



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO**

DORGHISLLANY SOUZA HOLANDA

**INVESTIGANDO UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES
DE MATEMÁTICA NO INTERIOR DE PERNAMBUCO: CONHECIMENTOS
DOCENTES DE COMBINATÓRIA**

Recife
2017

DORGHISLLANY SOUZA HOLANDA

**INVESTIGANDO UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES
DE MATEMÁTICA NO INTERIOR DE PERNAMBUCO: CONHECIMENTOS
DOCENTES DE COMBINATÓRIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de título de mestre.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife
2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

H722i Holanda, Dorghisllany Souza.
Investigando uma proposta de formação inicial de professores de matemática: conhecimentos docentes de combinatória / Dorghisllany Souza Holanda. – Recife, 2017.
120 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2017.
Inclui Referências e Anexos.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Professores - Formação. 3. Combinatória. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2018-16)



DORGHISLLANY SOUZA HOLANDA

INVESTIGANDO UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE
MATEMÁTICA NO INTERIOR DE PERNAMBUCO: CONHECIMENTOS DOCENTES
DE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de título de mestre de Dorghisllany Souza Holanda em 24 de março de 2017.

Aprovada em: 24/03/2017

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientadora
Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Examinador Externo
Prof^a. Dr^a. Rejane Dias

Examinadora Interna
Prof^a. Dr^a. Iranete Lima

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por todas as coisas, pelo Dom da Vida, pela oportunidade de recomeço todos os dias e por todas as bênçãos que tem me concedido.

À minha querida orientadora Rute Borba, sempre presente, doce e generosa, muito mais que uma orientadora, uma mãe que me acolheu academicamente e que me entendeu nos momentos mais difíceis dessa jornada. Agradeço por tudo que você representa, pela paciência, pelas vezes que me ensinou. Agradeço à Deus pela sua vida e por permitido o nosso encontro.

Aos meus pais por estarem sempre ao meu lado, pelo incentivo, pela dedicação, pelas orações. Minha mãe, meu primeiro exemplo de professora, minha primeira orientadora, que me ensinou a importância de estudar e lutar. E meu pai, que sempre trabalhou duro e me permitiu alçar vôos mais altos. Sei o quanto foi difícil para eles ver a filha sair de casa, mas sei da alegria que este momento representa, é a comprovação de que tudo valeu à pena.

A todos os meus familiares, meu irmão Neto Holanda, pelo cuidado e parceria de sempre, Waldemir Freitas, pela cumplicidade, por estar sempre ao meu lado, por me mostrar todos os dias o meu potencial.

Agradeço de todo coração a minha eterna professora, orientadora e amiga do peito Cristiane de Arimatéa, pelo seu exemplo e pela sua ajuda, pelas boas risadas e por me ensinar. Se eu cheguei até aqui, você foi uma das tantas mãos que me ajudou. Serei para sempre grata.

A Ana Paula, minha Paulinha, pelo anjo que é na minha vida, por estar sempre presente quando mais precisei, por ficar madrugadas comigo, me dando força, me incentivando. Você, minha amiga, tem uma alma tão bela, sua alegria é contagiante. Obrigada por ser você, sempre.

Agradeço a todos os meus amigos, os mais novos e os mais velhos, pelas palavras lindas que sempre recebi, pela alegria que sempre me trouxeram e, principalmente, por continuarem sendo meus mesmo na minha ausência.

Aos meus colegas de mestrado, que tão logo se tornaram meus amigos, que caminharam comigo esses dois anos de pesquisa, e a todos que fazem parte do EDUMATEC, professores e funcionários, em especial a Gilda, Cris, Carlos, Liliane e Fátima, pelas contribuições dadas nas aulas de seminário.

Em particular agradeço aos meus professores da graduação, Severino Barros, Kátia Cunha, José Marcos, Valdir Bezerra, e aos meus colegas de graduação Lidiane e Jefferson, por terem participado de momentos determinantes na minha caminhada acadêmica.

Às amigas e companheiras do grupo GERAÇÃO com as quais compartilhei momentos de estudo e diversão. Pelas vezes que me incentivaram, me orientaram e estiveram lá na sala de seminários, mandando energias positivas, defendendo junto comigo a pesquisa em Combinatória.

Agradeço às professoras Iranete Lima e Rejane Dias, pelas contribuições a este trabalho.

À CAPES pelo financiamento que permitiu maior dedicação a essa pesquisa.

Quero agradecer também a todos que de alguma forma colaboram para que essa pesquisa fosse realizada.

Enfim, a todos os professores que ensinaram, ensinam ou ensinarão o conteúdo de Combinatória; a todos eu agradeço e dedico este trabalho.

RESUMO

A presente dissertação se fundamenta nas ideias de Ball, Thames e Phelps (2008), sobre os conhecimentos docentes, e tem como objetivo geral, *analisar como são mobilizados conhecimentos docentes em uma disciplina voltada à Combinatória em um curso de Licenciatura em Matemática*. Para alcançar o objetivo traçado, foram observadas 15 aulas da disciplina “Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e práticas”, do Centro Acadêmico do Agreste da UFPE, e foi realizada uma entrevista semiestruturada com a professora que a lecionou. A investigação teve como foco o trabalho da professora formadora, como esta conduziu as situações de aprendizado em sala de aula e como eram por ela abordados os conhecimentos docentes. Observou-se que a professora formadora, em diversos momentos, destacou a importância dos conhecimentos docentes para a atuação em sala de aula, preocupando-se com as necessidades evidenciadas pelos estudantes, tanto no que se refere ao conteúdo específico quanto ao ensino de Combinatória. A formadora possibilitou momentos, junto aos licenciandos, de resolução, análise e elaboração de questões, bem como de análise de erros, destacando nas atividades desenvolvidas o *Conhecimento de Combinatória – tanto o Comum, quanto o Especializado, o Conhecimento de Combinatória e Ensino e o Conhecimento de Combinatória e Aluno*. O *Conhecimento do Horizonte de Combinatória* e o *Conhecimento do Currículo de Combinatória* foram menos abordados, mas se fizeram presentes quando os licenciandos se envolveram na elaboração de um questionário para alunos da Educação Básica e de uma entrevista para o professor. O conjunto de atividades realizadas propiciaram a discussão de vários conhecimentos docentes e a articulação entre os conhecimentos ocorreu por intermédio da mediação da professora dos debates em sala de aula, a qual constantemente questionava os estudantes e gradativamente inseria novos conceitos. No estudo realizado foram identificadas relações importantes entre os conhecimentos docentes, evidenciou-se a possibilidade de trabalho que articule conhecimentos de conteúdo com conhecimentos pedagógicos e mostrou-se a necessidade de disciplinas, na formação inicial, com suficiente carga horária, que discutam a construção dos variados conhecimentos necessários para o trabalho do professor, em particular no que concerne à Combinatória.

Palavras-chave: Conhecimentos docentes. Formação Inicial de Professores de Matemática. Combinatória. Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

This dissertation is based on the ideas of Ball, Thames and Phelps (2008), on the knowledge of teachers, and has as general aim to analyse how teachers' knowledge is mobilized in a discipline focused on Combinatorics in a degree course in Mathematics. In order to reach the goal, 15 classes of the discipline "Combinatorics Teaching: theoretical and practical perspectives", from the Centro Acadêmico do Agreste of the Universidade Federal de Pernambuco, were observed and a semi-structured interview was conducted with the teacher who taught it. The research focused on the work of the teacher trainer, how she led the learning situations in the classroom and how she addressed the teaching knowledge. It was observed that the teacher at various times emphasized the importance of teacher knowledge for classroom performance, being concerned with the needs evidenced by the students, both regarding the specific content and the teaching of Combinatorics. The teacher made possible moments, together with the students, of solving, analysing and elaborating questions, as well as analysing errors, highlighting in the developed activities the *Knowledge of Combinatorics* - both the *Common*, as the *Specialized Knowledge*, the *Combinatorics and Teaching Knowledge* and the *Combinatorics and Student Knowledge*. The *Horizon Combinatorics Knowledge* and the *Combinatorics Curriculum Knowledge* were less addressed, but they were present when the students were involved in the elaboration of a questionnaire for Basic Education students and an interview for the teacher. The set of activities allowed the discussion of several teachers' knowledge and the articulation between the knowledge occurred through the mediation of the teacher by the debates in the classroom, who constantly questioned the students and gradually inserted new concepts. In the study, important relations were identified between teaching knowledge. The possibility of work articulating content knowledge with pedagogical knowledge was evidenced and the need for disciplines in the initial training with sufficient workload that discuss the construction of the knowledge needed for the work of the teacher, in particular as regards Combinatorics.

Key-words: Teacher Knowledge; Initial Mathematics Teachers Education; Combinatorics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Domínios do conhecimento para o ensino da Matemática.	288
Figura 2 - Questão de Combinatória sobre o Tratado Médico de Sushruta.	644
Figura 3 - Questão de Combinatória do livro Lilavati.	688
Figura 4 - Ficha de análise de problemas combinatórios: CASO 2.	81
Figura 5 - Questão de Combinatória sobre o livro chinês.	833
Figura 6 - Questão de Combinatória sobre o livro chinês.	888

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Conhecimentos Docentes para o ensino de Combinatória.....	322
Quadro 2 – Programa da disciplina “Ensino de Combinatória: perspectivas teórico-práticas”.	499
Quadro 3 - Descrição dos objetivos de cada parte da entrevista.....	522
Quadro 4 - Questionário aplicado – Primeiros contatos.	544
Quadro 5 - Algumas respostas apresentadas pelos estudantes – FICHA 1: primeiros contatos.	789

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 COMBINATÓRIA E CONHECIMENTOS DOCENTES	22
2.1. SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS	22
2.2. CONHECIMENTOS DOCENTES PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA	26
2.3. PROBLEMAS COMBINATÓRIOS	33
3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA: PESQUISAS ANTERIORES	35
3.1. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE COMBINATÓRIA E OS CONHECIMENTOS DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	35
3.2. ESTUDOS SOBRE O CONHECIMENTO DE COMBINATÓRIA DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	39
3.3. ESTUDOS COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA	42
4 MÉTODO	45
4.1 – ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA	45
4.2 – LOCAL DE PESQUISA E PARTICIPANTES	47
4.3 – FONTES E INSTRUMENTOS DE PESQUISA	50
5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	53
5.1. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES REALIZADAS	53
5.2. ANÁLISE DAS AULAS E ATIVIDADES REALIZADAS POR CONHECIMENTO DOCENTE.....	63
5.2.1. Conhecimento Comum de Combinatória	63
5.2.2. Conhecimento Especializado de Combinatória	68
5.2.3. Conhecimento do Horizonte de Combinatória	76
5.2.4. Conhecimento de Combinatória e Aluno	78
5.2.5. Conhecimento de Combinatória e Ensino	82
5.2.6. Conhecimento de Combinatória e Currículo	92
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
REFERÊNCIAS	101
ANEXO A - PROGRAMA DO COMPONENTE CURRICULAR	105

ANEXO B – FICHA I DO COMPONENTE CURRICULAR	108
ANEXO C – FICHA II DO COMPONENTE CURRICULAR	109
ANEXO D – FICHA III DO COMPONENTE CURRICULAR.....	113
ANEXO E – ENTREVISTA COM PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA	116
ANEXO F – QUESTIONÁRIO PARA ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	119

1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 1970, quando acontecia uma intensa discussão sobre o papel social e político da educação, as temáticas sobre Formação de Professores ganharam destaque nos debates de Educação no Brasil, em particular a Formação de Professores de Matemática. De acordo com Ferreira (2003), as novas propostas e modelos em debate foram ativados pela necessidade de conhecer melhor o processo de aprender e ensinar, de entender o processo de formação de modo contínuo, de compreender como o professor pensa sua prática e de refletir sobre o desenvolvimento profissional, dentre outros temas que envolvem o tornar-se professor.

O trabalho de Ferreira (2003), a partir de um olhar retrospectivo sobre as pesquisas em formação de professores de Matemática, de 1970 até 2000, buscou investigar quais eram as questões pesquisadas a respeito da formação do professor. Evidenciou-se que a “formação de professores passa a ser entendida como um processo contínuo por meio do qual o sujeito aprende a ensinar” (p. 35), ou seja, a formação deixa de ser um momento em que se aprende técnicas e/ou métodos de ensino para ser um processo. A autora também constata novos desafios para a pesquisa nessa área, em busca de compreender melhor quem é o professor de Matemática, como ele constrói seus conhecimentos na formação e como esses se relacionam com a sua prática.

Em 2003, Fiorentini publicou um estudo em que toma como material de análise 112 pesquisas, dissertações e teses, produzidas no período de 1978 até 2002 em cursos de Pós-Graduação em Educação e em Educação Matemática, com o objetivo de fazer um balanço da pesquisa brasileira sobre formação de professores que ensinam Matemática. Dentre os resultados, em relação à formação inicial, verificou-se que um dos problemas apontados recorrentemente refere-se ao distanciamento entre a formação específica¹, a formação pedagógica e a prática profissional na Educação Básica. Essa é uma questão que perpassa toda a história das licenciaturas no Brasil.

Recentemente publicado, o e-book com título “Mapeamento e estado da arte da pesquisa brasileira sobre o professor que ensina Matemática” foi um projeto coordenado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Formação de Professores de Matemática (GEPFPM²), com a participação de pesquisadores de diversas Instituições de Ensino Superior brasileiras. O objetivo do projeto foi o de mapear, descrever e sistematizar pesquisas brasileiras, produzidas

¹ Ou seja, formação na disciplina que o licenciado vai lecionar.

² Grupo Interinstitucional, com sede na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (FE/UNICAMP) e que congrega cinco universidades paulistas, a saber, Unicamp, Unesp/Rio Claro, UFSCar, PUC-CAMPINAS e USF.

no período de 2001 a 2012 em programas de pós-graduação, que têm como foco de estudo o professor que ensina Matemática. Por um lado, *saberes e competências* foi o campo de investigação mais encontrado nos resultados desse mapeamento. Por outro lado, os *contextos de formação*, principalmente no que se refere às *condições de trabalho docente* ainda são pouco explorados nas pesquisas.

Dentre os resultados apontados por esse mapeamento, observou-se que apesar de a formação inicial ser uma temática recorrente nos trabalhos analisados, questões a respeito da atuação, dos pensamentos e dos saberes docentes ainda são principiantes no Brasil. Citando Moriel-Jinuor, Cyrino (2009, p. 538) “precisamos de mudanças efetivas nas ações formativas em cursos de licenciatura e uma efetiva mudança na concepção de formação de professores de Matemática que os formadores possuem”. Dessa forma, a pesquisa alerta para a necessidade, dentre outras, de reconfigurar a formação inicial.

Os primeiros cursos de Licenciatura no Brasil, criados na década de 1930-1940, apresentavam uma estrutura conhecida pelos pesquisadores por “3+1”. O modelo “3+1”, ou “bacharelado + didática”, segundo Moreira e David (2007, p.13), consistia de três anos de formação específica (bacharelado) e mais um ano para a formação pedagógica (didática). “O saber considerado relevante para a formação do professor era, fundamentalmente, o conhecimento disciplinar específico”. O que se chamava de formação pedagógica era reduzido a um conjunto de técnicas para transmissão do conteúdo específico adquirido nos anos iniciais de formação docente. Tinha-se, portanto, um saber docente decomposto:

[...] o saber docente é decomposto em componentes, de tal forma que um deles, o chamado **conhecimento da disciplina** (*ou específico*), assume a condição de essencial. Os demais componentes, ainda que reconhecidos como saberes complexos e importantes, conformam um conjunto de conhecimentos de caráter basicamente acessório ao processo de transmissão do saber disciplinar. Decomposta dessa forma, a Matemática Escolar³ costuma se reduzir à parte elementar e simples da Matemática Acadêmica⁴, e a complexidade do saber profissional do professor vai se localizar em conhecimentos considerados de natureza essencialmente não-matemática. (MOREIRA E DAVID, 2007, p.15, *grifo nosso*).

³ A Matemática Escolar, segundo os pesquisadores Moreira e David (2007), refere-se ao conjunto dos saberes validados, associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. A Matemática Escolar inclui tanto os saberes produzidos na formação docente e em resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, quanto os saberes produzidos e mobilizados pelos professores em sua ação pedagógica na sala de aula.

⁴ A Matemática Acadêmica, por sua vez, se refere à Matemática como um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais.

Nesta perspectiva, a integração entre o saber específico/do conteúdo, e o saber pedagógico, que guia a ação do professor em sala de aula, é vista como uma tarefa a ser realizada no exterior da formação docente. Entende-se que essa visão de formação, tira das Instituições de Ensino Superior – IES a obrigação de integrar os saberes necessários ao trabalho docente. De acordo com esse modelo de formação, o conhecimento da disciplina/específico é trabalhado isoladamente da formação pedagógica e da prática profissional, não priorizando essas últimas como essenciais na formação inicial ocorrida nas IES.

Shulman (1986), chama a atenção sobre conhecimentos docentes específicos e, por esse raciocínio, o saber matemático que o licenciando precisa para ser um bom professor de Matemática não é o mesmo que requer o bacharel para ser um bom matemático. Assim, a formação do professor não pode ser a mesma formação do bacharel. Fiorentini e Oliveira (2013), ao discutirem sobre essa questão, afirmam que não se trata de defender uma Matemática mais simples ou superficial para a formação do professor, mas, sim, defender que,

O professor de Matemática precisa conhecer, com profundidade e diversidade, a Matemática enquanto prática social e que diz respeito não apenas ao campo científico, mas, sobretudo, à Matemática escolar e às múltiplas matemáticas presentes e mobilizadas/produzidas nas diferentes práticas cotidianas. (FIORENTINI E OLIVEIRA, 2013, p. 924).

A partir da década de 1970, na tentativa de promover uma interação entre as disciplinas pedagógicas e as específicas, foram introduzidas nos currículos de licenciatura as disciplinas chamadas *integradoras*. Essas disciplinas tinham a função específica de promover a integração entre a *formação de conteúdo* e a *formação pedagógica* e destas com a prática docente.

O documento elaborado a partir do IV Encontro Nacional da Comissão Nacional de Reformulação dos Cursos de Formação do Educador de 1989 (CONARCFE - 1989) informa que, “[...] as disciplinas de conteúdo específico são as mesmas para o Bacharelado e para a Licenciatura. Somente após haver um relativo domínio das questões dos conteúdos específicos e pedagógicos são introduzidas as disciplinas integradoras” (*apud* SOUZA, PEREZ, BICUDO, SILVA, BALDINO E CABRAL, 1995, p. 42). Isto é, “[...] no que se refere ao domínio do conhecimento específico não há diferenciação entre os dois profissionais” (Ibid., p. 42). O documento diferencia os profissionais em formação quando destaca que “o licenciando, no ensino de um determinado conteúdo, necessita não só desse conteúdo, mas também da formação pedagógica” (Ibid., p. 42)

Conforme Moreira (2012), as expectativas criadas em relação às disciplinas integradoras jamais foram cumpridas.

Esse bloco integrador traduziu-se, na prática, em um espaço de flexibilidade curricular, onde se podiam criar disciplinas com certa liberdade, muitas vezes em simples adesão a ondas pedagógicas passageiras, algumas com mais substância e fundamentação, outras nem tanto. O resultado final dessa tentativa é a estrutura que, essencialmente, se observa ainda hoje: *três blocos mais ou menos autônomos e independentes* que se somam linearmente no cumprimento do tempo curricular e que se permitem, ao fim e ao cabo, deixar ao licenciado, como individuo, *a tarefa que a instituição formadora e certificadora não consegue realizar: organizar os saberes da formação num corpo de conhecimentos orgânico, consistente e instrumental para a prática docente escolar.* (MOREIRA, 2012, p. 5, *grifos nossos*)

O pesquisador evidencia que a questão da integração com a prática docente não se colocava como uma problemática a ser considerada no interior do processo de formação do conteúdo, isto é, mesmo com as disciplinas integradoras, o distanciamento em blocos das disciplinas – *específicas, pedagógicas, integradoras* – persistia.

Essa maneira de entender a “integração” abre espaço para que se mantenha, na prática, uma variante do antigo modelo “3+1”, prevalecendo ainda, em essência, a ideia de que o fazer do professor consiste fundamentalmente em transmitir um determinado conteúdo disciplinar utilizando, para isso, as ciências da educação. (MOREIRA, 2004, p. 11)

De acordo com Moreira (2012), atualmente, as licenciaturas não têm mais esse formato, as disciplinas matemáticas não ocupam mais 75% do tempo curricular (como no “3+1”) e questões como a didática, a experiência e a prática têm sido defendidas com a inserção de disciplinas como estágios supervisionados, metodologias do ensino, psicologia da aprendizagem, dentre outras, e essas disciplinas não são separadas temporalmente – alguns anos de específicas, depois pedagógicas e integradoras. Entretanto, concorda-se com Moreira (2012) na defesa que essa mudança ocorreu somente na estrutura dos cursos e que até hoje, em geral, as disciplinas de conteúdo são projetadas e executadas independentemente das outras disciplinas – as que se referem ao trabalho de ensinar. Para Gatti (2010, p. 485), as Universidades têm se restringido a propor reformulações de alguns aspectos sem tocar “no âmago da questão, tão bem salientado nas análises: sua estrutura institucional e a distribuição de seus conteúdos curriculares” e “[...] o que se verifica é que a formação de professores para a Educação Básica é feita, em todos os tipos de licenciatura, de modo fragmentado entre as áreas disciplinares e níveis de ensino [...]”.

Diante do exposto até aqui, entende-se as necessidades de mudanças apontadas pelos pesquisadores acima citados do seguinte modo: o processo de formação na Licenciatura em Matemática precisa se articular com a prática docente escolar, ou seja, este processo precisa

acontecer de forma unificada com a profissão, entendendo e buscando formas de enfrentar os limites e as dificuldades hoje encontradas na Educação Básica. Como vários pesquisadores de referência têm alertado, o problema da fragmentação dos cursos de formação não será resolvido apenas inserindo no currículo da Matemática as disciplinas didático-pedagógicas organizadas e oferecidas por alguns professores; a formação dos professores requer competências e objetivos específicos, portanto, requer estrutura(s) específica(s), indo além daquela prevista para os cursos de bacharelado. Mas qual seria essa estrutura? Sabe-se que a resposta a essa pergunta não é fácil e não é única. Não há uma estrutura pronta, para os cursos de formação. O que se pode afirmar, com certeza, é que, as disciplinas destinadas aos cursos de bacharelado não dão conta da proposta de formação do professor. Para Gatti (2010, p. 487), a formação de professores necessita de uma verdadeira revolução nas estruturas institucionais formativas e nos currículos; “é preciso integrar essa formação em currículos articulados e voltados a esse objetivo precípuo”.

Quando termina o processo de formação inicial, o licenciado volta à escola na condição de professor, de posse de conhecimentos, concepções, saberes que deveriam ter sido ampliados, modificados e reelaborados na sua formação. Ao não se discutir articuladamente os conhecimentos necessários para a prática profissional na graduação, é bem provável que a prática de valorizar o conteúdo matemático pela técnica de transmissão de conhecimentos predomine. Como defendem Tardif (2014) e Pimenta (2012), para a superação de um conhecimento desarticulado, um dos saberes que compõe o conhecimento do professor é o saber da experiência. Assim, é preciso que os licenciandos enquanto alunos na formação na Licenciatura aprendam também através de práticas vivenciadas.

Silva, Dias e Pimenta (2014), realizaram um estudo com 80 professores de 20 escolas de Ensino Fundamental e Médio, com o objetivo de analisar a representação social sobre a formação de professores da rede pública estadual de Pernambuco. Esta pesquisa revelou que há uma forte influência da formação inicial na compreensão do que é ensinar para os professores participantes.

Os resultados revelaram que as representações sobre a formação circulam em torno das categorias pedagógica, acadêmica, profissional, predominando a categoria da dimensão pedagógica. No entanto, observa-se que as representações da formação são ancoradas na categoria acadêmica, ou seja, considerável influência desse processo vinculado à formação inicial, oferecidas nos cursos de licenciatura. (SILVA, DIAS e PIMENTA, 2014, p. 564).

Como argumentam as autoras, apesar das discussões nacionais e internacionais acerca de uma nova estrutura para a formação e de uma nova compreensão sobre o ensino, as representações docentes ainda se fundamentam na compreensão construída historicamente, em que há um distanciamento entre o conhecimento específico e o conhecimento pedagógico, compreensão essa que influencia fortemente como os professores concebem o ensino em suas salas de aula. Como afirma Silva, Dias e Pimenta (2014, p.564), “as representações dos docentes ainda se fundamentam na concepção de formação construída historicamente, ou seja, na concepção de que a formação encontra-se circunscrita à aquisição dos conhecimentos específicos da área e à forma de como ensiná-los”. (SILVA, DIAS e PIMENTA, 2014, p. 564)

Outra questão identificada na pesquisa de Silva, Dias e Pimenta (2014) é que os professores valorizavam mais a formação inicial do que a continuada e se viam principalmente como matemáticos, trabalhando e transmitindo o conteúdo em sala de aula, e não como profissionais da educação. Nesse sentido, evidencia-se a necessidade de, na formação inicial, haver um contato maior com o conhecimento pedagógico, para que o professor tenha compreensão mais ampla dos caminhos que envolvem a sala de aula.

O objetivo da presente pesquisa não é apresentar soluções prontas para a formação do professor de Matemática, mas discutir a relação entre a formação e a prática, buscando uma compreensão mais profunda acerca dos conhecimentos necessários à profissão do professor. A expectativa é a de que a discussão sobre as questões que se colocam na prática para o professor de Matemática possa conduzir a uma percepção sobre quais conhecimentos precisam ser cuidadosamente construídos e articulados na formação inicial.

De acordo com as novas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) para a formação inicial, Resolução nº 02 de julho de 2015, a formação inicial precisa capacitar o profissional para o exercício da docência escolar, os cursos precisam garantir em seus currículos, conteúdos específicos da respectiva área de conhecimento, bem como os conteúdos relacionados com a educação, a formação pedagógica. As novas DCNs definem também que durante a formação inicial do professor deverá ser garantida a relação entre teoria e prática, ambas fornecendo elementos básicos para o desenvolvimento dos conhecimentos e habilidades necessários à docência.

Percebe-se que as mudanças necessárias à formação inicial já são citadas nos documentos nacionais, entretanto, não se consegue, ainda, visualizar grandes mudanças nas estruturas dos cursos de formação inicial. Nesse sentido, a presente pesquisa busca contribuir para analisar proposta que objetiva articular conhecimentos de conteúdo com conhecimentos pedagógicos, em particular no que se refere ao ensino de Combinatória.

No cenário internacional, Lambert e Ball (1998), traçaram um diagnóstico problemático da formação inicial de professores resultado, por exemplo, do não reconhecimento dos conhecimentos que os futuros professores trazem para a formação inicial ou o fato de que tais cursos, geralmente, dão pouca atenção ao conhecimento didático. Nos cursos também há separação entre teoria e prática e reduz-se a importância da prática profissional.

Shulman (1987; 2005) em suas pesquisas fornece elementos importantes sobre os conhecimentos necessários à prática profissional docente e defende a construção do *knowledge base* (base de conhecimentos) para o professor. Essa base de conhecimentos consiste em entender o conhecimento docente a partir de três eixos: a) o conhecimento do conteúdo da disciplina, b) o conhecimento curricular e c) o conhecimento pedagógico do conteúdo. Tardif (2002), explica que a expressão *knowledge base* pode ser compreendida de duas formas: no sentido restrito, se referindo aos saberes do professor relativos à condução da matéria durante a aula; e no sentido amplo, quando se estabelece um conjunto de saberes na ação de ensinar, ou seja, um conjunto de compreensões.

Os pesquisadores Ball, Thames e Phelps (2008) ao estudarem as categorias de conhecimentos descritas por Shulman (1987), fizeram um refinamento destes conhecimentos no que se refere ao ensino de Matemática. Saber Matemática para ensinar Matemática, de acordo com esses estudiosos, vai além do conhecimento de conteúdo e inclui elementos sobre os estudantes, sobre o currículo e sobre o meio social. O *conhecimento matemático para o ensino*⁵, se estrutura em seis domínios: *conhecimento comum do conteúdo*⁶; *conhecimento especializado do conteúdo*⁷; *conhecimento do horizonte do conteúdo*⁸; *conhecimento do conteúdo e alunos*⁹; *conhecimento do conteúdo e ensino*¹⁰ e *conhecimento do conteúdo e currículo*¹¹.

Cada uma das categorias descritas por Ball, Thames e Phelps (2008) serão discutidas adiante, quando da apresentação da revisão de literatura. Particularmente, no presente trabalho, serão descritos os conhecimentos necessários para o ensino de Combinatória, com base em algumas pesquisas de referência na área.

Como defendem Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014, p.134), a formação inicial do professor tem que abordar aspectos específicos do conceito de Combinatória, como, por

⁵ No original, em inglês, *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*

⁶ No original, em inglês, *Common Content Knowledge (CCK)*

⁷ No original, em inglês, *Specialized Content Knowledge (SCK)*

⁸ No original, em inglês, *Horizon Content Knowledge (HCK)*

⁹ No original, em inglês, *Knowledge of Content and Students (KCS)*

¹⁰ No original, em inglês, *Knowledge of Content and Teaching (KCT)*

¹¹ No original, em inglês, *Knowledge of Content and Curriculum (KCC)*

exemplo, “situações que dão significado à Combinatória (diferentes tipos de problemas), os invariantes (relações e propriedades das situações combinatórias) e as variadas formas de representação que podem ser utilizadas na resolução de problemas combinatórios”. Quando há um desconhecimento desses aspectos das situações combinatórias, fica difícil para o professor construir situações de aprendizagem diferentes, passando a fazer uso exclusivo de fórmulas e regras.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) orientam o ensino de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de problemas combinatórios diversificados. Apesar dessas recomendações, parece que propostas que lidam com o amplo ensino de Combinatória nos cursos de formação inicial ainda são poucas. Estudos que investigaram o conhecimento de professores formados e em formação encontraram que os professores pesquisados apresentaram dificuldades em diferenciar problemas e, também, em avaliar as estratégias dos alunos (ROCHA, 2011; ASSIS, 2014), os professores sentiram dificuldade em resolver e analisar diferentes problemas propostos (LIMA, A. P., 2015; LIMA, R., 2015) e, ainda, desconheciam as propriedades de cada situação combinatória, o que acarreta uma insegurança ao ensinar esse conteúdo (SABO, 2010).

Borba (2010) defende que o trabalho com as situações combinatórias é uma excelente oportunidade para estimular o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes em diferentes níveis escolares. A pesquisadora argumenta que o raciocínio combinatório é plenamente alcançado em estágios avançados do desenvolvimento cognitivo mas, “não se deve desconsiderar que a gênese desta forma de pensamento pode iniciar-se antes do alcance do período do pensamento operacional formal.” (Borba, 2010, p.4).

De acordo com a autora, o raciocínio combinatório é um modo de pensar presente nas *situações* nas quais “dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender a critérios específicos (escolha e/ou ordenação) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis” (p. 03). E continua:

Este modo de pensar é útil no cotidiano – por estar presente em situações variadas como organizações de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc. – bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento – tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo. O desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, portanto, é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino formal na Educação Básica. (BORBA, 2010, p. 03).

O campo de investigações sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório é rico e com amplas aplicações em sala de aula. Dessa forma, há necessidade de tratar destas questões na formação de professores, afirma Borba, 2010.

Nesse contexto, e acreditando no papel essencial da formação inicial na construção de conhecimentos, surgem alguns questionamentos iniciais: “*como as disciplinas em um curso de Licenciatura em Matemática estão organizadas de forma a atender as necessidade da formação para o ensino de Combinatória?*”, ou, “*de que maneira, a formação inicial de professores contribui para a construção dos conhecimentos necessários para o trabalho com a Combinatória?*”.

Os estudos aqui destacados buscaram discutir, com professores de Matemática e com alunos, problemas combinatórios, com a intenção de investigar o que sabiam sobre a Combinatória e quais eram as suas principais dificuldades. Essas pesquisas apontam que deve haver uma lacuna na formação inicial, dadas as dificuldades apresentadas pelos professores e, também, pelos alunos. Assim, foram investigados alguns cursos em busca de compreender como as disciplinas estavam organizadas, o que levou ao campo de investigação da presente pesquisa. Essa investigação aconteceu a partir das estruturas curriculares de cada curso, nas quais buscou-se identificar disciplinas que trabalhassem com Combinatória e com o ensino de Combinatória. Nesse percurso, encontrou-se, a partir do detalhamento dos objetivos e metodologias dos componentes curriculares ofertados, que alguns envolviam somente o conteúdo pedagógico e outros, somente o conteúdo específico, até que foi encontrado um componente curricular que pretendia discutir os dois tipos de conhecimento.

A presente pesquisa aconteceu em uma turma de quinto período de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco na Cidade de Caruaru. A escolha desse Centro se justifica por existir, no quadro curricular de Licenciatura em Matemática, uma disciplina eletiva que discute os conhecimentos de Combinatória e do ensino de Combinatória, necessários para a atuação do professor em formação, conforme é defendido neste trabalho.

Esta disciplina, ofertada na categoria eletiva, foi elaborada por uma professora doutoranda em Educação Matemática, que pesquisa sobre os conhecimentos necessários à formação do professor em Combinatória. Foram observadas as aulas, procurando identificar elementos do conhecimento docente mobilizados pela professora formadora na prática do ensino de Combinatória. Durante a coleta de dados, buscou-se observar o cuidado da professora formadora com os conhecimentos docentes, tanto do conteúdo em si, quanto pedagógico do

conteúdo. Assim, a investigação teve como foco o trabalho do professor formador a partir da seguinte questão de pesquisa:

Quais conhecimentos docentes são mobilizados nas aulas de uma disciplina voltada à discussão de Combinatória num curso de Licenciatura em Matemática?

Para buscar possíveis respostas a esse questionamento, foram determinados os seguintes objetivos de pesquisa:

Geral

Analisar como são mobilizados conhecimentos docentes em uma disciplina voltada à Combinatória em um curso de Licenciatura em Matemática.

Específicos

- *Identificar quais conhecimentos docentes são vivenciados e estimulados nas aulas do componente curricular “Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e práticas” da Licenciatura em Matemática do CAA – UFPE.*
- *Relacionar, entre si, os distintos conhecimentos docentes evidenciados nas aulas do componente curricular “Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e práticas” da Licenciatura em Matemática do CAA - UFPE*

O presente estudo é composto por quatro capítulos, seguidos de algumas considerações gerais.

No Capítulo 1 busca-se discutir sobre as situações combinatórias a partir de pesquisas na área e apresentar escolhas teóricas, discutindo-se relações entre Conhecimentos Docentes para o ensino de Combinatória.

O Capítulo 2 trata do ensino e da aprendizagem de Combinatória, a partir do estudo de pesquisas anteriores importantes na área, bem como busca apresentar os estudos que levaram à construção da questão de investigação que impulsionou a presente pesquisa.

No Capítulo 3, o Método, são descritos os caminhos metodológicos percorridos, os procedimentos e instrumentos metodológicos, bem como o campo de estudo e os participantes da pesquisa.

Na Discussão e Análise dos dados encontrados, Capítulo 5, são apresentados os dados analisados, com evidências dos momentos de discussão sobre os conhecimentos docentes, a partir das atividades escolhidas pela professora formadora.

Por fim, as Considerações Finais serão apresentadas, a partir das análises dos dados encontrados e serão discutidas implicações educacionais resultantes do presente estudo, bem como serão indicadas possíveis pesquisas futuras.

2 COMBINATÓRIA E CONHECIMENTOS DOCENTES

2.1. SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

A Análise Combinatória¹² é, segundo Merayo (2001), a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto. Como defendem Pessoa e Borba (2009, p. 3), a Combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, “a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação sem necessariamente ter que contá-los um a um”.

Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014), por sua vez, argumentam que as situações combinatórias possuem diversas relações lógico-matemáticas (além das relações de *escolha* e *ordenação* presentes nos problemas combinatórios simples, nos problemas condicionais pode haver relações de *proximidade*, *posicionamento* e *limitação da presença de determinados elementos*), sendo, portanto, o estudo da Combinatória uma rica oportunidade para o desenvolvimento do pensamento lógico dos estudantes.

Em estudo que investigou como alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio resolviam problemas combinatórios, Pessoa e Borba (2009), propuseram uma classificação na qual foi incluído o *produto cartesiano* aos problemas de Combinatória que são trabalhados no Ensino Médio: *arranjo*, *permutação* e *combinação*. Cada um destes tipos de problemas combinatórios possui características próprias que permitem sua distinção e possui uma forma diferente de organizar o raciocínio combinatório. Segundo Borba (2013, p. 4), os problemas do tipo produto cartesiano “são determinados a partir da escolha de elementos de diferentes conjuntos”, nos problemas do tipo arranjo “os elementos são escolhidos a partir de um conjunto único, mas nem todos os elementos constituem as possibilidades a serem enumeradas”, ou seja, a ordem de escolha dos elementos gera novas possibilidades, nos problemas do tipo combinação “são escolhidos alguns elementos de um conjunto único e a ordem de escolha dos elementos não constituem possibilidades distintas”. Os problemas do tipo *permutação* são tratados como um caso particular de *arranjos*, em que se utiliza todos os elementos do conjunto dado. “Cognitivamente falando, entretanto, estes são tipos de problemas distintos, pois nos arranjos os elementos não são todos utilizados na escolha de cada

¹² Neste estudo, Combinatória e Análise Combinatória serão tratadas como sinônimos.

possibilidade e nas permutações todos os elementos são utilizados em cada uma das possibilidades”. (BORBA, 2013, p. 4).

Para as autoras Pessoa e Borba (2009), é o trabalho com essas diferentes situações que dão significado à Combinatória. Para que os estudantes compreendam esse grande leque de possibilidades, Borba (2010) defende que é necessário que o raciocínio combinatório seja desenvolvido bem antes do Ensino Médio, já que é preciso um longo tempo para formá-lo, uma vez que são várias as situações de Combinatória a serem tratadas, e em diferentes níveis de dificuldade.

O raciocínio combinatório é um modo de pensar presente nas situações combinatórias e que necessitam de um longo período para ser desenvolvido, porque envolve diferentes aspectos. Pessoa e Borba (2009) falam sobre esse processo,

(...) que se amplia a partir de experiências extraescolares e vivências escolares - sejam as diretamente relacionadas a situações de Combinatória, sejam as indiretamente relacionadas – e que este desenvolvimento evidencia-se já nos anos iniciais de escolarização e que progressivamente vai ser modificando no sentido de uma maior sistematização e formalização na compreensão dos diferentes tipos de problemas combinatórios. (PESSOA e BORBA, 2009, p. 2 - 3).

A Análise Combinatória é um conteúdo da Matemática formalizado, geralmente, apenas no segundo ano do Ensino Médio, embora documentos curriculares nacionais e pesquisas em Educação Matemática (PESSOA e BORBA, 2009; SANTOS, MATIAS E PESSOA, 2011; PESSOA e SILVA, 2012; PESSOA e SANTOS, 2012; ROCHA e BORBA, 2013; dentre outras) incentivem práticas de trabalho com este conteúdo desde os anos iniciais. As pesquisas citadas evidenciam, dentre outros elementos, a capacidade dos alunos, ainda que sem um trabalho formal com a Combinatória, iniciarem corretamente as suas resoluções, apresentando, assim, princípios de pensamento combinatório.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), o ensino de Combinatória deve ser iniciado desde os anos iniciais com maior aprofundamento no Ensino Médio. Essa continuidade pode fazer com que os diferentes tipos de problemas sejam tratados de uma forma mais sistemática e generalizadora.

A Base Curricular Comum do Estado de Pernambuco (BCC) (PERNAMBUCO, 2008), considera uma oportunidade privilegiada a conexão do campo das operações numéricas com a Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Este documento propõe ao professor a criação de situações em que o aluno seja levado a realizar diferentes combinações.

Também o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2010) adverte que:

É inegável a importância de se incluírem nesta fase de escolaridade as primeiras ideias nas áreas de Estatística, Combinatória e Probabilidade. No entanto, a apresentação dos conceitos básicos desses campos – possibilidade, chance, probabilidade, entre outros – contém, por vezes, erros ou indução ao erro (BRASIL, 2009, p. 31).

Para os anos finais do Ensino Fundamental, os PCN afirmam que o trabalho com Combinatória auxilia o aluno a desenvolver:

(...) desde cedo, procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 137).

É recomendado também o trabalho em Combinatória com o intuito de desenvolver o *princípio multiplicativo* como estratégia para resolução de problemas. Para Lima, A. (2015, p. 43) esta estratégia facilita “a compreensão de seus alunos quanto à aprendizagem das fórmulas de arranjo e permutação, uma vez que eles percebem que estas fórmulas são originadas a partir do princípio multiplicativo”.

Segundo o Guia do PNL (2008) para os anos finais do Ensino Fundamental, quase todas as coleções de livros didáticos apresentam atividades relacionadas ao ensino de Combinatória, entretanto, com uma exploração ainda superficial. O Guia alerta para a necessidade de mudanças nestas obras, inclusive investigando se as situações usadas para introduzir os conceitos e os procedimentos de contagem estão adequados.

Para o Ensino Médio, a Combinatória deve priorizar a descrição e a análise de um grande número de dados “realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra da população, aplicar as ideias de Probabilidade e Combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano” (BRASIL, 2002, p. 44). É comum que nessa fase se faça maior uso de fórmulas, mas os PCN do Ensino Médio advertem que essas fórmulas:

(...) devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente a resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. (BRASIL, 2002, p. 127).

Embora essa abordagem gradativa para o ensino de Combinatória seja incentivada pelos documentos citados, os trabalhos de Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014) e Lima, Amorim e Pessoa (2013), indicam que esta prática não é seguida nas aulas de Matemática e que,

geralmente, o ensino de Combinatória é introduzido formalmente somente no 2º do Ensino Médio.

Os problemas de Combinatória requerem dos alunos diferentes pensamentos e estratégias de resolução, e requerem dos professores, a capacidade de acompanhar essa construção do raciocínio combinatório e dos procedimentos de resolução. Portanto, não é suficiente que o professor de Matemática saiba responder problemas de Combinatória, mas ele precisa conhecer de tal forma que consiga construir variadas atividades que auxiliem os estudantes na compreensão das propriedades e na construção das estratégias de resolução (LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO, 2004). Caso contrário, o ensino torna-se mecanizado, priorizando “situações padronizadas e transformando a Combinatória em apenas um ‘jogo de fórmulas complicadas’ ” (MORGADO, PITOMBEIRA DE CARVALHO, PINTO DE CARVALHO E FERNANDEZ, 1991, p. 2).

Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2004) argumentam que a Combinatória precisa de técnicas diferenciadas para possibilitar aos alunos a construção do raciocínio crítico e criativo. Para isso, chama atenção dos professores, alertando que:

Não é suficiente resolver os problemas comumente apresentados no livro-texto. Sem uma orientação adequada, corre-se o risco de transmitir para os alunos a ideia de que esses assuntos requerem o uso de um enorme manancial de truques, reforçando a ideia de que Matemática é um assunto difícil e exclusivo de uns poucos. (LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO, 2004, prefácio).

Rocha (2011) reflete que, apesar das contribuições que já conseguimos na área, discutindo os caminhos para o ensino de Combinatória, ainda necessitamos de contribuições mais efetivas na área de formação de professores para o ensino de Combinatória. A pesquisadora afirma que “interessante seria que os professores que lidem com a formação de futuros professores comecem a promover mudanças deste ensino desde a graduação, para que a Matemática possa ser vista com novas perspectivas e não tediosa” (ROCHA, 2011, p. 56).

Existe um consenso em torno da ideia de que professores de Matemática da Educação Básica deveriam possuir um conhecimento mais sólido e aprofundado do conteúdo a ser ensinado. Entretanto, o aprofundamento sem objetivos claros e sem uma conexão com o trabalho do professor tornar-se insuficiente, em termos de uma preparação adequada do professor. Dessa forma, a discussão sobre quais “Conhecimentos são necessários ao professor de Matemática?” e “Qual Matemática é necessária para formar o professor de Matemática?”

tem sido objeto de pesquisa na área de Educação Matemática. A discussão específica do ensino de Combinatória será foco da seção que segue.

2.2. CONHECIMENTOS DOCENTES PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Para se discutir sobre os conhecimentos docentes, serão utilizadas as discussões propostas por Shulman (1986; 1987) e Ball, Thames e Phelps (2008). Shulman foi um dos primeiros pesquisadores a discutir, a partir de resultados de pesquisas realizadas, sobre os diversos tipos de conhecimentos necessários ao professor. Segundo Shulman (1987), a análise dos saberes docentes é feita a partir da relação entre o conhecimento e os dispositivos didáticos e, dessa forma, ele afirma ser necessário a construção de uma base de conhecimento¹³ para o professor.

Essa base de conhecimento é, segundo Shulman (1987), constituída de categorias que promovem uma organização para o saber do professor. São elas:

- *conhecimento do conteúdo*; - *conhecimento pedagógico geral*, tendo em conta especialmente aqueles princípios e estratégias gerais de manejo e organização da classe que transcendem o âmbito da disciplina; - *conhecimento do currículo*, com um especial domínio dos materiais e dos programas que servem como “ferramentas para o ofício do docente; - *conhecimento pedagógico do conteúdo*, esse especial amálgama entre matéria e pedagogia que constitui uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma especial de compreensão profissional; - *conhecimento dos alunos e de suas características*; - *conhecimento dos contextos educativos*, que abarcam desde o funcionamento do grupo classe, a gestão e financiamento dos distritos escolares até o caráter das comunidades e culturas; e - *conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos*.¹⁴ (SHULMAN, 1987, p. 8).

Dentre essas categorias, Shulman (1987) destaca o *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge)* como aquela que exerce um papel importante no processo de ensino. Esse conhecimento se refere à forma como o professor pensa e reflete sobre suas escolhas para apresentar a disciplina aos estudantes, ou seja, esse conhecimento se refere

¹³ No original, em inglês, Knowledge Base.

¹⁴ No original, em inglês, “- content knowledge; - general pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter; - curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as “tools of the trade” for teachers; - pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding; - knowledge of learners and their characteristics; - knowledge of educational contexts, ranging from the workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; and - knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds.”

ao ensino da disciplina. Para o pesquisador, o conhecimento pedagógico é um tipo de conhecimento que vai além do conhecimento do conteúdo para uma dimensão de conhecimento de conteúdo para o ensino; inclui as formas de representar, as analogias feitas pelo professor, os exemplos escolhidos, as explicações mais eficazes para o ensino. Ele, ainda, define que:

O conhecimento pedagógico do conteúdo representa a mistura entre a matéria e didática porque se chega a uma compreensão de como determinados temas e problemas se organizam, se representam e se adaptam para os diversos interesses e capacidades dos alunos, e se expõe no seu ensino (SHULMAN, 2005, p. 11).

De acordo com o exposto acima, percebe-se a importância desse conhecimento para a formação do professor. Vale ressaltar que também a compreensão do que torna a aprendizagem de determinados tópicos fácil ou difícil, as concepções dos alunos de diferentes faixas etárias e as possíveis dificuldades que poderão surgir, são questões enfrentadas por intermédio do conhecimento pedagógico do professor. “O conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria mais apropriada para distinguir a compreensão do especialista em conteúdo do pedagogo”. (SHULMAN, 1987, p. 8)

Ball, Thames e Phelps (2008) concordam com a importância desse conhecimento, entretanto criticam o significado dado a esse termo *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*, largamente utilizado. Segundo esses estudiosos, os estudos tratam o conhecimento pedagógico do conteúdo como uma interseção entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento sobre a metodologia de ensino utilizada, “[...] desta maneira o conhecimento pedagógico do conteúdo começa a parecer que inclui quase tudo o que o professor pode saber de um tópico particular, não deixando clara a distinção entre ações, raciocínio, crenças e conhecimento do professor” (2008, p. 394).

Os pesquisadores acima citados investigaram as demandas do conhecimento matemático para o ensino a partir da sua prática em sala de aula, fazendo um estudo sobre o ensino deste conteúdo, procurando identificar o conhecimento-base a partir de análises de questões matemáticas que surgem durante o ensino.

A partir dos estudos realizados por Shulman (1987) e de pesquisas sobre a Matemática escolar e as dificuldades encontradas pelos professores para ensinar, Ball, Thames e Phelps (2008) buscaram construir uma teoria sobre o conhecimento matemático para o ensino (Mathematical Knowledge for Teaching - MKT), tomando por base a prática dos professores. Para a categoria de *conhecimento do conteúdo*, os domínios indicados por Ball e seus colaboradores são:

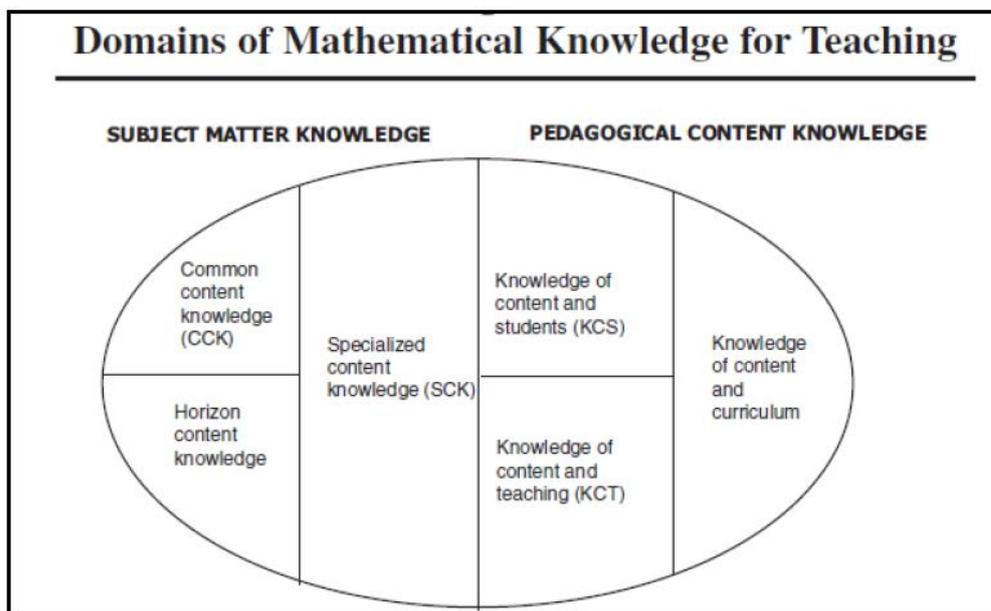
- *Conhecimento Comum do Conteúdo* (Common Content Knowledge - CCK);
- *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (Specialized Content Knowledge - SCK)
- *Conhecimento do Horizonte do Conteúdo* (Horizon Content Knowledge - HCK)

Na categoria *conhecimento pedagógico do conteúdo*, os domínios definidos pelos pesquisadores são:

- *Conhecimento do Conteúdo e Aluno* (Knowledge of Content and Students - KCS)
- *Conhecimento do Conteúdo e Ensino* (Knowledge of Content and Teaching - KCT)
- *Conhecimento do Conteúdo e Currículo* (Knowledge of Content and Curriculum - KCC)

Esses domínios de conhecimentos, propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) a partir do refinamento do estudo de Shulman (1987), estão resumidos na Figura 1.

Figura 1 - Domínios do conhecimento para o ensino da Matemática.



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

Para fins da presente pesquisa, os Conhecimentos Docentes descritos por Ball, Thames e Phelps serão voltados para o ensino de Combinatória, especificamente, e as categorias descritas pelos pesquisadores serão chamadas da seguinte forma: *Conhecimento do Conteúdo - Conhecimento de Combinatória* e *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo - Conhecimento Pedagógico de Combinatória*.

O *Conhecimento Comum do Conteúdo* é o conhecimento do conteúdo disciplinar ensinado pelos professores e que outros profissionais também possuem. Tal conhecimento envolve saber resolver exercícios, saber utilizar notações corretamente. A palavra “comum” não significa que todos possuem esse conhecimento, mas quer indicar que esse é um conhecimento utilizado em variadas situações, que não somente a de ensinar. Relacionando com a Combinatória, pode-se dizer que é o conhecimento no qual são observadas questões básicas para a resolução de problemas elementares de Combinatória utilizando o princípio multiplicativo, por exemplo, também conhecido por Princípio Fundamental da Contagem¹⁵.

O *Conhecimento Especializado do Conteúdo* é um conhecimento que é específico para o ensino, ou seja, não é utilizado para outras atividades ou profissões. Falando sobre o ensino de Combinatória, esse conhecimento refere-se ao domínio das propriedades – de *escolha* e de *ordenação* – e de cada tipo de situação combinatória - *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*. A escolha e a ordenação de elementos são relações que se diferenciam de acordo com o tipo de problema. De acordo com Borba e Braz (2012), “quanto à escolha, *produtos cartesianos* são compostos a partir de elementos de dois ou mais conjuntos distintos, já *arranjos*, *combinações* e *permutações* são compostos a partir de escolhas de elementos de um conjunto único.” No que se refere à ordenação, em problemas de *arranjos* e *permutações* a ordem dos elementos determina novas possibilidades, e em problemas do tipo *produtos cartesianos* e *combinações* a ordem dos mesmos elementos não gera possibilidades distintas.

Borba e Braz (2012) descreveram outras propriedades além de escolha e ordem para problemas combinatórios condicionais. Para as pesquisadoras, nos problemas condicionais o posicionamento e a proximidade dos elementos também devem ser levados em consideração.

Conhecer as propriedades de diferentes situações combinatórias, possibilita ao professor de Matemática desenvolver práticas em sala de aula que estimulem o raciocínio combinatório, conforme defendido anteriormente, tão importante para a aprendizagem.

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), os professores utilizam o Conhecimento Especializado para:

Responder aos estudantes o "porque" das questões; Encontrar um exemplo para fazer uma afirmação matemática específica; Reconhecer o que está envolvido no uso de uma representação particular; Vincular representações a ideias subjacentes e a outras representações; Conectar um tópico ensinado com assuntos anteriores ou futuros; Explicar para os pais objetivos e fins matemáticos; Avaliar e adaptar o conteúdo matemático de livros didáticos;

¹⁵ O Princípio Fundamental da Contagem – PFC, também conhecido como *princípio multiplicativo*, é uma forma de resolução de situações combinatórias e a base de fórmulas utilizadas no estudo de Combinatória, pois expressa a natureza multiplicativa dos diferentes tipos de problemas combinatórios. (LIMA, A., 2015. p. 22)

Modificar tarefas para serem mais fáceis ou mais difíceis; Avaliar a plausibilidade das reivindicações dos alunos (frequentemente com rapidez); Dar ou avaliar explicações matemáticas; Escolher e desenvolver definições usáveis; [...] (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 400).

O ensino exige do professor um conhecimento que está além do conteúdo que está sendo ensinado e esse conhecimento é específico do professor: apresentar ideias matemáticas diferenciadas, responder os questionamentos dos alunos, avaliar as afirmações feitas em sala de aula, o reconhecimento das consequências da utilização de uma representação específica, a avaliação de um conteúdo matemático, etc. Todas essas atividades/demandas do trabalho do professor apontam para a necessidade de se construir um conhecimento especializado para o ensino de Matemática.

O *Conhecimento de Horizonte do Conteúdo* diz respeito ao encadeamento dos conteúdos curriculares. Isso significa que, os professores dos anos iniciais, ao ensinarem determinado conteúdo aos seus estudantes, já podem pensar como esse mesmo conteúdo será vivenciado nos anos escolares seguintes e preparar os estudantes para tais vivências e os professores do final de escolarização básica devem saber como o conteúdo foi trabalhado anteriormente para ampliar compreensões anteriores. “[...] por exemplo, professores que ensinam Combinatória no 4º ano, podem querer saber como tais conhecimentos serão abordados por professores que ensinarão tal conteúdo no 2º ano do Ensino Médio e vice-versa” (ROCHA, 2011, p. 31). Para Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403), o professor precisa em sua prática “enxergar as conexões entre as ideias matemáticas vivenciadas naquele momento e as que virão posteriormente”. Essas conexões, como são chamadas pelos pesquisadores, podem ser entendidas como aprofundamento do conteúdo estudados em diferentes níveis escolares, por exemplo, o conceito de multiplicação trabalhada nos anos iniciais será desenvolvida para o conceito de Princípio Fundamental da Contagem e o uso de fórmulas nos anos escolares seguintes.

Entende-se por *Conhecimento do Conteúdo e Aluno* a conexão entre o conhecimento que o professor possui dos alunos e de suas compreensões da Matemática. Tal conhecimento é evidenciado quando um professor prevê as dificuldades que uma turma pode apresentar ao estudar determinado conteúdo, quando um professor percebe a falta de motivação e consegue propor atividades alternativas para sanar essa dificuldade, ou seja, consegue visualizar situações motivadoras para os estudantes. Para o caso do ensino de Combinatória, as dificuldade que podem surgir são em diferenciar tipos de problemas, entender a estratégia de resolução adequada para cada tipo de problema, dificuldade quando um problema envolve muitas etapas

de escolha, e é o professor quem poderá prever todas elas e encontrar estratégias que ajudem na compreensão dos seus alunos. Para Rocha (2011),

numa situação de Combinatória em que o professor não insista em certas estratégias, como por exemplo, a utilização de fórmulas, ele busca entender outras estratégias de resolução por parte dos alunos, como a utilização da árvore de possibilidades, está fazendo uso desse domínio de conhecimento. (ROCHA, 2011, p. 30)

O *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino* combina o conhecimento sobre ensinar e o conhecimento sobre Matemática. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), em várias situações o professor precisa tomar decisões relacionadas ao ensino como, por exemplo, quais contribuições dadas pelos alunos devem ser acatadas, quais devem ser guardadas para um momento posterior, quando é preciso apresentar maiores esclarecimentos sobre um assunto, quando apresentar estratégias diferenciadas, quando propor determinadas atividades. Todas as decisões requerem uma integração entre a Matemática que está sendo apresentada e os objetivos de ensino presentes naquele contexto escolar. Para preparar uma aula de Combinatória, seja nos anos iniciais, nos anos finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio, o professor fará uso desse conhecimento, para relacionar o conteúdo que se deseja estudar com os objetivos determinados para cada ano escolar. Esse conhecimento descrito pelos pesquisadores “é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática ou procedimento e familiaridade com princípios pedagógicos para o ensino desse conteúdo em particular” (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.402).

O sexto domínio descrito por Ball e seus colaboradores é o *Conhecimento do Conteúdo e Currículo*. Para Lima (2015, p. 37), este é um domínio definido como o “conhecimento dos materiais (livros didáticos e recursos metodológicos), currículos, orientações metodológicas e programas que servem como ferramentas de apoio ao trabalho do professor dentro e fora da sala de aula durante a preparação das aulas”. A proposta de introduzir o ensino de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental faz parte desse tipo de conhecimento.

O Quadro 1 apresenta os Conhecimentos Docentes de Ball, Thames e Phelps com exemplos para o ensino de Combinatória.

Quadro 1- Conhecimentos Docentes para o ensino de Combinatória.

Conhecimento do Conteúdo	Conhecimento Comum de Combinatória	É o conhecimento necessário à resolução de situações combinatórias.
	Conhecimento Especializado de Combinatória	É o conhecimento necessariamente ligado ao ensino. É um conhecimento de Combinatória que o professor possui e que o faz entender diferentes tipos de situações.
	Conhecimento de Horizonte de Combinatória	Diz respeito ao encadeamento dos conteúdos curriculares no que se refere à Combinatória.
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo	Conhecimento de Combinatória e Alunos	É o conhecimento que faz o professor perceber a falta de motivação da turma diante da Combinatória e o faz propor situações alternativas para sanar as dificuldades dos alunos.
	Conhecimento de Combinatória e Ensino	É a união do Conhecimento de Ensino com o Conhecimento de Combinatória. Diz respeito à ação pedagógica, o planejamento, a elaboração de uma avaliação, dentre outros.
	Conhecimento de Combinatória e Currículo	Está ligado ao Conhecimento de Horizonte da Combinatória. Compreender que o ensino de Combinatória deve fazer parte da vida escolar desde a Educação Infantil se engloba nesse conhecimento, bem como a distinção de quais conteúdos devem ser abordados em cada nível de ensino.

Fonte: A autora

Os Conhecimentos acima descritos serão as categorias de análise utilizadas no presente trabalho. De acordo com os estudiosos, não se pretendia apresentar outra teoria em substituição à proposta por Shulman, mas, sim, detalhar os fundamentos desse construto e detalhar os fundamentos de cada conhecimento, à luz dos conhecimentos matemáticos.

Ball, Thames e Phelps (2008) concordam que os professores devem conhecer o conteúdo que vão ensinar, entretanto, o conhecimento do conteúdo por si só não é o suficiente para o ensino. Segundos os pesquisadores, basta entrar em uma sala de aula da Educação Básica por alguns minutos para perceber que a Matemática ensinada e aprendida por lá não é a mesma ensinada nas universidades. Dessa forma, é pouco provável que a Matemática avançada, tratada em cursos de formação de professores, seja suficiente para resolver as necessidades do conhecimento matemático para o ensino na Educação Básica.

Compreender estas dimensões dos conhecimentos, proporciona ao professor assumir posturas que apresentem a Matemática de forma mais atraente e dinâmica – mais que um conjunto de regras e fórmulas. Assim, conhecer as variadas situações e trabalhar com cada um

dos tipos de problemas combinatórios possibilita, ao professor, a elaboração de aulas mais apropriadas e mais compreensíveis pelos alunos.

Lima (2009), em sua pesquisa sobre a prática docente argumenta que, para realizar o ensino, o professor precisa conhecer bem o objeto matemático, mas salienta que esse domínio não é suficiente. Para que o ensino tenha êxito é necessário,

[...] também, que o professor seja capaz de identificar os conhecimentos que o aluno tem sobre a noção em jogo e as eventuais fontes de erros. É necessário ainda que ele seja capaz de criar boas situações didáticas com a finalidade de auxiliar o aluno a superar os erros e de lhe permitir o aprendizado de novos conceitos. Em outros termos, é necessário que o professor seja capaz de aplicar uma “intervenção matemática pertinente”. (LIMA, 2009, p. 55)

Ball, Thames e Phelps (2008) ressaltam, ainda, que os tipos de conhecimentos propostos não se apresentam sozinhos em cada situação em sala de aula, mas de forma coletiva e complementar. Esses conhecimentos oferecem avanços para a discussão sobre formação de professores de Matemática, tornando-se importante que, desde a formação inicial, esses conhecimentos sejam trabalhados com os professores em formação.

Pressupostos como os de Shulman (1987) e de Ball e seus colaboradores (2008) estão sendo utilizados em vários estudos sobre a formação e exercícios dos professores. Alguns desses estudos serão apresentados no capítulo que segue.

A presente pesquisa utilizou os Conhecimentos Docentes descritos por Ball, Thames e Phelps (2008) por serem destinados especificamente aos professores que ensinam Matemática. Buscou-se identificar e analisar os conhecimentos presentes em aulas de uma disciplina eletiva de um curso de Licenciatura em Matemática. Sabe-se que os Conhecimentos Docentes raramente se apresentam sozinhos em situações de sala de aula e que em um momento podem se inter-relacionar duas ou mais categorias. Dessa forma, acompanhar todo o processo de formação em uma disciplina se tornou essencial, para analisar essa construção de conhecimentos como um todo.

2.3. PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Os problemas de Combinatória trabalhados no Ensino Médio são aqueles que envolvem arranjos, combinações e permutações. Para Pessoa e Borba (2007), além desses três tipos, há também problemas de produto cartesiano, trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Cada um destes tipos de problemas combinatórios apresenta características próprias e possuem uma forma de organizar o pensamento combinatório durante a resolução.

De acordo com Borba (2013, p. 4) os problemas do tipo produto cartesiano são determinados a partir da escolha de elementos de diferentes conjuntos; esses elementos serão combinados para formar um novo conjunto. Já nos problemas do tipo arranjo "os elementos são escolhidos a partir de um conjunto único, mas nem todos os elementos constituem as possibilidades a serem enumeradas", ou seja, a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Para os problemas do tipo combinação "são escolhidos alguns elementos de um conjunto único e a ordem de escolha dos elementos não constituem possibilidades distintas", nesse caso, a ordem dos elementos não irá gerar novas possibilidades; e, nos problemas de permutação, todos os elementos do conjunto dado são utilizados.

A pesquisadora defende o uso dos diferentes problemas para a aprendizagem de Combinatória e recomenda que os professores aproveitem as estratégias espontâneas desenvolvidas pelos estudantes, para que, posteriormente e de forma gradativa sejam desenvolvidos procedimentos mais formais. Essas estratégias podem ser desenhos, listagens, diagramas, que podem resultar em generalizações nos estudos das variadas situações combinatórias.

No capítulo que segue, apresentam-se resultados de pesquisas anteriores sobre a formação de professores e a prática em sala de aula sobre o ensino de Combinatória.

3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA: PESQUISAS ANTERIORES

Busca-se apresentar, a seguir, alguns resultados de pesquisas que investigaram os conhecimentos de alunos, em diferentes níveis de ensino, e os conhecimentos de professores de Matemática acerca da Combinatória.

3.1. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE COMBINATÓRIA E OS CONHECIMENTOS DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dentre os trabalhos estudados, foram escolhidos Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), Sturm (1999), Esteve (2001), Pessoa e Borba (2009), Barreto e Borba (2011) e Pessoa e Santos (2012), para discutir o aprendizado da Combinatória de alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Destaca-se nesse capítulo, também, pesquisas sobre os conhecimentos dos alunos, para investigar o que os mesmos já sabem e quais as suas principais dificuldades. Os resultados dessas pesquisas podem indicar o que docentes precisam saber sobre Combinatória, alunos e ensino.

Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) realizaram um teste contendo 13 problemas de Combinatória, com 720 alunos de 14 e 15 anos, dos quais 352 tinham estudado Combinatória e os demais não tinham. Na análise dos testes foram encontrados erros comuns no modelo fundamentado em Dubois. Segundo esse modelo de Dubois os problemas combinatórios podem ser classificados como: de partição, de colocação e de seleção (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996). Essa proposta apresenta quatro modelos diferentes e relacionados para problemas de Combinatória: “a) Seleção de uma amostra a partir de um conjunto de elementos; b) colocação de objetos em urnas; c) partição em subconjuntos de objetos; d) decomposição de um número natural em parcelas” (1996, p. 31).

Os principais erros encontrados foram: a troca de um problema de seleção por um de partição; erro de ordenação; erro de repetição; confundir os tipos de objeto – identificá-los como idênticos quando são diferentes ou como diferentes quando são iguais; enumeração não sistemática; não lembrar das fórmulas de Combinatória; resposta intuitiva errada; não recordar os significados dos valores dos parâmetros das fórmulas e interpretação errada do diagrama de árvores.

Os alunos que não trabalharam com os conteúdos de Combinatória anteriormente encontraram dificuldades principalmente na enumeração não sistemática das possibilidades.

Em relação aos alunos que já estudaram Combinatória, percebeu-se que quando recorriam à estratégia de listagem de possibilidades, a mesma era realizada de um modo mais sistemático.

Sturm (1999) analisou uma proposta de ensino de Combinatória que enfatizava o uso do Princípio Fundamental da Contagem com 33 alunos do 2º ano do Ensino Médio, buscando identificar os limites e possibilidades dessa proposta. Utilizou-se de um diário para registrar as atividades realizadas, dois testes sobre as atividades e, ainda, um questionário no qual os alunos registravam suas opiniões. Sturm constatou que a utilização do princípio multiplicativo, em detrimento do uso de fórmulas, na resolução dos problemas combinatórios foi bastante positiva.

O conjunto das pesquisas supracitadas afirmam a necessidade de um trabalho contínuo e a partir de várias situações combinatórias. Portanto, para que o professor consiga organizar esse ensino, ele precisa conhecer bem a Combinatória, os problemas combinatórios, seus invariantes e suas formas de resolução, por meio de variadas representações simbólicas. Evidencia-se, assim, a importância de, na formação inicial, o futuro professor ter acesso a essas discussões.

Em uma pesquisa com alunos do último ano do Ensino Fundamental e, também, do 2º ano do Ensino Médio, Esteves (2001) buscou estudar o desenvolvimento dos primeiros conceitos de Combinatória, trabalhando com dois grupos, um experimental e um de referência. O primeiro grupo, composto por 28 alunos do 9º ano, trabalhou com uma sequência de situações problemas que envolviam a contagem direta e a mobilização de diversas representações, enquanto o segundo grupo, formado por 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio, trabalhou com a sequência apresentada por um livro didático adotado pela escola.

A autora constatou dificuldades na resolução de problemas que envolvem o Princípio Fundamental da Contagem, principalmente *arranjo*, *permutação* e *combinação*, e apontou como necessário que os alunos organizem os dados do problema e a necessidade também de perceberem as diferenças entre cada tipo de problema e suas propriedades, como a questão da ordem.

Pessoa e Borba (2009) buscaram analisar o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Para alcançar esse objetivo, as autoras aplicaram em cada ano escolar um teste contendo oito problemas de Combinatória, sendo dois problemas de cada tipo – *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. Durante a aplicação do teste não houve um tempo determinado pelas pesquisadoras para término do mesmo e as estratégias de resolução eram escolhidas por cada aluno.

Observou-se uma evolução no desempenho dos alunos dos anos iniciais para os alunos dos anos finais, entretanto, os alunos do Ensino Médio não apresentaram uma evolução esperada, o que para as pesquisadoras pode indicar que o ensino regular da Combinatória, como acontece nos anos do Ensino Médio, pode não influenciar satisfatoriamente no desempenho dos estudantes. Em todos os níveis, o maior índice de acerto aconteceu nos problemas do tipo *produto cartesiano* e o menor índice nos problemas de *combinação*. Para Pessoa e Borba, esse resultado deve-se ao fato de que os problemas de *produto cartesiano* são trabalhados com mais frequência na escola, desde os anos iniciais enquanto os problemas de *combinação* aparecem explicitamente somente no Ensino Médio. As pesquisadoras mencionaram também que a quantidade baixa de acerto pode ser justificada pela propriedade que a ordem dos elementos em *combinações* não gera possibilidades distintas. Portanto, os alunos podem pensar em diversas estratégias para resolver o problema, mas, caso não percebam essa propriedade, acabam não conseguindo responder corretamente o problema.

A estratégia mais utilizada no estudo de Pessoa e Borba (2009) foi a listagem de possibilidades, com maior uso nos níveis iniciais da escolarização. Os alunos do Ensino Médio ainda utilizaram essa estratégia em alguns problemas do teste e somente nesse nível foram utilizadas fórmulas e o Princípio Fundamental da Contagem como estratégias de resolução, no geral pelos alunos do 3º ano – ano seguinte ao estudo da Análise Combinatória. Apesar de utilizarem as fórmulas, houveram erros na utilização das mesmas. Por vezes, foi observado que os alunos trocavam a fórmula de *combinação* com a de *arranjo* – sendo, nesse último tipo de problema, a ordenação dos elementos determinante de novas possibilidades. Concorde-se com as autoras quando afirmam que mesmo com o uso das fórmulas não há garantia de sucesso na resolução dos problemas. Os alunos precisam ter a competência de identificar e resolver o problema, escolhendo a fórmula adequada para cada situação.

Percebe-se com essa pesquisa que o desempenho nas diferentes situações combinatórias foi crescendo ao longo da idade escolar, evidenciando, por exemplo, a importância desse trabalho contínuo e reforçando que é possível o ensino da Combinatória desde os anos iniciais. O fato dos alunos trocarem a fórmula de *combinação* com a de *arranjo* pode indicar a ausência de uma compreensão sobre os invariantes que envolvem um problema combinatório. Um planejamento de aula que leva em consideração diferentes situações e diferentes abordagens pode contribuir para diminuir ou sanar essa dificuldade em diferenciar problemas. Essa necessidade do trabalho com situações combinatórias pode ser evidenciada na pesquisa de Barreto e Borba (2011).

Barreto e Borba (2011) desenvolveram um estudo baseado em uma intervenção pedagógica, que tinha como pilares a distinção das diferentes *situações* combinatórias, seus *invariantes* e o uso de distintos tipos de *representação simbólica* (listagem e árvore de possibilidades), a fim de verificar possíveis avanços na compreensão de estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), considerado Educação Básica. Esta pesquisa tinha como referencial teórico a TCC – Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud e muito utilizada nos estudos em Educação Matemática.

Este trabalho foi composto por três momentos: um pré-teste, uma intervenção pedagógica e um pós-teste e foi realizado com duas turmas do módulo III da EJA (que equivale ao quarto e quinto ano do Ensino Fundamental). Foram no total 10 participantes, cinco de cada turma. Os 10 escolhidos foram divididos em cinco grupos com dois alunos em cada um e cada grupo passou por uma intervenção distinta.

De acordo com Barreto e Borba (2011), “nos cinco grupos foram resolvidas as questões do pré-teste, as intervenções se diferenciam apenas no uso das representações simbólicas”.

[...] o grupo 1 vivenciou a resolução das quatro primeiras situações-problemas da sequência, através da listagem de possibilidades. E em seguida foram realizadas as demais questões utilizando a árvore de possibilidades. O grupo 2 fez o inverso do que foi realizado no grupo 1, ou seja, as quatro primeiras questões da atividade utilizaram a construção de árvores de possibilidades, enquanto que nas quatro últimas foram usadas as listagens de possibilidades. O grupo 3 resolveu apenas quatro problemas da sequência, entretanto cada problema foi resolvido duas vezes, uma por listagem e outra por árvore de possibilidades. O que garantiu o total de oito resoluções, que também foi o total dos demais grupos. O grupo 4 resolveu todos os problemas fazendo uso de apenas um tipo de representação que foi a listagem de possibilidades. O grupo 5, semelhante ao grupo 4, utilizou apenas uma forma de representação simbólica, que nesse caso foi a árvore de possibilidades. (BARRETO E BORBA, 2011, p.).

Foi constatado que, com apenas um encontro de intervenção, os estudantes obtiveram avanços significativos em seus desempenhos, quando comparados os pré-testes e pós-testes. Ainda foi ressaltado que o tipo de *representação simbólica* utilizada (listagem e/ou árvores de possibilidades) não influenciou no desempenho dos estudantes, pois no pós-teste houve generalizada melhora nos desempenhos – tanto entre os alunos que usaram listagens, quanto entre os que usaram árvores de possibilidades. Sendo assim, as autoras argumentam sobre a importância do trabalho sistemático com este conteúdo matemático, trabalhando diferentes situações combinatórias, discutindo as distintas relações de cada tipo de problema e utilizando variadas formas de representação simbólica.

Pessoa e Santos (2012) também fizeram um estudo a fim de analisar como intervenções podem facilitar a compreensão de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental sobre problemas combinatórios. Para tal, as autoras realizaram pré-teste com os alunos, duas sessões de intervenção e pós-teste, a fim de comparar os desempenhos do pré-teste e do pós-teste, observando-se as contribuições das intervenções. As intervenções foram baseadas na explicitação dos *invariantes* dos problemas combinatórios, na listagem de possibilidades como estratégia de resolução, na sistematização da listagem e na generalização (percepção das regularidades dos problemas). Os alunos conseguiram compreender os problemas combinatórios a partir das intervenções dadas. Alguns conseguiram, ainda, generalizar os procedimentos utilizados.

Os resultados das pesquisas de Barreto e Borba (2011) e de Pessoa e Santos (2012) evidenciam, dentre outros resultados, a importância do trabalho com as variadas situações combinatórias e suas distintas relações. Nessas pesquisas, com poucos encontros de intervenção, observou-se que foi suficiente para os alunos avançarem em suas compreensões sobre situações combinatórias e, certamente, mais encontros proporcionaram ainda mais avanços.

3.2. ESTUDOS SOBRE O CONHECIMENTO DE COMBINATÓRIA DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

No que se refere a pesquisas com alunos de Licenciatura em Matemática, foram encontrados os trabalhos de Rocha (2006), Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira (2011, 2013) e Lima, R. (2015), que discutem sobre os conhecimentos que esses alunos possuem.

Rocha (2006), em sua dissertação, buscou analisar a construção do conhecimento de Combinatória em duas turmas de licenciandos em Matemática. Em um primeiro momento dedicado à observação de uma turma de licenciandos durante uma prática tradicional de ensino de Combinatória. Na outra turma, as observações indicaram uma possível forma de organizar as ações de práticas que focavam numa aula ministrada pelos alunos da turma, denominada Encontro com o Acontecimento. Nessa aula, os alunos agiram como se fossem os professores, o que ocasionou uma melhor aprendizagem evidenciada nos bons resultados no pós-teste.

A pesquisa evidenciou o papel do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo como uma das bases os problemas de contagem abordados pela Análise Combinatória (ROCHA, 2006, p.96). Rocha (2006) apresentou também algumas dificuldades

na resolução de problemas dos licenciandos na aprendizagem da Análise Combinatória simples, apesar dos participantes acreditarem na importância desse ensino.

Segundo Lima, A (2015), o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é uma das estratégias mais importantes para a resolução de situações combinatórias e pode ser aplicado a diferentes tipos de problemas, sejam eles condicionais ou não condicionais e, também, o PFC é base das fórmulas empregadas no ensino de Combinatória para diferentes problemas.

Ainda sobre o trabalho com estudantes de licenciatura, Bortoloti, Santos-Wagner e Ferreira (2011) realizaram um estudo com 41 estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, sendo 24 estudantes do 1º semestre e 17 do 6º semestre, a partir de um teste diagnóstico contendo uma questão de Combinatória. Ao analisarem as respostas dos testes, os pesquisadores observaram que dos 41 alunos que participaram da pesquisa nenhum respondeu à questão de forma correta: 31 erraram de alguma forma e 10 não responderam à questão.

Dentre os erros encontrados, foram destacados nesse trabalho: erro por não esgotarem todas as possibilidades; troca das fórmulas de *arranjo* e *combinação*; e erro ao aplicar a fórmula ao contexto em questão. Outros alunos, ainda, escreveram que não lembravam do conteúdo e deixaram a questão em branco.

Em outro trabalho, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), realizaram um estudo com 198 estudantes do 3º e 8º semestre de quatro universidades do Estado da Bahia, a partir das resoluções de problemas de *arranjo* e *combinação* apresentadas pelos alunos. Na análise desse material, percebeu-se não ter encontrado grandes diferenças em relação ao índice de acertos e erros dos alunos de diferentes semestres. Ambos os casos, apresentaram cerca de 40% de erros nas questões e mais de 20% não apresentaram respostas.

Esses resultados levam a refletir sobre se está sendo e como está sendo proposto o ensino de Combinatória nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, pois os alunos em final de formação inicial apresentaram dificuldades semelhantes, em termos quantitativos e qualitativos, aos alunos em fase inicial da graduação. As consequências dessa fragilidade na formação podem ser encontradas no ensino na Educação Básica, quando o professor não consegue criar situações de aprendizagem diferenciadas. Dessa forma, os autores apontam que:

(...) o ensino desse conteúdo deve ser realizado de modo que haja compreensão conceitual e dos significados de cada tipo de classe de problema combinatório (arranjo, permutação, combinação), diferentemente do que tem sido trabalhado, cujo foco está nos procedimentos, regras e fórmulas prontas para a resolução dos problemas. (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013, p. 618).

A pesquisa realizada por Lima, R (2015) tinha por objetivo analisar os conhecimentos mobilizados por alunos de Licenciatura em Matemática ao resolverem problemas de Combinatória. Foi proposto para os alunos participantes da pesquisa um curso de extensão, estruturado em oito sessões, compostas por diferentes tipos de situações-problema de Combinatória, como apresentam Pessoa e Borba, e os instrumentos utilizados para coletar os dados foram gravações de áudio e de vídeo. O autor concluiu que:

(...) os alunos explicitam ter dificuldades sobre o tema de combinatória, em especial na classificação das diferentes situações, e conseqüentemente, acabam utilizando fórmulas combinatórias inadequadas durante a resolução dos problemas. Em relação aos conhecimentos, destacamos a importância da listagem de possibilidades nas resoluções dos alunos, pois além de ser uma estratégia que mobilizam para resolver o problema, também a utilizam como um meio de validação para outras estratégias, como na conjectura de outras estratégias e na utilização de fórmulas combinatórias. Além disso, evidenciamos que os licenciandos mobilizam com frequência o Princípio Fundamental da Contagem nos problemas de arranjo, permutação e produto cartesiano, enquanto nos problemas de combinação optam por outras estratégias, como a listagem de possibilidades e a utilização de fórmulas. (LIMA, R., 2015, p. 191).

Os problemas apontados por Lima, R. (2015) são principalmente de questões conceituais de Combinatória. Em diversos momentos os alunos participantes da pesquisa tentaram classificar o problema de forma errada, o que pode, para o pesquisador, significar um desconhecimento das propriedades de cada situação combinatória. Concorda-se com o autor quando ele defende que a aprendizagem de um conceito se trata de um processo e não uma etapa que o aluno simplesmente atinge. “Dessa forma, acreditamos que é necessário que os licenciandos vivenciem novas situações, perpassando momentos de reflexão, para que os mesmos tenham condições de superar tais dificuldades” (LIMA, R., 2015, p. 192).

Vê-se, com esses resultados de pesquisas, que os estudantes das Licenciaturas em Matemática, assim como os estudantes da Educação Básica, têm apresentado diferentes dificuldades ao se trabalhar com problemas de Combinatória. Observa-se, portanto, que deve haver algumas lacunas na formação docente e, conseqüentemente, no ensino na Educação Básica, que possibilitam essas fragilidades. Na atual pesquisa, busca-se a inserção no ambiente da formação inicial, para investigar como pode acontecer o processo de formação dos conhecimentos docentes, tanto os de caráter específicos (de Combinatória) quanto os pedagógicos (de ensino do conteúdo).

As pesquisas mencionadas mostram que o ponto de partida para o bom trabalho do professor é a formação inicial, o lugar no qual se forma professor e o lugar no qual discussões

sobre o ensino devem ser encontradas. Com base nessas discussões, buscou-se verificar o que dizem as pesquisas realizadas com professores de Matemática, como descrito a seguir.

3.3. ESTUDOS COM PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Rocha (2011), em sua pesquisa de mestrado, teve como objetivo analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio têm sobre a Combinatória e seu ensino. Em seu trabalho, a pesquisadora entrevistou seis professores da Educação Básica, sendo dois dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com formação inicial em Pedagogia, dois dos anos finais e dois do Ensino Médio, esses dois últimos grupos formados em Licenciatura em Matemática. As entrevistas semiestruturadas continham alguns problemas propostos na pesquisa de Pessoa e Borba (2009) – anteriormente mencionada – e os protocolos das resoluções dos alunos oriundos da pesquisa de Pessoa (2009). Em suas análises, a pesquisadora constatou que, de modo geral, os professores apresentavam dificuldades na diferenciação dos problemas de *arranjo* e *combinação*, na leitura dos enunciados desses problemas e nas correções das produções dos alunos.

Sobre as estratégias utilizadas pelas participantes da pesquisa, Rocha (2011) observou que as mesmas decidiam suas escolhas a partir das concepções que tinham dos problemas. Por exemplo, em um problema de *produto cartesiano*, os professores dos anos iniciais adotaram as estratégias da listagem, tabelas e diagrama de árvores; os dos anos finais priorizaram a tabela de dupla entrada e o diagrama de árvores; e os professores do Ensino Médio recorreram ao Princípio Fundamental da Contagem. Os professores que participaram desta pesquisa não parecem possuir um conhecimento mais amplos das estratégias de resolução de problemas combinatórios, visto que, conforme afirma a pesquisadora, as estratégias utilizadas foram mais simples e os participantes não apresentavam diferentes formas para resolver o problema. A pesquisadora também destacou a necessidade de pesquisas que envolvam a formação do professor que ensina Matemática, visto que a maioria das pesquisas encontradas por ela consistiam em investigações com alunos da Educação Básica.

Sabo (2010) também utilizou entrevistas semiestruturadas para investigar os saberes do professor do Ensino Médio em relação ao ensino e à aprendizagem de Combinatória. A entrevista foi organizada em quatro partes: 1) identificação do participante da pesquisa; 2) investigação das possíveis influências das experiências e da vida escolar no ensino de

Combinatória; 3) levantamento dos saberes docentes e a 4) observação das atividades práticas do professor (preparo de aulas, planejamentos, usos do livro didático, avaliações propostas).

Dentre os resultados encontrados, Sabo (2010) destaca que alguns professores valorizavam a memorização e a aplicação de fórmulas. Nas palavras do autor (p.187) “alguns professores disseram valorizar o uso do Princípio Fundamental da Contagem em detrimento do emprego da fórmula, e outros valorizam o uso de fórmulas, mas não mostraram saber justificar e validar sua origem”.

A formação continuada para o ensino de Análise Combinatória foi o foco da pesquisa de Assis (2014). A autora mostra uma proposta de trabalho que busca analisar o efeito do ensino e da aprendizagem da Combinatória, baseada nos invariantes de cada tipo de problema. O olhar da pesquisadora é voltado para os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, de modo a perceber o desempenho desses em uma formação continuada e na posterior elaboração de uma sequência de ensino. Desejou-se observar, também, qual a relevância da formação na prática pedagógica de professores e qual das três dimensões (significados, invariantes ou representações) foi mais relevante para o professor durante a formação. Segundo a autora, estudos que verifiquem como se dá o processo de percepção e construção pelo professor dos significados, invariantes e representações se fazem necessários, para que seja possível mudar a visão do ensino da Combinatória que se tem atualmente.

Foi realizada uma entrevista inicial, seis encontros de formação e uma entrevista final. Assis (2014) destaca que os resultados apontam, na entrevista inicial, para dificuldades no reconhecimento e no trabalho da Combinatória. Entretanto, durante e após as intervenções, as professoras participantes conseguiram reconhecer, de forma mais detalhada, as diferentes *situações* e seus respectivos *invariantes*, assim como, as possíveis *representações simbólicas* para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos. Os resultados apresentados tiveram como foco uma professora específica, e sobre essa professora, Assis afirma que,

Verificou-se também que a docente reconhece o material manipulável como uma forma válida de *representação* para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem e, ao longo do processo de formação, faz uso desses ao ministrar aulas sobre Combinatória, sendo estas bastante dinâmicas e de acordo com o que estava sendo solicitado. Sendo assim, constatamos que há uma resignificação da docente participante quanto a seus conhecimentos, especificamente, o *conhecimento especializado* da Combinatória e o *conhecimento didático* da Combinatória. (ASSIS, 2014, p. 140).

Dessa forma, a formação continuada no estudo de Assis (2014) se mostrou importante e necessária para que os docentes pudessem ressignificar seus conhecimentos e refletir sobre esse conteúdo da Matemática.

São várias as pesquisas que discutem sobre o ensino de Combinatória e apresentam as dificuldades dos alunos e dos professores ao tratar desse conteúdo. Percebe-se, portanto, a importância de investigar a formação inicial do professor de Matemática, pois, a partir de mudanças nessa formação as realidades encontradas nos trabalhos aqui discutidos, podem ser modificadas.

Quais são os conhecimentos necessários aos professores que ensinam Combinatória? Esta é a questão que permeia a presente investigação e que se buscará responder nas análises. A seguir apresenta-se o método, o local, os participantes e os instrumentos utilizados nesta pesquisa.

4 MÉTODO

Nesse capítulo é apresentada a abordagem metodológica utilizada, a seleção do campo de estudo e dos participantes da pesquisa, esclarecendo os motivos dessas escolhas. Ressalta-se que, durante a investigação, o percurso metodológico e os objetivos da pesquisa foram se constituindo, na medida em que os diálogos com os participantes aconteceram e os dados foram surgindo, de forma a melhor responder às interrogações sobre as articulações entre conhecimentos docentes.

4.1 – ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa teve seu início a partir de um levantamento, em anais de congressos e em periódicos, de pesquisas em artigos e de dissertações e teses, sobre os conhecimentos docentes e sobre o ensino de Combinatória. Como discutido no capítulo anterior, trabalhos como os de Rocha (2011), Lima, A. (2015), Assis (2014), Moreira (2014), que investigaram o conhecimento de professores que ensinam Combinatória, destacam que há uma dificuldade com o trabalho neste conteúdo, nos diversos níveis de ensino, e que os professores percebem poucas contribuições de sua formação inicial para o ensino de Combinatória na Educação Básica. Foi também através da leitura da pesquisa de Lima, R. (2015), sobre os desafios encontrados pelos alunos de Licenciatura em Matemática ao resolverem problemas combinatórios, que surgem alguns questionamentos iniciais: *“como as disciplinas em um curso de licenciatura em Matemática estão organizadas de forma a atender as necessidades da formação para o ensino de Combinatória?”* ou *“de que maneira, a formação inicial de professores contribui para a construção dos conhecimentos necessários para o trabalho com a Combinatória?”*

Uma primeira delimitação da pesquisa foi no sentido de entender que tipo de conhecimentos docentes podem se fazer presentes na formação inicial do professor de Matemática e de que forma(s), nas disciplinas ofertadas, pode haver uma articulação entre esses conhecimentos. Para alcançar o objetivo determinado, a saber, analisar como são mobilizados os conhecimentos docentes em uma disciplina voltada à Combinatória, foi necessário acompanhar aulas de uma disciplina em um curso de Licenciatura em Matemática durante todo um período. A duração do levantamento de dados da pesquisa foi, portanto, de cinco meses e ocorreu no segundo semestre de 2015.

Durante a procura por um campo de estudo, foi encontrada a matriz curricular do curso de Matemática – Licenciatura¹⁶ do Centro Acadêmico do Agreste/CAA da Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, que ofertava dentre as suas disciplinas, a eletiva: *Ensino de Combinatória: perspectivas teórico-práticas*. No tópico que segue, discorre-se sobre essa eletiva e sobre os critérios para a sua escolha. Ressalta-se que essa disciplina eletiva não é comum aos cursos de licenciatura de todos os campi da UFPE.

No que se refere às discussões sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo, foram investigados os programas das Licenciaturas em Matemática da UFPE e observou-se que essas discussões ficam na responsabilidade das disciplinas chamadas *pedagógicas* – as Metodologias do Ensino da Matemática e os Estágios – que discutem sobre o ensino da Matemática no geral. A eletiva selecionada para o estudo apresenta-se como uma exceção, porque busca tratar tanto da Combinatória enquanto conteúdo, quanto de seu ensino. Essa particularidade faz com que essa disciplina, bem como as ações da docente que a propôs e a lecionava, seja um caso passível de investigação.

Caracteriza-se a presente pesquisa como um *estudo de caso*, conforme define Ponte (2006, p. 02), porque ela “visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, ou instituição, um curso, uma disciplina[...] e seu objetivo é compreender o ‘como’ e os ‘porquês’ dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias”. É uma investigação que, como já argumentado, se debruça sobre uma situação específica, que pode ser única – considerando a região em que se encontra – e, portanto, relevante. Gonçalves (2001, p.67) destaca que, o estudo de caso, “*ao realizar um exame minucioso de uma experiência, objetiva colaborar na tomada de decisões sobre o problema estudado, indicando novas possibilidades para sua modificação*”.

Não é objetivo deste trabalho fazer comparações entre instituições, campi ou cursos, nem entre docentes específicos, mas analisar uma experiência que pode trazer contribuições significativas para a área de formação de professores, promovendo um debate acerca dos conhecimentos necessários para o trabalho do futuro professor, em particular no que diz respeito à Combinatória.

¹⁶ Assim denominado pelo Centro Acadêmico do Agreste/CAA no Projeto Pedagógico do Curso.

4.2 – LOCAL DE PESQUISA E PARTICIPANTES

A presente pesquisa aconteceu em uma turma de quinto período de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco na Cidade de Caruaru. A presença desse Centro na cidade de Caruaru se deu por meio do processo de interiorização das universidades, com o intuito de garantir a formação superior dos professores da Educação Básica também fora do Recife. O Centro Acadêmico do Agreste foi o primeiro Centro da UFPE no interior, tendo sido inaugurado em março de 2006, contribuindo com o desenvolvimento social, econômico e cultural do Estado.

A estrutura curricular do curso de Licenciatura em Matemática do CAA foi elaborada priorizando-se a formação docente, com suas necessidades e particularidades. Segundo o Projeto Pedagógico do Curso (PPC), diante das discussões atuais sobre a formação dos professores e a necessidade, cada vez mais percebida, de uma estrutura específica para a formação docente é interesse do CCA,

“situar a atuação pedagógica no centro dos debates sobre a qualidade dos resultados educacionais e, ao mesmo tempo, circunscrever a escola em um contexto de mudanças. [...] Entende-se que a formação inicial, aliada a um conjunto de medidas voltadas para a valorização do magistério, terá rebatimento sobre a prática docente, permitindo repensar tanto as ações de ensino e aprendizagem quanto as competências, os conteúdos e as habilidades a serem priorizados ao longo do ensino fundamental e médio, garantindo ao aluno o seu direito de aprender. (Projeto Pedagógico do Curso – PPC, p. 7-8)

Nesse contexto, o objetivo determinado para o curso de Licenciatura – Matemática do CCA contempla a necessidade da formação profissional do professor de Matemática, articulando atividades de ensino, pesquisa e extensão. A discussão dos Conhecimentos Docentes na formação possibilita essa articulação de ensino, pesquisa e extensão, pois propicia uma discussão entre o conteúdo e a pedagogia.

A escolha desse Centro se justifica por existir, no quadro curricular de Licenciatura em Matemática, uma disciplina eletiva que discute sobre os conhecimentos de Combinatória e do ensino de Combinatória, necessários para a atuação do professor em formação, segundo os teóricos utilizados na presente pesquisa. Essa disciplina eletiva, *Ensino de Combinatória: perspectivas teórico-práticas*, teve sua ementa elaborada pela professora que a lecionou durante a realização dessa pesquisa. A professora é pesquisadora na área de ensino de Combinatória e atualmente estudante de doutorado em Educação Matemática. Abaixo descreve-se a formação da pesquisadora e suas experiências.

- Formação: Graduação em Licenciatura em Matemática (UFPE); Especialização em Matemática Financeira e Comercial (UFRPE); Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica (UFPE), e, Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica (UFPE – em andamento).
- Atuou no Ensino Fundamental, Ensino Médio, tutoria à distância em curso de Licenciatura em Matemática, tutoria presencial em cursos de especialização em ensino de Ciências, técnica de ensino de Matemática na gerência de políticas educacionais do Ensino Médio na Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, e, atualmente, é professora formadora no curso de Licenciatura em Matemática do CAA - UFPE.

As pesquisas realizadas no mestrado e a pesquisa em andamento no doutorado da professora versam sobre o ensino de Combinatória, como já mencionado anteriormente. A professora também faz parte de um grupo de pesquisa voltado à investigação em ensino de Combinatória – Geração: Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE.

No Quadro 2 pode-se observar a ementa, os objetivos e os procedimentos metodológicos escolhidos pela professora para a referida disciplina eletiva. A partir da leitura desse programa, vê-se que se trata de uma disciplina que objetiva levar aos futuros professores à discussão sobre os conhecimentos necessários para o ensino de Combinatória.

O programa apresentado no Quadro 2 apresenta elementos importantes para a discussão dos Conhecimentos Docentes. Quando fala sobre “diferenciar os tipos de problemas”, por exemplo, destaca-se o conhecimento do conteúdo, e “discutir as possíveis estratégias de solução nos diferentes níveis”, destaca-se o conhecimento de conteúdo e ensino. Essa organização condiz com o que se espera do curso de formação inicial, que proporcione um ambiente para discussão dos conhecimentos de conteúdo e pedagógico, relacionando a teoria e a prática, como preconizado nos documentos oficiais referentes à formação de professores.

Quadro 2 – Programa da disciplina “Ensino de Combinatória: perspectivas teórico-práticas”.

<p>EMENTA</p> <p>Ensino e aprendizagem de Combinatória nos diferentes níveis de ensino, organização e sistematização para a construção de aulas de Combinatória; Currículo, recursos didático, livros didáticos específicos da Combinatória; Contribuições de pesquisas sobre o ensino de Combinatória para construção do conhecimento do conteúdo e didático pedagógico do Combinatória.</p>
<p>OBJETIVOS DO COMPONENTE</p> <ul style="list-style-type: none"> - Discutir o currículo da Educação Básica sobre Combinatória nos diferentes níveis de ensino - Diferenciar os tipos de problemas combinatórios - Analisar criticamente o enunciado de problemas combinatórios como também elaborar a partir de características dadas. - Discutir possíveis estratégias de solução nos diferentes níveis, analisando as dificuldades encontradas e apresentar procedimentos didáticos para superação. - Utilizar o Princípio Fundamental da Contagem como base para fórmulas de contagem. - Analisar materiais didáticos específicos para Combinatória, e aplicá-los com criticidade (jogos, livros didáticos, applets e objetos de aprendizagem). - Elaborar planejamentos para aulas de Combinatória no Ensino Fundamental e Médio;
<p>METODOLOGIA</p> <p>A metodologia proposta se pautará na relação dialógica professora/estudantes e dos estudantes entre si. Durante o curso serão utilizados textos de referências de autores reconhecidos na área, propostas curriculares e materiais didáticos para estudo e reflexão sobre os conceitos relativos à Combinatória e seu ensino O desenvolvimento metodológico será enriquecido mediante a exploração e a contribuição dos estudantes que deverão fazer a relação teoria e prática mediada pela intervenção da professora da disciplina.</p> <p>Os procedimentos serão efetivados por meio dos seguintes instrumentos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Estudo e leitura de textos - Pesquisa e sistematização de informações - Análise de materiais didáticos - Análise de resolução de problemas combinatórios - Elaboração de problemas combinatórios - Elaboração e apresentação de aulas

Fonte: Projeto Pedagógico do Curso/PPC de Matemática - Licenciatura (Set/2011)

As novas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) para a formação inicial e continuada dos profissionais do magistério, aprovadas pelo CP/CNE em 09 de maio de 2015, sancionadas pelo MEC em 24 de junho de 2015, definem que os cursos de formação inicial, respeitada a diversidade nacional e a autonomia pedagógica das instituições, deverão se constituir dos seguintes núcleos:

I – Núcleo de estudos de formação geral, das áreas específicas e interdisciplinares, e do campo educacional, seus fundamentos e metodologias, e das diversas realidades educacionais;

II – Núcleo de aprofundamento e diversificação de estudos das áreas de atuação profissional, incluindo os conteúdos específicos e pedagógicos e a pesquisa priorizada pelo projeto pedagógico das instituições, em sintonia com os sistemas de ensino; e

III – Núcleo de estudos integradores para enriquecimento curricular.

Percebe-se a necessidade e importância de uma organização que garanta os conhecimentos para a profissão do professor. No que se refere a questões de estrutura e currículo, as DCNs afirmam que deverá ser garantida, ao longo do processo, efetiva e concomitante relação entre a teoria e a prática, ambas fornecendo elementos básicos para a construção do conhecimento docente.

O objetivo geral descrito no Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Licenciatura¹⁷ da Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste – UFPE/CAA, diz que é preciso preparar o professor para “o exercício crítico e competente da docência, de modo a atender as especificidades dos alunos a que se destina e contribuir para a melhoria do ensino de Matemática neste nível da escolaridade” (PPC, UFPE/CAA, 2011, p. 10). Para atingir este objetivo, o programa se propõem a oferecer disciplinas que relacionem a teoria e a prática pedagógica, proporcionando um ambiente de investigação e pesquisas relacionadas à formação.

O Programa do Curso de Matemática – Licenciatura da UFPE/CAA foi construído seguindo as orientações da Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica em Superior e nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de Matemática. A proposta do programa é reflexo também das discussões acadêmicas realizadas no Centro Acadêmico do Agreste da UFPE sobre a formação de professores, com vistas a atender as especificidades educacionais e sociais que caracterizam a região do agreste de Pernambuco.

Todos esses documentos acima mencionados falam sobre uma formação com competências e habilidades essenciais ao docente, inclusive destacando a presença da teoria e da prática como ponto fundamental à construção do conhecimento. Acredita-se que o curso de Licenciatura, conforme a descrição acima, constitui-se de um ambiente propício à aprendizagem dos Conhecimentos, Pedagógicos e de Conteúdo, e é nesse ambiente que se configura esta pesquisa.

4.3 – FONTES E INSTRUMENTOS DE PESQUISA

Para coletar os dados dessa pesquisa, foram utilizadas observações, anotações, videogravações e entrevista semiestruturada. Essa visão multifacetada dos dados permitiu juntar informações diversas sobre a docente a disciplina observada.

¹⁷ Como é chamado no PPC (Projeto Pedagógico do Curso) da UFPE/CAA.

A observação possibilitou um contato direto com a sala de aula onde ocorreu o fenômeno estudado com todas as suas características. Um ambiente no qual as concepções, metodologias e práticas educativas vieram à tona, no exercício de atividades propostas e vivenciadas.

Quanto ao grau de participação, a pesquisa se caracteriza como *observação não-participante*, na qual a pesquisadora teve um contato com o grupo e com a realidade estudada, entretanto sem integrar-se a ela.

As videografações eram sempre organizadas junto à professora formadora, e somente ela participava do vídeo. Foi combinado com os estudantes que se utilizaria a imagem da professora e os áudios dos debates em sala de aula, além das atividades realizadas pelos mesmos. Foram também fontes de dados para o presente estudo todas as atividades, produções, pesquisas e avaliações realizadas pelos estudantes nessa disciplina.

Com o objetivo de complementar os dados coletados, preenchendo as lacunas das observações e para entender as dinâmicas escolhidas pela professora para as aulas, realizou-se uma entrevista semiestruturada com a formadora. O roteiro para a entrevista foi elaborado após as análises das aulas para facilitar, conforme explica Minayo (1998), a ampliação e o aprofundamento da comunicação e obtenção de dados.

O Quadro 3 apresenta os objetivos da entrevista em cada um dos momentos e sua relação com a descrição da análise. Esses objetivos levaram à elaboração de um esquema para a entrevista que serviu como base para a pesquisadora. Esse esquema encontra-se no ANEXO II.

As análises foram realizadas conforme as categorias de Conhecimento Docentes de Ball, Thames e Phelps (2008) e são apresentadas no Capítulo 4.

Quadro 3 - Descrição dos objetivos de cada parte da entrevista.

Fase da entrevista	Objetivo
1º momento – sobre formação e experiência docente	Conhecer as formações e atuações profissionais da professora.
2º momento – Sobre a organização da disciplina eletiva “ <i>Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e práticas</i> ”	Investigar as intenções da formadora ao promover a disciplina em questão e identificar a presença dos Conhecimento Docentes na organização da disciplina.
3º momento – sobre a mediação feita em sala de aula	Investigar possíveis mudanças no planejamento da professora e identificar que conhecimentos poderiam estar envolvidos nas decisões da docente.
4º momento – sobre os conhecimentos docentes em cada aula e/ou atividade proposta	Investigar a presença dos Conhecimento Docentes – Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – nas atividades propostas pela docente e na mediação em sala de aula.

Fonte: autor.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os dados resultantes das observações em sala de aula. As análises estão pautadas nas categorias de conhecimentos docentes descritas por Ball, Thames e Phelps (2008), conforme é apresentado no Capítulo 1.

Das 15 aulas observadas apenas 11 foram objetos de análise para esta pesquisa, pois, quatro dessas aulas foram mediadas somente pelos monitores da disciplina ou pelos próprios alunos. O maior objetivo desta pesquisa foi olhar para as ações da docente que ministrou a eletiva e como nas atividades e discussões que ela propôs, os conhecimentos eram mobilizados.

Em um primeiro momento, foi realizada a descrição de cada uma das atividades, buscando apresentar os dados observados, as atividades escolhidas pela docente e seus objetivos, utilizando a fala da professora, em entrevista, para reafirmar os dados. A descrição dos dados é fundamental nessa análise, pois permite ao leitor compreender o conjunto de ações que aconteceram em sala de aula.

Em seguida, buscou-se analisar, nas escolhas feitas pela professora formadora, a presença dos conhecimentos docentes descritos por Ball, Thames e Phelps (2008) e suas inter-relações, a partir de pequenos extratos das falas transcritas. A análise foi realizada por categoria de conhecimento docente, e, para a discussão de cada conhecimento, tomou-se como exemplo uma atividade e a mediação da mesma em sala de aula.

Convém salientar que os dados foram analisados de maneira predominantemente qualitativa, a partir das falas da professora formadora e da mediação das situações junto aos alunos.

5.1. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES REALIZADAS

1º aula - Aula do dia 27 de agosto de 2015

Nesse primeiro dia da disciplina “Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e prática” não houve videogravação, pois era preciso conversar com a turma sobre a pesquisa que seria realizada e fazer uma apresentação da pesquisadora que estaria presente em sala durante todo o período. Nesse dia, a professora formadora planejou um momento inicial para apresentar e discutir os objetivos da disciplina (apresentados no ANEXO I) e aplicar um questionário, que tinha por objetivo entender as escolhas dos alunos quanto à disciplina eletiva e investigar as experiências que eles possuíam com a Análise Combinatória.

O questionário, nomeado pela professora como “Ficha 1: primeiros contatos”, continha as seguintes perguntas:

Quadro 4 - Questionário aplicado – Primeiros contatos.

Para você o que é Combinatória?
Que dificuldades você possui com a Combinatória? Comente
Qual sua experiência com a Combinatória na escola? Comente
OQual a sua experiência com a Combinatória na universidade? Comente
Você já teve que lecionar alguma aula dessa disciplina? Comente
Que conhecimentos você pensa serem necessários para ensinar Combinatória?
Que expectativas você possui com relação a essa disciplina?

Fonte: ‘Ficha 01: Primeiros Contatos’ do arquivo da disciplina “Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e práticas”

Percebe-se que a escolha das perguntas é proposital, pois referem-se a elementos importantes do conhecimento docente. Para conhecer seus alunos, o que eles já sabiam e quais eram as dificuldades, a professora precisava das perguntas acima, compondo, portanto, seu *conhecimento de combinatória e alunos*.

Os objetivos da disciplina colocados preveem discussões sobre os Conhecimentos Docentes a partir de atividades como: pesquisa e sistematização de informações, análise de materiais didáticos, análise de resolução de problemas combinatórios, elaboração de problemas combinatórios, elaboração e apresentação de aulas, e outros. Deseja ser mais que uma disciplina pedagógica, discutindo relações entre conteúdos e didática, mostrando que é possível haver articulações como essa na formação inicial.

2º dia - Aula do dia 03 de setembro de 2015

No dia 03 de setembro de 2015 foram iniciadas as gravações nas aulas da disciplina “Ensino de Combinatória: perspectivas teóricas e práticas”. Nessa aula, a professora distribuiu uma ficha de leitura e exercícios¹⁸ para todos os estudantes e pediu para que juntos eles buscassem estudá-la, respondendo as atividades propostas. A partir do primeiro contato com os estudantes, através do questionário, a professora pode planejar essa e suas outras aulas. Essa afirmação pode ser evidenciada no extrato a seguir:

Fala 01. Professora: “*Começamos na semana passada conversando um pouquinho, fizemos o nosso contrato e uma coisa que vocês me levaram a perceber naquela nossa primeira ficha é*

¹⁸ A ficha completa, com todas as questões, encontra-se em ANEXO II.

que a gente precisa discutir mesmo Combinatória, me referindo ao conteúdo, diferentes problemas, como resolver. Então, a partir disso eu fui enveredar por alguns caminhos, e criei uma ficha com base em alguns documentos. Meu objetivo é discutir as resoluções e ajudar em algumas dúvidas. Vamos juntos entender os problemas, ok?”

A ficha preparada pela professora para essa aula envolvia questões históricas da Combinatória, problemas antigos e que deram origem aos estudos na área. O texto introdutório era o seguinte:

Procurar sobre a história da Combinatória não é muito fácil, pois os fatos perpassam diferentes civilizações ao longo dos anos e poucos são os registros e fontes de informação que ultrapassaram os séculos. Biggs (1979, p.110) ao tratar sobre a Combinatória afirma que “por causa das regras serem consideradas auto-evidentes, não se espera encontrá-las mencionadas explicitamente, e não se pode, portanto, traçar sua história”. No entanto, podemos ir atrás dos problemas que fizeram parte da história de algumas civilizações, presentes em fontes que foram preservadas até os dias atuais. Para começarmos nessa caminhada sobre o conhecimento de como a Combinatória foi se desenvolvendo, a natureza dos conceitos que a envolvem e suas relações, convidamos vocês para desenvolverem uma discussão sobre os problemas apresentados, comentando sobre suas características e tentando encontrar algumas possibilidades que possam fazer parte da sua solução. Tentem imaginar como seriam as propostas desses matemáticos, alguns que nasceram antes mesmo de serem criados os números tal qual conhecemos. Lembrem-se de deixar tudo escrito, pois o pensamento que não é escrito, pode se perder na história!

Após essa introdução seguiam problemas combinatórios e a discussão de cada um deles. Esse material pode ser visto no ANEXO III. Inicialmente, os estudantes tentavam encontrar a resposta para a atividade que, em seguida, era discutida pela professora, sempre levando a uma reflexão sobre qual a melhor forma de resolver o problema e quais estratégias eram mais adequadas.

3º dia - Aula do dia 10 de setembro de 2015

Esse foi o terceiro dia de aula da disciplina e o objetivo foi a continuação da resolução da ficha de Combinatória com problemas históricos.

Vale ressaltar que, nos momentos de resolução de problemas, tanto na aula do dia 03 de setembro quanto nessa aula, a professora formadora, em momento algum, corrigia as estratégias

utilizadas pelos alunos ou dizia estar errada uma resolução apresentada. Observa-se que o objetivo da formadora era propiciar uma discussão entre os estudantes, sobre o ensino, sobre os alunos e sobre as formas de resolução dos problemas combinatórios.

Em entrevista, quando questionada sobre o objetivo das fichas, a professora afirmou:

Fala 02. Professora: *“Essas fichas trouxeram uma dinâmica boa para sala de aula e ainda me ajudavam a perceber o conhecimento de conteúdo e a partir do momento que eu peço para eles justificarem, eu estou tratando do conhecimento de ensino e de aluno. Uma coisa interessante é que um aluno buscava justificar a resposta do outro, “eu acho que ele fez assim”, “estou entendendo o raciocínio dele”. Dessa forma a gente consegue fazer uma discussão, buscar entender e não só saber qual a resposta correta; os problemas, muitas vezes, eram mais abertos para gerar essa discussão”*.

4° dia - Aula do dia 17 de setembro de 2015

A aula do dia 17 de setembro, quarta aula da disciplina, iniciou com alguns avisos e mudanças no planejamento.

Fala 03. Professora: *“Oi gente, boa noite. Vamos começar nossa aula com algumas notícias, algumas mudanças durante a disciplina. O que eu tenho percebido é que muitas pessoas ainda não estão participando das aulas, ficam calados durante os debates, não é? Então, como eu posso acompanhar o processo de aprendizagem desses alunos que ficam calados? Entende? Para tentar acompanhar então, a gente decidiu que vamos fazer uma provinha. Calma, é só uma provinha. Deixa eu explicar um pouco. É uma prova que vai compor a nota da disciplina, mas ela não será sozinha, não terá um peso grande, digamos assim, nós ainda vamos fazer muitas atividades. O objetivo é saber o que vocês estão aprendendo, o que é que tá ficando dessas aulas dialogadas. A gente precisa disso gente, eu preciso disso para poder acompanhar esse processo todo. Então a gente pensou em fazer uma prova, simples, com problemas iniciais, esses problemas que podemos listar, sem muitas possibilidades, sabe? Para gente fazer daqui a quinze dias, seria então dia 01. Ok?*

Mas nós também pensamos em outras coisas que poderão ajudar vocês. Nós vamos inclusive usar nossos monitores nessa ideia. A gente pensou em construir um ambiente no Facebook para tirar dúvidas e discutir. Eu criei um grupo no Face, todo mundo aqui usa o Face? (os alunos confirmam que sim). Ótimo. Eu criei esse grupo para realizarmos algumas atividades paralelas à disciplina, também valendo nota. Nesse grupo, colocaremos questões de

Combinatória e você devem entrar lá, comentar, discutir, sugerir e, principalmente, tirar dúvidas, ok? Nós estamos realizando essas atividades de ficha aqui na sala, mas o nosso foco vai ser por lá também, para gente andar um pouquinho. Tudo bem?”

Fala 04. Aluno: *“Professora, lá a gente também pode colocar uma questão que a gente tenha dúvida?”*

Fala 05. Professora: *“Com certeza. A ideia é essa. Ajudar vocês de uma forma mais rápida, porque não precisa esperar uma semana para gente se vê. Hora a gente coloca questões e vocês também”.*

Em entrevista com a professora para entender melhor essa mudança no planejamento e a importância das novas atividades propostas, sobre a decisão de aplicar uma atividade avaliativa, a professora comenta que: *“Logo no começo da disciplina, foi justamente quando eu percebi o desconhecimento de boa parte da turma sobre os problemas combinatórios. Isso me deixou, assim, numa situação que eu não podia discutir sobre o ensino de Combinatória se eles não sabem Combinatória. [...] A prova era um momento individual que eu precisava. Muitos alunos não participavam, não falavam, e eu precisava saber o que eles estavam conhecendo de Combinatória naquele instante e eu precisava que eles estudassem o conteúdo para poder avançar em outras discussões.*

Nas análises que seguem fala-se sobre as questões utilizadas na avaliação e seus objetivos.

Dando continuidade, a professora voltou a trabalhar com as fichas de problemas combinatórios. Observou-se, durante essas três aulas, que os problemas apresentados aos alunos possuíam diferentes significados, representações e invariantes, e diferentes níveis de dificuldade. Rocha (2011) afirma que conhecer os diferentes tipos de problemas pode ajudar na escolha de situações que permitam a construção de um raciocínio combinatório por parte dos alunos. Portanto, a importância desse trabalho na formação inicial é evidenciada. Segundo Borba (2010), o raciocínio combinatório pode ser:

[...] entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. (BORBA, 2010, p. 3)

Essa maneira de pensar no problema combinatório necessita de um contato com variadas situações. Além disso, o estudante constrói seu raciocínio pela experiência e a curiosidade de resolver problemas desde os anos iniciais de escolarização.

5° dia - Aula do dia 24 de setembro de 2015

Rocha (2011) realizou uma pesquisa com professores que ensinam Matemática e constatou que a maioria dos participantes do estudo sentiam dificuldades em analisar a resolução dos problemas de alunos, principalmente por dois motivos: não conseguiam diferenciar os diversos tipos de problemas ou não conheciam as diversas estratégias de resolução.

O trabalho com as fichas de Combinatória com contexto histórico teve papel importante nesse aspecto, porque levou os estudantes a pensarem sobre o conteúdo, enquanto respondiam as questões, ao mesmo tempo em que pensavam sobre o ensino, quando justificavam suas estratégias e buscavam compreender a resolução do outro.

Nas palavras da professora *“o objetivo maior da disciplina é trazer para a reflexão. Levar a reflexão do porquê é tão difícil para os professores ensinarem Combinatória. O que é que leva a essa dificuldade? É a Combinatória só ou tem outros fatores influenciando? [...] Todo esse conhecimento sobre o ensino é essencial para a prática do professora. Nós professores, temos que decifrar coisas. Decifrar no sentido que, temos que ler, entender o que o problema tá pedindo e seguir por uma estratégia que seja melhor, mais indicada para fazer esse problema. Logo, não é uma coisa do nada, ou simples. Como é que você ensina a um aluno a ter esse discernimento, esse pensamento? De que forma você faz isso? Será que é só apresentando problema ou a resposta do problema”*.

O distanciamento entre a teoria e a prática dificulta o trabalho do professor. Se não há na formação momentos de discussão sobre o conteúdo e o ensino, é provável que esse professor não reconheça os processos necessários para o ensino. Por conta do seu objetivo *“discutir o conteúdo e o ensino, de diversas maneiras, refletir sobre esses processos”* é que a disciplina investigada se torna um caso especial.

Ainda nessa aula foram realizadas atividades em ficha, apresentadas no ANEXO III, com problemas combinatórios. Segundo a professora:

“Eu percebi o desconhecimento de boa parte da turma sobre os problemas combinatórios. Isso me deixou assim numa situação que eu não podia discutir sobre o ensino de Combinatória se

eles não sabem Combinatória. Então, isso me fez mudar várias aulas. As fichas de história que foram três se não me engano, quando eu pensei na primeira ela seria no máximo para ocupar duas aulas, quem sabe uma, eu nem lembro mais quanto tempo passei nelas, porque eu não tinha como saber antes que demoraria tanto, eu não conhecia os alunos. Aconteceu que ora eu queria atropelar as coisas, passar por cima dessas fichas, mas aí eu vi que as discussões eram importantes. Eu fiz uma alteração completa na disciplina, muita coisa não aconteceu devido ao tempo inicial dedicado a resolução de problemas”.

6° dia - Aula do dia 15 de outubro de 2015

Nas aulas anteriores, as atividades escolhidas pela professora buscavam apresentar diferentes problemas combinatórios e levar os estudantes a utilizarem estratégias diferenciadas para resolverem questões que eram passíveis de serem solucionados de maneira intuitiva, com raciocínio, sem a necessidade do uso de fórmulas. O diferencial dos problemas escolhidos é que todos apresentavam uma ou mais condições para serem resolvidos, o que às vezes exigia do participante que ele realmente compreendesse o enunciado, mobilizasse outros conceitos e propriedades, e não apenas que soubesse aplicar uma fórmula que podia, ou não, ter algum significado para ele.

A atividade da aula do dia 15 de outubro buscou verificar o desempenho dos estudantes elaborando questões a partir de regras determinadas pela professora. Essas regras eram, na verdade, invariantes combinatórios determinados pela formadora a fim de investigar o conhecimento dos estudantes sobre a diversidade de problemas. Esses invariantes, explicam Pessoa e Borba (2009), são as propriedades específicas de cada um dos tipos de problemas, ou seja, as propriedades lógico-operatórias que caracterizam os diferentes tipos de problemas.

Como exemplo, em uma das questões foi solicitado aos alunos que elaborassem problemas combinatórios com ordenação e repetição, ou elaborar um problema em que houvesse escolha de grupos não ordenados.

Todas as questões elaboradas pelos estudantes foram apresentadas em sala, discutidas e resolvidas.

7° dia - Aula do dia 22 de outubro de 2015

Nessa aula os alunos organizaram, junto com a professora, uma pesquisa de campo na qual entrevistariam professores e alunos da Educação Básica. Na fala transcrita abaixo, a professora explicou aos estudantes o objetivo dessa pesquisa.

Fala 06. Professora: *“Pessoal, em nossas discussões aqui na sala a gente tem visto como é complicado trabalhar com os problemas combinatórios, né? E eu fico pensando que muitos professores que estão atuando não tiveram contato com esse conteúdo com essa formação, assim como vocês disseram no início dessa disciplina não ter experiência com o ensino de Combinatória. A gente tem discutido os diferentes tipos de problemas, de resolução, refletimos sobre como fazer para ensinar aquele problema, não é isso? Imagina sem essa discussão como fica difícil? Eu tive que aprender tudo na prática, muito tempo depois é que fui ver essas discussões que trago aqui.*

Outra coisa importante que é papel do professor, elaborar atividades, analisar as respostas e os desempenhos dos seus alunos. Como é que faz isso? E como é que ele organiza as questões? As respostas desses alunos nos mostram alguma coisa?

Então, eu queria que vocês fizessem uma pesquisa de campo com professores e alunos para perceber um pouco dessas coisas que na pesquisa a gente vêm encontrando, Quando eu digo na pesquisa eu falo os grupos de pesquisa, né?”

[...]

Fala 07. Professora: *“Tá. Então hoje a nossa aula será para gente construir um roteiro para essa pesquisa. Vamos pensar em que tipos de perguntas podemos aplicar com os alunos e aí, tarefinha de casa, na próxima semana vocês me trazem sugestões. Ok? A mesma coisa para a entrevista com o professor, o que nós vamos querer perguntar? O que é importante da prática do professor que precisar aprender aqui na formação?”*

Segue uma longa discussão sobre quais atividades escolher para aplicar com alunos da Educação Básica e como a análise dessa atividade poderá ajudar os estudantes em formação a pensarem sobre o ensino de Combinatória. Foi também elaborado um roteiro para entrevista com um professor da Educação Básica, em busca de entender possíveis dificuldades ou desafios que ele possa ter com o ensino de Combinatória. Após o debate, foram construídos os seguintes roteiros para guiar a pesquisa:

- Questionário para os estudantes da Educação Básica – Que tipo de questões?
 - Permutação simples;

- Combinação simples e com repetição;
- Permutação com repetição;
- Arranjo com e sem repetição.
- Produto Cartesiano
- Questionário para entrevista com professor da Educação Básica – Sobre o que perguntar?
 - Sobre a sua formação;
 - Sobre sua experiência (tempo de experiência, em que nível escolar, se participou de formação continuada, experiência com Combinatória);
 - Sobre o ensino de Combinatória:
 - Estudou na escola básica ou na formação docente esse conteúdo?;
 - Experiência ensinando Combinatória;
 - Quais recursos utiliza para que os alunos aprendam;
 - Ponto de vista sobre o livro didático / Qual é adotado;
 - Avaliação.

O trabalho de produzir um questionário para aluno da Educação Básica envolveu vários elementos da prática do professor. Primeiro, os alunos discutiram sobre quais problemas deveriam ser considerados, foram analisadas as possíveis dificuldades que cada problema apresenta e a vantagem ou desvantagem de colocar aquele tipo de problema no questionário. Ao elaborarem questões para um professor da Educação Básica, os estudantes tiveram que pensar sobre todas as questões que envolvem ser docente: quais materiais foram escolhidos? Porque? No momento em que se pensa o que é importante saber do professor em atuação, os licenciandos aprendem a pensar na sua prática, o que é importante saber para ensinar Combinatória ou ainda, que materiais devo usar.

Também nessa aula os alunos discutiram em que ano escolar aplicariam o teste para, então, adequarem suas questões. As aulas seguintes, 8ª aula - dia 29 de outubro de 2015 e 9ª aula - 05 de novembro de 2015, foram dedicadas às resoluções e discussões das questões sugeridas pelos estudantes e posteriormente à elaboração do teste final a ser aplicado. Também foram discutidas durante essas aulas que perguntas seriam importantes para fazer ao professor da Educação Básica e a estrutura do questionário foi formada.

10º dia - Aula do dia 12 de novembro de 2015

A atividade dessa aula foi baseada em três perguntas importantes para a ação do professor: Que tipo de problema? Por que o aluno respondeu assim? Como mediar a aprendizagem a partir dos erros?

Nessa disciplina, os estudantes passaram por momentos de resolução de questões, análise de questões e elaboração de questões. Essa última atividade teve como foco analisar duas situações de sala de aula em que o estudante, ao responder um problema que envolve Combinatória, erra.

Foram apresentadas aos estudantes duas situações de aula nas quais alguns estudantes resolveram problemas combinatórios e utilizaram estratégias erradas ou entenderam o problema de maneira equivocada. O trabalho dos estudantes em formação foi analisar as respostas dadas e explicá-las, pensando na melhor maneira de conduzir aquele momento para que o aluno que errou entenda o problema.

As estratégias adotadas diante do erro podem levar o aluno à construção do conhecimento ou podem somente apresentar o correto sem buscar entender o processo. Toda resposta a um problema de Combinatória é acompanhada de um raciocínio, que pode estar correto, ou não. É importante que o professor busque identificar as estratégias utilizadas pelos seus alunos para corrigir qualquer dificuldade. Dessa forma, a atividade sugerida nessa aula se tornou essencial à formação dos licenciandos, porque permitiu, como docentes, a análise de resoluções e de erros de alunos.

Outros cinco encontros aconteceram na disciplina: dia 01/10, quando foi aplicada a avaliação da disciplina, 19/11, momento mediado pelos monitores da disciplina e os outros três, apresentação do trabalho de pesquisa feito pelos alunos.

A aula mediada pelos monitores da disciplina teve como objetivo apresentar os diferentes significados e invariantes aplicados nos problemas combinatórios. Já as aulas mediadas pelos estudantes aconteceram nos momentos finais da eletiva, para apresentação dos resultados da pesquisa de campo: questionário aplicado a estudantes da Educação Básica e questionário aplicado a um professor, também da Educação Básica.

5.2. ANÁLISE DAS AULAS E ATIVIDADES REALIZADAS POR CONHECIMENTO DOCENTE

5.2.1. Conhecimento Comum de Combinatória

O *Conhecimento Comum do Conteúdo*, aqui chamado de *Conhecimento Comum de Combinatória* é o conhecimento do conteúdo disciplinar ensinado pelos professores e que outros profissionais também possuem, ou seja, não é um conhecimento exclusivo de professores. Está incluído nele saber resolver exercícios e problemas, saber utilizar notações e termos corretamente e saber identificar definições incorretas.

Identifica-se a presença desse conhecimento nas atividades de resolução de problemas, com a utilização das fichas de contexto histórico (ANEXO III e IV). Quando aconteciam as discussões sobre qual a melhor fórmula para resolver este problema, é identificada a presença do *Conhecimento Comum de Combinatória*.

Aqui identifica-se a presença do *Conhecimento Específico*, pois o professor é quem precisa saber qual a melhor estratégia de resolução para um problema combinatório, e esse conhecimento é específico do ensino. Outras pessoas podem até saber vários caminhos de resolução, mas não necessariamente o melhor caminho. A professora evidenciou o *Conhecimento Comum de Combinatória* ao selecionar problemas nos quais os alunos teriam que aplicar estratégias para resolver os problemas e quando a professora discutiu como os estudantes resolverem os problemas.

O seu objetivo deveria ser identificar que os estudantes de graduação sabiam resolver os problemas, parte fundamental para depois inserir a discussão de como ensinar, *Conhecimento Especializado*.

Os pesquisadores Ball, Thames e Phelps (2008) esclarecem que “comum” não está sendo utilizado para sugerir que todos possuem esse conhecimento, mas para explicitar que esse é um tipo de conhecimento utilizado em outras situações que não somente a de ensinar.

O exemplo abaixo é do dia 10 de setembro, quando a professora discutia com os alunos a resolução de um problema combinatório. Vejamos o extrato:

Figura 2 - Questão de Combinatória sobre o Tratado Médico de Sushruta.



No **Tratado Médico de Sushruta** (no século VI a.C na cidade indiana de Benares – atual Kashi) encontra-se uma discussão de vários tipos de gostos que podem ser criados por meio de seis qualidades básicas: **adstringente (1), amargo(2), ácido(3) doce(4), salgado (5), picante (6)**. Para formar novos gostos essas seis qualidades podem ser combinadas de diferente maneiras.

Fonte: Ficha de aula “Combinatória por meio de problemas históricos”, nº 1.

Fala 08. Professora: *“Então vamos lá. Nós temos seis tipos de gostos e ai você quer saber, combinando dois gostos desses, que ele chama de qualidades básicas: quantos sabores diferentes você consegue formar?”*

Fala 09. Aluno A5: *“36?”*

Fala 10. Professora: *“Não sei, vou anotar aqui no quadro. Vamos lá, 36. (o aluno muda sua resposta para 30) Como? Sim, 36 não, 30. Anotado. Alguém tem outra resposta? 15. Anotado também. Eu estou ouvindo uma explicação ali naquele grupo, fala alto para gente entender também.”*

Fala 11. Aluno A6: *“Professora, eu já consegui ver que dá 15, porque seria seis fatorial (6!) e encontraríamos os novos sabores, mas vai ter repetido então tem que dividir por dois fatorial (2!). Ficaria então seis fatorial dividido por dois fatorial”.*

Fala 12. Professora: *“Como assim, não entendi o porquê dessa divisão.”*

Fala 13. Aluno A5: *“É porque é assim, essas quantidades elas podem ser combinadas em seis separadamente. Então quando eu digo 36 é usando aquela lógica que a gente viu na outra atividade. Na primeira entrada eu tenho seis opções e na segunda seis opções, só que não gera novo sabor, então eu faço na primeira entrada seis opções e na segunda entrada cinco opções, ai dá 30.”*

Fala 14. Aluna A7: *“Eu acho que é seis fatorial (6!)”.*

Fala 15. Professora: *“Tá. Eu vou precisar entender cada resposta tá certo? Mas antes, vamos voltar na segunda resposta, né. Então nós temos seis fatorial sobre dois fatorial.”*

Fala 16. Aluno A6: *“Professora, é que, tipo, se a gente combinar doce com salgado ou salgado com doce, nós vamos ter o mesmo sabor, a mesma coisa. Então esse fatorial de baixo ali, a divisão, é justamente para tirar esses casos repetidos.”*

Fala 17. Aluna A5: *“E também, além do que ele falou, também não pode repetir o mesmo sabor. Por exemplo, doce e doce, não é um novo sabor.”*

Fala 18. Professora: *“Boa observação. Vou anotar aqui no quadro essa observação. Gostos iguais não formam um novo saber. Nesse caso eu não conto a opções doce e doce, não é isso?”*

Fala 19. Alunos: *“É, porque doce e doce, não muda nada. Salgado com salgado, é a mesma coisa que um salgado só.”*

Fala 20. Aluno A8: *“Professora, eu usei a fórmula de combinação, eu acho que é combinação. Ficou seis fatorial sobre seis menos dois, dentro do parênteses, fatorial, multiplicado por dois fatorial. Assim dá 15.”*

Fala 21. Professora: *“Vamos analisar então todas as opções. Então alguns de vocês já estão concordando que não pode haver repetição, não é isso? Vocês disseram que doce com doce não vale e que doce com salgado e salgado com doce é a mesma coisa. E o aluno A8 usou a fórmula de combinação, é uma combinação simples de seis elementos dois a dois, não é isso?”*

Percebe-se que os estudantes buscam utilizar fórmulas combinatórias para resolver o problema e justificam suas escolhas, como nas falas 11, 13, 16 e 20. Esse conhecimento demonstrado na resolução do problema é um *Conhecimento Comum de Combinatória*, envolve saber resolver exercícios, saber utilizar corretamente as notações, mas não é um conhecimento específico para o ensino, ele pode ser usado em um contexto geral.

Contudo, outros tipos de conhecimentos podem, também, ser identificados nesse extrato. A própria metodologia utilizada, na qual os alunos discutem e apresentam estratégias e a professora media e os conduz para a resposta correta, nos leva a identificar a presença do *Conhecimento de Combinatória e Ensino* e de *Combinatória e Aluno*. A professora estava ciente de que essa é uma forma de ensinar Combinatória (e que os estudantes de graduação também podem utilizar no futuro com seus alunos), bem como ela estava utilizando a atividade para levantar o conhecimento de Combinatória dos licenciandos.

Nota-se, assim, que os *Conhecimentos Docentes* descritos por Ball, Thames e Phelps (2008) estão, na prática, interligados de tal forma que não é possível separá-los. Em um pequeno extrato de aula, vê-se a presença de vários conhecimentos sendo mobilizados.

A professora que media as discussões em sala aproveita os conhecimentos comuns que surgem naquela discussão e leva-os a pensarem sobre o ensino, por exemplo, quando intervêm com o seguinte questionamento:

Professora: *Alguém listou?*”

Fala 22. Aluno A3: *“Eu tentei não é? Eu fui ligando o primeiro gosto com o segundo, com o terceiro, com o quarto, com o quinto e com o sexto. Depois o segundo com o terceiro, segundo com o quarto, segundo com o quinto e o segundo com o sexto. O terceiro vai com o quarto, com o quinto e com o sexto. O quarto com o quinto e com o sexto e o quinto só com o sexto. Nessas listagens eu encontrei primeiro cinco combinações, depois quatro, três, dois e um.”*

Fala 23. Professora: *“E agora? Multiplica tudo?”*

Fala 24. Aluno A3: *“Não. Eu somei. Porque todas essas possibilidades são já enumeradas, eu já estou contando tudo. Não tem relação entre uma e outra.”*

Fala 25. Professora: *“Entendi. E aquela resposta seis fatorial? Qual a sua explicação aluno A7?”*

Fala 26. Aluno A7: *“Eu não pensei nessa coisa das repetições.”*

Fala 27. Professora: *“Mas me diga como foi que você pensou inicialmente. Sabe porque gente? Os nossos alunos vão ter diversas formas também. Muitos não vão pensar nas repetições e entender as diversas formas de responder aqui nos leva a entender como o aluno vai pensar, entende? É isso que é saber Matemática para ensinar.”*

Fala 28. Aluno A7: *“Então, eu tinha pensado que no primeiro lugar teria seis possibilidades e no segundo teria cinco. O fatorial é porque poderia mudar o lugar, tipo, trocar. Como eu só tenho duas possibilidades então o fatorial já vem ali no cinco”.*

Fala 29. Professora: *“Se eu não pensar nesse fatorial, vamos na ideia inicial, então eu tenho seis opções para escolher o primeiro sabor e depois só cinco opções para não cair naquele caso doce e doce, não é isso? Dessa forma, daria 30. Com o fatorial esse valor seria maior. Agora só esse cálculo dá conta da questão? Só o seis vezes o cinco?”*

Fala 30. Aluno A6: *“Não, pelo que eu entendi tem que tirar a repetição também do tipo doce e salgado, salgado e doce.”*

Fala 31. Professora: *“Nesse caso, veja se vocês estão percebendo o mesmo que eu. As respostas que não consideraram a repetição, que foi o nosso colega que disse que dava 30, nós*

precisaríamos que a questão dissesse que a ordem importa. Imagina por exemplo que se tratasse de produzir uma torta, aquelas tortinhas recheadas. Em uma delas a primeira camada é doce e a segunda é salgada e em outra o contrário, nesse caso a ordem está importando, as tortas não vão ser diferentes? Visualmente? Agora, se a questão diz que é para compor um novo sabor a partir das misturas de duas dessas qualidades, então a ordem não vai importar, concordam?

Então, a que conclusão chegamos? Qual o resultado?”

Fala 32. Alunos: “15”

Fala 33. Professora: “Qual o tipo de problema? ”

Fala 34. Alunos: “Combinação. ”

Fala 35. Professora: “E se fosse para combinar três qualidades para formar um sabor novo?”

Fala 36. Aluno A6: “Agora não precisa mais listar, a gente já sabe que vai usar a fórmula da combinação. Dá (pausa), 20.”

A discussão nesse problema combinatório foi sobre a repetição e a ordem dos elementos. Buscou-se analisar se esses elementos geravam, ou não, novas possibilidades. De acordo com Rocha (2011), os problemas que mais geram dificuldades para os alunos e professores são os de *arranjo* e *combinação*, por conta da propriedade da ordem e da repetição. Observando as falas acima, identifica-se que esses invariantes são percebidos pelos alunos, quando acontece a discussão desde a Fala 16 até a Fala 21. Para a resolução de um problema combinatório, é preciso que o aluno compreenda bem o seu contexto para entendimento dos invariantes que condicionam os tipos específicos de problemas. Esse raciocínio é importante na aprendizagem de Combinatória, conforme alerta a professora nas Falas 27 e 31.

A professora, tendo reconhecido erros comuns (tais como a consideração de elementos repetidos) cometidos por seus alunos (*Conhecimento de Combinatória e Aluno*) na resolução dos problemas, faz perguntas que os direciona na reflexão correta. Essa forma de agir é própria também do *Conhecimento de Combinatória e Ensino* e está, nessa situação, articulado com o *Conhecimento Comum de Combinatória*.

5.2.2. Conhecimento Especializado de Combinatória

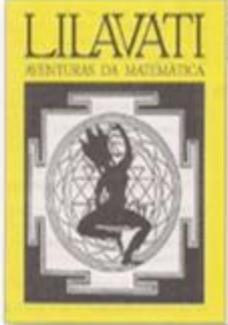
O *Conhecimento Especializado de Combinatória* é um conhecimento específico para o ensino, ou seja, não é necessário para outras atividades que não o ensino. Dessa forma, é um conhecimento essencial a professores para o ensino de Combinatória.

Muitas das tarefas diárias dos professores são características desse trabalho: apresentar ideias matemáticas, responder os porquês dos alunos, avaliar se afirmações feitas pelos alunos são pertinentes e incluem também a avaliação e adaptação do conteúdo matemático presente nos livros didáticos, modificar atividades de modo a torná-las mais fáceis ou mais difíceis, dentre outras. Esse conhecimento é evidenciado quando os professores discutem, por exemplo, sobre os significados, os invariantes e os símbolos que estão presentes nos problemas combinatórios.

Portanto, todas as atividades de resolução de problemas propostas pela professora propiciaram essa construção do conhecimento especializado, pois, em cada questão resolvida havia sempre uma discussão sobre as estratégias utilizadas, a melhor forma de responder e o porquê de determinada estratégia não se encaixar na resolução do problema. Nesse momento, a professora também ensinava com a sua prática. No lugar de dar a resposta correta, negar o uso de algumas fórmulas sugeridas pelos alunos, a professora observava todas as sugestões e levava os estudantes a refletirem sobre os significados, os invariantes e os símbolos. Essa tarefa, executada pelos professores, demanda uma compreensão e um raciocínio combinatório especializado para o ensino.

Tem-se, a seguir, um exemplo dessa conversa em sala de aula no momento da resolução de problemas.

Figura 3 - Questão de Combinatória do livro Lilavati.



No livro *Lilavati* escrito por Bhaskara, matemático indiano por volta do ano de 1150, encontram-se dois problemas interessantes.

Atividade Adaptada. Em um edifício agradável e elegante, com 8 portas, construído pelo habilidoso arquiteto para o Lorde da Terra. Explícite o número de combinações diferentes que podem ser feitas com a abertura de uma porta? Com duas portas? Com três?

Fonte: Ficha de aula “Combinatória por meio de problemas históricos”, nº 3.

Fala 38. Professora: “São quantas portas? (Os alunos respondem oito). E agora?”

Fala 39. Aluno A2: *“Eu posso abrir a primeira e as outras sete ficam fechadas, posso abrir a segunda, a terceira, por aí vai. Oito possibilidades”.*

Fala 40. Aluno A3: *“Então é dois elevado a n (refere-se a 2^n)”*

Fala 41. Professora: *“Eu não entendi o dois elevado a n aluno A3, tô tentando entender. Me ajude aqui. (escreve no quadro). Quem é n ? ”*

Fala 42. Aluno A3: *“ n é a quantidade de abertura de portas. Se você tem uma porta ela abre e fecha, são dois movimentos e quantas vezes? n vezes.”*

Fala 43. Professora: *“Entendi o que ele pensou. Se eu tenho oito portas, digamos três portas, vou desenhar aqui. Então para cada uma eu tenho a possibilidade de estar aberta ou fechada, logo são duas possibilidades, a outra também e a outra também. Então, dois a terceira. Entendi. Entenderam? Essa é uma interpretação para o problema. Por isso gente que eu sempre fico perguntando o que você está pensando para resolver o problema, para entender o que está por trás da sua resposta, que é mais interessante do que a resposta, propriamente dita. ”*

Fala 44. Aluno A4: *“Eu não entendi muito bem a diferença entre os problemas dos dois, quer dizer, as duas formas de responder”.*

Fala 45. Professora: *“Certo, vamos lá. A forma como A2 interpretou o problema é abrir as portas individualmente. Então, quantas são as possibilidades de você abrir individualmente uma porta dentre oito portas. Então, são oito possibilidades. Porque você pode abrir a primeira, ou a segunda, ou a terceira e segue, mas enquanto uma está aberta, as outras estão fechadas. Já na resposta de A3 ele quer saber a possibilidade de as oito portas, estarem abertas e fechadas ao mesmo tempo, não necessariamente uma por vez. São duas formas de interpretar o problema.*

Agora, para duas portas, qual a resposta?”

Fala 46. Aluno A5: *“Professora, o meu deu 28 com desenhos de portas.”*

Fala 47. Professora: *“Como é que eu faço aqui no quadro? Me mostre aí sua resposta, cadê o caderno?”*

Ela colocou no papel oito portas, ok? Então ela pensou, vou abrir a porta um e a dois. Ou a porta um com a três, um com a quatro, um com a cinco, um com a seis, um com a sete e a porta um com a porta oito. O mesmo ela fez para porta dois, para a três até a oito. Não era isso A5? Tu parou em algum momento de fazer essa relação? Ou tu fez até o final?”

Fala 48. Aluno A5: *“Eu parei, tem um (pausa), tipo, você sabe o próximo.”*

Fala 49. Professora: *“Você percebe um padrão lógico. Então ela encontrou sete possibilidades mais, seis possibilidades mais, cinco possibilidades até chegar em uma possibilidade só. Quando soma tudo? 28. Foi assim que ela fez. Mas alguém aí atrás fez por combinação? Me diz aí como foi.”*

Fala 50. Aluno A6: *“Foi uma combinação de oito, dois a dois, professora. Aí fica, oito fatorial dividido por oito menos dois fatorial, no parênteses né?, vezes dois fatorial. Vou aí fazer. (resolve no quadro)”*

Fala 51. Professora: *“Qual é o padrão que a gente localiza nessa resposta dele? Nessa aplicação de fórmula?”*

Fala 52. Alunos: *“É uma combinação, dois a dois, normal.”*

Fala 53. Professora: *“Normal, não é? (risos) Quando vocês fecham que é uma combinação pronto, não tem mais discussão. Quando tá no diagrama ainda resta dúvida, mas passou para fórmula, acabou a discussão. Vamos conversar sobre isso.”*

Fala 54. Aluno A2: *“É porque é assim, a questão só tá dizendo que precisa abrir as portas, certo? Duas portas. Ele não disse por exemplo que essas portas têm que ficar uma do lado da outra, então a ordem não importa, então tanto faz qual eu vou abrir. Então é uma combinação.”*

Fala 55. Professora: *“O que acontece se eu disser que você abrir duas portas, das oito, sendo que essas duas precisam estar juntas? Quais são as possibilidades?”*

Vamos fazer assim, para cinco portas, vou desenhar aqui e enumerar de um a cinco. Se eu tenho que escolher duas juntas como fica? (os alunos vão falando a resposta e a professora anota no quadro) Porta um com dois, dois com três, três com quatro e quatro com cinco. Tem outra forma? Esse problema é de combinação? Nesse caso a gente tá falando em ordem ou em posição?

Presta atenção nisso gente. A ordem importar é você escolher abrir a primeira e quarta porta e essa escolha ser diferente de escolher a quarta porta e depois a primeira. Por isso que a questão que estamos trabalhando aí da ficha é uma combinação, porque como vimos, na combinação a ordem não importa. Escolher a primeira e depois a quarta porta ou escolher a quarta porta e depois a segunda dá no mesmo.”

Fala 56. Aluno A7: *“Essa questão é difícil, acontece muito de não conseguir diferenciar o tipo de problema. Porque, vê, eu tava pensando, primeiro eu tenho 8 chances para abrir a porta, depois 7, depois 6, vê que já tá indo para outro caminho o pensamento.”*

Fala 57. Professora: *“Exatamente. Quer dizer, muitas vezes a gente conhece esquemas para resolver problemas, a gente tem estratégias esquematizadas, mas não sabemos decidir qual usar e para decidir requer uma interpretação, eu tenho que saber o que está em jogo em cada problema. Os problemas combinatórios envolvem muitos invariantes, não é? Eu tenho que pensar sobre repetição, ordenação, escolhas. Percebem a sutileza? Então, eu sempre tenho que saber o que está em jogo em cada problema, se é só escolher, se é só ordem, se é escolha e ordem. Imagine que duas pessoas vão viajar de avião e elas precisam escolher entre oito lugares, mas eles precisam sentar juntos. E agora? Tem uma condição nesse problema. E se eles mudarem de lugar? Eles vão poder escolher qualquer lugar? Agora imagine trabalhar esse conteúdo sem conhecer tudo isso que estamos discutindo?”*

Fala 58. Alunos: *“Vai só usar a fórmula.”*

Fala 59. Professora: *“Vai usar fórmula? E eu nem sei como vai ser. Acontece também de o contexto influenciar no problema. Quando nós sabemos o que acontece na realidade, nós tentamos levar isso para a resolução do problema, mas a questão não quer saber do real, só quer saber da possibilidade. Entende? Mas nós vamos voltar a discutir sobre isso.”*

O extrato acima nos mostra que o problema em questão possibilitou diferentes interpretações e para cada uma delas, uma forma de resolver o problema. Em caso como esses, o professor de Matemática precisa conhecer a variedade que existe nos problemas combinatórios (*Conhecimento Especializado de Combinatória*) para lidar com essas interpretações em sala. Em uma sala de aula, cada aluno poderá apresentar uma interpretação diferente para o mesmo problema. É trabalho do professor, conhecendo os invariantes, os significados do contexto, refletir sobre a maneira correta de entender e de representar o problema.

Nas falas 56 e 57 identificamos uma discussão sobre os desafios para o ensino de Combinatória. O aluno A7 comenta sobre a dificuldade em diferenciar os problemas e a influência das interpretações na resposta dos problemas. Esses diferentes significados, representações e invariantes dos problemas combinatórios são elementos que precisam ser discutidos na formação do professor, pois refletem diretamente nas escolhas e na ação dos mesmos. Esse *Conhecimento Especializado do Conteúdo* unido ao *Conhecimento de*

Combinatória e Aluno permite ao professor conhecer as particularidades da Combinatória e traz subsídios para a escolha de problemas que permitam a construção desse tipo de raciocínio nos alunos, além de discutir sobre as diferentes estratégias de resolução.

Nessa perspectiva, o trabalho de Pessoa e Borba (2009) aponta para a necessidade de propostas de formação inicial e continuada que abordem aspectos como os diferentes significados dos problemas combinatórios e outras possíveis representações. Apontam, também, para a necessidade de refletir sobre possibilidades de materiais didáticos, a fim de promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório, discutindo aspectos relativos aos diferentes conhecimentos que envolvem o ensino e a aprendizagem de Combinatória.

O *Conhecimento Especializado de Combinatória* aparece, nesse exemplo, articulado com o *Conhecimento de Ensino e de Alunos*, quando se refere à compreensão de como o aluno entende o problema e como se pode mediar a situação para a interpretação correta.

Outra atividade que pode ser destacada pela mobilização do *Conhecimento Especializado de Combinatória* é a elaboração de problemas a partir dos invariantes, sugerida pela formadora no dia 15 de outubro de 2015. Vejamos o extrato abaixo:

Fala 60. Professora: *“Boa noite gente. Na aula passada a gente falou sobre a elaboração de problemas combinatórios. Vocês levaram para casa uma fichinha e nessa fichinha eu pedi para vocês elaborarem dois problemas de acordo com as regras que estipulei no papel. Vocês estão tentando agora? Todo mundo já fez? Como é que tá?”*

O que eu quero é discutir com vocês essas regras, que eu acho que é interessante a gente entender qual foi a ideia que vocês tiveram a partir das regras, como vocês montaram essas questões. Vamos ver as interpretações que vocês tiveram até para eu saber como melhor inferir sobre essas regras, certo? Então, se eu fizesse uma pergunta assim, só para recapitular a aula passada: quais foram as regras que vocês tentaram entender e que a gente representou na aula passada? ”

Nas aulas anteriores as atividades escolhidas pela professora buscavam apresentar diferentes problemas combinatórios e levar os estudantes a utilizarem estratégias diferenciadas para resolverem questões que eram passíveis de serem solucionados de maneira intuitiva, com raciocínio, sem a necessidade do uso de fórmulas. O diferencial dos problemas escolhidos é que todos apresentavam uma ou mais condições para serem resolvidos, o que às vezes exige do participante que ele realmente compreenda o enunciado, mobilize outros conceitos e propriedades, e não apenas que saiba aplicar uma fórmula que pode, ou não, ter algum significado para ele.

Ao se trabalhar dessa forma, a professora levou a uma reflexão sobre como elaborar problemas, nos momentos em que ela questionou os estudantes sobre como ensinar, como explicar determinadas questões. Essa atividade buscou mobilizar o *Conhecimento Especializado de Combinatória*, quando a professora pediu para que eles elaborem problemas de acordo com os invariantes, mas também mobilizou o *Conhecimento de Combinatória e Ensino*, visto que, ao elaborar um problema o professor em formação já pensa em como ele poderá ser resolvido, quais serão as diferentes interpretações dos alunos, como construir essa atividade para que ela seja bem interpretada, etc.

Abaixo encontra-se mais um extrato dessa aula.

Fala 61. Aluno A1: *“Conseguimos fazer com ordenação e repetição.”*

Fala 62. Professora: *“Me empresta então o teu exemplo para gente começar? Pode ser? Então vamos lá. Na folha do aluno A1 eu coloquei assim, crie um problema combinatório em que a ordem gere novas possibilidades. Com essa regra a gente vai tá tratando justamente de ordenação. Quando uma ordem gera possibilidade? Que tipo de problema seria esse? Vamos ler o problema do colega:*

‘Uma prova possui seis questões, o aluno deve resolver apenas três questões, de quantas maneiras ele poderá resolver as questões?’

Esse é um problema combinatório em que a ordem gera novas possibilidades? O que significa a ordem gerar novas possibilidades?’

Fala 63. Aluno A2: *“É você poder escolher aleatoriamente, sem uma ordem cronológica.”*

Fala 64. Professora: *“Deixa eu ver se o que eu tô pensando é o mesmo que você tá me dizendo. O que você está falando está correto, agora a ideia, por exemplo, de você ter que escolher três questões de seis, então você pode escolher a primeira, a segunda e a terceira. Ou você pode escolher a terceira, a segunda e a primeira. Isso é diferente?’*

Fala 65. Aluno A2: *“Não, é a mesma coisa.”*

Fala 66. Professora: *“Então essa ordem não gera novas possibilidades. Independente da ordem é a mesma escolha. A ordem não gera novas possibilidades. Como essa questão poderia ser modificada para que a ordem gere novas possibilidades? Vamos ver o outro exemplo aqui que a mesma colega fez:*

‘Uma prova tem seis questões. O aluno deve escolher um para responder em casa, outra responder na turma e mais uma para responder na prova. De quantas maneiras ele poderá escolher as questões?’

Então veja só, se eu escolho a primeira para responder em casa, a segunda para a turma e a terceira na prova é diferente de eu escolher a primeira para responder na prova, a segunda para a turma e a terceira para responder em casa. Porque nesse caso a ordem também determina o local em que está sendo realizada a questão. Então, um, dois e três é diferente de três, dois, um. Possibilidades diferentes. Ótimo. ”

Fala 67. Aluno A3: *“Professora, veja o meu. Eu tive dificuldade. ”*

Fala 68. Professora: *“Vamos ver. O segundo quesito dela aqui foi: elaborar um problema em que haja escolha de grupos não ordenados. Então, um exemplo seria: dado essas questões (refere-se as questões produzidas para a ficha), eu vou escolher duas para colocar na prova. Então eu estou escolhendo um grupo. Escolher essas duas questões é uma questão com ordenação ou sem ordenação? (deixa os alunos responderem) Não ordenado, porque, independente de eu escolher a primeira e a terceira ou a terceira e a primeira, vai ser a mesma dupla de questões que eu vou escolher. Você também se aperreou para elaborar sua questão? (dirigindo-se a outro aluno). Posso dar uma lida (aluno permite a leitura em sala).*

‘Elabore um problema combinatório em que haja escolha de grupos ordenados. (Lê o exercício) Posso ler a questão? Diz assim na questão que ele elaborou: Em um sorteio de uma casa, um carro e um kit de livros de Combinatória, sem reposição, sendo três participantes Maria, Pedro e João. De quantas maneiras podemos ter o ganhador da casa, do carro e do kit de livros?’

O pedido é que haja escolha de grupos ordenados, não é isso? Como aqui nós temos três prêmios e três pessoas, a gente tá escolhendo um grupo total. É diferente da questão anterior que eu escolheria três questões no meio de seis, entende? Aqui se trata de grupo ordenado. Nós temos Pedro, Maria e João; se Pedro ganhar a casa, Maria ganhar o carro e João ganhar o kit de livros é diferente de Pedro ganhar um carro, Maria ganhar um kit de livros e João ganhar uma casa. Isso tá gerando nova possibilidade? A nova ordem? ” (Alunos respondem que sim). Então, você fez a elaboração corretamente. A gente precisa entender o seguinte: em um grupo ordenado existem dois tipos de problemas: o arranjo e a permutação. A permutação acontece quando a gente organiza todos os elementos, foi o que você fez, ordenou todos os elementos. Quando dentro de um grupo escolhemos uma quantidade menor, ou seja, se por exemplo tivessem dois prêmios para três pessoas você teria um arranjo. Entendeu? Mas está certo a sua questão, viu?’

Fala 69. Aluno A3: *“Então uma coisa é eu ordenar os elementos de um grupo e outra é dentro de um grupo eu escolher um grupo menor e ordenar. É isso que diferencia?”* (Os alunos da sala concordam).

Fala 70. Professora: *“Entenderam não foi? Vamos ver uma questão que exija a proximidade de elementos, quem fez uma dessas? Quem lembra o que é essa exigência de proximidade, significa o que?”*

Fala 71. Aluno A4: *“Num grupo de quatro pessoas, a gente tem que organizar eles, mas eu e a senhora temos que ficar juntos.”*

Fala 72. Professora: *“Isso.”*

[...]

Fala 73. Professora: *“Gente, o que vocês acharam dessa atividade? De elaborar os problemas, de vários tipos, pensando nos invariantes.”*

Fala 74. Aluno A5: *“Foi muito bom professora, eu nunca tinha parado para elaborar problemas de Combinatória. Não é fácil.”*

Fala 75. Aluno A6: *“É como a senhora falou para gente na semana passada, se a gente não conhecer os vários tipos de problemas, vai ficar difícil de ir para sala de aula, não é? E a gente vai acabar só fazendo fórmula. Nem eu entendo e muito menos o meu aluno.”*

Fala 76. Professora: *“Perfeito. Na próxima aula eu vou trabalhar com as diferentes estratégias de resolução de problemas combinatórios ok?. Esses problemas que vocês elaboraram vão ser nossos problemas de base.”*

Em entrevista, perguntamos à professora qual a importância da discussão dos conhecimentos docentes na disciplina investigada e tivemos a seguinte resposta: *“Uma coisa que o professor formado vai levar para o resto da vida são as experiências que ele passa. Por exemplo, grande parte das técnicas de contagem, por exemplo, eu aprendi na disciplina de Princípio Fundamental da Contagem, lá no primeiro período do curso de Matemática, em 98. E muitas outras eu tive que aprender para ensinar Combinatória, porque uma coisa que eu aprendi é que não basta mostrar a técnica; a gente apresenta a técnica, o aluno anota, mas aí ele não vai ter condições de apenas repetir essa técnica, ele vai precisar esperar um problema que seja igual, idêntico, para poder usar a técnica. Veja que (pausa) não senso, né? Veja que dificuldade será essa”. Isso quer dizer que, se na experiência da formação inicial o professor não passa por situações de elaboração de questões, resolução de questões, análise de estratégias,*

como ele poderá realizar isso em sua prática? Ao elaborar problemas, analisa-se cuidadosamente as possibilidades variadas de solução e representação de cada problema de forma a criar situações que levem à construção de um raciocínio. A condução da professora em sala, quando ela pergunta, quando levanta uma discussão é mostrar que problemas combinatórios não são engessados em sua forma de resolver e que as fórmulas são apenas um mecanismo a ser usado nas aulas de Matemática. É preciso ressaltar que esse tipo de conhecimento é muito importante de ser desenvolvido, em atividades práticas, na formação do professor.

Ainda na discussão sobre a importância dos conhecimentos docentes na disciplina investigada a professora comenta que *“Quando eu me deparei com minha discussão, na dissertação, eu vi que o problema era exatamente esse, a gente tinha o conhecimento do conteúdo, quando eu saio da graduação, quando o professor sai, ele tem o conhecimento do conteúdo, mas não tem e não tem como arrumar o conhecimento para ensinar”*. E continuou afirmando que a atividade em questão tinha por objetivo levar à reflexão específica sobre o ensino, ou seja, quais são os tipos de problemas e quais são as particularidades de um problema combinatório.

5.2.3. Conhecimento do Horizonte de Combinatória

Em entrevista, à formadora foi questionada sobre qual atividade realizada poderia ter discutido o *Conhecimento do Horizonte de Combinatória* e sua resposta foi:

“Não tenho muita noção do que eu consegui trabalhar na disciplina toda. Eu penso que consegui trabalhar o conhecimento de conteúdo e ensino, com algumas atividades e com os debates e penso que também o conhecimento do conteúdo em si, o conhecimento comum e o especializado, principalmente na diferenciação e no reconhecimento dos diferentes tipos de problemas combinatórios. O conhecimento de conteúdo e aluno também, sobre as dificuldades dos estudantes eu acho que foi discutido. Eu não sei se consegui dar conta dos demais, porque, é difícil você gerir o tempo da aula, do curso, a gente precisou voltar a discutir sobre o conteúdo várias vezes. Precisei rever o planejamento. Eu acho que eu deixei de fazer alguma discussão, por exemplo, sobre o horizonte dos conteúdos e sobre o currículo, porque percebi que os alunos precisam de outros aspectos, até mesmo em relação ao conteúdo como eu falei, os alunos diziam que tinham bastante dificuldade e aí eu fui saindo um pouco do que a gente tinha planejado inicialmente. Isso aconteceu. ”

Entretanto, consideramos que na atividade de elaboração de questões para aplicar com alunos da Educação Básica, ainda que não tenha sido o objetivo central, essa discussão acabou acontecendo. Quando a professora sugeriu que os professores em formação pensassem sobre questões que pudessem ser aplicadas na Educação Básica, ela abriu caminhos para essa reflexão sobre a continuidade, do ensino de Combinatória.

Os estudantes tinham que refletir sobre: em que ano escolar devemos aplicar o questionário? Nesse ano escolar a Combinatória já é vista formalmente? Que parte da Combinatória é vista nesse ano escolar? O que é essencial de Combinatória para o Ensino Fundamental e o que é para o Ensino Médio?

Em entrevista, falando sobre essa elaboração do questionário para alunos da Educação Básica, a professora afirmou que: “[...] *nessa elaboração a gente precisava saber de algumas coisas, por exemplo, que tipo de dificuldade os alunos que vão responder podem ter e em que tipo de sala eu vou aplicar? E eles precisavam chegar a um acordo, que era, em que nível escolar, em que série, vamos aplicar. Veja o trabalho que eles teriam, eles tinham que pensar nas questões, pensar nas dificuldades, às vezes precisavam adequar as questões para aquela série. Então, todo esse trabalho é ensinar. Eles estão pensando no ensino, em que nível de ensino. Eles tinham que pensar também nos alunos, tem o conhecimento do aluno e, ainda, eles tinham que pensar a Combinatória no currículo, que questões eu vou escolher para ser de Fundamental I ou II, ou Ensino Médio. (pausa) Na verdade, aqui poderia dizer, então, que tem um pouco do Conhecimento do Horizonte do Conteúdo.* ”

Como defendem Ball e seus colaboradores (2008), os *Conhecimentos Docentes* estão articulados de tal maneira, que, por vezes, é difícil distinguir e classificá-los em uma situação de sala de aula. Assim, mesmo que, inicialmente, a professora não tenha reconhecido, considera-se que a atividade de elaboração do questionário mobilizou o *Conhecimento do Horizonte de Combinatória*, ao mesmo tempo em que não deixou-se de pensar no ensino e no aluno, ou seja no *Conhecimento de Combinatória e Ensino* e *Conhecimento de Combinatória e Aluno*. O conhecimento sobre o aluno e o conhecimento sobre o ensino estavam presentes nas escolhas dos anos escolares nos quais o questionário seria aplicado, levando em conta as experiências já vivenciadas e as ainda a serem vivenciadas pelos alunos.

Embora presente na disciplina eletiva em pauta, o *Conhecimento do Horizonte de Combinatória* poderia ter sido ainda mais explorado. A docente reconheceu, entretanto, que foram necessárias adaptações ao planejamento original e esse conhecimento não pode ser explorado como ela originalmente havia planejado.

5.2.4. Conhecimento de Combinatória e Aluno

O *Conhecimento de Combinatória e Aluno* foi o mais presente em todas as atividades, assim como o conhecimento sobre o ensino. Para exemplificar, colocaremos aqui alguns exemplos de como esse conhecimento foi evidenciado na mediação em sala, nas atividades escolhidas e nos argumentos da formadora.

Esse conhecimento combina o conhecimento sobre os alunos e o conhecimento do conteúdo e, de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), de posse desse conhecimento, os professores devem ser capazes de antecipar o que é possível que os alunos pensem sobre o que está sendo ensinado e o que eles acharão confuso; de prever o que os alunos acharão interessante ou motivador ao propor exemplos, assim como antecipar o que eles serão capazes de fazer com facilidade ou com dificuldade ao propor uma atividade.

Para um contato inicial com os estudantes e poder conhecer o que eles já sabiam sobre Combinatória e levantar quais eram suas experiências e dificuldades, a professora elaborou um questionário para o primeiro dia de aula. O Quadro 5 apresenta algumas questões utilizadas e as respectivas respostas dos estudantes.

Consideramos importante ressaltar que o objetivo principal da presente dissertação não foi analisar diretamente o que os estudantes responderam, quais eram as suas experiências e suas dificuldades. O objetivo era observar como, a partir dessas respostas, a professora formadora planejou e organizou as atividades para a disciplina – levando em consideração os distintos conhecimentos necessários à formação dos estudantes enquanto futuros professores de Matemática, em particular no ensino da Combinatória.

As respostas dos estudantes ao questionário mostraram que as experiências desses com a Combinatória foram poucas, tanto na escola quanto na universidade. Em consequência disso, eles poderiam apresentar dificuldades para distinguir os diversos tipos de problemas ou para entender o contexto da situação combinatória.

Quadro 5 - Algumas respostas apresentadas pelos estudantes – FICHA 1: primeiros contatos.

Pergunta	Resposta (s)
Para você o que é Combinatória?	<p><i>“É a possibilidade de acontecer algum evento”.</i></p> <p><i>“Não consigo definir devido ao contato que tive com a disciplina”.</i></p> <p><i>“O estudo das possibilidades”.</i></p>

	<p><i>“Área da Matemática que usa arranjo, permutação, combinação, etc”.</i></p> <p><i>“Combinação de elementos”.</i></p>
<p>Que dificuldades você possui com a Combinatória? Comente.</p>	<p><i>“É saber o que usar e quando usar”.</i></p> <p><i>“Não tenho muita segurança, então as dificuldades são muitas”.</i></p> <p><i>“Identificar o tipo de problema e como é para resolver”.</i></p> <p><i>“Entender o problema”.</i></p> <p><i>“Só vi o assunto na faculdade e não entendi”.</i></p>
<p>Qual sua experiência com a Combinatória na escola? Comente.</p>	<p><i>“Não me lembro”.</i></p> <p><i>“Muito superficial. Eram muitos assuntos e então passou muito rápido”.</i></p> <p><i>“Eram dadas as fórmulas e nós resolvíamos as questões”.</i></p> <p><i>“Através das fórmulas, ainda não sei quando usar”.</i></p> <p><i>“Não estudei na escola”.</i></p>
<p>Qual a sua experiência com a Combinatória na universidade? Comente</p>	<p><i>“Foi na disciplina de Estatística”.</i></p> <p><i>“Foi pouca, apenas em Estatística e em Matemática 3¹⁹, com pouca ênfase”.</i></p> <p><i>“Experiência boa, mas muito rápida”.</i></p> <p><i>“Como resolução de problemas em Matemática 3”.</i></p> <p><i>“Ainda não tive contato”</i></p>
<p>Você já teve que lecionar alguma aula dessa disciplina? Comente</p>	<p><i>“Não, nunca tive que lecionar”.</i></p> <p><i>“Sim, foi no Ensino Fundamental, tive que estudar para ensinar e preparar as aulas”.</i></p>
<p>Que expectativas você possui com relação a essa disciplina?</p>	<p><i>“Poder aprender o conceito e não só as formulas”.</i></p> <p><i>“Entender a importância da Combinatória. Sabe? Compreender melhor para que cada uma das fórmulas”.</i></p> <p><i>“Ver problemas contextualizados, para entender na prática a Combinatória e me preparar para ensinar ela”.</i></p>

Quando foram levados a falarem de suas dificuldades, os alunos relataram que não sabiam diferenciar os problemas e que não conseguiam identificar os contextos adequados para o uso das fórmulas. Essas dificuldades apontam para uma ausência do *Conhecimento Comum e Conhecimento Especializado do Conteúdo*. As respostas apontam, ainda, que na formação inicial o contato com o conteúdo de Combinatória foi visto de forma breve, como parte da matriz curricular de outras disciplinas, a saber: Matemática 3 e Estatística.

Em suas respostas, os estudantes falaram também das suas expectativas de aprendizagem em relação à disciplina investigada. A partir desse primeiro contato com a turma,

¹⁹ Componente Curricular encontrado no 4º período do Curso de Licenciatura em Matemática do CAA/UFPE. Este componente apresenta em seu quadro curricular os conteúdos de Geometria e Combinatória.

a professora elaborou atividades diferenciadas para as próximas aulas da disciplina, utilizando diversos tipos de problemas e contextualizações.

Na forma como a professora lidou com as respostas apresentadas é que se evidencia o *Conhecimento de Combinatória e Aluno*. Em suas respostas, os estudantes informaram a professora que sentem dificuldades, que não tiveram boas experiências com o conteúdo, que precisam de ajuda, inclusive, para entender o que é a Combinatória. Perceber esses elementos em sala de aula foi fundamental para todas as propostas que seguiram. Afinal, como define Ball e seus colaboradores (2008), é trabalho do professor propor atividades motivadoras e pertinentes, escutar e interpretar o pensamento dos alunos, ajudando-os em sua formação.

Corroborando com a afirmação acima, encontra-se na aula do dia 03 de setembro, primeiro momento videogravado, a seguinte fala da professora:

Fala 77. Professora: *“Começamos na semana passada conversando um pouquinho, fizemos o nosso contrato e uma coisa que vocês me levaram a perceber naquela nossa primeira ficha²⁰ é que a gente precisa discutir mesmo Combinatória, me referindo ao conteúdo, diferentes problemas, como resolver. Então, a partir disso eu fui enveredar por alguns caminhos, e criei uma ficha com base em alguns documentos. Meu objetivo é discutir as resoluções, ajudar em algumas dúvidas, vamos juntos entender os problemas, ok?”*.

Outra atividade que mobilizou o *Conhecimento de Combinatória e Aluno* foi a análise de erros dos estudantes. Para isso, foi proposto que os licenciandos buscassem interpretar erros de alunos da Educação Básica. É tarefa central do trabalho do professor reconhecer as interpretações equivocadas dos alunos sobre conteúdos matemáticos específicos. Para os teóricos, “o conhecimento dos alunos e do conteúdo é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática ou um procedimento específico e a familiaridade com o que os alunos normalmente pensam ou fazem” (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401).

No extrato a seguir, vê-se que a professora distribuiu para cada aluno uma ficha com uma situação em sala de aula (Figura 4), na qual alguns alunos tentaram resolver um problema combinatório e erraram. O trabalho dos professores em formação era compreender o erro dos alunos e discutir como proceder diante desses erros.

²⁰ Questionário utilizado na primeira aula para conhecer os estudantes.

Figura 4 - Ficha de análise de problemas combinatórios: CASO 2.

Caso 2:

O professor começa a escrever no quadro a seguinte atividade:

Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório, só estão vazias sete cadeiras. De quantas maneiras diferentes eles podem ocupar essas cadeiras?

Vários alunos começam a tentar resolver e várias soluções diferentes aparecem. O professor anota todas no quadro

Tayani: São 3^7

Felipe: - Professor, são $7 \times 7 \times 7$ maneiras

Pablo: Eu acho que são $3 \times 7 \times 3 \times 6 \times 3 \times 5$

Daniel: são $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5$

Poliana: São $7 \times 6 \times 5$

1. Qual aluno está correto? Por quê?
2. Que pensamentos estão por trás das diferentes respostas apresentadas? Justifique?
3. Se fossemos o professor de Daniel e Pablo como poderíamos fazer para que eles compreendessem o que está por trás desse argumento, para chegar ao próximo nível?

Fonte: “FICHA: Análise de Casos”.

Fala 78. Professora: *“Qual aluno está correto? Por que?”*

Fala 79. Aluno A3: *“Se são três alunos para sete lugares, então nós temos para primeira pessoa sete opções, para segunda seis opções e para a terceira, cinco opções. Né? Porque numa palestra ninguém senta no colo um do outro”* (risos)

Fala 80. Aluno A7: *“Seria um arranjo então. Porque a ordem vai importar e a gente tem sete lugares para escolher três.”*

Fala 81. Professora: *“Perfeito. Então vamos discutir o porquê dos outros estarem errados. Vou dar um tempo para vocês pensarem.”*

Fala 82. Aluno A3: *“Essa Tayani eu não consigo nem explicar. Ela pensou que cada aluno teria sete opções e que as opções estavam dependentes? Sei não. Essa viajou viu.”*

Fala 83. Professora: *“Ela viajou foi? (risos) E o Felipe? Por que ele está errado?”*

Fala 84. Aluno A3: *“Esse sim considerou que todo mundo tem sete opções. Ele deve ter pensando: para o primeiro aluno, sete, para o segundo sete e para o terceiro sete cadeiras também, aí multiplica tudo. Ele usou um conceito, mas tá errado, tá no problema errado.”*

Fala 85. Professora: *“E os outros? O Pablo e o Daniel, nada? Vamos pensar na resposta do Pablo. Ele coloca $3 \times 7 \times 3 \times 6 \times 3 \times 5$. Imagine o seguinte, quando ele diz 3×7 é como se cada*

um dos três alunos tivesse sete opções, pode ser isso? Quando ele diz 3×6 , o que ele pode ter pensado?

Fala 86. Aluno A3: *“Os alunos levantaram de novo e agora tiraram uma cadeira da plateia. (risos) É gente, vê 3×7 , cada um tem sete cadeira. Depois todo mundo levante e tira uma cadeira, 3×6 e de novo 3×5 . Dança das cadeiras. ”*

Fala 87. Professora: *“O aluno pode ter pensado assim? Pode né? Tá bem estranho, mas é possível. E para Daniel? Alguém? Vejamos, o Daniel ele identifica que na primeira escolha são sete cadeiras disponíveis, depois seis cadeiras e por fim cinco. Mas ele multiplica a quantidade de pessoas pela quantidade de cadeiras. Não é isso?”*

O professor diante de sua tarefa, da sua responsabilidade pela aprendizagem de alunos do conteúdo, precisa estar preparado para lidar com situações como essa do Caso 2, na qual as respostas, muitas vezes, parecem sem explicação. A articulação necessária entre os conhecimentos docentes, de conteúdo e pedagógicos, precisam acontecer para que se entenda o contexto real da sala de aula. A formadora levou os estudantes a refletirem sobre o Conhecimento de Combinatória, tanto ao discutirem os seus próprios conhecimentos, quanto ao pensarem sobre os possíveis erros de alunos da Educação Básica.

5.2.5. Conhecimento de Combinatória e Ensino

A compreensão das concepções prévias ou equivocadas dos alunos exige do professor diferentes estratégias de ensino que possibilitem ao aluno superá-las. Percebeu-se, durante as observações em sala de aula, que a utilização das listas de atividades teve como objetivos principais ajudar a desconstruir as concepções prévias, o mal uso das fórmulas combinatórias e levar os alunos a construir um raciocínio combinatório correto, bem como prepará-los para o posterior ensino de Combinatória em suas práticas.

Vê-se, a seguir, um extrato de aula que ilustra essa mobilização do *Conhecimento de Combinatória e Ensino*.

Fala 88. Professora: *“Quem pode ler a questão do livro chinês para gente começar a discutir? Vamos seguir como na semana passada tá gente? Eu não quero dizer a resposta, eu quero debater com vocês para entender o problema. Quem começa? ”*

Nesse momento um aluno lê o seguinte problema:

Figura 5 - Questão de Combinatória sobre o livro chinês.

No livro chinês **I Ching** (Book of Changes, aproximadamente do século 7 a.C.) existe um sistema baseado em dois símbolos, o Yang ($_$) e o Yin ($_ _$). Nele são necessários combinar esses símbolos em “trigrams” (Colunas de três símbolos) e “Hexagrams” (colunas de seis símbolos). Por exemplo, na figura abaixo temos um trigram que simboliza Terra.

坤 Kūn
Earth





Fonte: Ficha de aula “Combinatória por meio de problemas históricos”, nº 1.

Fala 89. Professora: “*Bom gente, esse problema data do século sete antes de Cristo, não é isso? E fala sobre um sistema de escrita baseado em símbolos. Nessa imagem, que não dá para ver direito, mas depois eu amplio para vocês na transparência, mostra um exemplo desse sistema, isso é em chinês mesmo. Vocês entenderam o que são os trigrams e hexagrams?*”

Fala 90. Aluno A1: “*Eu entendi professora, mas não sei se pode repetir símbolos. A questão não diz.*”

Fala 91. Professora: “*Pergunta interessante. Vocês acham que pode repetir os símbolos?*” (os alunos discutem)

Fala 92. Aluno A2: “*O sistema é baseado em dois símbolos e eu preciso de três para formar uma coluna no trigram, então...*” (risos)

Fala 93. Professora: “*Mas é bom discutir sobre essas questões, porque em problemas de Combinatória sempre aparecem questões desse tipo. Tudo bem, sobre repetição. Essa é uma questão que sempre vai aparecer. A gente sempre vai ficar se perguntando se pode, ou não, repetir. Então, vou dar um exemplo de trigram aqui no quadro. (Desenha). Esse é um trigram formado pela repetição do símbolo Yang, não é isso? A partir daqui vem a nossa pergunta: quantos seriam e de que forma seriam os outros trigrams?*” (Segue-se um longo momento de discussão entre os alunos).

Fala 94. Professora: “*As respostas que surgiram foram oito e seis. Seis não? Ok. Teve mais alguma diferente de oito? Quem pode vir aqui no quadro explicar o porquê da resposta oito?*”

Fala 95. Aluno A2: “*Eu posso ir professora, mas eu posso usar desenhos?*”

Fala 96. Professora: “*Claro, pode usar os desenhos.*”

Fala 97. Aluno A2: *“Eu vou fazendo as combinações. Tipo, dois desse e um desse (refere-se aos símbolos Yin e Yang e lista todas as possibilidades no quadro). Aí um desse, um no meio diferente e volta o outro. Fica: 1) três Yin; 2) três Yang; pode ser também 3) Yin e dois Yang; 4) Yang e dois Yin; 5) Yang, Yin e Yang; 6) Yin, Yang e Yin; 7) Yang, Yang e Yin e por fim tem o 8) Yin, Yin e Yang.”*

Fala 98. Professora: *“Eu achei interessante o que a aluna A2 fez, não sei se vocês perceberam. Ela utilizou uma sequência lógica para organizar as sequências dessa forma. Ela colocou os trigramas que tem os três símbolos iguais e seguiu tirando e colocando outros até formar novos códigos. Todos fizeram utilizando uma lógica assim?”*

Fala 99. Aluno A3: *“Professora, a gente foi fazer os tracinhos como tá ai no quadro e atrapalhou tudo e por isso que dava 6. Então a gente fez pela regra. (risos)”*

Fala 100. Professora: *“Como foi que você pensou, vamos ver?”*

Fala 101. Aluno A3: *“Se é uma coluna, eu enumerei como a primeira, a segunda e a terceira (refere-se às linhas dessa coluna). Ai pensei que para a primeira entrada eu tenho duas possibilidades, para a segunda também e para a terceira também. O produto disso dá oito”.*

Fala 102. Professora: *“Dava oito. Mas a gente também podia pensar que a soma disso dava seis, não pode?”*

Fala 103. Aluno A3: *“Foi isso. Por isso que dava seis. Já quando eu tentei fazer aqui com as meninas fazer com tracinhos a gente não conseguia fazer dois deles.”*

Fala 104. Professora: *“Uma coisa interessante para gente pensar é que existem etapas para gente fazer as enumerações. Acho que é interessante a gente discutir sobre isso. Um aluno nosso, do Fundamental ou até do Ensino Médio, pode acontecer dele esquecer ou não conseguir listar todas as possibilidades, não pode? E se a quantidade for maior? Uma das etapas para a enumeração é a organização e aí nosso colega fez uma de forma, organizou de uma forma, eu poderia fazer diferente, mas o importante é seguir um raciocínio lógico, para não se perder. Isso é uma coisa que a gente vai aprendendo com o tempo. É bom a gente tá percebendo essas coisas, esses detalhes.*

E como podemos fazer para o quadrigam?” (Segue discussão).

Fala 105. Professora: [...] *“Então para o quadrigam já não fica fácil de listar. Se eu aumentar essa coluna então?”*

Fala 106. Alunos: *“Quanto maior o resultado vai ficando ruim para desenhar”.*

Fala 107. Aluno A4: *“Precisa de fórmula, entender essa regrinha aí do quadro. Então, sempre vai ser assim com a potência no dois. É uma fórmula de Combinação?”*

Fala 108. Professora: *“A gente já começa a pensar aqui nas formulas. Já podemos generalizar? Vocês acham que esse tipo de problema, ele se parece com algum tipo de problema Combinatório que vocês já viram?”*

Fala 109. Aluno A4: *“Usa exponencial.”*

Fala 110. Professora: *“Usa o conceito de potência, não é isso? O que mais vocês podem me dizer?”*

Fala 111. Aluno A5: *“Princípio Multiplicativo”*

Fala 112. Professora: *“Certo, o que mais? (Os alunos vão falando e a professora anota no quadro). Alguém falou permutação, potência, o que mais? Não é que está certo ou errado, só quero saber o que vocês conseguem associar. Vamos pensar sobre o problema, sete séculos antes de Cristo, as pessoas começaram a ter uma noção de contar; contar enumerando e também através de algumas regras. Ao passo que o problema de contagem vai ficando mais difícil, porque os valores são maiores, mais difícil de listar se percebe a necessidade das regras, das fórmulas. Então, meu primeiro exemplo para vocês foi possível de listar e, a partir dele, conseguimos identificar uma regra para qualquer problema desse tipo. Concordam?”*

Um dos elementos importantes na aprendizagem de Combinatória é a caracterização dos problemas. De acordo com Pessoa e Borba (2013), os problemas combinatórios são caracterizados por numeração direta ou indireta de possibilidades e possuem duas relações básicas: escolha e ordenação de elementos. Estas relações dizem respeito ao modo como os elementos que constituem as distintas possibilidades são escolhidos e se a ordem de disposição formará ou não, novas possibilidades.

Analisando o material preparado pela professora para as aulas na disciplina investigada, percebe-se que as fichas históricas abordaram variados tipos de problemas, com características de escolha e de ordem. A forma como as questões foram abordadas levaram os estudantes a refletirem sobre essas características e compreenderem os diferentes tipos de problemas. Esse planejamento destaca a presença dos conhecimentos mencionados anteriormente: *Conhecimento de Conteúdo e Ensino, Conhecimento do Conteúdo e Aluno e Conhecimento Especializado do Conteúdo*, no momento em que é preciso pensar sobre o ensino e sobre as necessidades dos alunos.

Na discussão dessa questão, percebe-se que os alunos já começaram a resolver pensando nas características do problema. Evidencia-se essa afirmação a partir do momento que o estudante questionou sobre se há repetição na questão. A professora chamou a atenção para a organização no momento de uma listagem e questionou o estudante em formação sobre como ajudaria o aluno da Educação Básica com a organização da listagem para que não haja erro ou esquecimento. O *Conhecimento de Combinatória e Ensino* está presente nas falas da professora: como ensinar ao meu aluno? Como ajudar para que não haja erro na sua listagem? Qual a importância de usar a listagem?

Assim como nas atividades da aula do dia 03 de setembro, os alunos foram incentivados a pensarem em diferentes estratégias de resolução e a utilizarem a fórmula somente ao final do processo. Mesmo quando o estudante apresentou a resposta utilizando uma fórmula, a professora levou à justificativa daquela regra, incentivando o aluno a pensar em diferentes formas de resolver o problema. Essa aprendizagem conceitual anterior à aplicação de regras formalizadas é extremamente benéfica para a aprendizagem de Matemática, em particular no aprendizado da Combinatória – a qual exige a compreensão de cada situação combinatória específica.

Segunda a professora *“uma das coisas que eu queria discutir com eles eram assim, se o seu aluno respondeu desse jeito, como é que você vai ajudar? Como a gente deve proceder? A constante dúvida, eu coloco um problema no quadro, o aluno responde errado e agora? Eu digo a resposta correta e só? Eu tenho que saber o que o aluno estava pensando. E mesmo que eu não pergunte ao meu aluno, quando eu tenho esse conhecimento de conteúdo e ensino e o conhecimento de conteúdo e aluno, no momento em que eu percebo que a resposta está errada eu já consigo antecipar também qual pode ter sido o raciocínio do estudante, e aí eu vou agir. Isso é importante. O erro do aluno tem que me ajudar a proceder”*.

O *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino* combina o conhecimento sobre ensinar e o conhecimento sobre a Matemática. Para ensinar um conteúdo específico, os professores utilizam sequências de ensino, escolhem quais devem ser os exemplos, avaliam vantagens e desvantagens na utilização de determinadas representações e analisam as contribuições de diferentes estratégias para a aprendizagem. Cada uma dessas tarefas requer que o professor compreenda a Matemática dos conceitos específicos envolvidos e as estratégias pedagógicas para o ensino desses conceitos. Essas duas compreensões influenciam o ensino, a forma como o professor vai planejar e a aprendizagem pelos alunos.

De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), em todas as decisões do professor precisa haver uma integração entre a Matemática que está sendo apresentada e os objetivos de ensino. Dessa forma, a discussão sobre o ensino de conteúdos específicos não pode deixar de acontecer na formação inicial de professores.

Nesse sentido, a atividade do dia 12 de novembro de 2015 baseava-se em três perguntas importantes para a ação do professor: que tipo de problema? Por que o aluno respondeu assim? Como mediar a aprendizagem a partir dos erros? Questionamentos como esses são importantes na formação de professores e outros como: quais problemas são e quais devem ser trabalhados com os alunos? Como os alunos podem responder e quais as suas possíveis compreensões ao apresentarem certas respostas? E também, o mais importante: Como eu, professor, diante dos diferentes tipos de situações, posso mediar a aprendizagem de meus alunos, tendo consciência de suas dificuldades específicas?

Nessa disciplina, os estudantes passaram por momentos de resolução de questões, análise de questões e, também, elaboração de questões. Essa última atividade teve como foco analisar duas situações de sala de aula, em que, o estudante ao responder um problema que envolve Combinatória, erra.

As estratégias adotadas diante do erro podem levar o aluno à construção do conhecimento ou podem somente apresentar o correto, sem buscar entender o processo. Toda resposta a um problema de Combinatória é acompanhada de um raciocínio, que pode estar correto, ou não. É importante, portanto, que o professor busque identificar as estratégias utilizadas pelos seus alunos para auxiliá-los na construção de conceitualizações corretas e para poderem superar dificuldades.

O conhecimento envolvido nesse processo é, principalmente, o *Conhecimento de Conteúdo e Ensino*, quando a professora propiciou momentos de reflexão aos futuros professores quanto a estratégias de ensino, e o *Conhecimento de Conteúdo e Aluno*, quando a professora estimulou que os licenciandos antecipassem as dificuldades de alunos do Ensino Básico na resolução de questões. A combinação desses conhecimentos permite que o professor antecipe a análise da resolução e pense em uma intervenção adequada para cada momento.

O extrato abaixo apresenta um caso que foi apresentado aos estudantes de graduação, no qual eles deveriam analisar os erros dos alunos e propor uma intervenção para ajudar o aluno que errou. Esta atividade foi dividida em duas partes e a formadora discutiu elementos do *Conhecimento de Combinatória e Ensino*, *Conhecimento de Combinatória e Aluno* e também do *Conhecimento Especializado*.

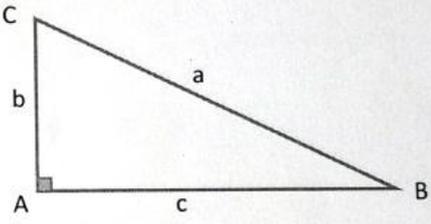
Fala 113. Professora: “*Gente, eu trouxe uma ficha para gente estudar aqui (pausa). É sobre análise de dois casos. Vamos entender o que se trata. Quem pode ler para mim o Caso 1?*”

Figura 6 - Questão de Combinatória sobre o livro chinês.

FICHA 3: Análise de Casos

Caso 1:

Em uma aula de 3º ano do Ensino Médio, durante a discussão sobre relações trigonométricas na sala de aula a Professora Rute propõe a seguinte situação:



Dado um triângulo retângulo ABC com medidas descritas na figura abaixo. Quantas divisões podemos fazer entre as medidas de dois dos lados?

1. Que tipo de problema é esse? Por quê?
2. Depois de escrever no quadro esse problema um aluno, Thiago, logo responde: - Professora, a resposta é 9. O que podemos dizer sobre essa resposta?
3. Que justificativas, discussões, encaminhamentos poderíamos fazer a Thiago, se fossemos esse professor? Como poderíamos prosseguir a aula dele?

Fonte: Ficha de aula “FICHA: Análise de Casos”.

Fala 114. Professora: “*Que tipo de problema é esse e por que? Vamos lá.*”

Fala 115. Aluno A1: “*Eu não entendi a pergunta que eu li.*”

Fala 116. Professora: “*O que tu não entendeu?*”

Fala 117. Aluno A1: “*Ele fala de medidas do triângulo.*”

Fala 118. Professora: “*Isso. Ele tá se referindo a essas medidas entre os vértices A e C nós temos a medida b, temos a medida a e c, representados pelas letras minúsculas, não é isso? Ele quer saber quantas divisões nós podemos fazer entre as medidas de dois dos lados.*”

Fala 119. Aluno A1: “*Então a gente pode fazer a por b, a por c, depois pode ser c por a, c por b, depois a por b e b por a.*”

Fala 120. Professora: “*Só esses?*”

Fala 121. Aluno A2: “*São nove divisões professora.*”

Fala 122. Aluno A3: “*Eu acho que são seis só.*”

Fala 123. Professora: *“Me digam aí quais são as divisões para eu colocar aqui no quadro. (os alunos começam a falar as divisões). Então temos a sobre b, c sobre a, b sobre a, a sobre c, c sobre b e b sobre c. Então são seis? Que tipo de problema é esse?”*

Fala 124. Aluno A3: *“Um arranjo”*

Fala 125. Aluno A4: *“E por que tu disse nove? (pergunta ao aluno A2)”*

Fala 126. Aluno A2: *“Eu tava considerando também a opção $a + b$ dividindo por c , $a + c$ dividido por b , sabe?”*

Fala 127. Professora: *“Entendi. Mas no caso a questão não permite essa resposta, não é? E por que você respondeu que é um arranjo A3?”*

Fala 128. Aluno A3: *“É porque a ordem importa. Os lados tem valores diferentes, então cada divisão dá um valor diferente.”*

Fala 129. Professora: *“Se eu tivesse aqui um triângulo equilátero?”*

Fala 130. Aluno A3: *“Seria uma combinação, porque a ordem não importa.”*

Fala 131. Professora: *“E aí gente, se fosse um triângulo equilátero seria uma combinação? Vamos pensar a respeito.” (vários alunos falam ao mesmo tempo)*

Fala 132. Professora: *“Vocês estão dizendo que os resultados vão ser todos iguais. Mas a questão ela se refere ao resultado ou às quantidades de divisões possíveis? Essa discussão é importante também. Na verdade, esse problema está relacionado com a trigonometria não é, vocês perceberam? Cada divisão aí nessa questão é um seno, um cosseno, uma tangente, uma cossecante, e por aí vai. Se refere às divisões mesmo.*

Já na segunda questão diz o seguinte: Thiago respondeu que a resposta é nove. O que podemos dizer sobre essa resposta?”

Fala 133. Aluno A2: *“Ele pode ter feito como eu disse, somou dois lados e dividiu também.”*

Fala 134. Aluno A5: *“Eu acho que ele considerou como divisão também o mesmo valor, a por a, b por b e c por c.”*

Fala 135. Aluno A3: *“Pode ter feito pelo princípio da contagem né? Três vezes três. Assim, dá forma errada”*

Fala 136. Professora: *“Ok. De que forma ele pensou para dar cada uma dessas respostas? Quer dizer, porque ele iria pensar como A2 pensou? Qual o raciocínio? Porque seria como A3?”*

[...]

Fala 137. Professora: *“A terceira pergunta é que encaminhamentos poderíamos fazer a Thiago, se fôssemos esse professor? Como poderíamos prosseguir a aula dele? Agora vou deixar um tempinho para vocês pensarem, tá ? O que vocês fariam? ”*

Fala 138. Aluno A3: *“Eu mostraria a diferença entre um arranjo e uma combinação. Mostrava para ele o arranjo tipo aquele que tá lá no quadro, que é a resposta correta. E tipo, se dois lados são iguais e o resultado da divisão é o mesmo, então é a mesma coisa.”*

Fala 139. Aluno A2: *“Eu explicaria para ele a trigonometria. Porque se ele relacionar com a trigonometria então ele vai ver que só tem essas possibilidades. Pela regra.”*

Fala 140. Aluno A6: *“Eu posso também substituir as letras por números, tipo, se a é cinco e b é quatro, ele vai ver que a divisão de quatro por cinco é diferente da divisão de cinco por quatro. ”*

Fala 141. Professora: *“Eu gostei das respostas. O meu único receio é da gente ter a ideia de que porque os lados são iguais e a divisão é a mesma, tem o mesmo resultado, a possibilidade é a mesma. Tá entendendo? No caso do triangulo equilátero, como foi mencionado, quando os lados são iguais e as divisões são as mesmas, a gente pode concluir que as possibilidades são as mesmas? Pense o seguinte, a possibilidade de dividir a por b é diferente da possibilidade de dividir b por a, mesmo que pela divisão o resultado seja igual? Aqui, agora, a questão é possibilidade.”*

Fala 142. Alunos: *“Entendi agora.”*

Fala 143. Professora: *“Outra questão que precisamos ter cuidado é para não apresentar as respostas corretas, mostrar a resposta correta antes de entender como o aluno pensou. Veja, o raciocínio que o Tiago teve, apenas de equivocado, é um raciocínio; e ele vai continuar pensando daquela forma exceto se eu fizer algo. Logo eu preciso compreender como ele pensou para chegar na forma correta, concordam?”*

Vamos para o Caso 2.”

Quando um professor, ao analisar um erro cometido por um aluno sabe o que aconteceu porque já viu esse mesmo tipo de erro ocorrer outras vezes, ele está utilizando o que Ball, Thames e Phelps (2008) chamam de *Conhecimento do Conteúdo e Aluno*, mas o exemplo citado também diz respeito ao *Conhecimento de Conteúdo e Ensino*, já que o professor é levado a

pensar numa forma de trabalhar com os erros para desestabilizar as ideias erradas dos alunos e promover estratégias de ensino que podem contribuir para superar as dificuldades encontradas.

Os dois conhecimentos estão articulados nessa situação específica. Pela fala da professora, observa-se que a sua escolha tinha por objetivo levar a essa reflexão: sobre o ensino e sobre os alunos.

Em entrevista, a professora falou que: *“Eu fiz umas atividades que traziam pequenos momentos de sala de aula para que eles analisassem. Eu queria que eles fossem discutindo quais são as dificuldades que os alunos tinham e como superar. Foi muito rápido, não sei se consegui chegar a isso. Nessa atividade, o foco era o ensino, o Conhecimento do Conteúdo e Ensino, mas também Conteúdo e Aluno, certo? Tem também o Conhecimento Especializado, porque eles tinham que dizer como mudar a estratégia combinatória para levar o aluno a entender. Na verdade, o Conhecimento do Conteúdo vai estar em todas as atividades, assim como o Conhecimento sobre o Ensino.”*

Rocha (2011), em sua pesquisa com professores que ensinam Matemática, constatou que a maioria dos participantes do estudo sentiam dificuldades em analisar a resolução dos problemas de alunos, principalmente por dois motivos: não conseguiam diferenciar os diversos tipos de problemas ou não conheciam as diversas estratégias de resolução. O trabalho com as fichas de Combinatória com contexto histórico teve papel importante nesse aspecto, porque levou os estudantes a pensarem sobre o conteúdo, enquanto respondiam as questões, ao mesmo tempo em que pensavam sobre o ensino, quando justificavam suas estratégias e buscavam compreender a resolução do outro.

Nas palavras da professora *“O objetivo maior da disciplina é trazer para a reflexão. Levar à reflexão do porquê é tão difícil para os professores ensinarem Combinatória. O que é que leva a essa dificuldade? É a Combinatória só ou tem outros fatores influenciando? [...] Todo esse conhecimento sobre o ensino é essencial para a prática do professor. Nós professores temos que decifrar coisas. Decifrar no sentido que, temos que ler, entender o que o problema tá pedindo e seguir por uma estratégia que seja melhor, mais indicada para fazer esse problema. Logo, não é uma coisa do nada, ou simples. Como é que você ensina a um aluno a ter esse discernimento, esse pensamento? De que forma você faz isso? Será que é só apresentando problema ou a resposta do problema?”*.

O distanciamento entre a teoria e a prática dificulta o trabalho do professor. Se não há na formação momentos de discussão sobre o conteúdo e o ensino, é provável que esse professor não reconheça os processos necessários para o ensino. Por conta do seu objetivo *“Discutir o*

conteúdo e o ensino, de diversas maneiras, refletir sobre esses processos” é que a disciplina investigada, com a atuação da docente responsável pela mesma, se torna um caso especial.

5.2.6. Conhecimento de Combinatória e Currículo

O *Conhecimento de Combinatória e Currículo*, segundo Ball, Thames e Phelps (2008) deve incluir os materiais utilizados para o ensino desses conteúdos, a organização dos conteúdos de acordo com os diferentes níveis escolares e as indicações e contraindicações para a utilização de determinados materiais, em diferentes circunstâncias.

Durante a entrevista, a professora sugeriu que o *Conhecimento de Combinatória e Currículo* e o *Conhecimento do Horizonte do Conteúdo* não puderam ser trabalhados como ela gostaria, devido ao tempo e às necessidades encontradas durante a disciplina. Por exemplo, a necessidade de uma discussão maior sobre o conteúdo, visto a dificuldade já mencionada que os alunos alertaram desde o primeiro momento.

Segundo a formadora, na discussão e elaboração do questionário para alunos da Educação Básica e a entrevista para o professor, deveriam ter sido mobilizados esses conhecimentos. Para ela, a discussão sobre o currículo poderia ter sido levantada na conversa com o professor, na pesquisa de campo, ao se discutir sobre os materiais utilizados, os conteúdos abordados em cada ano escolar,

“O que eu pretendia é que eles tivessem respostas. Por exemplo: O que vocês querem perguntar para o professor? Quais são as dificuldades que vocês percebem e que podemos saber na prática com o professor? O que é ensino e como é ensino em cada série? No Ensino Médio é uma coisa, no Fundamental outra? Não deu tempo de conversar sobre tudo, mas analisar essa entrevista possibilitou aos alunos pensar no professor, pensar na prática. Por que é que a gente sempre xinga o professor por não fazer certo, não é? Que tipos de cuidados a gente tem que ter? Eu queria que eles pensassem mais na própria prática sabe? É difícil ensinar. Mesmo com todo o estudo que a gente tem, as coisas não acontecem do jeito que a gente espera. Levar esse aluno a observar isso enquanto ele tá na formação inicial pode ajudar um pouco nesse impacto que é chegar na sala de aula. Essa reflexão eles precisam ter. A prática precisa estar presente. Quem nunca foi à sala de aula não tem consciência das dificuldades, não tem como ter.”

Essa atividade de pesquisa de campo, junto aos alunos e professores da Educação Básica, deveria ser apresentada pelos licenciandos seguindo algumas instruções dadas pela formadora. Foi solicitado que, em grupo, os licenciandos analisem as respostas dos estudantes da Educação Básica e fizessem um levantamento sobre os erros: qual questão teve maior

percentual de erros? Qual questão não foi resolvida? Qual a estratégia mais usada pelos estudantes? Essa dinâmica evidencia a preocupação da docente em lidar com a prática do professor, colocando-o em posição de análise de erros, colocando em prática as discussões sobre Conhecimentos Docentes.

Por outro lado, a pesquisa com o professor da Educação Básica apresentou elementos sobre o ensino: qual o material mais usado? Que material os alunos têm facilidade?, dentre outras questões que estão relacionada com a função.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciou-se esta dissertação com as discussões sobre quais conhecimentos são necessários para a atividade docente. Debateu-se, também, quais conhecimentos precisam ser discutidos na formação, em particular, formação inicial de professores.

De acordo com os pesquisadores Moreira e David (2007), o modelo de ensino conhecido por “3+1”, no qual os estudantes de graduação passam por três anos de formação específica (bacharelado) e mais um ano de formação pedagógica (didática), deixou vestígios no modelo de ensino atual. Nessa perspectiva do modelo “3+1”, o saber docente é decomposto em *conhecimento da disciplina (ou específico)* e *conhecimento do ensino (ou pedagógico)*, e esses, são abordados de maneira separada, isto é, em cada momento um conhecimento é levado em consideração, independente do outro.

Houve uma tentativa de mudança nessa estrutura na década de 1970, quando foram introduzidas nas licenciaturas disciplinas chamadas integradoras, que tinham o objetivo de promover a integração entre a *formação do conteúdo* e a *formação pedagógica* e desses com a prática docente. Entretanto, Moreira (2012) discute que essas disciplinas integradoras nunca conseguiram realizar essa proposta, “esse bloco integrador traduziu-se, na prática, em um espaço de flexibilidade curricular, no qual se podiam criar disciplinas com certa liberdade” (p.5).

Dessa forma, o curso de formação docente passou a se constituir de uma estrutura dividida em três blocos (disciplinas de formação do conteúdo, disciplinas de formação pedagógica e disciplinas integradoras), mais ou menos autônomos e independentes, e não garantia, portanto, uma relação entre a teoria e a prática docente. Baseando-se em Moreira (2012), a presente dissertação segue com a discussão que essa estrutura, que separa os conhecimentos docentes, persiste nos dias de hoje, no sentido que, as disciplinas de conteúdo são projetadas e executadas independentes de outras, chamadas pedagógicas, e que se referem ao ensino.

Esse distanciamento acaba negligenciando as necessidades do professor em formação, que vai para a escola com dificuldades para lidar com o ensino. Tem-se, assim, defendido, portanto, que o conhecimento de conteúdos – em particular os da Matemática – são necessários, mas não suficientes para preparar licenciandos para o futuro ensino em sala de aula.

Em relação à Combinatória, várias pesquisas apontam para dificuldades dos professores em sala de aula. A maioria das dificuldades apontadas referem-se ao ensino de Combinatória,

ou ainda, ao conhecimento do conteúdo de Combinatória (ROCHA, 2011; LIMA, A. (2015); LIMA, R. (2015); SABO, 2010; dentre outros).

Percebe-se, assim, que há uma necessidade de mudanças nas estruturas dos cursos de formação inicial de professores e nas estruturas das disciplinas, de modo que elas se tornem mais articuladas com a prática docente escolar, ou seja, não é suficiente estudar sobre a Combinatória se não se discute sobre como ensinar a Combinatória. Porém, como Moreira (data) alerta, esse problema não poderá ser resolvido apenas inserindo na formação disciplinas que discutam sobre o ensino isoladamente, isto é, sem discutir, entender e articular com os conhecimentos específicos da área.

Diante desses argumentos e a partir da análise de disciplinas oferecidas em cursos de formação docente em Matemática, surgiu a questão de pesquisa que norteou o presente trabalho: *Quais conhecimentos docentes são mobilizados nas aulas de uma disciplina voltada à discussão de Combinatória num curso de Licenciatura em Matemática?*

Para tratar sobre conhecimentos docentes, foram utilizadas as categorias de Ball, Thames e Phelps (2008), sobre *conhecimento pedagógico* e *conhecimento do conteúdo*, e traçado o seguinte objetivo geral: *analisar como são mobilizados conhecimentos docentes em uma disciplina voltada à Combinatória em um Curso de Licenciatura em Matemática.*

O percurso metodológico foi composto por análise da proposta de ensino, observações em sala de aula, entrevista semiestruturada com a professora formadora e análise do material utilizado e produzido na disciplina.

Em um primeiro momento, ao analisar a proposta de ementa curricular da disciplina, percebeu-se que a docente anunciou a importância da construção dos conhecimentos – pedagógico e de conteúdo – na formação inicial e propôs objetivos para a disciplina que permitiam essa construção. Todas as atividades propostas possibilitavam a discussão de vários conhecimentos docentes e a mediação em sala de aula, pela formadora, propunha garantir a articulação entre os conhecimentos pedagógicos e de conteúdo.

Como foi apontado nas análises, houve atividades de resolução de problemas, elaboração de questões, análise de questões, entrevistas, debates, análise de erros, dentre outras – atividades que são responsabilidade do professor em atuação. A professora formadora, portanto, utilizou atividades de formação inicial que podem impactar e influenciar a prática dos professores quando em atuação em salas de aula da Educação Básica.

A escolha das atividades proporcionou momentos de discussão e aprendizagem na prática. Foram discutidas resoluções de problemas combinatórios – *conhecimento do conteúdo*, ao mesmo tempo em que se discutia sobre qual a melhor forma de apresentar esse conteúdo aos

alunos; qual a melhor forma de propor uma atividade que discuta esse conteúdo, – *conhecimento do conteúdo e ensino*. Nesses momentos identificou-se a relação entre a Combinatória e o ensino da Combinatória, essencial para a atuação do professor de Matemática.

No primeiro momento da disciplina, os licenciandos responderam um questionário que informava sobre seus conhecimentos em Combinatória e a experiência que eles tiveram, na Universidade, na Educação Básica ou como professor em atuação. A partir da análise desse questionário, a professora pôde perceber que a maioria dos estudantes apontou ter dificuldades com o conteúdo e outros apontaram que não conheciam o conteúdo, o que levou a formadora a alterar seu planejamento. Essa decisão trouxe para a disciplina um aspecto interessante sobre o *saber da experiência*, defendido por Tardif (2014) e por Pimenta (2012), como um dos saberes que compõem a formação do professor. A partir das escolhas de atividades e da mediação em sala de aula, tendo como base os achados do questionário, evidenciamos o domínio do conteúdo e dos conhecimentos docentes por parte da formadora e a forma como agia e argumentava em sala de aula pode ter, em muito, influenciado os licenciandos – em suas formações docentes.

O *Conhecimento Comum de Combinatória* pôde ser identificado nas atividades de resolução de questões, quando a professora solicitou que os licenciandos apresentassem suas resoluções e discutissem as alternativas de resposta. Esse conhecimento foi muitas vezes evidenciado quando os estudantes de graduação reconheciam o uso de uma estratégia ou fórmula para a resolução de situações combinatórias. Essa forma de reconhecer não se trata de conhecimento especializado, com base em invariantes (relações e propriedades que se mantêm constantes nos variados tipos de problemas combinatórios), significados que a Combinatória assume e situações variadas, mas é uma percepção do licenciando de que há diferentes situações e diferentes fórmulas para os problemas combinatórios, assim como é reconhecido por outros resolvidores, não necessariamente professores.

O *Conhecimento Especializado de Combinatória* foi identificado também nas resoluções de questões. Por exemplo, quando a professora mediava a discussão, inserindo pontos sobre invariantes e significados, mas, também, foi encontrado nas atividades de elaboração e análise de questões, nas atividades de classificação de questões e análise de erros. Foi um dos conhecimentos mais mobilizados nas atividades, através da mediação da formadora, que conseguia colocar questões apropriadas para a discussão especializada de Combinatória. Os licenciandos, ao realizarem uma atividade, por exemplo, de *arranjo* indicavam as características próprias desse tipo de problema e, em seguida, a professora conduzia-os a pensarem no problema de *permutação*: quais as diferenças entre um problema e outro? São resolvidos da mesma maneira?

Esses conhecimentos citados não foram trabalhados separadamente. Em uma mesma atividade foi possível identificar a presença do conhecimento comum, na fala dos estudantes e, também, a presença do conhecimento especializado, discussão mediada pela formadora.

Quanto ao *Conhecimento do Horizonte de Combinatória*, a professora afirmou não ter tido tempo para discuti-lo como gostaria. Em entrevista, a mesma falou que o tempo necessário dedicado a outros conhecimentos, acabou prejudicando a discussão do *Conhecimento do Horizonte de Combinatória* e ela acredita que não houve uma atividade específica para tal. Argumenta-se, entretanto, que esse conhecimento pode ter sido trabalhado no momento em que os alunos produziram um questionário para aplicar com alunos da Educação Básica. Para realizar tal atividade eles precisaram pesquisar sobre que parte de Combinatória é ofertada em cada nível de ensino e cada ano escolar, quais questões podem ser colocadas, inclusive como adaptar as questões escolhidas para aplicação do teste para cada grupo específico de alunos. Esse também é um conhecimento muito importante, pois professores de diferentes níveis de ensino precisam compreender como o desenvolvimento do raciocínio combinatório pode ser estimulado ao longo da escolarização básica e, dessa forma, precisam agir como uma equipe com objetivos em comum.

No âmbito dos conhecimentos pedagógicos investigou-se o *Conhecimento de Combinatória e Aluno* que foi sempre identificado ao lado do *Conhecimento de Combinatória e Ensino*. Esses conhecimentos podem ser evidenciados em todas as atividades realizadas. No momento de resolução de questões, a professora anunciou a necessidade de os professores conhecerem os alunos, conhecerem suas dificuldades, conhecerem as dificuldades que são mais comuns e preverem e planejarem estratégias de ensino que ajudem a derrubar as barreiras ao aprendizado.

Duas atividades podem servir de exemplo para o argumento acima, da articulação do conhecimento do aluno e do conhecimento do ensino: análise de erros em situações de sala de aula e análise de erros no questionário aplicados a estudantes da Educação Básica.

No primeiro exemplo citado, os alunos foram levados a pensar na estratégia tomada por um aluno que errou, entender a estratégia e planejar uma ação que pudesse levar aquele aluno a compreender o caminho correto. Mais do que apresentar a resposta correta, o professor deve apontar caminhos para que haja, de fato, a construção do conhecimento, e, no momento dessa atividade, dois conhecimentos estavam em jogo, o conhecimento sobre o aluno, no momento em que se analisou o erro e se buscou entender a estratégia utilizada, e o conhecimento do ensino, quando se conseguiu, a partir daquela situação, promover ações que pudessem levar à

aprendizagem. Esse é o exercício diário que o professor precisa realizar, conhecendo bem seus alunos e conhecendo formas de auxiliar o desenvolvimento de seus raciocínios matemáticos.

Esses são exemplos de como os conhecimentos docentes foram articulados de tal maneira na disciplina investigada que é impossível separá-los em uma situação. É aqui que se volta a falar sobre a integração defendida por Moreira (2012), Moreira e David (2007) e também pelos teóricos Ball, Thames e Phelps (2008) e Shulman (1986). A formação inicial precisa ser o lugar da integração dos conhecimentos. Portanto, se as disciplinas, em particular as de Combinatória, não trabalharem conjuntamente conteúdo e pedagogia, a integração não irá acontecer, muito menos se houver apenas disciplinas de conteúdos e outras disciplinas isoladas de ensino.

Sobre o *Conhecimento de Combinatória e Currículo* pouco identificou-se de atividades que discutissem sobre esse conhecimento e, em entrevista, a professora afirmou não ter conseguido promover discussões específicas sobre tal, devido ao tempo e às necessidades outras encontradas durante a disciplina. Por exemplo, a necessidade de uma discussão maior sobre o conteúdo, visto a dificuldade, já mencionada, que os alunos alertaram desde o primeiro momento.

Mesmo assim, ainda em entrevista, a formadora, afirmou que na discussão e elaboração do questionário para alunos da Educação Básica e a entrevista para o professor, podem ter sido mobilizados esse conhecimento. No trabalho de elaboração de entrevista para o professor da Educação Básica algumas questões envolviam, por exemplo, os materiais o professor utiliza, quais livros didáticos adota, em que ano leciona – questões direta ou indiretamente relacionadas ao currículo.

Defende-se aqui a importância da integração e articulação entre os conhecimentos docentes e afirma-se que é possível ter-se uma disciplina, na formação inicial, que integre conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos. Essa integração se configura como desafio aos cursos de formação docente, já que historicamente tem-se vivenciado um ensino no qual a prática e a teoria não se encontram e um ensino em que as disciplinas chamadas de Matemática pura se sobressaem, em termos de carga horária, além de não se articularem com a atividade docente. Entretanto, apresenta-se nessa dissertação um exemplo de como é possível haver essa mudança e que ela depende, principalmente do professor formador e das discussões na academia.

Infelizmente, são poucas as disciplinas que dão prioridade a essa discussão referentes a conhecimentos docentes, inclusive na UFPE/CAA. Ressalta-se que, de acordo com a análise do

PPC – Projeto Pedagógico Curricular, não foram encontradas em muitas outras ementas sugestões dessas discussões.

Considera-se, também, que o tempo dedicado a essa disciplina no Curso de Licenciatura do CAA poderia ser maior, pois se trata de uma eletiva de 45 horas com uma grande necessidade de discussões. Além disso, nota-se a necessidade de mais disciplinas, não somente eletivas, que integrem a formação pedagógica e de conteúdo na formação inicial do professor de Matemática.

O professor diante de sua tarefa e sua responsabilidade pela aprendizagem dos estudantes deve estar preparado para lidar com diversas questões e quando a formação não lhe dá uma base sólida, torna-se mais difícil aprender na prática todas as questões que envolvem o processo de ensino e aprender. Acredita-se que maior carga horária – tanto em disciplinas eletivas, quanto em disciplinas obrigatórias – em discussões que articulem conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos pode proporcionar ao professor maior apropriação de amplos conhecimentos docentes e, assim, melhor prepará-lo para a prática em sala de aula. Trabalhos semelhantes em outras disciplinas que tenham como foco outros conteúdos matemáticos também podem contribuir para ampla formação dos professores.

Todas as discussões aqui apresentadas reforçam a complexidade da formação do professor – com seus variados conhecimentos docentes – e apontam a necessidade de mais pesquisas na área que:

- Acompanhem os estudantes de graduação em seus estágios, em busca de entender como funciona a articulação entre o que se aprendeu nas disciplinas e a atuação em sala de aula;
- Investiguem como se manifestam os conhecimentos docentes ao longo da carreira de professores (do início da atuação até períodos de maior experiência em sala de aula);
- Analisem novas propostas de ensino na formação inicial que fomentem discussões sobre conhecimentos docentes;
- Examinem, com maior profundidade, o papel do *Conhecimento do Horizonte de Combinatória* e do *Conhecimento de Combinatória e Currículo* e as relações entre essas duas formas de conhecimento docente e outras formas.

Os materiais utilizados pela professora formadora não foram o foco da análise da presente pesquisa, mas, podem também ser objetos de análises, seus objetivos e os resultados alcançados, gerando uma outra investigação.

Espera-se que o presente estudo tenha contribuído para um melhor entendimento de como distintas formas de conhecimento docente podem se articular em cursos de formação inicial de professores, em particular de professores de Matemática e, mais em particular ainda, na formação de professores para o ensino de Combinatória. O caso aqui analisado pode servir de inspiração para que outros formadores de professores se conscientizem da necessidade de maior articulação entre conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos e variados conteúdos matemáticos podem ser trabalhados nessa perspectiva junto a estudantes em cursos de formação inicial de professores.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, A. M. R. B. **Conhecimentos de Combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada:** reflexões e prática de uma professora. Dissertação. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2014.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content Knowledge for teaching: what makes it special?.** In: **Journal of teacher education.** 2008. V. 59. n° 5, p. 389-407. Disponível em: <http://jte.sagepub.com/content/59/5/389>
- BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. **Intervenções de Combinatória na Educação de Jovens e Adultos.** In: **Anais... XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.
- BORBA, R. E. S. R; PESSOA, C. A. S.; ROCHA, C. A; ASSIS, A. B. **A formação de professores de anos iniciais do ensino fundamental para o ensino da Combinatória.** Revista Paranaense de Educação Matemática. v.3, n. 4, 2014.
- BORBA, R. O raciocínio combinatório na Educação Básica. **Anais... 10° Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM.** Salvador, 2010.
- BORBA, R. **O raciocínio combinatório na educação básica.** In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática: Salvador, 2010.**
- BORBA, R. **Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização.** **Anais... 11 Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM.** Curitiba, 2013.
- BORBA, Rute. **Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização.** **Anais... 11 Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM.** Curitiba, 2013.
- BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. **O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais?** **Anais... 3 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT.** Fortaleza, 2012.
- BRASIL.Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais, 3 Matemática.** Brasília: 1997.
- _____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2010: Alfabetização Matemática e Matemática.** Brasília: MEC, SEB, 2009.
- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais, 3 Matemática.** Brasília: 1998.
- _____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.
- CURI, E. **A Matemática e os professores dos anos iniciais.** São Paulo: Ed. Musa,2005.
- ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do Ensino Fundamental.** (Dissertação) Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo, 2001.
- FERREIRA, A. C. **Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática.** In: FIORENTINI, D. **Formação de professores da Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares.** Campinas: Mercado das letras, 2003.

- FIorentini, D. **Estado da Arte da pesquisa brasileira sobre formação de professores que ensinam Matemática.** In: Seminário sobre licenciaturas, Salvador, 2003.
- FIorentini, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. **O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática:** que matemáticas e que práticas formativas? In: *Bolema*, v. 27, n. 47, p. 917 – 938. Rio Claro, 2013.
- GATTI, B.A. **Licenciaturas: crise sem mudança?** In: DALBEN, A.; DINIZ, J.; LEAL, L.; SANTOS, L. (Org.) *Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente: didática, formação docente, trabalho docente.* Belo Horizonte: Autêntica, p.485508, 2010.
- GONÇALO, V. L. S.; SILVA, A. D. P. R. **Análise Combinatória:** um olhar no currículo das Instituições de Ensino Superior do Estado de Pernambuco – Brasil. In: **Anais do XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Chiapas, México, 2015.
- GONÇALVES, E. P. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica.** Campinas: Ed. Alínea, 2001.
- LAMBERT, M.; BALL, D. L. **Teaching, multimedia, and mathematics.** New York: Teachers College Press, 1998.
- LIMA, A. P. B. **Princípio fundamental da contagem:** conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. Dissertação. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2015.
- LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E. & MORGADO, A.C. **A Matemática para o Ensino Médio,** vol 2. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- LIMA, I.; AMORIM, N.; PESSOA, C. **Aulas de Combinatória na Educação de Jovens e Adultos: como ocorrem na prática?** Caderno de trabalho de conclusão de curso de Pedagogia – UFPE. Recife, 2013.
- LIMA, R. G. A. **Problemas de Combinatória:** um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática. Dissertação. Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande: UFMS, 2015.
- LÜDKE, M. **Formação de docentes para o ensino fundamental e médio:** as licenciaturas. Rio de Janeiro: CRUB, 1994.
- MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamento de metodologia científica.** – 5 ed. - São Paulo: Atlas, 2003.
- MERAYO, Felix. **Matemática discreta.** Madri: Thomson Paraninfo, 2001.
- MINAYO, M. C. de S. (org.) **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. – 10 ed. – Petrópolis. Rio de Janeiro: Vozes, 1998.
- MOREIRA, F. M. B. **Os conhecimentos acerca do conceito de Análise Combinatória de professores que ensinam Matemática:** um estudo diagnóstico. Dissertação. Pós-Graduação em Educação Matemática da UESC. Ilhéus: UESC, 2014.
- MOREIRA, P. C. **3+1 e suas (in)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática).** In: *Bolema*. Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137 – 1150, 2012.
- MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor:** formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Tese. Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação da UFMG. Belo Horizonte: UFMG, 2004.

- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática)
- MORGADO, A.C.; PITOMBEIRA, J.C.; CARVALHO, P.C.P. & FERNADEZ, P. **Análise. Combinatória e Probabilidade**. IMPA/SBM, Rio de Janeiro, 1991.
- MORIEL JUNIOR, J. G.; CYRINO, M. C. C. T. **Propostas de articulação entre teoria e prática em cursos de licenciatura em matemática**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 11, p. 535-557, 2009.
- NAVARRO-PELAYO, BATANERO, C. & GODINO, J. **Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria**. Educación Matemática, 1996. v.8 (1), pp. 26-39.
- PESSOA, C.; BORBA, R. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1º a 4º série**. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan/jun – 2009.
- PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. **O desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais aos finais da escolarização básica**. In: **Anais... IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Taguatinga – DF, 2009.
- PESSOA, Cristiane & SANTOS, Laís Thalita Bezerra. **GATO, GOTA, TOGA... A Combinatória no 5º ano do ensino fundamental**. Revista Unopar Científica Ciências Humanas e Educação, 2012.
- PESSOA, Cristiane & SILVA, Monalisa. **Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental**. In: **Anais... III Simpósio Internacional de Educação Matemática**. Fortaleza, 2012.
- PESSOA, Cristiane e SANTOS, Laís Thalita Bezerra. **GATO, GOTA, TOGA... A Combinatória no 5º ano do ensino fundamental**. Revista Unopar Científica Ciências Humanas e Educação, 2012.
- PESSOA, Cristiane e SILVA, Monalisa. **Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental**. In: **Anais... III Simpósio Internacional de Educação Matemática**. Fortaleza, 2012.
- PESSOA, Cristiane. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. (Tese Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Estratégias de Resolução de Problemas de Raciocínio Combinatório por Alunos de 1ª a 4ª série**. Anais... 9 Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.
- PIMENTA, S. G. **Saberes Pedagógicos e Atividade Docente**. Selma Garrido Pimenta (org.) – 8. Ed. – São Paulo: Cortez, 2012.
- PONTE, J. P. **Estudos de caso em Educação Matemática**. In: **Bolema**. v. 25, p.105-132. Disponível em: [http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte\(BOLEMA-Estudo%20de%20caso\).pdf](http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf)
- ROCHA, C. A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos**. Dissertação. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2011.

- ROCHA, Cristiane & BORBA, Rute. **Reflexões de docentes sobre o ensino de Combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo.** In: **Anais... I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria**, 2013.
- ROCHA, Cristiane e BORBA, Rute. Reflexões de docentes sobre o ensino de Combinatória: transitando entre conhecimento pedagógico e do conteúdo. In: **Anais... I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria**, 2013.
- ROCHA, J. de A. **Investigando a Aprendizagem da Resolução de Problemas Combinatórios em Licenciandos em Matemática.** 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) Recife: UFRPE, 2006.
- SABO, R. D. **Saberes docentes: uma análise combinatória no Ensino Médio.** 208f. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2010.
- SANTOS, Missilane; MATIAS, Patrícia & PESSOA, Cristiane. **O raciocínio combinatório na Educação Infantil.** Cadernos de TCC do CE-UFPE. 2011
- SANTOS, Missilane; MATIAS, Patrícia e PESSOA, Cristiane. **O raciocínio combinatório na Educação Infantil.** Cadernos de TCC do CE-UFPE. 2011
- SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos; BORTOLOTTI, Roberta D'Angela Menduni; FERREIRA, Juliana. Rodrigues. **Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática.** In: Educação Matemática Pesquisa, v.15, n.3, pp.692629, 2013.
- SHULMAN, L. S. **Those who understand: knowledge growth.** In: **Teaching Educational Research.** Washington: DC, v. 15, n. 2, 1986.
- _____. **Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma.** In: Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado. V 9,2, 2005 (p.1-30).
- _____. **Knowledge and teaching: foundation of the new reform.** Harvard Education Review, vol 57, n.1 p.313-333, fev.1987.
- SILVA, R. D.; DIAS, A. A.; PIMENTA, S. A. (2014) **Profissionalidade e formação docente: representações sociais de professores.** Rev. Diálogo Educacional, Curitiba, v.14, n.42, p. 549 – 568.
- SOUZA, A. C., PEREZ, G.; BICUDO, I; BICUDO M.A.V.; SILVA, M.G.P.; BALDINO R.R.; CABRAL, T.C.B. (1995) Novas diretrizes para a Licenciatura em Matemática. *Temas e debates*, v.8, n.7, p. 41-65.
- SOUZA, A. C., TEIXEIRA, M.V., BALDINO, R. R., CABRAL, T. C. **Novas diretrizes para a Licenciatura em Matemática.** Temas e Debates, v.8, nº 7, 1995. p. 41 – 65.
- STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa.** (Dissertação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, São Paulo, 1999.
- TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional.** - 17. Ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.
- TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2002.

ANEXO A – PROGRAMA DO COMPONENTE CURRICULAR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS

DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

<input checked="" type="checkbox"/>	Disciplina	<input type="checkbox"/>	Prática de Ensino
<input type="checkbox"/>	Atividade complementar	<input type="checkbox"/>	Módulo
<input type="checkbox"/>	Monografia	<input type="checkbox"/>	Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

<input type="checkbox"/>	OBRIGATÓRIO	<input checked="" type="checkbox"/>	ELETIVO	<input type="checkbox"/>	OPTATIVO
--------------------------	-------------	-------------------------------------	---------	--------------------------	----------

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária Semanal		Nº. de Créditos	C. H. Global	Período
		Teórica	Prática			
	Ensino de Combinatória: perspectivas teórico-práticas	30	15	3	45	4º

EMENTA

Ensino e aprendizagem de Combinatória nos diferentes níveis de ensino, organização e sistematização para a construção de aulas de Combinatória; Currículo, recursos didático, livros didáticos específico da Combinatória; Contribuições de pesquisas sobre o ensino de Combinatória para construção do conhecimento do conteúdo e didático pedagógico do Combinatória.

OBJETIVOS DO COMPONENTE

- Discutir o currículo da Educação Básica sobre Combinatória nos diferentes níveis de ensino
- Diferenciar os tipos de problemas combinatórios
- Analisar criticamente o enunciado de problemas combinatórios, como também elaborar a partir de características dadas.
- Discutir possíveis estratégias de solução nos diferentes níveis, analisando as dificuldades encontradas e apresentar procedimentos didáticos para superação
- Utilizar o Princípio Fundamental da Contagem como base para fórmulas de contagem
- Analisar materiais didáticos específicos para Combinatória e aplicá-los com criticidade (jogos, livros didáticos, applets e objetos de aprendizagem)
- Elaborar planejamentos para aulas de Combinatória no Ensino Fundamental e Médio;

METODOLOGIA

A metodologia proposta se pautará na relação dialógica professora/estudantes e dos estudantes entre si. Durante o curso serão utilizados textos de referências de autores reconhecidos na área, propostas curriculares e materiais didáticos para estudo e reflexão sobre os conceitos relativos à Combinatória e seu ensino. O desenvolvimento metodológico será enriquecido mediante a exploração e a contribuição dos estudantes que deverão fazer a relação teoria e prática, mediada pela intervenção da professora da disciplina.

Os procedimentos serão efetivados por meio dos seguintes instrumentos:

- Estudo e leituras de textos
- Pesquisa e sistematização de informações
- Análise de materiais didáticos
- Análise de resolução de problemas combinatórios
- Elaboração de problemas combinatórios
- Elaboração e apresentação de aulas

AVALIAÇÃO

A avaliação como processo contínuo e de natureza formativa, se baseará no acompanhamento sistemático do processo de ensino/aprendizagem dos/as alunos/as, levando-se em consideração os seguintes aspectos:

- Participação em aula e nas atividades desenvolvidas;
- Capacidade crítica e argumentativa nos debates;
- Leituras realizadas e sistematização dos conteúdos

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Unidade I - Combinatória: Conhecimento do conteúdo

- Problemas combinatórios simples e algumas propriedades
- Elaboração de problemas e resolução de problemas
- Princípio Fundamental da Contagem

Unidade II - Combinatória e Currículo.

- Análise de diferentes propostas curriculares

Unidade III-Combinatória: Conhecimento Pedagógico

- Materiais didáticos para o ensino de Combinatória
- Análise de entrevistas com professores sobre aulas de Combinatória
- Planejamento de aulas de Combinatória.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- BORBA, Rute, ROCHA, Cristiane, MARTINS, Glauce e LIMA, Rita. O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório? **Anais... X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, 2009, Ijuí. X EGEM. Ijuí: Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2009. p. 1-13
- BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015 para o Ensino Médio: Matemática / Brasília: Ministério da Educação**, 2014.
- _____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.
- _____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática. Ensino de primeira a quarta série.** Brasília: MEC, 1997.
- _____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) 5ª a 8ª séries: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.
- LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. **Temas e problemas elementares.** Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006
- PESSOA, Cristiane e BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, p. 1-22, 2010. Disponíveis em: <http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/4/2>

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

BORBA, Rute e AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatorio de Karine e Vitória. Spinillo, Alina e Lautert, Síntria (orgs). **A pesquisa em Psicologia e suas implicações para a Educação Matemática**, 2012, Recife: Editora Universitária, 2012.

LIMA, Ana Paula. Princípio Fundamental da Contagem: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações Combinatórias. **(Dissertação - Mestrado)** - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE. Recife, 2015.

ROCHA, Cristiane. Formação docente e o ensino de problemas combinatorios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. **(Dissertação)** - Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE – Recife, PE, 2011.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE

Núcleo de Formação Docente

HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO

Matemática-Licenciatura

ASSINATURA DO CHEFE DO DEPARTAMENTO
ÁREA

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO OU

ANEXO B – FICHA I DO COMPONENTE CURRICULAR**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

ENSINO DE COMBINATÓRIA: PERSPECTIVAS TEÓRICAS E PRÁTICAS

Aluno(a): _____ Período: _____

FICHA 1: PRIMEIROS CONTATOS**Para você o que é combinatória?****Que dificuldades você possui com a combinatória? Comente****Qual sua experiência com a combinatória na escola? Comente****Qual a sua experiência com combinatória na universidade? Comente****Você já teve que lecionar alguma aula dessa disciplina? Comente****Que expectativas você possui com relação a essa disciplina?**

ANEXO C – FICHA II DO COMPONENTE CURRICULAR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

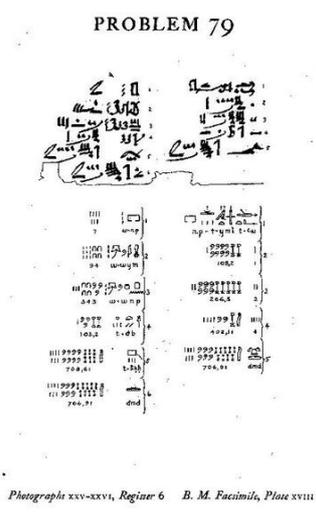
ENSINO DE COMBINATÓRIA: PERSPECTIVAS TEÓRICAS E PRÁTICAS

Aluno(a): _____

História da Combinatória por meio de problemas ou vice-versa

Procurar sobre a história da combinatória não é muito fácil, pois os fatos perpassam diferentes civilizações ao longo dos anos e poucos são os registros e fontes de informação que ultrapassaram os séculos. Biggs (1979, p.110) ao tratar sobre a Combinatória afirma que “por causa das regras serem consideradas auto-evidentes, não se espera encontrá-las mencionadas explicitamente, e não se pode, portanto, traçar sua história”. No entanto, podemos ir atrás dos problemas que fizeram parte da história de algumas civilizações, presentes em fontes que foram preservadas até os dias atuais.

Para começarmos nessa caminhada sobre o conhecimento de como a Combinatória foi se desenvolvendo, a natureza dos conceitos que a envolvem e suas relações, convidamos vocês para desenvolverem uma discussão sobre os problemas apresentados, comentando sobre suas características e tentando encontrar algumas possibilidades que possam fazer parte da sua solução. Tentem imaginar como seriam as propostas desses matemáticos, alguns que nasceram antes mesmo de serem criados os números tal qual conhecemos. Lembrem-se de deixar tudo escrito, pois o pensamento que não é escrito, pode se perder na história!!!!



Papiro de Rhind (EGITO - 1650 a.C.) - O papiro de Rhind é uma fonte rica sobre a matemática egípcia, pois descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, solução para problemas de determinação de área de um círculo e muitas aplicações da matemática em problemas práticos. (EVES, 2004, p. 70). Escrito em hierático, o papiro contém 87 problemas matemáticos que, na sua maioria, diz respeito a problemas do cotidiano dos egípcios (AGUIAR, 2012, p.7)

Problema 79. Existem 7 casas; Em cada casa existem 7 gatos; cada gato mata 7 ratos; cada rato comeram 7 grãos de cevada; Cada grão teria produzido 7 hekat. Qual a soma de todas as coisas enumeradas?

Aproveitem os quadros para deixar sua proposta de solução!

Boyer (1996) acredita que esse problema tenha sido aplicado como um enigma ou até mesmo uma forma de recreação matemática. **Evidências de outros problemas desse tipo aparecem em livros antigos.** Por exemplo, o problema de Fibonacci encontrado no Livro *Liber Abaci* que data de 1202, e foi traduzido por Boncampagni 1857, p. 311, encontra-se:

7 mulheres idosas estão indo para Roma;
Cada uma tem 7 mulas;
Cada mula carrega 7 sacos;
Cada saco contém 7 pães;
Cada pão tem 7 facas;
E cada faca tinha 7 bainhas.
Qual é o total de número de coisas?

Noutro exemplo, uma antiga canção de ninar é encontrada no livro Oxford Dictionary of Quotations (1953, p. 366), a primeira edição data de 1730, Vejamos:

Eu estava indo para St Ives,
Eu encontrei um homem com 7 esposas,
Cada esposa tinha 7 sacos
Cada saco tinha 7 gatos Cada gato tinha 7 kits,
Kits,gatos, sacos, e esposas
Quantos são os que estão indo para St.Ives?

O que esses três problemas têm de semelhantes? E de diferentes? Tente explicar com suas palavras:

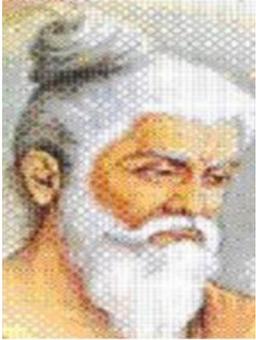


No livro chinês I Ching (Book of Changes, aproximadamente do século 7 a.C.) existe um sistema baseado em dois símbolos, o Yang (—) e o Yin (- -). Nele são necessários combinar esses símbolos em “trigrams” (Colunas de três símbolos) e “Hexagrams” (colunas de seis símbolos).

Vamos enumerar as possibilidades de formar trigrams? Registre no quadro abaixo:

E Hexagrams?

No tratado médico de Susruta (6 a.C) encontra-se uma discussão de vários tipos de gostos que podem ser criados por meio de seis qualidades básicas: doce, ácido, salgado, adstringente, picante, amargo. Essas qualidades podem ser combinadas em seis separadamente.



Quantos gostos podemos formar misturando duas qualidades básicas?
E três qualidades?

Se aumentarmos a quantidade de qualidades básicas o número de misturas produzidas irá aumentar? Justifique



O Livro da Criação - **SEFER YETZERAH** (Por volta dos anos 200 e 600) – Esse livro hebreu apresenta o ato da criação, no qual o autor tenta apresentar a metodologia pela qual Deus teria criado o universo, pois para esse autor, o mundo teria sido criado pelas palavras proclamadas por Deus. Nessa perspectiva as 22 letras e 10 números geraram as palavras faladas por

Deus.

Imaginem um processo de criação das palavras de uma língua estrangeira e para cada união de letras criássemos um sentido.

א ב ג ד ה ו

Quantas “palavras” e sentidos diferentes podemos formar com duas letras, sem repeti-las?

Quantas formamos com três letras?

Quantas formamos com quatro?

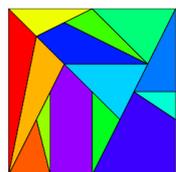
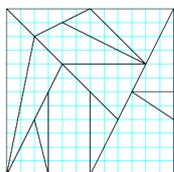
Cinco?

Existe alguma regra?

E se pudéssemos repeti-las?

No Sefer Yetzerah encontra-se a seguinte afirmação: “A partir de duas letras, ou formas Ele compõe duas residências, a partir de três, seis, de quatro, vinte e quatro, de cinco, cento e vinte, de seis, setecentos e vinte, de sete, cinco mil e quarenta e partir daí, aumentar os seus números de uma forma além do conto, e são incompreensíveis”. Ou seja, podemos afirmar que nesse tempo já conhecia o número de permutação de um conjunto de elementos.

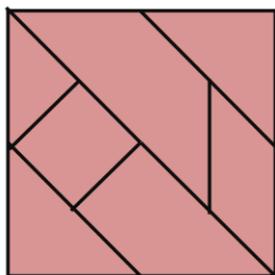
Tavares e Brito (2005) apresentam em seu artigo que os problemas de Combinatória remontam à Antiguidade Clássica, quando Arquimedes (287 a.C - 212 a.C) propôs um problema conhecido como Stomachion no qual se —desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas 14 peças para formar um quadrado?



Para resolver esse problema, o Stomachion foi alterado a partir da junção de algumas peças gerando 12 peças. Após essa modificação os autores Santos, Neto e Silva (2007) afirmam que encontraram 268 possibilidades a menos de simetria

(rotação, ou reflexão).

Para pensarmos como podemos fazer propostas de solução imaginem o Tangram CHIE NO-ITA. Você pode propor diferentes configurações para o quadrado original, a menos de simetria? Registre-as:



ANEXO D – FICHA III DO COMPONENTE CURRICULAR



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

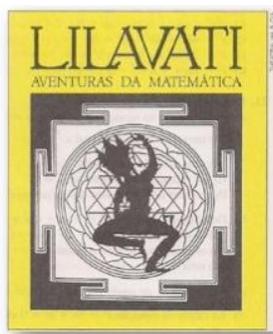
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

ENSINO DE COMBINATÓRIA: PERSPECTIVAS TEÓRICAS E PRÁTICAS

Aluno(a): _____

Período: _____

História da combinatória



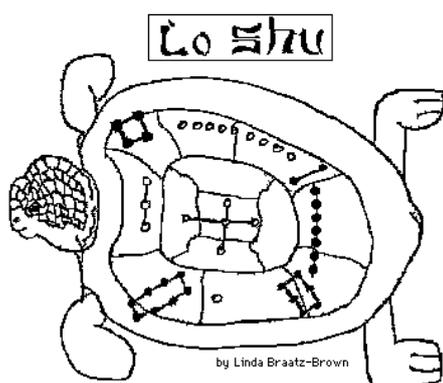
No livro Lilavati escrito por Bhaskara, matemático indiano por volta do ano de 1150, encontram-se dois problemas interessantes.

Atividade Adaptada. Em um edifício agradável e elegante, com 8 portas, construído pelo habilidoso arquiteto para o Lorde da Terra. Explícite o número de combinações diferentes que podem ser feitas com a abertura de uma porta? Com duas portas? Com três?

Atividade Adaptada. Quantas são as variações diferentes da Deusa Hari de alternar a clava, o disco, a lótus e a concha em suas mãos?



Atividade Adaptada. Quantas são as variações diferentes da forma do Deus Sambhu que podem ser mudadas de seus 10 atributos (corda, gancho do elefante, a serpente, o tamborim, o crânio, o tridente, o leito, o punhal, o arco, e a flecha) em suas quatro mãos?



Lo Shu é um quadrado chinês que data de cerca de 2000 anos antes de Cristo. A lenda fala que o quadrado estava escrito no casco de uma tartaruga. Esse quadrado mágico, conhecido como Lo Shu, o quadro consiste em achar uma combinação que somando todos os algarismos em todas as direções ocorra a soma “15”.

Antes de tentarmos preencher o quadrado mágico, você poderia listar algumas somas de três números que utilizassem os números de 1 até 9 e que tivessem com resultado o número 15?

Você pode preencher um quadrado mágico

Compare com seus amigos todos encontraram a mesma disposição de números no quadrado?

A intrínseca relação entre a Combinatória e a Probabilidade é observada em diferentes momentos na história. O poema *De Vetula*, datado do século XIII ou XIV apresenta explicitamente a descrição das possibilidades das somas do lançamento de três dados.

Talvez, diremos que certos números são melhores, Do que outros para uso em jogos, pela razão que, Desde que um dado tem seis lados e seis números unitários, Em três dados existem dezoito, Dos quais apenas três podem estar nas faces superiores dos dados. Eles variam em diferentes maneiras e deles, [...] (BELLHOUSE, 2000, p.134).

Quantas são as possibilidades diferentes de soma?

ANEXO E – ENTREVISTA COM PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Prezado(a) Professor(a),

Este questionário faz parte de minhas atividades enquanto aluno da disciplina Ensino de Combinatória: aspectos teóricos e práticos, no curso de Licenciatura em Matemática da UFPE-CAA. Nele pedimos para socializar um pouco de sua experiência conosco a fim de fomentar as discussões com características reais da sala de aula. Desde já agradeço sua contribuição.

I. SOBRE A FORMAÇÃO

Nome: _____

E-mail: _____

1. Qual é a sua formação inicial?

2. Em que instituição? _____
3. Há quanto tempo você leciona Matemática?

4. Participa ou participou de momentos de formação continuada? Sim () Não ()
Quais? _____
5. É professor(a) da(s) rede(s)? () Estadual () Municipal () Particular
6. Em que anos/séries você leciona?
Anos Iniciais: () Ensino Fundamental: 6º () 7º () 8º () 9º ()
Ensino Médio: 1º () 2º () 3º ()
7. Já lecionou em outras séries? Quais?

8. Qual é o livro de matemática adotado na escola: _____

II. SOBRE COMBINATÓRIA

1. Você se lembra como foi que aprendeu combinatória quando era aluno da Educação Básica? Comente um pouco.

2. Enquanto aluno(a), o seu sentimento com relação a aprendizagem de combinatória era de um conteúdo:
() Fácil () Regular () Difícil () Impossível de aprender () outro: _____
3. Você fez alguma disciplina na sua Graduação que abordou combinatória?
() Sim Quais? _____
() Não
4. Como foi essa experiência?

- _____
- _____
- _____
5. Você teria interesse em participar de uma formação que abordasse essa temática?
 () Sim Se sim deixe seu contato _____
 () Não
6. Em que ano geralmente você leciona a Combinatória?
 Anos Iniciais () Ensino Fundamental: 6º () 7º () 8º () 9º ()
 Ensino Médio: 1º () 2º () 3º () Outro(): _____
7. Em que bimestre geralmente você ensina Combinatória?
 () I unidade () III unidade
 () II unidade () IV unidade Identifique a série _____
8. Quantas aulas em média você utiliza para explorar a combinatória ao longo do ano?

9. O livro didático adotado auxilia na hora de ensinar combinatória? Você prefere outra fonte? Qual?

10. Você utiliza ou utilizou algum recurso didático para ensinar Combinatória? Comente

11. Enquanto professor como é essa experiência de ensinar combinatória?

12. Hoje enquanto professor (a), o seu sentimento com relação a aprendizagem de combinatória é de um conteúdo:
 () Fácil () Regular () Difícil () Impossível de ensinar () outro: _____
13. Seus alunos sentem dificuldades com o assunto? Para você o que é mais difícil para eles?

-
-
14. Quatro alunos estavam discutindo sobre uma questão de combinatória que caiu numa prova de concurso, apresentando as seguintes resoluções:

Quatro alunos (Mário, Alex, Raul e José) participam de um concurso em que serão sorteados dois jogos eletrônicos. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

<p>Aluno A:</p> $\frac{4 \cdot 3}{1} = 12$	<p>Aluno B:</p> $\frac{4 \cdot 4}{1} = 16$	<p>Aluno C:</p> <p>MA; MR, MJ, AR, AJ, RJ</p> <p>6 possibilidades</p>	<p>Aluno D:</p> <p>MM, AA, RR, JJ, AM, MR, MJ, AR, AJ, JR</p> <p>10 possibilidades</p>
--	--	---	--

Para você qual desses alunos está correto? Como você avaliaria os demais alunos?

15. Que cuidados você sugeriria a um futuro professor de matemática com relação ao ensino de combinatória?

Muito Obrigado!!!!

ANEXO F – QUESTIONÁRIO PARA ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Escola: _____ Turma: _____

Nome: _____ Idade: _____

Atividade

Pedimos que deixem todos os cálculos e justificativas para cada questão, se necessário construam esquemas que explicitem o pensamento.

1º) Rick Riordan é um escritor norte-americano que escreveu os best-sellers Percy Jackson e os Olimpianos e Os Heróis do Olimpo, ambos retratam sobre mitologia grega com seus enredos recheados de fantasia e aventuras e cada série possui cinco livros. Sabendo que um determinado leitor possui as 3 coleções e deseja guardá-las, quantas são as possibilidades para ele colocar na prateleira, de modo que cada série fique sempre junta, e na sequência dos livros.

2º) Uma família composta por três pessoas (Tio, mãe, pai), após decidir sobre as datas da viagem consultou o site de uma empresa aérea e notou que o vôo estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo site encontram-se as cadeiras ocupadas marcadas com um x, e as cadeiras disponíveis sem a marcação. Qual o número de formas distintas que a família pode se acomodar no voo?

	A	C		D	E	F	G		H	K	
30	X	X		X	X	X	X		X	X	
31	X	X		X	X	X	X		X	X	
32	X	X		X	X	X	X		X	X	
33	X	X		X	X	X	X		X	X	

3º) Para viajar para a praia Pedro teve que escolher 3 entre as 5 bermudas que possui (uma preta, uma marrom, uma azul, uma branca e uma cinza) . Quantas possibilidades ao todo ele possui para escolher as três bermudas?

4º) Em uma sala de espanhol existem cinco alunos (Cris, Juliana, Romildo, Matheus e Alex). De quantos modos diferentes podemos formar trios de modo que Alex sempre participe?

5°) Uma modelo vai desfilando vestindo saia, blusa, chapéu e bolsa. O organizador do desfile afirma que possui três modelos de saia, cinco de blusa, três de bolsa e certo número de chapéus permitindo ao todo 225 tipos diferentes de escolha para formar o traje. Qual o número de chapéus para que a afirmação seja verdadeira?

6°) Alguns amigos baixam 4 filmes na Netflix (Anabelle, Mama, Frozen, Jogos Vorazes 1), dos quais dois são de terror. Sabendo que eles pretendem assistir os filmes de terror um em seguida do outro, de quantas maneiras diferentes podem assistir os filmes?

7°) Entre os cinco professores da Escola (Ana, Nathalia, Mario, Rubens e Luciano), devem ser escolhidos dois para os cargos de diretor e vice-diretor. De quantas maneiras diferentes essa escolha pode ser feita?

Boa Atividade!