

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS**  
**DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS CONTÁBEIS E ATUARIAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS CONTÁBEIS**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM CIÊNCIAS CONTÁBEIS**

**JOSÉ JONAS ALVES CORREIA**

***ASSET AND LIABILITY MANAGEMENT: MODELO DE OTIMIZAÇÃO***  
**ESTOCÁSTICA APLICÁVEL ÀS ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA**  
**COMPLEMENTAR BRASILEIRAS**

**RECIFE – PE**

**2018**

**JOSÉ JONAS ALVES CORREIA**

***ASSET AND LIABILITY MANAGEMENT: MODELO DE OTIMIZAÇÃO  
ESTOCÁSTICA APLICÁVEL ÀS ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA  
COMPLEMENTAR BRASILEIRAS***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da Universidade Federal de Pernambuco para fins de obtenção do título de Mestre em Ciências Contábeis.

**Orientador:** Prof. Dr. Wilton Bernardino da Silva.

**Co-orientador:** Prof. Dr. Filipe Costa de Souza.

**RECIFE – PE**

**2018**

Catálogo na Fonte  
Bibliotecária Maria Betânia de Santana da Silva CRB4-1747.

C824a Correia, José Jonas Alves

*Asset and liability management: modelo de otimização estocástica aplicável às entidades fechadas de previdência complementar brasileiras* / José Jonas Alves Correia. – Recife, 2018.  
87 fls: il. 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Wilton Bernardino da Silva.  
Co-orientador: Prof. Dr. Filipe Costa de Souza

Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis) – Universidade Federal de Pernambuco, CCSA, 2018.

Inclui referências.

1. Fundos de pensão – Brasil. 2. Benefícios previdenciários - gestão. 3. Processo estocástico. 4. Ciência atuarial. I. Silva, Wilton Bernardino da (Orientador). II. Souza, Filipe Costa de (Co-orientador). III. Título.

CDD (22. ed.)

UFPE (CSA 2018 –045)

***ASSET AND LIABILITY MANAGEMENT: MODELO DE  
OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA APLICÁVEL ÀS ENTIDADES  
FECHADAS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR  
BRASILEIRAS***

**José Jonas Alves Correia**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da Universidade Federal de Pernambuco e aprovada em 28 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Orientador/Presidente: Prof. Dr. Wilton Bernardino da Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Filipe Costa de Souza

Examinador Interno: Prof. Dr. Luiz Carlos Miranda

Examinador Externo: Profa. Dra. Márcia Maria Guedes Alcoforado de Moraes

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus que, na plenitude de seu imenso amor e toda sua grandiosidade, me concedeu força, paciência e determinação para buscar mais esse objetivo tão almejado, o mestrado. Tudo o que aqui foi feito devo a ti Senhor, que guiou minha vida durante todo esse processo de aprimoramento do conhecimento. Grato a ti por mais essa graça alcançada.

Agradeço a toda minha família pelo amor incondicional, em especial a meu amigo, irmão e cúmplice: Ronie Alves, TE AMO mano. A Todos os meus amigos que os represento por Eriselma, Macedônia, Jucilene, Edna, Adriana, Simone, Valdízia, Daniel, Lúbia, Leilson e Italcyr. Aos amigos e professores da URCA e da FJN e a uma amiga especial que a vida me deu para amar eternamente, Cris Sales este trabalho também é seu.

Aos meus amigos da turma do mestrado: Amanda, Andreza, Elayne, Elenildo, Esdras, Filipe, Hélio, Isnaldo, Jaianne, Mariam, Mayke, Priscila, Valdemir e Wesley. Agradeço ao apoio de cada um. Em especial à Andreza e Filipe, meus pares de produções acadêmicas. Obrigado por terem recebido esse cearense com o coração aberto e feito laços que vão além do campo acadêmico. Aos doutorandos Valdo e Alexandre e aos amigos que conquistei na UFRPE, grato pela força e amizade. Ao prof. Carlos Amorim (PIMES) e Sérgio (FACHESF).

A todos os docentes do Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis da UFPE e dos outros programas onde cursei disciplinas, pela oportunidade de agregar conhecimentos com vocês, em especial: Miranda, Nonato, Márcia, Luiz dos Anjos, Assuero, Aldemar, Cláudio, Libonatti, Lamartine (PIMES), Filipe e Yumara (UFRPE). Agradeço também aos responsáveis pela secretaria e aos servidores da universidade. Ao orientador Wilton e co-orientador Filipe pela paciência com minhas inquietações acadêmicas, elas tinham o anseio de concretizar meu objetivo. Aos examinadores, prof. Miranda e profa. Márcia, pelas contribuições dadas ao trabalho.

A meu amigo/irmão e conterrâneo Janilson Alves pela força diária concedida, por dispor de seu ombro para acalmar meu coração e enxugar minhas lágrimas quando a saudade de casa batia e não cabia mais no peito. Ao Ramon pelo apoio na construção do trabalho, sua ajuda nas correções foi gigante. Aos amigos que conquistei na seleção de vôlei da UFPE, estar com vocês foi um divisor e um escape nessa jornada do mestrado. Enfim, a todos que contribuíram direto e indiretamente com essa conquista.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante todo o mestrado.

*Este trabalho é prova de minha superação, dedico-o então a **Deus**, nosso ser supremo, por Ele ter me concedido a graça de alcançar mais esse objetivo. Nos tantos momentos que pensei em desistir, Ele me amparou e me deu forças para seguir em frente. Dedico-o também a minha **família**, minha base maior.*

## RESUMO

*Asset and Liability Management* (ALM) é definido como uma prática de gestão de negócios para que as decisões e ações tomadas com relação aos ativos e passivos sejam coordenadas. Desta forma, o ALM se configura como um processo contínuo de formular, programar, monitorar e revisar estratégias relacionadas aos ativos e passivos para atingir os propósitos financeiros de uma organização. Esta pesquisa tem o objetivo de desenvolver e aplicar por meio da técnica de programação linear estocástica, um modelo ALM para otimizar carteiras de investimentos, preconizando empiricamente uma estratégia de gestão para os planos previdenciários dos fundos de pensão privados brasileiros, em um horizonte de cinco anos. O estudo é justificado pelo impacto que os fundos de pensão exercem sobre a economia brasileira e pelas mudanças trazidas nas reformas trabalhistas e previdenciárias em implantação no Brasil, que diretamente afetam os regimes de pensão. Para tanto, realizou-se uma pesquisa essencialmente quantitativa, empregando a técnica de programação linear estocástica, em um problema multiestágio com uso do equivalente determinístico, o qual foi solucionado com o uso do software *General Algebraic Modeling System* (GAMS). O modelo ALM desenvolvido e aplicado nesta investigação foi criado com adaptações da modelagem de Kouwenberg (2001), que aplicou tal técnica nos fundos de pensão holandeses. Para direcionar a aplicabilidade às Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) brasileiras adotaram-se premissas e restrições que retratam o contexto do mercado de capitais brasileiro. Os segmentos de ativos empregados para alocar os investimentos dos fundos de pensão foram renda fixa e ações, na qual tiveram suas incertezas modeladas por um conjunto de probabilidades de 25%, 50% e 25% para representar cenários de baixa, médio e de alta, respectivamente. Para traçar os cenários iniciais desses ativos, foram utilizadas séries temporais de 1999 a 2017, cuja calibragem para a renda fixa adotou os retornos dos Certificados de Depósito Interbancário (CDI), título que mensura as negociações entre bancos e serve para designar os níveis das taxas de juros. Já as ações foram calibradas pelos retornos históricos do Índice Bovespa (Ibovespa), que mede o resultado de uma carteira teórica de ativos, indicando o desempenho médio das cotações dos ativos com maior volume de negócios. Os passivos foram modelados por meio de uma tábua de mortalidade IBGE 2015 extrapolada para as idades acima de 80 anos, ambos os sexos e também apresentam probabilidades de 25%, 50% e 25% para os cenários de baixa, média e alta, respectivamente. Dada às premissas, variáveis de decisão e os parâmetros determinados no modelo, os principais achados apontaram que a alocação ótima dos ativos nos fundos de pensão deu-se em ativos de renda fixa, que é um ativo menos arriscado; assim, na alocação inicial o fundo optaria por investir aproximadamente 70% neste segmento. Quando analisado os cenários determinísticos de baixa, de média e de alta no horizonte planejado, pôde-se identificar prováveis cenários em que o fundo teria insuficiência de caixa, isto é, desequilíbrio financeiro e ainda apresentar déficits, especificamente no quinto ano de operação do fundo e que ocorreriam em menos de 1% dos casos.

**Palavras-chave:** Gestão de Ativos e Passivos. Programação Linear Estocástica. Previdência Complementar. Matemática Atuarial. Fundos de Pensão.

## ABSTRACT

Asset and Liability Management (ALM) is defined as a business management practice so that decisions and actions taken regarding assets and liabilities are coordinated. In this way, ALM is configured as a continuous process of formulating, scheduling, monitoring and reviewing strategies related to assets and liabilities to achieve the financial purposes of an organization. The objective of this research is to develop and apply, through a linear stochastic programming technique, an ALM model to optimize investment portfolios, empirically recommending a management strategy for the pension plans of Brazilian private pension funds over a five year horizon. The study is justified by the impact that pension funds exert on the Brazilian economy and the changes brought about by labor and social security reforms in Brazil, which directly affect pension systems. In order to do so, a quantitative research was carried out, using the linear stochastic programming technique, in a multistage problem using the deterministic equivalent, which was solved using the General Algebraic Modeling System (GAMS) software. The model ALM developed and applied in this research was created with adaptations of the modeling of Kouwenberg (2001), who applied this technique in Dutch pension funds. In order to direct the applicability to Brazilian Enclosed Entities Closed Entities (EFPC), assumptions and restrictions have been adopted that depict the context of the Brazilian capital market. The asset segments used to allocate pension fund investments were fixed income and equities, in which their uncertainties were modeled by a 25%, 50% and 25% probability set to represent low, medium and high scenarios, respectively. To trace the initial scenarios of these assets, time series were used from 1999 to 2017, whose calibration for the fixed income adopted the returns of the Interbank Deposit Certificates (CDI), a title that measures the negotiations between banks and serves to designate the levels of the rates of interest. The shares were calibrated by the historical returns of the Bovespa Index (Ibovespa), which measures the result of a theoretical portfolio of assets, indicating the average performance of the prices of the assets with the highest turnover. The liabilities were modeled using an IBGE 2015 mortality table extrapolated for the ages over 80 years, both sexes and also present probabilities of 25%, 50% and 25% for the low, medium and high scenarios, respectively. Given the assumptions, decision variables and parameters determined in the model, the main findings pointed out that the optimal allocation of assets in pension funds occurred in fixed income assets, which is a less risky asset; thus, in the initial allocation the fund would opt to invest approximately 70% in this segment. When analyzing the deterministic scenarios of low, medium and high in the planned horizon, it was possible to identify probable scenarios in which the fund would have insufficient cash, that is to say, financial imbalance and still present deficits, specifically in the fifth year of operation of the fund and would occur in less than 1% of cases.

**Keywords:** Asset and Liability Management. Linear Stochastic Programming. Supplementary Pension Plans. Actuarial Mathematics. Pension Funds.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Coeficientes de correlação de ativos de uma carteira .....	21
<b>Figura 2</b> - Fronteira eficiente para portfólios alternativos .....	22
<b>Figura 5</b> - Retorno do CDI de 1996-2017 .....	49
<b>Figura 6</b> - Retorno do Ibovespa de 1996 a 2017 .....	51
<b>Figura 7</b> - Comportamento da composição dos ativos no final do ano 1 .....	58
<b>Figura 8</b> - Representação dos fluxos de caixa em um cenário médio .....	62
<b>Figura 9</b> – Probabilidades de ocorrência dos ativos agregados ótimos em um cenário de alta para o quinto ano .....	64
<b>Figura 10</b> – Probabilidades de ocorrência dos ativos agregados ótimos em um cenário médio para o quinto ano .....	65
<b>Figura 11</b> – Probabilidades de ocorrência dos ativos agregados ótimos em um cenário de baixa para o quinto ano.....	65
<b>Figura 12</b> - Razão de garantia ano 1 .....	66

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1-</b> Comportamentos do investidor .....	18
---	----

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Resumo das notações do ALM.....	45
<b>Tabela 2</b> - Percentual aplicado sobre a arrecadação .....	47
<b>Tabela 3</b> - Limites de alocação dos ativos permitidos aos fundos de pensão.....	48
<b>Tabela 4</b> - Limites de alocações nos segmentos de ativos.....	48
<b>Tabela 5</b> - Percentuais modelados para representar os ativos de renda fixa nos cenários.....	50
<b>Tabela 6</b> - Percentuais modelados para representar os ativos de renda variável nos cenários	51
<b>Tabela 7</b> - Premissas adotadas na modelagem ALM.....	52
<b>Tabela 8</b> - Saída do GAMS: estatísticas do modelo .....	54
<b>Tabela 9</b> - Saída do GAMS: resumo do solucionador .....	55
<b>Tabela 10</b> - Taxas de contribuições ( <i>crtn</i> ) esperadas da função objetivo .....	56
<b>Tabela 11</b> - Alocação inicial dos ativos .....	57
<b>Tabela 12</b> - Compra e venda de ativos em um cenário mediano (em milhões de Reais) .....	59
<b>Tabela 13</b> – Total de ativos investidos em um cenário mediano (em milhões de Reais).....	60
<b>Tabela 14</b> - Alocação dos investimentos no horizonte planejado (em %)......	61
<b>Tabela 15</b> - Retorno dos ativos: cenário médio (% ao ano)......	61
<b>Tabela 16</b> - Agregado de ativos nos cenários otimizados.....	63
<b>Tabela 17</b> - Resultados dos superávits/déficits do fundo de pensão (em milhões de Reais)...	67

## LISTAS DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<b>ABRAPP</b>	Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar
<b>ALM</b>	<i>Asset and Liability Management</i>
<b>BACEN</b>	Banco Central do Brasil
<b>BD</b>	Benefício Definido
<b>CAPES</b>	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
<b>CD</b>	Contribuição Definida
<b>CDI</b>	Certificado de Depósitos Interbancários
<b>CFC</b>	Conselho Federal de Contabilidade
<b>CMN</b>	Conselho Monetário Nacional
<b>CNPC</b>	Conselho Nacional de Previdência Complementar
<b>CPC</b>	Comitê de Pronunciamentos Contábeis
<b>CRPC</b>	Câmara de Recursos da Previdência Complementar
<b>CV</b>	Contribuição Variável
<b>EFPC</b>	Entidades Fechadas de Previdência Complementar
<b>FASB</b>	<i>Financial Accounting Standards Board</i>
<b>FUNCEF</b>	Fundação dos Economiários Federais
<b>GAMS</b>	<i>General Algebraic Modeling System</i>
<b>IASB</b>	<i>International Accounting Standards Board</i>
<b>IBICT</b>	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
<b>IBOVESPA</b>	Índice Bovespa
<b>INSS</b>	Instituto Nacional da Seguridade Social
<b>LC</b>	Lei Complementar
<b>NBC TG</b>	Norma Brasileira de Contabilidade Técnica Geral
<b>PIB</b>	Produto Interno Bruto
<b>PREVIC</b>	Superintendência Nacional de Previdência Complementar
<b>RGPS</b>	Regime Geral de Previdência Social
<b>RPPS</b>	Regime Próprio de Previdência Complementar

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>17</b>
<b>2.1 Conceitos iniciais sobre otimização de carteiras.....</b>	<b>17</b>
2.1.1 Fronteira eficiente.....	21
<b>2.2 Asset and Liability Management (ALM).....</b>	<b>23</b>
<b>2.3 Caracterização do objeto de investigação .....</b>	<b>24</b>
2.3.1 Tipos de planos de benefícios.....	25
2.3.2 Dinâmica dos fundos de pensão .....	26
<b>2.4 Programação estocástica .....</b>	<b>27</b>
2.4.1 Programação dinâmica estocástica e dinâmica dual estocástica .....	29
2.4.2 Modelo estocástico de dois estágios de decisão .....	30
<b>2.5 Pesquisas anteriores com aplicação de programação estocástica em modelos ALM.</b>	<b>34</b>
<b>2.6 Abordagem conceitual dos ativos e passivos .....</b>	<b>38</b>
2.6.1 Ativo e passivo à luz da teoria contábil.....	38
2.6.2 Ativo e passivo atuarial .....	40
<b>3 METODOLOGIA.....</b>	<b>42</b>
<b>3.1 Enquadramento metodológico da pesquisa.....</b>	<b>42</b>
<b>3.2 Modelagem ALM para fundos de pensão.....</b>	<b>44</b>
3.2.1 Apresentação do modelo proposto .....	44
3.2.2 Geração de cenários possíveis em cada nó da árvore de possibilidades .....	48
3.2.2.1 Os cenários dos ativos e fatores econômicos para os fundos de pensão brasileiros.....	49
3.2.2.2 Os cenários para os passivos .....	51
<b>4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>54</b>
<b>4.1 Resultado geral do modelo.....</b>	<b>54</b>
<b>4.2 Resultados da otimização.....</b>	<b>56</b>
<b>5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA .....</b>	<b>69</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>72</b>
<b>APÊNDICE A – FONTE DO GAMS USADA NA PROGRAMAÇÃO .....</b>	<b>79</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os modelos *Asset and Liability Management* (ALM), tratados na literatura nacional por Gestão de Ativos e Passivos fornecem subsídios para um investidor de longo prazo decidir estrategicamente como investir seu capital disponível entre diversos ativos ao longo do tempo. Sendo então definido como uma prática de gerir os investimentos para que as decisões e ações tomadas com relação aos ativos e passivos sejam coordenadas. O ALM é um processo contínuo de formular, programar, monitorar e revisar estratégias relacionadas aos ativos e passivos para atingir os objetivos financeiros de uma organização.

No entanto, em se tratando de modelagem, variáveis como retornos de ativos, pagamentos de passivos, liquidez, equilíbrio financeiro e longevidade são incertas, sendo necessário que as informações sejam avaliadas pelo decisor quando aplicado um modelo ALM (GROTNEY, 2011).

Devido às incertezas dos parâmetros é preciso que a decisão seja cuidadosa, visto que, esse processo desempenha um papel crucial quando se formula um problema de otimização estocástica (WETS, 1989). Na modelagem estocástica é necessário representar por meio de uma função objetivo as pretensões do decisor. Normalmente se volta a identificar as preferências do gestor (investidor), que pode intencionar maximizar a riqueza final do fundo no horizonte de planejamento ou minimizar as taxas esperadas de contribuições ao longo do tempo (VALLADÃO, 2008), podendo assim, aplicar as técnicas combinadas de ALM e programação estocástica nas Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC).

As EFPC ou simplesmente fundos de pensão, como são chamadas, exercem um forte papel na economia brasileira. De acordo com Carvalho (2013), a indústria das EFPC se consolidou como uma alternativa de poupança futura para milhares de brasileiros, tornando-se uma das principais alavancas de investimentos que vem se propagando constantemente.

Segundo Martins (2010), as EFPC captam os recursos dos participantes dos planos de benefícios e investem aplicando no mercado de capitais. Logo, o passivo atuarial formado pelas EFPC é devolvido aos participantes num horizonte de longo prazo sob a forma de pensão. Neste aspecto, as entidades provedoras dos planos precisam tomar decisões a fim de gerenciar eficazmente os seus recursos no mercado. Um fundo de pensão então pode optar por maximizar a rentabilidade das carteiras de investimentos a níveis adequados de risco e das exigências atuariais.

A boa gestão em uma entidade de previdência privada está calcada numa boa gestão financeiro-administrativa quando alinhada com as características das demais entidades

previdenciárias. Ao passo que as EFPC vão se inserindo no contexto social e econômico é preciso que a relação de rentabilidade e os riscos inerentes satisfaçam os demais agentes interessados, como as empresas, o governo, os trabalhadores, os aposentados e demais envolvidos nesse processo (BOULIER; DUPRE, 2003).

Segundo Bertucci, Souza e Félix (2006), essa relação risco *versus* retorno permeia tanto os fundos públicos quanto os privados. O comportamento dos gestores dos planos ao decidir sobre a formação de suas carteiras de investimentos são o direcionador para a alocação ótima dos seus ativos e passivos. Essa alocação estratégica gerencial garante por vezes o cumprimento das metas atuárias por parte dos fundos, o que pode manter um equilíbrio entre a arrecadação e o pagamento dos benefícios, havendo assim, a possibilidade de ampliar a rentabilidade financeira.

Neste contexto, selecionar uma carteira de ativos ideal, diante de um mercado financeiro incerto é fator basilar para qualquer agente econômico que almeja obter um retorno eficiente. Assim, quando um investidor se submete ao processo de seleção de carteiras para maximizar seu retorno esperado ou minimizar as taxas de contribuição ao nível de risco intrínseco ao investimento, se sujeita a suavização dos riscos inerentes aos ativos financeiros do mercado. Em um fundo de pensão, a ausência de uma seleção de carteiras eficientes pode trazer como consequências um aumento no valor das contribuições dos participantes (no caso da modalidade benefício definido), insuficiência financeira para pagar as pensões, e isso, pode levar o fundo à insolvência.

Muitas vezes, a falta de recursos suficientes para saldar os compromissos dos planos de benefícios no período adequado torna-se um agravante que deve ser apreciada pelos gestores dos fundos de pensão. Logo, é preciso que as alocações dos investimentos por parte da gestão dos fundos estejam otimizadas (CARVALHO, 2013). Diante do exposto, o problema de pesquisa versa na seguinte questão: **Qual a carteira de investimentos ótima que as EFPC brasileiras podem adotar para alocar e gerir ativos e passivos dos planos de benefícios, a fim de minimizar suas taxas contribuições?**

As EFPC têm crescido em diversos países do mundo e também no Brasil, apresentando um papel importante na economia. Os fundos de pensão complementam a seguridade básica que os governos oferecem à sociedade. Adicionalmente, promovem o poder de acumular poupança interna, impulsionando diversos setores econômicos, dentre eles, o mercado de capitais. Com esse poder de alavancagem, os fundos de pensão são na atualidade um potencial investimento. Vale salientar que, a manutenção e equilíbrio operacional e

financeiro dos planos dependem primordialmente de sua gestão (LEAL; SILVA; RIBEIRO, 2002; SOUZA, 2015).

Em estudo sobre fundos de pensão, Davis e Hu (2004) exploraram através de modelo econométrico, a relação existente entre os fundos de pensão e o crescimento econômico de um país. Com base numa amostra de 38 países, os achados apontaram que a relação era explicativa e significativa, isto é, válida, e que, os impactos do crescimento dos ativos dos fundos de pensão no crescimento econômico se davam em maiores escalas nos países em desenvolvimento. Ao passo que o país crescia economicamente, cresciam substancialmente também os fundos de pensão (DAVIS; HU, 2004). Desta forma, esta pesquisa ganha substância por investigar os fundos de pensão de um país emergente, embora sua conjuntura econômica atual esteja em um momento de instabilidade econômico-financeira. Neste aspecto, é este panorama vigente que fomentará uma discussão dos achados desta investigação, com resultados de pesquisas já realizadas em momentos de estabilidade.

A aplicação da técnica de gestão de ativos e passivos nos fundos de pensão brasileiros é justificada pelo impacto que essas instituições exercem sobre a economia. Segundo informe estatístico consolidado de setembro de 2017, elaborado pela Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (ABRAPP), os valores dos ativos totais das EFPC somam mais de 833 bilhões de reais, correspondendo a aproximadamente 12,9% do Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro.

A pesquisa também é despertada pelas reformas trabalhistas e previdenciárias em implantação no cenário nacional, que diretamente afetam os regimes de pensão (WEBER, 2016). Segundo Diniz e Corrar (2017), com mudanças na previdência social, as EFPC ganham mais importância na economia nacional, pela circunstância de essas entidades movimentarem de forma significativa a poupança nacional. Nessa perspectiva, o estudo contribui no campo acadêmico por agregar conhecimento das pesquisas em ALM, possibilitando uma oxigenação e disseminação da temática e por aplicar um modelo cuja função objetivo, embora adaptado, ainda não foi aplicado em outras pesquisas brasileiras. No campo profissional, contribui por apresentar uma modelagem que fornece concepção sobre aplicação das técnicas ALM de forma a aperfeiçoar os recursos dos fundos de pensão.

Desta forma, esta dissertação tem por objetivo geral, desenvolver e aplicar por meio da técnica de programação linear estocástica, um modelo ALM para otimizar carteiras de investimentos, preconizando empiricamente uma estratégia de gestão para os planos previdenciários dos fundos de pensão privados brasileiros, em um horizonte de cinco anos. Justifica-se estudar os fundos de pensão privados por estes serem mais eficientes

financeiramente (BARROS; GARCIA, 2006; DINIZ; CORRAR, 2017). Por objetivos específicos têm-se: elaborar de acordo com a literatura um modelo de ALM como estratégia de gerenciamento dos planos previdenciários das EFPC; estimar as alocações dos ativos e passivos em consonância com a função objetivo e restrições regulatórias; projetar de acordo com a tábua de mortalidade os fluxos dos passivos atuariais; e modelar os fluxos dos ativos e as taxas de contribuições dos planos de benefícios, levando em consideração o cenário brasileiro.

Além desta introdução, esta dissertação se organiza em mais quatro capítulos. No segundo capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica, onde são abordados conceitos sobre a seleção de carteiras, teoria que embasa a pesquisa; definição do ALM; caracterização do objeto de investigação, os fundos de pensão; descrição da programação estocástica e seus modelos e geração de cenários, de maneira a introduzir teoricamente os mecanismos necessários para o tratamento do problema proposto; apresentação de pesquisas internacionais e nacionais sobre a aplicação da programação estocástica em modelos ALM e abordagem conceitual de ativos e passivos à luz das ciências contábeis e atuariais. O terceiro capítulo é composto pelos métodos da investigação, onde são descritos os passos da pesquisa, apresentação e aplicação do modelo proposto. Os resultados e discussões são expostos no quarto capítulo. No quinto e último capítulo são apresentadas as conclusões, além de apontar as limitações do estudo e expor sugestões para continuidade da pesquisa.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo aborda conceitos tratados na literatura acerca da teoria das carteiras de Harry Markowitz, enfatizando a fronteira eficiente; apresenta aspectos pertinentes à gestão de ativos e passivos tratado na literatura internacional, o ALM; destaca as características das EFPC brasileiras, objeto de investigação da pesquisa; discorre sobre a programação estocástica apontando características da geração de cenários; examina pesquisas internacionais e nacionais que tratam dos modelos ALM nos fundos de pensão; por fim, aborda conceitos dos ativos e passivos à luz das ciências contábeis e atuariais.

### 2.1 Conceitos iniciais sobre otimização de carteiras

Nos estudos sobre seleção de carteiras, um primeiro ponto a reputar é que esta ocorre em um ambiente de incerteza, que leva em consideração a natureza do conjunto de oportunidades em meio aos riscos impostos pelo mercado e que os resultados esperados pelo investidor estão sujeitos a este ambiente impreciso (ELTON *et al.*, 2012). Deste modo, o resultado esperado de uma carteira de investimentos é associado a uma probabilidade de ocorrência de cada ativo que compõe a carteira, ou seja, o valor total esperado do portfólio é a soma dos resultados esperados de cada ativo multiplicado pela sua probabilidade de ocorrência.

A teoria das carteiras introduzida por Harry Markowitz (1952; 1959), muito discutida, principalmente, nas áreas de finanças e investimentos, mostra como um investidor averso ao risco deve escolher um conjunto de ativos para compor sua carteira que maximiza sua utilidade em obter maiores retornos, o que significa que, ao escolher entre dois ativos com taxas de retorno iguais, ele selecionará o ativo com menor nível de risco.

Reilly e Brown (2011) destacam que no início dos anos 1960, a comunidade de investimentos falava sobre risco, mas não tinha uma medida específica para quantificá-lo. Segundo os autores, Markowitz (1952; 1959) derivou a taxa do retorno esperado para uma carteira de ativos e uma medida de risco esperada. Assim, mostrou que a variância da taxa de retorno era uma medida significativa do risco da carteira sob um conjunto razoável de suposições.

Consequentemente, derivou a fórmula para calcular a variância de uma carteira. Essa fórmula de variância de carteira não apenas indicou a importância de diversificar os investimentos para reduzir o risco total de uma carteira, mas também mostrou como diversificar efetivamente. Dessa maneira, a teoria das carteiras de Markowitz baseia-se numa

variedade de suposições, que leva em consideração o comportamento do investidor, como ilustra o Quadro 1.

### Quadro 1- Comportamentos do investidor

- Os investidores consideram cada alternativa de investimento como sendo representada por uma distribuição de probabilidade de retornos esperados durante algum período de detenção;
- Os investidores estimam o risco da carteira com base na variabilidade dos retornos esperados;
- Os investidores baseiam suas decisões apenas no retorno esperado e no risco, de modo que suas curvas de utilidade são uma função do retorno esperado e da variação esperada (ou desvio padrão) somente dos retornos;
- Para um determinado nível de risco, os investidores preferem retornos mais altos a retornos mais baixos. Da mesma forma, para um dado nível de retorno esperado, os investidores preferem menos risco a mais risco.

Fonte: Adaptado de Reilly e Brown (2011).

De acordo com as premissas expostas no Quadro 1, um único ativo ou carteira de ativos é considerado eficiente se nenhum outro ativo ou carteira de ativos oferecerem maior retorno esperado com o mesmo (ou menor) risco ou menor risco com o mesmo (ou maior) retorno esperado.

Nestes aspectos, a teoria das carteiras ou teoria da média-variância (Regra E-V de Markowitz) expressa à possibilidade de construir carteiras com variedade de ativos que produzam o mesmo valor esperado, no entanto, com menor dispersão dos resultados de todos os possíveis estados de natureza em torno do valor esperado (menor variância).

Rubinstein (2002) enfatiza que Markowitz tinha a visão brilhante de que, embora a diversificação reduzisse o risco, geralmente não o eliminaria. Para o autor, o trabalho de Markowitz foi a primeira formalização matemática da ideia de diversificação de investimentos: a versão financeira de “o todo é maior que a soma de suas partes”. Assim, através da diversificação, o risco pode ser reduzido (mas não geralmente eliminado) sem alterar o retorno esperado da carteira. Markowitz, então postula que, um investidor deve maximizar o retorno esperado do portfólio,  $E(R_{port})$ , e minimizar a variância da carteira ou risco total do portfólio,  $\sigma^2$ .

Considere então, que o retorno do portfólio pode ser representado pela média ponderada dos retornos individuais dos  $n$  ativos obtidos ao longo do tempo, conforme a Equação 1:

$$E(R_{port}) = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (1)$$

em que  $n$  é número de ativos a compor o portfólio;  $w_i$  é a proporção do portfólio no ativo  $i$ ; e  $R_i$  é a taxa de retorno esperada para o ativo  $i$ , cujo cálculo é realizado conforme a Equação 2:

$$R_i = \sum_{t=1}^n r_{it} P_{it} \quad (2)$$

em que  $r_{it}$  é o retorno do ativo  $i$  no tempo  $t$  e  $P_{it}$  é a probabilidade de um estado da natureza da taxa de retorno  $R_i$ .

O risco está associado às possibilidades de ocorrência de determinados resultados em relação a um valor médio esperado, e é representado pela variância,  $\sigma^2$ , e pelo desvio padrão,  $\sigma$ , que é a raiz quadrada da variância, sendo esta medida mais utilizada para mensurar o risco do portfólio. Assim, ao se tomarem decisões de investimentos com base num resultado médio esperado, o desvio padrão passa a revelar o risco da operação, ou seja, a dispersão das variáveis em relação à média. Posto isso, neste ponto, as Equações 3 e 4 apresentam como calcular a variância e o desvio padrão do retorno de um ativo numa carteira de investimentos.

$$\sigma^2(R_{port}) = \sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 P_{it} \quad (3)$$

$$\sigma(R_{port}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 P_{it}} \quad (4)$$

Em se tratando de seleção de carteiras, outra medida estatística que cabe discussão é a covariância. A covariância é uma medida do grau em que duas variáveis se movem juntas em relação aos seus valores médios individuais ao longo do tempo. Na análise de carteira, geralmente a preocupação centra-se com a covariância das taxas de retorno ao invés de preços ou alguma outra variável. Uma covariância positiva significa que as taxas de retorno de dois investimentos tendem a se mover na mesma direção em relação as suas médias individuais durante mesmo período de tempo. Em contraste, uma covariância negativa indica que as taxas

de retorno de dois investimentos tendem a se mover em direções diferentes em relação a suas médias durante intervalos de tempo especificados ao longo do tempo.

A magnitude da covariância depende das variâncias da série de retorno individual, bem como da relação entre as séries (REILLY; BROWN, 2011). A estatística de covariância fornece uma medida absoluta de como eles se moveram juntos ao longo do tempo. Para dois ativos,  $i$  e  $j$ , define-se a covariância das taxas de retorno conforme a Equação 5:

$$\text{Covariância} = \text{Cov}_{ij} = E \{ [R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)] \} \quad (5)$$

A partir da covariância, também é possível calcular a correlação. De acordo com Brooks (2014), a correlação entre duas variáveis, aqui determinadas por ( $i$  e  $j$ ) mede o grau de associação linear entre elas. Se  $i$  e  $j$  estão correlacionados, isso significa que  $i$  e  $j$  estão sendo tratados de forma completamente simétrica. No entanto, não é implícito que mudanças em  $i$  causam mudanças em  $j$ , ou mesmo que mudanças em  $j$  causam alterações em  $i$ . Em vez disso, é simplesmente afirmado que há uma relação linear entre as duas variáveis, e que os movimentos das duas estão em média relacionados a uma extensão dada pelo coeficiente de correlação.

Neste mesmo raciocínio, Reilly e Brown (2011) enfatizam que a padronização da covariância pelo produto dos desvios-padrão individuais gera o coeficiente de correlação ( $\rho_{ij}$ ), que pode variar apenas na faixa de -1 a +1. Um valor de +1 indica uma relação linear positiva perfeita entre  $R_i$  e  $R_j$ , significando que os retornos para os dois ativos se movem juntos de uma maneira completamente linear. Um valor de -1 indica uma relação negativa perfeita entre os dois índices de retorno, de modo que quando a taxa de retorno de um ativo estiver acima de sua média, a taxa de retorno do outro ativo estará abaixo de sua média por um valor comparável. Posto isso, o coeficiente de correlação é dado pela Equação 6:

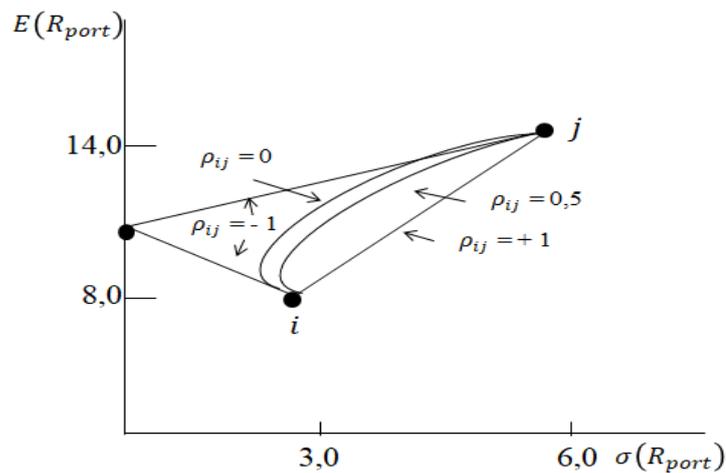
$$\text{Coeficiente de Correlação} = \rho_{ij} = \frac{\text{Cov}_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (6)$$

em que:  $\rho_{ij}$  é o coeficiente de correção dos retornos;  $\sigma_i$  = desvio padrão de  $R_i$ ; e  $\sigma_j$  = desvio padrão de  $R_j$ .

Assim, quanto menor o valor da correlação entre os ativos,  $i$  e  $j$ , que compõem uma carteira de investimentos escolhida pelo investidor, menor é o desvio padrão, isto é, o risco desta carteira em torno de uma rentabilidade, em que o retorno esperado deste investimento é

a média ponderada dos retornos dos ativos  $i$  e  $j$  da carteira. Em uma posição de extrema, em que haja correlação perfeitamente negativa (correlação = -1), é possível calcular uma composição de ativos com capacidade de eliminar a volatilidade da carteira (ELTON *et al.*, 2012). A Figura 1 ilustra uma combinação de retorno e risco para vários coeficientes de correlação.

**Figura 1** - Coeficientes de correlação de ativos de uma carteira



Fonte: Elaboração própria, 2018.

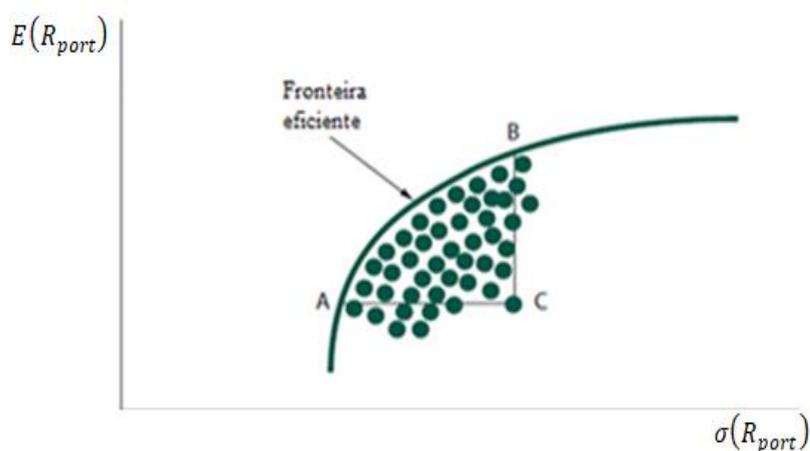
Observa-se na Figura 1 que, quando o coeficiente de correlação entre os ativos  $i$  e  $j$  é igual a mais 1 ( $\rho_{ij} = +1$ ), o desvio padrão,  $\sigma(R_{port})$ , varia linearmente, ou seja, uma variação crescente na taxa de retorno acarreta uma variação também crescente no nível de risco, como está representada graficamente pelo deslocamento sobre o segmento de reta que representa os ativos  $\bar{ij}$ . Quando a correlação é perfeita negativa ( $\rho_{ij} = -1$ ), a representação gráfica se dar por duas retas tocando o eixo vertical (retornos esperados), isto é, uma combinação de ativos com risco zero. Em termos gerais, qualquer outra correlação entre os ativos da carteira com  $\rho$  menor do que 1, resulta em uma variância da carteira inferior ao quadrado da soma dos desvios padrão dos seus ativos (comportamento não-linear).

### 2.1.1 Fronteira eficiente

Quando se examinam diferentes combinações de ativos e se derivam as curvas de utilidade, observando possíveis pesos dos ativos, tem-se a formação de uma fronteira. A curva que contém a melhor de todas essas combinações possíveis é referida como a “fronteira eficiente”. De modo específico, a fronteira eficiente representa esse conjunto de carteiras que

tem o retorno máximo esperado de cada ativo para cada determinado nível de risco ou o risco mínimo para cada nível de retorno (REILLY; BROWN, 2011), tal conceito é ilustrado na Figura 2.

**Figura 2** - Fronteira eficiente para portfólios alternativos



Fonte: Elaboração própria, 2018.

De acordo com a Figura 2, as carteiras situadas na fronteira eficiente possuem retorno esperado superior quando comparadas às carteiras que apresentam mesmos níveis de risco (desvio padrão) e menor risco quando comparadas aos portfólios que apresentam o mesmo retorno esperado. Neste aspecto, como ilustra a Figura 2, diz-se que a carteira A tem domínio sobre a carteira C porque tem uma taxa de retorno igual, mas menor risco. Do mesmo modo, a carteira B domina a carteira C porque tem um risco igual, mas uma taxa de retorno esperada mais elevada.

Com os benefícios da diversificação entre ativos imperfeitamente correlacionados, espera-se que a fronteira eficiente seja composta por carteiras de investimentos e não por títulos individuais. Duas exceções possíveis surgem nos pontos finais, que representam o ativo com maior retorno e o ativo com menor risco (REILLY; BROWN, 2011).

Como um investidor procura atingir um ponto ao longo da fronteira eficiente com base em sua função de utilidade, que reflete sua atitude em relação ao risco, nenhuma carteira na fronteira eficiente pode dominar qualquer outra carteira nesta fronteira. Ou seja, todas essas carteiras têm diferentes medidas de retorno e risco, com taxas esperadas de retorno que variam com o nível de risco. Assim, a escolha de uma melhor carteira de ativos vai depender do posicionamento do investidor perante o risco (ARCE, 2014).

Neste contexto, ora apresentada a abordagem da teoria que norteia a seleção de portfólios e que tem a finalidade de identificar os retornos dos investimentos, dado um nível de risco, a parte seguinte do referencial teórico descreve outro elemento crucial na consecução desta dissertação: a programação estocástica.

## **2.2 *Asset and Liability Management (ALM)***

O termo *Asset and Liability Management* define-se como uma ferramenta financeira que assessoria na maximização da riqueza de uma entidade bem como o valor desta com os *stakeholders*. Seu principal objetivo é o de auxiliar as instituições na gestão dos investimentos em ativos de forma que majorem o valor do capital com uma combinação de passivos, protegendo a organização de eventos calamitosos. Deste modo, um modelo integrado de gestão de ativos e passivos constitui uma estratégia otimizada de investimentos que avaliam ativos e passivos concomitantemente (MITRA; SCHWAIGER, 2011).

Conforme Kosmidou e Zopounidis (2004), o ALM é uma ferramenta importante na gestão de riscos, em que esses riscos podem ser suavizados pela combinação adequada de ativos e passivos, de forma que satisfaça os objetivos da organização que o implementa. Os autores ainda mencionam que o ALM surgiu primordialmente nas instituições bancárias, mas que até meados da década de 1960 eram poucos desenvolvidos, mas que foram sendo sofisticados e aprimorados com o passar do tempo e sendo aplicados em outros segmentos.

O uso de ALM é frequente nas instituições financeiras, visando aumento dos retornos de ativos e suavização dos riscos, a saber: risco de juros, risco de mercado, risco de crédito, risco de liquidez, risco financeiro. Neste aspecto, é preciso que a instituição financeira que aplicar um ALM tenha uma compreensão plausível do mercado financeiro no qual esteja inserida. Assim, percebe-se que um modelo ALM é relevante e crítico para gerenciar finanças de qualquer organização que investe e objetiva atender às suas necessidades de fluxo de caixa futuro, bem como seus requisitos de capital (CHIU; LI, 2006).

Neste sentido, um ALM pode ser definido como uma prática de gerir um negócio para que as decisões e ações tomadas com relação aos ativos e passivos sejam coordenadas, ou seja, é um processo contínuo de formular, programar, monitorar e revisar estratégias relacionadas aos ativos e passivos para atingir os objetivos financeiros de uma organização, dadas as tolerâncias de risco da organização e outras restrições.

Haneveld, Streutker e Van Der Vlerk (2010) enfatizam que o problema estratégico de ALM para fundos de pensão é um problema dinâmico de decisão sob um ambiente de

incerteza. O gerenciamento dos ativos envolve decisões sobre as estratégias formuladas para as carteiras de investimentos, e os passivos, que equivalem aos pagamentos de pensões futuras, dependerão da situação vigente do mercado, ou seja, de um indexador (inflação).

Ademais, a incerteza se configura com um papel relevante, posto que os investimentos em ativos produzem retornos aleatórios e o passivo avaliado a valor de mercado normalmente também é uma fonte incerta. Os autores complementam que o objetivo de um ALM nos fundos de pensão é de permitir os pagamentos de pensões atuais e futuras. Para isso, devem-se considerar os custos mínimos de financiamentos, que consiste de contribuições dos participantes ativos de um fundo e/ou de seu patrocinador. Outro ponto é o seguimento das leis e regras as quais os planos de pensão estão sujeitos pelas autoridades reguladoras.

Existem aplicações de modelos ALM com foco principal nas decisões de investimentos de longo prazo que desejam atingir determinados níveis de retornos e assim, cumprir com as obrigações futuras. É o caso de empresas de seguros, fundos de pensões, bancos comerciais, investidores privados (DUPACOVA; POLÍVKA, 2009). Diante do exposto, serão apresentadas na sequência pesquisas internacionais e nacionais que contribuem com a literatura do objeto em estudo, o ALM.

### **2.3 Caracterização do objeto de investigação**

As EFPC são organizadas por empresas e associações com o objetivo de garantir a seus empregados ou associados uma complementação à aposentadoria oferecida pelo Regime Geral de Previdência Social (RGPS), operacionalizado pelo Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS) ou pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS), por meio da administração de planos de benefícios. Os planos de benefícios administrados pelos fundos de pensão podem garantir além da complementação à aposentadoria, proteção contra eventos não programados como morte, doença, invalidez, dentre outros, a depender do regulamento do plano (FIGUEIREDO, 2011).

As EFPC são mantidas pelas contribuições do empregador e do empregado, que são vertidas aos respectivos planos de benefícios para serem investidos e retornarem, em geral, na forma de renda ao empregado no momento da aposentadoria. Quando os fundos são oferecidos por associações ou entidades de classe, o processo ocorre da mesma maneira, mas as contribuições serão feitas apenas pelos associados.

A criação de uma EFPC está condicionada a motivação do patrocinador ou instituidor em oferecer aos seus empregados ou associados planos de benefícios de natureza

previdenciária, razão pela qual são acessíveis, exclusivamente aos servidores ou aos empregados dos patrocinadores e aos associados ou membros dos instituidores.

Em termos legais, as EFPC são regulamentadas pela Lei Complementar (LC) nº 108 (BRASIL, 2001) que dispõe sobre a relação entre a União, Estados, Distrito Federal, Municípios, suas autarquias, fundações, sociedades de economia mista e outras entidades públicas e suas respectivas entidades fechadas de previdência complementar e pela LC nº 109/2001 que dispõe sobre o regime de previdência complementar no Brasil.

O segmento da indústria dos fundos de pensão no Brasil é composto pela Subsecretaria de Políticas do Regime de Previdência Complementar, vinculada ao Ministério da Fazenda, sendo responsável pela promoção de políticas públicas no âmbito das EFPC; pelo Conselho Nacional de Previdência Complementar (CNPC), responsável pela regulação das atividades e operações dos fundos; Superintendência Nacional de Previdência Complementar (PREVIC), autarquia especial vinculada ao ministério da fazenda responsável pela aprovação, acompanhamento, supervisão e fiscalização das atividades das EFPC; e a Câmara de Recursos da Previdência Complementar (CRPC), órgão colegiado de última instância recursal do segmento para os processos administrativos instaurados pela PREVIC.

A previdência complementar fechada integra o sistema de previdência social brasileiro e constitui importante instrumento de proteção adicional ao trabalhador, tornando-se um mecanismo de formação de poupança interna de longo prazo, necessário para ampliar a capacidade de investimento do país e diversificar as fontes de financiamento do crescimento econômico (COELHO; CAMARGOS, 2012). De acordo com o relatório consolidado da ABRAPP, em setembro de 2017 existiam 307 EFPC ativas no Brasil.

### 2.3.1 Tipos de planos de benefícios

Na legislação brasileira que dispõe sobre as EFPC, os planos de benefícios previdenciários privados são definidos na Resolução MPS/CGPC nº 16, de 22 de novembro de 2005, os quais os caracterizam nas modalidades de Benefício Definido (BD), Contribuição Definida (CD) e Contribuição Variável (CV).

Desta forma, a referida resolução define planos de BD no seu art. 2º, “aquele cujos benefícios programados têm seu valor ou nível previamente estabelecidos, sendo o custeio determinado atuarialmente, de forma a assegurar sua concessão e manutenção”. Nesta modalidade os beneficiários já sabem a forma de cálculo do benefício que receberão após a aposentadoria, podendo haver variação mensal na contribuição. Segundo Pinheiro (2005, p.

62), os planos de BD “proporcionam um benefício de aposentadoria a partir de uma determinada idade, expresso como uma renda vitalícia. O benefício do empregado vinculado ao plano é definido, geralmente, em função do tempo de serviço ou do salário médio”. Já os planos de CD são ressaltados no Art. 3º da Resolução MPS/CGPC de 2005:

Aquele cujos benefícios programados têm seu valor permanentemente ajustado ao saldo de conta mantido em favor do participante, inclusive na fase de percepção de benefícios, considerando o resultado líquido de sua aplicação, os valores aportados e os benefícios pagos.

Esse tipo de plano funciona como uma modalidade de poupança programada ou fundo de investimentos, de forma que, ao se aposentar o saldo acumulado é transformado em benefício de renda mensal que, por sua vez, pode ou não se de caráter vitalício, tendo ou não garantias de reajustes anuais (PINHEIRO, 2005).

A seu turno, os planos de CV ou planos mistos como também são chamados são a combinação dos outros dois tipos de planos, que se forma conciliando aspectos favoráveis de cada um dos outros planos, reduzindo o risco financeiro e demográfico e mantendo características previdenciárias dos planos (CGPC, 2005; PINHEIRO, 2005).

### 2.3.2 Dinâmica dos fundos de pensão

A dinâmica dos fundos de pensão se estabelece em uma série de recebimentos (ativos) no período em que os participantes se encontram em período laboral, seguido de uma série de pagamentos (passivos) na fase de inatividade dos participantes. Assim, patrocinadores e participantes dos planos, contribuem com recursos financeiros para posteriormente os empregados receberem em forma de aposentadoria. Desta forma, incumbe aos gestores dos fundos investirem os valores arrecadados com as contribuições em ativos rentáveis que garantam recursos capazes de cumprir os compromissos futuros em sua reserva matemática (FIGUEIREDO, 2011).

A reserva matemática “é igual ao valor atual dos benefícios futuros de todos os participantes, menos o valor atual das contribuições futuras – que é dado pelo valor atual dos benefícios futuros, menos o ativo do plano, dividido pelo valor atual dos salários futuros de todos os participantes” (PINHEIRO, 2007). A importância de projetar a reserva matemática (provisões) é a viabilização do cálculo e análise do superávit (solvência) do plano.

Dessa forma, a correspondência entre o fluxo de caixa do montante gerado pelas contribuições e o total gerado pelo pagamento dos benefícios medem a solvência financeira de

um fundo de pensão. Entende-se que, observar eficazmente esse fluxo causado pela diferença entre ativos e passivos nos fundos de pensão é a premissa na qual se aplica o ALM.

## 2.4 Programação estocástica

Os modelos de programação estocástica podem ser vistos como uma extensão dos modelos matemáticos de programação linear e não linear proposto por Dantzig (1955) e Beale (1955). O diferencial dos modelos estocásticos é o caráter da incerteza, desta forma, neste tipo de programação, os parâmetros que não são certamente conhecidos recebem uma representação probabilística (WETS, 1989).

De acordo com Wets (1989) por se tratar de um ambiente incerto é preciso que a decisão seja cuidadosa, visto que, esse fator desempenha um papel crucial quando se formula um problema de otimização estocástica. No tempo em que as variáveis de confiabilidade estiverem em primeiro plano, normalmente estas são incluídas em forma de restrições.

A programação estocástica consiste fundamentalmente em adotar que as metas instituídas sejam concebidas por variáveis aleatórias, com uma determinada distribuição de probabilidade (MELO, 2015). Concernente à aplicação de programação estocástica em modelos ALM, Hilli *et al.* (2007) enfatizam que o emprego estocástico é eficiente na determinação de estratégias otimizadas, no que tange à gestão de ativos e passivos, ao passo em que trata a complexidade atinente à dinâmica e as restrições legais neste tipo de problemas.

Na modelagem estocástica é necessário representar por meio de uma função objetivo as pretensões da decisão. No caso dos fundos de pensão, essa função normalmente se volta a identificar uma das preferências do gestor, sendo que existem duas formas equivalentes que modelam essas preferências, ou por meio da maximização da riqueza final do fundo no horizonte de planejamento ou pela minimização das taxas esperadas de contribuições ao longo do tempo (VALLADÃO, 2008).

Neste contexto, mediante modelos de programação estocástica é factível quantificar os efeitos de uma decisão no que diz respeito ao conjunto de objetivos previamente estabelecidos pelo decisor, garantindo que as restrições sejam modeladas, alcançadas e não violadas pela decisão.

Conforme Valladão (2008), os modelos recursivos estão entre os considerados mais relevantes dentro da classe de programação estocástica. Segundo o autor, a modelagem recursiva presume que as variáveis de decisão (primeiro estágio) dependem de decisões

ótimas envolvendo outras variáveis (segundo estágio), as quais estão envolvidas em um subproblema envolvendo possíveis cenários, os quais são de natureza estocástica.

Em se tratando de programação estocástica aplicada em modelos ALM, enfatiza-se que na gestão de ativos e passivos, normalmente há uma troca entre o custo inicial da formação de sua carteira de ativos, esperando-se retornos suficientes que atendam o passivo e o valor da carteira, que é deixado no final do horizonte planejado (KLAASSEN, 1998) - problemas solucionáveis por meio da aplicação de programação estocástica. Di Domenica *et al.* (2007) acrescentam que a programação estocástica agrupa modelos de alocação ótima com modelos de aleatoriedade, possibilitando a criação de uma estrutura de tomada de decisão robusta.

Consigli e Dempster (1998) mostram como um problema de portfólio dinâmico pode ser favoravelmente representado pela otimização estocástica, sendo formulado por uma programação estocástica de múltiplos estágios. Deste modo, as decisões relevantes correspondem ao reequilíbrio do portfólio ao longo do tempo. Os autores analisaram um modelo ALM para lidar com as incertezas dos ativos e passivos ao longo do tempo. O horizonte temporal foi analisado levando em consideração 10 estágios de decisão.

Sodhi e Tang (2009) investiga por meio da programação estocástica um modelo para planejar a cadeia de fornecimento industrial, cujo objetivo é levar a incerteza da demanda e seus fluxos de caixa para um horizonte de médio prazo. Para tal, observaram-se vários modelos estocásticos com o uso de ALM com o intuito de verificar a aplicabilidade de um modelo capaz de gerenciar os riscos relacionados à demanda não atendida, o excesso de estoque e a liquidez de caixa nos tempos que a demanda era incerta. Baseados na literatura sobre a programação estocástica, os autores concluem que as escolhas da modelagem e das soluções devem ser selecionadas com rigor para não comprometer os objetivos do decisor. Argumentam ainda que um modelo ALM é exequível para gerenciar cadeias de suprimento.

Com aplicação de modelos estocásticos é possível assumir uma progressão das informações através do tempo e dos estágios de decisão, em que cada decisão se adapta à informação disponível. A estrutura da programação estocástica tem sido utilizada como uma ferramenta potencialmente eficaz nas soluções de planejamentos financeiros. Conforme Gondzio e Kouwenberg (2001), num panorama financeiro, os estágios de decisão realizados de forma estocástica podem representar as datas de negociação, deste modo, em cada etapa o decisor pode reequilibrar sua carteira de ativos.

Quando se emprega a programação estocástica em modelos financeiros para tomar decisões ótimas é essencial criar uma árvore de eventos para realizar as análises. A árvore de

eventos indica a quantidade de nós (cenários) que serão observadas. O número de nós da árvore cresce exponencialmente, paralelamente ao horizonte de tempo (BAI; MA, 2009).

#### 2.4.1 Programação dinâmica estocástica e dinâmica dual estocástica

A programação dinâmica se caracteriza como uma técnica matemática utilizada para solucionar problemas de decisão sequencial ou de múltiplos estágios em que as decisões tomadas inicialmente apresentam influências sobre as demais decisões futuras (BELLMAN, 1958). No caso de um fundo de pensão, com base nesse aspecto, enfatiza-se que, a melhor maneira de investir recursos no ano atual vai depender de como os recursos dos investimentos atuais podem ser reinvestidos nos anos subsequentes. Desta forma, a política de investimentos que deve ser usada para os próximos anos depende do que o gestor espera obter no futuro e é considerada levando como base a decisão do agora.

A abordagem da programação dinâmica pode ser utilizada coligindo a propriedade sequencial por conveniência computacional e baseia-se essencialmente no princípio da otimalidade de Bellman. Diferentemente de outras divisões da programação, não pode ser definido um único algoritmo capaz de solucionar de forma direta todos os problemas de programação dinâmica. “A multiplicidade de situações modeláveis pela técnica requer teoria e arte utilizando diferentes funções na formulação da equação de otimalidade, embora o princípio utilizado seja sempre o de Bellman” (CAMPELO, 2002, p. 03).

Por meio da técnica da programação dinâmica é factível transformar problema sequencial em múltiplos estágios. Problemas que contenham diferentes variáveis interdependentes são transformados em uma série de subproblemas com menos variáveis. Tal transformação é constante e preserva o número de soluções viáveis, o valor da função objetivo associado a cada uma delas e, portanto, a própria solução ótima (CAMPELO, 2002).

A programação dinâmica dual estocástica se caracteriza como uma técnica alternativa à programação dinâmica estocástica, que propõe solucionar o problema da dimensionalidade, pois não apresenta a necessidade da individualização do espaço de estados. Utilizada principalmente em problemas de grandes dimensões, recorre a métodos de decomposição para solucionar o problema.

Segundo Shapiro (2011), uma propriedade relevante do método de programação dinâmica dual estocástica é que o enredamento computacional de uma execução dos procedimentos da etapa anterior e posterior envolvidos é proporcional à soma dos pontos de

dados amostrados em cada estágio e não ao número total de cenários dados por seu produto. Isso torna computacionalmente viável executar várias etapas para trás e para frente.

Como ressalta Brandi (2016), a programação dinâmica dual estocástica se baseia na decomposição de Benders para tratar então de forma analítica o problema com dimensionalidade complexa, dividindo o problema em subproblemas menores, não apresentado um espaço amostral discreto dos armazenamentos, mas constituindo-se de um processo de convergência no qual os pontos são percorridos conforme são realizadas as representações mais realistas da função ao longo das iterações.

#### 2.4.2 Modelo estocástico de dois estágios de decisão

Na programação estocástica de dois estágios com recurso, as variáveis de decisão do primeiro estágio são definidas antes da realização das variáveis aleatórias. Por isso, esse estágio é comumente atribuído às decisões chamadas “aqui e agora”. Com a inserção das variáveis aleatórias, são determinadas as variáveis de decisão do segundo estágio, com ações corretivas ou recursos providos para alinhar ou finalizar as decisões realizadas no primeiro estágio, levando em consideração o observado com as variáveis aleatórias. Assim, as variáveis do segundo estágio são também chamadas de decisões de recurso. À face do exposto, é entendível que o objetivo de um modelo de programação estocástica de dois estágios centra-se na identificação de uma solução de primeiro estágio equilibrada perante as possíveis realizações de variáveis aleatórias (ALÉM, 2011).

É recorrente na literatura aplicações em problemas de tomada de decisão em dois estágios (BIRGE; LOUVEAUX, 2011), no qual o gestor precisa decidir sobre uma ótima alocação de ativos (política de investimentos)  $x$  com custos  $C^T x$ , enquanto encaram a incerteza sobre os cenários econômicos (restrições). Desta forma,  $x$  representa o número de ativos comprados ao preço  $c$ . A incerteza é representada pela variável aleatória  $\xi$ , que se revela no horizonte de planejamento após um período. Com o cenário realizado  $\xi$  no horizonte de planejamento, o decisor elege uma ação de recurso  $y(\xi)$  que leva aos custos adicionais  $q(\xi)'y(\xi)$ . Numa conjuntura econômico-financeira  $\xi$  poderia representar o estado econômico após certo período, enquanto  $y(\xi)$  simbolizaria o número de ativos vendidos ao preço  $-q(\xi)$ .

Diante do exposto, o tomador de decisão objetiva minimizar a soma dos custos do primeiro estágio  $C^T x$  e dos custos esperados do segundo estágio  $E_{\xi}[q(\xi)'y(\xi)]$ . Assim, as decisões do primeiro estágio  $x$ , bem como as do segundo estágio  $y(\xi)$ , são restringidas por

um conjunto de equações lineares, que descreve o conjunto de soluções viáveis. O programa linear estocástico completo de dois estágios de decisão é descrito pelas Equações 7, 8 e 9:

$$\min C^T x + E_{\xi}[q(\xi)'y(\xi)] \quad (7)$$

$$s. a Ax = b, x \geq 0 \quad (8)$$

$$W(\xi)y(\xi) = h(\xi) - T(\xi)x, y(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \Xi \quad (9)$$

em que,  $\xi$  é um vetor aleatório e  $\Xi$  é o conjunto dos possíveis  $\xi$  realizados,  $x \in \mathcal{R}^{n1}$  é o vetor de variáveis do primeiro estágio de decisão,  $A \in \mathcal{R}^{m1 \times n1}$  é a matriz de restrição do primeiro estágio,  $b \in \mathcal{R}^{m1}$  é o vetor de primeiro estágio de coeficientes do lado direito e  $c \in \mathcal{R}^{n1}$  é o vetor de coeficientes objetivos do primeiro estágio. O símbolo  $y(\xi) \in \mathcal{R}^{n2}$  é um vetor aleatório de variáveis de decisão do segundo estágio,  $T(\xi) \in \mathcal{R}^{m2 \times n1}$  é a matriz aleatória que liga as decisões do primeiro estágio com as do segundo,  $W(\xi) \in \mathcal{R}^{m2 \times n2}$  é a matriz de recurso aleatória do segundo estágio,  $h(\xi) \in \mathcal{R}^{m2}$  é o segundo estágio aleatório do lado direito e  $q(\xi) \in \mathcal{R}^{n2}$  é o vetor aleatório de coeficientes objetivos do segundo estágio. De forma alternativa, o programa linear estocástico de dois estágios (Eq. 10, 11 e 12) pode ser estabelecido da seguinte maneira:

$$\min C^T x + E_{\xi}[Q(x, \xi)] \quad (10)$$

$$s. a Ax = b, x \geq 0 \quad (11)$$

$$Q(x, \xi) = \min_{y(\xi)} \{q(\xi)'y(\xi) | W(\xi)y(\xi) = h(\xi) - T(\xi)x, y(\xi) \geq 0\}, \forall \xi \in \Xi \quad (12)$$

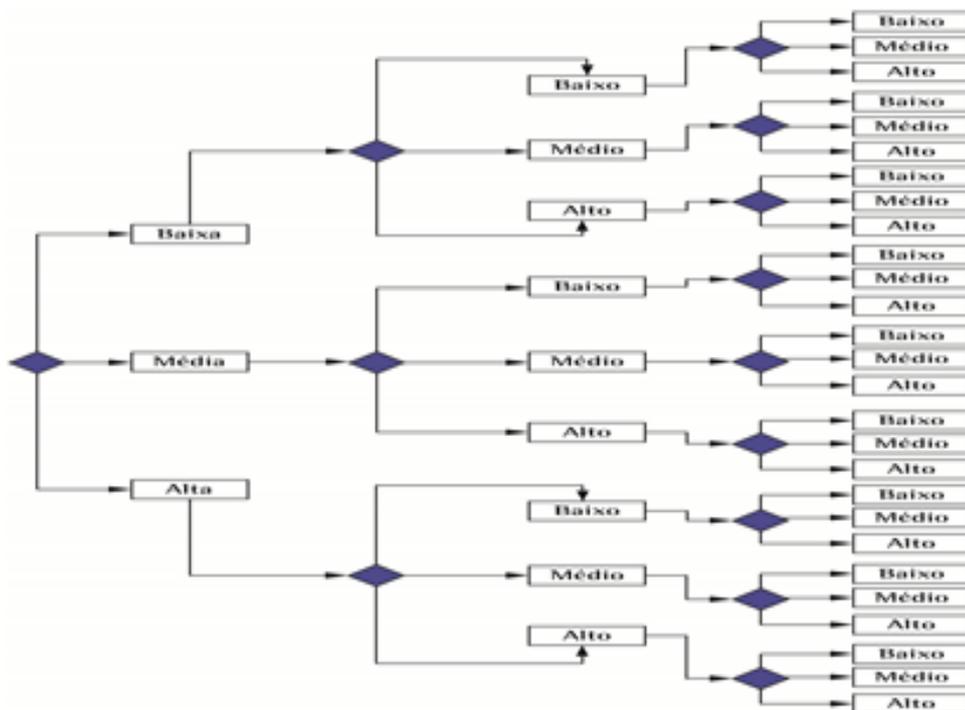
Nessa estrutura alternativa, a função objetivo (Eq. 10) juntamente com o conjunto de restrições de primeiro estágio (Eq. 11) é chamada de problema do primeiro estágio. Agora o gestor tem que decidir sobre suas ações  $x$ , ao mesmo tempo em que se defronta com a incerteza sobre a realização da variável aleatória  $\xi$ . Depois de um período, o gestor observará o valor realizado e tomará uma ação de recurso com propósito de corrigir a diferença entre  $h(\xi)$  e  $T(\xi)x$ , ao passo que minimiza os custos  $q(\xi)'y(\xi)$ . O problema (Eq. 12) é chamado de segundo estágio ou problema de recurso. De forma integrada, o programa linear em dois estágios tem o intuito de encontrar uma solução do primeiro que salvguarde a viabilidade do segundo estágio, minimizando a soma dos custos iniciais e dos custos esperados do segundo estágio de recurso (SHAPIRO; PHILPOTT, 2007).



ponto crucial para o sucesso na aplicação de programação estocástica em modelos ALM, ao passo que cria cenários com retornos dos ativos e passivos.

No processo de geração de cenários, inicialmente definem-se procedimentos para gerar retornos dos ativos, levando em consideração os cenários econômicos influentes. Para realizar esta etapa, Gondzio e Kouwerberg (2001) utilizaram dados históricos dos ativos para então modelar o primeiro estágio de decisão. Na modelagem de um fundo de pensão é pertinente observar os fatores econômicos, pois para estimar os ativos devem-se seguir regras apropriadas que considerem os riscos inerentes, como riscos atuariais, provisões e os aspectos demográficos, atos regulatórios, dentre outros (KOUWENBERG; ZENIOS, 2006). Desta forma, a Figura 3 apresenta a geração de cenários, em que cada estágio de decisão corresponde a alocações de ativos nas decisões de investimentos.

**Figura 3** – Geração de cenários ou árvore de eventos



Fonte: Elaboração própria, 2018.

Como ilustra a Figura 3, que apresenta uma árvore com três cenários de decisão (baixo, médio e alto), os dados utilizados na modelagem ALM pela otimização estocástica são fornecidos em cada estágio decisório. Segundo Di Domenica *et al.* (2007), a essência da árvore de cenários consiste na geração de cenários que mais se aproximem de uma determinada distribuição subjacente dos parâmetros aleatórios estabelecidos no modelo.

O processo de escolha da melhor aproximação geralmente baseia-se em determinada medida, capaz de quantificar a distância destes cenários gerados na distribuição subjacente. A geração de cenários envolve uma série de etapas, a saber: suposição de um modelo, estimativa dos parâmetros do modelo, geração das trajetórias concernente ao modelo adotado, amostragem condicionada com as trajetórias desejadas (DI DOMENICA *et al.*, 2007).

Quando é criado um modelo ALM com programação estocástica e geração de cenários, se especifica uma sequência de decisões de investimento em pontos de tempo discretos, cujas decisões são feitas no início de cada período de tempo. O gestor da carteira começa com um determinado portfólio e um conjunto de cenários sobre os futuros estados da economia que ela incorpora em uma decisão de investimento. A composição precisa da carteira depende das transações no ponto de decisão anterior e no cenário realizado no *interim*. Outro conjunto de decisões de investimento é feito incorporando o *status* atual do portfólio e novas informações sobre cenários futuros (GONDZIO; KOUWERBERG, 2001).

Neste contexto, o objetivo da construção de cenários para modelos estocásticos de vários estágios é criar mecanismos, de tal forma que o tamanho do programa estocástico continue alcançável, ainda representando a distribuição subjacente dos dados (ZOUWENBERG; ZENIOS, 2006).

Uma vez explorado o processo de otimização por programação estocástica, apresentado à utilização de modelos estocásticos na gestão de ativos e passivos, descrito a geração de cenários que será usada para modelar a temporalidade do modelo aplicado nesta dissertação, o próximo tópico e subtópicos apontam algumas definições sobre ALM, bem como apresenta estudos internacionais e nacionais que investigaram a gestão de ativos e passivos em fundos de pensão.

## **2.5 Pesquisas anteriores com aplicação de programação estocástica em modelos ALM**

Dert (1995) objetivou analisar a política de investimentos e de captação de fundos de pensão, levando em conta o desenvolvimento do passivo num conjunto de variáveis relacionadas com o ambiente econômico. O estudo apresentou um modelo de otimização baseado em cenários para ALM, tal modelo visava garantir probabilidade aceitável de subfinanciamento, estabilidade suficiente das contribuições futuras e minimização do valor presente das contribuições futuras esperadas. Um dos seus achados refere-se aos custos das contribuições totais. O autor relata que, o nível de contribuições totais para o fundo, no

modelo proposto, varia enormemente de um ano para outro, implicando que o uso de um ALM auxilia no controle das contribuições do plano.

Bogentoft, Romeijn e Uryasev (2001) estudaram um modelo de ALM para criar decisão ótima para múltiplos períodos de um fundo de pensão. Utilizaram o *Value-at-Risk* condicional (CVaR) como a medida de risco. O modelo baseou-se na simulação “caminhos amostrais” de passivos e retornos dos instrumentos financeiros na carteira e as decisões ótimas eram tomadas para grupos de “caminhos amostrais” que exibiam características de desempenho semelhantes. Os autores concluem que, a tomada de decisões dinâmicas através do uso de “caminhos amostrais” resulta em menores custos para o fundo do que uma alternativa sem agrupamentos.

Kouwenberg (2001) desenvolveu e testou métodos de geração de cenários para modelos de ALM, onde propôs um modelo de programação estocástica em múltiplos estágios para um fundo de pensão holandês. Para investigar o desempenho do modelo e os procedimentos de geração de cenários, realizaram-se simulações de horizonte de planejamento. O custo médio dos ativos e o risco da política de investimentos do país foram comparados com os resultados de um modelo de ativos mistos fixo. Os resultados mostraram que o desempenho do programa estocástico de múltiplos estágios poderia ser melhorado drasticamente, escolhendo um método de geração de cenários apropriado.

Hilli *et al.* (2007) descreveram um modelo de programação estocástica ALM em múltiplos estágios para uma companhia de seguros de pensão finlandesa. O modelo possui uma sequência de decisão (para alocar os ativos) que se entrelaça com uma sequência de observações de variáveis aleatórias (formando retornos dos ativos, etc.). Em cada estágio, as decisões são tomadas com base nas informações reveladas, então, as variáveis de decisão em uma fase são funções das variáveis aleatórias observadas até a fase atual. Este tipo de dinâmica interdependente de informações e decisões é típico na tomada de decisão sequencial sob incerteza, que é o que se observa nos ALM e muitos outros problemas de gestão de riquezas.

Dupacova e Polívka (2009) analisaram ALM usando programação estocástica para fundos de pensão checos. Os autores se concentraram em planos de contribuição definida e justificam a escolha salientando que estes planos podem estar ligados ao emprego ou à profissão. Ainda postulam que o modelo ALM desenvolvido para planos de pensões de contribuição definida distingue os fluxos de caixa do lucro contábil e modela as quantidades que são altamente relevantes para o gestor do fundo. Os autores concluem o artigo ressaltando que é possível usar apenas o cenário de valor esperado para os passivos em vez da árvore de

cenários reduzida. Por outro lado, mudanças na dinâmica esperada dos passivos, mesmo em um valor esperado alterado causaram mudanças significativas na solução ótima, isto é, na composição da carteira ótima do problema ALM. Assim, não seria possível separar os problemas de gerenciamento dos ativos do gerenciamento dos passivos.

Wane (2011) investiga a desilusão dos fundos de pensão suíços após a crise econômica atingida em 2008. No desenrolar da pesquisa ressaltam os mecanismos de ALM e a interpretação de seus resultados para fundos de pensão. Foram apontadas algumas inconsistências na maneira como o processo de ALM foi realizado, como por exemplo: pressupostos excessivamente otimistas que resultavam na exclusão de cenários de choque na simulação, bem como a diferença entre o valor econômico e a estrutura econômica do passivo.

Platanakis e Sutcliffe (2017) empregaram uma nova técnica de otimização numérica que denominam de otimização robusta para solucionar problemas de ALM para os regimes de pensão. A técnica requer a estimativa de menos parâmetros estocásticos, reduz o risco de estimação e adota uma abordagem prudente para alocação de ativos. Os autores desassociam os passivos de pensão em três componentes (membros ativos, membros diferidos e pensionistas) e transformam a alocação ótima de ativos na taxa de contribuição projetada. O modelo robusto de otimização é estendido para incluir passivos e usado para derivar políticas de investimento otimizadas para o plano de anuidades de universidades.

O trabalho de Dias (2008) teve por objetivo desenvolver uma aplicação prática de mensuração de compromissos de um plano de benefício previdenciário. No que concerne à função objetivo a ser determinada, não foi demonstrada na metodologia do trabalho. Os resultados demonstram o erro no qual o gestor do fundo de pensão pode incorrer ao ignorar o comportamento aleatório das variáveis que determinam seu passivo atuarial.

Valladão (2008) propõe uma metodologia para a gestão de ativos e passivos de um fundo de pensão, cujo foco é a obtenção de uma carteira ótima e uma medição de risco de insolvência do fundo. O modelo desenvolvido utiliza programação linear estocástica com múltiplos estágios, contemplando quatro classes de ativos: ações, imóveis, renda fixa e caixa. Utilizou-se a função objetivo de maximizar a utilidade esperada da riqueza do fundo ao final do horizonte estudado. Os resultados apontam a viabilidade de se gerenciar fundos de pensão por meio de programação estocástica, desde que sejam cumpridas as restrições propostas na modelagem da carteira de ativos e do passivo atuarial, observando os cenários econômicos e restrições regulatórias.

Amaral (2010) desenvolveu uma estratégia para a seleção dos ativos em fundos de pensão. O modelo ALM desenvolvido tinha por função objetivo a minimização da probabilidade de inadimplência de um fundo de pensão em um horizonte de 80 anos, através da escolha dos pesos das classes de ativos: renda variável, renda fixa, imóveis e operações com participantes. As análises efetuadas nos cenários de teste sugeriram que modelos que utilizam revisões periódicas de alocação apresentam soluções superiores aos modelos que projetam uma alocação estática nas proporções de ativos no horizonte do investimento. Como resultado o modelo de alocação dinâmica conseguiu superioridade aproveitando a margem existente entre o valor dos ativos e os desembolsos previstos para aumentar ou diminuir a participação em ativos mais voláteis.

Figueiredo (2011) propôs uma metodologia para a tomada de decisão de investimento no instante atual da carteira de um fundo de pensão que opera com plano de benefício definido. Na modelagem proposta, adotou-se a função objetivo maximizar o valor esperado sobre todos os possíveis cenários, admitindo o gestor ter poder de decidir sobre a composição de ativos, no entanto, sem ter o controle do planejamento atuarial. A metodologia mostrou-se consistente e adequada para indicar a saúde financeira do fundo de pensão observado, dado as probabilidades de insolvência e o risco modelado. O enfoque do problema da tomada de decisão por meio da programação estocástica apresentou compatibilidade com os elementos modelados, as restrições gerenciais e com os cenários econômicos.

O estudo de Marques (2011) objetivou validar um modelo matemático que otimizasse função objetivo sujeita a um conjunto de restrições. Desta forma, a solução da otimização centrou-se em encontrar as proporções ótimas de alocação dos ativos nos diversos segmentos de investimentos permitidos pela legislação brasileira aos fundos de pensão. A validação deu-se pela aplicação do modelo ALM junto a Fundação dos Economiários Federais (FUNCEF), cuja função objetivo foi de maximizar o valor líquido restante médio, sujeito a restrição de que o fator de solvência mínimo seja de 5% percentil. A validação do modelo foi viabilizada, haja vista, os objetivos propostos serem atendidos pela conjuntura composta pelos ativos e pelas restrições aplicadas da FUNCEF.

Nascimento (2012) apresenta uma metodologia de gestão de um plano de benefício previdenciário na modalidade de benefício definido, de modo a garantir que o provimento dos benefícios prometidos pelo plano fosse permanentemente assegurado aos seus participantes. A solução do problema deu-se por meio da utilização de metodologia de programação linear estocástica multiestágio mista inteira. O modelo empírico explorou dois exemplos de simulação: necessidade de contribuição extraordinária e devolução de contribuição. Em

ambas, o modelo sugeriu um comportamento que deve ser discutido entre as partes envolvidas para que os gestores do fundo de pensão determinem uma decisão tática de investimentos plurianuais.

O objetivo da pesquisa de Oliveira (2014) foi apresentar descrever e analisar os resultados de um modelo para administração de ativos e passivos através do tempo, utilizando otimização e programação estocástica em período de tempo discreto baseada em uma árvore de cenários múltiplos estágios balanceada. A função objetivo proposta no estudo baseia-se na maximização da riqueza terminal do portfólio, pelo investidor. Como resultados, referente ao modelo estocástico, os valores encontrados para a composição do portfólio no instante inicial foram julgados adequados e condizentes com conjuntura brasileira do período do estudo, ao passo que estiveram próximos das composições de carteiras de fundos brasileiros.

Conforme observado, a literatura nacional mesmo já apresentando alguns trabalhos empíricos concernentes à gestão de ativos e passivos nos fundos de pensão, ainda carece de novas investigações que enriqueçam esse campo acadêmico, assim, esta pesquisa contribui por ampliar a literatura e por acrescentar uma modelagem empírica empregada aos fundos de pensão inseridos na conjuntura brasileira. Na sequência são apresentados conceitos sobre ativos e passivos à luz das teorias contábeis e atuariais.

## **2.6 Abordagem conceitual dos ativos e passivos**

### **2.6.1 Ativo e passivo à luz da teoria contábil**

De acordo com a Norma Brasileira de Contabilidade Técnica Geral (NBC TG) Estrutura conceitual, aprovada pela Resolução do Conselho Federal de Contabilidade, nº 1.374/11 (CFC, 2011), “ativo é um recurso controlado pela entidade como resultado de eventos passados e do qual se espera que fluam futuros benefícios econômicos para a entidade”. Nessa visão, os ativos são bens e direitos resultantes de ações passadas. Por exemplo, considere a compra de um imobilizado (investimento ocorrido para se obter um bem) ou uma venda a prazo (direito de receber, que a parte que vendeu possui). Dessas transações, espera-se um retorno econômico futuro que se traduza em entradas de caixa. Nestes aspectos, apresenta-se a base conceitual dos ativos por diferentes fontes.

Segundo o *Financial Accounting Standards Board* (FASB, 1985, p. 16), “os ativos são prováveis benefícios econômicos futuros, obtidos ou controlados por uma entidade como resultado de transações ou eventos passados”. Já a definição dada por Hermanson, Edwards,

Salmonson (1987, p. 31) apresenta que “ativos são recursos em propriedade de empresa. Esses recursos podem ser usados ou trocados para produzir o serviço ou o produto da empresa. Além disso, o ativo possui potencial utilidade ao seu proprietário que pode ser mensurado e expresso em termos monetários”.

Horngren, Harrison e Robinson (1996, p. 11) conceituam da seguinte maneira: “ativos são recursos econômicos que beneficiam a empresa no presente e no futuro”. Outro conceito, o de Iudícibus (2009, p. 124-125) destaca que “ativos são recursos controlados por uma entidade capazes de gerar, mediata ou imediata, fluxos de caixa” (IUDÍCIBUS, 2009, p. 124-125).

Já após o processo de convergência contábil, em aderência as normas internacionais de contabilidade, o *International Accounting Standards Board* (IASB, 2010, p. 26) preceitua que “um ativo é um recurso controlado pela entidade como resultado de eventos passados e a partir do qual os benefícios econômicos futuros deverão fluir para a entidade”. Por fim, Hendriksen e Van Breda (2010, p. 281) dizem que “ativos são essencialmente reservas de benefícios futuros”.

Conforme os conceitos trazidos pela literatura, percebe-se que, para compreender a definição de ativos é preciso relacioná-lo aos fatos econômicos, sempre visando à elaboração dos relatórios contábeis que devem apresentar informações úteis que auxiliem na tomada de decisão, seja para investimentos, empréstimos ou evento semelhante.

Os recursos, termo apresentado em quase todos os conceitos abordados, são caracterizados como econômicos, quando são escassos, ou seja, podem trazer vantagens para a entidade, considerando a oferta e a demanda. Dessa forma, os recursos econômicos são objetos físicos (bens) ou direitos, sejam estes apresentados em contrato formal ou informal e, para a Contabilidade, os recursos interessados são aqueles cuja posse é da entidade, valendo ressaltar que essa posse implica no direito de uso ou controle desse ativo.

Em se tratando de benefícios econômicos futuros, estes são exclusivos da entidade e capazes de passar pelo processo de mensuração em dinheiro. Esses benefícios decorrem de eventos, tais como as vendas e prestações de serviços, cujo resultado seja a geração de fluxos de entradas de caixa (FERNANDES, 1998; IUDÍCIBUS, 2010).

Concernente ao conceito de passivos, pela visão de Kam (1990, p. 111), os passivos “são prováveis sacrifícios de benefícios econômicos decorrentes das obrigações atuais de uma determinada entidade para transferir ativos ou prestar serviços a outras entidades no futuro como resultado de transações ou eventos passados”. Enquanto, Godfrey *et al.*(2006), pela ótica da teoria contábil, destacam passivo como uma obrigação presente da entidade

decorrente de eventos passados, cuja liquidação deverá resultar em uma saída de recursos da entidade incorporando benefícios econômicos.

Na interpretação dada por Weil, Schipper e Francis (2014), os passivos são créditos dos credores. Os credores forneceram fundos, ou bens e serviços, e a empresa tem a obrigação de pagar credores por esses bens e serviços. Neste sentido, os passivos resultam de uma empresa ter recebido benefícios como, por exemplo, estoques, serviços de mão-de-obra.

O conceito de “passivo”, relatado pelo Comitê de Pronunciamentos Técnicos (CPC) 00 (R1), denominado “Pronunciamento Conceitual Básico”, define que “passivo é uma obrigação presente da entidade, derivada de eventos passados, cuja liquidação se espera que resulte na saída de recursos da entidade capazes de gerar benefícios econômicos”, ou seja, a entidade espera que a partir da saída recursos, causada pela evidenciação de um dever para com terceiros, benefícios surjam em função desse fato.

#### 2.6.2 Ativo e passivo atuarial

A posição (*status*) atuarial retrata a condição econômica real dos planos de fundos de pensões e consiste na diferença entre o valor presente esperado das obrigações atuariais, denominado passivo atuarial e o valor dos ativos do plano, o ativo atuarial (CARVALHO, 2007). Chagas (2006) menciona que a relação entre o passivo e o ativo atuarial tem características de apuração semelhante à contabilidade financeira tradicional, em que a origem dos compromissos futuros de uma entidade passa pela entrega futura de um bem ou direito do seu credor (obrigações).

A origem do passivo atuarial está na expectativa de seu planejamento. Assim, em primeira mão, define-se o valor a ser pago aos participantes dos planos de aposentadoria ou pensão futuramente, levando em considerações as cláusulas contratantes iniciais. Daí então nasce um fundo de pensão, como em qualquer outra empresa, pelo seu passivo, levando em conta que neste caso, a contabilização desse compromisso futuro, ou seja, do passivo atuarial, deverá ser feita a valor presente. Desta forma, o registro contábil do passivo atuarial configura numa obrigação a valor presente (CHAGAS, 2006).

Para avaliar e mensurar o valor do passivo atuarial de um plano de benefícios utiliza-se um processo chamado avaliação atuarial. Vale salientar que, este processo de avaliação analisa a capacidade de pagamento do plano e as variáveis econômicas. Os fatores de capacidade (salários e benefícios) são utilizados para estimar as perdas inflacionárias decorrentes dos efeitos da inflação futura, de modo a determinar o valor real, ao longo do

tempo, dos salários e dos benefícios. Os aspectos econômicos (neste caso, a inflação) deverão ser discutidos anualmente na avaliação atuarial para que as hipóteses considerem as expectativas econômicas de longo prazo.

Para fins de solvência, salienta-se que, quando o valor dos ativos se iguala aos seus passivos atuariais, o plano de benefícios previdenciários encontra-se em equilíbrio financeiro e atuarial. Em contrapartida, quando o valor dos ativos ou patrimônio do plano superarem o seu passivo atuarial, o plano se encontrará em estado superavitário, no tempo em que os ativos forem menores que os compromissos do plano, diz-se que este plano está deficitário (DIAS, 2008).

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo traz a tipologia ou enquadramento da pesquisa; modelagem dos ativos e passivos para os fundos de pensão por meio da programação estocástica; modelo utilizado na pesquisa; geração de cenários; composição da carteira de ativos e os procedimentos de calibragem na modelagem.

#### 3.1 Enquadramento metodológico da pesquisa

Partindo do pressuposto de que a pesquisa científica é a verificação concreta de uma investigação e que sua realização deve ser autêntica e planejada, o enquadramento metodológico ou tipologia da pesquisa tem por finalidade apresentar a delimitação do objeto de estudo e apontar justificativas dos métodos empregados na consecução da pesquisa. De acordo com Neves (2007), a adequação ao rigor metodológico é realizada consonantemente com a questão problematizante e os objetivos previamente estabelecidos para executar a pesquisa.

Concernente aos objetivos traçados, esta pesquisa classifica-se como exploratório-descritiva, o caráter exploratório assegura-se por investigar um fenômeno pouco esmiuçado pela literatura nacional, encontrando desta forma, lacunas oportunas (COOPER; SCHINDLER, 2014). A necessidade de estudar fundos de pensão na atual conjuntura econômica é respaldada pelas novas reformas propostas à previdência social brasileira. Ademais, ainda que exista produtividade acadêmica pertinente a este objeto de investigação, cabem novas descobertas empíricas sobre o “casamento” de ativos e passivos em fundos de pensão brasileiros com uso da programação estocástica.

Em relação à natureza descritiva, o enquadramento se dá por atentar na descrição dos fatos, apontando as principais características dos fundos de pensão brasileiros. Como salienta Kothari (2004, p. 37), neste método de pesquisa, “o pesquisador deve ser capaz de definir claramente o que quer medir e deve encontrar métodos adequados para medi-lo, juntamente com uma clara definição da população que se deseja estudar”.

Os aspectos tipológicos da natureza dos dados e abordagem do problema delineiam esta pesquisa como essencialmente quantitativa. As pesquisas quantitativas preocupam-se em apontar resultados numéricos capazes de generalizar a população observada. Essa tipologia é analisada tipicamente por procedimentos estatísticos, onde se testam teorias objetivas e examinam as relações que as variáveis imprimem para explicar o fenômeno investigado (VANDERSTOEP; JOHNSON, 2008; CRESWELL, 2010; NEUMAN, 2014).

Em relação à lógica da pesquisa, classifica-se como dedutiva, cujo direcionamento parte de uma teoria existente, observações empíricas baseadas em fatos pesquisados e relações entre variáveis. “O raciocínio dedutivo serve para criar conclusões particulares derivadas de premissas gerais” (COOPER; SCHINDLER, 2014, p. 64). Neste direcionamento, esta pesquisa enceta-se com a teoria da seleção de carteiras para então apontar as análises conclusivas das alocações ótimas de ativos e passivos com modelo ALM via programação estocástica.

No tocante à disciplinaridade, classifica-se como uma pesquisa multidisciplinar. O escopo do trabalho envolve uma interação das variadas ciências: Economia, Contabilidade, Atuárias, Estatística e Pesquisa Operacional e Computacional. Conforme Pruzan (2016), a pesquisa multidisciplinar envolve diversas ciências que trabalham conjuntamente, transferindo para a investigação um agrupamento de conhecimentos e paradigmas que se complementam.

A natureza da pesquisa a qualifica como uma pesquisa aplicada. Essa tipologia tem como foco principal, não a geração de novos conhecimentos (teorias), mas a exploração do conhecimento existente para desenvolver novas técnicas (PRUZAN, 2016). Adicionalmente, a pesquisa aplicada é aquela em que as técnicas, procedimentos e métodos que formam o corpo metodológico são aplicados para coletar informações sobre vários aspectos ou situação de um problema ou fenômeno (KUMAR, 2011). Nesta investigação, aplica-se um modelo para gerir os ativos e passivos das EFPC brasileiras, e assim, apontar resultados que representam as características destas organizações.

Outra forma de classificar a pesquisa diz respeito ao conjunto de crenças que norteiam a ação do pesquisador. Neste aspecto, esta pesquisa adota uma concepção filosófica pós-positivista, centrada na determinação, reducionismo, mensuração empírica e na verificação da teoria (CRESWELL, 2010). Assim, assume-se como verdade, a capacidade que o modelo ALM empregado nesta pesquisa, tem em externar a realidade dos fundos de pensão: prevendo, explicando e controlando as variáveis de mensuração. Neste paradigma, “métodos quantitativos de pesquisa são utilizados principalmente, com o objetivo de produzir conhecimento universal e generalizável” (ROBINSON; DAVID; HILL, 2016, p. 273).

Depois de apresentado o panorama tipológico da pesquisa, a subseção seguinte descreve características gerais dos fundos de pensão, aponta os principais tipos de planos de benefícios que estas entidades oferecem aos participantes e expõe o comportamento da dinâmica operacional.

### 3.2 Modelagem ALM para fundos de pensão

Conforme Valladão (2008), os elementos que compõem um modelo de ALM para fundos de pensão são: modelo de programação estocástica, modelo estocástico para os fatores econômico-financeiro, método de geração de cenários, modelagem financeira para os ativos, modelagem financeira para os passivos, método de mensuração e controle de equilíbrio.

Na realização da modelagem ALM para os fundos de pensão brasileiros, esta pesquisa adota um modelo de programação estocástica. Segundo Kouwenberg e Zenios (2006), a programação estocástica agrupa em sua estrutura, múltiplas fontes de risco de forma correlacionada tanto para os ativos quanto para os passivos, num panorama de longo prazo, acomodando diferentes níveis de aversão ao risco, permitindo um rebalanceamento dinâmico no portfólio, satisfazendo as restrições operacionais (comprar, vender e investir) em ativos e restrições regulatórias (limites de alocação). Posto isso, a seguir é descrito o processo estocástico do modelo de programação.

#### 3.2.1 Apresentação do modelo proposto

Na modelagem dos fundos de pensão estabelecida nesta dissertação, o paradigma ALM consiste em alocar determinada quantidade de riqueza em dois ativos financeiros,  $i = 1, 2$ , de modo a cobrir os passivos,  $L_{tn}$ , em cada período de tempo,  $t = 0, \dots, 5$ , considerando o número de nós para cada unidade de tempo, dado por  $N_t$ . Cabe salientar que, a árvore de possibilidades (cenários) começa com um nó e se expande exponencialmente em potências de 3, até o último período, que apresenta 243 casos possíveis.

O modelo estocástico ALM proposto nesta investigação é construído com adaptações da modelagem feita por Kouwenberg (2001), que usa a técnica ALM para apresentar o desempenho dos fundos de pensão holandeses. Com uma abordagem simplificada, são adotadas premissas econômicas e atuariais, no entanto, levando em consideração o cenário dos fundos de pensão brasileiros. Diferentemente da aplicação original, esta pesquisa não adota penalidades para os períodos em que houver déficits nos fundos de pensão.

As variáveis de decisão que definem a alocação dos ativos são determinadas por  $X_{itn}^h$ ,  $X_{itn}^b$  e  $X_{itn}^s$ , que representam, respectivamente, a escolha ótima (em milhões de reais) sugerida sobre os valores monetários alocados em investimentos, aquisições e vendas do ativo  $i$  no cenário  $n = N_t$ , elencado para a  $t$ -ésima unidade de tempo. A variável de decisão taxa de contribuições,  $cr_{tn}$ , é usada para modelar os pagamentos das contribuições feitas aos fundos

de pensão por parte dos patrocinadores. A Tabela 1 expõe o resumo das notações do modelo proposto.

**Tabela 1 - Resumo das notações do ALM**

Notação	Descrição
<b>Índices/Conjuntos</b>	
$i$	Índice de classes de ativos $i = 1$ (renda variável) e $i = 2$ (renda fixa)
$t$	Índice de tempo $t = 0, \dots, 5$
$n$	Índice dos casos possíveis para cada unidade de tempo (nós) $n_t = 1, \dots, N_t$
<b>Variáveis de decisão</b>	
$X_{itn}^h$	Montante (em milhões de reais) alocado na classe de ativos $i$ no início do tempo $t$ no nó $N_t$
$X_{itn}^b$	Montante (em milhões de reais) adquirido na classe de ativos $i$ no início do tempo $t$ no cenário $N_t$
$X_{itn}^s$	Montante (em milhões) alocado em vendas na classe de ativos $i$ no início do tempo $t$ no cenário $N_t$
$cr_{tn}$	Taxa de contribuição no início do tempo $t$ para o nó $N_t$
$X_i^{ini}$	Montante (milhões de reais) inicial investido na classe de ativos $i$ ( $t = 0$ )
$A_{tn}$	Agregado de ativos (renda variável e fixa) – milhões de reais – associado à carteira no final do tempo $t$ e no nó (caso possível) $N_t$
$Z_{tn}$	Diferença entre ativos e passivos (déficit) associado ao nó $N_t$ da $t$ -ésima unidade de tempo
<b>Parâmetros</b>	
$L_{tn}$	Passivos (milhões de reais) no nó $N_t$ ao final do tempo $t$
$S_{tn}$	Salários totais dos participantes (milhões de reais) no nó $N_t$ ao início do tempo $t$
$P_{tn}$	Probabilidade de ocorrência do cenário descrito para o nó $N_t$
$\gamma$	Taxa de corretagem do investimento (custos de transação)
$r_{itn}$	Retornos sobre os ativos $i$ no tempo $t$
$F^{min}$	Razão entre ativos e passivos (razão de garantia) mínima tolerada pelo gestor do fundo
$F$	Razão de garantia apresentada para o nó $N_t$ ao final do tempo $t$
$\hat{n}$	Nó antecessor (em $t - 1$ ) ao nó $n$ (em $t$ )
$\alpha_t$	Taxa percentual, em $t$ , que garante um valor mínimo para a arrecadação sobre os salários, relacionando-a com as obrigações futuras (passivos) previstas para o fundo
$w_i^{lo/up}$	Limite inferior/superior para os pesos relacionados com o <i>mix</i> de ativos

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

O modelo tem por objetivo a minimização da soma das taxas de contribuição esperadas. Estabelecida a função objetivo do modelo, cabe ressaltar que a modelagem proposta é aplicável à gestão de planos de benefícios nos fundos de pensão em caráter de criação do fundo. A função objetivo, em sua formulação geral, juntamente com as restrições do problema são descritas a seguir.

$$\min \sum_{t=0}^5 \left( \sum_{n=1}^{N_t} P_{tn} cr_{tn} \right) \quad (17)$$

s.a

$$cr_{tn}S_{tn} = - \sum_{i=1}^2 (1 - \gamma_i^s) X_{itn}^s + \sum_{i=1}^2 (1 + \gamma_i^b) X_{itn}^b; n = 1, \dots, N_t, t = 0, \dots, 5 \quad (18)$$

$$cr_{01}S_{01} = - \sum_{i=1}^2 (1 - \gamma_i^s) X_{i01}^s + \sum_{i=1}^2 (1 + \gamma_i^b) X_{i01}^b \quad (19)$$

$$X_{itn}^h = (1 + r_{itn}) X_{i,t-1,\hat{n}}^h - X_{itn}^s + X_{itn}^b; i = 1, \dots, 2, t = 0, \dots, 5, n = 1, \dots, N_t \quad (20)$$

$$X_{i01}^h = X_i^{ini} - X_{i01}^s + X_{i01}^b; i = 1, \dots, 2 \quad (21)$$

$$A_{tn} = \sum_{i=1}^2 X_{i,t-1,\hat{n}}^h (1 + r_{itn}); t = 0, \dots, 5, n = 1, \dots, N_t \quad (22)$$

$$A_{tn} \geq F^{min} L_{tn}; t = 0, \dots, 5; n = 1, \dots, N_t \quad (23)$$

$$Z_{tn} = A_{tn} - L_{tn} \quad (24)$$

$$F = \frac{A_{tn}}{L_{tn}} \quad (25)$$

$$cr_{tn}S_{tn} \geq \alpha_t L_{tn} \quad (26)$$

$$w_i^{lo} \sum_{i=1}^2 X_{itn}^h \leq X_{itn}^h \leq w_i^{up} \sum_{i=1}^2 X_{itn}^h; i = 1, \dots, 2, t = 0, \dots, 5, n = 1, \dots, N_t \quad (27)$$

$$X_{itn}^h, X_{itn}^b, X_{itn}^s \geq 0; i = 1, \dots, 2, t = 0, \dots, 5, n = 1, \dots, N_t \quad (28)$$

A proposta do modelo se estabelece em forma de um problema de alocação estocástica, considerando a aleatoriedade dos preços dos ativos e também a dependência do tempo para tomar decisão de investir e reequilibrar o portfólio. Adota-se uma política de investimento com conjuntos de variáveis de decisão.

O modelo minimiza a soma das taxas esperadas de contribuição, cujo objetivo do gestor centra-se em estabelecer políticas de contribuições para novos planos de benefício (Eq. 17). Cabe ressaltar que se adota esta função objetivo por manter coerência com as atividades das EFPC, que não tem finalidade de lucros, e sim o objetivo de honrar os compromissos assumidos pelos planos. Modela-se para o período inicial do fundo uma taxa de contribuição ( $cr_{tn}$ ) de 11%, bem como adota-se para a taxa de contribuição, limite inferior de 7% e limite superior de 25% ao longo do horizonte de planejamento, que será aplicado na Equação 26.

A restrição de saldo de caixa (Eq. 18) especifica que a arrecadação em contribuições sobre os salários se distribui em aquisição líquida de ativos. Ou seja, no início de cada período, o gestor vende ativos e subtrai esse montante do valor destinado às novas aquisições. Essa diferença se iguala ao montante arrecadado em contribuições, cuja determinação do saldo de caixa inicial é exposta na Equação 19.

A Equação 20 indica a relação do inventário de ativos, especificando que o montante investido numa classe de ativos no início de um período é igual ao montante investido no final do período anterior, ajustado para compra e venda. As igualdades expostas na referida equação estabelecem uma restrição do saldo de ativos. A relação de inventário inicial de ativos é modelada pela Equação 21.

A restrição que mede o valor total dos ativos no final de um período de tempo é descrita na Equação 22, que modela os ativos agregados, apontando os fluxos de entradas e saídas de caixa do fundo. A Equação 23 expõe uma garantia mínima aos ativos agregados, sendo esta determinada por um percentual sobre os passivos. A Equação 24 mede a diferença entre os ativos e passivos ao longo do horizonte de planejamento do fundo, apontando superávit ou déficit ao final de cada período de tempo.

A Equação 25 descreve a trajetória da razão de garantia, enquanto que a Equação 26 insere uma restrição para a taxa de contribuição (arrecadação), na qual seu equilíbrio é dado por um percentual ( $\alpha_t$ ) sobre os passivos ( $L_{tn}$ ), sendo esta taxa decrescente ao longo do horizonte de planejamento e determinadas pelas taxas descritas na Tabela 2.

**Tabela 2** - Percentual aplicado sobre a arrecadação

<b>Tempo de atividade do fundo</b>	<b>Percentual (<math>\alpha_t</math>)</b>
Ano 1	11%
Ano 2	10,50%
Ano 3	10%
Ano 4	9%
Ano 5	8%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Justificam-se as alíquotas decrescentes pelo fato de no começo o fundo exigir mais dos beneficiários para fins de manutenção, como uma espécie de fundo de garantia. Ao longo do prazo considerado, a alíquota decresce gradativamente até o patamar de 8%.

A Equação 27 é modelada em consonância com a legislação brasileira aplicada aos fundos de pensão. De acordo com a Resolução nº 3.792 de 24 de setembro de 2009, regulada pelo Conselho Monetário Nacional (CMN), ficam estabelecidos que os recursos dos planos

administrados pelas EFPC podem ser aplicados, observando os limites máximos, nos segmentos apresentados na Tabela 3.

**Tabela 3 - Limites de alocação dos ativos permitidos aos fundos de pensão**

<b>Segmento do ativo</b>	<b>Limite máximo</b>
Renda fixa	100%
Renda variável	70%
Investimentos estruturados	20%
Investimentos no exterior	10%
Imóveis	8%
Operações participantes	15%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Conforme Oliveira *et al.* (2017), o emprego dos limites tem por finalidade manter o controle do risco financeiro dos fundos, bem como proporcionar proteção aos membros. Desta forma, como esta pesquisa analisa dois segmentos de ativos: renda fixa e ações, os limites de alocação nestes dois segmentos são expostos na Tabela 4.

**Tabela 4 - Limites de alocações nos segmentos de ativos**

<b>Segmento do ativo</b>	<b>Limite mínimo</b>	<b>Limite máximo</b>
Renda fixa	50%	100%
Renda variável	20%	70%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

A Equação 28 expressa às restrições de não negatividade. Após apresentar a proposta do modelo estocástico ALM para os fundos de pensão, bem como apontar as principais restrições relacionadas ao mesmo, o subcapítulo seguinte descreve a geração dos cenários dos ativos e passivos, definindo sua composição e modelagem.

### 3.2.2 Geração de cenários possíveis em cada nó da árvore de possibilidades

Na programação estocástica e na modelagem ALM, uma questão central é a geração de árvore de possibilidades, a qual possibilita visualizar todos os casos possíveis e suas respectivas probabilidades. Como aponta Scuzziato (2016, p. 44), “a construção dessa árvore é uma etapa muito importante da modelagem, dado que a mesma é responsável por aproximar o processo estocástico das variáveis aleatórias”. Cabe ressaltar que a programação estocástica utilizada na presente pesquisa adota um modelo extensivo equivalente determinístico com foco nas equações 17 a 28.

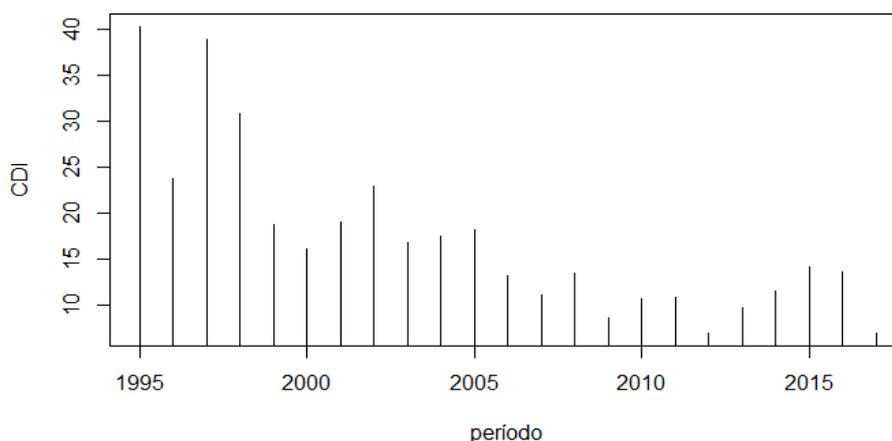
### 3.2.2.1 Os cenários dos ativos e fatores econômicos para os fundos de pensão brasileiros

A Resolução CMN nº 3.792/2009 determina no Art. 16 que as EFPC devem decidir a política de investimentos referente à aplicação dos recursos administrados, destacando no mínimo itens como, alocação e limites dos recursos por segmento, taxa mínima atuarial, meta de rentabilidade para cada segmento de aplicação, metodologia adotada para apreçar os ativos financeiros, metodologia e critérios para avaliar riscos de créditos, de mercado, de liquidez, operacional, legal e sistêmico.

Desta forma, uma EFPC administra os ativos financeiros oriundos das contribuições, os rendimentos dos investimentos e a valorização das carteiras, com isso, passam a garantir o passivo atuarial, que é o pagamento dos benefícios de aposentaria realizado pelos planos de previdência. Para que esse panorama aconteça positivamente é preciso administrar eficientemente os seus ativos, isto é, adotar uma política de investimentos em ativos que lhes der essa garantia.

Na modelagem dos ativos, esta pesquisa adota para composição de carteiras de investimentos, as classes de ativos de renda fixa e renda variável. Os dados referentes aos ativos de renda fixa foram coletados das séries históricas do Banco Central do Brasil (BACEN) do período de 1996 a 2017, cuja alocação dessa linhagem de ativos é calibrada pelos retornos do Certificado de Depósito Interbancário (CDI), que é “um instrumento que permite a troca de recursos entre instituições financeiras, possibilitando a captação ou aplicação de capitais excedentes” (FIGUEIREDO, 2011, p. 45). O retorno anual da série temporal do CDI é visualizado na Figura 5.

**Figura 3 - Retorno do CDI de 1996-2017**



Fonte: BACEN, 2018.

A Figura 5 explica os retornos do CDI ao longo do período observado, apresentando o comportamento dos juros ao longo da série verificada. Essa observação serve para indicar o nível de rendimentos dos ativos de renda fixa para os fundos de pensão com gestão conservadora.

O início da série é marcado por um período de crises internacionais relevantes com impactos no processo de alta inflação no ambiente doméstico do Brasil. Percebe-se que em 1998 os juros são altos (aproximadamente 40%), isso se deve à reação do Banco Central à hiperinflação no início do plano real em 1994. Crises externas como da Ásia em 1997 e da Rússia em 1998 e a mudança do regime de cambial de fixo para flutuante em 1999, são fatores que correspondem às altas na taxa básica de juros, por conseguinte no CDI. Já a elevação dos juros em 2002 (aproximadamente 23%) é marcada pela crise eleitoral (VALLADÃO, 2008). Mantendo valores abaixo dos 15% desde 2006, o CDI apresenta em 2017 um retorno de aproximadamente 7%.

Com os resultados dos retornos empíricos anuais do CDI, para calibrar na modelagem os ativos de renda fixa efetuou-se uma aproximação usando os quantis, a fim de representar as possibilidades dos cenários. Desta forma, os cenários de baixa, média e de alta foram modelados conforme Tabela 5.

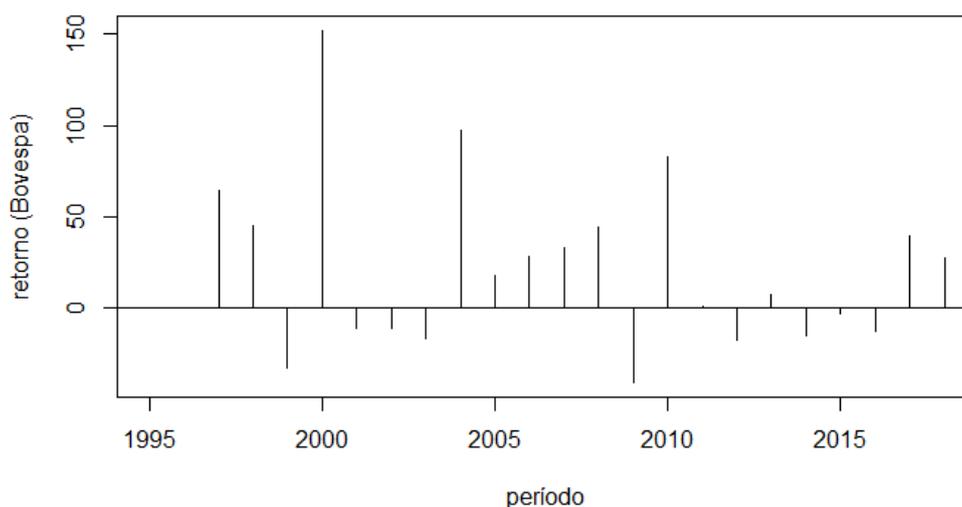
**Tabela 5** - Percentuais modelados para representar os ativos de renda fixa nos cenários

Cenários	Representação	Percentual
Cenário de baixa	1º quartil	6,9% a.a.
Cenário médio	2º quartil	14% a.a.
Cenário de alta	3º quartil	18% a.a.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Como informado na Tabela 5, para cada cenário é modelado um percentual para os ativos de renda fixa que, tem suas probabilidades de ocorrência estabelecidas para os cenários de baixa, médio e alta por 25%, 50% e 25%, respectivamente.

A carteira de renda variável (ações) é representada pela série dos retornos do Índice Bovespa (Ibovespa), que mede o resultado de uma carteira teórica de ativos, indicando o desempenho médio das cotações dos ativos com maior volume de negócios. Para estimar a carteira de ações, coletam-se dados do Ibovespa por meio do programa Economática®, cujos retornos históricos anuais da série de 1996 a 2017 são expostos na Figura 6.

**Figura 4 - Retorno do Ibovespa de 1996 a 2017**

Fonte: Economática, 2018.

De posse da série dos retornos dos ativos de renda variável, foi realizada uma aproximação para determinar os parâmetros de retornos nos cenários de baixa, média e alta. Assim como realizado para o ativo de renda fixa. Os valores da modelagem são expostos na Tabela 6.

**Tabela 6 - Percentuais modelados para representar os ativos de renda variável nos cenários**

Cenários	Representação	Percentual
Cenário de baixa	1º quartil	- 12,50% a.a.
Cenário médio	2º quartil	12,50% a.a.
Cenário de alta	3º quartil	42,75% a.a.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Uma vez determinados os valores modelados para os ativos de renda variável também se estabelecem as respectivas probabilidades de ocorrência dos cenários de baixo, médio e alto em 25%, 50% e 25%, respectivamente.

### 3.2.2.2 Os cenários para os passivos

Segundo Kouwenberg e Zenios (2006), no gerenciamento financeiro das empresas que aplicam modelos ALM é necessário considerar a projeção dos valores futuros dos passivos, que normalmente se constituem pelo valor esperado descontado dos pagamentos futuros. No caso dos fundos de pensão, representam o valor atual dos pagamentos futuros dos benefícios aos participantes dos planos, os quais serão recebidos após o período laboral.

Neste entendimento, ressalta-se que como cada instituição financeira tem suas peculiaridades no que tange ao enquadramento/equilíbrio de ativos e passivos, e como os passivos são resultantes dos fluxos futuros, geralmente aplica-se métodos para calcular os seus valores. No caso se um fundo de pensão deve ser considerado primordialmente as premissas atuariais.

A mensuração do valor do passivo atuarial em planos de benefícios ocorre por meio do processo de cálculo chamado avaliação atuarial, que objetiva apreciar os compromissos dos planos, estabelecendo planejamento de custeio e mecanismos para manter os planos equilibrados e solventes atuarialmente.

A adoção de premissas atuariais, econômicas e demográficas como taxa de juros, crescimento salarial, etc., quando bem elaboradas e adotadas dão suporte à tomada de decisão aos gestores dos fundos de pensão. No entanto, tais procedimentos exigem conhecimento do cenário econômico, bem como prudência na alocação das hipóteses nos modelos de gerenciamento (BENELLI; SIVIERO; COSTA, 2016). Diante do exposto, esta investigação adota as premissas consideradas na Tabela 7.

**Tabela 7 - Premissas adotadas na modelagem ALM**

Número de participantes <sup>1</sup>	1.000 indivíduos (população fechada)
Idade inicial de adesão ao plano	25 anos de idade
Crescimento salarial	2% a.a.
Taxa de juros <sup>2</sup>	6% a.a.
Direitos obtidos pelo participante após período laboral <sup>3</sup>	R\$ 60.000,00
Tábua de mortalidade	IBGE 2015 – Extrapolada para ambos os sexos
Horizonte de planejamento	5 anos

Fonte: Elaborada pelo autor, 2018.

Como informado na Tabela 7, se um participante aposentado tiver acumulado direitos por 40 anos de trabalho (de 25 a 65 anos), ele receberá um pagamento de benefício de R\$ 60.000,00. Os direitos adquiridos pelos participantes são descontados por uma taxa de juros ao longo do tempo. Deste modo, os pagamentos reais dos benefícios esperados também são descontados com uma taxa atuarial (6% a.a.), e assim, o valor dos passivos é determinado como valor presente esperado dos benefícios, como expõe a Equação 29, adaptada de Kouwenberg (2001):

<sup>1</sup> Na modelagem, considera que não haverá ingresso de novos participantes.

<sup>2</sup> Taxa de juros para fins de cálculo do passivo.

<sup>3</sup> Isso denota que o trabalhador que esse direito é adquirido quando o trabalhador se aposentar aos 65 anos, isto é, após 40 anos de trabalho.

$$L_k(t) = \sum_{j=\max\{1,65-l_{kt}\}}^{\infty} O_k \left( \frac{1}{1+r} \right)^j {}_j p_{l_{kt}} \quad (29)$$

em que,  $O_k$  mede o direito obtido pelo participante  $k$ ;  $r$  é a taxa de desconto atuarial;  $l_{kt}$  é a idade do participante  $k$  no tempo  $t$  e  ${}_j p_{l_{kt}}$  é a probabilidade de uma pessoa de idade  $l_{kt}$  estar viva em  $j$  anos.

As contribuições para o fundo são de 11% do salário do participante ativo no início da instituição do fundo de pensão. Ao longo do horizonte de planejamento, essa taxa pode variar entre 7% e 25%. A evolução salarial dos membros ativos é dada por um dissídio de 2% ao ano, assim como adotada por Valladão (2008). Os pagamentos são feitos até o funcionário completar a idade de aposentaria. A partir desta data, o participante passa a ser beneficiário com pensão de R\$ 60.000,00.

Após apresentado o modelo ALM, as principais restrições e as premissas adotadas para gerar cenários dos ativos e passivos, a execução da modelagem de seu por meio do programa *General Algebraic Modeling System* (GAMS). Segundo Brandão (2004), a linguagem do GAMS torna-se um facilitador que ajuda elaborar e manipular os modelos de otimização.

A linguagem da modelagem GAMS é projetada para gerenciar grandes conjuntos de dados. O uso de conjuntos e notação de coeficiente de matrizes torna o ambiente GAMS muito agradável tanto para o desenvolvimento de conjuntos de dados de *benchmark* equilibrados quanto para a criação de relatórios de solução. Esta linguagem de modelagem foi desenvolvida originalmente para programação linear, não linear e inteira (GAMS, 2018).

Segundo Brooke *et al.* (2008), o design do GAMS incorporou ideias extraídas da teoria de banco de dados relacional e programação matemática e tentou mesclar essas ideias para atender às necessidades dos modeladores estratégicos. A teoria de banco de dados relacional fornece uma estrutura estruturada para o desenvolvimento de recursos gerais de organização e transformação de dados, enquanto que, a programação matemática fornece uma maneira de descrever um problema e uma variedade de métodos para resolvê-lo. Os resultados da modelagem são apresentados e discutidos no próximo capítulo.

## 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo será apresentada a solução geral do modelo de otimização e apontados os principais resultados e discussões dos cenários gerados para a gestão de ativos e passivos sugeridos para um fundo de pensão seguindo a modelagem descrita no capítulo anterior.

### 4.1 Resultado geral do modelo

Para encontrar os principais resultados do modelo de otimização, a presente pesquisa contou com auxílio do programa GAMS, ferramenta de modelagem que por meio de interconexão simplificada possibilita a montagem do modelo que se deseja estudar de forma independente dos algoritmos de solução. O GAMS oferece uma série de relatórios de saída de dados, tanto de informações gerais quanto dos dados em níveis otimizados. Uma de suas saídas expõe a tabela de estatísticas do modelo que, mostra os dados quantitativos da programação no GAMS, como pode ser visualizada na Tabela 8.

**Tabela 8** - Saída do GAMS: estatísticas do modelo

ESTÁTÍSTICAS DO MODELO	
Blocos de equações	48
Bloco de variáveis	40
Equações únicas	4.360
Variáveis únicas	3.639
Elementos não zeros	10.903
Tempo de geração	0,078 segundos
Tempo de execução	0,094 segundos

Fonte: Resultados do modelo, 2018.

Conforme Leite (2013, p. 60), “a parte chamada de *Model Statistics* (Estatísticas do modelo) apresenta informações geradas enquanto o modelo ainda está sendo preparado para a solução e fornece detalhes quanto ao tamanho”. Desta forma, na modelagem realizada, o problema fornece um total de 48 equações e 40 variáveis diferentes formuladas e declaradas no GAMS, 4.360 equações únicas, 3.639 variáveis únicas, um total de 10.903 elementos diferentes de zero e um tempo de geração e de execução de 0,078 e 0,094 segundos, respectivamente.

Quando o modelo é resolvido, o GAMS fornece o relatório de saída denominado *Solve Summary* (Resumo do solucionador). Neste tempo, o modelo é resolvido por meio de um algoritmo escolhido em conformidade com o tipo de problema, sendo solucionado pelos *solvers* disponibilizados pelo GAMS. Tal saída divide-se em duas observações: a primeira

exibe o nome designado para o modelo, qual tipo de programação foi utilizado, a escolha do *solver*, bem como a indicação se a função objetivo foi maximizada ou minimizada. Já a segunda observação pauta-se em mostrar o *status* do modelo e do *solver* e o valor alcançado para a função-objetivo determinada na modelagem (BROOKE *et al.*, 2008). Diante desta abordagem, a Tabela 9 apresenta as informações com o resumo do solucionador.

**Tabela 9** - Saída do GAMS: resumo do solucionador

<b>RESUMO DO SOLUCIONADOR</b>	
Nome do modelo	Problema extensivo
Tipo de programação	Programação linear
Solucionador escolhido	CONOPT 3
Objetivo da função	Minimizar
<i>Status</i> do modelo	Ótimo
<i>Status</i> do solucionador	Conclusão normal
Valor objetivo	0,5895

Fonte: Resultados do modelo, 2018.

Na descrição da modelagem designou-se para o modelo o nome “problema extensivo”, que foi solucionado através da Programação Linear (PL). Um modelo de PL tem três componentes básicos: variáveis de decisão, função objetivo e um conjunto de restrições (TAHA, 2008). Assim, a PL implica uma relação linear entre as propriedades do problema na busca pela solução ótima, cujas características do problema são representadas e pautadas por meio de uma série de equações lineares.

O solucionador escolhido para resolver o problema foi o CONOPT 3, que soluciona algoritmos de programação, sendo o mais solicitado dentre os *solvers*, por resolver programação em larga escala (LEITE, 2003). A função objetivo é de minimização, o modelo apresenta-se ótimo e o solucionador viabilizou conclusão normal da programação. O valor esperado na situação ótima supõe um valor esperado de 58,95% que é o valor ótimo da função objetivo, que descreve a soma dos valores esperados das contribuições para os cinco períodos analisados (horizonte de planejamento).

Na solução do problema de otimização, foram criadas por meio de um comando dentro do ambiente GAMS, planilhas em Excel geradas com os valores em níveis (otimizados) para a função objetivo e as variáveis de decisão. Tal procedimento teve por finalidade auxiliar na análise dos resultados, possibilitando uma maior exploração e entendimento dos resultados da modelagem, permitindo a criação de gráficos e/ou tabelas.

## 4.2 Resultados da otimização

Conforme descrito detalhadamente no capítulo 3, o modelo de otimização proposto nesta pesquisa tem por finalidade minimizar a soma das taxas esperadas de contribuição de fundos de pensão que se encontra em fase de criação. Com fins que tornar sua aplicabilidade aos fundos brasileiros, foram adotadas restrições que refletem a conjuntura econômica, atuária e legal do país.

Consoante o que foi adotado nos parâmetros da modelagem, no momento inicial, o fundo instituí uma taxa de contribuição ( $cr_{tn} = 11\%$ ), já para o horizonte de planejamento (5 anos) essa taxa seria otimizada levando em consideração um limite inferior (7%) e um limite superior (25%). Diante disso, A Tabela 10 apresenta os resultados encontrados em níveis ótimos, onde na primeira coluna tem-se o horizonte de planejamento de planejamento, a segunda coluna enumera a quantidade de nós em cada período, a terceira, quarta, quinta e sexta colunas mostram as alíquotas mínimas, médias, medianas e máximas e a sétima o desvio padrão descritos para cada ano de análise.

**Tabela 10** - Taxas de contribuições ( $cr_{tn}$ ) esperadas da função objetivo

Tempo	Cenários ( $n$ )	Alíquota mínima (%)	Alíquota média (%)	Alíquota mediana (%)	Alíquota máxima (%)	Desvio padrão (%)
Ano 1	3	9,78	10,87	10,87	11,95	1,09
Ano 2	9	9,51	10,57	10,57	11,62	0,92
Ano 3	27	9,05	10,05	10,05	11,06	0,84
Ano 4	81	7,97	8,86	8,86	9,75	0,73
Ano 5	243	7,00	7,56	7,56	8,32	0,54

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Observa-se pela Tabela 10 um padrão decrescente para os referencias de locação médio nas taxas esperadas de contribuição nas alíquotas mínimas e máximas encontradas. As alíquotas médias convergem para um valor cerca de 13% inferior a alíquota referencial que é de 11%. Ao analisar as alíquotas ótimas para os três cenários projetados na modelagem, percebe-se que o limite mínimo estabelecido para as alíquotas de contribuição é visualizado no quinto período de operacionalidade do fundo, encontrado em um ambiente de baixa.

Os dois últimos períodos apresentam um declínio expressivo para as alíquotas médias, bem como para as alíquotas medianas que se apresentaram iguais à média. Ao observar a medida de dispersão em torno da média, verifica-se a maior dispersão no ano 1 (1,09%) e a menor no ano 5 (0,54%), implicando uma variação descrente do desvio padrão, e ainda, a medida que o número de nós cresce a dispersão decresce. Este resultado corrobora parcialmente com os resultados encontrados por Dert (1995), em pesquisa que objetivou

manter estabilidade das taxas futuras de contribuição, minimizando as taxas de contribuições correntes, os resultados apontaram que o nível das taxas de contribuições tinha variação elástica.

Se comparado ao mercado de capitais de países desenvolvidos que retratam um sistema financeiro estável, o Brasil apresenta perfil de mercado financeiro volátil (FREITAS, 2009). Partindo desse pressuposto, é indispensável que um investidor trace metas de planejamento ao se fazer um investimento. Mesmo possuindo fins não lucrativos, esta ótica mantém-se para os fundos de pensão, que precisam investir em ativos rentáveis, a riscos mínimos, que lhe assegure o cumprimento do pagamento dos benefícios. Neste contexto, se um gestor de um fundo for conservador, este optará por investir uma maior parcela do capital em ativos de renda fixa. Embora, um investimento neste segmento lhe conceda um retorno menor, o risco desejável também será menor se comparado a uma aplicação em ativos de renda variável, como em ações, por exemplo, que é mais volátil.

Nesta linha de raciocínio, seguindo a política de investimentos para o fundo de pensão proposta nesta dissertação, determina-se que os ativos sejam investidos em dois segmentos: títulos de renda fixa (referenciados em retorno por 100% do CDI) e ações (referenciadas pela carteira do índice Bovespa). Para manter o equilíbrio do fundo o gestor precisa tomar decisões de compra e vendas de ativos numa magnitude que garantam um valor mínimo para pagamentos dos passivos. Frente a esta abordagem, a Tabela 11 apresenta a quantidade de ativos investidos no instante inicial do fundo ( $t = 0$ ).

**Tabela 11 - Alocação inicial dos ativos**

<b>Segmento</b>	<b>Quantidade (Em milhões de Reais)</b>	<b>(%)</b>
Renda fixa	50,1	69,77
Ações	21,7	30,23
<b>Total</b>	<b>71,8</b>	<b>100</b>

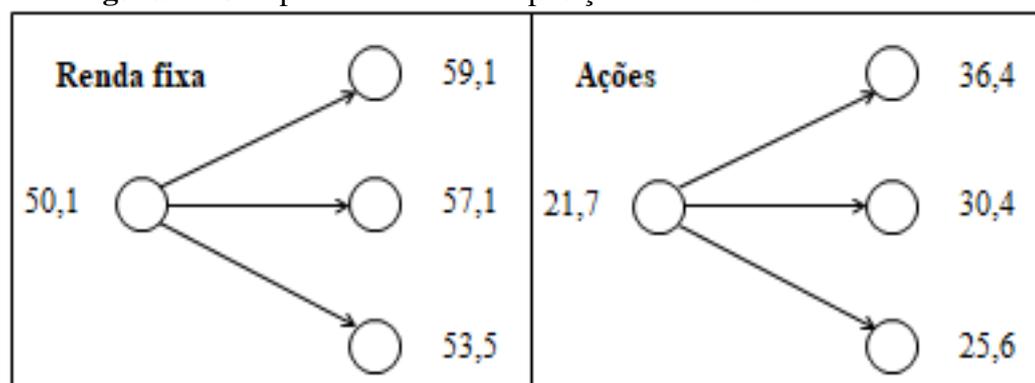
Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

De acordo com a Tabela 6, no momento em que o fundo está sendo instituído tem-se uma aplicação em ativos de renda fixa (50,1 milhões de reais), que representa aproximadamente 70% do total investido e 30% em ações, tal alocação leva em conta a restrição regulatória que determina os limites de alocação. Esse resultado da otimização aponta um investimento conservador e o nível de alocação no tempo  $t = 0$  denota uma decisão relevante para o gestor do fundo de pensão, determinando seu saldo de inventário inicial.

Figueiredo (2011) considera que a decisão de investimento inicial é a mais importante no processo decisório, tendo em vista que os cenários futuros levarão em conta essa informação, e assim, adicionará aos novos cenários. Ressalta-se que, no instante  $t = 0$  não é levado em consideração às rentabilidades dos ativos. Esses resultados são semelhantes aos da pesquisa de Oliveira (2014), em que no seu estudo sobre administração de ativos e passivos em fundos de pensão, a alocação inicial também ocorreu em maior parte nos ativos de renda fixa, sendo (51%) e em renda variável (33%). Corroborando também com esses achados, os resultados da pesquisa de Nascimento (2012), que analisou quatro segmentos de ativos e verificou-se que, no momento inicial, os fundos investiriam aproximadamente 71,11% em renda fixa.

Quando decorrido um ano de atividade do fundo, dado os novos cenários de negociação no mercado financeiro, pode-se apurar ao final do período, um novo saldo do inventário de ativos, com isso é possível visualizar o crescimento dos ativos e qual o comportamento da composição do portfólio. Para esse novo panorama é então considerado os custos de transação, bem como os estados econômicos e atuariais determinados na modelagem inicial para o fundo de pensão. Neste aspecto, a Figura 7 mostra o comportamento dos cenários de investimentos no final do primeiro ano.

**Figura 5** - Comportamento da composição dos ativos no final do ano 1



Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

De acordo com a Figura 7, percebe-se pelo comportamento dos investimentos no final do período de tempo  $t = 1$ , que caso o gestor opte por investir em renda fixa obterá um retorno próximo aos estabelecido nos parâmetros da modelagem, aproximadamente 6,78% em um cenário de baixa, 13,97% em um cenário médio e 17,96% em cenário de alta, com probabilidades de esses cenários ocorrerem de 0,09%, 0,2% e 0,09%, respectivamente.

Já se optar por investir em ativos mais arriscados, no caso em ações, terá retorno em um cenário médio de aproximadamente 40,09%, isto é, 27,59% a mais do que o modelado (projetado) para este cenário e se considerar o cenário em alta, aproximadamente 24,99% a mais que o esperado na projeção. Por esta análise, constata-se que o ativo mais rentável no primeiro ano de atividade do fundo será em ações, embora o fundo tenha um investimento maior em renda fixa. Este resultado também pode ser justificado pela compra de ações por parte do fundo, fato que não acontece com os ativos de renda fixa. Achados semelhantes foram encontrados por Nascimento (2012) quando analisaram políticas de investimentos em que os fundos necessitariam de contribuição extraordinária. Verificou-se que, do ano 1 para o ano 2 os retornos dos ativos de renda fixa caíram em 2,23% e os retornos das ações cresceram em aproximadamente 9,41%.

Uma vez explorada a alocação inicial dos ativos e observado os resultados dos retornos apresentados nos cenários de baixa, média e alta dos investimentos durante o primeiro ano de operação, cabendo ressaltar que, essa dinâmica de alocação e retornos segue por todo o horizonte de planejamento estabelecido, analisa-se na sequência a política de compra e venda de ativos, isto é, a relação dos inventários de ativos (saldos).

Como a modelagem não considera pagamento de benefícios no período horizonte planejado, neste ponto, a gestão do fundo de pensão preocupa-se apenas em tomar decisões nas alocações de ativos, isto é, analisar as transações de compra e venda de ativos. Diante desse apontamento, a Tabela 12 identifica o quantitativo de ativos comprados e vendidos pelo fundo de pensão em um cenário mediano (cenário que divide os nós de possibilidade ao meio), que foi calculado tomando por base a mediana dos nós de possibilidades.

**Tabela 12** - Compra e venda de ativos em um cenário mediano (em milhões de Reais)

<b>Ativos comprados</b>	<b>ANO 1</b>	<b>ANO 2</b>	<b>ANO 3</b>	<b>ANO 4</b>	<b>ANO 5</b>
Renda fixa	0,0	0,0	0,0	0,0	0,03
Ações	6,0	6,0	6,1	5,8	5,49
<b>Ativos vendidos</b>					
Renda fixa	0,0	0,0	0,0	0,0	11,2
Ações	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
<b>Saldo operacional</b>	<b>6,0</b>	<b>6,0</b>	<b>6,1</b>	<b>5,8</b>	<b>5,7</b>

Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

Os elementos expostos pela Tabela 12 expressam a política de investimentos de ativos do fundo de pensão. Durante os quatro primeiros anos o gestor adota estratégia de comprar ativos mais arriscados (ações). Somente no quinto ano de atividade do fundo o gestor teria uma combinação de comprar os dois tipos de ativos. Os nós de possibilidades otimizados

apontam que a compra de ativos de renda fixa representam aproximadamente 0,54% do total comprado no quinto ano, cuja tática pode ser explicado pelo investimento inicial.

Como a alocação inicial foi maior em ativos de renda fixa, o gestor compraria durante o horizonte de planejamento, ativos de renda variável, diversificando assim, o seu portfólio, bem como esperar o momento de vender os ativos, que acontece no quinto ano, onde é vendido 11,2 milhões de reais dos ativos de renda fixa. Nascimento (2012) também observa em seu trabalho essa alocação de compra e venda de ativos, segundo o autor, os recursos arrecadados serão utilizados para cumprir os passivos que vão se formando no plano, cobrir despesas operacionais dos fundos e comprar novos ativos (reinvestimentos). Os resultados da pesquisa divergem dos achados de Nascimento (2012) em relação à dinâmica estabelecida para comprar e vender os dois segmentos de ativos aqui analisados, ao passo em que a dinâmica de compra e venda dos dois ativos ocorrem em todos os cinco horizontes planejados diferente dos resultados desta pesquisa.

Como a política de investimentos do fundo se concentra em comprar, vender e investir em ativos, uma vez feita a exposição das alocações ótimas de compra e venda em um cenário mediano durante os cinco anos, é importante apontar os nós de possibilidades dos ativos investidos no cenário mediano, destacando desta forma, a rentabilidade em ativos e o inventário final de ativos no fim de cada tempo  $t$ , como mostra a Tabela 13.

**Tabela 13** – Total de ativos investidos em um cenário mediano (em milhões de Reais)

ATIVOS	ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
Renda fixa	57,1	65,1	74,2	84,6	95,2
Ações	30,4	33,6	37,1	40,6	44,7
<b>Total investido</b>	<b>87,5</b>	<b>98,7</b>	<b>111,3</b>	<b>125,2</b>	<b>139,9</b>

Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

Os resultados da Tabela 13 representam a alocação ótima (cenário mediano) que daria garantia para o fundo pagar os benefícios de pensão, isto é, as obrigações que estão sendo geradas anualmente. É percebido que os valores dos investimentos evoluem positivamente equilibrados, possibilitando uma garantia para cumprir os compromissos. A estratégia do ALM para os fundos de pensão é justamente buscar procedimentos ótimos que resultem na melhor combinação de alocações táticas garantidoras dos recursos para o fundo, em outras palavras, tomar decisões sobre quais os ativos mais interessam aos objetivos do gestor (NASCIMENTO, 2012; OLIVEIRA, 2014).

Na adoção de modelos ALM para fundos de pensão, se o fundo de pensão quiser acompanhar os requisitos de solvência, é imprescindível que uma política de investimento

seja modelada de forma explícita para fornecer uma visão valiosa para o futuro dos planos de benefícios (KOUWENBERG, 2001). Desta forma, verificou-se nos achados que, ao longo dos cinco anos, o gestor permanece com caráter conservador, aplicando seus ativos em maior parte em renda fixa, correndo menos risco com os investimentos, como mostra a Tabela 14.

**Tabela 14** - Alocação dos investimentos no horizonte planejado (em %)

ATIVOS	ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
Renda fixa	65,25	65,95	66,67	67,57	68,05
Ações	34,75	34,05	33,33	32,43	31,95
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>

Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

É percebido com isso que a cada ano ele aumentaria o nível de investimentos em ativos menos arriscados, isto é, renda fixa. No ano 1 seria de aproximadamente 65,25% e manteria crescente essas alocações até o quinto ano, onde resultaria numa aplicação neste segmento de aproximadamente 68,05%. Enquanto que para ativos arriscados, adota-se política decrescente para este segmento, sendo que, no ano 1 teria investimentos em ações em aproximadamente 34,75%, decrescia os níveis de alocações nesse ativo anualmente e no quinto ano, o fundo aplicaria 31,95%. Achados semelhantes são vistos em Marques (2011), em que as alocações dos ativos da FUNCEF deram mais neste segmento de ativos, que pode ser justificado pelos limites legais atribuídos aos fundos de pensão brasileiros.

Diante do apresentado e de posse das possibilidades de investimentos adotados pelo gestor, foi verificado nos resultados da modelagem, o retorno anual dos investimentos nos segmentos de ativos seguidos pelo modelo e aplicável aos fundos de pensão. Assim sendo, a Tabela 15 apresenta os retornos dos ativos ao longo dos cinco anos planejados, salientando que, a percepção dos resultados deu-se ao observar o cenário médio dos nós de possibilidades.

**Tabela 15** - Retorno dos ativos: cenário médio (% ao ano)

ATIVOS	ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
Renda fixa	13,97	14,01	13,97	14,01	12,52
Ações	40,09	10,52	10,41	9,43	10,09

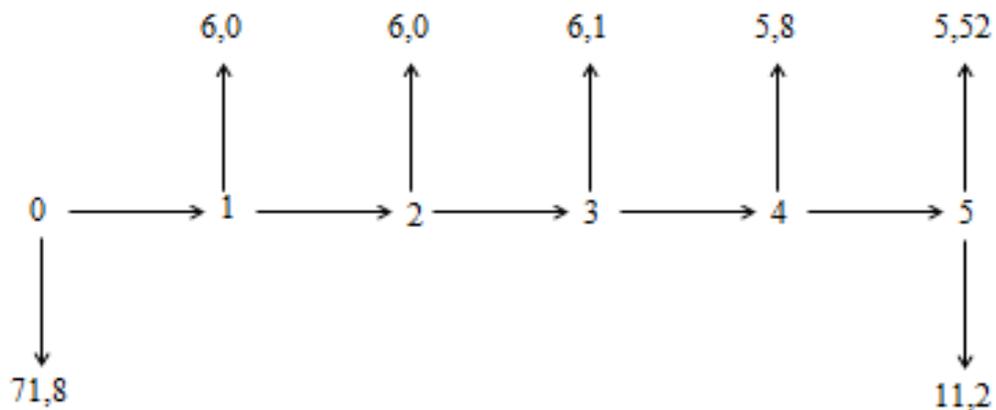
Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

Pelo observado na macro alocação dos ativos (Ver Tabela 14), que apresenta as possibilidades de investimentos, respeitando as limitações regulatórias, a Tabela 15 aponta os retornos dos ativos investidos ao longo dos cinco anos em um cenário médio. Visualiza-se que a rentabilidade dos ativos de renda fixa fica em torno dos 14%, como adotado na

modelagem para o cenário médio, havendo uma queda no quinto ano, isso se deve pela quantidade vendida dos ativos nesse período. O comportamento da rentabilidade das ações é oscilante ao longo do tempo, o que caracteriza a flexibilidade de se obter retornos nesse ativo, dada à volatilidade desses investimentos. O período de melhor retorno é apontado no primeiro ano de operação do fundo, que é calculado observando o nível aplicado neste segmento de ativo quando comparado à alocação inicial. No entanto, no quarto ano haveria uma queda na rentabilidade das ações, se comparada aos anos anteriores e retornaria uma rentabilidade de aproximadamente 10,09% no ano cinco.

A restrição de inventário de ativos e saldo de caixa tem a finalidade de revelar ao gestor o comportamento do fluxo de ativos no planejamento estratégico para o fundo de pensão. Como os pagamentos de benefícios em forma de pensão dar-se-á após quarenta anos de trabalho por parte dos participantes, a apresentação de um fluxo é então vista pelo comportamento dos ativos investidos, comprados e vendidos, como mostra a Figura 8.

**Figura 6** - Representação dos fluxos de caixa em um cenário médio



Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

Conforme ilustra a Figura 8, o fluxo de caixa representa o comportamento do gestor ao longo dos cinco anos observados nesta investigação. No momento inicial há uma saída de caixa que representa as alocações ótimas de investimentos no valor de 71,8 milhões de reais. Durante os quatro primeiros anos o fundo mantém uma estratégia de compra de ativos numa média de 5,9 milhões de reais. No quinto ano o gestor opta em comprar ativos dos dois segmentos: renda fixa e ações num total conjunto de 5,5 milhões de reais e vende dos ativos de renda fixa aproximadamente 11,2 milhões de reais.

Esses resultados refletem na decisão do gestor do fundo de pensão, uma vez que, ao observar a política de investimento e os retornos dos ativos no tempo planejado, é factível ponderar as alocações em ativos capazes de cobrir os seus compromissos gerados. Quando o fundo não acompanha ou gerencia seu fluxo de caixa (ativos) pode incorrer em perda de rentabilidade que, pode levar o fundo a insolvência. Ao analisar o fluxo de caixa dos ativos, Nascimento (2012) ressalta que tal aplicação permite um controle dos ativos, bem como reparar as possibilidades de insolvência.

Diante do apontamento dos fluxos de caixa ao longo dos cinco anos de estudo do fundo de pensão, outro ponto que pode ser analisado na otimização é a quantidade de ativos ao final de cada período de tempo planejado, levando em conta a alocação nos dois segmentos. Desta forma, pode-se explorar o agregado dos ativos (ativos totais) nos cenários otimizados, conforme Tabela 16.

**Tabela 16 - Agregado de ativos nos cenários otimizados**

<b>Tempo</b>	<b>Cenários (n)</b>	<b>Ativo mínimo</b>	<b>Ativo médio</b>	<b>Ativo alto</b>
Ano 1	3	72,6	81,6	90,1
Ano 2	9	73,9	92,3	114,1
Ano 3	27	75,8	104,6	145,6
Ano 4	81	78,2	118,6	187,4
Ano 5	243	68,4	135,6	267,6

Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

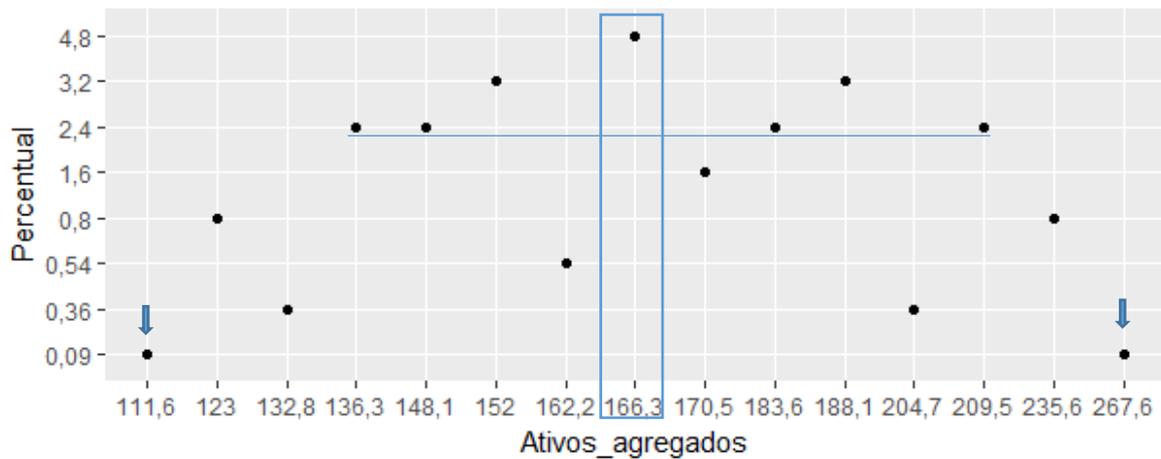
O agregado total mostra o valor total da combinação de ativos investidos ao final de cada período levando em consideração a taxa de retorno aplicada aos ativos em cada cenário projetado e o limite da razão de garantia, que é de 90%. Observa-se que em um cenário de baixa (Ativo mínimo), a cada ano cresce o agregado do fundo, isto é, o valor dos recursos para pagar os passivos futuros, no entanto, no quinto ano o valor total dos ativos apresenta uma queda percentual de aproximadamente 12,53%, isto se deve a venda de ativos operacionalizados pelo fundo neste período.

Quando observado os agregados nos cenários de média (Ativo médio) e de alta (Ativo alto), percebe-se uma relação crescente ao longo do horizonte. Estes achados permitem concluir que a venda dos ativos de renda fixa no quinto período afetaria apenas o fundo de pensão quando em um cenário de baixa. Esses resultados mostram o comportamento dos nós de possibilidades de os ativos serem aplicados e reinvestidos no fundo de pensão.

Neste mesmo raciocínio, relacionado aos ativos agregados, pode-se analisar o percentual que cada valor otimizado imprime em cada cenário projetado dentro da modelagem no GAMS. Dessa forma, é possível observar quais os melhores cenários que os

ativos agregados podem representar para o fundo de pensão com uso da estratégia do ALM. Ressalta-se que foi verificada essa relação para o quinto ano de operação do fundo no cenário de alta, como mostra a Figura 9.

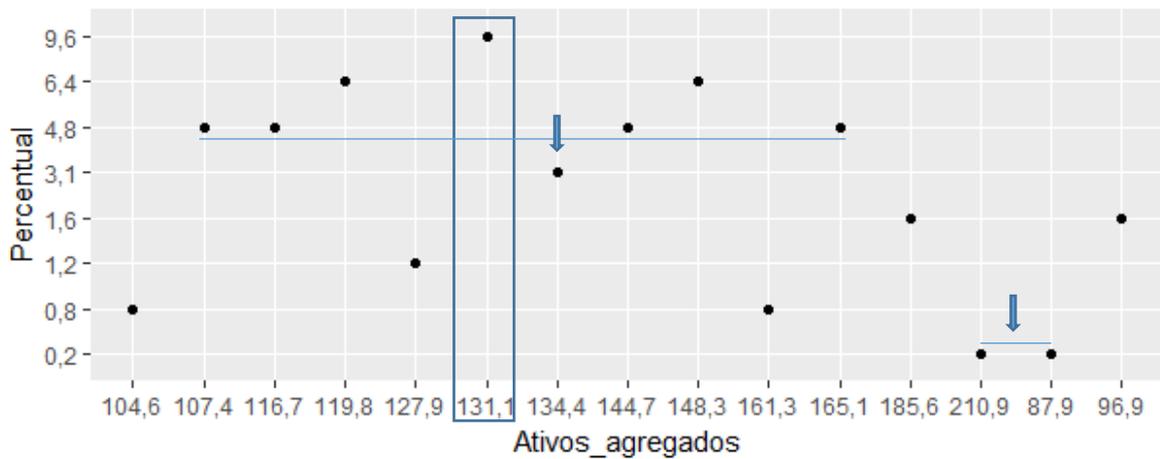
**Figura 7** – Probabilidades de ocorrência dos ativos agregados ótimos em um cenário de alta para o quinto ano



Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

Em um cenário de alta, o maior valor ótimo para os ativos agregados é de 267,6 milhões de reais, como já explorado pela Tabela 16, no entanto, a chance de esse valor representar os ativos agregados do fundo de pensão é de 0,09%, percentual que também é apontado para o menor valor de ativo agregado neste cenário que é de 111,6 milhões de reais. A maior probabilidade de ocorrência que é de 4,8% está para a quantidade de ativos em torno de 166,3 milhões de reais. Os valores ótimos (136,3, 148,1, 183,6 e 209,5 milhões de reais) apresentam 2,4% das chances de representação para os ativos totais. Essa mesma lógica de análise pode ser vista da Figura 10, para valores em um cenário médio.

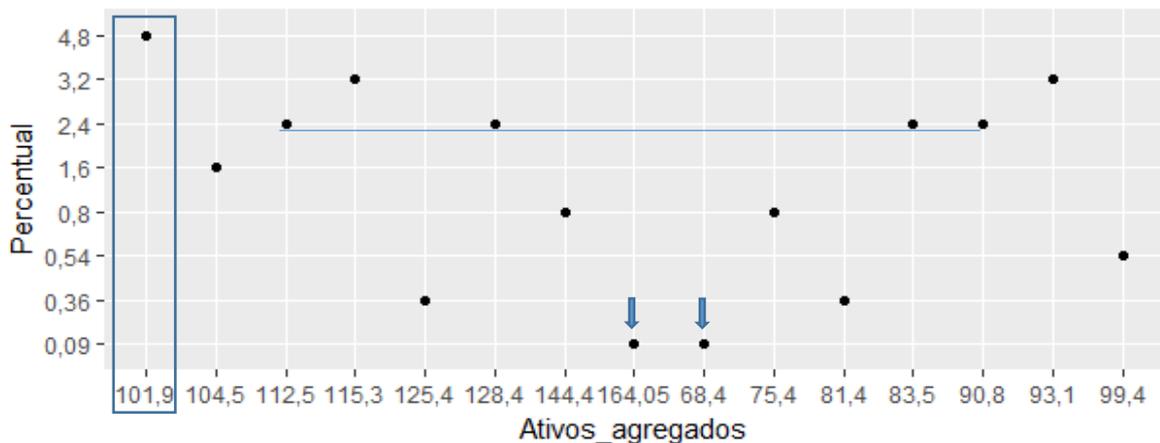
**Figura 8** – Probabilidades de ocorrência dos ativos agregados ótimos em um cenário médio para o quinto ano



Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

Quando observado os valores ótimos que os ativos agregados apresentam em seu cenário médio, verifica-se que o menor valor 87,9 milhões de reais e o maior valor que pode representar o fundo de pensão do quinto ano de atividade que é 210,9 milhões de reais, apresentam probabilidades de ocorrência em 0,2% para ambos. Chama atenção a probabilidade de ocorrência de 4,8% que é indicada para os agregados de 107,4, 116,7, 144,7 e 165,1 milhões de reais. A quantidade de 131,1 milhões de reais aponta como a maior probabilidade de representar os ativos agregados no cenário médio. Por fim, apresentam-se na Figura 11 as probabilidades de ocorrências dos ativos agregados em um cenário de baixa.

**Figura 9** – Probabilidades de ocorrência dos ativos agregados ótimos em um cenário de baixa para o quinto ano



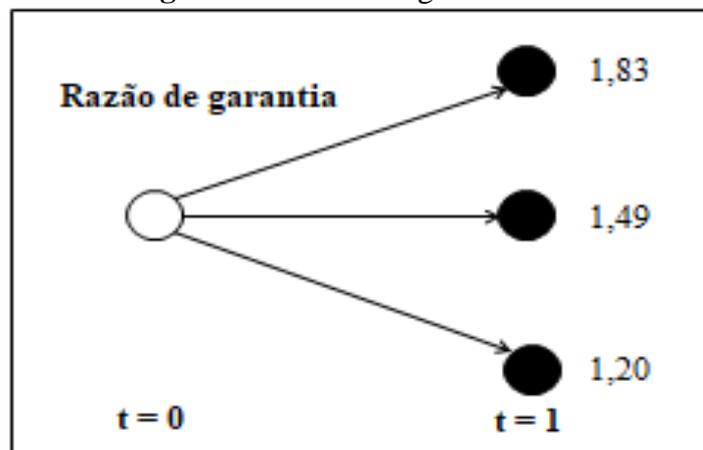
Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

No cenário de baixa, o menor valor que representa o agregado dos ativos é de 68,4 milhões de reais, com probabilidades de ocorrência de 0,09%, mesmo percentual para o maior valor ótimo, 164,05 milhões de reais. Os valores agregados 144,4 e 75,4 milhões de reais apontam chances de ocorrência de 0,8%. A probabilidade de 2,4% de chances de representatividade aparece para quatro resultados ótimos: 83,5, 90,8, 112,5 e 128,4 milhões de reais. Os valores ótimos de 115,3 e 93,1 milhões de reais retratam pelo observado um percentual de 3,2% de representarem os ativos agregados no cenário de baixa, que tem 101,9 milhões de reais como o valor ótimo de maior percentual, 4,8%.

Diante do exposto pelos cenários, pode-se declarar que levando em consideração as probabilidades de ocorrências de os valores dos ativos representarem os cenários modelados, haveria uma nova configuração no quinto ano para representar os valores ótimos nos cenários de alta, médio e de baixa: 166,3; 131,1 e 101,9 milhões de reais, respectivamente.

Conforme Valladão (2008), a solvência em um fundo de pensão pode ser estabelecida como um método para mensurar o risco de equilíbrio. Neste sentido, mesmo se tratando de um fundo em criação, esta pesquisa adota como premissa de medição da solvência, uma restrição de razão de garantia que é modelada pela relação entre os ativos e passivos (Equação 25), com finalidade de observar a garantia que o fundo tem em honrar seus compromissos em curto e longo prazo, isto é, seu nível de liquidez. Neste discurso, analisa-se por meio da Figura 12, a razão de garantia do fundo em cumprir suas obrigações no primeiro ano, ou seja, em um curto prazo de suas atividades operacionais.

**Figura 10 - Razão de garantia ano 1**



Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

No final do primeiro período de atividade o fundo manteve-se solvente, isto é, sem risco mínimo de desequilíbrio em um curto prazo, quando avaliado pela razão de garantia. Os resultados apresentaram-se satisfatório nos três cenários modelados, indicando uma liquidez positiva. Observa-se que todos os resultados estão acima de 1 (um), apontando que há mais ativos do que passivos nesse horizonte de tempo, assim o fundo tem a capacidade de pagar suas obrigações que foram geradas, mesmo neste instante de tempo, não haver ainda o desembolso com pagamentos de benefícios.

No pior cenário, que seria o de baixa, o fundo teria 1,20 milhões de reais para cada 1,0 milhão de obrigação provisionada e no melhor cenário (cenário de alta) esta razão é de 1,83 milhões para cada 1,0 milhão. Em trabalho similar, os resultados de Oliveira (2014) também apresentaram probabilidades zero (0%) de ocorrer insolvência do fundo em um período de curto prazo. É percebido que, o equilíbrio financeiro (solvência) dos fundos de pensão depende essencialmente da tomada de decisão do gestor no tocante à política de investimentos adotada.

Quando analisada a razão de garantia para os quatro anos seguintes, o modelo ALM resultou em poucos nós (possibilidades) insolventes. Somente no quinto ano, o fundo de pensão teria prováveis alocações passíveis de saldo insuficiente. Foram observados cinco alocações com razão inferior a 1 (um): 0,90 (0,09%), e quatro resultados com índice 0,99 (0,2%) totalizando um percentual de 0,89% de haver insuficiência de recursos no quinto ano. Esses resultados se devem pela alocação em ativos de riquezas menores, no caso em renda fixa, como consequência para um reequilíbrio, o gestor tenderia a concentrar as alocações em ativos mais arriscados (OLIVEIRA *et al.*, 2017).

Por fim, com a aplicação do modelo ALM foram analisados os superávits/déficits do fundo de pensão, isto mede a reserva matemática, sendo ponderado pela diferença entre os ativos agregados ótimos e os passivos gerados no ambiente do GAMS. Cabe lembrar que nesta pesquisa os passivos foram modelados por meio do cálculo da tábua de mortalidade. A Tabela 17 expõe os resultados dos superávits/déficits do fundo.

**Tabela 17 - Resultados dos superávits/déficits do fundo de pensão (em milhões de Reais)**

<b>Tempo</b>	<b>Cenários (n)</b>	<b>Valor mínimo</b>	<b>Valor médio</b>	<b>Valor máximo</b>
Ano 1	3	12,3	26,8	40,9
Ano 2	9	10,0	34,3	61,8
Ano 3	27	8,13	43,1	90,2
Ano 4	81	6,4	53,47	128,7
Ano 5	243	- 7,6	66,4	205,4

Fonte: Resultados da pesquisa, 2018.

De acordo com a Tabela 17, ao longo do horizonte de planejamento do fundo de pensão, as alocações ótimas que designam o patrimônio líquido (saldo financeiro) do fundo de pensão (ativos menos passivos) apresentam em geral superávits, assim como um valor crescente no saldo geral, visualizados pelos valores máximos nas alocações. No entanto, quando observa o valor mínimo que o fundo deveria ter em caixa para manter capacidade financeira, percebe-se um resultado decrescente ao longo dos cinco anos, entretanto, não deficitário até o quarto ano.

No quinto ano o fundo aponta uma situação de déficit em aproximadamente 7,6 milhões de reais, quando considerado o cenário de baixa. Ainda neste apanhado permite-se apontar os prováveis cenários em que o fundo teria déficits. Quando somado os cenários que apresentaram déficits, teria o fundo um montante de 10,0 milhões de reais negativos, todavia, a chance desses nós (possibilidades) ocorrer é de aproximadamente 0,89%.

Diante dessa exposição, Domeneghetti (2009), afirma que como o regime dos fundos de pensão tem um ciclo de vida longo, em um prazo maior pode ocorrer casos de desequilíbrios que geram déficits, isto é, um exigível atuarial superior aos ativos de investimentos. Aponta ainda, que as situações deficitárias podem ser breves em função das oscilações do mercado ou serem originadas por aspectos estruturais como premissas atuariais e/ou biométricas que não condizem com a realidade dos assistidos pelos fundos, pouca rentabilidade dos investimentos ou erros estratégicos na alocação dos ativos, ocasionando déficits.

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA

Em um mercado financeiro volátil, o investidor tem a preocupação em fazer investimentos arriscados, principalmente, pela incerteza de retornos rentáveis dos ativos quando o mercado é instável. Dessa forma, é preciso desenvolver estratégias de gestão que auxiliem na tomada de decisões, apontando as alocações mais viáveis. No caso de um fundo de pensão, a técnica *Asset and Liability Management* (ALM) fornece subsídios para tomada de decisões em investimentos. É preciso que o investidor trace horizontes de planejamento com medidas arduas para conseguir fazer o “casamento” correto entre os ativos e passivos.

Desse modo, as Entidades Fechadas de Previdência Complementar são uma das entidades que tem recorrido aos modelos ALM para programar e dinamizar sua gestão. Essas organizações têm crescido mundialmente em termos de concentração de capital e vem fomentando a economia mundial e nacional. Os fundos de pensão se caracterizam como pontenciador de fontes de investimentos, outro ponto relevante é seu caráter impulsionar de gerar poupança doméstica.

Uma maneira estruturar a aplicação dos modelos ALM nos fundos de pensão é por meio da programação estocástica, que tem a capacidade de incorporar as incertezas do problema e modelá-los para à tomada de decisão e quando solucionados fornecem os cenários de possibilidades.

Esta dissertação teve como objetivo desenvolver e aplicar por meio da técnica de programação linear estocástica, um modelo ALM para otimizar carteiras de investimentos, preconizando empiricamente uma estratégia de gestão para os planos previdenciários dos fundos de pensão privados brasileiros, em um horizonte de cinco anos.

Para alcançar o objetivo proposto, inicialmente realizou-se um levantamento de trabalhos anteriores que se voltassem a estudar as técnicas de ALM, em especial, pesquisas realizadas com uso de programação estocástica, a fim de traçar um panorama dos modelos utilizados nas instituições financeiras com ou sem finalidades de lucros, como é o caso dos fundos de pensão, que foi o objeto desta investigação.

Em termos metodológicos, desenvolveu-se um modelo com adaptações do já empregado e aplicado por Kouwenberg (2001) em fundos de pensão holandeses. O modelo empírico então formulado teve por função objetivo minimizar as taxas esperadas de contribuições, sujeitas a uma série de restrições que contemplavam políticas de contribuição, razão de garantia e restrições regulatórias na política de alocação dos investimentos.

A modelagem do ALM se deu por meio de programação estocástica, técnica de otimização que considera o conjunto de todos os cenários simultaneamente, cada um com uma probabilidade de ocorrência associada. Dessa forma, a técnica permitiu identificar as possibilidades de alocações otimizadas em ativos que admitem uma garantia para os fundos de pensão honrar seus compromissos com os participantes. Para formular o problema, foram arquitetadas e inseridas variáveis de decisões e parâmetros que retratam a conjuntura econômica, atuarial e legal do Brasil, aplicável aos fundos de pensão, cuja solução foi realizada com auxílio do programa *General Algebraic Modeling System* (GAMS).

Os principais achados apontam que as taxas esperadas de contribuição a serem minimizadas apresentaram valor ótimo com uma alíquota de 7% no quinto ano de atividade do fundo, alcançando o seu limite mínimo estabelecido pelo fundo de pensão, quando em um cenário de baixa dos nós de possibilidades.

Outro achado relevante refere-se à política de alocação de investimentos em ativos. Como apontado pelos resultados ótimos da modelagem, dada às restrições regulatórias que limitam o nível de investimentos, o fundo aparentemente apresenta-se como conservador, aplicando maior parte de seus ativos em renda fixa, aproximadamente 70%, que é um segmento, que via de regra, tende a dar retornos menores embora o nível de risco também seja menor.

Referente à razão de garantia, o fundo de pensão mostrou-se capaz de honrar seus compromissos futuros. No curto prazo encontra-se satisfatório em todos os nós de possibilidades atingidos, quando analisado todo o horizonte planejado, no quinto ano foram identificados cenários em que haveria desequilíbrio financeiro, sendo a probabilidade de estes cenários acontecerem 0,89%.

Em termos gerais, a pesquisa permite concluir que a aplicação de modelos ALM, numa plataforma usando a programação estocástica na sua formulação geral da árvore de cenários dá suporte para os fundos de pensão modelar e obter panoramas capazes de assessorar na tomada de decisões. Apontando resultados que indicam as melhores alocações de recursos a se investir, oferecendo base para gerir os seus ativos e assim, inferir uma garantia de pagamento dos benefícios futuros.

Com relação às limitações da pesquisa, um primeiro ponto que vale destaque refere-se ao horizonte de planejamento adotado nessa modelagem. A pesquisa limitou a buscar alocações ótimas com o ALM para apenas cinco anos de operação do fundo, impossibilitando assim, fazer análises de uma magnitude maior de tempo, se restringindo a curto e médio

prazo. Tal limitação se deu devido ao tempo de realização da modelagem, podendo ser explorada em sua continuidade.

Uma sugestão de melhoria do modelo concerne às premissas adotadas ao fundo, que determinaram regras de participação em um total de mil partícipes, bem como não consideraram hipóteses demográficas como entrada de novos participantes, probabilidade de morte e/ou repasses dos benefícios para os dependentes, quando houver ocorrência de óbito ou a introdução de outros benéficos de risco, como aposentadoria por invalidez, etc.

Destaca-se a limitação atribuída aos segmentos de ativos utilizados no modelo, os quais se limitaram a renda fixa e renda variável. Ressalta-se que muitos dos estudos anteriores do âmbito internacional e nacional dão destaque não só a esses, mas também aos outros segmentos de ativos que os fundos de pensão podem aderir na alocação. Nesses termos, esta pesquisa se limita por não contemplar os investimentos estruturados, investimentos no exterior, imóveis e operações com participantes.

Levando em consideração que a modelagem via programação estocástica consente que o processo de tomada de decisão congregue incertezas tanto em relação aos ativos quanto aos passivos do fundo. Sugere-se que pesquisas futuras adotem modelos mais sofisticados, agrupando hipóteses com modelos atuariais multidecrementais, por exemplo, bem como análise de sensibilidade dos parâmetros.

Novas pesquisas que adotarem estratégias de programação dinâmica ou programação dinâmica dual estocástica poderão buscar solucionar o problema de otimização por meio dos *solvers* disponibilizados dentro do ambiente do GAMS: BDMPL, DECIS, CPLEX 12.8.

Pesquisas futuras que introduzam outros segmentos de ativos na modelagem ALM também são sugeridas. Assim, permitirão visualizar alocações em todos os ativos, possibilitando desenhar cenários de combinação de ativos tanto com níveis mais arriscados como os livres de risco, originando uma diversificação no portfólio.

## REFERÊNCIAS

ABRAPP. **Associação Brasileira de Previdência Privada**. Disponível em: [http://www.abrapp.org.br/Consolidados/Consolidado%20Estat%C3%ADstico\\_09\\_2017.pdf](http://www.abrapp.org.br/Consolidados/Consolidado%20Estat%C3%ADstico_09_2017.pdf)> Acesso em: 09 de fev. 2018.

ALÉM, D. **Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras**. Tese (Doutorado em Matemática Computacional). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMS/USP, São Carlos – SP, 2011.

AMARAL, F. V. A. **Gestão de ativos e passivos em entidades fechadas de previdência complementar**. 2010. 177 p. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte – MG, 2010.

ARCE, P. E. B. **Aplicação da teoria do portfólio para otimização de carteiras de contratos de energia elétrica e gestão de risco**. 2014. 99 f. Dissertação (Mestrado em Ciências). Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2014.

BAI, M.; MA, J. The CVaR constrained stochastic programming ALM model for defined benefit pension funds. **International Journal of Modelling, Identification and Control**, v. 8, n. 1, p. 48-55, 2009.

BARROS, C. P.; GARCIA, T. M. Performance evaluation of pension funds management companies with data envelopment analysis. **Risk Management and Insurance Review**, v. 9, n. 2, p. 165-188, 2006.

BEALE, E. M. L. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 17, n. 2, p. 173-184, 1955.

BELLMAN, R. Dynamic programming and stochastic control processes. **Information and control**, v. 1, n. 3, p. 228-239, 1958.

BENELLI, P. M.; SIVIERO, P. C. L.; COSTA, L. H. Estudo sobre as premissas atuariais no âmbito dos fundos de pensão. **Revista Brasileira de Risco e Seguro**, v. 11, n. 20, p. 153-188, 2016.

BERTUCCI, L. A.; SOUZA, F. H. R.; FÉLIX, L. F. F. Gerenciamento de risco de fundos de pensões no Brasil: alocação estratégica ou simples foco na meta atuarial? **Revista Economia & Gestão**, v. 6, n. 13, 2006.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction stostochastic programming**. 2nd edn. New York: Springer Science & Business Media, 2011.

BOGENTOFT, E.; ROMEIJN, H. E.; URYASEV, S. Asset/Liability management for pension funds using CVaR constraints. **The Journal of Risk Finance**, v. 3, n.1, p. 57-71, 2001.

BOULIER, J.; DUPRE, D. **Gestão financeira dos fundos de pensão**. São Paulo: Pearson Education, 2003.

BRANDÃO, J. L. B. **Modelo para operação de sistemas de reservatórios com usos múltiplos**. 2004. 160 p. Tese (Doutorado em Engenharia). Universidade de São Paulo – USP, São Paulo – SP, 2004.

BRANDI, R. B. S. **Métodos de análise da função de custo futuro em problemas convexos: aplicação nas metodologias de programação dinâmica estocástica e dual estocástica**. 2016. 230 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora – MG, 2016.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/constituicao/constituicaocompilado.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm)>. Acesso em: 08 de mar. 2017.

\_\_\_\_\_. **Lei Complementar 109 de 29 de maio de 2001**. Dispõe sobre o Regime de Previdência Complementar e dá outras providências. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/LCP/Lcp109.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/LCP/Lcp109.htm)>. Acesso em: 08 de mar. 2017.

\_\_\_\_\_. **Resolução MPS/CGPC nº 16, de 22 de novembro de 2005**. Normatiza os planos de benefícios de caráter previdenciário e dá outras providências. Disponível em: <<http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/72/MPS-CGPC/2005/16.htm>>. Acesso em: 08 de mar. 2017.

BROOKE, A.; KENDRICK, D.; MEERAUS, A.; RAMAN, R., **GAMS: a user's guide**, GAMS Development Corporation, 1217 Potomac Street, N.W., Washington DC, 20007, USA, December, 1998. Disponível em: <[http://www.un.org/en/development/desa/policy/mdg\\_workshops/eclac\\_training\\_mdgs/brookeetal2008\\_gamsusersguide.pdf](http://www.un.org/en/development/desa/policy/mdg_workshops/eclac_training_mdgs/brookeetal2008_gamsusersguide.pdf)>. Acesso em: 20 de jan. 2018.

BROOKS, C. **Introductory econometrics for finance**. 3rd edn. New York: Cambridge University Press, 2014.

CAMPELLO, R. E. Programação dinâmica determinística e estocástica. In: **XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro, 2002.

CARVALHO, A. B. **Gestão de risco de liquidez para as entidades fechadas de previdência complementar**. 2013. 101 f. Dissertação (Mestrado em Economia). Universidade de Brasília, Brasília – DF, 2013.

CARVALHO, R. M. **O reflexo do status atuarial do plano de benefício previdenciário no valor da empresa: um estudo no mercado acionário brasileiro**. 2007. 90f. Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis). UNB, UFPB, UFPE, UFRN, Brasília – DF, 2007.

CHAGAS, P. C. **Previdência complementar brasileira: um estudo sobre a aderência da informação do passivo atuarial entre empresas patrocinadoras de planos de benefícios de aposentadoria e pensão e seus respectivos fundos de pensão**. 2006. 156 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis). UNB, UFPB, UFPE, UFRN, Brasília – DF, 2006.

CHIU, M. C.; LI, D. Asset and liability management under a continuous-time mean–variance optimization framework. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 39, n. 3, p. 330-355, 2006.

COELHO, N. N. A.; CAMARGOS, M. A. Fundos de pensão no Brasil: uma análise dos fatores determinantes para sua expansão na perspectiva dos seus gestores. **Organizações & Sociedade**, v. 19, n. 61, p. 277-294, 2012.

COMITÊ DE PRONUNCIAMENTOS CONTÁBEIS. CPC 00 (R1). Disponível em: <[http://static.cpc.mediatgroup.com.br/Documentos/147\\_CPC00\\_R1.pdf](http://static.cpc.mediatgroup.com.br/Documentos/147_CPC00_R1.pdf)>. Acesso em: 23 de fev. 2017.

CONSELHO FEDERAL DE CONTABILIDADE. **NBC TG. Estrutura conceitual para elaboração e apresentação das demonstrações contábeis (2011)**. Disponível em: <[http://www1.cfc.org.br/sisweb/SRE/docs/RES\\_1374.pdf](http://www1.cfc.org.br/sisweb/SRE/docs/RES_1374.pdf)>. Acesso em: 23 de fev. 2017.

CONSIGLI, G.; DEMPSTER, M. A. H. Dynamic stochastic programming for asset-liability management. **Annals of Operations Research**, v. 81, p. 131-162, 1998.

COOPER, D. R.; SCHINDLER, P. S. **Business research methods**. 12th edn. New York: McGraw-Hill Irwin, 2014.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Trad. Magda Lopes. 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DANTZIG, G. B. Linear programming under uncertainty. **Management Science**, v. 1, n. 3-4, p. 197-206, 1955.

DAVIS, E. P.; HU, Y. Is there a link between pension-fund assets and economic growth? A cross-country study. **Public Policy Discussion Papers**, p. 04-23, Economics and Finance Section, Brunel University, 2004.

DELT, C. L. **Asset Liability Management for pension funds: A multistage chance constrained programming approach**. Erasmus University Rotterdam. Disponível em: <<https://repub.eur.nl/pub/51150>>. Acesso em: 05 de mar. 2017.

DI DOMENICA, N.; MITRA, G.; VALENTE, P.; BIRBILIS, G. Stochastic programming and scenario generation within a simulation framework: an information systems perspective. **Decision Support Systems**, v. 42, n. 4, p. 2197-2218, 2007.

DIAS, C. F. B. **Utilização de modelos estocásticos para mensuração do passivo atuarial de fundos de pensão**. 2008. 60 f. Dissertação (Mestrado em Economia). Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE, 2008.

DINIZ, J. A.; CORRAR, L. J. Avaliação da Eficiência Financeira de Entidades Fechadas de Previdência Complementar no Brasil. **Sociedade, Contabilidade e Gestão**, v. 12, n. 3, p. 44-69, 2017.

DOMENEGHETTI, V. **Gestão financeira de fundos de pensão**. 2009. 607 p. Dissertação (Mestrado em Administração de Organizações). Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto – SP, 2009.

DUPACOVA, J.; POLÍVKA, J. Asset-liability management for Czech pension funds using stochastic programming. **Annals of Operation Research**, v. 165, n. 1, p. 5-28, 2009.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. **Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos**. Tradução Helga Hoffmann. – Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

FASB. **Statement of Financial Accounting Concepts N° 6**. Disponível em: <<http://www.fasb.org/resources/ccurl/792/293/CON6.pdf>>. Acesso em: 20 de fev. 2017.

FERNANDES, T. M. C. B. M. Ativo e sua mensuração. **Caderno de Estudos**, São Paulo: FIECAFI, v. 10, n. 18, p., 1998.

FIGUEIREDO, D. Z. **Tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão com plano de benefícios do tipo benefício definido**: uma abordagem via programação estocástica multiestágio linear. 2011. 66 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Universidade de São Paulo – SP, 2011.

FREITAS, M. C. P. Os efeitos da crise global no Brasil: aversão ao risco e preferência pela liquidez no mercado de crédito. **Estudos avançados**, v. 23, n. 66, p. 125-145, 2009.

GAMS. *General Algebraic Modeling System*. Disponível em: <[https://www.gams.com/latest/docs/UG\\_MPSGE\\_Models.html](https://www.gams.com/latest/docs/UG_MPSGE_Models.html)>. Acesso em: 15 de jan. 2018.

GODFREY, J.; HODGSON, A.; HOLMES, S.; TARCA, A. **Accounting Theory**. 6th edn. New York: Wiley, 2006.

GONDZIO, J.; KOUWENBERG, R. High-performance computing for asset-liability management. **Operations Research**, v. 49, n. 6, p. 879-891, 2001.

GROTHEY, A. Massively parallel asset and liability management. In: GUARRACINO, M. R. et al. (eds). **Euro-Par 2010 Parallel Processing Workshops**. Euro-par 2010. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6586. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.

HANEVELD, W. K. K.; STREUTKER, M. H.; VAN DER VLERK, M. H. An ALM model for pension funds using integrated chance constraints. **Annals of Operations Research**, v. 177, n. 1, p. 47-62, 2010.

HENDRIKSEN, E. S.; VAN BREDÁ, M. F. **Teoria da contabilidade**. Trad. Antônio Zoratto Sanvicente. São Paulo: Atlas, 2010.

HERMANSON, R. H.; EDWARDS, J. D.; SALMONSON, R. F. **Accounting principles**. Special edition. Texas: Business Publications, 1987.

HILLI, P.; KOIVU, M.; PENNANEN, T.; RANNE, A. A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company. **Annals of Operations Research**, p. 115-139, 2007.

HORNGREN, C. T.; HARRISON, W. T.; ROBSON, M. A. **Accounting**. 3rd edn. New York: Prentice Hall, 1996.

IASB. **The Conceptual Framework for Financial Reporting**. (2010). Disponível em: <<https://dart.deloitte.com/resource/1/7036afd8-3f7e-11e6-95db-2d5b01548a21>>. Acesso em: 20 de fev2017.

IUDÍCIBUS, S. **Teoria da contabilidade**. 9ed. São Paulo: Atlas, 2009.

IUDÍCIBUS, S. (Org). **Contabilidade introdutória**. 11 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

KAM, V. **Accounting Theory**. 2nd edn. New York: John Wiley & Sons, 1990.

KLAASSEN, P. Financial asset-pricing theory and stochastic programming models for asset/liability management: a synthesis. **Management Science**, v. 44, n. 1, p. 31-48, 1998.

KOSMIDOU, K.; ZOPOUNIDIS, C. **Goal programming techniques for bank asset liability management**. EUA: Kluwer Academic Publishers, 2004.

KOTHARI, C. R. **Research methodology: methods and techniques**. 2nd edn. New Delhi: New Age International, 2004.

KOUWENBERG, R. Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. **European Journal of Operations Research**, v. 134, n. 2, p. 279-292, 2001.

KOUWENBERG, R.; ZENIOS, S. A. Stochastic programming models for asset liability management. In: ZENIOS, S. A.; ZIEMBRA, W. T. (Editors). **Handbook of asset and liability management**. EUA: Elsevier, 2006.

KUMAR, S. **Research methodology: a step-by-step guide for beginners**. 3rd edn. Londres: Springer, 2011.

LEAL, R. P. C.; SILVA, A. L. C.; RIBEIRO, T. S. **Alocação ótima de ativos em fundos de pensão brasileiros**. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPEAD, 2002.

LEITE, L. L. L. **Modelo matemático de otimização para apoio à decisão na operação dos reservatórios de Três Marias e Sobradinho**. 2013. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE, 2003.

MARKOWITZ, H. M. Portfólio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

\_\_\_\_\_. H. M. Portfolio selection: efficient diversification of investment. **Cowles Foundation Monograph** (Vol. 16). New York: Wiley, 1959.

MARQUES, D. **Asset and Liability Management (ALM) para entidades fechadas de previdência complementar no Brasil: validação de um modelo de otimização com aplicação a um caso prático**. 2011. 150 p. Dissertação (Mestrado em Regulação de mercados). Universidade de Brasília, Brasília – DF, 2011.

MARTINS, M. A. S. **Gestão de risco em entidades fechadas de previdência complementar (EFPC) – Fundos de pensão**. 2010. 176 p. Tese (Doutorado em Administração). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, 2010.

MELO, R. B. **Modelos de otimização para a gestão de ativos e passivos nos fundos de pensões**. 2015. 50 p. Dissertação (Mestrado em Decisão Econômica e Empresarial). Instituto Superior de Economia e Gestão, Lisboa, 2015.

MITRA, G.; SCHWAIGER, K. **Asset and Liability Management Handbook**. EUA: Palgrave Macmillan, 2011.

NASCIMENTO, C. C. **Um modelo de ALM para fundos de pensão usando programação estocástica mista-inteira**. 2012. 84 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC Rio, Rio de Janeiro – RJ, 2012.

NEUMAN, L. W. **Social research methods: qualitative and quantitative approaches**. 7th edn. Harlow: Pearson Education Limited, 2014.

NEVES E. B. Escrevendo a metodologia da pesquisa. In: NEVES, E. B.; DOMINGUES C. A. Org(s). **Manual de metodologia da pesquisa científica**. Rio de Janeiro: EB/CEP; 2007.

OLIVEIRA, A. D. **Modelo de administração de ativos e passivos: uma abordagem de otimização estocástica**. 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado em Administração). Universidade Federal de Rio Grande do Sul – UFRGS, Belo Horizonte – MG, 2014.

OLIVEIRA, A. D.; FILOMENA, T. P.; PERLIN, M. S.; LEJEUNE, M.; MACEDO, G. R. A multistage stochastic programming asset-liability management model: an application to the Brazilian pension fund industry. **Optimization and Engineering**, v. 18, n. 2, p. 349-368, 2017.

PINHEIRO, R. P. **Riscos demográficos e atuariais nos planos de benefício definido e de contribuição definida num fundo de pensão**. 2005. 320 f. Tese (Doutorado em Demografia). UFMG, FACE, CEDEPLAR, Belo Horizonte – MG, 2005.

\_\_\_\_\_. **A demografia dos fundos de pensão**. Brasília: Ministério da Previdência Social. SPPS, 2007. Disponível em: <[http://www.previdencia.gov.br/arquivos/office/3\\_081014-111404-315.pdf](http://www.previdencia.gov.br/arquivos/office/3_081014-111404-315.pdf)>. Acesso em: 01 de out. 2017.

PLATANAKIS, E.; SUTCLIFFE, C. Asset–liability modelling and pension schemes: the application of robust optimization to USS. **The European Journal of Finance**, v. 23, n. 4, p. 324-352, 2017.

PRUZAN, P. **Research methodology: the aims, practices and ethics of science**. Switzerland: Springer, 2016.

REILLY, F. K.; BROWN, K. C. **Investment Analysis & Portfolio Management**. United States: South-Western Cengage Learning, 2011.

ROBINSON, R. V.; DAVID, E. J. R.; HILL, M. Participatory mixed methods research across cultures. In: JASON, L.; GLENWICK, D. S. (Eds). **Handbook of methodological approaches to community-based research: qualitative, quantitative, and mixed methods**. New York: Oxford University Press, 2016.

RUBINSTEIN, M. Markowitz's "Portfolio Selection": a fifty-year retrospective. **The Journal of Finance**, v. 57, n. 3, p. 1041-1045, 2002.

SCUZZIATO, M. R. **Modelo de otimização estocástica de dois estágios para o problema da programação diária da operação eletro energética**. 2016. 212 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2016.

SHAPIRO, A. Analysis of stochastic dual dynamic programming method. **European Journal of Operational Research**, v. 209, n. 1, p. 63-72, 2011.

SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. B. **A Tutorial on Stochastic Programming**. 2007. Disponível em: <<https://www-m9.ma.tum.de/foswiki/pub/SS2014/StochPro/TutorialSP.pdf>>. Acesso em: 25 de set. 2017.

SODHI, M. S.; TANG, C. S. Modeling supply-chain planning under demand uncertainty using stochastic programming: A survey motivated by asset-liability management. **International Journal of Production Economics**, v. 121, n. 2, p. 728-738, 2009.

SOUZA, S. C. **As entidades fechadas de previdência complementar enquanto instrumentos de atuação na do estado na economia**. 2015. 185 p. Dissertação (Mestrado em Direito). Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, 2015.

TAHA, H. A. **Pesquisa operacional: uma visão geral**. 8 ed. Trad. Arlete Simille Marques. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

VALLADÃO, D. M. **Alocação ótima e medida de risco de um ALM para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap**. 2008. 98 f. Dissertação (Mestrado em Gestão de riscos financeiros e atuariais). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio, Rio de Janeiro – RJ, 2008.

VANDERSTOEP, S. W.; JOHNSON, D. D. **Research methods for everyday life: blending qualitative and quantitative approaches**. San Francisco: John Wiley & Sons, 2008.

WANE, A. D. **Asset Liability Management for pension funds: Assessment of common practices**. 56 p. Thesis (Master in Actuarial Science). Université de Lausanne, Lausanne, Suíça, 2011.

WEBER, C. A. P. **Previdência social: diagnósticos e impacto da nova previdência complementar dos servidores públicos federais no Brasil**. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado em Economia). Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, 2016.

WEIL, R. L.; SCHIPPER, K.; FRANCIS, J. **Financial Accounting: an introduction to concepts, methods, and uses**. 14th edn. United States: South-Western, Cengage Learning, 2014.

WETS, R. J. B. Stochastic programming. In: NEMHAUSER, G. L.; RINNOOY KAN, A. H. G.; TODD, M. J. (Editors). **Handbooks in operations research and management science**, v. 1, p. 573-629, 1989.

## APÊNDICE A – FONTE DO GAMS USADA NA PROGRAMAÇÃO

```

-----
sets
  i 'investments' /f1*f2/
  s 'individual scenarios' /lo,mid,hi/
  j 'index' /lo, up/
  t 'period' /t1*t5/
  tt 'period2' /t1*t4/
;

table L(t,s) 'liabilities for each scenario (million reais)'
      lo      mid      hi
t1 60.232558  54.75687091  49.28118382
t2 63.84651148  58.04228317  52.23805485
t3 67.67730217  61.52482016  55.37233814
t4 71.7379403  65.21630936  58.69467843
t5 76.04221672  69.12928793  62.21635913
;

table ret(t,s) 'possible returns for each scenario'
      lo  mid  hi
t1 -.125 .125 .4275
t2 -.125 .125 .4275
t3 -.125 .125 .4275
t4 -.125 .125 .4275
t5 -.125 .125 .4275
;

table ret2(t,s) 'possible returns for each scenario'
      lo  mid  hi
t1 .069 .14 .18
t2 .069 .14 .18
t3 .069 .14 .18
t4 .069 .14 .18
t5 .069 .14 .18
;

table prob(t,s) 'probabilities for table demand'
      lo  mid  hi
t1 .25 .50 .25
t2 .25 .50 .25
t3 .25 .50 .25
t4 .25 .50 .25
t5 .25 .50 .25
;
loop(t, abort$(abs(sum(s,prob(t,s))-1)>0.001) "probabilities don't add up");

set js 'scenarios for joint probabilities' /js1*js3/;
parameter L1(t,js) 'liabilities for each node at t-period'

```

```

parameter jret(t,js) 'joint distribution: outcomes';
parameter jprob(js) 'joint distribution: probabilities';
parameter jr(i,js) 'joint returns';
alias (s,s1);
set current(js);
current('js1') = yes;
loop((s1),
jret('t1',current) = ret('t1',s1);
L1('t1',current) = L('t1',s1);
jprob(current) = prob('t1',s1);
jr('f1',current) = (1+ret('t1',s1));
jr('f2',current) = (1+ret2('t1',s1));
current(js) = current(js-1);
);
display jret,jr, L1, jprob;

```

```

set j2s 'scenarios for joint probabilities' /j2s1*j2s9/;
parameter L2(t,j2s) 'liabilities for each node at t-period';
parameter jret1(t,j2s) 'joint distribution: outcomes';
parameter jprob1(j2s) 'joint distribution: probabilities';
parameter jr1(i,j2s) 'join returns';
alias (s, s1, s2);
set current1(j2s);
current1('j2s1') = yes;
loop((s1, s2),
jret1('t1',current1) = ret('t1',s1);
jret1('t2',current1) = ret('t2',s2);
L2('t1',current1) = L('t1',s1);
L2('t2',current1) = L('t2',s2);
jprob1(current1) = prob('t1',s1)*prob('t2',s2);
jr1('f1',current1) = (1+ret('t1',s1))*(1+ret('t2',s2));
jr1('f2',current1) = (1+ret2('t1',s1))*(1+ret2('t2',s2));
current1(j2s) = current1(j2s-1);
);
display jret1, jr1, L2, jprob1;

```

```

set j3s 'scenarios for joint probabilities' /j3s1*j3s27/;
parameter L3(t,j3s) 'liabilities for each node at t-period';
parameter jret2(t,j3s) 'joint distribution: outcomes';
parameter jprob2(j3s) 'joint distribution: probabilities';
parameter jr2(i,j3s) 'prod returns';
alias (s, s1, s2, s3);
set current2(j3s);
current2('j3s1') = yes;
loop((s1, s2, s3),
jret2('t1',current2) = ret('t1',s1);
jret2('t2',current2) = ret('t2',s2);
jret2('t3',current2) = ret('t3',s3);
jprob2(current2) = prob('t1',s1)*prob('t2',s2)*prob('t3', s3);
L3('t1',current2) = L('t1',s1);

```

```

L3('t2',current2) = L('t2',s2);
L3('t3',current2) = L('t3',s3);
jr2('f1',current2) = (1+ret('t1',s1))*(1+ret('t2',s2))*((1+ret('t3',s3)));
jr2('f2',current2) = (1+ret2('t1',s1))*(1+ret2('t2',s2))*((1+ret2('t3',s3)));
current2(j3s) = current2(j3s-1);
);
display jret2, jr2, L3, jprob2;

```

```

set j4s 'scenarios for joint probabilities' /j4s1*j4s81/;
parameter L4(t,j4s) 'liabilities for each node at t-period'
parameter jret3(t,j4s) 'joint distribution: outcomes';
parameter jprob3(j4s) 'joint distribution: probabilities';
parameter jr3(i,j4s) 'joint distribution: probabilities';
alias (s, s1, s2, s3, s4);
set current3(j4s);
current3('j4s1') = yes;
loop((s1, s2, s3, s4),
jret3('t1',current3) = ret('t1',s1);
jret3('t2',current3) = ret('t2',s2);
jret3('t3',current3) = ret('t3',s3);
jret3('t4',current3) = ret('t4',s3);
L4('t1',current3) = L('t1',s1);
L4('t2',current3) = L('t2',s2);
L4('t3',current3) = L('t3',s3);
L4('t4',current3) = L('t4',s3);
jprob3(current3) = prob('t1',s1)*prob('t2',s2)*prob('t3',s3)*prob('t4',s4);
jr3('f1',current3) = (1+ret('t1',s1))*(1+ret('t2',s2))*((1+ret('t3',s3))*((1+ret('t4',s4))));
jr3('f2',current3) = (1+ret2('t1',s1))*(1+ret2('t2',s2))*((1+ret2('t3',s3))*((1+ret2('t4',s4))));
current3(j4s) = current3(j4s-1);
);
display jret3,jr3, L4, jprob3;

```

```

set j5s 'scenarios for joint probabilities' /j5s1*j5s243/;
parameter L5(t,j5s) 'liabilities for each node at t-period'
parameter jret4(t,j5s) 'joint distribution: outcomes';
parameter jprob4(j5s) 'joint distribution: probabilities';
parameter jr4(i,j5s) 'joint distribution: probabilities';
alias (s, s1, s2, s3, s4, s5);
set current4(j5s);
current4('j5s1') = yes;
loop((s1, s2, s3, s4, s5),
jret4('t1',current4) = ret('t1',s1);
jret4('t2',current4) = ret('t2',s2);
jret4('t3',current4) = ret('t3',s3);
jret4('t4',current4) = ret('t4',s3);
jret4('t5',current4) = ret('t5',s3);
L5('t1',current4) = L('t1',s1);
L5('t2',current4) = L('t2',s2);
L5('t3',current4) = L('t3',s3);
L5('t4',current4) = L('t4',s4);

```

```

L5('t5',current4) = L('t5',s5);
jprob4(current4) = prob('t1',s1)*prob('t2',s2)*prob('t3', s3)*prob('t4', s4)*prob('t5', s5);
jr4('f1',current4) =
(1+ret('t1',s1))*(1+ret('t2',s2))*((1+ret('t3',s3)))*((1+ret('t4',s4)))*((1+ret('t5',s5)));
jr4('f2',current4) =
(1+ret2('t1',s1))*(1+ret2('t2',s2))*((1+ret2('t3',s3)))*((1+ret2('t4',s4)))*((1+ret('t5',s5)));
current4(j5s) = current4(j5s-1);
);
display jret4,jr4,L5, jprob4;

```

parameters

```

gamma_s(i) /f1 0.001, f2 0.001 /
gamma_b(i) /f1 0.001, f2 0.001 /
wlo(i) /f1 0.20, f2 0.50/
wup(i) /f1 0.70, f2 1/
perc(t) /t1 0.11, t2 0.105, t3 0.10, t4 0.09, t5 0.08/
;

```

scalars

```

Fmin /0.90 /
clo /.07/
cup /.25/
lambda /0.0/
k /0.9/
Z0 /0.0/
L0 /0.0/
wage /54.34684982/
wage1 /55.43378682/
wage2 /57.67331181/
wage3 /61.20337988/
wage4 /66.24850668/
wage5 /73.14370446/
c0 /.11/
;

```

positive variables

```

B0,B1(js), B2(j2s), B3(j3s), B4(j4s), B5(j5s),
c1(js),c2(j2s), c3(j3s), c4(j4s),
c5(j5s),F1(js), F2(j2s), F3(j3s), F4(j4s), F5(j5s)
;

```

positive variables

```

Xb0(i),Xb1(i,js), Xb2(i,j2s), Xb3(i,j3s),Xb4(i,j4s), Xb5(i,j5s),
Xs0(i),Xs1(i,js), Xs2(i,j2s), Xs3(i,j3s),Xs4(i,j4s), Xs5(i,j5s)
;

```

positive variables

```

Xini, X0(i), Xh1(i,js), Xh2(i,j2s), Xh3(i,j3s),Xh4(i,j4s), Xh5(i,j5s),
A1(js), A2(j2s), A3(j3s), A4(j4s), A5(j5s)

```

;

free variables

zmaster

Z1(js), Z2(j2s), Z3(j3s), Z4(j4s), Z5(j5s)

;

equations

masterobj 'objective function'

cashbalance0

cashbalance1(js)

cashbalance2(j2s)

cashbalance3(j3s)

cashbalance4(j4s)

cashbalance5(j5s)

assetinventory0(i)

assetinventory1(i,js)

assetinventory2(i,j2s)

assetinventory3(i,j3s)

assetinventory4(i,j4s)

assetinventory5(i,j5s)

totalasset1(js)

totalasset2(j2s)

totalasset3(j3s)

totalasset4(j4s)

totalasset5(j5s)

deficits1(js)

deficits2(j2s)

deficits3(j3s)

deficits4(j4s)

deficits5(j5s)

deficits51(j5s)

ratio1(js)

ratio2(j2s)

ratio3(j3s)

ratio4(j4s)

ratio5(j5s)

penalty(js)

penalty1(j2s)

penalty2(j3s)

penalty3(j4s)

penalty4(j5s)

assetmix1(i,js)

assetmix2(i,j2s)  
 assetmix3(i,j3s)  
 assetmix4(i,j4s)  
 assetmix5(i,j5s)

assetmix21(i,js)  
 assetmix22(i,j2s)  
 assetmix23(i,j3s)  
 assetmix24(i,j4s)  
 assetmix25(i,j5s)

mincontribution  
 mincontribution1(js)  
 mincontribution2(j2s)  
 mincontribution3(j3s)  
 mincontribution4(j4s)  
 mincontribution5(j5s)

masterobj..

zmaster =e= c0 + sum(js, jprob(js)\*c1(js)) + sum(j2s, jprob1(j2s)\*c2(j2s))+  
 sum(j3s, jprob2(j3s)\*c3(j3s)) + sum(j4s, jprob3(j4s)\*c4(j4s)) +  
 sum(j5s, jprob4(j5s)\*c5(j5s))  
 +lambda\*(sum(js, jprob(js)\*(Z1(js)) ))  
 +lambda\*(sum(j2s, jprob1(j2s)\*(Z2(j2s)) ))  
 +lambda\*(sum(j3s, jprob2(j3s)\*(Z3(j3s)) ))  
 +lambda\*(sum(j4s, jprob3(j4s)\*(Z4(j4s)) ))  
 +lambda\*(sum(j5s, jprob4(j5s)\*(Z5(j5s)) ))

;

cashbalance0.. (wage)\*c0 =e= - sum(i, (1-gamma\_s(i))\*Xs0(i)) +  
 sum(i, (1+gamma\_b(i))\*Xb0(i));  
 cashbalance1(js).. (wage1)\*c1(js) =e= - sum(i, (1-gamma\_s(i))\*Xs1(i,js)) +  
 sum(i, (1+gamma\_b(i))\*Xb1(i,js));  
 cashbalance2(j2s).. (wage2)\*c2(j2s) =e= - sum(i, (1-gamma\_s(i))\*Xs2(i,j2s)) +  
 sum(i, (1+gamma\_b(i))\*Xb2(i,j2s));  
 cashbalance3(j3s).. (wage3)\*c3(j3s) =e= - sum(i, (1-gamma\_s(i))\*Xs3(i,j3s)) +  
 sum(i, (1+gamma\_b(i))\*Xb3(i,j3s));  
 cashbalance4(j4s).. (wage4)\*c4(j4s) =e= - sum(i, (1-gamma\_s(i))\*Xs4(i,j4s)) +  
 sum(i, (1+gamma\_b(i))\*Xb4(i,j4s));  
 cashbalance5(j5s).. (wage5)\*c5(j5s) =e= - sum(i, (1-gamma\_s(i))\*Xs5(i,j5s)) +  
 sum(i, (1+gamma\_b(i))\*Xb5(i,j5s));

assetinventory0(i).. X0(i) =e= Xini(i) - Xs0(i) + Xb0(i);  
 assetinventory1(i,js).. Xh1(i,js) =e= jr(i,js)\*X0(i) - Xs1(i,js) + Xb1(i,js);  
 assetinventory2(i,j2s).. Xh2(i,j2s) =e= jr1(i,j2s)\*X0(i) - Xs2(i,j2s) + Xb2(i,j2s);  
 assetinventory3(i,j3s).. Xh3(i,j3s) =e= jr2(i,j3s)\*X0(i) - Xs3(i,j3s) + Xb3(i,j3s);  
 assetinventory4(i,j4s).. Xh4(i,j4s) =e= jr3(i,j4s)\*X0(i) - Xs4(i,j4s) + Xb4(i,j4s);  
 assetinventory5(i,j5s).. Xh5(i,j5s) =e= jr4(i,j5s)\*X0(i) - Xs5(i,j5s) + Xb5(i,j5s);

totalasset1(js).. A1(js) =e= sum(i, jr(i,js)\*X0(i));

totalasset2(j2s)..  $A2(j2s) = e = \sum(i, jr1(i,j2s)*X0(i));$   
totalasset3(j3s)..  $A3(j3s) = e = \sum(i, jr2(i,j3s)*X0(i));$   
totalasset4(j4s)..  $A4(j4s) = e = \sum(i, jr3(i,j4s)*X0(i));$   
totalasset5(j5s)..  $A5(j5s) = e = \sum(i, jr4(i,j5s)*X0(i));$

deficits1(js)..  $A1(js) = g = Fmin*L1('t1',js);$   
deficits2(j2s)..  $A2(j2s) = g = Fmin*L2('t2',j2s);$   
deficits3(j3s)..  $A3(j3s) = g = Fmin*L3('t3',j3s);$   
deficits4(j4s)..  $A4(j4s) = g = Fmin*L4('t4',j4s);$   
deficits5(j5s)..  $A5(j5s) = g = Fmin*L5('t5',j5s);$

ratio1(js)..  $F1(js)*L1('t1',js) = e = A1(js);$   
ratio2(j2s)..  $F2(j2s)*L2('t2',j2s) = e = A2(j2s);$   
ratio3(j3s)..  $F3(j3s)*L3('t3',j3s) = e = A3(j3s);$   
ratio4(j4s)..  $F4(j4s)*L4('t4',j4s) = e = A4(j4s);$   
ratio5(j5s)..  $F5(j5s)*L5('t5',j5s) = e = A5(j5s);$

penalty(js)..  $Z1(js) = e = A1(js) - L1('t1',js);$   
penalty1(j2s)..  $Z2(j2s) = e = A2(j2s) - L2('t2',j2s);$   
penalty2(j3s)..  $Z3(j3s) = e = A3(j3s) - L3('t3',j3s);$   
penalty3(j4s)..  $Z4(j4s) = e = A4(j4s) - L4('t4',j4s);$   
penalty4(j5s)..  $Z5(j5s) = e = A5(j5s) - L5('t5',j5s);$

assetmix1(i,js)..  $Xh1(i,js) = l = wup(i)*(Xh1('f1',js) + Xh1('f2',js));$   
assetmix2(i,j2s)..  $Xh2(i,j2s) = l = wup(i)*(Xh2('f1',j2s) + Xh2('f2',j2s));$   
assetmix3(i,j3s)..  $Xh3(i,j3s) = l = wup(i)*(Xh3('f1',j3s) + Xh3('f2',j3s));$   
assetmix4(i,j4s)..  $Xh4(i,j4s) = l = wup(i)*(Xh4('f1',j4s) + Xh4('f2',j4s));$   
assetmix5(i,j5s)..  $Xh5(i,j5s) = l = wup(i)*(Xh5('f1',j5s) + Xh5('f2',j5s));$

assetmix21(i,js)..  $Xh1(i,js) = g = wlo(i)*(Xh1('f1',js) + Xh1('f2',js));$   
assetmix22(i,j2s)..  $Xh2(i,j2s) = g = wlo(i)*(Xh2('f1',j2s) + Xh2('f2',j2s));$   
assetmix23(i,j3s)..  $Xh3(i,j3s) = g = wlo(i)*(Xh3('f1',j3s) + Xh3('f2',j3s));$   
assetmix24(i,j4s)..  $Xh4(i,j4s) = g = wlo(i)*(Xh4('f1',j4s) + Xh4('f2',j4s));$   
assetmix25(i,j5s)..  $Xh5(i,j5s) = g = wlo(i)*(Xh5('f1',j5s) + Xh5('f2',j5s));$

\*mincontribution..  $(wage)*c0 = g = perc*L0;$   
mincontribution1(js)..  $(wage1)*c1(js) = g = perc('t1')*L1('t1',js);$   
mincontribution2(j2s)..  $(wage2)*c2(j2s) = g = perc('t2')*L2('t2',j2s);$   
mincontribution3(j3s)..  $(wage3)*c3(j3s) = g = perc('t3')*L3('t3',j3s);$   
mincontribution4(j4s)..  $(wage4)*c4(j4s) = g = perc('t4')*L4('t4',j4s);$   
mincontribution5(j5s)..  $(wage5)*c5(j5s) = g = perc('t5')*L5('t5',j5s);$

c1.lo(js) = clo;  
c2.lo(j2s) = clo;  
c3.lo(j3s) = clo;  
c4.lo(j4s) = clo;  
c5.lo(j5s) = clo;  
c1.up(js) = cup;  
c2.up(j2s) = cup;  
c3.up(j3s) = cup;

```
c4.up(j4s) = cup;  
c5.up(j5s) = cup;
```

```
model extensiveproblem /masterobj,cashbalance0,cashbalance1,cashbalance2,  
cashbalance3, cashbalance4, cashbalance5, assetinventory0, assetinventory1,  
assetinventory2, assetinventory3,assetinventory4,assetinventory5,  
totalasset1,totalasset2, totalasset3, totalasset4,totalasset5,  
deficits1, deficits2,deficits3,deficits4, deficits5,  
assetmix1,assetmix2,assetmix3,assetmix4,assetmix5,assetmix21,assetmix22,assetmix23,  
assetmix24,assetmix25,  
penalty, penalty1,penalty2, penalty3, penalty4,  
mincontribution1, mincontribution2, mincontribution3, mincontribution4, mincontribution5,  
ratio1,ratio2,ratio3, ratio4,ratio5  
/;
```

```
option limrow=243 ;  
option limcol=243 ;  
extensiveproblem.optfile = 1;  
solve extensiveproblem minimizing zmaster using lp;  
display wage4,wage5, c4.l, c5.l, perc, L4, L5;  
$exit
```

---