



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Física

Jean Ricardo Colaço da Silva

# **Estudos da Entropia de Shannon em Buscas Aleatórias Unidimensionais**

Recife  
2019

Jean Ricardo Colaço da Silva

# **Estudos da Entropia de Shannon em Buscas Aleatórias Unidimensionais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Área de concentração:** Física Teórica e Computacional

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

Recife

2019

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Elaine Freitas CRB4-1790

S586g Silva, Jean Ricardo Colaço da  
Estudos da entropia de Shannon em buscas aleatórias  
unidimensionais / Jean Ricardo Colaço da Silva. – 2019.  
95 f.: fig.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Física. Recife, 2019.  
Inclui referências.

1. Física Teórica. 2. Buscas aleatórias. 3. Entropia de Shannon.  
I. Raposo, Ernesto Carneiro Pessoa (orientador). II. Título.

530.1                    CDD (22. ed.)                    UFPE-FQ 2019-23

Jean Ricardo Colaço da Silva

## **Estudos da Entropia de Shannon em Buscas Aleatórias Unidimensionais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Dissertação aprovada. Recife, 27 de fevereiro de 2019:

---

**Ernesto Carneiro Pessoa Raposo**  
Orientador(DF-UFPE)

---

**Renê Rodrigues Montenegro Filho**  
(DF-UFPE)

---

**Madras Viswanathan Gandhi Mohan**  
(DFTE-UFRN)

Recife  
2019

*Dedico esta dissertação a minha falecida avó Josefa Teodora Maciel que sempre me direcionou no caminho correto através da sua história de vida e sempre me apresentava em suas orações (In memoriam)..*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por estar vivo e com saúde para começar e concluir este trabalho, por Ele ter me dado sabedoria em todos os momentos difíceis e por ter me contemplado com pessoas maravilhosas ao meu redor.

À minha amada noiva Glaucyevonn Guimarães, que sempre foi minha companheira de estudos desde da graduação e sempre me ajudou seja com conversas científicas à inúmeros incentivos de todas as maneiras possíveis.

À toda a minha família por todo carinho e compreensão, em especial a minha adorável avó Josefa Maciel, que apesar de não estar aqui para prestigiar este momento de alegria, sempre desejou o melhor, não só na minha vida pessoal como também na minha vida profissional. Ao meu tio Cleber Eduardo que sempre acreditou em mim em todos os momentos, me incentivando a estudar desde da época do colegial e nunca deixando o desânimo me abater nos períodos difíceis.

Aos amigos do período de graduação onde a partir do ciclo profissional foram meus companheiros de estudo com a finalidade de ingressar no programa de pós-graduação em física da UFPE, em especial a Antonio Carlos de Lorena Neto e a Carlos José Sabino Machado Filho, onde passávamos noites e madrugadas inteiras estudando incansavelmente com este objetivo.

Aos amigos do laboratório do PIBID na área II, em especial a Rubens Henrique Damascena de Souza, Erly Aquino pelas discussões científicas e momentos de descontração que me proporcionou muita alegria e ânimo e ao mesmo tempo me incentivaram no andamento deste trabalho.

Ao meu orientador Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo, pela enorme paciência que ele teve ao sanar cada dúvida minha, da mais básica a mais complexa, por sempre estar disponível e responder aos meus e-mail's nos finais de semana e feriados, me fazendo amadurecer muito, não em apenas no aprendizado de novos conceitos físicos mas também em como ser um bom pesquisador e em como ser um bom profissional.

Aos colegas do Departamento de Física que sempre me ajudaram quando precisei em especial a José Edivaldo e Daniel Souto Maior onde nas vezes que precisei, não mediam esforços para me ajudar principalmente na parte computacional.

À todos os professores e funcionários do Departamento de Física que de inúmeras formas contribuíram para este trabalho, particularmente cito os professores Clécio Clemente, Arkady Shanenko que me inspiraram, em suas aulas e conversas pós aulas a cada vez mais a seguir a carreira acadêmica e científica.

À FACEPE por financiar este trabalho, que pra mim foi muito importante.

## RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo do comportamento da entropia de Shannon associada ao problema do caminhante aleatório unidimensional em busca por sítios-alvo cuja localização é desconhecida (problema da busca aleatória ou (*random search*)). Um de nossos principais objetivos foi investigar se o mecanismo que rege a maximização da eficiência da busca em situações específicas e para determinadas distribuições de tamanhos de passos implica diretamente em uma possível extremização (maximização ou minimização) da entropia de Shannon associada. Nós estudamos três das principais quantidades (eficiência, probabilidades do caminhante encontrar cada sítio-alvo e a entropia de Shannon) relevantes ao problema da busca aleatória. Utilizando técnicas e conceitos da Física Estatística conseguimos abordar e modelar o problema da busca aleatória, sendo a nossa principal fonte de inspiração o problema ecológico da busca de alimentos por diversas espécies de animais (problema do *foraging*). Realizamos a análise descrita para três distribuições de probabilidades de tamanhos de passos do buscador: distribuição do tipo lei de potência / Lévy e as distribuições hiperexponenciais simples e dupla. Obtivemos uma expressão analítica para a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos e para a eficiência da busca. Calculamos também as probabilidades do buscador encontrar os sítios-alvo em uma dimensão, as quais permitem obter a entropia de Shannon associada ao problema da busca. Analisamos ambos os casos de buscas não-destrutivas, em que um dos sítios-alvo encontra-se inicialmente próximo ao buscador, e buscas destrutivas, em que ambos os sítios encontram-se distantes do ponto de partida da busca. Concluimos que o mecanismo que maximiza a eficiência da busca não-destrutiva de Lévy e da exponencial dupla não impacta a entropia de Shannon associada, a qual apresenta um comportamento monotônico (sem nenhum extremo, seja máximo ou mínimo) mesmo quando a eficiência atinge um máximo. Além disso, encontramos que a distribuição de passos do tipo exponencial dupla pode ser mais eficiente do que a distribuição de Lévy em determinados contextos das buscas não-destrutivas, confirmando resultados previamente publicados.

**Palavras-chave:** Buscas aleatórias. Entropia de Shannon. Caminhadas aleatórias. Distribuições de probabilidades.

## ABSTRACT

In this work we study the behavior of the Shannon entropy associated with the problem of the one-dimensional random walker in search of target sites whose location is unknown (the random search problem). One of our main objectives is to investigate whether the mechanism governing the maximization of the search efficiency in specific situations and for certain distributions of step lengths directly implies a possible extremization (maximization or minimization) of the associated Shannon entropy. We study three of the major quantities (efficiency, probabilities to find each target site and Shannon entropy) relevant to the random search problem. Using the techniques and concepts of Statistical Physics we have been able to approach and model the problem of random searches, whose main source of inspiration was the ecological problem of the search for food by several species of animals (the foraging problem). We perform the analysis for three distributions of probabilities of step sizes of the searcher: power law / Lévy distribution and the simple and double hyperexponential distributions. We obtain an analytical expression for the mean distance traveled between two successive encounters and for the efficiency of the search. We also calculate the probabilities of the searcher to find the target sites in one dimension, which allow to obtain the Shannon entropy associated with the search problem. We analyze both cases of non-destructive searches, in which one of the target sites is initially close to the searcher, and destructive searches, in which both sites are far from the starting point of the search. We conclude that the mechanism that maximizes the efficiency of the non-destructive search of Lévy and double exponential distributions does not impact the associated Shannon entropy, which presents a monotonic behavior (with no extreme, either maximum or minimum) even when the efficiency reaches a maximum. In addition, we found that the double-exponential distribution can be more efficient than the Lévy distribution in certain contexts of the non-destructive searches, thus confirming previously published results.

**Key-words:** Random searches. Shannon Entropy. Random walks. Probability distributions.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Claude Shannon com Theseus, o camundongo eletrônico, por volta da década de 1950. . . . .  | 29 |
| Figura 2 – Esquema de uma busca aleatória em duas dimensões [19]. Em <b>(a)</b> vemos um sítio-alvo (quadrado preto) localizado dentro de um raio de visão $r_v$ , de modo que a regra 1 entra em vigor, ou seja, o caminhante se move até ele em linha reta. Já em <b>(b)</b> vemos a representação do que acontece quando o caminhante ainda não encontra um sítio-alvo, ou seja, ele escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo $\ell_j$ a partir de um sorteio regido por uma distribuição $p(\ell)$ . . . . . | 33 |
| Figura 3 – Caminhante aleatório em 1D à procura dos sítios-alvo localizados em $x = 0$ e $x = \lambda$ , com $r_v$ denotando o raio de visão do buscador. . . . .   | 34 |
| Figura 4 – Claude Elwood Shannon, o pai da teoria da informação. . . . .  | 59 |
| Figura 5 – Entropia de Shannon em função da probabilidade $P_1$ de cair a face “Cara” referente ao lançamento de uma moeda. . . . .   | 61 |
| Figura 6 – Eficiência $\eta$ em função de $\mu$ para buscas de Lévy não-destrutivas. A eficiência máxima da busca é obtida para $\mu \cong 2$ . Os parâmetros utilizados foram $\Delta x = 0, 2$ , $r_v = \ell_0 = 1$ , $\lambda = 1000$ e $x_0 = 2r_v = 2\ell_0 = 2$ . . . . .   | 64 |
| Figura 7 – Eficiência $\eta$ em função de $\mu$ para buscas de Lévy não-destrutivas. A linha preta tracejada representa a curva publicada no artigo [19] na situação em que o tamanho $\tau$ do maior passo da busca é ilimitado, isto é, $\tau = \infty$ . Já os círculos vermelhos são os pontos referentes aos nossos resultados. . . . .  | 65 |
| Figura 8 – Probabilidades $P_0$ e $P_\lambda$ de o caminhante encontrar os sítios em $x = 0$ e $x = \lambda$ , respectivamente, em função do expoente $\mu$ para o caso não-destrutivo de Lévy. Neste gráfico foram usados os parâmetros $\Delta_x = 0, 2$ , $r_v = \ell_0 = 1$ , $\lambda = 10^3$ , $x_0 = 2$ e $1 < \mu \leq 3$ , com espaçamentos $d\mu = 0, 1$ . . . . .  | 66 |
| Figura 9 – Entropia de Shannon $S$ em função do expoente $\mu$ para buscas de Lévy não-destrutivas. Os parâmetros usados foram $\Delta x = 0, 2$ , $\lambda = 1000$ , $r_v = \ell_0 = 1$ , $x_0 = 2$ e $1 < \mu \leq 3$ . . . . .   | 68 |
| Figura 10 – Eficiência $\eta$ em função do parâmetro $d$ para buscas não-destrutivas realizadas com uma distribuição de passos do tipo exponencial simples. Os círculos vermelhos representam os nossos resultados, enquanto a linha sólida representa o cálculo teórico exato de Weiss [64]. Para este gráfico foram utilizados os parâmetros $\Delta x = 0, 2$ , $x_0 = 2$ , $\ell_0 = \Delta x = 0, 2$ , $\lambda = 1000$ e $0 < d \leq 100$ . . . . .   | 70 |

- Figura 11 – Probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  do caminhante encontrar um sítio respectivamente em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  em função do parâmetro  $d$ .  $P_\lambda$  cresce à medida  $d$  aumenta, enquanto  $P_0$  atinge seu valor máximo para  $d \approx 0$ . Os parâmetros configurados foram  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 1000$ . . . . . 72
- Figura 12 – Entropia de Shannon  $S$  em função do parâmetro  $d$  para buscas aleatórias não-destrutivas realizadas com a pdf exponencial simples para os tamanhos de passos. Os parâmetros utilizados para gerar esta curva foram  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 1000$ . . . . . 73
- Figura 13 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro  $w_1$  da pdf exponencial dupla de tamanhos de passos no caso da busca não-destrutiva. Observamos um mínimo da distância média entre dois alvos sucessivos. Os parâmetros utilizados foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ . . . . . 75
- Figura 14 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla no caso não-destrutivo. Constatamos o excelente acordo entre os nossos resultados (círculos vermelhos) e aqueles da referência [48], tanto no que diz respeito ao cálculo analítico (linha sólida) quanto à simulação numérica (círculos azuis) (a linha pontilhada corresponde à aproximação  $\lambda \rightarrow \infty$  no cálculo analítico em [48]). . . . . 76
- Figura 15 – Eficiência  $\eta$  em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla no caso não-destrutivo. Para esta curva foram utilizados os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ . . . . . 77
- Figura 16 – Probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  do caminhante encontrar um sítio respectivamente em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  em função do parâmetro  $w_1$  no caso de buscas não-destrutivas realizadas com a pdf exponencial dupla. Observamos que o valor máximo de  $P_\lambda$  ocorre para  $w_1 \rightarrow 1$ . Já  $P_0$  decai à medida que  $w_1 \rightarrow 1$ . Gráfico gerado com os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $x_0/\lambda = 0,002$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ . . . . . 78
- Figura 17 – Entropia de Shannon  $S$  em função do parâmetro  $w_1$  para buscas aleatórias não-destrutivas realizadas com a pdf exponencial dupla para os tamanhos de passos. Observamos um crescimento monotônico de  $S$  quando  $w_1 \rightarrow 1$ . A respectiva curva foi gerada utilizando-se dos seguintes parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $x_0/\lambda = 0,002$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ . . . . . 79

|  |    |
|--|----|
| Figura 18 – Eficiência $\eta$ em função do parâmetro $\mu$ para buscas de Lévy destrutivas. A eficiência máxima da busca é obtida para $\mu \cong 1$ . Os parâmetros utilizados foram $\Delta x = 0, 2$ , $r_v = \ell_0 = 1$ , $\lambda = 1000$ , $x_0 = \lambda/2 = 500$ com $1 < \mu \leq 3$ para pequenas variações $d\mu = 0, 1$ . . . . .   | 81 |
| Figura 19 – Eficiência $\eta$ em função do parâmetro $d$ para buscas destrutivas com a pdf exponencial simples. Para este gráfico configuramos os parâmetros $\Delta x = 0, 2$ , $\ell_0 = \Delta x = 0, 2$ , $\lambda = 1000$ , $0 < d \leq 100$ e $x_0 = \lambda/2$ . . . . .  | 82 |
| Figura 20 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos, $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro $w_1$ da exponencial dupla no caso de buscas destrutivas. Os parâmetros utilizados para obtenção da curva foram $\lambda = 10^3$ , $x_0/\lambda = 0, 1$ , $d_1 = 10^6$ e $d_2 = x_0 = 100$ . . . . .  | 83 |
| Figura 21 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos, $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro $w_1$ da exponencial dupla no caso de buscas destrutivas. Constatamos o excelente acordo entre os nossos resultados (círculos vermelhos) e aqueles da referência [48] utilizando os mesmos parâmetros, tanto no que diz respeito ao cálculo analítico (linha sólida) quanto à simulação numérica (círculos azuis) (a linha pontilhada corresponde à aproximação $\lambda \rightarrow \infty$ no cálculo analítico em [48]). . . . . | 84 |
| Figura 22 – Eficiência $\eta$ em função do parâmetro $w_1$ da exponencial dupla no caso de buscas destrutivas. Os parâmetros utilizados foram $\Delta x = 0, 2$ , $\ell_0 = \Delta x = 0, 2$ , $\lambda = 1000$ , $0 < d \leq 100$ e $x_0 = \lambda/2$ . . . . .   | 85 |
| Figura 23 – Probabilidades $P_0$ e $P_\lambda$ do caminhante encontrar um sítio respectivamente em $x = 0$ e $x = \lambda$ em função do parâmetro $\mu$ no caso de buscas destrutivas de Lévy. Observamos que $P_0$ e $P_\lambda$ permanecem constantes no valor 0,5 independentemente de $\mu$ . Para este gráfico utilizamos $\Delta x = 0, 2$ , $r_v = \ell_0 = 1$ , $\lambda = 1000$ e $1 < \mu \leq 3$ como parâmetros numéricos.   | 86 |
| Figura 24 – Entropia de Shannon $S$ em função do parâmetro $\mu$ para buscas destrutivas de Lévy. Notamos que a entropia de Shannon permanece constante em seu máximo valor possível para qualquer $\mu$ . Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram $\Delta x = 0, 2$ , $r_v = \ell_0 = 1$ , $\lambda = 1000$ com $1 < \mu \leq 3$ e $x_0 = \lambda/2$ . . . . .  | 87 |

## SUMÁRIO

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO GERAL</b> . . . . .   | <b>14</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Um panorama histórico</b> . . . . .  | <b>14</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Principais modelos de buscas aleatórias</b> . . . . .  | <b>16</b> |
| <b>1.3</b> | <b>O Teorema do Limite Central</b> . . . . .  | <b>17</b> |
| 1.3.1      | Distribuições contínuas . . . . .   | 18        |
| 1.3.2      | Probabilidade conjunta . . . . .  | 19        |
| 1.3.3      | Demonstração do Teorema do Limite Central . . . . .   | 21        |
| <b>1.4</b> | <b>O Teorema do Limite Central generalizado</b> . . . . .   | <b>22</b> |
| <b>1.5</b> | <b>A distribuição de Lévy e o problema da busca aleatória</b> . . . . .   | <b>23</b> |
| <b>1.6</b> | <b>As distribuições hiperexponenciais</b> . . . . .   | <b>26</b> |
| <b>1.7</b> | <b>Fundamentos da Teoria da Informação</b> . . . . .  | <b>27</b> |
| 1.7.1      | Aspectos biográficos e do pensamento de Claude Shannon . . . . .  | 27        |
| 1.7.2      | Princípio do conceito de entropia utilizado por Shannon . . . . .   | 29        |
| <b>2</b>   | <b>TEORIA GERAL DE BUSCAS ALEATÓRIAS EM UMA DIMENSÃO</b>  | <b>32</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Introdução a um modelo de buscas aleatórias</b> . . . . .  | <b>32</b> |
| 2.1.1      | Buscas aleatórias em uma dimensão . . . . .   | 33        |
| <b>2.2</b> | <b>Abordagem analítica de <math>\langle L \rangle</math> e <math>\langle n \rangle</math></b> . . . . .   | <b>34</b> |
| 2.2.1      | Determinação de $\langle L \rangle$ e $\langle n \rangle$ . . . . .   | 38        |
| 2.2.2      | A eficiência da busca . . . . .   | 40        |
| <b>2.3</b> | <b>Cálculo discreto no espaço de busca</b> . . . . .  | <b>41</b> |
| <b>2.4</b> | <b>Estudo das probabilidades <math>P_0</math> e <math>P_\lambda</math></b> . . . . .  | <b>43</b> |
| 2.4.1      | Análise qualitativa de $P_0$ e $P_\lambda$ . . . . .  | 43        |
| 2.4.2      | Cálculo explícito de $P_0$ e $P_\lambda$ . . . . .  | 44        |
| <b>2.5</b> | <b>Abordagem analítica de <math>\langle  \ell  \rangle</math>, <math>A</math> e <math>\mathcal{P}</math> para algumas distribuições de tamanhos de passos</b> . . . . . | <b>45</b> |
| 2.5.1      | Cálculo de $\langle  \ell  \rangle$ , $A_{ij}$ e $\mathcal{P}$ para a distribuição de Lévy . . . . .  | 45        |
| 2.5.2      | Cálculo de $\langle  \ell  \rangle$ , $A_{ij}$ e $\mathcal{P}$ para a exponencial simples . . . . .   | 49        |
| 2.5.3      | Cálculo de $\langle  \ell  \rangle$ , $A_{ij}$ e $\mathcal{P}$ para a exponencial dupla . . . . .   | 51        |
| <b>3</b>   | <b>A TEORIA DA INFORMAÇÃO</b> . . . . .   | <b>55</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Conceito de Informação</b> . . . . .   | <b>55</b> |
| <b>3.2</b> | <b>A Entropia segundo Claude Shannon</b> . . . . .  | <b>57</b> |
| <b>4</b>   | <b>ANÁLISE DA ENTROPIA DE SHANNON EM BUSCAS ALEATÓRIAS 1D</b> . . . . .   | <b>63</b> |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Buscas não-destrutivas</b>   | <b>63</b> |
| 4.1.1      | Distribuição de Lévy  | 63        |
| 4.1.1.1    | <i>Eficiência da busca</i>  | 63        |
| 4.1.1.2    | <i>Probabilidades <math>P_0</math> e <math>P_\lambda</math></i>                             | 65        |
| 4.1.1.3    | <i>Entropia de Shannon</i>  | 67        |
| 4.1.2      | Distribuição exponencial simples  | 69        |
| 4.1.2.1    | <i>Eficiência da busca</i>  | 70        |
| 4.1.2.2    | <i>Probabilidades <math>P_0</math> e <math>P_\lambda</math></i>                             | 71        |
| 4.1.2.3    | <i>Entropia de Shannon</i>  | 72        |
| 4.1.3      | Distribuição exponencial dupla  | 74        |
| 4.1.3.1    | <i>Eficiência da busca</i>  | 74        |
| 4.1.3.2    | <i>Probabilidades <math>P_0</math> e <math>P_\lambda</math></i>                             | 77        |
| 4.1.3.3    | <i>Entropia de Shannon</i>  | 79        |
| <b>4.2</b> | <b>Buscas destrutivas</b>   | <b>80</b> |
| 4.2.1      | Distribuição de Lévy  | 81        |
| 4.2.1.1    | <i>Eficiência da busca</i>  | 81        |
| 4.2.2      | Exponencial simples   | 82        |
| 4.2.2.1    | <i>Eficiência da busca</i>  | 82        |
| 4.2.3      | Exponencial dupla   | 83        |
| 4.2.3.1    | <i>Eficiência da busca</i>  | 83        |
| 4.2.3.2    | <i>Probabilidades <math>P_0</math> e <math>P_\lambda</math> para a distribuição de Lévy</i> | 85        |
| 4.2.3.3    | <i>Entropia de Shannon para a distribuição de Lévy</i>                                      | 86        |
| <b>5</b>   | <b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>  | <b>89</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS</b>  | <b>91</b> |

## 1 INTRODUÇÃO GERAL

Considere um modelo de comportamento ecológico no qual animais estão procurando por comida em uma região totalmente desconhecida. Qual seria a maneira mais eficiente desses animais encontrarem essas fontes de alimentos? Este problema de natureza biológica, também conhecido como problema de *foraging* [1], pode ser atacado por métodos da Física Estatística se fizermos algumas aproximações, tal como considerarmos o buscador ou *forager* como uma partícula em movimento que eventualmente encontra um sítio-alvo. No contexto mais geral da Física Estatística, esse problema é tradicionalmente conhecido como o problema da busca aleatória ou *random search*. Partindo dessa motivação biológica, podemos selecionar e abordar conceitos pertencentes aos domínios da Física Estatística, tal como a teoria de caminhadas aleatórias, para abordar o problema de *foraging*. Essa interligação está diretamente relacionada ao fato de que se analisarmos o comportamento de animais em processo de busca em regiões onde há escassez de alimentos, observamos matematicamente um padrão de busca diferente daquele induzido por uma distribuição de passos governada pelo Teorema do Limite Central [2] [3] [4] [5]. Esse comportamento diz respeito diretamente ao Teorema do Limite Central generalizado, como veremos mais adiante.

### 1.1 Um panorama histórico

As primeiras motivações para se iniciar o estudo do caminhante aleatório estão intimamente ligadas à descrição do movimento irregular do pó de carvão suspenso em álcool, realizada em 1785 por Jan Ingenhousz, um biólogo e químico holandês [6]. Algumas décadas depois (1827), novas constatações foram feitas pelo botânico Robert Brown acerca de um suposto movimento irregular de partículas de pólen suspensas em um fluido em repouso [7], dinâmica que hoje se denomina movimento browniano.

Mesmo com alguns trabalhos relativos a essa questão com base na teoria de probabilidades, o tema do movimento browniano não pareceu estimular um grande interesse científico no princípio do século XIX. Apenas no início do século XX foi que o tema começou a se tornar mais atraente no meio da comunidade científica, quando o matemático francês Louis Bachelier defendeu sua tese denominada *Teoria da Especulação* no qual ele usou o movimento browniano como modelo para performance de bolsas de valores [8]. Outro acontecimento que deu notoriedade ao assunto foi quando o debate entre Karl Pearson [9] e Lord Rayleigh [10] veio a público. Cientistas de grande relevância, como Albert Einstein [11] [12] e Marian Smoluchowski [13], também começaram a investigar esta “nova” corrente na ciência e muitos conceitos produtivos surgiram, como ruídos aleatórios, análise espectral e processos aleatórios [14].

O problema do caminhante aleatório no contexto das buscas aleatórias tem sido estudado com bastante vigor desde 1960, tendo em vista que o mesmo tem aplicações relevantes em sistemas biológicos [1]. Essas colaborações interdisciplinares envolvendo biólogos, matemáticos e físicos se beneficiaram, por exemplo, do avanço em técnicas de abordagens com origem na Física Estatística. Uma das muitas vantagens foi o desenvolvimento de vários modelos teóricos para estudar o problema [1] [15]. Portanto, podemos então citar alguns destes modelos tais como: as caminhadas aleatórias com correlação (*correlated random walks*) [16], os modelos de buscas intermitentes (*intermittent searches*) [17] e os voos ou caminhadas de Lévy (*Lévy flights or walks*) [18] [19]. Por exemplo, nas caminhadas aleatórias correlacionadas é introduzida uma correlação de curto alcance entre as direções de passos subsequentes [16] na tentativa de explicar o comportamento animal de se manter em uma dada direção por um longo tempo. Nos dias atuais utilizam-se modelos mais modernos como o da busca aleatória adaptativa, onde se tem uma modelagem matemática apresentada na forma de um problema “não linear inteiro integral com variáveis binárias” [20]. Também existem modelos no qual o caminhante realiza uma busca composta, onde ocorre uma alternância de buscas extensivas e intensivas [21]. Além disso, têm sido utilizadas também as caminhadas ditas *self-avoiding walks* (SAWs) nas quais o caminhante não pode retornar a um sítio previamente visitado. Como tal, as SAWs também podem levar a algoritmos de buscas eficazes. No entanto, não é realista que o buscador memorize muitas posições visitadas por um longo tempo [22]. Todos os modelos citados foram desenvolvidos para atacar problemas do tipo caminhantes aleatórios (*random walks*). Assim, trazendo para o contexto ecológico, em todos estes casos foi considerado que predadores à procura de alimentos em uma região desconhecida comportam-se como buscadores aleatórios.

É importante salientarmos que o modelo do caminhante aleatório não serve apenas para mapear o comportamento de um animal à procura de alimentos. Ele pode também ser aplicado na extração de petróleo [23] [24], em computadores procurando por informações aleatórias [25] e também para explicar o comportamento dos fótons espalhados em lasers aleatórios [26]. Sendo assim, tentaremos em seguida descrever nosso estudo de forma bastante geral à luz da Física Estatística, para que possamos ter a liberdade de aplicar a teoria em qualquer outra situação similar.

Nas próximas seções discutiremos com mais profundidade os principais modelos que abordam o problema do caminhante aleatório. Em seguida discutiremos o Teorema do Limite Central (TLC) e sua forma generalizada, com a finalidade de mostrarmos a diferença entre as buscas do tipo de Lévy e as buscas realizadas com outras distribuições de passos governadas pelo TLC. Por fim, introduziremos os fatores que motivaram Claude E. Shannon a desenvolver a Teoria da Informação. Em especial, procuraremos aplicar a medida de entropia de Shannon ao problema da busca aleatória, o que será um de nossos principais objetos de estudo nessa dissertação.

## 1.2 Principais modelos de buscas aleatórias

No início dos estudos das buscas aleatórias, os modelos que surgiam eram relativamente mais simples pois não envolviam nenhum tipo de correlação entre os passos e desconsideravam qualquer tipo de tendência na busca. Por exemplo, a ausência de correlação direcional significa que a direção do passo atual do movimento não depende das direções anteriores tomadas pelo caminhante. A falta de tendência direcional no movimento significa que não há nenhuma direção privilegiada para os deslocamentos, implicando que a execução de cada passo em qualquer direção é igualmente provável. Além disso, na ausência de correlações em geral o tamanho do passo atual também não é influenciado pelos tamanhos prévios. Como consequência, nesse caso a posição do buscador após cada passo dado é dependente apenas da posição do último passo, ou seja, o processo é dito markoviano [27].

A partir dos anos 1990 o assunto ganhou um interesse renovado, principalmente no contexto biológico / ecológico no qual se procurava estudar a maneira mais eficiente de um animal em uma região desconhecida encontrar recursos alimentícios. Começaram então a surgir modelos mais complexos. O primeiro modelo a ser mais utilizado para buscas aleatórias realizadas por organismos biológicos era um aperfeiçoamento das então caminhadas brownianas [28] [29] [30] [31]. Estas foram batizadas de caminhadas aleatórias correlacionadas (CRWs), onde agora havia uma correlação entre as sucessivas orientações de passos [32]. O motivo para a incrementação desta propriedade é uma suposta tendência dos animais preferirem seguir ao longo da direção do passo anterior, o que acarretou em um maior uso dessa propriedade direcional para analisar o deslocamento animal em inúmeras situações [33] [34] [35]. Como vimos, o refinamento deste modelo introduz uma predisposição para uma determinada direção local, isto é, cada passo tende a apontar na mesma direção do anterior. Contudo, a influência da direção inicial no movimento diminui com o passar do tempo, de modo que, no final, a orientação dos passos se estabelece distribuída uniformemente após um número grande dos mesmos. As caminhadas aleatórias correlacionadas, assim como o movimento browniano, se submetem ao Teorema do Limite Central, ou seja, tendem a uma distribuição normal de distâncias percorridas após um grande número de passos.

Com o passar dos anos, um outro modelo de busca aleatória foi apresentado, as chamadas caminhadas aleatórias intermitentes. Estas trouxeram a inovação ao caracterizar a dinâmica da busca em dois tipos ou fases: uma fase onde o caminhante apresenta movimentos de maior extensão (caráter balístico), na qual o mesmo não é receptivo ao alvo, e outra fase na qual o caminhante realiza um movimento browniano durante o qual uma varredura local detalhada do espaço de busca é realizada, ocorrendo nesta fase a possível detecção do alvo [34] [35] [17] [36] [37]. Neste método, a duração relativa entre uma fase e outra pode variar, de modo a gerar a estratégia ótima para solucionar o problema. Contudo,

no final este método ainda se submete ao TLC, tendendo a uma distribuição gaussiana de distâncias percorridas quando o número de passos é muito grande. Comparado com as buscas aleatórias comuns, este modelo demonstrou ser bem mais eficiente [38]. Algumas mudanças mais atuais nesse modelo incluem também a consideração de distribuições de tamanhos de passos ditas com caudas longas, por exemplo do tipo lei de potência, na fase de reposição [38].

Em meados da década de 1990 o interesse no problema de *foraging* aumentou consideravelmente por conta de novas ferramentas teóricas desenvolvidas no contexto da Física Estatística e de Sistemas Complexos, tais como dinâmica superdifusiva, geometria fractal, funções de correlação, processos de primeira passagem e ideias de escalas [18]. Assim, com esses avanços surgia a orientação teórica de que voos de Lévy poderiam ser uma estratégia mais vantajosa para o caminhante [19] (ver a seguir). Pouco tempo depois, foi constatado experimentalmente [2] que animais sob certas condições, especialmente no regime de baixa concentração de alimentos e desconhecimento da localização dos sítios-alvo, não têm a distribuição dos tamanhos de passos regida pela distribuição gaussiana, e sim por distribuições de Lévy. Estes experimentos amadureceram a hipótese de que a distribuição de Lévy pode ter sido escolhida evolutivamente por dar mais vantagens para o caminhante, reforçando a ideia de que os voos de Lévy são mais eficientes que as demais estratégias de busca até então investigadas [3].

A principal diferença entre as classes de distribuições gaussianas e as de Lévy ocorre quando observamos o comportamento do caminhante para passos muito longos, ou seja, distribuições de tamanhos de passos de Lévy decaem muito mais lentamente com a distância do que distribuições gaussianas, de forma que a probabilidade de ocorrer grandes passos numa distribuição de Lévy é consideravelmente maior do que numa distribuição regida pelo TLC, conforme abordaremos a seguir.

### 1.3 O Teorema do Limite Central

Nesta seção discutiremos uma das principais ferramentas utilizadas em sistemas com algum grau de aleatoriedade no que diz respeito à Física Estatística: o Teorema do Limite Central (TLC). De fato, o TLC constitui o principal motivo da grande aplicabilidade das distribuições gaussianas no âmbito científico geral [39]. Muitos sistemas simples de caráter aleatório satisfazem suas poucas condições (ver a seguir), o que deixou quase sempre marcada a presença da distribuição normal na explicação desses fenômenos.

### 1.3.1 Distribuições contínuas

Suponha que lidamos com uma variável  $x$  e queremos saber a probabilidade de, ao medirmos  $x$ , encontrarmos algum valor  $X$  entre  $x$  e  $x + dx$ ,

$$P(x \leq X \leq x + dx) = p(x) dx, \quad (1.1)$$

onde  $X$  é o valor medido e  $p(x)$  é a *função densidade de probabilidade* (pdf), de modo que a  $p(x)$  em questão está devidamente normalizada.

As distribuições contínuas também estão munidas de algumas propriedades que se encontram em distribuições discretas, sendo essas:

#### O valor esperado de $F(x)$ :

$$\langle F(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) F(x). \quad (1.2)$$

Observamos que sendo  $x$  uma variável aleatória,  $F(x)$  também se caracteriza como aleatória, e assim também é descrita por uma pdf.

#### Momentos da distribuição:

$$\xi_n \equiv \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n p(x). \quad (1.3)$$

É comum também definir os momentos centrados  $\bar{\xi} \equiv \langle (x - x_1)^n \rangle$ , entre os quais a variância, a assimetria e a curtose.

Convém a partir deste momento introduzir o conceito de *função característica*,

$$\tilde{p}(k) = F.T [p(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \exp(-ikx), \quad (1.4)$$

que nada mais é do que a transformada de Fourier da pdf, que pode ser recuperada simplesmente pela transformada inversa dada por

$$p(x) = I.F.T [\tilde{p}(k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{p}(k) \exp(ikx). \quad (1.5)$$

Expandindo  $\exp(-ikx)$  em série de Taylor na Eq. (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} x^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle, \end{aligned} \quad (1.6)$$

ou seja,  $\tilde{p}(k)$  pode ser construída a partir dos momentos de  $p(x)$ . Multiplicando a Eq. (1.6) por  $\exp(ikx_0)$ , podemos obter momentos em relação a um valor de referência  $x_0$ , os chamados *momentos centrais*,

$$\begin{aligned} \exp(ikx_0) \tilde{p}(k) &= \int \frac{dk}{2\pi} p(x) \exp(-ik(x - x_0)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle (x - x_0)^n \rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Por fim, definimos os *cumulantes* da seguinte maneira:

$$\ln[\tilde{p}(k)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \kappa_n, \quad (1.8)$$

onde  $\ln(\tilde{p}(k))$  é dita função geratriz dos cumulantes. Substituindo (1.6) no lado esquerdo de (1.8) obtemos

$$\ln(\tilde{p}(k)) = \ln \left( \underbrace{1 - ik\xi_1 - \frac{1}{2}k^2\xi_2 - i\frac{1}{6}k^3\xi_3 + \mathcal{O}(k^4)}_{\Delta} \right), \quad (1.9)$$

com

$$\ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} + \dots \quad (1.10)$$

Assim, comparando os termos e agrupando as potências de  $k$  até  $\mathcal{O}(k^4)$  obtemos

$$\ln(\tilde{p}(k)) = -ik\xi_1 - \frac{k^2}{2} (\xi_2 - \xi_1^2) + i\frac{k^3}{6} (\xi_3 - 3\xi_1\xi_2 + 2\xi_1^3). \quad (1.11)$$

Comparando a expressão acima com (1.8), obtemos os três primeiros cumulantes,

$$\kappa_1 = \xi_1$$

$$\kappa_2 = \xi_2 - \xi_1^2$$

$$\kappa_3 = \xi_3 - 3\xi_1\xi_2 + 2\xi_1^3.$$

Os demais cumulantes podem ser obtidos prosseguindo com a análise em ordens mais altas [40].

Com essa breve introdução revisamos alguns conceitos que serão de grande importância na demonstração do Teorema do Limite Central a seguir. Porém, antes precisamos esclarecer o conceito de probabilidade conjunta para entendermos o procedimento por completo.

### 1.3.2 Probabilidade conjunta

Antes de abordarmos o TLC propriamente dito, esclareceremos a definição do conceito de probabilidade conjunta [40]. Sejam  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  variáveis aleatórias, de modo que definimos

$$\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (1.12)$$

como sendo um vetor no espaço  $N$ -dimensional. Nosso interesse é calcularmos a probabilidade de termos  $\vec{x}$  dentro de um certo elemento de volume do  $N$ -espaço (por exemplo, se  $\vec{x}$  representa o vetor posição  $(x, y, z)$  de moléculas de um gás numa sala, queremos a probabilidade de encontrar uma molécula no elemento de volume  $dV = dx dy dz$ ). Assim,

$$\begin{aligned} P(\vec{x} \leq \vec{X} \leq \vec{x} + d\vec{x}) &= P(x_1 \leq X_1 \leq x_1 + dx_1, \dots, x_N \leq X_N \leq x_N + dx_N) \\ &\equiv p(\vec{x}) dx_1 \dots dx_N, \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde  $p(\vec{x}) = p(x_1, \dots, x_N)$  é a pdf conjunta das variáveis  $x_1, \dots, x_N$  e portanto satisfaz  $p(\vec{x}) \geq 0 \forall \vec{x}$  e  $\int d^N x p(\vec{x}) = 1$ , onde subentende-se que a integração é tomada sobre todo o intervalo de possíveis valores de  $x_1, \dots, x_N$ .

Algumas definições relacionadas à pdf de uma única variável se estendem trivialmente para as pdf's conjuntas, como por exemplo o valor esperado e a função característica, que são dadas por

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \int d^N x f(\vec{x}) p(\vec{x}) \quad (1.14)$$

e

$$\tilde{p}(\vec{k}) = \int d^N x p(\vec{x}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \langle \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \rangle, \quad (1.15)$$

onde  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$  e  $\vec{k} \cdot \vec{x} = \sum_{j=1}^N k_j x_j$  respectivamente. Observe que  $\tilde{p}(\vec{k})$  é a transformada de Fourier  $N$ -dimensional de  $p(\vec{x})$ , de forma que sua transformada inversa é,

$$p(\vec{x}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^N} \tilde{p}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (1.16)$$

Partindo dessas definições, podemos agora definir os **momentos** e **cumulantes**. Nesse caso, a expansão em série de Taylor é multivariável e, portanto, envolve termos cruzados:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\vec{k}) &= \langle \exp(-ik_1 x_1) \dots \exp(-ik_N x_N) \rangle = \left\langle \left( \sum_{n_1}^{n_N} \frac{(-ik_1)^{n_1}}{n_1!} x_1^{n_1} \dots \frac{(-ik_N)^{n_N}}{n_N!} x_N^{n_N} \right) \right\rangle \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! \dots n_N!} \underbrace{\langle x_1 x_2 \dots x_N \rangle}_{\xi_{n_1, \dots, n_N}} (-ik_1)^{n_1} \dots (-ik_N)^{n_N}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde  $\xi_{n_1, \dots, n_N}$  são os respectivos **momentos conjuntos**. Note que os mesmos são os coeficientes da expansão em torno de  $-i\vec{k} = 0$ , isto é,

$$\xi_{n_1, \dots, n_N} = \frac{\partial^{n_1}}{\partial (-ik_1)^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial (-ik_2)^{n_2}} \dots \frac{\partial^{n_N}}{\partial (-ik_N)^{n_N}} \tilde{p}(\vec{k} = 0). \quad (1.18)$$

Realizando um processo análogo, obtemos os **cumulantes conjuntos** que são os coeficientes da expansão de  $\ln \tilde{p}(\vec{k})$  dados por

$$\kappa_{n_1 \dots n_N} = \frac{\partial^{n_1}}{\partial (-ik_1)^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial (-ik_2)^{n_2}} \dots \frac{\partial^{n_N}}{\partial (-ik_N)^{n_N}} \ln \tilde{p}(\vec{k} = 0). \quad (1.19)$$

### 1.3.3 Demonstração do Teorema do Limite Central

Nesta seção enunciaremos o Teorema do Limite Central e o demonstraremos partindo das suas principais características [40].

**Teorema 1** (Teorema do Limite Central). Seja  $C$  um conjunto de  $N$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma função densidade de probabilidade  $p(x)$ , com média  $\langle x \rangle$  e variância  $\langle (\Delta x)^2 \rangle$  finitas. Para  $N \rightarrow \infty$  a distribuição de probabilidade para a soma dos elementos desse conjunto,  $x = \sum_{i=1}^N x_i$ , converge para a distribuição normal,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\lambda)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.20)$$

com média  $m = N\langle x \rangle$  e variância  $\sigma^2 = N\langle (\Delta x)^2 \rangle$ .

Demonstraremos o TLC para o caso de  $N$  variáveis aleatórias independentes sorteadas de uma mesma distribuição  $p(\vec{x})$ , com  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Para realizar este fato, precisamos obter a pdf da variável  $Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - \langle x \rangle)$ , ou seja, estamos interessados no desvio da média das  $N$  medidas em relação ao valor esperado de  $x$ .

Primeiramente, notamos que  $Y = \sum_{j=1}^N \frac{(x_j - \langle x \rangle)}{N} \equiv \sum_{j=1}^N \epsilon_j$ , de modo que agora  $p(\epsilon)$  é a PDF desta nova variável, com

$$\epsilon = \frac{x - \langle x \rangle}{N}. \quad (1.21)$$

Agora, observamos que  $P(\epsilon \leq \epsilon_j \leq \epsilon + d\epsilon) = P(x \leq x_j \leq x + dx)$ . Logo,  $p(\epsilon)d\epsilon = p(x)dx$ , de modo que

$$\tilde{P}_\epsilon(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \exp(-ik\epsilon) p(\epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(\frac{-ik(x - \langle x \rangle)}{N}\right) p(x). \quad (1.22)$$

Expandindo  $\exp\left(\frac{-ik(x - \langle x \rangle)}{N}\right)$ , obtemos

$$\tilde{P}_\epsilon(k) = \left\langle 1 - ik \frac{(x - \langle x \rangle)}{N} + \frac{1}{2} (-ik)^2 \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{N^2} + \dots \right\rangle \quad (1.23)$$

Como  $\sigma = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ , podemos escrever

$$\tilde{P}_\epsilon(k) = 1 - \frac{k^2}{2} \frac{\sigma_x^2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad (1.24)$$

Sendo as  $N$  variáveis independentes então

$$\tilde{P}_Y(k) = \int dx_1 \dots dx_N \exp\left(-ik \sum_{j=1}^N \epsilon_j\right) p(x_1) \dots p(x_N), \quad (1.25)$$

ou

$$\tilde{P}_Y(k) = \left[ \int dx_1 \exp(-ik\epsilon_1) p(x_1) \right]^N, \quad (1.26)$$

o que implica em

$$\ln \tilde{P}_Y(k) \cong \ln \left( 1 - \frac{k^2 \sigma_x^2}{2N^2} \right)^N \cong -\frac{k^2 \sigma_x^2}{2N}. \quad (1.27)$$

Logo, fazendo  $N \rightarrow \infty$  concluímos que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{P}_Y(k) = \exp\left(-\frac{k^2 \sigma_x^2}{2N}\right)$ . Tomando a transformada de Fourier inversa, finalmente obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left( Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j - \langle x \rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y}} \exp\left(\frac{-Y^2}{2\sigma_Y^2}\right) \quad (1.28)$$

onde  $\sigma_Y = \sigma_x/\sqrt{N}$  é o desvio padrão da média das  $N$  medidas.

Assim, observamos que a pdf correspondente à soma das variáveis aleatórias  $x_i$  converge para a distribuição gaussiana no limite de  $N \rightarrow \infty \forall p(x)$  com *cumulantes finitos*, o que caracteriza essencialmente o Teorema do Limite Central. Em nossa demonstração supomos  $\{x_i\}$  independentes, porém, o teorema vale mesmo se os  $\{x_i\}$  forem dependentes em curto alcance.

Para o caso em que  $p(x)$  possui cumulantes infinitos, como por exemplo, quando  $p(x) \approx 1/|x|^{1+\alpha}$ , com  $0 < \alpha < 2$ , as somas das  $\{x_i\}$  independentes converge para a **distribuição de Lévy** [40] de acordo com TLC generalizado, como veremos na seção seguinte.

## 1.4 O Teorema do Limite Central generalizado

Como vimos, o Teorema do Limite Central estabelece que a soma das variáveis aleatórias com a mesma distribuição de probabilidades, com valores esperados e variâncias finitas, converge para a distribuição normal. Porém, no caso em que  $p(x)$  não possui cumulantes finitos, o que acontece? Nesse caso, a soma ainda converge porém para uma outra família de distribuições chamada de distribuição  $\alpha$ -estável de Lévy. Veremos com detalhe a resposta a essa pergunta à luz da versão generalizada do TLC.

Considere uma soma de  $N$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média definida como zero por conveniência. A variação não existe se a pdf individual cair lentamente para grandes valores, como por exemplo em  $p_i(x) = p_1(x) \propto 1/|x|^{1+\alpha}$ , com  $0 < \alpha \leq 2$ . ( $\alpha > 0$  é necessário para garantir que a distribuição seja normalizável; enquanto para  $\alpha > 2$  a variância é finita.) Realizando a expansão em Taylor do logaritmo da função característica [40], obtemos

$$\ln \tilde{p}_X(k) = N \ln \tilde{p}_1(k) = N[-a|k|^\alpha + \text{termos de ordem superior}]. \quad (1.29)$$

Assim como antes, podemos definir uma variável reescalada  $y = X/N^{1/\alpha}$  com a finalidade de nos livrarmos da dependência de  $N$  no termo principal da equação acima, resultando em

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{p}_y(k) = \exp(-a|k|^\alpha). \quad (1.30)$$

Os termos de ordens mais altas que aparecem na Eq. (1.29) escalam com potências negativas de  $N$  e desaparecem quando  $N \rightarrow \infty$ . De modo geral, as distribuições de Lévy possuem uma função característica que satisfaz a Eq. (1.30), com  $0 < \alpha \leq 2$ . O exemplo mais simples de uma distribuição de Lévy é obtido para  $\alpha = 1$  e corresponde à chamada distribuição de Cauchy, dada por  $p_y = a/[\pi(y^2 + a^2)]$ . Para outros valores de  $\alpha \in (0, 2)$  a distribuição não tem uma forma fechada simples, mas pode ser escrita como a série assintótica

$$p_\alpha(y) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\alpha\right) \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n!} \frac{a^n}{y^{1+n\alpha}}, \quad (1.31)$$

onde  $y \gg 1$ , pois, para  $y = 0$  a série diverge. Mencionamos também que, como a transformada de Fourier de uma função gaussiana também é uma gaussiana, então a Eq. (1.30) mostra que o caso limite  $\alpha = 2$  corresponde, na verdade, à distribuição gaussiana e ao TLC.

Na próxima seção apresentaremos a forma mais geral da família de distribuições  $\alpha$ -estáveis de Lévy.

As distribuições de Lévy com  $0 < \alpha < 2$  descrevem fenômenos com a ocorrência de grandes eventos raros, caracterizados aqui por uma cauda que cai lentamente como  $p_\alpha(y \rightarrow \infty) \sim y^{-(1+\alpha)}$  [40]. Portanto, o comportamento assintótico descrito acima, do tipo lei de potência, também conhecido como cauda longa, permite observar com mais facilidade a divergência de alguns momentos da distribuição. Essa propriedade vai nos motivar a utilizá-la no modelo para buscas aleatórias devido ao fato de apenas com a variação de um único parâmetro ( $\alpha$  ou  $\mu = \alpha + 1$ ) ser possível passar do regime difusivo ( $\alpha = 2$ ) para o superdifusivo ( $0 < \alpha < 2$ ), como veremos a seguir.

## 1.5 A distribuição de Lévy e o problema da busca aleatória

Quando se trata da modelagem para o problema da busca aleatória, a distribuição de Lévy para os tamanhos de passos,  $p(\ell)$ , se encaixa como uma forte candidata, devido à sua maior adequação para levar em conta eventos estatísticos raros, comparativamente com às distribuições gaussianas ou àquelas pdf's de forma geral regidas pelo TLC. As  $p(\ell)$ 's de Lévy já foram utilizadas para modelar o caminho percorrido por um fóton em um meio turbulento [21], para modelar o evento da inversão de pólos magnéticos da Terra [41], e em fisiologia humana cientistas identificaram que o intervalo entre duas batidas do coração satisfaz uma distribuição de Lévy, com valores de  $\mu = \alpha + 1 = 2.7$ , correspondendo

a pessoas saudáveis, e  $\mu = \alpha + 1 > 3$  (comportamento gaussiano) para pessoas com patologias [42].

Enquadrando-se bem em um grande número de eventos estatísticos, a distribuição de Lévy não poderia ficar de fora do problema ecológico de buscas de alimentos [18], uma vez nesse contexto também se observam comportamentos difusivos anômalos, caracterizados por um grande número de pequenos saltos alternados por grandes saltos raros.

Nesse contexto, é importante distinguir entre as caminhadas de Lévy (*Lévy walks*) e os voos de Lévy (*Lévy flights*) [43] [44] [45]. Nos voos de Lévy os passos são instantâneos, isto é, passos sem nenhuma duração, de forma que o caminhante salta entre várias posições no espaço de busca sem que um intervalo de tempo seja definido entre duas posições ocupadas. Daí, observamos que o deslocamento médio quadrático não pode existir em função do tempo. Essa conclusão dificulta a utilização de voos de Lévy em fenômenos físicos realistas. Por outro lado, nas caminhadas de Lévy o buscador viaja com velocidade finita, em geral considerada constante e independente do tamanho do passo. Assim, o tempo para o caminhante percorrer toda a trajetória é proporcional à distância total de todo o percurso, implicando diretamente na existência do deslocamento quadrático médio em função do tempo. Esta propriedade torna as caminhadas de Lévy a candidata ideal para modelar o comportamento de uma partícula em difusão anômala.

Podemos ver na Eq. (1.5) que a distribuição de probabilidades  $p(x, N)$  para a soma de  $N$  passos é dada pela transformada de Fourier inversa da função característica dos passos individuais, apenas utilizando a condição de que as variáveis  $x_i$  são independentes e igualmente distribuídas. Vamos considerar, por hora, que  $\ell$  represente a soma dos comprimentos de  $N$  passos individuais. Fazendo  $x = \ell$ , podemos reescrever a Eq. (1.5) como

$$p(\ell, N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{p}(k) \exp(ik\ell). \quad (1.32)$$

A função característica determina completamente a distribuição de  $\ell$  e possui várias propriedades matemáticas interessantes que nos serão bastante úteis. Em geral, pode-se mostrar [46] que as distribuições estáveis possuem  $\tilde{p}(k)$  na forma

$$\tilde{p}(k) = \begin{cases} \exp[-|k|^\alpha (1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(k))], & \text{para } \alpha \neq 1 \\ \exp[-|k|(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(k) \ln(|k|))], & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.33)$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$  e  $\text{sign}(k)$  é a chamada função sinal. A Eq. (1.33) é uma generalização da função característica da distribuição de Lévy, onde introduziu-se uma fase dependendo do novo parâmetro  $\beta$ , responsável pela assimetria na distribuição, que anteriormente era assumida ser nula. De fato, fazendo  $\beta = 0$  obtemos a função característica da distribuição de Lévy simétrica similar à Eq. (1.30),

$$\tilde{p}(k) = \exp(-a^\alpha |k|^\alpha), \quad (1.34)$$

onde  $a = \ell_0$  é uma constante com dimensão de comprimento. Vimos que o TLC generalizado garante que após um número  $N$  grande de passos a densidade de probabilidade para um deslocamento  $\ell$  em um processo de voo de Lévy converge para uma classe de distribuições de Lévy estáveis denominadas usualmente de distribuições  $\alpha$ -estáveis de Lévy [43] [44] [46]. Portanto, observando que a integração da parte imaginária da função característica se anula, obtemos no caso simétrico,

$$p(\ell, N) = \int_0^\infty \frac{\cos(k\ell)}{\pi} \exp(-N\ell_0^\alpha k^\alpha) dk, \quad (1.35)$$

com  $0 < \alpha \leq 2$ . Para  $0 < \alpha < 2$  a expansão em série de Taylor da expressão acima leva a um decaimento do tipo lei de potência com a distância para  $\ell$  grande:

$$p(\ell, N) = \frac{N\Gamma(\alpha + 1) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi\ell_0} \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{\alpha+1} + \mathcal{O}(\ell^{-2(\alpha+1)+1}). \quad (1.36)$$

Fazendo a substituição  $\mu = \alpha + 1$  obtemos

$$p(\ell, N) = \frac{N\Gamma(\mu) \sin\left(\frac{\pi(\mu-1)}{2}\right)}{\pi\ell_0} \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^\mu + \mathcal{O}(\ell^{-2\mu+1}), \quad (1.37)$$

onde  $\Gamma(\mu)$  é a função gama. Neste trabalho iremos considerar um caminhante aleatório unidimensional com comprimentos de passos individuais  $\ell$  independentes, distribuídos por uma pdf na forma de lei de potência dada por

$$p(\ell) = \frac{A_\ell}{|\ell|^\mu}, \text{ se } |\ell| \geq \ell_0, \quad (1.38)$$

onde caso contrário  $p(\ell) = 0$ , devido ao truncamento inferior em  $\ell = \ell_0$ , pois distribuições com  $\ell_0 = 0$  não são normalizáveis. A partir deste momento associaremos também passos de tamanhos negativos ( $|\ell| = -\ell$ ) com os deslocamentos para a esquerda e passos de tamanhos positivos com deslocamentos para a direita, com passos de tamanhos idênticos em qualquer dos dois sentidos sendo equiprováveis. Com essas considerações podemos normalizar a  $p(\ell)$  acima e obter a expressão para  $A_\ell$ . Sendo assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\ell) d\ell = A_\ell \int_{-\infty}^{-\ell_0} \frac{d\ell}{|\ell|^\mu} + A_\ell \int_{\ell_0}^{+\infty} \frac{d\ell}{|\ell|^\mu} = 1. \quad (1.39)$$

Substituindo  $u = -\ell \rightarrow du = -d\ell$  e ajustando os limites de integração na primeira integral, temos

$$A_\ell \int_{\infty}^{\ell_0} \frac{-du}{|-u|^\mu} = A_\ell \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{du}{|u|^\mu}, \quad (1.40)$$

o que deixa a integral acima igual à segunda. Assim, resolvendo as duas partes temos

$$\begin{aligned} 2A_\ell \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{d\ell}{|\ell|^\mu} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\ell_0^{1-\mu}}{\mu-1} &= \frac{1}{2A_\ell} \\ \Rightarrow A_\ell &= \frac{(\mu-1)}{2} \ell_0^{\mu-1}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Observamos que para a distribuição não divergir precisamos impor  $\mu > 1$ . Desta forma, podemos reescrever a nossa distribuição como

$$p(\ell) = \frac{A_\ell}{|\ell|^\mu} = \frac{(\mu - 1)}{2} \ell_0^{\mu-1} \frac{1}{|\ell|^\mu}, \text{ se } |\ell| \geq \ell_0. \quad (1.42)$$

Em nosso trabalho, denominaremos a equação acima como **distribuição de Lévy**, embora a mesma corresponda de fato apenas ao seu limite assintótico. De fato, ao compararmos a Eq. (1.42) com o limite assintótico para as distribuições  $\alpha$ -estáveis de Lévy, notamos que se escolhermos  $N^{-1} = 2\Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2)/(\pi\alpha)$  o comportamento assintótico desta é idêntico ao da Eq. (1.42).

## 1.6 As distribuições hiperexponenciais

No início da década de 1980, Hughes e colaboradores demonstraram rigorosamente que as caminhadas de Lévy podem surgir das chamadas caminhadas aleatórias de Weierstrass, cuja distribuição de tamanho de passos é dada por um soma infinita de funções governadas pelo TLC (*Gaussian-attracted*) com relações matemáticas específicas entre seus parâmetros [47].

Um exemplo dessa caminhada de Weierstrass é a pdf hiperexponencial para o tamanho dos passos:

$$p(\ell) = \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{d_i} \exp\left(\frac{-\ell}{d_i}\right), \quad (1.43)$$

onde  $N \rightarrow \infty$ ,  $d_i$  representa o tempo de persistência e  $w_i$  os seus respectivos pesos, os quais obedecem a condição de normalização  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  [48]. No trabalho de Hughes et al. [47], os parâmetros  $d_i$  e  $w_i$  precisam obedecer determinadas relações matemáticas a fim de que o resultado da soma tenha segundo momento infinito, sendo portanto regido pelo TLC generalizado.

Devido à soma de funções na Eq. (1.43) as caminhadas de Weierstrass podem ser classificadas como caminhadas aleatórias correlacionadas compostas (CCRW) [47]. Mais recentemente (2014), Reynolds considerou a Eq. (1.43) mas para  $N$  finito. Nesse caso, a rigor caminhadas de Lévy não podem ser obtidas. Contudo, ao aplicar a expressão hiperexponencial com  $N = 3$  a dados de espécies de mexilhões (*Mytilus edulis*) em processo de *foraging*, Reynolds mostrou que uma CCRW trimodal pôde descrever adequadamente os padrões de movimento [49]. Nesse caso, é interessante notar que a distribuição de tamanhos de passos possui três escalas de comprimento típicas,  $(d_1, d_2, d_3)$ . O fato da Eq. (1.43) ter descrito tão bem o movimento dessa espécie, que anteriormente havia sido explicado com base na distribuição do tipo lei de potência (em princípio com infinitas escalas) [47], reacendeu o debate de quantas escalas deveriam ser necessárias para uma

busca eficiente. De fato, durante a formação de padrões espaciais no caso dos mexilhões podem ser considerados satisfatoriamente apenas os três primeiros níveis numa hierarquia de padrões de movimentos. Este resultado mostrou ainda que o CCRW pode descrever adequadamente não apenas os padrões de movimento dos mexilhões [49].

Em nosso estudo trabalharemos com as distribuições hiperexponenciais nos casos particulares de  $N = 1$  (exponencial simples) e  $N = 2$  (exponencial dupla). É nosso objetivo comparar a eficiência e a entropia de Shannon associadas a essas buscas com os seus valores respectivos obtidos numa busca de Lévy. Explicitamente, para  $N = 1$  temos

$$p(\ell) = \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d_1}\right), \text{ se } |\ell| \geq \ell_0; \quad \mathbf{Exponencial\ Simples}, \quad (1.44)$$

e para  $N = 2$ ,

$$p(\ell) = \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d_1}\right) + \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d_2}\right), \text{ se } |\ell| \geq \ell_0; \quad \mathbf{Exponencial\ Dupla}, \quad (1.45)$$

onde, de modo geral, a condição  $|\ell| \geq \ell_0$  se aplica com  $\ell_0$  sendo o comprimento de passo mínimo, a fim de podermos realizar comparações com a distribuição do tipo lei de potência com o mesmo comprimento de passo mínimo.

## 1.7 Fundamentos da Teoria da Informação

Quando mencionamos Teoria da informação, observamos um leque de possibilidades que podem ser abordadas nesse contexto. Contudo, a sua essência é única. Nesta seção abordaremos alguns aspectos biográficos da vida de Claude Elwood Shannon, os seus pensamentos iniciais e suas principais motivações para criar a sua obra.

### 1.7.1 Aspectos biográficos e do pensamento de Claude Shannon

Nos dias de hoje, podemos contemplar muitos registros em formas de livros e artigos refletindo o pensamento de Claude Shannon. Como na maioria das vezes acontece, mais destaque é dado aos aspectos exóticos de seu comportamento de que às suas ideias e motivações, deixando suas obras sendo mais celebradas do que entendidas [50].

Claude Elwood Shannon nasceu em 30 de abril de 1916 em Petoskey, no estado de Michigan, Estados Unidos, e faleceu em 24 de fevereiro de 2001 de causas naturais. Viveu seus primeiros 16 anos na cidade de Gaylord, localizada também em Michigan e frequentou a escola pública onde sua mãe foi professora de línguas e diretora. Desde infância, ele já se interessava por objetos de origem mecânica. Foram inúmeras as engenhocas por ele construídas, como um barco controlado por rádio e um telégrafo entre sua casa e a de um vizinho usando um par de fios de arame farpado que rodeava um pasto. Entre seus jogos favoritos estavam alguns jogos mentais como a resolução de criptogramas. Shannon

admirava o inventor Edison e os cientistas Newton, Darwin, Einstein e Von Neumann [50]. Em sua juventude, ingressou na universidade e formou-se em Matemática e Engenharia, tornando-se Mestre em Engenharia e Doutor em Matemática. Estando ativo na pesquisa científica e tecnológica, ele trabalhou durante cerca de 15 anos a partir da década de 1940, como pesquisador nos Laboratórios Bell até concentrar inteiramente a sua atividade de docência no MIT. Shannon afirmava ser movido pela curiosidade e pelo prazer em resolver problemas e aumentar seus conhecimentos. Prêmios e retorno financeiro nunca foram suas intenções. Em uma das muitas entrevistas que ele deu, já havia declarado sua crença na segunda lei da termodinâmica, no Big-Bang e no aumento da entropia em longo prazo (*mesmo que de forma local ela possa decrescer em algum tempo*). É interessante observarmos a conexão de suas crenças pessoais com a total concordância com os princípios desenvolvidos por Boltzmann a respeito da entropia e o universo [51].

A sua forma racional de pensar pode ajudar a explicar o seu desinteresse em relação à Teoria da Informação. Segundo Pineda et al., para algumas pessoas a sua falta de interesse teria sido motivada pelo descontentamento com os rumos que a Teoria estava tomando: havia distorção dos conceitos quando aplicados em outras disciplinas e isto o incomodava. Adiciona-se também a isso a sua indignação com as correntes de pensamentos místicos-religiosas, reação essa que a Teoria da Informação provocava em muitos [50].

Inúmeros debates sobre a Teoria da Informação e suas extensões também ocorriam nas conferências sobre cibernética patrocinadas pela Fundação Marcy. Ao todo ocorreram dez conferências Marcy, dentre os períodos de 1946 a 1953 sob a coordenação de John von Neumann e Norbert Wiener, onde se reuniam grandes pesquisadores de renome para apresentações e discussões de vários projetos. A motivação do evento era explorar analogias entre seres vivos e máquinas para uma possível aplicação militar no futuro [52]. Shannon participou algumas vezes como convidado e em uma dessas apresentações ele apresentou Theseus, um camundongo eletrônico que foi capaz de sair de um labirinto. Poucas vezes máquinas em funcionamento eram apresentadas nesses eventos [53]. É interessante notarmos como ele subestimava suas criações, as tratando apenas como curiosas ou divertidas. Porém, algumas delas serviram como comprovação verídica de suas ideias, como por exemplo o caso do próprio Theseus e a máquina de jogar xadrez.

É importante mencionarmos a interação de Shannon com Alan Turing durante a Segunda Guerra Mundial, bem como sua participação no *Project X*, um projeto secreto conduzido pelos Laboratórios Bell com a finalidade de estudar a criptografia da voz humana. Até então eram utilizados métodos de distorção de ondas sonoras, o que era pouco eficaz pois requeria um ouvinte paciente e completamente atento ao som transmitido. Por outro lado o *Project X* trabalhava com a quantização das ondas sonoras, sendo que ao resultado deste processo seriam adicionados valores arbitrários determinados por uma chave, chave esta que deveria ser do conhecimento apenas do receptor e transmissor da mensagem [54]



Figura 1 – Claude Shannon com Theseus, o camundongo eletrônico, por volta da década de 1950.

[55].

Embora Shannon tenha declarado total liberdade para escolher o tema do seu trabalho nos Laboratórios Bell, a escolha de trabalhar com sistemas de sigilo talvez não tenha sido simples coincidência entre suas vontades e os interesses de seu empregador (determinados pelo contexto da Segunda Guerra), caso contrário não teria sido preciso mudar a abordagem de seu trabalho em teoria da comunicação para uma teoria sobre criptografia.

### 1.7.2 Princípio do conceito de entropia utilizado por Shannon

Podemos investigar o conceito de entropia de duas maneiras, sendo a primeira ligada ao grau de desorganização da matéria e a segunda à tendência de desorganização de toda a matéria. A termodinâmica afirma que a entropia nunca diminui num sistema fechado, isto é, seu grau de desorganização pode aumentar, porém jamais diminuir. Deste fato, decorre que a entropia é um estado dinâmico que varia em função do estado inicial de organização de matéria e do tempo, caracterizando um processo irreversível. As várias interpretações físicas e cosmológicas são bastante profundas, mas neste trabalho iremos nos restringir a interpretações que estão intimamente relacionadas com a Teoria da Informação,

o que impõe abordar a entropia conforme pensada por Ludwig Boltzmann.

Boltzmann define a entropia de modo geral em termos estatísticos, dentro de um contexto mecânico. Como se sabe, cabe aos domínios da estatística estudar uma amostragem ou população, isto é, estudar um conjunto finito de objetos. Observando bem, é impossível investigar as propriedades macroscópicas da matéria pelas características individuais de cada molécula. Portanto a entropia definida por Boltzmann é uma estatística sobre uma quantidade de matéria, ou seja, um número que descreve as moléculas coletivamente [50].

A abordagem utilizada por Boltzmann para encontrar uma equação satisfatória para a entropia baseou-se essencialmente em uma proposição de Maxwell para a *distribuição de velocidades* de partículas livres de um gás. A descrição do que aconteceria dentro de um recipiente repleto de gás fornece uma breve explicação: moléculas inicialmente em um estado organizado (onde foram introduzidas no mesmo recipiente com a mesma velocidade), começariam pouco a pouco a exibir variações de suas velocidades individuais em decorrência das colisões entre elas (no modelo proposto o choque com as paredes foram considerados como colisões perfeitamente elásticas, o que não alteraria o módulo da velocidade da molécula que colidisse contra ela), até que atingissem um estado de desordem máxima [56]. Boltzmann propõe que o estado mais molecularmente desorganizado seria aquele em que a distribuição de velocidades fosse homogênea. Note que é a distribuição das velocidades, e não as velocidades em si, que são homogêneas.

A proposição de Boltzmann resulta em equações integrais cuja a resolução é impraticável. Posteriormente, uma abordagem alternativa foi proposta por Max Planck. Segundo a teoria quântica, átomos e moléculas não se encontram em qualquer estado contínuo, mas em estados estáveis discretos, sendo que a transição de um estado para outro envolve absorção ou emissão de energia. A contagem destes estados quantizados dá a medida da entropia do sistema [50]. Além do mais, a determinação precisa da entropia continua impraticável, o que proporcionou o surgimento de cálculos aproximados, através da criação de amostras discretas de velocidade, isto é, criando faixas de velocidades [50]. Por outro lado, notamos que Shannon empregou princípios semelhantes na *Teoria Matemática da Comunicação* quando formulou o método de transformação de sinais contínuos em discretos [50].

Na estatística em geral, inclusive na física, o conceito de entropia de Shannon vem sendo aplicado em inúmeros contextos com a finalidade de obter informação sobre o sistema estudado. Recentemente, uma análise foi realizada na qual houve a implantação da entropia associada à informação na distribuição de frações ramificadas em um decaimento de partículas [57]. Também recentemente os estudos de Shannon a respeito da entropia contribuíram para a física, onde a entropia de Shannon foi utilizada para interpretação e comparação de resultados nas ditas travessias em bilhar quântico aberto e fechado [58]. Em

nosso trabalho, usaremos os conceitos e técnicas de física estatística e sistemas complexos de forma direta e objetiva para observarmos o comportamento da chamada *entropia de Shannon* para buscas de Lévy e buscas hiperexponenciais, procurando interpretar nossos resultados à luz da Teoria da informação.

## 2 TEORIA GERAL DE BUSCAS ALEATÓRIAS EM UMA DIMENSÃO

Neste capítulo discutiremos os principais elementos da teoria de buscas aleatórias em uma dimensão, no qual um caminhante procura por sítios-alvo espalhados ao longo de uma reta. Calcularemos de forma geral o livre caminho médio percorrido pelo buscador até o encontro de um sítio e mostraremos que o mesmo está intimamente relacionado com a eficiência da busca. Também vamos obter uma expressão para as probabilidades de o “caçador” encontrar a sua “presa” em posições deliberadamente opostas com respeito ao ponto de partida. Em todas as análises utilizaremos um processo de discretização do espaço de busca com a finalidade de obter resultados numéricos. Por fim, calcularemos explicitamente o livre caminho médio, os elementos da matriz de saltos entre sítios e a probabilidade de que o buscador alcance cada sítio-alvo disponível para três distribuições de probabilidades de tamanhos de passos, a saber: a lei de potência (Lévy), exponencial simples e exponencial dupla.

### 2.1 Introdução a um modelo de buscas aleatórias

Começaremos o capítulo fazendo uma análise geral de como procederemos no ataque ao problema de buscas aleatórias. Em seguida aprofundaremos para o nosso caso de interesse que é o de um caminhante num espaço unidimensional.

Considere um buscador em um espaço  $d$ -dimensional buscando sítios-alvo aleatoriamente distribuídos com uma distância média  $\lambda$  entre eles. Neste processo, o caminhante possui uma distância máxima ao seu redor na qual ele “enxerga” o sítio quando o mesmo se encontra dentro desse limite. Esta propriedade recebeu o nome de “raio de visão”, denotado por  $r_v$ . Assim, em sua busca o caçador percorre uma área análoga a um passadiço, com “volume” proporcional a  $r_v^{d-1}$ . Partindo daí, podemos dizer que  $\lambda$  seria o comprimento médio entre dois sítios-alvo neste corredor [19], ou seja,

$$\lambda \sim \frac{1}{\rho r_v^{d-1}}, \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade de sítios-alvo [59].

O procedimento geral de busca aleatória que consideraremos no modelo obedece as seguintes regras (ver a Fig. 2):

1. Se existir um sítio presente no limite do raio de visão  $r_v$  do buscador, o mesmo se direcionará em linha reta ao sítio detectado.

2. Se não existir um sítio, ocorre um sorteio do tamanho do passo, regido por uma distribuição de probabilidades  $p(\ell)$ , e da sua direção, uniformemente distribuída em todo o espaço. O caminhante então inicia o processo de busca sempre procurando por um sítio-alvo dentro do raio  $r_v$  à medida que se desloca. Se ao longo da extensão do passo ele detecta um sítio, o passo é truncado e ele se dirige ao sítio em linha reta, segundo a regra 1. Se nenhum sítio é detectado ao final do passo, então o processo de busca se reinicia a partir do início da regra 2.

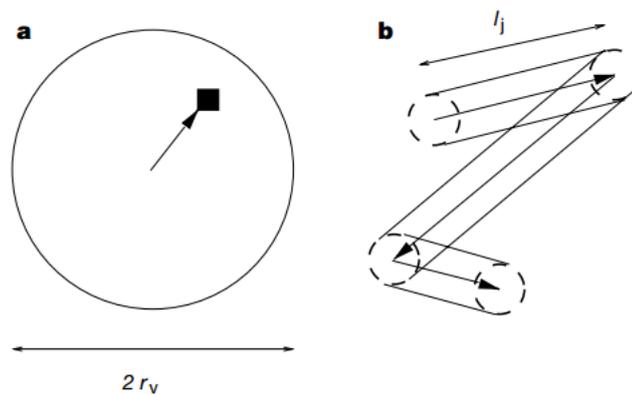


Figura 2 – Esquema de uma busca aleatória em duas dimensões [19]. Em (a) vemos um sítio-alvo (quadrado preto) localizado dentro de um raio de visão  $r_v$ , de modo que a regra 1 entra em vigor, ou seja, o caminhante se move até ele em linha reta. Já em (b) vemos a representação do que acontece quando o caminhante ainda não encontra um sítio-alvo, ou seja, ele escolhe uma direção aleatória e um comprimento de passo  $\ell_j$  a partir de um sorteio regido por uma distribuição  $p(\ell)$ .

Este tipo de modelo se encaixa perfeitamente num problema biológico do tipo *presa-predador* e este sistema nos permite analisar essencialmente dois casos, referentes à busca **destrutiva** e à busca **não destrutiva** [19].

A busca **não destrutiva** se dá quando o caminhante pode visitar o mesmo sítio muitas vezes. Biologicamente, esse tipo de busca corresponde à situação em que, uma vez encontrado o sítio-alvo, o buscador não o consome completamente, podendo retornar a ele em seguida. Já na busca **destrutiva** o sítio-alvo encontrado pelo caminhante se torna indetectável em buscas posteriores, o que ocorre quando o sítio é totalmente consumido ao ser encontrado e o seu tempo de regeneração é superior ao tempo de duração da busca.

### 2.1.1 Buscas aleatórias em uma dimensão

Vamos agora introduzir o problema do caminhante aleatório unidimensional, realizando o cálculo do livre caminho médio percorrido por um buscador em um intervalo

contendo sítios-alvo e o número médio de passos dados até o encontro de um sítio.

Considere inicialmente um caçador procurando por sua caça (sítios-alvo) em uma dimensão com condições de contorno absorventes, como mostra a Fig. 3. Assim, o buscador começa sua busca partindo de sua posição inicial arbitrária  $x_0$  que se encontra dentro do intervalo  $0 < x_0 < \lambda$ , com os sítios-alvo localizados em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ . De um modo geral, logo que um alvo é encontrado a busca se renova sendo reiniciada a partir de um novo valor de  $x_0$ . Como ocorre um sorteio de uma nova posição inicial para cada procura, vamos considerar que cada busca é independente da outra. Nessa condição, podemos entender o comprimento total de uma trajetória como uma soma interligada das caminhadas interpostas de encontros sucessivos [19].

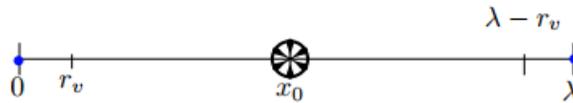


Figura 3 – Caminhante aleatório em 1D à procura dos sítios-alvo localizados em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ , com  $r_v$  denotando o raio de visão do buscador.

Geralmente para este modelo considera-se uma função densidade de probabilidades (pdf) para a distribuição das posições iniciais  $x_0$ , isto é,  $\Upsilon(x_0)$ . Nesse trabalho, vamos considerar que a cada nova busca o valor de  $x_0$  é o mesmo. Como veremos a seguir, os casos de buscas destrutivas e não-destrutivas serão respectivamente representados por escolhas adequadas de  $x_0 = \lambda/2$  e  $x_0 \approx r_v$ .

## 2.2 Abordagem analítica de $\langle L \rangle$ e $\langle n \rangle$

Após descrevermos a abordagem do problema em 1D, começaremos calculando a distância média percorrida entre dois alvos sucessivos encontrados,  $\langle L \rangle$ , para um caminhante que inicia sua busca na posição  $x_0$ . Em seguida calcularemos o número médio de passos entre dois encontros consecutivos,  $\langle n \rangle$  [60][61].

Suponha inicialmente que o caminhante encontre um dos sítios após  $n$  passos. O comprimento total trilhado após  $n$  passos realizados pelo *caçador* é:

$$L_n = \sum_{i=1}^n |\ell_i|, \quad (2.2)$$

onde  $|\ell_i|$  representa o comprimento do  $i$ -ésimo passo. Observamos que o número de passos  $n$  é esperado ser maior quanto mais longe o caminhante inicialmente estiver dos sítios existentes (maior  $x_0$ ), pois se o mesmo se encontra inicialmente próximo a um alvo será maior a probabilidade deste ser encontrado, implicando em um  $n$  menor. Constatamos,

portanto, que o comprimento total da caminhada deve ter  $x_0$  como uma de suas variáveis independentes, ou seja,  $L_n = L_n(x_0)$ .

Tomando a média sobre todas as possibilidades de busca que encontra um alvo no  $n$ ésimo passo temos:

$$\langle L_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |\ell_i| \rangle. \quad (2.3)$$

Atentamos agora para o fato de que  $n$  está contido no intervalo  $1 \leq n < \infty$ . Isto significa que um sítio pode ser encontrado no primeiro passo,  $n = 1$ , ou em um número de passos muito grande. Partindo deste fato, estabelecemos  $P_n$  como a probabilidade de um sítio ser encontrado após  $n$  passos. Então, ao efetuarmos a média sobre toda a peregrinação partindo de  $x_0$  temos que levar em consideração o peso estatístico associado aos encontros com diferentes  $n$ 's, isto é,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \langle L_n \rangle. \quad (2.4)$$

Uma vez que  $P_n$  constitui uma probabilidade, temos que todos os valores de  $P_n$  em função dos diferentes  $n$ 's estão vinculados por normalização, de modo que  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ , significando que sempre um dos sítios que estão situados em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  será encontrado no fim do processo de busca.

Para calcularmos  $P_n$ , precisamos definir  $\rho_n(x_n)$  como a função densidade de probabilidade (pdf) de encontrar o *forager* num intervalo entre  $x_n$  e  $x_n + dx_n$  após  $n$  passos. Assim sendo, a probabilidade de que o caçador ainda *não* tenha encontrado um sítio depois de  $n$  passos é:

$$\tilde{P}_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_n(x_n) dx_n. \quad (2.5)$$

Por outro lado, a probabilidade de encontrar um sítio após  $n' \geq n + 1$  passos é:

$$P_{n' \geq n+1} = 1 - \tilde{P}_n. \quad (2.6)$$

De posse desses resultados, podemos finalmente calcular a probabilidade de um sítio ser encontrado precisamente após  $n$  passos, a qual é dada por

$$P_n = |P_{n' \geq n+1} - P_{n' \geq n}| = |\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n-1}|, \quad (2.7)$$

de modo que, usando a Eq. (2.5), podemos escrever nosso resultado em termo da integral

$$P_n = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] dx. \quad (2.8)$$

É importante observar que  $\rho_i(x)$  representa a densidade de probabilidades de o sítio *não* ser encontrado, assim  $\rho_{n-1}(x) > \rho_n(x)$ , pois a probabilidade de encontrar o alvo aumenta à medida que  $n$  aumenta. Substituindo agora a Eq. (2.8) na Eq. (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx \rho_{n-1}(x) \langle L_n \rangle(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Em seguida, trocamos o índice no primeiro somatório,  $n \mapsto n + 1$ , e adicionaremos o termo de  $n = 0$  no segundo somatório, tendo em vista que  $L_0 = 0$ , de modo que

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_{n+1} \rangle(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle L_n \rangle(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) [\langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da Eq. (2.3) temos que

$$\langle L_n \rangle(x) = \langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle, \quad (2.11)$$

deste modo

$$\begin{aligned} \langle L_{n+1} \rangle(x) - \langle L_n \rangle(x) &= (\langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle + \langle |\ell_{n+1}| \rangle) \\ &\quad - (\langle |\ell_1| \rangle + \langle |\ell_2| \rangle + \dots + \langle |\ell_n| \rangle) \\ &= \langle |\ell_{n+1}| \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dessa maneira, podemos representar  $\langle L \rangle$  da seguinte forma:

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle |\ell_{n+1}| \rangle(x). \quad (2.13)$$

Notamos que  $\langle |\ell_{n+1}| \rangle$  corresponde justamente ao comprimento médio de um passo individual, e por conta disto não depende de sua ordem  $n$  ou  $n \pm i$  e sim apenas do  $x_0$ . Isto é, o enésimo passo depende da posição  $x_{n-1}$  onde o passo  $n - 1$  começa, que por sua vez depende de  $x_{n-2}$  e assim sucessivamente até a dependência de  $\langle |\ell| \rangle$  com  $x = x_0$ . Por este fato, a média  $\langle |\ell| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\ell| p(\ell) d\ell$  deve ser escrita explicitamente como

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{r_v}^{x_0-\ell_0} (x_0 - x) p(x - x_0) dx + \int_{x_0+\ell_0}^{\lambda-r_v} (x - x_0) p(x - x_0) dx + \\ &\quad + (x_0 - r_v) \int_{-\infty}^{r_v} p(x - x_0) dx + (\lambda - r_v - x_0) \int_{\lambda-r_v}^{\infty} p(x - x_0) dx, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $x_0 \in [r_v + \ell_0, \lambda - r_v - \ell_0]$ , em que  $\ell_0$  é o comprimento de passo mínimo do caminhante. Realizando a substituição  $\ell = x - x_0$  acima, encontramos

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{-(x_0-r_v)}^{-\ell_0} |\ell| p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-r_v-x_0} |\ell| p(\ell) d\ell \\ &\quad + (x_0 - r_v) \int_{-\infty}^{-(x_0-r_v)} p(\ell) d\ell + (\lambda - r_v - x_0) \int_{\lambda-r_v-x_0}^{\infty} p(\ell) d\ell, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde as duas primeiras integrais simbolizam buscas para a esquerda e para a direita sem que um encontro se realize. As outras duas integrais restantes (*terceira e quarta*) representam buscas com truncagem devido ao encontro de um sítio. Observamos que o fato de definirmos  $\ell_0$  como comprimento de passo mínimo implica diretamente em uma condição para a função densidade de probabilidade do *forager*, uma vez que  $|\ell|$  não pode

ser menor do que  $\ell_0$ , logo concluímos que para  $\ell < \ell_0$ ,  $p(\ell) = 0$  e esta conclusão nos leva a uma próxima para as duas primeiras integrais, tendo em vista que a primeira será nula para  $r_v < x_0 \leq r_v + \ell_0$  e a segunda para  $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x_0 < \lambda - r_v$ .

Pelo motivo discutido acima, agora podemos reescrever Eq. (2.13) em função de  $x$ ,

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) \langle |\ell| \rangle(x). \quad (2.16)$$

Neste momento daremos uma pausa no desenvolvimento direto de  $\langle L \rangle$ , uma vez que para avançarmos nesta demonstração precisamos desenvolver  $\rho_n(x)$  e é o que vamos fazer a partir de agora. De uma forma geral podemos escrever  $\rho_n(x)$  do seguinte jeito,

$$\rho_i(x_i) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_{i-1}(x_{i-1}) p(x_i - x_{i-1}) dx_{i-1}. \quad (2.17)$$

Esta equação nos diz que estamos somando sobre todas as possibilidades de alcançarmos o sítio de  $x_i$  a partir do sítio  $x_{i-1}$ , com o passo de tamanho  $|x_i - x_{i-1}|$  realizado com probabilidade  $p(x_i - x_{i-1}) dx_{i-1}$ .

Por exemplo, se temos um buscador começando sua caminhada de  $x_0 = \omega$ , com  $r_v < \omega < \lambda - r_v$ , então no início da busca sua densidade de probabilidade  $\rho_0(x_0)$  será uma função delta de Dirac,  $\rho_0(x_0) = \delta(x_0 - \omega)$ . Então, para este caso temos

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_0(x_0) p(x_1 - x_0) dx_0 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \delta(x_0 - \omega) p(x_1 - x_0) dx_0 \\ &= p(x_1 - \omega). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Com este mesmo procedimento, podemos descobrir a densidade de probabilidades após os dois primeiros passos,  $\rho_2(x_2)$ , tal que

$$\begin{aligned} \rho_2(x_2) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_1(x_1) p(x_2 - x_1) dx_1 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x_2 - x_1) p(x_1 - x_0) \rho_0(x_0) dx_1 dx_0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Seguindo adiante com este processo, por indução conseguimos encontrar uma relação de recorrência para a densidade de probabilidade em seu  $n$ -ésimo passo,

$$\begin{aligned} \rho_n(x_n) &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} p(x_n - x_{n-1}) \rho_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_i p(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Com este entendimento e com a relação acima à nossa disposição, podemos retornar ao desenvolvimento de  $\langle L \rangle$  propriamente dito. Assim substituindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.16) obtemos

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left\{ \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx_i p(x_{i+1} - x_i) \right] \rho_0(x_0) \right\} \langle |\ell| \rangle(x_n) dx_n. \quad (2.21)$$

Em decorrência da independência estatística do integrando acima, estabeleceremos um operador integral com a finalidade de avançarmos na determinação de  $\langle L \rangle$  [60][61].

Seja  $\mathcal{L}$  o operador integral dado por

$$\mathcal{L}[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega - x)f(x)dx. \quad (2.22)$$

Para o nosso caso específico  $f(x) = \rho_n(x)$  e  $\omega = x_{n+1}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\rho_n(x_n)](x_{n+1}) &= \int_{r_v}^{\lambda - r_v} p(x_{n+1} - x_n)\rho_n(x_n)dx_n \\ &= \rho_{n+1}(x_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para  $n = 0$ ,

$$\rho_1(x_1) = [\mathcal{L}\rho_0(x_0)](x_1); \quad (2.24)$$

para  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} \rho_2(x_2) &= [\mathcal{L}\rho_1(x_1)](x_2) \\ &= [\mathcal{L}[\mathcal{L}\rho_0(x_0)]](x_2) \\ &= [\mathcal{L}^2\rho_0(x_0)](x_2); \end{aligned} \quad (2.25)$$

e para o  $n$ -ésimo termo,

$$\begin{aligned} \rho_n(x_n) &= \mathcal{L}[\rho_{n-1}(x_{n-1})] \\ &= \mathcal{L}[\mathcal{L}(\rho_{n-2}(x_{n-2}))] \\ &= \dots = \mathcal{L}^n[\rho_0(x_0)](x); \end{aligned} \quad (2.26)$$

de modo que finalmente podemos escrever

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx. \quad (2.27)$$

### 2.2.1 Determinação de $\langle L \rangle$ e $\langle n \rangle$

Neste momento, após a determinação de  $\mathcal{L}$ , continuaremos com o nosso cálculo para a obtenção de  $\langle L \rangle$ . Isto é, a partir de

$$\langle L \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda - r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) \langle |\ell| \rangle(x) dx, \quad (2.28)$$

obtemos

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right] (x) \langle |\ell| \rangle(x) dx. \quad (2.29)$$

Note que  $\mathcal{L}$  possui norma menor ou igual a um, ou seja,  $\|\mathcal{L}\| \leq 1$ .

*Prova:* Seja  $\mathbb{V}$  o espaço das funções contínuas munido de um produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} f(x)g(x)dx, \quad (2.30)$$

para  $x \in [r_v, \lambda - r_v]$ . Consequentemente sua norma será

$$\|f\|^2 = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |f(x)|^2 dx. \quad (2.31)$$

Utilizando o teorema do valor máximo temos que

$$\int f(x)g(x)dx \leq \max[f] \int g(x)dx. \quad (2.32)$$

Portanto

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[\rho_n(x)](\omega)| &= \left| \int_{r_v}^{\lambda-r_v} P(\omega - x)\rho_n(x)dx \right| \\ &\leq \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |P(\omega - x)\rho_n(x)|dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} |P(\omega - x)||\rho_n(x)|dx \leq \max[P(\omega - x)] \overbrace{\int_{r_v}^{\lambda-r_v} \rho_n(x)dx}^{=1} \\ &= \max[P(\omega - x)] \equiv \mathcal{N} \leq 1. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Mostrando que de fato  $\|\mathcal{L}\| \leq 1$ . Na equação acima, usamos a consideração de que as densidades de probabilidade são sempre maiores ou iguais a zero.

O fato da norma do operador  $\mathcal{L}$  ser igual à unidade nos possibilita escrever a seguinte expressão abaixo:

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right] (x) = [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \rho_0](x), \quad (2.34)$$

onde  $\mathcal{I}$  é o operador identidade e  $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$  é o operador inverso a  $(\mathcal{I} - \mathcal{L})$ . Usando  $\rho_0 = \delta(x_0 - \omega)$  e o resultado que obtivemos na equação acima, podemos escrever  $\langle L \rangle$  como

$$\langle L \rangle = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \delta(x_0 - \omega)] (x) \langle |\ell| \rangle (x) dx. \quad (2.35)$$

Como demonstramos,  $\mathcal{L}$  possui norma menor ou igual a um, logo podemos escrever  $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$  em uma forma integral com o núcleo representado por  $K(x, x_0)$ , de modo que

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, x_0) \delta(x_0 - \omega) \langle |\ell| \rangle (x) dx dx_0 \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \omega) \langle |\ell| \rangle (x) dx. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Este fato finalmente nos possibilita escrever

$$\langle L \rangle (\omega) = [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle (x)] (\omega). \quad (2.37)$$

Analogamente, podemos calcular o número médio de passos para o encontro de um sítio, o qual é definido como

$$N \equiv \langle n \rangle = \sum_n P_n n. \quad (2.38)$$

Substituindo  $P_n$  acima temos

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx [\rho_{n-1}(x) - \rho_n(x)] n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) (n+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \rho_n(x) n. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Assim como fizemos para  $\langle L \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n \rho_0 \right] dx \\ &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \omega) dx \\ &= (\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} h(x), \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde  $h(x) = -1$  acima.

O operador  $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$  é denominado resolvente e captura analiticamente as propriedades espectrais de  $\mathcal{L}$ . Por esta razão, é possível construir o espectro de  $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$  através do espectro de  $\mathcal{L}$ . O valor de  $\langle L \rangle$  pode ser obtido numericamente a partir da discretização do espaço, conforme mostraremos nas seções posteriores.

Uma outra consequência de  $\mathcal{N} \leq 1$  é que podemos obter uma expressão para o limitante superior da probabilidade do caminhante não encontrar o sítio após  $n$  passos, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n &= \int_{r_v}^{\lambda-r_v} [\mathcal{L}^n \rho_0](x) dx < \mathcal{N}^n \\ \ln(\tilde{P}_n) &< n \ln(\mathcal{N}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para  $\mathcal{N} < 1$  temos que  $\ln(\mathcal{N}) < 0$ , de modo que, definindo  $\gamma = |\ln \mathcal{N}|$ , podemos escrever

$$\tilde{P}_n < \exp(-\gamma n), \quad (2.42)$$

e assim a probabilidade do “caçador” não ter encontrado uma “presa” após  $n$  passos decai exponencialmente à medida que  $n$  aumenta [60][61].

## 2.2.2 A eficiência da busca

Neste estudo, estabeleceremos como *eficiência da busca* [62] a razão entre o número de sítios encontrados ( $N_{\text{Encontrado}}$ ) e a distância total percorrida pelo caminhante ( $L_{\text{Total}}$ ),

de modo que

$$\eta = \frac{N_{\text{Encontrado}}}{L_{\text{Total}}}, \quad (2.43)$$

onde podemos considerar  $L_{\text{Total}} = N_{\text{Encontrado}} \langle L \rangle$ , com  $\langle L \rangle$  sendo a distância média percorrida entre dois sítios. Portanto,

$$\eta = \frac{N_{\text{Encontrado}}}{L_{\text{Total}}} = \frac{N_{\text{Encontrado}}}{N_{\text{Encontrado}} \langle L \rangle} = \frac{1}{\langle L \rangle}. \quad (2.44)$$

A interpretação física da definição acima é que um *forager* é mais eficiente em sua procura à medida que o mesmo encontra mais sítios percorrendo a mínima distância possível. O mais intrigante desta observação é o fato de toda a eficiência do processo depender apenas da distância média entre dois sítios. Para além desta expressão, podemos avançar escrevendo de modo aproximado que

$$\langle L \rangle = \langle \ell \rangle \langle n \rangle, \quad (2.45)$$

no qual denotamos  $N \equiv \langle n \rangle$  como o número médio de passos entre dois encontros sucessivos. Logo podemos representar aproximadamente a eficiência também como

$$\eta = \frac{1}{\langle L \rangle} = \frac{1}{\langle \ell \rangle \langle n \rangle} \approx \frac{1}{N \langle \ell \rangle}. \quad (2.46)$$

### 2.3 Cálculo discreto no espaço de busca

Em nossos cálculos anteriores, obtemos a expressão final para  $\langle L \rangle$ . Porém, mesmo mostrando teoricamente como podemos obter o valor para o mesmo, não podemos ir mais adiante no espaço contínuo, dada a dificuldade em se obter, na prática, valores a partir da expressão formal (2.37). Então, como solução para esta dificuldade, faremos a seguir a discretização do espaço de busca [60][61].

Para realizar este procedimento vamos considerar posições  $r_v \leq x \leq \lambda - r_v$  que são múltiplos de algum comprimento discreto que denotaremos por  $\Delta x$ , o qual é uma grandeza menor que qualquer outra relevante no problema  $(\ell_0, r_v, \lambda)$ . A partir desta consideração, podemos escrever nosso espaço de extensão  $\lambda$  como  $\lambda/\Delta x \equiv M$ , com posições discretas denotadas por  $x = i\Delta x$ , com  $i = (0, 1, 2, 3, \dots, M)$ . Neste caso, os sítios que se encontram em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  estão respectivamente associados aos índices  $i = 0$  e  $i = M = \lambda/\Delta x$ .

Semelhantemente definimos  $\ell_0 = m_0 \Delta x$  e  $r_v = m_r \Delta x$ , com  $m_0$  e  $m_r$  números inteiros. Lembrando que o limite contínuo pode ser recuperado fazendo  $\Delta x \mapsto 0$  e  $M \mapsto \infty$ , com  $\lambda$  fixo. Também o cálculo de integração passa a ser denotado por uma soma discreta como

$$\int_{r_v}^{\lambda-r_v} dx \implies \sum_{i=1}^N \Delta x_i.$$

Partindo dessas definições, podemos escrever  $\langle L \rangle(\omega)$  a partir da Eq. (2.37) na forma

$$\begin{aligned} \langle L \rangle(\omega) &= [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \langle |\ell| \rangle(x)](\omega) = \int_{r_v}^{\lambda-r_v} K(x, \omega) \langle |\ell| \rangle(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N K(\omega, x_i) \langle |\ell| \rangle(x_i) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Fazendo  $\omega = x_j$ , temos

$$\langle L \rangle(x_j) = \sum_{i=1}^N K(x_j, x_i) \langle |\ell| \rangle(x_i) \Delta x_i. \quad (2.48)$$

Note que a equação acima pode ser representada matricialmente, pois  $K(x_j, x_i) \Delta x_i$  é uma matriz discreta  $\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{x}$ . Já  $\langle L \rangle(x_j) \equiv \langle L_j \rangle$  e  $\langle |\ell| \rangle(x_i) \equiv \langle |\ell_i| \rangle$  são vetores no espaço discreto.

Portanto, escrevemos

$$\langle \vec{L} \rangle = (\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{x}) \langle \vec{|\ell|} \rangle, \quad (2.49)$$

onde abrindo a expressão em sua forma matricial obtemos

$$\begin{pmatrix} \langle L_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle L_i \rangle \\ \vdots \\ \langle L_j \rangle \\ \vdots \\ \langle L_N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & K(x_1, x_i) \Delta x & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K(x_i, x_1) \Delta x & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K(x_j, x_1) \Delta x & \cdots & K(x_j, x_i) \Delta x & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K(x_N, x_1) \Delta x & \cdots & K(x_N, x_i) \Delta x & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & K(x_1, x_j) \Delta x & \cdots & K(x_1, x_N) \Delta x \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & K(x_i, x_j) \Delta x & \cdots & K(x_i, x_N) \Delta x \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & K(x_j, x_N) \Delta x \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & K(x_N, x_j) \Delta x & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle |\ell_1| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_i| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_j| \rangle \\ \vdots \\ \langle |\ell_N| \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Vimos que com este processo de discretização podemos agora de fato calcular  $\langle L \rangle$  e conseqüentemente a eficiência da busca  $\eta$ . Também temos que calcular a matriz  $\mathbf{K}$ . Para isso, precisamos discretizar também o operador  $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$  e por hora não sabemos ainda a forma do seu núcleo. Então, para obtermos  $\mathbf{K}$  seguiremos com um procedimento

similar ao aplicado para o operador  $\mathcal{L}$ , tendo em vista que com  $\mathcal{L}$  discretizado em mãos podemos calcular  $(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$  com as operações envolvendo matrizes e assim obter a forma discretizada deste operador, de modo a finalmente poder calcular a matriz  $\mathbf{K}$ .

Definindo  $\mathbf{A}$  como a matriz discretizada representando o operador  $\mathcal{L}$ , precisamos calcular os seus elementos de matriz, que são dados pela integração da distribuição  $p(\ell)$  no intervalo  $[x_j - x_i, x_j - x_i + \Delta x_i]$ :

$$A_{ij} = \int_{(x_j - x_i)}^{(x_j - x_i) + \Delta x_i} p(\ell) d\ell, \text{ para } |x_j - x_i| \geq \ell_0. \quad (2.51)$$

Como  $\mathcal{L}$  é um operador auto-adjunto,  $A_{ij} = A_{ji}$ . Logo, podemos escrever

$$A_{ij} = A_{ji} = \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + \Delta x_i} p(\ell) d\ell, \text{ para } |x_j - x_i| \geq \ell_0, \quad (2.52)$$

onde  $[A]_{ii} = [A]_{ij} = 0$  se  $|x_j - x_i| < \ell_0$ , pois,  $p(\ell) = 0$  quando  $\ell < \ell_0 = m_0 \Delta x$ .

Podemos concluir o raciocínio apenas comentando como calcular o vetor  $\langle |\vec{\ell}| \rangle$ . Este objeto matemático se constroi apenas calculando  $\langle |\ell| \rangle(x)$  normalmente, como mostrado nas seções anteriores, e aplicando em  $x_j$ . Assim completamos o cálculo para obtermos a eficiência [60][61].

## 2.4 Estudo das probabilidades $P_0$ e $P_\lambda$

Nesta seção, investigaremos como obter as probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  de um buscador encontrar sítios-alvo nas posições  $x = 0$  e  $x = \lambda$ , respectivamente [62].

### 2.4.1 Análise qualitativa de $P_0$ e $P_\lambda$

Começamos fazendo um pequeno estudo que propõe um esquema de fatoração para o caminho livre médio entre dois encontros sucessivos. O mesmo pode ser escrito como

$$\langle L \rangle = P_0 \langle L_0 \rangle + P_\lambda \langle L_\lambda \rangle. \quad (2.53)$$

Como um sítio é sempre encontrado ao final da busca, isto é,  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ , então para o nosso caso  $P_0 + P_\lambda = 1$ . Se  $x_0 < \lambda/2$  (*situação inicial assimétrica*), a distância média percorrida até o alvo mais próximo ser encontrado,  $\langle L_0 \rangle$ , é naturalmente menor do que a distância média percorrida para encontrar o alvo mais distante,  $\langle L_\lambda \rangle$ .

Para o sistema simétrico ( $x_0 = \lambda/2$ ), ambos os sítios de fronteira estão inicialmente equidistantes do buscador, de modo que  $\langle L_0 \rangle = \langle L_\lambda \rangle$  e  $P_0 = P_\lambda = 1/2$ .

2.4.2 Cálculo explícito de  $P_0$  e  $P_\lambda$ 

Passamos agora para a abordagem quantitativa para obter  $P_0$  e  $P_\lambda$ .

Considere um caçador realizando uma busca em uma dimensão que começa na posição  $x_0 = \phi$ , com a finalidade de encontrar sítios-alvo localizados em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ . Supomos que o mesmo atinge o alvo em  $x = \lambda$  após  $n$  passos. Nas seções anteriores mostramos como obter a densidade de probabilidade do caminhante em seu  $n$ -ésimo passo, Eq. (2.20). Assim, seguindo a mesma abordagem analítica, podemos escrever que

$$P_{\lambda n}(\phi) = \int_{r_v}^{\lambda - r_v} \rho_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1}), \quad (2.54)$$

onde  $\rho_{n-1}(x_{n-1})dx_{n-1}$  representa a probabilidade do caçador estar localizado no intervalo  $[x_{n-1}, x_{n-1} + dx_{n-1}]$  após dar  $n - 1$  passos. Tendo em vista que nenhum sítio foi encontrado,  $x_{n-1} \in [r_v, \lambda - r_v]$ . Já o outro termo do integrando ( $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1})$ ) representa a probabilidade de que o buscador dê um passo de tamanho  $\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1}$  de modo que no  $n$ -ésimo passo ele alcance o alvo em  $x = \lambda$ . A integral acima resume todos os valores possíveis para  $x_{n-1}$ .

Devido à não dependência estatística das possíveis caminhadas que comecem com  $x_0 = \phi$  e terminem em  $x = \lambda$ , a probabilidade que representa o total de buscas é simplesmente a soma de todos os  $P_{\lambda n}$  sobre todas as possibilidades:

$$P_\lambda(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda n}(\phi). \quad (2.55)$$

Então, substituindo a Eq. (2.54) na Eq. (2.55) temos

$$P_\lambda(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_r}^{\lambda - r_v} \rho_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_{n-1}). \quad (2.56)$$

Fazendo  $k = n - 1$ ,

$$P_\lambda(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{r_r}^{\lambda - r_v} \rho_k(x_k) dx_k \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - x_k). \quad (2.57)$$

Vemos que a equação acima é semelhante à Eq. (2.16). Assim, podemos empregar o mesmo procedimento utilizado naquele caso, obtendo

$$P_\lambda(\phi) = [(\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)]. \quad (2.58)$$

Assim como fizemos para  $\langle L \rangle$ , para obter as informações necessárias do nosso estudo precisamos trabalhar no limite discreto da expressão acima, a qual nesse limite se torna

$$P_{\lambda, \ell_0} = [(\mathcal{I} - \mathbf{A})^{-1} P_{\ell_0}], \quad (2.59)$$

onde os elementos de  $\mathbf{A}$  foram calculados na seção anterior. Como seguimos o mesmo procedimento de discretização de antes, sabemos que  $P_{\lambda, \ell_0}$  e  $P_{\ell_0}$  são vetores coluna  $(M - 2m_r - 1) \times 1$ .

No caso de  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$ , podemos calculá-lo mesmo antes de particionar o espaço a partir da seguinte expressão

$$\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} p(\ell) d\ell, \quad (2.60)$$

onde a equação acima é válida para  $r_v < \phi \leq \lambda - r_v - \ell_0$ .

Por outro lado, entendemos que se o caçador começar muito perto do alvo em  $x = \lambda$ , isto é,  $\lambda - r_v - \ell_0 < \phi < \lambda - r_v$ , então qualquer movimento para a direita levará a detecção do alvo. Nesse sentido, uma vez que os movimentos para os dois lados são equiprováveis, então

$$\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = \frac{1}{2}, \quad (2.61)$$

se  $\lambda - r_v - \ell_0 < \phi < \lambda - r_v$ .

Podemos utilizar o mesmo processo que descrevemos nesta subseção para calcular  $P_0(\phi)$  [62]. No entanto, como  $P_\lambda + P_0 = 1$  podemos simplesmente calcular  $P_\lambda$  e fazer

$$P_0 = 1 - P_\lambda \quad (2.62)$$

para obtermos  $P_0$ .

## 2.5 Abordagem analítica de $\langle |\ell| \rangle$ , $\mathbf{A}$ e $\mathcal{P}$ para algumas distribuições de tamanhos de passos

Na Seções 1.5 e 1.6, focamos inteiramente em analisar três distribuições de probabilidade para os tamanhos dos passos do buscador, a saber: a **distribuição de Lévy**, a **exponencial simples** e finalmente a **exponencial dupla**, onde as duas últimas fazem parte de uma classificação de distribuições conhecidas como **distribuições hiperexponenciais**.

Nesta seção mostraremos os cálculos detalhados da quantidade  $\langle |\ell| \rangle$ , dos elementos da matriz  $\mathbf{A}$  e da probabilidade  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$  para cada distribuição citada, tendo em vista que estes resultados são cruciais para o nosso estudo.

### 2.5.1 Cálculo de $\langle |\ell| \rangle$ , $A_{ij}$ e $\mathcal{P}$ para a distribuição de Lévy

Começaremos calculando  $\langle |\ell| \rangle$  a partir da Eq. (2.15), onde a  $p(\ell)$  de interesse é a distribuição de Lévy no limite assintótico  $\ell \gg 1$ . Neste caso, conforme discutido, podemos

representá-la pela lei de potência dada por

$$p(\ell) = \frac{(\mu - 1) \ell_0^{\mu-1}}{2} \frac{1}{|\ell|^\mu} \text{ se } \ell \geq \ell_0, \quad (2.63)$$

e  $p(\ell) = 0$  se  $\ell < \ell_0$ , tendo em vista que  $\ell_0$  é o comprimento de passo mínimo e o parâmetro de interesse  $\mu$  satisfaz a condição  $1 < \mu \leq 3$ .

Antes de começarmos a calcular o que estamos interessados podemos escrever a Eq. (2.15) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \int_{\ell_0}^{x_0-r_v} \ell p(\ell) d\ell + \int_{x_0-r_v}^{\infty} (x_0 - r_v) p(\ell) d\ell \\ &+ \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} \ell p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-x_0-r_v}^{\infty} (\lambda - x_0 - r_v) p(\ell) d\ell, \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde podemos simplificar a expressão acima utilizando a condição de normalização abaixo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\ell) d\ell = 1. \quad (2.65)$$

Como nosso comprimento de passo mínimo é  $\ell_0$ , podemos representar a condição acima como

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\infty} p(\ell) d\ell &= \int_{\ell_0}^{x_0-r_v} p(\ell) d\ell + \int_{x_0-r_v}^{\infty} p(\ell) d\ell \\ &= \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-x_0-r_v}^{\infty} p(\ell) d\ell = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Aplicando a condição acima na Eq. (2.64) e reorganizando os termos obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(x_0) &= \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{x_0-r_v} [\ell - (x_0 - r - v)] p(\ell) d\ell \\ &+ \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] p(\ell) d\ell. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Observamos que a expressão (2.64) que obtemos sofre alteração dependendo do intervalo em que o caminhante estiver. Por exemplo, se  $r_v \leq x_0 \leq r_v + \ell_0$  isso implica que  $(x_0 - r_v) \leq \ell_0$  e a primeira integral se anula tendo em vista que  $p(\ell) = 0$  se  $\ell < \ell_0$ . Então para este caso temos

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{\lambda-x_0-r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (2.68)$$

Por outro lado, se  $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v$  isso implica que  $(\lambda - x_0 - r_v) \leq \ell_0$  e neste caso a segunda integral se anula, reduzindo a expressão original para

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \int_{\ell_0}^{x_0-r_v} [\ell - (x_0 - r_v)] p(\ell) d\ell. \quad (2.69)$$

Por fim, se  $r_v + \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v - \ell_0$  recuperamos a Eq. (2.66).

Após estas considerações podemos de fato calcular  $\langle |\ell| \rangle(x_0)$  para a distribuição de Lévy. Para uma busca com início em  $r_v \leq x_0 \leq r_v + \ell_0$  e para o caso  $\mu \neq 2$  temos

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\ell_0}^{\lambda - x_0 - r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] \ell^{-\mu} d\ell, \quad (2.70)$$

onde resolvendo a integral acima obtemos

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[ 1 + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} \right]. \quad (2.71)$$

Agora para o mesmo caso, porém com  $\mu = 2$ , ficamos com

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{\ell_0}{2} \int_{\ell_0}^{\lambda - x_0 - r_v} [\ell - (\lambda - x_0 - r_v)] \ell^{-2} d\ell + \frac{\lambda - 2r_v}{2}, \quad (2.72)$$

de modo que

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} \left[ 1 + \ln \left( \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) \right]. \quad (2.73)$$

Para o segundo caso, ou seja, quando o caminhante parte de uma posição  $\lambda - r_v - \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v$ , temos para  $\mu \neq 2$

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - 2r_v)}{2} + \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\ell_0}^{x_0 - r_v} [\ell - (x_0 - r_v)] \ell^{-\mu} d\ell, \quad (2.74)$$

que se reduz a

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[ 1 + \frac{((x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} \right]. \quad (2.75)$$

Note que a equação acima é semelhante à Eq. (2.70), com a diferença da troca de  $(x_0 - r_v) \leftrightarrow (\lambda - x_0 - r_v)$ .

Continuando para  $\mu = 2$  e seguindo o raciocínio acima para a troca dos valores, temos que

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{2} + \frac{\ell_0}{2} \left[ 1 + \ln \left( \frac{(x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) \right]. \quad (2.76)$$

Para o último caso que corresponde ao caçador começando em  $r_v + \ell_0 \leq x_0 \leq \lambda - r_v - \ell_0$ , basta somar os dois resultados dos extremos que obtivemos nas equações anteriores e subtrair a constante  $(\lambda - 2r_v)/2$ , de modo que

para  $\mu \neq 2$ :

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{\ell_0(1 - \mu)}{2(2 - \mu)} \left[ 2 + \frac{((x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} + \frac{((\lambda - x_0 - r_v)/\ell_0)^{2-\mu}}{1 - \mu} \right]; \quad (2.77)$$

para  $\mu = 2$ :

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \frac{\ell_0}{2} \left[ 2 + \ln \left( \frac{(\lambda - x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) + \ln \left( \frac{(x_0 - r_v)}{\ell_0} \right) \right], \quad (2.78)$$

que podemos simplificá-la para

$$\langle |\ell| \rangle(x_0) = \ell_0 \left[ 1 + \ln \left( \frac{[(\lambda - x_0 - r_v)(x_0 - r_v)]^{1/2}}{\ell_0} \right) \right]. \quad (2.79)$$

Calcularemos agora os elementos de matriz  $A_{ij}$  referentes à matriz  $\mathbf{A}$  utilizando a Eq. (2.51), lembrando que se  $|x_j - x_i| < \ell_0 \rightarrow A_{ii} = A_{ij} = 0$ . Então, para a  $p(\ell)$  de Lévy no domínio de  $|x_j - x_i| \geq \ell_0$ , temos

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + \Delta x_i} \frac{1}{\ell^\mu} d\ell, \quad (2.80)$$

ou seja,

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|x_j - x_i|}{\ell_0} \right)^{1-\mu} - \left( \frac{|x_j - x_i| + dx}{\ell_0} \right)^{1-\mu} \right]. \quad (2.81)$$

Para obtermos a expressão discretizada basta escrevermos  $x_i = i dx$  e  $\ell_0 = i_\ell dx$ , com  $i$  e  $i_\ell$  sendo números naturais, de modo que

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{|j - i|}{i_\ell} \right)^{1-\mu} - \left( \frac{|j - i| + 1}{i_\ell} \right)^{1-\mu} \right]. \quad (2.82)$$

Concluindo esta subseção, calcularemos  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$  para a distribuição de Lévy. Utilizando a Eq. (2.60), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) &= \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell \\ &= \frac{(\mu - 1)\ell_0^{\mu-1}}{2} \left[ \frac{-(\lambda - r_v - \phi)^{1-\mu}}{1 - \mu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \ell_0^{\mu-1} (\lambda - r_v - \phi)^{1-\mu}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

de modo que a expressão acima pode ser reescrita como

$$\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\lambda - r_v - \phi)}{\ell_0} \right]^{1-\mu}, \quad (2.84)$$

para  $\phi \leq \lambda - r_v - \ell_0$ , e caso contrário  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = 1/2$ .

2.5.2 Cálculo de  $\langle |\ell| \rangle$ ,  $A_{ij}$  e  $\mathcal{P}$  para a exponencial simples

Assim como para a distribuição de Lévy, começaremos calculando  $\langle |\ell| \rangle(\phi)$  agora para a  $p(\ell)$  exponencial simples, que definimos como

$$p(\ell) = \frac{w}{d} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d}\right), \text{ se } \ell \geq \ell_0, \quad (2.85)$$

e  $p(\ell) = 0$  se  $\ell < \ell_0$ , pois  $\ell_0$  é o comprimento de passo mínimo. Então, nos utilizaremos novamente da Eq. (2.15), com a substituição  $\phi = x_0 - r_v$ , de modo que

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(\phi) &= \int_{-\phi}^{-\ell_0} -\ell p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{\lambda-\phi} \ell p(\ell) d\ell \\ &+ \int_{-\infty}^{-\phi} \phi p(\ell) d\ell + \int_{\lambda-\phi}^{\infty} (\lambda - \phi) p(\ell) d\ell. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Denotaremos as integrais da Eq. (2.87) seguindo a ordem nas quais foram escritas como  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$ , respectivamente, e calcularemos cada uma delas a seguir. Para  $I_1$  temos

$$\begin{aligned} \int_{-\phi}^{-\ell_0} -\ell p(\ell) d\ell &= -\frac{w}{d} \int_{-\phi}^{-\ell_0} \ell \exp\left(\frac{\ell}{d}\right) d\ell \\ &= -\frac{w}{d} d [-\ell_0 \exp(-\ell_0/d) + \phi \exp(-\phi/d)] \\ &+ \frac{w}{d} d^2 [\exp(-\ell_0/d) - \exp(-\phi/d)] \\ &= w \ell_0 \exp(-\ell_0/d) - w \phi \exp(-\phi/d) + w d \exp(-\ell_0/d) \\ &- w d \exp(-\phi/d) \\ &= w \exp(-\ell_0/d) (\ell_0 + d) - w \exp(-\phi/d) (\phi + d). \end{aligned}$$

Assim,

$$I_1 = w \exp\left(\frac{-\ell_0}{d}\right) (\ell_0 + d) - w \exp\left(\frac{-\phi}{d}\right) (\phi + d). \quad (2.87)$$

Para  $I_2$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\lambda-\phi} \ell p(\ell) d\ell &= \frac{w}{d} \int_{\ell_0}^{\lambda-\phi} \ell \exp\left(\frac{-\ell}{d}\right) d\ell \\ &= -w (\lambda - \phi) \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right) + w \ell_0 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d}\right) \\ &- w d \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right) + w d \exp\left(\frac{-\ell_0}{d}\right) \\ &= w \exp\left(\frac{-\ell_0}{d}\right) (\ell_0 + d) - w \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right) (\lambda - \phi + d), \end{aligned}$$

de modo que

$$I_2 = w \exp\left(\frac{-\ell_0}{d}\right) (\ell_0 + d) - w \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right) (\lambda - \phi + d). \quad (2.88)$$

Prosseguindo com  $I_3$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\phi} \phi p(\ell) d\ell &= \frac{\phi w}{d} \int_{-\infty}^{-\phi} \exp\left(\frac{\ell}{d}\right) d\ell \\ &= \phi w \exp\left(\frac{-\phi}{d}\right), \end{aligned}$$

tal que

$$I_3 = \phi w \exp\left(\frac{-\phi}{d}\right). \quad (2.89)$$

Finalmente, para  $I_4$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda-\phi}^{\infty} (\lambda - \phi) p(\ell) d\ell &= \frac{(\lambda - \phi)w}{d} \int_{\lambda-\phi}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d}\right) d\ell \\ &= (\lambda - \phi) w \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_4 = (\lambda - \phi) w \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right). \quad (2.90)$$

Assim,  $\langle |\ell| \rangle(\phi) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ , onde explicitamente temos

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle(\phi) &= w \exp\left(\frac{-\ell_0}{d}\right) (\ell_0 + d) - w \exp\left(\frac{-\phi}{d}\right) (\phi + d) \\ &+ w \exp\left(\frac{-\ell_0}{d}\right) (\ell_0 + d) - w \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right) (\lambda - \phi + d) \\ &+ \phi w \exp\left(\frac{-\phi}{d}\right) + (\lambda - \phi) w \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d}\right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Calcularemos agora os elementos da matriz  $\mathbf{A}$ . Utilizando a Eq. (2.52), temos para  $|x_j - x_i| \geq \ell_0$  que

$$\begin{aligned} A_{ij} = A_{ji} &= \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} \frac{w}{d} \exp(-\ell/d) d\ell = \frac{w}{d} \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} \exp(-\ell/d) d\ell \\ &= -w \left[ \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d} - \frac{dx}{d}\right) - \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d}\right) \right], \end{aligned}$$

de modo que

$$A_{ij} = A_{ji} = w \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d}\right) - w \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d} - \frac{dx}{d}\right). \quad (2.92)$$

Para obter os elementos de matriz na forma discreta, faremos o procedimento análogo ao da subseção anterior, com  $x_i = i dx$ ,  $x_j = j dx$  e  $d = d_n dx$ . Desse modo,

$$A_{ij} = A_{ji} = w \exp\left(\frac{-|j-i|}{d_n}\right) - w \exp\left(\frac{-|j-i|}{d_n} - \frac{1}{d_n}\right). \quad (2.93)$$

Por fim, para determinar  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$  usaremos a Eq. (2.60), de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) &= \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} \frac{w}{d} \exp\left(\frac{-\ell}{d}\right) d\ell = \frac{w}{d} \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d}\right) d\ell \\ &= w \exp\left(\frac{-(\lambda - r_v - \phi)}{d}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = w \exp\left(\frac{-(\lambda - r_v - \phi)}{d}\right), \quad (2.94)$$

quando  $\phi \leq \lambda - r_v - \ell_0$ . Por outro lado, se  $\phi > \lambda - r_v - \ell_0$  então  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = 1/2$ .

### 2.5.3 Cálculo de $\langle |\ell| \rangle$ , $A_{ij}$ e $\mathcal{P}$ para a exponencial dupla

No caso da pdf de tamanhos de passos do tipo exponencial dupla, definimos

$$p(\ell) = \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d_1}\right) + \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d_2}\right), \text{ se } \ell \geq \ell_0, \quad (2.95)$$

e, como já discutimos,  $p(\ell) = 0$  se  $\ell < \ell_0$ . Antes de começarmos a calcular a quantidade  $\langle |\ell| \rangle$  analisaremos a normalização com a finalidade de obter uma relação entre os parâmetros  $w_1$  e  $w_2$  da distribuição.

Utilizando novamente a Eq. (2.65) com a condição de que  $\ell_0$  é o comprimento de passo mínimo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\ell_0} p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{+\infty} p(\ell) d\ell &= 1 \\ \int_{\ell_0}^{+\infty} p(\ell) d\ell + \int_{\ell_0}^{+\infty} p(\ell) d\ell &= 1 \\ 2 \int_{\ell_0}^{+\infty} p(\ell) d\ell &= 1 \\ \int_{\ell_0}^{\infty} p(\ell) d\ell &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Substituindo a  $p(\ell)$  da exponencial dupla em (2.96) e calculando a integral obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d_1}\right) d\ell + \int_{\ell_0}^{\infty} \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{-|\ell|}{d_2}\right) d\ell &= \frac{1}{2} \\ \frac{w_1}{d_1} \int_{\ell_0}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) d\ell + \frac{w_2}{d_2} \int_{\ell_0}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) d\ell &= \frac{1}{2} \\ w_1 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_1}\right) + w_2 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_2}\right) &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

onde para  $\ell_0 = 0$  teremos  $w_1 + w_2 = 1/2$ . Este resultado será de grande importância no capítulo onde discutiremos nossos resultados.

Após analisarmos a normalização, determinaremos  $\langle |\ell| \rangle$ . Esperamos resultados semelhantes aos da exponencial simples, tendo em vista que a exponencial dupla é uma soma de duas exponenciais simples. Logo, para calcular esta quantidade faremos uso da Eq. (2.86) e seguiremos a mesma metodologia adotada na subseção anterior, onde  $\langle |\ell| \rangle = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ . Para o cálculo de  $I_1$  temos

$$\begin{aligned} & - \int_{-\phi}^{-\ell_0} \left[ \ell \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{\ell}{d_1}\right) + \ell \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{\ell}{d_2}\right) \right] d\ell \\ & = \underbrace{- \frac{w_1}{d_1} \int_{-\phi}^{-\ell_0} \ell \exp\left(\frac{\ell}{d_1}\right) d\ell}_{\text{Primeiro termo}} \underbrace{- \frac{w_2}{d_2} \int_{-\phi}^{-\ell_0} \ell \exp\left(\frac{\ell}{d_2}\right) d\ell}_{\text{Segundo termo}}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Dividimos a expressão acima em dois termos, observando que cada termo acima representa uma exponencial simples, ou seja, estamos com uma expressão no qual sabemos o resultado de cada contribuição separadamente. Fazendo uso deste fato, encontramos que

$$\begin{aligned} I_1 & = w_1 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_1}\right) (\ell_0 + d_1) - w_1 \exp\left(\frac{-\phi}{d_1}\right) (\phi + d_1) \\ & + w_2 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_2}\right) (\ell_0 + d_2) - w_2 \exp\left(\frac{-\phi}{d_2}\right) (\phi + d_2). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Para  $I_2$  temos

$$\begin{aligned} I_2 & = \int_{\ell_0}^{\lambda-\phi} \left[ \ell \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) + \ell \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) \right] d\ell \\ & = \underbrace{\frac{w_1}{d_1} \int_{\ell_0}^{\lambda-\phi} \ell \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) d\ell}_{\text{Primeiro termo}} + \underbrace{\frac{w_2}{d_2} \int_{\ell_0}^{\lambda-\phi} \ell \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) d\ell}_{\text{Segundo termo}}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

onde cada termo individual acima corresponde à integral para a exponencial simples, tal que

$$\begin{aligned} I_2 & = w_1 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_1}\right) (\ell_0 + d_1) - w_1 \exp\left(\frac{-(\lambda-\phi)}{d_1}\right) (\lambda - \phi - d_1) \\ & + w_2 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_2}\right) (\ell_0 + d_2) - w_2 \exp\left(\frac{-(\lambda-\phi)}{d_2}\right) (\lambda - \phi - d_2). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Usando uma metodologia análoga para o cálculo de  $I_3$  e  $I_4$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_3 & = \phi \int_{-\infty}^{-\phi} \left[ \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{\ell}{d_1}\right) + \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{\ell}{d_2}\right) \right] d\ell \\ & = \frac{\phi w_1}{d_1} \int_{-\infty}^{-\phi} \exp\left(\frac{\ell}{d_1}\right) d\ell + \frac{\phi w_2}{d_2} \int_{-\infty}^{-\phi} \exp\left(\frac{\ell}{d_2}\right) d\ell \\ & = \phi w_1 \exp\left(\frac{-\phi}{d_1}\right) + \phi w_2 \exp\left(\frac{-\phi}{d_2}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$I_3 = \phi w_1 \exp\left(\frac{-\phi}{d_1}\right) + \phi w_2 \exp\left(\frac{-\phi}{d_2}\right). \quad (2.102)$$

Finalmente, para  $I_4$ ,

$$\begin{aligned} I_4 &= (\lambda - \phi) \int_{\lambda-\phi}^{\infty} \left[ \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) + \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) \right] d\ell \\ &= \frac{(\lambda - \phi)w_1}{d_1} \int_{\lambda-\phi}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) d\ell + \frac{(\lambda - \phi)w_2}{d_2} \int_{\lambda-\phi}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) d\ell \\ &= (\lambda - \phi)w_1 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_1}\right) + (\lambda - \phi)w_2 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_2}\right). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Então,

$$I_4 = (\lambda - \phi)w_1 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_1}\right) + (\lambda - \phi)w_2 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_2}\right). \quad (2.104)$$

Assim, como  $\langle |\ell| \rangle$  é a soma das quatro integrais, explicitamente temos

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle &= w_1 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_1}\right) (\ell_0 + d_1) - w_1 \exp\left(\frac{-\phi}{d_1}\right) (\phi + d_1) \\ &\quad + w_2 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_2}\right) (\ell_0 + d_2) - w_2 \exp\left(\frac{-\phi}{d_2}\right) (\phi + d_2) \\ &\quad + w_1 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_1}\right) (\ell_0 + d_1) - w_1 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_1}\right) (\lambda - \phi - d_1) \\ &\quad + w_2 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_2}\right) (\ell_0 + d_2) - w_2 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_2}\right) (\lambda - \phi - d_2) \\ &\quad + \phi w_1 \exp\left(\frac{-\phi}{d_1}\right) + \phi w_2 \exp\left(\frac{-\phi}{d_2}\right) \\ &\quad + (\lambda - \phi)w_1 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_1}\right) + (\lambda - \phi)w_2 \exp\left(\frac{-(\lambda - \phi)}{d_2}\right). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Para os elementos de matriz, usaremos a Eq. (2.52) lembrando que  $A_{ij} = A_{ji} = 0$  se  $|x_j - x_i| < \ell_0$ . Os elementos tais que  $|x_j - x_i| \geq \ell_0$  são dados por

$$\begin{aligned} A_{ij} = A_{ji} &= \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} \left[ \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) + \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) \right] d\ell \\ &= \underbrace{\frac{w_1}{d_1} \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) d\ell}_{\text{Integral 1}} + \underbrace{\frac{w_2}{d_2} \int_{|x_j - x_i|}^{|x_j - x_i| + dx} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) d\ell}_{\text{Integral 2}}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Assim como no cálculo anterior, chegamos em duas integrais cuja resolução gerará elementos de matrizes de duas exponenciais simples, ou seja, a integral 1 e a integral 2 correspondem a elementos de matrizes de duas exponenciais simples. Logo, seguindo o procedimento

anterior temos

$$\begin{aligned}
 A_{ij} = A_{ji} &= w_1 \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d_1}\right) - w_1 \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d_1} - \frac{dx}{d_1}\right) \\
 &+ w_2 \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d_2}\right) - w_2 \exp\left(\frac{-|x_j - x_i|}{d_2} - \frac{dx}{d_2}\right). \quad (2.107)
 \end{aligned}$$

Para obter os elementos de matriz no espaço discreto, substituímos  $i dx = x_i$ ,  $j dx = x_j$ ,  $d_1 = d_{1n} dx$  e  $d_2 = d_{2n} dx$ , de modo que em sua forma discreta obtemos

$$\begin{aligned}
 A_{ij} = A_{ji} &= w_1 \exp\left(\frac{-|j - i|}{d_{1n}}\right) - w_1 \exp\left(\frac{-|j - i|}{d_{1n}} - \frac{1}{d_{1n}}\right) \\
 &+ w_2 \exp\left(\frac{-|j - i|}{d_{2n}}\right) - w_2 \exp\left(\frac{-|j - i|}{d_{2n}} - \frac{1}{d_{2n}}\right). \quad (2.108)
 \end{aligned}$$

Por último, calculemos  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$ . Novamente, utilizaremos a Eq. (2.60), de modo que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) &= \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} \left[ \frac{w_1}{d_1} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) + \frac{w_2}{d_2} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) \right] d\ell \\
 &= \frac{w_1}{d_1} \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right) d\ell + \frac{w_2}{d_2} \int_{\lambda - r_v - \phi}^{\infty} \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right) d\ell. \quad (2.109)
 \end{aligned}$$

Vemos que cada integral acima representa o  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi)$  de uma exponencial simples. Assim, para a exponencial dupla temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) &= w_1 \exp\left(\frac{-(\lambda - r_v - \phi)}{d_1}\right) + w_2 \exp\left(\frac{-(\lambda - r_v - \phi)}{d_2}\right), \quad (2.110) \\
 &\text{para } (\phi \leq \lambda - r_v - \ell_0),
 \end{aligned}$$

onde, como já comentamos,  $\mathcal{P}(\ell \geq \lambda - r_v - \phi) = 1/2$  se  $\phi > \lambda - r_v - \ell_0$ .

No próximo capítulo, com a finalidade de complementar nosso acervo teórico, introduziremos alguns elementos de Teoria da Informação, que será aplicada ao problema da busca aleatória no capítulo posterior. Definiremos o conceito formal de informação e a medida de dispersão de uma distribuição de probabilidades. Esta última se denomina entropia de Shannon em homenagem ao matemático e engenheiro eletrônico americano Claude Elwood Shannon, considerado o pai da Teoria da Informação.

### 3 A TEORIA DA INFORMAÇÃO

Neste capítulo trataremos de analisar os principais elementos da Teoria da Informação, os quais constituem a informação propriamente dita e a entropia associada ao sistema. Primeiramente conceituaremos a informação e abordaremos este conceito a ponto de obtermos uma expressão para a quantidade de informação de um sistema físico. Por fim, definiremos o conceito de entropia e traduziremos esta definição para uma linguagem matemática que usaremos efetivamente na obtenção, no capítulo seguinte, de um dos nossos principais resultados numéricos no contexto do problema da busca aleatória.

A teoria da informação tem como propósito original solucionar problemas técnicos envolvidos na transmissão de informação. Também é sua função resolver problemas semânticos, por exemplo, como uma mensagem recebida é interpretada na comunicação de dois indivíduos. A quantidade de informação que um sistema possui é definida em termos de distribuições de probabilidades, de modo que fisicamente a teoria de informação é vista como uma teoria de entropia [63].

#### 3.1 Conceito de Informação

De um ponto de vista mais simplista, é possível afirmar que enquanto o conceito usual de informação diz respeito, por exemplo, ao que uma pessoa diz, enquanto que para a Teoria da Informação o termo informação está relacionado com o que a pessoa pode dizer. Partindo desta afirmação, podemos então nos perguntar, de um modo mais rigoroso, o que é informação? *Informação é a redução de incerteza oferecida quando se obtém resposta a uma pergunta.* Observando bem, antes de receber uma mensagem é suposto que exista um conjunto finito de mensagens possíveis a serem recebidas e cada uma dessas mensagens tem uma probabilidade de ocorrência. Assim, a incerteza da informação a ser recebida diminui quando a mensagem é recebida [50][63].

Portanto percebemos que a quantidade de incerteza reduzida a uma mensagem está relacionada com a probabilidade de ocorrência, pois o recebimento de uma mensagem mais provável contém menos informação que uma mensagem menos provável. Por exemplo, se é dito no noticiário que no Recife fará sol forte no verão, essa mensagem tem menos informação do que se for dito que nevou no Recife em qualquer época do ano.

Veremos agora como abordar este conceito matematicamente, de modo a obter uma expressão para a quantidade de informação [40].

Considere uma variável aleatória com um conjunto discreto de resultados  $U = \{x_i\}$  ocorrendo com probabilidades  $\{P_i\}$  para  $i = (1, 2, \dots, M)$ , onde  $\sum_i P_i = 1$ . Como discutimos, no contexto da Teoria da Informação há um significado preciso para o conteúdo da informação de uma distribuição de probabilidades. Podemos construir uma mensagem de  $N$  caracteres independentes dos resultados da variável aleatória. Como há  $M$  possibilidades para cada caracter nesta mensagem, ele tem um conteúdo aparente de informação  $N \ln_2 M$  bits. Por exemplo, se o remetente pretende enviar uma mensagem utilizando o alfabeto da língua portuguesa contendo 26 letras, então para cada letra que deseja enviar ao destinatário ele terá que escolher entre 26 símbolos. Então se ele pretende usar 3 símbolos do alfabeto, terá  $26^3$  possíveis combinações para formar sua mensagem. Esses muitos bits binários de informação precisam ser transmitidos para passar a mensagem com precisão. Por outro lado as probabilidades  $P_i$  limitam os tipos de mensagens que são prováveis. Por exemplo, se  $P_2 \gg P_1$  é muito improvável construir uma mensagem com mais resultados  $x_1$  do que  $x_2$ .

O número de mensagens típicas corresponde, portanto, ao número de maneiras de organizar as  $N_i$  ocorrências de  $x_i$ , sendo este dado pelo coeficiente multinomial

$$g = \frac{N!}{\prod_{i=1}^M N_i!}, \quad (3.1)$$

o qual é muito menor que o número total de mensagens dado por  $M^N$ . Para obtermos o número de bits de informação, observamos que

$$\begin{aligned} \ln_2(g) &\approx \ln_2\left(\frac{N!}{\prod_{i=1}^M N_i!}\right) \\ &\approx \ln_2(N!) - \ln_2\left(\prod_{i=1}^M N_i!\right) \\ &\approx \ln_2(N!) - \sum_{i=1}^M \ln_2(N_i!). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Fazendo  $N \rightarrow \infty$ , podemos utilizar a aproximação de Stirling,

$$\ln(x!) = x \ln(x) - x + \mathcal{O}(\ln(x)). \quad (3.3)$$

Assim, para o nosso caso ficamos com

$$\begin{aligned} \ln_2(g) &\approx N \ln_2(N) - N - \sum_{i=1}^M (N_i \ln_2(N_i) - N_i) \\ &\approx N \ln_2(N) - N - \sum_{i=1}^M N_i \ln_2(N_i) + \sum_{i=1}^M N_i. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em particular, no limite de  $N \gg 1$  esperamos que a mensagem contenha aproximadamente

$N_i = N P_i$  ocorrências de cada símbolo. Assim,

$$\begin{aligned}
\ln_2(g) &\approx N \ln_2(N) - N - \sum_{i=1}^M (N P_i) \ln_2(N P_i) + \sum_{i=1}^M N P_i \\
&\approx N \ln_2(N) - N - \sum_{i=1}^M (N P_i) (\ln_2(N) + \ln_2(P_i)) + N \underbrace{\sum_{i=1}^M P_i}_{=1} \\
&\approx N \ln_2(N) - N \sum_{i=1}^M P_i \ln_2(N) - N \sum_{i=1}^M P_i \ln_2(P_i) \\
&\approx N \ln_2(N) - N \ln_2(N) \underbrace{\sum_{i=1}^M P_i}_{=1} - N \sum_{i=1}^M P_i \ln_2(P_i) \\
\ln_2(g) &\approx -N \sum_{i=1}^M P_i \ln_2(P_i) \quad \text{para } (N \rightarrow \infty). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Como já mencionamos, para qualquer distribuição de probabilidades  $\{P_i\}$  não uniforme este valor é menor do que os  $N \ln_2(M)$  bits necessários na ausência de qualquer informação sobre probabilidades relativas. Assim o **conteúdo informacional** será a diferença *potentativa* considerando uma certa distribuição de probabilidades. Logo,

$$\begin{aligned}
I[(P_i)] &= \ln_2(M) - \left( - \sum_{i=1}^M P_i \ln_2(P_i) \right) \\
&= \ln_2(M) + \sum_{i=1}^M P_i \ln_2(P_i). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

### 3.2 A Entropia segundo Claude Shannon

Embora a definição de informação que vimos na subseção anterior apresente resultados interessantes, ela não permite determinar diretamente qual é a incerteza contida em um sistema conhecendo os possíveis estados que podem ser acessados e suas respectivas probabilidades. Para abordarmos essa questão mais apropriadamente, vamos recorrer ao conceito de entropia. A termodinâmica nos diz que entropia é o grau ou tendência da desorganização da matéria. No regime microscópico, Boltzmann descreve a entropia como uma medida estatística [40]. Então, estudando essas definições e realizando algumas observações, Shannon propôs que a **quantidade de informação** deve ser compatível com o conceito de **entropia da mecânica estatística**. Assim, Shannon define a entropia como sendo

$$S = - \sum_{i=1}^n P_i \ln(P_i) = - \langle \ln(P_i) \rangle. \tag{3.7}$$

Portanto, podemos dizer que  $S$  é a *quantidade média de informação* por sinal de um repertório [63].

Em alguns casos particulares onde se tem três possibilidades de escolha, como por exemplo, em um evento de duas possibilidades, ocorre que uma das escolhas é dividida em mais duas alternativas sucessivas, Shannon afirma que o único  $S$  que satisfaz as três superposições é da forma

$$S = -K \sum_{i=1}^n P_i \ln(P_i), \quad (3.8)$$

onde  $K$  é uma constante positiva.

As quantidades da forma  $S = -\sum_{j=1}^N P_j \ln(P_j)$  (a constante  $K$  representa apenas escolha de uma unidade de medida) desempenham um papel central na teoria da informação como a própria medida da informação ou redução de incerteza como assim também é chamada [63].

Partindo da definição de entropia de Shannon, podemos provar de fato que a mesma é compatível com a definição da entropia do ensemble microcanônico.

*Prova:* Pelo postulado fundamental da mecânica estatística temos que para o ensemble microcanônico a probabilidade de cada microestado acessível ao sistema (*apenas para sistemas caracterizados por variáveis discretas*) é dada por:

$$P_j = \frac{1}{\Omega_j}, \quad (3.9)$$

onde  $\Omega_j$  é o número de microestados acessíveis. Como  $K$  é uma constante positiva, podemos considerar  $K = K_B$ , onde,  $K_B$  é a constante de Boltzmann. Sendo assim,

$$\begin{aligned} S &= -K_B \sum_j P_j \ln(P_j) \\ &= -K_B \sum_{j=1}^N \frac{1}{\Omega_j} \ln\left(\frac{1}{\Omega_j}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Podemos interpretar  $\Omega \equiv \Omega(E, V, N)$  fisicamente considerando dois (ou mais) sistemas macroscópicos  $(E_1, V_1, N_1)$  e  $(E_2, V_2, N_2)$ , separados entre si e do ambiente por paredes impermeáveis, rígidas e adiabáticas. Sob a hipótese de interação fraca, para cada um dos microestados do sistema 1 há microestados do sistema 2 **igualmente prováveis**. Logo,

$$\Omega \equiv \Omega_1(E_1, V_1, N_1) \cdot \Omega_2(E_2, V_2, N_2). \quad (3.11)$$

Generalizando a definição acima, obtemos a forma geral de  $\Omega$  para o  $j$ -ésimo sistema macroscópico, dada por,

$$\Omega \equiv \prod_j \Omega_j(E_j, V_j, N_j). \quad (3.12)$$

Portanto, considerando a definição acima e realizando a soma de  $j = 1$  até  $N$  temos,

$$\begin{aligned} S &= -K_B \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{\Omega} \ln(\Omega)^{-1} \right] \\ &= K_B \ln(\Omega) \underbrace{\sum_{j=1}^N P_j}_{=1} \\ S &= K_B \ln(\Omega), \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde  $S = K_B \ln(\Omega)$  é a definição de entropia no ensemble microcanônico.

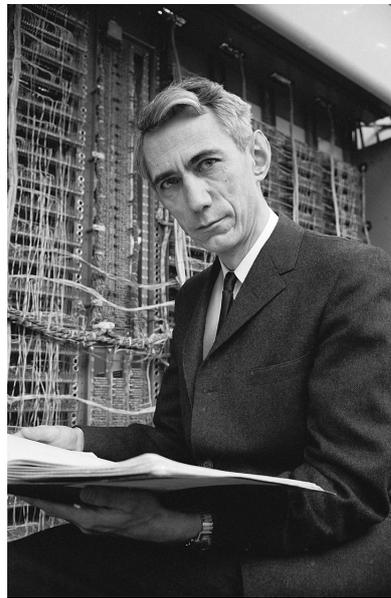


Figura 4 – Claude Elwood Shannon, o pai da teoria da informação.

Assim, observamos que a entropia tem algumas características interessantes, como por exemplo:

(1) À medida que um grupo de símbolos se torna mais provável que os outros possíveis sinais, a **entropia decresce**.

(2) A **entropia máxima** só acontece quando a ocorrência de símbolos forem equiprováveis.

(3) Quando se tem certeza sobre qual símbolo vai ser transmitido a **entropia é nula**. Matematicamente podemos associar este caso quando temos a distribuição do tipo função delta,  $P_i = \delta_{ij}$ .

Logo,  $S$  também é uma medida de dispersividade (*desordem*) da distribuição. Shannon também observa que existem graus de redundância no idioma no qual a informação

é transmitida [63]. Mas no contexto da Teoria da Informação o que seria redundância? *É tudo aquilo que não é fundamental para o entendimento de uma mensagem e pode ser entendida como uma medida complementar à entropia.* Em suma, é a quantidade de entropia necessária para que a mensagem tenha entropia máxima.

A entropia  $S$  também pode ser usada para quantificar estimativas subjetivas de probabilidades. Na ausência de qualquer informação, a melhor estimativa imparcial é que todos os valores de  $M$  sejam igualmente prováveis. Esta é a distribuição associada à entropia máxima. Se informações adicionais estiverem disponíveis, a estimativa imparcial é obtida maximizando a entropia sujeita a restrições impostas por essa informação.

Podemos então dar um exemplo de como se comporta a entropia de Shannon para um evento com duas possibilidades. Consideraremos o evento do lançamento de uma moeda comum não viciada. Assim temos as seguintes possibilidades após o lançamento:

|                 |         |
|-----------------|---------|
| Possibilidade 1 | “Cara”  |
| Possibilidade 2 | “Coroa” |

Consideremos agora  $P_1$  a probabilidade da moeda cair na face “Cara” e  $P_2$  na face “Coroa”. Então sabemos que, como só existem essas duas possibilidades,  $P_1 = 50\%$  e  $P_2 = 50\%$  para a moeda não viciada. Definindo este fator, calculemos agora a entropia de Shannon associada a este evento.

Sabemos que a entropia de Shannon é dada por

$$S = -P_1 \ln_2(P_1) - P_2 \ln_2(P_2). \quad (3.14)$$

Assim, para obtermos nossa resposta em bits precisamos efetuar o logaritmo na base dois, de modo que

$$S = -(0,5) \ln_2(0,5) - (0,5) \ln_2(0,5) = 0,5 + 0,5 = 1. \quad (3.15)$$

Vemos, portanto, que a entropia de Shannon associada a este evento é 1 bit. Podemos representar a entropia graficamente em função de  $P_1$  ou  $P_2$  para uma moeda qualquer (não necessariamente não viciada), tendo em vista que  $P_1 + P_2 = 1$ . Escrevendo a entropia em função de  $P_1$ ,

$$\begin{aligned} S &= -P_1 \ln_2(P_1) - P_2 \ln_2(P_2) \\ &= -P_1 \ln_2(P_1) - (1 - P_1) \ln_2(1 - P_1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Podemos então obter o gráfico de  $S$  em função de  $P_1$ , que é mostrado na Fig. 5.

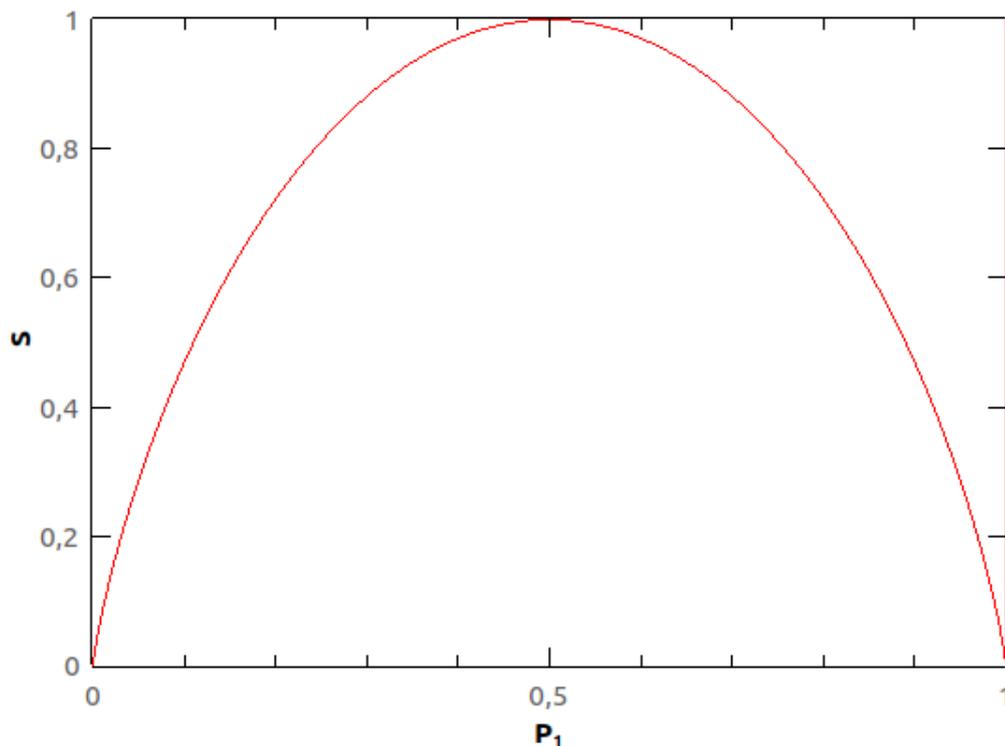


Figura 5 – Entropia de Shannon em função da probabilidade  $P_1$  de cair a face “Cara” referente ao lançamento de uma moeda.

Vemos que a entropia de Shannon obtém seu máximo justamente para  $P_1 = P_2 = 0,5 = 50\%$ , isto é, precisamente quando as chances da moeda cair com a face “Cara” ou “Coroa” são equiprováveis. Fisicamente esse resultado faz sentido pois, quando a moeda não viciada ainda vai ser lançada, não temos ideia do que vai cair, ou seja, é uma situação análoga a uma transmissão de uma mensagem na qual a ocorrência dos símbolos são equiprováveis, de modo que a entropia obtém seu valor máximo [63].

Observando o gráfico vemos que quanto maior a diferença entre as probabilidades, maior o decréscimo da entropia com respeito ao seu máximo, com  $S$  atingindo o zero quando uma das probabilidades ( $P_1$  ou  $P_2$ ) for 100%. Baseado neste fato, vamos verificar no exemplo a seguir que o que constatamos acima é verdadeiro. Considere agora um novo lançamento de uma moeda, agora com  $P_1 = 70\%$  de cair a face “Cara” e  $P_2 = 30\%$  de cair a face “Coroa”. Qual é a entropia de Shannon associada a este evento?

**Solução:** Temos que  $P_1 = 0,7$  e  $P_2 = 0,3$ , portanto a entropia desse sistema é

$$\begin{aligned} S &= -(0,7) \ln_2(0,7) - (0,3) \ln_2(0,3) \\ &= 0,8813. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ou seja, a entropia é menor do que quando  $P_1 = 0,5$  e  $P_2 = 0,5$ . Logo, concluímos de fato que a entropia sofre um decréscimo quando a diferença entre as probabilidades aumenta.

É possível também estender a entropia de Shannon para uma variável aleatória contínua, na forma

$$S = - \int dx P(x) \ln(P(x)) = -\langle \ln P(x) \rangle. \quad (3.18)$$

Neste trabalho, utilizamos apenas a representação discreta da entropia de Shannon na forma da Eq. (3.7), tendo em vista que trabalhamos com um problema unidimensional com duas possibilidades de escolha.

De modo geral, vimos acima que podemos tirar conclusões importantes a respeito da entropia de Shannon. Porém, o que o exemplo acima tem a ver com o nosso sistema de estudo, que é o de um caminhante aleatório em busca por sítios-alvo em uma dimensão? Tudo. No capítulo seguinte vamos fazer uso da conclusão do exemplo acima para interpretar um de nossos principais resultados, tendo em vista que o nosso problema também diz respeito a apenas duas opções de escolha, associadas ao encontro dos sítios-alvo localizados nas posições  $x = 0$  e  $x = \lambda$ . Em outras palavras, no capítulo seguinte utilizaremos os resultados analíticos obtidos no capítulo anterior e no presente capítulo para obter resultados relevantes em nosso estudo. Mais precisamente, analisaremos a eficiência, as probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  e a entropia de Shannon relacionada as distribuições de probabilidades para os tamanhos de passos que descrevemos no capítulo anterior: Lévy, exponencial simples e exponencial dupla.

## 4 ANÁLISE DA ENTROPIA DE SHANNON EM BUSCAS ALEATÓRIAS 1D

Neste capítulo analisaremos nossos resultados relativos à eficiência das buscas aleatórias, às probabilidades do caminhante encontrar algum dos sítios-alvo e à entropia de Shannon associada à busca. Verificaremos essas três quantidades para as três distribuições de probabilidades de tamanhos de passos discutidas no capítulo 2, a saber: Lévy, exponencial simples e exponencial dupla, evidenciando as principais diferenças entre elas. A análise incluirá ambos os tipos de buscas não-destrutivas e destrutivas, embora nosso foco esteja concentrado principalmente nas buscas não-destrutivas, por estas apresentarem eficiência em geral maior que as buscas destrutivas. Por fim, discutiremos o mecanismo relacionado à eficiência da busca em função do comportamento da entropia de Shannon.

### 4.1 Buscas não-destrutivas

Na presente seção analisaremos aspectos estatísticos das buscas aleatórias não-destrutivas, onde evidenciaremos as quantidades  $\eta$ ,  $P_0$ ,  $P_\lambda$  e  $S$  para as distribuições de Lévy, exponencial simples e exponencial dupla.

#### 4.1.1 Distribuição de Lévy

##### 4.1.1.1 Eficiência da busca

Conforme discutido anteriormente, consideramos nesse trabalho que os deslocamentos numa caminhada de Lévy são caracterizados por uma pdf de tamanho de passos  $\ell_j$  do tipo lei de potência,  $P(\ell_j) \cong \ell_j^{-\mu}$ , com  $1 < \mu \leq 3$ . A variação do expoente  $\mu$  caracteriza diferentes distribuições de probabilidades onde, por exemplo, o caso especial  $\mu = 3$  possui somas de deslocamentos atraídas pela distribuição gaussiana devido ao Teorema do Limite Central. Por outro lado, distribuições com  $\mu \rightarrow 1$  envolvem longos passos e deslocamentos balísticos, enquanto que para  $\mu \leq 1$  a pdf não pode ser normalizada [19].

Através do software computacional GNU Octave, programa semelhante ao Matlab, obtemos o gráfico mostrado na Fig. 6 que representa a eficiência da busca para a distribuição de Lévy no caso não-destrutivo. Para gerarmos o gráfico, ajustamos os parâmetros relevantes da seguinte maneira:  $\Delta x = 0, 2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  e  $x_0 = 2r_v = 2\ell_0 = 2$  (conforme discutido, as buscas não-destrutivas são aquelas que se iniciam próximas a um dos sítios-alvo, ou seja,  $x_0 \approx r_v$ , enquanto que as buscas destrutivas se iniciam a partir de um ponto distante de ambos os sítios, como por exemplo em  $x_0 = \lambda/2$ ). Para a pdf de

Lévy, a variável independente é o parâmetro  $\mu$ . Assim, plotamos o gráfico abaixo  $\eta$  versus  $\mu$  variando  $1 < \mu \leq 3$  com pequenos intervalos  $d\mu = 0,1$ .

No Capítulo 2 definimos a eficiência da busca como  $\eta = 1/\langle L \rangle \approx 1/N\langle \ell \rangle$ . Observando esta equação vemos que a eficiência diminui quando o número médio de passos entre dois encontros,  $N$ , ou o tamanho médio de um passo individual,  $\langle \ell \rangle$ , são suficientemente grandes. A Fig. 6 mostra que a eficiência é mínima para  $\mu \approx 1$  e  $\mu = 3$ . Esse resultado se explica pois para  $\mu \approx 1$  temos que  $\langle \ell \rangle$  é grande, uma vez que o tamanho médio do passo do caminhante é longo. Por outro lado, para  $\mu = 3$  o tamanho médio do passo é pequeno e o caminhante tem, em média, de realizar em um número de passos  $N$  bastante grande para encontrar um sítio. Então, tendo em vista que nas extremidades temos uma baixa eficiência da busca, é concebível que para valores intermediários  $\mu \approx 2$  um máximo possa surgir, associada a uma estratégia que combine um grande número de pequenos passos intercalados por grandes passos que são relativamente raros. E esta hipótese é definitivamente constatada graficamente na Fig. 6.

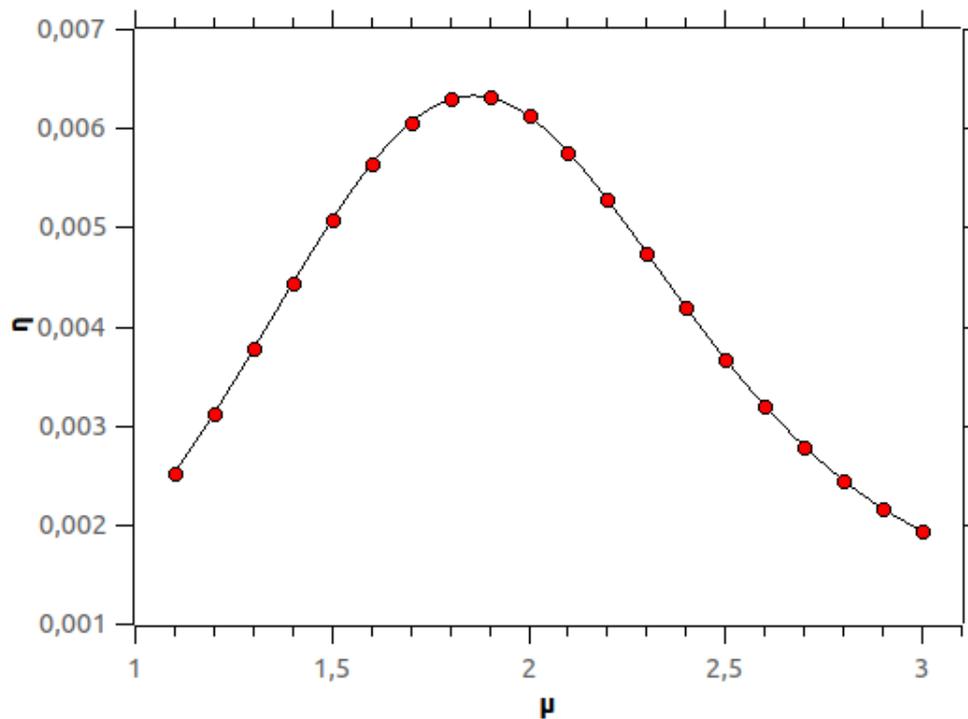


Figura 6 – Eficiência  $\eta$  em função de  $\mu$  para buscas de Lévy não-destrutivas. A eficiência máxima da busca é obtida para  $\mu \cong 2$ . Os parâmetros utilizados foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  e  $x_0 = 2r_v = 2\ell_0 = 2$ .

Podemos comparar o nosso resultado com aquele publicado em [19], que também diz respeito à obtenção de  $\eta$  em função de  $\mu$  para os mesmos parâmetros da Fig. 6. Na Fig. 7

vemos que os nossos resultados (em círculos vermelhos) concordam de forma bastante satisfatória com os resultados do artigo [19] na situação em que o tamanho  $\tau$  do maior passo da busca de Lévy é ilimitado, isto é,  $\tau = \infty$ . Portanto, a Fig. 7 assegura que, de fato, os nossos resultados numéricos e os programas que os geraram estão corretos.

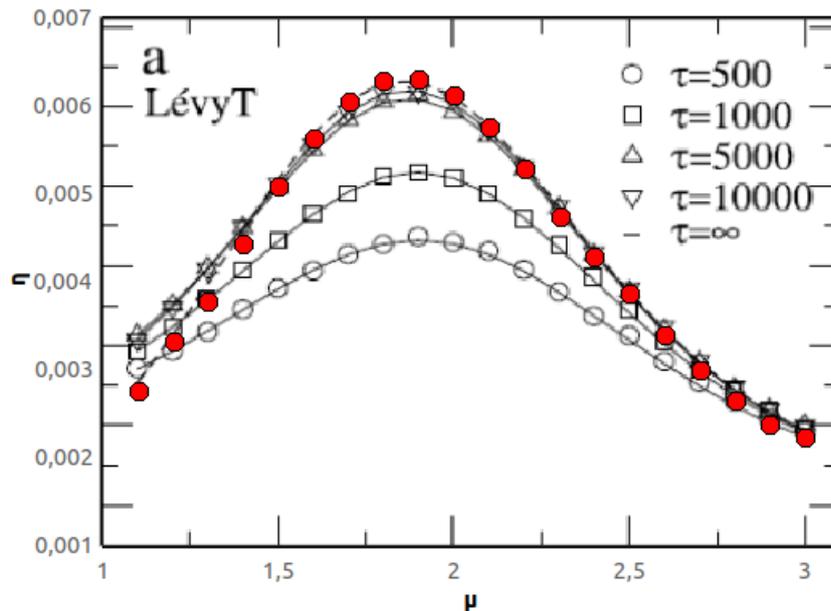


Figura 7 – Eficiência  $\eta$  em função de  $\mu$  para buscas de Lévy não-destrutivas. A linha preta tracejada representa a curva publicada no artigo [19] na situação em que o tamanho  $\tau$  do maior passo da busca é ilimitado, isto é,  $\tau = \infty$ . Já os círculos vermelhos são os pontos referentes aos nossos resultados.

Conforme indicado anteriormente, o valor máximo da eficiência obtido para  $\mu \cong 2$  em ambas as Figs. 6 e 7 representa um equilíbrio entre a estratégia em que o caminhante executa passos longos, favorecida para  $\mu \rightarrow 1$ , e aquela em que há um aumento no número médio de passos que o caminhante deve executar entre dois encontros consecutivos, favorecida para  $\mu \rightarrow 3$ . Podemos explicar este equilíbrio da seguinte maneira: como no caso *não-destrutivo* a posição inicial do caminhante é próxima de um dos sítios ( $x_0 = 2$ ), então a forma mais eficiente do caçador otimizar o processo de busca é executando um número considerável de passos curtos para que possa alcançar o sítio próximo, mas também eventualmente realizando passos longos para poder alcançar o sítio distante. Deste fato é que surge o valor ótimo intermediário para  $\mu$ , isto é, surge um máximo de  $\eta$  para  $\mu \approx 2$ , como discutimos anteriormente.

#### 4.1.1.2 Probabilidades $P_0$ e $P_\lambda$

A Fig. 8 ilustra as probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  de o caminhante encontrar os sítios em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ , respectivamente, em função do expoente  $\mu$  para o caso não-destrutivo de

Lévy. Os parâmetros utilizados foram os mesmos da subseção anterior, ou seja,  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  e  $1 < \mu \leq 3$ , com variações de intervalo  $d\mu = 0,1$ .

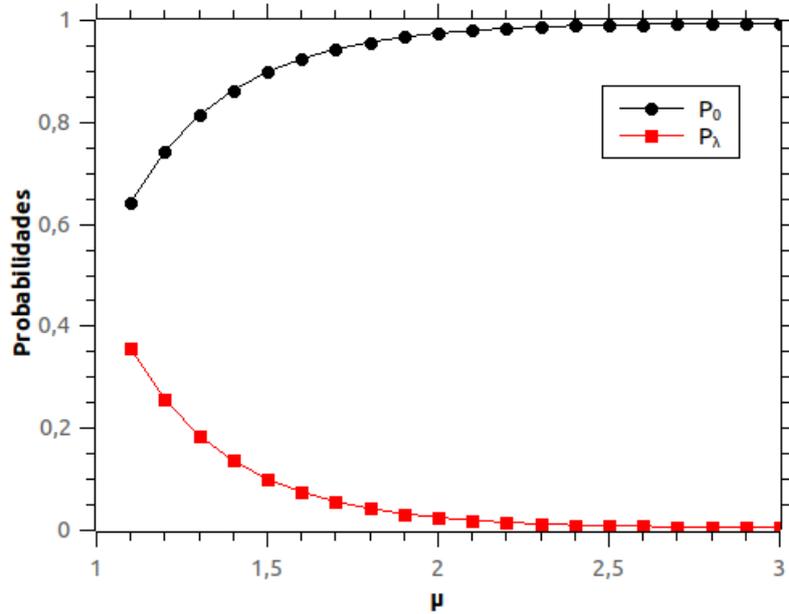


Figura 8 – Probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  de o caminhante encontrar os sítios em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ , respectivamente, em função do expoente  $\mu$  para o caso não-destrutivo de Lévy. Neste gráfico foram usados os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 10^3$ ,  $x_0 = 2$  e  $1 < \mu \leq 3$ , com espaçamentos  $d\mu = 0,1$ .

Para interpretar estes resultados faremos uso do mesmo raciocínio utilizado na subseção anterior para explicar a eficiência no caso das buscas não-destrutivas. Partindo destas considerações, podemos afirmar que no regime em que  $\mu \approx 1$  o tamanho médio do passo individual  $\langle \ell \rangle$  é bastante grande, implicando em passos longos e dinâmica balística da busca. Isto significa que quando o caminhante executa passos mais longos a probabilidade de encontrar sítios em regiões mais distantes aumenta, mais especificamente o sítio localizado na posição  $x = \lambda$ . Porém, esta probabilidade nunca chega a ser tão grande quanto a de ele encontrar o sítio localizado em  $x = 0$ , tendo em vista que estamos considerando uma busca não-destrutiva com início em  $x_0 = 2$ . Com isso, concluímos que quando  $\mu \approx 1$  a probabilidade do caminhante encontrar o sítio-alvo em  $x = \lambda$  é a maior possível. À medida que o parâmetro  $\mu$  vai aumentando, o tamanho médio do passo individual diminui, isto é, o caminhante vai entrando no regime de passos mais curtos, de modo que a probabilidade de encontrar um sítio em regiões mais distantes decresce, explicando, desse modo, porque  $P_\lambda$  diminui monotonicamente à medida que  $\mu$  aumenta.

Por outro lado, para explicar o crescimento monotônico de  $P_0$  com o expoente  $\mu$  faremos uma interpretação análoga. De fato, semelhantemente à análise para  $P_\lambda$ , no

caso  $\mu \approx 1$  em que o caminhante se encontra no regime de passos grandes, implicando em uma probabilidade maior do mesmo encontrar um sítio em regiões mais distantes, a probabilidade  $P_0$  de encontrar o sítio mais próximo é a menor possível. Como já foi dito, o caminhante parte para a sua busca em uma posição inicial próxima ao sítio localizado em  $x = 0$  (busca não-destrutiva), de modo que ele começa sua busca já com chances relativamente altas de encontrar este sítio. Contudo, à medida que  $\mu$  aumenta o tamanho médio do passo individual diminui e o número médio de passos entre dois encontros aumenta, aumentando gradualmente as suas chances de encontrar o sítio em  $x = 0$  e explicando porque  $P_0$  atinge seu valor máximo quando  $\mu = 3$ .

#### 4.1.1.3 Entropia de Shannon

Uma questão relevante no problema da busca aleatória é investigar se o máximo na eficiência observado no regime não-destrutivo é acompanhado de algum tipo de extremização (máximo ou mínimo) na entropia de Shannon  $S$  associada à busca. Assim, o objetivo dessa subseção é estudar o comportamento de  $S$  com o expoente  $\mu$  da pdf de Lévy.

Começaremos recordando que ao final da busca aleatória duas possibilidades se apresentam: o sítio localizado na posição  $x = 0$  é encontrado com probabilidade  $P_0$  ou o sítio localizado na posição  $x = \lambda$  é encontrado com probabilidade  $P_\lambda$ . A partir da discussão realizada no capítulo anterior, reescrevemos a Eq. (3.7) que determina a entropia de Shannon para o nosso problema na forma

$$S = -P_0 \ln_2(P_0) - P_\lambda \ln_2(P_\lambda). \quad (4.1)$$

Colocando  $S$  em função de  $P_\lambda$ , obtemos

$$\begin{aligned} S &= -(1 - P_\lambda) \ln_2(1 - P_\lambda) - P_\lambda \ln_2(P_\lambda) \\ &= -\ln_2(1 - P_\lambda) + P_\lambda \ln_2\left(\frac{1 - P_\lambda}{P_\lambda}\right) \\ &= -\ln_2(1 - P_\lambda) + P_\lambda \ln_2\left(\frac{1}{P_\lambda} - 1\right) \\ &= \underbrace{P_\lambda \ln_2\left(\frac{1}{P_\lambda} - 1\right)}_{1^\circ \text{ termo}} - \underbrace{\ln_2(1 - P_\lambda)}_{2^\circ \text{ termo}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Observamos que a dependência de  $P_\lambda$  com  $\mu$  foi analisada na subseção anterior. Assim, substituindo os valores de  $P_\lambda$  na Eq. (4.2) utilizando os mesmos parâmetros ( $\Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$  e  $x_0 = 2$  e  $1 < \mu \leq 3$  com pequenos intervalos  $d\mu = 0,1$ ), obtemos o gráfico da entropia de Shannon em função do parâmetro  $\mu$  mostrado na Fig. 9.

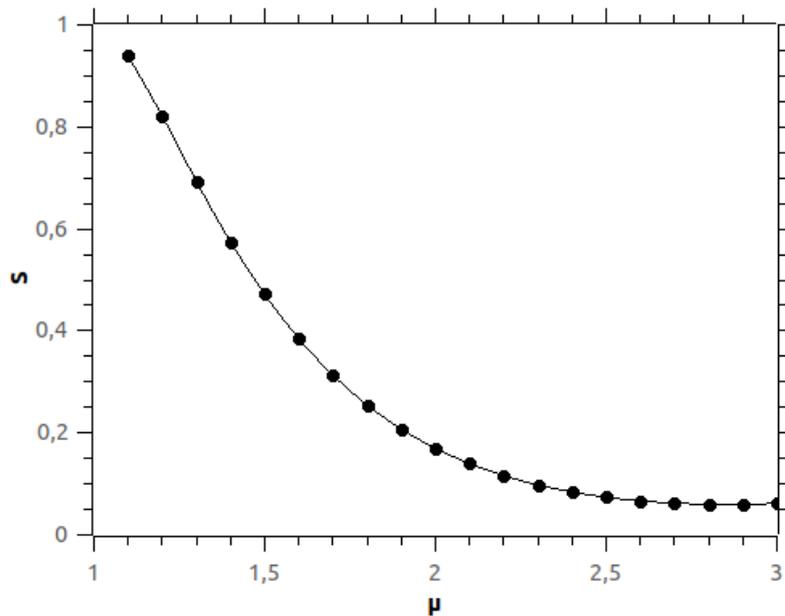


Figura 9 – Entropia de Shannon  $S$  em função do expoente  $\mu$  para buscas de Lévy não-destrutivas. Os parâmetros usados foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $x_0 = 2$  e  $1 < \mu \leq 3$ .

A entropia de Shannon  $S$  apresenta um valor máximo quando  $\mu \approx 1$  e decresce monotonicamente à medida que  $\mu$  cresce, atingindo seu valor mínimo para  $\mu \approx 3$ . Podemos explicar este fato por duas maneiras diferentes. Do ponto de vista analítico, como vimos na subseção anterior  $P_\lambda$  decresce à medida que o expoente  $\mu$  cresce. Partindo deste resultado, analisamos inicialmente o 1º termo da Eq. (4.2). Notamos que quando  $P_\lambda$  decresce, a função  $\ln_2\left(\frac{1}{P_\lambda} - 1\right)$  cresce, porém com uma taxa de crescimento muito lenta, fazendo com que o produto desta função por  $P_\lambda$  de fato decresça. Deste modo, concluímos que o 1º termo decresce monotonicamente com o aumento de  $\mu$ . Já o 2º termo também decresce monotonicamente, tendo em vista que é composto apenas pela função  $-\ln_2(1 - P_\lambda)$ . Logo, como  $S$  é dada pela soma destes dois termos então concluímos que a entropia de Shannon decai monotonicamente à medida que  $\mu$  aumenta no caso de buscas não-destrutivas de Lévy, como de fato observamos na Fig. 9.

Já a segunda maneira de explicar o decaimento de  $S$  com  $\mu$  é justamente utilizando a conclusão que obtivemos no exemplo do lançamento da moeda resolvido no Capítulo 3, tendo em vista que o nosso problema é semelhante àquele no sentido de que duas possibilidades se apresentam em ambas as situações (“Cara” ou “Coroa” no caso da moeda, encontro do sítio localizado em  $x = 0$  ou encontro do sítio localizado em  $x = \lambda$  no caso da busca aleatória em 1D). A conclusão que tiramos no caso do problema da moeda afirma

que a entropia de Shannon decai monotonicamente à medida que a diferença entre as probabilidades dos dois eventos possíveis aumenta. Comparando com o que constatamos em nosso problema, verificamos que isso é exatamente o que acontece, de modo que à medida que o parâmetro  $\mu$  aumenta,  $P_\lambda$  diminui e  $P_0$  aumenta, fazendo com que a diferença entre as probabilidades aumente com o aumento de  $\mu$ , de modo que devemos esperar um decaimento monotônico da entropia de Shannon, sendo isso exatamente o que acontece na Fig. 9, confirmando a validade da nossa conclusão.

Para finalizar a análise das buscas não-destrutivas de Lévy, comparamos agora os resultados da eficiência e da entropia de Shannon em função de  $\mu$  e chegamos a uma das principais conclusões desse trabalho. De fato, uma das nossas principais expectativas no início do nosso estudo era a possibilidade de que o máximo na eficiência fosse acompanhado por um extremo (máximo ou mínimo) na entropia de Shannon. Esse fato não se confirmou, como mostram os resultados acima. Assim, podemos concluir que o processo de maximização da eficiência nas buscas não-destrutivas de Lévy não passa por um mecanismo de extremização da entropia. De fato, o mecanismo responsável pela otimização da eficiência envolve o compromisso entre longos deslocamentos individuais e poucos passos para o encontro dos sítios, favorecido pela dinâmica balística com  $\mu \approx 1$ , e deslocamentos individuais mais curtos e muitos passos para os encontros, favorecido pela dinâmica gaussiana com  $\mu \approx 3$ , conforme discutido anteriormente. Acreditamos, portanto, que a análise e o entendimento do papel da entropia de Shannon, especialmente no caso das buscas não-destrutivas de Lévy, é importante para a compreensão geral das buscas aleatórias eficientes.

#### 4.1.2 Distribuição exponencial simples

Quando estudamos a distribuição  $p(\ell)$  de tamanhos de passos do buscador dada pela exponencial simples entramos na família das distribuições hiperexponenciais, porém no caso particular em que  $N = 1$ . Em geral, nessas distribuições temos alguns parâmetros livres que podemos variar: os expoentes  $d_i$  e os pesos  $w_i$ , com  $i = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , que para o nosso caso particular se resumem a  $d_1$  e  $w_1$ , os quais, por simplicidade, denotaremos a seguir apenas por  $d$  e  $w$ . Realizamos o nosso estudo da eficiência no caso da pdf exponencial simples variando o parâmetro  $d$  no intervalo  $0 < d \leq 100$ . Já para o estudo das probabilidades e da entropia de Shannon, consideramos  $0 < d \leq 1000$ , pois apenas assim conseguimos observar de fato o comportamento completo das respectivas curvas.

#### 4.1.2.1 Eficiência da busca

A Fig. 10 mostra a eficiência da busca não-destrutiva executada com a pdf do tipo exponencial simples em função do parâmetro  $d$ . Os parâmetros utilizados foram:  $\Delta x = 0,2$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 100$ .

Assim como ocorreu no caso das buscas não-destrutivas de Lévy, nossa primeira intenção foi verificar se os nossos resultados estavam de acordo com o resultado teórico exato de Weiss [64] para a exponencial simples, dado por

$$\langle L \rangle = \frac{\lambda}{2} + \frac{x_0(\lambda - x_0)}{d} \quad (4.3)$$

De fato, o resultado dessa expressão corresponde à curva sólida na Fig. 10, a qual de fato concorda muito bem com os círculos vermelhos obtidos a partir da nossa análise.

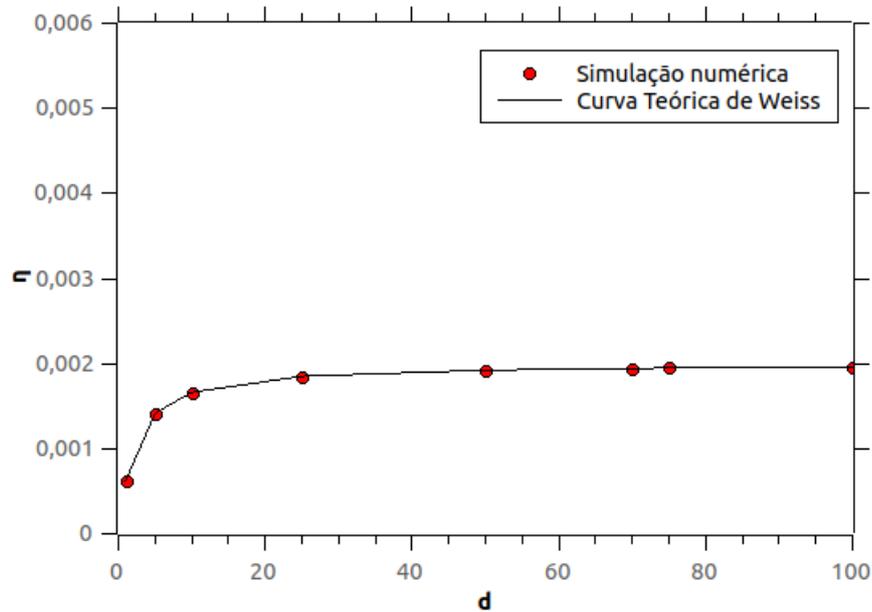


Figura 10 – Eficiência  $\eta$  em função do parâmetro  $d$  para buscas não-destrutivas realizadas com uma distribuição de passos do tipo exponencial simples. Os círculos vermelhos representam os nossos resultados, enquanto a linha sólida representa o cálculo teórico exato de Weiss [64]. Para este gráfico foram utilizados os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 100$ .

Podemos explicar o lento crescimento da eficiência em função de  $d$  fazendo uma análise semelhante à realizada anteriormente para as buscas de Lévy. Para efeito do nosso estudo, a exponencial simples corresponde à pdf,

$$P(\ell_j) = w \exp\left(\frac{-\ell_j}{d}\right), \quad (4.4)$$

com  $\ell_j \geq \ell_0$  e  $w = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ell_0}{d}\right)$ . Observamos na Fig. 10 que quando  $d$  é pequeno,  $\eta$  assume o menor valor possível. De fato, pequenos valores de  $d$  favorecem pequenos passos, em

detrimento dos passos grandes que ocorrem muito raramente nesse regime. Nesse caso, o número médio de passos entre dois encontros é bastante grande, numa situação semelhante à que ocorre com as buscas de Lévy próximas do regime gaussiano ( $\mu \approx 3$ ). Por outro lado, à medida que  $d$  aumenta, passos maiores vão se tornando relativamente mais prováveis e o número médio de passos entre dois encontros vai diminuindo gradativamente. No caso das buscas de Lévy no regime  $\mu < 2$ , o crescimento do tamanho médio dos passos era muito mais rápido do que o decréscimo do número de passos entre dois encontros (de fato, no espaço livre sem sítios-alvo o tamanho médio dos passos diverge nesse regime). Por isso, no caso Lévy com  $\mu < 2$  a eficiência diminui. Já no caso da exponencial simples, o crescimento do tamanho médio dos passos com  $d$  é bem mais suave, de modo que a diminuição do número médio de passos entre dois encontros é o fator dominante para a eficiência. Isso explica porque a eficiência aumenta suavemente e monotonicamente com  $d$ , como mostra a Fig. 10. Em suma, concluímos que à medida que  $d$  cresce,  $\eta$  também cresce devido ao aumento suave do tamanho médio do passo individual e à diminuição do número médio de passos entre dois encontros sucessivos.

#### 4.1.2.2 Probabilidades $P_0$ e $P_\lambda$

Dando seguimento ao nosso estudo, a Fig. 11 ilustra o comportamento de  $P_0$  e  $P_\lambda$  em função do parâmetro  $d$ . Assim como na subseção anterior, os parâmetros escolhidos correspondem a  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 1000$ .

Notamos que  $P_0$  decai suavemente à medida que  $d \rightarrow 1000$ . Ao mesmo tempo, quando  $d$  cresce  $P_\lambda$  aumenta progressivamente até que para  $d \approx 1000$  a probabilidade do caminhante encontrar qualquer um dos alvos tende a 50%. Podemos explicar este comportamento partindo da própria expressão para a  $p(\ell)$  da exponencial simples, como explicado a seguir.

Conforme discutido, quando  $d \approx 0$  o caminhante está no regime de passos muito curtos. Isto implica que a probabilidade  $P_0$  do buscador encontrar um sítio-alvo em regiões próximas a ele (no caso, na posição  $x = 0$ ) é grande. Este fato se confirma em nosso gráfico, pois  $P_0$  atinge seu máximo quando  $d \rightarrow 0$ . À medida que  $d$  cresce em direção ao máximo valor estudado,  $d \rightarrow 1000$ , o caminhante começa a realizar saltos relativamente mais longos. Desse modo, a probabilidade do buscador encontrar sítios-alvo mais próximos diminui, aumentando suas chances de encontrar um sítio em regiões mais distantes a ele (no caso, na posição  $x = \lambda$ ). Isto explica o motivo de no nosso gráfico  $P_\lambda$  crescer à medida que  $d$  aumenta.

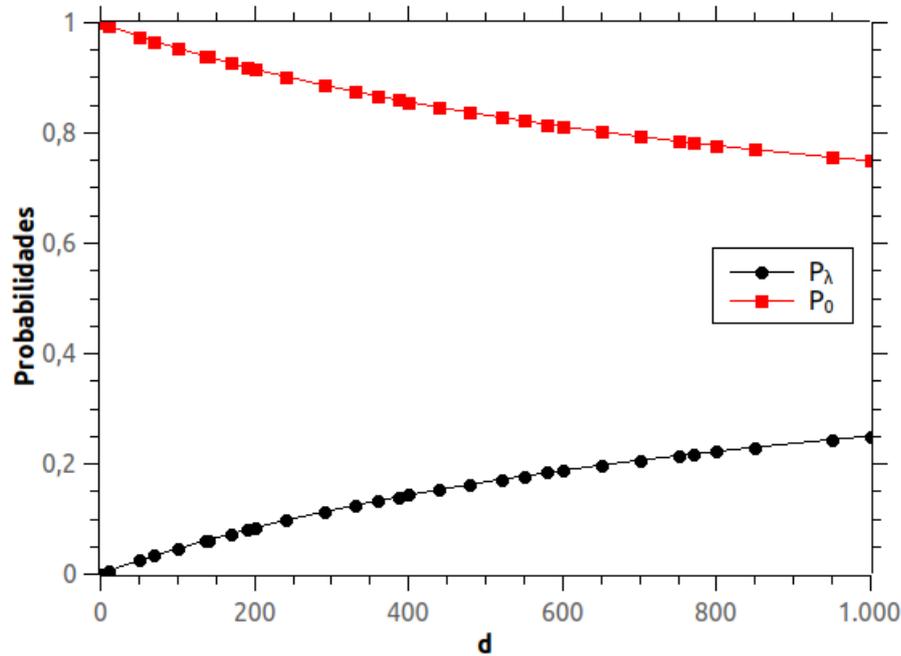


Figura 11 – Probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  do caminhante encontrar um sítio respectivamente em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  em função do parâmetro  $d$ .  $P_\lambda$  cresce à medida  $d$  aumenta, enquanto  $P_0$  atinge seu valor máximo para  $d \approx 0$ . Os parâmetros configurados foram  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 1000$ .

Podemos também explicar a aproximação suave de  $P_0$  e  $P_\lambda$  em direção ao valor 0,5 quando  $d = 1000$ . Este fato se dá porque quando  $d \rightarrow 1000$ , obtemos que  $w \rightarrow 1/2$ , tendo em vista que  $w = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ell_0}{d}\right)$ . E, como vimos, quando temos um  $d$  grande o caminhante pode realizar passos maiores, isto é, valores grandes de  $\ell_j$  se tornam relativamente mais prováveis. Este fato implica que  $\exp\left(\frac{-\ell_j}{d}\right) \rightarrow 1$ . Assim,  $P(\ell_j) \cong w \exp\left(\frac{-\ell_j}{d}\right) \rightarrow 1/2$ , portanto  $P_0$  e  $P_\lambda$  tendem a se equiparar em  $1/2$ .

#### 4.1.2.3 Entropia de Shannon

O gráfico da entropia de Shannon associada à busca aleatória não-destrutiva realizada com a pdf exponencial simples encontra-se na Fig. 12 em função do parâmetro  $d$ . Seguindo o nosso método, escolhemos como parâmetros  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 1000$ .

Para a distribuição exponencial simples vemos que a entropia se comporta de uma maneira diferente da que observamos na distribuição de Lévy, embora em ambos os casos o comportamento seja monotônico em função do parâmetro escolhido. No caso da exponencial simples, podemos observar que ocorre um *aumento* de  $S$  à medida que  $d$  cresce.

Para explicar este crescimento utilizaremos a Eq. (4.2). Assim como fizemos an-

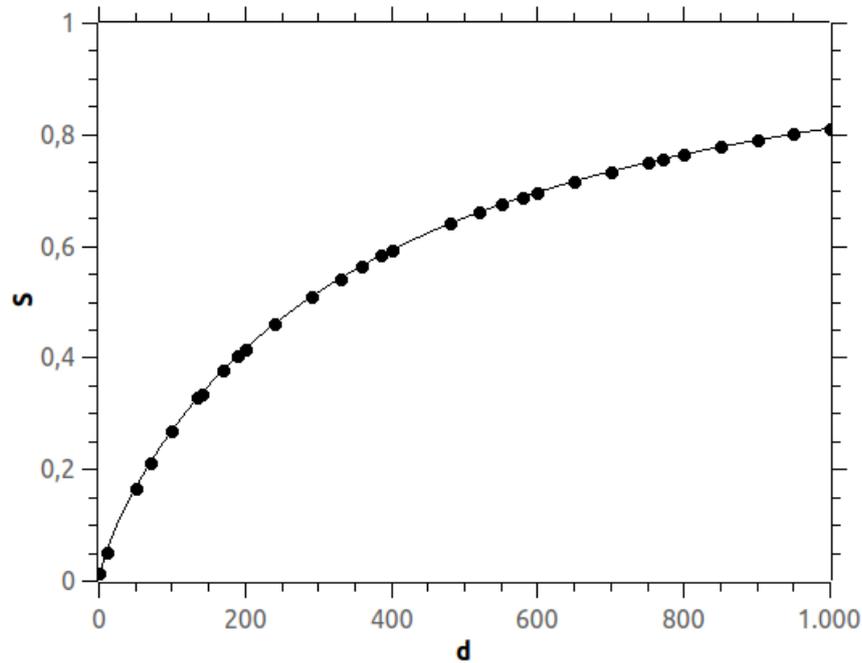


Figura 12 – Entropia de Shannon  $S$  em função do parâmetro  $d$  para buscas aleatórias não-destrutivas realizadas com a pdf exponencial simples para os tamanhos de passos. Os parâmetros utilizados para gerar esta curva foram  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$  e  $0 < d \leq 1000$ .

teriormente, escrevemos a entropia de Shannon como  $S = 1^\circ\text{Termo} + 2^\circ\text{Termo}$ , onde o  $1^\circ\text{Termo} = P_\lambda \ln_2\left(\frac{1}{P_\lambda} - 1\right)$  e o  $2^\circ\text{Termo} = -\ln_2(1 - P_\lambda)$ . Como analisamos na subseção anterior, constatamos que à medida que  $d$  aumenta  $P_\lambda$  também aumenta, enquanto  $P_0$  diminui. Assim, analisando o primeiro termo sabemos que  $P_\lambda$  é uma função crescente, conseqüentemente  $\ln_2\left(\frac{1}{P_\lambda} - 1\right)$  torna-se uma função decrescente com o aumento de  $P_\lambda$ . Todavia,  $P_\lambda$  cresce mais rapidamente do que o decréscimo de  $\ln_2\left(\frac{1}{P_\lambda} - 1\right)$ , fazendo com que o primeiro termo, que é o produto dessas duas funções, cresça. Já para o  $2^\circ\text{Termo}$ , vemos que à medida que  $P_\lambda$  aumenta a função  $\ln_2(1 - P_\lambda)$  diminui monotonicamente, de modo que  $-\ln_2(1 - P_\lambda)$  também aumenta, implicando automaticamente que o segundo termo também cresce monotonicamente. Como  $S = 1^\circ\text{Termo} + 2^\circ\text{Termo}$ , constatamos então que  $S$  tem de crescer monotonicamente, como de fato ocorre na Fig. 12.

Novamente, podemos analisar a curva referente à entropia de Shannon também utilizando a conclusão do problema clássico do lançamento de uma moeda, no qual constatamos que a entropia de Shannon decai monotonicamente à medida que a diferença de probabilidades entre os eventos “Cara” e “Coroa” aumenta. Observamos que para a exponencial simples ocorre algo interessante quando discutimos as probabilidades do caminhante encontrar um sítio-alvo em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ . Notamos que  $P_0$  e  $P_\lambda$  tendem a se equiparar em  $0,5$  para  $d$  grande. Em outras palavras, a diferença de probabilidades

diminui à medida que  $d$  cresce. Este fato pode ser interpretado da seguinte maneira à luz do resultado do lançamento da moeda: se a diferença de probabilidades dos eventos diminui, é natural esperar que a entropia de Shannon cresça monotonicamente. Comprovamos este fato na Fig. 12, onde um crescimento monotônico de  $S$  é observado à medida que  $d$  aumenta justamente por conta da diminuição da diferença de probabilidades dos dois eventos possíveis (encontro do sítio em  $x = 0$  e encontro do sítio em  $x = \lambda$ ).

### 4.1.3 Distribuição exponencial dupla

Dando seguimento ao tratamento das distribuições hiperexponenciais, analisaremos agora o caso da pdf de tamanhos de passos na forma da exponencial dupla. Sendo assim, temos neste momento quatro parâmetros relevantes que podemos variar:  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ , onde a condição de normalização da pdf na verdade impõe uma equação de vínculo entre eles (ver abaixo). Escolheremos estudar o comportamento das quantidades relevantes em função de  $w_1$ .

#### 4.1.3.1 Eficiência da busca

Iniciamos o nosso estudo mostrando na Fig. 13 a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , em função de  $w_1$ . Observamos que para um ponto de partida  $x_0 = 5$  ainda estamos no caso não-destrutivo, em que o buscador inicia a caminhada próximo ao sítio em  $x = 0$ . Os demais parâmetros considerados foram  $\Delta x = 0, 2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0, 2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $d_1 = 10^3 \lambda$  e  $d_2 = 5$ . Utilizando a condição de normalização da exponencial dupla, Eq. (2.97), podemos escrever  $w_2$  em função de  $w_1$  na forma  $w_2 = \exp\left(\frac{\ell_0}{d_2}\right) \left[\frac{1}{2} - w_1 \exp\left(\frac{-\ell_0}{d_1}\right)\right]$ .

Observamos que a curva da Fig. 13 inicia em seu ponto mais alto e em seguida sofre um suave decaimento chegando ao seu ponto mínimo. Posteriormente, um novo crescimento se inicia, porém mais lento. Podemos explicar o formato dessa curva de uma maneira semelhante à que vínhamos fazendo anteriormente.

Notamos inicialmente que  $w_1$  está associado à exponencial com constante de decaimento grande,  $d_1 = 10^3 \lambda$ . Por outro lado,  $w_2$  está associado à exponencial com constante de decaimento pequena,  $d_2 = 5$ . Assim, quando  $w_1$  é muito pequeno isso significa que passos pequenos são favorecidos. Para alcançar algum sítio é necessário portanto que um grande número  $N$  de passos seja dado em média, numa situação que se assemelha à busca não-destrutiva de Lévy próxima ao limite gaussiano,  $\mu \approx 3$ . Como sabemos que  $\langle L \rangle \approx N \langle \ell \rangle$ , então nesse regime  $\langle L \rangle$  apresenta valores altos. Por outro lado, à medida que  $w_1$  cresce passos longos vão se tornando relativamente mais prováveis, levando a uma tendência inicial de diminuição de  $\langle L \rangle$  uma vez que menos passos são necessários em média para encontrar um sítio-alvo. Nesse ponto, a grande diferença entre as pdfs exponenciais

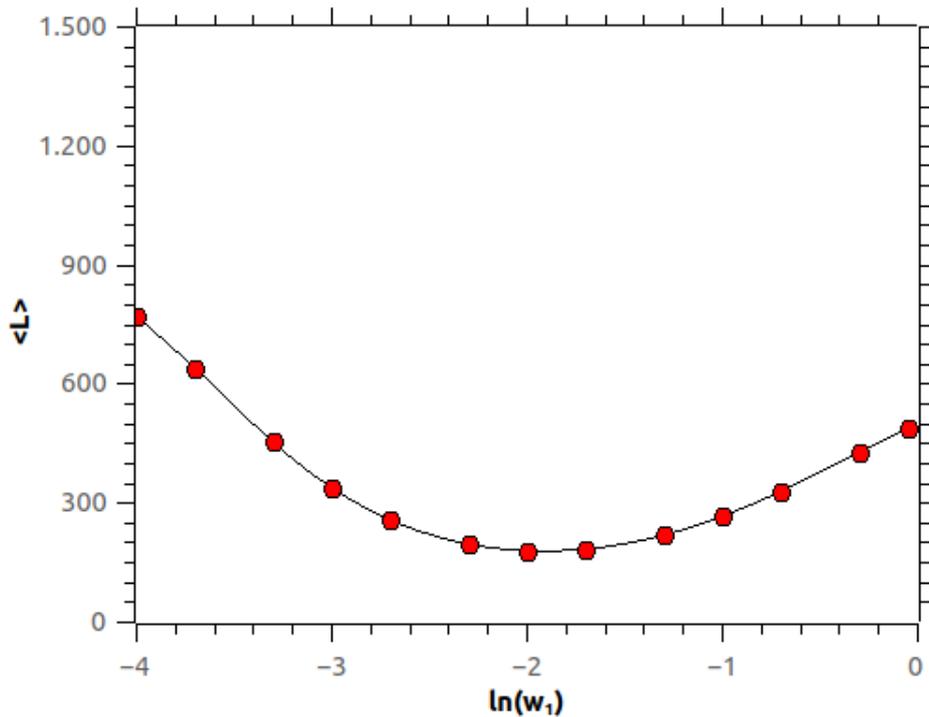


Figura 13 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro  $w_1$  da pdf exponencial dupla de tamanhos de passos no caso da busca não-destrutiva. Observamos um mínimo da distância média entre dois alvos sucessivos. Os parâmetros utilizados foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $d_1 = 10^3 \lambda$  e  $d_2 = 5$ .

simples e dupla é que como o valor de  $d_1$  é muito grande na exponencial dupla (bem maior que a extensão do próprio espaço de busca), então para valores de  $w_1$  suficientemente altos haverá caminhadas que atingirão o sítio mais distante em poucos passos, de modo semelhante ao que ocorre na busca não-destrutiva de Lévy próxima ao regime balístico,  $\mu \approx 1$ . Nesse caso,  $\langle L \rangle$  volta a crescer impulsionado pelo aumento no tamanho médio do passo individual, resultado este que tem efeito direto no perfil da eficiência da busca, como veremos a seguir.

A fim de testar a validade dos nossos resultados, comparamos os mesmos na Fig. 14 com os resultados obtidos por D. Campos e colaboradores envolvendo tanto o cálculo analítico quanto simulações numéricas com a pdf exponencial dupla [48]. Na Fig. 14 os parâmetros utilizados foram  $x_0/\lambda = 0.005$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $d_1 = 10^3 \lambda$  e  $d_2 = x_0 = 5$ . Constatamos o excelente acordo entre os nossos resultados (círculos vermelhos) e aqueles da referência [48], tanto no que diz respeito ao cálculo analítico (linha sólida) quanto à simulação numérica (círculos azuis) (a linha pontilhada corresponde à aproximação  $\lambda \rightarrow \infty$  no cálculo analítico em [48]).

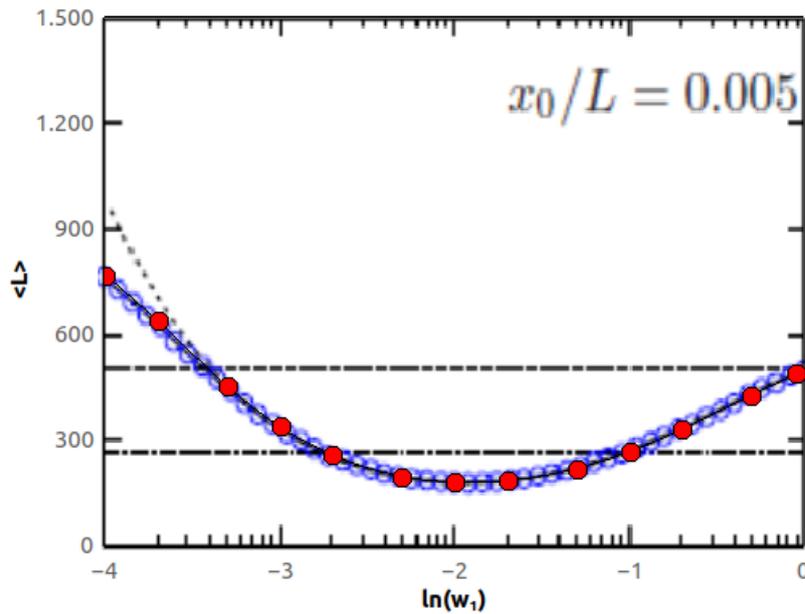


Figura 14 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla no caso não-destrutivo. Constatamos o excelente acordo entre os nossos resultados (círculos vermelhos) e aqueles da referência [48], tanto no que diz respeito ao cálculo analítico (linha sólida) quanto à simulação numérica (círculos azuis) (a linha pontilhada corresponde à aproximação  $\lambda \rightarrow \infty$  no cálculo analítico em [48]).

No que diz respeito à eficiência da busca, a relação  $\eta = 1/\langle L \rangle$  a fornece diretamente a partir dos dados da Fig. 13. De fato, a Fig. 15 mostra a eficiência da busca não-destrutiva realizada com a pdf exponencial dupla, com parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $d_1 = 10^3 \lambda$  e  $d_2 = 5$ .

Notamos que a curva da eficiência da exponencial dupla é qualitativamente semelhante à da distribuição de Lévy. Porém vemos que para o mesmo conjunto de parâmetros em comum das duas pdf's a eficiência da exponencial dupla pode ser até mesmo um pouco maior que a de Lévy. Isto significa que um caminhante aleatório com passos sorteados a partir da distribuição da exponencial dupla encontra mais sítios num mesmo intervalo de tempo do que um outro buscador que tem os passos regidos pela distribuição de Lévy.

A interpretação para a existência do máximo na eficiência da busca não-destrutiva no caso da pdf exponencial dupla segue exatamente a mesma linha de raciocínio explicada acima para a presença do mínimo na distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , observado na Fig. 13.

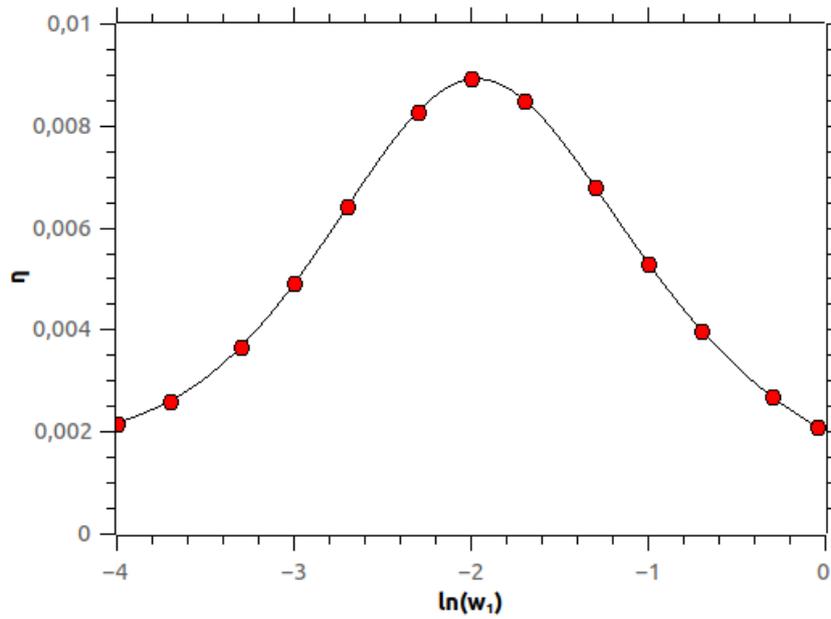


Figura 15 – Eficiência  $\eta$  em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla no caso não-destrutivo. Para esta curva foram utilizados os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ .

#### 4.1.3.2 Probabilidades $P_0$ e $P_\lambda$

Dando continuidade ao nosso estudo, mostramos na Fig. 16 o gráfico das probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  em função do parâmetro  $w_1$  para a busca não-destrutiva realizada com a pdf exponencial dupla. Os parâmetros utilizados nesse caso foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $x_0/\lambda = 0,002$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ .

Atentamos para o fato de que, assim como ocorreu com a exponencial simples,  $P_0$  e  $P_\lambda$  tendem a se igualar no limite extremo de um determinado parâmetro da pdf, porém agora com uma aproximação mais bem definida. No presente caso da exponencial dupla, isso ocorre quando  $w_1 \rightarrow 1$ , ou seja, praticamente quando somente a exponencial associada à maior constante de decaimento,  $d_1 = 10^3\lambda$ , está presente. Podemos explicar este comportamento de uma maneira semelhante a como explicamos as probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  na distribuição exponencial simples da seção anterior, embora a análise agora seja um pouco mais complexa tendo em vista que neste momento temos quatro parâmetros envolvidos.

Pelos parâmetros que definimos na exponencial dupla, podemos notar inicialmente que  $d_1 \gg d_2$ , e este fato implica diretamente que  $\exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right)$  é maior que  $\exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right)$ . Além disso, para  $\ln w_1 \approx -4$  temos que  $w_2 \gg w_1$ , ou seja, nesse regime inicial da Fig. 16 a parte  $w_2 \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right)$  da exponencial dupla é mais dominante para o movimento do caminhante do que a parte  $w_1 \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right)$ . Como discutimos acima, quando  $w_1$  é pequeno o buscador

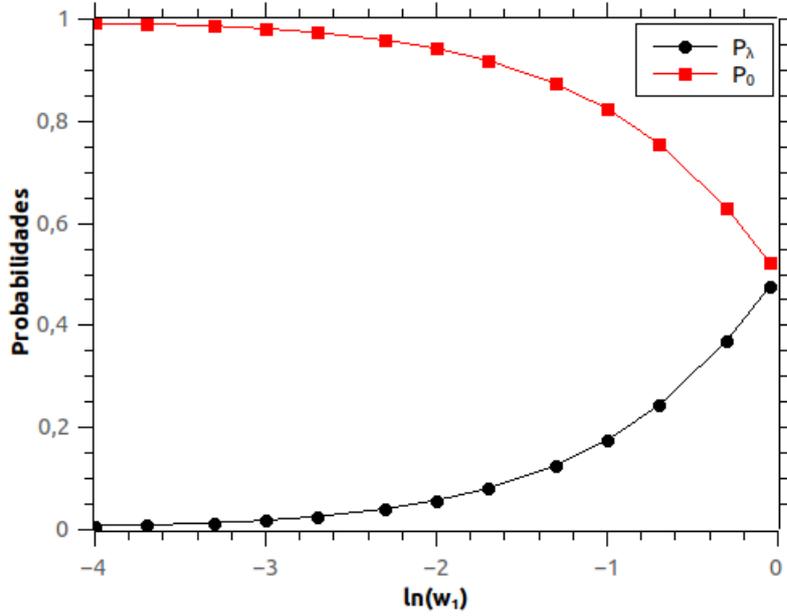


Figura 16 – Probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  do caminhante encontrar um sítio respectivamente em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  em função do parâmetro  $w_1$  no caso de buscas não-destrutivas realizadas com a pdf exponencial dupla. Observamos que o valor máximo de  $P_\lambda$  ocorre para  $w_1 \rightarrow 1$ . Já  $P_0$  decai à medida que  $w_1 \rightarrow 1$ . Gráfico gerado com os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $x_0/\lambda = 0,002$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ .

realiza passos menores em sua busca, geralmente sorteados a partir da parte dominante  $w_2 \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right)$ . Com estas breves conclusões, podemos então afirmar que o primeiro termo da pdf exponencial dupla privilegia passos mais longos, enquanto o segundo termo favorece passos mais curtos:

$$P(\ell) \cong \underbrace{w_1 \exp\left(\frac{-\ell}{d_1}\right)}_{\text{Passos grandes}} + \underbrace{w_2 \exp\left(\frac{-\ell}{d_2}\right)}_{\text{Passos pequenos}}. \quad (4.5)$$

Este fato explica o motivo pelo qual  $P_0$  está em seu valor máximo para  $\ln w_1 \approx -4$ , pois a probabilidade do caminhante encontrar um sítio em  $x = 0$  tendo saído de uma posição próxima a ele e realizando pequenos passos é a maior possível. Portanto, à medida que  $\ln w_1 \rightarrow 0$ , ou seja,  $w_1 \rightarrow 1$ , temos que  $w_2$  diminui progressivamente, fazendo neste momento o primeiro termo da distribuição dominar o movimento. Isso implica que o caminhante passou a executar passos em média mais longos, o que, como já sabemos, aumenta as chances do mesmo encontrar alvos em regiões mais distantes a ele, levando a um crescimento monotônico de  $P_\lambda$ . Finalmente, quando  $w_1 \rightarrow 1$  praticamente somente a primeira exponencial é sorteada, levando a grandes passos (muitos deles maiores que o próprio espaço de busca, dado que  $d_1 = 10^3\lambda$ ), os quais implicam que o encontro do sítio em  $x = 0$  se torna essencialmente equiprovável ao encontro do sítio em  $x = \lambda$ , isto é,  $P_0 \approx P_\lambda \approx 1/2$  quando  $w_1 \rightarrow 1$ .

### 4.1.3.3 Entropia de Shannon

Como já argumentamos nas subseções anteriores, com a posse das probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  podemos obter o comportamento da entropia de Shannon associada à busca aleatória. Deste modo, a Fig. 17 representa a entropia de Shannon em uma busca aleatória regida pela exponencial dupla em função do parâmetro  $w_1$ . Os demais parâmetros nesse caso foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $x_0/\lambda = 0,002$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ .

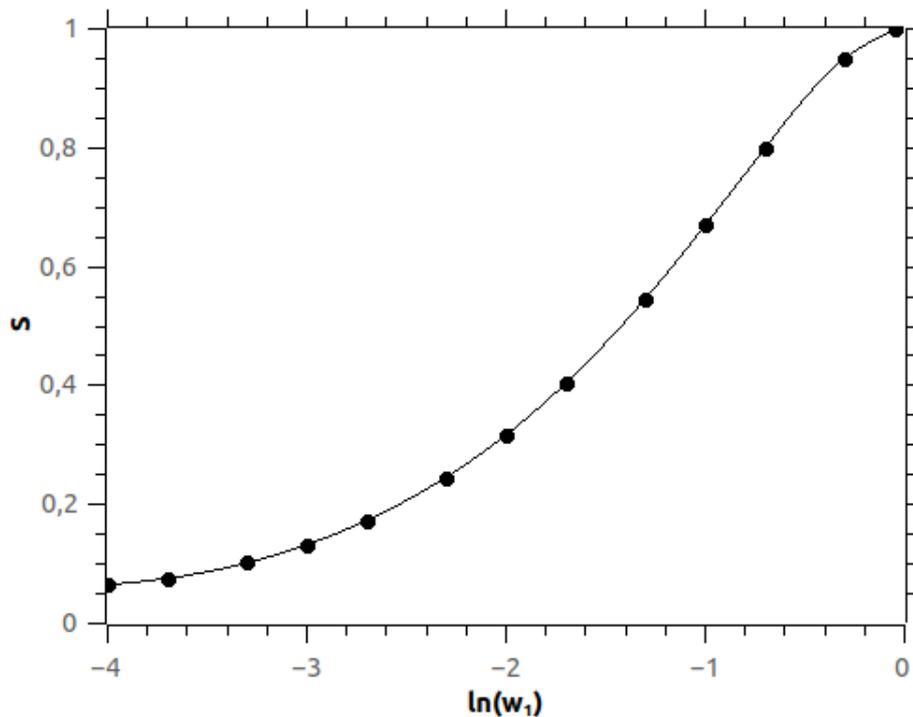


Figura 17 – Entropia de Shannon  $S$  em função do parâmetro  $w_1$  para buscas aleatórias não-destrutivas realizadas com a pdf exponencial dupla para os tamanhos de passos. Observamos um crescimento monótonico de  $S$  quando  $w_1 \rightarrow 1$ . A respectiva curva foi gerada utilizando-se dos seguintes parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $r_v = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $x_0/\lambda = 0,002$ ,  $d_1 = 10^3\lambda$  e  $d_2 = 5$ .

Comparando a Fig. 17 com a entropia de Shannon da exponencial simples, percebemos um crescimento mais rápido por parte da exponencial dupla. Este fato é um reflexo direto das probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$ , pois, como vimos na Fig. 16, a equiparação das probabilidades no limite extremo do parâmetro em questão ( $w_1 \rightarrow 1$  no caso da exponencial dupla) é mais eficaz na exponencial dupla.

Podemos explicar este crescimento da entropia de Shannon com  $w_1$  mais uma vez utilizando o método analítico, o que se resume a avaliar matematicamente o crescimento das funções que compõem a Eq. (4.2). Como já utilizamos esse método para avaliar a

entropia de Shannon da exponencial simples, e a mesma apresenta uma curva semelhante à da Fig. 17, optaremos dessa vez por não explorá-lo aqui.

Sendo assim, explicaremos o comportamento da entropia de Shannon na Fig. 17 pelo segundo método associado ao problema do lançamento da moeda, que exploramos no Capítulo 3. Como vimos, quando a diferença entre as probabilidades aumenta a entropia de Shannon diminui, e vice-versa. Constatamos este fato no próprio problema da moeda e também quando avaliamos a entropia de Shannon referente às distribuições de Lévy e exponencial simples. Portanto, verificamos, comparando as Figs. 16 e 17, que esse comportamento também se verifica no caso da exponencial dupla.

Indo mais além, percebemos ainda que, como a diferença de probabilidades diminui mais rapidamente quando comparada à exponencial simples, a entropia de Shannon também cresce mais rapidamente. Em outras palavras, além de confirmarmos o fato de que se a diferença de probabilidades diminui a entropia aumenta, constatamos também que se a diferença diminui mais rapidamente a entropia de Shannon também aumenta mais rapidamente.

Um outro ponto que chama atenção é o fato de que o máximo da eficiência na busca não-destrutiva com a pdf exponencial dupla, mostrado na Fig. 15, não se reflete no comportamento da entropia de Shannon. De fato, esse tipo de conclusão já havia sido observada no contexto das buscas não-destrutivas de Lévy. Assim sendo, os resultados acima para a exponencial dupla parecem confirmar que, de fato, o mecanismo de maximização da eficiência da busca aleatória não-destrutiva não envolve qualquer extremização (maximização ou minimização) da entropia de Shannon da busca. Nesse sentido, o mecanismo para a busca mais eficiente tem explicação no compromisso intermediário identificado acima entre buscas com características mais próximas do regime gaussiano e buscas que se assemelham ao regime balístico. Uma busca intermediária entre esses dois regimes parece levar a uma eficiência ótima no caso não-destrutivo.

## 4.2 Buscas destrutivas

Após estudarmos o comportamento das buscas não-destrutivas nas seções anteriores, evidenciaremos nesta seção os resultados referentes às buscas destrutivas. Estas se caracterizam por ter o ponto de partida distante de ambos os sítios-alvo. De fato, a situação simétrica em que  $x_0 = \lambda/2$ , a meio caminho de ambos os sítios em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ , é a que melhor reflete essa característica. O comportamento da eficiência, das probabilidades e da entropia de Shannon é mais simples de entender nas buscas destrutivas do que nas não-destrutivas, com poucas informações a serem notadas no primeiro caso.

Assim, discutiremos nessa dissertação os resultados no contexto destrutivo apenas por completeza.

#### 4.2.1 Distribuição de Lévy

##### 4.2.1.1 Eficiência da busca

Como mencionado, consideraremos uma busca destrutiva como aquela em que o caminhante parte de uma posição equidistante dos dois sítios-alvo existentes. No caso da busca destrutiva de Lévy, ajustamos os parâmetros como  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  e  $x_0 = \lambda/2 = 500$ , com variações de intervalo  $d\mu = 0,1$ , para  $1 < \mu \leq 3$ . O gráfico obtido encontra-se mostrado na Fig. 18.

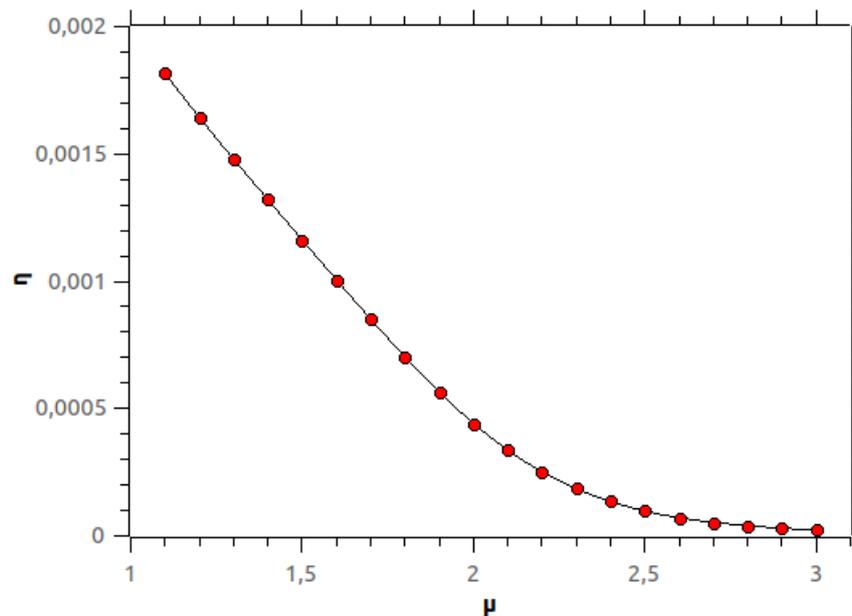


Figura 18 – Eficiência  $\eta$  em função do parâmetro  $\mu$  para buscas de Lévy destrutivas. A eficiência máxima da busca é obtida para  $\mu \cong 1$ . Os parâmetros utilizados foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $x_0 = \lambda/2 = 500$  com  $1 < \mu \leq 3$  para pequenas variações  $d\mu = 0,1$ .

Sabemos que a eficiência é maximizada quando o livre caminho médio entre dois encontros sucessivos é minimizado. Assim, se um dos sítios estiver próximo do buscador e ele souber a sua localização (o que na verdade não corresponde à situação em questão), a melhor estratégia a ser adotada seria seguir até ele em linha reta. Porém, como estamos tratando de um processo estocástico em que a localização dos sítios-alvo não é de conhecimento do buscador, a estratégia de caminhar balisticamente não é adequada quando um sítio-alvo está próximo (busca não-destrutiva), tendo em vista que a escolha

da direção errada levará o buscador para regiões cada vez mais distantes deste. A situação muda de figura no caso da busca destrutiva. De fato, para o caso em que  $x_0 = \lambda/2$  o caçador não está próximo de nenhum dos dois sítios. Assim, a estratégia de caminhar balisticamente torna-se boa, pois para qualquer lado que ele escolha haverá a vantagem de acessar um sítio distante dando um passo bastante longo. Sabemos que as caminhadas balísticas de Lévy se dão quando  $\mu \rightarrow 1$  e observamos na Fig. 18 que a eficiência realmente obtém seu máximo para esse valor de  $\mu$ , de modo consistente com o raciocínio acima.

## 4.2.2 Exponencial simples

### 4.2.2.1 Eficiência da busca

No caso das buscas destrutivas realizadas com a pdf de tamanhos de passos na forma da exponencial simples, a eficiência está mostrada na Fig. 19 em função da constante de decaimento  $d$  para os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $0 < d \leq 100$  e  $x_0 = \lambda/2$ .

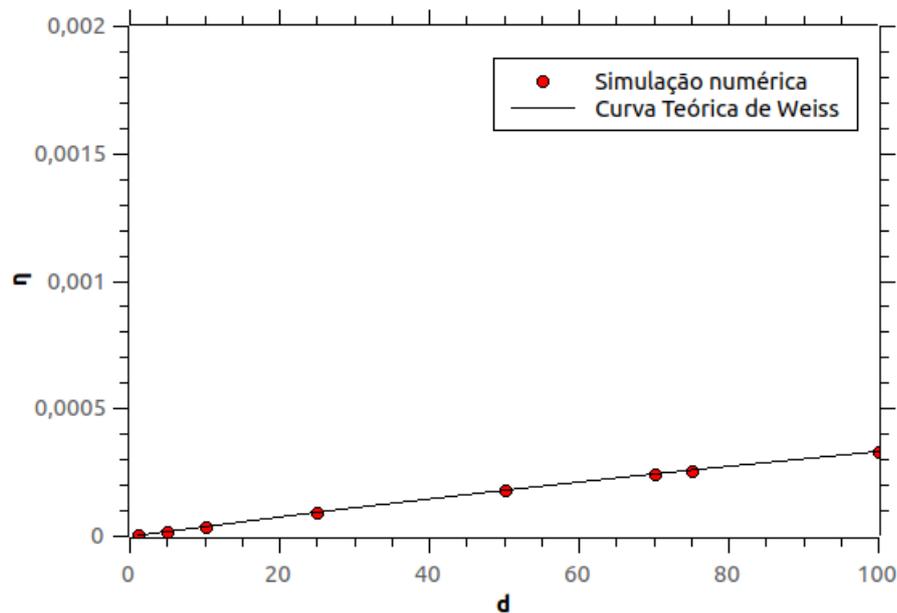


Figura 19 – Eficiência  $\eta$  em função do parâmetro  $d$  para buscas destrutivas com a pdf exponencial simples. Para este gráfico configuramos os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $0 < d \leq 100$  e  $x_0 = \lambda/2$ .

Nesse caso, o crescimento monotônico da eficiência com  $d$  se explica pois quanto maior o valor da constante de decaimento, mais favorecidos serão os passos longos. Porém, devemos observar também que esse crescimento não pode ser indefinido, uma vez que no caso destrutivo com  $d$  grande o menor percurso possível até o encontro de um sítio

se dá com um único passo de comprimento  $\lambda/2$ , ou seja, eficiência  $\eta = 2/\lambda = 1/500 = 0,002$ .

A Fig. 19 mostra também o excelente acordo entre os nossos resultados (círculos vermelhos) e a curva teórica exata de Weiss gerada pela Eq. (4.3) (linha sólida).

### 4.2.3 Exponencial dupla

#### 4.2.3.1 Eficiência da busca

Assim como para o caso não-destrutivo, daremos a seguir um tratamento especial para a exponencial dupla no que diz respeito a comentarmos sobre a eficiência da busca e também sobre a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos. Iniciando por esta última quantidade, a Fig. 20 mostra o comportamento de  $\langle L \rangle$  em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla, com  $\lambda = 1000$ ,  $x_0/\lambda = 0,1$ ,  $d_1 = 10^6$  e  $d_2 = x_0 = 100$ . Embora nesse caso não tenhamos escolhido a situação simétrica  $x_0 = \lambda/2$  para representar a busca destrutiva, notamos que a escolha  $x_0/\lambda = 0,1 = 100$  ainda posiciona o buscador inicialmente bastante distante dos dois sítios-alvo e, além disso, permitirá também comparar a seguir os nossos dados com resultados já publicados com estes mesmos parâmetros a fim de testar mais uma vez a validade da nossa abordagem.

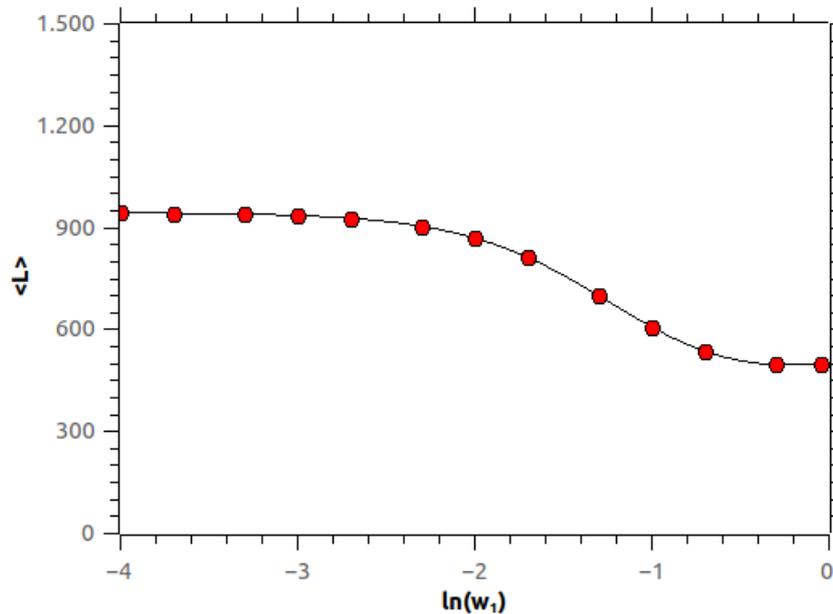


Figura 20 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla no caso de buscas destrutivas. Os parâmetros utilizados para obtenção da curva foram  $\lambda = 10^3$ ,  $x_0/\lambda = 0,1$ ,  $d_1 = 10^6$  e  $d_2 = x_0 = 100$ .

Antes de explicar a Fig. 20, confirmaremos a validade da mesma comparando o nosso resultado com outro resultado já publicado [48], como ilustra a Fig. 21. De fato,

observamos um ótimo acordo entre os nossos dados (círculos vermelhos) e os resultados obtidos tanto de simulação numérica (círculos azuis) quanto de cálculo analítico (linha sólida) para os mesmos parâmetros (a linha tracejada corresponde ao limite  $\lambda \rightarrow \infty$  no cálculo analítico).

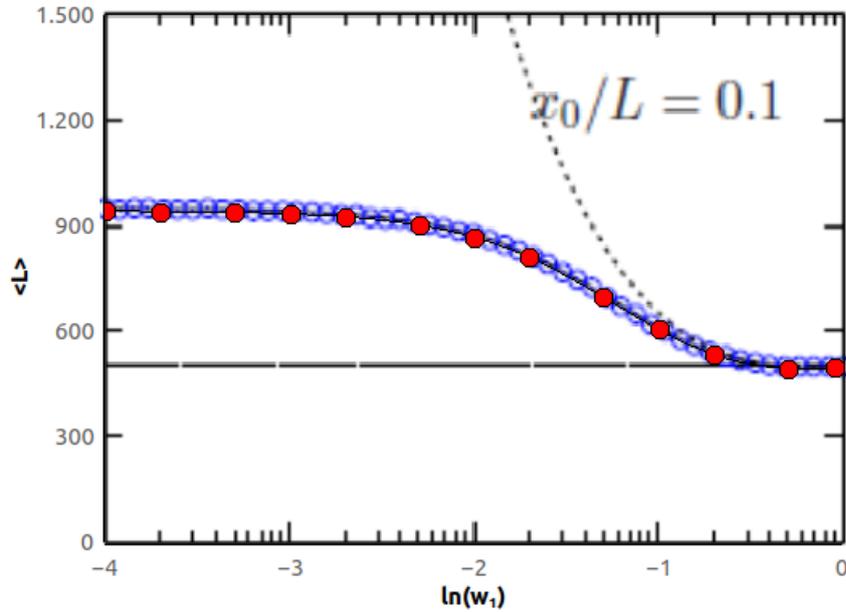


Figura 21 – Distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla no caso de buscas destrutivas. Constatamos o excelente acordo entre os nossos resultados (círculos vermelhos) e aqueles da referência [48] utilizando os mesmos parâmetros, tanto no que diz respeito ao cálculo analítico (linha sólida) quanto à simulação numérica (círculos azuis) (a linha pontilhada corresponde à aproximação  $\lambda \rightarrow \infty$  no cálculo analítico em [48]).

Tendo verificado a validade do nosso resultado, iremos agora explicá-lo de maneira sucinta. Seguindo o mesmo raciocínio da busca não-destrutiva, observamos inicialmente que para  $w_1$  pequeno o buscador executa passos mais curtos, implicando que o número médio de passos para o encontro de um sítio deve ser grande, justificando assim o valor alto de  $\langle L \rangle$  nesse regime. Entretanto, à medida que  $w_1$  aumenta o caminhante executa passos mais longos, implicando na diminuição no número médio de passos para o encontro de um sítio. No caso extremo, o caminhante poderá encontrar um sítio dando apenas um passo longo, à semelhança do que ocorre na busca destrutiva de Lévy no regime próximo ao balístico ( $\mu \approx 1$ ). Nessa situação, justifica-se a diminuição de  $\langle L \rangle$  com o crescimento de  $w_1$ .

Na Fig. 22 mostramos a eficiência da busca destrutiva realizada com a pdf exponencial dupla. Como vimos, a eficiência é essencialmente dada pelo inverso de  $\langle L \rangle$ . Assim,

no caso da busca destrutiva em que ambos os sítios-alvo encontram-se a grandes distâncias do ponto de partida a execução de passos mais longos ( $w_1$  grande) é a melhor estratégia para encontrar os sítios. Note ainda que, diferentemente do caso não-destrutivo, não há nenhuma vantagem no caso destrutivo em se dar pequenos passos, uma vez que não há um sítio-alvo próximo ao ponto de partida da busca. Assim, o máximo em  $\langle L \rangle$  e o mínimo em  $\eta$  para pequenos  $w_1$  observados na busca não-destrutiva não se encontram presentes na busca destrutiva. A Fig. 22 confirma esses fatos ao mostrar que a eficiência da busca destrutiva é maior para  $w_1 \rightarrow 1$ .

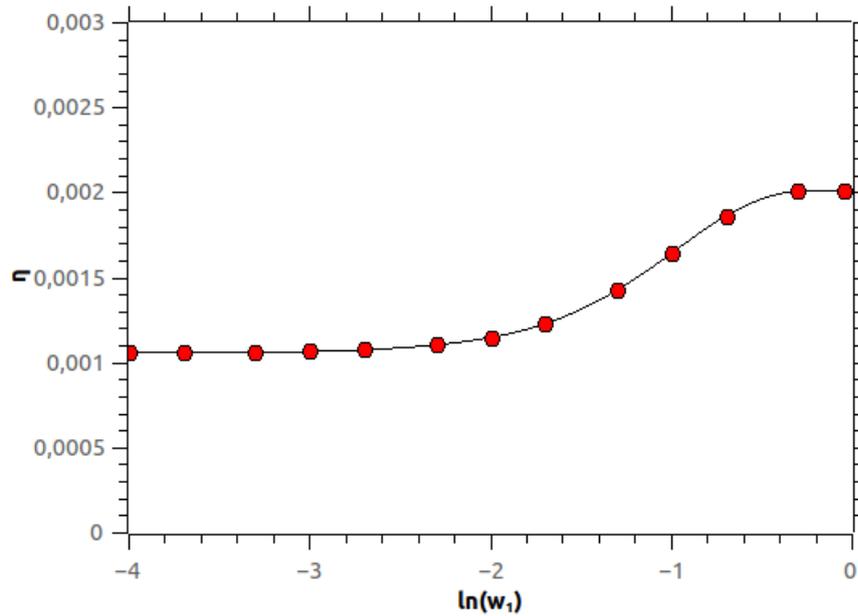


Figura 22 – Eficiência  $\eta$  em função do parâmetro  $w_1$  da exponencial dupla no caso de buscas destrutivas. Os parâmetros utilizados foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $\ell_0 = \Delta x = 0,2$ ,  $\lambda = 1000$ ,  $0 < d \leq 100$  e  $x_0 = \lambda/2$ .

#### 4.2.3.2 Probabilidades $P_0$ e $P_\lambda$ para a distribuição de Lévy

Nesta subseção apresentaremos o comportamento das probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  em função do parâmetro  $\mu$  da distribuição de Lévy no caso de buscas destrutivas. A Fig. 23 ilustra o comportamento destas quantidades considerando  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  e  $1 < \mu \leq 3$ , com variações de intervalo  $d\mu = 0,1$ , e  $x_0 = \lambda/2 = 500$ .

Como já justificamos, o fato do caminhante partir de  $x_0 = \lambda/2$  não impõe um sentido privilegiado para a busca destrutiva. Assim, o mesmo se deslocando balisticamente em qualquer uma das duas direções possíveis maximiza a eficiência da busca nesse contexto. Nessa situação simétrica as probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  do caçador encontrar os sítios-alvo respectivamente localizados em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  são as mesmas,  $P_0 = P_\lambda = 0,5$ , independentemente de se o buscador executa passos longos ou curtos, ou seja, independentemente do

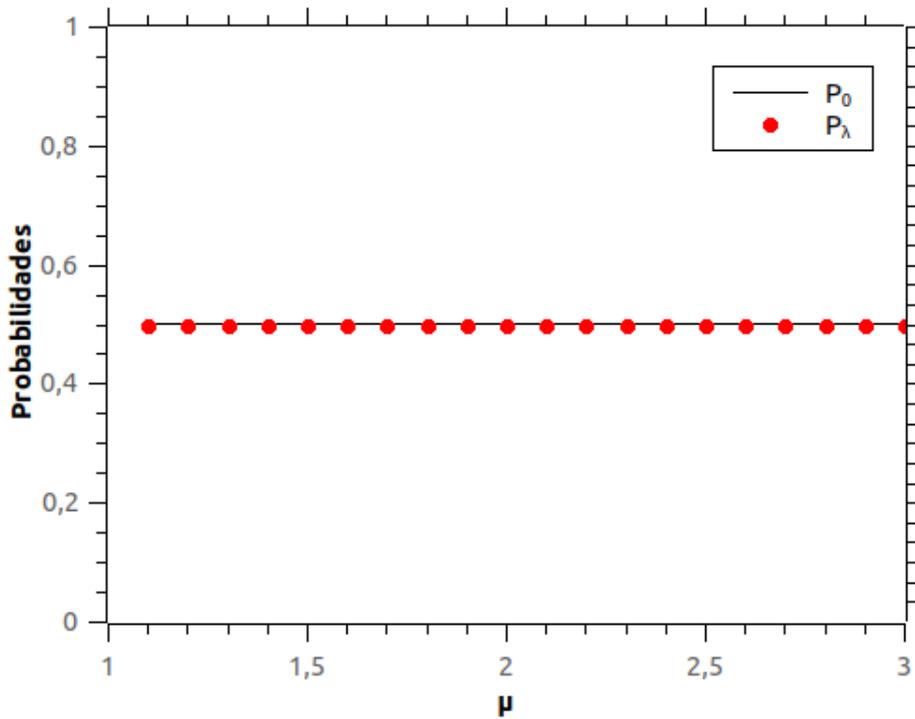


Figura 23 – Probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  do caminhante encontrar um sítio respectivamente em  $x = 0$  e  $x = \lambda$  em função do parâmetro  $\mu$  no caso de buscas destrutivas de Lévy. Observamos que  $P_0$  e  $P_\lambda$  permanecem constantes no valor 0,5 independentemente de  $\mu$ . Para este gráfico utilizamos  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  e  $1 < \mu \leq 3$  como parâmetros numéricos.

valor do parâmetro  $\mu$ . Esse resultado está ilustrado na Fig. 23.

O fato das probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  serem constantes e iguais a 0,5 no caso da busca destrutiva simétrica ( $x_0 = \lambda/2$ ) também ocorre quando os tamanhos dos passos do caminhante são sorteados a partir de distribuições do tipo exponencial simples e exponencial dupla. De fato, esse resultado independente das pdf's de tamanhos de passos e dos parâmetros envolvidos ( $\mu$  para a Lévy,  $d$  para a exponencial simples e  $w_1$  para exponencial dupla).

#### 4.2.3.3 Entropia de Shannon para a distribuição de Lévy

Como sabemos, conhecendo o comportamento das probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  podemos plotar o gráfico da entropia de Shannon associada à busca. No caso da busca destrutiva de Lévy, a entropia de Shannon está mostrada na Fig. 24 em função de  $\mu$  para os parâmetros  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  com  $1 < \mu \leq 3$  e  $x_0 = \lambda/2$ .

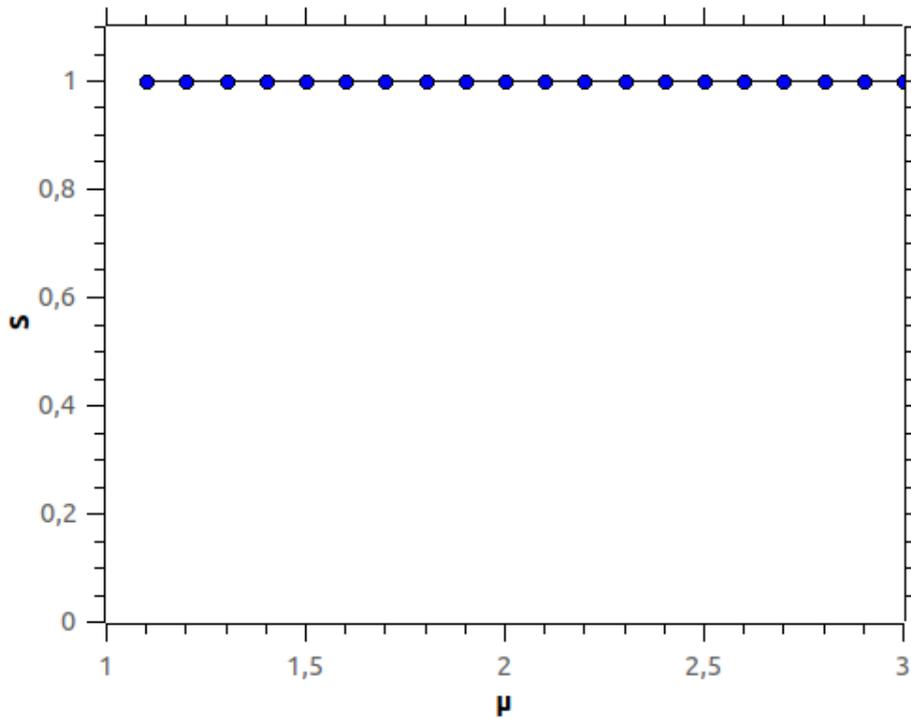


Figura 24 – Entropia de Shannon  $S$  em função do parâmetro  $\mu$  para buscas destrutivas de Lévy. Notamos que a entropia de Shannon permanece constante em seu máximo valor possível para qualquer  $\mu$ . Os parâmetros utilizados nesta simulação numérica foram  $\Delta x = 0,2$ ,  $r_v = \ell_0 = 1$ ,  $\lambda = 1000$  com  $1 < \mu \leq 3$  e  $x_0 = \lambda/2$ .

Para interpretar este resultado, primeiramente relembremos do problema do lançamento da moeda, em que a entropia de Shannon é máxima quando a probabilidade da face da moeda cair “Cara” ou “Coroa” é 0,5. Podemos também justificar esse resultado analiticamente uma vez que para  $P_0 = P_\lambda = 0,5$  temos que

$$\begin{aligned}
 S &= - \sum_{j=1}^{P_0, P_\lambda} P_j \ln_2(P_j) = -P_0 \ln_2(P_0) - P_\lambda \ln_2(P_\lambda) \\
 &= -2 P_0 \ln_2(P_0) = -2 \left(\frac{1}{2}\right) \ln_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= -\ln_2\left(\frac{1}{2}\right) = \ln_2(2) = 1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Este resultado, que não depende do valor de  $\mu$  na busca destrutiva simétrica de Lévy, está confirmado na Fig. 24.

Além disso, pelo fato das probabilidades permanecerem constantes,  $P_0 = P_\lambda = 0,5$ , em uma busca destrutiva para todas as distribuições de probabilidades de tamanhos de passos que utilizamos, é natural esperar que a entropia de Shannon também seja, tendo em vista que a mesma só depende exclusivamente dos valores das probabilidades. Portanto, a entropia de Shannon associada à pdf exponencial simples e à pdf exponencial dupla

também será constante e igual a 1 para todo valor de  $d$  e  $w_1$ , respectivamente.

Como vimos, neste capítulo analisamos três pdf's diferentes para os tamanhos dos passos do buscador, evidenciando as mudanças que ocorrem em uma busca aleatória quando escolhemos uma determinada distribuição, em ambos os casos não-destrutivo e destrutivo. Uma de nossas principais conclusões foi constatar que o mecanismo que maximiza a eficiência da busca não-destrutiva não implica em um mecanismo de maximização ou minimização da entropia de Shannon, pois vimos que em situações em que a eficiência se torna máxima o comportamento da entropia de Shannon permanece monotônico. Constatamos ainda que, de fato, o comportamento da entropia de Shannon reflete o mecanismo que rege as probabilidades para o encontro dos sítios-alvo envolvidos no problema.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho estudamos três das principais quantidades (*eficiência, probabilidades do caminhante encontrar cada sítio-alvo* e a *entropia de Shannon*) no que se refere ao problema de um caminhante aleatório limitado ao espaço unidimensional numa busca aleatória por sítios-alvo cuja localização é desconhecida (problema da busca aleatória ou *random search*). Como discutimos, utilizando técnicas e conceitos da Física Estatística conseguimos abordar e modelar o problema da busca aleatória, sendo a nossa principal fonte de inspiração o problema ecológico da busca de alimentos por diversas espécies de animais (problema de *foraging*). Realizamos a análise descrita para três distribuições de probabilidades de tamanhos de passos do buscador: *distribuição do tipo lei de potência / Lévy* e as *distribuições hiperexponenciais simples e dupla*.

No decorrer da dissertação, obtivemos uma expressão analítica para a distância média percorrida entre dois encontros sucessivos,  $\langle L \rangle$ , e conseqüentemente para a eficiência da busca, dada pelo inverso daquela quantidade. Além disso, calculamos também as probabilidades  $P_0$  e  $P_\lambda$  do buscador encontrar os sítios-alvo em  $x = 0$  e  $x = \lambda$ , respectivamente, as quais permitem obter a entropia de Shannon associada ao problema da busca. Empregando o método de discretização do espaço de busca, obtivemos valores numéricos para estas quantidades em função de parâmetros relevantes de cada distribuição. Nós analisamos ambos os casos de buscas não-destrutivas, em que um dos sítios-alvo encontra-se inicialmente próximo ao buscador, e buscas destrutivas, em que ambos os sítios encontram-se distantes do ponto de partida da busca.

Um dos principais objetivos do estudo em questão foi analisar o comportamento da entropia de Shannon para distribuições de tamanhos de passos que apresentam um máximo em sua eficiência no caso de buscas não-destrutivas. Chegamos à conclusão de que o mecanismo que maximiza a eficiência da busca não-destrutiva de Lévy e da exponencial dupla não impacta a entropia de Shannon associada, a qual apresenta um comportamento monotônico (sem nenhum extremo, seja máximo ou mínimo) mesmo quando a eficiência atinge um máximo. Além disso, encontramos que a distribuição de passos do tipo exponencial dupla pode ser mais eficiente do que a distribuição de Lévy em determinados contextos das buscas não-destrutivas, confirmando os resultados da referência [48].

Entre nossas perspectivas de investigações futuras, pretendemos continuar nossas investigações envolvendo outras distribuições de probabilidades de tamanhos de passos com a finalidade de confirmar os resultados obtidos na presente dissertação. Pretendemos investigar algumas distribuições que são bastante utilizadas no contexto biológico do problema de *foraging*, tais como a distribuição gama ou a *stretched exponential*. Uma

segunda perspectiva futura envolve aprofundarmos mais o resultado sobre a distribuição que maximiza a eficiência das buscas não-destrutivas, se possível caracterizando em maiores detalhes o que torna a exponencial dupla mais eficiente do que a Lévy em determinadas situações.

## REFERÊNCIAS

- 1 VISWANATHAN, G. M. et al. *The physics of foraging: an introduction to random searches and biological encounters*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- 2 SIMS, D. W. et al. Scaling laws of marine predator search behaviour. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 451, n. 7182, p. 1098, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- 3 HUMPHRIES, N. E. et al. Environmental context explains lévy and brownian movement patterns of marine predators. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 465, n. 7301, p. 1066, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- 4 SEURONT A. C. DUPONCHEL, C. C. L. Heavy-tailed distributions in the intermittent motion behaviour of the intertidal gastropod *littorina littorea*. *Physica A*, Elsevier, v. 385, p. 573–582, November 2007. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843710700787X?via%3Dihub>>. Citado na página 14.
- 5 KNEGT, H. de et al. Patch density determines movement patterns and foraging efficiency of large herbivores. *Behavioral Ecology*, v. 18, n. 6, p. 1065–1072, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/beheco/arm080>>. Citado na página 14.
- 6 INGEN-HOUSZ, J. *Vermischte Schriften physisch-medicinischen Inhalts: Mit Kupfertafeln*. [S.l.]: Wappler, 1734. v. 2. Citado na página 14.
- 7 BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The Philosophical Magazine*, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828. Citado na página 14.
- 8 TAQQU, M. S. Bachelier e sua época: uma conversa com bernard bru l 2. Citado na página 14.
- 9 PEARSON, K. The problem of the random walk. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 72, n. 1867, p. 342, 1905. Citado na página 14.
- 10 RAYLEIGH, L. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 72, p. 318, 1905. Citado na página 14.
- 11 EINSTEIN, A. *Annalen der physik*, v. 17, p. 549, 1905. Citado na página 14.
- 12 EINSTEIN, A. Zur theorie der brownschen bewegung. *Annalen der physik*, Wiley Online Library, v. 324, n. 2, p. 371–381, 1906. Citado na página 14.
- 13 SMOLUCHOWSKI, M. v. Zusammenfassende bearbeitungen. *Physik. Zeitschr*, v. 17, p. 585, 1916. Citado na página 14.
- 14 PLANK, M.; JAMES, A. Optimal foraging: Levy pattern or process? *Journal of The Royal Society Interface*, The Royal Society, v. 5, n. 26, p. 1077–1086, 2008. Citado na página 14.

- 15 LUZ, M. G. D. et al. The random search problem: trends and perspectives. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 43, p. 430301, 2009. Citado na página 15.
- 16 BARTUMEUS, F. et al. Animal search strategies: a quantitative random-walk analysis. *Ecology*, Wiley Online Library, v. 86, n. 11, p. 3078–3087, 2005. Citado na página 15.
- 17 BÉNICHOU, O. et al. Two-dimensional intermittent search processes: An alternative to lévy flight strategies. *Physical Review E*, APS, v. 74, n. 2, p. 020102, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- 18 VISWANATHAN, G. M. et al. Lévy flight search patterns of wandering albatrosses. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 381, n. 6581, p. 413, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 24.
- 19 VISWANATHAN, G. M. et al. Optimizing the success of random searches. *nature*, Nature Publishing Group, v. 401, n. 6756, p. 911, 1999. Citado 9 vezes nas páginas 9, 15, 17, 32, 33, 34, 63, 64 e 65.
- 20 MARMOLEJO, J.; VELASCO, J.; SELLEY, H. J. An adaptive random search for short term generation scheduling with network constraints. *PloS one*, Public Library of Science, v. 12, n. 2, p. e0172459, 2017. Citado na página 15.
- 21 ROGERS, G. L. Multiple path analysis of reflectance from turbid media. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 25, n. 11, p. 2879–2883, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 23.
- 22 SAKIYAMA, T.; GUNJI, Y.-P. Optimal random search using limited spatial memory. *Royal Society open science*, The Royal Society, v. 5, n. 3, p. 171057, 2018. Citado na página 15.
- 23 DULLIEN, F. A. *Porous media: fluid transport and pore structure*. [S.l.]: Academic press, 2012. Citado na página 15.
- 24 SAHIMI, M. *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado na página 15.
- 25 PIROLI, P.; CARD, S. Information foraging in information access environments. In: ACM PRESS/ADDISON-WESLEY PUBLISHING CO. *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems*. [S.l.], 1995. p. 51–58. Citado na página 15.
- 26 SHARMA, D.; RAMACHANDRAN, H.; KUMAR, N. Lévy statistical fluctuations from a random amplifying medium. *Fluctuation and Noise Letters*, World Scientific, v. 6, n. 01, p. L95–L101, 2006. Citado na página 15.
- 27 WEISS, G. H. *Aspects and Applications of the Random Walk*. [S.l.]: North Holland Press, Amsterdam, 1994. Citado na página 16.
- 28 KAREIVA, P.; SHIGESADA, N. Analyzing insect movement as a correlated random walk. *Oecologia*, Springer, v. 56, n. 2-3, p. 234–238, 1983. Citado na página 16.

- 29 CRIST, T. O. et al. Animal movement in heterogeneous landscapes: an experiment with eleodes beetles in shortgrass prairie. *Functional Ecology*, JSTOR, p. 536–544, 1992. Citado na página 16.
- 30 HILL, N.; HÁDER, D.-P. A biased random walk model for the trajectories of swimming micro-organisms. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 186, n. 4, p. 503–526, 1997. Citado na página 16.
- 31 CODLING, E. et al. Random walk models for the movement and recruitment of reef fish larvae. *Marine Ecology Progress Series*, v. 279, p. 215–224, 2004. Citado na página 16.
- 32 PATLAK, C. S. Random walk with persistence and external bias. *The bulletin of mathematical biophysics*, Springer, v. 15, n. 3, p. 311–338, 1953. Citado na página 16.
- 33 MORALES, J. M. et al. Extracting more out of relocation data: building movement models as mixtures of random walks. *Ecology*, Wiley Online Library, v. 85, n. 9, p. 2436–2445, 2004. Citado na página 16.
- 34 CODLING, E. A.; PLANK, M. J.; BENHAMOU, S. Random walk models in biology. *Journal of the Royal Society Interface*, The Royal Society London, v. 5, n. 25, p. 813–834, 2008. Citado na página 16.
- 35 BÉNICHOU, O. et al. Intermittent search strategies: When losing time becomes efficient. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 75, n. 2, p. 349, 2006. Citado na página 16.
- 36 LOMHOLT, M. A. et al. Lévy strategies in intermittent search processes are advantageous. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, 2008. Citado na página 16.
- 37 REYNOLDS, A. On the intermittent behaviour of foraging animals. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 75, n. 4, p. 517, 2006. Citado na página 16.
- 38 OSHANIN, G. et al. Efficient search by optimized intermittent random walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 43, p. 434008, 2009. Citado na página 17.
- 39 FELLER, W. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 51, n. 1, p. 800, 1945. Citado na página 17.
- 40 KARDAR, M. *Statistical physics of particles*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 19, 21, 22, 23, 55 e 57.
- 41 CARBONE, V. et al. Clustering of polarity reversals of the geomagnetic field. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 12, p. 128501, 2006. Citado na página 23.
- 42 PENG, C.-K. et al. Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 9, p. 1343, 1993. Citado na página 24.
- 43 SHLESINGER, M.; KLAFTER, J. *Growth and Form*, HE Stanley and N. Ostrowski. [S.l.]: Martinus Nijhof Publishers, Amsterdam, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- 44 SHLESINGER, M. Mf shlesinger, gm zaslavsky, and j. klafter, nature (london) 363, 31 (1993). *Nature (London)*, v. 363, p. 31, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

- 45 SHLESINGER, M. F.; ZASLAVSKY, G. M.; FRISCH, U. Lévy flights and related topics in physics. In: *Levy flights and related topics in Physics*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 450. Citado na página 24.
- 46 NOLAN, J. Bibliography on stable distributions, processes and related topics. In: *Technical Report*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- 47 HUGHES, B. D.; SHLESINGER, M. F.; MONTROLL, E. W. Random walks with self-similar clusters. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 78, n. 6, p. 3287–3291, 1981. Citado na página 26.
- 48 CAMPOS, D. et al. First-passage times in multiscale random walks: The impact of movement scales on search efficiency. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 92, p. 052702, Nov 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.052702>>. Citado 8 vezes nas páginas 10, 11, 26, 75, 76, 83, 84 e 89.
- 49 REYNOLDS, A. M. Mussels realize weierstrassian lévy walks as composite correlated random walks. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 4, p. 4409, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- 50 PINEDA, J. O. d. C. et al. A entropia segundo claude shannon: O desenvolvimento do conceito fundamental da teoria da informação. *Pontifícia Universidade Católica. São Paulo*, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 30 e 55.
- 51 EPSTEIN, I. *Teoria da informação*. [S.l.]: Editora Atica, 1986. v. 35. Citado na página 28.
- 52 HAWKING, S. *O universo numa casca de noz.*[tradução de Ivo Korytowski, original *The universe in a nutshell*, 2001]. [S.l.]: Editora Mandarim, São Paulo, 2001. Citado na página 28.
- 53 HUGILL, P. J. *Global communications since 1844: Geopolitics and technology*. [S.l.]: JHU Press, 1999. Citado na página 28.
- 54 HODGES, A. *Alan Turing: The Enigma: The Enigma*. [S.l.]: Random House, 2012. Citado na página 28.
- 55 IFRAH, G. *História universal dos algarismos*. [S.l.]: Nova Fronteira, 1997. Citado na página 29.
- 56 LINDLEY, D. *Boltzmann's atom: The great debate that launched a revolution in physics*. [S.l.]: AAPT, 2001. Citado na página 30.
- 57 MILLÁN, P. C. et al. Shannon entropy and particle decays. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 930, p. 583–596, 2018. Citado na página 30.
- 58 PARK, K.-W. et al. Shannon entropy and avoided crossings in closed and open quantum billiards. *Physical Review E*, APS, v. 97, n. 6, p. 062205, 2018. Citado na página 30.
- 59 RAPOSO, E. Ep raposo, sv buldyrev, mge da luz, mc santos, he stanley, and gm viswanathan, phys. rev. lett. 91, 240601 (2003). *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, p. 240601, 2003. Citado na página 32.

- 
- 60 BULDYREV, S. et al. Average time spent by lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 4, p. 041108, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 34, 38, 40, 41 e 43.
- 61 BULDYREV, S. et al. Properties of lévy flights on an interval with absorbing boundaries. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 302, n. 1-4, p. 148–161, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 34, 38, 40, 41 e 43.
- 62 BARTUMEUS, F. et al. Stochastic optimal foraging: tuning intensive and extensive dynamics in random searches. *PloS one*, Public Library of Science, v. 9, n. 9, p. e106373, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 40, 43 e 45.
- 63 SHANNON, C. E.; WEAVER, W. The mathematical theory of communication. 1949. *Urbana, IL: University of Illinois Press*, 1963. Citado 5 vezes nas páginas 55, 57, 58, 60 e 61.
- 64 WEISS, J. S. G. *Phys*, v. 37, p. 325, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 70.