



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LUCAS RAMON CARVALHO RIBEIRO

**MODELOS HIERÁRQUICOS PARA A DENSIDADE ESPECTRAL
DE SISTEMAS COMPLEXOS**

Recife
2019

LUCAS RAMON CARVALHO RIBEIRO

**MODELOS HIERÁRQUICOS PARA A DENSIDADE ESPECTRAL
DE SISTEMAS COMPLEXOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo

Co-Orientador: Prof. Giovani Lopes Vasconcelos

Recife
2019

Catálogo na fonte
Bibliotecária Elaine Freitas CRB4-1790

R484m Ribeiro, Lucas Ramon Carvalho
 Modelos hierárquicos para a densidade espectral de sistemas
 complexos / Lucas Ramon Carvalho Ribeiro. – 2019.
 57 f.: fig.

 Orientador: Antônio Murilo Santos Macêdo
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
 Pernambuco. CCEN. Física. Recife, 2019.
 Inclui referências.

 1. Física Teórica. 2. Sistemas Complexos. 3. Densidade
 Espectral. I. Macêdo, Antônio Murilo Santos (orientador). II. Título.

530.1 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2019-24

LUCAS RAMON CARVALHO RIBEIRO

**MODELOS HIERÁRQUICOS PARA A DENSIDADE ESPECTRAL
DE SISTEMAS COMPLEXOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 15/02/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos
Co-Orientador
Universidade Federal do Paraná

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Sérgio Henrique Albuquerque Lira
Examinador Externo
Universidade Federal de Alagoas

Às três pessoas mais importantes da minha vida; minha mãe Otilia Carvalho Cardozo, meu pai Antonio Maria Ribeiro e ao meu irmão Antonio Maria Ribeiro Filho. Aos meus amigos e familiares.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a DEUS por ter me dado saúde, força e ânimo para perseguir meus sonhos. Aos meus pais, Otilia e Tote, por sempre terem me incentivado a estudar, pelo apoio, amor e confiança que me dão. Ao meu irmão Antonio Filho, por acreditar mais em mim do que eu mesmo. Mesmo com a distância entre nós, sempre senti o amor dessas pessoas aquecer meu coração.

Aos demais familiares que me apoiam.

Ao meu orientador, Professor Antônio Murilo, pelos ensinamentos passados e pela disponibilidade. Também pelo fato de ter aceitado me orientar após a saída do meu antigo orientador. Pela sua paciência e compreensão.

Ao meu co-orientador, Professor Giovani Vasconcelos, que mesmo após a sua saída do departamento continuou acompanhando o andamento do projeto. Obrigado pela ajuda na organização desse trabalho.

Aos colegas de laboratório William, Arthur e Rodrigo por me ajudarem na parte computacional na qual eu não tinha conhecimento. Ao Marcel Moura pela disponibilização dos dados que foram analisados nesse trabalho

Aos meus amigos Amanda, Ângela, Edmundo, Guilherme, Juliano, Luiz, Nefe, Tawan e Victor.

Ao apoio financeiro dado pelo CNPq.

" But my dreams
They aren't as empty
As my conscience seems to be"
(The Who, 1971).

Resumo

Nesta dissertação nós apresentamos um formalismo para descrever a densidade espectral de sistemas complexos que exibem múltiplas escalas de tempo. Nesse formalismo, consideramos que o sistema evolui no tempo através de uma sequência de pulsos exponenciais, onde a taxa de relaxação não é constante mas varia de forma aleatória de pulso para pulso com uma distribuição de probabilidade apropriada. Como as relaxações são exponenciais, a densidade espectral do sinal condicional a um dado valor da taxa de relaxação é descrita por uma curva lorentziana com uma largura de linha definida pela taxa de relaxação. A densidade espectral final é obtida fazendo-se a superposição das curvas lorentzianas, ponderada pela distribuição da taxa de relaxação. A distribuição de probabilidade da taxa de relaxação é calculada a partir de modelos dinâmicos estocásticos hierárquicos. Vários modelos hierárquicos foram considerados na dissertação, entre os quais os modelos das chamadas classes gama, gama inversa, beta e beta inversa, que admitem uma solução analítica em termos das funções G de Meijer. Consideramos também dois modelos descritos por processos de Ornstein-Uhlenbeck duplamente hierárquicos, cuja solução pode ser escrita em termos das funções H de Fox. Os diferentes modelos para a densidade espectral foram comparados com dados experimentais de um sistema físico real. O experimento analisado na dissertação é o problema da invasão por um fluido viscoso de um meio poroso formado por uma célula de Hele-Shaw preenchida com pequenas esferas de vidro. Inicialmente preenche-se a célula com um líquido viscoso, com a extremidade esquerda da célula aberta para a atmosfera, permitindo a entrada de ar, e a da direita ligada a um recipiente que acumula o líquido retirado. O escoamento do líquido dá-se então através de pequenos movimentos bruscos ("bursts"), com uma consequente queda de pressão na extremidade de saída, seguida de relaxamento exponencial para a pressão atmosférica. A densidade espectral da série temporal das pressões foi calculada e comparada com as previsões teóricas dos diversos modelos. Entre os modelos descritos pela função G de Meijer, as classes gama e gama inversa mostraram-se mais próximas dos valores experimentais em comparação com as beta e beta inversa. Também vimos que os modelos de Ornstein-Uhlenbeck duplamente hierárquicos apresentam uma densidade espectral similar à observada experimentalmente. Uma análise mais refinada faz-se agora necessária para decidir qual o melhor modelo entre aqueles que se mostraram bons candidatos para descrever o sistema experimental.

Palavras-chave: Sistemas complexos. Densidade espectral. Modelos dinâmicos Estocásticos hierárquicos. Escoamento em meio poroso.

Abstract

In this thesis we present a formalism to describe the spectral density of complex systems that exhibit multiple time scales. In this formalism, we consider that the system evolves over time through a sequence of exponential pulses, where the relaxation rate is not constant but varies from pulse to pulse randomly with an appropriate probability distribution. Since the relaxations are exponential, the spectral density of the signal conditioned to a given relaxation rate value is described by a Lorentzian with a linewidth defined by the relaxation rate. The final spectral density is obtained by superimposing the Lorentzian curves, weighted by the distribution of the relaxation rate. The probability distribution of the relaxation rate is calculated from hierarchical stochastic dynamic models. Several hierarchical models were considered in the dissertation, including the so-called gamma, inverse-gamma, beta and inverse beta models, which support an analytical solution in terms of Meijer G functions. We also consider two models described by double-hierarchical Ornstein-Uhlenbeck processes whose solution can be written in terms of Fox H functions. The different models for the spectral density were compared with experimental data from a real physical system. The experiment analyzed in the thesis is the problem of the invasion by a viscous fluid of a porous medium formed by a Hele-Shaw cell filled with small glass beads. Initially, the cell is filled with the liquid. The left end of the cell is open to the atmosphere, forming an air inlet, and the right end of the cell is attached to an external reservoir. The flow of the liquid then occurs through small bursts, with a consequent drop in pressure at the outlet, followed by an exponential relaxation to the atmospheric pressure. The spectral density of the time series of the pressures was calculated and compared with the theoretical predictions of the different models. Among the models described by G functions, the gamma and inverse gamma classes were closer to the experimental values than the beta and inverse beta classes. It was also seen that the doubly hierarchical Ornstein-Uhlenbeck models have a spectral density similar to that observed experimentally. A more refined analysis is now necessary to decide which is the best model among those that have shown to be good candidates for describing the experimental system.

Keywords: Complex systems. Spectral density. Hierarchical stochastic dynamic models. Porous media flow.

Lista de Figuras

Figura 1 - Exemplo de série estacionária. Podemos ver que os valores estão variando ao longo do tempo em torno de zero. Figura retirada de [19].	14
Figura 2 - Relaxações exponenciais em sequência. Podemos notar que a pressão decai de uma forma abrupta e depois volta, exponencialmente, para um certo valor. Esse processo ocorre várias vezes. Figura gerada a partir dos dados medidos de [10]	18
Figura 3 - Representação do aparato experimental analisado nesta dissertação. A pressão é controladamente reduzida de forma que o ar empurra o líquido da direita para a esquerda. Figura retirada de [10].	46
Figura 4 - Pressão medida pelo sensor na saída. Figura gerada a partir dos dados medidos em [10].	47
Figura 5 - Visão ampliada da região de invasão. Figura gerada a partir dos dados medidos em [10].	47
Figura 6 - Densidade Espectral do experimento CIP.	48
Figura 7 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.10) referente à classe gama com $N = 1$. No canto superior direito da imagem vemos os melhores valores para os parâmetros β_{1,ε_0} e A^2r .	49
Figura 8 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.29) referente à classe gama inversa com $N = 1$.	49
Figura 9 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.41) referente à classe beta com $N = 1$. Nesse caso os parâmetros são ν , μ e A^2r .	50
Figura 10 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.48) referente à classe beta inversa com $N = 1$. Nesse caso os parâmetros são $\bar{\nu}$, $\bar{\mu}$ e A^2r .	50
Figura 11 - Comparação entre os ajustes das classes gama, gama inversa e da distribuição uniforme. A densidade espectral utilizando a distribuição uniforme é dada pela equação 2.14	51
Figura 12 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.21) referente à classe gama com $N=1,2,3,4$. Para cada um dos valores de N foi feito um ajuste. Os valores dos parâmetros obtidos foram diferentes de uma curva para outra.	51
Figura 13 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.36) referente à classe gama inversa com $N=1,2,3,4$. Novamente foi feito o melhor ajuste para cada valor de N .	52
Figura 14 - Densidade espectral e equação (3.78) para valores de $\beta = 0.1$, $\zeta = 0.8$, $\varepsilon = 20$.	53
Figura 15 - Densidade espectral e equação (3.89) para $\beta = 0.1$, $\zeta = 0.8$, $\varepsilon = 20$.	53

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Sistemas Complexos	12
1.2	Densidade Espectral de Potência	13
1.3	Dinâmica Hierárquica	14
1.4	Organização da Dissertação	15
2	Densidade espectral de sistemas complexos	16
2.1	Relaxação exponencial	16
2.2	Distribuição uniforme de taxas de relaxação	18
2.3	Modelos Hierárquicos	19
2.3.1	<i>Caso $s = 1$ (Modelo de Hull-White)</i>	20
2.3.2	<i>Caso $s = 1/2$ (Modelo de Heston)</i>	27
2.3.3	<i>Classe Beta</i>	30
2.3.4	<i>Classe Beta Inversa</i>	31
3	Densidade espectral de sistemas hierárquicos	32
3.1	Densidade Espectral Hierárquica: Introdução	32
3.2	Densidade Espectral Hierárquica: Classe Gama	33
3.2.1	<i>Caso $N = 1$</i>	33
3.2.2	<i>Caso Geral ($N > 1$)</i>	34
3.3	Densidade Espectral Hierárquica: Classe Gama Inversa	35
3.3.1	<i>Caso $N = 1$</i>	35
3.3.2	<i>Caso Geral ($N > 1$)</i>	37
3.4	Densidade Espectral Hierárquica: Classe Beta	38
3.5	Densidade Espectral Hierárquica: Classe Beta Inversa	39
3.6	Processo de Ornstein-Uhlenbeck Hierárquico	40
3.6.1	<i>Função de Correlação e Densidade Espectral</i>	40
3.6.2	<i>Processo de Ornstein-Uhlenbeck</i>	41
3.6.3	<i>Processo de Ornstein-Uhlenbeck Duplamente Hierárquico tipo Gama</i>	41
3.6.4	<i>Processo de Ornstein-Uhlenbeck Duplamente Hierárquico tipo Gama Inversa</i>	44
3.7	Análise de Dados	45
3.7.1	<i>Descrição do experimento</i>	45
3.7.2	<i>Comparação dos Dados com a Teoria</i>	46
3.7.3	<i>Modelos de uma Escala ($N=1$)</i>	48
3.7.4	<i>Modelos Multiescala ($N>1$)</i>	51

3.7.5	<i>Modelos de Ornstein–Uhlenbeck</i>	52
4	Conclusões	55
	Referências	56

1 Introdução

Nesta dissertação estudaremos uma nova abordagem para descrever a densidade espectral de potência de sistemas dinâmicos hierárquicos com múltiplas escalas de tempo. Nosso foco principal de aplicação dessa nova metodologia estará na análise de séries temporais de experimentos de invasão de um fluido em um meio poroso. Uma forma de tratarmos esse problema consiste em considerar que a variação da pressão no líquido ao longo do processo de invasão é composta de uma série de relaxações exponenciais. Apresentaremos duas abordagens para o problema. Em uma delas consideraremos que existe uma dinâmica hierárquica nessas relaxações. Na outra, trataremos o problema como um processo duplo de Ornstein-Uhlenbeck. Neste capítulo faremos uma breve introdução a sistemas complexos, densidade espectral de potência e sistemas hierárquicos, bem como descreveremos a organização geral da dissertação.

1.1 Sistemas Complexos

Entender um sistema com vários componentes pode ser uma tarefa extremamente complicada, cada parte tem suas propriedades e entendê-las uma por uma levaria um enorme esforço computacional. Uma forma de lidar com isso é questionar se é realmente necessário compreender os constituintes do sistema em sua particularidade. Uma alternativa é estudar o sistema em sua totalidade e assim observar o comportamento global. Desta forma, o trabalho consiste em analisar apenas algumas variáveis relevantes do modelo estatístico apropriado.

A mecânica estatística, por exemplo, é organizada de forma análoga ao procedimento descrito acima. Ao estudarmos um gás no equilíbrio, não nos preocupamos como se dá exatamente o comportamento de cada molécula. O que é feito é uma análise do comportamento médio das partículas. Através deste comportamento médio é possível identificarmos as características termodinâmicas do sistema, como pressão, energia interna, calor específico etc.

Estamos interessados no comportamento geral do sistema. Essa perspectiva pode ser estendida para além de sistemas físicos e incluir sistemas biológicos, sociais entre outros. Existe, na ciência, uma abordagem unificadora para tratar sistemas deste tipo. Dizemos que são exemplos de sistemas complexos. Citaremos a seguir algumas das características frequentemente observadas neles.

A primeira é a não-linearidade. Um sistema é dito linear se ao somarmos duas soluções da sua dinâmica obtemos outra solução. A não-linearidade implica que não adianta querermos entender o sistema componente por componente para chegarmos a uma compreensão geral do mesmo. Outra característica é o feedback, que representa uma forma de como uma parte do sistema pode interagir com as outras partes em um tempo posterior, que depende de como foi a interação em um tempo anterior. Um outro aspecto frequentemente presente é a organização hierárquica, que significa que existem níveis, ou seja, sub-sistemas com diferentes características. O comportamento resultante depende da interação desses níveis entre si. Para que possamos observar o surgimento de certos padrões é preciso que haja um número bem grande

de elementos, além disso é preciso também que muitos desses elementos sejam de natureza similar (tamanho e peso parecidos). Isso é uma condição para que haja interação, isto é, troca de matéria, energia ou informação. Tais trocas são mediadas por mecanismos como forças e colisões. Sem interação, o que teríamos seria um amontoado de elementos (partículas, por exemplo) independentes, de onde dificilmente surgiria algum padrão ou se estabilizaria alguma ordem.

A área de sistemas complexos estuda diversos fenômenos, tais como terremotos [1], extinção de espécies [2], mercado financeiro [3], música [4], irregularidades eleitorais [5], esportes [6] etc. No estudo desses tipos de fenômenos, o que se busca é encontrar características simples que emergem a partir da complexidade. Tomemos por analogia o histórico de guerras. Sabemos que conflitos surgiram ao longo da história por diversos motivos. Várias nações, com diferentes culturas, já entraram em combate gerando um número enorme de mortos. A princípio, parece não haver similaridade ou alguma conexão entre os conflitos, mas se observarmos mais profundamente encontramos uma certa relação [7]. A relação é que sempre que o número de mortos dobra, conflitos dessa magnitude são 2,62 vezes menos comuns. É realmente surpreendente o fato de podermos extrair uma característica universal sem nos importarmos com quais nações estavam envolvidas nos conflitos, qual seus poderes bélicos, quem eram seus líderes, quais os motivos dos conflitos. Esse é um exemplo de como simplicidade pode aparecer através da complexidade.

Uma vez identificada uma dinâmica complexa, queremos também quantificá-la. Uma forma de fazermos isso consiste em identificar eventos discretos, medi-los e elaborar a distribuição de probabilidade deles. O motivo para querermos distribuições de probabilidade é porque elas nos mostram a proporção entre a ocorrência de pequenos e grandes eventos. Isso, de certa forma, serve para estimarmos o quão é menos provável que um evento maior ocorra.

Para uma análise mais precisa desse tipo de sistema é preciso que seja feita uma medição das variáveis a serem estudadas em função do tempo. Esse conjunto de dados é chamado de série temporal. Uma série temporal dita estacionária apresenta a característica de se desenvolver de forma aleatória em torno de uma média fixa, como mostra a figura 1.1. Na seção seguinte, apresentaremos uma grandeza comumente observada quando se analisa um fenômeno complexo.

1.2 Densidade Espectral de Potência

Uma forma de analisarmos uma série temporal associada a um fenômeno de flutuação é através da sua densidade espectral de potência (PSD, sigla em inglês para "Power Spectral Density"). Para termos uma ideia inicial, vamos entender o que significa PSD através das palavras que constituem este acrônimo. Potência aqui não diz respeito à potência (energia por unidade de tempo) usualmente medida em watts, mas sim à potência relacionada com a média quadrática de um sinal. O termo espectral se refere ao fato da PSD ser uma função da frequência. Densidade tem a ver com o fato da unidade da PSD ser do tipo intensidade por frequência, ou seja, se quisermos saber o valor dessa intensidade em um determinado intervalo de frequências, basta integrar a densidade espectral de potência com a frequência no intervalo desejado.

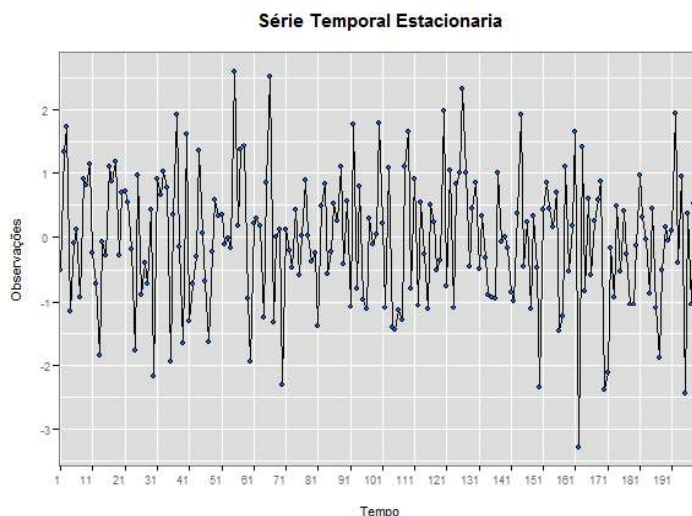


Figura 1 - Exemplo de série estacionária. Podemos ver que os valores estão variando ao longo do tempo em torno de zero. Figura retirada de [19].

A PSD nos mostra a intensidade das variações em função da frequência. Isso quer dizer que ela nos diz em quais frequências as variações são mais fortes ou mais fracas. Essa grandeza pode ser útil em diversas aplicações. Na indústria, por exemplo, ela pode auxiliar na detecção de falhas em motores industriais [8], no que tange à saúde, ela pode ajudar em estudos sobre frequência cardíaca em fetos humanos [9]. Quanto antes pudermos consertar um motor, mais rapidamente a empresa que o possui poderá voltar à sua produção habitual. A observação de como se comporta a frequência cardíaca de um feto ainda dentro do útero pode ser proveitosa para oferecer tratamento desde cedo, caso necessário.

Nesta dissertação, faremos uma análise da PSD de uma dinâmica complexa. O fenômeno a ser estudado é a invasão de um fluido em um meio poroso. No experimento é medida a pressão de um líquido quando ele está sendo forçado, pelo ar sob pressão atmosférica, a sair do meio poroso. Em uma abordagem inicial aplicaremos um modelo onde consideramos que essa pressão observada se comporta como uma série de relaxações exponenciais. Também será levado em conta que a taxa de decaimento é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade constante [10]. Apresentaremos também outros modelos onde consideraremos que a taxa de decaimento possui outras distribuições de probabilidade e calcularemos suas respectivas densidades espectrais.

1.3 Dinâmica Hierárquica

Uma maneira de estudarmos séries temporais estacionárias consiste em considerarmos uma superposição de estatísticas. Nessa abordagem, assumimos que existam duas escalas de tempo bem separadas, uma mais rápida (sinal) e outra mais lenta (background). O resultado será uma combinação das duas. Nesta dissertação, faremos uma superposição estatística e também

apresentaremos um modelo para a dinâmica subjacente. Isso oferece uma descrição mais completa do que se analisássemos apenas uma escala. A descrição dinâmica será feita pelo cálculo das soluções estacionárias das equações de Fokker-Planck associadas às equações diferenciais estocásticas.

De forma geral, teremos um conjunto de equações diferenciais estocásticas acopladas, cada uma associada a uma escala do sistema. Dizemos que existe uma hierarquia pelo fato de uma escala estar relacionada com outra contígua em uma espécie de rede ou cascata. Este tipo de dinâmica hierárquica foi introduzida no trabalho de Salazar e Vasconcelos [11] inicialmente com o propósito de estudar fluidos turbulentos, mas esses modelos já se mostraram adequados para a descrição de outros sistemas.

Um dos propósitos deste trabalho consiste em considerar que a taxa de decaimento possui uma dinâmica hierárquica tal como no modelo de Salazar e Vasconcelos. A partir desta hipótese, calcularemos a densidade espectral do sistema. Como se trata de um modelo que envolve múltiplas escalas, precisaremos determinar quantas escalas temos no experimento.

Os outros modelos que usaremos não dizem respeito à taxa de decaimento. O que faremos é considerar que o sistema pode ser descrito como um processo de Ornstein-Uhlenbeck com outras duas escalas. Por meio da função de correlação, calcularemos a densidade espectral de potência.

1.4 Organização da Dissertação

Este capítulo introdutório teve como objetivo apresentar conceitos fundamentais para um bom entendimento do resto da dissertação. No capítulo seguinte, inicialmente, calcularemos qual a PSD de uma série de relaxações exponenciais. Posteriormente, vamos apresentar diferentes modelos hierárquicos e adicionalmente calcularemos as distribuições de probabilidades associadas a eles. No capítulo 3 calcularemos a PSD levando em conta que a taxa de decaimento exponencial tenha uma dinâmica descrita tal como os modelos hierárquicos apresentados no capítulo 2. Em seguida, apresentaremos um modelo que trata o problema como sendo um processo de Ornstein-Uhlenbeck duplamente hierárquico. Ao final desse capítulo, faremos uma descrição do experimento de invasão de um meio poroso e a análise dos dados. Essa análise será uma comparação entre a PSD obtida experimentalmente e calculada pelos modelos no capítulo 3.

2 Densidade espectral de sistemas complexos

No capítulo introdutório apresentamos o que são sistemas complexos, mostramos suas características e citamos exemplos. Fizemos também uma discussão qualitativa sobre a densidade espectral de potência, PSD. Partiremos agora para um estudo quantitativo dessa grandeza. Ao longo do texto, nos referiremos à PSD apenas como densidade espectral.

As séries temporais dizem respeito a uma grandeza que está modificando seu valor ao longo do tempo. A densidade espectral não possui dependência temporal, mas varia com a frequência. O fato de querermos mudar do domínio do tempo para o domínio da frequência nos diz que precisaremos de uma transformada de Fourier. Para estabelecer a notação, considere inicialmente uma série temporal $p(t)$. A sua transformada de Fourier é dada por

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.1)$$

A densidade espectral é então definida como [12]

$$S(\omega) = |P(\omega)|^2. \quad (2.2)$$

Entretanto, para muitas séries temporais de interesse a transformada de Fourier pode não existir formalmente. Nesse caso, é melhor trabalhar com uma transformada de Fourier truncada, em que o sinal é integrado ao longo de um intervalo finito de tempo $[0, T]$:

$$P_T(\omega) = \int_0^T p(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.3)$$

A densidade espectral de potência, ou simplesmente, densidade espectral, de um sinal aleatório $p(t)$ pode então ser definida como

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |P_T(\omega)|^2 \rangle, \quad (2.4)$$

onde $\langle . \rangle$ denota a média sobre realizações (média no ensemble).

A seguir vamos apresentar um modelo usado para descrever séries temporais que apresentem um comportamento caracterizado por uma sequência de relaxações exponenciais e analisar a densidade espectral correspondente. Em seguida passaremos a estudar modelos mais gerais em que a taxa de realização dos pulsos varia aleatoriamente de pulso para pulso.

2.1 Relaxação exponencial

Vamos considerar um modelo de série temporal em que os dados são vistos como gerados de um sistema submetido a uma relaxação exponencial. Isso significa que podemos observar

que a magnitude da grandeza medida sofre uma mudança brusca seguida de um decaimento exponencial para um valor de referência, tomado como zero.

Inicialmente, considere um único pulso desse tipo dado por

$$p_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Tomemos agora a transformada de Fourier desse processo, isto é

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\lambda(t) e^{-i\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+i\omega)t} dt = \frac{A}{\lambda+i\omega} \quad (2.6)$$

A densidade espectral desse pulso é portanto dada por uma lorentziana

$$S(\omega) = |P(\omega)|^2 = \frac{A^2}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (2.7)$$

Vamos agora considerar que ao invés de haver apenas um único pulso existam diversos pulsos, uma sequência deles tal como mostrado na figura 2.1. Cada um desses pulsos é descrito como

$$p_\lambda(t, t_k) = Ae^{-\lambda(t-t_k)} \quad (2.8)$$

para $t \geq t_k$ e $p_\lambda(t, t_k) = 0$ para $t < t_k$. Isso significa que para termos o sinal completo, basta juntarmos todos eles. A transformada de Fourier desse conjunto de pulsos é dada por

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k p_\lambda(t, t_k) e^{-i\omega t} dt = A \sum_k e^{i\omega t_k} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+i\omega)t} dt = \frac{A}{\lambda+i\omega} \sum_k e^{i\omega t_k}. \quad (2.9)$$

Para essa sequência de pulsos, vamos calcular a densidade espectral como

$$S(\omega) = \frac{A^2}{\lambda^2 + \omega^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| \sum_k e^{i\omega t_k} \right|^2 \right\rangle = \frac{A^2 r}{\lambda^2 + \omega^2}, \quad (2.10)$$

onde r é a taxa média de ocorrência dos pulsos. Usando o fato que $\omega = 2\pi f$, chegamos em

$$S(f|\lambda) = \frac{A^2 r}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}. \quad (2.11)$$

Na discussão acima considerou-se que todos os pulsos $p_\lambda(t, t_k)$ têm a mesma taxa de relaxação λ , de modo que a densidade espectral “média” segue sendo descrita como uma lorentziana. Contudo em sistemas que apresentam uma dinâmica como mostrada na figura 2.1, a densidade espectral empírica não é bem descrita por uma lorentziana. Nesse caso é necessário fazer uma extensão do modelo. Um primeiro passo nessa direção foi dado em [10], onde os autores trataram a taxa de relaxação λ como sendo uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidade específica, como discutido a seguir.

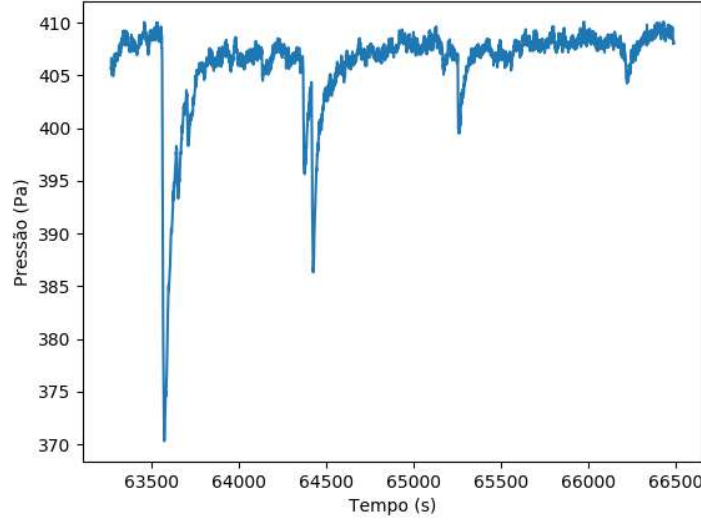


Figura 2 - Relaxações exponenciais em sequência. Podemos notar que a pressão decai de uma forma abrupta e depois volta, exponencialmente, para um certo valor. Esse processo ocorre várias vezes. Figura gerada a partir dos dados medidos de [10]

2.2 Distribuição uniforme de taxas de relaxação

Existem fenômenos físicos que podem ser descritos pelo modelo que foi apresentado anteriormente, onde a dinâmica é caracterizada por uma série de pulsos exponenciais. Um trabalho recente [10] fez um estudo sobre a invasão de fluidos em um meio poroso. No experimento descrito neste trabalho, as pressões do fluido foram medidas e notou-se o padrão que está mostrado na figura 2.1. Uma discussão mais detalhada do experimento será feita na seção 3.7.

Uma outra contribuição deste trabalho foi propor que a taxa de decaimento λ não seja mais constante, mas sim uma variável aleatória com distribuição uniforme da forma

$$p(\lambda_t) = \frac{1}{\lambda_t}, \quad (2.12)$$

onde $\lambda_t = 2\pi f_t$ e f_t é um parâmetro do modelo representando uma frequência de transição entre os regimes de baixa e alta frequências. Essa distribuição de probabilidade está definida entre 0 e $2\pi f_t$. Agora que λ é uma variável aleatória, para calcularmos a densidade espectral do modelo devemos fazer uma média sobre λ . Ou seja, a densidade espectral $S(f)$ é dada pela uma integral de superposição

$$S(f) = \int_0^{\lambda_t} S(f|\lambda) p(\lambda) d\lambda. \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.11) e (2.12) na integral acima, e lembrando que $\lambda_t = 2\pi f_t$, temos

que a PSD resultante é [10]

$$S(f) = \frac{A^2 r}{4\pi^2 f_t f} \arctan\left(\frac{f_t}{f}\right). \quad (2.14)$$

Nos limites de baixa e alta frequências, temos os seguintes comportamentos:

$$S(f) = \begin{cases} \frac{A^2 r}{8\pi f_t} \frac{1}{f}, & \text{se } f \ll f_t \\ \frac{A^2 r}{4\pi^2} \frac{1}{f^2}, & \text{se } f \gg f_t. \end{cases} \quad (2.15)$$

Esta dissertação tem como objetivo estender esta proposta incorporando ideias de modelos hierárquicos. Mais especificamente, vamos analisar diferentes modelos para a distribuição $p(\lambda)$ e calcular as respectivas densidades espectrais. Uma importante diferença na nossa abordagem é que a distribuição $p(\lambda)$ será obtida a partir de um modelo dinâmico, descrito por um conjunto de equações diferenciais estocásticas, e não prescrita a priori como em [10]. A próxima seção introduzirá os modelos que serão utilizados para calcularmos a PSD. Esses modelos dizem respeito à dinâmica da variável λ . No capítulo 3 estudaremos as respectivas densidades espectrais $S(f)$ geradas por cada modelo de $p(\lambda)$ e compararemos as previsões teóricas com o experimento de invasão em meios porosos.

2.3 Modelos Hierárquicos

Quando estudamos um sistema composto por vários elementos é preciso que saibamos quais as variáveis mais importantes para descrevê-lo. Ter um entendimento de como este sistema evolui, utilizando numa quantidade reduzida de variáveis, é o objetivo principal da mecânica estatística de equilíbrio e este argumento é válido também quando estamos tratando de mecânica estatística de não-equilíbrio. Nesse segundo caso o objeto de estudo é entendido como um processo estocástico, ou seja, as variáveis relevantes evoluem probabilisticamente no tempo. Entretanto, essas variáveis podem estar evoluindo em escalas de tempo e/ou espaço diferentes. É possível que para um mesmo sistema exista uma grandeza que está mudando de valor de uma forma bem rápida e uma outra que lentamente modifica sua magnitude.

Essas variáveis relevantes podem estar acopladas, ou seja, pode ser que o valor de uma variável dependa do valor de uma segunda, e o valor desta segunda variável dependa de uma terceira e assim por diante gerando uma certa hierarquia entre elas. Este emaranhado de dependências pode ser resolvido se as variáveis evoluírem em escalas que sejam bem diferentes (maiores ou menores) umas das outras.

Um modelo proposto por Salazar e Vasconcelos [11] descreve um sistema com as características do que foi descrito acima. Esse modelo surgiu no estudo de fluidos clássicos mas já foi aplicado em outros contextos, como mercado financeiro [13] e lasers aleatórios [14]. O modelo compõe-se de um conjunto de equações diferenciais estocásticas com escalas bem distintas e com certas restrições dinâmicas. Neste capítulo, vamos aplicar o modelo hierárquico de Salazar e Vasconcelos para descrever a densidade espectral de sistemas com múltiplas escalas de tempo. De início serão apresentados alguns modelos hierárquicos gerais, com o objetivo de encontrar uma distribuição de probabilidade que leve em consideração múltiplas escalas.

Partiremos agora para uma descrição matemática do que foi explicado na introdução dessa seção. Mostraremos um modelo que é ao mesmo tempo dinâmico e hierárquico. É dinâmico pois apresenta uma equação diferencial estocástica que diz como o processo ocorre e é hierárquico porque existe uma conexão entre esses processos. Esta conexão ocorre em camadas que possuem ligações entre um nível e o seu antecessor. Para começar, considere um sistema descrito por um conjunto de variáveis aleatórias ε_i , $i = 1, \dots, N$. Essas variáveis possuem acoplamentos aos pares tal que ε_i tenha dependência em ε_{i-1} . A equação diferencial estocástica de uma única variável ε_i é [13]:

$$d\varepsilon_i = -\gamma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})dt + \kappa_i \varepsilon_i^s \varepsilon_{i-1}^{1-s} dW_i, \quad (2.16)$$

onde as constantes γ_i e κ_i são positivas e dW_i são processos de Wiener. Esse modelo é consequência de alguns princípios básicos como invariância de escala, condição de equilíbrio e a positividade de ε_i . O que faremos agora é assumir que todas essas variáveis ε_i , $i = 1, \dots, N$, possuem uma equação diferencial estocástica tal como a equação acima. Fazendo isso, teremos o seguinte sistema de equações acopladas:

$$d\varepsilon_1 = -\gamma_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)dt + \kappa_1 \varepsilon_1^s \varepsilon_0^{1-s} dW_1, \quad (2.17)$$

$$d\varepsilon_2 = -\gamma_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)dt + \kappa_2 \varepsilon_2^s \varepsilon_1^{1-s} dW_2, \quad (2.18)$$

$$d\varepsilon_N = -\gamma_N(\varepsilon_N - \varepsilon_{N-1})dt + \kappa_N \varepsilon_N^s \varepsilon_{N-1}^{1-s} dW_N. \quad (2.19)$$

Os valores de s serão escolhidos de modo a obtermos soluções analíticas da equação de Fokker-Planck associada a cada uma das equações diferenciais estocásticas, esses valores são $s = 1$ e $s = 1/2$.

Vale recordar que se a equação diferencial estocástica da variável aleatória $X(t)$ é

$$dX(t) = a(X, t)dt + b(X, t)dW, \quad (2.20)$$

então, a equação de Fokker-Planck associada a (2.20) é

$$\partial_t \rho(x, t | x_0, t_0) = -\partial_x a(x, t) \rho(x, t | x_0, t_0) + \frac{1}{2} \partial_x^2 b(x, t)^2 \rho(x, t | x_0, t_0) \quad (2.21)$$

onde $\rho(x, t | x_0, t_0)$ é a densidade de probabilidade condicional da variável $X(t)$. Vamos agora considerar cada um dos dois valores de s separadamente.

2.3.1 Caso $s = 1$ (Modelo de Hull-White)

Primeiramente vamos encontrar as soluções de forma individual, entretanto, como pode ser notado, as equações possuem estruturas semelhantes, o que nos permite resolver o problema de uma forma mais general. Para isso, basta considerarmos uma escala arbitrária e a escala anterior. De forma generalizada, para $s = 1$, a i -ésima equação diferencial estocástica é

$$d\varepsilon_i = -\gamma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})dt + \kappa_i \varepsilon_i dW_i. \quad (2.22)$$

A equação de Fokker-Planck associada a equação (2.22) é

$$\partial_t \rho_i(\varepsilon_i, t_i | \varepsilon_{i-1}, t_{i-1}) + \partial_{\varepsilon_i} [\gamma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \rho_i(\varepsilon_i, t_i | \varepsilon_{i-1}, t_{i-1})] + \frac{1}{2} \partial_{\varepsilon_i}^2 [\kappa_i^2 \varepsilon_i^2 \rho_i(\varepsilon_i, t_i | \varepsilon_{i-1}, t_{i-1})] = 0 \quad (2.23)$$

Vamos manter ε_{i-1} fixo e introduzir uma notação mais compacta, com isso temos que

$$\rho_i(\varepsilon_i, t_i | \varepsilon_{i-1}, t_{i-1}) = \rho_i(\varepsilon_i, t_i). \quad (2.24)$$

Para tempos muito longos o sistema atinge o equilíbrio estatístico, o que faz com que a distribuição se torne estacionária, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_i(\varepsilon_i, t_i) = \rho_i(\varepsilon_i). \quad (2.25)$$

Com isso, podemos reescrever a equação (2.23) como

$$\partial_t \rho_i(\varepsilon_i) + \partial_{\varepsilon_i} [\gamma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \rho_i(\varepsilon_i)] + \frac{1}{2} \partial_{\varepsilon_i}^2 [\kappa_i^2 \varepsilon_i^2 \rho_i(\varepsilon_i)] = 0. \quad (2.26)$$

A distribuição de probabilidade $\rho_i(\varepsilon_i)$ não tem dependência temporal, portanto o primeiro termo da equação acima é nulo. Isto resulta em

$$\partial_{\varepsilon_i} [\gamma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \rho_i(\varepsilon_i)] + \frac{1}{2} \partial_{\varepsilon_i}^2 [\kappa_i^2 \varepsilon_i^2 \rho_i(\varepsilon_i)] = 0. \quad (2.27)$$

Logo

$$\beta_i \partial_{\varepsilon_i} [(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \rho_i(\varepsilon_i)] + \partial_{\varepsilon_i}^2 [\varepsilon_i^2 \rho_i(\varepsilon_i)] = 0, \quad (2.28)$$

onde

$$\beta_i = \frac{2\gamma_i}{\kappa_i^2}. \quad (2.29)$$

Integrando a equação anterior, temos

$$\beta_i [(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \rho_i(\varepsilon_i)] + \partial_{\varepsilon_i} [\varepsilon_i^2 \rho_i(\varepsilon_i)] = 0. \quad (2.30)$$

Para darmos continuidade faremos a seguinte substituição $\tilde{\rho}_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^2 \rho_i(\varepsilon_i)$. Ao fazermos essa troca, a equação acima fica

$$\partial_{\varepsilon_i} \tilde{\rho}_i(\varepsilon_i) = -\frac{\beta_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{\varepsilon_i^2} \tilde{\rho}_i(\varepsilon_i). \quad (2.31)$$

Deixando do lado direito da equação apenas os termos que não dependem de $\tilde{\rho}_i(\varepsilon_i)$, obtemos

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_i(\varepsilon_i)} \partial_{\varepsilon_i} \tilde{\rho}_i(\varepsilon_i) = -\frac{\beta_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{\varepsilon_i^2}, \quad (2.32)$$

cuja integração nos dá

$$\ln[\tilde{\rho}_i(\varepsilon_i)] = -\beta_i \int \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{\varepsilon_i^2} d\varepsilon_i + \tilde{C}. \quad (2.33)$$

Agora iremos retirar o argumento do primeiro termo do logaritmo ao mesmo tempo que retornaremos à antiga densidade de probabilidade

$$\varepsilon_i^2 \rho_i(\varepsilon_i) = C \exp \left[-\beta_i \int \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{\varepsilon_i^2} d\varepsilon_i \right], \quad (2.34)$$

onde $C = \exp(\tilde{C})$. A integral que aparece é facilmente resolvida quando a dividimos em duas, resultando em

$$\rho_i(\varepsilon_i) = \frac{C}{\varepsilon_i^2} \exp \left[-\beta_i \ln \varepsilon_i - \frac{\beta_i \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i} \right], \quad (2.35)$$

ou seja,

$$\rho_i(\varepsilon_i) = \frac{C}{\varepsilon_i^{\beta_i+2}} \exp \left[-\frac{\beta_i \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i} \right]. \quad (2.36)$$

A constante C é determinada ao normalizarmos $\rho_i(\varepsilon_i)$. Normalizando, temos

$$\int_0^\infty \rho_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = 1, \quad (2.37)$$

que em vista de (2.36) torna-se

$$C \int_0^\infty \varepsilon_i^{-\beta_i-2} \exp \left[-\frac{\beta_i \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i} \right] d\varepsilon_i = 1. \quad (2.38)$$

Faremos agora uma substituição de variáveis tal que $t = \frac{\beta_i \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i}$, isso implica em $dt = -\frac{\beta_i \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i^2} d\varepsilon_i$ e a integral assume a forma

$$-C \int_\infty^0 \varepsilon_i^{-\beta_i} (\beta_i \varepsilon_{i-1})^{-1} \exp(-t) dt = 1, \quad (2.39)$$

ou ainda,

$$C \frac{1}{(\beta_i \varepsilon_{i-1})^{\beta_i+1}} \int_0^\infty t^{-\beta_i} \exp(-t) dt = 1. \quad (2.40)$$

A integração acima é a forma integral da função gama, neste caso ela é igual a $\Gamma(\beta_i + 1)$. Com isso, obtemos o valor da constante C

$$C = \frac{(\beta_i \varepsilon_{i-1})^{\beta_i+1}}{\Gamma(\beta_i + 1)}. \quad (2.41)$$

Portanto a distribuição de probabilidade condicional é

$$\rho_i(\varepsilon_i|\varepsilon_{i-1}) = \frac{(\beta_i \varepsilon_{i-1})^{\beta_i+1}}{\Gamma(\beta_i+1)} \varepsilon_i^{-\beta_i-2} \exp\left[-\frac{\beta_i \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i}\right]. \quad (2.42)$$

Essa é uma distribuição do tipo gama inversa. A forma que ela foi encontrada independe da camada que se deseja calcular, uma vez que a conta foi feita mantendo a generalidade. Entretanto ela diz respeito a um único nível e o que queremos é uma solução que leve em conta o fato de o sistema possuir várias dinâmicas ao mesmo tempo. Para isso, vamos introduzir a função $P_N(\varepsilon_N)$, que é a distribuição de probabilidade da variável ε_N , a qual está na N-ésima camada. Como estamos admitindo uma grande separação de escalas, ou seja $\gamma_N \gg \gamma_{N-1} \gg \dots \gg \gamma_1$, podemos encontrar o valor dessa distribuição a partir das distribuições de probabilidades condicionais de todas as camadas anteriores. Para isso, integramos sobre todas as escalas anteriores. Primeiro temos,

$$\rho_N(\varepsilon_N) = \int \rho(\varepsilon_N|\varepsilon_{N-1})\rho(\varepsilon_{N-1})d\varepsilon_{N-1}. \quad (2.43)$$

Repetindo esse processo recursivamente até a escala ε_1 , obtemos,

$$\rho_N(\varepsilon_N) = \int d\varepsilon_{N-1} \dots \int d\varepsilon_1 \rho(\varepsilon_N|\varepsilon_{N-1}) \dots \rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0). \quad (2.44)$$

Para resolvermos essas integrais usaremos dois recursos matemáticos. O primeiro é a transformada de Mellin que é definida como [15]

$$\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx. \quad (2.45)$$

O segundo é a fórmula de Parseval [15]

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(1-s)ds, \quad (2.46)$$

onde $F(s)$ e $G(s)$ são as transformadas de Mellin de $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente.

Primeiramente, vamos encontrar a distribuição $\rho(\varepsilon_2)$ através das distribuições condicionais $\rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)$ e $\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)$, assim temos

$$\rho_2(\varepsilon_2) = \int_0^\infty \rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)d\varepsilon_1. \quad (2.47)$$

Utilizando a equação (2.42) na integral acima, obtemos

$$\rho_2(\varepsilon_2) = \frac{\beta_2^{\beta_2+1} \varepsilon_2^{-\beta_2-2} (\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_2+1)\Gamma(\beta_1+1)} \int_0^\infty \varepsilon_1^{\beta_2+1} \exp\left[-\frac{\beta_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right] \varepsilon_1^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right] d\varepsilon_1. \quad (2.48)$$

Para dar continuidade, vamos usar as seguintes propriedades das transformadas de Mellin:

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s) = a^{-s}F(s), \quad (2.49)$$

$$\mathcal{M}\{f(a/x)\}(s) = \mathcal{M}\{f(ax)\}(-s) = a^s F(-s), \quad (2.50)$$

$$\mathcal{M}\{x^b f(x)\}(s) = F(s+b), \quad (2.51)$$

$$\mathcal{M}\{e^{-\alpha x}\}(s) = \alpha^{-s} \Gamma(s). \quad (2.52)$$

Definamos agora as funções $g(x) = x^{\beta_2+1} \exp\left[-\frac{\beta_2 x}{\varepsilon_2}\right]$ e $f(x) = x^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{x}\right]$, onde fizemos $x = \varepsilon_1$. Usando (2.51) temos que

$$\mathcal{M}\{g(x)\}(1-s) = \mathcal{M}\left\{x^{\beta_2+1} \exp\left[-\frac{\beta_2 x}{\varepsilon_2}\right]\right\}(1-s) = \mathcal{M}\left\{\exp\left[-\frac{\beta_2 x}{\varepsilon_2}\right]\right\}(2+\beta_2-s). \quad (2.53)$$

Usando agora (2.52), temos

$$\mathcal{M}\{g(x)\}(1-s) = \left(\frac{\beta_2}{\varepsilon_2}\right)^{-(2+\beta_2-s)} \Gamma(2+\beta_2-s). \quad (2.54)$$

Fazendo o mesmo procedimento com $f(x)$, obtemos

$$\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = \mathcal{M}\left\{x^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{x}\right]\right\}(s). \quad (2.55)$$

Desta vez precisaremos usar a propriedade (2.50), que implica em

$$\mathcal{M}\left\{x^{-\beta_1-2} \exp\left[-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{x}\right]\right\}(s) = \mathcal{M}\left\{x^{\beta_1+2} \exp\left[-\beta_1 \varepsilon_0 x\right]\right\}(-s). \quad (2.56)$$

Pela propriedade (2.51), temos então que

$$\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = \mathcal{M}\left\{x^{\beta_1+2} \exp\left[-\beta_1 \varepsilon_0 x\right]\right\}(-s) = \mathcal{M}\left\{\exp\left[-\beta_1 \varepsilon_0 x\right]\right\}(2+\beta_1-s), \quad (2.57)$$

e pela (2.52):

$$\mathcal{M}\left\{\exp\left[-\beta_1 \varepsilon_0 x\right]\right\}(2+\beta_1-s) = (\beta_1 \varepsilon_0)^{-(2+\beta_1-s)} \Gamma(2+\beta_1-s). \quad (2.58)$$

Obtivemos assim as transformadas de Mellin das funções que aparecem no integrando de (2.48). Para encontrarmos a distribuição de probabilidade da variável ε_2 vamos utilizar agora a fórmula de Parseval. Substituindo os valores encontrados em (2.54) e (2.58) na equação (2.48)

segue que

$$\int_0^\infty \rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)d\varepsilon_1 = \frac{1}{\beta_1\beta_2\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{\varepsilon_2}{\beta_1\beta_2\varepsilon_0}\right)^{-s} \Gamma(2+\beta_1-s)\Gamma(2+\beta_2-s)ds. \quad (2.59)$$

Esse resultado pode ser escrito de uma forma diferente, em termos da função G de Meijer definida por [16]

$$G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j+s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j+s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j-s)} x^{-s} ds, \quad (2.60)$$

Onde $\vec{a}_p = (a_1, \dots, a_n, \dots, a_p)$ e $\vec{b}_q = (b_1, \dots, b_m, \dots, b_q)$.

Vamos agora comparar a definição (2.60) com a equação (2.59). De imediato vemos que $x = \frac{\varepsilon_2}{\beta_1\beta_2\varepsilon_0}$. Além disso, notamos que na equação (2.59) não existe uma função gama cujo argumento tenha a variável s positiva, isto implica em $m = 0$. Da mesma forma temos duas funções gama onde aparecem s negativo no argumento, isso resulta em $n = 2$. A ausência de funções gama no denominador mostra que não existem índices entre a_n e a_p , ou seja, $n = p$ e $\vec{a}_p = (a_1, a_2)$. Pelo mesmo raciocínio temos que $m = p$ e $\vec{b}_q = 0$. Comparando os argumentos das funções gama vemos que $a_1 = -\beta_1 - 1$ e $a_2 = -\beta_2 - 1$. Agora temos todos os índices necessários para construir a função G de Meijer. Concluimos então que a distribuição $\rho_2(\varepsilon_2)$ pode ser escrita como

$$\rho_2(\varepsilon_2) = \int_0^\infty \rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)d\varepsilon_1 = \frac{1}{\beta_1\beta_2\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)\varepsilon_0} G_{2,0}^{0,2} \left(\begin{matrix} -\beta_1-1, -\beta_2-1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_1\beta_2\varepsilon_0} \right). \quad (2.61)$$

Dentre as inúmeras propriedades que a função G de Meijer possui existem algumas que serão úteis para darmos continuidade. São elas:

$$e^{-x} = G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| x \right) = G_{1,0}^{0,1} \left(\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right), \quad (2.62)$$

$$x^\rho G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| x \right) = G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} \vec{a}_p + \vec{\rho} \\ \vec{b}_q + \vec{\rho} \end{matrix} \middle| x \right), \quad (2.63)$$

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| \eta x \right) G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu} \left(\begin{matrix} \vec{c}_\sigma \\ \vec{d}_\tau \end{matrix} \middle| \xi x \right) dx = \frac{1}{\xi} G_{p+\tau, q+\sigma}^{m+\nu, n+\mu} \left(\begin{matrix} \vec{a}_n, -\vec{d}_\tau, \vec{a}_p \\ \vec{b}_m, -\vec{c}_\sigma, \vec{b}_q \end{matrix} \middle| \frac{\eta}{\xi} \right). \quad (2.64)$$

Assim como calculamos a distribuição $\rho(\varepsilon_2)$ podemos encontrar a distribuição para as demais variáveis, isso é mais prático de ser feito utilizando as propriedades acima das funções G.

Vamos, por exemplo, ver qual a distribuição da variável ε_3 . Pela equação (2.44) temos

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \int \int \rho(\varepsilon_3|\varepsilon_2)\rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)d\varepsilon_1d\varepsilon_2, \quad (2.65)$$

ou

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \int \rho(\varepsilon_3|\varepsilon_2) \left(\int \rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)d\varepsilon_1 \right) d\varepsilon_2, \quad (2.66)$$

onde o resultado da integração entre parêntesis é $\rho_2(\varepsilon_2)$. Utilizando das equações (2.42) e (2.61) obtemos

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \int_0^\infty \frac{(\beta_3\varepsilon_2)^{\beta_3+1}}{\Gamma(\beta_3+1)} \frac{\varepsilon_3^{-\beta_3-2} e^{-\frac{\beta_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}}{\beta_1\beta_2\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)\varepsilon_0} G_{2,0}^{0,2} \left(-\beta_1-1, -\beta_2-1 \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_1\beta_2\varepsilon_0} \right) d\varepsilon_2. \quad (2.67)$$

Essa integração é facilmente calculçada se conseguirmos modificá-la para que ela se torne o produto de duas funções G. Inicialmente, note que pelas propriedades (2.62) e (2.63)

$$\left(\frac{\beta_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right)^{\beta_3+1} e^{-\frac{\beta_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3}} = \left(\frac{\beta_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right)^{\beta_3+1} G_{0,1}^{1,0} \left(- \middle| \frac{\beta_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right) = G_{0,1}^{1,0} \left(-\beta_3+1 \middle| \frac{\beta_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right). \quad (2.68)$$

Substituindo o resultado acima na equação (2.67), resulta

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \frac{1}{\beta_1\beta_2\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)\Gamma(\beta_3+1)\varepsilon_0\varepsilon_3} \times \int_0^\infty G_{2,0}^{0,2} \left(-\beta_1-1, -\beta_2-1 \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_1\beta_2\varepsilon_0} \right) G_{0,1}^{1,0} \left(-\beta_3+1 \middle| \frac{\beta_3\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right) d\varepsilon_2. \quad (2.69)$$

Usando (2.64) com $\eta = \frac{1}{\beta_1\beta_2\varepsilon_0}$ e $\xi = \frac{\beta_3}{\varepsilon_3}$ chegamos em

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \frac{1}{\beta_1\beta_2\beta_3\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)\Gamma(\beta_3+1)\varepsilon_0} G_{3,0}^{0,3} \left(-\beta_1-1, -\beta_2-1, -\beta_3-1 \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_1\beta_2\beta_3\varepsilon_0} \right). \quad (2.70)$$

Note que esse processo pode ser repetido para as demais escalas. A única diferença é que aumentará o número de termos conforme se aumenta a escala. Finalmente, para uma escala arbitrária N , temos [13]:

$$\rho_N(\varepsilon_N) = \frac{1}{\varepsilon_0\omega\Gamma(\vec{\beta} + \vec{1})} G_{N,0}^{0,N} \left(-\vec{\beta} - \vec{1} \middle| \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_0\omega} \right), \quad (2.71)$$

onde

$$\omega = \prod_{i=0}^N \beta_i, \quad (2.72)$$

$$\Gamma(\vec{\beta} + \vec{1}) = \prod_{i=0}^N \Gamma(\beta_i + 1), \quad (2.73)$$

$$-\vec{\beta} - \vec{1} = (-\beta_1 - 1, -\beta_2 - 1, \dots, -\beta_N - 1). \quad (2.74)$$

2.3.2 Caso $s = 1/2$ (Modelo de Heston)

O procedimento que será realizado agora segue a mesma linha do que foi realizado na subseção anterior. De forma generalizada, para $s = 1/2$, a i -ésima equação diferencial estocástica é

$$d\varepsilon_i = -\gamma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})dt + \kappa_i \varepsilon_i^{1/2} \varepsilon_{i-1}^{1/2} dW_i. \quad (2.75)$$

Procederemos como no caso anterior: ε_{i-1} será mantido fixo e teremos um tempo tão longo que a distribuição será estacionária. A equação de Fokker-Planck associada a (2.75) é

$$\beta_i \partial_{\varepsilon_i} [(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \rho_i(\varepsilon_i)] + \partial_{\varepsilon_i}^2 [\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \rho_i(\varepsilon_i)] = 0, \quad (2.76)$$

onde β_i é dado em (2.29). Integrando uma vez a equação acima, temos

$$\beta_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \rho_i(\varepsilon_i) + \partial_{\varepsilon_i} [\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \rho_i(\varepsilon_i)] = 0. \quad (2.77)$$

Faremos agora uma mudança de variável $\tilde{\rho}_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i \rho_i(\varepsilon_i)$, donde segue que

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_i(\varepsilon_i)} \partial_{\varepsilon_i} \tilde{\rho}_i(\varepsilon_i) = -\frac{\beta_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{\varepsilon_i \varepsilon_{i-1}}. \quad (2.78)$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$\ln \tilde{\rho}_i(\varepsilon_i) = -\beta_i \int \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{\varepsilon_i \varepsilon_{i-1}} d\varepsilon_i + \tilde{C}, \quad (2.79)$$

e voltando para a distribuição anterior:

$$\rho_i(\varepsilon_i) = \frac{C}{\varepsilon_i \varepsilon_{i-1}} \exp \left[-\beta_i \int \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}{\varepsilon_i \varepsilon_{i-1}} d\varepsilon_i \right], \quad (2.80)$$

que após a integração resulta em

$$\rho_i(\varepsilon_i) = \frac{C}{\varepsilon_i \varepsilon_{i-1}} \exp \left[-\frac{\beta_i \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} + \beta_i \ln \varepsilon_i \right], \quad (2.81)$$

ou mais simplesmente

$$\rho_i(\varepsilon_i) = C \frac{\varepsilon_i^{\beta_i-1}}{\varepsilon_{i-1}} \exp \left[-\frac{\beta_i \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \right]. \quad (2.82)$$

Queremos que esta distribuição seja normalizada, ou seja,

$$\int_0^\infty \rho_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = \frac{C}{\varepsilon_{i-1}} \int_0^\infty \varepsilon_i^{\beta_i-1} \exp \left[-\frac{\beta_i \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \right] d\varepsilon_i = 1. \quad (2.83)$$

Fazendo $t = \frac{\beta_i \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}}$, $dt = \frac{\beta_i}{\varepsilon_{i-1}}$, temos

$$\frac{C}{\varepsilon_{i-1}} \left(\frac{\varepsilon_{i-1}}{\beta_i} \right)^{\beta_i-1} \left(\frac{\beta_i}{\varepsilon_{i-1}} \right)^{-1} \int_0^\infty t^{\beta_i-1} e^{-t} dt = 1. \quad (2.84)$$

Novamente aparece uma função gama e portanto

$$\frac{C}{\varepsilon_{i-1}} = \frac{(\beta_i/\varepsilon_{i-1})^{\beta_i}}{\Gamma(\beta_i)}. \quad (2.85)$$

A distribuição de probabilidade condicional normalizada é então dada por

$$\rho(\varepsilon_i|\varepsilon_{i-1}) = \frac{(\beta_i/\varepsilon_{i-1})^{\beta_i}}{\Gamma(\beta_i)} \varepsilon_i^{\beta_i-1} \exp \left[-\frac{\beta_i \varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} \right], \quad (2.86)$$

que é a distribuição gama.

Queremos novamente uma distribuição que leve em conta o fato de o sistema possuir várias dinâmicas com escalas bem separadas. De forma análoga ao modelo de Hull-White, vamos inicialmente considerar a distribuição para apenas duas escalas. Ao substituirmos a equação (2.86) na (2.47) temos

$$\rho_2(\varepsilon_2) = \frac{\beta_2^{\beta_2} \varepsilon_2^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} \frac{(\beta_1/\varepsilon_0)^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^\infty d\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-\beta_2} e^{-\beta_2 \varepsilon_2/\varepsilon_1} \varepsilon_1^{\beta_1-1} e^{-\beta_1 \varepsilon_1/\varepsilon_0}. \quad (2.87)$$

Faremos agora a transformada de Mellin sendo $\varepsilon_1 = x$, $g(x) = x^{-\beta_2} e^{-\beta_2 \varepsilon_2/x}$ e $f(x) = x^{\beta_1-1} e^{-\beta_1 x/\varepsilon_0}$. Novamente utilizando as propriedades das transformadas de Mellin, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ x^{-\beta_2} e^{-\beta_2 \varepsilon_2/x} \right\} (1-s) &= \mathcal{M} \left\{ x^{\beta_2} e^{-\beta_2 \varepsilon_2 x} \right\} (s-1) = \\ \mathcal{M} \left\{ e^{-\beta_2 \varepsilon_2 x} \right\} (\beta_2 - 1 + s) &= (\beta_2 \varepsilon_2)^{-(\beta_2-1+s)} \Gamma(\beta_2 - 1 + s). \end{aligned} \quad (2.88)$$

E também

$$\mathcal{M} \left\{ x^{\beta_1-1} e^{-\beta_1 x/\varepsilon_0} \right\} (s) = \mathcal{M} \left\{ e^{-\beta_1 x/\varepsilon_0} \right\} (\beta_1 - 1 + s) = \left(\frac{\beta_1}{\varepsilon_0} \right)^{-(\beta_1-1+s)} \Gamma(\beta_1 - 1 + s). \quad (2.89)$$

Usando a fórmula de Parseval junto com as duas transformadas de Mellin encontradas acima

em (2.87) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)d\varepsilon_1 = \\ \frac{\beta_1\beta_2}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{\beta_1\beta_2\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right)^{-s} \Gamma(\beta_1-1+s)\Gamma(\beta_2-1+s)ds. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Queremos agora expressar essa integral como uma função G de Meijer. Comparando a integral acima com (2.60) vemos que $x = \frac{\beta_1\beta_2\varepsilon_2}{\varepsilon_0}$. Temos apenas duas funções gama com argumentos contendo a variável s positiva e nenhuma função gama no denominador, isso resulta em $m = q = 2$ e $n = p = 0$, também temos que $\vec{a}_p = 0$, $b_1 = \beta_1 - 1$ e $\beta_2 = \beta_2 - 1$. Substituindo tudo isso, segue que

$$\rho_2(\varepsilon_2) = \int_0^\infty \rho(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\rho(\varepsilon_1|\varepsilon_0)d\varepsilon_1 = \frac{\beta_1\beta_2}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\varepsilon_0} G_{0,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} - \\ \beta_1-1, \beta_2-1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_1\beta_2\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right). \quad (2.91)$$

Queremos agora a distribuição da variável ε_3 . Substituindo o resultado acima na equação (2.66) temos

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \frac{\beta_1\beta_2}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\varepsilon_0} \frac{1}{\Gamma(\beta_3)} \int_0^\infty d\varepsilon_2 (\beta_3/\varepsilon_2)^{\beta_3} \varepsilon_3^{\beta_3-1} e^{-\beta_3\varepsilon_3/\varepsilon_2} G_{0,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} - \\ \beta_1-1, \beta_2-1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_1\beta_2\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right). \quad (2.92)$$

Observe agora as seguintes relações:

$$e^{-\beta_3\varepsilon_3/\varepsilon_2} = G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_3\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right) = G_{1,0}^{0,1} \left(\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_3\varepsilon_3} \right), \quad (2.93)$$

$$\left(\frac{\beta_3\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right)^{\beta_3} e^{-\beta_3\varepsilon_3/\varepsilon_2} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\beta_3\varepsilon_3} \right)^{-\beta_3} G_{1,0}^{0,1} \left(\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_3\varepsilon_3} \right) = G_{1,0}^{0,1} \left(\begin{matrix} 1-\beta_3 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_3\varepsilon_3} \right), \quad (2.94)$$

Substituindo os resultados acima em (2.92), resulta

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \frac{\beta_1\beta_2}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3)\varepsilon_0\varepsilon_3} \int_0^\infty d\varepsilon_2 G_{1,0}^{0,1} \left(\begin{matrix} 1-\beta_3 \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_2}{\beta_3\varepsilon_3} \right) G_{0,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} - \\ \beta_1-1, \beta_2-1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_1\beta_2\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right). \quad (2.95)$$

Usando a propriedade (2.64) chegamos em

$$\rho_3(\varepsilon_3) = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3)\varepsilon_0} G_{0,3}^{3,0} \left(\begin{matrix} - \\ \beta_1-1, \beta_2-1, \beta_3-1 \end{matrix} \middle| \frac{\beta_1\beta_2\beta_3\varepsilon_3}{\varepsilon_0} \right) \quad (2.96)$$

Podemos notar novamente que surge um padrão e todas as escalas seguintes podem ser feitas

da mesma maneira. A distribuição de probabilidade para a camada N será da forma [13]

$$\rho_N(\varepsilon_N) = \frac{\omega}{\Gamma(\vec{\beta})_{\varepsilon_0}} G_{0,N}^{N,0} \left(\begin{matrix} - \\ \vec{\beta} - \vec{1} \end{matrix} \middle| \frac{\omega \varepsilon_N}{\varepsilon_0} \right), \quad (2.97)$$

Onde ω é definido por (2.72) e

$$\Gamma(\vec{\beta}) = \prod_{i=0}^N \Gamma(\beta_i), \quad (2.98)$$

$$\vec{\beta} - \vec{1} = (\beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \dots, \beta_N - 1). \quad (2.99)$$

O próximo modelo a ser discutido leva em conta a possibilidade de as variáveis ε_i terem um limite superior e inferior (classe beta) ou um limite inferior maior que zero (classe beta inversa).

2.3.3 Classe Beta

Nesta seção vamos considerar o caso em que ε é positiva, mas limitada superiormente. Levando em conta que a variável ε_i pode estar limitada por cima, vamos tomar sem perda de generalidade esse limite superior como sendo 1. Considere então a seguinte equação diferencial estocástica:

$$d\varepsilon = -\gamma(\varepsilon - \bar{\varepsilon})dt + \kappa\sqrt{\varepsilon|1 - \varepsilon|}dW, \quad (2.100)$$

onde $0 < \varepsilon < 1$ e $\bar{\varepsilon}$ é uma constante com $0 < \bar{\varepsilon} < 1$. Novamente queremos soluções estacionárias. Dessa forma a equação estacionária de Fokker-Planck associada a (2.100) é

$$\beta \partial_\varepsilon [(\varepsilon - \bar{\varepsilon})\rho(\varepsilon)] + \partial_\varepsilon^2 [\varepsilon(1 - \varepsilon)\rho(\varepsilon)] = 0, \quad (2.101)$$

onde β é dado por (2.29). Integrando uma vez a equação acima, temos

$$\beta(\varepsilon - \bar{\varepsilon})\rho(\varepsilon) + \partial_\varepsilon [\varepsilon(1 - \varepsilon)\rho(\varepsilon)] = 0. \quad (2.102)$$

Fazendo a substituição $\tilde{\rho}(\varepsilon) = \varepsilon(1 - \varepsilon)\rho(\varepsilon)$, temos

$$\partial_\varepsilon \tilde{\rho}(\varepsilon) = -\beta(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \frac{\tilde{\rho}(\varepsilon)}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}, \quad (2.103)$$

que resulta em

$$\tilde{\rho}(\varepsilon) = \varepsilon^{\beta\bar{\varepsilon}} (1 - \varepsilon)^{\beta(1-\bar{\varepsilon})}. \quad (2.104)$$

E a distribuição estacionária normalizada será

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \varepsilon^{\nu-1} (1 - \varepsilon)^{\mu-1}, \quad (2.105)$$

que é a distribuição beta com parâmetros

$$v = \beta \bar{\varepsilon}, \quad (2.106)$$

$$\mu = \beta(1 - \bar{\varepsilon}). \quad (2.107)$$

2.3.4 Classe Beta Inversa

Agora vamos considerar o caso em que a variável tem um limite inferior maior que zero, ou seja, ε está sempre acima de um valor mínimo, que será tomado como 1. Para fazermos isso precisamos de uma equação diferente. Considere a equação diferencial estocástica

$$d\varepsilon = -\gamma\varepsilon(\varepsilon - \bar{\varepsilon})dt + \kappa\varepsilon\sqrt{\varepsilon - 1}dW, \quad (2.108)$$

onde $\varepsilon > 1$ e $\bar{\varepsilon} > 1$. A equação estacionária de Fokker-Planck associada a equação acima é

$$\beta\partial_\varepsilon[(\varepsilon - \bar{\varepsilon})\rho(\varepsilon)] + \partial_\varepsilon^2[\varepsilon^2(\varepsilon - 1)\rho(\varepsilon)] = 0, \quad (2.109)$$

com β dado por (2.29). Faremos uma substituição de variáveis tal que $\tilde{\rho}(\varepsilon) = \varepsilon^2(\varepsilon - 1)\rho(\varepsilon)$ e isto resulta em

$$\partial_\varepsilon\tilde{\rho}(\varepsilon) = -\beta(\varepsilon - \bar{\varepsilon})\frac{\tilde{\rho}(\varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon - 1)}, \quad (2.110)$$

que resulta em

$$\tilde{\rho}(\varepsilon) = (\varepsilon - 1)^{\beta(\bar{\varepsilon}-1)}\varepsilon^{-\beta\bar{\varepsilon}}. \quad (2.111)$$

E a distribuição estacionária normalizada é

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\bar{v} + \bar{\mu})}{\Gamma(\bar{v})\Gamma(\bar{\mu})}\varepsilon^{-\bar{v}-1}(1 - \varepsilon^{-1})^{\bar{\mu}-1}, \quad (2.112)$$

onde

$$\bar{v} = \beta + 2, \quad (2.113)$$

$$\bar{\mu} = \beta(\bar{\varepsilon} - 1). \quad (2.114)$$

É possível gerar distribuições hierárquicas, isto é, com N escalas, para as famílias de distribuições das classes beta e beta inversa. Entretanto, para nossos propósitos aqui, consideraremos apenas o caso $N = 1$ para essas duas classes de distribuições. A continuação desse trabalho será testar qual dessas classes melhor se encaixa para uma descrição da densidade espectral de sistemas hierárquicos, o que será feito no próximo capítulo.

3 Densidade espectral de sistemas hierárquicos

Uma vez que já foram apresentados alguns modelos hierárquicos e que já obtivemos suas respectivas distribuições de probabilidades, vamos agora dar um passo adiante. Queremos calcular a densidade espectral associada a cada um deles.

Para fazermos isso, vamos considerar sistemas que evoluem no tempo através de uma sequência de pulsos de relaxação exponencial em que a taxa de decaimento λ é uma variável aleatória que possui uma dinâmica hierárquica descrita pelos modelos apresentados no capítulo 2. Por conveniência, introduziremos uma outra variável, $\varepsilon = \lambda^2$, a qual permite um melhor desenvolvimento dos procedimentos que serão realizados.

Ao longo deste capítulo, também será exposta uma forma alternativa de olharmos para esse problema. Serão apresentados dois modelos que dizem respeito a processos de Ornstein-Uhlenbeck duplamente hierárquicos. Faremos o desenvolvimento dessa parte com o auxílio da função H de Fox. O objetivo será mostrar a densidade espectral para esses dois casos.

Por fim, será feita uma análise que compara os resultados calculados da densidade espectral com a densidade espectral experimental obtida de um experimento de invasão de meios porosos. O propósito será calcular, através do método de mínimos quadrados, quais os melhores valores dos parâmetros que fazem a curva teórica mais se aproximar dos valores empíricos.

3.1 Densidade Espectral Hierárquica: Introdução

No capítulo 2 calculamos qual o valor da densidade espectral para uma série de relaxamentos exponenciais. Essa densidade espectral estava condicionada a duas variáveis, a frequência f e a taxa de decaimento λ . Vamos agora assumir que essa segunda variável também seja uma variável aleatória. Como vimos em (2.11), $S(f|\lambda)$ é dada por

$$S(f|\lambda) = \frac{A^2 r}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}. \quad (3.1)$$

Uma vez que temos a distribuição de probabilidade condicional $S(f|\lambda)$, podemos encontrar a distribuição de probabilidade $S(f)$, porém para fazermos isso é preciso saber qual a distribuição de probabilidade $p(\lambda)$ da taxa de decaimento. Também precisamos assumir que existam duas escalas de tempo bem separadas no sistema. Assumindo isso, temos para a densidade espectral:

$$S(f) = \int_0^\infty S(f|\lambda) p(\lambda) d\lambda. \quad (3.2)$$

Para darmos continuidade será feita uma substituição de variável oportuna tal que $\lambda^2 = \varepsilon$, isto implica em $d\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}d\varepsilon$ e assim a densidade de probabilidade condicional é agora

descrita por

$$S(f|\varepsilon) = \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2}. \quad (3.3)$$

Mais adiante ficará claro o porquê dessa mudança ter sido feita. Esta nova grandeza ε também é uma variável aleatória e possui uma função densidade de probabilidade $p(\varepsilon)$. A integral (3.2) se torna

$$S(f) = \int_0^\infty S(f|\varepsilon) p(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon^{1/2}}. \quad (3.4)$$

Nas próximas seções vamos considerar os diferentes modelos hierárquicos para $p(\varepsilon)$ discutidos no capítulo 2. Para cada um deles vamos calcular a densidade espectral $S(f)$ que resulta da integral (3.4).

3.2 Densidade Espectral Hierárquica: Classe Gama

3.2.1 Caso $N = 1$

Nesta seção vamos admitir que a variável ε tenha uma dinâmica descrita pelo modelo de Heston para $N=1$. Neste caso a distribuição de probabilidade será dada por (2.86) com $i = 1$ (ε_0 mantido fixo):

$$p(\varepsilon) = \frac{(\beta_1/\varepsilon_0)^2}{\Gamma(\beta_1)} \varepsilon^{\beta_1-1} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon}{\varepsilon_0}\right). \quad (3.5)$$

Substituindo (3.3) e (3.5) na integral (3.4), a expressão resultante fica da seguinte forma:

$$S(f) = \int_0^\infty \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} \frac{(\beta_1/\varepsilon_0)^2}{\Gamma(\beta_1)} \varepsilon^{\beta_1-1} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon^{1/2}}. \quad (3.6)$$

Ao tirarmos da integral os termos que não dependem de ε , ela assume a seguinte estrutura:

$$S(f) = \frac{A^2 r (\beta_1/\varepsilon_0)^{\beta_1}}{2\Gamma(\beta_1)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\beta_1-3/2} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} d\varepsilon. \quad (3.7)$$

Esta integral pode ser feita exatamente a partir do seguinte resultado [17]:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} e^{-\mu x}}{x + \beta} dx = \beta^{\mu-1} e^{\beta\mu} \Gamma(\nu) \Gamma(1-\mu, \beta\mu), \quad (3.8)$$

onde $\Gamma(1-\mu, \beta\mu)$ é a função gama incompleta superior, a qual é definida como

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (3.9)$$

Comparando as equações (3.7) e (3.8) podemos fazer as seguintes associações: $\beta = 4\pi^2 f^2$, $\nu - 1 = \beta_1 - 3/2$ e $\mu = \beta_1/\varepsilon_0$, resultando em

$$S(f) = J_1(4\pi^2 f^2)^{\beta_1-3/2} \exp\left(\frac{4\pi^2 f^2 \beta_1}{\varepsilon_0}\right) \Gamma\left(3/2 - \beta_1, \frac{4\pi^2 f^2 \beta_1}{\varepsilon_0}\right), \quad (3.10)$$

onde

$$J_1 = \frac{A^2 r (\beta_1/\varepsilon_0)^{\beta_1}}{2\Gamma(\beta_1)} \Gamma(\beta_1 - 1/2). \quad (3.11)$$

3.2.2 Caso Geral ($N > 1$)

Agora vamos considerar o caso em que o sistema a ser estudado possua múltiplas escalas. Uma vez que sabemos qual a função densidade de probabilidade para o modelo de Heston multiescala, podemos calcular a densidade espectral multiescala de forma análoga à seção anterior. A diferença é basicamente o fato de que será usado o formalismo das funções G de Meijer.

Para darmos continuidade, é necessário escrevermos a equação (3.3) como uma função G. Isso será feito através do uso da seguinte propriedade:

$$(1+x)^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 1-a \\ 0 \end{matrix} \middle| x \right). \quad (3.12)$$

A equação (3.3) pode ser reescrita como

$$S(f|\varepsilon) = \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} = \frac{A^2 r}{4\pi^2 f^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2}} \right), \quad (3.13)$$

ao compararmos o termo entre parêntesis com a equação (3.12), vemos que para $a = 1$ e $x = \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2}$ a distribuição de probabilidade conjunta será dada por

$$S(f|\varepsilon) = \frac{A^2 r}{4\pi^2 f^2} G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right). \quad (3.14)$$

Agora precisaremos da distribuição da variável ε . Essa distribuição de probabilidade já foi calculada; para o caso do modelo de Heston de N escalas ela é dada por (2.97), que repetimos aqui por conveniência

$$p_N(\varepsilon_N) = \frac{\omega}{\varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta})} G_{0,N}^{N,0} \left(\begin{matrix} - \\ \vec{\beta}-\vec{1} \end{matrix} \middle| \frac{\omega \varepsilon_N}{\varepsilon_0} \right). \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) e (3.14) na equação (3.4), temos

$$S(f) = \frac{A^2 r \omega}{4\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta})} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right) G_{0,N}^{N,0} \left(\begin{matrix} - \\ \vec{\beta}-\vec{1} \end{matrix} \middle| \frac{\omega \varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon^{1/2}}. \quad (3.16)$$

A equação acima pode ser rearranjada de forma que fique mais evidente como usar as propriedades das funções G de Meijer. Rearrmando os termos, podemos reescrever (3.16) na forma

$$S(f) = \frac{A^2 r \omega}{8\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta})} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left(0 \left| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right. \right) \varepsilon^{-1/2} (\omega/\varepsilon)^{1/2} (\omega/\varepsilon)^{-1/2} G_{0,N}^{N,0} \left(\frac{-}{\vec{\beta}-\vec{1}} \left| \frac{\omega \varepsilon}{\varepsilon_0} \right. \right) d\varepsilon, \quad (3.17)$$

e utilizando da propriedade (2.63) obtemos

$$S(f) = \frac{A^2 r \omega}{8\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta})} (\omega/\varepsilon)^{1/2} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left(0 \left| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right. \right) G_{0,N}^{N,0} \left(\frac{-}{\vec{\beta}-\frac{\vec{3}}{2}} \left| \frac{\omega \varepsilon}{\varepsilon_0} \right. \right) d\varepsilon. \quad (3.18)$$

Fazendo agora uso da propriedade (2.64) de integração de duas funções G's (2.64), temos

$$S(f) = \frac{A^2 r \omega}{8\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta})} (\omega/\varepsilon)^{1/2} (\varepsilon_0/\omega) G_{N+1,1}^{1,N+1} \left(0, \frac{\vec{3}}{2} - \vec{\beta} \left| \frac{\varepsilon_0}{4\pi^2 f^2 \omega} \right. \right). \quad (3.19)$$

Note que o termo $\frac{\varepsilon_0}{4\pi^2 f^2 \omega}$, que aparece no argumento da função G, também aparece antes da função:

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2\Gamma(\vec{\beta})} (\omega/\varepsilon)^{3/2} \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi^2 f^2 \omega} \right) G_{N+1,1}^{1,N+1} \left(0, \frac{\vec{3}}{2} - \vec{\beta} \left| \frac{\varepsilon_0}{4\pi^2 f^2 \omega} \right. \right). \quad (3.20)$$

Utilizando (2.63) temos finalmente

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2\Gamma(\vec{\beta})} (\omega/\varepsilon)^{3/2} G_{N+1,1}^{1,N+1} \left(1, \frac{\vec{5}}{2} - \vec{\beta} \left| \frac{\varepsilon_0}{4\pi^2 f^2 \omega} \right. \right). \quad (3.21)$$

3.3 Densidade Espectral Hierárquica: Classe Gama Inversa

Vamos agora considerar o caso onde a variável ε tenha uma distribuição gama inversa. Começaremos inicialmente pelo caso $N = 1$ e depois partiremos para o caso geral ($N > 1$).

3.3.1 Caso $N = 1$

Os cálculos a seguir são bem parecidos com o da subseção anterior. Isto se deve ao fato de a lógica por trás ser a mesma. Vamos calcular a função densidade espectral a partir da função densidade de probabilidade condicional $S(f|\varepsilon)$ e da distribuição $p(\varepsilon)$ da variável ε . A diferença agora é que esta última é uma distribuição gama inversa dada por (2.42) com $i = 1$:

$$p(\varepsilon) = \frac{(\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \varepsilon^{-\beta_1-2} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{\varepsilon}\right). \quad (3.22)$$

Sabendo disso, podemos substituir (3.3) e (3.22) na integral (3.4), o que resulta em

$$S(f) = \int_0^\infty \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} \frac{(\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \varepsilon^{-\beta_1-2} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} d\varepsilon. \quad (3.23)$$

Ao retirarmos da integral os termos que não dependem de ε , ela assume a seguinte forma:

$$S(f) = \frac{A^2 r (\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{2\Gamma(\beta_1+1)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-\beta_1-5/2} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} d\varepsilon. \quad (3.24)$$

Essa integral pode ser resolvida da mesma forma que a integral do caso da classe gama, mas para que isto fique evidente é preciso fazer uma substituição de variáveis. Ao fatorarmos o ε do denominador fica mais claro qual substituição deve ser feita. Assim temos

$$S(f) = \frac{A^2 r (\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{2\Gamma(\beta_1+1)} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon^{-\beta_1-5/2} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{\varepsilon}\right)}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\varepsilon}} d\varepsilon. \quad (3.25)$$

Este termo $\frac{1}{\varepsilon}$ pode ser incorporado ao numerador, resultando em

$$S(f) = \frac{A^2 r (\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{2\Gamma(\beta_1+1)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-\beta_1-7/2} \exp\left(-\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{\varepsilon}\right)}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\varepsilon}} d\varepsilon. \quad (3.26)$$

Faremos agora uma substituição de variáveis de forma que a integral assuma uma estrutura idêntica à integral (3.8). A substituição será $y = \frac{1}{\varepsilon}$, que implica em $d\varepsilon = -\frac{dy}{y^2}$. Fazendo isso, obtemos

$$S(f) = \frac{A^2 r (\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{2\Gamma(\beta_1+1)(4\pi^2 f^2)} \int_0^\infty \frac{y^{\beta_1+3/2} \exp(-\beta_1 \varepsilon_0 y)}{\frac{1}{4\pi^2 f^2} + y} dy. \quad (3.27)$$

Comparando com (3.8), nota-se que podemos identificar $\beta = (2\pi f)^{-2}$, $\nu - 1 = \beta_1 + 3/2$ e $\mu = \beta_1 \varepsilon_0$. Assim, a integral acima pode ser escrita como

$$S(f) = \frac{A^2 r (\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{2\Gamma(\beta_1+1)(2\pi f)^2} [(2\pi f)^{-2}]^{\beta_1+3/2} \exp\left[(2\pi f)^{-2} \beta_1 \varepsilon_0\right] \Gamma(\beta_1+5/2) \times \Gamma\left(-\frac{3}{2} - \beta_1, \frac{\beta_1 \varepsilon_0}{4\pi^2 f^2}\right). \quad (3.28)$$

E simplificando, temos

$$S(f) = \frac{J_2}{(2\pi f)^{2\beta_1+5}} \exp\left(\frac{\beta_1 \varepsilon_0}{4\pi^2 f^2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2} - \beta_1, \frac{\beta_1 \varepsilon_0}{4\pi^2 f^2}\right), \quad (3.29)$$

onde

$$J_2 = \frac{A^2 r (\beta_1 \varepsilon_0)^{\beta_1+1}}{2\Gamma(\beta_1+1)} \Gamma(\beta_1+5/2). \quad (3.30)$$

3.3.2 Caso Geral ($N>1$)

Partiremos agora para o caso multiescala, ou seja, $N > 1$. Abaixo mostramos as expressões para a densidade espectral condicional (3.14) e a distribuição de probabilidade multiescala para a classe gama inversa (2.71):

$$S(f|\varepsilon) = \frac{A^2 r}{4\pi^2 f^2} G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right)$$

e

$$p_N(\varepsilon_N) = \frac{1}{\varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta} + \vec{1}) \omega} G_{N,0}^{0,N} \left(\begin{matrix} -\vec{\beta} - \vec{1} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_0 \omega} \right).$$

Substituindo as expressões acima na integral (3.4), temos

$$S(f) = \frac{A^2 r}{8\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta} + \vec{1}) \omega} \int_0^\infty \varepsilon^{-1/2} G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right) G_{N,0}^{0,N} \left(\begin{matrix} -\vec{\beta} - \vec{1} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 \omega} \right) d\varepsilon. \quad (3.31)$$

Repetiremos um processo análogo ao que foi feito para o caso geral da classe gama, ou seja, utilizaremos as propriedades das funções G para que possamos resolver esta integral. Fazemos inicialmente

$$S(f) = \frac{A^2 r}{8\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta} + \vec{1}) \omega} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right) \varepsilon^{-1/2} (1/\varepsilon_0 \omega)^{-1/2} (1/\varepsilon_0 \omega)^{1/2} \times \\ G_{N,0}^{0,N} \left(\begin{matrix} -\vec{\beta} - \vec{1} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 \omega} \right) d\varepsilon, \quad (3.32)$$

que em vista da propriedade (2.63) pode ser reescrita como

$$S(f) = \frac{A^2 r (1/\varepsilon_0 \omega)^{1/2}}{8\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta} + \vec{1}) \omega} \int_0^\infty G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{4\pi^2 f^2} \right) G_{N,0}^{0,N} \left(\begin{matrix} -\vec{\beta} - \frac{\vec{1}}{2} \\ - \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 \omega} \right) d\varepsilon. \quad (3.33)$$

Integrando as duas G's obtemos

$$S(f) = \frac{A^2 r (1/\varepsilon_0 \omega)^{1/2}}{8\pi^2 f^2 \varepsilon_0 \Gamma(\vec{\beta} + \vec{1}) \omega} (\omega \varepsilon_0) G_{1,N+1}^{N+1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0, \vec{\beta} + \frac{\vec{3}}{2} \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_0 \omega}{4\pi^2 f^2} \right) \quad (3.34)$$

ou ainda

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2\Gamma(\vec{\beta} + \vec{1})} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon_0 \omega}{4\pi^2 f^2} G_{1,N+1}^{N+1,1} \left(\begin{matrix} 0 \\ 0, \vec{\beta} + \frac{\vec{3}}{2} \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_0 \omega}{4\pi^2 f^2} \right). \quad (3.35)$$

O termo $\frac{\varepsilon_0 \omega}{4\pi^2 f^2}$ pode ser inserido na função G através da propriedade (2.63), resultando na expressão final para $S(f)$:

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2\Gamma(\vec{\beta} + \vec{1})} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \right)^{1/2} G_{1,N+1}^{N+1,1} \left(\begin{matrix} 1 \\ 1, \vec{\beta} + \frac{\vec{3}}{2} \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon_0 \omega}{4\pi^2 f^2} \right). \quad (3.36)$$

3.4 Densidade Espectral Hierárquica: Classe Beta

Analisaremos nesta seção o caso em que a variável ε possua uma dinâmica hierárquica descrita pela classe beta. Para essa classe faremos apenas o caso $N=1$. Como veremos adiante esta classe não se mostrou adequada para descrever os dados experimentais de invasão de um meio poroso por um fluido. Contudo, vamos continuar investigando essa classe, mas restrito ao caso $N=1$. A densidade espectral condicional $S(f|\varepsilon)$ será dada pela equação (3.3) e $p(\varepsilon)$ é dada por (2.105), que reproduzimos abaixo:

$$S(f|\varepsilon) = \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2},$$

$$p(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{v-1} (1-\varepsilon)^{\mu-1}}{B(v, \mu)},$$

onde $B(v, \mu) = \frac{\Gamma(v)\Gamma(\mu)}{\Gamma(v+\mu)}$. Usando as funções acima a integral (3.4) ficará

$$S(f) = \int_0^1 \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} \frac{\varepsilon^{v-1} (1-\varepsilon)^{\mu-1}}{B(v, \mu)} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon^{1/2}}, \quad (3.37)$$

onde usamos que a variável ε está definida apenas no intervalo $0 < \varepsilon < 1$. A integral anterior, por sua vez, pode ser reorganizada da seguinte maneira:

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2B(v, \mu)} \int_0^1 \frac{\varepsilon^{v-\frac{3}{2}} (1-\varepsilon)^{\mu-1}}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} d\varepsilon. \quad (3.38)$$

Integrais desse tipo também possuem um resultado conhecido [17]:

$$\int_0^u x^{v'-1} (x + \alpha)^\lambda (u - x)^{\mu'-1} dx = \alpha^\lambda u^{\mu'+v'-1} B(\mu', v') {}_2F_1 \left(-\lambda, v'; \mu' + v'; -\frac{u}{\alpha} \right). \quad (3.39)$$

Nesse caso, comparando as equações (3.38) e (3.39) podemos notar que: $u = 1$, $v' = v - \frac{1}{2}$, $\mu' = \mu$ e $\alpha = 4\pi^2 f^2$. Substituindo esses valores, obtemos

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2B(v, \mu)} (4\pi^2 f^2)^{-1} (1)^{\mu+v-\frac{1}{2}-1} B(\mu, v - \frac{1}{2}) {}_2F_1 \left(-(-1), v - \frac{1}{2}; \mu + v - \frac{1}{2}; -\frac{1}{4\pi^2 f^2} \right). \quad (3.40)$$

Simplificando a equação acima, ela fica

$$S(f) = \frac{A^2 r}{8\pi^2 f^2} \frac{B(\mu, v - \frac{1}{2})}{B(v, \mu)} {}_2F_1 \left(1, v - \frac{1}{2}; \mu + v - \frac{1}{2}; -\frac{1}{4\pi^2 f^2} \right), \quad (3.41)$$

onde a função ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica.

3.5 Densidade Espectral Hierárquica: Classe Beta Inversa

Novamente faremos o cálculo da densidade espectral apenas para o caso $N = 1$. A densidade espectral condicional será dada pela equação (3.3) e a distribuição da variável ε pela (2.112):

$$S(f|\varepsilon) = \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2},$$

$$p(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{-\bar{v}-1} (1 - \varepsilon^{-1})^{\bar{\mu}-1}}{B(\bar{v}, \bar{\mu})}.$$

A densidade espectral torna-se

$$S(f) = \int_1^\infty \frac{A^2 r}{\varepsilon + 4\pi^2 f^2} \frac{\varepsilon^{-\bar{v}-1} (1 - \varepsilon^{-1})^{\bar{\mu}-1}}{B(\bar{v}, \bar{\mu})} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon^{1/2}}, \quad (3.42)$$

onde usamos que ε está definida no intervalo $1 < \varepsilon < \infty$. Reorganizando, temos

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2B(\bar{v}, \bar{\mu})} \int_1^\infty \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon^{-\bar{v}-3/2} (1 - \varepsilon^{-1})^{\bar{\mu}-1}}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\varepsilon}} d\varepsilon, \quad (3.43)$$

ou ainda

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2B(\bar{v}, \bar{\mu})} \int_1^\infty \frac{\varepsilon^{-\bar{v}-5/2} (1 - \varepsilon^{-1})^{\bar{\mu}-1}}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\varepsilon}} d\varepsilon. \quad (3.44)$$

Esta integral pode ser resolvida de forma análoga ao caso anterior, porém é preciso fazer uma substituição de variável antes, a saber, $\varepsilon = \frac{1}{y}$ e $d\varepsilon = -\frac{dy}{y^2}$, o que resulta em

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2B(\bar{v}, \bar{\mu})} \int_0^1 \frac{y^{\bar{v}+1/2} (1 - y)^{\bar{\mu}-1}}{1 + 4\pi^2 f^2 y} dy. \quad (3.45)$$

Fatorando o termo $4\pi^2 f^2$ do denominador resulta em

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2B(\bar{\nu}, \bar{\mu}) 4\pi^2 f^2} \int_0^1 \frac{y^{\bar{\nu}+1/2} (1-y)^{\bar{\mu}-1}}{\frac{1}{4\pi^2 f^2} + y} dy. \quad (3.46)$$

Agora a integral já possui uma estrutura igual à equação (3.39) e pode ser resolvida da mesma forma. Os parâmetros, obviamente, são diferentes e dados por $u = 1$, $\nu = \bar{\nu} + \frac{3}{2}$, $\mu = \bar{\mu}$, $\lambda = -1$ e $\alpha = (2\pi f)^{-2}$. Substituindo estes valores, a densidade espectral fica

$$S(f) = \frac{A^2 r}{2B(\bar{\nu}, \bar{\mu}) 4\pi^2 f^2} [(2\pi f)^{-2}]^{-1} (1)^{\bar{\mu} + \bar{\nu} + \frac{1}{2} - 1} B(\bar{\mu}, \bar{\nu} + \frac{3}{2}) \times {}_2F_1 \left(-(-1), \bar{\nu} + \frac{3}{2}; \bar{\mu} + \bar{\nu} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{(2\pi f)^{-2}} \right), \quad (3.47)$$

que após simplificações resulta

$$S(f) = \frac{A^2 r B(\bar{\mu}, \bar{\nu} + \frac{3}{2})}{2B(\bar{\nu}, \bar{\mu})} {}_2F_1 \left(1, \bar{\nu} + \frac{3}{2}; \bar{\mu} + \bar{\nu} + \frac{1}{2}, -4\pi^2 f^2 \right). \quad (3.48)$$

3.6 Processo de Ornstein-Uhlenbeck Hierárquico

Nos modelos apresentados anteriormente tínhamos uma densidade espectral condicional dada pela equação (3.3) que dependia da variável ε . Com isso fizemos testes para possíveis distribuições que essa variável podia ter e obtivemos as respectivas densidades espectrais. Partiremos agora para uma abordagem diferente, onde ao invés de considerarmos que a densidade espectral seja hierárquica, vamos considerar que um processo de Ornstein-Uhlenbeck seja hierárquico e com isso veremos qual sua densidade espectral. Nesse caso, vamos primeiro calcular a função de correlação do modelo, a partir da qual podemos obter a densidade espectral.

3.6.1 Função de Correlação e Densidade Espectral

Lembramos aqui que a densidade espectral, $S(\omega)$, pode ser calculada a partir da função de correlação, $C(\tau)$, através do teorema de Wiener-Khintchine [18]:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad (3.49)$$

onde a função de correlação $C(\tau)$ é definida por

$$C(\tau) \equiv \langle x(t_0 + \tau)x(t_0) \rangle. \quad (3.50)$$

Podemos ainda expressar a densidade espectral de uma forma diferente. Para um processo

que seja real e estacionário, temos que

$$C(\tau) = C(-\tau), \quad (3.51)$$

ou seja, a função de correlação é uma função par. Ao colocarmos a exponencial em termos de seno e cosseno, temos

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cos(\omega\tau)C(\tau) - i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \sin(\omega\tau)C(\tau). \quad (3.52)$$

Como a segunda integração é o produto de uma função par e uma ímpar em um intervalo simétrico ela é nula. Ficamos, portanto, com a primeira integração igual a

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau)C(\tau). \quad (3.53)$$

3.6.2 Processo de Ornstein-Uhlenbeck

O processo de Ornstein-Uhlenbeck é um tipo de processo estocástico bastante conhecido. Em geral pode-se dizer que esse processo trata de uma partícula que descreve um movimento browniano num meio em que há atrito. Ele apresenta como principal característica a tendência de retornar a um certo valor médio, de modo que a equação diferencial estocástica que o descreve é

$$dx = \theta(\mu - x)dt + \sigma dW_t, \quad (3.54)$$

onde μ é a média a qual a os valores de x vão se aproximando ao longo do tempo, θ diz respeito a velocidade com a qual essa aproximação ocorre, σ é a volatilidade e dW_t é um processo de Wiener.

Pode-se mostrar a partir da solução da equação de Fokker-Planck correspondente que a solução estacionária é dada por uma gaussiana

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\theta(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.55)$$

Nesta seção vamos considerar uma versão generalizada do processo de Ornstein-Uhlenbeck em que a média μ é nula, i.e., $\mu = 0$, e os parâmetros θ e σ passam a ter uma dinâmica estocástica, as quais podem ser da mesma forma que os modelos de Heston e Hull-White.

3.6.3 Processo de Ornstein-Uhlenbeck Duplamente Hierárquico tipo Gama

Inicialmente, considere um processo descrito pela seguinte equação:

$$dx = -\zeta x dt + \sqrt{2\zeta\epsilon} dW_1. \quad (3.56)$$

A equação acima diz respeito a um processo de Ornstein-Uhlenbeck cuja amplitude do ruído é $\sqrt{2\zeta\epsilon}$, a média é nula, $\mu = 0$, e parâmetro θ é representado pela variável ζ , $\theta = \zeta$. Vamos

agora considerar que as variáveis ζ e ε também sejam variáveis aleatórias tal como (2.75), ou seja,

$$d\zeta = -\tilde{\gamma}(\zeta - \zeta_0)dt + \tilde{\kappa}\sqrt{\zeta\zeta_0}dW_2, \quad (3.57)$$

$$d\varepsilon = -\gamma(\varepsilon - \varepsilon_0)dt + \kappa\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}dW_3, \quad (3.58)$$

onde ζ_0 e ε_0 são as respectivas médias das distribuições de probabilidade associadas aos processos estocásticos e W_2 e W_3 são movimentos brownianos independentes entre si e de W_1 . As respectivas soluções estacionárias das equações de Fokker-Planck correspondentes, de acordo com (3.55) e (2.86), são da forma

$$P(x|\zeta, \varepsilon) = P(x|\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}, \quad (3.59)$$

$$g(\zeta|\zeta_0) = \frac{(\tilde{\beta}/\zeta_0)^{\tilde{\beta}}}{\Gamma(\tilde{\beta})}\zeta^{\tilde{\beta}-1}e^{-\frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{2\tilde{\gamma}}{\tilde{\kappa}^2}, \quad (3.60)$$

$$f(\varepsilon|\varepsilon_0) = \frac{(\beta/\varepsilon_0)^\beta}{\Gamma(\beta)}\varepsilon^{\beta-1}e^{-\frac{\beta\varepsilon}{\varepsilon_0}}, \quad \beta = \frac{2\gamma}{\kappa^2}. \quad (3.61)$$

Com auxílio das equações acima podemos encontrar a função correlação $C(\tau)$ definida em (3.50):

$$C(\tau) = \langle x(t_0 + \tau)x(t_0) \rangle \equiv \int d\varepsilon d\zeta dx dx_0 x x_0 P(x, x_0; t_0 + \tau, t_0 | \zeta, \varepsilon) g(\zeta|\zeta_0) f(\varepsilon|\varepsilon_0). \quad (3.62)$$

Vamos usar o fato que

$$\int dx \int dx_0 x x_0 P(x, x_0; t_0 + \tau, t_0 | \zeta, \varepsilon) = \varepsilon e^{-\zeta\tau}, \quad (3.63)$$

ou seja,

$$C(\tau) = \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon e^{-\zeta\tau} g(\zeta|\zeta_0) f(\varepsilon|\varepsilon_0) = \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta\tau} g(\zeta|\zeta_0) \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon f(\varepsilon|\varepsilon_0). \quad (3.64)$$

A integral em $d\varepsilon$ é igual a ε_0 , pois ela corresponde ao valor esperado da distribuição $f(\varepsilon|\varepsilon_0)$. Isso resulta em

$$C(\tau) = \varepsilon_0 \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta\tau} g(\zeta|\zeta_0). \quad (3.65)$$

Lembramos que $g(\zeta|\zeta_0)$ é uma distribuição gama e que por comparação à equação (2.97) ela é dada por

$$g(\zeta|\zeta_0) = \frac{\tilde{\beta}}{\zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta})} G_{0,1}^{1,0} \left(\tilde{\beta}^{-1} \left| \frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0} \right. \right). \quad (3.66)$$

Para encontrarmos a densidade espectral vamos substituir a equação (3.66) na (3.65) e em seguida na (3.53). Isso resulta em

$$S(\omega) = 2 \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) \varepsilon_0 \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta\tau} \frac{\tilde{\beta}}{\zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta})} G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ \tilde{\beta}-1 \end{matrix} \middle| \frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0} \right), \quad (3.67)$$

ou

$$S(\omega) = \frac{2\varepsilon_0\tilde{\beta}}{\zeta_0\Gamma(\tilde{\beta})} \int_0^\infty d\zeta G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ \tilde{\beta}-1 \end{matrix} \middle| \frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0} \right) \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) e^{-\zeta\tau}. \quad (3.68)$$

Para a segunda integração, temos que

$$\int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) e^{-\zeta\tau} = \frac{\zeta}{\omega^2 + \zeta^2}, \quad (3.69)$$

ou seja,

$$S(\omega) = \frac{2\varepsilon_0\tilde{\beta}}{\zeta_0\Gamma(\tilde{\beta})} \int_0^\infty d\zeta G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ \tilde{\beta}-1 \end{matrix} \middle| \frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0} \right) \frac{\zeta}{\omega^2 + \zeta^2}. \quad (3.70)$$

Vamos resolver a integral acima com auxílio da função H de Fox, que é definida da forma abaixo:

$$H_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} (\vec{a}_p, \vec{A}_p) \\ (\vec{b}_q, \vec{B}_q) \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_L} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s)} x^{-s} ds. \quad (3.71)$$

Comparando a equação acima com (2.60) podemos notar que

$$H_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} (\vec{a}_p, 1) \\ (\vec{b}_q, 1) \end{matrix} \middle| x \right) = G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} \vec{a}_p \\ \vec{b}_q \end{matrix} \middle| x \right) \quad (3.72)$$

Com base nessa relação, vemos que

$$G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ \tilde{\beta}-1 \end{matrix} \middle| \frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0} \right) = H_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ (\tilde{\beta}-1, 1) \end{matrix} \middle| \frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0} \right). \quad (3.73)$$

Podemos também expressar o termo oriundo da equação (3.69) como uma função H de Fox. Para isso vamos lembrar da propriedade (3.12) da função G de Meijer:

$$(1+x)^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} G_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} 1-a \\ 0 \end{matrix} \middle| x \right).$$

Usando a identidade

$$\frac{\zeta}{\omega^2 + \zeta^2} = \frac{\zeta}{\omega^2} \left(1 + \frac{\zeta^2}{\omega^2} \right)^{-1} \quad (3.74)$$

e a propriedade (3.12) com o resultado acima, temos

$$\frac{\zeta}{\omega^2 + \zeta^2} = \frac{1}{\Gamma(a)} G_{1,1}^{1,1} \left(0 \middle| \frac{\zeta^2}{\omega^2} \right) = \frac{\zeta}{2\omega^2} H_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} (0, \frac{1}{2}) \\ (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \middle| \frac{\zeta}{\omega} \right) = \frac{1}{2\omega} H_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \middle| \frac{\zeta}{\omega} \right). \quad (3.75)$$

Substituindo os resultados obtidos em (3.73) e (3.75) na equação (3.70) temos

$$S(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \tilde{\beta}}{\zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta}) \omega} \int_0^\infty d\zeta H_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ (\tilde{\beta}-1, 1) \end{matrix} \middle| \frac{\tilde{\beta}\zeta}{\zeta_0} \right) H_{1,1}^{1,1} \left(\begin{matrix} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \middle| \frac{\zeta}{\omega} \right). \quad (3.76)$$

Para a integral de duas Funções de Fox, temos a seguinte propriedade:

$$\int_0^\infty dx H_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} (\vec{a}, \vec{A}) \\ (\vec{b}, \vec{B}) \end{matrix} \middle| \xi x \right) H_{t,s}^{s,t} \left(\begin{matrix} (\vec{c}, \vec{C}) \\ (\vec{d}, \vec{D}) \end{matrix} \middle| \eta x \right) = \eta^{-1} H_{n+s, m+t}^{m+t, n+s} \left(\begin{matrix} (\vec{1}-\vec{d}-\vec{D}, \vec{D}) (\vec{a}, \vec{A}) \\ (\vec{b}, \vec{B}) (\vec{1}-\vec{c}-\vec{C}, \vec{C}) \end{matrix} \middle| \frac{\xi}{\eta} \right). \quad (3.77)$$

Desta forma, a densidade espectral para o modelo de Ornstein-Uhlenbeck da classe gama é da seguinte forma:

$$S(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \tilde{\beta}}{\zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta})} H_{1,2}^{2,1} \left(\begin{matrix} (0, \frac{1}{2}) \\ (\tilde{\beta}-1, 1) (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \middle| \frac{\tilde{\beta}\omega}{\zeta_0} \right). \quad (3.78)$$

3.6.4 Processo de Ornstein-Uhlenbeck Duplamente Hierárquico tipo Gama Inversa

Vamos agora considerar um processo de Ornstein-Uhlenbeck, tal como (3.56), mas dessa vez as variáveis ε e ζ são variáveis aleatórias com equação diferencial estocástica da classe gama inversa, como em (2.22), ou seja:

$$d\zeta = -\tilde{\gamma}(\zeta - \zeta_0)dt + \tilde{\kappa}\zeta dW_2, \quad (3.79)$$

$$d\varepsilon = -\gamma(\varepsilon - \varepsilon_0)dt + \kappa\varepsilon dW_3. \quad (3.80)$$

Neste caso, as soluções estacionárias serão, respectivamente

$$g(\zeta|\zeta_0) = \frac{(\tilde{\beta}\zeta_0)^{\tilde{\beta}+1}}{\Gamma(\tilde{\beta}+1)} \zeta^{-\tilde{\beta}-2} e^{-\frac{\tilde{\beta}\zeta_0}{\zeta}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{2\tilde{\gamma}}{\tilde{\kappa}^2} \quad (3.81)$$

$$f(\varepsilon|\varepsilon_0) = \frac{(\beta\varepsilon_0)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} \varepsilon^{-\beta-2} e^{-\frac{\beta\varepsilon_0}{\varepsilon}}, \quad \beta = \frac{2\gamma}{\kappa^2} \quad (3.82)$$

Iremos agora encontrar a função de correlação $C(\tau)$ com auxílio das equações acima, de forma análoga ao que foi feito anteriormente. Temos inicialmente, de acordo com (3.65), que

$$C(\tau) = \varepsilon_0 \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta\tau} g(\zeta|\zeta_0). \quad (3.83)$$

Comparando (3.81) com a equação (2.71), temos

$$g(\zeta|\zeta_0) = \frac{\tilde{\beta}^{-1}}{\zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta} + 1)} G_{1,0}^{0,1} \left(-\tilde{\beta} - 1 \left| \frac{\zeta}{\tilde{\beta} \zeta_0} \right. \right). \quad (3.84)$$

Para encontrarmos a função espectral vamos substituir (3.84) na (3.83) e depois na (3.53). Isso resulta em

$$S(\omega) = \frac{2\varepsilon_0}{\tilde{\beta} \zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta} + 1)} \int_0^\infty d\zeta G_{1,0}^{0,1} \left(-\tilde{\beta} - 1 \left| \frac{\zeta}{\tilde{\beta} \zeta_0} \right. \right) \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) e^{-\zeta\tau}. \quad (3.85)$$

A segunda integral é novamente dada pela equação (3.69), assim temos

$$S(\omega) = \frac{2\varepsilon_0}{\tilde{\beta} \zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta} + 1)} \int_0^\infty d\zeta G_{1,0}^{0,1} \left(-\tilde{\beta} - 1 \left| \frac{\zeta}{\tilde{\beta} \zeta_0} \right. \right) \frac{\zeta}{\omega^2 + \zeta^2}. \quad (3.86)$$

Novamente usaremos das funções H de Fox para prosseguirmos na resolução do problema. Usando da relação (3.72), temos que

$$G_{1,0}^{0,1} \left(-\tilde{\beta} - 1 \left| \frac{\zeta}{\tilde{\beta} \zeta_0} \right. \right) = H_{1,0}^{0,1} \left((-\tilde{\beta} - 1, 1) \left| \frac{\zeta}{\tilde{\beta} \zeta_0} \right. \right). \quad (3.87)$$

Utilizando o resultado acima juntamente com a equação (3.75) e os substituindo na equação (3.86), temos

$$S(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\tilde{\beta} \zeta_0 \Gamma(\tilde{\beta} + 1) \omega} \int_0^\infty d\zeta H_{1,0}^{0,1} \left((-\tilde{\beta} - 1, 1) \left| \frac{\zeta}{\tilde{\beta} \zeta_0} \right. \right) H_{1,1}^{1,1} \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \left| \frac{\zeta}{\omega} \right. \right). \quad (3.88)$$

Pela integral (3.77) temos que a função espectral em sua forma final fica

$$S(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\zeta_0 \tilde{\beta} \Gamma(\tilde{\beta} + 1)} H_{2,1}^{1,2} \left(\begin{matrix} (0, \frac{1}{2}) & (-\tilde{\beta} - 1, 1) \\ & (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \left| \frac{\omega}{\tilde{\beta} \zeta_0} \right. \right). \quad (3.89)$$

3.7 Análise de Dados

3.7.1 Descrição do experimento

Os dados que serão analisados dizem respeito à dinâmica de um fluido em um meio poroso [10]. Esse tipo de sistema possui uma dinâmica intermitente caracterizada por longos períodos de estagnação, seguido por curtos períodos de atividade. Nesse caso, o fenômeno de intermitência é oriundo de uma pressão externa imposta, em interação com a resistência devido aos poros. A figura 3.1 é uma representação esquemática do aparato. A rede de poros é formada por pequenas bolas de vidro aleatoriamente dispostas na placa e com diâmetro que varia entre

1mm e 1.2mm. Existe uma almofada pressurizada que pressiona as bolinhas contra a parte superior, isso assegura que as posições delas sejam mantidas fixas. As medidas das pressões são realizadas na saída do líquido, depois do filtro. O sensor registra a diferença entre a pressão do ar e a pressão do líquido na saída. A parte dos poros estava inicialmente preenchida com um líquido que era uma mistura de glicerol e água.

Os dados que serão analisados dizem respeito a uma pressão imposta controlada (CIP) da sigla em inglês "controlled imposed pressure". A pressão imposta é dita ser controlada pois existe um mecanismo que regula a pressão, diminuindo-a lentamente, fazendo com que o líquido seja deslocado.

A figura 3.2 mostra como a pressão medida pelo sensor varia com o tempo. O sensor mediu a pressão desde o início do experimento, mesmo antes de haver invasão do meio poroso pelo líquido. A parte inicial da figura acima diz respeito ao fato de a pressão no líquido estar sendo diminuída; o fato de a pressão atmosférica ser constante implica nesse aumento dos valores medidos pelo sensor para a diferença de pressão. A invasão começa a ocorrer por volta dos 400Pa. Ao ampliarmos a imagem na região de invasão, obtemos a figura 3.3 abaixo

Na figura 3.3 vemos que ocorrem quedas rápidas dos valores da pressão, seguidas por relaxamentos aproximadamente exponenciais. Essas quedas rápidas acontecem conforme o líquido é deslocado; já a fase de relaxamento diz respeito a interface líquido-ar se ajustando aos poros disponíveis. Agora que sabemos como é o experimento, vamos partir para a análise dos dados coletados pelo sensor. Não serão usados todos os pontos, mas apenas aqueles que dizem respeito ao processo de invasão propriamente dito.

3.7.2 Comparação dos Dados com a Teoria

Uma vez que temos em mãos os modelos teóricos para a densidade espectral e os dados obtidos através do experimento descrito acima, resta-nos comparar qual modelo melhor se encaixa na situação real. O cálculo da densidade espectral dos dados e os ajustes para obtermos as me-

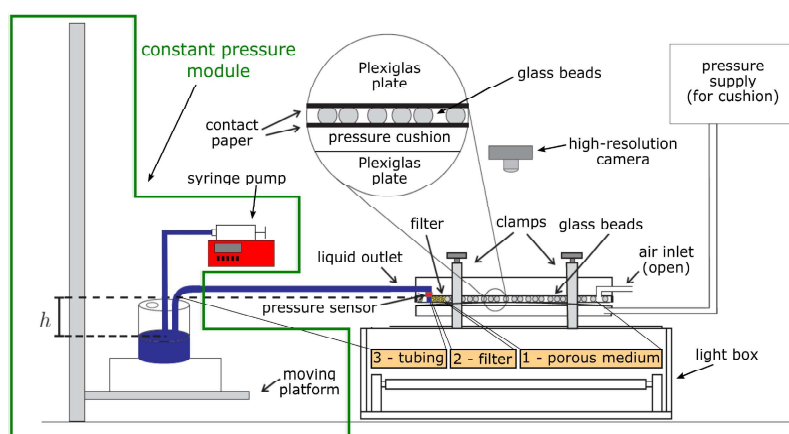


Figura 3 - Representação do aparato experimental analisado nesta dissertação. A pressão é controladamente reduzida de forma que o ar empurra o líquido da direita para a esquerda. Figura retirada de [10].

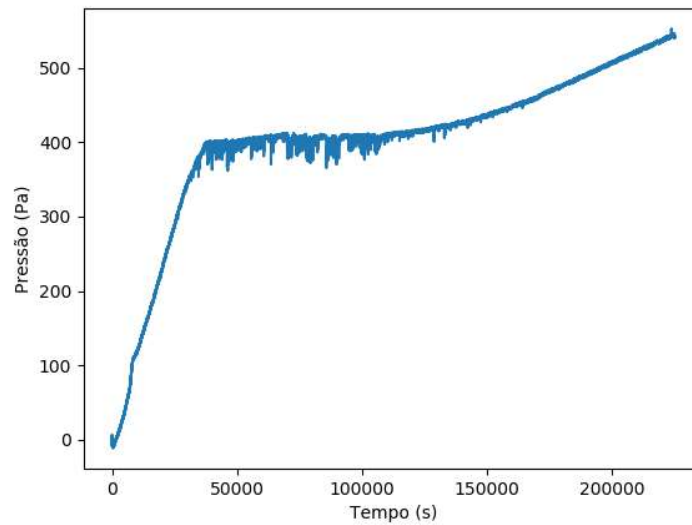


Figura 4 - Pressão medida pelo sensor na saída. Figura gerada a partir dos dados medidos em [10].

lhores curvas foram feitos por meio de programação em Python. Os dados que serão analisados a seguir dizem respeito ao experimento CIP. Através do método de Welch podemos calcular a seguinte densidade espectral $S(f)$ a partir da série temporal das pressões, cujo resultado está mostrado na figura 3.4

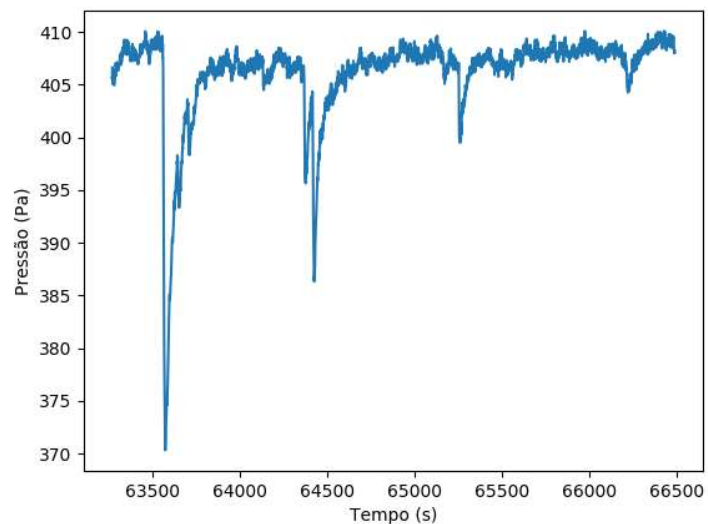


Figura 5 - Visão ampliada da região de invasão. Figura gerada a partir dos dados medidos em [10].

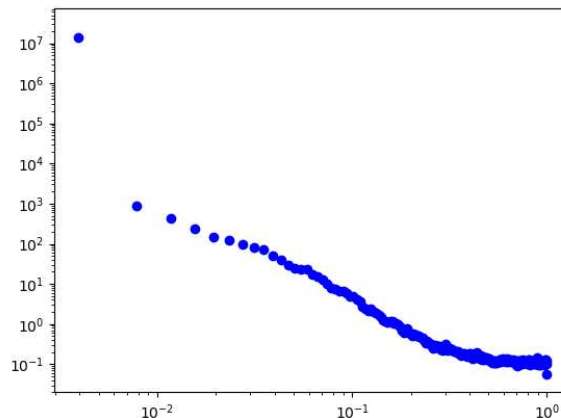


Figura 6 - Densidade Espectral do experimento CIP

O primeiro ponto na figura 3.4 que fica afastado dos outros nos diz que a pressão teve que ser aumentada para que o líquido pudesse invadir os caminhos mais estreitos, ou seja, ele não necessariamente diz respeito a um escoamento. Por conta disso, esse ponto não será levado em conta para o ajuste da melhor curva. Vamos agora comparar os diferentes modelos discutidos nas seções 3.2 - 3.6 com os dados acima. Para cada um desses modelos, faremos um ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, da fórmula teórica para $S(f)$ com a densidade espectral experimental mostrada na figura 3.4.

3.7.3 Modelos de uma Escala ($N=1$)

Nesta seção vamos analisar, por conveniência, apenas os modelos com uma escala hierárquica, ou seja, $N = 1$ (Modelos com $N > 1$ serão discutidos na seção seguinte). Inicialmente vamos considerar a classe gama para $N = 1$. Fazendo o ajuste pelo método dos mínimos quadrados da expressão (3.10) para $S(f)$ dos dados experimentais, obtemos a curva mostrada na figura 3.5.

Nessa figura vemos que a densidade espectral empírica (pontos vermelhos) vai ficando plana para altas frequências. Entretanto a contribuição dessa parte é tão pequena comparada aos demais pontos que desconsiderá-la do ajuste não causa uma diferença significativa dos valores obtidos para os parâmetros. Nota-se que a curva teórica fica em bom acordo com os pontos até uma frequência de 10^{-1} Hz , depois disso a curva acaba se distanciando um pouco dos pontos. Em valores aproximados, vemos que $\beta_1 \approx 0.6$, $\varepsilon_0 \approx 2$ e $A^2 r \approx 1.7$.

Partiremos agora para o caso da densidade espectral cuja a variável ε possui uma distribuição de probabilidade gama inversa. O ajuste do modelo (3.29) aos dados está mostrado na figura 3.6. Pela figura acima podemos ver que até 10^{-1} Hz a curva teórica ainda fica em bom acordo com os pontos. Mas para maiores frequências o ajuste não é tão bom. Note ainda que essa curva fica mais próxima dos pontos, ou seja, dá um ajuste levemente melhor, do que no caso anterior (distribuição gama). Os valores dos parâmetros são menores do que no caso anterior,

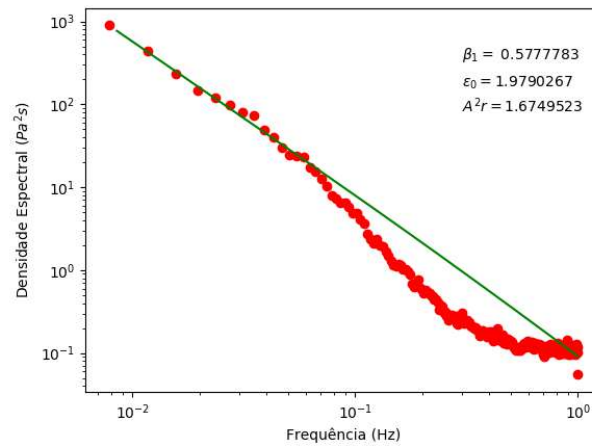


Figura 7 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.10) referente à classe gama com $N = 1$. No canto superior direito da imagem vemos os melhores valores para os parâmetros β_1, ε_0 e A^2r .

vemos que $\beta_1 \approx 0.2$, $\varepsilon_0 \approx 0.002$ e $A^2r \approx 0.1$.

Partiremos agora para as classes beta. Vamos começar pelo ajuste da densidade espectral para a distribuição beta, expressão (3.41), cujo resultado é mostrado na figura 3.7. Essa figura mostra que a classe beta também é uma candidata para descrever o sistema. Para baixas frequências a curva não fica tão próxima quanto as duas classes anteriores, porém para frequências maiores que 10^{-1} Hz ela fica mais perto dos pontos (comparando com as outras classes já vistas). Em valores aproximados temos que $\nu \approx 0.5$, $\mu \approx 0.4$ e $A^2r \approx 0.04$.

O ajuste para a classe beta inversa, usando a expressão (3.48), está na figura 3.8. Pela figura

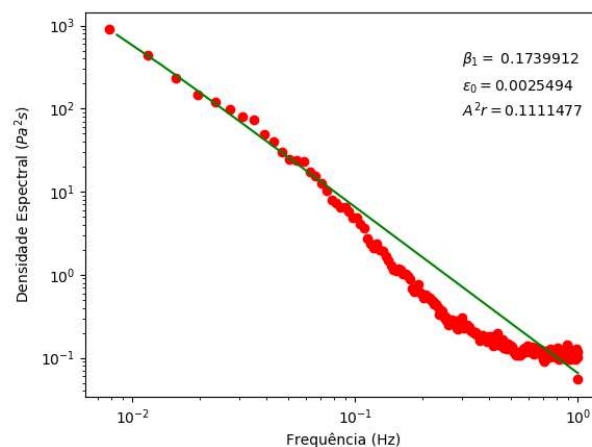


Figura 8 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.29) referente à classe gama inversa com $N = 1$.

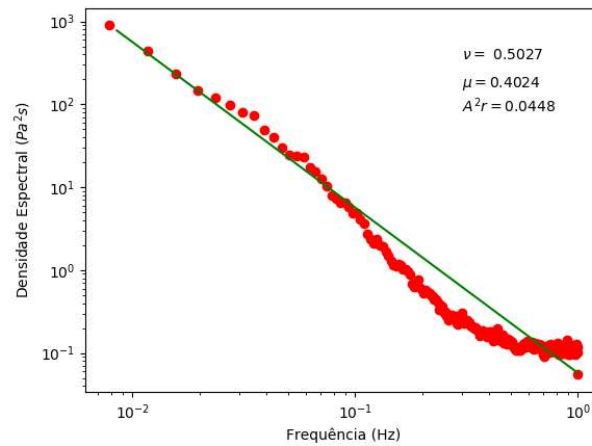


Figura 9 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.41) referente à classe beta com $N = 1$. Nesse caso os parâmetros são ν , μ e A^2r .

vemos que a classe beta inversa não é uma boa candidata, aparecem até valores negativos para os parâmetros. Isso ocorre porque essa distribuição possui uma estrutura bem diferente dos pontos que ajustamos. Para baixas frequências ela fica uma linha horizontal que rapidamente decresce ao aumentarmos a frequência e, como vemos, os dados não são assim.

Vamos agora mostrar que existe uma leve diferença entre as curvas. A figura 3.9 mostra que os resultados obtidos para as classes gama e gama inversa são distintos do caso uniforme (dado pela equação 2.14).

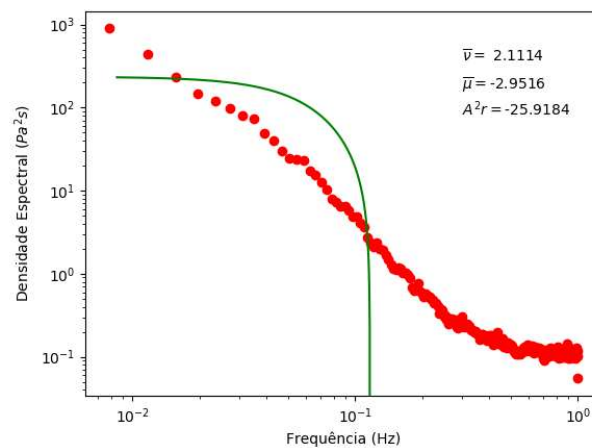


Figura 10- Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.48) referente à classe beta inversa com $N = 1$. Nesse caso os parâmetros são $\bar{\nu}$, $\bar{\mu}$ e A^2r .

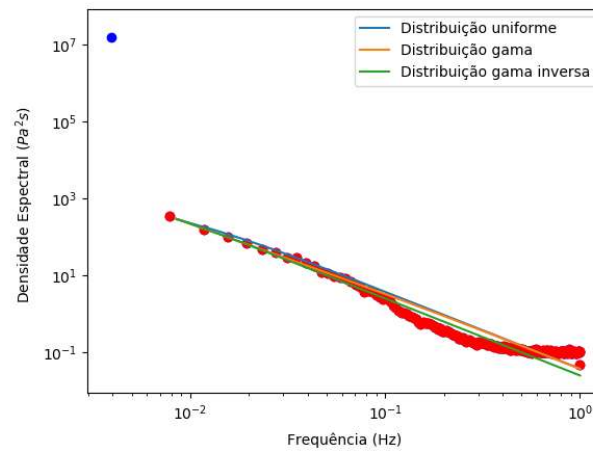


Figura 11 - Comparação entre os ajustes das classes gama, gama inversa e da distribuição uniforme. A densidade espectral utilizando a distribuição uniforme é dada pela equação 2.14

3.7.4 Modelos Multiescala ($N > 1$)

Partiremos agora para os modelos multiescalas ($N > 1$), começando com a classe gama.

A figura 3.10 mostra os diferentes ajustes para diferentes valores de N dentro da classe gama; vide equação (3.21). Nota-se que não há uma diferença expressiva entre elas. Para baixas frequências elas estão praticamente sobrepostas e para frequências maiores elas se diferenciam um pouco mais, mas ainda permanecem muito próximas. Isso acontece por que as funções G de Meijer mudam bastante de forma de acordo com o valor de seus parâmetros, assim a

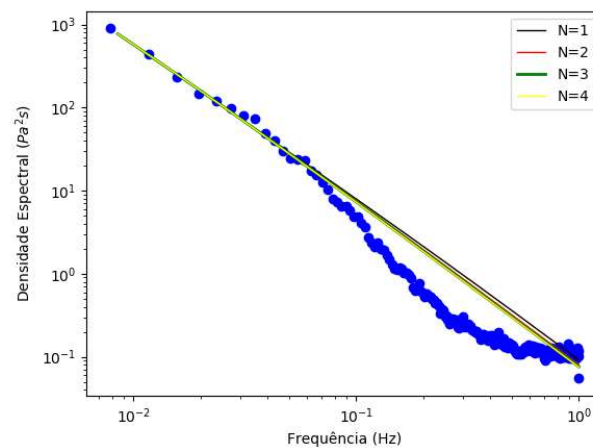


Figura 12 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.21) referente à classe gama com $N=1,2,3,4$. Para cada um dos valores de N foi feito um ajuste. Os valores dos parâmetros obtidos foram diferentes de uma curva para outra.

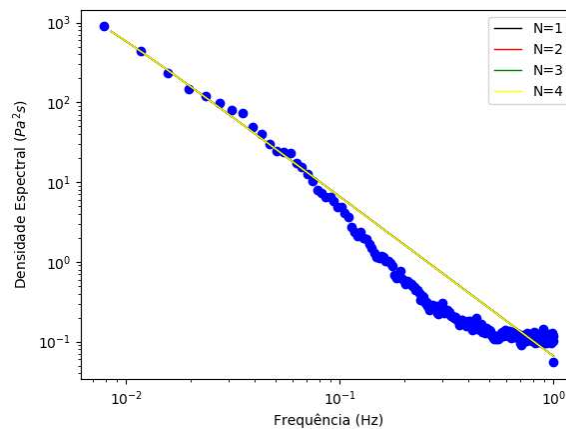


Figura 13 - Ajuste dos dados experimentais com a equação (3.36) referente à classe gama inversa com $N=1,2,3,4$. Novamente foi feito o melhor ajuste para cada valor de N .

melhor curva para $N = 1$ é parecida com a melhor curva para $N = 2$, bastando para isso que os valores de β_1 , ϵ_0 e A^2r sejam modificados. Os ajustes foram feitos levando-se em conta que os valores de β_i são os mesmos, ou seja $\beta_i = \beta_{i-1} = \dots = \beta_2 = \beta_1$. No caso de $N = 1$ temos $\beta_1 \approx 0.6$, $\epsilon_0 \approx 2$, $A^2r \approx 1.7$; para $N = 2$ temos que $\beta_1 \approx 0.7$, $\epsilon_0 \approx 1.3$, $A^2r \approx 0.7$; para $N = 3$ temos $\beta_1 \approx 0.8$, $\epsilon_0 \approx 0.8$, $A^2r \approx 0.4$ e para $N = 4$ temos $\beta_1 \approx 0.9$, $\epsilon_0 \approx 1$, $A^2r \approx 0.4$. No próximo caso também acontece algo parecido, para a classe gama inversa

A figura 3.11 mostra que não existe uma boa distinção entre as curvas para diferentes N 's também para a classe gama inversa. No caso de $N = 1$ temos $\beta_1 \approx 0.2$, $\epsilon_0 \approx 0.002$, $A^2r \approx 0.1$; para $N = 2$ temos que $\beta_1 \approx 0.7$, $\epsilon_0 \approx 0.002$, $A^2r \approx 0.1$; para $N = 3$ temos $\beta_1 \approx 0.8$, $\epsilon_0 \approx 0.003$, $A^2r \approx 0.1$ e para $N = 4$ temos $\beta_1 \approx 2.5$, $\epsilon_0 \approx 0.001$, $A^2r \approx 0.1$.

O fato das curvas ficarem praticamente sobrepostas para diferentes N 's nas classes gama e gama inversa já foi visto anteriormente [13]. A forma de lidar com esse problema foi uma análise da distribuição de background $p(\epsilon)$ que no nosso caso corresponderia indiretamente a fazer um ajuste da distribuição das taxas de relaxação. Provavelmente uma análise dessa natureza nesses dados de invasão de meios porosos nos dirá qual o melhor modelo e qual a melhor escala.

3.7.5 Modelos de Ornstein–Uhlenbeck

Partiremos agora para os modelos hierárquicos de processos de Ornstein–Uhlenbeck. As equações (3.78) e (3.89) estão apresentadas utilizando as funções H de Fox, as quais não estão definidas em Python. Dessa forma, não foi possível fazermos um ajuste via mínimos quadrados para essas funções da mesma forma que foi feito para os casos anteriores. Para contornar esse problema, pelo menos de forma parcial, implementamos um código auxiliar no Mathematica que nos permitiu fazer alguns gráficos das funções H . Desta forma, foi possível ter pelo menos uma indicação preliminar se esses dois modelos são bons candidatos para descrever os dados experimentais. As figuras 3.12 e 3.13 não são ajustes via mínimos quadrados da melhor

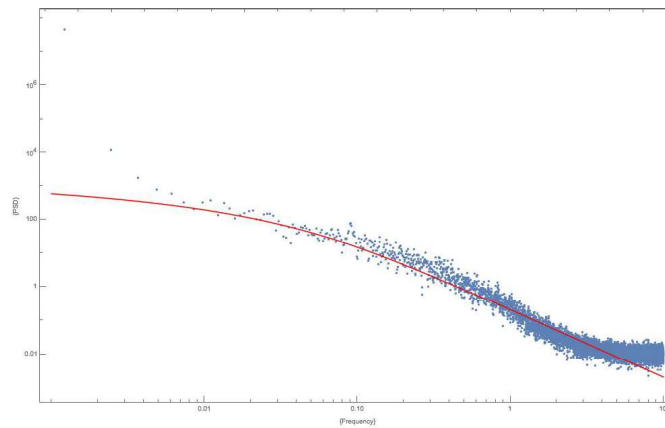


Figura 14 - Densidade espectral e equação (3.78) para valores de $\beta = 0.1$, $\zeta = 0.8$, $\varepsilon = 20$.

curva, mas apenas um “ajuste manual” em que escolhemos alguns valores de β , ζ e ε , buscando conseguir uma boa concordância entre curva teórica e os dados experimentais.

Pela figura 3.12 vemos que o ajuste manual buscou priorizar a região intermediária da figura, ou seja, sem contemplar os pontos iniciais, que ficam distantes do resto da figura, e os pontos onde a densidade espectral empírica fica plana. A linha vermelha é gerada ao considerarmos a equação (3.78) para os parâmetros $\beta = 0.1$, $\zeta = 0.8$, $\varepsilon = 20$.

Na figura 3.13 vemos que o ajuste manual não passa tão bem pelos pontos experimentais quanto na figura 3.12. Mesmo assim nota-se uma certa concordância com os dados empíricos. O ajuste é gerado ao considerarmos a equação (3.89), onde os parâmetros possuem os seguintes valores: $\beta = 0.1$, $\zeta = 0.8$, $\varepsilon = 20$. As figuras 3.12 3.13 mostram que os dois modelos de Ornstein–Uhlenbeck são também postulantes para descrever esse fenômeno.

De forma geral, a análise dos dados nos permitiu chegarmos a algumas conclusões. A primeira delas é que a classe beta inversa não é nem de perto uma boa candidata. As classes gama, gama inversa e beta estão mais próximas dos dados experimentais, sendo essas duas primeiras melhores que a última pois estão levemente mais próximas dos pontos empíricos para altas

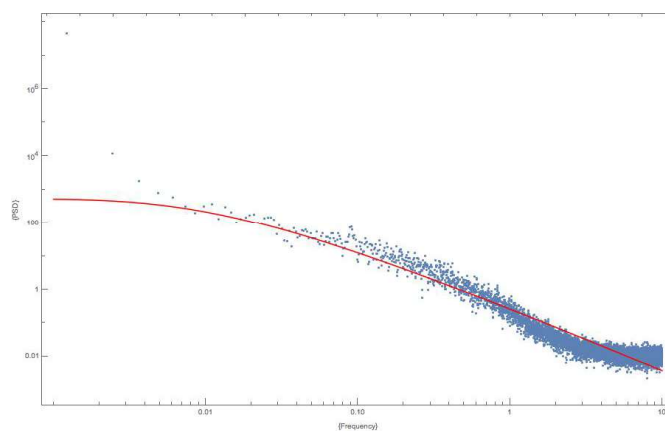


Figura 15 - Densidade espectral e equação (3.89) para $\beta = 0.1$, $\zeta = 0.8$, $\varepsilon = 20$.

frequências. Para os modelos multiescalas, nota-se que a classe gama inversa possui um melhor ajuste. O fato de não conseguirmos diferenciar a função $S(f)$ para diferentes N 's sugere que seja necessária uma análise na distribuição de background para sabermos qual a melhor escala. Finalmente, para os modelos de Ornstein–Uhlenbeck vimos que o modelo duplamente hierárquico tipo gama é levemente melhor. Certamente precisaremos de um método mais eficiente para discernir qual o melhor modelo entre os possíveis candidatos.

4 Conclusões

Nesta dissertação, estudamos a densidade espectral de potência de um sistema físico. O sistema em questão é a invasão de um fluido num meio poroso. Essa invasão ocorre mediante uma pressão imposta controlada, o aparato experimental fazia com que o líquido presente no meio fosse aos poucos sendo empurrado pela pressão atmosférica. Dessa forma, o líquido foi cada vez mais ocupando canais menores. Através da observação da série temporal das pressões, fizemos uma análise desses dados no momento correspondente ao regime de escoamento.

Inicialmente, mostramos qual a densidade espectral para um modelo que trata os dados das pressões como sendo uma série de relaxações exponenciais. Essas relaxações eram caracterizadas por suas amplitudes e também pela taxa de decaimento dos pulsos, a variável λ . O primeiro cálculo da densidade espectral foi feito levando em conta que todos os pulsos tivessem a mesma taxa de decaimento. A ideia posterior foi tratarmos a variável λ como não sendo mais constante, mas sim como sendo uma variável aleatória. Assim como foi feito por Moura e colaboradores [10], calculamos o caso em que a taxa de decaimento possuía uma distribuição uniforme.

Tratamos a taxa de decaimento como sendo uma variável aleatória e adicionalmente consideramos a ideia de que ela possuía uma dinâmica hierárquica. Essa hierarquia dizia respeito a um conjunto de equações diferenciais estocásticas que, por sua vez, estavam acopladas. Para fins práticos, fizemos a substituição $\varepsilon = \lambda^2$ antes do cálculo da PSD. Consideramos quatro possíveis dinâmicas para a variável ε , são elas as classes: gama, gama inversa, beta e beta inversa. A análise para vermos quais modelos são melhores foi feita usando o método dos mínimos quadrados. Para uma única escala, os modelos que mais apresentaram proximidade com os dados empíricos foram os das classes gama e gama inversa. Para multiescalas, não houve diferença significativa entre os diversos $N's$, isso indica que posteriormente deverá ser feita uma análise da distribuição de background para podermos verificar qual escala melhor representa o experimento.

Além dos modelos descritos acima, também foram considerados outros dois. Esses outros modelos não tratam da pressão como sendo uma série de pulsos que decaem exponencialmente. Eles supõem que está ocorrendo um processo de Ornstein-Uhlenbeck com outras duas escalas de tempo diferentes, ou seja, continua sendo hierárquico. O cálculo da densidade espectral foi feito por meio da função de correlação. Não foi feito um ajuste dos mínimos quadrados, mas sim apenas um “ajuste manual” que buscou, visualmente, aproximar a curva teórica dos dados empíricos. Observamos que ambos modelos ficam próximos dos dados, mas o modelo duplamente hierárquico tipo gama fica melhor.

Referências

- [1] D. L. Turcotte and B. D. Malamud, “Earthquakes as a complex system,” *International Geophysics Series*, vol. 81, no. A, pp. 209–228, 2002.
- [2] R. V. Solé and S. C. Manrubia, “Extinction and self-organized criticality in a model of large-scale evolution,” *Physical Review E*, vol. 54, no. 1, p. R42, 1996.
- [3] I. Gleria, R. Matsushita, and S. Da Silva, “Scaling power laws in the sao paulo stock exchange,” *Economics Bulletin*, vol. 7, no. 3, pp. 1–12, 2002.
- [4] R. Voss and J. Clarke, “ $1/f$ noise in speech and music,” *Nature*, vol. 258, pp. 317–318, 1975.
- [5] P. Klimek, Y. Yegorov, R. Hanel, and S. Thurner, “Statistical detection of systematic election irregularities,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 109, no. 41, pp. 16469–16473, 2012.
- [6] N. Balague, C. Torrents, R. Hristovski, K. Davids, and D. Araújo, “Overview of complex systems in sport,” *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 26, no. 1, pp. 4–13, 2013.
- [7] I. Gleria, R. Matsushita, and S. d. Silva, “Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 26, no. 2, pp. 99–108, 2004.
- [8] J. Cusidó, L. Romeral, J. A. Ortega, J. A. Rosero, and A. G. Espinosa, “Fault detection in induction machines using power spectral density in wavelet decomposition,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 2, pp. 633–643, 2008.
- [9] E. Ferrazzi, G. Pardi, P. L. Setti, M. Rodolfi, S. Civardi, and S. Cerutti, “Power spectral analysis of the heart rate of the human fetus at 26 and 36 weeks of gestation,” *Clinical Physics and Physiological Measurement*, vol. 10, no. 4B, p. 57, 1989.
- [10] M. Moura, K. J. Måløy, and R. Toussaint, “Critical behavior in porous media flow,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 118, no. 1, p. 14004, 2017.
- [11] D. S. Salazar and G. L. Vasconcelos, “Stochastic dynamical model of intermittency in fully developed turbulence,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 4, p. 047301, 2010.
- [12] P. Stoica, R. L. Moses, *et al.*, “Spectral analysis of signals,” 2005.

- [13] A. Macêdo, I. R. R. González, D. Salazar, and G. Vasconcelos, “Universality classes of fluctuation dynamics in hierarchical complex systems,” *Physical Review E*, vol. 95, no. 3, p. 032315, 2017.
- [14] I. R. R. González, B. C. Lima, P. I. Pincheira, A. A. Brum, A. M. Macêdo, G. L. Vasconcelos, L. d. S. Menezes, E. P. Raposo, A. S. Gomes, and R. Kashyap, “Turbulence hierarchy in a random fibre laser,” *Nature Communications*, vol. 8, p. 15731, 2017.
- [15] R. N. Bracewell and R. N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, vol. 31999. McGraw-Hill New York, 1986.
- [16] A. M. Mathai, R. K. Saxena, and H. J. Haubold, *The H-function: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [18] H. Risken, “Fokker-planck equation,” in *The Fokker-Planck Equation*, pp. 63–95, Springer, 1996.
- [19] Portal Action. **Estacionariedade**. Disponível em < <http://www.portalaction.com.br/series-temporais/11-estacionariedade> > Acesso em 15 de fevereiro de 2019.
- [20] The Who. Behind Blue Eyes. Who’s Next. Londres, Polydor, 1971.