



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

LARISSA ELFISIA DE LIMA SANTANA

A CONVERSÃO ENTRE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: uma análise no domínio
das frações à luz de Duval e Vergnaud

Recife
2018

LARISSA ELFISIA DE LIMA SANTANA

A CONVERSÃO ENTRE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: uma análise no domínio
das frações à luz das teorias de Duval e Vergnaud

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários para a obtenção o título de doutora em Psicologia Cognitiva.

Área de concentração: Psicologia Cognitiva

Orientadora: Profa. Dra. Síntria Labres Lautert

Recife

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Valdicéa Alves Silva, CRB4-1260

S232c Santana, Larissa Elfisia de Lima.

A conversão entre representações semióticas: um estudo no domínio das frações à luz de Vergnaud e Duval / Larissa Elfisia de Lima Santana. – 2018.

194 f.: il. 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Síntria Labres Lautert.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CFCH.
Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Recife, 2018.

Inclui referências e apêndice.

1. Psicologia Cognitiva. 2. Educação matemática. 3. Representações Semióticas. 4. Estruturas Multiplicativas. I. Lautert, Síntria Labres (Orientadora). II. Título.

153 CDD (22. ed.)

UFPE (BCFCH2019-134)

LARISSA ELFISIA DE LIMA SANTANA

A CONVERSÃO ENTRE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: uma análise no domínio
das frações à luz das teorias de Duval e Vergnaud

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de doutora em Psicologia Cognitiva.

Aprovada em: 29 de maio de 2018.

Banca examinadora

Profa. Dra. Sintria Labres Lautert (orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ernani dos Santos Martins
Universidade Estadual de Pernambuco

Prof. Dr. José Aires Castro Filho
Universidade Federal do Ceará

Profa. Dra. Marcília Chagas Barreto
Universidade Estadual do Ceará

Profa. Dra. Rute Elizabete de Sousa Rosa Borba
Universidade Federal de Pernambuco

Ao meu pai Francisco de Assis Santana (*in memoriam*) que sonhou e vibrou comigo por esta conquista.

Dedico

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo suporte e apoio contínuo para que eu me dedicasse aos estudos. O orgulho e a alegria com o qual acompanharam o processo de construção deste estudo nos últimos quatro foi sempre fonte de motivação nos momentos de cansaço e dificuldade.

Às amigas Cláudia e Lilian cujos laços de amizade mantidos por mais 15 anos são fundamentais e presentes em cada conquista de minha vida, inclusive na finalização deste estudo.

À minha orientadora Profa. Síntria Labres Lautert pela parceria, dedicação, orientações e, principalmente, pela afetuosa acolhida de uma estudante de outro Estado em Recife. Os laços e aprendizados construídos ao longo desses quatro anos são de valor inestimável.

Aos amigos de Recife, em especial, à Johana, Carol, Nancy, Mirela, Angélica, Stefânio, Anna Bárbara, Ariedja, Layane e Marília pela amizade e apoio mútuo, compartilhados durante o processo de construção desta pesquisa.

Aos professores, servidores e colegas de turma do Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva pelas trocas, vivências e aprendizagens.

Aos colegas do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM) pelas aprendizagens construídas coletivamente.

Aos colegas do projeto OBEDUC E-MULT, em especial, aqueles integrantes do Núcleo Recife, cujos diálogos, debates, formações e experiências compartilhadas foram de fundamental importância à minha formação enquanto pesquisadora.

À professora Alina Spinillo pelas valiosas contribuições na qualificação do projeto e também pelo apoio, palavras sempre generosas e por manter as portas de sua sala sempre abertas para conversas, empréstimos de livros, bem como outros momentos de inestimável contribuição.

À professora Analúcia Schiliemann pelas sugestões e contribuições em meu texto de qualificação que foram fundamentais à construção deste estudo.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa Matemática e Ensino (MAES) cujas contribuições à minha formação foram fundamentais para meu ingresso no doutorado e também para a conclusão desta pesquisa. Em especial as bolsistas Gleiciane, Alice e Hosana que colaboraram com a transcrição das entrevistas.

À Profa. Marcilia Chagas Barreto cujo apoio, carinho e estímulos, desde a graduação, motivaram e inspiraram meu ingresso na carreira acadêmica.

Às amigas Ana Cláudia, Bárbara, Flávia e Silvana pela amizade e parcerias profissionais que enriquecem minha formação e evolução tanto pessoal como acadêmica.

Aos meus colegas de trabalho na Faculdade de Educação de Itapipoca pela compreensão e paciência com meu processo de conclusão desta pesquisa.

Aos meus alunos que me proporcionam inspiração e aprendizagens diárias, em especial, Felipe, Rique e Karine pelo auxílio com a transcrição das entrevistas e disponibilidade para busca, instalação e instruções com os *softwares* necessários para a organização dos dados.

Às escolas que permitiram a realização desta investigação.

Às professoras Silvana e Rayssa que tão gentilmente cederam espaço em suas aulas para a aplicação das entrevistas com seus alunos.

Aos estudantes participantes desta pesquisa sem os quais não seria possível realizar este estudo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pela concessão da bolsa de doutorado que tornou possível a construção desta investigação.

RESUMO

A habilidade de lidar de forma flexível com várias representações dos conceitos tem sido apontada por diversas pesquisas no campo da Psicologia da Educação Matemática como essencial para a aprendizagem matemática. Destacam-se entre essas contribuições as elaborações teóricas de Duval e Vergnaud que, de modo complementar, em suas respectivas teorias, elucidam aspectos semióticos e conceituais vinculados à aprendizagem matemática. Neste sentido, com o intuito de produzir evidências empíricas sobre a relação complementar entre essas duas teorias toma-se por base o fenômeno da conversão entre representações semióticas no domínio das frações. A escolha deste conceito justifica-se pelo fato dos maiores obstáculos a sua aprendizagem estarem relacionados à multiplicidade de situações e representações associadas às frações. Tendo em vista esses aspectos, a presente pesquisa investigou como o fenômeno da conversão de frações é afetado por diferentes competências, sentidos, situações e representações semióticas. Participaram do estudo 60 estudantes de 5ª ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas da cidade de Fortaleza. Os participantes foram submetidos a duas tarefas distintas. Na Tarefa 1 (T1), os estudantes foram solicitados a identificar conversões de frações dentre opções apresentadas. A Tarefa 2 (T2) consistiu na elaboração de conversões de frações. Nas tarefas se avaliaram as competências de identificar (T1) e efetuar (T2) conversões em diferentes sentidos, situações e representações semióticas. Todos os estudantes foram individualmente entrevistados pela mesma examinadora nas duas tarefas. Os dados relativos às tarefas foram analisados em função do desempenho (número de acertos), tipos de erros cometidos e estratégias de conversão que conduziram ao erro. Os principais resultados podem ser assim resumidos: (i) *quanto ao desempenho*: os estudantes apresentaram, de modo geral, dificuldades com todas as conversões propostas. Em relação às variáveis investigadas apresentam melhores resultados na competência identificar, no sentido discursivo para o não discursivo e nas representações figurais. A situação quociente e a representação decimal foram as de mais difícil conversão para ambas competências; (ii) *quanto aos tipos de erros*: foram identificados erros de dois tipos, quais sejam: modificação (Erro I) e transposição (Erro II). O Erro II foi mais frequente na competência de identificar em ambos sentidos, enquanto que o Erro I foi mais frequente na competência efetuar no sentido discursivo para o não discurso; (iii) *quanto as estratégias de conversão que conduziram ao erro*: foram observados três tipos de estratégias: Tipo 1 (incompreensíveis ou sem relação com o enunciado); Tipo 2 (associadas às estruturas aditivas) e; Tipo 3 (associadas às estruturas multiplicativas). Este último tipo foi responsável por explicar a maior parte dos erros cometidos nos diferentes sentidos, situações e representações semióticas. Portanto, os resultados revelam que para compreender fenômeno da conversão de frações é necessário considerar simultaneamente as competências, os sentidos, as situações e as representações mobilizadas, aspectos esses que não podem ser explicados à luz de uma única teoria, evidenciando a complementariedade entre as teorias de Duval e Vergnaud.

Palavras-chave: Conversão. Frações. Representações semióticas. Teoria dos campos conceituais. Estruturas multiplicativas.

ABSTRACT

The skill of dealing in flexible ways with multiple representation of the same concept has been reported in the Field of Psychology of Mathematics Education as a essential for learning mathematics. Among these contributions are the developments of theories by Duval and Vergnaud which in a complementary way elucidate semiotic and conceptual aspects related to learning. In order to produce empirical evidence about the complementary relationship between these two theories, the phenomenon of conversion between semiotic representations in the domain of fractions is investigated. The choice of this concept is justified by the fact that the greatest obstacles to mathematical learning are related to the multiplicity of situations and representations associated with fractions. Considering these aspects, the present research investigated how the phenomenon of the conversion of fractions is affected by different competences, directions, situations and semiotic representations. 60 fifth grade students from two public schools in the city of Fortaleza participated in this study. Participants underwent two distinct tasks. In Task 1 (T1), students were asked to identify fractional conversions from presented options. Task 2 (T2) consisted of performing fractional conversions. In both tasks the competences of examining and performing conversions in different directions, situations and semiotic representations were evaluated. All students were individually interviewed by the same examiner on both tasks. The data related to the tasks were analyzed according to the performance (number of correct answers), types of errors and conversion strategies that led to an error. The main results can be summarized as follows: (i) in terms of performance: the students presented difficulties with all proposed conversions in general. In relation to the variables investigated, they present better results in examining competence, in the discursive direction for the non-discursive and in the figural representations. The quotient situation and the decimal representation were the most difficult ones for the conversions of both competences; (ii) in terms of type of errors: Two types of errors were observed, namely, modification (Error I) and transposition (Error II). Error II was more frequent for examining conversions in both directions. Whereas Error I was most frequent in the discursive for non-discursive direction; (iii) the conversion strategies that led to an error: three types of strategies were observed: Type 1 (incomprehensible or unrelated to the question), Type 2 (associated with additive structures) and Type 3 (associated with multiplicative structures), the latter type was responsible for explaining most part of the mistakes made in the different directions, situations and semiotic representations. Therefore, the results show that in order to understand the phenomenon of the conversion of fractions, the directions, situations and representations mobilized are aspects that cannot be explained by only one theory, evidencing the complementarity between the theories of Duval and Vergnaud.

Keywords: Conversion. Fractions. Semiotic representation systems. Theory of conceptual fields. Multiplicative structure.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	AS RELAÇÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES E CONCEITOS MATEMÁTICOS: elementos para uma análise cognitiva no domínio das frações.....	16
2.1	REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E CONHECIMENTO MATEMÁTICO: AS CONTRIBUIÇÕES DE DUVAL E VERGNAUD.....	19
2.1.1	A teoria dos registros de representação semiótica: a importância da atividade cognitiva de conversão.....	19
2.1.2	Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para a compreensão da conversão entre representações semióticas.....	29
2.1.3	Representações semióticas e conhecimento.....	37
2.1.4	Estudos empíricos sobre representações e conceitos matemáticos.....	39
2.2	ESTUDOS EMPÍRICOS SOBRE O CONCEITO DE FRAÇÃO: ASPECTOS CONCEITUAIS E SEMIÓTICOS.....	43
2.2.1	A relevância do conceito de fração e a ideia de unidade.....	43
2.2.2	A magnitude numérica das frações.....	45
2.2.3	As diferentes interpretações da fração.....	48
2.2.4	As representações de fração e seus impactos na aprendizagem.....	51
3	MÉTODO.....	59
3.1	RELEVÂNCIA E OBJETIVOS DO ESTUDO.....	59
3.2	PARTICIPANTES.....	60
3.3	DELINEAMENTO DO ESTUDO: PROCEDIMENTO E PLANEJAMENTO QUASE EXPERIMENTAL.....	61
3.3.1	Critérios de escolha e organização das variáveis investigadas no estudo.....	63
3.3.1.1	As competências de conversão.....	64
3.3.1.2	Os sentidos de conversão.....	64
3.3.1.3	As situações.....	65
3.3.1.4	Os registros de representação semiótica.....	66
3.3.1.5	As questões.....	66
3.3.2	A Tarefa 1: a competência de identificar conversões de frações.....	69
3.3.2.1	Os tipos de erros abordados na competência de identificar conversões de frações: modificação e transposição.....	72
3.3.3	A Tarefa 2: competência de efetuar conversões de frações.....	77
4	RESULTADOS.....	80
4.1	ANÁLISE DO DESEMPENHO.....	80
4.1.2	Sistema de análise.....	81
4.1.3	Competências: identificar vs. Efetuar.....	84
4.1.4	Sentidos de conversão: discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo.....	85
4.1.5	Situações de fração: parte-todo vs. quociente vs. medida.....	88
4.1.6	Representações semióticas: fracionária vs. decimal vs. figural.....	94
4.2	ANÁLISE DOS TIPOS DE ERRO DE CONVERSÃO.....	101
4.2.1	Sistema de análise.....	101
4.2.2	Os tipos de erros e as competências de conversão.....	112
4.2.3	Os tipos de erros e os sentidos de conversão.....	115
4.2.4	Os tipos de erros e as situações conversão.....	117
4.2.5	Os tipos de erros e as representações semióticas de fração.....	120

4.3	ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS DE CONVERSÃO DE FRAÇÃO QUE CONDUZIRAM AO ERRO	123
4.3.1	Sistema de análise.....	125
4.3.2	As estratégias que conduzem ao erro.....	137
4.3.3	As estratégias que conduzem ao erro e os sentidos de conversão.....	139
4.3.4	As estratégias que conduzem ao erro e as situações.....	142
4.3.5	As estratégias que conduzem ao erro e as representações semióticas de fração.....	145
5	CONCLUSÕES.....	149
	REFERÊNCIAS.....	170
	APÊNDICE A – TERMO DE COMPROMISSO LIVRE E ESCLARECIDO.....	178
	APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	181
	APÊNDICE C – TAREFA 1.....	184
	APÊNDICE D – TAREFA 2.....	191

1 INTRODUÇÃO

As frações são uma forma particular de representar e de organizar situações como a parte de um todo, a divisão de objetos, a relação entre duas medidas, um operador, dentre outros contextos que evidenciam a natureza multifacetada deste conceito. Em face da complexidade inerente à compreensão das frações, uma vasta literatura tem se dedicado a explorar aspectos cognitivos vinculados a esse conceito. (STREEFLAND, 1978; BEHR et al. 1983; CARRAHER; SCHLIEMMAN, 1992; BALL, 1993; PITKETHLY, HUNTING, 1996; CHARALAMBOS; PITTA-PANTANZI, 2007; NUNES et al., 2007; WANG YQ; SIEGLE, 2013; SPINILLO, CRUZ, 2014; HURST; CORDES, 2016).

Nesse contexto, o presente estudo teve como finalidade à investigação aspectos conceituais e semióticos relacionados ao conceito de fração. De modo particular, foi examinada a atividade cognitiva de conversão, isto é, o processo de transitar entre representações diferentes de um mesmo conceito. Para propiciar uma melhor compreensão do estudo realizado, algumas das ideias nucleares desta investigação serão apresentadas.

Inicialmente, assume-se que não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação, pois ela é inseparável do desenvolvimento científico por permitir representar seus objetos e relações (DUVAL, 2009). Com efeito, a natureza da noção de representação tem sido abordada na literatura científica a partir de três diferentes perspectivas epistemológicas. A primeira concerne à ideia de *representação mental* como evocação de objetos ausentes, presente na obra de Piaget. Essa noção tem grande importância na epistemologia genética tendo em vista a diferenciação entre o plano da ação e o plano da representação. A segunda noção diz respeito à ideia de *representação computacional* referindo-se à “forma como uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento”. Essa noção é central nas discussões de Inteligência Artificial, com teorias que dão destaque ao tratamento de informações recebidas de modo a produzir uma resposta adaptada (DUVAL, 2009, p.31).

A terceira e última noção trata das *representações semióticas*, cuja especificidade relaciona-se “a um sistema particular de signos, podendo ser convertidas em representações equivalentes em outros sistemas semióticos, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza” (DUVAL, 2009, p. 31, grifo nosso). O presente estudo ancorou-se nessa terceira noção de representação, considerando sua relevância para as discussões relativas ao fenômeno investigado, a conversão entre registros de representação semiótica de frações. Desta forma, assume-se a abordagem cognitiva da conversão de frações, tendo em

vista que esta tem o potencial de possibilitar a descrição do funcionamento cognitivo dos indivíduos de modo a compreender como este efetua e controla os processos matemáticos a ele propostos (DUVAL, 2003). Além disso, a compreensão do processo de conversão requer que se considerem as estruturas conceituais. Segundo Vergnaud (1996), as ideias de esquema (organização invariante da conduta frente às situações) e situação são fundamentais para o processo de conceitualização do real. Tal compreensão se fundamenta na percepção de que a elaboração conceitual requer uma ação transformada a ser explicitada (VERGNAUD, 1996), ou seja, tanto a ação quanto a representação são essenciais para a aprendizagem.

As ideias acima discutidas expressam pontos de vista de dois teóricos cujas contribuições têm sido amplamente utilizadas em investigações no âmbito da Psicologia da Educação Matemática: Raymond Duval e Gerard Vergnaud. Embora normalmente os estudos elejam a contribuição de apenas um dos dois teóricos, nesta pesquisa, o suporte teórico de ambos será considerado. Isto porque compreende-se que, embora com objetivos e matizes epistemológicas diferentes, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Teoria dos Campos Conceituais são complementares entre si. Com essa compreensão, concebe-se que aprendizagem matemática, do ponto de vista cognitivo, precisa considerar cinco aspectos principais: *a especificidade do conhecimento matemático; as diversas situações nas quais se inserem os conceitos; a grande variedade de representações matemáticas; os invariantes operatórios dos conceitos e; as transformações entre as representações semióticas* (VERGNAUD; 2003; DUVAL, 2003). Quanto ao primeiro aspecto, é preciso salientar que o acesso aos objetos matemáticos não é nem sensorial nem instrumental, como em Física ou em Química, mas ele passa pela produção de representações semióticas que não devem ser jamais confundidas com os objetos que elas representam, logo, compreender Matemática é reconhecer os objetos matemáticos representados (DUVAL, 2012b).

Outro aspecto fundamental é a variedade de situações relativas a diversos domínios do conhecimento, dentre eles a Matemática. As ações dos sujeitos frente às atividades matemáticas fazem referência a um conjunto de esquemas que são mobilizados em função das situações. Ademais, quando as propriedades relevantes dos objetos matemáticos são explicitadas, se torna possível analisar suas conexões relativas a uma classe de situações. Essa explicitação, por sua vez, se dá por meio das representações semióticas.

Nesse sentido, para analisar as condutas dos indivíduos frente às situações matemáticas é necessário considerar a diversidade de representações para um mesmo objeto (conteúdos e conceitos), pois, além dos sistemas de numeração, existem figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural. Essa pluralidade

de sistemas semióticos “permite uma diversificação das representações de um mesmo objeto. Tal pluralidade aumenta as capacidades cognitivas dos sujeitos e em seguida suas representações mentais” (DUVAL, 2009, p. 17).

O ato de representar, por sua vez, se configura como a transformação de invariantes operatórios em representações semióticas por meio de uma atividade dialética. Os conceitos têm como ingredientes os invariantes e esses últimos são as propriedades que dão aos conceitos o seu conteúdo (Vergnaud, 1990; 1996). Com efeito, é essencial compreender o sistema semiótico no qual se deseja representar. Vergnaud (1996) explica que existem lacunas entre representações mentais e externas, pois além de um domínio conceitual é necessário ter habilidades linguísticas que permitam ao indivíduo manter uma equivalência entre o se elabora de modo interno e externo.

É nesse contexto que se torna necessário acessar, compreender e mobilizar múltiplas representações de um objeto matemático. Pode-se considerar que há um consenso na literatura sobre a importância desse aspecto para o ensino e a aprendizagem em matemática (LESH et al., 1987; BALL, 1993; DUVAL, 2003, 2006, 2011; VERGNAUD, 1987, 2009). Nesse sentido, Vergnaud e Mulligan (2006) fizeram uma revisão de relatórios de pesquisa apresentados na *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME*¹ e encontraram um grande número de pesquisadores preocupados com a compreensão das crianças dos símbolos e os usos destes para o ensino. Além disso, a habilidade de lidar de forma flexível com distintas representações de um conceito matemático e a realização da transformação entre elas têm se mostrado como um importante fator para o sucesso na consolidação do raciocínio matemático e resolução de problemas (DREHER et al. 2014).

Consequentemente, fazer conexões e conversões entre diferentes representações é central para a compreensão de conceitos matemáticos (e.g. LESH, POST, BEHR, 1987; DUVAL, 2009; VERGNAUD, 2009; RENKL et al., 2013). Cabe esclarecer que neste estudo compreendem-se como conversões as “transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica” (DUVAL, 2003, p. 16).

¹ Grupo que surgiu em 1976, por ocasião do *III International Congress on Mathematics Education* (ICME), realizado na cidade alemã de Karlsruhe. Tal grupo nasce como uma espécie de “dissensão” no interior do grupo internacional [...] representando o desejo de parcela importante da comunidade de pesquisadores no sentido de “promover e estimular a pesquisa interdisciplinar em educação matemática, com a cooperação de psicólogos, matemáticos e educadores matemáticos” (DA ROCHA FALCÃO, 2008, p.17).

Ademais, tratando-se de múltiplas representações, no domínio das frações é particularmente bem consolidado pela literatura que suas diferentes representações podem acentuar diferentes aspectos do núcleo (relações essenciais) desse conceito e por esse motivo as mudanças entre elas são importantes (BALL, 1993; DREHER et. al., 2014). Sobre essa literatura, Pitkethly e Hunting (1996), ao realizar uma revisão integrativa, observaram diversas pesquisas cujos interesses podem ser sintetizados nos seguintes aspectos: estabelecimento de sentido (individual) para a fração; as interpretações de constructos de fração; os conhecimentos intuitivos de fração; a linguagem e os símbolos de fração; os mecanismos construtivos do conceito de fração (esquemas); os obstáculos epistemológicos ou didáticos à compreensão de fração. Percebe-se assim uma gama diversificada de esforços para compreender o desenvolvimento cognitivo do conceito de fração, além de um extenso número de pesquisas com variados objetos de estudo e, em diversos países, evidenciando a relevância do estudo deste domínio (PITKETHLY, HUNTING, 1996).

Ainda quanto à fração, Vergnaud e Mulligan (2006) relatam que este é um dos campos de pesquisa mais consistentemente representados ao longo das edições do PME, contudo os autores sinalizam que há necessidade de investigações que estudem modelos, raciocínios padrões e relações estruturais que possam complementar os esforços de pesquisa já feitos e permitir a construção de modelos teóricos gerais dos domínios de conteúdos.

Neste sentido, destaca-se o estudo Dreher et. al. (2014) voltado para as competências vinculadas às representações de frações, em particular, suas conversões. Os autores investigaram competências de alunos de 6º ano do Ensino Fundamental quanto às conversões de frações. Para tal, elaboraram um modelo teórico baseado em três competências de conversão: identificar, efetuar e justificar. A partir destas competências foi elaborado um questionário de múltipla escolha que foi aplicado aos participantes. Como resultado, os autores evidenciaram que em todas as situações abordadas no instrumento a competência de efetuar conversões mostrou-se mais difícil para os participantes que do identificar conversões. A competência de justificar conversões pareceu não influenciar na relação dos participantes com as outras duas competências citadas. A partir destes achados, os autores estabeleceram um modelo teórico que evidencia uma hierarquia quanto ao grau de dificuldades das competências, sendo esta a maior contribuição do estudo.

Todavia, a abordagem utilizada deixa em aberto vários questionamentos de cunho teórico e metodológico. Primeiramente, o modelo teórico baseado em três competências de conversão (identificar, efetuar e justificar) parece abstraí-las de seu contexto de uso, ou seja, o tipo de situação em que representação de fração está inserida não aparece como possível fator

de influência no desempenho dos participantes. Em segundo lugar, as especificidades de cada tipo de representação não são abordadas enquanto fator que pode provocar possíveis dificuldades na atividade de conversão.

Finalmente, ao propor conversões Dreher et al. (2014) não evidenciaram considerar seus diferentes níveis de complexidade. A esse respeito, Duval (2009) explicita que os sentidos de uma conversão, isto é, converter um conceito de um sentido A para B ou de B para A, implica em diferentes custos cognitivos² para o aprendiz. Além disso, as conversões possuem diversos níveis de congruência (níveis de complexidade) vinculados a relações semânticas entre os registros de representação semiótica envolvidos.

Em face ao exposto, torna-se pertinente descobrir o quão importante são as características dos registros de representação semiótica oferecidos para às crianças para realização de atividades de conversão de fração, em termos de seus efeitos no desempenho dos estudantes. Além disso, as situações e os sentidos de uma conversão também são fatores que podem determinar o índice de sucesso nessa atividade.

É com essa compreensão que a presente investigação apresenta os seguintes questionamentos: (i) Será que os sentidos, situações e representações afetam o desempenho dos estudantes ao utilizar diferentes competências para conversão de frações? (ii) Quais os tipos de erros cometidos pelos alunos quando solicitados a utilizar diferentes competências para a conversão de frações? (iii) Quais as relações entre os tipos de erros de conversão cometidos pelos estudantes com os sentidos, situações e representações de fração? (iv) Qual a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes quando cometem erros na conversão de frações? (v) Como os diferentes sentidos, situações e representações de frações afetam as estratégias de conversão dos estudantes?

A partir do exposto, nos capítulos a seguir serão discutidos o referencial teórico que fundamenta esta investigação, os aspectos metodológicos elegidos, os resultados obtidos e as conclusões elaboradas. O primeiro capítulo desta investigação apresenta o referencial teórico. Nele as teorias de Duval e Vergnaud são discutidas com ênfase em suas contribuições para a compreensão da atividade cognitiva conversão. Também são apresentadas algumas concepções da literatura sobre a relação entre representações semióticas e conhecimentos matemáticos, seguidas pela discussão de estudos empíricos que evidenciam a importância de se considerar múltiplas representações dos conceitos matemáticos para situações de ensino e aprendizagem. Além disso, estudos empíricos que discutem aspectos conceituais e semióticos

² Para Duval (2009) custo cognitivo relaciona-se ao grau de esforço cognitivo de um indivíduo na efetivação de uma tarefa.

do conceito de fração são apresentados. O terceiro capítulo apresenta o método utilizado para a realização desta investigação. Inicialmente são apresentados a relevância do estudo e os seus objetivos, seguidos pela descrição dos participantes, delineamento, procedimentos e planejamento quase experimental. O quarto capítulo descreve e discute os resultados obtidos. O quinto e último capítulo expõe as conclusões elaboradas frente aos objetivos desta investigação.

2 REPRESENTAÇÕES E CONCEITOS MATEMÁTICOS: ELEMENTOS TEÓRICOS E EMPÍRICOS PARA UMA ANÁLISE COGNITIVA NO DOMÍNIO DAS FRAÇÕES

De modo geral, é possível afirmar que o desenvolvimento humano tem sido objeto de estudo das ciências psicológicas. Uribe e López (2008) reforçam essa compreensão, afirmando que o desenvolvimento se faz presente nas investigações psicológicas seja como objeto de estudo específico, seja como um dos elementos que acompanha o fenômeno escolhido para a investigação.

O termo desenvolvimento pode referir-se a diferentes aspectos da constituição humana como motricidade, afetividade, cognição, sexualidade, moralidade, sociabilidade, politização, dentre outros. Para este estudo, o interesse está centrado, principalmente, no desenvolvimento cognitivo e sua relação com a aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse sentido cabe esclarecer que os estudos sobre desenvolvimento no campo da psicologia têm se centrado em dois aspectos principais. Em primeiro lugar, a compreensão de como se transformam as estruturas que organizam a mente humana e o conhecimento. Em segundo lugar, compreender como o conhecimento se altera ao longo do tempo (URIBE, LÓPEZ, 2008).

Vários esquemas têm sido propostos para classificar os diferentes quadros teóricos e metodológicos sob os quais as pesquisas voltadas à compreensão do desenvolvimento cognitivo têm se pautado. Case (1999), propõe a classificação de três tradições de pesquisa: empirista, racionalista e sócio-histórica.

A primeira tradição se ampara no empiricismo britânico articulado por Locke e Hume. A premissa fundamental defendida é que o conhecimento do mundo é adquirido por um “processo no qual os órgãos sensoriais primeiramente detectam os estímulos externos do mundo, e então a mente detecta os padrões típicos ou conjunções desses estímulos” (CASE, 1999, p. 23, tradução nossa)³. A preocupação inicial dessa tradição era mostrar leis de aprendizagem de crianças pequenas tomando como parâmetro a aprendizagem de outras espécies. É nessa tradição que se estabelece o paradigma experimental (que usa a física como modelo) e surgem representantes como Thorndike (1914) preocupado com a relação estímulo-resposta.

A tradição racionalista surge em reação aos empiristas. O filósofo Kant, representante do racionalismo, sugere que as informações que são captadas da realidade pelos sentidos não

³ O trecho em língua estrangeira é: “process in which the sensory organs first detect stimuli in the external world and the mind then detects the customary patterns or conjunctions in these stimuli”.

possuem padrões preexistentes, portanto, é a mente humana que tem a função de impor ordem a elas (CASE, 1999). Nessa direção, a percepção não seria apenas um registro imediato do real, mas uma construção interna do sujeito (CASTORINA, 1988). Com esta compreensão, pesquisas interessadas em compreender o desenvolvimento cognitivo humano passam a preocupar-se com a investigação dos conceitos elementares com os quais as crianças nascem e como estes se transformam em função da idade cronológica. A partir desta premissa, Piaget e seus colaboradores desenvolvem a epistemologia genética e o método clínico de pesquisa (inspirado na biologia evolucionária), deste modo, configurando-se como as contribuições mais difundidas dessa corrente teórica (CASE, 1999).

A tradição sócio-histórica tem suas raízes na epistemologia sócio-histórica de Hegel, Marx, e dos filósofos continentais modernos. A premissa central é que o conhecimento conceitual não tem suas origens primárias na estrutura do mundo objetivo ou na estrutura dos sujeitos e suas ideias espontâneas. Ele não tem sequer sua origem primária na interação entre estrutura do sujeito e estrutura do mundo objetivo. Pelo contrário, tem sua origem primária na história social e material da cultura na qual o sujeito é parte e as ferramentas, conceitos e sistemas de símbolos que a cultura tem desenvolvido para interagir com seu ambiente (CASE, 1999). De acordo com Vygotsky, principal representante desta tradição, o pensamento das crianças deve ser visto em um contexto que inclua evolução cultural e biológica. O método usado para este tipo de estudo era inspirado na antropologia e consistia na análise dos contextos físicos e sociais nos quais as culturas humanas se encontram e nas ferramentas sociais, linguísticas e materiais que eles desenvolveram ao longo dos anos para reproduzir esses contextos. Depois disso, era analisado de que formas as ferramentas intelectuais e físicas eram passadas entre as gerações (CASE, 1999).

Essas três tradições têm influenciando fortemente as pesquisas do desenvolvimento cognitivo humano até os dias atuais. Contudo, as limitações presentes em cada uma dessas perspectivas tornaram necessária a elaboração de modelos teóricos que permitissem o diálogo entre elas. Essa necessidade advém do fato de o núcleo da psicologia do desenvolvimento cognitivo ser o estudo das variáveis psicológicas que permitem entender as mudanças progressivas a médio e longo prazo. Portanto, é necessário aceitar que esse objeto da psicologia está ancorado em variáveis evolutivas e não estáticas. Assim, a característica fundamental desse campo parece ser a instabilidade. Logo, captar o que não é estático se torna uma tarefa árdua para pesquisadores (URIBE, LÓPEZ, 2008).

Mostrar a composição dos diferentes modelos e contrastar uns com os outros permite evitar um reducionismo nocivo no momento de abordar o desenvolvimento. Não é que

existam modelos verdadeiros e outros falsos, na verdade, eles podem ser mais ou menos adequados a um certo subprocesso ou propósito, e todos podem ter alguma contribuição à compreensão dos processos que outros modelos podem ocultar ou obstaculizar. Nesse sentido, a ampliação do espectro de modelos e teorias é necessária. Isso não significa apenas construir novas teorias, mas permitir que a toda produção de pesquisa já realizada possa dialogar entre si. Nesse processo, alguns aspectos das teorias podem ser separados por diferenças epistemológicas, mas não necessariamente opostos entre si (URIBE, LÓPEZ, 2008).

Como exemplo dessa tentativa, as teorias neopiagetinas ou pós-piagetianas do desenvolvimento cognitivo têm suas origens na tentativa de integrar o núcleo das hipóteses das tradições empiristas e racionalistas. Segundo Case (1999), para estas teorias, de modo geral, há um comprometimento com diferentes epistemologias, cada uma olhando para diferentes disciplinas e metáforas para suas inspirações, mas todas voltadas para o objetivo de ampliar a compreensão do desenvolvimento cognitivo humano.

Nesta mesma direção, a Psicologia da Educação Matemática, domínio recente de pesquisa, reflexão teórica e aplicação prática, tem visado a análise da atividade matemática e buscado oferecer subsídios psicológicos para o debate interdisciplinar referente ao campo mais amplo da Educação Matemática (DA ROCHA FALCÃO, 2008). Este campo de pesquisa integra contribuições da Psicologia, da Educação e da Matemática e tem no núcleo de suas preocupações a atividade mental do sujeito, seu processo de conceptualização em matemática e o compromisso com a construção do conhecimento científico que, segundo Da Rocha Falcão (2008, p. 15), “[...] demanda a explicitação de um determinado conjunto de premissas epistemológicas e teóricas que dão apoio à montagem e interpretação das situações de pesquisa propostas [no âmbito Psicologia da Educação Matemática]”.

Este campo surge da aproximação da Psicologia e da Educação, mais especificamente, quando a Psicologia da Aprendizagem passa de uma aprendizagem no intransitivo para a aprendizagem de conteúdos específicos. Cabe salientar que ao se falar em atividade matemática, seu significado pode variar de acordo com o contexto em que está inserida, isto é, como ciência ou como atividade humana (DA ROCHA FALCÃO, 2008).

Ao nível da comunidade científica, a matemática é definida como uma ciência formal. Enquanto atividade humana se relaciona ao conjunto de atividades envolvendo conhecimentos matemáticos no contexto de situações extraescolares (brincadeiras, comércio, tarefas domésticas etc.). Além do contexto formal e extraescolar, no contexto escolar, acontece a interação entre a matemática organizada pela comunidade científica e a matemática como atividade humana (NUNES et al. 2011; DA ROCHA FALCÃO, 2008).

Diante do quadro apresentado, pretendeu-se evidenciar que paradigmas de pesquisas sobre o desenvolvimento cognitivo e campos de investigação como a Psicologia da Educação Matemática têm buscado integrar ciências e contribuições teóricas diferentes com a finalidade de alcançar compreensões gradativamente mais amplas de seus objetos de pesquisa. Corroborando com essa linha de raciocínio, nesta pesquisa, buscou-se integrar contribuições da literatura sobre as relações entre representações e conceitos matemáticos.

Assim, as contribuições teóricas que embasaram este estudo são apresentadas em duas seções. Na primeira é realizada a discussão de algumas perspectivas da literatura sobre as relações entre representações e conceitos matemáticos, apresentando em seguida alguns pressupostos das teorias de Duval e Vergnaud, bem como outras compreensões sobre representações semióticas e conhecimento, finalizando com a discussão estudos empíricos voltados para o uso de múltiplas representações em matemática. A segunda seção aborda o conceito de fração, evidenciando aspectos semióticos e conceituais necessários à sua compreensão tais como a ideia de unidade, de magnitude numérica, as diferentes situações nas quais pode se inserir e, por último as múltiplas representações de fração e seus impactos à aprendizagem.

2.1 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E CONHECIMENTO MATEMÁTICO: AS CONTRIBUIÇÕES DE DUVAL E VERGNAUD

Este tópico dedica-se a discutir pressupostos e categorias das duas teorias que dão suporte a este estudo. Inicialmente as ideias de Raymond Duval, consideradas pertinentes a esta investigação serão apresentadas. Em seguida as contribuições da Teoria de Gérard Vergnaud são discutidas. Por último, serão postos em relevo os aspectos de ambas as teorias, buscando-se problematizar sobre as convergências que precisam ser consideradas para se compreender a complementaridade que aqui se defende existir entre elas.

2.1.1 A teoria dos registros de representação semiótica: a importância da atividade cognitiva de conversão

Tendo em vista o papel que a linguagem e as formas simbólicas exercem para a aprendizagem matemática, torna-se indispensável analisar os problemas vinculados às representações matemáticas que os alunos enfrentam em seu processo de escolarização. Esta discussão requer analisar como a semiótica converge com a Psicologia da Educação

Matemática, em especial, com a compreensão da relação entre representações semióticas e aquisição conceitual em matemática.

A Semiótica enquanto disciplina científica é relativamente jovem uma vez que foi reconhecida pela comunidade científica apenas a partir do século XIX. Segundo, D'amore, Pinilla e Iori (2015) o termo semiótica tem sua raiz etimológica na Grécia antiga com o termo *semeion* que pode ser traduzido como signo que, por sua vez, era interpretado enquanto fenômeno físico ligado à natureza e acessível pelos sentidos por uma relação de causa e efeito como, por exemplo, a fumaça para o fogo ou os sintomas para a doença.

Boissac (1998) explica que as primeiras classificações do signo dificultaram a possibilidade de uma definição precisa para este termo. Por este motivo, surgem quatro diferentes noções de signo: signo natural, signo como metáfora, signo como ferramentas e signo como modelos. A ideia de signo natural remete à compreensão ampla dos signos enquanto características de substância (sonora, visual, etc.). A imprecisão desta noção torna possível associar o signo a diversos fenômenos. A segunda compreensão relaciona-se a percepção do signo como metáforas que podem ser utilizadas para explicar sua natureza. Saussure, por exemplo, compara o signo com a forma na relação entre forma e conteúdo. A terceira noção de signo relaciona-se a uma compreensão funcional que postula: se os signos são feitos para comunicar podem ser considerados como ferramentas, logo a sua existência é exaurida por suas funções. A quarta e última noção concebe que o signo não seria “um objeto natural, mas uma tentativa de descrição parcial de um objeto natural ou de um processo” (BOISSAC, 1998, p. 741).

Nesse sentido, os signos são o alicerce para o desenvolvimento semiótica, em decorrências das diferentes noções apresentadas acima, que pode ser entendida de duas formas: *como teoria do signo*, relativa a um dado natural (sintoma, característica); *como teoria da linguagem*, relacionada à compreensão de termos e expressões linguísticas (D'AMORE, PINILLO E IORIO, 2015). No entanto, para D'amore, Pinillo e Iorio (2015, p. 28) a compreensão atual de semiótica é mais próxima “ao termo latino *signum*, tal como Agostinho o utilizou para indicar uma noção genérica que incluísse tanto os fenômenos naturais como os fenômenos culturais”.

Tendo em vista estes aspectos, diversos autores têm chamado atenção para o fato de que, tratando-se de aprendizagem matemática, não basta apenas conhecer os diversos sistemas de representação semiótica possíveis, mas ter a habilidade de lidar de forma flexível com distintas representações de um conceito matemático, realizando transformações entre elas (LESH et al, 1987; VERGNAUD, 2009; DUVAL, 2012; DREHER et al., 2014). Tal ideia é

corroborada pela compreensão de que o ato de representar é plural, instável e evolucionário. Para Duval (2011, p. 15), “a análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos”. Com efeito, a ideia de representação vincula-se a sua compreensão enquanto instância cognitiva que possui um papel na produção do conhecimento. Assim, é preciso levar em consideração que os sistemas semióticos não são homogêneos, logo terão diferentes impactos e efeitos nos processos cognitivos.

No tocante ao conhecimento matemático, Duval (2003) afirma que é necessário abordá-lo do ponto de vista cognitivo, na medida em que o objeto de ensino da matemática não é formar futuros matemáticos, mas contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades dos alunos de raciocínio, de análise e de visualização. Nesse sentido ele enfatiza que um dos principais problemas de compreensão em matemática trata-se da confusão entre um objeto matemático e seus registros de representação semiótica. Isso porque de modo diferente ao que acontece em outras ciências, o objeto de conhecimento matemático não é acessível por meio das observações diretas ou pelo uso de instrumentos como acontece na Biologia ou Química, por exemplo. O objeto do conhecimento matemático só é acessado através de suas representações. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto fundamental para compreensão em matemática.

Partindo desta premissa, Duval (2009) elabora sua teoria dos registros de representação semiótica. Para entendê-la, em primeiro lugar, é preciso considerar que a semiótica “[...] é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e sentido” (SANTAELLA, 1983, p. 2). É neste sentido que Duval, a partir da compreensão de que a Matemática se constitui como uma linguagem considera que a sua apreensão se vincula à utilização de diversos sistemas de semióticos.

Porém, para esse autor, a noção de sistema semiótico não é suficiente para dar conta das transformações entre representações. A ideia de sistema vincula-se à análise de elementos primitivos e suas regras de combinação, a produção de códigos e sistemas formais. A noção de representações semióticas, por sua vez, implementa a compreensão de que existem operações cognitivas próprias para cada tipo de representação utilizada (DUVAL, 2011). Deste modo, um registro é um campo de variação de representação semiótica em função dos fatores cognitivos que lhe são próprios. Duval (2011, p. 70) define registro como “um sistema semiótico, mas um sistema particular, que não funciona nem como código, como sistema

formal. Ele se caracteriza essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar”.

Diante dessas considerações a noção de registros de representação semiótica é compreendida como um tipo de sistema de signos que tem a particularidade de serem passíveis de conversão, isto é, de tornarem possível a produção de representações equivalentes em outro sistema semiótico (DUVAL, 2009). Nestes termos, as transformações entre representações semióticas estão no coração da atividade matemática. É nesse sentido que se pode afirmar que toda confusão entre um objeto matemático e a representação que se faz dele acarreta uma perda de compreensão. Além disso, os conhecimentos adquiridos se tornam inutilizáveis fora do contexto em que foram aprendidos. Essa premissa é considerada por Duval (2012a) como um paradoxo cognitivo do pensamento matemático. Por um lado, a apreensão cognitiva dos objetos se dá de forma conceitual, por outro lado, é somente por meio das representações semióticas que se torna possível agir sobre os objetos matemáticos. Apesar de gerar um paradoxo, as relações entre conceitualização e representação não são antagônicas, mas complementares entre si, tendo em vista que, em matemática, não há conceitualização sem representação e esta última, por sua vez, leva à conceitualização.

Para Duval (2012b) esse paradoxo cognitivo não é percebido no ensino de matemática pelo fato de que tradicionalmente tem se dado muito mais importância às representações mentais do que às representações semióticas. Isso ocorre por conta de uma compreensão de que as representações semióticas são necessárias apenas para fins de comunicação, desconsiderando sua importância para a atividade cognitiva do pensamento. Tal importância pode ser justificada por três aspectos fundamentais.

O primeiro deles diz respeito ao desenvolvimento de representações mentais, para este autor, elas são uma interiorização das representações semióticas. O segundo aspecto diz respeito ao fato de que diferentes funções são desempenhadas pelas representações semióticas, a saber: a comunicação, a objetivação e o tratamento. A comunicação diz respeito à produção de representações externas que permitem transmitir informações, ou seja, a comunicação refere-se ao modo pelo qual se torna possível a visibilidade e a transparência dos objetos de conhecimento.

A objetivação, por sua vez, relaciona-se à possibilidade do uso das representações semióticas como instrumento para tomar consciência do saber construído. Essa consciência vincula-se ao indivíduo que, em processo de apreensão de um conhecimento, faz uso das representações para tornar claro para si mesmo o conhecimento a ser apreendido. A elaboração de esquemas, gráficos, resumos, sínteses, dentre outros, exemplificam os recursos

aos registros de representação semiótica para possibilitar a objetivação de um conhecimento (DUVAL, 2012b).

O tratamento é a transformação de uma representação de modo interno a um registro de representação ou a um sistema. A resolução de uma equação se constitui como um exemplo de tratamento, pois são realizados procedimentos baseados em regras e propriedades de um registro que possibilitam a transformação de uma representação inicial em uma representação terminal no mesmo registro.

O terceiro aspecto que justifica a importância das representações semióticas diz respeito a sua relevância para a produção de conhecimentos, uma vez que elas permitem

Tendo posto esses argumentos, para Duval (2012b) é essencial estabelecer a relação entre *semiose* e *noesis*. O primeiro aspecto refere-se a apreensão ou produção de uma representação semiótica. O segundo diz respeito a apreensão conceitual de um objeto. Para este autor, é impossível separar *semiose* e *noesis*. Todavia, a causa do paradoxo cognitivo em matemática repousa na compreensão de que a *semiose* não tem importância em relação a *noesis*. Em outras palavras, não faz sentido considerar que para produzir representações é necessário, primeiramente, compreender um conceito, tendo em vista a indissociabilidade entre as ações de representar e compreender.

Além disso, a *semiose* está vinculada a três atividades cognitivas fundamentais. A primeira delas é a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado. Para isso, é necessário fazer a seleção de relações e de dados no conteúdo a apresentar e respeitar regras (entraves de construção para figuras, gramaticais para língua natural, etc.) (DUVAL, 2012c). Esses aspectos são denominados como regras de conformidade que, por sua vez são responsáveis pela definição de um sistema de representação e dos tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis em um registro. Desse modo, o cumprimento das regras de conformidade permite “o reconhecimento das representações como representações num registro determinado” (DUVAL, 2009, p. 56). Por exemplo, um enunciado em alemão possui elementos e traços que permitem identificá-lo como uma expressão desse idioma. A importância destas regras está no fato de elas serem fundamentais tanto para a comunicação quanto para o tratamento dentro de um sistema semiótico formado.

A segunda atividade cognitiva vinculada a *semiose* é o tratamento. Ele é considerado tanto como função quanto como atividade cognitiva ligada às representações semióticas. Enquanto atividade cognitiva sua especificidade é ser considerado responsável pelas

transformações internas a um mesmo registro, considerando regras de tratamento próprias a cada registro. Elas são denominadas como regras de expansão (DUVAL, 2009). O cálculo é o tratamento típico dos registros simbólicos, a paráfrase é uma forma de tratamento da língua natural e assim por diante. O importante é a compreensão de que esse é um tipo de transformação que não resulta em mudança de registro.

A terceira atividade cognitiva é a conversão. Converter consiste em “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação deste mesmo objeto, ou da mesma situação num outro registro”. (DUVAL, 2009, p.58). Por exemplo, a colocação em algoritmo dos dados do enunciado de um problema consiste em uma conversão dos elementos e relações evidenciados no registro em língua natural por outros correspondentes no registro simbólico. Para a realização desta conversão é necessária a seleção de elementos (significativos) do registro de partida e a sua reorganização em um registro de chegada. Assim, o conteúdo de uma representação de chegada pode apenas cobrir parcialmente o conteúdo de uma representação de partida em uma atividade de conversão. Isto significa que “duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo” (DUVAL, 2003, p. 23), mas representam o mesmo objeto.

Ainda a respeito da conversão, é preciso considerar que ela possui níveis de congruência diferenciados que se referem aos custos cognitivos necessários para efetuar uma transformação representacional. Diz-se que uma conversão é congruente ou não congruente de acordo com a forma com a qual a representação de partida transparece na representação de chegada. Por exemplo, quais aspectos conceituais da fração expressa pela representação $1/3$ (registro numérico aritmético) podem ser percebidos na representação *um terço* (registro em língua natural).

A determinação destes aspectos, por sua vez, relaciona-se a três critérios: a correspondência semântica de unidades de sentido, a univocidade semântica terminal e a ordem de organização das unidades de significados. As unidades de sentido de uma representação referem-se aos segmentos nos quais ela pode ser fragmentada para que possa ser colocada em correspondência com outra representação (DUVAL, 2009). Para um mesmo objeto, as unidades de sentido que formam o conteúdo das representações semióticas mudam em função do tipo de sistema semiótico mobilizado.

Neste sentido, para analisar o critério da correspondência semântica entre unidades de sentido é preciso considerar os elementos que se destacam no léxico de um registro. Por exemplo, o enunciado *“Em um jogo, Maria fez 15 pontos e Pedro fez 6. Quantas pontos*

Maria fez a mais que Pedro?” está no registro da língua natural. Para convertê-lo em um registro simbólico aritmético é preciso pensar em suas unidades de sentido que neste caso são as quantidades envolvidas e a transformação (operação) necessária para encontrar a resposta. Contudo, apesar do enunciado utilizar o termo “a mais” a operação necessária é uma subtração, então é possível afirmar que não correspondência semântica na conversão proposta.

Utilizando-se o mesmo exemplo do enunciado acima podemos analisar o critério da ordem de organização das unidades de significado. No registro de representação em língua materna as quantidades 15 e seis aparecem sequencialmente. Na conversão desse registro para o aritmético respeita-se a mesma ordem presente no enunciado “ $15 - 6 =$ ”, pode-se então dizer que há congruência neste critério. Deste modo, a ordem diz respeito a sequência em que as unidades de sentido aparecem no registro de partida e de chegada.

Por fim, ainda com base no mesmo exemplo, é possível perceber que cada unidade de sentido no registro em língua natural corresponde a apenas uma unidade de sentido no registro aritmético. Isto diz respeito a univocidade semântica terminal, ou seja, cada unidade de sentido no registro de partida corresponde a apenas uma unidade de sentido no registro de chegada. Assim, pode-se dizer que esta conversão não é congruente quanto primeiro critério e congruente quanto ao segundo e terceiro critérios.

Além dos aspectos relacionados a congruência, a complexidade da conversão também depende do sentido em que ela é realizada. É possível observar este aspecto ao se pensar na transformação do registro algébrico $f(2) = x + 5$ para um registro gráfico. O custo cognitivo no sentido algébrico para gráfico é diferente do sentido gráfico para algébrico. Então, a heterogeneidade de sentidos de uma conversão é também um aspecto essencial a se considerar para a análise dessa atividade cognitiva.

Além da congruência e heterogeneidade de sentidos de uma conversão, é necessário considerar a natureza dos registros de representações mobilizados durante as transformações. Nesse sentido, a seguir, apresenta-se o quadro elaborado por Duval (2003) contemplando os tipos de classificações possíveis para representações e registros.

Quadro 1- Classificação de registros e representações mobilizáveis no trabalho com a Matemática

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. • Mudança de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

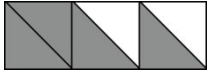
Fonte: Duval (2003, p.14)

Portanto, para Duval (2003, 2009, 2011, 2012) os registros são classificados multifuncionais e monofuncionais e as representações em discursivas e não discursivas. Os registros multifuncionais relacionam-se a possibilidade da realização de tratamentos não algoritmizáveis, isto é, “não são passíveis de utilização de procedimentos fechados com seus signos, pois eles apresentam possibilidades polissêmicas de interpretações”. (SOUZA, 2009, p. 27). Já os registros monofuncionais vinculam-se aos sistemas simbólicos cujos tratamentos se dão principalmente por meio de algoritmos.

Os registros multifuncionais ou monofuncionais podem ser apresentados por representações discursivas e não discursivas. As representações discursivas são aquelas que expressam discurso articulado no qual se encontram todos os elementos necessários à compreensão da mensagem. O enunciado de um problema em língua natural, por exemplo, produz um discurso completo sem necessidade do apoio de outras representações. Por sua vez, as representações não discursivas precisam do suporte de outros registros para que possam expressar um discurso. As figuras geométricas, por exemplo, precisam do apoio de outros registros como letras e símbolos para que produzam um discurso articulado.

Tendo em vista que a fração é objeto de estudo deste trabalho, considerou-se necessário explicar os registros de representação semiótica por meio dos quais se pode representá-la. Deste modo, apresenta-se o quadro elaborado por Maranhão e Igliori (2003) com os tipos de registros de representação semiótica de fração, quais sejam: registro simbólico – numérico (fracionário e decimal) ou algébrico; figural (considerando quantidades contínuas e discretas) e a língua natural;

Quadro 2- Diferentes Registros de Representação Semiótica da fração

<i>Registro figural</i>	<i>Registro simbólico</i>	<i>Registro na língua natural</i>
<u>Contínuo</u> 	<u>Númerico</u> $\frac{4}{6}$ 0,5 66, 66% $4 \div 6$	Uma fração pode ser escrita seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$ está representado por uma fração
<u>Discreto</u> 	<u>Algébrico</u> $\frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}$ a. $10^{n/3}$	

Fonte: Maranhão e Iglioni (2003, p. 59).

Ainda sobre a conversão é importante explicitar que das três atividades cognitivas relativas à *semiose* apenas a formação e o tratamento, tem sido levadas em consideração para o ensino. Para Duval (2012), a justificativa para a pouca atenção dada a essa atividade cognitiva advém da crença de que a conversão de representações acontece por si mesma desde que haja capacidade de formar representações em diferentes registros e efetuar tratamentos sobre as representações. Além disso, acredita-se que a conversão não tem importância para a compreensão em matemática, tratando-se apenas de um teste de conhecimentos.

Ora, tais ideias negligenciam que, para a aprendizagem matemática, a conversão desenvolve um papel essencial na conceitualização. A justificativa da importância dessa atividade cognitiva baseia-se em três argumentos. O primeiro deles diz respeito a economia de tratamento, isto é, a existência de muitos registros permite a mudança de um deles e a mudança de registro tem por finalidade possibilitar escolher aquele que permite realizar tratamento de forma mais econômica, em termos de custo de memória. Para entender esse argumento basta visualizar-se a realização de um procedimento algorítmico, utilizando a língua natural. O custo de memória e o tempo para resolução seriam maiores do que aqueles relacionados a notações numéricas, uma vez que em matemática a economia de tratamento (perceptivo ou algorítmico) é mais avançada do que em língua natural (DUVAL, 2012c).

O segundo argumento trata da complementaridade dos registros. Considerando-se que toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, o acesso a uma diversidade de registros é fundamental. As figuras, por exemplo, representam somente

estados, para representar operações é preciso um registro que tenha as propriedades de uma língua como o algébrico. É nesse sentido que as representações se tornam complementares entre si.

O terceiro e último argumento relaciona-se a ideia de que a conceitualização implica coordenação de registros de representação semiótica. A compreensão integral de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de no mínimo dois registros de representação, manifestando-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Assim a compreensão por excelência em matemática só pode ser alcançada por meio da coordenação de registros.

A partir da consideração destes pressupostos, a escolha da teoria dos registros de representação semiótica como âncora para esta investigação deve-se a consideração de que, por um lado, ela fornece instrumentos que permitem a compreensão e análise do fenômeno da conversão, objeto de estudo deste trabalho, por outro lado, ela tem um domínio de validade que abrange diferentes áreas da matemática e diferentes níveis de ensino. Esse último aspecto apesar de se constituir como uma das vantagens dessa abordagem teórica é também uma de suas limitações. A premissa central defendida por Duval (2009) é a de que as representações semióticas devem ser analisadas, não a partir dos objetos ou conceitos matemáticos que representam, mas a partir do funcionamento representacional próprio do registro no qual são produzidas.

Todavia, o presente estudo não tem como única preocupação o fenômeno da conversão, mas também a relação dessa atividade com o domínio das frações. É nesse ponto que se acredita ser possível buscar um diálogo com a teoria dos campos conceituais, na medida em que Vergnaud (1983) discute o processo de conceitualização, considerando a importância dos invariantes cognitivos, situações e representações. Essa elaboração teórica, de modo oposto aquela de Duval (2012), considera sua análise a partir das diferentes áreas da matemática, inclusive as estruturas multiplicativas, campo onde se inserem as frações, foco deste estudo. Deste modo, apesar de terem olhares diferentes sobre o processo de conceitualização, as ideias de ambos os autores, não possuem sentidos que convergem entre, pois ambos consideram a importância das representações. Vergnaud, entretanto, acrescenta outros elementos a se considerar para a aprendizagem matemática discutidos em detalhes no tópico a seguir.

2.1.2 Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para a compreensão da conversão entre representações semióticas

Vergnaud (1983; 1990; 1994; 1996; 2003; 2009; 2011; 2017) elabora a teoria dos campos conceituais com o objetivo de fornecer um quadro teórico que permita compreender filiações e rupturas entre os conhecimentos produzidos pelos indivíduos. Isso porque, para este autor, não se pode teorizar de forma adequada sobre o desenvolvimento sem observar o que o sujeito é capaz de realizar com os conhecimentos que possui e como consegue expressá-los. Ademais esse teórico salienta que para analisar e compreender o acesso ao conhecimento em matemática é fundamental observar os conteúdos conceituais das atividades em situação.

Essas ideias tem como alicerce a forma operatória dos conhecimentos em atividade que permite aos sujeitos agir sobre as situações. Isso porque a produção e desenvolvimento dos conhecimentos de um indivíduo se dão a partir de um processo de interação com as situações vivenciadas. Deste modo, para compreender a apreensão de um conceito é fundamental considerar seus contextos de inserção (VERGNAUD, 1994;1996; 2003). No entanto, Vergnaud (1996) explica que não se pode reduzir a compreensão do conceito às situações, tendo em vista que as ações operatórias não esgotam a conceitualização do real, pois sem o auxílio das palavras, enunciados, símbolos e signos os conhecimentos do sujeito ficam implícitos não permitindo o debate sobre a validade e adequação de suas compreensões.

Além disso, os conceitos também não se reduzem a sua definição porque são as formas de representação, as propriedades fundamentais dos conceitos (invariantes operatórios) e as situações que dão sentido as ações. Esses três pontos tem sido considerados aspectos centrais para a compreensão dessa teoria.

Vergnaud (1990) ressalta que as situações, por sua vez, organizam-se em duas diferentes classes. A primeira diz respeito aquelas para as quais o sujeito possui, em seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, em circunstâncias específicas, das competências necessárias para agir sobre a situação. A segunda classe remete aos contextos para os quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias para lidar com a situação, obrigando-o a refletir e explorar incessantemente as condições disponíveis até chegar ao êxito ou fracasso. Nesses termos, sobre as duas classes de situação Vergnaud (1990, p. 156) explica

No primeiro caso, observarmos, para uma mesma classe de situações, condutas em grande medida automatizadas, organizadas através de um esquema único; no segundo caso, observaremos o desencadeamento sucessivo de diversos esquemas,

que podem entrar em competição e que, para desembocarem na solução procurada, devem ser acomodados, descombinados e recombinaos; este processo é necessariamente acompanhado por descobertas.

Deste modo, para este autor, cada situação atribui a um conceito diferentes significados que, por sua vez, dizem respeito aos diferentes esquemas que são evocados na relação entre os indivíduos e as situações específicas de um conceito. Por exemplo, os esquemas necessários para resolver a adição $1/2 + 1/2$ são diferentes daqueles utilizados para somar $0,5 + 0,5$. No entanto, não necessariamente existe relação entre os esquemas e as propriedades da situação, pois eles referem-se à organização invariante dos sujeitos sobre uma classe de situações dadas, mobilizando conhecimentos em ação, isto é, elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória. Os esquemas podem ser entendidos, portanto, como totalidade dinâmica organizadora da ação do sujeito para uma classe de situações específicas (VERGNAUD, 1994).

Os esquemas são constituídos por invariantes operatórios, compreendidos por este autor como formas explícitas dos objetos e seus predicados que remetem a conceitualização. Os invariantes operatórios podem ser de natureza implícita ou explícita, verdadeira ou falsa. Quando são implícitos, estão vinculados aos esquemas de ação dos sujeitos sem que eles tenham consciência deles, relacionando-se assim a ações não conscientes. O reconhecimento deste tipo de invariante requer a análise dos objetos e propriedades da situação na qual ele esse insere, bem como dos procedimentos utilizados frente a esta situação. Já os invariantes explícitos não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, pois se vinculam a ações conscientes dos sujeitos, podendo ser expressos por palavras e outras representações simbólicas.

Em outras palavras, os esquemas são compostos por regras de ação e antecipações tendo em vista um objetivo. Essas ações são mobilizadas por meio de conceitos e teoremas em ação. Os conceitos em ação, não são propriamente conceitos, mas um objeto, predicado ou categoria que se acredita ser relevante, por sua vez, os teoremas em ação também não são teoremas, mas uma proposição na qual se acredita ser verdadeira (VERGNAUD, 1990). Os teoremas em ação envolvem um sistema de interpretação para qual o sujeito na maioria das vezes não consegue explicitar as bases de seu raciocínio sendo, portanto considerados implícitos. Já os conceitos em ação dizem respeito à seleção de modo explícito, dentre uma variedade de conceitos já disponíveis nas estruturas cognoscitivas dos indivíduos, de informações disponíveis para compreender e agir sobre situações, utilizando conhecimentos predicativos.

É necessária a compreensão de que para Vergnaud (1990) a ação operatória não esgota o processo de conceitualização. Porque aspectos cognitivos implícitos não permitem o debate sobre validade para uma situação, nesse sentido, sem as representações não é possível uma efetiva conceitualização. Portanto, para este autor não é necessária somente uma epistemologia dos conteúdos, mas também uma epistemologia dos sistemas de representação que se pode escolher para cada domínio de conteúdo.

Ainda quanto às representações, cabe salientar que para Vergnaud (1990,p. 180) o sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Mais precisamente, são os esquemas evocados, individualmente, por uma situação ou um significante que constituem o sentido desta situação ou desse significante para o indivíduo. Para este autor, a linguagem exerce uma dupla função, de comunicação e de representação. Mas, não se pode subestimar sua função de auxílio ao pensamento, que só é parcialmente coberta pelas funções de comunicação e representação. É verdade que “a designação e a identificação das invariantes relevam da função de representação; mas não é certo que o acompanhamento pela linguagem de uma atividade manual ou de um raciocínio releve apenas da função de representação” Ademais, para esse teórico a transformação dos invariantes operacionais em palavras e textos não acontece de modo direto. Primeiramente requer do indivíduo aprendizagem e prática da língua natural, bem como de outros sistemas semióticos. Além disso, os sistemas semióticos e linguísticos nem sempre conseguem expressar exatamente o que o indivíduo elaborou mentalmente ao lidar com uma situação, selecionando e processando informações. Por isso, há uma lacuna entre o que indivíduo representa mentalmente e o significado dos sistemas semióticos que ele usa para se expressar. Ou seja, a representação recobre apenas parcialmente a compreensão dos indivíduos sobre as situações. Tendo em vista estes aspectos, Vergnaud (2009) compreende que é essencial no plano pedagógico exercícios de passagem de um material ou outro, ou de uma mesma representação à outra. Considerando que este é um dos meios seguros de fazer as crianças compreenderem, sem dificuldade, os conceitos matemáticos. Porque uma mesma relação matemática pode ser representada de várias maneiras.

Diante destas considerações, constata-se que para Vergnaud (1996), o processo de aquisição do conhecimento se inicia por meio de situações/ problemas já conhecidos. Isto implica num domínio de validade restrita para os conceitos, pois os sujeitos associam os esquemas construídos para um conceito aos raciocínios relativos às suas experiências com ele. Além disso, a apreensão de um conceito relaciona-se também ao nível de desenvolvimento

cognitivo dos sujeitos. Nestes termos, o domínio de validade de um conceito diz respeito a campos conceituais específicos. Estes últimos são definidos como

um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de situações. Para fazer face a essas situações, é preciso um conjunto de esquemas de conceituações e de representações simbólicas. Em geral, a escola busca uma organização hierárquica das formas de organização da atividade. É também corrente tomar-se campo conceitual apenas como o conjunto de conceitos que permitem dar conta de uma situação ou de um conjunto de situações (VERGNAUD, 2003,p.30) .

Vergnaud (1996) afirma que abordar o desenvolvimento cognitivo das crianças a partir da ótica da teoria dos campos conceituais torna-se mais eficaz ao se voltar esta análise para campos de conhecimento específicos. Assim, a supracitada teoria já forneceu contribuições para análise dos processos de aquisição da aritmética elementar (estruturas aditivas; estruturas multiplicativas); para noções elementares de física, biologia e economia; para álgebra elementar e geometria; e para diferentes domínios tecnológicos. Embora Vergnaud (2003) tenha problematizado acerca de diferentes campos conceituais (por exemplo: numérico, algébrico, dentre outros), observa-se em sua obra uma discussão mais explícita às estruturas multiplicativas e aditivas.

As estruturas aditivas, enquanto um campo mais específico no âmbito da aritmética, se constitui por situações que demandam regras operatórias que implicam no uso das operações de adição e subtração e no estabelecimento de relações que incluem duas variáveis que, adicionadas, formam um todo. Por sua vez, as estruturas multiplicativas evocam um conjunto de situações que exigem uma multiplicação, uma divisão, ou uma combinação destas duas operações. Na realidade, o campo conceitual mais específico no âmbito da aritmética que envolve as estruturas multiplicativas não se restringe apenas aos conceitos de multiplicação, mas envolve outras tantas noções como: divisão fração, razão, proporção e probabilidade dentre outros.

Considerando-se que o conceito a ser explorado nessa investigação envolve fração, a presente proposta vincula-se ao campo conceitual da aritmética, especificamente no âmbito das estruturas multiplicativas. Esse campo conceitual envolve relações quaternárias que, por sua vez, são a base da maior parte das situações multiplicativas identificadas por esse teórico. Para ele as relações quaternárias envolvem relações entre quatro quantidades, sendo duas de um tipo e duas outras de outro tipo. Essas relações podem ser representadas de várias formas, que são análogas às utilizadas nas relações binárias e terciárias. É justamente porque este campo conceitual implica em multiplicações e divisões que os números fracionários podem ser analisados dentro do campo das estruturas multiplicativas, até mesmo porque as crianças compreendem primeiramente as frações como operadores, como relações ou como

quantidades antes de compreendê-las como números que podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos.

Por este motivo que os números fracionários não aparecem como números puros no campo das estruturas multiplicativas, mas como medidas e relações; sendo utilizadas de diversas maneiras: seja para representar uma parte de um todo; seja como uma magnitude fracionaria (não podendo ser expressa por um número inteiro de unidades); seja como um par ordenado $\frac{P}{Q}$ de símbolos; seja como uma relação que une duas magnitudes do mesmo tipo (VERGNAUD, 1983).

Neste sentido, o autor afirma que professores não devem esperar que a construção dos conceitos vinculados às estruturas multiplicativas seja fácil, rápida e imediatamente compreendida pelas crianças. Assim, estudar frações, por exemplo, sem considerar os conceitos a elas interconectados (proporção, razão, multiplicação, divisão, entre outros) se constituiria numa falha conceitual e de prática pedagógica irreparável para o estudo de sua origem e desenvolvimento.

No que diz respeito às situações, Vergnaud não realiza uma classificação específica relacionada à fração, entretanto, Nunes et al. (2007) a partir dos pressupostos da teoria dos campos conceituais, delimitaram uma classificação de quatro significados associados às situações que envolvem o conceito de fração, a saber: parte-todo, quociente, operador e medida. O significado parte-todo refere-se à ideia de um todo repartido em partes iguais, por exemplo, um pedaço de uma pizza. O quociente diz respeito a situações de divisão em que o numerador representa o número de elementos a serem partilhados e o denominador o número de receptores dessa divisão por exemplo, duas tortas para três crianças. Quanto ao significado operador, ele está presente em situações nas quais as frações são usadas conjuntamente com números inteiros como, por exemplo, $\frac{1}{3}$ de um salário de 200 reais. Nessa situação, o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação. Finalmente, o significado medida tem relação com situações em que a fração representa a medida da probabilidade de um evento ou da concentração de uma mistura. Como, por exemplo, a probabilidade de retirar uma bola azul de uma caixa que contém quatro bolas azuis e duas brancas.

Quanto aos invariantes relacionados à fração eles podem ser organizados da seguinte forma: i) a divisão equitativa das partes; (ii) o esgotamento do todo; (iii) a relação entre o número de partes e os números de cortes necessários para obtê-las; (iv) a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e (v) o princípio da

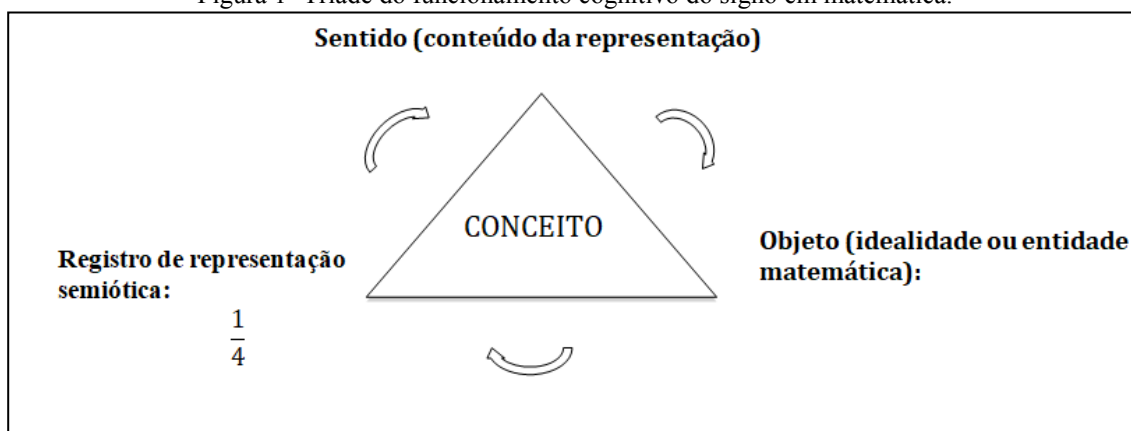
invariância (a divisão do todo em partes não altera a unidade inicial) (NUNES; BRYANT, 1997; SPINILLO; LAUTERT, 2006). Nunes e Bryant (1997) destacam, ainda que a equivalência e a ordem como as relações mais difíceis de serem realizadas pelas crianças, principalmente, tendo em vista a compreensão destes aspectos em um campo numérico diferente daqueles dos números naturais.

No que diz respeito às representações, Vergnaud (2009, p. 18) argumenta que a noção de “representação está, como a noção de procedimento, no centro da psicologia científica moderna. [...] a noção de representação não se reduz à noção de símbolo ou de signo, uma vez que ela cobre também a noção de conceito”. Neste sentido, para este autor, o símbolo é apenas a parte diretamente acessível aos sentidos de um conceito, pois, estes apenas adquirem sentido por meio da atividade prática e conceitual do sujeito no mundo real. Isso porque Vergnaud considera que as representações não se reduzem diretamente ao mundo material, pois elas não representam apenas objetos materiais, mas significados que os sujeitos atribuem aos conceitos. Esse autor, não postula teorizações específicas para as representações de fração, tendo em vista que seu foco principal recai sobre as situações e invariantes.

Nesta investigação compreende-se que as contribuições relativas as duas teorias previamente apresentadas sejam complementares entre si, pois permitem ampliar a compreensão acerca das conversões de frações. Nesse sentido, é pertinente a explicitação de algumas convergências e divergências percebidas nas elaborações teóricas dos supracitados autores. Para tal, tomam-se como parâmetros a noção de aprendizagem matemática para cada autor, considerando a função das representações nesse processo.

Para Duval, a compreensão em matemática tem como condição fundamental a diferenciação entre um objeto matemático e sua representação. Para isso é preciso ter acesso a registros de representação diferentes de um mesmo conceito. Nesse sentido, o signo exerce um papel fundamental no processo de conceitualização em matemática, tornando necessária a compreensão de suas características e modos de funcionamento. Para melhor entendimento desse aspecto a Figura 1 a seguir, adaptada de Colombo, Flores e Moretti (2007), expressa a tríade defendida por Duval (2009) para a compreensão do funcionamento do signo em matemática.

Figura 1- Tríade do funcionamento cognitivo do signo em matemática.



Fonte: Adaptação de Colombo, Flores e Moretti (2007, p. 194)

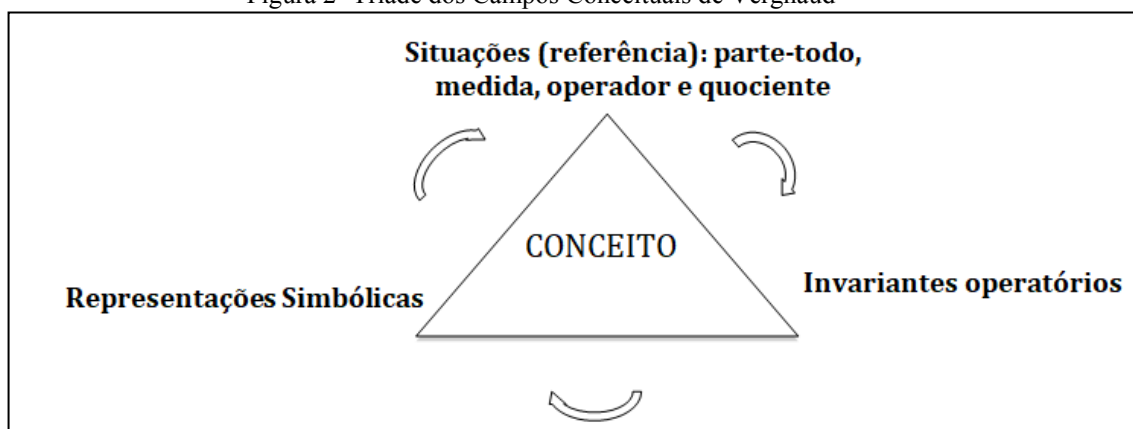
A ilustração acima expressa que um registro de representação semiótica como simbólico fracionário, por exemplo, refere-se ao objeto matemático fração e produz um sentido que vai depender das propriedades e características reveladas pelo registro utilizado. Nestes termos, um registro de representação semiótica expressa apenas parcialmente o conteúdo de uma representação, revelando apenas facetas de um objeto matemático (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2007).

Como exemplo dessa característica dos sistemas semióticos, pode-se utilizar o registro de representação semiótica $\frac{1}{4}$ que exprime o número racional em termos de sua divisibilidade e razão, esse mesmo número é visualizado em função das propriedades posicionais do sistema decimal ao utilizarmos a representação 0,25 e pode, ainda, expressar uma relação com a centena se representado como 25%. Cada uma dessas representações possui a mesma referência, mas não o mesmo sentido e custo cognitivo (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2007). Deste modo, para Duval (2009), a aprendizagem ocorre quando o sujeito é capaz de mobilizar, instantaneamente, um registro de representação semiótica do objeto matemático, escolhido entre os muitos que se apresenta, de modo a favorecer a resolução de um dado problema da forma mais eficaz possível.

Vergnaud (1996), por sua vez, considera que a aprendizagem matemática tem como fator aspecto primordial a conceitualização que acontece por meio de campos conceituais. Esses últimos são desenvolvidos por um longo tempo que varia para cada indivíduo em função das experiências, maturidade e aprendizagens alcançadas.

A organização dos campos conceituais, se dá, conforme já explicitado, a partir de uma terna de conjuntos, a saber: os invariantes operatórios, as situações e as representações. Desse modo, as ideias fundamentais para compreender a aprendizagem matemática em Vergnaud também baseiam-se numa tríade, conforme explicitado a seguir:

Figura 2- Tríade dos Campos Conceituais de Vergnaud



Fonte: Adaptação de Colombo, Flores e Moretti (2007, p. 195)

Nessa figura é possível visualizar o conceito como elemento principal a partir do qual a tríade se organiza. Para Vergnaud (1996) a compreensão em matemática implica considerar esses três conjuntos de forma indissociável. Quanto este ponto surge uma divergência entre Vergnaud e Duval. Enquanto o primeiro autor considera que não se pode reduzir o conceito aos seus significantes e situações, o segundo afirma que o signo é central para apreensão conceitual em matemática (DUVAL, 2006; COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2007; FREITAS; RESENDE, 2013).

Os mesmos exemplos utilizados para exemplificar a tríade de Duval podem ser utilizados para os campos conceituais. Os registros de representação semiótica $\frac{1}{4}$, 0,25 e 25% formam o conjunto de representações simbólicas, os invariantes operatórios são as propriedades e relações pertencentes às estruturas multiplicativas (por exemplo, equivalência, invariância do todo, igualização das partes) e as situações são aquelas que fornecem sentido ao conceito, no caso de fração, seriam parte-todo, quociente, operador e medida (NUNES et al., 2007).

Diante do exposto, pode-se afirmar, que para Duval as representações semióticas são consideradas como o cerne da compreensão em matemática, principalmente no que diz respeito à conversão. Para Vergnaud (1996), as representações (não apenas semióticas) são vistas em termos das situações e invariantes que permitem sua operacionalidade.

Os dois teóricos apresentados são psicólogos cognitivistas, preocupados com a aprendizagem matemática, a convergência entre eles repousa no fato de que ambos, a partir de suas perspectivas, se apoiam em operações cognitivas do pensamento para entender como se aprende matemática. As definições apresentadas por estes autores salientam as representações, suas características e transformações, bem como os conceitos, seus

invariantes e representações, estes aspectos são igualmente relevantes para a análise de fenômenos relativos ao conhecimentos matemáticos. Nesse sentido, vislumbra-se a complementaridade destes quadros teóricos a partir da integração de suas contribuições, considerando-se que Duval permite a análise das atividades cognitivas vinculadas ao ato de representar e Vergnaud possibilita compreender como os campos conceituais se relacionam na produção e desenvolvimento de conhecimentos de frações, bem como de suas representações. Enquanto Duval centra-se nas múltiplas representações dos objetos matemáticos e nas transformações entre elas, Vergnaud enfatiza a organização das estruturas cognitivas relativas a conteúdos específicos do conhecimento em função das situações (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2007).

Tendo posto os pressupostos teóricos que ancoram esta investigação, a seguir serão discutidos outros autores e estudos que abordam relações entre representações semióticas e o conhecimento. Posteriormente serão apresentados estudos que reportam elaborações teóricas e evidências empíricas sobre conversões entre representações.

2.1.3 Representações semióticas e conhecimento

Para Piaget (1896 – 1980) o conhecimento pode ser caracterizado por dois tipos de estrutura: as figurais, relativas às percepções e imagens mentais e; as ações ou operações, relativas organização das condutas dos indivíduos. As estruturas figurais remetem as representações internas dos objetos do conhecimento enquanto as estruturas das ações orientam-se pela transformação das representações. Para este teórico, o conhecimento se origina das ações (reais ou interiorizadas) em detrimento da linguagem. Isso porque para esta última é compreendida tão somente como parte da função semiótica, isto é, de representar um objeto ausente. Neste sentido, os signos e símbolos passam a ver veículos para expressar componentes da estrutura mental dos indivíduos (D'AMORE, PINILLA, IORI, 2015).

Outra compreensão sobre esta relação entre representações semiótica e conhecimento é apresentada por Vygotsky (1886 – 1934) que analisa os processos mentais humanos, salientando que a distinção entre os seres humanos e outros animais repousa na capacidade de usar signos naturais e na plasticidade semiótica, isto é modificação da mente humana pelo uso dos signos. Logo, os signos são instrumentos cuja finalidade é controle dos processos mentais. Nesse sentido, o desenvolvimento cognitivo é descrito em termos de interações sociais que são interiorizadas por meio da mediação semiótica. Esta última pode ser orientada para o objeto (reflexo condicionado) ou para o interior (internalização). Em

síntese, o signo para Vygotsky é um mediador entre o indivíduo e o contexto, cuja principal função é a formação do significado que conduz ao conceito de uma palavra, tornando indissociável a relação entre linguagem e pensamento (VIGOTSKY, 2007; D'AMORE, PINILLA, IORI, 2015)

Já Eco (1986) concebe que a semiótica diz respeito a todos os processos culturais de comunicação que se estabelecem por meio de um sistema de significação, que por sua vez, diz respeito à passagem de mensagem a um destinatário por meio de um signo. Partindo desse pressuposto, este teórico problematiza que é preciso pensar a semiótica a partir de dois aspectos: a semiótica da significação, relativa ao estudo dos sistemas de significação e; a semiótica da comunicação, que estuda os processos de comunicação. Ao convencionar que os fenômenos culturais sejam sistemas de signos, Eco (1986), descola a atenção da semiótica da comunicação para semiótica da significação, explicitando a compreensão das representações englobam esforços interdisciplinares de áreas como a linguística, as ciências cognitivas e a filosofia, por exemplo (D'AMORE; PINILLO; IORI, 2015).

Olhando para relações entre representações semióticas e conhecimento, no domínio específico da matemática, Nunes (1997), baseada nas ideias de Vygotsky, explica que os processos de mediação semiótica são essenciais para o desenvolvimento das funções mentais superiores. Isto porque as ferramentas culturais de mediação semiótica (físicas ou mentais) permitem ao ser humano ampliar suas capacidades para além de suas limitações orgânicas. No que diz respeito ao pensamento matemático, os signos habilitam aos indivíduos agir, perceber e raciocinar para além de seus limites naturais. O sistema de numeração decimal, por exemplo, permite a modelagem da atividade matemática de forma tão significativa que somos capazes de produzir números que sequer conhecemos se formos capazes de compreender a lógica de agrupamento decimal (NUNES, 1997).

Nunes (1997) defende, ainda, que os sistemas de signos nos habilitam a modelar a atividade de forma significativa. O mais alto número que pode ser produzido por um sujeito que domina o sistema de contagem (numeração) do seu ambiente não simplesmente determinado por sua memória, mas pelo sistema. No entanto os diferentes sistemas de signos têm impactos particulares para o raciocínio. Nesse ínterim, a autora, classifica representações enquanto extensas e compactas. As representações extensas remetem ao estabelecimento da correspondência entre um signo para cada objeto, enquanto as representações compactas dizem respeito à possibilidade de representar nem necessitar da correspondência signo-objeto. Por exemplo, o número três pode ser representado de forma extensa por três bolinhas, mas pode ser também de forma compacta quando se usa o numeral três. Nestes termos

compreende-se que uma unidade por ter diferentes representações que de acordo com sua natureza mobilizam aspectos do raciocínio. Em suas investigações, Nunes (1997) observou que crianças têm preferência por representações extensas no lugar das representações compactas e que do ponto de vista matemático as representações compactas permitem uma ampliação conceitual, por exemplo, podemos escrever o número quatro de forma extensa usando a representação $1+1+1+1$. Mas também se pode utilizar o numeral 4 que representa a quantidade de elementos adicionados, remetendo ao conceito de cardinal. Logo, a representação compacta requer que significados sejam condensados e compreendidos em uma representação que não explicita os elementos de modo discreto.

Diante destas compreensões, percebe-se que existe uma estreita relação entre as representações semióticas e o conhecimento matemático. A natureza das representações pode influenciar no raciocínio no desempenho de crianças que consequentemente conduzem a uma ampliação conceitual. Este aspecto é extremamente desejável quando se pensa no ensino e a aprendizagem da matemática. É considerando esta perspectiva que, a seguir, apresentam-se alguns estudos que obtiveram evidências empíricas quanto a estes aspectos.

2.1.4 Estudos empíricos sobre representações e conceitos matemáticos

As relações entre representações e conhecimento matemático têm sido abordadas por inúmeros estudos (AINSWORTH, 2006; BOSSÉ; ADU-GYAMFI; STIFF, 2011; BOSSÉ; ADU-GYMFI, CHANDLER, 2011; BOSSÉ; ADU-GYAMFI; CHEETAM, 2014; GAGATSIS; SHIAKALLI, 2014), considerando não apenas as características de representações de modo isolado, mas também a necessidade da conversão entre elas. Deste modo, Lesh, Post e Behr (1987) discutem o papel das representações (externas) e das conversões entre elas, evidenciando como elas se relacionam à aprendizagem matemática e a resolução de problemas. O estudo partiu da análise de cinco tipos de sistemas de representações: *roteiros baseados na experiência* – conhecimento organizados a partir da vida cotidiana de modo a auxiliar na interpretação e resolução dos problemas; *modelos manipulativos* – materiais como barra de fração, material dourado, escalas *cuisinare*, dentre outros cujos elementos só tem significados quando associados a situações cotidianas; *figuras ou diagramas estáticos* - representações que podem ser internalizadas como imagens; *línguas faladas* – língua materna e línguas especializadas como aquela do domínio da lógica; símbolos escritos – assim como as línguas faladas envolvem sentenças especializadas como as equações, por exemplo. Estes aspectos são discutidos a partir de extratos de protocolo de

estudos anteriores realizados pelos autores. Para os autores, os resultados obtidos evidenciam a necessidade compreender a especificidade de cada tipo de representação, bem como da conversão entre elas. Isso porque foram encontradas evidências de que as dificuldades com a conversão são fatores que influenciam a aprendizagem matemática quanto à compreensão e resolução de problemas.

No diz respeito à conversão no domínio das funções, Gagatsis e Shiakalli (2004) investigaram a habilidade de 194 estudantes universitários para realizar conversões entre representações de funções quando partiam de um enunciado verbal, gráficos e de equações. Os resultados obtidos indicaram que dentre os fatores que afetam o desempenho da resolução de problemas está incluída a conversão e suas especificidades. Outra evidência encontrada é que os estudantes não identificaram que todas as conversões propostas tratavam do conceito de funções. Isto indica que para ter uma estrutura completa e coerente para a conceitualização de funções é necessário conhecer e coordenar todas as suas representações. As autoras também evidenciaram que os desempenhos dos alunos diferem em função das representações requeridas para a conversão. Este fato indica que cada representação requer lidar com campos semânticos diferentes, pois cada representação informa aspectos diferentes dos conceitos. A conclusão geral do estudo é que a habilidade de converter diversas representações de função é fundamental para resoluções de problemas bem sucedidas.

Tendo em vista a perspectiva do ensino, Ainsworth (2006) desenvolveu um modelo para a aprendizagem de múltiplas representações. A autora integrou contribuições diversas da literatura para construir sua proposta de modelo teórico, considerando cinco aspectos: *o número de representações; a forma como a informação é distribuída; a forma do sistema de representação; a sequência das representações; a conversão entre as representações*. Para a autora, o modelo criado descreve aspectos importantes a serem considerados na aprendizagem de representações, além de atender a função pedagógica de auxiliar na criação de designs de ensino. Ressalta-se a conclusão da autora quanto ao fato da importância e uso de múltiplas representações ser subinvestigada. Neste sentido ainda são necessárias explicações e evidências para permitir uma compreensão aprofundada das relações entre matemática e linguagem.

Nessa direção Bossé, Adu-Gyamfi e Stiff (2011) buscaram situar os erros cometidos por estudantes ao converter representações matemáticas no contexto de um modelo desenvolvido especificamente para o estudo. Os autores elaboraram uma classificação referente a três tipos de ações que os estudantes realizam ao converter, são elas: *implementação e verificação* –confirmação de que um algoritmo representado a partir da

estrutura de uma representação inicial foi corretamente elaborado; *verificação do atributo* – confirmação de que as propriedades da representação inicial foram corretamente convertidas; *verificação da equivalência* – confirmação de que todos os aspectos relativos à estrutura e propriedades da representação inicial preservaram seu significado matemático. A partir deste modelo, 43 estudantes de um curso de Álgebra no Ensino Superior, foram submetidos a um questionário que mensurava suas habilidades em cada uma das ações relacionado-as a representações de funções. Os resultados indicaram que erros relativos à *verificação e implementação* ocorreram com maior frequência quando a conversão acontecia de uma equação para um gráfico ou tabela ou vice e versa. Para os autores essa evidência tem relação com a distância cognitiva entre uma ação de conversão e a resolução do algoritmo, uma vez que ambos os aspectos requerem mobilizar estruturas cognitivas diferentes. Erros relativos a *verificação dos atributos* foram identificados em maior frequência em conversões que partiam de uma tabela para um gráfico ou equação. Tal resultado é explicado pela natureza local e global das interpretações requeridas para converter uma tabela. Por fim, os erros *de verificação da equivalência* foram mais frequentes em conversões de um gráfico para equações ou tabelas. Para os autores esses erros acontecem porque os estudantes não comparam o gráfico com construído com a equação ou tabela. Tais resultados revelam evidências que ajudam na compreensão das dificuldades enfrentadas por estudantes quanto a conversões entre representações no domínio das funções.

Outro estudo relativo à exploração da natureza dos erros dos estudantes ao converter foi conduzido por Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetam (2014). Os autores investigaram dificuldades relativas às conversões entre representações matemáticas tanto do ponto de vista de estudantes como dos professores. Neste sentido, estas duas dimensões foram sintetizadas em busca da elaboração de um modelo para a análise da natureza das dificuldades com as conversões. Para tal, foi realizada uma revisão integrativa da literatura evidenciando três aspectos: as dificuldades dos alunos com representações específicas; a influência das crenças docentes para o desempenho dos estudantes e; os tipos de ações vinculadas à conversão. Assim, as dificuldades dos estudantes com representações específicas foram sintetizadas da seguinte forma:

- *Conversões entre representações numéricas, algébricas e gráficas*: os autores identificaram que a literatura revela dois tipos de erros referentes a essas representações. O primeiro é relativo aos *erros de manipulação* originados por cálculos aritméticos ou algébricos realizados de modo incorreto. O segundo

tipo são os *erros conceituais* que acontecem quando propriedades são utilizadas de modo incorreto ou ignoradas.

- *Conversões que tem representações verbais como ponto de partida ou chegada*: para este tipo de conversão foram observados dois tipos de erros: dificuldade no processo de correspondência com as palavras; comparação estática. O primeiro tipo de erro diz respeito a situações em que o estudante assume que a ordem das palavras corresponde a ordem em que os símbolos aparecem em uma equação, conforme evidenciado por Clement (1982). Já no erro de comparação estática do processo os estudantes consideram o significado das palavras, mas tem dificuldade em expressar as relações presentes no problema.

Além dos aspectos que dizem respeito aos tipos de erros dos estudantes, Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetam (2014) também verificaram contribuições da literatura quanto à percepção dos professores sobre os erros dos estudantes. Foram evidenciadas inúmeras pesquisas que reportam a existência de relações entre as habilidades dos estudantes com algumas conversões e as expectativas dos professores no que diz respeito às habilidades dos alunos. Isto é, o fato de um professor acreditar (ou não) na capacidade dos estudantes para realizar conversões específicas podem justificar as dificuldades apresentadas pelos estudantes com essas mesmas representações. No entanto os autores chamam atenção para que explicar estes aspectos apenas pelas crenças de docentes não é suficiente para compreender as dificuldades dos alunos.

Outro aspecto investigado por Adu-Gyamfi e Cheetam (2014) foram as atividades ou ações que os alunos realizam ao converter. Os autores categorizaram as ações que os alunos usam para converter em dois tipos. A primeira foi chamada como *ação construtiva* que se refere a gerar partes que não são dadas como, por exemplo, construir um gráfico a partir de tabelas ou funções. Cada ação construtiva de conversão se associa com técnicas e heurísticas específicas. O segundo tipo foi denominada como *ação interpretativa*, ela diz respeito a interpretações locais e globais dos elementos que precisam ser convertidos. O conjunto de resultados apresentados pelos autores contribui para a compreensão de estratégias de conversão utilizadas por estudantes e das ações requeridas para essa atividade.

Tendo exposto algumas contribuições relativas à compreensão de aspectos cognitivos mobilizados ao converter representações matemáticas, evidencia-se que os estudos que

aprofundam estratégias e características das conversões, centram-se no conceito de função, analisando, gráficos, equações dentre outros aspectos semióticos vinculados à Álgebra. Neste sentido, no tópico a seguir serão apresentados alguns estudos voltados para o domínio das frações, considerando aspectos vinculados às suas representações a conversão entre elas.

2.2 ESTUDOS EMPÍRICOS SOBRE O CONCEITO DE FRAÇÃO: ASPECTOS CONCEITUAIS E SEMIÓTICOS

Essa seção tem como finalidade apresentar e discutir contribuições de diversos estudos de cunho teórico e empírico sobre frações. Nesse sentido, as investigações selecionadas para compor essa discussão fornecem elaborações teóricas ou empíricas que ajudam na compreensão dos seguintes aspectos: a relevância do conceito de fração; a compreensão da magnitude numérica das frações; as múltiplas interpretações possíveis das frações; representações de frações e seus impactos para a aprendizagem. Cada um desses aspectos será discutido a seguir.

2.2.1 A relevância do conceito de fração e a ideia de unidade

Um primeiro aspecto a ser considerado sobre fração é a relevância de sua aprendizagem. Behr et al (1983) situam a importância desse conceito partir de três perspectivas: a prática, a psicológica e a matemática. Do ponto de vista prático, lidar com os números racionais pode contribuir para compreensão e resolução de problemas do mundo real. Do ponto de vista psicológico, as frações promovem uma base para a continuidade do desenvolvimento intelectual de raciocínios acerca de outros aspectos matemáticos como razão e porcentagem, por exemplo. Do ponto de vista matemático, as frações são o fundamento para o desenvolvimento dos conhecimentos algébricos.

Streefland (1978) explica que o conceito de fração serve como um meio para organizar os fenômenos presentes nas situações matemáticas de modo a se apropriar delas tanto numericamente como verbalmente. Nunes et al. (2005) complementa que usamos as frações para expressar quantidades representadas por unidades diferentes que podem ser reunidas em um todo. Apesar da importância desse conceito, sua aprendizagem não é espontânea nem natural, gerando muitos obstáculos para seu ensino e aprendizagem (PITKETHLY; HUNTING, 1996). Sobre este aspecto, Streefland (1978) afirma que a causa de muitas das

dificuldades advêm de uma análise precária do conceito em seu sentido didático-matemático e a negligência de suas consequências psicológicas.

Para Vergnaud (1983) a maior dificuldade dos estudantes consiste na compreensão de que frações, por serem números baseados em estruturas multiplicativas, expressam medidas e relações. Do ponto de vista matemático, o conceito de número racional é definido como uma classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros. Essa é uma definição imprecisa porque a palavra fração pode ser utilizada para designar uma parte de um todo, um par ordenado de símbolos $\frac{p}{q}$ ou a relação entre duas magnitudes de mesmo tipo (pedaços de uma torta). No entanto, frações também podem se relacionar com magnitudes de diferentes tipos (quantidade de pedaço de torta por criança). Além disso, as frações também expressam quantidades que podem ser comparadas aos números inteiros (em sua representação decimal e na reta numérica) (VERGNAUD, 1983).

Percebe-se assim que a fração é um conceito de natureza multifacetada. Além dos aspectos já mencionados, a compreensão das frações também pode variar em função do tipo de quantidade ao qual elas se relacionam. Quando consideradas no contexto das quantidades tanto contínuas (pizza, chocolate, bolo) expressam uma magnitude que pode ser partilhada (a quantidade de pedaços de bolo distribuídos). Já em relação às quantidades discretas, as frações normalmente podem ser contadas (cinco é igual a um quarto de uma coleção de 20 carrinhos). Para Vergnaud (1983) é fundamental a compreensão e distinção entre esses dois contextos de natureza diferente. Isso porque as crianças se acostumam, ao lidar com números naturais, com a possibilidade de associar os números e suas quantidades de modo direto por meio da contagem. No entanto, isso não se aplica às frações porque as quantidades que elas expressam remetem a relação entre duas quantidades. Estes aspectos remetem à compreensão da ideia de unidade nas frações.

Segundo Pitkety e Hunting (1996) este é um aspecto controverso na literatura. Por um lado, autores como Steffe e Olive (1993) defendem a noção de unidade como aspecto que pode auxiliar na compreensão dos números racionais, pois encontraram evidências de que crianças pequenas utilizam os esquemas dos números inteiros para desenvolver sua compreensão dos números fracionários. Por outro lado, existem posições como a de Ball (1993) e Moreira e David (2008), que consideram os conhecimentos dos números inteiros inibidores da compreensão de fração. A principal justificativa para esse ponto de vista repousa no entendimento de que o modo como os símbolos relativos a frações são introduzidos acontece de forma prematura, antes do estabelecimento das bases conceituais, levando a

compreensão de que as representações de frações tratam de números inteiros separados por vírgulas ou por um traço.

A dificuldade relativa à noção de unidade se deve ao fato de que o “um” é a unidade do número inteiro, mas também é a unidade em que o esquema do número racional se baseia. Entretanto, no contexto dos números racionais o “um” é também uma unidade que pode ser medida, fracionada e dividida. Nesse sentido, a compreensão de frações requer a transição do raciocínio aditivo para o multiplicativo, exigindo uma reconceptualização da noção de unidade. As estruturas multiplicativas põem em cena o trabalho com unidades compostas ao invés de unidades simples, o que afeta a construção da noção do número (MOREIRA; DAVID, 2008). Portanto, um conceito flexível de unidade é importante para todas as interpretações posteriores do número racional, pois como afirmam Cruz e Spinillo (2014), de posse da compreensão de unidade, a criança terá possibilidade de crescer no uso de linguagem e símbolos de números racionais para se adequar a crescente complexidade e sofisticação das suas ações com fração. A compreensão da noção de unidade remete também à percepção da magnitude numérica. Neste sentido, a seguir serão apresentados estudos que enfatizam esse aspecto.

2.2.2 A magnitude numérica das frações

Outro aspecto abordado na literatura sobre fração diz respeito a sua magnitude absoluta e relativa. Carraher e Schiliemann (1992) ao analisar respostas de crianças para problemas que abordavam fração de forma absoluta e relativa perceberam que os alunos tendem a identificar o numerador e o denominador como indicando, respectivamente, o número de elementos marcados e o número total de elementos em um conjunto (versão absoluta). Além disso, não aceitam como válidas figuras que não preencham estes critérios, mesmo quando as figuras representavam frações equivalentes (versão relativa). Essas evidências sugerem que a prática de ensinar o aluno a considerar que o denominador representa a divisão do todo e o numerador a parte considerada desta divisão pode ser um obstáculo para a compreensão de frações equivalentes e mistas (CARRAHER; SCHILIMANN, 1992; NUNES, 2003).

Faulkenberry e Pierce (2011) propuseram a estudantes de graduação 48 pares de fração em sua representação do tipo $\frac{a}{b}$, solicitando escolha da fração de maior magnitude numérica. O intuito desta tarefa era examinar os tipos de estratégias utilizadas e a formação de

representações mentais de frações. Três tipos de estratégias foram utilizados pelo participantes: a) já sabia a resposta; b) uso dos componentes da fração para acessar a magnitude (por exemplo, a multiplicação cruzada ou a conversão para o decimal); c) a compreensão numérica holística (por exemplo, visualização concreta ou uso de um ponto de referência). A partir de uma entrevista com os participantes sobre as estratégias utilizados, foram produzidas evidências de que as representações mentais formadas para a comparação de fração dependem de dois aspectos: a natureza das frações sendo comparadas e o tipo de estratégia usada para efetuar comparações. Todavia, o tipo de estratégia utilizada para efetuar a comparação parece ser o fator mais importante para determinar o tipo de representação mental a ser formada.

Outro estudo com preocupações relativas à magnitude foi o de YunQui e Siegler (2013), que examinaram e compararam as representações fracionária e decimal e termos de sua transparência na visualização da quantidade que expressam. Os autores analisaram, ainda, o quanto a exposição visual das representações de magnitude fracionária pode impactar em habilidades relativas aos números racionais como estimar e converter. A técnica utilizada foi a realização de uma intervenção, com crianças do 4º e 5º anos dos Estados Unidos, examinando três condições. A primeira delas abordou a estimativa de números racionais em suas representações fracionária e decimal, utilizando uma reta numérica delimitada do 0 ao 1. A segunda condição tratou de uma representação denominada como circular, na qual as crianças deveriam sombrear bordas para representar números de 0 a 1 e gerar, através do computador, representações corretas de magnitudes no círculo. A terceira condição se referia a apresentação de um livro didático as crianças, requisitando a leitura e resolução de exercícios da unidade destinada a frações. O estudo produziu evidências de que a representação decimal é mais transparente na visualização da magnitude numérica, sendo mais precisa e linear do que a representação fracionária. Os processos de instrução pautados na representação circular e no livro didático se mostraram menos efetivos, em termos de desempenho, do que a reta numérica. Em suma, a reta numérica parece ser uma ferramenta essencial para promover as habilidades de estimar e converter frações, na medida em que propicia melhor compreensão de sua magnitude numérica.

O estudo Zhang et al. (2013) também compararam as representações fracionárias e decimais, mas em termos de processamento. Para tal, utilizaram uma tarefa que envolvia a combinação de frações simbólicas e não simbólicas. A técnica utilizada foi ERP (*event related potential*). Os participantes foram 14 estudantes universitários que foram submetidos a uma tarefa de comparação de magnitudes sob duas condições. Na primeira, eram apresentados

a um quadro dividido em duas partes, no lado direito continham frações simbólicas comuns do tipo $\frac{a}{b}$ e no lado esquerdo frações não simbólicas (desenhos). A segunda condição apresentava novamente um quadro dividido em duas partes, no lado direito havia frações no registro decimal e no lado esquerdo por frações não simbólicas. Os participantes foram requisitados a identificar se uma fração simbólica apresentada correspondia a mesma fração apresentada de forma não simbólica. Os resultados sugerem que a identificação visual é diferente para frações comuns e decimais. A velocidade das respostas foi mais lenta para as frações comuns do que para as frações decimais. Foi evidenciado que, para comparar frações decimais, os participantes tendem a dividir a figura não simbólica de fração em 10 partes iguais, tendo em vista que as frações decimais se baseiam em unidades de 10. Essa mesma estratégia não pode ser utilizada para frações comuns. A magnitude numérica da fração decimal parece ser menos complexa do que da fração comum em termos semânticos. Os resultados sugerem que a notação comum da fração apresenta maior complexidade para seu processamento. Fica em aberto do ponto de vista psicológico, a explicação sobre a origem dessas diferenças.

Kallai e Tzelgov (2014) investigaram o processamento da representação decimal de frações. Os autores criaram quatro experimentos considerando rapidez, automaticidade, controle do número de dígitos e controle da posição do zero nas representações. Os participantes foram 20 estudantes universitários de cursos aleatórios. O experimento foi conduzido com o uso de um computador no qual os participantes deveriam apertar teclas para indicar respostas corretas e receberiam um *feedback* de acerto e ou erro. De modo geral, foi observada que a quantidade de dígitos exerce influência na performance e que não há uma compreensão holística da representação decimal. Assim, o estudo fornece evidências de que os decimais não são processados automaticamente, demonstrando que esse tipo de representação simbólica não é rapidamente acessado em termos de sua magnitude numérica, mesmo para adultos. Fica em aberto ainda a investigação sobre a influência de diferentes situações didáticas para o acesso dos indivíduos a magnitude numérica de frações.

Quanto aos aspectos que influenciam no acesso às magnitudes numéricas na representação fracionária, DeWolf e Vosniadou (2014) investigaram se alunos de graduação conseguem acessar frações como um todo, através da captação direta de sua magnitude, ou se buscam apoio em seus componentes (numerador e denominador). Foram realizados dois experimentos. Em ambos eram apresentados pares de frações a serem ordenados, mas apenas em uma condição se controlou a distância entre as frações. Neste último, foram usados dois

subconjuntos de frações com pouca e muita distância entre elas. Os resultados produziram evidências de que a precisão da ordenação é dependente da distância entre as magnitudes fracionárias, sendo menor quando a distância entre as frações é pequena. Quanto a forma de acesso a magnitude, novamente a distância demonstrou ser um aspecto de influência significativa. Haja vista que foi percebido que quanto menor era a precisão da magnitude numérica para o participante maior a interferência dos componentes da fração, numerador e denominador, no processamento da fração como um todo. Diante destas evidências, é compreendido que as representações de fração não são baseadas numa compreensão inata do sistema numérico que inclua os racionais dentro dos números reais. A aprendizagem de fração se dá por mudança conceitual, uma vez que as representações não são produto de um desenvolvimento contínuo.

Em oposição ao estudo acima, Hurst e Cordes (2016) investigaram se números racionais (fracionários e decimais) e números inteiros são representados a partir de um contínuo mental único e integrado. Os participantes foram estudantes universitários que se submeteram a três diferentes tarefas envolvendo a ordenação de magnitudes numéricas em diferentes representações, bem como tarefas procedimentais com as notações de fracionárias e decimais. Os resultados do estudo evidenciaram que existe uma compreensão dos números racionais (fração e decimal) e números inteiros como um contínuo integrado, independentemente de suas notações. Nas tarefas propostas percebeu-se que os participantes apresentaram mais dificuldades com a representação fracionária do que com de números decimais e inteiros. Essas dificuldades parecem pertencer a aspectos vinculados a representação em si em detrimento da magnitude, uma vez que, a notação de fração foi considerada menos transparente que a notação decimal em termos de sua magnitude. Outro resultado foi que de que, para adultos, parece haver uma vantagem, do ponto de vista de procedimentos aritméticos, da notação fracionária sobre a notação decimal.

Estes estudos evidenciam a complexidade associada à visualização seja mental ou semiótica da magnitude expressa pelas frações, no entanto, para além desta compreensão diversos estudos apontam que as diversas situações nas quais a fração se insere como responsável pela dificuldade dos estudantes em compreender e visualizar frações tanto do ponto de vista quantitativo como conceitual. Neste sentido, a seguir serão apresentados estudos que enfatizam as diferentes situações relacionadas ao conceito de fração.

2.2.3 As diferentes interpretações da fração

Inúmeros estudos têm discutido as diversas interpretações que podem ser assumidas pela fração, que por sua vez, resultam em diferentes constructos ou situações relacionadas a esse conceito. Neste estudo, optou-se pelo uso do termo situação para fazer referência às diferentes interpretações que podem ser originadas pelo contexto no qual as frações se inserem. Essa escolha se justifica pela necessidade de enfatizar as diferenças quanto aos aspectos cognitivos mobilizados para cada conceito em função das diferentes situações em que podem se inserir, conforme postulado por Vergnaud (1983; 1994; 2009; 2011; 2017).

Kieren (1976) foi um dos primeiros autores a introduzir a ideia de que a compreensão das frações implica no entendimento de suas várias situações (denominadas pelo autor de constructos). Este autor elaborou uma análise conceitual detalhada dos números racionais salientando diferentes habilidades relativas às diversas interpretações possíveis para frações. Os modelos teóricos definidos por este autor influenciaram o desenvolvimento de diversos outros estudos acerca de frações. Nesse contexto, destaca-se a contribuição de Nunes et al. (2007), baseados na teoria dos campos conceituais, que postulam quatro diferentes situações nas quais as frações assumem diferentes significados, a saber: parte-todo, quociente, operador e medida. As definições para cada situação serão apresentadas na sequência.

Situação parte-todo: essa situação é tipicamente usada quando há um todo selecionado em partes iguais. A situação parte todo é representada tanto por situações contínuas (área, largura, volume) como por discretas (contagem). Cabe ressaltar a explicação (Behr et al., 1982) de que essa situação só se aplica quando dois conjuntos A e B são comparados e o conjunto A é um subconjunto de B. Nessa situação, o denominador significa o número igual de partes no qual o todo foi dividido e o numerador o número de partes tomadas. Por exemplo, se foram comidos $\frac{7}{3}$ de um bolo, então ele foi dividido em sete pedaços e foram comidos três. A situação parte-todo é um importante alicerce para a compreensão de outras interpretações de fração.

Situação quociente: remete a situações que envolvem a divisão de quantidades contínuas nas quais o numerador representa o número de elementos a ser divididos e o denominador o número de recipientes. A principal estrutura cognitiva usada por esta situação é a partição. Nesse contexto, a representação $\frac{3}{4}$, por exemplo, significaria três barras de chocolate dividida por quatro crianças. Nunes et al. (2007) chamam a atenção para o fato de que essa representação também pode ser compreendida como o número de barra de chocolate dividida por criança, uma vez que $\frac{3}{4}$ pode ser interpretado como $3 \div 4$. Logo, a fração como quociente

pode ser compreendida tanto enquanto relação entre duas medidas (três barras e quatro crianças) como resultado da divisão (cada criança receberá $\frac{3}{4}$ da barra. Considerar a fração enquanto quociente requer relacionar duas variáveis: o número de chocolates e o número de crianças.

Situação operador: essa situação refere-se a contextos nos quais as frações remetem a uma quantidade discreta, servindo como operadores para números inteiros. Isto é, como um multiplicador ou divisor que pode ampliar ou reduzir um conjunto discreto. Por exemplo, na situação “Quanto é $\frac{3}{5}$ de 30 figurinhas?” o denominador indica a divisão e o numerador a multiplicação. Pela divisão de 40 por quatro e multiplicando esse resultado por três se descobre o valor de $\frac{3}{5}$ de 30. Nessa situação os números três e cinco não se referem a medidas, mas a um conjunto de elementos discretos que resultam da divisão de 30 em quatro grupos de figurinhas. Assim, enquanto operador a fração pode ser compreendida como uma função que transforma um conjunto em um outro conjunto.

Situação medida: remete a contextos nos quais duas partes podem ser reunidas em todo, considerando uma relação proporcional entre duas medidas diferentes. Por exemplo, na situação “Se para cada copo de concentrado de suco acrescento dois copos de água, qual fração representa a quantidade de água da mistura?” para pensar na relação proporcional entre as medidas em termos de fração é necessário considerar o total de partes que formam a mistura (um copo de concentrado e dois copos de água) e a parte considerada da mistura (dois copos de água), para então compreender que na representação $\frac{2}{3}$ o numerador corresponde a parte da mistura considerada e denominador o total de partes da mistura. Quando as frações são usadas como medida a diferença entre o tamanho do todo não muda a quantidade, o que muda é apenas a razão entre essas duas quantidades.

Diante do exposto, compreende-se que cada uma dessas situações pode afetar a compreensão das crianças sobre frações de diferentes formas. Esse aspecto foi reportado por Nunes et al. (2007) que aplicaram um instrumento com 130 crianças (entre 7 a 9 anos de idade) com questões sobre equivalência de frações nas situações parte-todo e quociente. Os resultados indicaram que crianças de diferentes idades obtiveram melhor desempenho na situação quociente quando comparada à parte-todo. Os autores consideram que estes

resultados evidenciam que para crianças, de todas as idades, o desempenho foi melhor nas situações quociente. A explicação para tal resultado é justificado pelo fato de que ao pensar sobre fração no contexto da divisão as crianças se engajam a raciocinar sobre as situações. Todavia, ao lidar com a situação parte-todo as crianças pensam em quais procedimentos utilizar para obter a resposta.

Em contraste, a investigação desenvolvida por Charalambous e Pita-Pattanzi (2007) com 746 estudantes de quinto e sexto ano do Ensino Fundamental constatou melhores desempenhos na situação parte-todo, seguida por operador, quociente e medida. As autoras justificam o melhor desempenho na situação parte-todo pela ampla presença de situações deste tipo nas escolas. Nesse sentido, há uma relação entre o desempenho dos estudantes nas situações e ênfase dada a cada uma delas nas situações de ensino.

Outro estudo envolvendo desempenho de estudantes em situações distintas foi realizado por Pantziara e Philippou (2012) que compararam o desempenho de 302 alunos de sexto ano do Ensino Fundamental nas situações parte-todo e medida por meio da aplicação de um questionário. Os resultados encontraram evidenciam que as situações parte-todo foram mais fáceis que as de medida. Mais uma vez, as autoras justificam as diferenças encontradas no desempenho pela ênfase dada à situação parte-todo no contexto escolar e em materiais didáticos relativos à fração.

Tendo problematizado algumas considerações teóricas e empíricas quanto à relevância de se considerar diferentes situações de fração, cabe a seguir apresentar estudos que enfatizam o papel exercido pelas representações na aprendizagem deste conceito.

2.2.4 As representações de fração e seus impactos na aprendizagem.

Tendo em vista a importância de se considerar o papel exercido pelas representações para a aprendizagem dos conceitos, Nunes e Bryant (1997), referindo-se ao domínio das frações, explicam que os desempenhos das crianças precisam ser avaliados considerando a lacuna existente entre o que elas entendem e o que elas podem ter aprendido de forma particular. Para estes autores, as dificuldades com a linguagem simbólica podem ser relacionadas com situações de aprendizagem no contexto escolar, nas quais as crianças aprendem procedimentos como a dupla contagem que relacionam diretamente as frações à uma linguagem parte-todo. Portanto, o tipo de representação utilizada interfere nos raciocínios elaborados sobre o conceito. Além disso, o uso dos símbolos de fração, segundo Mack (1993) também se conecta a seus mecanismos intuitivos. Isso porque os mecanismos

iniciais desse conceito são construídos por ações intuitivas que, uma vez alcançados pela criança, permitem a transferência de conhecimentos sobre fração para diversas situações em que ela pode estar inserida.

Outro aspecto que pode influenciar no raciocínio sobre as representações de fração são os contextos físicos considerados. É possível encontrar na literatura vários autores que defendem a ideia de que compreensões diferentes derivam de contextos contínuos e discretos (VERGNAUD, 1983; STREEFLAND 1991; BALL, 1993; NUNES; BRYANT, 1997). Essa distinção entre contextos é importante para a forma cuja partição é entendida.

Pesquisas como as de Lima (1989) consideram que as crianças possuem maior facilidade com contextos discretos nos quais elas lidam com a contagem. Já Steffe e Olive (1993) consideram que os contextos contínuos são os mais apropriados para o desenvolvimento das ideias iniciais de fração, uma vez que permitem uma melhor visualização do esquema de partição. No entanto, conforme afirma Vergnaud (1983), para cada um desses contextos, diferentes representações, bem como compreensões sobre elas são acionadas. Logo é necessário o trabalho com ambos os contextos para permitir uma efetiva compreensão deste conceito.

Ainda sobre os contextos, as pesquisas de Streefland (1991,1993) apresentam evidências que confirmam sua hipótese de que os contextos da vida real promovem uma sólida base para a construção dos conhecimentos de fração e que o abandono prematuro dos materiais concretos resulta em dificuldades de compreensão das crianças. Nesse sentido, vários outros pesquisadores encontraram diferenças no desempenho das crianças ao comparar a resolução de problemas de fração utilizando seus registros simbólicos e a partir de âncoras, estimativas e situações cotidianas. (STREEFLAND 1991; MACK, 1993; CRUZ, SPINILLO, 2004).

Sobre esse aspecto, Streefland (1987) afirma que as formas de uso das representações de frações criam obstáculos didáticos, ou seja, as possíveis dificuldades de compreensão que são originadas pela natureza das situações de ensino propostas. Por exemplo, a equivalência de frações é quase exclusivamente abordada com algoritmos. O problema dessa abordagem é que a equivalência de uma forma simbolizada ($\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$) não fica imediatamente evidente pelo significado dos símbolos ao se comparar com representações como a do desenho ou com o decimal. Nesse sentido, o autor sugere que para elaborar em situações didáticas de fração é preciso considerar três aspectos. O primeiro é que a fase operacional algorítmica é o último estágio do desenvolvimento conceitual. O segundo diz respeito ao fato de que o uso de materiais concretos deve ser apenas o ponto de partida do estudo do conceito. O terceiro e

último é relativo a necessidade de levar em consideração os aspectos psicológicos do conceito na proposição de situações.

Ainda sobre questões de ensino, Kerslake (1986) critica a ênfase excessiva dada ao simbolismo formal nas situações didáticas. Para essa autora, as representações geométricas apresentam mais vantagens do que a forma simbólica tradicional nas adições de frações, trazendo a necessidade de investigar que representações podem se mostrar efetivas para o trabalho com cada aspecto conceitual. Além disso, as características das diferentes representações de fração podem auxiliar na aprendizagem de aspectos específicos desse conceito. As representações figurais como de tortas e pizzas, por exemplo, foram consideradas por Mack (1995), como facilitadoras da conexão entre conhecimentos informais sobre compartilhar e dividir e conhecimentos formais sobre fração. As representações lineares de fração foram consideradas por Moss e Case (1999) mais efetivas para abordar conhecimentos relativos ao significado de número do que as outras representações abordadas em currículos escolares. Por fim, as representações de fração relacionadas a modelos de área foram consideradas por Cadwell (1995) promotoras de aprendizagens de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental (RAU et al, 2009).

Questões relativas à magnitude numérica da fração se tornam ainda mais complexas ao se considerar que as diferentes representações de fração podem explicitar diferentes aspectos deste conceito (BEHR et al. 1982; NUNES, 2007; DREHER et al. 2012;). Rau et al. (2009) corroboram essa ideia defendendo que o significado de número pode ser associado a representações que acentuam a possibilidade comparações de frações em termo de sua magnitude quando estão entre números inteiros, por exemplo, na reta numérica. Já significado parte-todo relaciona-se a representações consideram frações como parte de uma área que é particionada em partes de tamanhos iguais como nas representações de pizzas, barras de chocolate. Por fim, o significado de razão seria associado a representações de fração que remetessem ao contexto de objetos discretos, ou seja, com representações que lidam com conjuntos de objetos.

Nessa direção, Cramer et al. (2010) investigaram com uma classe de 6º ano dos Estados Unidos usa modelos pictoriais e concretos para construir significados para operações aritméticas com frações. A técnica utilizada se baseou em experiências de ensino com os estudantes, em busca de estender o uso de modelos pictoriais e concretos a partir da ideia: como dividir frações. O resultado é que o trabalho conjunto com ambas as representações, tendo como cerne a ideia de divisão, permitiu aos estudantes ampliarem sua compreensão de

fração ao considerar em suas ações a ideia de “unidade flexível”. Nesse sentido as evidências reforçam a necessidade de modelos pictoriais e concretos para a aprendizagem de fração.

Outro estudo centrado na análise de representações foi de Moyer-Packenham, Ulmer e Anderson (2012) que examinaram representações pictoriais de fração, nas modalidades estática e dinâmica. Os autores realizaram uma intervenção com 78 estudantes do 3º ano dos Estados Unidos. Foram criadas duas condições: a primeira pautada no acesso a representações pictoriais estáticas e a segunda baseada em representações virtuais dinâmicas e manipulativas. Os resultados trouxeram evidências de que ambas as condições apresentaram ganhos de aprendizagem, sem diferença significativa entre elas. Embora sem significância estatística, as autoras afirmam que o grupo das representações dinâmicas chegou a médias mais altas que aquelas do outro grupo. As autoras consideram que essas representações auxiliam no desenvolvimento de habilidades para a visualização das frações.

Com foco na representação da reta numérica, a pesquisa de Saxe, Diakow e Gearhart (2012) avaliou a eficácia de uma proposta curricular, pautada na aprendizagem baseada na representação (*Learning Mathematics through representations - LMR*). Para isso, foi feita uma intervenção com foco nos conteúdos de fração e números inteiros. Os participantes foram 571 alunos de 4º e 5º ano dos Estados Unidos distribuídos em um grupo experimental e de controle. Em ambos os grupos foram dadas nove aulas sobre números inteiros e 10 aulas sobre fração, todavia, apenas experimental utilizou a LMR, com ênfase no registro da reta numérica. Em síntese, a LMR baseia-se em cinco passos: abertura de problemas; abertura de discussão; trabalho em parceria; fechamento da discussão; fechamento do problema. Os resultados produziram evidências da efetividade do modelo LMR para melhorar a compreensão de números inteiros e fração. A comparação entre os grupos mostrou 75% a mais de ganhos de aprendizagem do grupo experimental em relação aos outros grupos. Houve melhoras também em relação ao cruzamento de conteúdos consideração dos números inteiros a partir de unidades e fração e de sub-escalas de fração a partir de números inteiros. Outro achado foi a melhoria da compreensão dos estudantes quanto aos componentes da reta numérica, considerando que os domínio dos elementos representacionais desse registro de representação que promove compreensões mais sólidas dos conteúdos matemáticos.

Outro estudos que também investigaram a reta numérica foram os de Wang e Siegler (2013) e Hurst e Cordes (2016), apesar de outros focos, estas investigações também abordaram essa representação. Wang e Siegler (2013), afirmam que o treinamento na reta numérica, fornecido durante uma intervenção, promoveu melhoras nas representações mentais de fração de forma mais significativa que outros treinamentos (representação circular e livro

didático). Considerando, ainda, a reta numérica como a melhor representação para promover a tradução entre representações. Já Hurst e Cordes (2016), sinalizam a necessidade de que as situações didáticas propostas pela escola devem propiciar integração de frações, decimais e números inteiros juntos em uma única reta numérica. Isto porque seus resultados sugerem que os números e inteiros e racionais são percebidos por adultos como um contínuo integrado,

Com preocupações voltadas para aspectos semióticos das representações, Solares e Kieran (2013), analisaram as perspectivas numéricas e sintáticas relativas à equivalência entre polinômios e expressões com os números racionais. Para isso, fizeram uma entrevista detalhada, com um aluno de 15 anos, na qual a resolução de várias tarefas de equivalência eram propostas e, em seguida, o pesquisador realizava questionamentos que objetivavam estabelecer relações dialéticas entre o numérico e o sintático presentes nas representações (exemplo: compare os resultados obtidos nas várias expressões e registre suas observações). Os autores consideraram que os conhecimentos iniciais do participante eram de cunho prioritariamente sintático (pautado em regras), contudo, ao longo das entrevistas, os questionamentos propostos trouxeram a necessidade de verificação de resultados e de elaboração de outros modos de resolução. Tal abordagem, propiciou o acesso a noções voltadas para características e relações numéricas das expressões. Os resultados obtidos apontam para a importância do estudo gradual das relações e diferenças, que geralmente permanecem implícitas no ensino de álgebra.

Outra contribuição relevante quanto à análise de representações foi a de Brizuela (2016) que explorou notações de frações de uma criança de 3º ano chamada Sara. O intuito do estudo era evidenciar como notações exemplificadas, por meio de ações e palavras, podem contribuir para a compreensão de frações. Para isso, foram realizadas entrevistas, durante a resolução de problemas, no contexto de um experimento de ensino. As evidências produzidas não são conclusivas, uma vez que não se acompanhou o desenvolvimento das ideias sobre frações e suas notações. Entretanto, a autora considera que as entrevistas ajudaram a perceber que as notações ajudaram Sara a refletir sobre os problemas e ampliar sua compreensão. Durante a resolução de problemas Sara foi capaz de diferenciar as notações que ajudaram e não ajudaram a pensar sobre os problemas. De modo geral, evidenciou-se que os raciocínios de Sara foram facilitados pelo uso de diagramas, embora sem descrever em detalhes todas as ações envolvidas na resolução dos problemas. Outra conclusão foi a de que as notações produzidas por Sara são internalizações de notações convencionais.

O conjunto desses estudos permite evidenciar como diferentes representações de frações impactam sobre o raciocínio, a compreensão e aprendizagem deste conceito.

Evidencia-se, assim, a necessidade que as múltiplas representações de fração sejam consideradas na elaboração de pesquisas que visam investigar esse conceito. No entanto, essas representações não devem ser consideradas isoladamente conforme discutido por Duval (2009) e Vergnaud (2009). Com base nessa compreensão algumas pesquisas têm dedicado-se a explorar como a habilidade de transitar entre representações influencia na aprendizagem de frações.

Nesse contexto, Panoura et al. (2009) investigaram a estrutura cognitiva e afetiva das habilidades relativas à flexibilidade para o uso de múltiplas representações (conversão) e a resolução de problemas afetam a compreensão da adição de frações. Participaram do estudo 1701 estudantes entre 10 e 14 anos de idade da cidade de Cyprus na Grécia. Foram aplicados dois questionários. O primeiro visava mensurar as crenças dos estudantes sobre o uso de diferentes representações e suas relações com a compreensão de frações. O segundo examinou a habilidade relativa a múltiplas representações para a adição de frações. Percebeu-se que os estudantes tinham preferência por representações pictóricas em detrimento das simbólicas, evidenciando melhor desempenho quando demonstravam maior afinidade com a representação. Além disso, as crenças sobre o potencial de cada representação para auxiliar na resolução de problemas, também apresentou efeito. Os resultados indicaram que aspectos cognitivos (conceitos e representações) e afetivos (crenças) têm impacto no desempenho de adição de frações.

A investigação de Wang e Siegler (2013), também tinha preocupações voltadas para a conversão, denominada pelos autores como tradução⁴. Na intervenção desenvolvida, foram produzidas evidências de que as diferenças individuais no processo de representação das magnitudes de frações podem prever diferenças individuais na performance da tradução. Isto é, a precisão da magnitude de uma representação influencia na precisão de uma tradução. Outro achado dos autores foi de que a tradução entre frações é uma atividade cognitivamente significativa e melhor, em termos de aprendizagem, do que um processo de memorização. Nesse sentido, os autores sugerem que o ensino da tradução entre fração e decimal, tradicionalmente feito a partir de regras mecânicas, pode promover uma aprendizagem mais efetiva quando pautado em uma abordagem centrada nas magnitudes numéricas.

Por último, o estudo de Dreher et. al (2014), já citado anteriormente, teve como objetivo avaliar se há uma diferença no nível de dificuldade entre as competências de

⁴ Cabe explicitar que para Duval (2009) existe uma diferença entre conversão de tradução. Para esse autor, a converter é “**transformar** a representação de um objeto [...] num registro de representação desse mesmo objeto [...] **num outro registro**” enquanto que a tradução é uma operação em que uma representação de um registro **faz corresponder** uma outra operação num registro (DUVAL, p. 58, 2009 – grifo nosso).

identificar e efetuar conversões de fração. O referido estudo também pretendeu testar um instrumento multimimensional, para classificar competências relacionadas a conversão de representações no domínio das frações. Os participantes foram 675 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental da Alemanha. O instrumento utilizado foi um teste com quatro tipos de tarefas de conversão, abordando alternadamente as competências de identificar, efetuar e justificar. O principal resultado diz respeito ao fato de existir uma relação hierárquica entre as competências de conversão identificar e efetuar, sendo esta última mais difícil para os estudantes. Assim, foram produzidas evidências empíricas para essa relação que antes era postulada apenas teoricamente. Esse achado pode ser importante para construção de modelos de níveis de competência de conversões de representações e para a elaboração de situações de aprendizagem e análise de resoluções de tarefas de alunos quanto a conversão de representações no domínio das frações.

Diante dos estudos apresentados, é possível tecer algumas considerações sobre questões que continuam em aberto acerca da relação entre fração quanto aos seus aspectos conceituais e semióticos. Em primeiro lugar, a importância da ideia de divisão para a compreensão de frações têm sido abordada constantemente desde a década de 1980. Contudo é consenso na literatura que vários outros significados como parte-todo, operador e medida são necessários para uma compreensão integral desse conceito. Portanto, ainda é preciso esforços no sentido de contribuir para a compreensão de como os modelos pictoriais ou simbólicos associados a ideia de divisão podem ser utilizados para o trabalho com outros significados de fração.

Portanto, a importância do contexto representacional tem sido confirmada com evidências empíricas em vários trabalhos. Duval (2009) chama a atenção para o fato de que o foco em uma só representação pode levar a uma compreensão pautada em monorregistro (apenas um registro), provocando limitações conceituais e Vergnaud põe em relevo as diferentes situações em que o conceito de fração pode ser explorado. Ademais, os estudos que abordam a conversão apresentados no tópico acima, com exceção de Dreher et al. (2014), tem focalizado as representações fracionárias e decimais. Os estudos tratam apenas de registros numéricos, preocupando-se com a ideia de magnitude, sem considerar como essa ideia pode ser relacionada em conversões para outros registros. Logo, é necessário, então, abordar a conversão entre outras representações, bem como seus custos cognitivos. Além disso as estratégias utilizadas para essas conversões permanecem pouco exploradas. É preciso compreender como estratégias e performances diferem entre si nas diferentes notações dos números racionais e se elas variam em função do contexto (significado) em esses conceitos

são apresentados. Desse modo, considera-se necessário abordar dificuldades que são inerentes a natureza das representações de fração.

Diante da literatura exposta, considerando os aspectos que já são consensuais entre os pesquisadores e também as questões que permanecem em aberto sobre essa temática, foram delineados os eixos que direcionarão este estudo. Assim, no capítulo a seguir serão apresentados os objetivos do estudo, o método elegido, explicitando os participantes, planejamento e procedimentos quase experimentais.

3 MÉTODO

Este capítulo discute as escolhas metodológicas estabelecidas para a presente investigação. Inicialmente, serão retomados aspectos relativos à relevância do estudo e os objetivos estabelecidos. Em seguida, será feita uma descrição dos participantes da pesquisa. Posteriormente, o delineamento quase experimental é apresentado, seguindo-se da discussão acerca das variáveis contempladas no estudo e das características e objetivos das tarefas aplicadas aos participantes, bem como com seus respectivos procedimentos.

3.1 RELEVÂNCIA E OBJETIVOS DO ESTUDO

As representações não são apenas ferramentas para expressar a compreensão e o pensamento, pois se constituem também como meio para desenvolvê-los. Isto diz respeito à relação de indissociabilidade entre *noésis* e *semiós*is destacada por Duval, (2012a) em sua teoria (ver Capítulo 2).

O processo de aprender matemática requer lidar com a aprendizagem da linguagem matemática. Isso implica considerar a representação semiótica como um dos elementos fundamentais para o processo de apreensão conceitual. Nessa direção, Brizuela (2016) salienta que no processo de compreensão das notações matemáticas, a criança gera diferentes hipóteses e lógicas. Para essa autora, a compreensão da linguagem matemática acontece de forma evolutiva, comparando esse processo ao que foi observado por Ferreiro (1991) em seus estudos sobre a escrita.

No presente estudo compreende-se que as contribuições de Vergnaud (1983; 1998; 2009; 2015) e Duval (1995; 2006; 2009; 2012a) podem ser consideradas como suportes para a compreensão do papel das representações semióticas na apreensão conceitual em matemática. Por um lado, Vergnaud enfatiza os esquemas e as situações como elementos centrais para o processo de conceitualização, compreendendo as representações como elementos que ajudam a mobilizar os aspectos conceituais. Por outro lado, Duval evidencia as representações semióticas como responsáveis pelo processo de conceitualização, ressaltando as transformações entre os registros de representação semiótica como elemento central para possibilitar a compreensão de conceitos matemáticos.

Sabe-se que o conceito de fração, abordado durante os anos iniciais de escolarização, é uma das bases necessárias para permitir a constituição de aprendizagens futuras ao longo dos diversos níveis que compõem a Educação Básica (BEHR et al., 1983). Uma expressiva

quantidade de estudos em Psicologia da Educação Matemática discute a relevância e as dificuldades referentes ao ensino e aprendizagem de frações (BERH et al., 1983; KERSLAKE, 1986; OHLSSON, 1991; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1992; NUNES; BRYANT, 1997; OLIVE, 1999; MAGINA; MALASPINA; 2013, SPINILLO; CRUZ, 2014; HURSTS; CORDES, 2016). Todavia, a aprendizagem dos números racionais permanece um grande desafio tanto no âmbito da educação básica quanto da formação de professores. Dentre as fontes de obstáculos identificadas pela literatura para a compreensão de fração destaca-se a multiplicidade de situações e representações associadas a esse conceito.

Em face do exposto, o presente estudo investiga o fenômeno de conversão de representações, em particular do conceito de fração. As conversões foram analisadas a partir de duas competências distintas vinculadas a essa atividade cognitiva: identificar e efetuar. Para tal, verificou-se o efeito de três aspectos no desempenho dessas competências de conversão: (i) o sentido em que a conversão é realizada; (ii) as situações relacionadas ao conceito de fração e; (iii) os registros de representação semióticos deste conceito. De forma mais específica, examinou-se os tipos de erro que os estudantes cometem e as estratégias mobilizadas ao cometer erros de conversão.

3.2 PARTICIPANTES

Participaram do estudo 60 estudantes, 34 meninas⁵ (M= 11 anos e 3 meses; DP = .992) e 26 meninos (M= 11 anos e 4 meses; DP = .846), de duas escolas públicas da cidade Fortaleza, cursando o 5º ano do Ensino Fundamental. A escolha de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental deve-se ao fato de que nesse ano os estudantes são formalmente instruídos sobre fração e começam a apresentar dificuldades para lidar com esse conceito. Ademais, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN têm como previsão para esse ano escolar o desenvolvimento das competências de “identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não matemáticos” (BRASIL, 1997, p. 64).

Esta investigação, em conformidade com as exigências da Resolução CNS/MS nº466/12, foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Pernambuco – CEP/UFPE e obteve aprovação por meio do parecer de número 1.814.774. Após a aprovação, iniciou-se a obtenção dos Termos de Consentimento Livre e Esclarecido –

⁵ Convenções: M= média; DP = desvio padrão.

TCLE (Apêndice A) e de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE (Apêndice B) para a realização da pesquisa, cujos procedimentos metodológicos encontram-se detalhados a seguir.

3.3 DELINEAMENTO DO ESTUDO: PROCEDIMENTO E PLANEJAMENTO QUASE EXPERIMENTAL

Para este estudo foram aplicadas duas tarefas distintas. Na Tarefa 1 (T1), os estudantes foram solicitados a identificar conversões de frações dentre opções apresentadas. A Tarefa 2 (T2) consistiu na elaboração de conversões de frações. Em ambas as tarefas avaliaram-se as competências de identificar (T1) e efetuar (T2) conversões em diferentes sentidos, situações e representações semióticas.

As tarefas foram aplicadas em duas sessões individuais. Metade dos estudantes iniciou a primeira sessão pela T1 e realizaram na segunda sessão a T2, configurando a Ordem de aplicação A. Por sua vez, a outra metade fez a ordem inversa, iniciando a primeira sessão pela T2 e a segunda sessão pela T1, constituindo a Ordem de aplicação B. O uso das duas ordens foi necessário para controlar o possível efeito da ordem de aplicação das tarefas. Cada sessão foi aplicada com um intervalo de três a cinco dias entre elas. A Tabela 1 ilustra a forma de randomização realizada para a aplicação das tarefas em cada sessão.

Tabela 1- Ordens de aplicação das tarefas em cada sessão.

Ordem/ participantes	Aplicação das tarefas
A (n = 30)	Sessão 1: Tarefa 1 (Identificar) → Sessão 2: Tarefa 2 (Efetuar)
B (n = 30)	Sessão 1: Tarefa 2 (Efetuar) → Sessão 2: Tarefa 1 (Identificar)

Fonte: A autora

Em função das variáveis contempladas nas tarefas (T1 e T2) julgou-se necessário randomizar a ordem de apresentação das questões⁶ com o propósito de minimizar a interferência do efeito cansaço e da ordem de apresentação das variáveis investigadas (sentidos, situações e representações semióticas). Tanto na T1 como na T2, os problemas tiveram seis formas de apresentação conforme ilustrado na Tabela 5.

⁶ Vergnaud (1983, 1990, 2003, 2009) utiliza os termos situação e problemas como sinônimos. Neste estudo o termo situação será adotado para fazer referência aos diferentes significados que a fração pode assumir. O termo questões será utilizado para fazer referência às situações-problema que compuseram as tarefas apresentadas na investigação.

Tabela 2- Ordens de apresentação das questões das tarefas do estudo

Ordem	Tarefas	
	T1 (Identificar)	T2 (Efetuar)
1 (n= 5)	P1→P2→P3→P4→P5→P6	P1→P2→P3→P4→P5→P6
2 (n= 5)	P1→P2→P5→P6→P3→P4	P1→P2→P5→P6→P3→P4
3 (n= 5)	P3→P4→ P1→P2→P5→P6	P3→P4→ P1→P2→P5→P6
4 (n= 5)	P3→P4→P5→P6→ P1→P2	P3→P4→P5→P6→ P1→P2
5 (n= 5)	P5→P6→ P1→P2→P3→P4	P5→P6→ P1→P2→P3→P4
6 (n= 5)	P5→P6→P3→P4→ P1→P2	P5→P6→P3→P4→ P1→P2

Fonte: Autora

Todos os estudantes foram individualmente entrevistados pela mesma examinadora nas duas tarefas. As entrevistas aconteceram em salas cedidas pelas escolas durante o horário de aula regular. A finalidade da entrevista foi baseada no método clínico com o objetivo de compreender como os estudantes pensam, analisam e resolvem as situações apresentadas nas duas tarefas. Para isso, o examinador precisa motivar uma reflexão sobre as questões apresentadas, partindo do pressuposto de que as ideias das crianças são fruto de suas tentativas genuínas de dar sentido ao mundo e criar significados (CARRAHER, 1994; GINSBURG, 1997).

Tendo em vista essas considerações, durante as sessões de entrevista tentou-se manter uma atmosfera informal na qual os estudantes pudessem se sentir seguros e confiantes para verbalizar suas ideias. Antes de cada sessão os estudantes eram esclarecidos sobre o propósito das entrevistas. A examinadora buscou adequar a linguagem utilizada à faixa etária dos estudantes e sempre que necessário forneceu explicações adicionais para garantir a compreensão das questões apresentadas.

Após a resolução de cada questão, foi dada a seguinte instrução: *Imagine que você precisa explicar para outro colega da sua turma como você fez para resolver esse problema. Como você explicaria? Caso eu não entenda algo, vou pedir para que você me explique novamente até que eu consiga entender como você pensou.*

Os estudantes foram constantemente encorajados a resolver e explicar as questões do seu modo. Procurou-se padronizar, dentro do possível, os questionamentos feitos para

encorajar a verbalização de justificativas e as respostas fornecidas pela examinadora em retorno as explicações dos estudantes. Todas as sessões de entrevistas foram gravadas em Mp4 e transcritas para protocolos individuais. Para um maior esclarecimento acerca das variáveis investigadas no estudo, o tópico seguinte apresenta as justificativas e critérios utilizados para a seleção e organização das variáveis.

3.3.1 Critérios de escolha e organização das variáveis investigadas no estudo

Para explicar os critérios utilizados para a seleção das variáveis escolhidas para este estudo, é necessário retomar alguns aspectos discutidos anteriormente. O interesse desta investigação é a atividade de conversão. Defende-se aqui a necessidade de estabelecer diálogos entre diversas contribuições teóricas e empíricas da literatura para ampliar as possibilidades de compreensão desse fenômeno.

Com essa motivação, buscou-se o suporte nas ideias de Vergnaud (1983; 1996) e Duval (2011, 2012a). Destaca-se que, para Vergnaud (1983), a ênfase no desenvolvimento de competências de um indivíduo cabe às situações. Acrescenta-se ainda que, para esse autor, a maioria de nossos conhecimentos são competências que nos permitem lidar com as situações por meio dos esquemas. Ou seja, por meio das situações desenvolvemos competências e estas últimas nos permitem a adaptação à novas situações. Embora atribua grande importância à situação, Vergnaud (1996), reconhece que as representações simbólicas desempenham um papel relevante nas aprendizagens, uma vez que precisamos dos signos para representar uma atividade em situação. Logo, as representações dão sentido às situações (VERGNAUD, 2015).

Todavia, Vergnaud não explora com profundidade o papel das representações em sua teoria. Constatou-se a necessidade de se reportar às ideias de Duval (2011), em razão de sua teoria tratar, especificamente, das representações semióticas e ainda, de modo particular, da conversão. A compreensão em matemática, para Duval (2011), supõe a coordenação simultânea de pelo menos dois registros de representações semiótica, pois, “o emprego [...] de representações de apenas um registro [não] é suficiente para que sua significação funcione cognitivamente nos sujeitos que aprendem” (DUVAL, p.281, 2012a). Do ponto de vista cognitivo, a conversão é atividade que permite tal coordenação e que, portanto, conduz aos mecanismos de compreensão.

Com base nessas ideias, reafirma-se que a posição assumida nessa investigação considera que existe complementaridade entre essas duas perspectivas. Nesse sentido, para a

construção das tarefas, foram selecionados aspectos das duas teorias (DUVAL, 1995; VERGNAUD, 1996) e de outros estudos (LESH, LANDAU, HAMILTON, 1983; LEINHARDT; ZASLAVSKY, STEIN, 1990; DREHER et al., 2014), julgados como relevantes pelo seu potencial de influenciar no desempenho de conversões de fração. Cada uma das variáveis será apresentada a seguir.

3.3.1.1 As competências de conversão

Compreende-se que as competências se referem a um conjunto de conhecimentos e habilidades necessárias para efetivar ações, técnicas ou heurísticas (BOSSÉ et al., 2011). Segundo Vergnaud (1998), para a análise de competências matemáticas de estudantes é necessário observar seus processos e condutas ao resolver questões de matemática, uma vez que para acessar os conhecimentos de um indivíduo é preciso considerá-los em ação. De acordo com Magina et al. (2008, p. 12), a análise de competências pode ser acessada a partir de três aspectos: “i) análise do acerto e erro; ii) análise do tipo de estratégia; iii) análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver uma situação”. Diversos autores (LESH, LANDAU, HAMILTON, 1983; LEINHARDT; ZASLAVSKY, STEIN, 1990; GOLDIN, 1998), em especial Dreher et al. (2014) especificam duas competências relacionadas a conversão no âmbito das frações: Identificar e Efetuar.

As duas competências apresentadas acima também podem ser analisadas enquanto tarefas de julgamento e tarefas de construção como proposto por Spinillo (1996). Essa autora defende que as características e demandas das tarefas, envolvendo julgamento e construção, influenciam na compreensão e na forma de lidar com os conceitos. Portanto, um único tipo de tarefa, *identificar/julgar* ou *efetuar/construir*, não permite explorar todas as formas e expressões de conhecimento sobre um determinado conceito. Justifica-se assim a necessidade de abordar a conversão de frações sob a ótica dessas duas competências (*identificar/julgar* e *efetuar/construir*), uma vez que elas acessam diferentes aspectos tanto do ponto de vista conceitual quanto metodológico.

3.3.1.2 Os sentidos de conversão

Para Duval (2009), o sentido no qual se realiza uma mudança de registro de representação semiótica é um fator a ser considerado na conversão, visto que as demandas cognitivas não são as mesmas quando se considera sentidos diferentes. Em outras palavras, passar de uma equação algébrica para um gráfico, por exemplo, mobiliza aspectos cognitivos

diferentes daqueles requisitados para passar do gráfico para a equação algébrica. Essa distinção se justificada porque a atividade de conversão não é cognitivamente reversível (DUVAL, 2011). Para abordar os sentidos de conversão na elaboração das tarefas considerou-se a classificação dos registros de representação semiótica apresentada por Duval (2011), na qual ele considera dois tipos de registros: discursivos (podem representar operações) e não discursivos (podem representar estados, configurações ou transformações).

Com base nessa classificação, os sentidos de conversão abordados neste estudo foram organizados a partir dos registros de representação semiótica iniciais (ponto de partida) e finais (ponto de chegada) de uma conversão. Assim, as tarefas elaboradas abordaram dois sentidos, a saber: discursivo para discursivo (D-D) e discursivo para não discursivo (D-ND). Cabe explicitar que sem o uso de enunciados em língua materna não seria possível garantir o contexto necessário para que estudante interagisse com uma diversidade de situações. Por este motivo utilizaram-se registros de representação semiótica discursivos como ponto de partida para todas as conversões propostas, o que se justifica pela intenção de abordar diferentes situações de fração.

3.3.1.3 As situações

Conforme já apresentado, há uma extensa literatura que explora os diferentes significados que as frações podem apresentar a depender do contexto das situações na qual estão inseridas (BEHR et al., 1983; KIEREN, 1988, 1992; CARPENTER et al. 1993; NUNES et al., 2007). Nessa investigação, assume-se a classificação utilizada por Nunes et al. (2008), fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais. Esses autores classificam as situações em quatro tipos: parte-todo, quociente, medida e operador.

Embora se reconheça a importância de contemplar todas as situações, nesta investigação a fração foi abordada apenas como parte-todo, quociente e medida. A fração como operador, não contemplada neste estudo, é usualmente utilizada no contexto escolar na relação com os números naturais como no exemplo: “Marcos ganha 200 reais de mesada por mês. Ele sempre gasta $\frac{1}{4}$ de sua mesada com jogos. Quanto dinheiro Marcos gasta com jogos todos os meses?” Note-se que no exemplo a resposta requisitada é um número natural. Esse tipo de resposta não seria adequado para este estudo, pois era necessário que o ponto de chegada das conversões requisitasse a elaboração de representações fracionárias, decimais e figurais. Ademais, foi necessário garantir que as questões das tarefas apresentassem níveis de complexidade semelhantes. Por este motivo, considerou-se que abordar as situações de

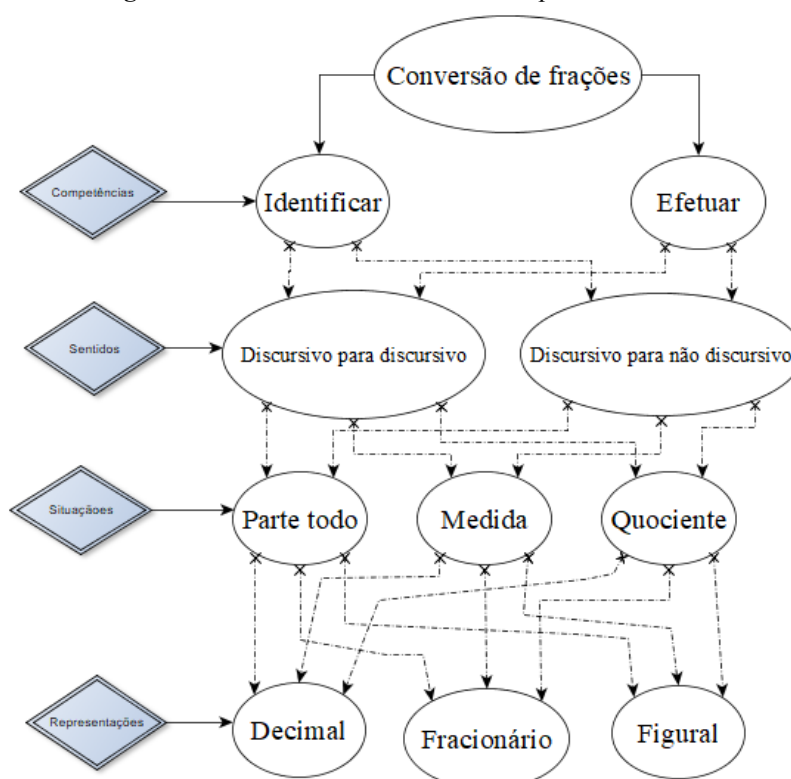
operador em um contexto representacional diferente daquele normalmente tratado na escola ofereceria um nível maior de complexidade em relação às demais situações (parte-todo, operador e medida).

3.3.1.4 Os registros de representação semiótica

Dada a sua importância nesta investigação, as representações semióticas de fração foram consideradas como as variáveis relevantes para elaboração das questões das tarefas. Como já explanado, o ponto de partida explorado em todas as conversões foi a representação em língua materna. Já os pontos de chegada das conversões poderiam ser simbólicos (fracionário ou decimal) e figurais (contínuos ou discretos). A escolha desses registros baseia-se em dois aspectos: (i) a forte presença deles no ensino de frações no 5º ano; (ii) a insuficiência na exploração das combinações entre todas essas representações na atividade de conversão.

Deste modo, o Diagrama 1 sintetiza todas as variáveis contempladas no estudo.

Diagrama 1: Síntese das variáveis contempladas no estudo



Fonte: a autora (2018).

3.3.1.5 As questões

Tendo em vista os aspectos expostos nos tópicos anteriores, como comentado a conversão de frações, foi investigada em relação às competências Identificar e Efetuar, considerando os sentidos (discursivo para o discursivo; discursivo para não discursivo), as situações (parte-todo; quociente; medida) e representações de frações (decimal, fracionária e figural).

A construção das questões apresentadas nas tarefas se deu por meio de adaptações das questões desenvolvidas por Magina e Malaspina (2013). Deste modo, foi elaborado um conjunto de seis questões que foi utilizado para as duas tarefas. Foram usadas as mesmas frações para T1(Identificar) e T2 (Efetuar), tendo em vista que os valores numéricos da fração influenciam em sua compreensão (VERGNAUD, 1983). Também por este motivo optou-se por contemplar frações mais elementares, isto é, frações não unitárias do tipo $\frac{P}{Q}$ onde $P < 10$ e $Q < 10$. Tais escolhas se justificam pela necessidade de minimizar o impacto que valores numéricos altos poderiam ter para compreensão de estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental.

Em ambas as tarefas se apresentavam questões iguais para as quais se solicitavam formas de conversão distintas. Na T1 (Identificar) foram apresentados três tipos de representação para cada item (opções de múltipla escolha) enquanto que na T2 (Efetuar) requisitou-se a construção de representações. Portanto, a principal distinção entre as tarefas consistia na competência que era solicitada ao estudante para a conversão (ver Figura 3).

Figura 3 – Comparação entre as tarefas (T1 vs. T2)

TAREFA 1	TAREFA 2
Questão - Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Qual a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta? Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação. Grupo 1 Criança 1 5,0 Criança 2 5,8 Criança 3 0,62 Grupo 2 Criança 4  Criança 5  Criança 6  Grupo 3 Criança 7 $\frac{5}{8}$ Criança 8 $\frac{5}{3}$ Criança 9 $\frac{8}{5}$	Questão - Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Escreva o número decimal que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta. Agora faça um desenho que represente a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.

Fonte: A autora (2018)

Em síntese, os problemas das tarefas (T1 e T2) apresentaram enunciados iguais, abordando as mesmas frações, sentidos de conversão, situações e registros semióticos. O Quadro 3, a seguir, ilustra o enunciado dos seis problemas, demonstrando como as variáveis foram distribuídas.

Quadro 3 - Distribuição de cada variável dos problemas das tarefas (T1 e T2).

Questões	Fração utilizada	Situação	Sentido	Representação
Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua irmã comeu 3 fatias. Qual a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias?	$\frac{3}{7}$	Parte-todo	Discursivo para discursivo	Fracionária
			Discursivo para não discursivo	Figural
Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas. Qual a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber?	$\frac{4}{5}$	Quociente	Discursivo para discursivo	Decimal
			Discursivo para não discursivo	Figural
Para pintar seu quarto, Sara misturou 3 litros de tinta azul com 2 litros de tinta amarela. A mistura das duas tintas deu um total de 5 litros. Qual a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura?	$\frac{2}{5}$	Medida	Discursivo para discursivo	Fracionária
			Discursivo para não discursivo	Figural
Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. Qual quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços?	$\frac{4}{6}$	Parte-todo	Discursivo para discursivo	Decimal
			Discursivo para não discursivo	Figural
Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. Qual a quantidade de torta que cada amigo irá receber?	$\frac{2}{6}$	Quociente	Discursivo para discursivo	Fracionária
			Discursivo para não discursivo	Figural
Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Qual a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta?	$\frac{5}{8}$	Medida	Discursivo para discursivo	Decimal
			Discursivo para não discursivo	Figural

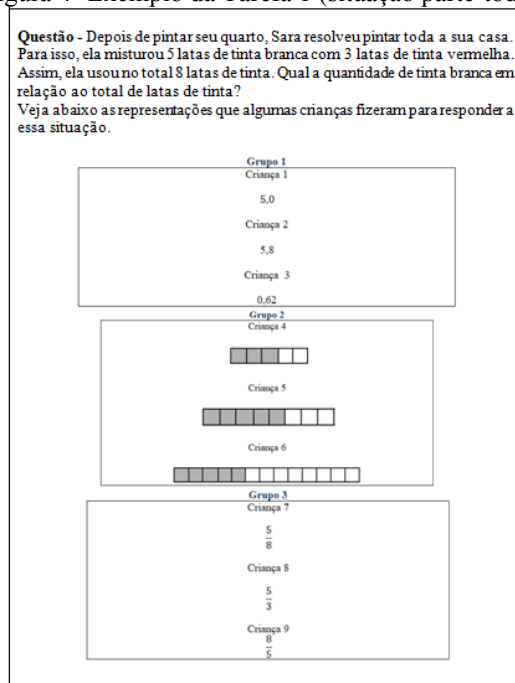
Fonte: A autora (2018)

No tópico a seguir será detalhado como essas variáveis foram organizadas e apresentadas na construção das duas tarefas utilizadas nesta investigação, explicitando seus procedimentos.

3.3.2 A Tarefa 1: a competência de identificar conversões de frações

A T1 avaliou a competência de identificar conversões de frações quando solicitada em diferentes sentidos, situações e representações semióticas. Ao todo foram apresentados seis problemas que tinham como ponto de partida a representação em língua materna e requisitavam como ponto de chegada representações simbólicas (decimal e fracionária) e figurais (ver Apêndice C). A Figura 4 ilustra como foram organizados os problemas da T1 (Identificar).

Figura 4- Exemplo da Tarefa 1 (situação parte-todo).



Fonte: a autora (2018)

Como pode ser observado, nessa tarefa os estudantes foram solicitados a identificar a equivalência entre representações de frações a partir de alternativas de múltipla escolha. As alternativas indicavam respostas de crianças fictícias relativas a registros de representações fracionária, figurais e decimais.

Durante a entrevista, a examinadora apresentou as questões por escrito (em formato de um caderno), fazendo a leitura em voz alta, de uma por vez. Em seguida, solicitava que o estudante identificasse em cada um dos grupos de crianças qual tinha respondido corretamente. A instrução dada pode ser assim resumida:

Eu tenho interesse de descobrir como as crianças pensam (entendem) sobre frações. Por isso tenho aqui alguns problemas de frações. Nós faremos a leitura em voz alta e em seguida vamos observar as respostas que outras crianças me deram para responder a esses problemas. Para cada problema nós temos dois grupos de crianças com respostas diferentes, em cada grupo eu quero que você me diga qual criança você acha que acertou e por que. Depois quero que você olhe para as crianças que erraram e me diga qual foi o erro que elas cometeram. Imagine que você precisa explicar para outro colega da sua turma como você fez para descobrir qual criança estava certa e qual estava errada.

Como explicitado, foram apresentadas para cada representação três alternativas possíveis de resposta para a conversão, uma estava correta e duas continham erros. A previsão desses erros se baseou em estudos empíricos (KERSLAKE, 1986; LESH et al., 1987; BALL,

1993; CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007; BOSSÉ et al., 2011; BRIZUELA, 2015) e nos pressupostos defendidos pelas duas teorias que dão suporte a investigação.

Assume-se, nesse estudo, que para analisar a atividade de conversão, dois conceitos são fundamentais: a ideia do invariante operatório de Vergnaud (1998) e a ideia de unidade de sentido (Duval, 2011), porque se compreende que ambos são elementos centrais para a mobilização dos aspectos conceituais de uma representação.

Vergnaud (1998) destaca que o ato de representar não consiste em comunicar a realidade por meio de símbolos e palavras de forma direta. O que representamos, para esse teórico, são entidades. Essas últimas consistem em objetos, propriedades, relações, processos, ações e constructos que elaboramos sobre a realidade. Nesse sentido, entende-se que as entidades às quais Vergnaud se refere, quando pensadas do ponto de vista dos conceitos matemático, evocam a ideia de invariantes operatórios.

Para Duval (2011) a atividade de conversão requer que o indivíduo reconheça as unidades de sentido pertinentes em uma representação de partida e as faça corresponder em uma representação de chegada. As unidades de sentido são os elementos das representações que evidenciam as propriedades e relações matemáticas possíveis de serem acessadas naquela representação, ou seja, os elementos presentes em uma representação que tornam possível dar sentido a ela.

Colocando em perspectiva as ideias apresentadas acima, compreende-se que os conceitos de unidade de sentido e invariantes operatórios permitem, de modo complementar, analisar atividade cognitiva da conversão (aspecto esse não investigado sob essa perspectiva nos estudos empíricos sobre fração⁷). Isto porque para realizar a ação de representar é necessário considerar unidades de sentido na medida em elas nos permitem acessar propriedades do conceito a serem mobilizadas por meio dos invariantes operatórios. Portanto, considera-se que a atividade de conversão requer mobilizar unidades de sentido através invariantes operatórios, evidencia-se assim, uma estreita conexão entre esses conceitos.

Ademais, é relevante retomar que Vergnaud (1998) afirma que o ato de representar requer a mobilização dos teoremas e conceitos em ação de um indivíduo, ou seja, dos invariantes operacionais dos esquemas. Todavia, a transformação dos invariantes em representações não acontece de modo direto, pois requer aprender e praticar o sistema semiótico no qual se quer representar. Nesse sentido, existem lacunas entre as representações mentais e semióticas, isto é, entre aquilo que é elaborado mentalmente e o que é registrado

⁷ Ver seção 2.2.

externamente. Além disso, para Vergnaud (1987) o ato de representar é condicionado pela situação. Deste modo, os invariantes operatórios (teoremas ou conceitos em ação) utilizados durante o processo de conversão podem levar ao uso de representações errôneas ou adequadas a depender de como as unidades de sentido são compreendidas e mobilizadas em cada situação pelos indivíduos.

De modo complementar, Duval (1995) destaca que reconhecer as unidades de sentido de uma representação requer uma compreensão semântica e sintática dos aspectos semióticos. Para isso é preciso entender que todo discurso⁸, produzido oralmente ou em um gesto de escrita (ato de escrever), se decompõe em unidades de sentido, as quais podem também ser decompostas em outras unidades de sentido (DUVAL, 2011). No entanto, além de reconhecer essas unidades é necessário compreender como elas se articulam para estabelecer um significado à representação, ou seja, é preciso interpretá-las enquanto partes que compõem um todo articulado.

Ao analisar o enunciado de um problema escrito em língua materna, por exemplo, é preciso reconhecer quais palavras são importantes para compreender o dado que falta, o significado dos termos de oposição semântica (exemplo ganha e perde) e o tamanho das grandezas. É possível que esse reconhecimento de unidades de sentido seja influenciado pelos teoremas e conceitos em ação que o indivíduo possui sobre um determinado conceito como pressupõe Vergnaud (1998).

Diante desta compreensão, os erros apresentados aos estudantes na T1 (identificar) foram abordados sob o enfoque dos aspectos concebidos como atributos relevantes de uma representação para a conversão: i) o reconhecimento das unidades de sentido; ii) os invariantes operatórios utilizados; iii) a preservação ou transformação do significado das unidades de sentido a conversão. Nessa direção elaborou-se a classificação de dois tipos de erros de conversão que foram apresentados na T1 (Identificar), a saber: Erro I – Erro de modificação dos atributos relevantes da representação; Erro II – Erro de transposição dos atributos relevantes da representação.

3.3.2.1 Os tipos de erros abordados na competência de identificar conversões de frações: modificação e transposição

⁸ Salienta-se que embora Duval (2011) classifique os registros semióticos em discursivos e não discursivos, ele compreende que todos os registros produzem discursos. No caso dos registros não discursivos, para produzir um discurso é necessário o suporte de outras representações, o que não acontece nos registros não discursivos como comentado anteriormente na fundamentação teórica.

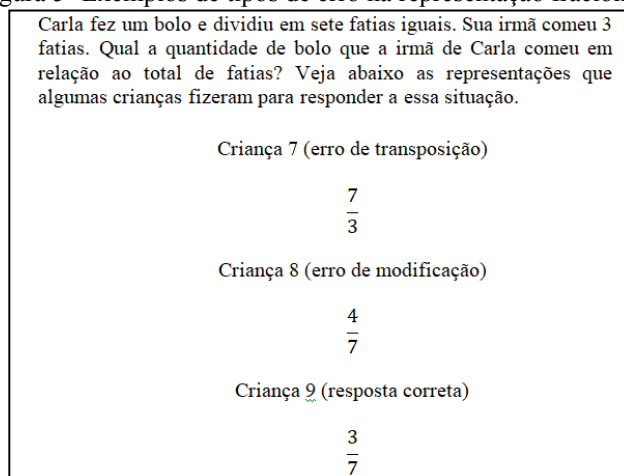
A conversão diz respeito à transformação de uma representação em um registro em outra representação em um registro diferente mantendo o mesmo significado matemático. Considera-se que a conversão acontece em três etapas. As representações são formadas pelos signos, suas configurações e regras sintáticas e semânticas. A primeira etapa da conversão é o reconhecimento de quais atributos são relevantes na representação de partida, ou seja, de suas unidades de sentido e princípios invariantes. A segunda etapa diz respeito à coordenação entre os atributos reconhecidos na representação de partida com os atributos da representação de chegada. A terceira etapa seria a transformação dos atributos da representação de partida e sua mobilização para a representação de chegada (DUVAL, 2006; BOSSÉ et al., 2011).

Os erros de conversão podem acontecer ao longo dessas etapas. Na literatura sobre transformações entre representações, vários tipos de erro de conversão são indicados considerando características centradas no estudante ou na representação (KAPUT, 1987; GOLDIN, 1998; BOSSÉ et al., 2011; ADU-GYAMFI, STIFF e BOSSÉ, 2012). Concebe-se, neste estudo, que considerar as unidades de sentido e os invariantes operatórios como elementos que permitem a análise de conversão é uma forma de integrar as perspectivas centradas na representação e no estudante.

Com base nessas considerações, conforme já explanado, foram elaborados dois tipos de erro apresentados na T1. O Erro I, relativo à modificação de atributos relevantes das representações, ocorre quando algum atributo relevante é ignorado no processo de conversão, impossibilitando que se preservem os significados das unidades de sentido das representações. Logo, esse tipo de erro evidencia maiores dificuldades com a etapa do reconhecimento das unidades de sentido. O Erro II, referente à transposição de atributos relevantes das representações, acontece quando os atributos reconhecidos de uma representação são mobilizados para outra representação sem a realização de transformações necessárias para à adequação a um outro registro. Isto é, os atributos são introduzidos na representação de chegada mantendo a mesma forma que tinham na representação de partida. Portanto, esse tipo de erro relaciona-se com a etapa de mobilização e transformação das unidades de sentido reconhecidas. Em ambos os erros, a tentativa de preservar ou de transformar o significado das unidades de sentido acaba por violar princípios invariantes do conceito.

Para ilustrar e discutir os tipos de erros apresentados em cada problema, apresenta-se a Figura 5 que contempla três alternativas de conversão para a representação fracionária.

Figura 5- Exemplos de tipos de erro na representação fracionária



Fonte: a autora (2018)

A alternativa apresentada pela *criança 8* apresenta um Erro I, ou seja, de modificação. Do ponto de vista representacional, ela reconhece *a unidade de sentido 7* (fase inicial) e opera com *a unidade de sentido 3* (fase intermediária), porque não entende o significado dessa unidade e não reconhece *a unidade de sentido 3 partes comidas do total de 7 partes* (a fase final/dado que falta). Do ponto de vista conceitual, ao tentar coordenar atributos das representações, é utilizado um teorema em ação do campo conceitual aditivo (subtrair partes de um todo) que não se aplica a situação proposta. Esse teorema em ação evidencia o uso de um raciocínio aditivo baseado no axioma: o todo é igual à soma das partes, evocando, nesse caso, a ideia de que se queremos o valor de uma parte, subtraímos a outra parte do todo. Assim, o significado do atributo reconhecido é modificado, uma vez que era necessário considerar o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo: a existência de uma relação fixa entre duas quantidades (NUNES et al., 2005). Como é feita uma operação de subtração os atributos reconhecidos são transformados.

O Erro II, transposição, é apresentado na alternativa da *criança 7*. Do ponto de vista representacional, ela reconhece *a unidade de sentido 7* (fase inicial), *a unidade de sentido 3* (fase intermediária) e *a unidade de sentido 3 partes comidas do total de 7 partes* (a fase final/dado que falta). Do ponto de vista conceitual, a tentativa de coordenar os atributos relevantes evidencia que o significado da representação de partida (representação em língua materna) tenta ser preservado sem considerar os aspectos semânticos da representação de chegada (representação fracionária). Portanto, ao elaborar a representação fracionária o teorema em ação utilizado diz respeito à compreensão de que a ordem em que as quantidades aparecem no enunciado corresponde à ordem em que os símbolos aparecem na fração. Essa

estratégia foi chamada por Clement (1982) como estratégia sintática porque ela não depende do sentido/significado da expressão.

Os Erros I e II em representações decimais podem ser observados na Figura 6.

Figura 6- Exemplos de tipo de erro na representação decimal

Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua irmã comeu 3 fatias. Qual a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias? Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação.	
Criança 1 (erro de transposição)	3,7
Criança 2 (resposta correta)	0,42
Criança 3 (erro de modificação)	3,0

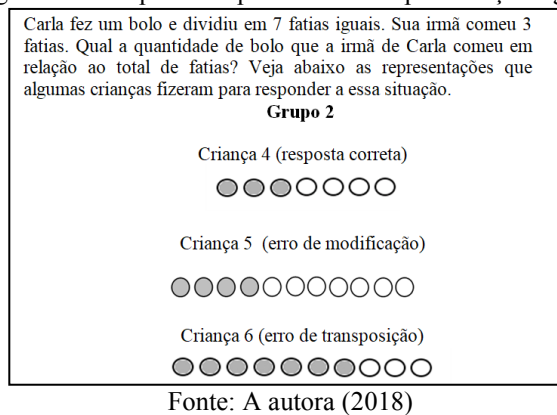
Fonte: a autora (2018)

O Erro I apresentado pela *criança 3* é de modificação, pois a *unidade de sentido 3* (fase intermediária) é reconhecida, mas as *unidades de sentido 7* (fase inicial) e *3 partes comidas do total de 7 partes* (a fase final/dado que falta) são ignoradas. A coordenação feita é mediada por um teorema em ação que evidencia uma compreensão literal do problema, considerando as fatias que a irmã de Carla comeu (três) como uma magnitude absoluta, uma vez que é ignorado que as fatias devem consideradas em relação ao total de fatias (sete). Modificando, portanto, o significado da *unidade de sentido 3 partes comidas do total de 7 partes* (a fase final/dado que falta). Na representação final, o três é transposto e outros atributos relevantes são ignorados e têm seus significados transformados pelo zero que é representado para reforçar a ideia de magnitude absoluta, evidenciando ausência de compreensão semântica e sintática das regras relativas à representação decimal.

Já o erro da *criança 1* é considerado como de transposição porque, do ponto de vista representacional, ela reconhece a *unidade de sentido 7* (fase inicial) e a *unidade de sentido 3* (fase intermediária). Não é possível garantir a *unidade de sentido 3 partes comidas do total de 7 partes* (a fase final/dado que falta) foi reconhecida. Contudo a ordenação da *unidade de sentido 3* antecedendo a *unidade de sentido 7*, sugere a interpretação de que há estabelecimento de uma relação de 3 para 7. Do ponto de vista conceitual, ao tentar coordenar os atributos o teorema em ação empregado diz respeito à compreensão das unidades de sentido (3 e 7) como magnitudes absolutas. Assim, esses atributos são transpostos sem nenhuma transformação para a representação final, explicitando incompreensão das regras de funcionamento da representação decimal.

Com relação à representação figural, os Erros I e II podem ser visualizados na Figura 7.

Figura 7- Exemplos de tipo de erro na representação figural



Na Figura 7, a *criança 5* apresenta o Erro I, modificação, pois, assim como a *criança 8* da Figura 6, a unidade de sentido 7 (fase inicial) foi reconhecida e a unidade de sentido 3 (fase intermediária) foi utilizada para uma operação ($7-3=4$). Deste modo, os atributos relevantes foram mobilizados por meio de um teorema em ação vinculado ao raciocínio aditivo, modificando os seus significados na representação final.

Quanto ao Erro II, transposição, a *criança 6* reconhece as unidades de sentido 3 e 7, mas a mobilização para a representação final tenta preservar a configuração que essas unidades apresentavam no registro inicial. Desta forma, é possível verificar que, do ponto de vista conceitual, o teorema em ação utilizado considera as unidades de sentido como magnitudes absolutas, desconsiderando o aspecto relativo da fração. Discussões sobre esse tipo de estratégia relacionada às representações figurais de fração podem ser encontradas em Nunes (2003).

Considera-se que os tipos de erro apresentados (modificação e transposição) tem origem em dificuldades tanto representacionais quanto conceituais, tendo em vista que se assume a existência de complementaridade entre esses aspectos no processo de conceitualização em matemática. Do ponto de vista representacional, o estudante pode não compreender as regras de funcionamento de uma representação (inicial ou final), impossibilitando, assim, a interpretação ou preservação adequada do discurso matemático. Do ponto de vista conceitual, é possível que o estudante não compreenda os princípios invariantes que devem ser mobilizados, utilizando teoremas em ação inadequados para a situação.

Em suma, os erros de conversão apresentados expressam dificuldades de ordem semântica ou sintática com as representações iniciais ou finais da conversão, levando a uma

mobilização equivocada de seus atributos relevantes. O Quadro X evidencia as diferenças entre os tipos de erro em cada etapa da conversão.

Quadro 4 - Diferenças entre os tipos de Erros I e II em cada etapa da conversão

Etapas da conversão	Erro I	Erro II
	Erro de modificação	Erro de transposição
Etapas de reconhecimento	Ignora muitos atributos relevantes da representação de partida (signos, configurações e regras sintáticas e semânticas).	Reconhece todos ou a maioria dos atributos relevantes da representação de partida (signos, configurações e regras sintáticas e semânticas).
Etapas de coordenação	Modifica o significado dos atributos relevantes	Tenta preservar o significado dos atributos relevantes
Etapas de transformação e mobilização	Transforma atributos ao mobilizar para a representação de chegada	Transpõe atributos a representação de chegada sem realizar transformações
Não é feita equivalência entre as relações matemáticas das representações		

Fonte: a autora (2018)

Ainda sobre as alternativas de múltipla escolha propostas na T1, é pertinente salientar que houve alternância da ordem de apresentação dos itens com a opção de conversão correta para evitar que a opção sem erros aparecesse sempre na mesma posição. Uma vez expostos os critérios e escolhas adotados para a elaboração da T1, na seção seguinte serão detalhadas as características da T2.

3.3.3 A Tarefa 2: competência de efetuar conversões de frações

A T2 examinou a competência de efetuar conversões de frações quando solicitada em diferentes sentidos, situações e representações semióticas deste conceito. Esta tarefa foi composta por seis problemas que tinham como ponto de partida representações em língua materna e requisitavam como ponto de chegada representações simbólicas (decimal e fracionária) e figurais. A Figura 8, exemplifica a forma de apresentação dos problemas na T2 (o conjunto de problemas propostos pode ser conferido no Apêndice D).

Figura 8- Exemplo de modo de apresentação dos problemas na T2

Problema 5F - Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. **Escreva a fração** que representa a quantidade de torta que cada amigo irá receber.

Problema 5FP - Agora faça um **desenho** que represente a quantidade de torta que cada amigo irá receber.

Fonte: a autora (2018)

Note-se que na T2, os estudantes foram requisitados a efetuar conversões de frações a partir de um enunciado em língua materna. Para cada problema solicitava-se uma conversão para uma representação simbólica (fracionário ou decimal) ou figural. Diferentemente da T1 que apresentava três opções de conversão de modo simultâneo, a T2 solicitava que as conversões fossem efetuadas uma após a outra em cada questão. Assim, considerando que as representações figurais sempre eram precedidas por conversões para registros simbólicos (fracionários ou decimais), para as análises, as representações figurais elaboradas pelos alunos foram agrupadas em dois tipos: Figural F – antecedidas por conversões para representações fracionárias e; Figural D – antecedidas por conversões para representações decimais.

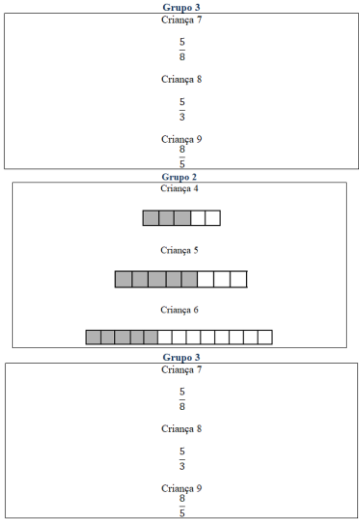
Como já foi explicitado anteriormente, na entrevista relativa a essa tarefa os problemas foram apresentados por escrito (em formato de caderno) e era deixado um espaço para a elaboração das representações solicitadas. Foi realizada a leitura de um problema por vez, seguindo-se da solicitação das explicações dos estudantes sobre suas resoluções. Após a leitura era fornecida a instrução abaixo:

Eu tenho interesse de descobrir como as crianças pensam (entendem) sobre frações. Por isso tenho aqui alguns problemas de frações. Nós faremos a leitura em voz alta de cada problema e em seguida vou pedir para que você escreva suas respostas nesses espaços em branco. Sempre que você terminar de responder vou te pedir para imaginar que você precisa explicar para outro colega da sua turma como você fez para resolver esse problema.

Em ambas as tarefas (T1 e T2) os materiais utilizados foram: um gravador MP4, cadernos contendo as questões (ver Figuras 8 e 4), lápis e borracha.

Para permitir uma melhor visualização do percurso metodológico do estudo, o Quadro 5, adiante apresenta uma síntese da investigação apresentando os objetivos, participantes, procedimentos e tarefas implementadas.

Quadro 5- Síntese da organização da investigação

Objetivos	
- Examinar o efeito dos sentidos, situações e representações semióticas em relação às competências de conversão de frações; - Analisar os tipos de erros cometidos pelos estudantes ao converter frações; - Investigar a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes quando cometem erros para a conversão de frações	
Perguntas de pesquisa	
Será que os sentidos, situações e representações afetam o desempenho dos estudantes ao utilizar diferentes competências para conversão de frações? Quais os tipos de erros cometidos pelos alunos quando solicitados a utilizar diferentes competências para a conversão de frações? Quais as relações entre os tipos de erros de conversão cometidos pelos estudantes com os sentidos, situações e representações de fração? Qual a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes quando cometem erros na conversão de frações? Como os diferentes sentidos, situações e representações de frações afetam as estratégias de conversão dos estudantes?	
Participantes	
60 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental: 34 meninas e 26 meninos Todos previamente instruídos sobre fração.	
Procedimentos	
Aplicação individual de tarefas em duas sessões através de entrevista clínica	
Tarefa 1	Tarefa 2
Objetivo: avaliar a <i>competência de identificar</i> conversões de frações quando solicitada em diferentes sentidos, situações e representações semióticas.	Objetivo: examinar a <i>competência de efetuar</i> conversões de frações quando solicitada em diferentes sentidos, situações e representações semióticas.
Questão - Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Qual a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta? Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação. 	Questão - Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Escreva o número decimal que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta. Agora faça um desenho que represente a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.

4 CAPÍTULO DE RESULTADOS

Como descrito no Capítulo 3, este estudo foi composto por duas tarefas aplicadas, individualmente, em duas sessões de entrevistas com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. As tarefas T1 e T2 avaliaram as competências de identificar e efetuar conversões de frações, respectivamente. Para ambas, foi investigado se diferentes sentidos, situações e representações semióticas produzem efeitos no desempenho das competências de conversão de frações. Isto porque se considera que estes fatores podem mobilizar diferentes aspectos cognitivos, podendo afetar o desempenho dos estudantes em atividades de conversão.

Nesse sentido, os resultados deste estudo serão discutidos em três sessões que enfocam os seguintes aspectos: o desempenho nas competências de conversão (número de acertos); os tipos de erros cometidos e; as estratégias utilizadas para efetuar conversões de frações que resultaram em erros. Para a análise do desempenho, foi considerada a frequência de acertos computados em relação às competências de identificar e efetuar conversões (T1 e T2) em cada uma das variáveis investigadas (sentidos, situações e representações semióticas). Os dados foram submetidos ao teste estatístico de Wilcoxon que permitiu comparar postos de médias, indicando diferenças estatisticamente significativas entre as variáveis.

A análise dos tipos de erros baseou-se nas conversões errôneas relativas às opções de múltipla escolha presentes na T1 (identificar) e nas conversões elaboradas na T2 (efetuar). Para essas análises foi adotado o teste estatístico Qui-quadrado de independência para examinar associações entre os tipos de erro e as variáveis investigadas. Por último, procedeu-se a análise para a competência de efetuar conversões (T2), investigando-se as estratégias utilizadas pelos estudantes que resultaram em erros, utilizando-se novamente o teste Qui-quadrado de independência para a compreensão de padrões de associação entre as variáveis do estudo e as estratégias identificadas.

Tendo exposto estes aspectos, as sessões adiante serão iniciadas com a apresentação do sistema utilizado para cada análise, seguido pela exposição dos resultados por meio de gráficos acompanhados por comentários explicativos e interpretativos dos dados obtidos.

4.1 ANÁLISE DO DESEMPENHO

A análise do desempenho foi realizada em função da frequência de acertos em cada variável investigada no estudo: competências, sentidos, situações e representações semióticas

vinculadas à conversão de frações. Os dados foram submetidos a três testes estatísticos. O primeiro foi o de *Shapiro-Wilk* que permitiu examinar a distribuição dos dados, identificando comportamento não paramétrico. O segundo foi o teste o de *Levene* que possibilitou verificar a homogeneidade entre as variâncias, ou seja, o quanto os escores obtidos em cada variável diferem uns dos outros. Os resultados revelaram variâncias não homogêneas para quatro das nove comparações realizadas. As constatações obtidas por meio dos dois primeiros testes permitiram observar o comportamento dos dados e fundamentar a escolha do teste de significância estatística.

Tendo em vista a distribuição não paramétrica e as variâncias não homogêneas de alguns dados relativos ao desempenho, o teste escolhido para avaliar a significância estatística foi o de *Wilcoxon*, pautado na comparação de médias por postos. As análises foram realizadas em duas direções: horizontal (entre tarefas) e vertical (dentro das tarefas). Como foram conduzidas várias repetições do teste, para evitar a probabilidade de erro amostral foi aplicada a correção de Bonferroni para a qual $p = \frac{0,05}{\text{número de testes realizados}}$ (SIEGEL, 1977). Os tópicos seguintes apresentam o sistema de análise utilizado e os dados obtidos quanto ao desempenho.

4.1.2 Sistema de análise

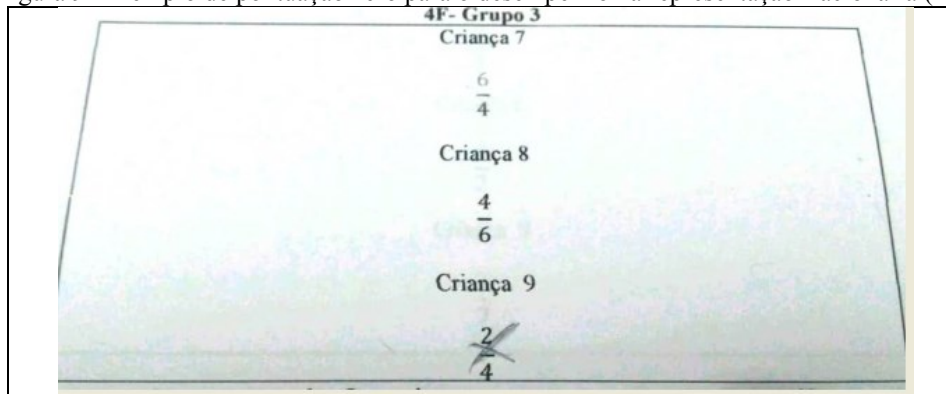
Para proceder à análise do desempenho avaliaram-se as representações identificadas (T1) ou efetuadas (T2) para as tarefas de conversão de fração, em conjunto com as explicações fornecidas por meio das entrevistas. O desempenho foi classificado por meio de duas pontuações que foram avaliadas por dois juízes independentes (concordância em 95% dos casos). Para dirimir discordâncias consultou-se um terceiro juiz cujas avaliações foram consideradas finais. As pontuações utilizadas serão explanadas adiante com exemplos relativos às tarefas T1 e T2, respectivamente.

Pontuação Zero

Pontuação zero – Atribuída aos estudantes que identificaram ou efetuaram conversões de forma incorreta, fornecendo explicações também incorretas para a escolha ou elaboração das representações.

Exemplo 1 (pontuação zero): Tarefa 1, sentido discursivo para discursivo, situação parte todo, representação fracionária. (Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. Qual quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços?)

Figura 9- Exemplo de pontuação zero para o desempenho na representação fracionária (T1)



(Extrato de protocolo do Participante nº 41 sexo feminino, 10 anos).

E⁹: A criança nove? Por quê?

P: Porque ela comeu quatro e sobrou dois.

E: Por que não pode ser a resposta da criança sete?

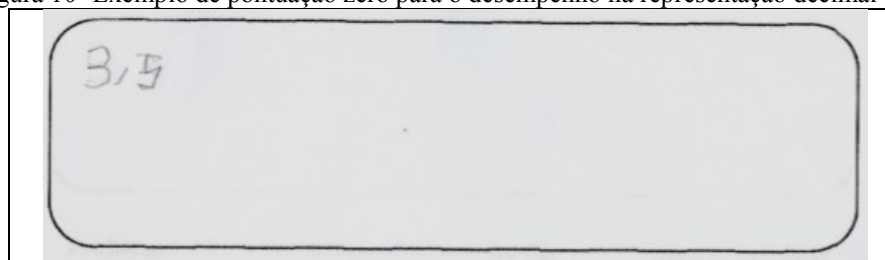
P: Porque ela comeu quatro mais não poderia sobrar seis.

E: Entendi. E a criança oito porque ela errou?

P: Ela não comeu seis.

Exemplo 2 (pontuação zero): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, situação medida, representação decimal (Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Escreva o **número decimal** que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.)

Figura 10- Exemplo de pontuação zero para o desempenho na representação decimal (T2)



(Extrato de protocolo do Participante nº 60, sexo masculino, 10 anos).

E: Explica para mim o que você fez.

P: Cinco é o total de tinta branca [...] vou deixar assim. Cinco é o total de latas de tinta branca e as três são as tintas vermelhas. Aí deu o total de oito latas.

E: E por que deu esse resultado?

P: Porque cinco é o total de latas de tinta branca e três são as latas vermelhas.

E: E por que o três vem na frente e o cinco atrás da vírgula?

P: Por que eu tinha pensado que cinco era o total, mas cinco é o número de latas brancas, que fica do lado. Mas as três tintas vermelhas têm que ficar do lado esquerdo, por causa que [...] essa é difícil, ó, tia?

E: Mas no que você está pensando? Por que você acha que o três tem que ficar desse lado aí na frente da vírgula?

P: Por causa que três é o número de tintas vermelhas.

E: E por que a tinta vermelha fica na frente?

P: Porque a pergunta quer saber a quantidade de tinta branca. Aí a tinta branca é só cinco latas no total, aí fica embaixo. Aí o três é a tinta vermelha, que fica em cima.

⁹ Convenções adotadas: E – examinadora; P – participante.

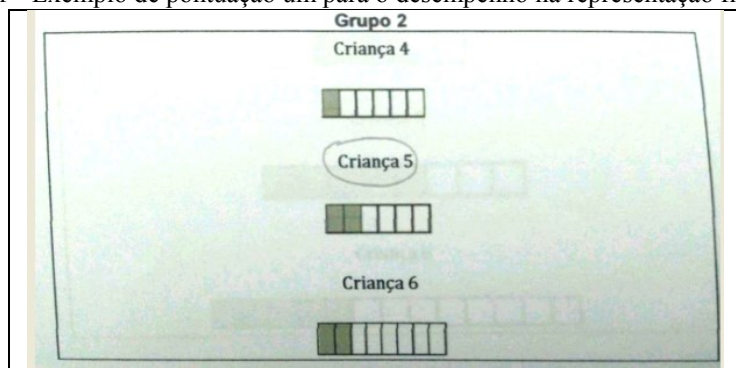
Em ambos os exemplos, a representação identificada (Exemplo 1) e efetuada (Exemplo 2) evidencia ausência de correspondência com as relações matemáticas expressas pelo enunciado do problema. Além disso, as justificativas explicitadas por meio da entrevista revelam lacunas na compreensão dos atributos relevantes das representações (unidades de sentido e invariantes).

Pontuação Um

Pontuação um – Atribuída aos estudantes que identificaram ou efetuaram conversões de forma correta, fornecendo explicações também corretas para a escolha ou elaboração das representações.

Exemplo 3 (pontuação um): Tarefa 1, sentido discursivo para não discursivo, situação quociente, representação figural contínua. (Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. Qual a quantidade de torta que cada amigo irá receber?)

Figura 11 - Exemplo de pontuação um para o desempenho na representação figural (T1)



(Extrato de protocolo do Participante nº 02, sexo masculino, 11 anos).

P: A criança cinco.

E: Por quê?

P: Por causa que dois pedaços de torta vão dar para todos os amigos e a criança quatro vai sobrar.

E: E a criança seis?

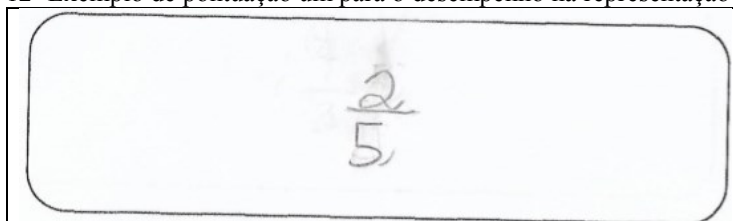
P: Criança seis vai dar, vai dar mais.

E: Como assim?

P: Um vai ficar mais que os outros.

Exemplo 4 (pontuação um): Tarefa 2, situação medida, sentido discursivo para discursivo, representação fracionária. (Para pintar seu quarto, Sara misturou 3 litros de tinta azul com 2 litros de tinta amarela. A mistura das duas tintas deu um total de 5 litros. **Escreva a fração** que representa a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura.)

Figura 12- Exemplo de pontuação um para o desempenho na representação fracionária (T2)



(Extrato de protocolo do Participante nº 60, sexo masculino, 10 anos).

P: Então eu escrevi a fração que dá dois, que é igual à tinta amarela, que é dois litros de tinta amarela.

E: E o cinco?

P: O cinco representa todos os litros.

As representações identificadas no (Exemplo 3) e efetuada no (Exemplo 4) pelos os estudantes, demonstram conversões equivalentes ao significado das relações matemáticas presentes no enunciado. As justificativas fornecidas evidenciam, do mesmo modo, compreensão dos atributos relevantes das representações (unidades de sentido e invariantes).

4.1.3 Competências: identificar vs. efetuar

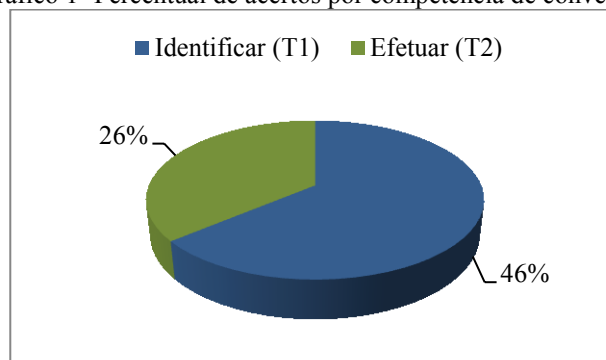
Nesta seção, serão comparados os resultados das competências de identificar (T1) e efetuar (T2) conversões de frações quanto ao desempenho dos estudantes nas três variáveis investigadas: sentidos, situações e representações semióticas. Os dados relativos a cada um desses aspectos são apresentados e discutidos nas subseções a seguir.

Como pode ser observado no Gráfico 1¹⁰, de modo geral, os estudantes apresentam percentuais de acertos abaixo de 50% em ambas as competências de conversão de frações (identificar: 46%; efetuar: 26%). Isto demonstra dificuldades da maioria dos estudantes para lidar com esse conceito e suas representações mesmo após a instrução formal no contexto escolar. Nota-se, também que identificar conversões (T1) parece ser mais fácil para os estudantes do que efetuar conversões (T2). Ao investigar as diferenças entre o desempenho geral das competências (identificar vs. efetuar) de conversão constatou-se, por meio do teste de Wilcoxon, diferenças significativas [$Z = -5,727^b$; $p < .001^{11}$]. Deste modo, confirma-se a maior facilidade dos estudantes com a competência de identificar em relação à competência de efetuar essas conversões.

¹⁰ Todos os cálculos relativos ao desempenho foram feitos a partir do número total de respostas. Para o cálculo do total de acertos por competência $n = 720$.

¹¹ Conforme explicado, em todas as análises do desempenho o valor de p foi ajustado pela correção de Bonferroni.

Gráfico 1- Percentual de acertos por competência de conversão



Fonte: A autora (2018)

Em face deste resultado é importante questionar se existem diferenças no desempenho dos estudantes nas competências de conversão (identificar vs. efetuar) quando são considerados os sentidos de conversão (discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo). O tópico a seguir visa responder a esse questionamento.

4.1.4 Sentidos de conversão: discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo

O resultado geral quanto aos sentidos de conversão é evidenciado pelo Gráfico 2¹². Observa-se mais acertos no ato de converter do sentido discursivo para não discursivo (46%) quando comparado ao sentido discursivo para discursivo (27%). O teste de Wilcoxon confirmou que a diferença entre os sentidos é significativa [$Z = -4,821^c$; $p < .001$]. Deste modo, evidencia-se que a conversão do sentido discursivo para não discursivo é mais fácil para os estudantes quando comparada a do sentido discursivo para discursivo. Uma vasta literatura corrobora este resultado ao sustentar que as representações figurais são mais fáceis de lidar do que as simbólicas no que concerne as frações. (KERSLAKE, 1986; WOLECK, 2001; SHARP; GAROFALO; ADAMS, 2002; MARZANO, 2010; MOYER-PACKENHAM; ULMER, ANDERSON, 2012; BRIZUELA, 2016; NUNES, 2016).

¹² Número de respostas possíveis por sentido: sentido discursivo para discursivo (n= 360) sentido discursivo para não discursivo (n= 360).

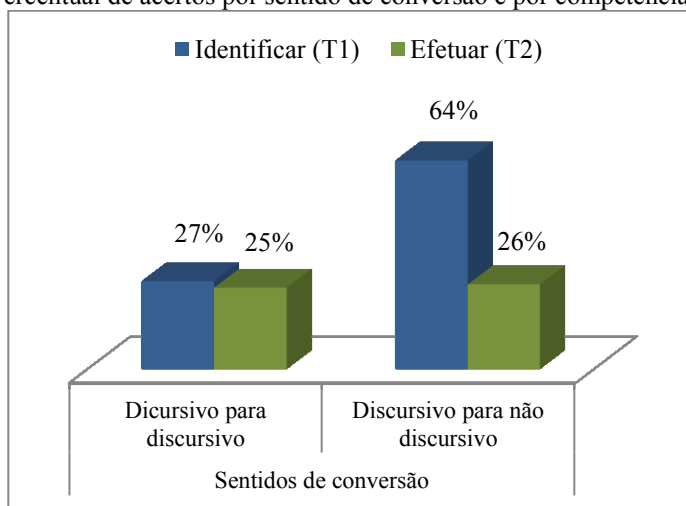
Gráfico 2- Percentual de acerto por sentido de conversão



Fonte: a autora (2018)

No entanto, cabe verificar como os sentidos são afetados por cada competência de conversão. O Gráfico 3¹³, a seguir, apresenta o resultado encontrado para o desempenho quando são considerados os sentidos de conversão (discursivo para discursivo vs. discursivo para o não discursivo) em relação a cada competência de conversão (identificar vs. efetuar).

Gráfico 3- Percentual de acertos por sentido de conversão e por competência de conversão



Fonte: A autora (2018)

Os dados obtidos na conversão do sentido discursivo para discursivo são semelhantes para as duas competências (identificar: 27% e efetuar: 25%) conversões de frações. Ao passo que na conversão do sentido discursivo para não discursivo os estudantes apresentam desempenhos distintos nas duas competências (identificar: 64% e efetuar: 26%). Ao comparar o desempenho dos sentidos de conversão, nas duas competências (identificar vs. efetuar), no geral, o teste de Wilcoxon encontrou diferenças significativas apenas na conversão do sentido discursivo para não discursivo [$Z = -5,682^c$; $p < .001$]. Esse resultado aponta que o nível de

¹³ Número de respostas por sentido: sentido discursivo para discursivo (n= 360) sentido discursivo para não discursivo (n= 360)

difficuldade em relação aos sentidos pode variar em função da competência de conversão mobilizada. Nota-se, que ao identificar conversões, o sentido discursivo para não discursivo foi mais fácil para os estudantes do que o sentido discursivo para discursivo, evidenciando-se efeito deste sentido no desempenho.

Investigou-se ainda se haveria diferenças significativas ao se comparar os sentidos de conversão dentro de cada competência separadamente. Quanto à competência identificar (T1) conversões, observou-se que os estudantes apresentam melhor desempenho no sentido discursivo para não discursivo (64%) em relação ao sentido discursivo para discursivo (27%). O teste de Wilcoxon constatou que essa diferença é significativa [$Z = -5,733^b$; $p < .001$]. Já no que diz respeito à competência de efetuar (T2) conversões, verificou-se baixo percentual de conversões corretas, em ambos os sentidos (discursivo para discursivo: 25%; discursivo para não discursivo: 26%), por conseguinte, o teste de Wilcoxon não revelou diferença significativa. Deste modo, os dados obtidos em relação às competências de conversão, observados separadamente, confirmam os resultados obtidos na comparação entre as competências (identificar vs. efetuar). Isto é, tanto a competência de identificar como a de efetuar do sentido do sentido discursivo para discursivo apresentam o mesmo nível de dificuldade para os estudantes, mas a competência de identificar do sentido discursivo para não discursivo, ao contrário, é mais fácil do que a competência de efetuar conversões frações.

A confirmação de que o nível de dificuldade das competências pode variar em função do sentido de conversão, contrasta com a hierarquia estabelecida por Dreher et al. (2014) cujos resultados indicam que a competência de efetuar conversões é sempre mais difícil do que a de identificar. Os resultados do presente estudo revelam que se tratando do sentido discursivo para discursivo, o nível de dificuldade entre as competências de conversão é o mesmo. A implicação imediata deste resultado diz respeito à importância de se considerar o sentido no qual uma conversão ocorre para que seja possível analisar esta atividade cognitiva (LESH; BERH; POST, 1987; BOSSÉ et al. 2011; DUVAL, 2006, 2009, 2011, 2012a). Isto porque as conversões não são atividades cognitivamente reversíveis (DUVAL, 2006, 2011, 2012a).

Ressalta-se ainda a constatação de que a competência de efetuar conversões é mais difícil no sentido discursivo para não discursivo quando comparada à competência de identificar conversões. Isto significa, por exemplo, que identificar figuras geométricas e desenhos é mais fácil do que construí-los. De acordo com Duval (2012b) os aspectos perceptivos são priorizados quando os estudantes constroem uma figura, -isto representa um problema porque os alunos lêem os enunciados e constroem as figuras sem retornar ao

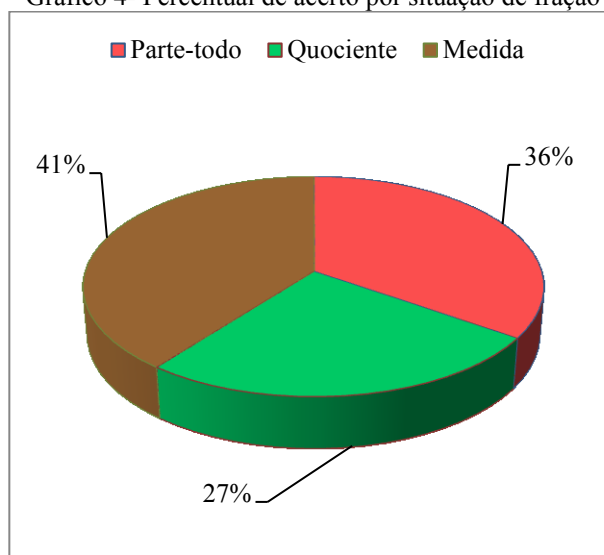
enunciado após a construção. Para este autor, o retorno ao enunciado é fundamental para uma apreensão discursiva uma vez que, para as representações não discursivas, as propriedades pertinentes e aceitáveis não são perceptíveis por meio dos traçados e formas, mas a partir do que é dito no enunciado (DUVAL, 2012b). Neste sentido, os dados sinalizam, no domínio das frações, que a apreensão discursiva das figuras é mais fácil para os estudantes quando lidam com a competência de identificar conversões quando comparada a competência de efetuar.

Esta evidência destoa do que normalmente é afirmado na literatura sobre o fato de figuras, desenhos e diagramas (representações não discursivas) serem ferramentas que ajudam crianças na compreensão de fração (KERSLAKE, 1986; WOLECK, 2001; SHARP; GAROFALO; ADAMS, 2002; MARZANO, 2010; MOYER-PACKENHAM; ULMER, ANDERSON, 2012; BRIZUELA, 2016; NUNES, 2016). Os resultados relativos aos sentidos de conversão sugerem que as representações de fração não podem ser consideradas de forma isolada. Isto porque, conforme sugerem Duval (2006) e Vergnaud (2009) o recurso a uma diversidade de representações semióticas em coordenação, bem como o estímulo às conversões entre elas é fundamental para a compreensão em matemática.

4.1.5 Situações de fração: parte-todo vs. quociente vs. medida

O resultado quanto ao desempenho geral das situações de fração pode ser visualizado no Gráfico 4. Verifica-se que a situação com maior número de acertos foi medida (41%), seguida por parte-todo (36%) e quociente (26%). O teste de Wilcoxon detectou diferenças significativas apenas entre as situações [parte-todo e quociente: $Z = -4,388^b$; $p < .001$; medida e quociente: $Z = -3,315^c$; $p = .001$]. Não foi detectado diferenças significativas entre a situação parte-todo e medida. Logo, a situação quociente foi a mais difícil para os estudantes no geral.

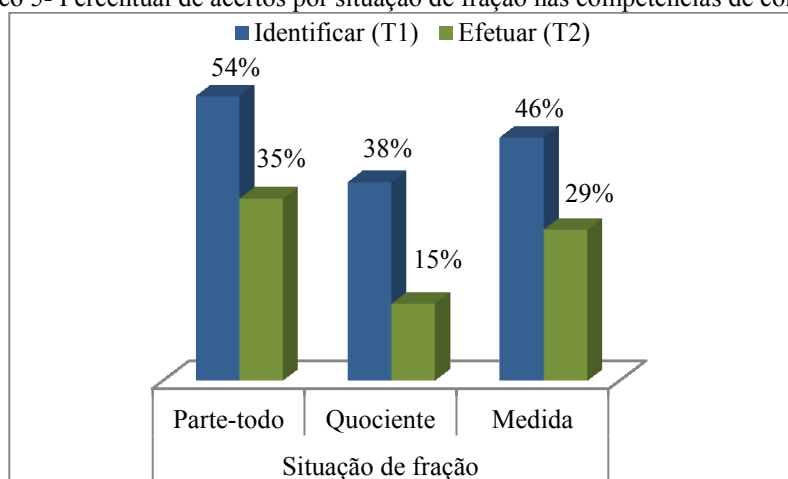
Gráfico 4- Percentual de acerto por situação de fração



Fonte: A autora (2018)

Em face deste resultado geral, buscou-se averiguar a existência de diferenças no desempenho dos estudantes nas competências de conversão (identificar vs. efetuar) quando são consideradas as situações (parte-todo, quociente e medida)?

Gráfico 5- Percentual de acertos por situação de fração nas competências de conversão



Fonte: A autora (2018)

Constata-se no Gráfico 5¹⁴, ao se comparar os desempenhos das competências (identificar vs. efetuar) conversões de frações, melhores resultados para a competência de identificar nas situações parte-todo (54%), seguida por medida (46%) e quociente (38%). Também em relação à competência de efetuar conversões os estudantes apresentam melhor desempenho na situação parte-todo (35%), sucedida por medida (29%) e quociente (15%). Tais resultados revelam que para todas as situações de fração a competência de identificar conversões parece ser mais fácil quando comparado à competência de efetuar conversões. O

¹⁴ Parte-todo: n= 180; Quociente: n= 180; Medida: n=180

teste de Wilcoxon confirma o padrão observado nos dados, demonstrando que as diferenças entre as competências de identificar e efetuar conversões são significativas para as três situações investigadas (parte-todo: $Z = -4,701^c$; $p < .001^{15}$; quociente: $Z = -3,784^c$; $p < .001$ e medida $Z = -3,236^c$; $p = .001$). Esse resultado demonstra que a competência de identificar conversões foi mais fácil do que a de efetuar para todas as situações.

Todavia, ao verificar os resultados obtidos para cada competência de conversão separadamente, é possível observar variações dentre as dificuldades apresentadas para cada situação de fração. Para a competência de identificar conversões, a situação parte-todo (54%) parece ter sido a mais fácil e a quociente a mais difícil (38%). O teste Wilcoxon, ao comparar os resultados das situações, para a competência de identificar conversões, verificou diferenças significativas apenas entre parte-todo e quociente [$Z = -4,011^c$; $p < .001$]. Portanto, para as outras comparações (parte-todo vs. medida e medida vs. quociente) não foram detectadas diferenças significativas, evidenciando desempenhos semelhantes.

Com relação à competência de efetuar conversões, constata-se, novamente que na situação quociente (15%) os estudantes apresentam mais dificuldades em relação às demais situações (parte-todo: 35% e medida 29%). O teste *Wilcoxon* constatou diferenças significativas ao examinar a competência de efetuar conversões entre as situações (parte-todo e quociente: $Z = 3,303^c$; $p < .001$; medida e quociente $Z = 3,138^b$; $p < .001$). Não foram verificadas diferenças significativas entre a situação parte-todo e medida na conversão efetuar.

Deste modo, para a competência de identificar conversões, verifica-se que situação quociente foi a mais difícil apenas quando comparada à situação parte-todo, enquanto as situações quociente e medida, bem como parte-todo e medida apresentam níveis de dificuldades semelhantes. Para a competência de efetuar conversões, por sua vez, constatou-se que a situação quociente foi a mais difícil em comparação as situações parte-todo e medida. Tais resultados demonstram que, ao se examinar cada competência separadamente, há níveis de dificuldades distintos para cada situação. O resultado que mais se destaca é o da situação quociente, uma vez que nessa situação os estudantes apresentam um baixo desempenho em ambas às competências. Já as situações parte-todo e medida podem ser mais fáceis ou difíceis a depender da competência exigida aos estudantes.

Este dado difere das evidências encontradas por Nunes et al. (2007) ao submeterem crianças inglesas, com idade aproximada de 10 anos e 4 meses, a questões sobre a situação

¹⁵ Valor de p ajustado pela correção de Bonferroni

parte-todo e quociente no qual os pesquisadores identificaram melhores desempenhos na situação quociente. Enquanto as evidências de Nunes et al. (2007) apresentam os melhores desempenhos para a situação quociente, o presente estudo verifica os piores resultados para a esta situação. Já o estudo de Charalambous e Pitta-Patanzi (2007), ao avaliar 644 crianças gregas de 5º e 6º ano, considerando cinco situações de frações (parte-todo, quociente, medida, operador e razão), constatou que os estudantes apresentaram os melhores desempenhos para a situação parte-todo e os piores para a situação medida. Ambas as investigações citadas, apresentam dados que diferem dos resultados deste estudo. Uma primeira explicação possível para o contraste entre os resultados pode ser relativa ao contexto de construção do conhecimento conforme destacam Charalambous e Pitta-Patanzi (2007), as diferenças entre currículos de cada país, uma vez que alguns estudos associam a compreensão das situações de fração com o tipo de instrução recebida no contexto escolar (BROUSSEAU et al, 2007; MALASPINA; MAGINA, 2013. DOOREN et al, 2015).

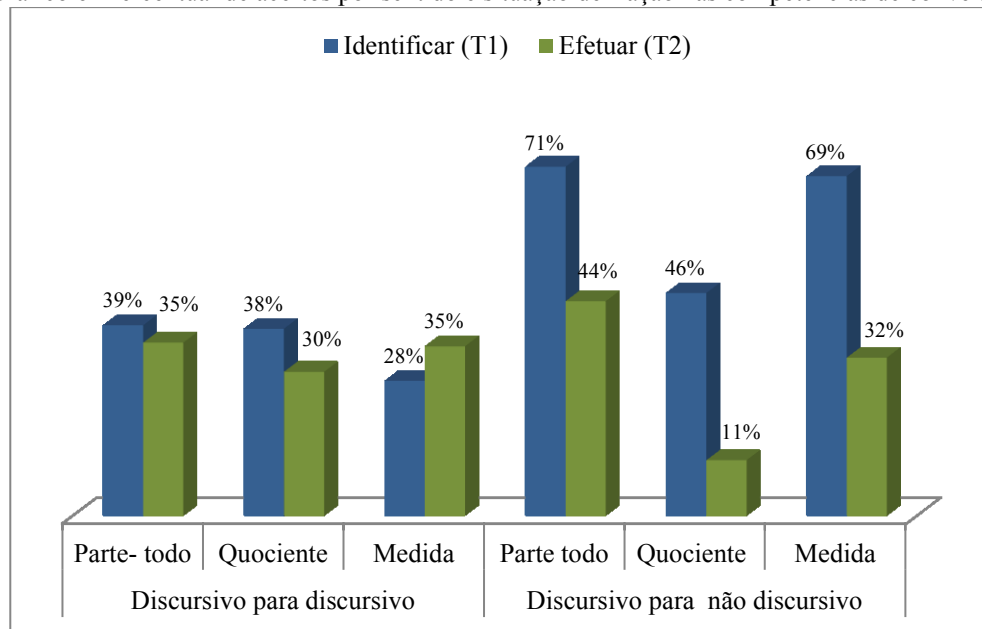
Outra possibilidade de interpretação para essas diferenças pode estar relacionada ao fato de as atividades propostas nesta investigação terem exigido que os estudantes pensassem sobre as situações de fração considerando os diferentes sentidos de conversão (discursivo para discursivo e discursivo para o não discursivo). Será que essas diferenças nos desempenhos seriam melhor compreendidas ao se considerar os sentidos de conversão (discurso para discurso e o discursivo para o não discursivo)? Acredita-se que a resposta para esse questionamento é afirmativa porque do ponto de vista psicológico cada sentido de conversão mobiliza aspectos cognitivos distintos do conteúdo, tendo em vista que cada representação semiótica requer compreender campos semânticos específicos (DUVAL, 2012a).

Deste modo, considerou-se pertinente investigar se os sentidos de conversão apresentam efeito no desempenho das competências em relação às situações. Como pode ser observado no Gráfico 6¹⁶, de modo geral, no sentido discursivo para o discursivo os estudantes apresentam desempenhos semelhantes nas duas competências quando se considera as situações (parte-todo - identificar: 39% e efetuar: 35%; quociente- identificar 38% e efetuar: 30%; medida- identificar: 28% e efetuar: 35%). Diferentemente do sentido discurso para o não discurso (parte-todo - identificar: 71% e efetuar: 44%; quociente- identificar 46% e efetuar: 11%; medida- identificar: 69% e efetuar: 32%). Tais resultados revelam que no

¹⁶ O número de respostas para a todos os sentidos em cada situação foi 120 respostas. Em outras palavras, o número de resposta para cada situação considerando o sentido de conversão foi *parte-todo*: discursivo para discursivo (n= 120); discursivo para não discursivo (n=120); *quociente*: discursivo para discursivo (n= 120); discursivo para não discursivo (n=120); *medida*: discursivo para discursivo (n= 120); discursivo para não discursivo (n=120).

sentido discursivo para discursivo as situações apresentam o mesmo nível de dificuldade enquanto que para o sentido discursivo para não discursivo a dificuldade pode variar de acordo com a situação apresentada (ver Gráfico 6).

Gráfico 6- Percentual de acertos por sentido e situação de fração nas competências de conversão



Fonte: A autora (2018)

Procedeu-se a execução do teste estatístico Wilcoxon, para comparar se as competências de conversão (identificar vs. efetuar) diferem em cada sentido (discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo). Os resultados revelaram diferenças significativas no sentido discursivo para não discursivo nas três situações [parte-todo: $Z = -4,883^b$; $p < .001$, quociente: $Z = -4,302^b$; $p < .001$ e medida: $Z = -4,461^b$; $p < .001$], no sentido discursivo para discursivo, ao contrário, não foram detectadas diferenças significativas quando se considera às competências de identificar e efetuar conversões. Esses resultados explicitam que o desempenho dos estudantes é semelhante quando se trata de identificar ou efetuar conversões do sentido discursivo para discursivo quando se considera simultaneamente as situações. Diferentemente do sentido discursivo para não discursivo que ao considerar as situações revela diferenças no desempenho. Este dado revela mais uma nuance relativa às competências de conversão, demonstrando que há diferenças entre as situações em função do sentido de conversão solicitado, no domínio das frações. Além disso, esses dados confirmam as evidências encontradas anteriormente neste estudo relativas ao fato de os estudantes apresentarem melhor desempenho quando identificam frações, no sentido discursivo para não discursivo e sofrem influência das situações.

Após a comparação entre as competências no geral considerando os sentidos e as situações, procedeu-se a análise dos resultados considerando os sentidos e as situações em cada uma das competências separadamente. Como pode ser verificado, no Gráfico 6, na competência identificar no sentido discursivo para discursivo os estudantes apresentam desempenhos semelhantes (parte-todo: 39%; quociente: 38% e medida: 28%) enquanto que no sentido discursivo para não discursivo apresentam desempenhos semelhantes nas situações parte-todo e medida, respectivamente, 71% e 69% e um percentual menor de desempenho na situação de quociente (46%). Na competência efetuar constata-se desempenhos semelhantes no sentido do discursivo para discursivo (parte-todo: 35%, quociente: 30% e medida: 35%) e percentuais distintos de desempenho nas três situações no discursivo para o não discursivo (parte-todo: 44%; quociente: 11% e medida: 32%)

O teste de Wilcoxon não detectou diferenças significativas entre as situações no sentido discursivo para discursivo ao considerar a competência de identificar conversões. Já para o sentido discursivo para não discursivo foram encontradas diferenças significativas ao comparar parte-todo vs. quociente [$Z = -4,386^b$; $p < .001$] e quociente vs. medida [$Z = -4,198^c$; $p < .001$]. Não foram detectadas diferenças significativas quando se compara parte-todo vs. medida. Estes dados indicam que para competência de identificar conversões não há efeito do sentido discursivo para discursivo nas situações que parecem apresentar mesmo grau de dificuldade. Contudo, ao considerar o sentido discursivo para não discursivo observa-se que a situação quociente é a mais difícil, dentre as demais.

Com respeito à competência de efetuar conversões de frações, o teste de Wilcoxon novamente não detectou diferenças significativas para o sentido discursivo para discursivo nas situações. Porém, ao considerar o sentido discursivo para não discursivo, foram encontradas diferenças ao comparar as situações parte-todo vs. quociente [$Z = -3,956^b$; $p < .001$]; e quociente vs. medida: [$Z = -3,409^c$; $p = .001$]. Não foram detectadas diferenças significativas quando se compara parte-todo vs. medida. Esse resultado explicita que a situação quociente é mais difícil do que as demais situações quando se considerar o sentido discursivo para não discursivo na competência de efetuar.

Considera-se que as evidências obtidas demonstram que as situações de fração, apresentam diferenças ao se considerar os sentidos, as competências e as situações nas quais a conversão se realiza. A situação quociente é a mais difícil para os estudantes independentemente das competências de conversão. Esses dados vão de encontro a afirmação de Duval (2012b) sobre o fato de que a mudança na representação de um objeto matemático

transforma as relações e propriedades que acessamos, isto é, o conteúdo. Logo, cada sentido utilizado para a conversão traz um custo cognitivo diferente para o estudante uma vez que cada representação (discursiva ou não discursiva) pertence a uma rede semântica específica. De modo complementar, Vergnaud (1996) esclarece que o ato de representar envolve a explicitação de propriedades matemáticas dos objetos, tornando possível analisar suas conexões e demonstrar suas regras na medida em que ações e esquemas são mobilizados em função das situações. Essa relação diz respeito à forma operatória e predicativa do conhecimento que permitem agir e representar as situações, respectivamente. Vergnaud (2017) explica ainda que as formas operatórias e predicativas são diferentes, mas complementares, uma vez que nenhuma das duas é suficiente por si própria.

Portanto, compreende-se que os efeitos evidenciados entre competências, sentidos e situações reforçam a necessidade de considerar que aprendizagem em matemática requer relacionar simultaneamente a conceitualização e a representação como aspectos indissociáveis. Para aprofundar a compreensão desses aspectos, o tópico a seguir analisa os efeitos de cada representação semiótica de modo específico.

4.1.6 Representações semióticas: fracionária vs. decimal vs. figural

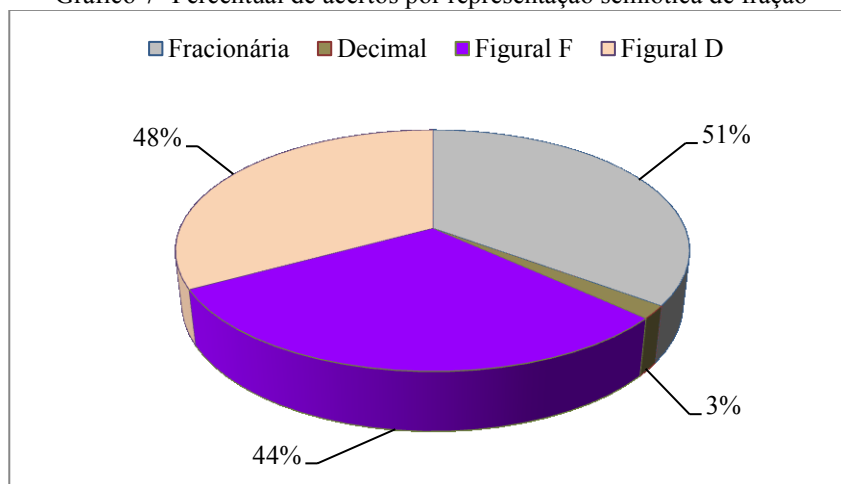
Em relação às representações semióticas de fração, investigadas nesse estudo (fracionária, decimal e figural), conforme explicado no Capítulo 3 (página 78), as representações figurais em ambas as tarefas foram precedidas por outras conversões. Com o objetivo apresentar os resultados, considerando a forma como esses foram coletados, optou-se em um primeiro momento, por proceder à análise das representações figurais agrupando-as com base em dois aspectos: antecedidas por uma fração (Figural F) e antecedidas por um decimal (Figural D)¹⁷.

Os resultados relativos às representações são apresentados pelo Gráfico 7, no qual constata-se que as representações fracionárias (51%), figural F (44%) e figural D (48%) apresentam desempenhos semelhantes, enquanto a representação decimal (3%) apresenta o pior desempenho, praticamente sem acertos. O teste estatístico de Wilcoxon detectou diferenças significativas entre as representações fracionária vs. decimal [$Z = -6,198^b$; $p < .001$] e decimal vs. Figural D [$Z = -6,431^c$; $p < .001$]. Não foi detectada diferença significativa quando comparado fracionário e Figural F (antecedida por uma fração). Portanto,

¹⁷ Nas comparações verticais (entre tarefas) verificaram-se diferenças entre figural F e figural D e nas horizontais (dentro das tarefas) comparou-se figural F com fração e figural D com decimal.

confirma-se que a representação decimal é mais difícil do que as representações fracionária e figural D.

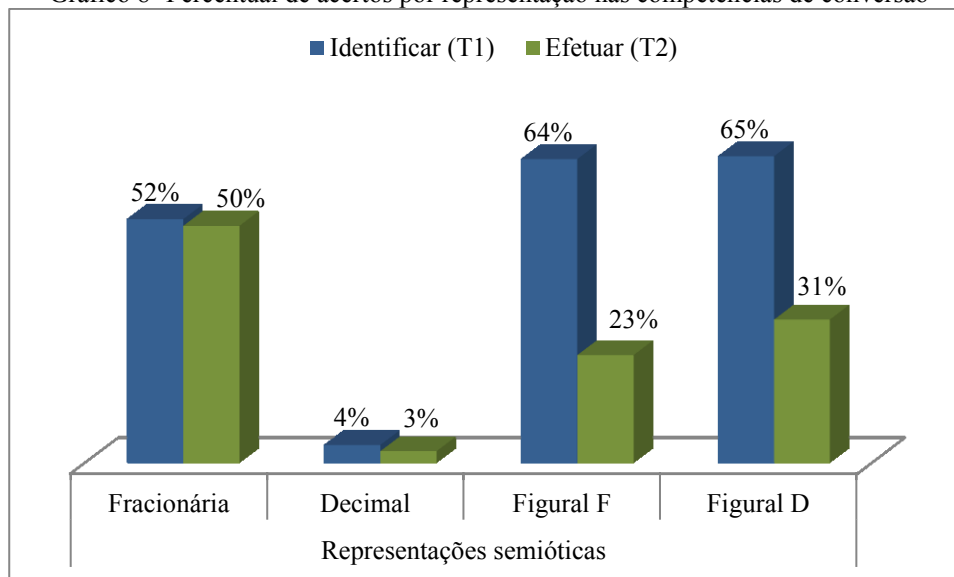
Gráfico 7- Percentual de acertos por representação semiótica de fração



Fonte: A autora (2018)

Em face deste resultado geral, investigou-se a existência de diferenças no desempenho dos estudantes nas competências de conversão (identificar vs. efetuar) quando são considerados as representações (fracionária, decimal, figural F e figural D? O Gráfico 8 ilustra o desempenho quando se considera as representações e as competências.

Gráfico 8- Percentual de acertos por representação nas competências de conversão



Fonte: A autora (2018)

Ao verificar o desempenho nas representações semióticas de fração, considerando as competências (identificar vs. efetuar) de conversão (ver Gráfico 8), percebe-se que tanto ao identificar como ao efetuar conversões, os estudantes têm desempenhos semelhantes quanto

as representações fracionária (Identificar: 52%; Efetuar: 50%) e decimal (Identificar: 4% e efetuar: 3%), mas diferem quanto às representações figurais, quando antecedidas por uma fração [Figural F (identificar: 64% e efetuar: 23%)] ou um decimal [Figural D (identificar: 65% e efetuar: 31%)].

Na comparação das representações entre as competências (identificar vs. efetuar), o teste de Wilcoxon encontrou diferenças significativas apenas entre as representações figurais F (antecedidas por uma fração) [$Z = -4,815^b$; $p < .001^{18}$] e figurais D (antecedidas por uma decimal) [$Z = -4,763^b$; $p < .001$]. Estes resultados evidenciam que estudantes apresentam, para as competências de identificar e efetuar conversões, desempenhos semelhantes quando se considera as representações fracionária e decimal, mas diferem ao considerar representações figurais. É importante destacar o fato dos estudantes apresentarem baixos desempenhos na representação decimal, praticamente sem acertos independentemente da competência. Portanto, as representações figurais têm seu grau de dificuldade afetado pela competência solicitada para a conversão. Isso porque os estudantes evidenciaram ter mais dificuldades com esta representação ao efetuar conversões.

Investigou-se ainda o desempenho em cada competência de conversão, separadamente, em relação às representações semióticas de fração. Primeiramente, quanto à competência de identificar conversões, observa-se que os estudantes apresentam melhores desempenhos nas representações Figurais F (64%) e D (65%), seguidas pelas representações fracionária (52%) e decimal (4%). Para a competência de efetuar conversões, os melhores desempenhos são verificados na representação fracionária (50%), seguida pelas Figurais (D: 31%; F: 23%) e decimal (3%).

Para a competência de identificar conversões, o teste de Wilcoxon detectou diferenças significativas entre as representações fracionária vs. decimal ($Z = -6,206^c$; $p < .001$) e decimal vs. Figural D ($Z = -6,318^b$; $p < .001$). Não foi detectada diferença significativa na comparação entre Figural D e Figural F. Tais resultados evidenciam que a representação fracionária é mais fácil que a decimal. Além disso não houve diferença ao comparar a representação fracionária com as figurais que foram precedidas por uma fração. Estas evidências confirmam os resultados encontrados por Hoof, Verschaffel e Doreen (2015), em uma investigação longitudinal com estudantes belgas (idade de 9 a 16 anos), no que diz respeito à compreensão da representação decimal ser mais difícil para os estudantes em comparação à representação fracionária.

¹⁸ Valor de p ajustado pela correção de Bonferroni.

Ainda em relação à competência de identificar conversões, como as questões utilizadas para avaliá-la consistiam em opções de múltipla escolha, foram apresentadas aos estudantes representações figurais contínuas e discretas. Observaram-se desempenhos semelhantes nas representações figurais contínuas e discretas com 68% e 61% de acertos, respectivamente. O teste estatístico Wilcoxon não detectou diferenças significativas, confirmando que não houve efeito deste aspecto para a competência de identificar conversões de frações.

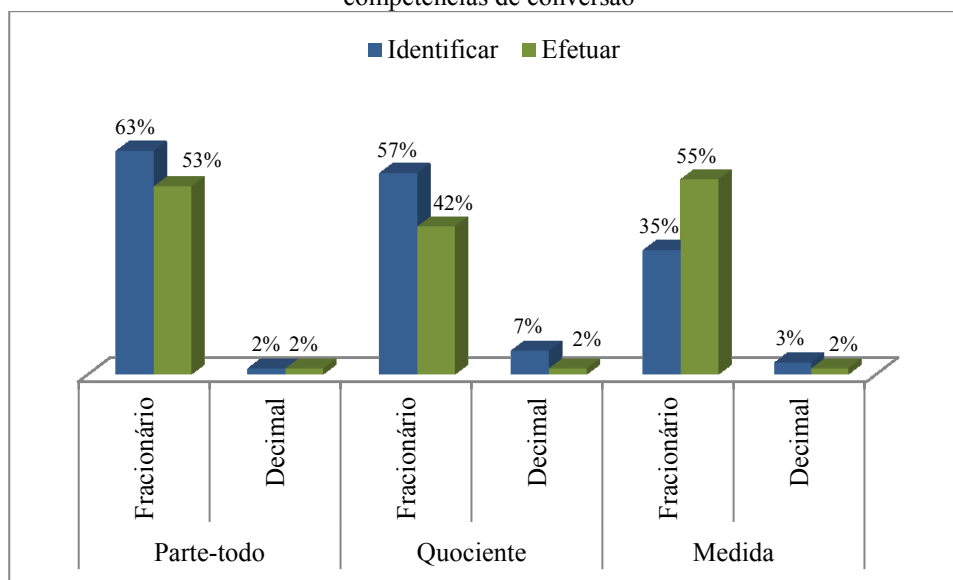
Quanto aos resultados relativos à competência de efetuar conversões, percebe-se, de modo geral, um desempenho mais expressivo na representação fracionária (50%), seguido das representações figurais (D: 31%; F: 23%) e decimal (3%). O teste de Wilcoxon ao comparar as diferenças entre as representações semióticas na competência de efetuar conversões identificou diferenças significativas entre as representações fracionária vs. decimal ($Z = -5,467^b$; $p < .001$), fracionária vs. Figural F ($Z = -3,484^b$; $p < .001$), decimal vs. Figural D ($Z = -4,730^b$; $p < .001$). Não foram detectadas diferenças significativas ao comparar Figural D e Figural F. Esses resultados indicam que para efetuar conversões de frações os estudantes apresentam maior facilidade para lidar com a representação fracionária em comparação com as outras representações (decimal e figural).

Será que existem diferenças no desempenho dos estudantes nas competências de conversão (identificar vs. efetuar) quando são consideradas as situações e as representações? Para tal, optou-se por organizar a análise observando as representações discursivas (fracionária e decimal) separadamente das representações não discursivas (Figural F e D). Esta escolha se justifica pela necessidade de realizar comparações com os resultados obtidos para os sentidos de conversão (discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo), tendo em vista a compreensão dos impactos de cada representação.

Os resultados relativos às representações discursivas (fracionária e decimal), considerando as situações e competências de conversão, são ilustrados pelo Gráfico 9¹⁹.

¹⁹ Número de respostas consideradas por representação: fracionária (n=60); decimal (n=60)

Gráfico 9- Percentual de acertos nas representações discursivas (fracionária e decimal) por situação nas competências de conversão



Fonte: A autora (2018)

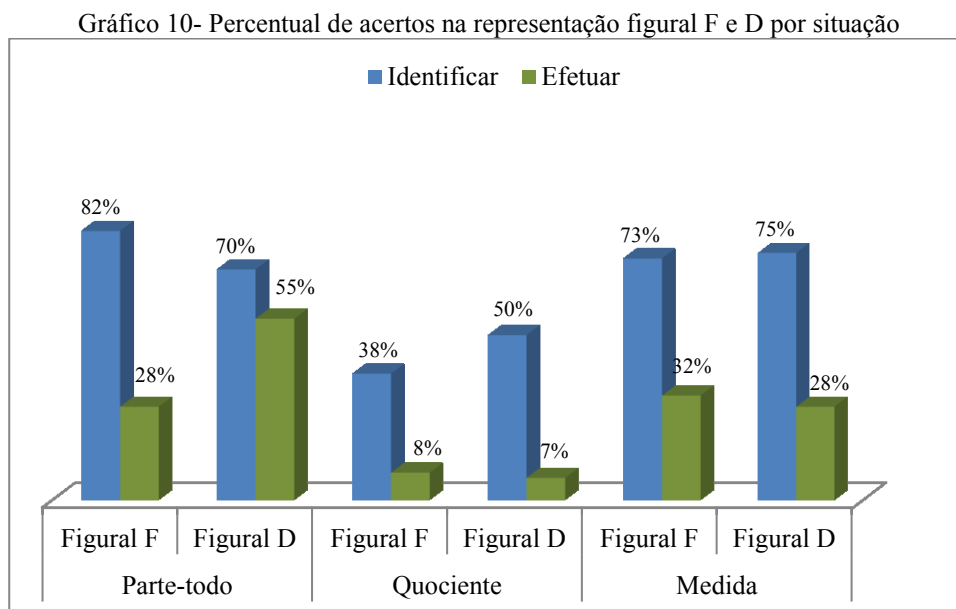
Ao observar o gráfico percebe-se que as representações discursivas tanto fracionárias como decimais não apresentam diferenças expressivas quando se olha para cada situação. O teste de Wilcoxon não detectou diferenças significativas nas representações discursivas (fracionária e decimal) quando se considera as situações (parte-todo vs. quociente vs. medida) na comparação entre as competências de conversão (identificar vs. efetuar). Tal resultado indica que o desempenho das representações discursivas não foi afetado pelas situações em ambas as competências.

Procedeu-se ainda a verificação dos efeitos das representações discursivas (fracionária e decimal) nas situações (parte-todo vs. quociente vs. medida) em cada competência de conversão (identificar e efetuar) de modo separado. Ao considerar a representação fracionária, na competência identificar, o teste estatístico Wilcoxon detectou diferença apenas entre as situações parte-todo e medida [$Z=-3,400^b$; $p=.001$]. Não houve diferenças para as situações parte-todo e quociente, bem como para quociente e medida. Ao olhar para a representação decimal não foram encontradas diferenças significativas entre as situações. Portanto, a representação fracionária foi mais fácil na situação parte-todo apenas em relação à situação medida. Já a representação decimal não apresentou efeito das situações.

Na competência efetuar ao considerar tanto a representação fracionária como a decimal não foram detectadas diferenças significativas entre as situações. Portanto, o desempenho das representações discursivas não é afetado pelas situações na competência de efetuar conversões. Entretanto, isso só é verdade para essa competência, uma vez que ao

identificar existe uma influencia da situação na representação fracionária ao comparar as situações parte-todo e medida.

Quanto às representações não discursivas (figurais D e F)), os resultados relativos às situações (parte-todo, quociente e medida) nas competências (identificar e efetuar) são apresentados pelo Gráfico 10²⁰.



Fonte: A autora (2018)

Como pode ser observado, quando os estudantes são solicitados a representar partindo de uma fração ou de um decimal (representações não discursivas), seus desempenhos diferem. Quando a representação figural é antecedida por uma fração (Figural F), observam-se melhores para todas as situações quando os estudantes identificam conversões: *parte-todo* – identificar (82%); efetuar (28%); *quociente* – identificar (38%); efetuar (8%); *medida* – identificar (73%); efetuar (32%). Ao considerar as representações antecedidas por decimais (Figural D), novamente o desempenho dos estudantes é maior em para todas as situações ao identificar conversões: *parte-todo* – identificar (70%); efetuar (55%); *quociente* – identificar (50%); efetuar (7%); *medida* – identificar (75%); efetuar (28%).

O teste estatístico de Wilcoxon, na comparação das representações figurais (F e D) em cada situação (parte-todo vs. quociente vs. medida) quanto às competências (identificar vs. efetuar) detectou diferenças significativas na representação figural F para as situações parte-todo [$Z=-5,488^b$; $p < .001$], quociente [$Z=-3,838^b$; $p < .001$] e medida [$Z=-3,772^b$; $p < .001$]. Já em relação às representações figurais D, foram encontradas diferenças entre as situações quociente [$Z=-3,402^b$; $p = .001$] e medida [$Z=-4,802^b$; $p < .001$]. Não foram detectadas

²⁰ Número de respostas: figural F (n=60); figural D (n=60)

diferenças significativas quando compactado parte-todo. Portanto, tanto as representações figurais antecedidas por frações evidenciaram melhores desempenhos na competência de identificar do que na de efetuar conversões em todas as situações. Já as figuras antecedidas por decimais foram mais fáceis ao identificar conversões nas situações quociente e medida, mas evidenciam desempenhos semelhantes para a situação parte-todo.

Verificou-se a comparação das representações não discursiva (figurais F e D) quanto às situações, considerando cada competência de conversão separadamente. Para a competência de identificar conversões, o teste de Wilcoxon verificou que diferenças significativas para a representação figural F na comparação entre as situações parte-todo (82%) vs. quociente (38%) [$Z=-4,747^b$; $p < .001$] e medida (73%) vs. quociente (38%) [$Z=-3,772^c$; $p < .001$]. No que diz respeito às representações figurais D não foram encontradas diferenças significativas, evidenciando que elas apresentam o mesmo nível de dificuldade para todas as situações. Portanto, os resultados permitem constatar que as representações figurais antecedidas por frações foram mais fáceis as situações parte-todo e medida quando comparadas à situação quociente na competência de identificar conversões. Enquanto as representações figurais antecedidas por decimal não diferiram em função das situações.

Quanto à competência de efetuar conversões, ao analisar as representações não discursiva (Figural F e Figural D), constata-se que na representação figural F na comparação entre as situações, o teste de Wilcoxon constatou diferença significativa apenas entre as situações quociente (8%) vs. medida (32%) [$Z=-3,52257^c$; $p < .001$]. Em relação à representação figural D foram encontradas diferenças apenas entre as situações parte-todo (55%) vs. quociente (7%) [$Z=-3,754^b$; $p < .001$]. Desta forma, infere-se que as representações figurais antecedidas por frações foram mais fáceis na situação medida apenas quando comparada à situação quociente. Já as representações figurais antecedidas por decimais são mais fáceis na situação parte-todo apenas quando comparada à situação medida. Portanto, às situações parte-todo e medida apresentam desempenhos similares das representações figurais e a situação quociente evidencia menos acertos que as demais situações.

Considera-se que todas as nuances e efeitos que podem ser verificados com relação ao desempenho das competências quanto aos sentidos, situações e representações de fração, corroboram com Duval (2011) quanto à necessidade de que o conhecimento sobre os números com referência às quantidades e o conhecimento sobre relações entre os números seja considerado como fator fundamental para a compreensão em matemática. E de modo complementar, também corroboram com Vergnaud (1996) quando destaca a importância da

diversificação das situações cujas relações entre as quantidades são exploradas, uma vez que a variedade de experiências é crucial para a conceitualização em matemática.

Em face dos resultados expostos questiona-se: será que as competências, situações, sentidos e representações semióticas de fração também diferem quanto aos tipos de erros cometidos pelos estudantes ao realizar conversões? A resposta à essa indagação será explorada na seção a seguir.

4.2 ANÁLISE DOS TIPOS DE ERRO DE CONVERSÃO

A presente seção destina-se à análise dos tipos de erros de conversão observados nas competências de identificar (T1) e de efetuar (T2) conversões de frações. Como já mencionado, na competência de identificar conversões foram elaboradas questões cujas respostas eram apresentadas por três opções de múltipla escolha, entre as quais, uma estava correta e as outras duas apresentavam conversões incorretas. As opções errôneas foram elaboradas com base nos atributos relevantes das representações durante a conversão (ver página 73), sendo apresentados dois tipos de erros: *modificação* (Erro I) e *transposição* (Erro II). Ressalta-se que esses dois tipos de erros foram também detectados na competência efetuar através das diferentes estratégias mobilizadas pelos estudantes, possibilitando, assim a comparação entre as tarefas.

Nesse sentido, apresenta-se inicialmente o sistema de análise utilizado para avaliar os erros cometidos nas competências de identificar (T1) e de efetuar (T2) conversões. Posteriormente, os resultados são evidenciados por meio de gráficos acompanhados por discussões interpretativas acerca das variáveis investigadas neste estudo. Ressalta-se que para as análises foi utilizado o teste estatístico Qui-quadrado de independência, que permitiu verificar possíveis associações entre os tipos de erro com os diferentes sentidos, situações e representações semióticas de fração.

4.2.1 Sistema de análise

Para análise dos tipos de erro nas competências investigadas, foram utilizadas as pontuações um e dois, de acordo as especificidades de cada tarefa. Assim, como na T1 os erros já estavam pré-estabelecidos, verificou-se, dentre as respostas relativas a conversões inadequadas, quais os tipos de erro presentes e as justificativas fornecidas pelos estudantes. Quanto à T2, uma vez que era necessária a construção de representações, a avaliação dos

dados foi realizada por dois juízes independentes (índice de concordância entre os juízes foi de 91%). As eventuais discordâncias foram resolvidas com o parecer de um terceiro juiz, também independente, cuja avaliação das respostas sempre coincidiu com um dos outros dois juízes.

Ressalta-se que a análise dos tipos de erro prioriza os aspectos voltados para as relações estabelecidas entre *as unidades de sentido* reconhecidas e *os invariantes operatórios* mobilizados para realizar conversões. Nessa análise, compreende-se que o estudante ao converter faz uso de estratégias pautadas em conceitos ou teoremas de ação construídos para possibilitar reconhecer, coordenar, mobilizar e transformar unidades de sentido durante a conversão. Deste modo, para examinar os tipos de erro de conversão é necessário observar como as unidades de sentido são mobilizadas e quais invariantes operatórios são acessados durante esse processo. Com base nessa compreensão, a classificação dos tipos de erro sustenta-se, sobretudo, no reconhecimento, transformação ou preservação das unidades de sentido, uma vez que o uso de invariantes operatórios (conceitos ou teoremas de ação) pode levar ao acerto ou erro, dependendo da forma como o estudante mobiliza as unidades de sentido.

Destaca-se, que nessa seção, as estratégias dos estudantes não serão discutidas, tendo em vista que a Seção 4.3 dedica-se ao detalhamento deste aspecto. A seguir são apresentadas as pontuações atribuídas aos tipos de erros, apresentando exemplos de como foram produzidos nas representações fracionárias, decimais e figurais em ambas tarefas (T1 e T2).

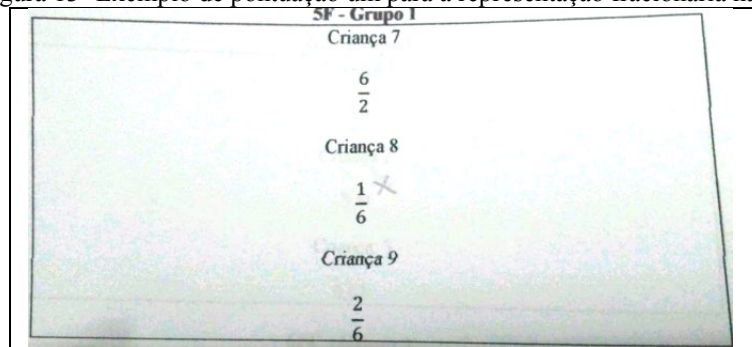
Pontuação Um

Pontuação um – Essa pontuação foi utilizada quanto foram percebidos erros de modificação (Erro I). Esse tipo de erro é evidenciado por duas características relacionadas vinculadas ao processo de conversão: dificuldades no reconhecimento das unidades de sentido da representação inicial; modificações (transformações) nas unidades de sentido que alteram seu significado matemático. Logo, essa pontuação foi atribuída quando os estudantes escolhiam ou elaboravam conversões que apresentavam erros relativos a dificuldades com o reconhecimento e preservação do significado matemático das unidades de sentido.

Representação Fracionária

Exemplo 5 (pontuação um – representação fracionária): Tarefa 1, situação quociente, sentido discursivo para discursivo, representação fracionária (Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. Qual a quantidade de torta que cada amigo irá receber?).

Figura 13- Exemplo de pontuação um para a representação fracionária na T1



(Extrato de protocolo da participante nº 51, sexo feminino, 11 anos)

P: Eu marquei a criança oito porque acho que cada amigo irá receber um pedaço de torta.

[...]

E: E porque não pode ser criança sete?

P: Por que nenhum amigo poderá receber dois pedaços.

E: Por que nenhum amigo poderá receber dois pedaços?

P: Por que não iria dá igualmente dois pedaços para cada amigo.

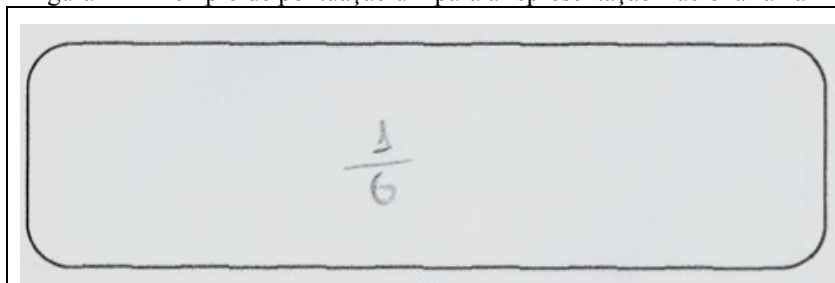
E: E se cada amigo receber um pedaço vai sobrar ou faltar torta para alguém?

P: Não, todo mundo recebe e sobra torta para comer depois.

No Exemplo 5, apresentado na Tarefa 1 (Identificar), são reconhecidas as unidades de sentido duas tortas (fase inicial), seis amigos (fase intermediária), mas não há compreensão da unidade de sentido duas tortas divididas para seis amigos (fase final/dado que falta). Na justificativa da estudante dois aspectos centrais podem ser percebidos nos trechos “cada amigo recebe um pedaço” e “não iria dá igualmente dois pedaços para cada”. Essas afirmações revelam que foi realizada uma partição, embora sem explicitação de como foi procedida. Além disso, evidencia a compreensão de que as partes precisam ser iguais. A partir destes aspectos, ao realizar a conversão, a estudante acaba por violar o invariante de esgotamento do todo, demonstrando que o teorema em ação utilizado para identificar a representação parece ter se baseado na busca de uma opção, dentre as fornecidas, que pudesse garantir a igualdade entre as partes. Logo, a representação final apresenta uma modificação das unidades de sentido, revelando dificuldades com o uso do esquema de correspondência e com a compreensão da representação fracionária.

Exemplo 6 (pontuação um – representação fracionária): Tarefa 2, situação quociente, sentido discursivo para discursivo, representação fracionária (Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. Escreva a fração que representa a quantidade de torta que cada amigo irá receber).

Figura 14- Exemplo de pontuação um para a representação fracionária na T2



(Extrato de protocolo da participante nº 19, sexo feminino, 11 anos).

P: É para dividir e não tem como dividir seis pra dois! (sic)

E: Não?

P: Dois para seis, quer dizer. Porque só tem duas tortas e tem seis amigos.

[...]

P: Mas tá dizendo que são duas tortas. Aí como vou saber quantos pedaços são? Entendeu? [...] Eu dava seis pedaços pra cada.

E: E essas tortas seriam partidas em quantos pedaços?

P: Seis.

[...]

E: Vai ter torta para todo mundo? Vai sobrar, vai faltar?

P: Todo mundo recebe e sobra uma torta.

E: Uma torta inteira?

P: É.

E: Escreve para mim a fração que representa a quantidade de torta que cada amigo vai receber.

P: Eu coloquei embaixo a quantidade de amigos e em cima a quantidade de torta que eles vão receber.

O Exemplo 6, apresentado na Tarefa 2 (Efetuar), demonstra que a estudante reconhece as unidades de sentido duas tortas (fase inicial), seis amigos (fase intermediária), mas não compreende a unidade de sentido seis tortas divididas para seis amigos (fase final/dado que falta). Na explicação fornecida três aspectos merecem destaque: “*não tem como dividir seis para dois*”; “*são duas tortas [...] como vou saber quantos pedaços são*”; “*todo mundo recebe e sobra uma torta*”. Nesses trechos evidencia-se a compreensão de que o dividendo tem que ser maior do que o divisor, a dificuldade para relacionar duas medidas e estabelecer correspondência entre elas (torta/amigos) e violação do invariante de esgotamento do todo. Diante destas compreensões, as unidades de sentido reconhecidas (tortas e amigos) são mobilizadas por meio de um teorema em ação baseado na distribuição. Assim, a representação final expressa o resultado da divisão “*um pedaço de torta para cada um dos seis amigos*”, desrespeitando o princípio invariante relativo ao esgotamento do todo. Portanto, as transformações realizadas com as unidades de sentido acabam por modificar seus significados, revelando as dificuldades da estudante com compreensão da relação entre medidas e

Representação decimal

Exemplo 7 (pontuação um – representação decimal): Tarefa 1, sentido discursivo para discursivo, situação medida, representação decimal. (Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Qual a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta?)

Figura 15- Exemplo de pontuação um para a representação decimal na T1

6D - Grupo 1	
Criança 1	5,0 ^x
Criança 2	5,8
Criança 3	0,62

(Extrato de protocolo do participante nº 8, sexo masculino, 10 anos)

P: A [criança] um. [...] Foi cinco latas brancas e aí pede o decimal.

E: E aí essa criança representou as latas de tinta branca em relação ao total de latas de tinta?

P: Eu acho que é.

E: É? E porque que não pode ser a resposta da criança dois?

P: Eu acho que ele aí tá botando mais, né?

E: Tá botando mais? Mais o quê?

P: Mais oito aí. [...] Aí aumentou.

E: Aumentou? [...] E a criança três, porque que não pode ser?

P: Porque aí é só sessenta e dois

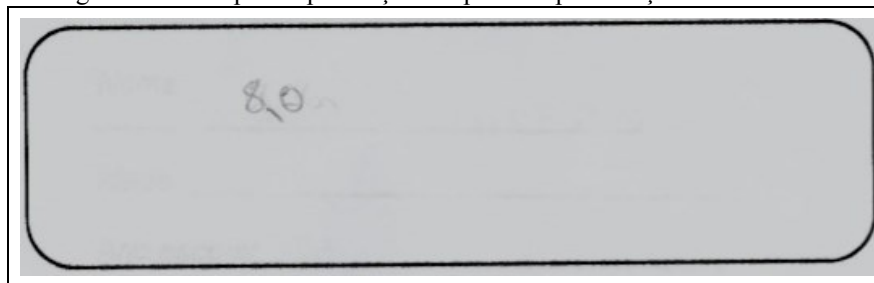
E: E porque que não pode ser só sessenta e dois?

P: Porque é muito pouco, né não?

O Exemplo 7 apresentado na Tarefa 1(Identificar), demonstra que o estudante reconhece a unidade de sentido cinco latas de tinta branca (fase inicial), mas ignora as unidades de sentido três latas de tinta vermelha (fase intermediária), oito latas de tinta no total (fase final) e cinco latas brancas de um total de oito latas (dado que falta). Na justificativa do estudante três aspectos merecem destaque: *foi cinco latas e aí pede o decimal*; *Mais oito aí [...] Aí aumentou*; *Por que é muito pouco, né não?* [referindo-se a 0,62]. Esses destaques evidenciam que as cinco latas foram consideradas como quantidades absolutas, a ideia de que o dígito após a vírgula aumenta o número na representação decimal e a ideia de que o zero antes da vírgula expressa quantidades pequenas na representação decimal. Com essas compreensões o teorema em ação utilizado mescla aspectos da compreensão de magnitude absoluta com as hipóteses da estudante sobre a função do zero e da vírgula na representação decimal. Logo, para coordenar a unidade de sentido reconhecida (cinco latas), a estudante parece acreditar que acréscimo do zero e da vírgula são transformações suficientes para a expressão da unidade de sentido reconhecida em representação decimal. Assim são percebidas dificuldades tanto com a compreensão da magnitude numérica como da representação decimal.

Exemplo 8 (representação decimal): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, situação medida, representação decimal. (Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Agora faça um desenho que represente a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.)

Figura 16- Exemplo de pontuação um para a representação decimal na T2



(Extrato de protocolo da participante nº 03, sexo feminino, 10 anos)

E: Como é que apareceu esse número?

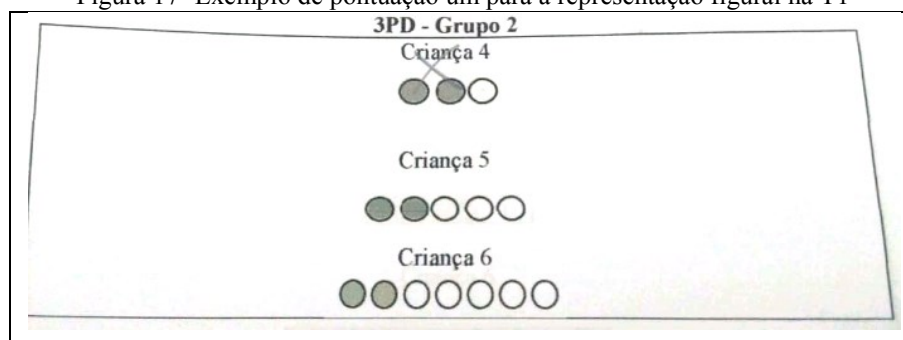
P: É que eu somei [...] cinco mais três e dá oito. Assim, eu li novamente e pensei [...] cinco mais três é oito, ela usou um total oito de latas de tinta [...] então botei oito vírgula zero.

No Exemplo 8 apresentado na Tarefa 2 (Efetuar), a estudante reconhece a unidade de sentido cinco (fase inicial), compreender a unidade de sentido três (fase intermediária), a unidade de sentido oito (fase final), não compreende a unidade de sentido três partes de um total de oito (dado que falta). A explicação fornecida permite evidenciar o raciocínio empregado por meio de três aspectos: *eu somei; cinco mais três é oito, ela usou um total de oito; então botei oito vírgula zero*. Esses trechos revelam a compreensão das quantidades como magnitudes absolutas, o emprego do raciocínio aditivo e a noção de que acréscimo da vírgula e do zero em um número o transforma em decimal. Logo, a coordenação das unidades de sentido reconhecidas baseia-se em teoremas em ações que empregam as ideias: o todo é soma das partes; o resultado da adição é a resposta; para expressar a resposta em decimal é necessário acrescentar a vírgula e o zero. Diante destas compreensões, a representação final evidencia dificuldade em perceber a magnitude numérica expressa pelos números decimais e também com os aspectos sintáticos dessa representação.

Representação Figural

Exemplo 9 (pontuação um – representação figural): Tarefa 1, sentido discursivo para não discursivo, situação medida, representação figural discreta (Para pintar seu quarto, Sara misturou 3 litros de tinta azul com 2 litros de tinta amarela. A mistura das duas tintas deu um total de 5 litros. Qual a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura?)

Figura 17- Exemplo de pontuação um para a representação figural na T1



(Extrato de protocolo da participante nº 9, sexo masculino, 11 anos).

E: Aqui no grupo dois tem a resposta da criança quatro, cinco e seis. Marca quem tu achas que acertou.

P: A criança quatro.

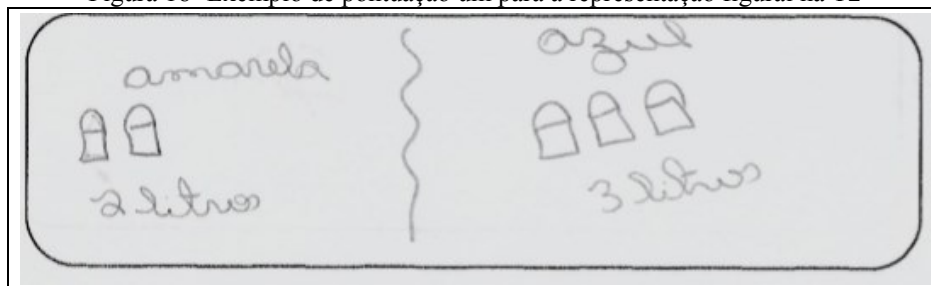
P: A criança quatro, por quê?

P: Por que aqui tá de acordo com esse dois e três aqui [do enunciado] ó. Ai já a criança cinco, não acertou porque é dois, mas aqui tem mais ó, cinco aqui. Ai a criança seis, tem sete aí só tem dois aqui.

No Exemplo 9, na Tarefa 1 (Identificar) o estudante reconhece a unidade de sentido três litros (fase inicial), a unidade de sentido dois litros (fase intermediária), mas não compreende o significado das unidades de sentido cinco litros (fase final) e dois litros de um total de cinco (dado que falta). Na justificativa do estudante é possível evidenciar a base de seu raciocínio dos trechos: “*tá de acordo com esse dois e três aqui* [do enunciado] ó; “*é dois mas aqui tem mais ó, cinco aqui*”. Percebe-se a dificuldade do estudante com a compreensão da fração enquanto quantidade discreta e como expressão do quociente entre duas medidas (litros de tinta azul e total de litros). Com efeito, o teorema em ação utilizado baseia-se na contagem dos litros que compõem a mistura sem relacionar a quantidade de litros de cada cor com o total da mistura, estabelecendo a razão entre as partes no lugar da relação entre parte e todo. Logo, a representação final identificada expressa as quantidades relativas às partes, modificando o significado matemática das unidades de sentido.

Exemplo 10 (pontuação um – representação figural): Tarefa 2, sentido discursivo para não discursivo, situação medida, representação figural discreta (Para pintar seu quarto, Sara misturou 3 litros de tinta azul com 2 litros de tinta amarela. A mistura das duas tintas deu um total de 5 litros. Qual a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura?)

Figura 18- Exemplo de pontuação um para a representação figural na T2



(Extrato de protocolo da participante nº 30, sexo feminino, 11 anos).

E: Me explica como você fez o seu desenho.

P: Eu dividi a amarela e a azul e coloquei duas latas de tinta que dá dois litros e aí eu botei três litros.

E: E esse desenho representa a quantidade de tinta amarela em relação ao total da mistura?

P: Uhum

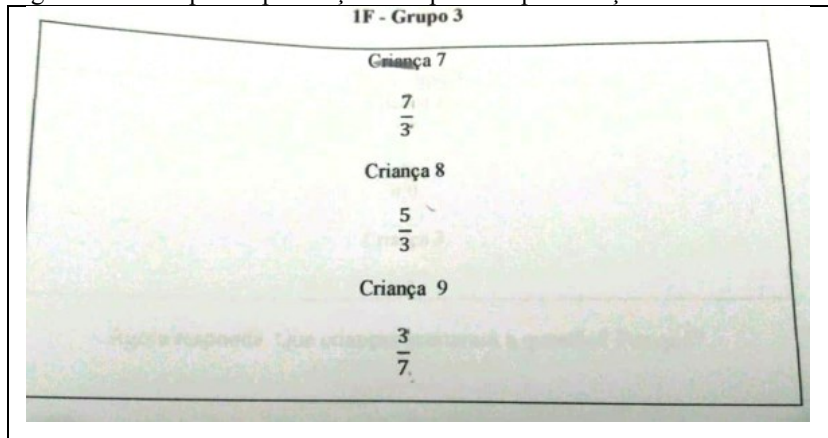
Pontuação Dois

Pontuação dois – Essa pontuação foi utilizada quando foram observados erros de transposição (Erro II). Esse tipo de erro é evidenciado por dois aspectos vinculados ao processo de conversão: tentativa de preservação das características e configurações das unidades de sentido; transposição das unidades de sentido sem modificações. Logo, essa pontuação foi atribuída quando os estudantes escolhiam ou elaboravam conversões que apresentavam erros relativos às tentativas de preservar o significado matemático das unidades de sentido por meio da transposição. Isto é, a mobilização foi realizada de modo a tentar preservar, na representação final, a mesma configuração e características que as unidades de sentido tinham na representação inicial.

Representação fracionária

Exemplo 11 (pontuação dois – representação fracionária): Tarefa 1, sentido discursivo para discursivo problema, situação parte-todo, representação fracionária (Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua irmã comeu 3 fatias. Escolha a fração que representa a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de pedaços de bolo.)

Figura 19- Exemplo de pontuação dois para a representação fracionária na T1



(Extrato de protocolo da participante nº 3, sexo feminino, 10 anos).

P: A sete.

E: Por quê?

P: Porque é como se fosse sete fatias que ela cortou menos três fatias da sua irmã que ela comeu.

E: A criança oito errou por quê?

P: Por que não tem quatro fatias, não foram quatro fatias, foi sete.

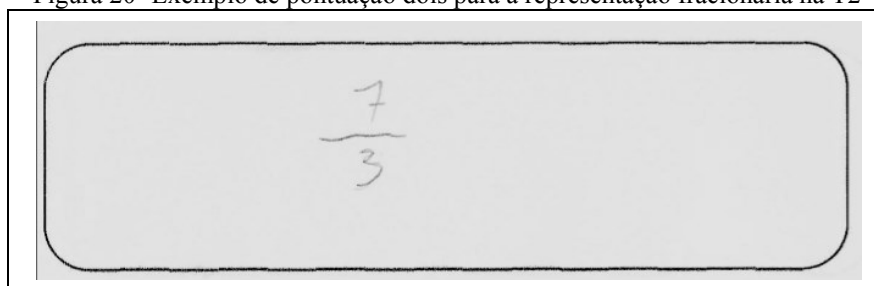
E: Entendi. E a criança nove, errou por quê?

P: Porque o sete tá embaixo. E o sete tem que ficar em cima, porque vai somar [subtrair] sete menos três. Porque três menos sete não dá pra diminuir.

No Exemplo 11 na Tarefa 1 (Identificar) a estudante reconhece a unidade de sentido sete (fase inicial), a unidade de sentido três (fase intermediária) e a unidade de sentido três partes comidas do total de sete partes (a fase final/dado que falta). A lógica da estudante pode ser percebida nos trechos: *“é como se fosse sete fatias que ela cortou menos três”*; *“três menos sete não dá pra diminuir”*. Fica evidente o uso do raciocínio aditivo. O teorema em ação empregado baseia-se na crença de que a relação entre quantidades expressa pela representação fracionária é similar àquela indicada pelos algoritmos. Assim, as unidades de sentido são compreendidas enquanto magnitudes absolutas, logo, a representação final tenta preservar seus significados por meio da transposição, seguindo a lógica de que o numerador deve ser subtraído pelo denominador.

Exemplo 12 (pontuação dois – representação fracionária): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo problema, situação parte-todo, representação fracionária (Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua irmã comeu 3 fatias. Escreva a fração que representa a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação.)

Figura 20- Exemplo de pontuação dois para a representação fracionária na T2



(Extrato de protocolo do participante nº 12, sexo masculino, 12 anos).

E: Como você pensou para achar essa resposta?

P: Tinha sete, sete pedaços e a irmã de Carla comeu três, não é? Então aí tem sete e comeu três.

E: Porque o sete ficou em cima do traço e o três embaixo?

P: Porque eu acho que primeiro a questão falou que tinha sete pedaços e foi quando ela cortou dividiu, não é?

E: A questão dizia isso?

P: Sim.

[...]

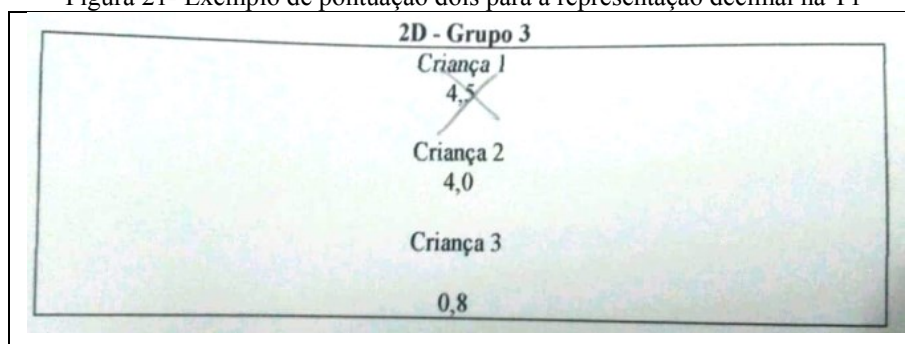
E: Aí eu acho que bota primeiro o que ela tinha e depois o que ela deu.

No Exemplo 12, na Tarefa 2 (Efetuar) o estudante reconhece a unidade de sentido sete (fase inicial), a unidade de sentido três (fase intermediária) e a unidade de sentido três partes comidas do total de sete partes (a fase final/dado que falta). A base do seu raciocínio pode ser percebida nos trechos: *“aí tem sete e comeu três”*; *“primeiro a questão falou que tinha sete pedaços”*; *“acho que primeiro o que ela tinha e depois o que ela deu”*. Esses trechos demonstram que a ordem em que as unidades de sentido aparecem no enunciado influencia a ordem em que o estudando as organiza na representação final da conversão. O teorema em ação empregado pauta-se na preservação da ordem do enunciado, levando à transposição das unidades de sentido sem alterações. Logo, percebe-se que o estudante não compreende a magnitude e a representação fracionária.

Representação decimal

Exemplo 13 (pontuação dois – representação decimal): Tarefa 1, sentido discursivo para discursivo, situação quociente, representação decimal. (Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas. Qual a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber?)

Figura 21- Exemplo de pontuação dois para a representação decimal na T1



(Extrato de protocolo do participante nº 12, sexo masculino, 12 anos, 5º ano).

E: Criança um? Por quê?

P: Por que é o total de doces e o total de amigas

E: E porque que não pode ser a criança dois?

P: Porque só tem quatro doces e não tem o tanto de amigas que ela havia dividido.

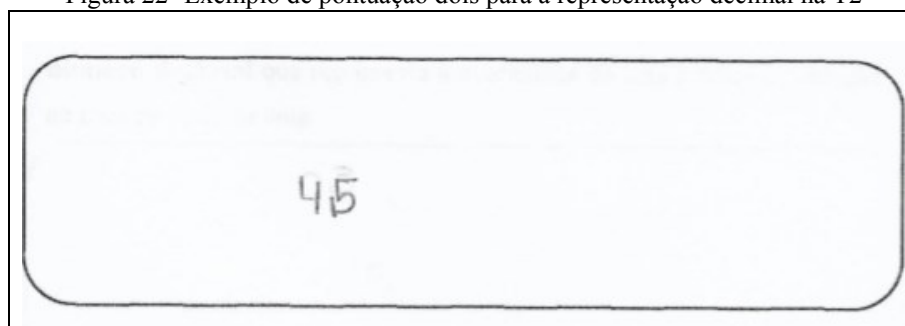
E: E a criança três não pode ser por quê?

P: Tem oito amigas e não tem doces pra dividir.

No Exemplo 13, na Tarefa 1 (Identificar) o estudante reconhece as unidades de sentido quatro barras (fase inicial), cinco amigas (fase intermediária) e quantidade de barras por amiga (fase final/dado que falta). Os trechos que evidenciam a lógica utilizada são: *“porque é o total de doces e o total de amigas”*; *“não tem o tanto de amigas que ela havia dividido”*; *“não tem doces para dividir”*. A explicação da estudante revela que as quantidades expressas no enunciado são compreendidas como magnitudes absolutas, bem como a incompreensão semântica da representação decimal. O teorema em ação empregado parece basear-se na busca pela opção que expresse as quantidades na mesma forma em que elas aparecem no problema, ou seja, sem alterações. Logo, a representação final escolhida evidencia a transposição das unidades de sentido.

Exemplo 14 (pontuação dois – representação decimal): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, situação quociente, representação decimal. (Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas. Escreva o número decimal que representa a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber.)

Figura 22- Exemplo de pontuação dois para a representação decimal na T2



(Extrato de protocolo do participante nº 13, sexo masculino, 11 anos).

E: Explica como você descobriu esse número.

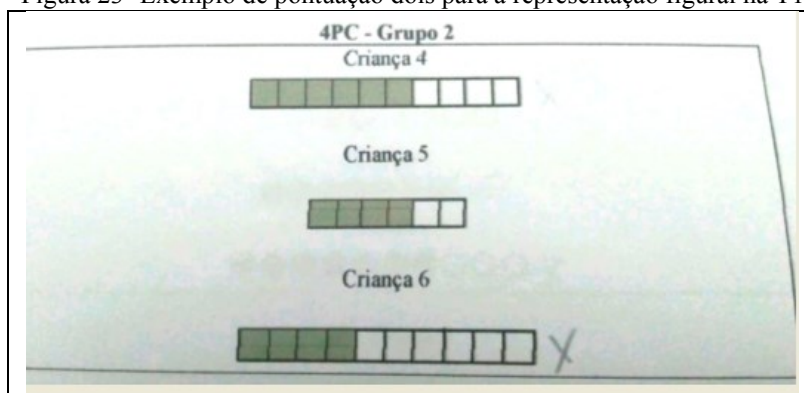
P: Eu pensei em cada amigo da Lana. Como ela tem quatro barras, cada barra tem cinco virgula cinco bichinhos [tracinhos], bichinhos [tracinhos] separados. Aí ela dividiu quatro virgula cinco para cada. Deu quatro e meio para cada.

No Exemplo 14, na Tarefa 2 (Efetuar) O estudante reconhece a unidade de sentido quatro barras (fase inicial), a unidade de sentido cinco amigas (fase intermediária) e a unidade de sentido divisão de 4 barras para 5 amigas (fase final). O raciocínio empregado é evidenciado nos trechos: “*pensei em cada amigo*”; “*cada barra tem 5,5 bichinhos*”; “*Ela dividiu 4,5 para cada*”. A resposta fornecida demonstra a compreensão de que cada barra seria partida em cinco pedaços e de que cada amigo precisa receber quantidades iguais. No entanto o teorema em ação utilizado baseia-se no esquema de partição ao tentar mobilizar as unidades de sentido para a representação decimal. Como a situação não apresenta apenas um todo a ser partido, o estudante tem dificuldades em efetivar a divisão. Logo, as unidades de sentido reconhecidas são mobilizadas para a representação final sem transformações, desprezando a igualdade entre as partes e evidenciando a incompreensão semântica da representação decimal.

Representação figural

Exemplo 15 (pontuação dois – representação figural): Tarefa 1, sentido discursivo para não discursivo situação parte-todo, representação figural contínua. (Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. Qual a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços.)

Figura 23- Exemplo de pontuação dois para a representação figural na T1



(Extrato de protocolo do participante nº 13, sexo masculino, 11 anos).

P: (...) a [criança] seis.

E: E como é que você sabe que ela acertou?

P: Por que seis mais quatro, dá 10. E aqui tem 10 quadradinhos e quatro pintados. O número dos pedaços de chocolate que ela comeu.

E: Entendi. Você somou. Por que você somou?

P: Pra dar a conta exata.

E: [...] E por que não pode ser a criança cinco aqui?

P: Por que só tem seis quadradinhos e iria ficar faltando seis pedaços que ela coisou [...] e não tá falando dos quatro pedaços que ela comeu. (sic)

[...]

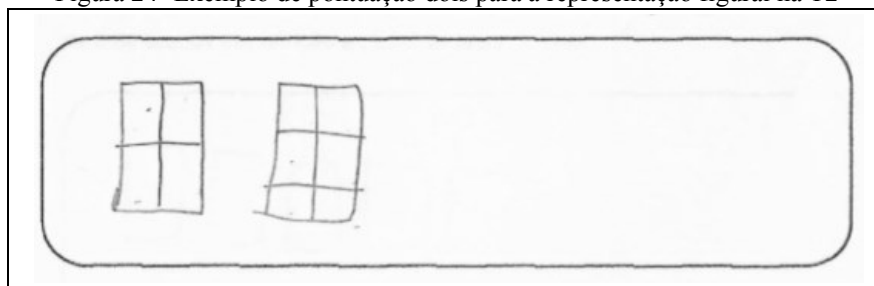
E: E aqui na [criança quatro] porque não pode ser?

P: Por que aí tem seis e não pode ser o seis tem que ser o quatro. Porque é o tanto que ela comeu e não o tanto que ela cortou.

No Exemplo 15, na Tarefa 1 (Identificar) o estudante reconhece as unidades de sentido seis pedaços (fase inicial), quatro pedaços (fase intermediária), mas não compreende o significado da unidade de sentido quatro pedaços de um total de seis (fase final/dado que falta). O seu raciocínio pode ser percebido nos trechos: “*seis mais quatro dá 10*”; “*não tá falando dos pedaços que ela comeu*”; “*é o tanto que ela comeu e não o tanto que ela cortou*”. Observa-se que o uso do raciocínio aditivo e a compreensão das quantidades como magnitudes absolutas. Assim, o teorema em ação usado baseia-se na adição das unidades de sentido reconhecidas para identificar a representação final da conversão. Logo, as unidades de sentido foram transpostas, embora a lógica utilizada tenha se fundamentado na estrutura aditiva.

Exemplo 16 (pontuação dois – representação figural): Tarefa 2, sentido discursivo para não discursivo situação parte-todo, representação figural contínua. (Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. Agora faça um desenho que represente a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços.)

Figura 24- Exemplo de pontuação dois para a representação figural na T2



(Extrato de protocolo da participante nº 17, sexo feminino, 11 anos).

E: Explica o teu desenho.

P: Aqui [apontando para o desenho da esquerda] foi a quantidade que ela comeu quatro pedaços e aqui [apontando para o desenho da direita] é o total de seis pedaços.

E: Então primeiro você desenhou o que ela comeu e depois fez outro desenho para o total?

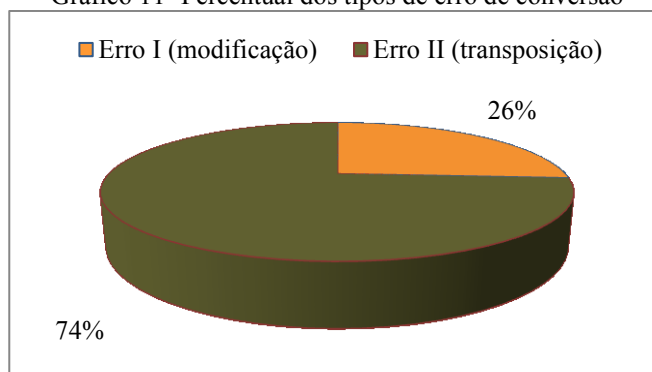
P: Isso.

No Exemplo 16 na Tarefa 2 (Efetuar) a estudante reconhece a unidade de sentido seis (fase inicial) e a unidade de sentido quatro (fase intermediária), mas não interpreta a unidade de sentido quatro partes comidas de um total de seis (fase final/dado que falta) de forma apropriada. Seu raciocínio é explicitado pelos trechos: “*aqui foi a quantidade que ela comeu*”; “*aqui é o total de seis pedaços*”. Assim, percebe-se que as quantidades foram consideradas como magnitudes absolutas, O teorema em ação utilizado demonstra que as quantidades não relacionadas, uma vez que a representação final evidência duas figuras diferentes. Logo, a relação constante entre quatro e seis, base do raciocínio multiplicativo, não foi explicitada. Observa-se ainda que apesar do contexto representacional da divisão de uma barra de chocolate ser bastante acessível e explorado em situações de fração, a estudante demonstrou dificuldades em utilizar o esquema de partição em figuras contínuas. Ademais, as representações transpõem as unidades de sentido sem a realização de transformações.

4.2.2 Os tipos de erros e as competências de conversão

Esta seção tem como objetivo apresentar os resultados obtidos quanto aos tipos de erros. No Gráfico 11²¹ é possível visualizar que, de modo geral, os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II) do que erros de modificação (Erro I). Considera-se que tais resultados sejam explicados por dificuldades na compreensão da magnitude numérica das frações. Uma vez que não há clareza quanto à noção de unidade, no domínio das frações, os erros de transposição são cometidos mais frequentemente por conta de equívocos na escolha ou construção de unidades adequadas para as frações.

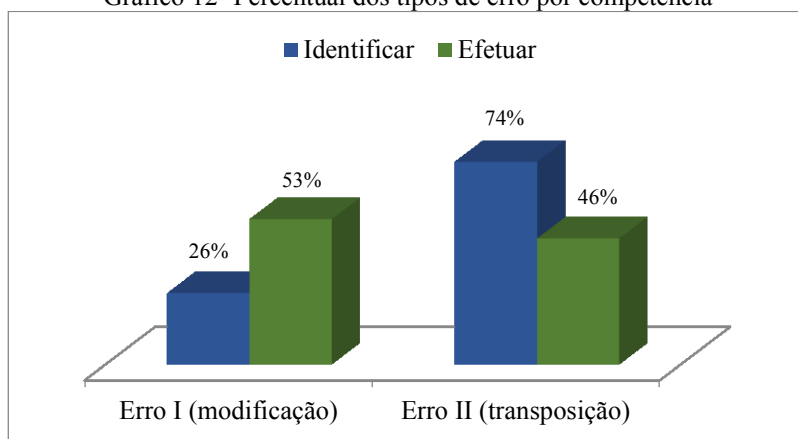
Gráfico 11- Percentual dos tipos de erro de conversão



Fonte: A autora (2018)

Tal resultado motiva a investigação de possíveis efeitos das competências de conversão nos tipos de erro. Deste modo, o Gráfico 12²² apresenta os resultados obtidos na comparação entre os tipos de erro (modificação vs. transposição) nas competências de conversão (identificar vs. efetuar).

Gráfico 12- Percentual dos tipos de erro por competência



Fonte: A autora (2018).

²¹ Erro I (modificação): n = 359; Erro II (transposição): n= 489.

²² Identificar – Erro I (modificação): n=91; Erro II (transposição): n=268; Efetuar – Erro I (modificação): n=249; Erro II (transposição): n=240.

Observa-se que ao identificar conversões há maior frequência do Erro II (74%). Já ao efetuar conversões há frequências próximas em relação aos dois tipos de erro (Erro I: 53%; Erro II: 46%). O teste Qui-quadrado de independência detectou associação entre as competências de conversão (identificar vs. efetuar) e os tipos de erro (modificação vs. transposição) [$\chi^2_{(1)} = 53,362^a$; $p < .05$]. Neste sentido, percebe-se que a competência de identificar conversões conduz os estudantes a cometerem mais erros de transposição (Erro II). Em relação à competência de efetuar, ao contrário, verificam-se percentuais semelhantes para os erros de modificação (Erro I) e transposição (Erro II).

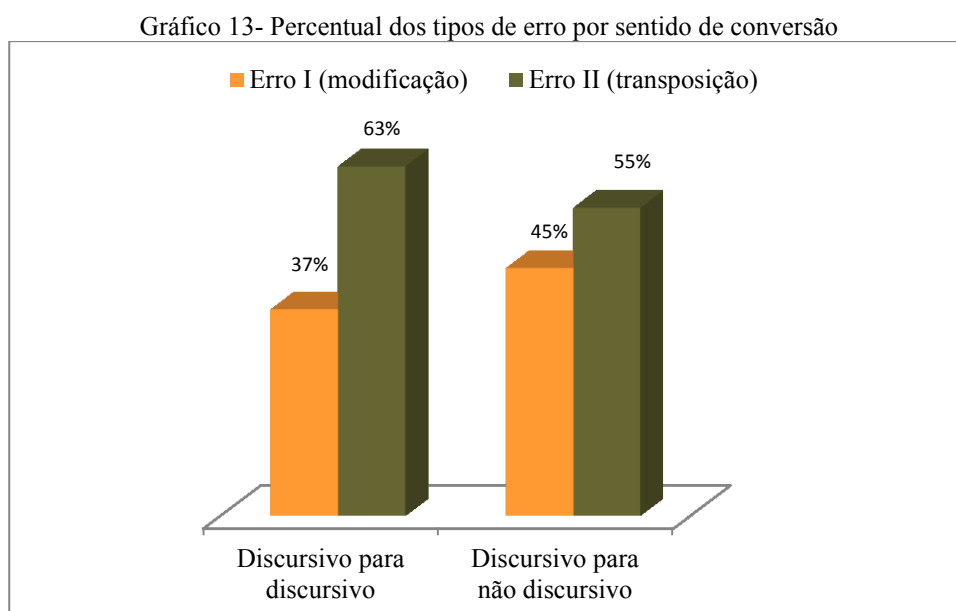
Tais resultados revelam que há influência das competências de conversão nos tipos de erro cometidos. Para identificar conversões é necessário que os estudantes interpretem o significado das unidades de sentido e escolham dentre as opções as representações equivalentes. No entanto conforme explicitam Bossé et.al (2011), referindo-se à conversões no domínio das funções, os estudantes têm dificuldades para captar o sentido da relação entre quantidades estabelecida por situações problemas em língua materna. Para Duval (2003) esta dificuldade decorre do fato da escola ignorar a pluralidade de registros semióticos, levando estudantes a crer que todas as representações de um objeto matemático têm o mesmo conteúdo. Neste sentido, os estudantes transpõem unidades de sentido considerando que todas as representações abrangem o mesmo conteúdo.

Ao efetuar conversões, os estudantes cometem tanto erros de transposição como de modificação. Duval (2006) considera que para realizar uma conversão é necessário distinguir as características que são matematicamente relevantes, todavia, conforme evidenciam Bossé et al. (2011b) uma representação comporta vários micro-conceitos que não são normalmente acessados em sua totalidade pelos estudantes. Neste sentido, ao efetuar uma conversão, os estudantes cometem erros de modificação ou transposição das unidades de sentido em função dos micro-conceitos acessados em cada representação. Sobre este aspecto, Vergnaud (2003) explica que a conceitualização dirige a seleção das informações pertinentes nas situações para permitir a planificação, isto é, para planejar o que virá depois e o que realizará depois.

Diante destas evidências cabe o questionamento: será que essas diferenças em relação ao tipo de erro produzidos estariam associadas aos sentidos (discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo), situações (parte-todo, quociente e medida) e representações semióticas (fracionária, decimal e figural) de fração? Neste sentido, a seguir serão apresentadas análises relativas às relações entre os tipos de erro e essas variáveis.

4.2.3 Os Tipos de erros e os sentidos de conversão

Para ilustrar a relação entre os tipos de erro e os sentidos de conversão elaborou-se o Gráfico 13²³. De modo geral, observa-se que há mais erros de transposição (Erro II) nos dois sentidos de conversão. O teste Qui-quadrado de independência detectou que há associação entre os tipos de erro (modificação vs. transposição) e os sentidos de conversão (discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo) [$X^2_{(1)} = 4,680^a$; $p = .03$]. Embora o Erro II seja mais evidente em ambos os sentidos, nota-se que este tipo de erro é acentuado no sentido discursivo para discursivo, enquanto o sentido discursivo para não discursivo apresenta frequências percentuais sem diferenças expressivas para os dois tipos de erro. Portanto, o sentido discursivo para discursivo parece conduzir a mais erros de transposição (Erro II), ou seja, quando os estudantes lidam com frações e decimais. Considera-se que tal resultado associa-se a dificuldade para a compreensão da magnitude numérica, levando os estudantes a transporem unidades de sentido por tratar as unidades de sentido como números naturais. Essa dificuldade em romper com conhecimentos do conjunto dos números naturais já foi relatada diversas vezes na literatura tanto do ponto de vista teórico (BROUSSEAU, 1981; SIEGLER et al. 2012) quanto empírico (FORGUES; SIEGLER, 2015; VAMVAKOUSSI, 2015; DOREEN et al., 2015).

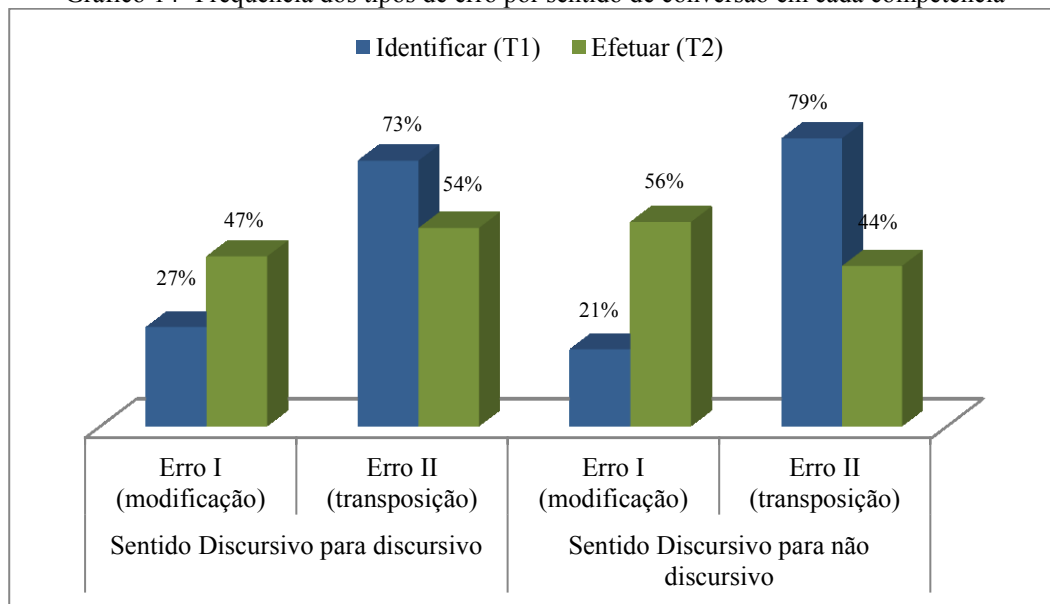


Fonte: A autora (2018)

²³ Discursivo para discursivo Erro I: $n = 191$; Erro II: $n = 323$; Discursivo para não discursivo: Erro I: $n = 149$; Erro II: $n = 185$.

No que diz respeito à relação entre os tipos de erro e os sentidos, considerando as competências de conversão (identificar vs. efetuar), os resultados obtidos podem ser visualizados no Gráfico 14²⁴. Percebe-se que ao identificar conversões há frequências semelhantes para os tipos de erros em ambos os sentidos (*Erro I* - discursivo para discursivo – 27%; discursivo para não discursivo: 21%; *Erro II* – discursivo para discursivo: 73%; discursivo para não discursivo: 79%). Para a competência de efetuar conversões verifica-se predomínio do Erro II (54%) no sentido discursivo para discursivo e do Erro I (56%) no sentido discursivo para não discursivo, embora suas diferenças com os outros tipos de erro não pareçam expressivas. O teste estatístico Qui-quadrado de independência ao examinar as competências (identificar vs. efetuar), constatou associação entre o sentido de conversão e o tipo de erro (Erro I vs. Erro II) tanto no sentido discursivo para discursivo [$\chi^2_{(1)} = 23,272^a$; $p < .05$] quanto no sentido discursivo para não discursivo [$\chi^2_{(1)} = 10,291^a$; $p = .01$]. Portanto, para o sentido discursivo para discursivo, tanto ao identificar como ao efetuar conversões, os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II). Já no sentido discursivo para não discursivo, ao identificar conversões prevalecem os erros de transposição (Erro II) e ao efetuar conversões são cometidos mais erros de modificação (Erro I).

Gráfico 14- Frequência dos tipos de erro por sentido de conversão em cada competência



Fonte: A autora (2018)

Ao verificar as competências de conversão separadamente, o teste Qui-quadrado de independência não detectou associação entre o tipo de erro e o sentido de conversão para a

²⁴ Efetuar – Discursivo para discursivo Erro I: n= 68; Erro II: n= 182; Discursivo para não discursivo: Erro I: n= 23; Erro II: n= 86; Efetuar – Discursivo para discursivo: Erro I: n=123; Erro II: n= 141; Discursivo para não discursivo: Erro I: n= 126; Erro II: n= 199.

competência de identificar conversões. Mas, ao efetuar conversões confirmou-se a associação entre o tipo de erro e o sentido de conversão [$X^2(1) = 4,303^a$; $p = .038$]. Estes resultados indicam que para identificar conversões de fração não há efeito do sentido de conversão sobre o tipo de erro, uma vez que os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II) em ambos os sentidos. Já para efetuar conversões, constata-se o efeito dos sentidos sobre o tipo de erro cometido, evidenciando-se maior frequência do erro de transposição (Erro II) para o sentido discursivo para discursivo e do erro de modificação (Erro I) para o sentido discursivo para não discursivo. Portanto, o sentido de conversão é um fator que influencia nos erros cometidos.

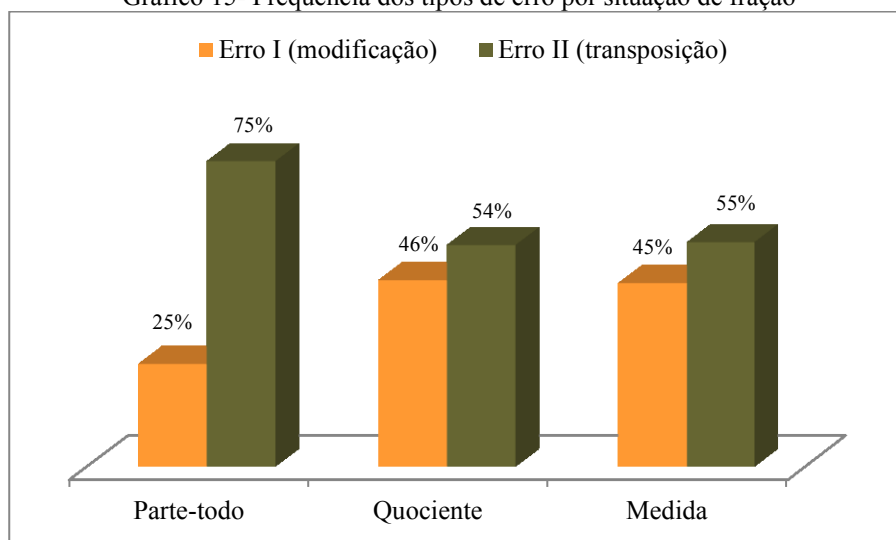
Frente ao exposto, verifica-se efeito dos sentidos de conversão sobre os tipos de erro, deste modo cabe o questionamento: será que as diferentes representações de fração influenciam no tipo de erro cometido pelos estudantes? Assim, a próxima sessão dedica-se a exploração das relações entre os tipos de erro e as situações de fração.

4.2.4 Os tipos de erros e as situações conversão

O Gráfico 15²⁵ ilustra a relação entre os tipos de erros (modificação vs. transposição) e as situações de fração. (parte-todo vs. quociente vs. medida). Observa-se a predominância do Erro II (transposição) em todas as situações, entretanto na situação parte-todo (75%) sua frequência é maior em relação às situações quociente (54%) e medida (55%). O teste Qui-quadrado de independência detectou associação entre os tipos de erro e as situações de fração [$X^2_{(2)} = 27,710^a$; $p < .05$]. Deste modo, confirma-se que há uma maior tendência para erros de transposição (Erro II) em todas as situações de frações.

²⁵ Parte-todo: Erro I: $n = 56$; Erro II: $n = 166$; Quociente: Erro I: $n = 153$; Erro II: $n = 182$; Medida: Erro I: $n = 131$; Erro II: $n = 160$.

Gráfico 15- Frequência dos tipos de erro por situação de fração

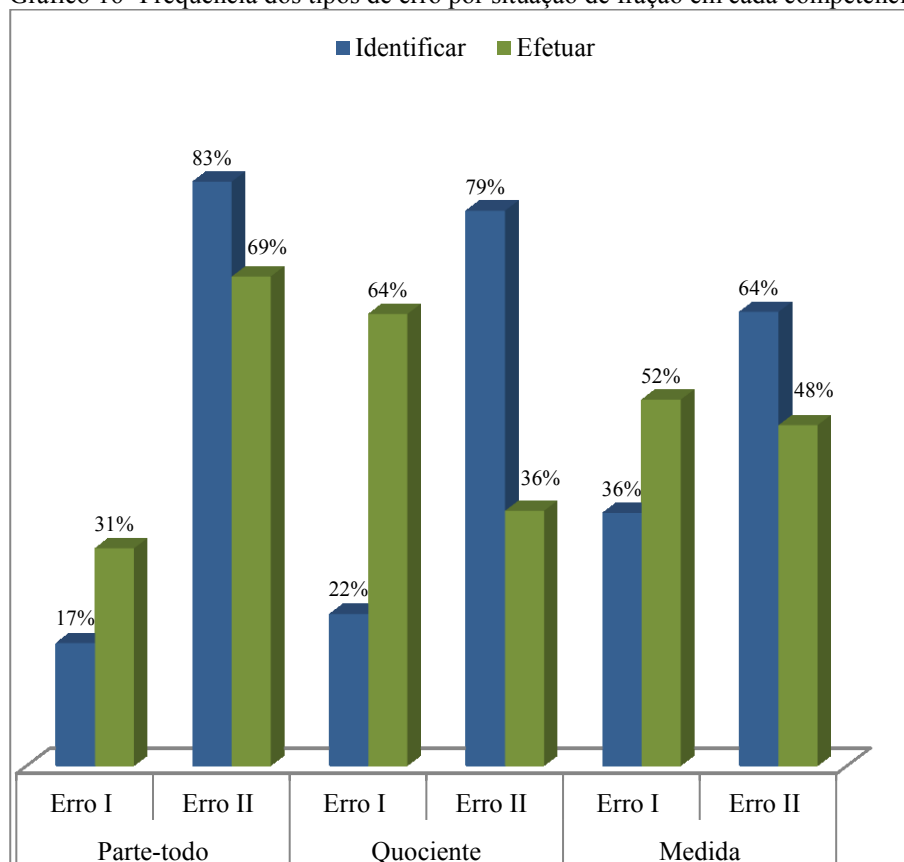


Fonte: A autora (2018)

Todavia, como explicitado anteriormente há associação entre os tipos de erro e as competências de conversão. Neste sentido, o Gráfico X²⁶ apresenta a relação entre os tipos de erros e as situações, considerando as competências de conversão (identificar vs. efetuar). Na comparação entre as competências percebe-se que ao identificar conversões os estudantes cometem mais o Erro II (transposição) nas situações parte-todo (82%), quociente (79%) e situação medida (64%). Ao efetuar conversões percebe-se na situação parte-todo (69%) maior presença Erro II, para a situação quociente (64%) do Erro I e para a situação medida não há tendência para um tipo de erro específico, já que os dois tipos de erro aparecem de forma similar nessa situação. O teste Qui-quadrado de independência encontrou ao comparar as competências de identificar vs. efetuar conversões uma associação entre o tipo de erro e a situação parte-todo [$X^2_{(1)} = 5,112^a$; $p = .024$], quociente [$X^2_{(1)} = 59,335^a$; $p < .05$] e medida [$X^2_{(1)} = 7,357^a$; $p < .05$]. Portanto, constata-se que para cada competência de conversão as situações influenciam nos tipos de erros de forma distinta. A situação parte-todo demonstra maior tendência para o erro de transposição (Erro II) tanto para identificar como para efetuar conversões. A situação quociente demonstra maior tendência para erros de transposição (Erro II) quando os estudantes precisam identificar conversões e para erros de modificação (Erro I) quando se é requerido efetuar conversões. Já a situação medida, apresenta maior probabilidade de erros de transposição (Erro II) quando se solicita aos estudantes identificar conversões, mas quando é necessário efetuar conversões existe quase a mesma probabilidade para os dois tipos de erro.

²⁶ Identificar – Parte-todo: Erro I: n= 16; Erro II: n=76; Quociente: Erro I: n=31; Erro II: n=113; Medida: Erro I: n= 44; Erro II: n=79; Efetuar – Parte-todo: Erro I: n= 40; Erro II: n=90; Quociente: Erro I: n=122; Erro II: n=69; Medida: Erro I: n= 87; Erro II: n=81.

Gráfico 16- Frequência dos tipos de erro por situação de fração em cada competência



Fonte: A autora (2018)

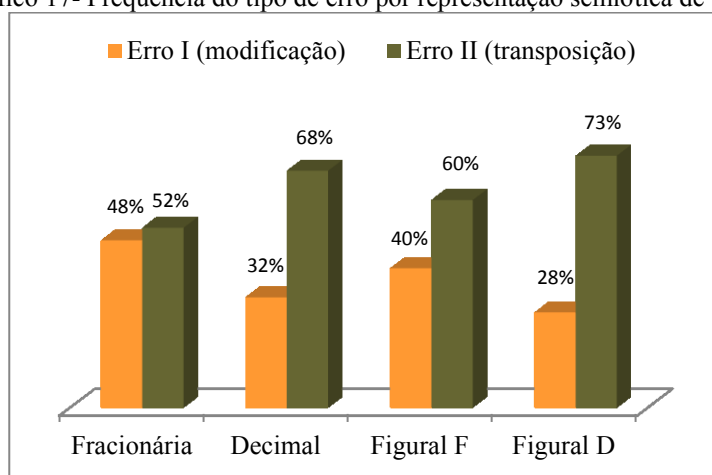
Ao investigar as competências separadamente, o teste Qui-quadrado de independência constatou que ao identificar conversões existe associação entre os tipos de erro e as situações parte-todo (17%; 83%) vs. medida (36%; 64%) [$X^2_{(1)} = 8,839^a$; $p < .05$] e também para quociente (22%; 79%) vs. medida (36%; 64%) [$X^2_{(1)} = 6,664^a$; $p = .01$], mas o mesmo não se observa para parte-todo (17%; 83%) vs. quociente (22%; 79%). Logo, para a competência de identificar conversões, constata-se que as situações parte-todo e quociente que têm tendências semelhantes já que ambas demonstram predomínio dos erros de transposição (Erro II). Já a situação medida apresenta tendências similares para os dois tipos de erro.

No que diz respeito à competência de efetuar conversões, ao examinar as tendências para cada tipo de erro, o teste Qui-quadrado de independência confirmou existir diferenças entre as situações parte-todo (31%; 69%) vs. quociente (64%; 36%) [$X^2_{(1)} = 33,913^a$; $p < .05$], parte-todo (31%; 69%) vs. medida (52%; 42%) [$X^2_{(1)} = 13,237^a$; $p < .05$] e quociente (64%; 36%) vs. medida (52%; 42%) [$X^2_{(1)} = 5,370^a$; $p = .02$]. Portanto, ao efetuar conversões verifica-se que a situação parte-todo tem maior tendência para o erro de transposição (Erro II), a situação quociente para erros de modificação (Erro I) e a situação medida probabilidade igual para os dois tipos de erro.

4.2.5 Os tipos de erros e as representações semióticas de fração

O Gráfico 17²⁷ ilustra a relação entre os tipos de erros e as representações semióticas de fração.

Gráfico 17- Frequência do tipo de erro por representação semiótica de fração



Fonte: A autora (2018)

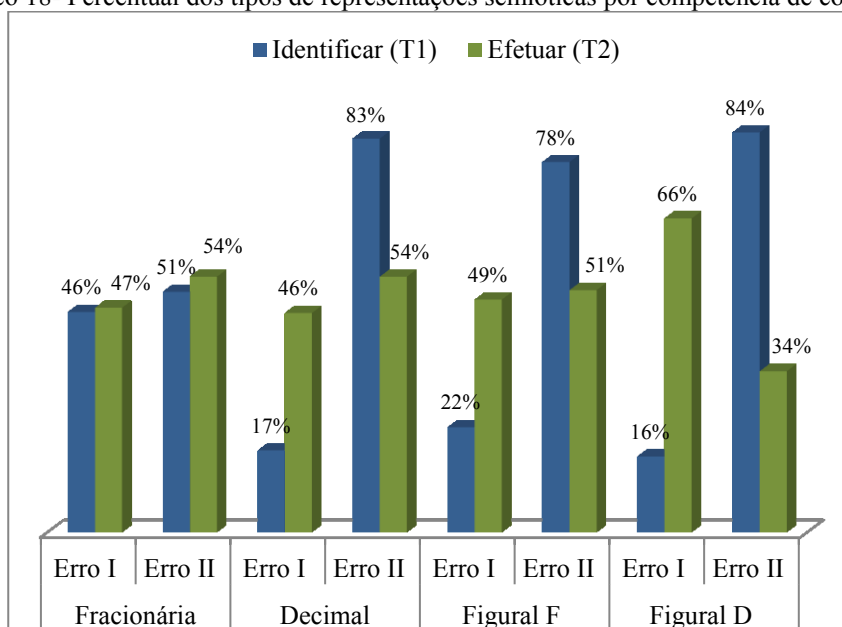
Observa-se que a representação fracionária parece ter tendência semelhante para os dois tipos de erro enquanto as representações decimal (68%), figural F (60%) e figural D (73%) evidenciam mais erros de transposição (Erro II). O teste Qui-quadrado de independência detectou associação entre os tipos de erros e as representações semióticas de fração [$\chi^2_{(3)} = 20,029^a$; $p < .05$]. Deste modo, para a representação fracionária não se observa relação com um tipo de erro específico enquanto as representações decimal, figural F e figural D, associam-se a erros de transposição.

A comparação entre as competências identificar vs. efetuar, considerando os tipos de erro cometidos em relação às representações semióticas de fração, é apresentada pelo Gráfico 18²⁸.

²⁷ Fracionária: Erro I: n=81; Erro II: n=87; Decimal: Erro I: n=110; Erro II: n= 236; Figural F: Erro I: n=78; Erro II: n= 116; Figural D: Erro I: n=44; Erro II: n=116.

²⁸ **Identificar** – Fracionária: Erro I: n=38; Erro II: n=39; Decimal: Erro I: 30; n=; Erro II: n= 143; Figural F: Erro I: n=14; Erro II: n= 49; Figural D: 9; Erro I: n=37; Erro II: n=116; **Efetuar** – Fracionária: Erro I: n=43; Erro II: n=48; Decimal: Erro I: n=80; Erro II: n= 93; Figural F: Erro I: n=64; Erro II: n= 67; Figural D: Erro I: n=62; Erro II: n=32.

Gráfico 18- Percentual dos tipos de representações semióticas por competência de conversão



Fonte: A Autora (2018)

Ao identificar conversões os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II) em todas as representações. Já ao efetuar conversões percebe-se que os dois tipos de erro aparecem de forma similar para todas as representações, excetuando a figural D que apresenta mais erros modificação (66%). O teste Qui-quadrado de independência constatou na comparação entre as competências (identificar vs. efetuar) de conversão que há associação entre os tipos e erro e as representações decimal [$X^2_{(1)} = 31,427^a$; $p < .05$], figural F [$X^2_{(1)} = 12,551^a$; $p < .05$] e figural D [$X^2_{(1)} = 35,196^a$; $p < .05$]. Assim para tanto para identificar como para comparar conversões em representações fracionárias, há tendências similares para os dois tipos de erro. Quanto à representação decimal, ao identificar e efetuar conversões erros de transposição são mais frequentes (Erro II). A representação Figural F está associada a erros de transposição (Erro II) quando os estudantes identificam conversões, mas apresenta tendências semelhantes para os dois tipos de erro para a conversão é efetuada. Em relação à representação Figural D acontece uma inversão, a maioria dos erros é de transposição (Erro II) para a competência de identificar e de modificação (Erro I) para a competência de efetuar conversões.

Ao comparar as representações em cada competência separadamente, nota-se que para identificar conversões erros de transposição (Erro II) prevalecem em todas as representações. O teste Qui-quadrado de independência detectou associação entre representação e tipo de erro ao comparar a representação fracionária (46%; 51%) vs. decimal (17%; 83%) [$X^2_{(1)} = 26,117^a$;

$p < .05$] e fracionária (46%; 51%) vs. figural F (22%; 78%) [$X^2_{(1)} = 10,923^a$; $p = .01$]. Isso confirma que as representações decimal e figural F, de fato, possuem maior tendência para erros de transposição, enquanto a representação fracionária está associada de modo similar aos dois tipos de erro.

Quanto à competência de efetuar conversões, percebe-se que as representações fracionária, decimal e figural F, apresentam os dois tipos de erro de modo uniforme. Mas a representação figural D parece estar mais associada ao Erro I (modificação). O teste Qui-quadrado de independência confirmou associação entre o tipo de erro e as representações apenas na comparação entre decimal (49%; 51%) vs. figural D (66%; 34%) comparar [$X^2_{(1)} = 7,339^a$; $p = .007$]. Logo, evidencia-se que ao efetuar conversões não há associação entre representação e tipo de erro, excetuando-se a comparação entre a representação decimal e figural D, uma vez que esta última possui maior tendência para erros de transposição (Erro I).

Constata-se assim que para todas as representações a maior associação aos erros de transposição prevalece e também tendências semelhantes quanto aos tipos de tipo de erro para competência de efetuar conversões. Acredita-se que isso se deva ao fato de que efetuar conversões requer uma atividade de construção, por isso, para além da investigação do desempenho é preciso que sejam realizadas investigações que observem outros fatores que podem vir a influenciar nos erros como as estratégias, por exemplo. Neste sentido, o capítulo a seguir examina com detalhes as estratégias utilizadas pelos estudantes para efetuar conversões que conduziram ao erro.

4.3 ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS DE CONVERSÃO DE FRAÇÃO QUE CONDUZIRAM AO ERRO

Esta seção destina-se a apresentar as estratégias de conversão organizadas através de análise minuciosa dos protocolos e das entrevistas concedidas pelos estudantes. Salienta-se que serão apresentadas as estratégias relativas à competência de efetuar conversões (T2). Uma vez que a T1, referente à identificação de conversões, requisitava julgamentos e explicações verbais dos estudantes que não necessariamente mobilizam estratégias, tendo em vista que estas últimas estão relacionadas a uma ação.

A amostra relativa ao desempenho da competência de efetuar conversões (T2), apresentou 190 acertos (26%) e 530 erros (74%). Logo, considerando o baixo desempenho optou-se pela análise das estratégias de conversão que resultaram em erro. Além disso, pretende-se evidenciar o erro como uma forma de acessar os limites e possibilidades do

pensamento dos estudantes frente a um conhecimento matemático (SPINILLO et al., 2014). Segundo Casávola et al. (1988) o erro, do ponto de vista psicológico, permite acessar se as ideias errôneas dos estudantes são fatos aleatórios da aprendizagem ou se estão vinculadas a um mecanismo aquisição dos conhecimentos. Portanto, a opção por enfatizar o erro deve-se a compreensão de que ele é um elemento fecundo para entender o processo de produção do conhecimento dos estudantes. Pretende-se, ainda, ao investigar nuances e teoremas em ação associados aos erros, contribuir para a superação da postura de que os erros precisam ser eliminados e evitados da prática escolar, uma vez que eles podem se constituir em ferramentas didáticas, como afirmam Spinillo et al (2014).

Para analisar os erros se faz necessário compreender as estratégias dos estudantes. Anastasiou e Alves (2007, p.75), explicam que o termo estratégia vem do grego *strategía* e do latim *strategia* que dizem respeito “à exploração ou aplicação dos meios e condições favoráveis e disponíveis para a consecução de objetivos”. Do ponto de vista psicológico, as estratégias dizem respeito ao ordenamento das ações frente ao processo de solução de um problema (CASÁVOLA et al., 1988). Portanto, as estratégias poderão revelar os esquemas de ação utilizados pelos estudantes para converter representações de frações.

A esse respeito considera-se necessário retomar a compreensão de Lesh et. al (1983) sobre o desenvolvimento de boas estratégias requerer flexibilidade para uso de uma variedade de sistemas representacionais, tendo em vista que eles tornam possível a escolha da representação mais conveniente para enfatizar os aspectos necessários à solução das situações. No entanto, faz-se necessário considerar que a noção de esquema não esgota em si a compreensão da conceitualização, porque a explicitação e a teorização dos conhecimentos é que torna possível transformá-los em conceitos e teoremas em ação (VERGNAUD, 1996). Ainda, a esse respeito Duval (2009) chama a atenção para o fato de que as representações semióticas possuem outras funções que ultrapassam apenas a comunicação. Para este autor é necessário considerar também o tratamento, relativo ao controle do processo de cálculo, e a objetivação, responsável pela tomada de consciência sobre da ação na construção, isto é, ao uso da representação para tornar claro para si mesmo uma ideia.

Diferentes estudos têm abordado a relação entre aspectos conceituais e semióticos vinculados a elaboração de estratégias. Lautert e Spinillo (1999), por exemplo, examinaram quais aspectos gráficos e procedimentais são contemplados em representações da operação de divisão feitas por crianças. Os resultados revelaram que crianças de diferentes idades representam através de grafismos de natureza pictográfica, icônica e simbólica seus procedimentos de resolução para os problemas de divisão, no geral, usam as operações que já

dominam no contexto escolar. Já Batista e Spinillo (2008) investigaram como diferentes suportes concretos de representação influenciaram na resolução de problemas relacionados às estruturas multiplicativas. As evidências obtidas deram suporte à compreensão de que a natureza dos materiais concretos tem influência sobre os procedimentos de resolução adotados por crianças. Em especial, o material concreto definido (objetos com uma relação definida com os referentes das quantidades presentes no enunciado) favorece a identificação dos termos das operações requeridas para a resolução dos problemas.

No domínio das frações, Faulkenberry e Pierce (2011) examinaram os tipos de estratégias utilizadas para a formação de representações mentais de frações em estudantes universitários. Três tipos de estratégias foram identificadas: a) já sabia a resposta; b) uso dos componentes da fração para acessar a magnitude (por exemplo, a multiplicação cruzada ou a conversão para o decimal); c) a compreensão numérica holística (por exemplo, visualização concreta ou uso de um ponto de referência). Estas estratégias foram consideradas como o fator mais importante para determinar o tipo de representação mental a ser formada. No que diz respeito especificamente à conversão YunQi e Siegler (2013), investigaram diferenças individuais entre crianças de 4ª e 5º ano no processo de representação das magnitudes de frações. Os resultados evidenciaram que a precisão da magnitude de uma representação influencia na precisão de uma conversão. Isto é, quando maior for compreensão da criança sobre a quantidade expressa pela fração melhores serão as possibilidades do estabelecimento de relações matemáticas coerentes entre representações.

O conjunto destes estudos (LAUTERT; SPINILO, 1999; BATISTA; SPINILLO, 2008; FAULKENBERRY; PIERCE, 2011; YUNQI; SIEGLER, 2013) fornece dados relevantes para a compreensão das estratégias dos estudantes investigados neste estudo tanto do ponto de vista semiótico como conceituais. Isto é, quanto à *estrutura das representações* constituída por marcas gráficas, traços, palavras, números e as configurações, regras e significados associados a estes aspectos (unidades de sentido) e ao *conteúdo das representações* que contempla as ideias, conceitos e procedimentos adotados (invariantes operatórios).

Conforme já explicitado, todas as questões requeridas na competência de efetuar conversões (T2) partiam de um enunciado em língua materna e solicitavam conversões para representações em registros simbólicos (fracionário ou decimal) ou figurais. Assim, buscou-se investigar as estratégias associadas aos erros de conversão observando suas relações com os diferentes sentidos, situações e representações semióticas de frações. Ressalta-se que, para essa análise, dois juízes independentes examinaram os 120 protocolos e entrevistas para

categorizar as estratégias que conduziram os estudantes a erros de conversão. O percentual de concordância entre eles foi de 98%. Os casos de discordância foram avaliados por um terceiro juiz também independente responsável pela classificação final.

No próximo tópico, cada uma das estratégias classificadas será descrita e exemplificada quanto ao sistema de análise utilizado, em seguida será feita a exposição dos resultados por meio de gráficos, tabelas e comentários interpretativos.

4.3.1 Sistema de análise

As estratégias foram agrupadas considerando os aspectos semióticos e conceituais explicitados nas representações e justificativas fornecidas pelos estudantes. Além disso, como foram enfatizadas estratégias relativas às conversões errôneas, buscou-se compreender as possíveis associações com erros de modificação ou transposição, discutidos anteriormente.

Deste modo, as unidades de sentido e os invariantes operatórios foram considerados para fundamentar a classificação das estratégias. Quanto às unidades de sentido, foram observadas as relações entre representações semióticas elaboradas no que diz respeito às regras de formação e tratamento dos registros. Em relação aos invariantes operatórios, foram examinadas associações com princípios invariantes e a compreensão da magnitude numérica das frações.

Com base nos pontos mencionados procedeu-se a análise das estratégias de conversão que conduziram ao erro, classificando-as em três tipos: Tipo 1 – estratégias incompreensíveis ou sem relação com o enunciado da questão; Tipo 2 – estratégias associadas ao raciocínio aditivo e; Tipo 3 – estratégias associadas ao raciocínio multiplicativo. Exemplos ilustrativos seguidos por discussões serão apresentados a seguir.

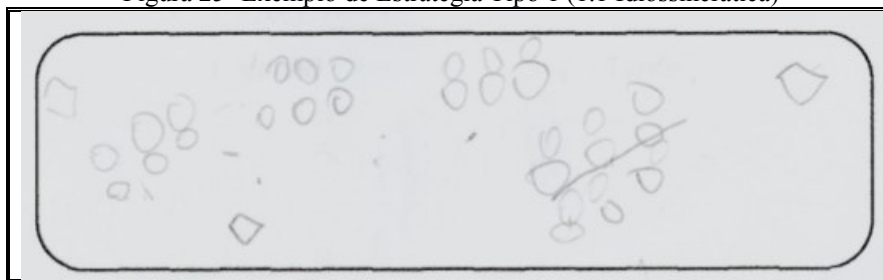
Tipo 1 – estratégias incompreensíveis ou sem relação com o enunciado da questão

Uma primeira classificação das estratégias diz respeito aquelas em que as conversões realizadas pelos estudantes resultaram em representações incompreensíveis ou sem relação com o enunciado da questão (representação inicial). O principal aspecto a ser destacado quando a esta estratégia diz respeito às dificuldades dos estudantes em lidar com o registro semiótico solicitado para a conversão, resultando em representações incompreensíveis (1.1 idiossincrática), que misturam elementos semióticos de registros diferentes (1.2 combinação inadequada de elementos semióticos) ou em registros semióticos diferentes daqueles

solicitados pelo enunciado da questão (1.3 representa em outro registro semiótico). A seguir serão apresentados alguns exemplos que ilustram as variações observadas, nessa categoria.

Exemplo 16 (1.1 Idiossincrática): Tarefa 2, sentido discursivo para não discursivo, situação quociente, representação figural (Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas. **Faça um desenho** que represente a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber.)

Figura 25- Exemplo de Estratégia Tipo 1 (1.1 Idiossincrática)



(Extrato de protocolo da Participante nº 57, sexo feminino, 12 anos)

E: Explica o seu desenho.

P: Espera aí, a barra tem doze [...] cada um vai ganhar a metade de uma barra.

E: Metade de uma barra? Aí você está representando que elas vão ganhar metade de uma barra? [...] Me ajuda a entender seu desenho. Você fez várias bolinhas. [...]

P: Porque são as amigas delas.

E: E tem quantas bolinhas no total?

P: Trinta.

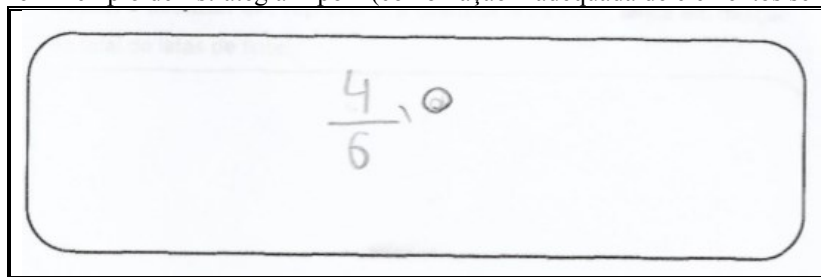
E: Trinta? Por que trinta?

P: É o que vai dar para todo mundo comer.

No Exemplo 16, a estudante tenta explicitar a lógica utilizada para a construção do desenho, no entanto, não fica clara a motivação para essa organização. Isso porque a representação elaborada não condiz com representação inicial da conversão (prevista no enunciado) e nem evidencia de forma coerente os elementos destacados pela explicação da estudante. Ao ser questionada sobre quais relações existiam entre o enunciado da questão e a representação elaborada a estudante explica ter desenhado 30 bolinhas, evidenciado ter desconsiderado as quantidades presentes no enunciado. Como a estudante altera as unidades de sentido a estratégia utilizada demonstra ter levado ao erro de modificação.

Exemplo 16 (1.2 combinação inadequada de elementos semióticos): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, problema de significado parte todo, representação decimal. (Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. **Escreva o número decimal** que representa a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços?)

Figura 26- Exemplo de Estratégia Tipo 1 (combinação inadequada de elementos semióticos)



(Extrato de protocolo da Participante nº 48, sexo feminino, 11 anos)

P: Ela comeu quatro pedaços e tinha seis pedaços.

E: [...] a questão tava pedindo para escrever o número decimal que representa a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços. Esse é o número decimal que representa isso?

P: [A participante fez sinal afirmativo com a cabeça]

E: Você colocou um quatro, um seis, uma barra, uma vírgula e um zero. Explica o número que você fez.

P: Porque foi a quantidade que ela comeu [aponta para o quatro] e embaixo é a quantidade de pedaços que tinha [aponta para o seis].

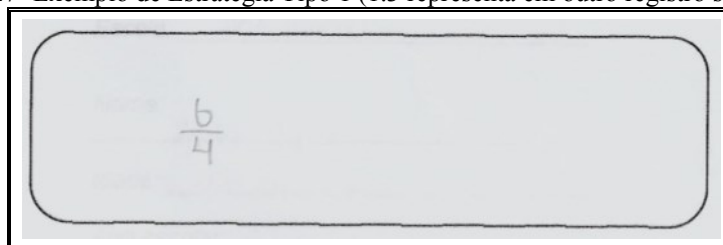
E: E a vírgula e o zero?

P: Porque é decimal.

No Exemplo 16, a estudante demonstra a dificuldade com a compreensão do significado da representação decimal. A representação elaborada mistura elementos da representação fracionária (disposição vertical dos números e barra) e da representação decimal (disposição horizontal e vírgula). A explicação da estudante demonstra que houve reconhecimento das unidades de sentido, mas o teorema em ação é relativo à representação fracionária, entretanto a vírgula e o zero são acrescentados para remeter à representação decimal. Neste sentido, percebe-se que a estudante tem dificuldade com a formação da representação decimal. A representação final evidencia o erro de modificação das unidades de sentido uma vez elementos semióticos são misturados e transformam o significado das

Exemplo 17 (1.3 representa em outro registro semiótico): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, problema de significado parte todo, representação decimal. (Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. Escreva o **número decimal** que representa a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços?)

Figura 27- Exemplo de Estratégia Tipo 1 (1.3 representa em outro registro semiótico)



(Extrato de protocolo da Participante nº 51, sexo feminino, 11 anos)

E: Explica para mim.

P: Ela cortou em seis pedaços e então ela comeu quatro.

E: Entendi, a questão pede para você escrever o número decimal que representa [...]. Esse é o número decimal que representa?

P: Eu não sei. Só sei fazer assim.

E: E porque seu número foi feito assim com esses seis, barra e quatro?

P: [A participante faz um gesto com os ombros para indicar que não sabe].

E: Não sabe? Por que o seis está em cima do quatro?

P: Por que ela cortou em seis pedaços iguais e ela comeu quatro.

No exemplo 18, o enunciado da questão solicita uma representação decimal, mas a estudante elabora uma representação fracionária. Percebe-se que há reconhecimento das unidades de sentido, mas dificuldades com a formação da representação fracionária. O teorema em ação utilizado parece ser relativo à transposição das unidades de sentido conforme a ordem em que elas aparecem no enunciado. Nesse sentido, acredita-se que ao considerar que na representação fracionária há um erro de transposição.

Diante dos exemplos apresentados, considera-se pertinente sumarizar as variações percebidas dentro da Estratégia Tipo 1, explicitando como elas se associam aos tipos de erro de conversão de fração discutidos neste estudo. O Quadro 6, ilustra estes aspectos.

Quadro 6- Variações da estratégia do Tipo 1 e suas relações com os tipos erros (transposição e modificação)

Tipos de erros	Variações
Modificação	• Idiossincrática • Combinação inadequada de elementos semióticos
Transposição	• Representa em outro registro

Fonte: A autora (2018)

Tipo 2 – Estratégias associadas às estruturas aditivas

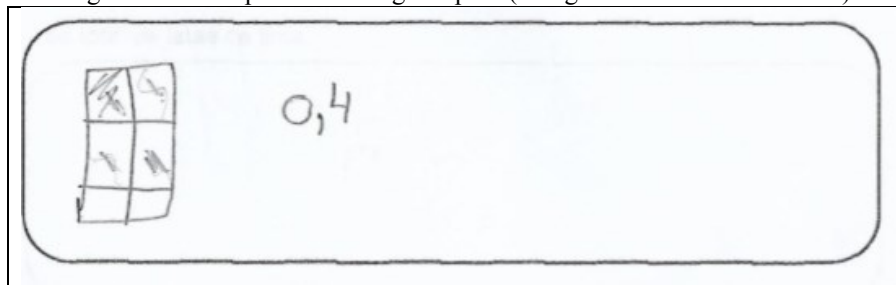
As estratégias associadas às estruturas aditivas são aquelas relativas a representações decorrentes de teoremas de ação pautados no campo conceitual aditivo. Segundo Nunes et al. (2005) os esquemas de ação deste campo apoiam-se nas ações de juntar e retirar em coordenação com a contagem. Percebeu-se que as estratégias vinculadas às estruturas aditivas partem da compreensão das frações como magnitude absoluta, evidenciando dificuldades para interpretá-las enquanto um número que pode expressar medidas e relações (VERGNAUD, 1983).

Deste modo, as representações decorrentes de Estratégia Tipo 2 desconsideram parte ou todo da fração (2.1 ignora unidades de sentido), usam a ordem em que as unidades de sentido aparecem no enunciado como critério para representar (2.2 ordena unidades de

sentido com base no enunciado) ou operam com as quantidades (2.3 realiza operações de adição ou subtração).

Exemplo 18 (2.1 ignora unidades de sentido): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, problema de significado parte todo, representação decimal. (Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. Escreva o número decimal que representa a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços?)

Figura 28- Exemplo da Estratégia Tipo 2 (2.1 ignora unidades de sentido)



(Extrato de protocolo da Participante nº 17, sexo feminino, 11 anos)

P: Eu estou com dúvida sobre o número que a questão pede.[...] Aí coloca o zero vírgula o resultado, né?

E: Pode fazer do jeito que você achar que é. [...] Me explica o que você fez.

E: Quando caia essa questão aqui na prova da tia eu fazia isso aqui [mostra a representação figural elaborada] e botava o quadradinho e riscava para contar quantas coisas ela comeu, aí quando perguntava qual era o resultado eu botava zero vírgula o número que dava aqui [refere-se a figura elaborada].

E: Entendi. E porque coloca o zero?

P: Porque é número decimal 0,4.

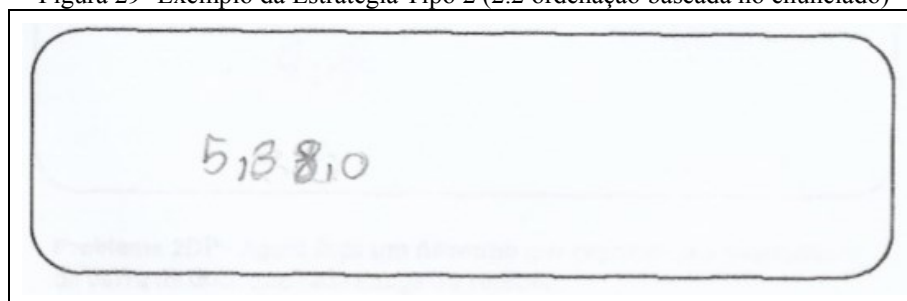
E: [...]. E por que ficou quatro aí depois da vírgula?

P: Porque ela comeu quatro pedaços de chocolate

No Exemplo 18, observa-se que a estudante usa a figura como representação de transição para a elaboração da representação decimal. O teorema em ação utilizado para a figura remete a estratégia de dupla contagem, no entanto, ao tentar mobilizar as unidades de sentido para a representação decimal, apenas a quantidade de pedaços comidos (parte) é considerada. A estudante acrescenta uma vírgula e um zero para remeter à representação decimal demonstrando não compreender aspectos semânticos e sintáticos vinculados a formação dessa representação. Além disso, ao separar a parte, a estudante evidencia compreender as quantidades de modo absoluto. Somando-se a isso o acréscimo da vírgula e do zero, alteram o significado da unidade de sentido levando a um erro de modificação.

Exemplo 19 (2.2 ordena unidades de sentido com base no enunciado): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, situação medida, representação decimal. (Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Escreva o número decimal que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.)

Figura 29- Exemplo da Estratégia Tipo 2 (2.2 ordenação baseada no enunciado)



(Extrato de protocolo da participante nº 21, sexo feminino, 12 anos)

E: Pronto? Qual é desses números que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta?

P: O três.

E: [...] São quantas latas de tinta branca?

P: Ai então é a cinco, tia.

E: E por que tu fizeste todos esses números?

P: Porque aqui é a quantidade de cada um [aponta para o cinco e o três] e aqui é o total [aponta para o oito vírgula zero].

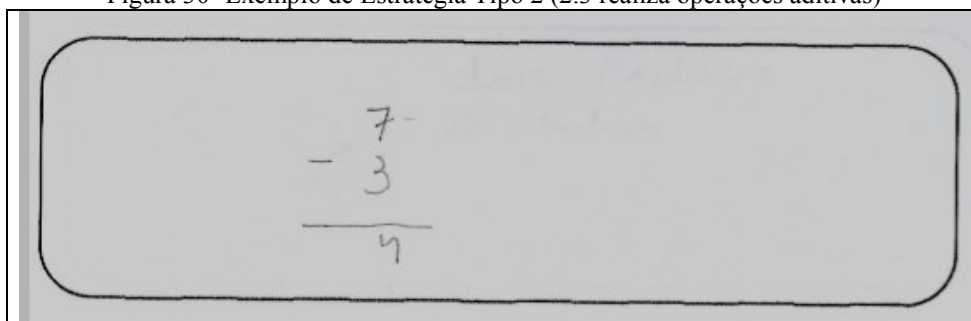
E: E esses números representam a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta?

P: Representam.

No Exemplo 19, a estudante elabora duas representações. A primeira relaciona as partes da medida e a segunda evidencia o todo (total da mistura). O teorema em ação evidencia que as unidades de sentido foram organizadas em função da ordem em que aparecem no enunciado. Ao ser questionada sobre qual das representações explicitava sua solução, a estudante refere-se às unidades de sentido três e cinco, evidenciando considerá-las como magnitudes absolutas. A necessidade representar todas as quantidades presentes no enunciado pode decorrer de dificuldades para perceber como elas se relacionam entre si. A representação final (cinco vírgula três) evidencia um erro de transposição.

Exemplo 20 (2.3. realiza operações aditivas): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, situação parte-todo, representação fracionária. (Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua irmã comeu 3 fatias. Escreva a fração que representa a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de pedaços).

Figura 30- Exemplo de Estratégia Tipo 2 (2.3 realiza operações aditivas)



(Extrato de protocolo da Participante nº 8, sexo feminino, 13 anos, 5º ano).

P: Eu botei esse número aqui (...) aí sete menos três é quanto?

E: Quanto você acha? Essa é a fração que representa a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu?

P: Já sei. É quatro.

E: Você já estudou fração?

P: Já, mas não lembro muito.

E: Entendi.

No Exemplo 20, a estudante representa a operação de subtração através de um algoritmo. Nota-se que os teoremas em ação mobilizados consideram as unidades de sentido como magnitudes absolutas. A estudante diz não lembrar-se do conteúdo de frações e opera com as quantidades, explicitando não compreender este conceito e suas representações. O erro evidenciado na representação final é de modificação, uma vez que há transformação das unidades de sentido.

O Quadro 7 sumariza as associações encontradas entre as variações da Estratégia Tipo 2 e os tipos de erros (modificação e transposição).

Quadro 7- Variações da estratégia do Tipo 2 e suas relações com os tipos erros (transposição e modificação)

Tipos de erros	Variações
Modificação	• Ignora as unidades de sentido • Realiza a operação de adição e subtração
Transposição	• Ordena as unidades de sentido em função do enunciado

Fonte: A autora (2018)

Tipo 3 - estratégias associadas às estruturas multiplicativas

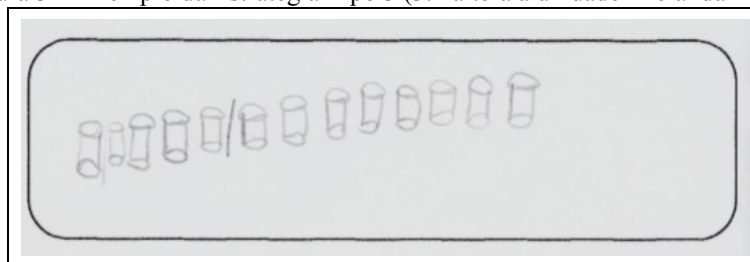
As estratégias associadas às estruturas multiplicativas evidenciam representações semióticas baseadas em teoremas de ação deste campo conceitual. Nunes (2008) afirma que os esquemas de partição e correspondência (um-para-muitos e muitos-para-muitos) são a raiz da compreensão multiplicativa, em especial das frações. Uma vez que as estratégias examinadas conduziram a erros de conversão, as representações examinadas salientam interpretações errôneas dos invariantes operatórios e representações semióticas das estruturas multiplicativas.

Os estudantes que utilizaram a Estratégia do Tipo 3 evidenciaram dificuldades com aspectos conceituais e semióticos das estruturas multiplicativas, em especial das frações, resultando representações que apresentam alteração da unidade inicial da fração (3.1 altera a unidade inicial), divisões desiguais entre as partes de figuras (3.2 ignora a igualdade entre as partes da figura), partições sem correspondência com as unidades de sentido (3.3 não estabelece correspondência), inversão das posições do numerador e denominador de frações

(3.4 coloca o numerador do lugar do denominador), transposição de regras da representação fracionária para a representação decimal (3.5 transpõe regras da representação fracionária para a decimal) e relações parte-parte (3.6 relacionada partes).

Exemplo 21 (3.1 altera a unidade inicial): Tarefa 2, sentido discursivo para não discursivo, situação medida, representação figural discreta. (Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. **Faça um desenho** que represente a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.).

Figura 31- Exemplo da Estratégia Tipo 3 (3.1 altera a unidade inicial da fração)



(Extrato de protocolo da Participante nº 15, sexo feminino, 10 anos).

P: Aqui eu vou separar essa aqui [representações à esquerda do traço], aí aqui [representações à direita do traço] vai ser o resto que sobrou das outras latas porque o total é oito.

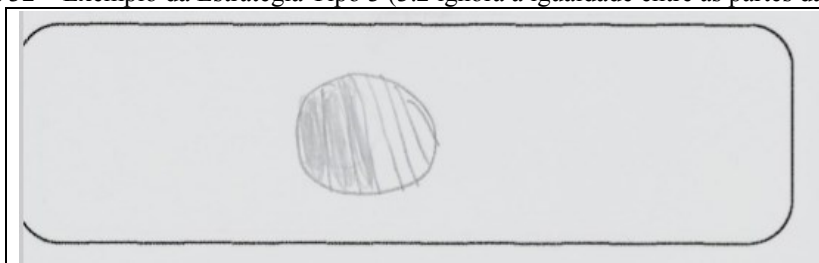
E: Esse que você separou é o quê?

P: A lata branca.[...] Aqui [representações à esquerda do traço] é o total de cinco latas e a relação da branca e o total.

No Exemplo 21, evidencia-se que a estudante reconhece as unidades de sentido cinco e oito. No entanto é perceptível que existem dificuldades para a compreensão da fração quando associada a representação semiótica discreta, em especial, no que se refere à percepção de que, nesse contexto, o valor da unidade é expresso por conjuntos de elementos relacionados entre si. Quanto ao teorema em ação empregado, nota-se que a disposição das quantidades e o uso do traço para separá-los remetem a organização da representação fracionária. A representação final da conversão apresenta 13 elementos, ao invés de oito, por conta da tentativa da estudante de transpor as unidades de sentido, considerando sua configuração na representação simbólica (fracionária). Logo, o erro cometido é de transposição.

Exemplo 22 (3.2 ignora a igualdade entre as partes da figura): Tarefa 2, sentido discursivo para não discursivo, situação parte-todo, representação figural contínua (Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua irmã comeu 3 fatias. Agora faça um desenho que represente a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias.)

Figura 32 – Exemplo da Estratégia Tipo 3 (3.2 ignora a igualdade entre as partes da figura)



(Extrato de protocolo da Participante nº 40, sexo feminino, 11 anos, 5º ano).

E: Tá, agora faz um desenho que represente a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias. Pronto? Explica o desenho que você fez?

P: Eu fiz o tanto de fatias, o tanto que ela comeu e pintei.

E: E o que está pintado

P: As fatias que ela comeu.

E: E o que você não pintou é o quê?

P: O resto.

No Exemplo 22, a estudante demonstra reconhecer as unidades de sentido sete, três e sete pedaços de um total de sete. Contudo, o teorema em ação utilizado para representar evidência que a igualdade entre as partes não é considerada. Considera-se, assim como afirma Lima (1989) que dificuldades relativas à área das figuras geométricas, neste caso do círculo, somam-se às dificuldades com a fração. Logo, o número de partes é considerado sem atenção ao tamanho das partes. A representação final evidencia transformação nas características das unidades de sentido, uma vez que o enunciado explicita que as fatias de bolo são iguais. Assim, um erro de modificação é cometido.

Exemplo 23 (3.3 ausência de correspondência entre medidas): Tarefa 2, sentido discursivo para não discursivo, situação quociente, representação figural discreta (Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas. Agora faça um desenho que represente a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber.)

Figura 33- Exemplo da Estratégia Tipo 3 (3.3 ausência de correspondência entre medidas)



(Extrato de protocolo da participante nº 19, sexo feminino, 11 anos).

P: Vai faltar.

E: Vai faltar?

P: Vai faltar dois.

E: E aí?

P: Não sei não.

E: Se fossem suas amigas, o que você faria?

P: Se for dividir só um vai sobrar. É quatro aí vai sobrar para dar para uma. Não sei não.

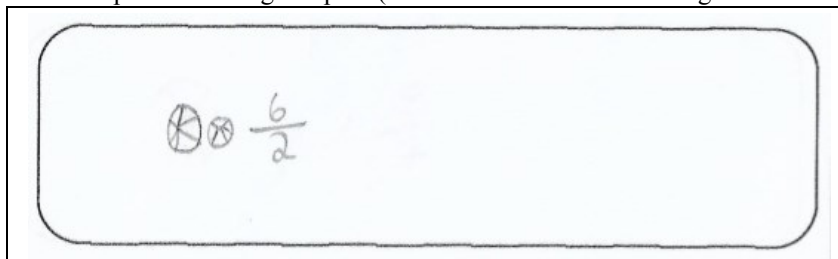
E: Iria sobrar quanto?

P: Não, não iria dar pra todas. [...] se for um pedaço e meio pra cada aí tira mais um pedacinho, aí ficava um e meio mais um e meio dá três. Mais um e meio dá quatro e meio. [...] Acho que não dá para todas não.

O Exemplo 23, requer considerar a fração do domínio dos quocientes. A estudante demonstra reconhecer as unidades de sentido quatro e cinco relativas às barras de chocolate e quantidade de amigas, respectivamente. Entretanto o teorema em ação utilizado faz uso inadequado do esquema de partição, baseado na lógica de divisão de um objeto (ou coleção) em um número igual de partes. Como o dividendo é maior que o divisor a estudante tem dificuldade em realizar a divisão. Por este motivo, o teorema em ação utilizado remete a distribuição sem considerar quantidades iguais. A representação final expressa o resultado da distribuição. Como há transformação das unidades de sentido o erro cometido é de modificação.

Exemplo 24 (3.4. coloca o numerador do lugar do denominador) – Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, situação quociente, representação fracionária. (Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. Escreva a fração que representa a quantidade de torta que cada amigo irá receber.)

Figura 34- Exemplo da Estratégia Tipo 3 (3.4 coloca o numerador do lugar do denominador)



(Extrato de protocolo da Participante nº 21, sexo feminino, 12 anos)

E: Explica o que você fez.

P: Botei dois de seis, porque vai tirar duas tortas, pra seis amigos.

E: Por quê?

P: Eita! Tá errado, tia [A estudante apaga a representação e inverte a posição do numerador e denominador]. Ó, porque o dois é das duas tortas e o seis é dos amigos. Entendeu?

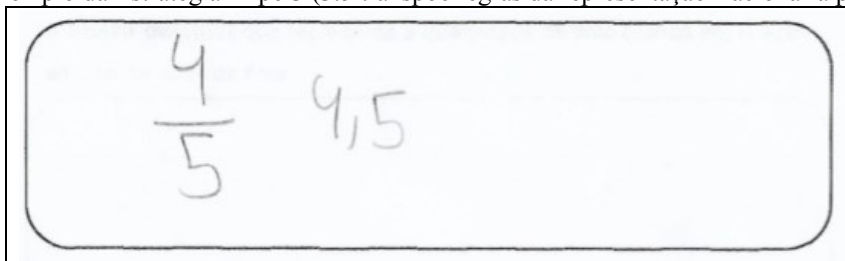
E: E porque está errado? Porque você mudou a posição do seis e do dois?

P: Por que são seis amigos e eu vou dividir as duas tortas pra esses seis amigos. O número maior divide pelo menor.

No Exemplo 24, nota-se que o reconhecimento e relação entre as unidades de sentido é compreendida pela estudante. No entanto, não há compreensão da representação fracionária. Inicialmente, o teorema em ação utilizado demonstra a tentativa de explicitar a relação “duas fatias de torta por amigo”, entretanto, ao ser questionada a estudante altera sua representação. O teorema em ação que justifica a mudança é expresso por “o número maior divide pelo menor”, explicando a ideia de que o dividendo deve sempre ser maior que o divisor. Com esta compreensão, a estudante associa o numerador ao dividendo e o denominador ao divisor, justificando assim a inversão de suas posições. Neste sentido, as unidades de sentido não sofrem transformações. O erro cometido, portanto, é de transposição.

Exemplo 25 (3.5 transpõe regras da representação fracionária para a decimal): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, problema de significado quociente, representação decimal. (Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas. Escreva o **número decimal** que representa a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber.)

Figura 35- Exemplo da Estratégia Tipo 3 (3.5 transpõe regras da representação fracionária para a decimal)



The image shows a rectangular box containing handwritten text. On the left, the fraction $\frac{4}{5}$ is written. To the right of the fraction, the decimal number 4,5 is written. The handwriting is in blue ink on a light background.

(Extrato de protocolo do Participante nº 42, sexo masculino, 11 anos, 5º ano).

P: Número decimal?

E: É. (...) Como foi que você descobriu esse número aí?

P: quatro barras o primeiro e depois a segunda as cinco amiga dela

[...]

E: E porque tem dois números [referindo-se a representação fracionária e decimal]?

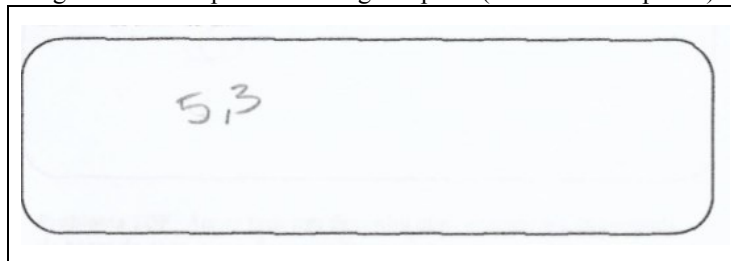
[...]

P: Os dois são iguais.

No Exemplo 25, observa-se que a lógica utilizada para a elaboração da representação atribui o mesmo modo de funcionamento para as representações fracionárias e decimais. Como o estudante não compreende a representação decimal utiliza um teorema em ação baseado na transposição das regras de funcionamento da representação fracionária. O estudante ainda explica que considera que ambas as representações expressam de forma igual a magnitude fracionária. Logo, a representação final da conversão evidencia o numerador e o denominador separados por uma vírgula. Contudo, as unidades de sentido não são transformadas, remetendo ao erro de transposição.

Exemplo 26 (3.6 relaciona partes): Tarefa 2, sentido discursivo para discursivo, situação medida, representação decimal. (Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Escreva o número decimal que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.)

Figura 36- Exemplo da Estratégia Tipo 3 (3.6 Relaciona partes)



(Extrato de protocolo do Participante nº 54, sexo masculino, 11 anos).

E: Explica o que você fez.

P: No caso que ela tá pedindo a relação entre a tinta branca. Ela usou três latas de tinta vermelha e o total foi oito. Aí cinco em relação a três latas vermelhas.

E: Entendi. Esse é o número decimal que representa a relação entre a tinta branca e o total de latas de tinta?

P: Sim

O Exemplo 26, o estudante demonstra reconhecer as unidades de sentido cinco, três e oito. Mas o teorema em ação empregado explicita a compreensão de que a relação entre a quantidade de tinta branca e o total é explicada pela lógica aditiva “o todo é igual a soma das partes”. Embora o teorema tenha sua base num esquema de ação aditivo, o estudante representa comparando as quantidades envolvidas na situação em termos de razão (A:B), ou seja, mantendo uma relação proporcional entre as partes A e B (CORREA; SPINILLO, 2004). A escolha por classificar esta estratégia como associada às estruturas multiplicativas se explica pelo fato dela evocar o raciocínio proporcional no estudante. Neste sentido, a representação final elaborada não evidencia transformação das unidades de sentido, remetendo a um erro de transposição.

As relações entre as variações da estratégia Tipo 3 e os tipos de erros são apresentadas pela Quadro X:

Quadro 8- Variações da estratégia do Tipo 3 e suas associações com os tipos erros (transposição e modificação)

Tipos de erros	Variações
Modificação	• Ignora a igualdade entre as partes da figura • Ausência de correspondência entre medidas
Transposição	• Altera a unidade inicial • Coloca o numerador no lugar do denominador • Transpõe regras da representação fracionária para a decimal • Relaciona partes

Fonte: A autora (2018)

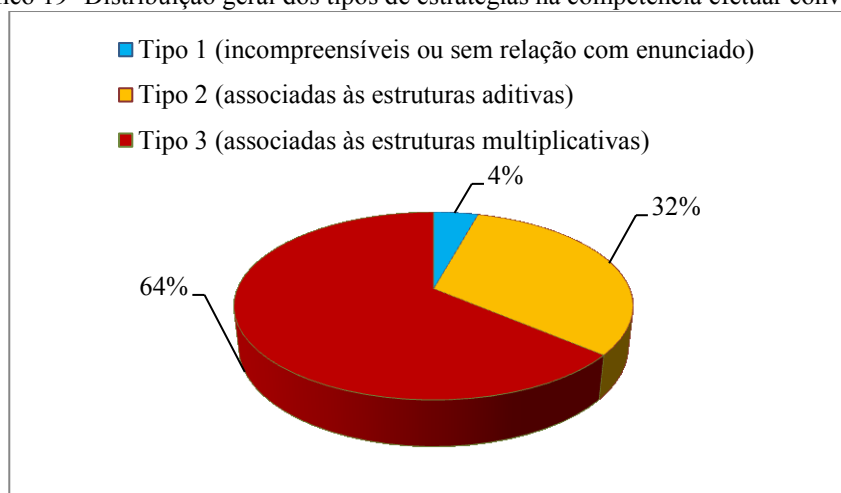
No próximo tópico são apresentados os resultados referentes às estratégias de conversão que conduziram ao erro. Ressalta-se que para o tratamento estatístico dos dados foi utilizado o teste Qui-quadrado de independência, quando os dados permitiam²⁹, para examinar como as estratégias estão associadas aos diferentes sentidos, situações e representações semióticas de fração.

4.3.2 As estratégias que conduzem ao erro

Inicialmente são sumarizados os aspectos observados de modo geral, em seguida se discutem as relações entre sentidos, situações e representações semióticas de frações com as estratégias de conversão. Posteriormente se discutem as associações entre os tipos de erros e os tipos de estratégia.

No Gráfico 19³⁰, observa-se a distribuição geral dos tipos de estratégias que conduziram os estudantes a erros nas questões relativas à competência de efetuar conversões de frações. Verifica-se que as estratégias utilizadas com maior frequência são do Tipo 3 (64%) seguidas pelo Tipo 2 (32%) enquanto as do Tipo 1 apresentam percentual pouco expressivo em relação ao total da amostra (4%).

Gráfico 19- Distribuição geral dos tipos de estratégias na competência efetuar conversões



Fonte: a autora (2018)

Os dados obtidos evidenciam que as estratégias de conversão dos estudantes associam-se, em sua maioria, a aspectos semióticos e conceituais das estruturas multiplicativas. Este resultado era esperado uma vez que os estudantes já tiveram experiências com o conteúdo de

²⁹ O teste Qui-quadrado de independência tem como requisito que todas as células da tabela apresentem frequências iguais ou maiores que cinco, no entanto, para algumas análises as frequências foram menores que cinco, inviabilizando o uso desse teste.

³⁰ Tipo 1: n= 22; Tipo 2: n= 165; Tipo 3: n= 330

frações no contexto escolar, justificando que suas estratégias vinculem-se a situações e representações semióticas vivenciadas quanto a este conceito.

Embora os estudantes tenham tido experiências no âmbito escolar com o conceito de fração, verifica-se a presença, ainda que em menor frequência de estratégias associadas às estruturas aditivas. Por que isso ocorre? Existe um consenso na literatura de que os conhecimentos sobre os números naturais podem constituir-se como obstáculos epistemológicos para a aprendizagem de frações, tendo em vista que é necessário realizar rupturas com regras, propriedades e conceitos do conjunto dos números naturais para que seja possível compreender os números racionais (VERGNAUD, 1983; PITKETLY; HUNTING, 1996; MOREIRA, 2008; SIEGLER; BRAITHWAITE, 2015). Neste sentido, infere-se que as dificuldades relativas à compreensão da magnitude numérica das frações podem levar os estudantes a transpor teoremas em ação relacionados a conceitos e representações semióticas das estruturas aditivas para as frações.

Ademais, como pode ser observado na Tabela 3, que sumariza o percentual relativo à frequência de cada variação nos tipos de estratégias, apenas 25 respostas dos estudantes apresentam estratégias do Tipo 1, que por sua vez, estão em sua maioria na variação 1.1 Idiossincrática (não compreensíveis). Em face deste resultado optou-se por não incluir a Estratégia Tipo 1 nas discussões seguintes deste capítulo.

Tabela 3- Distribuição das variações de cada estratégia com o respectivo percentual

Tipo 1 (incompreensíveis ou sem relação com enunciado) (n=25)	1.1 Idiossincrática	75%
	1.2 Combinação inadequada de elementos semióticos	5%
	1.3 Representa em outro registro semiótico	20%
Tipo 2 (associadas às estruturas aditivas) (n=162)	2.1 Ignora unidades de sentido	49%
	2.2 Ordena unidades de sentido com base no enunciado	44%
	2.3 Realiza operações de adição ou subtração	7%
Tipo 3 (associadas às estruturas multiplicativas) (n=330)	3.1 Altera a unidade inicial	14%
	3.2 Ignora a igualdade entre as partes da figura	23%
	3.3 Não estabelece correspondência	24%
	3.4 Coloca o numerador do lugar do denominador	10%
	3.5 Transpõe regras da representação fracionária para a decimal	25%
	3.6 Relaciona partes	4%

Nota: n= número de respostas

Fonte: A autora (2018)

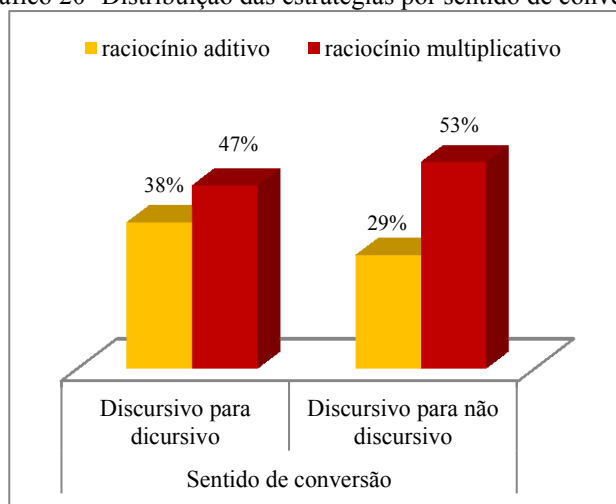
Na Tabela 3 observa-se que as Estratégias do Tipo 2 (associadas às estruturas aditivas) apresentam predomínio das variações ignora unidades de sentido (49%) e ordena unidades de sentido (44%), enquanto realiza operações de adição e subtração tem frequência pouco expressiva em relação as demais variações (7%).

Com relação às Estratégias do Tipo 3 (associadas às estruturas multiplicativas) observa-se que as variações mais expressivas numericamente são transpõe regras da representação fracionária para a decimal (25%), não estabelece correspondência (24%) e ignora a igualdade entre as partes da figura (3%). As demais variações apresentam percentuais baixos, mas precisam ser consideradas enquanto aspectos contemplados pelos estudantes para elaborar seus teoremas em ação. No entanto, algumas variações das estratégias vinculam-se, de modo específico, a sentidos, situações ou representações de frações. Com efeito, para propiciar uma melhor compreensão das estratégias, bem como de suas variações, nos tópicos a seguir se discutirá sobre como elas são afetadas pelas variáveis consideradas neste estudo (sentidos, situações e representações semióticas).

4.3.3 As estratégias que conduzem ao erro e os sentidos de conversão

A comparação entre as estratégias (Tipo 2 vs. Tipo 3) nos sentidos de conversão (discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo) evidencia que as estratégias associadas às estruturas multiplicativas (Tipo 3) são mais frequentes nos dois sentidos de conversão, sem apresentar grandes diferenças em seus percentuais. O teste Qui-quadrado de independência evidenciou que existe uma associação entre as estratégias (associadas às estruturas aditivas vs. associadas às estruturas multiplicativas) e os sentidos de conversão (discursivo para discursivo vs. discursivo para não discursivo) [$\chi^2_{(1)} = 3,883^a$; $p = .049$]. Esses resultados revelam que as estratégias associadas às estruturas multiplicativas (Tipo 3) apresentam maior frequência em ambos os sentidos de conversão.

Gráfico 20- Distribuição das estratégias por sentido de conversão



Fonte: A autora (2018)

Neste sentido, para compreender melhor as relações entre as estratégias associadas às estruturas multiplicativas e os sentidos de conversão, buscou-se observar como as variações da Estratégia do Tipo 3 se apresentam cada sentido de conversão, conforme ilustrado pela Tabela 4.

Tabela 4- Frequência das variações da estratégia Tipo 3 em cada sentido de conversão

Variações da estratégia Tipo 3	Sentido discursivo para discursivo	Sentido discursivo para não discursivo
3.1 Altera a unidade inicial	-	23%
3.2 Ignora a igualdade entre as partes da figura	-	17%
3.3 Não estabelece correspondência	5%	20%
3.4 Coloca o numerador do lugar do denominador	15%	-
3.5 Transpõe regras da representação fracionária para a decimal	33%	-
3.6. Relaciona partes	10%	2%

Fonte: a autora (2018)

Observa-se que as variações 3.1 (altera a unidade inicial), 3.2 (Ignora a igualdade entre as partes da figura) e 3.3 (não estabelece correspondência) associam-se ao sentido discursivo para não discursivo. Ao passo que as variações 3.4 (coloca o numerador no lugar do denominador), 3.5 (transpõe regras da representação fracionária para a representação decimal) e 3.6 (relaciona partes) vinculam-se ao sentido discursivo para discursivo. Nesse sentido, cada variação será discutida tendo em vista possíveis explicações para suas associações aos sentidos de conversão.

Inicialmente, que diz respeito às associações com o sentido discursivo para discursivo, a variação 3.4 (coloca o numerador no lugar do denominador) remete a teoremas em ação baseados na noção de que o numerador não pode ser maior que o denominador. Tal compreensão expressa o desconhecimento quanto às regras de formação e funcionamento da representação fracionária. Este aspecto havia sido previamente discutido por Merlini (2005). A associação com as representações discursivas se explica porque o teorema em ação empregado explicita dificuldades com as conversões relativas a esse tipo de representações. A mudança na posição do numerador e denominador evidencia a transposição das unidades de sentido.

A variação 3.5 (transpõe regras da representação fracionária para a representação decimal) fundamenta-se teoremas de ação baseados nas regras de formação da representação fracionária. Como os estudantes não compreendem aspectos sintáticos e semânticos da representação decimal acabam por acreditar que suas regras de funcionamento são as mesmas da fração. Kerslake (1986) discute que muitas das dificuldades de crianças de diferentes

idades decorrem do fato delas não perceberem conexões entre $\frac{a}{b}$ e $a \div b$ por terem acesso apenas a modelos de fração como parte-todo. Esta variação, de modo similar a 3.4, explicita dificuldades com as conversões relativas às representações discursivas e a transposição de unidades de sentido.

Por fim, a variação 3.6 (relaciona partes) remete ao uso de teoremas em ação fundamentados no estabelecimento de relações parte-parte, comparando as quantidades envolvidas na situação em termos de razão (A:B), ou seja, mantendo uma relação proporcional entre as partes A e B (CORREA; SPINILLO, 2004). Bezerra (2001) e Merlini (2005) também identificaram essa estratégia em seus estudos. Essa variação vincula-se a representações discursivas por contas das dificuldades dos estudantes de compreender dois aspectos. Por um lado, evidencia-se incompreensão da magnitude numérica como as frações, tendo em vista que a linguagem das razões sugere um esquema de raciocínio que não se refere a uma quantidade em si, mas a uma relação entre medidas (NUNES et al. 2005). Por outro lado, aspectos semióticos relacionados às regras de formação de fração e decimais provocam dificuldades quanto as convenções relativas às representações discursivas. As representações decorrentes dessa variação explicitaram a transposição de unidades de sentido relativas às partes da fração em detrimento do todo.

Com relação às associações percebidas na conversão do sentido discursivo para não discursivo, a variação 3.1 (altera a unidade inicial) tem relação com teoremas em ação vinculados ao esquema de correspondência um-a-um entre as partes e o todo da fração, ou seja, com tentativas de discretizar quantidades presentes na fração. Neste sentido, sua associação com representações não discursivas se explica porque sua presença foi detectada apenas quando os estudantes tentaram elaborar representações figurais que explicitavam quantidades maiores do que as unidades iniciais da fração (fornecidas pelo enunciado). Como há alteração na unidade inicial da fração, as unidades de sentido são alteradas, produzindo erros de modificação.

A variação 3.2 (ignora a igualdade entre as partes da figura) relaciona-se à representações figurais contínuas cujas divisões foram realizadas evidenciando partes não igualadas. Piaget, Inhelder e Skeminska (1960) relatam que as crianças têm desempenho notadamente ruim ao particionar quantidades contínuas em partes iguais. Este aspecto também foi reportado por Lima (1989) que identificou que apenas a partir dos 12 anos os participantes de seu estudo conseguiam obter partes iguais ao representar frações em figuras contínuas. A vinculação direta desta variação com as representações figurais justificam sua

associação com o registro não discursivo. Como as unidades de sentido são alteradas ao desconsiderar a igualdade entre as partes (explicitamente requisitada no enunciado), o erro produzido é de modificação.

A variação 3.3 (não estabelece correspondência) diz respeito ao uso de teoremas em ação que empregam o esquema de partição de modo inapropriado. Isso porque o esquema de partição se adéqua a situações onde há apenas um todo a ser dividido. Quando é preciso relacionar duas medidas (por exemplo: torta/amigos; barra de doces/amigas) é necessário estabelecer correspondência entre as medidas (NUNES, 2008). Mas os estudantes usam apenas o esquema de partição baseados na lógica de divisão de um objeto (ou coleção) em um número igual de partes. Pitktley e Hunting (1996), Merlini (2005) e Nunes (2008), dentre outros, também evidenciaram esse aspecto. O uso dessa variação remete ao sentido não discursivo porque seu uso foi exclusivo em representações figurais. Como as unidades de sentido acabam por ser alteradas nas partições sem estabelecimento de correspondência, os erros produzidos são de modificação.

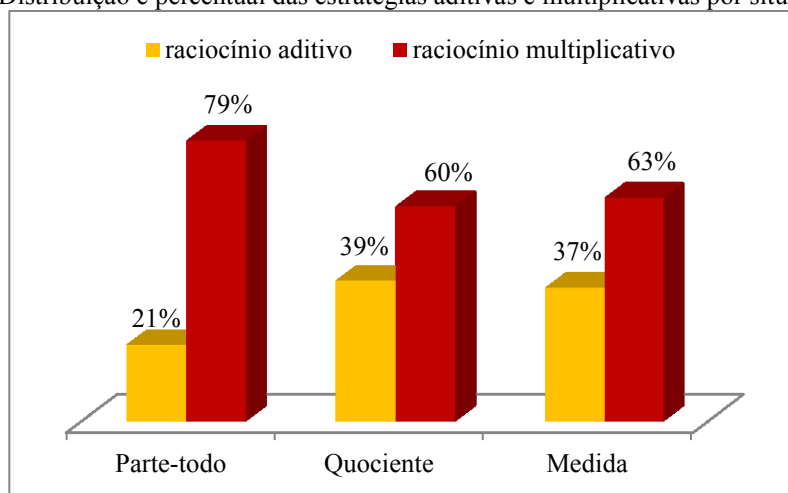
De modo geral, se evidencia que a estratégia Tipo 3, bem como suas variações, apresentam diferentes relações com os sentidos de conversão. Estes resultados corroboram as evidências encontradas neste estudo quanto ao desempenho e ao tipo de erro, demonstrando que a compreensão do fenômeno de conversão de frações requer que se considere os sentidos em as conversões se realizam. Deste modo, encontram-se evidências empíricas para a defesa feita por Duval (2006, 2009, 2012a, 2012b) em sua teoria. De modo análogo, é possível considerar que cada sentido de conversão produz contextos diferentes, pois conforme explicita Vergnaud (1996, p.167) “a representação não é algo estático, mas um processo dinâmico, que toma muito emprestado da forma pela qual a ação é organizada”. Em face do exposto no tópico a seguir apresenta-se como as estratégias e suas variações relacionam-se às situações de frações.

4.3.4 As estratégias que conduzem ao erro e as situações

O Gráfico 21 ilustra a relação entre as estratégias associadas ao raciocínio aditivo e ao raciocínio multiplicativo que conduziram ao erro e as situações de fração. Percebe-se a maior frequência das estratégias associadas ao raciocínio multiplicativo em todas as situações (parte-todo: 79%, medida: 63% e quociente: 60%) quando comparada as estratégias associadas ao raciocínio aditivo (parte-todo: 21%, medida: 39% e quociente: 37%). Observa-se também que as estratégias associadas às estruturas aditivas apresentam percentuais

semelhantes na situação quociente (39%) e medida (37%), o que não se observa na situação parte-todo (21%). O teste estatístico Qui-quadrado de independência detectou associação entre as estratégias (associadas às estruturas aditivas vs. associadas às estruturas multiplicativas) e as situações de fração (parte-todo vs. quociente vs. medida) [$X^2_{(2)} = 14,470^a$; $p = .001$]. Portanto, confirmou-se que para todas as situações de fração as estratégias associadas ao raciocínio multiplicativo predominam.

Gráfico 21- Distribuição e percentual das estratégias aditivas e multiplicativas por situação de fração



Fonte: A autora (2018)

Para entender melhor este resultado, considerou-se pertinente examinar como suas diferentes variações se configuram em relação às situações de fração, conforme por ser visualizado na Tabela 5.

Tabela 5- Frequência das variações da estratégia Tipo 3 por situação de fração

Variações	Parte-todo	Quociente	Medida
3.1 Altera a unidade inicial	12%	1%	-
3.2 Ignora a igualdade entre as partes da figura	21%	2%	3%
3.3 Não estabelece correspondência	7%	38%	2%
3.4 Coloca o numerador no lugar do denominador	15%	6%	3%
3.5 Transpõe regras da representação fracionária para a decimal	24%	13%	13%
3.6. Relaciona partes	0,7%	-	18%

Fonte: A autora (2018)

Como pode ser observado, a situação parte-todo apresenta maior frequência das variações 3.1 (altera a unidade inicial), 3.2 (ignora a igualdade entre as partes da figura), 3.4 (coloca o numerador no lugar do denominador) e 3.5 (transpõe regras da representação fracionária para a decimal). Deste modo, percebe-se que a situação parte-todo evidencia porcentagens superiores às demais situações e em uma quantidade maior de variações. Uma explicação para este resultado pode ser relativo ao fato já discutido neste estudo quanto a

maior familiaridade dos estudantes com este tipo de situação, uma vez que ela costuma ser a mais abordada em situações de ensino e livros didáticos (NUNES, 2003; CHARALAMBOUS; PITTA-PATANZI, 2007; MALASPINA; MAGINA, 2013). Isso porque a maior familiaridade com a situação pode ser capaz de gerar mais estratégias na medida em que os estudantes podem possuir um conjunto maior de esquemas construídos pelas experiências anteriores com a situação.

Ao examinar as variações mais frequentes nas situações parte-todo observa-se que duas delas relacionam-se a erros de modificação e duas a erros de transposição. As variações 3.1 (altera a unidade inicial), 3.2 (ignora a igualdade entre as partes da figura), associam-se a erros de modificação porque remetem a violação de invariantes conceituais. Na variação 3.1 (altera a unidade inicial), o princípio da invariância é violado (a soma das frações constituídas é igual ao todo inicial). Já na variação (ignora a igualdade entre as partes da figura) o princípio da igualização das partes é violado. Do ponto de vista semiótico, essas variações explicitam dificuldades com representações figurais discretas (variação 3.1) e contínuas (variação 3.2).

Já as variações 3.4 (coloca o numerador no lugar do denominador) e 3.5 (transpõe regras da representação fracionária para a decimal) remetem a erros de transposição porque evidenciam dificuldades mais específicas a compreensão das regras de formação das representações fracionária e decimal. Tais dificuldades podem ser decorrentes de situações de ensino baseadas na memorização de regras para a formação das representações sem exploração das unidades de sentido que compõem cada representação.

Quanto à situação quociente, constatou-se maior frequência da variação 3.3 (não estabelece correspondência). Tal resultado era esperado, uma vez que essa variação remete a dificuldades para a compreensão das frações enquanto pertencentes ao domínio dos quocientes. Nesse sentido, evidencia-se, conforme já apontado pela literatura, que as dificuldades relativas à compreensão do conceito de divisão podem ser transpostas para os números racionais (STREEFLAND, 1991; BERH et al, 1983; NUNES, 2003, 2008). De forma mais específica, dificuldades para compreender que o dividendo pode ser maior que o divisor e a violação dos princípios invariantes relativos à igualização das partes e esgotamento do todo.

A situação medida apresenta maior frequência da variação 3.6 (relaciona partes). Tal resultado era previsto, posto que essa variação refere-se à compreensão da fração enquanto relação entre duas medidas. Vergnaud (1983) explica uma das principais dificuldades dos estudantes com o conceito de frações situa-se na compreensão de que números racionais não

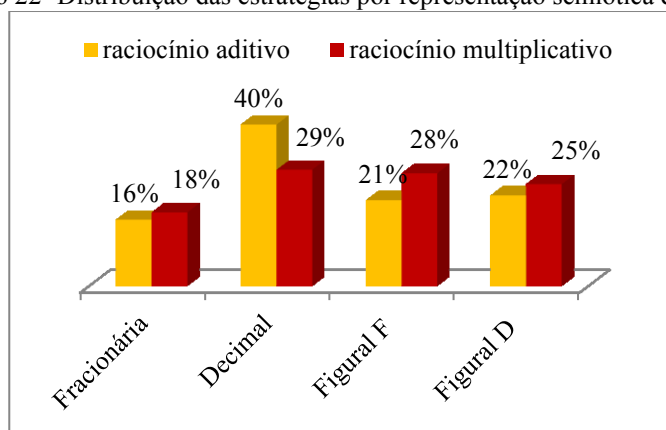
são puramente números, mas medidas e relações. Além disso, Nunes et al. (2005) encontraram evidências de que as crianças tendem a usar mais a linguagem das razões do que das frações porque esta última lhes é menos familiar e acessível em contextos cotidianos.

Em face do exposto, evidencia-se como cada situação de fração mobiliza estratégias diferentes para a conversão. Neste sentido, cabe o questionamento: será que as representações semióticas de fração também estão associadas a estratégias mais específicas de conversão que conduzem ao erro? A resposta a essa indagação será apresentada no tópico a seguir.

4.3.5 As estratégias que conduzem ao erro e as representações semióticas de fração

Os resultados relativos às relações entre as estratégias de conversão de fração e as representações semióticas de fração, evidenciam que a representação decimal apresenta maior percentual de estratégias associadas ao raciocínio aditivo (40%). Já as representações fracionárias e figurais (F e D) apresentam percentuais semelhantes para as estratégias que estão associadas ao raciocínio aditivo e multiplicativo, conforme o ilustrado no Gráfico 22. O teste Qui-quadrado de independência não detectou associação entre as estratégias de conversão e as representações semióticas de fração.

Gráfico 22- Distribuição das estratégias por representação semiótica de fração



Fonte: A autora (2018)

Embora estatisticamente não tenha sido encontrada associação entre as estratégias de conversão e as representações semióticas, considera-se pertinente verificar como cada variação se configura quanto as estratégias do Tipo 3. A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos quanto a frequência das variações desta estratégia nas representações semióticas de fração.

Tabela 6- Distribuição das estratégias por representação semiótica de fração

Variações	Fracionária	Decimal	Figural F	Figural D
3.1 Altera a unidade inicial	-	-	21%	26%
3.2 Ignora a igualdade entre as partes da figura	-	-	28%	5%
3.3 Não estabelece correspondência	11%	1%	22%	39%
3.4 Coloca o numerador no lugar do denominador	44%	-	-	-
3.5 Transpõe regras da representação fracionária para a decimal	-	50%	-	-
3.6. Relaciona partes	15%	8%	2%	1%

Fonte: a autora (2018)

Como pode ser visualizado, cada variação da Estratégia Tipo 3 está relacionada a representações específicas. Para a representação fracionária verifica-se a maior presença das variações 3.4 (coloca o numerador no lugar do denominador) e 3.6 (relaciona partes). A variação 3.4 diz respeito exatamente ao emprego de teoremas em ação inapropriados para a representação fracionária como, por exemplo, as falas explicitadas pelos participantes de número 45 e 18, respectivamente: “o número maior sempre fica em cima [numerador]” e “o número de cima [numerador] precisa ser maior porque será dividido pelo número de baixo”. Já a variação 3.6, por sua vez, embora não seja exclusiva à representação fracionária, também evidencia teoremas em ação relativos à formação desta representação como se pode perceber na fala do participante número 8 “o de cima [numerador] soma com o de baixo [denominador] pra dar o todo”. Neste sentido, as crenças equivocadas dos estudantes sobre a formação da representação, vinculando-se a teoremas de ação relativos a aprendizagens semióticas.

Para a representação decimal verifica-se frequência predominante da variação 3.5 (transpõe regras da representação fracionária para decimal). Esta variação diz respeito teoremas de ação construídos sobre a representação fracionária que são transpostos para a representação decimal. Como exemplo deste tipo de raciocínio explicita-se a fala participante número 1 “essa [representação decimal] é igual a essa [representação fracionária] muda só a vírgula”. Assim, mais uma vez esta variação remete a aprendizagens semióticas construídas pelos estudantes. Neste sentido, infere-se que os erros cometidos tanto para a variação 3.4 quanto a 3.6, remetem à transposição de unidades de sentido e evidenciam que nas representações discursivas as crenças construídas convenções das representações (regras, propriedades e características) influenciam as estratégias de conversão utilizadas.

Para a representação figural F observa-se maior frequência das variações 3.1 (altera a unidade inicial) e 3.2 (ignora a igualdade entre as partes da figura). Já para a representação figural D a variação 3.3 (não estabelece correspondência) aparece com maior frequência. Ao observar as variações predominantes nas representações figurais é possível perceber que todas

elas remetem à violação de princípios invariantes do conceito de fração. Conforme já discutido, as representações figurais (não discursivas) não possuem regras para sua elaboração. A produção de seus discursos depende da apreensão discursiva feita do enunciado (representação inicial), neste sentido há maior liberdade de interpretação e, por conseguinte, para erros de modificação.

Considera-se que ao observar as diferenças entre as variações mais frequentes nas representações discursivas (fracionária e decimal) e não discursivas (figuras) evidenciam-se que para as representações discursivas teoremas em ação construídos sobre aspectos semióticos (regras, propriedades e características semióticas) têm maior influência sobre as estratégias, ao passo que para as representações não discursivas os princípios invariantes vinculados aos esquemas de ação dos conceitos (partição, correspondência, igualdade entre as partes, dentre outros) parecem ter maior peso para a elaboração de estratégias.

Em suma, os resultados obtidos quanto às estratégias de conversão, elucidam diferentes aspectos das relações entre unidades de sentido e invariantes operatórios no processo de elaboração das representações. Constatou-se que a depender da representação a ser construída aprendizagens semióticas ou conceituais podem ter maior impacto para a elaboração das estratégias. Sobre esse aspecto D'amore, Pinilla e Iorio (2015) discutem que a aprendizagem matemática para fins avaliativos precisa ser dividida em cinco componentes: aprendizagem conceitual (noética) – relativa à identificação, uso, representação e transformação das propriedades do conceito; aprendizagem algorítmica – relativa à habilidade de dar respostas às operações, cálculos e aplicação de fórmulas ou desenho de figuras; aprendizagem estratégica – relativa à compreensão de procedimentos e estratégias que são utilizados quando se resolve um problema; aprendizagem comunicativa – relativa à capacidade de exprimir ideias matemáticas justificando, argumentando, demonstrando e representando; aprendizagem semiótica – relativa à escolha, uso, transformação e diversificação dos registros de representação semiótica vinculados a um objeto matemático.

Neste sentido, ao colocar todas estas aprendizagens em perspectiva percebe-se a conversão como um fenômeno complexo que mobiliza simultaneamente os aspectos que compõem a tríade que forma os campos conceituais: invariantes, situações e representações. Todavia, é necessário ampliar e especificar o papel que as representações, em especial, as semióticas exercem. Conforme defende Duval (2011) é preciso considerar que no domínio da matemática não há *nóesis* (apreensão conceitual) sem *semiose* (produção de representações). As evidências encontradas demonstram que cada tipo de erro associa-se de formas diferentes aos teoremas em ação que são construídos para a elaboração das estratégias. Verifica-se que

unidades de sentido das representações semióticas e invariantes operatórios conceituais integram-se e precisam ser considerados simultaneamente para compreender os aspectos cognitivos vinculados à conversão. Deste modo, percebe-se a complementaridade das elaborações teóricas de Vergnaud e Duval que, vistas de forma conjunta, permitem aprofundar a compreensão dos fenômenos relativos à aprendizagem matemática.

5 CONCLUSÕES

Este capítulo dedica-se às conclusões derivadas dos principais resultados encontrados na investigação realizada. Para isso, através de uma breve recapitulação, será rememorada a perspectiva de cunho teórico e metodológico sob a qual o estudo foi alicerçado. Em seguida, os principais resultados serão retomados considerando as perspectivas indicadas pelo quadro teórico elegido. Por último são discutidas as implicações educacionais e investigações futuras que decorrem das evidências empíricas obtidas nessa investigação.

Em primeiro lugar, considera-se pertinente destacar que este estudo foi desenvolvido com o intuito de contribuir com a área da Psicologia da Educação Matemática no que fiz respeito às possibilidades de aprendizagens das crianças e na superação de dificuldades identificadas em determinados momentos do curso do seu desenvolvimento. Isso porque o objeto analisado permite estabelecer diálogos entre a Psicologia, a Educação e a Matemática. Sobre esse aspecto, Spinillo e Lautert (2006) salientam que as contribuições entre essas áreas se tornam mais efetivas quando teorias de domínio específico são consideradas em detrimento de teorias mais gerais.

Nesse sentido, foi buscado o suporte de duas teorias que discutem o acesso ao conhecimento no domínio específico da matemática: a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Isso porque a articulação de contribuições teóricas e empíricas tem sido assinalada como necessária à construção de pesquisas em Psicologia (URIBE; LOPEZ, 2008), na medida em que o esforço para convergir ideias e contribuições é a base da perspectiva dialética. Em face ao exposto, explica-se a motivação e interesse deste estudo em articular as compreensões de dois diferentes teóricos acerca de um mesmo fenômeno, o conhecimento matemático. Ademais, Lautert, Santos e Magina (2016) afirmam que as produções destes dois teóricos são responsáveis por inúmeras investigações tanto Brasil como no exterior, no campo da Psicologia da Educação Matemática, nas últimas décadas.

Embora Duval e Vergnaud respaldem-se em perspectivas epistemológicas diferentes, considera-se que as contribuições derivadas de suas teorias são complementares. Com essa compreensão, ao longo deste estudo, buscou-se evidenciar as convergências percebidas entre estes teóricos. Para tal, considerou-se necessário trazer evidências empíricas que dessem suporte a essas ideias. É nesse contexto que as representações, em especial a conversão entre representações, surge como objeto de análise, uma vez que inúmeras pesquisas no campo da Psicologia da Educação Matemática sinalizam a necessidade de que se desenvolva a

habilidade de lidar com as representações de forma flexível, transitando entre elas (LESH et al., 1987; KAPUT, 1987; AINSWORTH, 2006; DUVAL, 2006; VERGNAUD, 2009; BOSSÉ et al. 2011; DREHER et al., 2014).

Para investigar esse fenômeno foi o escolhido o domínio das frações, explorado por uma vasta literatura, mas fonte de diversos obstáculos para seu ensino e aprendizagem, principalmente devido às múltiplas representações e situações que o abrangem. Assim, para explorar a conversão de frações foram construídos dois instrumentos relativos às competências de identificar e efetuar conversões de frações, Tarefas 1 e 2, respectivamente. A Tarefa 1 requeria que fossem apresentadas conversões errôneas como opções de resposta, para que o estudante identificasse a correta. Para tanto, foi necessário articular aspectos das teorias de Vergnaud e Duval para elaborar os tipos de erro a serem apresentados. Buscou-se, portanto, integrar dois elementos considerados como nucleares para a análise do processo de conversão entre representações: os invariantes operatórios e as unidades de sentido.

A partir destas categorias teóricas, em conjunto com outras contribuições da literatura, foram elaborados dois tipos de erros relativos à conversão: a modificação e a transposição dos atributos relevantes das representações. É necessário esclarecer, todavia, que não se considera que esta classificação possa ser generalizada para todos os tipos de conversão entre representações, pois ela se restringe aos registros de representação semiótica abordados nesta investigação: simbólicos (fracionário e decimal) e figurais. Sobretudo, considerando as conversões que partem das representações discursivas em língua materna para as discursivas (fracionárias e decimais) ou não discursivas (figurais).

Outro aspecto a ser ressaltado quanto à classificação dos tipos de erro é que outros estudos como os de Bossé (2012, 2011a, 2011b) comentam que as contribuições da literatura quanto aos erros de conversão normalmente enfatizam aspectos centrados no estudante ou na representação de modo isolado. Concebe-se que à análise dos tipos de erro integrando as noções de invariantes operatórios e unidades de sentidos, permite articular, simultaneamente, aspectos psicológicos mobilizados que dizem respeito a forma como o estudante está concebendo a situação proposta e às características das representações semióticas, aspectos referentes ao objeto matemático e as suas formas de representação. Tendo em vista que os invariantes operatórios são responsáveis pela organização dos esquemas do indivíduo a partir de seus sistemas de interpretação subjacentes à ação (CASTORINA, 1988; VERGNAUD, 1996). As unidades de sentido, por sua vez, remetem aos elementos significantes de uma representação que podem ser subdivididos em entidades menores cuja significação é atribuída pelo sujeito (BRANDT; MORETTI, 2005).

De modo complementar, cabe retomar que Duval (2012a) concebe como indissociável a relação entre *noesis* (apreensão conceitual) e *semiose* (apreensão ou produção de uma representação semiótica). Esta compreensão pode ser relacionada à percepção de Vergnaud (1996) quanto à impossibilidade de esgotar a apreensão conceitual na noção de esquema, uma vez que é essencial considerar o papel exercido pela linguagem, pelas propriedades fundamentais que caracterizam um conceito e os sistemas simbólicos no processo de conceitualização. Os argumentos de ambos os autores, relacionam-se, de modo análogo, à compreensão de Vigotsky (2007, p. 407) ao afirmar que “o pensamento não se exprime na palavra, mas nela se realiza”, sendo, portanto, indissociável a relação entre pensamento e linguagem. De modo análogo, concebe-se como inseparável o elo entre representação semiótica e apreensão conceitual em matemática.

Com efeito, apesar de suas limitações no que concerne à generalização, esta classificação dos tipos de erros se mostrou coerente, na medida em que os dados empíricos observados evidenciaram a presença de seus elementos nas construções e explicações fornecidas pelos estudantes. Para garantir possibilidades de generalizações seria necessária a construção e validação de instrumentos contemplando estes tipos de erros com amostras maiores, em diferentes níveis de ensino e abordando diferentes representações e sentidos de conversão, assinalando-se assim uma possibilidade para investigações futuras a partir desta construção.

Conforme já indicado por YinQi e Siegler (2013), os conhecimentos de cunho conceitual têm sido consistentemente apontados na literatura relativa à psicologia como a fonte para compreender habilidades matemáticas e conhecimentos procedimentais. Embora investigações como as de Ball (1993), Batista e Spinillo (2008), Brizuela (2004, 2016), Dreher et al. (2014), Lesh, Post e Behr (1987), Lautert e Spinillo (1999, 2011), Moro (2005), Brandt e Moretti (2013), dentre outras, apontem para as relações entre compreensão conceitual e competências relacionadas a linguagem simbólica em matemática, ainda são escassos os estudos que contemplam esta perspectiva. Nessa direção Duval (2013) afirma que muitas abordagens dentro da Psicologia Cognitiva não tratam o conhecimento matemático como um conhecimento de linguagem, mas “apenas” de conceitos considerados como “mentais”, isto é, assemióticos. No entanto, considera-se que isso não verdadeiro em uma ampla visão destes estudos, a teoria dos campos conceituais proposta por Vergnaud (1990), por exemplo, embora centrada em conceitos e situações, assume que é fundamental considerar o papel da linguagem, dos sistemas simbólicos, na identificação e delimitação dos domínios pertinentes ao conhecimento matemático.

Frente ao exposto, a posição assumida neste estudo é de que as contribuições de ambos os teóricos (Duval e Vergnaud) são complementares entre si. Isto é, não existe uma relação hierárquica entre conceitos e representações, pois concebe-se que é *no* e *pelo* ato de representar que se pode acessar o conhecimento matemático. É nesta perspectiva que foram elaborados objetivos da presente investigação. Assim, buscou-se examinar o efeito dos sentidos, situações e representações semióticas em relação às competências de conversão de frações. Portanto, quatro variáveis foram escolhidas para investigar a conversão entre frações.

A primeira delas refere-se às competências de conversão de fração (identificar e efetuar) enquanto aspectos que mobilizam diferentes elementos de uma perspectiva conceitual (características do conceito) e metodológica (características da situação proposta). O segundo, diz respeito aos sentidos nos quais às conversões podem ser realizados. Tal aspecto justifica-se pela compreensão de que as conversões podem assumir diferentes níveis de complexidade frente aos sentidos nos quais são realizadas (exemplo: de A para B ou de B para A). O terceiro fator trata dos diferentes significados e compreensões atribuídas à fração conforme o tipo de situação em que ela se insere. O quarto e último consiste nos registros de representação semiótica de fração que carregam especificidades próprias e permitem o acesso a diferentes aspectos do conceito.

Além de examinar os efeitos destas variáveis de um ponto de vista quantitativo, buscou-se também analisar os tipos de erros cometidos pelos estudantes ao converter frações, bem como a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes cometem esses erros. Em fase ao exposto os resultados mais relevantes obtidos neste estudo serão apresentados em três blocos, buscando responder aos objetivos desta pesquisa.

Será que os sentidos, situações e representações afetam o desempenho dos estudantes ao utilizar diferentes competências para conversão de frações?

A principal conclusão derivada deste estudo é que os sentidos, situações e representações semióticas de fração produzem diferentes efeitos nas competências de identificar e efetuar conversões. As evidências que reforçam tal constatação foram obtidas por meio da análise do desempenho dos estudantes. Estudos anteriores como o de Dreher et al. (2014) postulam que existe uma relação hierárquica que considera a competência de identificar sempre mais fácil que a de efetuar conversões. Todavia, os resultados evidenciados pelo presente estudo demonstram que o nível de dificuldade destas competências varia em função de variáveis como o sentido, situação e representação semiótica na qual a conversão se

realiza. Ao olhar para o desempenho (número de acertos) dos estudantes investigados percebe-se que as dificuldades ao identificar conversões podem ser iguais ou menores às de efetuar conversões a depender dos aspectos considerados nas questões.

De início, ao olhar para as competências de conversão de modo geral, os dados do desempenho revelam que identificar conversões é mais fácil para os estudantes do que efetuar conversões. Todavia, quando se observa o sentido discursivo para discursivo de conversão, verifica-se que ao identificar conversões os estudantes podem apresentar desempenhos semelhantes ao de efetuar, evidenciando que o grau de dificuldade é o mesmo, para ambas competências, nesse sentido de conversão. Todavia, ao examinar o sentido discursivo para não discursivo percebe-se que, para os estudantes, foi mais fácil identificar do que efetuar conversões. Com efeito, estes resultados indicam que os sentidos de conversão produzem efeitos sobre as competências. Por que isso acontece? Os dois suportes teóricos deste estudo fornecem possíveis explicações. Na perspectiva de Duval (2013), pode-se afirmar que esses resultados traduzem o fenômeno de não-congruência na passagem de um tipo de representação para outro, em outras palavras, pode haver sucesso em um sentido, mas fracasso para outro. Nesse ínterim é possível compreender que a congruência entre representações (níveis de complexidade no processo de transformação) tem relação tanto com os aspectos semióticos das representações (discursiva ou não discursiva) como com os invariantes que são mobilizados. Pois, segundo Vergnaud (2017), os invariantes operatórios relacionam as formas explícitas do conhecimento com seus predicados, ou seja, a atividade de conceitualização e suas formas simbólicas.

O efeito dos sentidos sobre as competências de conversão se confirma mais uma vez quando se observa cada competência separadamente. Para a competência de identificar conversões foi constatado que o sentido discursivo para não discursivo, de fato, foi mais fácil para os estudantes do que o sentido discursivo para discursivo. Já para a competência de efetuar conversões, o nível de dificuldade foi o mesmo nos dois sentidos de conversão. Como explicar esse resultado olhando para as características dos tipos de representação?

A teorização de Duval (2011) esclarece as diferenças, do ponto de vista cognitivo entre esses tipos representações. Para este autor, as dificuldades relativas às representações não discursivas têm a ver com os dados do enunciado que as antecedem. Isso porque existem duas formas de reconhecer formas ou unidades figurais. A primeira é global, que se relaciona a uma visualização geral dos contornos, considerando a dimensão da figura (sem dimensão, unidimensional, bidimensional, tridimensional). A segunda é mais específica e remete ao que autor chama de desconstrução dimensional das formas, isto é, a segmentação da figura em

partes menores que permitam sair do contorno geral para seja possível a visualização de suas propriedades. Essas duas formas de reconhecimento são direcionadas pelo enunciado das questões que informam quais e como as propriedades precisam ser apreendidas. As representações discursivas, por sua vez, repousam nos discursos que elas próprias produzem, requerendo interpretação adequada de seus aspectos semióticos (números, sequências, símbolos). Para essas últimas o enunciado também é importante, mas elas possuem regras e convenções que não dependem do enunciado para existir. Logo, existe uma dissimetria entre dois sentidos de conversão em função dos tipos de interpretação que eles requerem para a organização de seus conteúdos.

Além dos sentidos de conversão, as situações de fração também evidenciaram influenciar de diferentes modos as competências de conversão de fração. De modo geral, todas as situações foram mais fáceis para os estudantes ao identificar conversões na comparação com a competência de efetuar conversões. Esse dado revela que não há interferência das situações ao se considerar simultaneamente as duas competências. Mas quando se observam, separadamente, as competências apresentam padrões de resultados diferentes em cada situação. Também são evidenciadas distinções quando se consideram as situações em relação a cada sentido de conversão nas competências de identificar e efetuar conversões. Para discutir esses resultados, cada uma das situações será abordada de modo individual.

Primeiramente, quanto à *situação parte todo*, o padrão do desempenho dos estudantes permite fazer algumas inferências em relação as competências e sentidos:

- Quanto às competências de conversão – os estudantes apresentam melhores desempenhos para esta situação tanto quando identificam como quando efetuam conversões. Entretanto, para ambas as competências, a situação parte-todo compartilha do mesmo nível de dificuldade da situação medida e demonstra ser mais fácil que a situação quociente.
- Quanto aos sentidos – a situação parte-todo obteve melhores resultados, nas duas competências, ao se considerar o sentido discursivo para discursivo. Entretanto, seu desempenho foi afetado pelo sentido discursivo para não discursivo, na competência de identificar conversões, demonstrando ser mais difícil em relação ao sentido discursivo para discursivo.

Para Charalambous e Pitta-patanzi (2007) e Nunes et al. (2007) a situação parte-todo é a única que possibilita o uso da contagem e comparação de seus elementos de forma discretizada (considerando que é possível contar as partes que compõem o todo e as partes “tomadas” do todo). Essa característica, somada ao fato de que esta é a situação abordada de modo mais frequente no contexto escolar e em materiais didáticos, pode justificar a maior facilidade que os alunos apresentam para lidar com ela (MERLINI, 2005; MAGINA; MALASPINA, 2013). Entretanto é interessante notar que os estudantes utilizam com maior facilidade as representações simbólicas do que as figurais quando precisam efetuar as conversões. Esta evidência pode ter relação com o fato de que para identificar conversões, em representações figurais, o procedimento de dupla contagem (contar o total de partes e as partes pintadas) pode ser uma estratégia que leve ao acerto (NUNES; BRYANT, 1997). Todavia, para efetuar conversões, é necessário considerar outros elementos como a relação entre número de cortes e números de partes, a igualdade entre as partes, dentre outros, para que a representação seja elaborada de modo adequado. Importante ressaltar que a dupla contagem também pode ser utilizada para efetuar conversões, mas como já comentado, apreensão discursiva dos significados de uma figura parece ser mais difícil para esta competência.

No que diz respeito à *situação medida* foram observados os seguintes aspectos quanto às competências e os sentidos:

- Quanto às competências: a situação medida não apresenta diferença das demais situações (parte-todo e quociente) quanto ao nível de complexidade, tratando-se da competência de identificar conversões, mas revela ser mais fácil do que a situação quociente quando os estudantes efetuam conversões
- Quanto aos sentidos: ao identificar conversões, os diferentes sentidos não afetam o desempenho da situação medida, mas ao efetuar conversões no sentido discursivo para não discursivo a situação medida revela ser mais difícil que a situação quociente.

A situação medida requer a compreensão das frações enquanto quantidades intensivas (duas unidades diferentes que podem ser reunidas em um todo) que expressam relações proporcionais entre duas medidas. Para construir a ideia de fração como medida os estudantes precisam compreendê-las como números relacionais. Os estudantes não demonstram dificuldades expressivas com esta situação, uma vez que ela não diferiu da situação parte todo

e foi mais fácil que a situação quociente no sentido discursivo para não discursivo da competência de efetuar conversões. Considera-se que a explicação de tal resultado pode ter relação com o fato de que as questões de medida apresentadas nas tarefas (T1 e T2) referiam-se a litros de tinta de cores diferentes a serem integradas em uma mistura. Estudos como o de Bezerra (2001), Merlini (2005) e Santana (2012) evidenciam que tanto crianças como adultos possuem dificuldades para compreender que as partes da mistura podem ser reunidas em um todo (total da mistura). Por este motivo, optou por deixar explícito no enunciado das questões das tarefas, o total de litros que corresponde ao todo. Logo, foi explicitado o princípio da invariância: a soma das frações constituídas é igual ao todo inicial.

Spinillo, Silva e Lautert (2016) verificaram, em relação a problemas de divisão e produto cartesiano, que os estudantes apresentam melhores desempenhos quando os invariantes são explicitados. Neste estudo, não houve controle quanto à explicitação dos invariantes em todos os enunciados, pois a intenção era igualar o nível de dificuldades entre as situações. Entretanto considera-se que este elemento pode justificar que os resultados relativos à parte-todo e medida tenham sido relativamente semelhantes quanto ao desempenho, uma vez que a explicitação do todo pode ter levado os estudantes a considerar apenas quantidade de partes (frações) de uma unidade (todo). Esse aspecto merece aprofundamento em estudo empíricos posteriores.

Ressalta-se ainda que os estudantes, ao efetuar conversões, apresentaram maior dificuldade para lidar com o sentido discursivo para não discursivo na situação medida. Enquanto para identificar conversões é possível tratar a situação medida de modo semelhante a situação parte-todo já que esta competência requer a escolha de uma figura que melhor traduza sua interpretação da situação, para efetuar conversões é necessário uma maior gestão semiótica das unidades de sentido reconhecidas e do funcionamento do registros semiótico em que se deseja representar (VERGNAUD, 1987; DUVAL, 2006; D'AMORE; PINILLO; IORIO, 2015). A situação parte-todo apresenta unidades de sentido que dizem respeito a um todo segmentado e suas partes, já a situação medida explicita unidades de sentido relativas a duas partes distintas e um todo. Neste sentido, enquanto as representações discursivas permitem desprendimento maior do contexto porque seus significados são convencionados, ao elaborar figuras é preciso relacionar propriedades lógicas considerando as características físicas da figura elaborada (BRIZUELA, 2016).

Quanto à *situação quociente*, destacam-se os seguintes resultados em relação às competências e os sentidos:

- Quanto às competências: quociente foi situação a mais difícil, de modo geral. Ao considerar as competências de conversão verifica-se que ao identificar conversões essa situação foi mais difícil que a situação parte-todo, mas não diferiu da situação medida. Já em relação a competência de efetuar conversões, verificou-se, de fato, o pior desempenho tanto em relação a situação parte-todo como medida.
- Quanto aos sentidos: para a competência de identificar conversões a situação quociente foi mais difícil no sentido discursivo para não discursivo em relação à situação parte-todo. Para efetuar conversões, esta situação teve pior desempenho no sentido discursivo para não discursivo em comparação à situação medida.

A situação quociente evoca a compreensão da fração como o quociente de duas medidas, relacionando-se aos esquemas de partição (quando há divisão de apenas um todo) e de correspondência (quando há mais de um todo a ser dividido). Nunes (2008) afirma que as crianças costumam ter mais acesso a experiências, com situações quociente, que envolvem o uso do esquema de partição e acabam com dificuldades para compreender e utilizar o esquema de correspondência. Considera-se que este aspecto pode justificar as dificuldades evidenciadas pelos estudantes com as situações quociente. Ressalta-se ainda que as representações não discursivas também foram mais difíceis para essa situação tanto ao identificar quanto ao efetuar conversões. Estes dados revelam, de modo geral, a dificuldade dos estudantes para converter esta situação para a representação figural.

Em uma visão ampla, as nuances percebidas quanto aos resultados relativos as situações de fração são evidências empíricas de que cada situação mobiliza diferentes aspectos cognitivos dos conceitos. Com efeito, Vergnaud (1994) também enfatiza que a aquisição do conhecimento é modelada pelas situações dominadas e o conhecimento tem, portanto, características locais. Além disso, este autor salienta que as situações não são puramente matemáticas, uma vez que experiências cotidianas dos estudantes com os conceitos também interferem em suas compreensões. Fato esse também já evidenciado por Carraher, Carraher e Schliemann (2010).

Contudo, Vergnaud (1994) também destaca que para analisar as situações não se deve minimizar o papel da linguagem e símbolos no desenvolvimento e funcionamento do pensamento. Sendo necessário, portanto, classificar e analisar a variedade de significantes

simbólicos e linguísticos que podem ser usados para quando da comunicação e pensamento. Este autor, ainda comenta que uma tarefa essencial para pesquisadores empíricos e teóricos é entender porque representações simbólicas particulares podem ser úteis, sob que condições e quando pode ser substituída de forma mais frutífera por uma mais abstrata e geral. A esse respeito compreende-se que a teoria de Duval (2009) oferece suporte para o que é denominado por Vergnaud (1994) como tarefa dos pesquisadores.

Com essa compreensão, foram analisadas também as representações semióticas de fração, bem como seus efeitos sobre o desempenho dos estudantes nas competências de identificar e efetuar conversões. Cabe salientar que os resultados relativos às representações vão de encontro às evidências obtidas quanto aos sentidos de conversão, uma vez que, neste estudo, o sentido discursivo para discursivo foi constituído pelas representações fracionárias e decimais e o sentido discursivo para não discursivo por representações figurais (antecedidas por frações ou decimais). Logo, o resultado das representações será discutido considerando o sentido aos quais se associam primeiramente para depois observar aspectos mais gerais das representações.

Para as *representações discursivas fracionárias e decimais* foram percebidos os seguintes aspectos:

- Quanto às competências: as representações fracionárias foram mais fáceis para os estudantes que as representações decimais na comparação entre as competências. Este resultado se repete ao olhar separadamente para as competências, logo tanto ao efetuar como ao identificar conversões a representação fracionária segue sendo mais fácil que a decimal.
- Quanto às situações: as representações fracionárias também foram mais fáceis que as decimais em todas as situações na comparação entre as competências de identificar e efetuar conversões. Contudo ao olhar, em particular, para a competência de identificar conversões a representação fracionária foi mais fácil na situação parte-todo quando comparada à situação medida, mas não diferiu da situação quociente. As situações medida e quociente também apresentaram dificuldades semelhantes para os estudantes quanto a representação fracionária. Já a representação decimal foi igualmente difícil em todas as situações. No que diz respeito a competência de efetuar conversões, a representação fracionária foi mais fácil que a decimal em todas as situações.

O que é possível concluir desses resultados? Verifica-se, de modo geral, que os estudantes tem maior facilidade para lidar com as representações fracionárias e uma extrema dificuldade com a representação decimal. Na competência de identificar conversões, percebe-se ainda que lidar com a representação fracionária na situação quociente é mais fácil que na situação medida. Porque isso acontece? YuQui e Siegler (2013) discutem que as crianças não conseguem perceber nem as representações fracionárias nem as decimais como números que possuem magnitudes. Logo, não é feita uma integração entre as diversas representações dos números racionais que permitam generalizar este conceito. Mas porque a fração é mais fácil na situação quociente? Considera-se que uma explicação possível seja relativa ao fato de que nesta situação a fração expressa termos considerados em uma divisão (quantidade de tortas e amigos, por exemplo), tornando-se possível organizar as quantidades do enunciado em um numerador e denominador mesmo que não haja compreensão daquela magnitude numérica. Já na situação medida, a representação fracionária só será adequadamente formada se houver compreensão de como as medidas consideradas se relacionam entre si.

Já ao efetuar conversões as representações fracionárias seguiram mais fáceis que as decimais, independentemente da situação considerada. Chama à atenção o quão difícil foi para os estudantes lidarem com as representações decimais de forma geral. Outros estudos como os de Doreen et al. (2015) também encontraram evidências de que as representações decimais são mais difíceis para as crianças. Brousseau (2007) explica que a compreensão decimal expressa de modo mais transparente a magnitude numérica do número racional, mas elas requerem pensar sobre o sistema de numeração decimal a partir de uma nova lógica, incluindo quantidades menores que um inteiro. Logo, a vírgula, o zero e as casas decimais que sucedem ou antecedem a vírgula precisam ser compreendidas, mas os estudantes evidenciaram não interpretar adequadamente o papel de cada um desses elementos nessa representação semiótica.

Para as *representações não discursivas*, isto é, figuras que foram antecedidas por frações (figural f) ou decimais (figural d), encontraram-se as seguintes evidências quanto as competências e as situações:

- Quanto às competências: quando as representações figurais foram antecedidas tanto por frações como por decimais, os estudantes tiveram melhor desempenho ao identificar do que ao efetuar conversões, na comparação entre as competências. Ao olhar separadamente para as competências não houve diferença quanto nível de dificuldade entre as representações figurais sejam elas antecedidas por frações ou decimais.

- Quanto às situações: em todas as situações melhores desempenhos foram encontrados quando as figuras foram antecedidas por frações do que por decimais, tanto ao identificar como efetuar conversões. Ao olhar de modo particular para a competência de identificar conversões, as representações figurais antecedidas por frações foram mais fáceis nas situações medida do que na situação quociente e com dificuldades iguais entre parte-todo com quociente e medida. As figuras antecedidas por decimais foram mais fáceis na situação parte-todo em comparação a quociente e com dificuldades iguais entre medida com parte-todo e quociente. Para a competência de efetuar conversões na representação figural F os estudantes foram melhores na situação medida em comparação a situação quociente. Já para a representação figural D os estudantes foram melhores na situação parte-todo em relação a quociente.

Esses resultados de modo geral, confirmam a maior facilidade com as representações não discursivas para a competência de identificar conversões de frações. As diferenças que são encontradas entre as figuras antecedidas por frações e decimais em função das situações põem em relevo as dificuldades dos estudantes com a situação quociente, quase sempre responsável pelas diferenças encontradas com as demais situações.

Ao olhar para as *representações fracionárias, decimais e figurais*, conjuntamente, percebe-se que as representações figurais são mais fáceis ao identificar conversões do que para efetuar. No entanto, ao olhar para a competência de identificar, separadamente, não há diferenças significativas entre as dificuldades que figuras e frações apresentam para os estudantes. Já ao efetuar conversões, as representações figurais são mais difíceis que as fracionárias. A representação decimal foi mais difícil em relação tanto as representações fracionárias como as decimais, independentemente da competência.

O que mais chama a atenção nesses resultados mais uma vez é a dificuldades dos estudantes com a representação decimal. Essa representação é a que melhor expressa a ideia da fração enquanto medidas menores que um inteiro. Para Brousseau et. al (2004) e Charalambous e Pitta-Patanzi (2007) é a partir da ideia de medida que se evidencia a compreensão da fração enquanto número. Contudo, conforme já reportado por Kerslake (1986), as crianças têm resistência para aceitar que frações são números, uma vez que não podem ser contadas em uma sequência. Considera-se que este aspecto possa explicar as dificuldades evidenciadas quanto às representações decimais. Outro aspecto que chama a

atenção é fato de frações serem mais fáceis ou difíceis que as figuras a depender da competência mobilizada. Isso reforça mais uma vez que as representações não podem ser avaliadas de modo isolado, uma vez que a atividade de conversão põe em relevo diferentes aspectos cognitivos em função do sentido, situações e representação, conforme evidenciam os dados.

Quais os tipos de erros cometidos pelos alunos quando solicitados a utilizar diferentes competências para a conversão de frações? Quais as relações entre os tipos de erros de conversão cometidos pelos estudantes com os sentidos, situações e representações de fração?

Com relação aos tipos erro, também se conclui que há efeito das competências, sentidos, situações e representações semióticas nos tipos de erro cometidos. De modo geral, verificou-se que ao identificar conversões os estudantes a cometerem mais erros de transposição (Erro II) enquanto que ao efetuar não há diferenças significativas entre os tipos de erro cometidos, ou seja, os estudantes produzem, de modo similar, os erros de modificação (Erro I) e transposição (Erro II).

Quando se observaram os efeitos dos tipos de erro em cada sentido de conversão para os tipos de erro produzidos em cada competência, verificou-se que para o sentido discursivo para discursivo, tanto ao identificar como ao efetuar conversões, os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II). Enquanto que no sentido discursivo para não discursivo, ao identificar conversões prevalecem os erros de transposição (Erro II) e ao efetuar conversões são cometidos mais erros de modificação (Erro I).

Ao olhar separadamente cada competência em relação aos sentidos de conversão, percebeu-se que para identificar conversões de fração não há efeito do sentido de conversão sobre o tipo de erro, pois os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II) nos dois sentidos. Já para efetuar conversões, cada sentido de conversão produz diferentes efeitos. No sentido discursivo para discursivo os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II) e para sentido discursivo para não discursivo erros de modificação (Erro I).

Logo, conclui-se que o sentido de conversão é um fator que influencia nos erros cometidos. A competência de identificar conversões não difere quanto ao tipo de erro em cada sentido, acredita-se que isso pode ser devido ao fato da tarefa relativa a essa competência apresentar opções para o estudante possibilitando que o julgamento elaborado para encontrar a resposta correta parta da transposição das unidades de sentido do enunciado das questões.

Estudos como os de Clement (1982) também reporta, quanto às representações algébricas, a influência das unidades de sentido presentes no enunciado para a estruturação da resposta.

Quanto à competência de efetuar conversões, nota-se tendência para erros distintos em cada sentido de conversão. O Erro (II) aparece de modo mais frequente no sentido discursivo para discursivo, portanto, vinculado às representações fracionárias e decimais. Logo, os estudantes lidam com representações que já possuem regras de funcionamento convencionadas. Considera-se que o erro de transposição aparece de modo mais frequente com representações discursivas porque, o estudante transpõe as unidades de sentido por meio de teoremas em ação já construídos. Ao contrário do que acontece com as representações não discursivas (figuras geométricas, desenhos, ícones) que não possuem sempre regras convencionais para sua formação já que a representação pode ser construída pelo estudante de diversas formas. Como há liberdade maior e ausência de regras pré-determinadas, o erro de modificação se torna mais frequente, na medida em que a representação elaborada precisa evidenciar visualmente a articulação entre as unidades de sentido a partir de teoremas em ação construídos. Nesse processo o estudante acaba por realizar modificações por dificuldades com essa articulação entre as unidades de sentido que são retiradas de uma representação discursiva para serem levadas a uma representação não discursiva, partindo de teoremas em ação empregados de modo inadequado.

No que diz respeito às situações de fração, observou-se influências distintas nos tipos de erro para cada competência de conversão. Na situação parte-todo os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II) tanto ao identificar como ao efetuar conversões. Já na situação quociente ao identificar conversões os estudantes produzem mais erros de transposição (Erro II), mas ao efetuar conversões predominam os de modificação (Erro I). Por fim, na situação medida, ao identificar conversões são produzidos mais erros de transposição (Erro II), porém ao efetuar conversões os dois tipos de erro são cometidos de modo semelhante.

Logo, para a competência de identificar conversões, constata-se que as situações parte-todo e quociente que têm tendências semelhantes já que ambas demonstram predomínio dos erros de transposição (Erro II). Já a situação medida apresenta tendências similares para os dois tipos de erro. Enquanto que ao efetuar conversões verifica-se que na situação parte-todo os estudantes cometem mais erros de transposição (Erro II), na situação quociente erros de modificação (Erro I) e a situação medida probabilidade igual para os dois tipos de erro.

Ao colocar em perspectiva as competências de identificar e efetuar conversões, considerando-se as relações entre situação e tipo de erro, configura-se o seguinte cenário:

1. *Parte-todo*: está associada aos erros de transposição tanto ao identificar quanto ao efetuar conversões.
2. *Quociente*: está associada a erros de transposição quando os estudantes identificam conversões e a erros de modificação quando os estudantes efetuam conversões.
3. *Medida*: está associada a erros de transposição para a competência de identificar conversões, mas tem probabilidade quase igual para os dois tipos de erro quando se considera a competência de efetuar conversões.

A situação *parte-todo*, conforme já comentado, é a mais abordada em situações de ensino no contexto escolar e nos materiais didáticos (MERLINI, 2005; MALASPINA; MAGINA, 2013). Logo, é a mais familiar levando os estudantes realizarem as conversões a partir de estratégias já construídas para lidar com essa situação. Acredita-se que quanto maior for familiaridade do estudante uma situação para o estudante maior será sua tendência a cometer erros de transposição porque, ao lidar com contextos familiares, é mais provável que os estudantes busquem adaptar unidades de sentido a esquemas já construídos do que modificar ou construir novos esquemas (VERGNAUD, 2017). Além disso, estratégias já reportadas pela literatura como a dupla contagem (NUNES; BRYANT, 1997) e memorização das posições do numerador e denominador (DOREEN, 2015), por exemplo, demonstram a tendência maior à transposição em situações *parte-todo*. Todavia, considera-se que há necessidade de que se realizem outras investigações quanto a esses aspectos com uma amostra maior, para que outras evidências empíricas possam validar essa hipótese.

Quanto à situação *quociente*, verifica-se mudança do tipo de erro ao se considerar competências diferentes. Ao identificar conversões há mais erros de transposição, pois como discutido, como já são dadas opções de escolha ao estudante, ele tende a buscar a representação que evidencie as unidades de sentido reconhecidas. Já ao efetuar conversões há mais modificações. Considera-se que uma explicação para isto seja relativa ao fato desse significado remeter a ideia de fração como quociente que, por sua vez, é interpretada pelos estudantes como uma operação entre quantidades (MERLINI, 2005; SANTANA, 2012). Portanto, ao elaborar representações para essa situação os estudantes buscam evidenciar a resposta da operação realizada tratando as unidades de sentido como magnitudes absolutas. Conforme já relatado por Spinillo e Lautert (1999) e Moro (2005) quando crianças tentam representar transformações entre os números tendem a evidenciar o resultado da transformação sem considerar o processo.

Em relação à situação *medida*, ao identificar conversões há maior presença do erro de transposição, mas ao efetuar conversões há possibilidades similares de que os dois tipos de erro sejam cometidos. As situações medida apresentam duas unidades de sentido relativas às partes a serem consideradas e ao todo que é formado pela junção das partes. Logo, essa situação apresenta unidades de sentido que evocam a necessidade de “juntar partes para formar o todo e depois relacionar parte e todo”. Este aspecto provoca dificuldades para a conversão, uma vez que os estudantes não compreendem quais unidades de sentido precisam ser mobilizadas para a representação final. Assim, acabam transpondo as unidades de sentido que lhes parecem mais adequadas. Como já discutido por Correa e Spinillo (2004), bem como por Magina et al (2005), as crianças tendem a preferir o uso de representações parte-parte (razão) do que parte-todo (fração) porque a linguagem das razões parece sugerir aos estudantes um esquema de raciocínio que lhes é mais familiar.

No que diz respeito às representações semióticas, constatou-se que tanto para identificar como para efetuar conversões em representações fracionárias, os dois tipos de erro são cometidos de modo semelhante. Na representação decimal, em ambas as competências de conversão erros de transposição (Erro II) são mais frequentes. Já a representação Figural F (antecedida por fração), para a competência de identificar conversões, evidencia mais erros de transposição (Erro II) e, para a competência de efetuar conversões, tendências semelhantes para os dois tipos de erro. Por último, na representação Figural D (antecedida por decimais) os estudantes cometem mais erros transposição (Erro II) ao identificar conversões e mais erros de modificação (Erro I) ao efetuar conversões.

Ao olhar em separado para a competência de identificar conversões, percebe-se que nas representações decimal e figural F os estudantes cometem mais erros de transposição, enquanto a representação fracionária está associada de modo similar aos dois tipos de erro (modificação e transposição). Já ao efetuar conversões não há associação entre representação e tipo de erro, excetuando-se a comparação entre a representação decimal e figural D, mas em ambas predominam erros de transposição (Erro I), mas a frequência é maior na representação decimal.

Qual a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes quando cometem erros na conversão de frações? Como os diferentes sentidos, situações e representações de frações afetam as estratégias de conversão dos estudantes?

Contatou-se que a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes ao cometerem erros de conversão é relativa a aspectos semióticos e conceituais, mobilizados de modo simultâneo. Isto porque para à análise das estratégias foi necessário observar os esquemas de ação utilizados, bem como os invariantes operatórios mobilizados. Compreende-se atividade de conversão requer a compreensão, uso e mobilização de invariantes durante sua realização que precisam articular-se de modo simultâneo à escolha, formação, uso e transformação adequada de um registro representação semiótica de um objeto que se pretende representar.

Com essa compreensão foram identificados três tipos de estratégias: Tipo 1 – estratégias incompreensíveis ou sem relação com o enunciado da questão; Tipo 2 – estratégias associadas ao raciocínio aditivo e; Tipo 3 – estratégias associadas ao raciocínio multiplicativo. De modo geral há predominância das estratégias associadas ao raciocínio multiplicativo em relação aos demais tipos. Esse mesmo resultado se repete ao olhar tanto para os sentidos, quanto para as situações como para as representações semióticas de fração. Isto é, independentemente da variável considerada o alicerce para as estratégias dos estudantes foi o campo conceitual multiplicativo. Porém, dentro de cada tipo de estratégias foram identificadas variações relacionadas aos teoremas em ação mobilizados para cada estratégia. Para as estratégias associadas às estruturas multiplicativas, utilizada de forma predominante pelos estudantes, seis variações foram observadas: *altera a unidade inicial; ignora a igualdade entre as partes da figura; não estabelece correspondência; coloca o numerador no lugar do denominador; transpõe regras da representação fracionária para a decimal; relaciona partes.*

Ao olhar para as variações da Estratégia Tipo 3, verificou-se que a frequências das variações permite associá-las de forma diferente aos sentidos, situações e representações de fração. Para os sentidos de conversão verificou-se que o sentido discursivo para discursivo apresentava maior frequência de três variações: *coloca o numerador no lugar do denominador; transpõe regras da representação fracionária para a representação decimal; relaciona partes.* No sentido discursivo para não discursivo predominaram outras três variações: *altera a unidade inicial; ignora a igualdade entre as partes da figura; não estabelece correspondência.*

Portanto, quanto aos sentidos de conversão, infere-se que o sentido discursivo para discursivo induz a erros relacionados à compreensão dos registros de representação semiótica ao passo que o sentido discursivo para não discursivo que remetem a erros relativos a invariantes que precisam ser respeitados para a construção de figuras adequadas. Cabe salientar que para ambos os sentidos percebem-se dificuldades com invariantes conceituais,

mas acredita-se no sentido discursivo para discursivo há um peso maior para às hipóteses dos estudantes sobre a construção das representações já que existem representações convencionadas que o estudante precisa conhecer e utilizar adequadamente. Em contraste, o sentido discursivo para não discursivo requer acessar uma gama maior de invariantes operatórios, uma vez por não haver convenções é necessário optar por uma possibilidade de representação, dentre várias disponíveis nos esquemas já construídos.

A observação das situações também revela associação com variações específicas. Para a situação parte-todo foram quatro variações: *altera a unidade inicial; ignora a igualdade entre as partes da figura; coloca o numerador no lugar do denominador; transpõe regras da representação fracionária para a decimal*. Para situação quociente apenas a variação *não estabelece correspondência*. Por fim, para a situação medida apenas a variação *relaciona partes*.

Quanto às situações de fração, é notável a diferença entre os aspectos que cada uma delas mobiliza no que se refere variações da estratégia do Tipo 3. As variações que se associam à situação parte-todo evidenciam dificuldades dos estudantes em lidar com as regras dos registros de representação fracionário e decimal e com os invariantes a serem considerados para as representações figurais. A situação medida explicita associação com uma variação que se vincula ao raciocínio proporcional, mas relativo a outro conceito das estruturas multiplicativas, a razão. Já a situação quociente relacionou-se variações que remetem a dificuldades com a escolha dos esquemas de ação adequados. Portanto, a representação por si só não explica a forma como sujeito apreende, pois existe interferência do tipo de situação. Tal resultado evidencia, novamente, a relação indissociável entre apreensão conceitual (*noesis*) e apreensão ou produção de uma representação (*semiosis*), somando-se a essa compreensão a necessidade de considerar as situações nas quais se produzem as representações.

Com relação às representações semióticas observaram-se para a representação fracionária duas variações: *coloca o numerador no lugar do denominador; relaciona partes*. Para a representação decimal apenas a variação *transpõe regras da representação fracionária para decimal*. Quanto às representações figurais o tipo de representação que a antecedia demonstrou influenciar na variação utilizada pelo estudante. Quando as figuras foram antecedidas por frações duas variações foram identificadas: *alterna a unidade inicial; ignora a igualdade entre as partes da figura*. Já quando as figuras eram antecedidas por demais observou associação com a variação *não estabelece correspondência*.

No que diz respeito as representações semióticas, de modo similar ao que se encontrou quanto aos sentidos de conversão, observa-se que quando as representações são discursivas (frações e decimais), as variações tem maior influência de aprendizagens semióticas. Ao passo que quando as representações são não discursivas (figurais) há peso maior da compreensão dos princípios invariantes. Estes aspectos parecem ter relação com os aspectos discutidos por Nunes (1997) quanto as representações extensas e compactas. Do ponto de vista psicológico, as representações figurais parecem relacionar-se as representações extensas enquanto as representações simbólicas evocam aspectos relacionados às representações compactas. As evidências empíricas de Nunes (1997) demonstram que as crianças preferem usar representações extensas do que compactas, uma vez que esta última requer produzir interpretações que ampliam a compreensão conceitual. Entretanto, percebeu-se que em função do sentido de conversão as dificuldades entre os tipos de representação se modificam. Assim, evidencia-se que as representações não podem ser consideradas de modo isolado, pois o acesso e conversão entre uma variedade de representações é fundamental para a efetiva compreensão de conceitos matemáticos.

Em síntese, os resultados fornecem um conjunto de dados empíricos que dão sustentabilidade a questões teóricas propostas por Vergnaud e Duval, bem como contribuem para esclarecer e problematizar sobre a conversão de frações e os limites e as possibilidades do raciocínio dos estudantes que embora tenham tido experiências com esse conceito no contexto escolar, demonstram dificuldades com diversos aspectos desse conceito.

Implicações educacionais e pesquisas futuras

Tomados de forma conjunta, os resultados dessa investigação apresentam implicações educacionais relevantes. Uma primeira implicação refere-se ao fato de que os limites e as dificuldades experimentadas pelos estudantes na conversão de fração impactam na escolha de representações e na elaboração de atividades e na sequência de ensino relativas ao domínio desse conceito.

Uma segunda implicação remete a necessidade de se pensar em formas de ensino que promovam reflexões sobre as competências, os sentidos, as situações a serem consideradas no domínio das frações e as múltiplas formas de representar que são igualmente cruciais para a compreensão e apreensão do conceito de fração.

Uma terceira implicação é a importância de olhar para o erro do aluno enquanto elemento constitutivo do seu processo de aprendizagem. De modo geral, o desempenho dos

estudantes deste estudo foi baixo, indicando dificuldades com a conversão de fração. A análise realizada dos tipos de erros e estratégias permitiu conhecer nuances sobre a forma de raciocinar dos estudantes sobre estes aspectos que envolve a conversão de fração. Nesse sentido é imperativo que se desenvolvam situações avaliativas que permitam contemplar e examinar em detalhes os raciocínios mobilizados pelos estudantes quer sejam esses corretos ou não, como afirmam Spinillo et al. (2014).

No que se refere as pesquisas futuras uma questão relevante seria investigar o desempenho das competências de conversão de fração envolvendo, a situação operador. Isso porque como mencionado essa situação não foi explorada nessa investigação devido ao *design* experimental. No entanto, acredita-se que pesquisas futuras precisam ser elaboradas no sentido contribuir para a compreensão sobre o impacto dessa situação em relação as competências, sentidos, situações e representações semióticas. Investigações dessa natureza poderiam fornecer mais elementos para a compreensão da conversão no domínio das frações

Outra questão pertinente seria a investigação de outros tipos de erros para além dos explorados no presente estudo. Uma possibilidade para tal pesquisa seria analisar os erros dos estudantes ao efetuar conversões e elaborar questões para averiguar a competência de identificar conversões a partir de erros já produzidos pelos estudantes. Essa estratégia pode permitir ampliar a quantidade de tipos de erro de conversão explorados e permitir compreender com maior detalhamento este aspecto.

Por fim, outra possibilidade seria replicar este estudo com uma amostra maior de participantes em um estudo longitudinal. Tal pesquisa permitiria avaliar a progressão da compreensão dos estudantes quanto aos sentidos, situações e representações de fração em diferentes idades e anos escolares.

Todas as investigações a serem realizadas poderiam trazer dados empíricos que reforçariam os resultados apresentados e discutidos nessa investigação ou que chamam atenção para os limites e possibilidades do *design* construído para esta investigação. Contudo, independente das pesquisas que poderão ser implementadas futuramente, as conclusões advindas deste estudo reforçam a tese defendida de que as teorias de Duval e Vergnaud podem ser consideradas como complementares, permitindo ampliar o olhar sobre fenômenos vinculados à aprendizagem matemática.

Por um lado, Duval evidencia as representações semióticas como responsáveis pelo acesso ao conhecimento matemático, ressaltando a transformação entre representações em registros diferentes como elemento central para possibilitar à compreensão. Para este autor é

essencial compreender a matemática como linguagem, sobretudo ao se considerar que o acesso ao objeto matemático só acontece por meio das representações semióticas. Portanto, à aquisição matemática só é possível ao se dominar e coordenar múltiplas representações semióticas de um mesmo conceito. Por outro lado, Vergnaud destaca os esquemas e as situações como essenciais ao processo de conceitualização, compreendo as representações como elementos essenciais do ponto de vista metacognitivo. Nessa perspectiva teórica, assume-se que as situações mobilizam diferentes aspectos cognitivos de um conceito, permitindo acessar diferentes aspectos invariantes. De modo similar, cada representação semiótica cobre apenas uma pequena parte de um conteúdo, sendo necessárias várias representações para um acesso mais efetivo. Portanto, tanto as situações como as representações permitem acessar aspectos invariantes distintos, logo é fundamental ampliar a gama de experiências com estes aspectos em contexto de ensino, confirmando a complementaridade dessas duas perspectivas teóricas.

REFERÊNCIAS

- AINSWORTH, S. DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. **Learning and Instruction**, v. 16, n. 3, p. 183-198, 2016.
- BALL, D. L. Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In: CARPENTER, T. O. Carpenter, T.P.; FENNEMA, E.; RONBERG, T. (Orgs.). **Rational numbers: An integration of research**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1993.
- BATISTA, A. M. S; SPINILLO, A. G. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas . **Estudos de Psicologia**, v. 13, n. 1, p. 13-21, 2008.
- POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. Interpretations of rational number concepts. **Mathematics for Grades 5-9, 1982 NCTM Yearbook**, p. 59-73, 1982.
- BERH, M.; LESH, R.; SILVER, E. Rational Number Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983.
- BOUISSAC, P. Converging Parallels: Semiotics and Psychology in Evolutionary Perspective. **Theory and Psychology**, v. 8, n. 6, p. 731-753, 1998.
- BOSSÉ, M J. ; ADU-GYAMFI, K; CHEETHAM, M. R.. Assessing the Difficulty of Mathematical Translations : Synthesizing the Literature and Novel Findings. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 6, n. 3, p. 113-132, 12 Dec. 2011.
Disponível em: <<http://www.iejme.com/makale/296>>. Acesso em: 23 jun. 2014.
- BOSSÉ, M. J; ADU-GYAMFI, K; CHANDLER, K. Students' Differentiated Translation Processes. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, p. 28, Mar. 2014. Disponível em: <<http://www.cimt.org.uk/journal/bosse5.pdf>>. Acesso em: 16 mai. 2015.
- BOSSÉ, M. J; ADU-GYAMFI, K; STIFF, L. V. Lost in Translation: Examining Translation Errors Associated With Mathematical Representations. **Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 33, n. 6, p. 113-133, 2011.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: 2007.
- BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N.; WARFIELD, V. 'Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurements', **Journal of Mathematical Behavior**, v. 23, 2004.
- BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N.; WARFIELD, V. Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2: From rationals to decimals. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 26, n. 4, p. 281-300, 2007.
- CADWELL, J. H. Communicating about fractions with pattern blocks. **Teaching children mathematics**. V. 1, 1995.

CASÁVOLA, H. M. CASTORINA, J. A. FERNÁNDEZ, S., LENZI, A. O papel construtivo do erro na aquisição de conhecimentos. IN: CASTORINA, José Antônio. **Psicologia Genética**: aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. trad. De José Cláudio de Almeida Abreu. – Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. L. A compreensão de frações como magnitude relativa. **Psicologia Teoria e Pesquisa**, Brasília, v. 8, n. 1, 1992. P. 67-78.

CARRAHER, T. N. **O método clínico**: usando os exames de Piaget. Cortez: São Paulo, 1995.

CASE, R. Conceptual development in the child and in the field: a personal view of the piagetian legacy. In: SCHILNICK, E.; NELSON, K. **Conceptual development**: Piaget's legacy. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1999.

CASTORINA, J. A. **Psicologia Genética**: aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. trad. De José Cláudio de Almeida Abreu. – Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

CHARALAMBOUS, Y. C.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing a theoretical model to study students understanding of fractions. **Educational Studies in Mathematics**. N. 64, 2007. P. 293-316.

COLOMBO, J. A; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem matemática. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n.2, 2007. P. 181-203.

CRAMER, K.; MONSON, D.; WHITNEY, S. B.; LEAVITT, S.; WYBERG, T. Dividing fractions and problem solving. *Mathematics Teaching in the middle school*. V. 15, n.6, 2010.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. **A Psicologia da Educação Matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

DEWOLF, M.; VOSNIADOU, S. The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. **Learning and instruction**. 2014.

DOOREN, W. V. Unraveling the gap between natural and rational numbers. **Learning and Instruction**, v. 37, p. 1-4, 2015.

DREHER, A.; KUNTZE, S.; WINKEL, K. Empirical study of competence structure model regarding conversions of representations – the case of fractions. In: **38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 38, 2014, Vancouver. Proceedings, Vancouver: PME, vol 2, p. 425-432.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação).

_____, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. V. 61, 2006. P. 103-131.

_____, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): fascículo I – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar – os registros de representação semiótica. [Tradução Marlene Alves Dias]. São Paulo: PROEM, 2011.

Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Tradução Mércles Thadeu Moretti . Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a. Tradução de: Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.

_____. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revista Eletrônica de Educação matemática**. Tradução Mércles Thadeu Moretti, v. 07, n. 1, p. 97-117, 2012b. Tradução de: Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.

_____. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática. **Práxis Educativa**. Tradução Luciana da Costa Oliveira. Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, 2012c. Tradução de: Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques?. Disponível em: <<http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>>. Acesso em: 16 mar. 2014.

_____, L. R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012. Tradução Mércles Thadeu Moretti.

ECHEVERRIA, R. **Ontología del lenguaje**. Santiago de Chile: J. C. Saéz editor, 2005.

FAULKENBERRY, T. J.; PIERCE, B. H. Mental representations in fractions comparisons: holistic versus component based strategies. **Experimental Psychology**. V. 58, n. 6, 2011.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática [en linea]**, v. 19, 2006. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221866005>>. Acesso em: 12 fev. 2014.

FREITAS, J. L. M. ; MOURÃO, C. C.. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica . **Revista Paraense de Educação Matemática**. Campos Mourão, v. 2, n. 3, jul-dez 2013.

GAGATSIS, A; SHIAKALLI, M. Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving . **Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology** . UK, v. 24, n. 5, p. 645-657, Out. 2014.

GINSBURG, H. P. **Entering the child's mind**: the clinical interview in psychologic research and practice. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

HOOFF, J. F et al. Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners . **Learning and Individual Differences**, v. 61, 2018.

HOOFF, J. V; VERSCHAFFEL, L; DOREEN, W. V. Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p.39-56, 2015.

HURST, M.; CORDES, S. Rational number comparison across notation: fractions, decimals and whole numbers. **Journal of Experimental Psychology**: Humam perception and performance. V. 42, n. 2, 2016. P. 281-293.

KALLAI, A. Y.; TZELGOV, J. Decimals are not processed automaticly, not even as being smaller than one. **Journal of Experimental Psychology**: learning, memory and cognition. V.40, n.4, 2014.

KERSLAKE, D. **Fractions**: children's strategies and errors. Londres: NFR-NELSON, 1986.

KIERAN, T.; MASON, R.; PIRIE, S. The growth of mathematical understanding in a construtivist enviromment, paper presented at the CSSE Meeting, 1992.

LAUTERT, S. L; SPINILLO, A. G. Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem formal para outras formas de representação. **Temas em Psicologia**, v. 7, n. 1, 1999.

LESH, R.; POST, T.; BERH, M. Representations and Translations among representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In: JANVIER, C. (org.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987

LIMA, M. F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidades. In: CARRAHER, T. N. (org.). Aprender Pensando: contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.1

LORTIE-FORGUES, H.; SIEGLER, R. S; TING, J. Why Is Learning Fraction and Decimal Arithmetic So Difficult?. **Developmental Review**, v. 38, p. 201-211, Dec 2015.

MACK, N. K. Confounding whole-number and fractions concepts when building in informal knowledge. **Journal of Research in Mathematics Education**. Virginia, n. 26, 1995. p. 422-441.

MACK, N. K. Learning rational numbers with understanding: building on informal knowledge. In: CARPENTER, T.P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, A. (orgs.). **Rational numbers**: an integration of research. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, 1993.

MAGINA, S. MALASPINA, M. C. O. A fração nos anos iniciais: uma perspectiva para seu ensino. In: SMOLE, K. S.; MUNIZ, C. A. (orgs.) *A matemática em sala de aula: reflexes e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental*. Porto Alegre: Penso, 2013.

MARANHÃO, M. C. S. A.; IGLIORI, S. B. C. Registros de Representação e Números Racionais. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação).

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

MOREIRA, P. C. DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MORO, M. L. Notações na iniciação matemática: a repetição de grandezas na razis da multiplicação. In: MORO, M. L.; SOARES, M. T.C. (Orgs.). **Desenhos, palavras e números**: as marcas matemáticas na escola. Curitiba: Editora da UFPR, 2005. – (Pesquisa: n.108)

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of rational numbers: a new model and an experimenal curriculum. **Journal for research in Mathematics Education**. V. 30, 1999.

MOYER-PACKENHAM, P.; ULMER, L.; ANDERSON, K. L. Examining pictorial models and virtual manipulatives for third-grade fraction instruction. *Journal of interactive online learing*. V. 11, n. 3, 2012.

NÓBREGA-TERRIEN, S. M. ; TERRIEN, Jacques. Os trabalhos científicos e o estado da questão. **Estudos em avaliação educacional**. Fundação Carlos Chagas. 2004.v.15. n. 30.p.5-16.

NUNES, T. System of signs and mathematical reasoning. In: NUNES, T., BRYANT, P. (Orgs.). **Learning and teaching mathematics**: an international perspective. East Sussex, UK: Psychology Press, 1997.

_____, T. Criança pode aprender frações. E gosta! In: GROSSI, E. P. (org.). **Porque ainda há quem não aprende?** A teoria. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

NUNES, T. A természetes számok megértése [Understanding rational numbers]. /Magyar Pedagógia, v. 108, n. 1, p. 5-27, 2008.

NUNES; T. BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. M.; BRYANT, P. **Educação Matemática 1**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P.; PRETZLIK, U.; BELL, D.; EVANS, D.; WADE, J. La compréhension des fraction chez les enfants. In: MERRI, M (Org.). **Activité humaine et conceptualisation**. Toulouse: Press Universitaire du Mirail, 2007.

PANOURA, A.; GAGATSIS, A.; DELYIANNI, E.; ELIA, I. The structure of students beliefs about the use of representations an their performance on the learning of fractions. **International Journal of Educational Psychology**. V.29, n.6, 2009.

PANTZIARA, M. PHILIPPOU, G. Levels of students' "conception" of fractions. **Educational Studies in Mathematics**. v. 79, n. 1, p. 61-83, 2012.

PITKETHLY, A.; HUNTING, R. A review of recent research in the area of initial fraction concepts. **Educational Studies in Mathematics**. n. 30, 1996, p. 5-38.

RAU, M. A.; ALEVEN, V.; RUMMEL, N. Intelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanations prompts support learning of fractions. In: DIMITROVA, V.; MIZOGUCHI, R.; BOULAY, B. (Orgs.). **Proceedings of the 14th Internacional Conference on Artificial Intelligence in Education**. Amsterdam, the Netherlands: IOS, 2009. P. 441-448.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica?** Brasília: Editoria Brasiliense, 1983.

SANTANA, L. E. L. **Os saberes conceituais e didáticos de pedagogos em formação inicial, acerca de fração**. Dissertação. (Mestrado Acadêmico em Educação). Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.

SAXE, G.; DIAKOW, R.; GEARHART, M. Toward curricular coherence in intergers and fractions: a study of the efficacy of a lessson sequence that uses number line as the the principal representational context. **The international jornal on Mathematics Education**. 2012.

SIEGEL, S. **Estatística Não-paramétrica**. Editora: McGraw-Hill, 1977.

Spinillo, A. G. O conceito de chance em situações de julgamento e de construção. Em M. H. Novaes & M. R. Brito (Orgs.), *Psicologia na educação: Anais do VIII – Comunicação Científica GT 09 - Processos Cognitivos e Lingüísticos na Educação Matemática 14 articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica*. Coletâneas da ANPEPP. Rio de Janeiro: Xenon Editora, 1996.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: MEIRA, L.; SPINILLO, A. (OrgS.). **Psicologia Cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem**. 1 ed. Recife: Universitária da UFPE, 2006, v. 1, p. 46-80.

SPINILLO, A. G; LAUTERT, S. L. Representar operações de divisão e representar problemas de divisão: há diferenças?. **Jornal Internacional de Estudo em Educação Matemática**, v. 4, n. 1, p. 114-131, 2011.

SPINILLO, A. G.; CRUZ, M. S. O uso de pontos de referência na resolução de adição de frações por crianças. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. V. 7, n. 2, 2014. P. 166-188.

SPINILLO, A. G. et al. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso?. **Boletim Gepem (online)**, v. 64, jan-jul 2014. Disponível em: <<http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2015.005>>. Acesso em: 12 abr. 2018.

STEFFE, L. P.; OLIVE, J. **Children's construction of the rational numbers of arithmetics**. Paper presented at the International Study group on the rational numbers of Arithmetic, University of Georgia, Athens, GA, 1993.

STREEFLAND, L. Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, Holland, n. 9, 1978. P. 51-73.

_____, L. **Fractions in realistics mathematics education: a paradigm of development research**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

_____, L. Fractions: a realistic approach. In: CARPENTER, T.P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, A. (orgs.). **Rational numbers: an integration of research**. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, 1993.

URIBE, C.E.V.; LÓPEZ, G. C. H. Elementos y modelos del desarrollo: una revision del concepto. Em: JOERNS, J. L.; PUCHE-NAVARRO, R.; IBIZA, A. R.; (Orgs). **Claves para pensar el cambio: ensayos sobre psicología del desarrollo**. Bogotá: Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias Sociales, Departamento de Psicología, CESO, Ediciones Uniandes, 2008.

VAMVAKOUISSI, X. The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. **Learning and Instruction**, v. 37, p. 50-55, 2015.

VERGNAUD, D. Multiplicative Structures. In: BERH, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. (Orgs.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York: Academic Press, 1983.

_____, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica da matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1990.

_____, G. A comprehensive theory for of representation for mathematics education. **Journal of Matematical Behavior**, v. 17, n. 2, p. 161-181, 1996.

_____, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. [tradução: Maria Lúcia Moro]. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

_____. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática . **Educar em Revista**. Curitiba, v. Especial, n. 1, p. 15-27, 2011.

VERGNAUD, G; GROSSI, E. P (Org). **Piaget e Vigotsky em Gerard Vergnaud**: teoria dos campos conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, f. 88, 2017. (Coleção Campos Conceituais).

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WANG Y.; SIEGLER, R. S. Representations of and translations between common fractions and decimal fractions. **Chinese Science Bulletin**. China, n. 58, 2013. P.4630 -4640.

ZHANG, L.; WANG, Q.; CHONGDE, L.; DING, C.; ZHOU, X. An ERP study of the processing of common and decimal fractions: how different they are. **Plus one**. N, 8. v.7, 2013.

APÊNDICE A – TERMO DE COMPROMISSO LIVRE E ESCLARECIDO



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Filosofia e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA O RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS – Resolução 466/12)

Solicitamos sua autorização para convidar o (a) seu/ sua filho (a) _____ para participar, como voluntário da pesquisa *Uma análise das conversões de frações sob a ótica de suas competências, representações e significados*. Esta pesquisa é de responsabilidade da pesquisadora Larissa Elfisia de Lima Santana, endereço: rua Leiria de Andrade, número 407, Monte Castelo, Fortaleza – CE, CEP 60.325-710, telefone para contato (85) 996658035, e-mail: larissalimasant@gmail.com. Os pais e/ou participante poderão entrar em contato com a pesquisadora por quaisquer destes endereços, inclusive para ligações a cobrar. Esta pesquisa está sob a orientação da professora doutora Síntria Labres Lautert de e-mail sintrialautert@gmail.com.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pesquisadora responsável e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde que o (a) menor faça parte do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Caso não concorde não haverá penalização nem para o (a) Sr.(a) nem para o/a voluntário/a que está sob sua responsabilidade, bem como será possível ao/a Sr. (a) retirar o consentimento a qualquer momento, também sem qualquer penalidade.

O presente estudo tem como objetivo investigar se o desempenho das competências de conversão de fração é influenciado pelos sentidos, significados e tipos de representação semiótica utilizados por estudantes de 6º ano do Ensino Fundamental. De forma específica, analisará a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes para converter frações. A pesquisa será realizada em dois momentos no primeiro momento os estudantes serão solicitados a resolver 6 problemas (aplicação individual) e, em seguida, a explicar as formas de resolução adotadas, em uma entrevista individual. O segundo momento terá os mesmos

procedimentos do primeiro (resolução de problemas e entrevista), contudo com outros 6 problemas diferentes daqueles propostos no primeiro momento. Estas atividades serão realizadas nas dependências da escola em que seu filho estuda nas datas a serem acordadas com a instituição, a serem realizadas segundo semestre de 2016 e primeiro semestre de 2017.

O risco psicológico que poderá acontecer é, por exemplo, o constrangimento, no entanto o pesquisador deverá ter cuidado para que isso não ocorra, mas caso o estudante não se sinta à vontade para continuar realizando os problemas ou de explicar atividade por ele realizada, o mesmo poderá sair da pesquisa a qualquer momento. Sabe-se que os benefícios trazidos por esse estudo serão superiores, uma vez que poderá contribuir para a compreensão das competências de conversão de fração que alunos utilizam para resolução de problemas, bem como melhorar a compreensão do estudante frente a esses conceitos.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (entrevista - protocolo contendo os esclarecimentos sobre as formas de resolução de problemas matemáticos adotadas pelos participantes no estudo), ficarão armazenados em pastas de arquivo, sob a responsabilidade de Sintria Labres Lautert, no endereço: Universidade Federal de Pernambuco - Centro de Filosofia e Ciências Humanas - CFCH – 8º andar – Núcleo de Pesquisa em Psicologia da educação Matemática – NUPPEM – Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, pelo período de mínimo 5 anos. O (a) senhor (a) não pagará nada e nem receberá nenhum pagamento para ele/ela participar desta pesquisa, pois deve ser de forma voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação dele/a na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento com transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: (Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).

Pesquisadora responsável pela pesquisa

Estudante de doutorado em Psicologia Cognitiva – UPFE

Telefone: (85) 996658035

CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO VOLUNTÁRIO

Eu, _____, CPF _____, abaixo assinado, responsável por _____, autorizo a sua participação no estudo Uma análise das conversões de frações sob a ótica de suas competências, representações e significados, como voluntário(a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pela pesquisadora sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele (a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de seu acompanhamento/ assistência/tratamento) para mim ou para o (a) menor em questão.

Local e data _____

Assinatura do (da) responsável: _____

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar.

Testemunha 1:

Nome: _____

Assinatura: _____

Testemunha 2:

Nome: _____

Assinatura: _____

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Filosofia e Ciências Humanas
Programa de Pós Graduação em Psicologia Cognitiva

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA MENORES DE 12 A 18 ANOS– Resolução 466/12)

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais] para participar como voluntário (a) da pesquisa *Uma análise das conversões de frações sob a ótica de suas competências, representações e significados*. Esta pesquisa é de responsabilidade da pesquisadora Larissa Elfisia de Lima Santana, endereço: rua Leiria de Andrade, número 407, Monte Castelo, Fortaleza – CE, CEP 60.325-710, telefone para contato (85) 996658035, e-mail: larissalimasant@gmail.com. Os pais e/ou participante poderão entrar em contato com a pesquisadora por quaisquer destes endereços, inclusive para ligações a cobrar. Esta pesquisa está sob a orientação da professora doutora Síntria Labres Lautert de e-mail sintrialautert@gmail.com.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados e concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue para que seus pais ou responsável possam guarda-la e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida e estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

O presente estudo tem como objetivo investigar se o desempenho das competências de conversão (identificar e efetuar) é influenciado pelos sentidos, significados e tipos de representação semiótica solicitados para a conversão em estudantes de 5º ano do Ensino Fundamental. De forma específica, analisará a natureza das estratégias mobilizadas pelos estudantes para converter frações. A pesquisa será realizada em dois momentos no primeiro momento os estudantes serão solicitados a resolver 16 problemas (aplicação individual) e, em seguida, a explicar as formas de resolução adotadas, em uma entrevista individual. O segundo momento terá os mesmos procedimentos do primeiro (resolução de problemas e entrevista),

contudo com outros 16 problemas diferentes daqueles propostos no primeiro momento. Estas atividades serão realizadas nas dependências da escola em que seu filho estuda nas datas a serem acordadas com a instituição, a serem realizadas segundo semestre de 2016 e primeiro semestre de 2017.

O risco psicológico que poderá acontecer é, por exemplo, o constrangimento, no entanto o pesquisador deverá ter cuidado para que isso não ocorra, mas caso o estudante não se sinta à vontade para continuar realizando os problemas ou de explicar atividade por ele realizada, o mesmo poderá sair da pesquisa a qualquer momento. Sabe-se que os benefícios trazidos por esse estudo serão superiores, uma vez que poderá contribuir para a compreensão das competências de conversão de fração que alunos utilizam para resolução de problemas, bem como melhorar a compreensão do estudante frente a esses conceitos.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (entrevista - protocolo contendo os esclarecimentos sobre as formas de resolução de problemas matemáticos adotadas pelos participantes no estudo), ficarão armazenados em pastas de arquivo, sob a responsabilidade de Sintria Labres Lautert, no endereço: Universidade Federal de Pernambuco - Centro de Filosofia e Ciências Humanas - CFCH – 8º andar – Núcleo de Pesquisa em Psicologia da educação Matemática – NUPPEM – Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, pelo período de mínimo 5 anos.

Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Em caso de dúvidas Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: (Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).

Pesquisadora responsável pela pesquisa
Estudante de doutorado em Psicologia Cognitiva – UPFE
Telefone: (85) 996658035

**ASSENTIMENTO DO (DA) MENOR DE IDADE PARA PARTICIPAR COMO
VOLUNTÁRIO**

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo *Uma análise das conversões de frações sob a ótica de suas competências, representações e significados*, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Local e data _____

Assinatura do (da) menor: _____

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar.

Testemunha 1:

Nome: _____

Assinatura: _____

Testemunha 2:

Nome: _____

Assinatura: _____

APÊNDICE C – TAREFA 1

Escola: _____

Nome: _____

Idade: _____

Ano escolar: _____

Período em que estuda:

☐ Manhã☐ Tarde

Questão 1- Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua irmã comeu 3 fatias. Qual a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias?
 Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação.

Grupo 1

Criança 1

3,7

Criança 2

0,42

Criança 3

3,0

Grupo 2

Criança 4



Criança 5



Criança 6



Grupo 3

Criança 7

$$\frac{7}{3}$$

Criança 8

$$\frac{4}{7}$$

Criança 9

$$\frac{3}{7}$$

Agora responda. Que crianças acertaram a questão? Por quê?

Questão 2 - Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas. Qual a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber?
 Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação.

Grupo 1

Criança 7

$$\frac{4}{5}$$

Criança 8

$$\frac{5}{4}$$

Criança 9

$$\frac{1}{4}$$

Grupo 2

Criança 3



Criança 4



Criança 5



Grupo 3

Criança 1

4,5

Criança 2

4,0

Criança 3

0,8

Agora responda. Que crianças acertaram a questão? Por quê?

Questão 3 - Para pintar seu quarto, Sara misturou 3 litros de tinta azul com 2 litros de tinta amarela. A mistura das duas tintas deu um total de 5 litros. Qual a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura?

Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação.

Grupo 1

Criança 1

0,4

Criança 2

2,3

Criança 3

2,5

Grupo 2

Criança 4



Criança 5



Criança 6



Grupo 3

Criança 7

$\frac{2}{5}$

Criança 8

$\frac{2}{3}$

Criança 9

$\frac{5}{2}$

Agora responda. Que crianças acertaram a questão? Por quê?

Questão 4 - Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços.
Qual quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços?
Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação.

Grupo 1

Criança 1

4,0

Criança 2

4,6

Criança 3

0,66....

Grupo 2

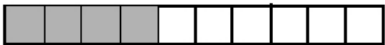
Criança 4



Criança 5



Criança 6



Grupo 3

Criança 7

$\frac{6}{4}$

Criança 8

$\frac{4}{6}$

Criança 9

$\frac{2}{4}$

Agora responda. Que crianças acertaram a questão? Por quê?

Questão 5 - Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. Qual a quantidade de torta que cada amigo irá receber?
 Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação.

Grupo 1

Criança 7

$$\frac{6}{2}$$

Criança 8

$$\frac{1}{6}$$

Criança 9

$$\frac{2}{6}$$

Grupo 2

Criança 4



Criança 5



Criança 6



Grupo 3

Criança 1

0,33 ...

Criança 2

2,6

Criança 3

6,2

Agora responda. Que crianças acertaram a questão? Por quê?

Questão 6 - Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. Qual a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta?

Veja abaixo as representações que algumas crianças fizeram para responder a essa situação.

Grupo 1

Criança 1

5,0

Criança 2

5,8

Criança 3

0,62

Grupo 2

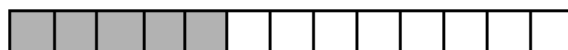
Criança 4



Criança 5



Criança 6



Grupo 3

Criança 7

$\frac{5}{8}$

Criança 8

$\frac{5}{3}$

Criança 9

$\frac{8}{5}$

Agora responda. Que crianças acertaram a questão? Por quê?

APÊNDICE D – TAREFA 2

Escola: _____

Nome: _____

Idade: _____

Ano escolar: _____

Período em que estuda:

() *Manhã*

() *Tarde*

Problema 1F- Carla fez um bolo e dividiu em 7 fatias iguais. Sua **irmã** comeu 3 fatias. **Escreva a fração** que representa a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias.

Questão 1FP - Agora **faça um desenho** que represente a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias.

Questão 1FR - **Marque na reta** a parte que representa a quantidade de bolo que a irmã de Carla comeu em relação ao total de fatias.

Questão 2D - ~~Lana tem 4 barras de doces. Ela vai dividir igualmente entre suas 5 amigas.~~ **Escreva o número decimal** que representa a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber.

Questão 2DP - Agora **faça um desenho** que represente a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber.

Questão 2DR - **Marque na reta** a parte que representa a quantidade de barra de doce que cada amiga irá receber



Questão 3F- Para pintar seu quarto, Sara misturou 3 litros de tinta azul com 2 litros de tinta amarela. A mistura das duas tintas deu um total de 5 litros. **Escreva a fração** que representa a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura.

Questão 3FP - Agora **faça um desenho** que represente a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura.

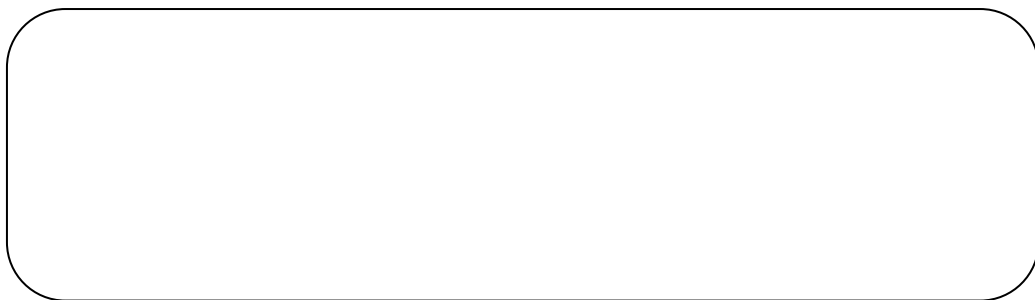
Questão 3FR - **Marque na reta** a parte que representa a quantidade de tinta amarela em relação ao total de litros da mistura.

Questão 4D - Priscila ganhou uma barra de chocolate. Ela a cortou em 6 pedaços iguais e comeu 4 pedaços. **Escreva o número decimal** que representa a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços.

Questão 4DP - Agora **faça um desenho** que represente a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços.

Questão 4DR - **Marque na reta** a parte que representa a quantidade de chocolate que Priscila comeu em relação ao total de pedaços.

Questão 5F - Marcos ganhou 2 tortas e resolveu dividir igualmente para seus 6 amigos. **Escreva a fração** que representa a quantidade de torta que cada amigo irá receber.

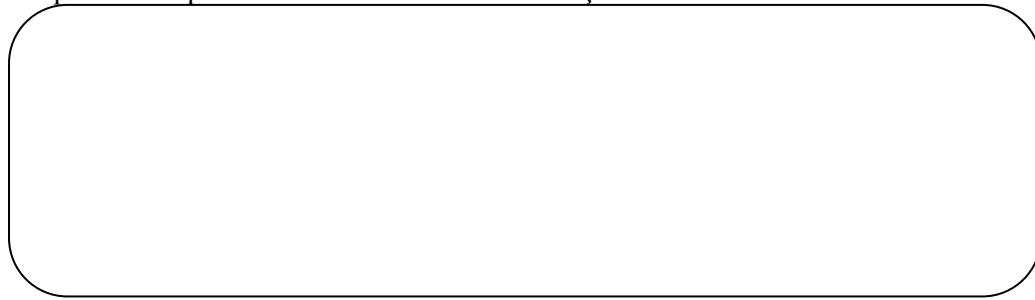


Questão 5FP - Agora **faça um desenho** que represente a quantidade de torta que cada amigo irá receber.



Questão 5FR - **Marque na reta** a parte que representa a quantidade de torta que cada amigo irá receber.

Questão 6D - Depois de pintar seu quarto, Sara resolveu pintar toda a sua casa. Para isso, ela misturou 5 latas de tinta branca com 3 latas de tinta vermelha. Assim, ela usou no total 8 latas de tinta. **Escreva o número decimal** que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.



Questão 6DP - Agora **faça um desenho** que represente a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta.



Questão 6DR - **Marque na reta** a parte que representa a quantidade de tinta branca em relação ao total de latas de tinta
