \|u\| \leq R\}$ é equicontínuo para $t = 0$. De fato,

$$\|\Lambda_0(u)(h)\| \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^h \gamma_R(s) ds,$$

que converge para zero, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (Ver Teorema 2.0.1). Seja agora $t > 0$, $t+h > 0$ com $t+h \in I$. Então

$$\begin{aligned} \|\Lambda_0(u)(t+h) - \Lambda(u)(t)\| &\leq \left\| \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s, u(s))ds \right\| \\ &\quad + \int_0^t \|\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)\| \gamma_R(s) ds \\ &= \left\| \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s, u(s))ds \right\| \\ &\quad + \int_{t-2\delta}^t \|\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)\| \gamma_R(s) ds \\ &\quad + \int_0^{t-2\delta} \|\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)\| \gamma_R(s) ds, \end{aligned}$$

² Por **(Kn-2)**, os conjuntos K_i são compactos.

onde $\delta > 0$, $2\delta < t$ e $|h| < \delta$. Seja $\varepsilon > 0$. Com o mesmo argumento inicial, podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s)f(s, u(s))ds \right\| + \int_{t-2\delta}^t \|\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)\| \gamma_R(s)ds \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Adicionalmente, para o termo remanescente $t-s \geq 2\delta^3$ e $t+h-s \geq \delta$. Como $\mathcal{R} : [\delta, 1] \rightarrow \mathcal{B}(X)$ é uniformemente contínua para a norma de operadores, existe δ' tal que $|h| \leq \delta'$ implica que

$$\|\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)\| \leq \varepsilon'$$

onde $\varepsilon' \int_0^t \gamma_R(s)ds \leq \frac{\varepsilon}{3}$. E assim, obtemos

$$\|\Lambda_0(u)(t+h) - \Lambda(u)(t)\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon' \int_0^t \gamma_R(s)ds \leq \varepsilon$$

o que completa a prova de que o conjunto $\{\Lambda_0(u) : \|u\| \leq R\}$ é equicontínuo.

Finalmente, utilizando o teorema do ponto fixo de Schauder temos que Λ tem um ponto fixo em $B_\rho(C(I; X))$. Além disso, a continuidade do mapa Λ implica que o conjunto $\mathcal{S}$ das soluções brandas é fechado.

Assumindo agora que a condição **(Kn-4)** é válida, temos que o conjunto $\mathcal{S}$ é limitado. De fato, se assumimos que $\mathcal{S}$ não é limitado, então existe uma sequência de funções $u_k \in \mathcal{S}$ tal que $R_k = \|u_k\|_{C(I; X)} \geq k$. Então, teríamos

$$\|u_k(t)\|_X = \|\Lambda(u_k)(t)\|_X \leq M_{\mathcal{R}'}((\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M_{\mathcal{R}'} \int_0^1 (1-s)\gamma_{R_k}(s)ds,$$

o que implicaria

$$1 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{M_{\mathcal{R}'}}{R_k} \int_0^1 (1-s)\gamma_{R_k}(s)ds,$$

que por **(Kn-4)** é um absurdo.

Finalmente, utilizando que Λ é completamente contínuo, temos que $\mathcal{S}$ é compacto. $\square$

Observação 5.2.1. Resultados semelhantes foram obtidos para o caso do problema abstrato de Cauchy de segunda ordem e para o caso de equações diferenciais funcionais com retardo, em (HENRÍQUEZ; CASTILLO, 2005, Teorema 2.2) e (CARDOSO; CUEVAS, 2009, Teorema 1.4) respectivamente.

A seguir mostraremos um lema que nos será útil na demonstração do próximo resultado.

³ Pois $t > 2\delta$ e como $0 \leq s \leq t - 2\delta$ obtemos $2\delta \leq t - s$.

Lema 5.2.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $K \subset C(I; X)$ um conjunto relativamente compacto. Então $\{u(t) : u \in K, t \in I\}$ é relativamente compacto em X .*

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$, existem uma quantidade finita $u_1, \dots, u_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(u_i, C(I; X))$. Então

$$\{u(t) : u \in K, t \in I\} \subset \bigcup_{i=1}^n \{u_i(t) : t \in I\} + B_\varepsilon(0, X).$$

□

Como consequência direta do lema, o conjunto

$$\mathcal{V} = \left\{ \int_0^t R(t-s)f(s, u(s))ds : t \in I, u \in L^\infty(I; X), \|u\|_\infty \leq R \right\} \subset X$$

é relativamente compacto.

Com o intuito de mostrar que o conjunto das soluções brandas para o problema (3)-(5.1.12) é conexo, utilizaremos o seguinte resultado, o qual apenas enunciaremos.

Lema 5.2.2. (HENRÍQUEZ; CASTILLO, 2005) *Seja $\mathcal{T} : C(I; X) \longrightarrow C(I; X)$ um mapa contínuo e $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{T}$. Assuma que existe um conjunto compacto $K \subset C(I; X)$ e que para cada $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \subset K$ com as seguintes propriedades:*

- (i) *Os conjuntos K_ε são conexos;*
- (ii) *$d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $x \in \mathcal{S}$;*
- (iii) *$\|y - \mathcal{T}y\|_\infty < \delta(\varepsilon)$, para todo $y \in K_\varepsilon$, onde $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ com $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Então, $\mathcal{S}$ é conexo.

No resultado seguinte, denotaremos por $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções brandas para o problema (3)-(5.1.12).

Teorema 5.2.2. *Suponha que A seja o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X tais que as funções $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ e $t \rightarrow \mathcal{R}'(t)$ são contínuas de I em $\mathcal{B}(X)$, assuma que f é uma função contínua e que as condições (Kn-1) e (Kn-2) são válidas. Se, além disso as seguintes condições são satisfeitas:*

(Kn-5) *O conjunto $\mathcal{S}$ é compacto.*

(Kn-6) $3M_{\mathcal{R}'} \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds < 1.$

Então, $\mathcal{S}$ é conexo.

Demonstração. Começaremos abreviando nossa notação, escrevendo $h(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z$. Da hipótese **(Kn-5)** e **(Kn-6)**, podemos selecionar uma constante $R > 0$ grande o suficiente, tal que $\|x\|_\infty \leq R$ para todo $x \in \mathcal{S}$ e

$$M_{\mathcal{R}'} \left((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X + 3 \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds \right) < R. \quad (5.2.17)$$

Seja $\mathcal{V}$ o conjunto construído no Lema 5.2.1, com R como em (5.2.17). Sem perda de generalidade, assumimos que $\mathcal{V}$ é compacto e absolutamente convexo⁴. Tomando $\mathcal{U} = 2\mathcal{V}$, $\mathcal{U}_1 = 3\mathcal{V}$ e indicando $N_1 = 2M_{\mathcal{R}'} \int_0^1 \gamma_R(s)ds$ onde R é como em (5.2.17). A partir desse momento iremos dividir a demonstração em vários passos.

Passo 1. Nessa primeira parte vamos construir os conjunto K e K_ε . Para uma divisão d do intervalo I formado pelos pontos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, escolhemos $u_k \in \mathcal{U}$, $k = 1, \dots, n$ tal que $\sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1})u_k \in \mathcal{U}$, $\|u_i\|_X \leq N_1$ e

$$\left\| \sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1})u_k \right\|_X \leq 2M_{\mathcal{R}'} \int_0^1 (1-s)\gamma_R(s)ds,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Consideremos as função $z(\cdot)$ dada por

$$z(t) = h(t) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, 0)ds + tu_1, \text{ for } 0 \leq t \leq t_1.$$

Para $t_1 < t \leq t_2$,

$$z(t) = h(t) + \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t-s)f(s, 0)ds + t_1u_1 + \int_{t_1}^t \mathcal{R}(t-s)f(s, z(t_1))ds + (t - t_1)u_2.$$

No caso geral, para $t_{i-1} < t \leq t_i$, com $i = 1, \dots, n$ definimos

$$\begin{aligned} z(t) &= h(t) + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathcal{R}(t-s)f(s, z(t_{k-1}))ds + (t_k - t_{k-1})u_k \right) \\ &\quad + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{R}(t-s)f(s, z(t_{i-1}))ds + (t - t_{i-1})u_i. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

A função z assim definida é uma função contínua. Em seguida, para um ponto fixo $z(\cdot)$ dado por (5.2.18) denotaremos por $y(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ as funções escadas definidas por

$$y(0) = 0, \quad \varphi(0) = u_1, \quad y(t) = z(t_{k-1}) \text{ e } \varphi(t) = u_k,$$

para $t_{k-1} < t \leq t_k$ e $k = 1, \dots, n$. Então, podemos reescrever a função $z(\cdot)$ como

$$z(t) = h(t) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, y(s))ds + \int_0^t \varphi(s)ds. \quad (5.2.19)$$

⁴ Podemos assumir isso pois, se $\mathcal{S}$ é compacto então usando (BERBERIAN, 1974, (17.16)) temos que o o envoltório balanceado de $\mathcal{S}$, $bal(\mathcal{S})$, é compacto. Usando agora (MARTIN, 1976, Corollary 5.1) temos que a envoltória convexa de $bal(\mathcal{S})$, $co(bal(\mathcal{S}))$, é compacto. E notamos que (BERBERIAN, 1974, (25.28)) implica que a envoltória convexa absoluta de $\mathcal{S}$, $abco(\mathcal{S})$, coincide com $co(bal(\mathcal{S}))$ então, $abco(\mathcal{S})$ é um conjunto compacto absolutamente convexo.

Além disso, para simplificar mais nossa notação, escrevemos $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$. Mostraremos que $\|z(t)\|_X \leq R$, para $0 \leq t \leq 1$, independentemente da divisão d e da escolha dos pontos u_i . De (5.2.17) obtemos facilmente que $\|z(t)\|_X \leq R$ para $0 \leq t \leq t_1$ ⁵. Assumindo agora que essa propriedade é válida para $[0, t_{i-1}]$ mostraremos que a mesma também é válida para $t_{i-1} < t \leq t_i$. De fato, usando que $\Phi(t)$ é uma combinação convexa de $\Phi(t_{i-1})$ e $\Phi(t_i)$ ⁶. Obtemos então,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_X &\leq \|h(t)\|_X + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, z(t_{k-1}))\|_X ds \\
&\quad + \int_{t_{i-1}}^t \|\mathcal{R}(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|f(s, z(t_{i-1}))\|_X ds + \|\Phi(t)\|_X \\
&\leq \|h\|_\infty + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t-s) \gamma_R(s) ds + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_{t_{i-1}}^t (t-s) \gamma_R(s) ds \\
&\quad + \left(1 - \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right) \left\| \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) u_k \right\|_X + \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \left\| \sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1}) u_k \right\|_X \\
&\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} ((\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t (t-s) \gamma_R(s) ds \\
&\quad + 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^1 (1-s) \gamma_R(s) ds \leq R,
\end{aligned}$$

que era o que queríamos mostrar.

Introduzimos o conjunto $K_0 \subset C(I; X)$ formado pelas funções contínuas ζ tal que $\zeta(t) \in \mathcal{U}_1$ para todo $t \in I$ e satisfazem uma condição de equicontinuidade, isto é, que exista uma função Ω , tal que $\Omega(\delta) \rightarrow 0$, quando $\delta \rightarrow 0^+$, e

$$\sup_{t \in [0,1], |h| \leq \delta} |\zeta(t+h) - \zeta(t)| \leq \Omega(\delta), \text{ para todo } \zeta(t) \in \mathcal{U}_1.$$

Do teorema de Arzelà-Ascoli segue que K_0 é compacto. Tomando $K = h + K_0$ temos que K também é compacto.

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Sem perda de generalidade, podemos assumir

$$\varepsilon \leq 4M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^1 (1-s) \gamma_R(s) ds$$

⁵ Para $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_X &\leq \|h\|_\infty + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t (t-s) \gamma_R(s) ds + 2t_1 M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^1 (1-s) \gamma_R(s) ds \\
&\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \left((\alpha+1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X + 3 \int_0^1 (1-s) \gamma_R(s) ds \right) \leq R.
\end{aligned}$$

⁶ Basta observarmos que para $t_{i-1} < t \leq t_i$ temos

$$\Phi(t) = \left(1 - \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right) \Phi(t_{i-1}) + \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \Phi(t_i).$$

e tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}$. Usando a compacidade de $\mathcal{S}$ e K assim como a continuidade de f , podemos obter $0 < \delta_1 \leq 2\varepsilon$ tal que

$$\|f(s, w) - f(s, w')\|_X \leq \varepsilon_1 \quad (5.2.20)$$

para todo $s \in I$ e para todo $w, w' \in (K \cup \mathcal{S})(I)$ tal que $\|w - w'\|_X \leq \delta_1$. Similarmente, como $K \cup \mathcal{S}$ é um conjunto compacto em $C(I; X)$, então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|x(t) - x(s)\|_X \leq \frac{\delta_1}{4}, \quad (5.2.21)$$

para todo $x \in K \cup \mathcal{S}$ e $t, s \in I$ tal que $|t - s| \leq \delta_2$.

Escolhamos n tal que $\frac{1}{n} < \min\{\delta_2, \sqrt{\frac{\delta_1}{2\varepsilon}}\}$. Em seguida consideremos a divisão d definida pelos pontos $t_i = \frac{i}{n}$, para $i = 0, 1, \dots, n$. Tomemos K_ε como o conjunto formado pelas funções $z = z_u$ definida por (5.2.18) onde $u = (u_1, \dots, u_n)$ e os pontos $u_1, \dots, u_n$ são escolhidos de tal forma que $u \in Z_\varepsilon$, onde Z_ε é o conjunto formado por todo

$$u = (u_1, \dots, u_n) \in (2n\mathcal{U} \cap B_{N_1}(X))^n \text{ tal que } \sum_{k=1}^i u_k \in n\mathcal{U} \text{ e } \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^i u_k \right\|_X \leq \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_i^2 \varepsilon_1,$$

para todo $i = 1, \dots, n$ ⁷. Por outro lado, Z_ε é convexo e as funções $z_u \in K_\varepsilon$ dependem continuamente⁸ da escolha de $u = (u_1, \dots, u_n) \in Z_\varepsilon$, então o conjunto K_ε é conexo.

Passo 2. Nesse passo mostraremos que $K_\varepsilon \subset K$, para todo $\varepsilon > 0$. De (5.2.18) e da nossa definição de K , se denotarmos $\tilde{z} = z - u_{hom}$, devemos provar que $\tilde{z} \in K_0$. Como $\Phi(t_i) \in \mathcal{U}$ para todo $i = 1, \dots, n$, então $\Phi(t) \in \mathcal{U}$ para todo $t \in I$, pois $\mathcal{U}$ é absolutamente convexo. Notemos que as funções escadas $y(\cdot)$ são tais que $y \in L^\infty(I; X)$ e $\|y\| \leq R$. Então, da nossa definição de $z(\cdot)$ e pelo Lema 5.2.1, obtemos $\tilde{z}(t) \in \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{U}_1$, para todo $z \in K_\varepsilon$ e $t \in I$. Resta mostrarmos que as funções $\tilde{z}$, para $z \in K_\varepsilon$, satisfazem a condição de equicontinuidade. Tomando $t, t+h \in I$, $h \geq 0$ tal que $t+h \in I$, usando (4.12),

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h) &= \int_0^t (\mathcal{R}(t-s) - \mathcal{R}(t+h-s)) f(s, y(s)) ds \\ &\quad - \int_t^{t'} \mathcal{R}(t+h-s) f(s, y(s)) ds - \int_t^{t+h} \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h)\|_X &\leq \int_0^t \|(\mathcal{R}(t-s) - \mathcal{R}(t+h-s)) f(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(t+h-s) \gamma_R(s) ds + N_1 h. \end{aligned}$$

⁷ Notamos que pela nossa escolha de ε os elementos $(u_1, \dots, u_n) \in Z_\varepsilon$ satisfazem

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\| \leq 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^1 (1-s) \gamma_R(s) ds.$$

⁸ Notamos que $\|z_u - z_v\|_{C(I; X)} \leq \|u - v\|_{X^n}$.

O primeiro termo do lado direito da desigualdade podemos estimar como sendo menor que ε seguindo o mesmo caminho feito no teorema anterior, obtemos então

$$\|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h)\|_X \leq \varepsilon + hM_{RR'} \int_t^{t+h} \gamma_R(s)ds + N_1h.$$

E quando $h \rightarrow 0$, $\|\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t+h)\|_X \leq \varepsilon$. Portando, de nossa definição deduzimos que $K_\varepsilon \subset K$, para todo $\varepsilon > 0$.

Passo 3. Agora, mostraremos que as soluções de (3)-(5.1.12) podem ser aproximadas por elementos em K_ε . Seja $x \in \mathcal{S}$ fixado. O que faremos é construir $z \in K_\varepsilon$, tal que $\|x - z\|_\infty \leq \varepsilon$. E para isso, iremos definir z indutivamente nos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$. Para $i = 1$, temos $t_1 = \frac{1}{n}$, e tomamos⁹

$$u_1 = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1 - s)(f(s, x(s)) - f(s, 0))ds.$$

Pela construção, podemos ver que $u_1 \in 2n\mathcal{V} \cap B_{N_1}$, já que

$$u_1 = 2n \left(\frac{1}{2} \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1 - s)f(s, x(s))ds - \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1 - s)f(s, 0)ds \right) \in 2n\mathcal{V}$$

e

$$\|u_1\| \leq 2nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^{t_1} (t_1 - s)\gamma_R(s)ds \leq 2nt_1M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^1 \gamma_R(s)ds = N_1.$$

Desde que $\mathcal{V}$ é absolutamente convexo, sabemos que $\frac{1}{2}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, e com isso, obtemos que $u_1 \in 2n\mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{N_1}(X)$. De (4.17) e (4.18), podemos afirmar $\|f(s, x(s)) - f(s, 0)\|_X \leq \varepsilon_1$ ¹⁰ para todo $0 < s \leq \frac{1}{n}$, o que implica $\|u_1\|_X \leq \frac{1}{n}M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1$ ¹¹. Definimos então

$$z(t) = h(t) + \int_0^t \mathcal{R}(t - s)f(s, 0)ds + tu_1, 0 \leq t \leq t_1. \quad (5.2.22)$$

Observamos que z definida nesse intervalo satisfaz as mesmas condições das funções em K restritas a $[0, t_1]$. Segue de (5.2.22) que,

$$\begin{aligned} z(t_1) &= h(t_1) + \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1 - s)f(s, 0)ds + t_1u_1 \\ &= h(t_1) + \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1 - s)f(s, 0)ds + \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1 - s)(f(s, x(s)) - f(s, 0))ds \\ &= h(t_1) + \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1 - s)f(s, x(s))ds = x(t_1). \end{aligned}$$

⁹ Da definição de u_1 e usando (5.2.20) obtemos a estimativa

$$\|u_1\| \leq \frac{1}{t_1}M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^{t_1} (t_1 - s)\varepsilon_1ds = \frac{1}{t_1}M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1(t_1s - \frac{s^2}{2})\Big|_0^{t_1} = nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1\frac{t_1^2}{2}.$$

¹⁰ Como $x \in \mathcal{S}$, $x(0) = 0$, por (5.2.21) temos $\|x(s) - x(0)\| < \frac{\delta_1}{4} < \delta_1$, usando esse fato mais (5.2.20) obtemos a estimativa

¹¹ $\|u_1\| \leq \frac{1}{t_1}M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1(t_1s - \frac{s^2}{2})\Big|_0^{t_1} = \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1t_1}{2} = \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1}{2n} \leq \frac{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1}{n}$

Além disso, para $0 < t \leq t_1$, podemos estimar

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\|_X &\leq \int_0^t \|\mathcal{R}(t-s)(f(s, x(s)) - f(s, 0))\|_X ds + t\|u_1\|_X \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t (t-s)\varepsilon_1 ds + \frac{t}{2n} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 \\ &\leq \frac{1}{n^2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{n^2} \leq \frac{\delta_1}{2}. \end{aligned}$$

Agora, tomemos

$$\begin{aligned} u_2 &= n \int_0^{t_1} ((\mathcal{R}(t_2-s) - \mathcal{R}(t_1-s))(f(s, x(s)) - f(s, 0))) ds \\ &\quad + n \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)(f(s, x(s)) - f(s, z(t_1))) ds \\ &= n \int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \\ &\quad - n \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_1-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds. \end{aligned}$$

Dessa expressão $u_2 \in 2n\mathcal{U}$ e

$$\begin{aligned} \|u_2\|_X &\leq 2nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(t_2 - t_1) \int_0^{t_1} \gamma_R(s) ds + 2nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)\gamma_R(s) ds \\ &\leq 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \left(\int_0^{t_1} \gamma_R(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} \gamma_R(s) ds \right) \leq N_1. \end{aligned}$$

Observamos que

$$u_1 + u_2 = n \int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \in n\mathcal{U}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \|u_1 + u_2\|_X &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^{t_1} (t_2 - s) \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|_X ds \\ &\quad + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|_X ds \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Estimando os termos¹² I_1 e I_2 . Obtemos que

$$I_1 \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 \int_0^{t_1} (t_2 - s) ds = \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 (t_2^2 - (t_2 - t_1)^2),$$

$$I_2 \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) ds = \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 (t_2 - t_1)^2.$$

Portanto

$$\frac{1}{n} \|u_1 + u_2\|_X \leq \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_2^2 \varepsilon_1.$$

¹² Notamos que se $0 < s < \frac{1}{n} \|x(s) - y(s)\|_X \leq \frac{\delta_1}{4}$. Então $\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|_X \leq \varepsilon_1$.

Seja $z(t)$ dada por (5.2.22) para $0 < t \leq t_1$. Para $t_1 < t \leq t_2$ definimos

$$z(t) = h(t) + \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t-s)f(s,0)ds + t_1 u_1 + \int_{t_1}^t \mathcal{R}(t-s)f(s, z(t_1))ds + (t-t_1)u_2.$$

Observamos que z definida nesse intervalo, satisfaz as mesmas condições das funções em K restritas a $[0, t_2]$. Além disso,

$$\begin{aligned} z(t_2) &= h(t_2) + \int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_2-s)f(s, y(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)f(s, z(t_1))ds \\ &\quad + \int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &= h(t_2) + \int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)f(s, x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)f(s, z(t_1))ds \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)f(s, y(s))ds \\ &= h(t_2) + \int_0^{t_2} \mathcal{R}(t_2-s)f(s, x(s))ds = x(t_2). \end{aligned}$$

Desde que $x(t_1) = z(t_1)$, $z \in K$, levando em conta (5.2.21) para $0 < t \leq t_2$ e

$$\|x(t) - z(t)\|_X \leq \|x(t) - x(t_1)\|_X + \|z(t_1) - z(t)\|_X \leq \frac{\delta_1}{2} \leq \varepsilon.$$

Procedendo indutivamente assumimos que temos selecionados termos u_k , para $k = 1, \dots, i-1$ tais que $(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, \dots, 0) \in Z_\varepsilon$ e a função $z(t)$ dada por (5.2.18) para $t \in [0, t_{i-1}]$ satisfaz $z(t_k) = x(t_k)$ e a estimativa $\|x(t) - z(t)\|_X \leq \frac{\delta_1}{2}$, $0 \leq t \leq t_{i-1}$. Agora, definimos a função z em $[t_{i-1}, t_i]$. Começamos selecionando

$$\begin{aligned} u_i &= n \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\mathcal{R}(t_i-s) - \mathcal{R}(t_{i-1}-s))(f(s, x(s)) - f(s, z(t_{k-1})))ds \\ &\quad + n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{R}(t_i-s)(f(s, x(s)) - f(s, z(t_{i-1})))ds. \end{aligned}$$

Inicialmente, mostremos que $(u_1, \dots, u_i, 0, \dots, 0) \in Z_\varepsilon$. Começamos observando que podemos reescrever u_i como

$$\begin{aligned} u_i &= n \int_0^{t_{i-1}} (\mathcal{R}(t_i-s) - \mathcal{R}(t_{i-1}-s))(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &\quad + n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{R}(t_i-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &= n \int_0^{t_i} \mathcal{R}(t_i-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &\quad - n \int_0^{t_{i-1}} \mathcal{R}(t_{i-1}-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds. \end{aligned}$$

Então $u_i \in 2n\mathcal{U}$ e

$$\begin{aligned} \|u_i\|_X &\leq 2nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(t_i - t_{i-1}) \int_0^{t_{i-1}} \gamma_R(s)ds + 2nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)\gamma_R(s)ds \\ &\leq 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^{t_i} \gamma_R(s)ds \leq N_1, \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^i u_k = \int_0^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds,$$

o que por sua vez implica que $\sum_{k=1}^i u_k \in n\mathcal{U}$.

Além disso, para $t_{i-1} < s \leq t_i$ temos $y(s) = z(t_{i-1})$, então

$$x(s) - y(s) = x(s) - x(t_{i-1}) + x(t_{i-1}) - z(t_{i-1}).$$

De (5.2.21), sabemos que $\|x(s) - x(t_{i-1})\|_X \leq \frac{\delta_1}{4}$ e por indução $\|x(t_{i-1}) - z(t_{i-1})\|_X \leq \frac{\delta_1}{2}$.

Combinando essas estimativas com (5.2.20) temos que

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^i u_k \right\|_X \leq \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}} t_i^2 \varepsilon_1.$$

Agora definimos $z(t)$ para $t_{i-1} < t \leq t_i$ pela fórmula (5.2.18). Usando essa expressão e a escolha dos u_k , $k = 1, \dots, i$ obtemos que

$$\begin{aligned} x(t_i) - z(t_i) &= \int_0^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^i u_k \\ &= \int_0^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \\ &\quad - \int_0^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds = 0. \end{aligned}$$

Além disso, para $t_{i-1} < t \leq t_i$ segue de (5.2.21) e da escolha de n que

$$\|x(t) - z(t)\|_X \leq \|x(t) - x(t_{i-1})\|_X + \|z(t_{i-1}) - z(t)\|_X \leq \frac{\delta_1}{2},$$

o que mostra nossa afirmação.

Passo 4. Agora finalizamos mostrando que os elementos de K_ε são soluções aproximadas de (3). Especificamente, mostraremos que

$$\left\| z(t) - h(t) - \int_0^t \mathcal{R}(t - s)f(s, z(s))ds \right\|_X \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in I$ e $z \in K_\varepsilon$. De fato, para $t_{i-1} < t \leq t_i$ e usando (5.2.19) temos

$$\begin{aligned} z(t) - h(t) - \int_0^t \mathcal{R}(t - s)f(s, z(s))ds &= \int_0^t \mathcal{R}(t - s)(f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds + \Phi(t) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathcal{R}(s - t)(f(s, z(t_{k-1})) - f(s, z(s)))ds \\ &\quad + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{R}(t - s)(f(s, z(t_{i-1})) - f(s, z(s)))ds \\ &\quad + \Phi(t) \\ &:= I_1^\odot + I_2^\odot + \Phi(t). \end{aligned}$$

A seguir, estimaremos os dois primeiros termos ¹³. É claro que

$$\|I_1^\odot\|_X \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1 \int_0^{t_{i-1}} (t-s)ds, \quad (5.2.23)$$

$$\|I_2^\odot\|_X \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\varepsilon_1 \int_{t_{i-1}}^t (t-s)ds. \quad (5.2.24)$$

Para o terceiro termo, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\|_X &\leq \left(1 - \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right) \left\| \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k}{n} \right\|_X + \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \left\| \sum_{k=1}^i \frac{u_k}{n} \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_{i-1}^2 \varepsilon_1 \left(1 - \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right) + \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_i^2 \varepsilon_1 \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \\ &\leq \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_i^2 \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

De (5.2.23), (5.2.24) e (5.2.25) obtemos a estimativa

$$\left\| z(t) - h(t) - \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, z(s))ds \right\|_X \leq \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 t^2 + \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \varepsilon_1 t_i^2 \leq \varepsilon t_i^2 \leq \varepsilon.$$

Desde que $\mathcal{S}$ é o conjunto dos pontos fixos do mapa Λ dado por (3.2.14), e combinando os **Passo 1** ao **Passo 4** e aplicando o Lema 5.2.2 obtemos que $\mathcal{S}$ é conexo em $C(I; X)$. $\square$

Iremos agora estabelecer a propriedade de Kneser para o conjunto das soluções para o problema (4.2.11)-(4.2.12), onde $f : I \times X \times X \rightarrow X$ é uma função adequada e A o gerador de um família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ tal que as funções $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ e $t \rightarrow \mathcal{R}'(t)$ são fortemente contínuas de $[0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(X)$.

Para tratar o problema, iremos assumir que condição (F_2) do Capítulo 3.

A partir de agora, consideraremos o espaço $X^2 = X \times X$ com a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_X, \quad x, y \in X.$$

De forma semelhante, consideraremos o espaço $C(I; X)^2 = C(I; X) \times C(I; X)$ com essa norma. Além disso, como é feito normalmente para o espaço C^1 das funções continuamente diferenciáveis, iremos tomar a norma

$$\|x\|_1 = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty, \quad x \in C^1(I; X).$$

Com isso, podemos estabelecer o seguinte resultado sobre existencia de soluções brandas para o problema (4.2.11)-(4.2.12).

¹³ Notamos que para $s \in [t_{k-1}, t_k]$, $|t_{k-1}-s| < \frac{1}{n} < \delta_2$ e $z \in K$, então por (5.2.21), $\|z(t_{k-1})-z(s)\|_X \leq \frac{\delta}{4}$. Por (5.2.20), $\|f(s, z(t_{k-1})) - f(s, z(s))\|_X \leq \varepsilon_1$.

Teorema 5.2.3. *Suponha que o operador A gera uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ tal que a função $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ é contínua de I em $\mathcal{B}(X)$. Além disso, a função f satisfaz (F_2) assim como as seguintes condições:*

(Kn-7) *Para cada $\sigma > 0$ o conjunto $f(I \times B_\sigma)$ é relativamente compacto, onde*

$$B_\sigma(X) = \{(x, y) \in X \times X; \|x\|_X + \|y\|_X \leq \sigma\}.$$

Denotaremos $\gamma_\sigma^ = \sup\{\|f(s, x, y)\|_X : s \in I, \|x\|_X + \|y\|_X \leq \sigma\}$.*

(Kn-8) $2M_{\mathcal{R}'} \liminf_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \gamma_\sigma^* < 1$,

então existe uma solução branda para o problema (4.2.11)-(4.2.12). Além disso, se a seguinte condição é cumprida

(Kn-9) $2M_{\mathcal{R}'} \limsup_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \gamma_\sigma^* < 1$,

então, o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (4.2.11)-(4.2.12) é compacto em $C^1(I; X)$.

Demonstração. Para provar esse resultado iremos argumentar de forma semelhante á feita na prova do Teorema 5.2.1. Seja $\mathcal{T} : C(I; X)^2 \rightarrow C(I; X)^2$ o mapa definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^1(u, v)(t) &= \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), v(s))ds, \\ \mathcal{T}^2(u, v)(t) &= \alpha \mathcal{R}'(t)z + \int_0^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, u(s), v(s))ds. \end{aligned}$$

De **(Kn-8)** temos que existe $\sigma > 0$ de tal forma que $\mathcal{T} : B_\sigma(C(I; X)^2) \rightarrow B_\sigma(C(I; X)^2)$.

Mostraremos que $\mathcal{T}$ é completamente contínuo. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli é suficiente mostrar que $\{\mathcal{T}_0(u, v)(t) : \|(u, v)\|_{C(I; X)^2} \leq \sigma\}$ é relativamente compacto, e que o conjunto $\{\mathcal{T}_0(u, v) : \|u\|_{C(I; X)} + \|v\|_{C(I; X)} \leq \sigma\}$ é equicontínuo, onde

$$\mathcal{T}_0(u, v) = (\mathcal{T}_0^1(u, v), \mathcal{T}_0^2(u, v)) = \mathcal{T}(u, v) - (\alpha \mathcal{R}(t)z, \alpha \mathcal{R}'(t)z).$$

Podemos escrever $\mathcal{T}_0$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(u, v)(t) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} [\mathcal{R}(t-s) - \mathcal{R}(t-s_i)]f(s, u(s), v(s))ds, \right. \\ &\quad \left. \int_{s_{i-1}}^{s_i} [\mathcal{R}'(t-s) - \mathcal{R}'(t-s_i)]f(s, u(s), v(s))ds \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathcal{R}(t-s_i)f(s, u(s), v(s))ds, \int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathcal{R}'(t-s_i)f(s, u(s), v(s))ds \right). \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

Para $\mathcal{T}_0^1$ obtemos a seguinte estimativa para o primeiro termo

$$\left\| \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} [\mathcal{R}(t-s) - \mathcal{R}(t-s_i)] f(s, u(s), v(s)) ds \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

pois $\mathcal{R}(\cdot)$ é fortemente contínua e $f(s, u(s), v(s))$ está contida em um conjunto compacto, então $[\mathcal{R}(t) - \mathcal{R}(t')] f(s, u(s), v(s)) \rightarrow 0$ quando $|t - t'| \rightarrow 0$. De forma semelhante, podemos mostrar que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} [\mathcal{R}'(t-s) - \mathcal{R}'(t-s_i)] f(s, u(s), v(s)) ds \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para o segundo termo de $\mathcal{T}_0^1$ temos que¹⁴

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathcal{R}(t-s_{i-1}) f(s, u(s)) ds \in (s_i - s_{i-1}) \overline{co(\mathcal{R}(t-s_i) f([0, t] \times B_R(C(I; X)))} := K_i^1.$$

E semelhantemente,

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \mathcal{R}'(t-s_{i-1}) f(s, u(s)) ds \in (s_i - s_{i-1}) \overline{co(\mathcal{R}'(t-s_i) f([0, t] \times B_R(C(I; X)))} := K_i^2,$$

onde os conjuntos K_i^2 são compactos. Assim,

$$\mathcal{T}_0(B_\sigma(C(I; C)))(t) \subset K + B_\varepsilon(X),$$

onde¹⁵ $K = K_1^1 \times K_1^2 + \dots + K_n^1 \times K_n^2$. Como a escolha do $\varepsilon > 0$ foi arbitrária, temos que $\mathcal{T}_0(B_\sigma(C(I; C)))(t)$ é relativamente compacto.

Para a equicontinuidade sejam ε e δ escolhidos satisfazendo as estimativas anteriores e h tal que $|h| < \delta$. Notamos que a segunda afirmação é uma consequência direta das seguintes estimativas:

$$\left\| \int_0^t (\mathcal{R}(t+h-s) - \mathcal{R}(t-s)) f(s, u(s)) ds \right\|_X \leq \varepsilon \left(\int_0^1 \gamma_R(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \int_0^t \gamma_R(s) ds \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$\left\| \int_t^{t+h} \mathcal{R}(t+h-s) f(s, u(s)) ds \right\|_X \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_t^{t+h} \gamma_R(s) ds.$$

O que implica que esse termo tende a 0 quando $h \rightarrow 0$, pois γ_R é integrável. Com estimativas semelhantes para $\mathcal{T}_0^2$, e juntando tudo, obtemos a equicontinuidade.

Então, se (u, v) é um ponto fixo de $\mathcal{T}$, então $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável e $u'(t) = \mathcal{T}^2(u, v) = v(t)$. O que mostra que u é uma solução branda de (4.2.11)-(4.2.12). E a outra parte do teorema é mostrada de forma semelhante ao Teorema 5.2.1. $\square$

¹⁴ Por **(Kn-7)**, os conjuntos K_i^1 são compactos.

¹⁵ Notamos que K é compacto, já que temos uma união finita de compactos em $C(I; X) \times C(I; X)$.

No teorema a seguir, assumiremos que o conjunto $\mathcal{S}$ consiste das soluções brandas de (4.2.11)-(4.2.12).

Teorema 5.2.4. *Suponha que o operador A gera uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ tal que as funções $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ e $t \rightarrow \mathcal{R}'(t)$ são fortemente contínuas de I em $\mathcal{B}(X)$ e que as condições (F_2) e **(Kn-7)** são válidas. Além disso, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(Kn-10) *O conjunto $\mathcal{S}$ é compacto em $C^1(I; X)$,*

(Kn-11) $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \liminf_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \gamma_{\sigma}^* < 1,$

então $\mathcal{S}$ é conexo em $C^1(I; X)$.

Demonstração: Os argumentos para demonstrarmos esse resultado são muito parecidos com aqueles que utilizamos para mostrar o Teorema 5.2.2, então o que faremos é mostrar os aspectos principais da demonstração. Do resultado anterior sabemos que o conjunto $\mathcal{S}$ é não vazio. Temos que $\mathcal{S}$ é conexo em $C^1(I; X)$ se, e somente se, o conjunto $\mathcal{S} \times \mathcal{S} = \{(x, x') : x \in \mathcal{S}\}$ é conexo em $C(I; X)^2$.

Podemos selecionar uma constante $R > 0$ grande o suficiente, tal que $\|x\|_{\infty} + \|x'\|_{\infty} \leq R$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e

$$2\alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \|z\|_X + 4M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \gamma_R^* \leq R. \quad (5.2.27)$$

Seja $\mathcal{V}^*$ um conjunto compacto e absolutamente convexo tal que $f(t, x, y) \in \mathcal{V}^*$ para todo $t \in I$ e todo $(x, y) \in X^2$, $\|x\|_X + \|y\|_X \leq R$. Denotaremos por $\mathcal{V}_i^*$, $i = 0, 1$ algum conjunto compacto e absolutamente convexo tal que

$$\int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, x(s), y(s))ds \in \mathcal{V}_0^*, \int_0^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, x(s), y(s))ds \in \mathcal{V}_1^*,$$

para todo $t \in I$, $(x(\cdot), y(\cdot)) \in C(I; X)^2$, $\|x(\cdot), y(\cdot)\| \leq R$. Tomamos $\mathcal{U}_i = 2\mathcal{V}_i^*$, $\mathcal{U}'_i = 3\mathcal{V}_i^*$, $i = 0, 1$ e indicaremos por $N_0 = 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \gamma_R^*$, com R dado por (3.26).

Passo 1. Para uma divisão d do intervalo I formado pelos pontos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, consideramos as funções $\zeta(\cdot)$ e $\omega(\cdot)$ dadas por $\zeta(0) = 0$, $\omega(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \alpha \mathcal{R}(t)z + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathcal{R}(t-s)f(s, \zeta(t_{k-1}), \omega(t_{k-1}))ds + (t_k - t_{k-1})v_k \right) \\ &\quad + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{R}(t-s)f(s, \zeta(t_{i-1}), \omega(t_{i-1}))ds + (t - t_{i-1})v_i, \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \alpha \mathcal{R}'(t)z + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathcal{R}'(t-s)f(s, \zeta(t_{k-1}), \omega(t_{k-1}))ds + (t_k - t_{k-1})u_k \right) \\ &\quad + \int_{t_{i-1}}^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, \zeta(t_{i-1}), \omega(t_{i-1}))ds + (t - t_{i-1})u_i, \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

para $t_{i-1} < t \leq t_i$ e $i = 1, \dots, n$. Nas expressões (4.25) e (4.26) escolhemos $u_i, v_i \in X$ tal que $(u_i, v_i) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1$, $\sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1})(u_k, v_k) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1$, $\|u_i\| \leq N_0$, $\|\sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1})u_k\| \leq N_0$ e $\|\sum_{k=1}^i (t_k - t_{k-1})v_k\| \leq N_0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Teremos que ζ e ω são funções contínuas. Para ζ e ω fixadas, dadas por (4.25) e (4.26) respectivamente, denotaremos por $\psi_i(\cdot)$ e $\varphi_i(\cdot)$, $i = 0, 1$ as funções escadas definidas por $(\psi_0(0), \psi_1(0)) = (0, 0)$, $(\varphi_0(0), \varphi_1(0)) = (u_1, v_1)$, $(\psi_0(t), \psi_1(t)) = (\zeta(t_{k-1}), \omega(t_{k-1}))$ e $(\varphi_0(t), \varphi_1(t)) = (u_k, v_k)$ para $t_{k-1} < t \leq t_k$ e $k = 1, \dots, n$. Então, podemos reescrever as definições de ζ e ω como

$$\zeta = \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))ds + \int_0^t \varphi_0(s)ds, \quad (5.2.30)$$

$$\omega = \alpha \mathcal{R}'(t)z + \int_0^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))ds + \int_0^t \varphi_1(s)ds. \quad (5.2.31)$$

Denotemos $\Phi_i(t) = \int_0^t \varphi_i(s)ds$, $i = 0, 1$. Mostraremos que $\|(\zeta(t), \omega(t))\| \leq R$, para $0 \leq t \leq 1$, independente da divisão d e da escolha dos pontos (u_i, v_i) . Das definições de ζ e ω obtemos facilmente que $\|(\zeta(t), \omega(t))\| \leq R$ para $0 \leq t \leq t_1$. Assumiremos agora que essa propriedade é válida em $[0, t_{i-1}]$ também podemos mostrar que continua válida para $t_{i-1} < t \leq t_i$.

Passo 2. Aqui mostraremos que o conjunto K formado pelas funções (ζ, ω) definidas em (4.25) e (4.26) é relativamente compacto em $C(I; X)^2$. De fato, se denotamos $\tilde{\zeta} = \zeta - \alpha \mathcal{R}(\cdot)z$ e $\tilde{\omega} = \omega - \alpha \mathcal{R}'(\cdot)z$ devemos provar que $K_0 = \{(\tilde{\zeta}, \tilde{\omega}) : (\zeta, \omega) \in K\}$ é relativamente compacto. Segue diretamente de (5.2.30) que $\tilde{\zeta}(t) \in \mathcal{U}'_0$ e $\tilde{\omega}(t) \in \mathcal{U}'_1$, para todo $(\zeta, \omega) \in K$ e $t \in I$. E seguindo como na demonstração do Teorema 5.2.2 podemos ver que a função $\tilde{\zeta}$ satisfaz a condição de Lipschitz com constante de Lipschitz dada por $N_2 = 3M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\gamma_R^*$.

Veremos agora que a função $\tilde{\omega}$ é equicontínua. Supondo que s é um número positivo, temos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(t+s) - \tilde{\omega}(t) &= \int_0^t (\mathcal{R}'(\nu+s) - \mathcal{R}'(\nu))f(t-\nu, \psi_0(t-\nu), \psi_1(t-\nu))d\nu \\ &\quad + \int_t^{t+s} \mathcal{R}'(t+s-\nu)f(\nu, \psi_0(\nu), \psi_1(\nu))d\nu + \int_t^{t+s} \varphi_1(\nu)d\nu. \end{aligned}$$

Como $\{f(t-\nu, \psi_0(t-\nu), \psi_1(t-\nu)) : 0 \leq \nu \leq t\}$ é relativamente compacto e $\mathcal{R}'(\cdot)$ é fortemente contínuo, temos que o primeiro termo do lado direito converge para zero, quando $s \rightarrow 0$. Mostremos agora que o segundo termo do lado direito também converge para zero,

$$\left\| \int_t^{t+s} \mathcal{R}'(t+s-\nu)f(\nu, \psi_0(\nu), \psi_1(\nu))d\nu \right\| \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_t^{t+s} \gamma_R^* d\nu = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \gamma_R^* s$$

que converge para zero quando $s \rightarrow 0$. Para o terceiro termo, temos que o mesmo tende a zero por argumentos semelhantes ao que fizemos no Teorema 5.2.2.

Então pelo Teorema de Arzelà-Ascoli segue que K_0 é relativamente compacto, e assim $K = (\alpha\mathcal{R}(\cdot)z, \alpha\mathcal{R}'(\cdot)z) + K_0$ também será.

Passo 3. Fixemos agora $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $\varepsilon \leq 4M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\gamma_R^*$ e tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}$. Claramente, temos $\varepsilon_1 \leq 2\gamma_R^*$.

Pela compacidade de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ e K assim como pela continuidade de f podemos tomar $0 < \delta_1 < 2\varepsilon$ tal que

$$\|f(s, x^1, y^1) - f(s, x^2, y^2)\| \leq \varepsilon_1,$$

para todo $s \in I$ e para todo $(x^i, y^i) \in (K \cup \mathcal{S} \times \mathcal{S})(I)$ $i = 1, 2$, tal que $\|x^1 - x^2\| + \|y^1 - y^2\| \leq \delta_1$. Desde que $K \cup \mathcal{S}^2$ é relativamente compacto em $C(I; X)^2$, podemos afirmar que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|(x(t), y(t)) - (x(s), y(s))\| \leq \frac{\delta_1}{4},$$

para todo $(x, y) \in K \cup \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ e $t, s \in I$ tal que $|t - s| \leq \delta_2$.

Escolhamos n tal que $\delta = \frac{1}{n} \leq \min\{\delta_2, \frac{\delta_1}{\varepsilon}\}$. E a seguir, consideramos a divisão d definida pelos pontos $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Seja K_ε o conjunto formado pelos pares de funções (ζ, ω) definidos por (5.2.30), onde os pontos $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ satisfazem as seguintes condições:

- (i) $(u_i, v_i) \in 2n(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1)$, $\|u_i\| \leq N_0$.
- (ii) $\sum_{k=1}^i (u_k, v_k) \in n(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1)$, $\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^i u_k \right\| \leq \frac{1}{2} M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_i^2 \varepsilon_1$, $\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^i v_k \right\| \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_i \varepsilon_1$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Denotaremos por Z_ε o conjunto dos pontos $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ que satisfazem as condições acima. Da condição (ii) segue que

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^i u_k \right\| \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \gamma_R^* \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^i v_k \right\| \leq 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \gamma_R^*.$$

Podemos concluir a prova estudando as propriedades do conjunto K_ε assim como foi feito de forma semelhante no Teorema 5.2.2. Para mostrarmos que cada solução branda $(x, x') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ pode ser aproximada por elementos de K_ε devemos selecionar u_i e v_i apropriadamente. De fato, u_i e v_i são dados por

$$\begin{aligned} u_i &= n \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\mathcal{R}(t_i - s) - \mathcal{R}(t_{i-1} - s)) \Delta_k f(s) ds + n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s) \Delta_i f(s) ds \\ &= n \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (R(t_i - s) - \mathcal{R}(t_{i-1} - s)) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds \\ &\quad + n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_i &= n \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\mathcal{R}'(t_i - s) - \mathcal{R}'(t_{i-1} - s)) \Delta_k f(s) ds + n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{R}'(t_i - s) \Delta_i f(s) ds \\
&= n \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\mathcal{R}'(t_i - s) - \mathcal{R}'(t_{i-1} - s)) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds \\
&\quad + n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{R}'(t_i - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds,
\end{aligned}$$

onde $p_0(s) = x(s)$, $p_1(s) = x'(s)$, $q_0(s) = \zeta(s)$, $q_1(s) = \omega(s)$ e abreviamos

$$\Delta_k f(s) = f(s, p_0(s), p_1(s)) - f(s, q_0(t_{k-1}), q_1(t_{k-1})).$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
u_i &= n \int_0^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds \\
&\quad - n \int_0^{t_{i-1}} \mathcal{R}(t_{i-1} - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds, \\
v_i &= n \int_0^{t_i} \mathcal{R}'(t_i - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds \\
&\quad - n \int_0^{t_{i-1}} \mathcal{R}'(t_{i-1} - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds.
\end{aligned}$$

Então $u_i \in 2n\mathcal{U}_0$ e $v_i \in 2n\mathcal{U}_1$ e

$$\begin{aligned}
\|u_i\| &\leq 2nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(t_i - t_{i-1})t_{i-1}\gamma_{\mathcal{R}}^* + 2nM_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(t_i - t_{i-1})^2\gamma_R^* \\
&= 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}t_{i-1}\gamma_R^* + 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(t_i - t_{i-1})\gamma_R^* \leq 2M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\gamma_R^*,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^i v_k \right\| = \left\| \int_0^{t_i} \mathcal{R}'(t_i - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds \right\| \leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} t_i \varepsilon_1$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^i (u_k, v_k) &= \left(n \int_0^{t_i} \mathcal{R}(t_i - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds, \right. \\
&\quad \left. n \int_0^{t_i} \mathcal{R}'(t_i - s) (f(s, x(s), x'(s)) - f(s, \psi_0(s), \psi_1(s))) ds \right) \in n(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1).
\end{aligned}$$

E seguindo da mesma forma que no Teorema 5.2.2 construímos os K_ε , que satisfazem as hipóteses do Lema 5.2.2, e assim mostramos a conexidade para o conjunto das soluções brandas para o problema (4.2.11)-(4.2.12). $\square$

REFERÊNCIAS

- AGARWAL, R. P.; CUEVAS, C.; LIZAMA, C. *Regularity of Difference Equations on Banach Spaces*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 35.
- AGARWAL, R. P.; DE ANDRADE, B.; CUEVAS, C. Weighted pseudo-almost periodic solutions of a class of semilinear fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 3532–3554, 2010. Citado na página 29.
- AGARWAL, R. P. et al. Asymptotic periodicity for some classes of integro-differential equations and applications. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, v. 21, n. 2, p. 1, 2011. Citado na página 13.
- AGARWAL, R. P.; DE ANDRADE, B. d.; CUEVAS, C. On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations. *Advances in Difference Equations*, Springer, v. 2010, n. 1, p. 1–25, 2010. Citado na página 69.
- AKHMEROV, R. R. et al. Measures of noncompactness and condensing operators. *Operator theory*, Birkhäuser, v. 55, p. 1–244, 1992. Citado na página 31.
- ANDRADE, F. et al. L^p -boundedness and topological structure of solutions for flexible structural systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 38, n. 18, p. 5139–5159, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 12, 13, 19, 32, 35, 39 e 42.
- APPELL, J. Measures of noncompactness, condensing operators and fixed points: an application-oriented survey. *Fixed Point Theory*, v. 6, n. 2, p. 157–229, 2005. Citado na página 73.
- ARAYA, D.; LIZAMA, C. Existence of asymptotically almost automorphic solutions for a third order differential equation. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, University of Szeged, Hungary, v. 53, p. 1–20, 2012. Citado na página 54.
- ARENDT, W. et al. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. [S.l.]: Springer Basel AG, 2001. v. 96. Citado 5 vezes nas páginas 17, 19, 20, 43 e 51.
- BALAS, M. J. Active control of flexible systems. *Journal of Optimization theory and Applications*, Springer, v. 25, n. 3, p. 415–436, 1978. Citado na página 12.
- BALAS, M. J. Feedback control of flexible systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 23, n. 4, p. 673–679, 1978. Citado na página 12.
- BANAS, J.; GOEBEL, K. *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*. [S.l.]: Polish Academy of Sciences, 1979. Citado na página 73.
- BATTY, C.; BU, S. Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity. *Studia Mathematica*, v. 160, p. 1, 2004. Citado na página 14.
- BERBERIAN, S.-K. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*. Springer-Verlag, American Elsevier Publishing Co., 1974. Citado na página 88.

- BEYN, W.-J.; LORENZ, J. Stability of viscous profiles: proofs via dichotomies. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 18, n. 1, p. 141–195, 2006. Citado na página 34.
- BOCHNER, S. A new approach to almost periodicity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 48, n. 12, p. 2039–2043, 1962. Citado na página 11.
- BOSE, S. K.; GORAIN, G. C. Stability of the boundary stabilised internally damped wave equation $y'' + \lambda y''' = c^2(\delta y + \mu \delta y')$ in a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. *Indian J. Math*, v. 40, n. 1, p. 1–15, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- BRUIJN, N. D. The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 71, n. 2, p. 313–330, 1949. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 25.
- BURTON, T.; ZHANG, B. A Schauder-type fixed point theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 417, n. 2, p. 552–558, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 64, 68 e 70.
- CAICEDO, A. et al. Asymptotic behavior of solutions of some semilinear functional differential and integro-differential equations with infinite delay in Banach Spaces. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 349, n. 1, p. 1–24, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.
- CARDOSO, F.; CUEVAS, C. Exponential dichotomy and boundedness for retarded functional difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 15, n. 3, p. 261–290, 2009. Citado na página 86.
- CHABROWSKI, J. et al. On nonlocal problems for parabolic equations. *Nagoya Math. J.*, v. 93, n. 19841, p. 109–131, 1984. Citado na página 72.
- CHEN, G.; ZHOU, J. The wave propagation method for the analysis of boundary stabilization in vibrating structures. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 50, n. 5, p. 1254–1283, 1990. Citado na página 12.
- CHEN, L. The l^p -boundedness of the Bergman projection for a class of bounded hartogs domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016. Citado na página 11.
- CHEN, P.; MAGNIEZ, J.; OUHABAZ, E. M. The hodge–de Rham Laplacian and L^p -boundedness of Riesz transforms on non-compact manifolds. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 125, p. 78–98, 2015. Citado na página 11.
- CHILL, R.; SRIVASTAVA, S. L^p -maximal regularity for second order Cauchy problems. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 251, n. 4, p. 751–781, 2005. Citado na página 13.
- CHOU, J.-H.; CHEN, S.-H.; CHAO, C.-H. Robust stabilization of flexible mechanical systems under noise uncertainties and time-varying parameter perturbations. *Journal of vibration and control*, Sage Publications, v. 4, n. 2, p. 167–185, 1998. Citado na página 12.

- CHRISTENSEN, R. *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*. [S.l.]: Elsevier, 2012. Citado na página 13.
- CHUONG, N. M.; KE, T. D. Generalized Cauchy problems involving nonlocal and impulsive conditions. *Journal of Evolution Equations*, Springer, v. 12, n. 2, p. 367–392, 2012. Citado na página 31.
- CONSTANTIN, O.; PELÁEZ, J. Á. Boundedness of the Bergman projection on L^p -spaces with exponential weights. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Elsevier, v. 139, n. 3, p. 245–268, 2015. Citado na página 11.
- COPPEL, W. *Dichotomies in Stability Theory, vol. 629 of Springer Lecture Notes in Mathematics*. [S.l.]: Springer, Berlin Heidelberg New York, 1978. Citado na página 34.
- CORDUNEANU, C. *Almost Periodic Oscillations and Waves*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. Citado na página 24.
- CUEVAS, C. et al. l^p -boundedness properties for Volterra difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 219, n. 12, p. 6986–6999, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 35.
- CUEVAS, C.; DE SOUZA, J. C. S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 22, n. 6, p. 865–870, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.
- CUEVAS, C.; DE SOUZA, J. C. Existence of S-asymptotically ω -periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 1683–1689, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.
- CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R.; SOTO, H. Asymptotically periodic solutions of fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 236, p. 524–545, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 12, 27, 28 e 64.
- CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Well posedness for a class of flexible structure in Hölder spaces. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2009, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 51.
- CUEVAS, C.; LIZAMA, C. S-asymptotically ω -periodic solutions for semilinear Volterra equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 33, n. 13, p. 1628–1636, 2010. Citado na página 12.
- DALIETZKII, Y. L.; KREIN, M. Stability of solutions of differential equations in Banach Spaces. *American Mathematical Society, Rhode Island*, 1978. Citado na página 34.
- DE ANDRADE, B.; CUEVAS, C. S-asymptotically ω -periodic and asymptotically ω -periodic solutions to semi-linear Cauchy problems with non-dense domain. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 6, p. 3190–3208, 2010. Citado na página 25.
- DE ANDRADE, B.; CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, E. Asymptotic periodicity and almost automorphy for a class of Volterra integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 35, n. 7, p. 795–811, 2012. Citado na página 29.

- DE ANDRADE, B. et al. Asymptotic periodicity for flexible structural systems and applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, Springer, p. 1–60, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 12, 15, 19 e 48.
- DE ANDRADE, B.; LIZAMA, C. Existence of asymptotically almost periodic solutions for damped wave equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 382, n. 2, p. 761–771, 2011. Citado 10 vezes nas páginas 13, 14, 19, 20, 21, 23, 32, 51, 54 e 83.
- DEIMLING, K. *Nonlinear Functional Analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 2010. Citado na página 31.
- DENG, K. Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 179, n. 2, p. 630–637, 1993. Citado na página 72.
- DIESTEL, J.; UHL, J. J. *Vector measures*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1977. Citado na página 18.
- DIMBOUR, W.; N'GUÉRÉKATA, G. M. S-asymptotically ω -periodic solutions to some classes of partial evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 218, n. 14, p. 7622–7628, 2012. Citado na página 12.
- DOS SANTOS, J. P. C.; HENRÍQUEZ, H. R. Existence of S-asymptotically ω -periodic solutions to abstract integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 256, p. 109–118, 2015. Citado na página 12.
- FERNÁNDEZ, C. *Transformada de Laplace y ecuaciones de Volterra*. 2006. Disponível em: <<http://netlizama.usach.cl/tesis%20final%202006%2007%2026%20version%20para%20pdf.pdf>>. Citado na página 20.
- FERNÁNDEZ, C.; LIZAMA, C.; POBLETE, V. Maximal regularity for flexible structural systems in Lebesgue spaces. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2010, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 13, 14, 19, 22, 35 e 48.
- FERNÁNDEZ, C.; LIZAMA, C.; POBLETE, V. Regularity of solutions for a third order differential equation in Hilbert spaces. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 217, n. 21, p. 8522–8533, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 35.
- FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *Revue Sci.(Rev. Rose Illus.)*, v. 79, p. 341–354, 1941. Citado 3 vezes nas páginas 11, 24 e 25.
- FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *CR Acad. Sci.(Paris)*, v. 213, p. 520–522, 1941. Citado 3 vezes nas páginas 11, 24 e 25.
- FUKUHARA, M. Sur les systèmes des équations différentielles ordinaires. In: THE MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPAN. *Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts*. [S.l.], 1928. v. 5, n. 0, p. 345–350. Citado na página 15.
- GOLDBERG, M.; GREEN, W. R. The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger Operators with threshold singularities: Odd dimensions. *Advances in Mathematics*, v. 303, p. 360–389, 2016. Citado na página 11.

- GORAIN, G. C. Exponential energy decay estimate for the solutions of internally damped wave equation in a bounded domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 216, n. 2, p. 510–520, 1997. Citado na página 12.
- GORAIN, G. C. Uniform stabilization of n -dimensional vibrating equation modeling “standard linear model” of viscoelasticity. *Applications and Applied Mathematics*, v. 4, n. 2, p. 314–328, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- GORAIN, G. C.; BOSE, S. K. Exact controllability and boundary stabilization of flexural vibrations of an internally damped flexible space structure. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 126, n. 2, p. 341–360, 2002. Citado na página 12.
- GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. *Fixed Point Theory*. [S.l.]: Springer, 2003. (Springer monographs in mathematics). ISBN 9780387001739, 0387001735. Citado na página 28.
- HENRÍQUEZ, H.; CASTILLO, G. The Kneser property for the second order functional abstract Cauchy problem. *Integral Equations and Operator Theory*, Springer, v. 52, n. 4, p. 505–525, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 87.
- HENRÍQUEZ, H. R.; PIERRI, M.; TÁBOAS, P. On S -asymptotically ω -periodic functions on Banach Spaces and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 343, n. 2, p. 1119–1130, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 12, 25 e 26.
- HÖNIG, C. S. *Aplicações da Topologia à Análise*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, Coleção textos universitários do IME-USP, 2011. v. 3. Citado na página 18.
- KALTENBACHER, B.; LASIECKA, I.; POSPIESZALSKA, M. K. Well-posedness and exponential decay of the energy in the nonlinear Jordan-Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, World Scientific, v. 22, n. 11, p. 125–35, 2012. Citado na página 14.
- KEREFOV, A. Nonlocal boundary value problems for parabolic equations. *Differ. Uravn*, v. 15, n. 1, p. 74–78, 1979. Citado na página 72.
- KNESER. über die lösungen eine system gewöhnlicher differential gleichungen das der lipschitzchen bedingung nicht genügt. *S. B. Preußischen Akademie der Wissenschaften Physics Mathematics*, v. 4, p. 171–174, 1923. Citado na página 15.
- KYED, M.; SAUER, J. A method for obtaining time-periodic L^p estimates. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 262, n. 1, p. 633–652, 2017. Citado na página 11.
- LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*. [S.l.]: Pergamon Pr, 1981. (International Series in Nonlinear Mathematics). Citado na página 73.
- LEVINSON, N. The asymptotic behavior of a system of linear differential equations. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 68, n. 1, p. 1–6, 1946. Citado na página 34.
- LIU, L. et al. Existence theorems of global solutions for nonlinear Volterra type integral equations in Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 309, n. 2, p. 638–649, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 28, 57 e 73.

- LIZAMA, C. Regularized solutions for abstract Volterra equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 243, n. 2, p. 278–292, 2000. Citado na página 21.
- LUBINSKY, D.; MASHELE, H. L^p boundedness of $(C, 1)$ means of orthonormal expansions for general exponential weights. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 145, n. 2, p. 387–405, 2002. Citado na página 11.
- MARTIN, R. H. *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1976. (Pure & Applied Mathematics Monograph). Citado 2 vezes nas páginas 77 e 88.
- MASSERA, J. L.; SCHÄFFER, J. J. *Linear Differential Equations and Function Spaces*. [S.l.]: Academic Press New York, 1966. v. 21. Citado na página 34.
- NOLL, R.; ZVAVA, J.; DEYST, J. Effect of Structural Flexibility on Spacecraft Control Systems. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1969. Citado na página 12.
- OTTEN, D. A new L^p -Antieigenvalue Condition for Ornstein-Uhlenbeck Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 444, n. 3, p. 136–152, 2016. Citado na página 11.
- PEANO, G. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 37, n. 2, p. 182–228, 1890. Citado na página 15.
- PENGTAO, L.; LIZHONG, P. L^p boundedness of commutator operator associated with Schrödinger operators on Heisenberg group. *Acta Mathematica Scientia*, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 568–578, 2012. Citado na página 11.
- PERRON, O. Die stabilitätsfrage bei differentialgleichungensysteme. *Mathematische Zeitschrift*, v. 32, p. 303–728, 1930. Citado na página 34.
- PIERRI, M.; ROLNIK, V. On Pseudo-Asymptotically Periodic Functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge Univ Press, v. 87, n. 02, p. 238–254, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 26.
- POBLETE, V.; POZO, J. C. Periodic solutions of an abstract third-order differential equation. *Studia Mathematica*, v. 215, p. 195–219, 2013. Citado na página 14.
- POZO, J. *Regularity and qualitative properties for solutions of some evolution equations*. Tese (Doutorado) — Ph. D. thesis, University of Chile, Chile, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 74.
- SADOVSKII, B. N. A fixed-point principle. *Functional Analysis and Its Applications*, Springer, v. 1, n. 2, p. 151–153, 1967. Citado na página 31.
- VABISHCHEVICH, P. Nonlocal parabolic problems and the inverse heat-conduction problem. *Differential Equations*, v. 17, n. 7, p. 761–765, 1982. Citado na página 72.
- XIAO, T.-J.; LIANG, J. *The Cauchy problem for higher order abstract differential equations*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1998. Citado na página 13.
- ZAIDMAN, S. *Almost-Periodic Functions in Abstract Spaces*. [S.l.]: Pitman Advanced Pub. Program, 1985. v. 126. Citado na página 25.

ZHANG, C. *Almost periodic type functions and ergodicity*. [S.l.]: Springer Science & Business, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 56.

ZHANG, X.; LIU, L.; WU, Y. Global solutions of nonlinear second-order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach Spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 67, n. 8, p. 2335–2349, 2007. Citado na página 73.