



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS e
MATEMÁTICA

DANILO MONTEIRO DE VASCONCELOS

**ENTRE PALAVRAS, QUADROS E NÚMEROS: uma análise ontossemiótica da
construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de
histórias em quadrinhos**

Caruaru

2019

DANILO MONTEIRO DE VASCONCELOS

**ENTRE PALAVRAS, QUADROS E NÚMEROS: uma análise ontossemiótica da
construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de
histórias em quadrinhos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof^o. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho

Caruaru

2019

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

V331e Vasconcelos, Danilo Monteiro de.
Entre palavras, quadros e números: uma análise ontossemiótica da construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de histórias em quadrinhos. / Danilo Monteiro de Vasconcelos. – 2019.
169 f.: Il.: 30 cm.

Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. História em quadrinhos na educação (Gravatá-PE). 2. Razão e proporção. 3. Didática (Ensino médio). 4. Matemática (Ensino médio). 5. Aprendizagem. 6. Semiótica. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-084)

DANILO MONTEIRO DE VASCONCELOS

**ENTRE PALAVRAS, QUADROS E NÚMEROS: uma análise ontossemiótica da
construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de
histórias em quadrinhos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 08/05/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof^o. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^o. Dr. José Ayrton Lira dos Anjos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^o. Dr. Ruy César Pietropaolo (Examinador Externo)
Universidade Anhanguera de São Paulo

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao Eterno, pelo dom da vida e pela Graça derramada sobre mim. Seu constante cuidado e providência me permitiram concluir este trabalho.

Agradeço à minha família, minha mãe, meu pai e minha irmã, por todo o apoio durante este tempo de estudos. À minha namorada pelo suporte e compreensão sem igual.

Aos meus amigos e companheiros de fé que sei que estiveram em oração e torcendo por este momento.

Ao meu orientador pela paciência, pelas contribuições e por me permitir olhar para o ensino de matemática de uma maneira incrível. Assim como todos os professores e professoras que contribuíram e contribuem em minha formação enquanto docente.

Aos meus alunos, amigos e colegas de trabalho, por me permitirem mergulhar neste mar profundo de significados que é a Educação.

A Stan Lee (*in memoriam*), por nos trazer um tão grande universo de possibilidades e imaginação através dos quadrinhos.

Enfim, a todos que participaram direta e indiretamente na construção desta jornada.

Muito obrigado.

“Se, porém, algum de vocês necessita de sabedoria, peça a Deus, que a todos dá com generosidade e sem reprovações, e ela lhe será concedida”. (BÍBLIA, N. T., Tiago, 1:5)

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo principal investigar as implicações do desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem na perspectiva de uma abordagem ontossemiótica do conceito de razões trigonométricas, tendo uma história em quadrinhos (HQ) como recurso didático norteador. Para tanto, realizamos uma intervenção em uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública em Gravatá-PE, tendo como base teórico-metodológica o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS. Em um primeiro momento, aplicamos um questionário diagnóstico para compreensão inicial dos conhecimentos dos estudantes sobre o conceito. Em um segundo momento, foi realizada a implementação da sequência para análise dos conflitos semióticos emergentes e validação da idoneidade didática, por meio das ferramentas teóricas subjacentes ao EOS. Dentre os resultados, identificamos que os conhecimentos iniciais dos estudantes sobre as razões trigonométricas e noções associadas evidenciam lacunas conceituais concernentes aos significados institucionais pretendidos, tais como proporcionalidade, ângulos em figuras semelhantes, razão de semelhança e identificação do triângulo retângulo em diversas representações. A análise da idoneidade didática mostrou que a sequência na abordagem com a história em quadrinhos e história da matemática proporcionou o trabalho com situações-problema, possibilitando o desenvolvimento progressivo da aprendizagem com os estudantes, sendo possível compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Consideramos a idoneidade didática como alta e apontamos para o trabalho com situações-problema e histórias em quadrinhos como uma alternativa viável no ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Histórias em quadrinhos. Razões trigonométricas. Enfoque ontossemiótico. Idoneidade didática.

ABSTRACT

This research had as main objective to investigate the implications of the development of a didactic sequence for teaching and learning from the perspective of an onto-semiotic approach to trigonometric ratios concept, having a comic book (HQ) as a guiding didactic resource. Therefore, we did an intervention in a class of 1st year of High School of a public school in Gravatá-PE, having as a theoretical-methodological approach the Onto-semiotic Approach of the Knowledge and Mathematical Instruction – EOS. At first, we applied a diagnostic questionnaire for the initial understanding of the students' knowledge about the concept. Secondly, the sequence was implemented to analyze the emerging semiotic conflicts and the didactic adequacy's validation, using the theoretical tools underlying the EOS. Among the results, we identified that students' initial knowledge about trigonometric ratios and associated notions evidences conceptual gaps regarding the intended institutional meanings, such as proportionality, angles in similar figures, likeness ratio and right triangle identification in several representations. The didactic adequacy analysis showed that the sequence in the approach to comics and history of mathematics provided the work with problem situations, enabling the progressive development of learning with students, and it was possible to understand the trigonometric ratios in the right triangle. We consider didactic adequacy as high and point to work with problem situations and comics as a viable alternative in teaching and learning mathematics.

Keywords: Comics. Trigonometric ratios. Onto-semiotic approach. Didactic adequacy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de significados pessoais e institucionais.....	20
Figura 2 – Modelo ontossemiótico do conhecimento matemático.....	22
Figura 3 – Configurações didáticas e sua dinâmica	23
Figura 4 – Componentes da Idoneidade Didática.....	26
Figura 5 – Configuração epistêmica das medianas de um triângulo.....	29
Figura 6 – Resposta do estudante E4	67
Figura 7 – Resposta do estudante E10	68
Figura 8 – Resposta do aluno E13	69
Figura 9 – Recorte do estudante E3.....	70
Figura 10 – Resposta do estudante E6	70
Figura 11 – Recorte da estudante E11	71
Figura 12 – Recorte do estudante E4.....	73
Figura 13 – Recorte da questão 5 (E9)	78
Figura 14 – Página introdutória da HQ.....	83
Figura 15 – Conceito de ângulo.	84
Figura 16 – Ângulos em aspectos históricos.	84
Figura 17 – O problema das figuras semelhantes	86
Figura 18 – Visão geométrica do teorema de Pitágoras.....	88
Figura 19 – O problema da altura da pirâmide.	88
Figura 20 – O problema do “desfluxo temporal”.	89
Figura 21 – Conceitos e razões de semelhança.....	90
Figura 22 – As razões trigonométricas.....	91
Figura 23 – O problema final.....	93
Figura 24 – Definição de ângulo abordada pela personagem Júlia	98
Figura 25 – Aspectos históricos dos ângulos	98
Figura 26 – Configuração epistêmica da sessão I.....	100
Figura 27 – Triângulos semelhantes inseridos na HQ	101
Figura 28 – Problema da altura da pirâmide	102
Figura 29 – Configuração epistêmica da sessão II.....	103
Figura 30 – Representação dos conceitos na HQ	104
Figura 31 – Configuração epistêmica da sessão III	105

Figura 32 – Configuração epistêmica da sessão IV	107
Figura 33 – Atividade “Telhado das Casas”	109
Figura 34 – Uso do transferidor	116
Figura 35 – Medição dos lados no problema da pirâmide	118
Figura 36 – Resolução do problema do triângulo retângulo pela personagem	120
Figura 37 – Mapa construído pela estudante E10	121
Figura 38 – Mapa construído pelo estudante E12	122
Figura 39 – Razões nos triângulos retângulos	123
Figura 40 – Tabela dos ângulos notáveis	124
Figura 41 – Resolução da situação 1	124
Figura 42 – Clímax da HQ.....	125
Figura 43 – Imersão na HQ em grupo	129
Figura 44 – Hexágono da Idoneidade didática do processo de instrução	134

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Pesquisas no ensino de Trigonometria	32
Quadro 2 – Pesquisas em Histórias em Quadrinhos e Educação	46
Quadro 3 – Descrição das fases da pesquisa	56
Quadro 4 – Questionário para compreensão de conhecimentos dos estudantes ...	57
Quadro 5 – Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE).....	62
Quadro 6 – Ferramenta de Análise Ecológica (FAE).....	63
Quadro 7 – Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC)	63
Quadro 8 – Ferramenta de Análise Afetiva (FAA)	64
Quadro 9 – Ferramenta de Análise Interacional (FAI)	64
Quadro 10 – Ferramenta de Análise Mediacional (FAM).....	65
Quadro 11 – Questão 1 do questionário diagnóstico.....	66
Quadro 12 – Questão 2 do questionário diagnóstico.....	68
Quadro 13 – Questão 3 do questionário diagnóstico.....	72
Quadro 14 – Questão 4 do questionário diagnóstico.....	75
Quadro 15 – Questão 5 do questionário diagnóstico.....	77
Quadro 16 – Resumo da organização da SD	82

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MARCO TEÓRICO	17
2.1	O ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA.....	17
2.2	O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DO EOS.....	23
3	ESTUDOS ANTECEDENTES	31
3.1	PESQUISAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA	31
3.2	HISTÓRIAS EM QUADRINHOS E EDUCAÇÃO	43
4	METODOLOGIA: CONSTRUINDO O CAMINHO	54
4.1	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	54
4.2	OS PARTICIPANTES	55
4.3	A ORGANIZAÇÃO DAS ETAPAS DA PESQUISA	55
4.4	INSTRUMENTOS PARA COLETA.....	56
4.5	FERRAMENTAS E TÉCNICA DE ANÁLISE	62
5	UM OLHAR SOBRE OS CONHECIMENTOS INICIAIS DOS ESTUDANTES	66
6	O CAMINHO A SER SEGUIDO: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	81
7	IDONEIDADE DIDÁTICA DA SEQUÊNCIA PARA A APRENDIZAGEM DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS	96
7.1	IDONEIDADE EPISTÊMICA.....	97
7.1.1	Visão Geral da Idoneidade Epistêmica	107
7.2	IDONEIDADE ECOLÓGICA	110
7.3	IDONEIDADE COGNITIVA.....	114
7.3.1	Visão Geral da Idoneidade Cognitiva	126
7.4	IDONEIDADE AFETIVA.....	128
7.5	IDONEIDADE INTERACIONAL.....	131
7.6	IDONEIDADE MEDIACIONAL.....	132
7.7	PERSPECTIVA GERAL DA IDONEIDADE DIDÁTICA.....	134
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	136
	REFERÊNCIAS	140
	APÊNDICE A – HQ “CALCULUS”	147

1 INTRODUÇÃO

“Destinados a aprender algo que temem e odeiam...”

As incompreensões e insatisfações dos estudantes nas aulas de Matemática parecem que não têm solução. Frases como “É chato! É difícil! Eu não consigo entender!” comumente emergem nestes ambientes de ensino e aprendizagem na Educação Básica. Os alunos se veem em um contexto no qual existe uma relação conturbada com os conteúdos a serem aprendidos, seja por falta de motivação para a aprendizagem ou até, por exemplo, pela carência de conhecimentos e habilidades necessárias à resolução de problemas (GARCIA SÁNCHEZ, 2004). Ao entrarmos em contato com a sala de aula de Matemática, isso fica bem claro: os alunos se mostram muitas vezes desinteressados, desmotivados diante das atividades, criando bloqueios que podem impedi-los de avançar na aprendizagem e na construção do conhecimento.

Nossas recentes experiências em sala de aula nos mostram que o ensino que se baseia apenas na exposição do conteúdo e na resolução de extensas listas de exercícios repetitivos não fornece bases suficientes para o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias e exigidas para o estudante hoje. Isso corrobora com o que traz Skovsmose (2007) ao apontar que do ensino fundamental ao ensino médio, os alunos são expostos a aproximadamente 10.000 exercícios, em sua maioria, baseados em comandos, que dificilmente atendem aos objetivos registrados nos programas curriculares de Matemática, no qual se encontram apontamentos ao desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade e da capacidade de resolver problemas.

Vários são os trabalhos que corroboram sobre a necessidade de se trabalhar utilizando metodologias diferenciadas no ensino de Matemática, permitindo, a partir do efetivo trabalho do professor e dos alunos, uma construção significativa do conhecimento matemático. A título de exemplo, citamos a Modelagem matemática (BASSANEZI, 2004; BIEMBENGUT, 2005), a Resolução de

Problemas (POLYA, 1977; ONUCHIC, 2011), o Ensino Baseado em Projetos¹ (NEHRING et al, 2002; BEREITER e SCARDAMALIA, 1999) e o uso de Tecnologias em Educação Matemática (BORBA e PENTEADO, 2001).

Desse modo, o ensino de Matemática não pode ser concebido de maneira estática sem levar em consideração as mudanças e os avanços que sobrevêm à sociedade, mais especificamente na Educação e nas ciências. Assim, existe uma necessidade de se discutir e articular em Educação Matemática aspectos de caráter ontológico – que diz respeito à natureza dos objetos matemáticos –, epistemológico – referente ao conhecimento matemático e suas estruturas – e instrucional – processos organizados de ensino e aprendizagem (GODINO, 2008).

O ensino de Matemática é plural em sua estrutura, contudo deve ser singular em seu objetivo: construir com os estudantes o conhecimento científico e promover a formação das habilidades necessárias para a vida em sociedade.

Buscando encontrar não uma solução, mas meios que possibilitem uma melhor relação do estudante com o conhecimento a ser construído, seja um conceito ou uma habilidade, pensamos na inserção de recursos que pudessem quebrar um pouco com as barreiras que se levantam na relação professor-aluno e na própria relação com o conhecimento, além de subsidiar o desenvolvimento conceitual dos estudantes. Refletimos, então, nas histórias em quadrinhos (HQ) como recurso didático para as aulas de Matemática.

As histórias em quadrinhos se apresentam como um meio de entretenimento na vida das crianças, dos jovens e até dos adultos. Sua linguagem distinta dos textos escritos permite ao leitor um tipo diferente de interação: algumas vezes mais leve, outras, mais dinâmicas. Tudo depende da intencionalidade do escritor, bem como do artista.

Sua inserção no meio educacional permite aos professores discutirem variados temas. Na área da linguagem, as conversações, as onomatopeias e a linguagem gestual podem ser objeto de estudo. Nas disciplinas enquadradas como *humanas*, as discussões políticas, sociais e históricas, por exemplo, podem encontrar contextos (reais ou fictícios) nos quadrinhos para iniciar debates, trazer à tona reflexões ou dar base para produções dos alunos. Como exemplos, temos as

¹ *Problem Based Learning.*

charges da personagem Mafalda (do autor Quino), que apresentam um pensamento literário com preocupações políticas e voltadas para problemas sociais.

Em disciplinas exatas e “duras” como a Física, a Química e a Matemática, isso é possível? Como nas outras, tudo depende da intencionalidade do professor ao trazer este recurso para a sala de aula, seja em propostas metodológicas ou avaliativas. Conceitos científicos frequentemente são apresentados em situações de charges, tirinhas (Garfield, Calvin e Haroldo, etc.) ou em histórias em quadrinhos de formato tradicional². Isso permite ao professor utilizar diferentes estratégias tanto para compreender o que o estudante carrega consigo de noções sobre o conteúdo, quanto para levá-lo à construção do conhecimento científico, que é o objetivo principal. Em Matemática, a apresentação de contextos que permitam trabalhar os conceitos pode surgir em situações-problema que servem como “pano de fundo” para o trabalho com os alunos.

Pensando em todos estes aspectos, surgem-nos alguns questionamentos como: É possível desenvolver um processo de ensino e aprendizagem com o uso de HQ? Quais os entraves que surgem neste processo? Como se articulam os componentes que estão presentes na construção de um conhecimento matemático por meio de uma história em quadrinhos?

Estes problemas demonstram a necessidade de o professor ter domínio e clareza dos aspectos que formam o processo de ensino, bem como ter em mãos ferramentas teórico-metodológicas para a viabilização do mesmo. No contexto da Educação Matemática, diversas são as teorias que podem possibilitar ao professor essas compreensões. Nesta pesquisa, fizemos uso do sistema teórico proposto por Godino e colaboradores (GODINO, 2003; GODINO, BATANERO, FONT, 2008), que nos apontam um olhar para a Educação Matemática, articulando-se nos aspectos de caráter ontológico, epistemológico e instrucional.

Tendo em vista estes questionamentos, buscamos pautar nosso trabalho a partir da seguinte questão norteadora: Como se desenvolvem as relações epistêmico-ecológica, instrucional e cognitivo-afetiva em um processo de ensino e aprendizagem das razões trigonométricas com o uso de histórias em quadrinhos?

² O chamado Formatinho, geralmente de tamanho 13 x 21 cm, teve muito destaque no país entre os anos de 1960 a 1990. Hoje, temos a predominância do formato americano (17 x 26 cm) e na produção de *grafic novels*, compilados e revistas mensais.

O foco nestas três perspectivas justifica-se uma vez que é necessário levar em consideração: a relação do conteúdo abordado em sala com o que se apresenta nos documentos oficiais, ou seja, os significados institucionais, assim como seu ajuste ao processo educativo em loco; os aspectos que se relacionam ao trabalho do professor e que dizem respeito ao uso e desenvolvimento de recursos didáticos; e ao papel dos estudantes neste processo (aspectos como seu engajamento e envolvimento em sua aprendizagem).

Além disso, dentro dos estudos de Godino sistematizados como Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), existe a noção de conflito semiótico. Este refere-se às disparidades que podem ocorrer dentro do processo educativo, sejam no âmbito cognitivo, na relação com os significados institucionais, entre outros. Isto será explicado mais à frente.

Procuramos compreender a relação dos estudantes com o recurso didático, como o processo de ensino se modificou a partir dele, quais os conflitos semióticos que surgiram no desenvolvimento deste sistema didático vinculado à HQ, assim como a construção do conhecimento proposto.

A seguir, apresentamos o objetivo geral e os objetivos específicos de nossa pesquisa.

Objetivo Geral

Investigar as implicações do desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem na perspectiva de uma abordagem ontossemiótica do conceito de razões trigonométricas pelo uso de histórias em quadrinhos em uma turma de 1º ano do Ensino Médio do município de Gravatá-PE.

Objetivos Específicos

- Compreender os conhecimentos iniciais dos estudantes sobre o conceito de razões trigonométricas, bem como os conhecimentos adjacentes a este conceito (semelhança de triângulos, proporcionalidade, razão de semelhança).

- Propor uma sequência didática para a construção do conceito de razões trigonométricas.
- Analisar os conflitos semióticos (epistêmicos e cognitivos) emergentes na aplicação da sequência.
- Avaliar a implementação da sequência didática por meio dos critérios de idoneidade didática.

O desejo por esta pesquisa se deu pela necessidade de se estudar a inserção de um recurso pouco usual para o ensino de Matemática, buscando compreender sua adequação ao contexto educacional proposto e refletir sobre as histórias em quadrinhos no desenvolvimento de um conceito matemático na relação com os estudantes.

A escolha pelo conteúdo de razões trigonométricas surgiu pelo fato de este não ser alvo da grande maioria das pesquisas em Educação Matemática (áreas como álgebra e funções, probabilidade e estatística tem se destacado) e pela necessidade de os estudantes compreenderem bem esta relação no triângulo, podendo avançar e generalizar para a ideia das funções trigonométricas no estudo do ciclo.

Vale salientar que sua natureza conceitual e histórica permite abordagens de situações-problema que podem ser propostas e problematizadas a partir de uma história em quadrinhos, uma vez que a história da Matemática também se apresenta como um importante recurso para potencializar a aprendizagem.

O trabalho apresenta-se com o marco teórico, no qual fazemos uma exposição a respeito da base teórica que norteia a pesquisa. Em seguida, temos o capítulo dos estudos antecedentes, que discute e apresenta pesquisas sobre nosso objeto de pesquisa. O capítulo seguinte apresenta a metodologia utilizada, seguido dos resultados, que se apresentam em três capítulos com o intuito de atender aos objetivos propostos. Por fim, apresentamos nossas considerações finais.

2 MARCO TEÓRICO

"Por baixo dessa máscara existe mais do que carne. Existe uma ideia, Sr. Creedy. E ideias são à prova de balas." – Guy Fawkes (V de Vingança)

2.1 O ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos os pressupostos e as ferramentas teóricas desenvolvidas no Enfoque Ontossemiótico proposto por Godino e colaboradores (GODINO, 2003; 2011; GODINO, BATANERO, FONT, 2008), que é a lente que escolhemos para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

O ensino de Matemática vem sendo discutido nos mais diversos aspectos: formação de professores, metodologias para o ensino, recursos didáticos, avaliação da aprendizagem. Dentro deste mar de concepções, é importante que o professor ou pesquisador enxergue as realidades que o cerca, refletindo sobre elas.

No contexto das reflexões docentes, Nogueira (2015) aponta a necessidade de o professor movimentar-se para além das realidades nas quais está imerso, apropriando-se de teorias e metodologias, que contribuam em uma verdadeira reflexão para as tomadas de decisão. Neste sentido, Godino (2003, 2011) busca desenvolver, em seus estudos, um sistema teórico de ferramentas que permitam descrever, analisar e refletir sobre as ações que se desenvolvem no ensino e na aprendizagem em Matemática, de modo que se possa obter melhorias nesses processos.

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento (EOS) apresenta, de forma geral, uma articulação entre as facetas institucionais e pessoais do conhecimento matemático, bem como pressupostos pragmáticos e realistas sobre os significados dos objetos matemáticos. É discutida a necessidade de uma aproximação e unificação das teorias que refletem sobre a instrução matemática – entendida como o ensino e a aprendizagem de conteúdos específicos no âmbito dos sistemas didáticos – em um modelo ontológico e semiótico (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Sobre isso, Godino e colaboradores afirmam que:

O modelo ontológico e semiótico da cognição proporciona critérios para identificar os estados possíveis das trajetórias epistêmica e cognitiva e o emprego da “negociação de significados” como noção chave para a gestão das trajetórias didáticas. A aprendizagem matemática é concebida como o resultado dos padrões de interação entre os distintos componentes de tais trajetórias. (p.11)

Esse modelo busca uma compreensão da diversidade de teorias que estão em desenvolvimento na Educação Matemática (Etnomatemática, Modelagem Matemática, Teoria Antropológica do Didático), permitindo o aprofundamento em um programa de investigação destas trajetórias e padrões, ou seja, “do núcleo fundamental de conceitos e métodos que deveriam cristalizar-se com o decorrer do tempo” (Idem, p.8). Além disso, os autores preocupam-se em articular as faces que estão implicadas no contexto, como por exemplo: ontológica (objetos e sua natureza), epistemológica (acesso ao conhecimento), instrucional (ensino e aprendizagem organizados nas instituições) e sociocultural.

Os autores desenvolvem uma ontologia e semiótica que estudam os processos de análise dos sistemas de signos matemáticos colocados em ação na interação didática. Eles propuseram, a partir dos modelos teóricos no contexto da Educação Matemática, a distinção de seis dimensões em um processo de instrução matemática: epistêmica, docente, discente, mediadora, cognitiva e emocional. Acrescentam a essas a dimensão ecológica, para contemplar as interações entre os processos de estudo e o contexto social como também educativo no qual estas são produzidas.

Nessa direção, Godino e seus colaboradores apresentam o EOS tendo como ponto de partida que o mesmo é

a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da matemática como **atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas**, como **linguagem simbólica** e **sistema conceitual logicamente organizado**. Tomando como noção primitiva a de situação-problemática, definem-se os conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado, com a finalidade de tornar evidente e operativo, por um lado, o triplo caráter da Matemática que mencionamos, e, por outro, a gênese pessoal e institucional do conhecimento matemático, assim como sua interdependência. (GODINO *et al*, 2008, p.11, grifo nosso)

Dessa forma, não distinguem a “matemática dos símbolos, equações e representações” de suas interpretações, dos participantes nem do contexto na qual ela está sendo apresentada, discutida ou produzida. A partir disso, vale então

desdobrar-nos sobre alguns conceitos-chave do Enfoque, facilitando sua compreensão.

O primeiro termo é o que se chama *prática matemática*. Toda expressão ou ação feita por alguém com o intuito de resolver problemas matemáticos, informar a solução, generalizá-la ou incluí-la em diferentes situações e problemas encaixa-se neste conceito. Estas práticas podem estar relacionadas a um indivíduo (idiossincrática) ou a uma instituição (pessoas envolvidas num mesmo grupo de situações problemáticas, com suas regras e modos de funcionamento).

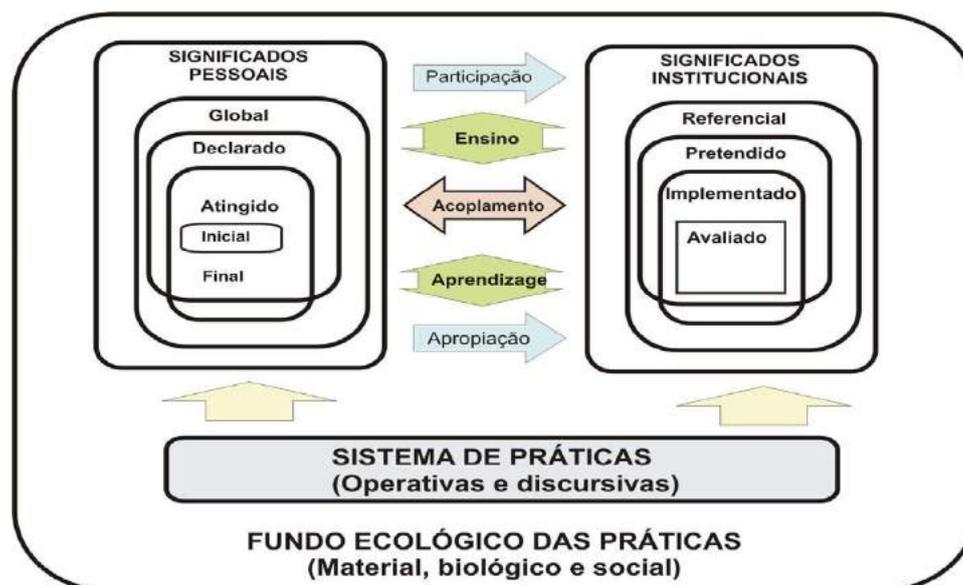
Godino e cols. (GODINO, 2003; GODINO, BATANERO, FONT, 2008) trazem a visão de *objeto matemático* como sendo qualquer entidade que intervenha de alguma forma na atividade matemática. Concerne frisar que os mesmos conectam a este conceito os significados institucionais e os pessoais.

Os significados institucionais perpassam os sistemas de práticas que podem ser utilizados pelos docentes (na implementação, avaliação da aprendizagem ou pretensões em um processo de estudo) ou que fazem parte de um significado holístico de um objeto matemático dentro de uma instituição. Já os pessoais são propostos nos tipos: global – conjunto de um sistema de práticas pessoais de um indivíduo em relação a um objeto matemático, declarado – práticas expressadas por meio de avaliações, atingido – que está em conformidade com o significado institucional.

Ao estabelecerem a relação entre os significados institucionais e os significados pessoais, os autores mostram que a aprendizagem dos estudantes se dá em sua apropriação dos significados institucionais a partir da participação na comunidade de práticas que possuem tais significados.

Existe um acoplamento entre os dois tipos de significados, no entanto, o institucional deve prevalecer, já que é o objetivo desta relação. Obviamente, aquilo que o estudante traz em seu sistema de práticas é levado em consideração. A figura 1 mostra como eles relacionam tais significados e a relação existente entre os dois campos.

Figura 1 – Tipos de significados pessoais e institucionais



Fonte: (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.13).

Após relacionar as questões referentes a esses tipos de significados, cabe-nos distinguir os objetos que emergem nestes contextos.

Como está se discutindo os objetos no campo da Educação Matemática, os objetos são assim designados: objetos matemáticos. Estes seriam os sistemas de práticas postos em ação pelas pessoas diante de uma classe de situações-problemas (GODINO, 2003). Godino e cols. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.14) apresentam seis tipos de *entidades primárias* ou *objetos matemáticos primários* (que se organizam em sistemas conceituais, teorias, etc.):

- Linguagem/elementos linguísticos em seus diversos registros;
- Situações-problemas (aplicações, exercícios etc.);
- Conceitos-definição (ex.: função, triângulo, ponto etc.);
- Proposições (enunciados, soluções para problemas);
- Procedimentos (cálculos, algoritmos);
- Argumentos (enunciados usados para legitimar ou explicar as proposições e procedimentos).

A partir disso, os autores apontam que estas entidades ampliam a discussão sobre o paradigma da tradicional distinção entre conceito e procedimento, evidenciando a importância das situações-problemas na noção de conceito. “As

situações-problemas são a origem ou razão de ser da atividade; a linguagem representa as demais entidades e serve de instrumento para a ação” (Idem). Ainda argumentam sobre a relatividade do caráter primário de uma entidade, mostrando que elas estão a mercê dos contextos e de sua relação com outras entidades (um argumento pode colocar em jogo proposições, conceitos, procedimentos).

Ao apontar a relação entre os objetos, mostram uma dependência entre eles, com correspondências entre um antecedente (expressão, representante) e um conseqüente (conteúdo), estabelecidas por um sujeito (sendo uma pessoa ou uma instituição) e uma regra de correspondência (GODINO, 2003). A isso nomeiam *função semiótica*. Sobre seu uso, afirmam que

O uso das funções semióticas permite um refinamento da análise do significado em termos de práticas. As funções semióticas correspondem a um instrumento relacional que facilita o estudo conjunto da manipulação de ostensivos matemáticos e do pensamento que a acompanha, característico das práticas matemáticas. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.15)

Os objetos matemáticos surgem, portanto, no âmbito das práticas – pessoal e/ou institucional – e da relação entre si. Estes objetos podem ser considerados segundo algumas dimensões duais (atributos contextuais). São elas:

- Pessoal/institucional – essa dualidade ocorre no que diz respeito à origem dos sistemas de práticas: se forem de um indivíduo, formam-se “objetos pessoais”. Se forem emergentes e compartilhados em uma instituição, são “objetos institucionais”.
- Ostensivo/não ostensivo – para os autores, ostensivo é todo objeto que pode ser mostrado a outro, público. Caracterizam tanto os objetos institucionais quanto pessoais como sendo não ostensivos (não perceptíveis em si mesmos). Todavia, podem ser utilizados nas práticas públicas em notações, símbolos, gráficos, por exemplo.
- Expressão/conteúdo – referente à função semiótica explicada anteriormente.
- Extensivo/intensivo – refere-se ao exemplo (caso particular) e à generalização, questões de extrema importância no conhecimento matemático.

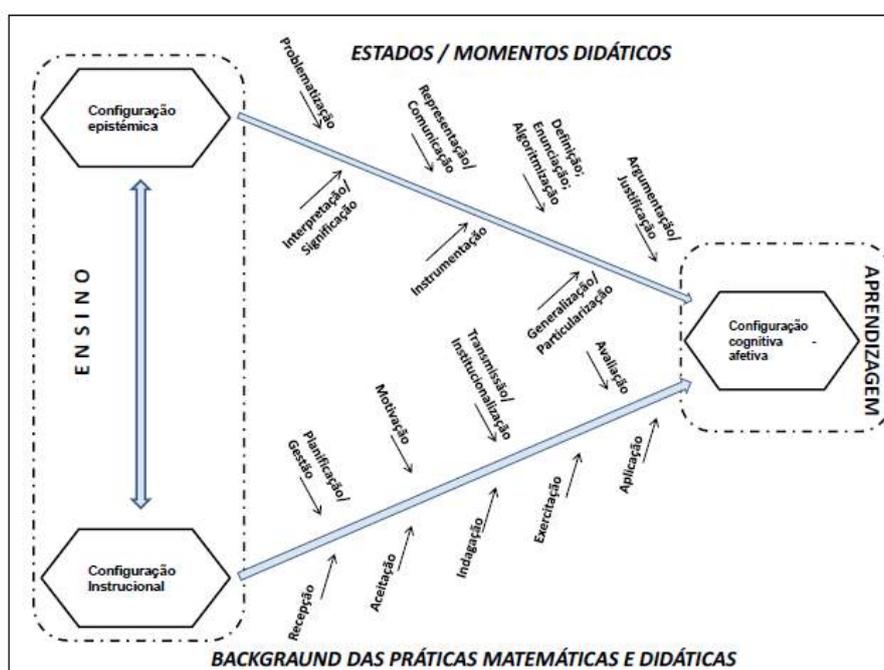
Como se pode notar, as práticas operativas e discursivas aparecem no centro e mostram que, a partir dos tipos delas, vão constituindo-se os objetos (seja pessoal, ostensivo, sistêmico, etc.). Esses objetos se relacionam a nível individual bem como institucional, promovendo uma interação dual entre si, com o único objetivo de aproximar essas dimensões.

Tendo em vista esse modelo teórico, os autores apontam que sua aplicação pode ser estendida aos processos didáticos, obviamente, alterando-se a maneira de investigação sobre os referidos objetos, que são distintos daqueles da natureza e epistemologia do conhecimento matemático.

2.2 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DO EOS

Descrevendo o ensino e a aprendizagem de um conteúdo matemático como um processo multidimensional, o EOS traz o mesmo composto por subprocessos, especificamente seis: epistêmico, docente, discente, mediacional, cognitivo e emocional. É o que os autores chamam de Teoria das Configurações Didáticas (GODINO *et al*, 2006). Na figura 3, são apresentados os momentos didáticos e como estes estão relacionados dentro das configurações.

Figura 3 – Configurações didáticas e sua dinâmica



Fonte: (CARVALHO, 2017, p.38 adaptado de GODINO, 2014, p.31)

A unidade básica para análise é a chamada *configuração didática*, que nada mais é do que o entrelaçado das interações professor-aluno a respeito de um conteúdo ou objeto matemático, utilizando materiais e recursos específicos. A essa configuração estão associadas outras.

Uma configuração didática está associada a uma *configuração epistêmica*, isto é, uma tarefa, os procedimentos requeridos para sua solução, linguagens, conceitos, proposições e argumentações, as quais podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles. Associada a uma configuração epistêmica haverá uma *configuração instrucional* constituída pela rede de objetos docentes, discentes e mediacionais colocada em jogo a propósito de um problema ou uma tarefa matemática abordada. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.21)

É imperativo dentro desse contexto realizar a descrição das aprendizagens que são construídas ao longo do processo, levando em consideração os sistemas de práticas pessoais (no caso, dos estudantes) que entram em ação na configuração epistêmica. Para as aprendizagens, a descrição é feita por meio das *configurações cognitivas* (conjunto dos objetos que emergem nesses sistemas de práticas).

Sabendo que nas interações do processo didático existem vários tipos de normas, regras sociais e de cunho sociomatemático (YACKEL; COBB, 1996), no EOS busca-se estudar sistematicamente e em uma perspectiva unificada do conhecimento e da instrução matemática as conexões múltiplas e complementaridades destas noções teóricas, reconhecendo novos tipos de normas que facilitem a análise dos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

No que diz respeito aos significados e às possíveis disparidades entre os mesmos nestas interações, temos a noção de conflitos semióticos. Um conflito semiótico é toda discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (instituições ou pessoas).

Se a disparidade se produz entre significados institucionais, falamos de conflitos semióticos do tipo epistêmico, enquanto se a disparidade se produz entre práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito, nós os designamos como conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a disparidade se produz entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos (semióticos) interacionais. (Idem, p. 23)

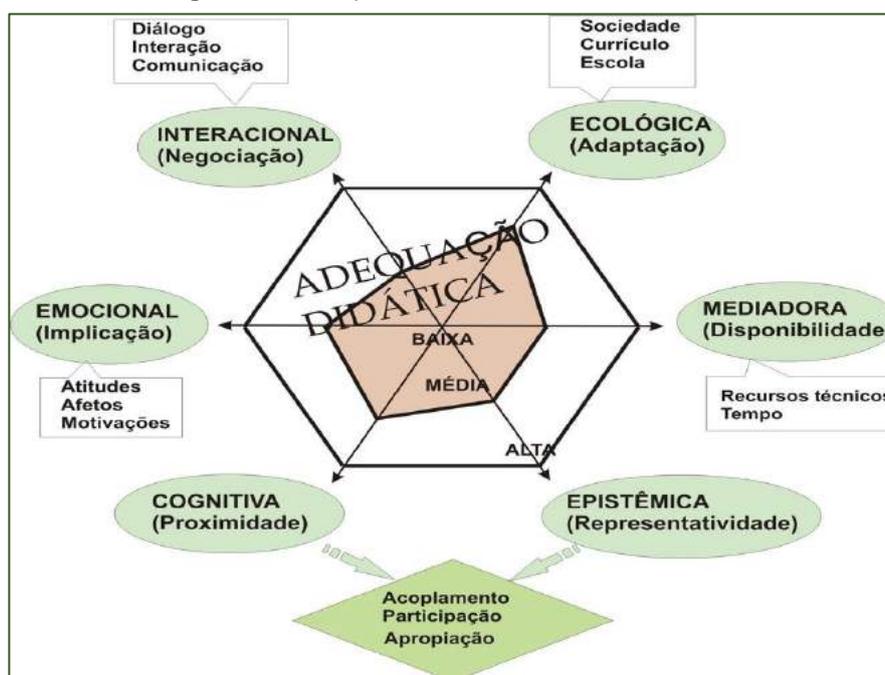
A partir dessas noções teóricas, é mister articular de maneira coerente as ações e componentes do processo de instrução. Para tanto, tem-se a noção de *adequação didática* ou *idoneidade didática*, que surge como uma ferramenta que permite a reflexão sobre uma didática que se orienta para uma intervenção efetiva em sala de aula. A figura 4 resume as principais características dessa noção.

- **Idoneidade epistêmica:** este componente refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados, de acordo com o significado que se tem como referência. A título de exemplo, o ensino de volume de poliedros pode ser limitado à aprendizagem das fórmulas e suas aplicações nos respectivos sólidos (baixa adequação/idoneidade), ou considerar a justificativa de tais algoritmos e os diferentes tipos de situações que incluem a ideia de volume destes poliedros (alta adequação).
- **Idoneidade cognitiva:** revela o grau de proximidade dos significados pessoais atingidos pelos alunos aos significados pretendidos/implementados. Em geometria, no estudo dos triângulos por exemplo, um processo de ensino e aprendizagem com alto grau de idoneidade cognitiva seria obtido pelo estudo das propriedades dos triângulos no que concerne aos ângulos e/ou lados, partindo-se dos conhecimentos dos estudantes sobre figuras planas e realizando atividades que desenvolvam a argumentação e generalização de propriedades.
- **Idoneidade interacional:** este componente é percebido quando as configurações e as trajetórias didáticas permitem identificar os conflitos semióticos potenciais (*a priori*) e resolver aqueles que forem produzidos durante o processo de instrução. Um processo de ensino e aprendizagem que leve em conta as dificuldades dos estudantes, trabalhando com organizadores prévios, tem potencialmente maior adequação semiótica que um que não considere essas dificuldades.
- **Idoneidade mediacional:** refere-se ao grau de adequação e disponibilidade dos recursos temporais e materiais importantes para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Este componente deve levar em consideração recursos que agenciem os estudantes no processo, mas

também faz com que o professor precise estar atento ao tempo disponível para sua realização.

- **Idoneidade emocional/afetiva:** grau de interesse/motivação dos estudantes no processo de estudo. Esta idoneidade está relacionada tanto à própria instituição e aos fatores que esta engendra quanto ao aluno e sua trajetória escolar. Por exemplo, utilizar situações-problemas que sejam de interesse dos estudantes ou recursos didáticos que lhes sejam familiares poderão ter alta idoneidade afetiva.
- **Idoneidade ecológica:** esta adequação refere-se ao grau em que o processo de estudo está ajustado ao projeto educativo do núcleo, à instituição escolar, à sociedade e às sujeições do entorno no qual se desenvolve.

Figura 4 – Componentes da Idoneidade Didática



Fonte: (GODINO, 2011, p.6)

O professor – e os indivíduos responsáveis no projeto educativo – deve estar em constante processo de investigação e reflexão para dar conta da instabilidade de circunstâncias temporais e contextuais que emergem. Para atingir

isto, deve haver uma integração destes componentes, abordando a idoneidade didática como critério no processo global de ensino e aprendizagem.

Para que este emaranhado de conceitos, definições e noções possam ser mais esclarecidos, a seguir são apresentados alguns trabalhos que fazem uso do EOS em suas análises, construções e implementações.

Andrade e Kaiber (2013), ao utilizarem os pressupostos da Idoneidade Didática, se detêm no componente *linguagem* da idoneidade epistêmica para descrever algumas atividades para o ensino e aprendizagem de Funções, objetivando evidenciar a articulação de um objeto matemático frente a um documento curricular de referência: OCNEM - Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), assim como sua construção por meio de situações didáticas que potencializem o trabalho em Matemática. De acordo com o documento, o ensino de Funções deve compreender a exploração qualitativa das relações entre duas grandezas, nas mais variadas situações, além de trabalhar o esboço qualitativo dos gráficos que representam essas relações.

Dentre seus resultados, as autoras mostram a importância de se basear nestes critérios da idoneidade didática do EOS e explicitam a necessidade de ampliar a exploração dos elementos linguísticos e representacionais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como fazer uso da resolução de problemas que se identifiquem com a realidade dos discentes.

Lemos e Kaiber (2016), buscam, sob a perspectiva do EOS, analisar a noção de Ângulo desenvolvida em um livro didático de Matemática para o 6º ano, tendo em vista o desenvolvimento de uma proposta de recuperação de conteúdos, focada em Geometria para os anos finais do Ensino Fundamental (abordando situações-problema, definições, conceitos, procedimentos, relações, argumentações e representações).

As ferramentas teóricas apontadas no trabalho são as ferramentas de análise cognitiva e epistêmica que, segundo as autoras, são as que se destacam na análise. Em relação à análise epistêmica, é apresentado que o livro traz um alto grau de idoneidade nos componentes *linguagem* e *regras (definições, procedimentos)*, mas uma defasagem nos componentes das *situações-problema*, dos *argumentos* e das *relações*. Isso porque fica evidente a preocupação de apresentar diferentes

representações para a noção de ângulo, desde a linguagem natural até a gráfica, mas não diferentes contextos.

Em relação aos componentes de análise cognitiva, o resultado foi melhor balanceado: observou-se um alto grau para a leitura e interpretação (pois as situações promoviam isso), um grau médio para o raciocínio lógico (uma vez que as situações demandavam este tipo de raciocínio, porém não havia um encaminhamento para a justificação e/ou prova de suas conclusões) e um baixo grau para análise/síntese, já que não se evidenciou estímulo à generalização.

Assim, foi possível estabelecer um conjunto visual das abordagens do livro didático, facilitando a compreensão da necessidade de realizar um trabalho que coloque em evidência o uso da resolução de problemas, atividades que impliquem justificações, argumentações e generalizações, além do uso de materiais concretos e recursos tecnológicos.

Wilhelmi (2017), fazendo uso da *idoneidade epistêmica*, discute o conceito de proporcionalidade no contexto educacional espanhol e demonstra a necessidade de olhar para o mesmo em todo o seu “trajeto”: enquanto atividade puramente aritmética (na Educação primária) até sua consolidação algébrica (Educação Secundária³).

O autor aponta que existem alguns fenômenos didáticos, assim chamados em seu texto, que envolvem rupturas e descontinuidade para a noção de proporcionalidade. Isso porque não existe uma “conversa” entre os estudos na Educação primária com o que é feito na Educação Secundária, ao mesmo tempo que o trabalho com este conceito é realizado de maneira desarticulada com os diferentes contextos e situações, nos quais ele pode estar incluso de maneira transversal e interdisciplinar, em “áreas intra y extra matemáticas” (p.7).

Desse modo, os alunos não constroem a noção de proporcionalidade como um objeto unitário, devendo-se então ter-se em mente a necessidade de uma engenharia didática que permita uma evolução do significado pessoal aprendido pelos estudantes, ancorada pelo uso da proporcionalidade em diversos contextos.

Em seu trabalho, Osorio e González (2017) apresentam uma discussão sobre a necessidade de os estudantes validarem (demonstrarem) o

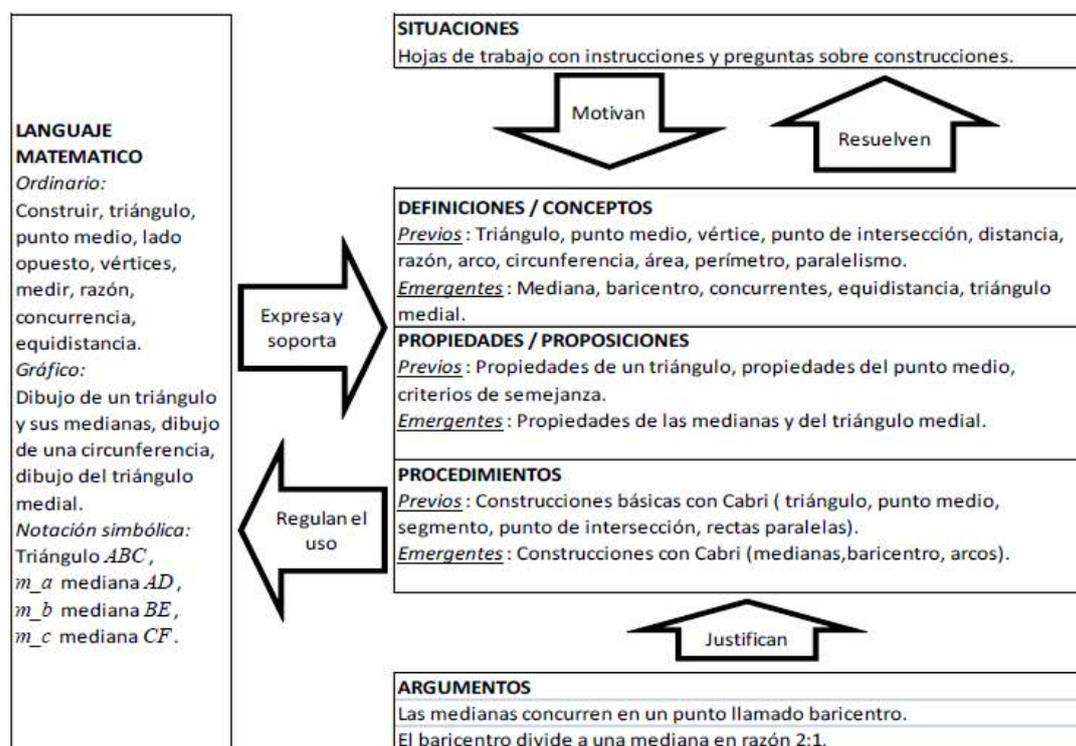
³ Esta nomenclatura pode ser entendida como a correspondente vivência do Ensino Fundamental nos Anos Finais e Ensino Médio no Brasil.

conhecimento construído em Matemática, vendo este processo de validação correlacionado aos outros que surgem no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos. O objetivo foi discutir sobre o desenvolvimento de projetos que buscam a integração de instrumentos metodológicos que permitissem realizar a análise desses processos de validação, bem como evidenciar a importância do EOS para a incorporação destes.

Os autores buscaram, nesta investigação, o trabalho com estudantes do Ensino Médio do México, na qual analisaram, por exemplo, a observação de situações-problema e a proposição de propriedades geométricas através da percepção de regularidades, com o uso de software de geometria dinâmica (SGD).

Um exemplo do uso do EOS nesta pesquisa foi o uso da *configuração epistêmica*, para a compreensão dos objetos matemáticos envolvidos no trabalho com medianas. A figura a seguir mostra o esquema elaborado pelos autores:

Figura 5 – Configuração epistêmica das medianas de um triângulo



Fonte: (OSORIO E GONZÁLEZ, 2017, p.3)

Pode-se notar que a configuração mostra quais os objetos matemáticos presentes na mesma e o modo como estão relacionados (a linguagem, as situações,

as definições, proposições e os argumentos). O trabalho segue abordando alguns modelos de análise de argumentos, no sentido da demonstração e validação em Matemática, preocupando-se com este trabalho no âmbito escolar. Dentre as considerações finais, os autores apontam para a necessidade de se ter um olhar contextualizado desses processos, no sentido que aponta as configurações didáticas propostas no EOS, bem como suas relações duais (ver figura 2). E desse modo, buscar o desenvolvimento da aprendizagem da demonstração como validação do conhecimento matemático que é construído na escola.

Maciel e Soto (2017), ao analisarem estudantes de bacharelado na resolução de problemas de proporcionalidade, fizeram uso das configurações epistêmica e cognitiva proporcionadas pelo Enfoque Ontossemiótico. Os autores focaram no chamado *problema de valor ausente*⁴, uma vez que o mesmo não está necessariamente relacionado a um pensamento proporcional. Eles apresentam como o estudo sobre a proporcionalidade vem se desenvolvendo, dando ênfase nos trabalhos que apontam as dificuldades dos estudantes no tratamento desta área.

Para sua pesquisa, eles propuseram problemas de valor ausente para estudantes do 1º semestre de bacharelado, sem indicar quais estratégias deveriam ser seguidas. Os dados foram obtidos tanto pela resolução das atividades, quanto de entrevistas em áudio e vídeo, além de notas de campo do pesquisador. As entrevistas serviram para que os pesquisadores pudessem esclarecer o raciocínio que os estudantes utilizaram na resolução dos problemas. O uso das ferramentas metodológicas do EOS permitiu aos autores analisar a maneira pela qual os estudantes abordavam e interpretavam a comparação entre quantidades.

Dentre os resultados, observou-se inicialmente que os estudantes fizeram uso de três estratégias de resolução: iteração, relação unitária e regra de três. O processo chamado de unitário faz referência ao fato de os estudantes buscarem encontrar um valor que satisfizesse a relação proposta.

A partir dessas discussões, podemos compreender as abordagens em Educação Matemática a partir do EOS.

⁴ Problema de valor faltante, no original.

3 ESTUDOS ANTECEDENTES

“Às vezes olhando para trás vocês podem ver mais claramente o caminho que está adiante...” Mestre dos Magos

A construção de uma pesquisa inevitavelmente trilha um caminho que permite refletir em “como” seu objeto de investigação vem sendo apresentado nas discussões acadêmicas. Nosso trabalho perpassa por três esferas principais: o ensino de Trigonometria, as histórias em quadrinhos no contexto educacional e a perspectiva teórica do EOS em Educação Matemática. Neste capítulo, trazemos estudos dentro das duas primeiras esferas, uma vez que a última já foi abordada e discutida no capítulo anterior.

3.1 PESQUISAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA

Para a realização desta revisão, utilizou-se a base de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), desenvolvida pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT). O período abordado consta os anos de 2012 a 2017, tendo como objetivo compreender as implicações do ensino da Trigonometria, ou seja, os mecanismos que se desenvolvem, os recursos utilizados, as abordagens metodológicas, dentre outras questões.

Como critérios para a busca, utilizamos as palavras-chave “razões trigonométricas”, “trigonometria”, “trigonometria no triângulo retângulo” e “ensino” no subnível “assunto”. Foram encontrados 74 trabalhos, a nível de mestrado (profissional e acadêmico).

Selecionamos apenas os trabalhos que tinham foco no desenvolvimento da Trigonometria (desde o triângulo retângulo até às funções trigonométricas) na Educação Básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio): seja com propostas de intervenção didática, abordagens de análise de material, desenvolvimento histórico, etc. Desse modo, ficamos com 40 pesquisas.

Em seguida, selecionamos trabalhos que abordam teorias educacionais e metodológicas que nos pareceram mais relevantes para a pesquisa. Assim, ficamos com 13 trabalhos, distribuídos da seguinte forma:

Quadro 1 – Pesquisas no ensino de Trigonometria

Ano	Título	Autor	Mestrado
2012	A Geometria Dinâmica como ferramenta para o ensino de Funções trigonométricas em um ambiente virtual de aprendizagem	Mário Wedney de Lima Moreira	Profissional
2012	Um olhar histórico nas aulas de Trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa	Gladis Bortoli	Profissional
2012	Elaboração de uma sequência didática sobre os conceitos geométricos preliminares ao estudo da trigonometria	Suzany Cecília da Silva Medeiros	Profissional
2013	A leitura de fontes antigas e a formação de um corpo interdisciplinar de conhecimentos: um exemplo a partir do Almagesto de Ptolomeu	Ana Paula Pereira do Nascimento Silva	Acadêmico
2013	A Trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas	Juliana Elvira Mendes de Oliveira	Profissional
2014	Trigonometria por <i>apps</i>	Natália Ojeda Mastronicola	Acadêmico
2014	O ensino de trigonometria para deficientes visuais através do Multiplano Pedagógico	Luciano Marques de Melo	Profissional
2015	A Trigonometria do ciclo trigonométrico: uma análise da transposição didática realizada pelo livro didático na 2ª série do Ensino Médio à luz da Teoria Antropológica do Didático	Aline Oliveira da Silva Barbosa	Acadêmico
2015	Uma proposta metodológica para o ensino das funções trigonométricas	Valéria Nogueira Batista	Acadêmico
2015	O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas	Dimitrie Hristov Sobrinho	Profissional
2016	Proposta metodológica para o ensino da Trigonometria baseada na Psicologia Pedagógica	Robewilton da Silva Alves	Profissional
2017	A utilização do <i>software Modellus</i> para o ensino de funções trigonométricas por meio do movimento harmônico simples	Claudionor de Oliveira Pastana	Acadêmico
2017	Potencialidades pedagógicas da História da matemática nos livros didáticos no Ensino Médio no conteúdo de trigonometria	Francisco Adeilton da Silva	Acadêmico

Fonte: O Autor, 2019.

Os trabalhos, delineados em sua abordagem metodológica e resultados principais, estão subdivididos em seus respectivos anos de publicação, para facilitar a compreensão e os possíveis avanços na área.

✓ **(2012)**

Serão apresentados trabalhos que abordam perspectivas interessantes no contexto da Educação Matemática, como a História da Matemática e a articulação com os conhecimentos anteriores ao estudo da trigonometria.

O trabalho de Bortoli (2012) visou problematizar a construção de conhecimentos vinculados à Trigonometria no triângulo retângulo em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, analisando as possibilidades de inclusão da História da Matemática, baseando-se nos aspectos teóricos da Etnomatemática. A abordagem histórica teve por objetivo situar o estudante na época e no local de emergência dos conhecimentos matemáticos discutidos e fazê-los compreender a importância deste desenvolvimento. Com um enfoque de cunho qualitativo, os dados foram coletados através de questionários, conversas informais e gravações.

Os estudantes trabalharam, em pequenos grupos, com os conceitos geométricos de maneira investigativa e exploratória e com a construção de materiais de estudo, como o astrolábio. Também houve a participação de profissionais da construção civil, para socializar e discutir acerca da relação entre suas práticas e o conteúdo estudado pelos alunos.

Como resultados, a pesquisa mostrou que a abordagem didática permitiu uma maior interação dos estudantes entre si e para com o conhecimento a ser construído; o professor surgiu como um orientador-pesquisador e os alunos conseguiram relacionar a matemática escolar com a matemática cultural e histórica.

Desse modo, pode-se perceber a importância de se trabalhar os aspectos históricos dos conceitos matemáticos, de modo que o aluno veja sentido e relevância naquilo que está sendo proposto em sala de aula, além de promover situações de protagonismo juvenil nas relações com o conhecimento matemático escolar.

A segunda pesquisa é uma dissertação de mestrado profissional, na qual Medeiros (2012) elabora uma sequência de atividades a respeito dos conceitos geométricos precedentes ao estudo da trigonometria. Seu objetivo foi investigar as

dificuldades de caráter geométrico apresentadas na aplicação de trabalhos com trigonometria, tendo, assim, subsídios para a construção de um material (caderno de atividades) que abordasse os conteúdos que representaram maiores obstáculos, visando o desenvolvimento de habilidades matemáticas e dos conceitos geométricos subjacentes à trigonometria.

Para o desenvolvimento do processo, a autora investigou as principais dificuldades conceituais e/ou procedimentais dos estudantes durante o percurso de sua aprendizagem. Esta investigação partiu de três trabalhos que abordam a trigonometria através da construção da tabela de cordas de Ptolomeu, da elaboração de uma tabela trigonométrica e das dificuldades de professores do Ensino Fundamental: Gomes (2011), Nascimento (2005), Brito e Morey (2004), respectivamente.

Após isso, elaborou um caderno de atividades com o objetivo de auxiliar o professor (e/ou o aluno) na construção dos conceitos preliminares ao ensino e à aprendizagem de trigonometria. Este contém orientações e atividades, por exemplo, para o uso do compasso, do transferidor e sobre os tipos de triângulos, bem como seus elementos.

Este trabalho mostrou-se importante, pois traz a necessidade de se conhecer as principais dificuldades que permeiam o ensino e a aprendizagem de trigonometria (dificuldades pelo desconhecimento de propriedades referentes a conceitos geométricos de construção; tratamento algébrico e aritmético), com foco nos conceitos de geometria que são necessários neste processo, permitindo um novo olhar para nossa abordagem metodológica.

O terceiro trabalho também foca nos aspectos históricos da matemática, atrelados ao uso do software Geogebra. Nele, Moreira (2012) busca introduzir os conceitos referentes ao ensino de geometria e trigonometria, estudando aspectos das funções trigonométricas pela visualização no computador e no desenvolvimento de *applets* como ferramentas de ensino.

O autor baseou-se na Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e na Sequência Fedathi como metodologia de ensino. As atividades foram estruturadas em: construção de gráficos em uma mesma tela; comparação dos gráficos obtidos e conclusão dos estudantes com orientação do professor. No desenvolvimento das atividades, pode-se constatar que os alunos mostraram

algumas dificuldades, sendo elencadas pelo autor: uso das ferramentas do software; conhecimentos geométricos insuficientes; domínio insuficiente de técnicas algébricas; e dificuldades em “combinar” a geometria e a álgebra na formação do conhecimento em trigonometria.

A experimentação revelou que a aquisição de saberes por parte dos estudantes mostrou-se propensa a um aumento qualitativo ao fazer uso de *applets* e de softwares de Geometria Dinâmica. Assim, as construções e percepção das familiaridades puderam conduzir a uma melhora na capacidade de estimar os elementos de uma função trigonométrica.

✓ (2013)

Em sua pesquisa, Oliveira (2013) apresenta uma proposta metodológica para o ensino dos conteúdos de Trigonometria na Educação Básica, tendo foco tanto em sua evolução histórica quanto em aplicações contemporâneas. Para tanto, a autora traz quais seriam os conteúdos que formam o programa básico em Trigonometria, abordando desde a trigonometria no triângulo retângulo até as transformações trigonométricas que discorrem das relações no círculo trigonométrico.

Em seguida, ela apresenta o desenvolvimento histórico da Trigonometria, apontando questões geográficas (trigonometria no Egito, na Babilônia e na Grécia, por exemplo), sua relação com a Astronomia e seu renascimento enquanto conhecimento independente. Mostra a mesma no contexto dos documentos oficiais vigentes (PCN, CBC⁵), nos livros didáticos e em algumas abordagens em Educação Matemática (Resolução de Problemas e Modelagem Matemática).

O trabalho segue trazendo algumas aplicações da Trigonometria na atualidade (como sua importância para a Cartografia, Medicina, Física, Engenharia e Agrimensura⁶) para depois apresentar a proposta metodológica para o ensino de Trigonometria, mostrando-a por meio de resolução de problemas, modelagem, utilização do Geogebra, palestras, dentre outras situações. A autora traz como resultado a importância de se pensar no ensino de Matemática, mais especificamente da trigonometria, de maneira a despertar o interesse do aluno e trabalhando aspectos históricos, cotidianos e problemas que permitam aos estudantes serem agentes ativos de todo o processo.

⁵ Proposta curricular do estado de Minas Gerais.

⁶ Estudo e medição de territórios para o conhecimento e demarcação dos mesmos.

Percebemos que há um tratamento didático que relaciona o uso dos aspectos históricos a outras metodologias que permitam ampliar o processo de estudo, a participação dos alunos e a efetivação da aprendizagem.

Silva (2013) buscou discutir a importância do uso de fontes históricas em uma abordagem interdisciplinar para o trabalho em sala de aula. Esta abordagem foi composta por noções de trigonometria, astronomia básica, filosofia natural, a Educação Matemática, assim como a leitura e análise de textos antigos.

Nesse contexto, foi utilizado o *Almagesto*, de Ptolomeu, nos capítulos que abordam a construção da tabela de cordas que seria a base do mapeamento dos céus realizado por Ptolomeu nos seus 12 livros seguintes. A autora buscou compreender a construção das tabelas, com foco tanto na produção matemática quanto nos contextos históricos, filosóficos e astronômicos presentes na obra. O objetivo desta investigação foi criar um caderno de atividades voltado para professores formados e em formação, de modo que houvesse, por parte dos mesmos, motivação para o trabalho com a História da Matemática em suas abordagens didáticas.

O caderno de atividades, juntamente com outras propostas, foi aplicado em dois momentos distintos, de modo a discutir sua viabilidade. O primeiro momento deu-se em um minicurso piloto com bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e um professor da rede estadual. O segundo momento foi realizado em uma turma da disciplina *Tópicos de História da Matemática* da UFRN.

Como resultados, a autora traz também a importância de se trabalhar com os aspectos históricos (obras antigas) e de maneira interdisciplinar. No entanto, aponta algumas dificuldades neste caminho, como a questão da tradução dos textos (preocupação em ser o mais fiel possível ao texto original) e a falta de ajuda de profissionais de outras áreas (quando se trabalha interdisciplinarmente).

Ao analisar estes trabalhos, notamos que existe uma preocupação em se trabalhar com a história da matemática, de modo a mostrar a construção do conhecimento matemático, sua evolução, suas aplicações e sua necessidade atualmente, podendo trazer sentido e motivação para o ensino e aprendizagem em sala de aula ou em outros ambientes de aprendizagem.

✓ (2014)

O trabalho de Mastronicola (2014) aplicou um conjunto de atividades em uma turma de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, objetivando trabalhar com propostas alternativas para o ensino, de modo que os alunos construíssem o próprio conhecimento, superando o uso de fórmulas sem a reflexão. A proposta foi utilizar aplicativos que pudessem ser usados em aparelhos como tablets e smartphones.

Como metodologia para o desenvolvimento do trabalho, a autora fez uso da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), de acordo com as quatro fases da mesma: análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação e, por fim, análise *a posteriori* e validação da experiência. Seguiu apoiando-se nas discussões sobre as TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação – de modo a mostrar a possibilidade de inserção de novas tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem. Como um de seus argumentos, a autora mostra como os documentos curriculares nacionais corroboram para esta abordagem, como os PCN.

O trabalho mostra apps que utilizam a plataforma *Android* e/ou *IOS*, como o *Theodolite Droid* (Majos Forms), o Teodolito (oxdb.net) e o Geogebra (versão para tablets). A aplicação das atividades foi realizada em duas turmas de 9º ano de uma escola municipal de São Paulo.

Seguindo as etapas da Engenharia Didática, a autora traz em suas análises prévias, que os estudantes, ao entrarem em contato com a trigonometria pela primeira vez, deparam-se com um amontoado de fórmulas que causam desmotivação para a aprendizagem. Assim, na análise *a priori* foram construídas atividades práticas que envolviam o uso de novas tecnologias, além de resgatar conteúdos que são pré-requisitos para o momento: triângulo retângulo, semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras.

Na experimentação, os alunos entraram em contato com materiais como a calculadora (para perceber as razões de semelhança), questionários para anotar suas impressões e resolução de problemas envolvendo o conteúdo. Em seguida, foram direcionados para o laboratório de informática, para exploração dos applets.

Como resultados, em sua análise *a posteriori*, ficou claro o interesse e a motivação dos estudantes no desenvolvimento das tarefas. O resultado das atividades também foi satisfatório, de modo que fica em evidência que o envolvimento

com diferentes recursos pode trazer o aluno para mais perto de sua aprendizagem, mesmo com um recurso antigo como a calculadora, por exemplo.

A pesquisa de Melo (2014) discorre, com o uso do Multiplano pedagógico, sobre o ensino de trigonometria para deficientes visuais. Seu objetivo principal foi colaborar para uma eficiente inclusão de alunos com deficiência visual, divulgando meios de transpor alguns obstáculos para o ensino de Matemática, em particular, de trigonometria.

Após discutir sobre o panorama da deficiência no Brasil, dando ênfase à deficiência visual, o autor traz os aspectos teóricos da trigonometria, bem como suas implicações no processo de ensino e aprendizagem. A pesquisa foi realizada com três alunos de duas turmas de 1ª série do Ensino Médio. O conteúdo específico trabalhado foi o Ciclo Trigonométrico.

A dificuldade era evidente na percepção do perpendicularismo de segmentos, pois os estudantes ficavam confusos ao contornar o ciclo e encontrar a projeção. Assim, a partir de questionários aos alunos, o pesquisador pode construir seus instrumentos de modo a atender às necessidades dos mesmos. Julgou-se necessário o aprendizado de: localização de pontos no plano cartesiano; projeções ortogonais; geometria plana; e triângulos.

As atividades permitiram uma interação com o recurso, de modo que ele fosse explorado ao máximo, com o uso principalmente do tato (para perceber os eixos dos senos e dos cossenos, sua extensão – não ultrapassam o valor numérico de 1 –, os valores de ângulos, entre outros). As dúvidas surgidas no percurso iam sendo respondidas e problematizadas.

Os resultados mostraram que a centralidade da prática pedagógica nas necessidades e dificuldades dos alunos permitiu maiores aproximações na aprendizagem dos mesmos, mesmo com pouca discussão sobre educação inclusiva, segundo o autor. Também apresentou que é possível incluir materiais concretos que estejam ajustados a estas necessidades. No entanto, é preciso não só um envolvimento do professor nestas ações, mas todo um investimento de políticas educacionais que atentem para a estruturação de um ambiente escolar inclusivo.

✓ (2015)

Em seu trabalho, Barbosa (2015) buscou analisar a transposição didática da Trigonometria, especificamente do ciclo trigonométrico, realizada em um

livro didático do 2º ano do Ensino Médio e considerando os elementos da praxeologia matemática proposta na Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Foram utilizadas três obras de livros, sendo feita a análise principal em apenas uma. Houve a busca pelos documentos curriculares oficiais de modo a constatar como a trigonometria é apresentada nos mesmos, para estabelecer as relações dos saberes. Caracterizando a pesquisa como exploratória, em sua abordagem metodológica, a autora buscou identificar as tarefas (tipos e subtipos), as técnicas, as tecnologias e as teorias abordadas nas atividades.

Inicialmente, buscou-se o aprofundamento nos documentos oficiais para, em seguida, fazer a análise dos livros (dois considerados em uma “análise complementar” e o livro da “análise principal”). O livro usado como principal fonte de investigação teve por critério o fato de ser adotado na instituição na qual a pesquisadora trabalha, bem como em outras escolas da rede pública estadual de ensino, localizadas no Recife-PE e região metropolitana.

Como resultados, o trabalho mostra a partir das análises praxeológicas que, nas tarefas (tipos e subtipos), os exercícios geralmente refletem o tipo de exemplo sugerido e abordado; as técnicas se assemelham entre as três coleções (a principal e as duas secundárias ao estudo), apresentando comumente apenas uma maneira de resolver o problema proposto; no que diz respeito à tecnologia/teoria, quase não são apresentadas. Por fim, conclui-se enfatizando a importância do professor nesta relação com o recurso e a necessidade de se investigar a praxeologia matemática em torno das atividades propostas pelo professor, seja através do livro didático ou por meio de outras fontes.

Batista (2015) propõe uma organização do ensino das funções seno e cosseno, buscando favorecer a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica com a utilização de materiais manipulativos e do software Geogebra. Partindo dos documentos curriculares oficiais e fazendo uso dos livros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2015), a autora desenvolve um trabalho de investigação e exploração utilizando modelagem matemática e atividades exploratório-investigativas.

Seguindo os pressupostos da investigação matemática enquanto metodologia, o trabalho é dividido em quatro momentos principais: 1. Reconhecimento da situação, exploração e formulação de questões; 2. Formulação de conjecturas; 3.

Testes e possíveis aprimoramentos das conjecturas; 4. Argumentação, demonstração e avaliação. Momentos estes que podem ocorrer simultaneamente em várias situações.

A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma da 2ª série do Ensino Médio de uma escola estadual de São Paulo. Para a coleta dos dados, foram utilizados relatórios do professor-pesquisador, relatórios dos alunos e gravações em áudio e vídeo das aulas. Foram desenvolvidas atividades com materiais manipuláveis (no estudo do conceito de radiano, por exemplo), questionários que instigavam os alunos a refletirem sobre as situações apresentadas, atividades de modelagem de funções periódicas, construções, interpretações e comparação de gráficos.

Dentre os resultados, a autora mostra que aulas de natureza exploratória-investigativa podem ser aliadas do estudo das funções trigonométricas; permitem aos alunos indagar, argumentar e discutir de maneira autônoma e cooperativa. Além disso, conclui que o uso de materiais manipulativos e recursos tecnológicos constitui um ambiente favorável para a exploração de conceitos matemáticos de forma prazerosa e, se planejado adequadamente, eficiente.

A dissertação de Hristov Sobrinho (2015) tem como objetivo investigar as possíveis contribuições de uma metodologia baseada na Resolução de Problemas para o processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, bem como do raciocínio matemático, em uma turma da 2ª série do Ensino Médio. Esta pesquisa foi incluída, uma vez que busca responder também a generalização do conceito de razão trigonométrica (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico.

Em sua abordagem metodológica, o autor buscou trabalhar com uma sequência de atividades a partir de situações-problema, que faziam com que os estudantes pesquisassem, fizessem uso de instrumentos de medição, construção de tabelas para análises e construção de gráficos.

Os resultados obtidos mostraram que a realização de medições sobre as “rodas gigantes” construídas trouxe um enfoque aplicado ao conceito das funções estudadas e permitiu aos alunos se envolverem mais e melhorarem a compreensão dos conceitos matemáticos em estudo. Ainda, corroborando com os outros estudos que tratam da inserção da história da matemática, apontam para a possibilidade de inserção do raciocínio utilizado pelos povos antigos (como os egípcios) em sala de

aula, bem como do envolvimento em atividades práticas em ambientes do cotidiano (como a medição da altura do sino da igreja Matriz da cidade).

✓ **(2016)**

O trabalho de Alves (2016) tem por objetivo apresentar uma proposta metodológica para o ensino de trigonometria com base na Teoria da Atividade, desenvolvida por Talizina (2000). Sua proposta é oferecer um material que permita um olhar sobre os processos mentais envolvidos na aprendizagem.

O mesmo busca mostrar as etapas de controle das ações no processo de aprendizagem, bem como aulas de acordo com a Teoria da Formação das Ações Mentais (GALPERIN, 2009). Após trazer as discussões das teorias abordadas, o autor mostra a proposta metodológica baseada na Psicologia pedagógica.

Seguindo as etapas estruturadas pela teoria, mostra que a aprendizagem do conceito está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento de uma habilidade, uma ação. São alguns momentos que mostram como a ação vai sendo desenvolvida até ser internalizada, de forma consciente: ação do plano material ou materializado; ação verbal externa; ação verbal interna; e ação mental (quando ela é incorporada, aprendida).

O plano de ensino é distribuído em 7 aulas, desenvolvendo: aulas expositivas, exercícios, atividades presenciais e não presenciais e interatividade com o software Geogebra. É discutida a necessidade de se abordar aspectos históricos e conceitos precedentes relacionados aos triângulos (soma de ângulos internos, classificação, teorema de Pitágoras), para em seguida iniciar as ações com foco na circunferência trigonométrica, através de construções geométricas e da resolução de problemas envolvendo as razões trigonométricas.

Assim, o trabalho se mostra interessante ao desenvolver uma metodologia que foca na formação de habilidades e ações no contexto da matemática, objetivando uma aprendizagem duradoura e consciente.

✓ **(2017)**

Pastana (2017), em sua dissertação, busca compreender quais as implicações da utilização do software *Modellus* no ensino dos conceitos das funções trigonométricas, por meio do Movimento Harmônico Simples. O estudo realizou-se em uma turma de 3º série do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual do Amapá. Participaram da intervenção 36 estudantes.

Como instrumentos para a coleta dos dados, o autor fez uso de questionário prévio estruturado, prática pedagógica com o software, questionário de avaliação da prática, diário de campo, fotos e filmagens. Partindo da análise das concepções prévias dos estudantes, o autor prossegue seu trabalho.

Os resultados foram obtidos através de quatro momentos: análise qualitativa do questionário prévio; análise da atividade de familiarização com o software; análise das atividades pedagógicas e, por fim, análise do questionário de avaliação. As análises iniciais mostraram que os alunos possuíam algumas dificuldades no que diz respeito a esboçar o gráfico das funções periódicas, confundindo elementos das funções seno e cosseno, por exemplo.

A partir da familiarização com o software, pode-se notar que os estudantes conseguiam brevemente relacionar o comportamento das funções com os fenômenos físicos, adaptando-se ao manuseio das ferramentas do programa. As atividades práticas com o software se mostraram satisfatórias, embora alguns estudantes elencaram entraves que, segundo o autor, estão relacionados ao fato de o processo se tratar de uma nova metodologia de ensino e de associar a matemática a outras áreas, neste caso com a Física, fenômeno que muitos não estavam acostumados a vivenciar.

Por fim, traz que o uso desta nova tecnologia associada ao trabalho com duas áreas da ciência (Matemática e Física) pode conduzir um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são estimulados a construir hipóteses, experimentar a criatividade e fazer relações que aproximem os conteúdos de sua verdadeira compreensão e apropriação, tendo sentido.

O último estudo é o de Silva (2017) que, assim como alguns trabalhos citados, investiga as potencialidades da História da Matemática – este na perspectiva de Miguel (2013) –, voltando-se para o livro didático do Ensino Médio. Seu objetivo foi analisar as passagens históricas que surgiam na apresentação do conteúdo de trigonometria, tendo como base as categorias propostas em Alencar (2014), verificando quais das potencialidades encontradas tem mais possibilidade de efetivação em sala de aula.

Foram selecionados seis livros didáticos da 2ª série do Ensino Médio, aprovados no PNLD 2015, buscando nos mesmos o objetivo das passagens históricas, bem como a natureza do conteúdo atrelado.

Observou-se que a história da matemática é utilizada como um recurso de apoio e acréscimo ao conteúdo matemático, de caráter motivacional, classificando-se em “história como fonte de objetivos para o ensino-aprendizagem da matemática”, o que não se caracteriza como a abordagem mais interessante para o ensino. As potencialidades que buscam apresentar a história da matemática como estratégia didática aparecem reduzidamente nas passagens históricas.

O autor mostra, a partir dessas análises, que há a necessidade de se trabalhar, desde o livro didático, com a potencialidade pedagógica da “História da Matemática como um instrumento na formalização dos conceitos matemáticos” (MIGUEL, 1993), mostrando ao aluno a importância de um conceito ao longo da história, suas relações com o contexto social e político, permitindo uma mudança de pensamento e reflexão sobre a matemática. Ainda destaca o importante trabalho do professor na escolha do livro, afirmando que aquele deve ter entre seus critérios esta abordagem da História da Matemática.

De maneira geral, as pesquisas mostraram que, ao tratar do conteúdo de Trigonometria (desde as razões trigonométricas no triângulo até às funções trigonométricas), existe uma preocupação de abordar os aspectos históricos envolvidos na construção deste conhecimento, além de utilizar tecnologias (como *applets* e *softwares*) que permitam uma abordagem investigativa por parte dos alunos.

3.2 HISTÓRIAS EM QUADRINHOS E EDUCAÇÃO

Não é literatura. Não é desenho nem pintura. As histórias em quadrinhos, por muitos incompreendidas, são um tipo de arte e linguagem que une várias expressões artísticas para apresentar algo único e que traga comunicação (PAIVA, 2017). Sua inserção no contexto da sala de aula pareceu por muito tempo algo inviável ou até prejudicial, mas hoje há uma visão mais receptiva para tanto. Ao tratar das histórias em quadrinhos em educação, Vergueiro (2014) aponta que

[...] há várias décadas, as histórias em quadrinhos fazem parte do cotidiano de crianças e jovens, sua leitura sendo muito popular entre eles. Assim, a inclusão das histórias em quadrinhos na sala de aula não é objeto de qualquer tipo de rejeição por parte dos estudantes, que, em geral, as recebem de forma **entusiasmada**, sentindo-se, com sua utilização, propensos a uma participação mais **ativa** nas atividades de aula. (p. 21, grifo nosso)

É interessante destacar o fator identificação. Os estudantes podem se sentir mais motivados a participar de atividades didáticas quando se apresentam recursos que lhes são familiares, seja uma história em quadrinhos, um filme, um jogo ou algum aparato tecnológico. O aspecto lúdico entra em cena, apresentando possibilidades atraentes.

No campo do lúdico, existem diversas visões que estão presentes nas discussões educacionais. Huizinga (2007) aborda a questão dos jogos e da ludicidade através de uma dimensão ampla, que abrange a cultura e que os integra à vida do indivíduo como uma tendência natural do ser humano. Para ele, o jogo é um fato social, atrelado a toda e qualquer atividade humana e que pode, inclusive, se manifestar antes do surgimento da cultura.

Caillois (1990) tem uma visão sociológica distinta da de Huizinga, trazendo o jogo como um aspecto emergente da cultura, tendo em mente um sistema de relações sociais que subjazem as atividades ditas lúdicas. Suas discussões permitem afirmar seu olhar sobre estas atividades, vendo-as como indiscutíveis “instrumentos da cultura de um povo e de uma sociedade, pois através delas muito se pode descobrir sobre os próprios hábitos cotidianos e sobre as estruturas basilares da própria sociedade em questão” (PICCOLO, 2008).

Luckesi (2002) discute a ludicidade como uma experiência interna do indivíduo. Relacionada ao seu mundo interior, é como um estado de consciência, nem sempre perceptível ao mundo externo, mas quando sim, se mostra através das atividades lúdicas. Tudo depende do indivíduo e de suas relações.

Lopes (2004 apud MASSA, 2015) a relaciona com a comunicação, nos processos relacionais e interacionais. As manifestações lúdicas acontecem pela intencionalidade e consciência dos protagonistas. Para a autora, a ludicidade é, portanto, um fenômeno humano e subjetivo, mas também social, observável através do comportamento nas manifestações lúdicas.

Massa (2015) traz que existe uma relação benéfica entre ludicidade e aprendizagem, na medida em que as capacidades dos alunos podem ser potencializadas ao relacionarem o aprendizado com atividades prazerosas. No entanto, alerta para como essa relação deve ocorrer:

Vivenciar a educação lúdica é estar presente e inteiro como docente e viabilizar o mesmo para os seus alunos. É praticar uma educação que integra, ao invés de separar mente de corpo ou sentimento de razão,

considerando as diversas possibilidades. Dessa forma, as manifestações ou práticas lúdicas são além de um recurso formativo uma possibilidade de autodesenvolvimento. (Idem, p.128)

Ela aponta para uma visão de um processo formativo que não foque no desenvolvimento de atividades prazerosas com a simples característica instrumental, mas como um meio de possibilidade para a construção do estudante – bem como do professor – enquanto pessoa que se forma também nesse tipo de manifestação.

É na discussão a respeito de atividades lúdicas que Soares (2016) aponta as dificuldades existentes na conceitualização dos jogos enquanto atividade humana, trazendo várias características que ajudam em sua classificação, muitas das quais citadas anteriormente. No entanto, no trato dos jogos educativos – aqueles que tem uma intencionalidade didática para a aprendizagem de um conteúdo específico – o autor apresenta níveis de interação entre jogo e jogador, que contribuem na delimitação dos tipos de jogos.

São quatro níveis explicitados por Soares, sendo o quarto relacionado a *atividades lúdicas que se baseiam na utilização de histórias em quadrinhos (HQ) e atividades de expressão corporal*. É interessante notar a presença das HQ em processos lúdicos para a aprendizagem, uma vez que elas têm em sua origem essa característica prazerosa, além de ter regras e processos próprios os quais o indivíduo precisa conhecer para ter uma boa experiência.

A leitura de uma história em quadrinhos permite uma imersão entre palavras e imagens que levam o indivíduo para algo que é diferente de ler um livro comum ou assistir a um desenho animado. Segundo Paiva (2017), as HQ são uma rica fonte de conhecimentos, podendo tratar de assuntos dos mais variados possíveis, com uma linguagem acessível.

Assim, é plausível perceber sua inserção enquanto recurso para o ensino e para a aprendizagem. Todavia, o mesmo autor alerta que “embora haja variedade de HQs com a qualidade que se espera para uma contribuição [...], a escolha da obra para a leitura é essencial para o desenvolvimento dos conceitos e para a contribuição para a educação” (p.73). Deve haver preparo e disposição no trabalho com este recurso, de modo a potencializar seu uso e implantação através

de uma ação pedagógica que se encontre na verdade e na plena convicção de suas ações.

É mister entendermos o papel dos órgãos oficiais, bem como dos profissionais da educação, na difusão de uma visão cada vez mais benéfica das histórias em quadrinhos, se bem-intencionada, nos processos educativos, em qualquer nível e para toda área na qual elas possam contribuir significativamente.

O contexto da Educação é tão multifacetado quanto os diferentes gêneros que se desdobram nas histórias em quadrinhos. No que se reporta à inclusão das HQ em sala de aula enquanto objeto de pesquisa, vê-se as possibilidades de seu uso em diversas áreas do conhecimento: Geografia (RAMA, 2006), no ensino das Artes (BARBOSA, 2006), em História (VILELA, 2006), dentre outras, abrindo caminho para se refletir sobre sua introdução no trabalho docente, inclusive no ensino de Matemática e de Ciências.

O quadro a seguir traz um breve resumo de pesquisas que abordam as histórias em quadrinhos no contexto educacional, principalmente para o ensino de Matemática e das Ciências. Apresentamos, em seguida, seus principais resultados.

Quadro 2 – Pesquisas em Histórias em Quadrinhos e Educação

Ano	Título	Autor(es)	Tipo de produção
2004	Um corpo que Cai: As Histórias em Quadrinhos no Ensino de Física	Leonardo André Testoni	Dissertação
2008	Ciência em Revista: A construção de conhecimentos científicos através da utilização de histórias em quadrinhos	Igor Ferreira Nörnberg	Dissertação
2009	As histórias em quadrinhos como recurso didático nas aulas de matemática	Sandra de Fátima Tavares Rodrigues Tonon	Artigo
2012	Histórias em quadrinhos no processo de aprendizado: da teoria à prática	Roberto Elísio dos Santos Waldomiro Vergueiro	Artigo
2013	Uso de cartuns como recurso didático nas aulas de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental	Cristiane Santos da Costa Jorge Henrique Duarte Jose Airton Cavalcante Jaelson Dantas de	Artigo

		Almeida Elisabeth Francisca de Melo Filha	
2014	NO DIA MAIS CLARO: um estudo sobre o sentido atribuído às histórias em quadrinhos por professores que ensinam matemática em formação	Luis Adolfo de Oliveira Cavalcante	Dissertação
2017	An Instructional Media using Comics on the Systems of Linear Equation	Widyastuti, P. D.; Mardiyana, M.; Saputro, D. R. S	Artigo

Fonte: O Autor, 2019.

A pesquisa de Testoni (2004) discute uma proposta de ensino do conceito de inércia utilizando uma história em quadrinhos, a qual serviu como um instrumento gerador de discussões, através de um caráter estimulador. As discussões emergentes a partir de sua leitura eram mediadas pela professora participante, de forma a levar os estudantes a uma conclusão coesa com o conceito que se queria construir. Partindo disso, percebe-se que é papel do professor estimular nos estudantes esse “espírito de debate/argumentação”, situação que pouco se incentiva em disciplinas como Matemática e a Física.

Para a obtenção dos dados, o autor faz uso de questionários, observações, gravações em vídeo e entrevistas. Também teve como instrumentos para análise uma HQ previamente produzida, além de histórias em quadrinhos produzidas pelos estudantes participantes da pesquisa. As aplicações das aulas foram pensadas dentro da tríade Ludicidade-Cognitivismo-Linguagem, tendo na HQ inicial uma narrativa com características lúdicas e com uma situação-problema de cunho construtivista, a fim de gerar discussões ao longo do processo.

Como implicações, perceberam-se sinais esperados na aprendizagem do conceito em debate, evidenciando a criatividade dos estudantes envolvidos com a construção das HQ, assim como da apropriação pela professora participante, que teve um papel importante na mediação de todo o processo. Os estudantes demonstraram motivação e interesse pela discussão proposta a partir da HQ, buscando sempre defender seu ponto de vista e as entrevistas demonstraram o seu apoio ao uso desta abordagem em diferentes momentos escolares e em outras disciplinas.

Nörnberg (2008) aponta para a utilização das histórias em quadrinhos no ensino das Ciências como uma das possibilidades de alfabetização científica, auxiliando através de seu estímulo à criatividade e imaginação. O autor investiga a interpretação de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental com histórias em quadrinhos, coletando-as a partir da relação com as tirinhas do *Níquel Náusea* e de tirinhas que os estudantes trouxeram para a aula.

Fazendo uso da Análise Textual Discursiva (MOARES; GALIAZZI, 2007), o autor discutiu as interpretações dos alunos sobre as tiras, observando que em muitas respostas e colocações havia influência do cotidiano em seus pensamentos, além de algumas dificuldades de escrita que trazem prejuízo à comunicação.

As análises imbuídas de sentidos dos estudantes mostraram a necessidade de o professor ter um olhar para seus alunos como indivíduos pensantes, capazes de influenciar e sofrer influências, e de movimentar-se para além do que se espera em momentos de aprendizagem. Evidencia-se a importância de o professor compreender o “universo particular” do aluno, de modo a conseguir auxiliá-lo rumo ao saber mais complexo e sistematizado. O autor destaca que as tirinhas podem ser usadas tanto para discutir conceitos relativo ao ensino de Ciências quanto com o trabalho interdisciplinar, levantando reflexões sobre problemas sociais e contemporâneos em nossa sociedade.

Em suas reflexões finais, o autor aponta para um caminho de ações que leve os estudantes à criticidade e ao pensamento científico e social, desde que o trabalho docente esteja veiculado a esse propósito, ou seja, a prática do dia a dia em sala de aula ou em qualquer espaço de aprendizagens seja aquilo que impulsiona no aluno a vivência curiosa e protagonista que dele se espera.

Em seu artigo, Tonon (2009) reflete sobre as histórias em quadrinhos enquanto recurso nas aulas de matemática em uma proposta com professores dos anos iniciais do ensino fundamental no estado de São Paulo. O trabalho surgiu da inquietação da pesquisadora a respeito da falta de motivação dos estudantes em relação à leitura, principalmente de textos matemáticos.

Para o trabalho com os professores, a pesquisadora propôs o uso de uma história em quadrinhos da revista Chico Bento, objetivando discutir os aspectos matemáticos presentes na HQ, além de oferecer a exploração da língua materna e

de temas transversais, como o respeito, a ética e cidadania. A história permitiu esses desdobramentos, além de ressaltar a importância da matemática nas decisões cotidianas. Ainda foi possível suscitar conteúdos relacionados com medida, porcentagem e sistema monetário, previstos para as séries em questão.

O projeto com os professores foi implementado em várias escolas da região, tendo um resultado positivo com relação aos estudantes participantes. Eles se mostraram bastante envolvidos nas tarefas propostas, com curiosidade e entusiasmo em sua realização, além de atingirem os objetivos de aprendizagem (62% dos alunos obtiveram um bom rendimento nas atividades). A intervenção foi vista pelos professores como um trabalho de cunho contextualizado e com possibilidade interdisciplinar.

Em seu artigo, Santos e Vergueiro (2012) têm por objetivo fomentar e nortear o uso apropriado das narrativas em quadrinhos nos processos de ensino e aprendizagem. Eles apresentam um panorama do conturbado processo de aceitação das histórias em quadrinhos nos ambientes educativos até seu estabelecimento enquanto recurso possível para tal. Inicialmente, na década de 1970, os quadrinhos surgem nos livros didáticos enquanto estratégia para “suavizar” o tema discutido no tópico ou capítulo.

O primeiro desafio apresentado pelos autores para a inserção das histórias em quadrinhos em sala de aula é que o educador precisa conhecer sua linguagem: ir para além do texto escrito, identificar os tipos de balões, as metáforas visuais ou as onomatopeias. Também é importante conhecer o formato das histórias, sejam as tirinhas ou os quadrinhos publicados em revistas, álbuns ou livros.

Dando continuidade ao seu trabalho, os autores trazem as possibilidades de uso das histórias em quadrinhos no que concerne à leitura e interpretação, aspectos históricos que podem ser discutidos, seu caráter artístico e sua articulação com a literatura. Desse modo, eles discorrem sobre o uso das HQ no ensino de História, Artes e Literatura, por exemplo. É apontado que os quadrinhos podem propiciar a divulgação científica e a abordagem de assuntos inerentes à ciência (*Logicomix*, *Ombros de Gigantes*), assim como apresentar temas relacionadas à saúde e prevenção de doenças.

Por fim, é indicada a importância de tanto os professores quanto os alunos estarem envolvidos no processo educativo a partir das histórias em

quadrinhos, sabendo como empregá-las, utilizando HQ que estejam adequadas ao nível e faixas etárias, bem como empreendendo atividades práticas que tragam mais dinamicidade para as aulas, sempre levando em consideração a percepção dos recursos da linguagem, estética e narrativa quadrinizada.

Costa *et al* (2013) teve como objetivo investigar o uso de cartuns como recurso didático para aulas de matemática, observando seu impacto no trabalho do professor para o favorecimento da aprendizagem. O trabalho surgiu da necessidade de trabalhar a matemática em uma perspectiva que incluía o aluno como sujeito ativo no processo de aprendizagem, fugindo da mecanização de cálculos desassociados da realidade dos estudantes. Como exposto no trabalho anterior, os autores trazem a história de rejeição e condenação por parte de responsáveis e educadores para com as HQ, alegando, entre outras coisas, que esse tipo de leitura não contribuía em nada para o desenvolvimento cultural e moral de seus jovens leitores. Todavia, com o desenvolvimento das ciências da comunicação, as histórias em quadrinhos passaram a ser vistas com outros olhos, tendo hoje espaço nos ambientes educacionais.

A escolha pelo uso de cartuns é apresentada como vantajosa pelo seu baixo custo e grande acessibilidade, além de estar de acordo com o que apresentam os PCN (1998) no que diz respeito à orientação sobre utilizar diferentes linguagens para produzir, expressar e comunicar suas ideias. Outros pontos são destacados: o uso da lógica na leitura, competência indispensável para a aprendizagem de saberes mais complexos e abstratos em matemática; a possibilidade do trabalho interdisciplinar e o uso da resolução de problemas fomentados a partir das histórias em quadrinhos. O estudo foi realizado com 20 estudantes do Ensino Fundamental e dois professores de matemática, objetivando compreender as relações discente – relação com os cartuns e a resolução das atividades – e docente – investigando se os cartuns faziam parte das estratégias de ensino e qual era a possibilidade de utilização pelos professores.

Dentre os principais resultados, os autores propuseram aos estudantes a interpretação de tirinhas que discutiam conceitos matemáticos já estudados por eles: o objetivo era que os estudantes conseguissem identificar qual o conceito abordado, justificando sua resposta a partir dos elementos subjacentes à leitura. Apesar de alguns equívocos, os alunos conseguiram estabelecer uma conexão da

leitura com aspectos da matemática, evidenciando seus conhecimentos tanto em relação à matemática quanto à interpretação de uma história em quadrinhos.

Com os professores, foi proposta atividades em que eles deveriam planejar, analisar cartuns e pensar os quadrinhos enquanto recurso didático para as aulas de matemática. Ficou claro que eles viam as HQ como um veículo possível para despertar o raciocínio e a interação entre os conceitos em matemática, sugerindo o trabalho começando por operações mais básicas até as mais complexas. Assim, os resultados mostraram a possibilidade de uso dos cartuns enquanto recurso, despertando o senso crítico na interpretação de situações matemáticas.

Em sua dissertação, Cavalcante (2014) investigou o sentido atribuído às histórias em quadrinhos, enquanto recurso metodológico, por professores que ensinam matemática, durante um curso de formação. Nesta investigação, discutiram-se as habilidades necessárias para a construção de uma HQ, a forma como o conhecimento matemático é tratado nas HQ e a organização de atividades didáticas que façam uso das HQ.

Para a realização do trabalho, o autor promoveu um curso cujo objetivo foi a produção de HQ para uso em práticas didáticas, a partir de discussões teóricas que subsidiaram o processo. A base da investigação foram os conceitos emergentes do Materialismo Histórico Dialético (MHD), segundo um movimento histórico. Foram utilizados, para a coleta dos dados, questionários, entrevistas e gravações em vídeo, de modo a compreender toda a interação dos professores durante o curso de formação.

As análises versaram sobre os processos criativos desenvolvidos pelos professores, suas concepções sobre as HQ, o conhecimento matemático nas HQ e o papel das HQ na organização do ensino. Nas concepções, o objetivo era compreender o sentido que os professores atribuíam aos elementos que estruturam as histórias em quadrinhos. Foi percebida a supervalorização do desenho em detrimento do texto, algo que ao longo do curso, foi sendo trabalhado, para que houvesse maior possibilidade de inserção deste recurso em sala de aula.

No tratamento do conhecimento matemático nas HQ, a produção das mesmas mostrou um trabalho com temas transversais atrelados ao conteúdo matemático dentro da história, evidenciando uma preocupação dos professores com

uma formação matemática crítica e social para os estudantes. No que diz respeito ao ensino, os professores participantes demonstraram que é possível usar as HQ de diferentes maneiras, abordando elementos do cotidiano, produzindo HQ em sala com os alunos e inserindo os conceitos na história de modo a não focar em memorizações sem sentido, mas na reflexão sobre estes conceitos.

Por fim, a investigação permitiu o esclarecimento sobre os sentidos dos professores a respeito das HQ no campo educacional, dando a eles subsídios para o trabalho com este tipo de recurso de maneira efetiva e reflexiva em sala de aula.

O último trabalho que apresentamos é o artigo de Widyastuti, Mardiyana e Saputro (2017) que discute o uso dos quadrinhos em um processo instrucional para o ensino de sistemas de equação linear, publicado na IV Conferência Internacional em Matemática, Ciência e Educação⁷, na Indonésia. Escolhemos incluir esta pesquisa para termos discussões tanto a nível nacional como para enxergar o tratamento aos quadrinhos fora do país.

A pesquisa surgiu pela observação das dificuldades que os estudantes têm com relação aos materiais que geralmente são utilizados nos processos de ensino, além das dificuldades na modelização matemática, estágio inicial para a aprendizagem da álgebra. Segundo os autores, a abordagem sobre os conceitos de sistema de equação linear se deu pelo fato de estes serem recorrentes nos exames nacionais.

Desse modo, buscou-se produzir um recurso educacional por meio da linguagem das histórias em quadrinhos que pudesse contribuir para amenizar estas dificuldades. O produto foi analisado por professores e estudantes em fases testes para avaliar suas potencialidades e limitações em futuras intervenções. Para a coleta dos dados, foram realizadas entrevistas e observações em campo.

As observações e resoluções das atividades confirmaram os problemas dos estudantes na interpretação de questões algébricas e na criação de modelos matemáticos. No entanto, o uso dos quadrinhos é visto pelos alunos como uma forma de amenizar a abstração e promover maior identificação com os conceitos abordados. Os quadrinhos trazem este aspecto de identificação ao tratar de alunos do Ensino Médio e seus anseios, dúvidas, alegrias e tristezas, tudo atrelado ao conteúdo proposto.

⁷ 4th International Conference on Mathematics, Science and Education.

O material também foi analisado por especialistas tanto nos aspectos matemáticos quanto no design da HQ. Os resultados mostraram que o quadrinho poderia ser utilizado como recurso substitutivo da ficha do aluno, pois além do caráter lúdico que minimiza a rejeição dos estudantes, é possível inserir nele as situações-problema, perguntas, discussões e exercícios necessários para a construção da aprendizagem. No entanto, deve-se levar em conta sempre o trabalho do professor guiando o uso adequado do recurso.

4 METODOLOGIA: CONSTRUINDO O CAMINHO

“aqueles que quebram as regras e a lei são vistos como escória, mas aqueles que abandonam até um de seus amigos são piores que escória.” Obito Uchiha (Anime Naruto)

Como a presente pesquisa buscou investigar as implicações e o desenvolvimento de uma sequência didática com o uso de histórias em quadrinhos, devemos discorrer sobre nosso percurso metodológico. Este capítulo tem por objetivo descrever e explicitar este percurso, caracterizando e delimitando nossa pesquisa.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa constituiu-se como qualitativa, através da observação-participante, uma vez que a mesma se debruçou sobre o processo de ensino e aprendizagem proposto, privilegiando os aspectos da realidade onde esteve inserida. Segundo Oliveira (2014), a abordagem qualitativa envolve “um processo de reflexão e análise da realidade [...] do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação” (p.37). Além disso, este tipo de enfoque permite uma compreensão e uma visão do todo em suas mais variadas conexões, corroborando com nossos objetivos.

Como traz Pastana (2017), um dos focos da pesquisa qualitativa são “as pessoas e suas atividades, considerando suas interpretações à medida que interagem com outros e refletem a respeito de suas experiências e atividades cotidianas” (p.50). Em nosso caso, as vivências e atividades no ambiente escolar.

A condução da pesquisa foi feita na modalidade da pesquisa-participante, uma vez que esta possibilita a interação com os membros envolvidos e a imersão no ambiente a ser estudado para mudá-lo, de modo que haja melhoria nas práticas e na aprendizagem dos participantes (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

Acreditando que uma história em quadrinhos cujo propósito seja possibilitar o desenvolvimento de um conceito especificamente proposto, optamos, dentre as diversas possibilidades de uso das HQ, por utilizar uma história em

quadrinhos de nossa autoria. Assim, criamos nossa história em quadrinhos, de modo que ao longo da narrativa, os conceitos subjacentes ao conteúdo fossem sendo apresentados, desenvolvidos ou lembrados, chegando ao nosso significado institucional principal: as razões trigonométricas.

4.2 OS PARTICIPANTES

A pesquisa foi realizada junto a uma turma de 20 estudantes de 1º série do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Gravatá – Escola de Referência em Ensino Médio Professor Antônio Farias, escola na qual já atuamos como docente. A escolha por esta série da Educação Básica justifica-se pelo fato de que nesta etapa, os estudantes são levados a lembrar ou estudar os conceitos relacionados à Trigonometria no triângulo retângulo de modo que se possa, posteriormente, adentrar nas discussões para triângulos quaisquer e no ciclo trigonométrico.

4.3 A ORGANIZAÇÃO DAS ETAPAS DA PESQUISA

Godino, Batanero e Font (2008, p.16) trazem que “a realização efetiva dos processos de estudo requer a realização de sequências de práticas de planejamento, controle e avaliação (*supervisão*) que conduzem a processos meta-cognitivos”. Essas práticas são apontadas para os processos matemáticos, no entanto, estendemos as mesmas para nossa pesquisa no que diz respeito à importância desses processos reflexivos e de planejamento.

Ao propormos uma atividade didática dentro de nossa pesquisa, refletimos a respeito das dimensões que perpassam este processo. Dentro do EOS, temos suporte para isto. Ao agruparem as dimensões que se complementam duas a duas e, por conseguinte, complementam-se mutuamente, os autores nos levam às seguintes reflexões, explicitadas em Wilhelmi (2017):

1. Dimensão epistêmico-ecológica: Qual conteúdo você deseja abordar levando em consideração as possibilidades e restrições curriculares?

2. Dimensão cognitivo-afetiva: Como tornar o significado pessoal dos alunos evoluir para o institucional pretendido, levando em consideração seus interesses e expectativas?
3. Dimensão interacional-mediacional: Quais interações e meios facilitam a negociação de significados em um processo de estudo?

Estas três dimensões duais nos permitiram compreender o processo de ensino tendo como base uma visão articulada do mesmo (com relação aos objetos matemáticos envolvidos, ao contexto/instituições presentes e às pessoas envolvidas – estudantes e professor). Para ser possível perpassar estas dimensões, a pesquisa foi organizada nas seguintes fases:

Quadro 3 – Descrição das fases da pesquisa

I	Mapeamento de trabalhos que discutem o ensino e a aprendizagem de Trigonometria, trabalhos que trazem o uso de histórias em quadrinhos na educação, bem como os que abordam o Enfoque Ontossemiótico em sua base teórico-metodológica.
II	Aplicação de um questionário diagnóstico com os estudantes.
III	Desenvolvimento da sequência didática envolvendo a HQ.
IV	Aplicação da sequência didática com uma turma de 1º série do Ensino Médio.
V	Análise dos conflitos semióticos de caráter epistêmico e cognitivo, emergentes no contexto.
VI	Análise da idoneidade didática da sequência, a partir das ferramentas teóricas do EOS.

Fonte: O Autor, 2019.

Estas fases permitiram o alcance aos objetivos propostos de modo que a complementariedade entre eles nos levou a atingir o objetivo geral.

4.4 INSTRUMENTOS PARA COLETA

Para a coleta dos materiais, propomos a utilização dos seguintes instrumentos: questionário estruturado prévio (relacionado ao 1º objetivo específico); observações registradas em diário de campo; registro das atividades desenvolvidas

ao longo da sequência; registros fotográficos; gravações audiovisuais (relacionados aos objetivos específicos 3 e 4).

Delineando-se sobre o primeiro objetivo específico, que foi *compreender os conhecimentos iniciais dos estudantes sobre o conceito de razões trigonométricas, bem como os conhecimentos adjacentes a este conceito (semelhança de triângulos, proporcionalidade, razão de semelhança)*, foi aplicado um questionário estruturado prévio que permitiu traçar um perfil para a turma que participou do processo de instrução, bem como conhecer os conhecimentos que os estudantes mobilizam dentro deste campo específico. Esta fase pode ser caracterizada como diagnóstica. A seguir, tem-se o modelo do questionário aplicado com os estudantes.

Quadro 4 – Questionário para compreensão de conhecimentos dos estudantes

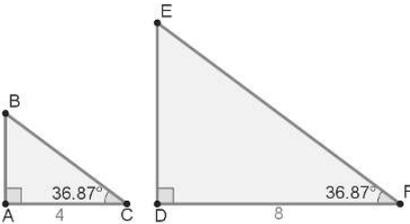
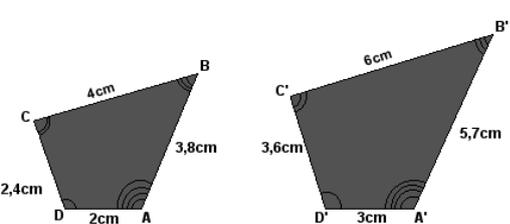
PPGECM – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática			
Questionário Diagnóstico			
Nome da Escola:			

Estudante (opcional):			

Idade: _____	Sexo:	Masculino ()	Feminino ()
1) Sobre Razões trigonométricas :			
Você já ouviu falar?		Sim ()	Não ()
Em caso afirmativo, em que situação da sua vida você ouviu falar?			

Você já estudou?		Sim ()	Não ()
Se sim, em que momento de sua vida escolar isso ocorreu?			

O que você entende sobre razões trigonométricas? (Não é necessária uma definição formal, podes falar sobre suas ideias, a importância, dar um exemplo).			

2) Observe as figuras abaixo e responda o que se segue:			
			

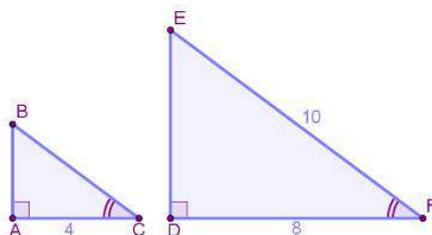
a) Em Matemática, existe o que chamamos de **semelhança de figuras**. É possível afirmar que os triângulos acima são semelhantes? E os quadriláteros? Por quê?

b) Descreva quais critérios você utilizou para chegar à conclusão do item anterior.

c) Em caso afirmativo do item (a), deve existir o que chamamos de **razão de semelhança** entre as figuras. Qual é a razão de semelhança entre os triângulos e entre os quadriláteros? Descreva/ os procedimentos utilizados para encontrar a solução.



3) Sabendo que os triângulos abaixo são semelhantes, responda o que se segue:



a) Quantas vezes o lado DF é maior em relação ao lado AC? _____

b) A partir da observação anterior, qual a medida do lado BC?

c) Sabendo que o ângulo C mede 30° , qual é a medida do ângulo E do triângulo maior?

d) Os triângulos acima são chamados de **triângulos retângulos**. Isto significa que seus lados possuem “nomes especiais”. Como se chama cada um deles (responda tendo como referência o triângulo maior):

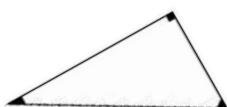
Lado EF: _____

Lado DF: _____

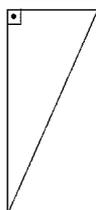
Lado ED: _____

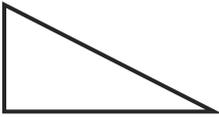
4) Quais dos triângulos a seguir são triângulos retângulos? Justifique sua escolha no quadro abaixo.

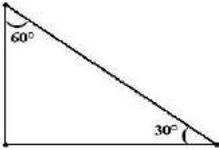
a)



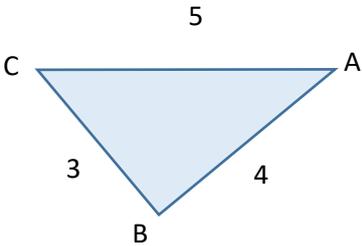
b)

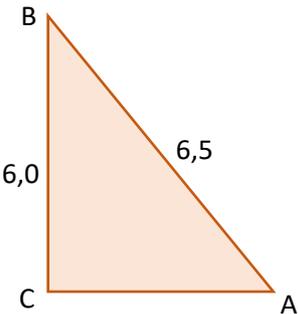


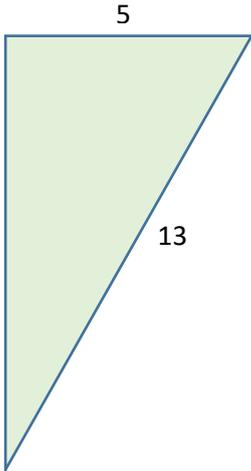
c) 

d) 

5) No triângulo retângulo, encontramos as chamadas razões trigonométricas – seno, cosseno e tangente, que estão associadas aos ângulos e aos lados. Observando os triângulos retângulos abaixo, em qual(is) deles o seno do ângulo A é igual 0,6? Justifique (de forma escrita, cálculos, etc.) sua escolha no quadro abaixo (caso não saiba responder, deixe explícito no quadro).







Fonte: O Autor, 2019.

A primeira questão teve como objetivo descobrir se os estudantes já tiveram contato com o conceito em alguma série de sua escolarização. O foco dos anos finais do Ensino Fundamental no que concerne à área da Geometria é a noção de proporcionalidade, semelhança de figuras e as relações métricas no triângulo retângulo (BNCC, 2018; PCN, 1998). A abordagem destes conceitos é estendida para a noção inicial da Trigonometria em algumas instituições. Esta informação é, portanto, importante e necessária, pois nos permite compreender tanto a questão da materialização do currículo nos anos finais do Ensino Fundamental, como a relação dos estudantes com os conceitos explicitados.

A segunda questão busca compreender as noções de *semelhança* dos estudantes, uma vez que é um conceito de extrema importância no contexto das

razões trigonométricas e deve ser abordado no 9º ano do Ensino Fundamental. Espera-se que os estudantes destaquem que as figuras são semelhantes, uma vez que possuem ângulos correspondentes iguais e lados proporcionais.

A terceira continua perpassando o conceito de semelhança, no entanto agrega outros, como a soma dos ângulos internos de um triângulo (que deve ser igual a 180°), a constância dos ângulos e a nomenclatura dos elementos do triângulo retângulo.

Na quarta questão, indagamos mais uma vez sobre o triângulo retângulo, com foco em seu reconhecimento a partir de diferentes representações, tendo o ângulo reto explícito ou não. Esta permite compreender se os estudantes têm domínio nas diferentes representações do triângulo e sabem argumentar a respeito.

A quinta e última questão traz uma situação envolvendo diretamente o conceito das razões trigonométricas, mais especificamente do seno de um ângulo agudo. Esperava-se, caso tenham tido contato com esta abordagem, que conseguissem estabelecer o valor do seno a partir da razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa dos triângulos retângulos.

Para atender ao segundo objetivo específico, foi desenvolvida uma sequência didática para o ensino e aprendizagem das razões trigonométricas, que tem como sua “pedra angular” uma história em quadrinhos a partir da qual foi delineado todo o processo de instrução. Cremos que é necessário esboçar a visão de sequência didática presente nesta pesquisa.

Sequência didática (SD), de modo geral, é a maneira pela qual o professor organiza as atividades concernentes ao ensino a partir dos procedimentos necessários e do núcleo temático envolvido (ARAÚJO, 2013). Ou seja, é a organização didática do professor mediante um ou mais conhecimentos a serem construídos. Nas palavras de Godino e cols. (2008, p.20), o “processo de instrução sobre um conteúdo ou tema matemático se desenvolve num determinado tempo mediante uma sequência de configurações didáticas”.

Segundo Zabala (2007), sequência didática é um corpo de “atividades ordenadas, estruturadas [...] para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”

(ZABALA apud PERETTI, 2013, p.6). Discutindo a respeito dos processos concernentes a uma SD, Guimarães e Giordan (2013) apresentam que

Sequências Didáticas são também instrumentos desencadeadores das ações e operações da prática docente em sala de aula. Em consequência, a estrutura e a dinâmica da SD são determinantes do planejamento das atividades por meio das quais os alunos vão interagir entre si e com os elementos da cultura. Na elaboração ou no planejamento de uma SD várias ações mediadas são estruturadas, cada qual por meio de ferramentas culturais específicas. [...] Nesta perspectiva o foco de atenção do professor ao elaborar a SD precisa estar no processo e não no produto da aprendizagem. (p.2)

Assim, a maneira como as atividades serão desenvolvidas em uma sequência precisam estar especificadas e estar integradas com o conhecimento que se quer construir com os estudantes. Nesse sentido, deve-se ter em mente

aspectos estruturais e organizacionais, tais como articulação com os temas da disciplina, clareza na proposta, adequação do tempo; aspectos conceituais, como abrangência do problema, contextualização; aspectos didáticos, como clareza e adequação dos objetivos, encadeamento dos conteúdos e ações didáticas; aspectos metodológicos, como organização das atividades e formas e procedimentos de avaliação. (LEDUR e MOLON, 2015, p.4)

Isso corrobora com a visão de Godino, ao trazer a necessidade de articulação entre as seis facetas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem de matemática (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional, ecológica).

A sequência didática foi pensada de modo a desenvolver os conceitos necessários para a aprendizagem das razões trigonométricas, bem como da consolidação deste conceito. A proposta da sequência com a HQ será apresentada de forma detalhada no capítulo 5.

A intervenção junto aos estudantes aconteceu no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) da instituição na qual eles estudam e o trabalho realizado de maneira colaborativa (em grupos e individualmente). O desenvolvimento desta pesquisa em campo é que trouxe os subsídios para alcançarmos os últimos objetivos específicos.

O terceiro objetivo versa em torno da identificação e análise dos conflitos semióticos epistêmicos e cognitivos emergentes da aplicação da sequência didática. Esses conflitos dizem respeito às disparidades que podem surgir entre os significados pessoais dos estudantes e os significados institucionais implementados

(conflitos cognitivos), bem como o grau de representatividade que estes significados têm em relação a um significado de referência.

Para atender este objetivo, buscamos analisar a representatividade das situações-problema, conceitos e proposições implementadas, além de nos debruçarmos no desenvolvimento progressivo dos estudantes frente a essas situações-problema propostas, através de seus argumentos e da resolução das atividades.

Por fim, para dar conta do quarto objetivo geral que é *avaliar a implementação da sequência didática por meio dos critérios de idoneidade didática*, buscamos suporte nas Ferramentas de Análise da Idoneidade Didática (GODINO, 2011), em suas dimensões: Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE), Cognitiva (FAC), Afetiva (FAA), Interacional (FAI), Mediacional (FAM) e Ecológica (FAE).

4.5 FERRAMENTAS E TÉCNICA DE ANÁLISE

Como já explicitado anteriormente, as dimensões podem ser discutidas em pares. A seguir, são apresentados os componentes e indicadores utilizados em cada uma dessas dimensões para as análises.

- **Dimensão epistêmico-ecológica**

Quadro 5 – Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE)

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.

Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.

Fonte: (GODINO, 2011, p.9, tradução nossa)

Quadro 6 – Ferramenta de Análise Ecológica (FAE)

Componentes	Indicadores
Adaptação ao currículo	a) os conteúdos, sua implementação e avaliação correspondem às diretrizes curriculares
Abertura à inovação didática	a) Inovação baseada em pesquisa e prática reflexiva b) Integração de novas tecnologias (calculadoras, computadores, TIC, etc.) no projeto educacional
Adaptação socioprofissional e cultural	a) os conteúdos contribuem para a formação socioprofissional dos alunos
Educação em valores	a) contemplam-se a formação em valores democráticos e o pensamento científico
Conexões intra e interdisciplinares	a) os conteúdos estão relacionados a outros conteúdos intra e interdisciplinares

Fonte: (GODINO, 2011, p. 14, tradução nossa)

Dimensão cognitivo-afetiva

Quadro 7 – Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC)

Componentes	Indicadores
Conhecimentos prévios (os mesmos elementos da idoneidade epistêmica são considerados)	a) os alunos têm os conhecimentos prévios necessários para o estudo do assunto (ou foram estudados previamente ou o professor planeja seu estudo) b) o conteúdo pretendido pode ser alcançado (tem uma dificuldade gerenciável) em seus vários componentes.
Adaptações curriculares às diferenças individuais	a) atividades de extensão e reforço estão incluídas. b) o acesso e a conquista de todos os alunos são promovidos.
Aprendizagem (os mesmos	a) os diferentes modos de avaliação indicam que os alunos alcançam a apropriação dos conhecimentos e competências pretendidos: compreensão

elementos da idoneidade epistêmica são considerados)	conceitual e proposicional; competência comunicativa e argumentativa; fluência processual; compreensão situacional; competição metacognitiva. b) a avaliação leva em consideração diferentes níveis de compreensão e competência. c) os resultados das avaliações são divulgados e utilizados para tomar decisões.
--	--

Fonte: (GODINO, 2011, p.10, tradução nossa)

Quadro 8 – Ferramenta de Análise Afetiva (FAA)

Componentes	Indicadores
Interesses e necessidades	a) as tarefas são interessantes para os alunos. b) são propostas situações para avaliar a utilidade da matemática na vida diária e profissional.
Atitudes	a) é promovida a participação em atividades, a perseverança, a responsabilidade, etc. b) argumentação é favorecida em situações de igualdade; o argumento é valorizado em si e não por quem o diz.
Emoções	a) a autoestima é promovida, evitando rejeição, fobia ou medo da matemática. b) as qualidades estéticas e de precisão da matemática são destacadas.

Fonte: (GODINO, 2011, p.11, tradução nossa)

Dimensão instrucional

Esta dimensão envolve as perspectivas interacional e mediacional, conforme apresenta-se nos quadros 9 e 10.

Quadro 9 – Ferramenta de Análise Interacional (FAI)

Componentes	Indicadores
Interação docente-discente	a) o professor faz uma apresentação adequada do tema (apresentação clara e bem organizada, enfatiza os conceitos-chave do assunto, etc.) b) reconhece e resolve conflitos de estudantes (perguntas e respostas são feitas, etc.) c) procura chegar a um consenso com base no melhor argumento. d) vários recursos retóricos e argumentativos são utilizados para envolver e captar a atenção dos alunos. e) facilita a inclusão dos alunos na dinâmica da aula.
Interação entre alunos	a) o diálogo e a comunicação entre os alunos são favorecidos b) eles tentam convencer a si e aos outros da validade de suas declarações, conjecturas e respostas, com base em argumentos matemáticos. c) a inclusão no grupo é favorecida e a exclusão é evitada
	a) contemplam-se momentos em que os alunos assumem a responsabilidade

Autonomia	pelo estudo (levantam questões e apresentam soluções, exploram exemplos e para investigar e conjecturar, usam uma variedade de ferramentas para raciocinar, estabelecem conexões, resolvem problemas e se comunicam).
Avaliação formativa	a) observação sistemática do progresso cognitivo dos estudantes

Fonte: (GODINO, 2011, p.12, tradução nossa)

Quadro 10 – Ferramenta de Análise Mediacional (FAM)

Componentes	Indicadores
Recursos materiais	a) materiais manipulativos e informatizados são usados para introduzir boas situações, linguagens, procedimentos, argumentos adaptados ao conteúdo pretendido. b) definições e propriedades são contextualizadas e motivadas usando situações e modelos concretos e visualizações
Quantidade de alunos e condições da aula	a) o número e distribuição de estudantes permite fluidez ao processo b) a sala de aula e a distribuição dos alunos é adequada para o desenvolvimento do processo instrucional pretendido.
Tempo (ensino coletivo/tutoria, tempo de aprendizagem)	a) o tempo (presencial ou não) é suficiente para a educação pretendida b) tempo suficiente é dedicado ao conteúdo mais importante do assunto c) tempo suficiente é dedicado ao conteúdo que apresenta mais dificuldade.

Fonte: (GODINO, 2011, p.13, tradução nossa)

Não é necessário que se faça uso de todos estes componentes, podendo-se adotar e discutir aqueles que se destacarem na construção e/ou implementação de processos formativos e de ensino e aprendizagem.

Na descrição dos fatos significativos para a análise, utilizamos em alguns momentos de falas nossas e dos estudantes. Fazemos uso das nomenclaturas “P” (professor) e “E” para os estudantes, seguido de um número natural (1 a 20) para diferenciá-los, sem identificação.

Para descrever e sistematizar a idoneidade didática no processo, utilizamos os termos BAIXA, MÉDIA, SATISFATÓRIA e ALTA. Esses termos nos servem apenas como um tratamento didático para a valoração da sequência. Assim, cada uma das facetas será apresentada dentro de uma destas categorias, subsidiadas pela discussão de seus componentes. Os capítulos que se seguem apresentam nossos resultados e discussão.

5 UM OLHAR SOBRE OS CONHECIMENTOS INICIAIS DOS ESTUDANTES

“Há muito mais em você do que imagina”
Professor Xavier (X-Men).

O questionário diagnóstico teve como objetivo trazer à tona os conhecimentos iniciais dos estudantes a respeito do conteúdo razões trigonométricas, bem como dos conceitos que são adjacentes a elas (como semelhança de figuras, proporcionalidade e triângulo retângulo). Com a primeira questão, que pode ser vista abaixo, esperávamos que os estudantes apresentassem informações de como eles entendem as razões trigonométricas, sua associação com o triângulo retângulo e a articulação das mesmas com outros contextos. Eles poderiam escrever sobre a importância que viam neste conceito ou dar um exemplo de sua aplicação.

Quadro 11 – Questão 1 do questionário diagnóstico

1) Sobre Razões trigonométricas :		
Você já ouviu falar?	Sim ()	Não ()
Em caso afirmativo, em que situação da sua vida você ouviu falar?		

Você já estudou?	Sim ()	Não ()
Se sim, em que momento de sua vida escolar isso ocorreu?		

O que você entende sobre razões trigonométricas? (Não é necessária uma definição formal, pode falar sobre suas ideias, a importância, dar um exemplo).		

Fonte: O Autor, 2019.

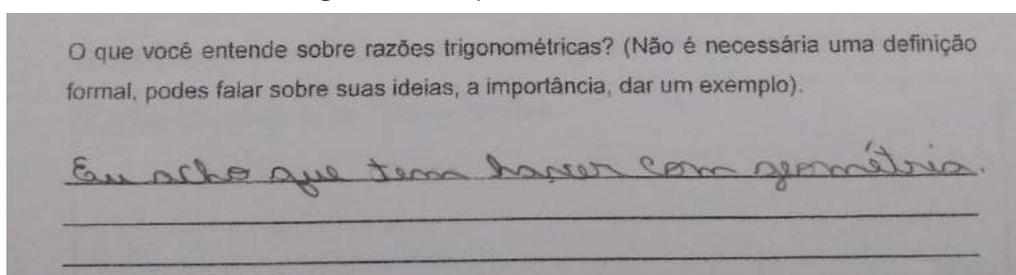
Em relação ao primeiro questionamento, dezesseis dos vinte estudantes responderam ter ouvido falar sobre as razões, no ambiente escolar. No entanto, apenas 11 responderam que estudaram o conteúdo, no 9º ano do Ensino Fundamental. Ressaltamos novamente que o foco dos anos finais do Ensino Fundamental em Geometria é a noção de proporcionalidade, semelhança de figuras e as relações métricas no triângulo retângulo (BNCC, 2018; PCN, 1998).

O fato de pouco mais da metade da turma ter estudado o conteúdo pode estar relacionado à não materialização do currículo de Matemática em sala de aula, em que muitas vezes os conceitos de Geometria são deixados para o final do ano e não é possível ser trabalhado em sua profundidade.

No contexto do EOS, dentre os componentes da faceta ecológica, há os que discutem a adaptação dos conteúdos ao currículo proposto. A partir destes resultados, podemos assumir que houve pouca representatividade deste conceito nos anos finais do Fundamental, caso que pode estar associado a diversos fatores, tais como a construção do currículo naquela comunidade escolar ou decisão do/a docente por não trabalhar com mais profundidade estes conceitos.

A imagem abaixo mostra que um dos estudantes concebia que o conceito de razões trigonométricas estava relacionado com a área da geometria, entretanto não houve aprofundamento em sua resposta, o que demonstra um conhecimento raso sobre o assunto ou a não fixação do mesmo.

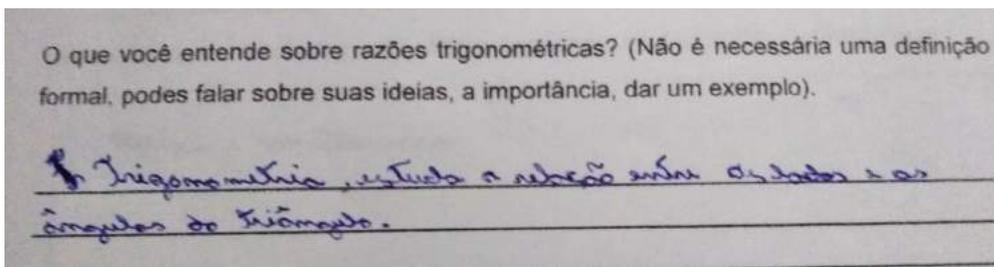
Figura 6 – Resposta do estudante E4



Fonte: O Autor, 2019.

Outra possibilidade para estas respostas superficiais é a de que os estudantes não conseguiram internalizar os significados institucionais do conceito de modo aceitável, o que levanta considerações dentro da faceta cognitiva do EOS: nos termos do Enfoque, os alunos construíram significados pessoais que distavam consideravelmente dos significados pretendidos ou implementados. Para corroborar, temos que apenas sete estudantes utilizaram os termos “seno, cosseno e tangente” no último questionamento e somente dois utilizaram a expressão “relação entre lados e ângulos do triângulo”, como pode ser visto no recorte abaixo.

Figura 7 – Resposta do estudante E10



Fonte: O Autor, 2019.

Apenas um estudante não respondeu ao último questionamento, uma vez que trouxe anteriormente que nunca tinha ouvido falar ou estudado sobre as razões trigonométricas.

Podemos inferir que, mesmo as noções primeiras para a trigonometria estarem propostas para os anos finais do Fundamental, os estudantes não iniciam o Ensino Médio com estes conhecimentos consolidados, o que pode trazer dificuldades na compreensão de outras relações (como a trigonometria para triângulos quaisquer e na circunferência). Daí a importância da retomada destes conceitos e de seu aprofundamento no Ensino Médio.

A segunda questão do questionário abordava a semelhança de figuras planas, mais especificamente triângulos. Esperávamos que os estudantes soubessem o que é a semelhança de figuras planas, conceito necessário para a aprendizagem das razões trigonométricas. Assim, eles precisavam estabelecer que as figuras eram semelhantes duas a duas uma vez que possuem o mesmo "formato", ainda que em tamanhos distintos, além de possuir os ângulos correspondentes congruentes. Segue a questão abaixo.

Quadro 12 – Questão 2 do questionário diagnóstico

2) Observe as figuras abaixo e responda o que se segue:

a) Em Matemática, existe o que chamamos de **semelhança de figuras**. É possível afirmar

que os triângulos acima são semelhantes? E os quadriláteros? Por quê?

b) Descreva quais critérios você utilizou para chegar à conclusão do item anterior.

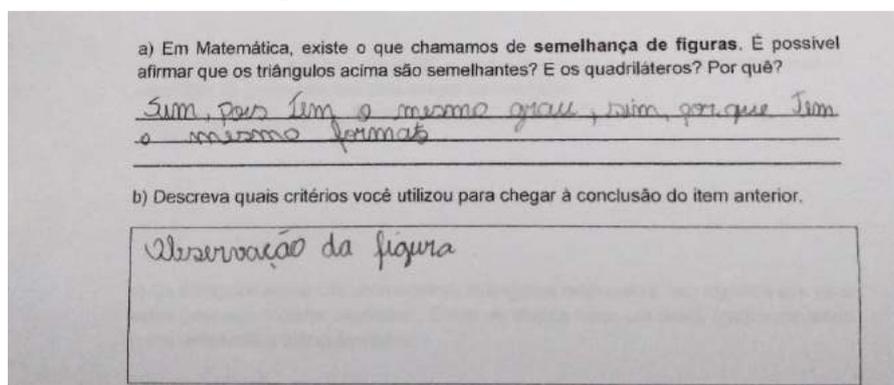
c) Em caso afirmativo do item (a), deve existir o que chamamos de **razão de semelhança** entre as figuras. Qual é a razão de semelhança entre os triângulos e entre os quadriláteros? Descreva/ os procedimentos utilizados para encontrar a solução

Fonte: O Autor, 2019.

Esperávamos que pudessem notar que os lados aumentam (ou diminuem) na mesma proporção (encontrando a razão de semelhança). Críamos que a razão de semelhança poderia não ser encontrada por grande parte dos estudantes por necessitar do algoritmo da divisão, o que para muitos ainda é um entrave.

Na resolução dos itens da referida questão, se percebeu que os estudantes conseguiam identificar características da semelhança (como o formato das figuras), no entanto as respostas demonstram que eles não têm consolidado o conceito, pois quando apontam para o formato da figura, nada afirmam sobre os ângulos. Era esperado que eles notassem a congruência dos ângulos correspondentes das figuras duas a duas (os triângulos e os quadriláteros). Todavia, essa percepção é apresentada em apenas uma resposta, como pode ser visto abaixo.

Figura 8 – Resposta do aluno E13



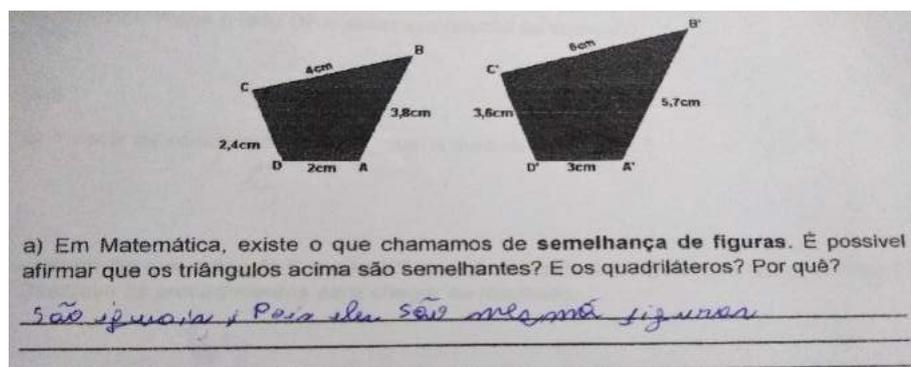
Fonte: O Autor, 2019.

Assim, a estudante consegue notar a congruência dos ângulos e a manutenção dos lados correspondentes de modo proporcional (noção compreendida

na frase “mesmo formato”). O restante dos alunos fez menção ou apenas ao formato ou à mudança de tamanho entre as figuras, justificando ser semelhante por manter o formato, mas não as medidas dos lados.

Em três respostas, parece haver certa confusão com o conceito de congruência. O recorte abaixo mostra a resposta de um dos estudantes, que também foi encontrada no questionário de outro aluno.

Figura 9 – Recorte do estudante E3

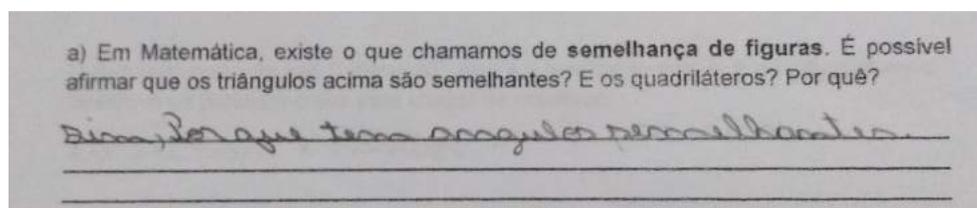


Fonte: O Autor, 2019.

A ideia de igualdade para este estudante está relacionada apenas ao formato da figura, havendo desconsideração para o aumento de uma em relação à outra, mesmo que mínimo. Este conflito pode ter relação com a manutenção da igualdade dos ângulos e do formato da figura, gerando um pensamento de que semelhança tem o mesmo significado de congruência, o que caracteriza um conflito semiótico cognitivo que pode gerar maiores dificuldades na compreensão dos conceitos geométricos.

O terceiro faz uso do adjetivo “semelhantes” para se referir aos ângulos, o que corresponde a um erro, uma vez que eles são congruentes.

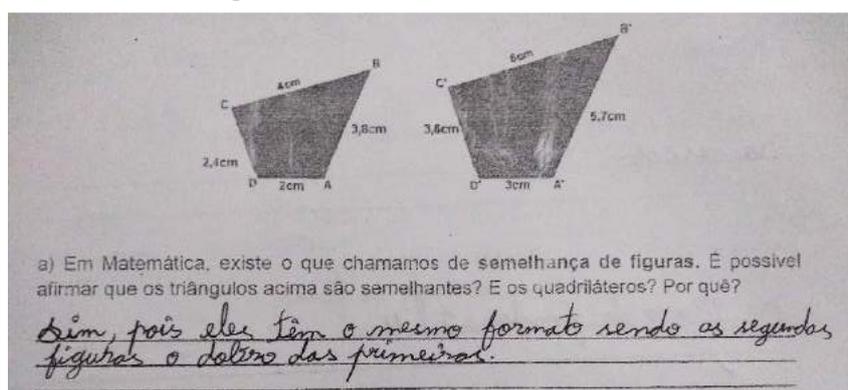
Figura 10 – Resposta do estudante E6



Fonte: O Autor, 2019.

Apenas um estudante aponta, de modo implícito, para a proporcionalidade entre os lados, ao afirmar que a figura maior tem medidas que são o dobro das medidas da figura menor, como pode ser visto na figura 11. No entanto, ele não esclarece se está referindo-se apenas aos triângulos, onde sua resposta é coerente, ou também para os quadriláteros, momento em que há um erro, uma vez que os quadriláteros têm a relação de 2:3).

Figura 11 – Recorte da estudante E11



Fonte: O Autor, 2019.

Estes resultados corroboram com o que nos aponta Medeiros (2012), ao se debruçar sobre as dificuldades no estudo da trigonometria. Dentre elas, é evidenciada uma dificuldade relacionada ao senso comum, de que figuras semelhantes são figuras parecidas, desconsiderando-se a congruência dos ângulos, conflito este apontado inclusive com professores.

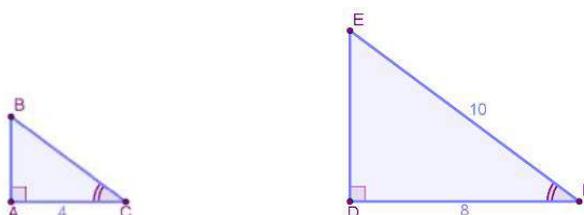
O último item desta questão, letra c, tratava sobre razão de semelhança, no entanto nenhum dos estudantes soube identificar a razão como uma constante relacionada à divisão entre as medidas dos lados das figuras. Isso pode ter ocorrido porque eles não sabiam da nomenclatura utilizada, pois notaram que havia uma relação entre os lados, porém não sistematizaram de modo que sua resolução ficasse explícita. Um dos motivos para a não resolução da questão pode ter sido o fato de os alunos não saberem o processo para encontrar esta razão, que está associado à divisão entre os lados proporcionais.

Este último fato está atrelado à questão de que existem termos ou símbolos em Matemática que assumem significados distintos de seu contexto natural. Em geometria, a palavra *corda*, por exemplo, refere-se a um segmento na circunferência; o símbolo de exclamação “!” indica o fatorial de um número (produto do número por seus anteriores inteiros até chegar ao 1). Razão naturalmente significa a capacidade para resolver ou julgar através do raciocínio. Porém, é imprescindível que ao se fazer uso deste termo em uma situação matemática, o estudante saiba associá-lo à comparação obtida entre dois números ou quantidades pelo quociente entre elas, utilizando os procedimentos necessários dentro de cada contexto apresentado⁸.

A terceira questão teve o objetivo de trabalhar a semelhança de figuras e a soma dos ângulos internos de um triângulo, especificamente a propriedade de manutenção dos ângulos correspondentes em figuras semelhantes. Esperávamos que os estudantes, já sabendo que as figuras são semelhantes, soubessem estabelecer a relação a partir da proporção entre os lados, afirmando que os ângulos correspondentes devem ser iguais.

Quadro 13 – Questão 3 do questionário diagnóstico

3) Sabendo que os triângulos abaixo **são** semelhantes, responda o que se segue:



- Quantas vezes o lado DF é maior em relação ao lado AC?
- A partir da observação anterior, qual a medida do lado BC?
- Sabendo que o ângulo C mede 30° , qual é a medida do ângulo E do triângulo maior? Descreva os procedimentos para chegar no resultado.
- Os triângulos acima são chamados de **triângulos retângulos**. Isto significa que seus lados possuem “nomes especiais”. Como se chama cada um deles (responda tendo como referência o triângulo maior):
Lado EF: _____

⁸ O termo razão também pode significar a diferença entre dois termos consecutivos de uma progressão aritmética (P.A.) ou o quociente entre dois termos consecutivos de uma progressão geométrica (P.G.).

Lado DF: _____
 Lado ED: _____

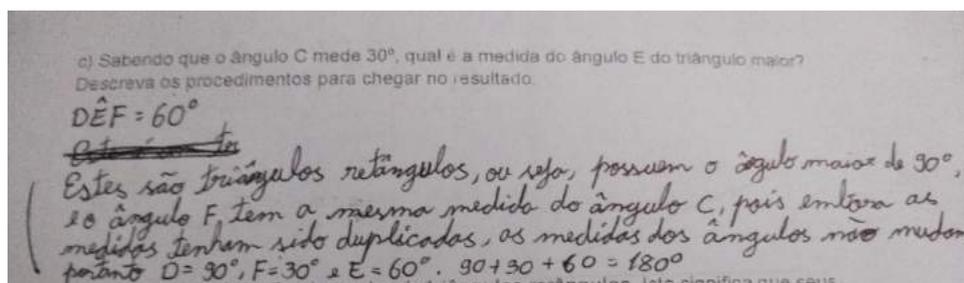
Fonte: O Autor, 2019.

No item “a”, todos os estudantes conseguiram perceber a relação de proporcionalidade entre os lados (2:1). Isso pode evidenciar seu domínio no que diz respeito ao crescimento e/ou decréscimo proporcional de uma figura plana, sabendo afirmar “quantas vezes uma figura é maior/menor que outra”. Porém, no item b, 4 alunos não encontraram corretamente a medida do lado BC (responderam que o lado BC media 3 unidades). Uma possibilidade é a desatenção na resolução do item, uma vez que responderam corretamente ao anterior, ao qual está relacionado.

Pode-se afirmar que eles compreendem que os lados aumentam ou diminuem seguindo a mesma proporção, embora esta ideia pareça estar presente em seu raciocínio de modo ingênuo (ou quando envolve números inteiros), sem muita consolidação do conceito, pois ao serem questionados sobre a razão de semelhança na questão anterior, não há menção explícita para a proporcionalidade entre os lados ou nenhum tipo de procedimento que dê subsídios para esta discussão.

Quanto ao valor do ângulo, eles precisavam utilizar a noção de correspondência de ângulos e a soma de ângulos internos. Três estudantes obtiveram o valor do ângulo tendo em vista a relação dos ângulos no triângulo (soma dos ângulos internos = 180°), como mostra o recorte a seguir.

Figura 12 – Recorte do estudante E4



Fonte: O Autor, 2019.

Este estudante faz uso de vários argumentos e linguagens na resolução e explicação de sua resposta: representa o ângulo, demonstra conhecer a propriedade da soma dos ângulos, bem como a manutenção da congruência dos mesmos em figuras semelhantes, apontando assim para conceitos consolidados em sua mente. Porém, os outros fora os três estudantes não obtiveram o mesmo resultado, errando o ângulo ou não sabendo responder.

Isso pode ter se dado pelo fato de a questão solicitar mais de uma noção necessária à sua resolução, o que, para muitos alunos, surge como um obstáculo, um conflito semiótico, pois além de compreender os conceitos separadamente, o estudante precisa estar apto a relacioná-los e utilizá-los nas estratégias de resolução de problemas. Como traz Godino *et al* (2008), existe uma abrangência de práticas mobilizadas nestes processos: situações-problema, conceitos, linguagens, propriedades, procedimentos e argumentos. Se em algumas destas o aluno tiver entraves, a resolução e compreensão do problema (seja um exercício, uma aplicação extramatemática) fica comprometida.

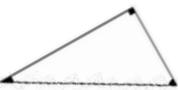
O último item da terceira questão questionava sobre o triângulo retângulo e seus lados (hipotenusa e catetos), no qual os alunos precisavam nomeá-los. No entanto, somente 9 estudantes responderam corretamente. O restante apresentou respostas que podem sugerir confusão entre conceitos: alguns responderam “*seno, cosseno e tangente*” – esta resposta pode indicar a tentativa de fazer uso dos termos em qualquer contexto ou naquele que lhe parecia mais apropriado; outros responderam “*lateral, base e lateral*” - indica um pensamento geométrico atrelado a quadriláteros (podendo ser mais especificamente a retângulos), no qual se apresenta o conceito de base e lateral, sem nenhuma relação específica com as características de um triângulo retângulo.

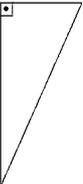
Na questão quatro, esperávamos que os estudantes soubessem afirmar quais os triângulos que eram retângulos, tanto pelo ângulo reto mostrado explicitamente como de modo implícito, com os triângulos em posição prototípica⁹ ou não. Os estudantes poderiam apresentar dificuldades em visualizar o triângulo retângulo caso ele não estivesse em posição prototípica ou quando o ângulo reto não aparecesse explícito.

⁹ Aquelas mais presentes nos livros didáticos ou até mais utilizadas pelo professor, tendo geralmente um dos catetos como sua base e o ângulo reto na parte inferior, de modo explícito.

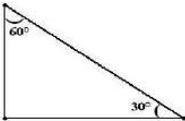
Quadro 14 – Questão 4 do questionário diagnóstico

4) Quais dos triângulos a seguir são triângulos retângulos? Justifique sua escolha no quadro abaixo.

a) 

b) 

c) 

d) 

Fonte: O Autor, 2019.

A resposta esperada é a de que os triângulos “a”, “b” e “d” são retângulos, uma vez que é possível encontrar o ângulo de 90° nos três (visualmente ou por meio de cálculos). Em relação ao triângulo “c”, os estudantes deveriam afirmar que não se pode ter certeza sobre ele, uma vez que o ângulo reto não pode ser encontrado. No entanto, o formato (com dois lados visualmente perpendiculares) pode indicar que o mesmo possui um ângulo reto.

Dos vinte estudantes, apenas quatro fizeram menção ao ângulo de 90° em suas justificativas. Dois destes afirmaram que todos os triângulos eram retângulos, pois possuíam o ângulo reto. Os outros dois, porém, afirmaram que o triângulo “b” era a única resposta correta. Este triângulo era o único que trazia o ângulo reto em sua forma mais comum, talvez a única conhecida por estes estudantes.

Dentro do EOS, essas representações podem ser associadas ao objeto matemático *linguagem*. Desse modo, é indispensável a apropriação do aluno sobre os diferentes tipos de linguagem e/ou representações nas situações matemáticas apresentadas.

Jung (2008) traz o ângulo como a união de duas semirretas de mesma origem, um lugar geométrico, uma região entre duas semirretas. Assim, é necessário que se trabalhe com os estudantes o estudo do ângulo de maneira diversa, estimulando no aluno o pensamento geométrico contextualizado e a capacidade de descrever o mundo que o cerca. No que diz respeito ao ângulo reto, sua representação não deve ser somente associada a um “pequeno quadrado com um ponto central”, dificultando outras abordagens nas situações matemáticas.

É interessante destacar o que trazem Almouloud *et al* (2004) ao tratar dos problemas relacionados à geometria. Os autores apresentam que a maioria destes tem origem didática e linguística, citando a dificuldade dos alunos em interpretar os problemas e de produzir uma explicação para a solução destes e a não compreensão de alguns entes matemáticos como um obstáculo para a esclarecimento de algumas propriedades.

O não domínio destes objetos pode acarretar alguns obstáculos na aprendizagem em Geometria, porque os estudantes podem ser levados a compreender que um conceito, uma propriedade, aparece somente de uma única forma ou linguagem, havendo prejuízo na aprendizagem. Em Matemática, a aprendizagem de um conceito perpassa a sua compreensão em várias representações e contextos, bem como a apresentação de argumentos e justificativas.

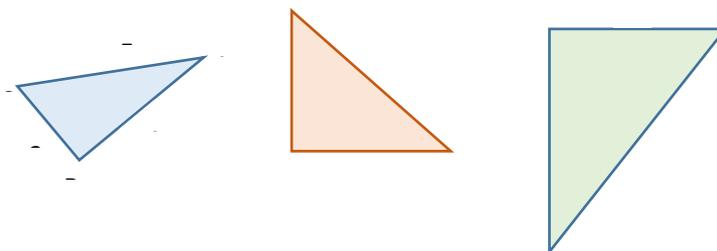
Neste âmbito, seis dos estudantes responderam que todos os triângulos eram retângulos, no entanto, sob justificativas errôneas ou sem nenhuma. Eles utilizaram argumentos como “*todos, porque todos os seus ângulos são diferentes*” ou “*todos os lados são diferentes*”. Estas últimas respostas indicam que os estudantes confundiram o conceito de triângulo retângulo com o conceito de triângulo escaleno (lados e ângulos distintos), não abordando nada sobre a especificidade do triângulo retângulo.

De modo geral, esta questão trouxe indicativos de que os estudantes têm dificuldade no conceito de triângulo retângulo, sendo levados a identificar aqueles cujo ângulo de 90° está explícito, além de fazer uso de outros conceitos, o que dá indícios de que existe dificuldade na classificação de uma figura quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos.

A última questão buscou identificar se os estudantes tinham domínio das razões trigonométricas, vistas como a relação entre a hipotenusa e os catetos do triângulo retângulo. Esperávamos que os estudantes soubessem estabelecer o seno de um ângulo como a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa dos triângulos dados.

Quadro 15 – Questão 5 do questionário diagnóstico

5) No triângulo retângulo, encontramos as chamadas razões trigonométricas – seno, cosseno e tangente, que estão associadas aos ângulos e aos lados. Observando os triângulos retângulos abaixo, em qual(is) deles o seno do ângulo A é igual 0,6? Justifique (de forma escrita, cálculos, etc.) sua escolha no quadro abaixo (caso não saiba responder, deixe explícito no quadro).



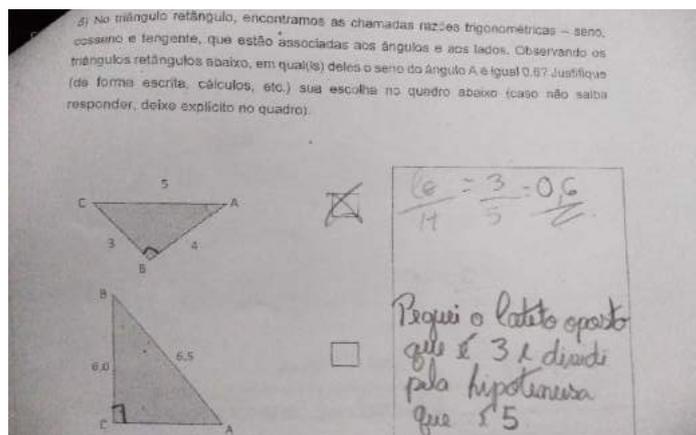
Obs: valores das medidas dos lados disponíveis para os alunos

Fonte: O Autor, 2019.

Uma de nossas hipóteses era a de que os triângulos em posições não prototípicas poderiam trazer dificuldades no estabelecimento de qual dos lados é a hipotenusa e quais são os catetos, dificultando a realização dos cálculos. Isso devido ao fato de que os estudantes geralmente têm modelos geométricos em sua mente que generalizam para toda situação matemática, criando obstáculos.

Dos vinte estudantes, dezoito não souberam responder à questão. Apenas dois estudantes responderam corretamente, valendo-se inclusive da linguagem usualmente conhecida para cateto oposto (C.O.) e hipotenusa (H), além de explicar o porquê de utilizar tais números na ordem proposta, como mostra a imagem a seguir.

Figura 13 – Recorte da questão 5 (E9)



Fonte: O Autor, 2019.

O fato de somente 2 alunos terem conseguido responder a esta questão pode indicar, no mínimo, três assertivas : (1) este conceito não foi apresentado e discutido de maneira eficaz no 9º ano do Ensino Fundamental; (2) mesmo sendo trabalhado, os alunos não conseguiram sistematizar e internalizar as razões enquanto relação entre os lados do triângulo retângulo, muito menos sua dependência para com o ângulo ao qual se refere; (3) a apresentação dos triângulos em posições não prototípicas dificultou a visualização dos elementos do triângulo, o que traz à tona nossa reflexão e hipótese enquanto possibilidade na resolução da questão.

A análise do questionário pode esclarecer quais os conhecimentos que os estudantes conseguiam mobilizar diante de problemas envolvendo triângulos, semelhança e razões trigonométricas: notou-se que eles conseguem perceber a manutenção dos lados proporcionais em figuras semelhantes, mesmo não estabelecendo a razão de semelhança por meio de uma divisão; quando explícitos, evidenciam a congruência dos ângulos correspondentes em figuras semelhantes; além de identificarem um triângulo retângulo e seus componentes, desde que estes estejam evidentes ou que seja possível calculá-los.

Alguns conceitos e propriedades que deveriam estar consolidados na mente dos alunos foram externados de modo errado, evidenciando erros conceituais e de procedimento, como o conceito de semelhança (confundido em alguns

momentos com o de igualdade de figuras planas), a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, a definição dos componentes de um triângulo retângulo – hipotenusa, catetos e o ângulo reto – bem como o estabelecimento da razão de semelhança entre figuras planas. Isto corrobora com o que traz Medeiros (2012), ao apontar que “outro fator que limita o ensino e a aprendizagem de trigonometria é a falta de conhecimento de alguns conceitos geométricos e algébricos que são base fundamental para compreender conceitos trigonométricos” (p.11).

Ainda em relação ao conceito de semelhança, o grupo mostrou que compreende tanto a noção de crescimento ou decrescimento proporcional entre figuras quanto a manutenção das características das figuras, mesmo não sabendo explicar ou argumentar suas respostas. No que diz respeito à outra característica de semelhança (congruência de ângulos correspondentes), os alunos parecem não perceber isso ou não deixam claro em suas respostas.

A evidência maior foi a falta de argumentação lógica na resolução das atividades, episódio que atingiu grande parte do grupo. Isso pode ter ocorrido pelo fato de não se trabalhar com a argumentação em Matemática seja ela escrita ou oral. O Enfoque Ontossemiótico nos apresenta o *argumento* como um dos objetos matemáticos essenciais nos sistemas de práticas postos em ação diante de uma situação-problema. Todavia, a característica comum para as propostas tradicionais de aprendizagem em Matemática é a da resolução de muitos exercícios repetitivos e que muitas vezes não levam o estudante a pensar sobre seu próprio raciocínio, impedindo processos reflexivos e que usem argumentos lógico-matemáticos necessários no contexto das práticas matemáticas.

A partir desses processos o aluno pode estruturar seu pensamento, fazer uso de várias linguagens e representações, bem como saber resolver os problemas por etapas, utilizando um campo de conceitos que o ajudem a trilhar o caminho para a resolução correta.

Nesse sentido, apontamos para a importância de investigar uma intervenção sobre os processos de ensino e aprendizagem das razões trigonométricas, uma vez que este conteúdo precisa estar consolidado nos alunos para o prosseguimento dos estudos em Geometria, tendo uma boa passagem à trigonometria na circunferência e às funções trigonométricas, e contribuindo para o

desenvolvimento do pensamento geométrico, competência importante para a percepção do mundo que os cerca.

6 O CAMINHO A SER SEGUIDO: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

“Daqui a um tempo nós teremos que escolher entre o que é certo e o que é fácil.”
Alvo Dumbledore (Harry Potter)

A construção do sistema didático para a aprendizagem das razões trigonométricas perpassa o uso de uma história em quadrinhos que desenvolvemos durante nosso trabalho de conclusão de curso (VASCONCELOS, 2016), tendo como uma das bases o trabalho de Pereira (2011), o qual elenca um conjunto de conhecimentos necessários à aprendizagem das funções trigonométricas.

Um dos objetivos foi discutir a HQ como um material potencialmente significativo para o ensino e a aprendizagem das razões trigonométricas, através do trabalho com conhecimentos prévios e com as facetas do conhecimento didático-matemático propostas no EOS.

A apresentação dos conceitos na HQ se dá como parte integrante da história (em diálogos, pensamentos ou como um problema a ser resolvido pelos personagens), mas também em situações além da história (problemas e perguntas para o leitor, que não influenciam seu seguimento). O processo se apresenta da seguinte maneira:

- **Conteúdo:** Razões Trigonométricas no triângulo retângulo
- **Objetivos de aprendizagem:**
 - ✓ Identificar a razão existente em figuras semelhantes, em particular, em triângulos e sua relação com os ângulos e os lados.
 - ✓ Compreender o conceito de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).
 - ✓ Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo;
 - ✓ Determinar uma razão trigonométrica de um ângulo agudo conhecida outra;
 - ✓ Resolver problemas envolvendo distâncias a locais inacessíveis utilizando razões trigonométricas;
 - ✓ Estabelecer relações entre as razões trigonométricas.
- **Ano:** 1^a ano do Ensino Médio

- **Tempo estimado:** Oito aulas (50 min cada)
- **Recursos:** Folhas A4, lápis, borracha, transferidor, régua, história em quadrinhos, questionários com situações-problema.

Desenvolvimento: Para facilitar o estudo progressivo dos conceitos até a aprendizagem das razões trigonométricas, nossa sequência foi dividida em quatro momentos, aos quais chamamos sessões, que objetivaram a inserção dos estudantes neste campo como uma caminhada segura para o processo. O quadro 11 revela esta divisão.

Quadro 16 – Resumo da organização da SD

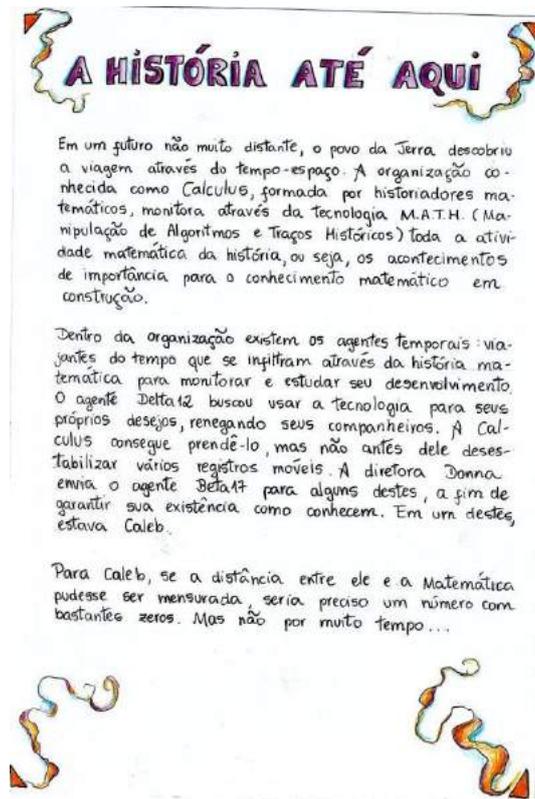
Sessão I: Contexto inicial – a imersão na HQ	Sessão II: Investigando o triângulo retângulo	Sessão III: Investigando razões de semelhança	Sessão IV: Arco final – resolvendo o problema
Situação proposta pela HQ Discussão sobre ângulos e semelhança de figuras	Discussão sobre os elementos do triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras) O problema da pirâmide	Discussão sobre razões no triângulo retângulo Descobrimto as razões para ângulos notáveis	Resolução de atividade proposta pela HQ Finalização da história

Fonte: O Autor, 2019.

(Sessão I – Duas aulas): Neste momento, tem-se o primeiro contato com a turma, onde são explicados o objetivo da vivência e a proposta metodológica. Após as explanações iniciais, é apresentada aos estudantes a história em quadrinhos que norteará todo o processo de aprendizagem. A HQ é distribuída individualmente. Sua leitura é feita em conjunto, tendo os alunos subdivididos em grupos de três a quatro pessoas (dependendo da dinâmica da turma).

Uma das primeiras páginas da história apresenta um resumo do conteúdo da HQ, de modo a deixar o grupo a par do enredo. O professor comunica aos estudantes que durante a leitura da HQ serão feitas pausas que servirão para a resolução de um problema proposto ou para a discussão de alguma situação relevante. Esses momentos precisam ser realizados em conjunto, de modo que todos os estudantes participem ativamente do processo. A figura 14 mostra a página de introdução.

Figura 14 – Página introdutória da HQ.



Fonte: O Autor, 2019.

Esta página apresenta as personagens que, inicialmente, podem não trazer nenhuma identificação para com os estudantes. Entretanto, esta apresentação inicial surge como um recurso plausível nas histórias em quadrinhos, pois se pode dar continuidade à história partindo-se de pontos variados que o leitor não teve acesso, por exemplo. Em sala de aula, este recurso – página de narrativa introdutória – permite que o professor apresente o conteúdo proposto e a relação que os personagens têm com o assunto, por exemplo.

Ao longo da história, os estudantes podem interagir com as personagens através do recurso narrativo conhecido como “quebra da 4ª parede”¹⁰. Com o seguimento da leitura, chega-se à primeira página que discute um conteúdo matemático: ângulos. Dois dos personagens principais interagem e discutem um pouco sobre o conceito de ângulo.

¹⁰ A quebra da 4ª parede ocorre quando um personagem da história se reporta ao leitor, indo além do seu universo. Este conceito surgiu inicialmente no teatro e ocorria quando o ator se reportava ao público em frente ao palco, “quebrando a parede” que separa o cenário do público.

Figura 15 – Conceito de ângulo.



Fonte: O Autor, 2019.

Como pode ser observado na figura acima, os personagens relacionam o conceito com uma situação de sua rotina: o chão da calçada, que é formado por hexágonos. Ao fazer essa relação, os estudantes (em sala) são levados a pensar sobre a presença dos ângulos em seu cotidiano. Caso isso não ocorra espontaneamente, o professor utiliza-se deste momento para fazê-los refletir.

A partir disso, trabalha-se com eles o desenvolvimento histórico dos ângulos, recurso presente na HQ, como mostra a figura 16.

Figura 16 – Ângulos em aspectos históricos.

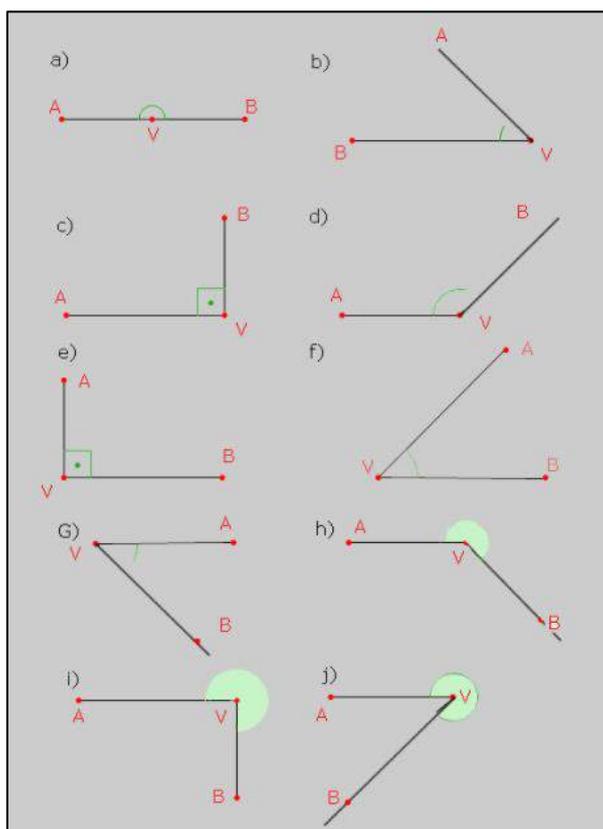


Fonte: O Autor, 2019.

Nesta página, surge a legenda “RECORDAR É VIVER”. A frase serve como indicação de uma pausa maior na leitura para discutir-se conhecimentos que se acredita que os estudantes já tiveram contato, tendo suas concepções prévias a respeito do assunto, podendo ou não estar atreladas a vivências escolares.

Para aprofundamento nestes aspectos, os estudantes são levados à manipulação do transferidor para identificação dos vários tipos de ângulos (agudo, obtuso, reto, etc.), fazendo relação com os ângulos do triângulo. A seguir, tem-se uma exemplificação.

Atividade I – Medição de ângulos com o transferidor



Como mostra a figura 16, além do panorama histórico, a página apresenta algumas *setas*. O professor deve levar os estudantes a pensarem a respeito dos tipos de ângulos, solicitando aos estudantes que, com o uso do transferidor, meçam os ângulos em destaque. A partir das respostas, pode-se fazer a sistematização:

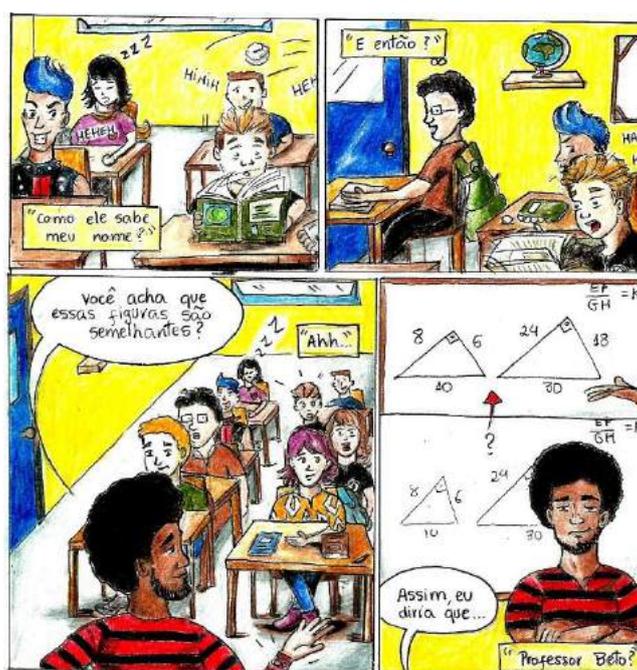
Ângulo agudo = menor que 90°

Ângulo reto = igual a 90°

Ângulo obtuso = maior que 90°

Com o seguimento da leitura, os estudantes se deparam com uma situação vivenciada por um dos personagens principais – Caleb – que leva à discussão de figuras semelhantes.

Figura 17 – O problema das figuras semelhantes



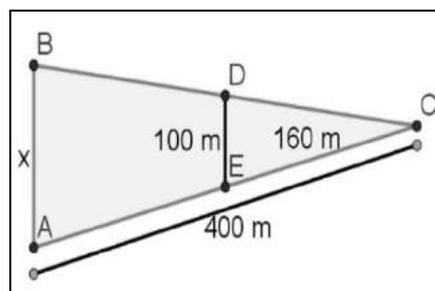
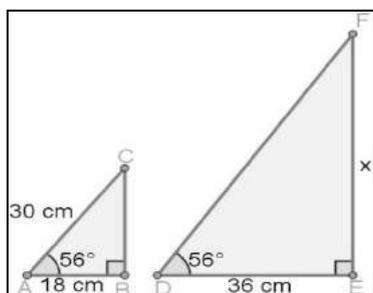
Fonte: O Autor, 2019.

No terceiro e quarto quadros, o personagem do professor/agente do tempo pergunta se as figuras apresentadas são figuras semelhantes. A seta apontada indica o uso desta situação para trabalhar com os estudantes o conceito de semelhança: o que faz duas figuras serem consideradas semelhantes? Qual a relação existente entre seus lados? E entre seus ângulos? Estes questionamentos são importantes para levar os alunos a refletirem sobre suas respostas ou convicções.

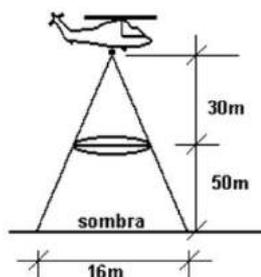
Após as discussões iniciais, são mostrados outros exemplos nos quais os alunos podem discutir a semelhança. A atividade a seguir mostra algumas abordagens para este momento.

Atividade II – Semelhança

- 1) Utilizando os conceitos de semelhança sistematizados, responda o que se segue.
- a) Observando os triângulos a seguir e sabendo que eles são semelhantes, determine o valor desconhecido em cada uma das situações.



- 2) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura anterior. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco mede, em m, aproximadamente:



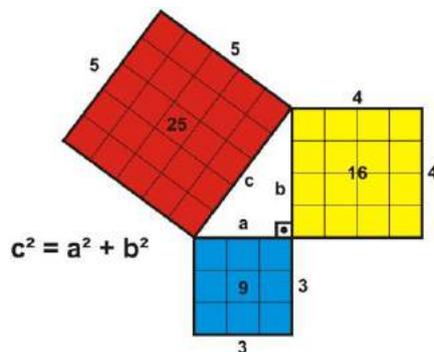
É dada ênfase à semelhança de triângulos uma vez que o trabalho com as razões se dará com esta figura, mais especificamente com o triângulo retângulo.

(Sessão II – Duas aulas): Este momento pode ser iniciado com a retomada da leitura até a página na qual ela foi encerrada, lembrando a contexto da história. O quadrinho passa a trazer uma situação que envolve figuras planas e que, em seguida, é interrompida para discutir a semelhança em triângulos retângulos. Desse modo, será trabalhado a partir da página mostrada:

- ✓ A presença dos triângulos nos mais variados cenários;

- ✓ Triângulos retângulos: o que os caracteriza, o caso da semelhança entre seus lados (catetos e hipotenusa) e o teorema de Pitágoras, como ilustrado na figura 18.

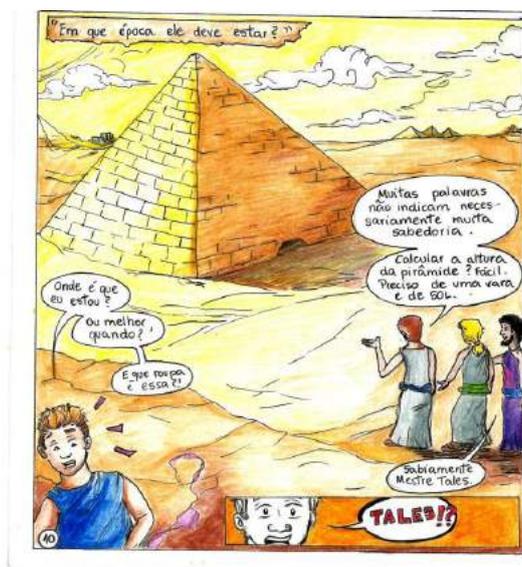
Figura 18 – Visão geométrica do teorema de Pitágoras



Fonte: As narrativas e a matemática¹¹

Dando prosseguimento à leitura, o personagem Caleb é levado a uma situação na qual ele se encontra com Tales de Mileto em uma situação bastante famosa associada a este conteúdo.

Figura 19 – O problema da altura da pirâmide.



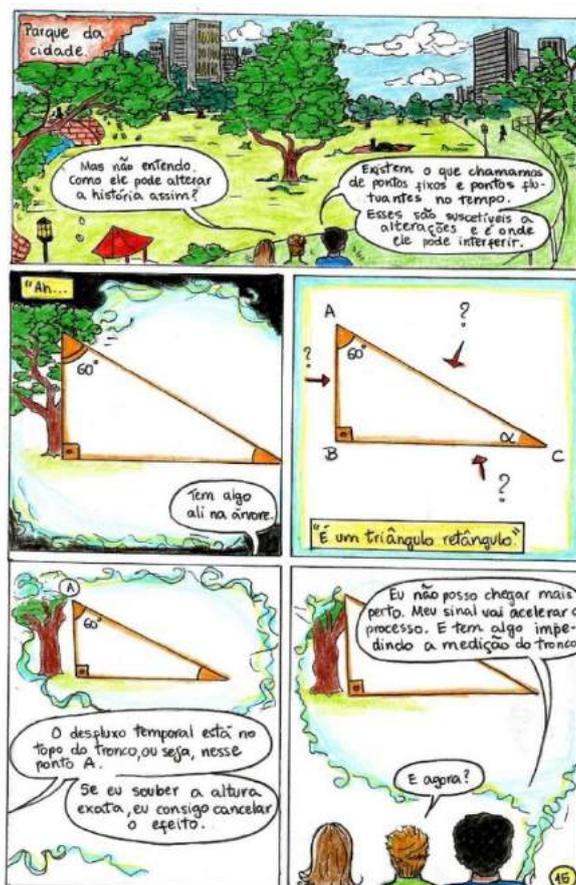
Fonte: O Autor, 2019.

¹¹ Disponível em: <http://asnarrativaseamatemtica.blogspot.com.br/>. Acesso em fev. 2018.

Para este momento, são realizadas duas atividades: os grupos discutem e apresentam para a turma seu entendimento a respeito do problema; sistematização, buscando relacionar as falas dos estudantes com o aspecto matemático trabalhado na situação (a semelhança entre os triângulos isósceles que são formados).

Dando continuidade à leitura, após algumas páginas um novo problema surge. Este relaciona-se diretamente com o enredo da história e com o conteúdo que está sendo apresentado. Neste ponto da história, os personagens Caleb, Júlia e o agente Beta17 são levados ao parque da cidade através do sinal do bracelete do agente. Ao chegarem ao local, deparam-se com uma situação problemática (figura 20).

Figura 20 – O problema do “desfluxo temporal”.



Fonte: O Autor, 2019.

O professor utiliza este momento para relembrar os nomes dos lados de um triângulo retângulo (hipotenusa, catetos) e o processo para identificá-los. Ao

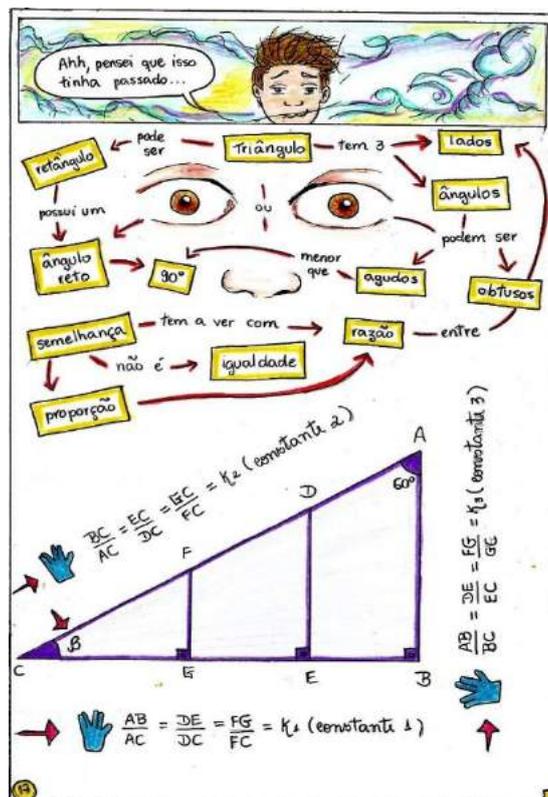
compreenderem o que a situação propõe, pausa-se novamente a leitura para que os estudantes tentem encontrar maneiras de solucionar a situação.

Um certo tempo é reservado para discussão e sistematização. Em seguida, é feita a socialização e comparação com a maneira que os personagens resolveram, estabelecendo as semelhanças e diferenças. É importante permitir o processo de argumentação dos estudantes na resolução do problema, dando os direcionamentos necessários.

(Sessão III – Duas aulas): Para iniciar este momento, os estudantes são questionados sobre o prosseguimento da história e de como o conteúdo trabalhado influencia a mesma. Após isso, são retomados os conceitos mais abrangentes e inclusivos, para poder chegar ao contexto das razões trigonométricas.

Como pode-se notar na figura 21, é apresentado um mapa de conceitos relacionados ao tema, ao mesmo tempo em que se apresenta a ideia inicial das razões no triângulo retângulo.

Figura 21 – Conceitos e razões de semelhança.

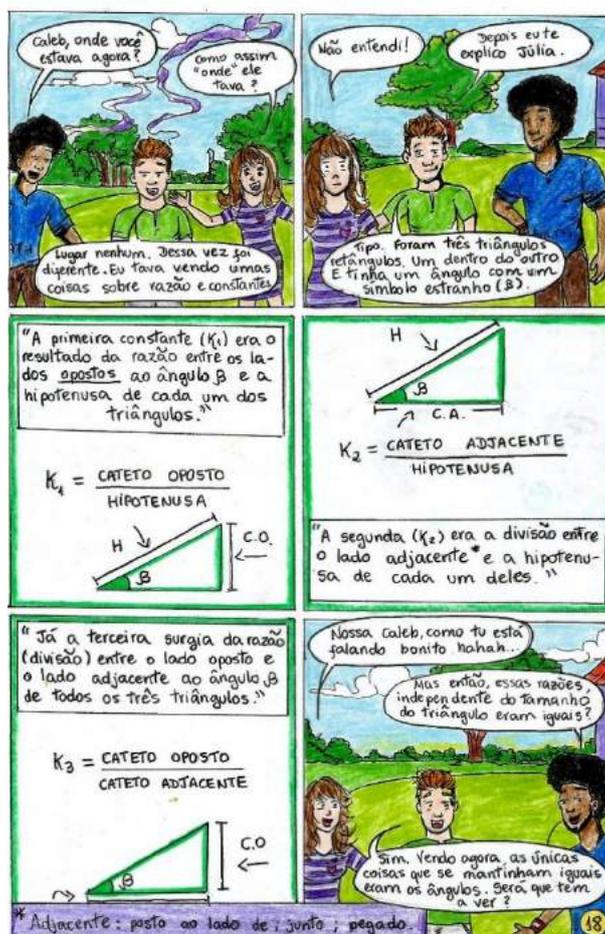


Fonte: O Autor, 2019.

Neste momento, em grupos, os alunos fazem seus próprios mapas, relacionando os conceitos da maneira que estes entendem como a mais interessante (sempre orientados pelo professor). Assim como em outras páginas, as setas indicam momentos para intervenção:

- ✓ os estudantes são levados a medir com a régua os lados indicados (AB, BC, etc.) e realizar as divisões, anotando em seus cadernos os resultados obtidos.
- ✓ em seguida, são levados a refletir sobre qual elemento dos triângulos não se altera, buscando relacionar as razões ao ângulo β do triângulo.

Figura 22 – As razões trigonométricas.



Fonte: O Autor, 2019.

Após as reflexões, a página seguinte da HQ traz uma sistematização a respeito destas "razões especiais". Nela, chega-se as razões trigonométricas conhecidas como seno, cosseno e tangente.

(Sessão IV – Duas aulas): Após a retomada da leitura desta sistematização, os estudantes realizam uma atividade voltada para a compreensão destas razões, para os ângulos de 45° e 60° (uma vez que o de 30° já terá sido realizado pelo problema da HQ). A seguir, tem o exemplo para o ângulo de 45° .

Atividade III – Descobrimo as razões para ângulos notáveis (Adaptado de Miranda, 2010)

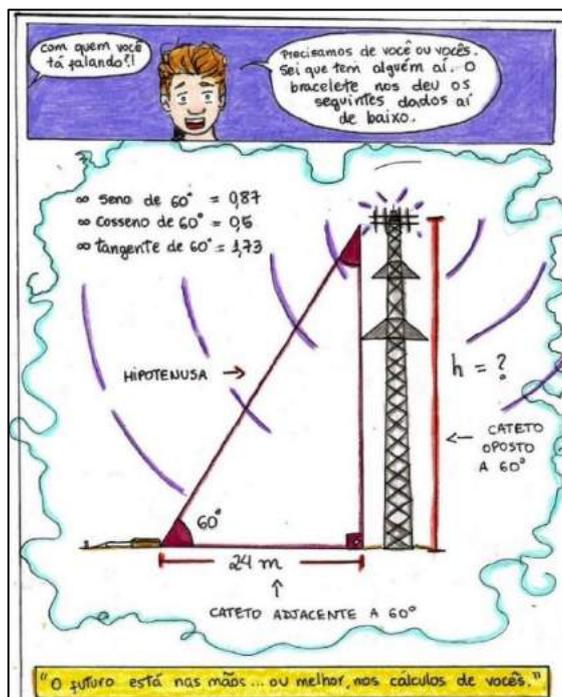
- 1) Construa três triângulos retângulos diferentes, mas que todos tenham um ângulo agudo de 45° . Em seguida, meça o comprimento dos lados dos triângulos e completa o quadro abaixo. Apresenta os resultados das razões com duas casas decimais.

	Triângulo A	Triângulo B	Triângulo C
Hipotenusa			
Cateto oposto ao ângulo de 45°			
Cateto adjacente ao ângulo de 45°			
Cateto oposto / hipotenusa			
Cateto adjacente / hipotenusa			
Cateto oposto / cateto adjacente			

- a) da observação do quadro, o que se pode concluir? Formule uma conjectura levando em consideração o que foi observado.
 b) tente encontrar uma explicação para afirmar ou não a conjectura formulada.
 c) enuncie uma generalização.

Esta atividade pode ser adaptada de modo a estar de acordo com o nível educativo dos estudantes com os quais se está trabalhando. Pode-se utilizar também as demonstrações advindas do trabalho com o triângulo equilátero (com relação aos ângulos de 30° e 60°) e com o quadrado e sua diagonal (para o ângulo de 45°), opção escolhida por nós para o trabalho com os alunos. Para finalizar a leitura da HQ, os estudantes são levados a resolver mais um problema que definirá o rumo da história. A figura 23 mostra-o na HQ.

Figura 23 – O problema final



Fonte: O Autor, 2019.

Neste momento, o professor pode evidenciar os seguintes aspectos: Que relação precisa ser utilizada? Com qual das três razões trigonométricas essa relação corrobora? Partindo destes questionamentos, os estudantes resolvem o problema, utilizando os conhecimentos trabalhados ao longo da sequência didática. A sistematização do problema ocorre com a produção artesanal da última página da HQ. Individualmente ou nos grupos formados, o resultado é acrescentado à história e dois finais são possíveis de serem desenhados:

- Os estudantes encontram corretamente a altura e a história finaliza de modo que o futuro é salvo, mantendo o desenvolvimento da história matemática.
- Os estudantes não encontram a altura de forma correta e a história é alterada, causando um futuro distópico. (Neste caso, há a intervenção do professor para compreender onde os estudantes erraram, fazendo-os repensarem suas estratégias de resolução). Assim, pode-se refazer a arte final.

Por fim, trabalha-se com alguns problemas que relacionem as razões trigonométricas, buscando sanar as dúvidas que possam vir a surgir. A seguir, temos uma exemplificação (podendo sempre ser modificado e complementado de acordo com as necessidades da turma).

Atividade IV – Problemas envolvendo as razões trigonométricas

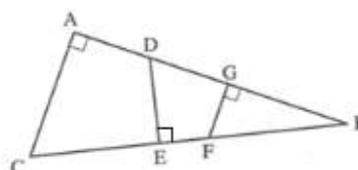
1) Quais são as igualdades verdadeiras?

$tg \hat{B} = \frac{AC}{AB}$

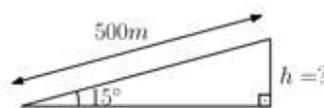
$sen \hat{B} = \frac{AB}{CB}$

$tg \hat{B} = \frac{DE}{EB}$

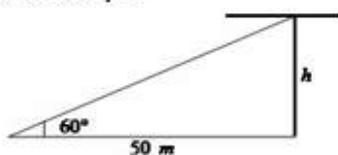
$cos \hat{B} = \frac{FG}{FB}$



2) Um avião decola com uma inclinação de 15° em relação ao horizonte. Após percorrer 500m nesta direção, qual será a altura do avião em relação à pista? (Utilize $sen 15^\circ = 0,26$; $cos 15^\circ = 0,97$; $tg 15^\circ = 3,73$;



3) No intuito de medir a altura de uma torre, um topógrafo utilizando um teodolito esquematizou a seguinte situação:



Determine a altura da torre de acordo com o esquema apresentado.

Proposta de avaliação: Uma avaliação que se preocupe com a construção dos conceitos, domínio dos procedimentos e propriedades pelos estudantes, bem como sua capacidade de argumentação e justificação crítica, deve ser um dos intuítos de todo o processo de ensino e aprendizagem em matemática.

Nesta sequência, o processo avaliativo se dá ao longo de todo o seu desenvolvimento: na participação das discussões (com argumentos válidos); nas apresentações da resolução das atividades, explicando como as realizaram; no uso

adequado dos instrumentos de medição, assim como na finalização com o problema final, participando do desenho da página final da história em quadrinhos, de modo engajado e participativo.

7 IDONEIDADE DIDÁTICA DA SEQUÊNCIA PARA A APRENDIZAGEM DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

“A falha é a neblina na qual vislumbramos o triunfo.” Homem de Ferro

Neste capítulo, trataremos a discussão sobre a valoração da sequência didática implementada com a história em quadrinhos. Para tanto, discutiremos as atividades desenvolvidas ao longo de todo o processo e faremos uso das ferramentas teóricas de idoneidade didática desenvolvidas no âmbito do marco teórico do Enfoque Ontossemiótico, explicitadas em nossa metodologia.

Como indicado anteriormente, nossa sequência foi dividida em 4 unidades temáticas, de modo a desenvolver os conceitos necessários de maneira progressiva. As unidades/sessões serão discutidas tendo em vista as seis facetas que dentro do EOS condicionam os processos de ensino e aprendizagem: epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva, interacional e mediacional.

As ferramentas descritas podem ser aplicadas à análise de um processo pontual de estudo implementado numa aula, ao planejamento/desenvolvimento de uma unidade didática ou a um nível global, como pode ser o desenvolvimento de um curso ou proposta curricular (GODINO, BATANERO, FONT, 2008).

Ressaltamos que apenas as idoneidades epistêmica e cognitiva serão discutidas por sessão, uma vez que demandam um olhar mais específico para cada momento. As outras serão apresentadas de forma contínua e não divididas em unidades temáticas, produzindo uma compreensão mais geral do processo para estas facetas.

Após a discussão de cada idoneidade, apresentamos sua valoração como BAIXA, MÉDIA, SATISFATÓRIA ou ALTA. Como explicitamos na metodologia, esta é uma divisão puramente didática, que facilita o olhar e a compreensão sobre o processo de ensino e aprendizagem, norteando a interpretação e a reflexão para futuras intervenções.

7.1 IDONEIDADE EPISTÊMICA

Esta faceta diz respeito ao conteúdo matemático compreendido no âmbito institucional, de modo que se perceba qual o grau de representatividade que os significados implementados (ou pretendidos) possuem em relação a um (ou mais) significado(s) de referência (GODINO, 2011). No capítulo dos Estudos Antecedentes, se pode encontrar diferentes abordagens que apontam para os conteúdos e conceitos a serem vivenciados dentro de uma proposta de ensino para o estudo da trigonometria, em nosso caso, das razões trigonométricas.

Uma sequência para o ensino e aprendizagem em Matemática dentro desta idoneidade requer um trabalho que leve em consideração os conhecimentos anteriores necessários à construção do que se propõe, os conceitos que fazem parte do eixo da Matemática que se quer ensinar, bem como a busca e organização para que o aluno compreenda e domine o conhecimento, tendo em vista as diferentes situações-problema, linguagens, definições, procedimentos, proposições e processos de argumentação adequados e representativos para o significado institucional em questão.

Cada sessão buscou desenvolver um ou mais conceitos específicos importantes para a aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo, que é o nosso significado institucional pretendido.

(Sessão I) – Este foi o primeiro momento que os estudantes tiveram contato com a história em quadrinhos. Como todo o enredo foi desenvolvido pensando nos conceitos subjacentes à aprendizagem da trigonometria, o primeiro arco da história conta com a noção de ângulo.

Pela leitura, é apresentada uma das definições para o conceito de ângulo (figura 24). Essa noção proposta no quadrinho dá subsídios para discutir as ideias iniciais dos estudantes sobre o que caracteriza um ângulo, como ele pode ser representado, em quais locais eles são encontrados e quais os instrumentos de medição que podem ser utilizados.

Figura 24 – Definição de ângulo abordada pela personagem Júlia



Fonte: O Autor, 2019.

A definição mostrada na figura acima foi a que utilizamos para a socialização e discussão do conceito. Além da mesma, discutimos sobre as representações associadas ao ângulo, bem como alguns aspectos históricos relacionados (figura 25), no sentido de refletirmos na matemática enquanto conhecimento socialmente compartilhado.

Figura 25 – Aspectos históricos dos ângulos



Fonte: O Autor, 2019.

Creemos que a atividade de exploração histórica poderia ter sido melhor trabalhada, com o acréscimo de outros textos e fontes para a discussão em grupo e sistematização do conceito.

A atividade que se seguiu permitiu a exploração de ângulos presentes no laboratório onde os encontros aconteceram, levando a discussão para o reconhecimento do ângulo de 90° . Este momento da atividade é de extrema importância, pois aponta para o trabalho articulado da HQ com o ambiente no qual os estudantes se encontram. Como traz Godino (2011), é necessário movimentar

situações de contextualização e aplicações: perceber os ângulos no ambiente e pensar sobre sua definição formal a partir da HQ se mostra como uma situação levemente articulada nesse sentido.

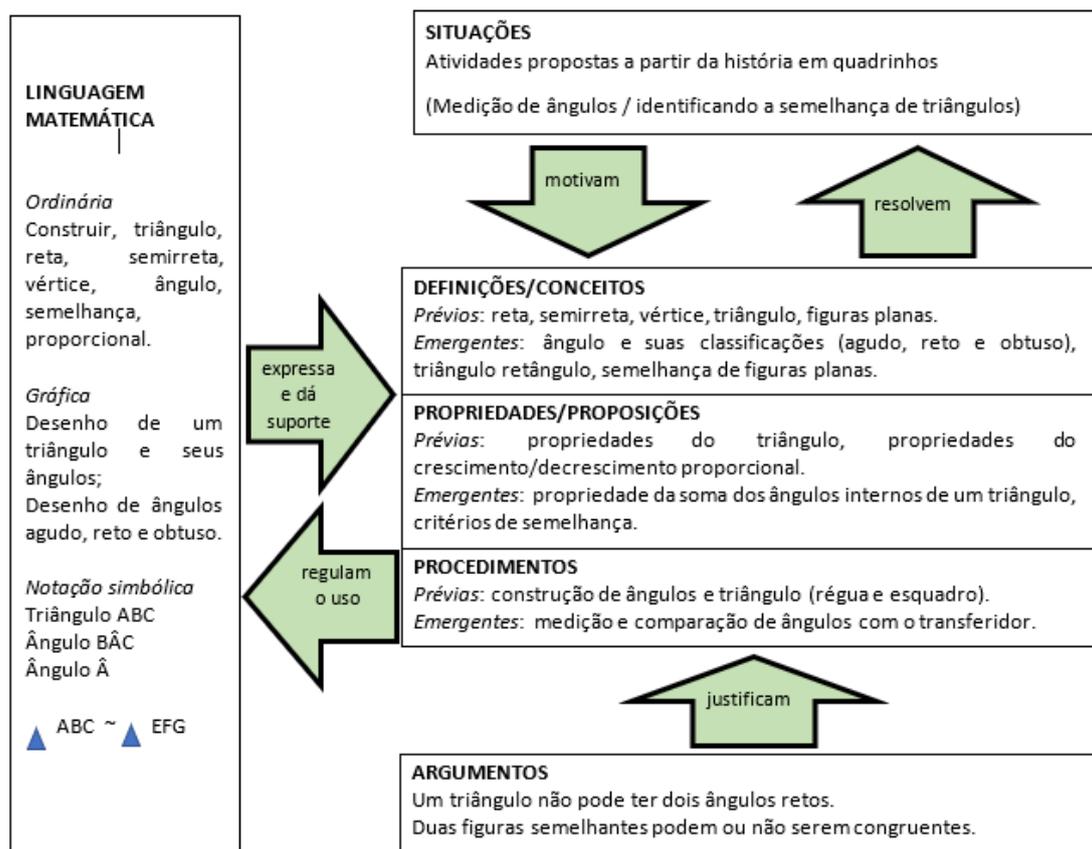
A atividade com o uso do transferidor mostra-se como uma tarefa procedimental relevante para o processo, pois permite sistematizar a classificação dos ângulos segundo sua medida (agudo, reto e obtuso), sendo fundamental para a construção das razões para os ângulos do triângulo retângulo.

A *linguagem* estava de acordo com o nível dos estudantes, uma vez que não tiveram dificuldades para compreender as explicações e atividades solicitadas, ao mesmo tempo em que se fez uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal e gráfica). Assim, podemos dizer que as linguagens apresentadas nesta unidade temática são representativas para a aprendizagem de ângulos.

Nesta mesma sessão, há uma discussão de uma situação descrita na HQ que leva à semelhança de triângulos, outro conhecimento importante para o desenvolvimento da sequência. Neste momento, foi realizada uma divisão em dois grupos para pensarem se as figuras são semelhantes, elencando pontos que justifiquem suas respostas e argumentos. Esta atividade propõe uma situação na qual os estudantes precisam analisar, refletir e generalizar uma definição. Por fim, realizamos a sistematização a partir dos pontos destacados pelos estudantes.

Para melhor compreensão dos objetos matemáticos em movimento desta sessão e sua representatividade, abaixo temos a *configuração epistêmica* emergente da mesma, tendo como base para sua composição o trabalho de Osorio e González (2017):

Figura 26 – Configuração epistêmica da sessão I



Fonte: O Autor, 2019.

Por meio desta configuração, evidencia-se a relação existente entre os objetos matemáticos (linguagem, proposições, conceitos, procedimentos e argumentos) e sua interdependência. Fica claro o caráter inicial no objeto *argumentos*, fato que pode estar relacionado à carência deste tipo de atividade com estudantes em disciplinas como a matemática, na qual os alunos acreditam que não há necessidade de justificação para suas colocações.

Outro ponto a ser considerado é o fato de a situação descrita na HQ para o trabalho com os ângulos e semelhança de figuras não potencializar tantas discussões, levando os estudantes a pensarem em respostas mais concisas. Destacamos a importância desses processos discursivos, pois como trazem Giacomone, Godino, Wilhelmi e Blanco (2016),

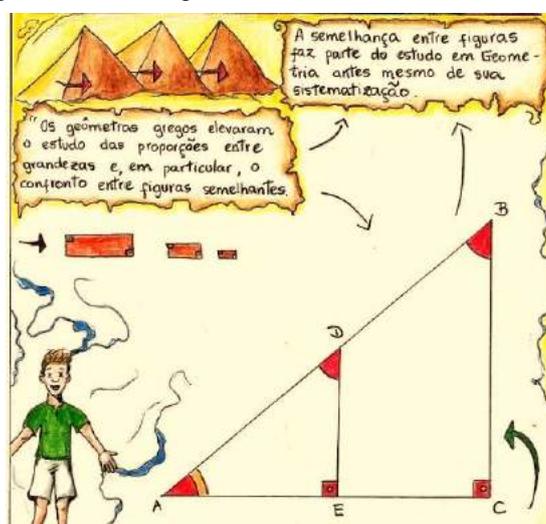
A prática matemática compreende não somente os momentos finais de sistematização e generalização dos resultados, sendo que inclui também os momentos de indagação, ensaios, provas e refutações, nos quais o 'estudante' formula os enunciados e fornece argumentos sobre sua verdade ou falsidade. (pp.16-17)

Assim, é importante a criação de situações nas quais os alunos falem, argumentem, questionem e proponham soluções baseadas em justificativas.

(Sessão II) – Este momento da sequência teve o objetivo de discutir o triângulo retângulo e seus elementos, além de continuar o trabalho com semelhança de figuras, agora especificamente para este polígono.

A atividade inicial leva à investigação de dois triângulos retângulos semelhantes (figura 27). Indicamos algumas medições a serem feitas, seguidas de algumas razões. O objetivo foi compreender as regularidades presentes entre as medidas dos lados proporcionais de figuras semelhantes.

Figura 27 – Triângulos semelhantes inseridos na HQ

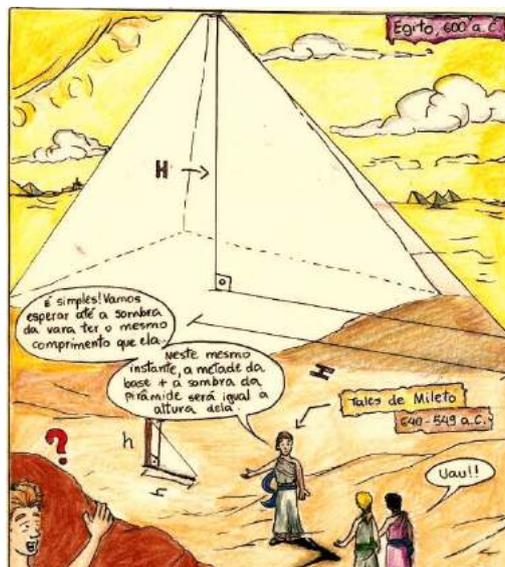


Fonte: O Autor, 2019.

Após realizarem as medições, os estudantes deveriam interpretar os dados obtidos: responder por escrito e depois socializar o que eles compreendiam a partir das razões. Esta tarefa possui representatividade no campo da linguagem, uma vez que propõe uma situação de expressão matemática e de interpretação, componente destacado para esta idoneidade. Nossa proposta era sempre instigar justificativas fundamentadas, fossem orais ou escritas.

Em um segundo momento, é proposta dentro da narrativa da HQ uma situação-problema que relaciona um pouco de história com o conteúdo abordado: o famoso problema da altura da pirâmide e Tales de Mileto (figura 28).

Figura 28 – Problema da altura da pirâmide



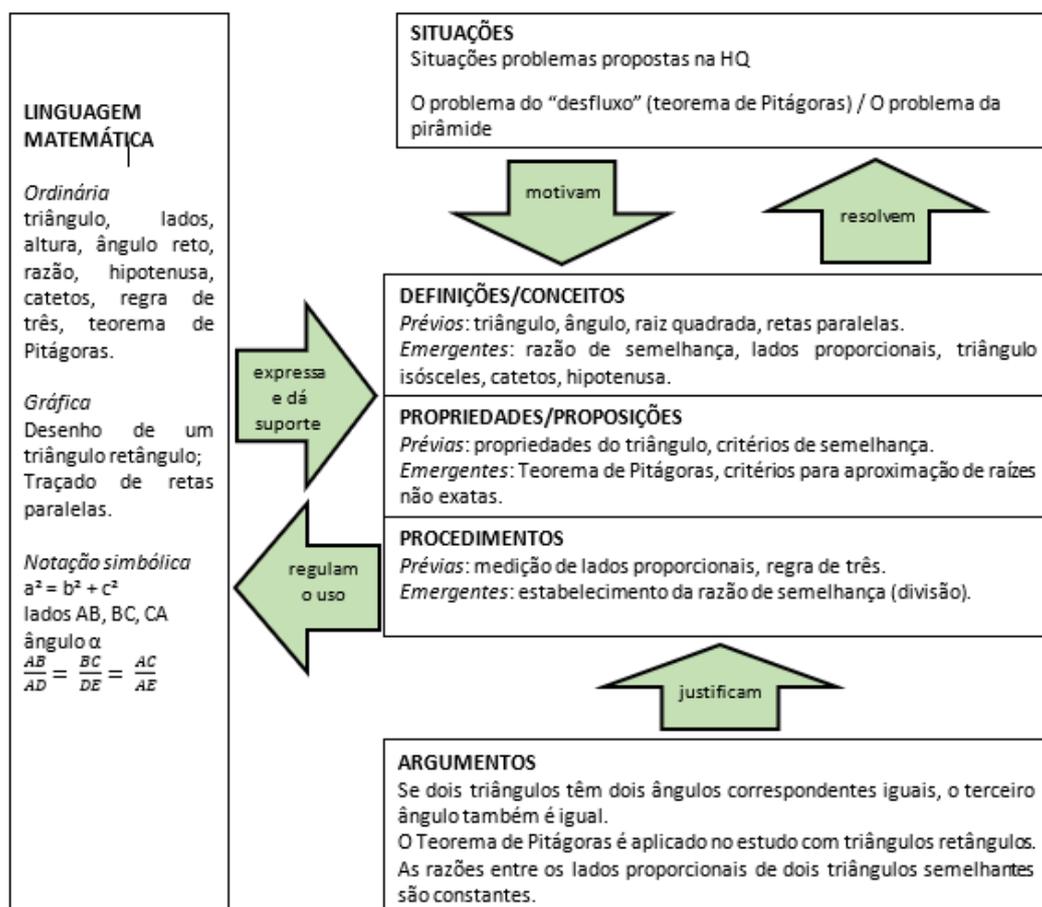
Fonte: O Autor, 2019.

Partindo do raciocínio da personagem, os alunos, divididos em grupos, passaram a arrazoar sobre a estratégia de Tales, socializando com o grande grupo suas conclusões. Esta atividade retoma a noção de semelhança de triângulos, levando a compreensão do conteúdo em uma situação específica, que como na sessão anterior, traz o recurso do apoio histórico. Ela se mostra importante ao ter um argumento histórico, corroborando com o que nos é apresentado nos trabalhos de Bortoli (2012) e Oliveira (2013).

Ao longo desta sessão, foi possível retomar os critérios de semelhança, as propriedades de um triângulo (agora com foco no triângulo retângulo), o processo de regra de três, além de discutir o Teorema de Pitágoras, a razão de semelhança e as noções de proporcionalidade.

A configuração epistêmica para esta sessão pode ser vista logo abaixo, tornando evidente um avanço no objeto matemático *argumentos*, assim como fazendo uso de conceitos e propriedades discutidos anteriormente como suporte para os emergentes.

Figura 29 – Configuração epistêmica da sessão II



Fonte: O Autor, 2019.

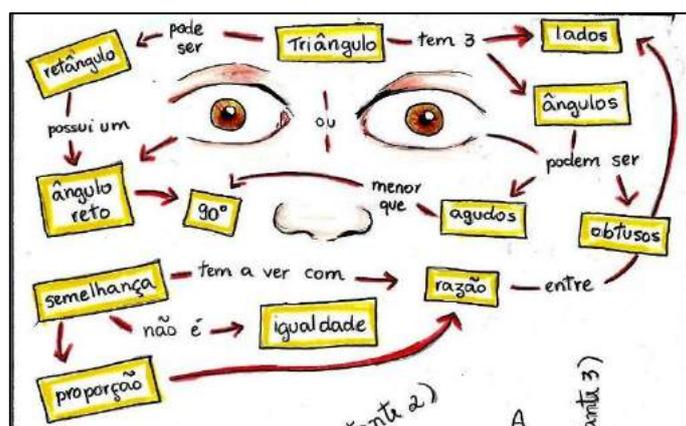
A melhoria no que diz respeito aos argumentos pode estar relacionada às relações estabelecidas com os conceitos sistematizados na sessão anterior, além de que a situação descrita na HQ permitiu maior discussão: os estudantes precisavam compreender o raciocínio da personagem e sistematizar o pensamento, explicando para a turma. É importante que se dê significado ao que se estuda, pois, conforme Piaseski (2010), ao tratar dos estudos em Geometria, é através deste conhecimento que o aluno deve ser capaz de refletir sobre os ensinamentos recebidos e aplicá-los, sempre levando em consideração a natureza do problema.

(Sessão III) – Com o objetivo de levar os estudantes do estudo da semelhança entre triângulos retângulos para a obtenção das razões de semelhança

conhecidas como razões trigonométricas, esta sessão foi iniciada com a reflexão sobre alguns conceitos-chave no estudo.

Para isto, a leitura da história em quadrinhos foi retomada até chegarmos na página na qual havíamos pausado. A linguagem continuava acessível aos alunos, de modo que a leitura transcorria com leveza e facilidade. A página permite a percepção sobre vários conceitos presentes em nossa sequência, como um mapa de conceitos¹². Desse modo, os alunos deveriam elaborar seus próprios mapas, tendo este (figura 30) como modelo.

Figura 30 – Representação dos conceitos na HQ



Fonte: O Autor, 2019.

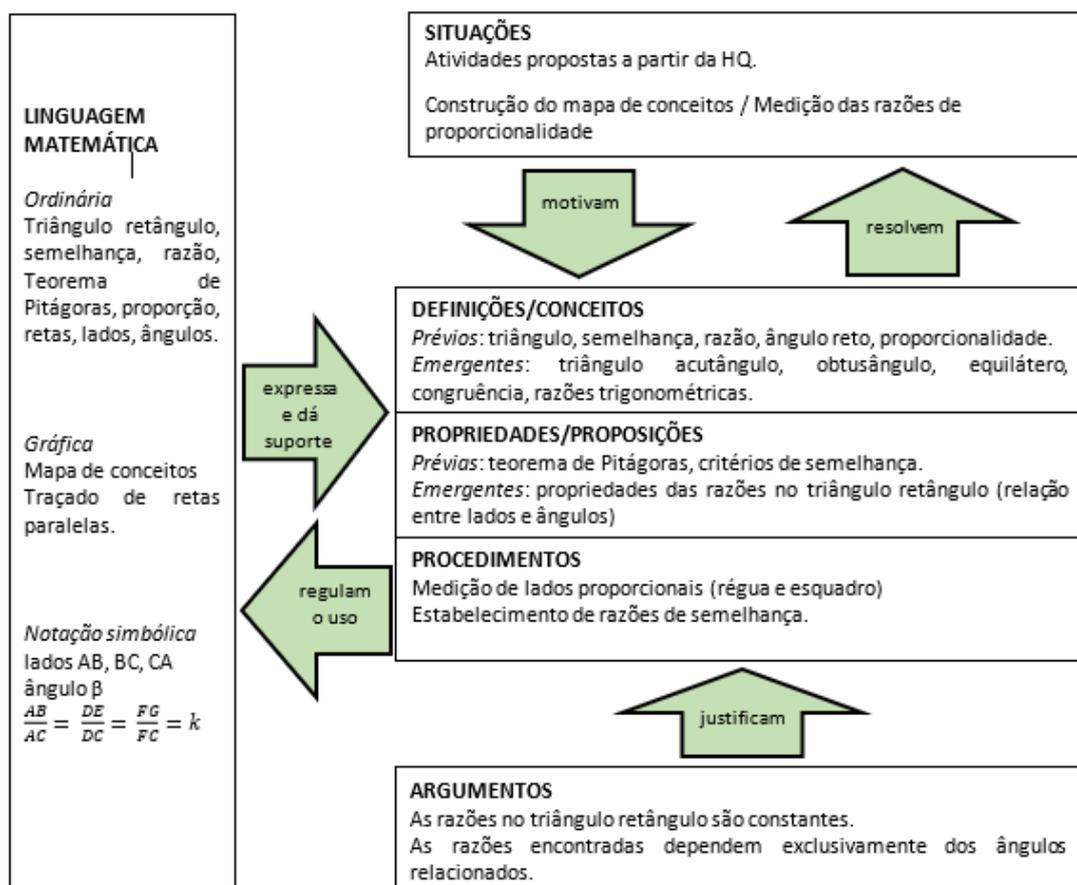
Passos (2005) aponta a importância do desenvolvimento dos conceitos geométricos para a aprendizagem do estudante, assim como em um avanço em seu desenvolvimento conceitual.

Dando continuidade, na segunda tarefa é necessário realizar medições em triângulos retângulos e calcular as razões propostas. Este procedimento é indispensável para a continuação do estudo, adequado ao nosso contexto. Refletimos a respeito dos resultados para se chegar no entendimento das razões trigonométricas enquanto constantes ligadas aos ângulos do triângulo, corroborando com Godino (2011) ao apontar a importância da problematização e da criação de situações que propiciem a generalização.

¹² Não utilizamos o termo “mapa conceitual” por acreditarmos que o mesmo se refere a uma produção mais complexa e elaborada. A representação feita na história em quadrinhos surge como algo inicial.

Abaixo, temos as relações existentes entre os objetos que emergiram nesta sessão, tendo a permanência de alguns conceitos e propriedades que contribuíram para a sistematização do conceito proposto.

Figura 31 – Configuração epistêmica da sessão III



Fonte: O Autor, 2019.

Como fica evidente, foram propostas situações que mobilizaram processos de generalização das propriedades, de modo a encontrar as razões trigonométricas. As análises sobre as respostas movimentam processos de negociação entre as definições, os procedimentos e as propriedades.

(Sessão IV) – Na quarta e última seção de nossa sequência, tivemos o objetivo de finalizar todo o processo partindo da resolução de alguns problemas que utilizam as razões trigonométricas, sendo um deles a resolução final da história em

quadrinhos. Foi proposta inicialmente a sistematização das razões trigonométricas para os ângulos notáveis (30° , 45° e 60°), através de demonstrações no triângulo equilátero e no quadrado.

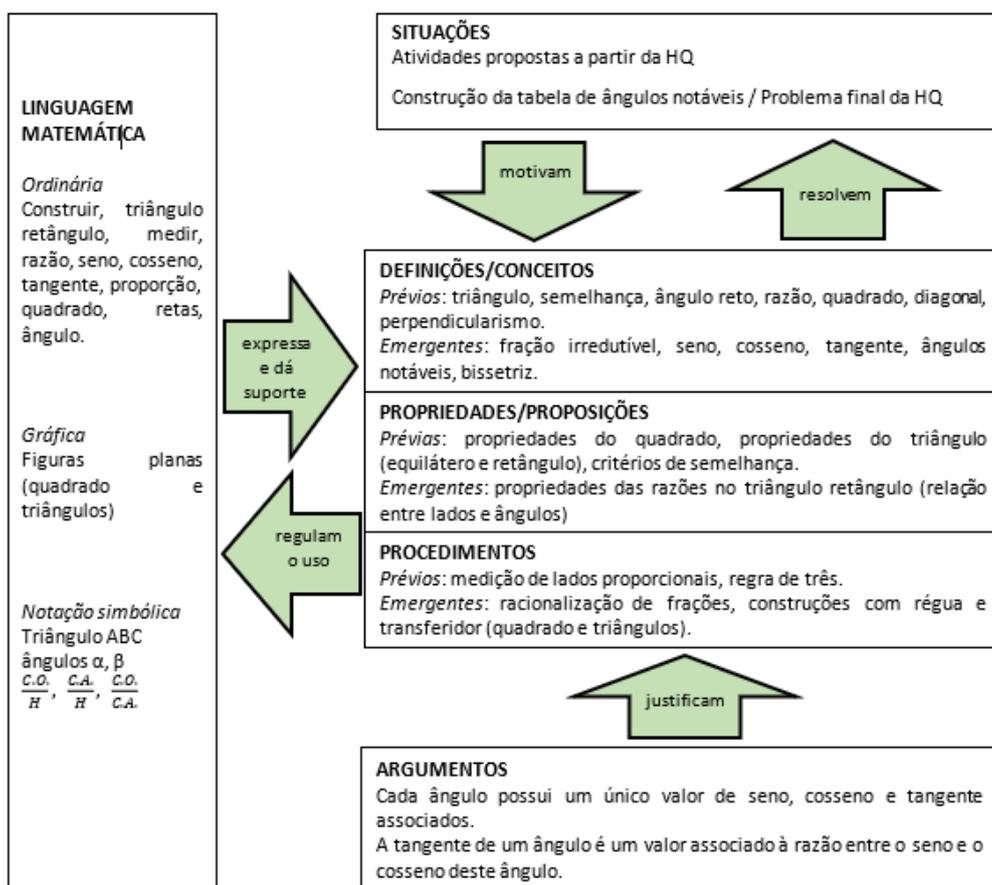
Após a finalização da tabela, foram resolvidos os problemas que utilizavam as razões trigonométricas em alguns contextos de modo que os estudantes tinham a oportunidade de apresentar seus resultados aos colegas e discuti-los em sala. Essa discussão era necessária para provocar a argumentação a respeito de suas respostas, aspecto importante para a faceta epistêmica.

Em seguida, a última atividade foi a imersão na HQ de modo a compreender o clímax e o problema final. A página traz uma situação cuja resolução requer o uso das razões trigonométricas, no entanto era necessária a interpretação da mesma para saber qual das razões utilizar, além de justificar a escolha da razão.

Por fim, a última atividade levava a finalizar o problema desenhando a última página do quadrinho com a solução encontrada, do modo que eles escolhessem. Esta última atividade foi desenvolvida em grupos para facilitar o processo (escolha das falas, da disposição dos quadros e da finalização). Todas estas atividades mobilizaram processos que fizeram uso de mais de um tipo de linguagem (natural, gráfica e simbólica), de conceitos e propriedades discutidos anteriormente, além de mobilizar a utilização de argumentos.

A configuração epistêmica desta sessão deixa clara a inclusão de definições e procedimentos, além de outras que perpassam os momentos anteriores.

Figura 32 – Configuração epistêmica da sessão IV



Fonte: O Autor, 2019.

A articulação entre os objetos matemáticos mostra a retomada de definições, conceitos, proposições e procedimentos desenvolvidos e implementados ao longo da sequência didática. Godino (2011) destaca a importância dessas relações na construção de um conhecimento conectado e articulado.

7.1.1 Visão Geral da Idoneidade Epistêmica

Uma sequência didática em Matemática deve incluir como objetivo central a aprendizagem dos conceitos e problemas incluindo a compreensão das situações-problema, das propriedades e dos procedimentos envolvidos nestes, através de uma mostra representativa e articulada de situações para o significado que se quer trabalhar. No âmbito do conhecimento geométrico, deve-se levar em consideração aspectos que atuem positivamente nas capacidades de raciocínio, análise e visualização (CARDOSO, 2012).

A história em quadrinhos que norteou a sequência teve como base estudos que permitiram sua construção com base no desenvolvimento progressivo dos conceitos importantes para a aprendizagem das razões trigonométricas (PEREIRA, 2011), além de ser pensada como uma proposta educacional específica para este conteúdo.

Desse modo, foi possível articular situações e problemas para o trabalho com: ângulos e suas representações; semelhança de figuras planas; razões de semelhança; triângulo retângulo; o teorema de Pitágoras; regra de três simples; e construções geométricas a fim de dar conta da implementação de nosso significado institucional, a saber, as razões trigonométricas.

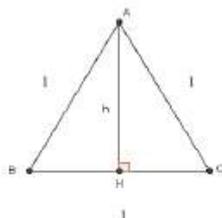
As sessões também trouxeram aspectos históricos relacionados a trigonometria e seu desenvolvimento, no entanto, acreditamos que esta atividade poderia ter sido melhor explorada, com o apoio de outros textos e discussões que trouxessem mais solidez para a proposta, como as contribuições de Euclides, Aristarco de Samos e Hiparco de Niceia (CARMO, MORGADO e WAGNER, 2005).

Outro ponto a ser apresentado é de que, além das situações envolvidas na história, poderíamos ter abordado outros problemas que “conversassem” com aqueles da HQ (algo que ocorreu somente na última sessão), dando uma visão mais ampla e comparativa para os estudantes. O problema da figura 33 traz um exemplo do que poderíamos ter utilizado para articular a montagem da tabela para os ângulos notáveis que realizamos na sessão IV.

Figura 33 – Atividade “Telhado das Casas”

1. O Ivo e os pais mudaram-se recentemente para a ilha da Madeira. A casa deles é grande e mantém o traço das casas típicas desta ilha.

1.1. Consideremos o telhado da casa do Ivo que, observando de frente, tem a forma de um triângulo equilátero de lado l como se pode ver na figura:



- a) Calcula os ângulos $H\hat{A}C$ e $A\hat{C}H$.
- b) Determina a altura do triângulo em função do lado.
- c) Para o ângulo $H\hat{A}C$ determina:
 - i) $\text{sen } H\hat{A}C$
 - ii) $\text{cos } H\hat{A}C$
 - iii) $\text{tg } H\hat{A}C$
- d) Faz o mesmo processo para o ângulo $A\hat{C}H$.

1.2. Em dias de chuva, os pais do Ivo notavam que existia infiltrações devido à má construção do telhado. Então, resolveram construir uma casa, cujo telhado tem uma inclinação superior em 20% que a casa anterior.

Sabendo que os pais do Ivo querem manter a mesma frente, (manter o comprimento da fachada da casa), que altura deverá ter o telhado?



Fonte: (MIRANDA, 2010, p.134)

Foi possível desenvolver processos de argumentação e generalização de alguns resultados (propostos pelo professor em sua maioria), importantes para a aprendizagem dos estudantes. Nogueira (2015), ao tratar da inter-relação dos objetos matemáticos, traz que

Na abordagem de qualquer situação-problema, são os elementos linguísticos que, simultaneamente, permitem representar os restantes elementos que nela intervêm e servem como instrumentos para a ação; os procedimentos e as proposições, por sua vez, relacionam os elementos conceituais e são justificados pela argumentação produzida durante essa abordagem (p.40).

É de extrema importância que os alunos aprendam e criem hábitos argumentativos, de modo que façam uso deles seja de modo oral como também através dos teoremas e propriedades que lhes são apresentados, deixando claro

que o objetivo não é formar futuros matemáticos, mas cidadãos que tenham raciocínio, capacidade argumentativa e crítica, em qualquer área que atuem.

Por fim, discorremos que poderíamos ter articulado mais atividades históricas relacionadas à HQ e outras atividades (como a mostrada na figura 29) para discutir as razões para os ângulos notáveis. Assim, consideramos a idoneidade epistêmica da sequência didática como SATISFATÓRIA. As atividades que discorriam desde o conceito de ângulo até o entendimento das razões trigonométricas enquanto constantes relacionadas aos ângulos do triângulo retângulo, além dos trabalhos em grupo, discussão e generalização permitiram o desenvolvimento progressivo dos conceitos e o tratamento dos objetos matemáticos.

7.2 IDONEIDADE ECOLÓGICA

A idoneidade ecológica diz respeito a questões relacionadas à sociedade (aspectos sociais e formativos), à instituição escolar e às sujeições do contexto que a cerca. Breda, Font e Lima (2015) apontam que, nesta faceta, é importante requerer que os conteúdos estejam em correspondência com as diretrizes curriculares, com a formação social e profissional, articulando outros campos da matemática e até de outras disciplinas.

Nossa busca por trabalhar os conteúdos anteriores às razões trigonométricas, como já foi explicitado, se deu pela necessidade de encontrar e/ou promover com os estudantes o desenvolvimento dos conhecimentos subjacentes para a aprendizagem das noções iniciais da trigonometria. De fato, é importante que a formação matemática do aluno ocorra de maneira progressiva, pela qual se consiga estabelecer as conexões intra e extra matemáticas.

No que diz respeito aos documentos curriculares oficiais, nos valem a seguir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, PCN+) bem como da atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como os documentos propostos para o estado de Pernambuco.

No ensino da Geometria para o quarto ciclo (atuais 8^o e 9^o anos do Ensino Fundamental), os PCN apontam para o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da exploração de várias situações de aprendizagem, dentre elas, “produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras

geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de **congruência** e **semelhança**” (BRASIL, 1998, p.82, grifo nosso). Este conceito foi trabalhado durante a sequência didática por ser de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio em trigonometria. O objetivo para estes conceitos era que os estudantes compreendessem a diferença entre congruência e semelhança, sendo que neste último fossem capazes de identificar as medidas que não se alteravam (os ângulos) e as que se modificam, corroborando com o que nos apresenta os PCN.

O mesmo documento enfatiza a importância da argumentação e da demonstração para o estudante, pelo uso do raciocínio dedutivo, não necessariamente ligado ao estudo formal e axiomático da Geometria. Este tipo de raciocínio foi levemente trabalhado com os estudantes ao propormos situações através da história em quadrinhos que requeriam a análise de regularidades e a proposição de uma resposta resolutiva em grupo, como o problema da Pirâmide ou a medição e comparação dos lados de triângulos semelhantes, explicitados na seção sobre a idoneidade epistêmica.

As Orientações Complementares aos Parâmetros para Ensino Médio (PCN+) tratam a trigonometria como um eixo temático dentro do campo Álgebra: números e funções, discorrendo que o estudante precisa compreendê-la no triângulo retângulo, em triângulos quaisquer e no ciclo, além de ver o conhecimento científico e tecnológico como resultado de um processo histórico e social através do uso das relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos. O trabalho proporcionado pela história em quadrinhos permitiu um leve passeio pela história da matemática relacionada aos conceitos, no entanto isso não foi aprofundado durante a sequência, fato que pode ser melhorado em processos de instrução posteriores.

A BNCC (2018), em sua mais recente versão, discute as aprendizagens em matemática por meio do que chamam *unidades temáticas*: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística. Para o 9º ano, dentro da geometria, é proposto o estudo da semelhança de triângulos e das relações métricas no triângulo retângulo, bem como do teorema de Pitágoras. Todos estes conceitos foram discutidos durante nossa abordagem com os estudantes, como ficou claro anteriormente. No entanto, notamos que não há menção explícita às razões trigonométricas no triângulo retângulo para esta etapa.

Este fato nos chama a atenção, pois indica a necessidade de o conteúdo ser apresentado no 1º ano do Ensino Médio tendo em mente um público que não teve estas noções iniciais.

No que concerne à etapa do Ensino Médio, o documento é estruturado através de competências específicas e habilidades ligadas às competências. A proposta do documento é a diversificação e flexibilização nas abordagens de modo a atender as demandas de cada região, além do aprofundamento dos conceitos aprendidos no Ensino Fundamental. A Base traz como exemplo a divisão e apresentação das habilidades em matemática em: Números e Álgebra, Geometria e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Dentro destas, destacamos as seguintes habilidades:

- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Ressaltamos que nesta área do documento não há divisão por série, ou seja, as competências e habilidades são divididas somente por campo da matemática. Como pode ser visto, as razões trigonométricas no triângulo retângulo não aparecem explicitamente nestas habilidades. Cremos que o trabalho com elas deve ser mantido de modo claro e objetivo, pois está intimamente ligado ao desenvolvimento das regularidades para o estudo das funções trigonométricas, a partir do ciclo. Uma vez que o documento aponta para a possibilidade de inclusão de outras habilidades que complementem aquelas presentes, fazemos uma comparação com o currículo de Pernambuco para possíveis complementações.

A BCC de Pernambuco (2008), no campo da geometria, descreve a necessidade de se trabalhar com atividades que consolidem a ideia de semelhança, ligadas ao Teorema de Tales e de Pitágoras. Esta posição também é encontrada nos Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco, que acrescentam o reconhecimento das razões trigonométricas no triângulo

retângulo no 9º ano do Ensino Fundamental e seu aprofundamento no Ensino Médio (tanto no triângulo retângulo quanto triângulos quaisquer). É possível, desse modo, realizar esta complementação com os documentos a nível nacional.

O passeio por estes documentos permite afirmar que nosso trabalho com o desenvolvimento progressivo dos conceitos geométricos até a construção do conceito de razões trigonométricas para o 1º ano do Ensino Médio está de acordo com as diretrizes curriculares.

Outro ponto a ser discutido nesta idoneidade é a adaptação socioprofissional e a educação em valores democráticos no processo de ensino. Toda formação escolar deve ter em mente o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam aos estudantes estarem prontos para atuarem na sociedade como cidadãos críticos e conscientes de suas responsabilidades sociais. Este fator surge implícito em nosso processo de instrução, pois todas as atividades foram realizadas respeitando as especificidades dos alunos e suas limitações; também ressaltamos que muitas tarefas eram realizadas em grupos para promover o trabalho em equipe e a tomada de decisões em conjunto. Entretanto, não há grandes discussões a respeito de questões socioprofissionais.

Buscamos, sempre que possível, deixar evidente a necessidade de os alunos criarem argumentos (matemáticos ou não) para manter suas falas e respostas, havendo espaço para o diálogo. Entretanto, cremos que este ponto pode ser melhorado em futuras abordagens, uma vez que é imprescindível levar o estudante a pensar sobre a importância da construção do pensamento científico e da criticidade, fato que não ficou explícito em nossa fala para com eles, inclusive nas situações que emergiam da HQ. Como traz Cavalcante (2014, p.73), “os quadrinhos podem ser utilizados como um forte veículo de crítica social”, contribuindo nesta construção com os estudantes.

No desenvolvimento da sequência, foi possível estabelecer algumas conexões entre áreas da matemática que perpassavam os conceitos centrais da proposta: radiciação e potenciação, regra de três simples, no campo dos Números e operações; assim como também um leve tratamento interdisciplinar, ao possibilitar aos estudantes o contato com um tipo de arte – como são reconhecidas também as histórias em quadrinhos, a *nona arte* – além da interpretação textual, necessária para a compreensão do enredo e das situações-problema, e do tratamento histórico

discutido. Todavia, nossa sequência se mostra falha nesta última articulação, uma vez que não existiu uma preocupação explícita em mostrar aos estudantes as conexões com outras disciplinas.

O último ponto a ser considerado é a abertura do processo à inovação didática. Cremos que, mesmo não fazendo uso de tecnologias digitais, a sequência se apresenta como inovadora ao trazer uma história em quadrinhos autoral, fruto de prática reflexiva sobre os conceitos relacionados às razões trigonométricas e por permitir grande interação dos estudantes na resolução dos problemas.

Diante do exposto, podemos considerar a idoneidade ecológica como SATISFATÓRIA, melhorando pontos concernentes à articulação com outras áreas do conhecimento, a argumentação e o pensamento crítico frente a problemas sociais. Além disso, pode-se pensar no uso de quadrinhos digitais, bem como a construção por meio de *apps*.

7.3 IDONEIDADE COGNITIVA

A aprendizagem sempre deve ser o objetivo primordial de todo processo de ensino. Para esta faceta do EOS, devem ser apresentados indicadores da efetivação da aprendizagem de nosso significado proposto, razões trigonométricas, por parte dos estudantes, bem como dos outros conceitos discutidos, de acordo com os componentes apresentados na faceta epistêmica, ligados às interpretações dos estudantes e sua capacidade de análise e síntese.

É possível, no entanto, que surjam dificuldades no que diz respeito aos estudantes, ao trabalho do professor ou à construção do conhecimento proposto, por exemplo. Godino e colaboradores (2008) nos trazem a noção de conflito semiótico associada a essas dificuldades, como apresentamos anteriormente. Estes podem estar relacionados, por exemplo, a: 1. Conceitos ou propriedades; 2. Procedimentos; 3. Material/recurso.

Nesta seção, daremos ênfase aos conflitos que surgiram atrelados aos conceitos, propriedades e procedimentos (de cunho cognitivo e epistêmico), de modo a responder o nosso terceiro objetivo específico. Para as aprendizagens, a descrição é feita por meio de um conjunto de fatos significativos que emergem do

sistema de práticas matemáticas dos estudantes. A seguir, são apresentadas as análises dos quatro momentos da sequência didática.

(Sessão I) – Como foi apresentado, este momento trouxe o contato com o primeiro conceito geométrico importante de se consolidar: ângulos. Ao fazer a leitura da história, os personagens trazem uma das definições para ângulo. No entanto, os alunos não têm segurança para explicitar uma definição formal para o ente. Em sua fala, é possível perceber que o conceito não se mostra consolidado, pois a maior parte ainda associava o ângulo à sua representação. Ao questionarmos e solicitarmos uma definição, obtivemos respostas vagas como:

E1: ângulo é um ângulo.

E2: é o que liga duas semirretas.

E3: é apontar pra estrela! [fazendo referência a uma situação ilustrativa da HQ]

Após estas considerações, representamos um ângulo na lousa, de modo a discutir suas características. Ao mudarmos apenas sua representação, alguns dos alunos tiveram dificuldades em perceber que se tratava do mesmo ângulo. Assim temos um conflito semiótico epistêmico no que concerne à representação. Buscamos então levar os alunos a pensarem em ângulos enquanto região entre duas semirretas. Desse modo, ficou mais fácil para eles compreenderem, por exemplo, o que faz um ângulo ser maior ou menor que outro. Esse momento também contou com uma abordagem histórica a partir da HQ, o que caminha de acordo com a pesquisa de Bortoli (2012), que aponta para a importância de se discutir os conhecimentos matemáticos emergentes historicamente.

Em seguida, discutimos sobre a presença dos ângulos no local, enfatizando as medidas dos ângulos e dando foco ao ângulo de 90° . A partir disso, pode-se apresentar uma classificação para os ângulos de acordo com suas medidas. Essa atividade permitiu aos estudantes pensarem sobre os ângulos em seu próprio ambiente, vendo-os não como elementos matemáticos distantes, mas como algo próximo de sua realidade.

Para a consolidação do momento, foi proposta uma atividade para medição de ângulos com o uso do transferidor. Essa atividade exigiu bastante nosso auxílio, porque os estudantes não tinham tanto domínio com o instrumento de

medição. Apresentou-se, assim, um conflito semiótico procedimental. Este conflito pode ser encontrado também em Medeiros (2012) e Gomes (2011). Medeiros mostra que o ensino de trigonometria pode ser iniciado de várias maneiras: uma delas é a partir do triângulo retângulo, sendo exigido o conhecimento de semelhança de triângulos, noção discutida em nossa sequência; e aponta a dificuldade dos estudantes pelo desconhecimento de propriedades referentes a conceitos geométricos de construção. Já Gomes relaciona as dificuldades na manipulação de instrumentos de desenho, como o compasso, a régua e o transferidor.

Para solucionar, explicamos para o grande grupo o que era o instrumento e como utilizá-lo corretamente, como mostra a figura 34. Também auxiliamos individualmente os alunos que mostraram mais dificuldades.

Figura 34 – Uso do transferidor



Fonte: O Autor, 2019.

Destacamos que houve grande interação entre os próprios alunos: aqueles que utilizaram o instrumento com facilidade ajudaram os colegas com dificuldades. Isso evidencia o desenvolvimento da autonomia e do trabalho em equipe, fato na construção do conhecimento.

Seguindo-se a leitura da HQ, foi apresentada pelo personagem do “professor Beto” uma situação de semelhança de triângulos. Ao serem questionados, os estudantes afirmaram que as figuras eram semelhantes. Em grupos, foram instigados a elencarem pontos que justificassem sua declaração. No momento da exposição das justificativas, surgiram respostas como:

E3: é a mesma coisa, só mudam os números. [referente ao formato das figuras]

E5: os valores estão multiplicados por três. [apontando para o triângulo maior]

E6: porque os ângulos são iguais.

Após todas as declarações, fizemos a sistematização do que caracteriza figuras semelhantes, tomando como ponto de partida as respostas dos alunos e trazendo os elementos e termos matemáticos pertinentes. As respostas dos estudantes mostraram sua capacidade de interpretação geométrica, identificando com sucesso as características das figuras.

A leitura da história seguiu com outra situação para associação de figuras semelhantes, a qual foi facilmente resolvida pelos estudantes. Isso mostrou que eles puderam associar o conceito de semelhança para diferentes figuras, que não o triângulo. As discussões que se seguiram nos permitiram sistematizar a soma dos ângulos internos de um triângulo e a diferença entre semelhança e congruência, como pode ser notado no ponto “argumentos” do esquema da idoneidade epistêmica.

Desse modo, pudemos notar que os conflitos semióticos emergentes na sessão foram solucionados tanto por nossa intervenção quanto pela discussão entre os estudantes, seguidas de nossa sistematização. A leitura da HQ permitiu um aprofundamento no conceito de semelhança e sua generalização para figuras planas.

(Sessão II) – Nesta sessão, retomamos a leitura da história em quadrinhos com a apresentação de dois triângulos semelhantes e como expusemos na análise epistêmica, o objetivo foi levá-los a compreender as regularidades presentes entre as medidas dos lados proporcionais de figuras semelhantes.

A realização da medição foi uma atividade mais simples para os estudantes, pois os instrumentos eram conhecidos entre eles: régua e esquadro. Para calcular as razões solicitadas, alguns alunos utilizaram a calculadora, pois apresentavam dificuldades com a divisão de números decimais. Essa atitude foi permitida, uma vez que o foco não era a divisão em si, mas a interpretação dos resultados obtidos e sua relação com o conceito de semelhança. No entanto, apontamos para o fato de que é importante que o professor esteja atento para as

limitações dos alunos, de modo a sanar as dúvidas que venham a impedir o avanço da aprendizagem. Este fato poderia ter sido mais bem trabalhado nesta sessão.

Ao longo da interpretação dos dados, instigávamos os estudantes a terem respostas objetivas e claras sobre o que era observado a partir das razões. Esse momento foi um pouco difícil, pois os estudantes não sabiam o que escrever sobre os resultados, provavelmente vindos de uma realidade na qual um número encontrado já é confirmação suficiente para uma resposta a um problema. Foi uma atividade bastante demorada, mas que permitiu maior imersão no estudo dos triângulos. Este momento vai ao encontro do trabalho de Moreira (2012), pela importância da análise de gráficos e figuras para a inferência de resultados.

A socialização dos resultados trouxe um novo olhar para o grupo e permitiu a sistematização da noção de *razão de semelhança*. Disso, os alunos responderam a outra situação que não estava proposta na HQ, mas que fazia uso da razão de semelhança. A reflexão sobre o problema foi feita em grupo e sempre orientada.

Como já foi explicitado anteriormente, o processo seguiu com o problema da altura da pirâmide proposto na história em quadrinhos. Este tratamento histórico conversa com o que nos apontam várias pesquisas (OLIVEIRA, 2013; SILVA, 2013; ALVES, 2016; SILVA, 2017). Na resolução, os estudantes tiveram dificuldade na interpretação dos desenhos da página. Esse conflito foi sanado com nossa intervenção, explicando os pontos que não estavam esclarecidos para eles.

Figura 35 – Medição dos lados no problema da pirâmide



Fonte: O Autor, 2019.

Após as discussões nos pequenos grupos, os estudantes socializaram suas conclusões em frente a sala para comparar os resultados. Alguns ficaram um pouco tímidos no início da apresentação, porém estiveram mais à vontade no desenvolver da atividade. Estava sempre claro que eles não deveriam fazer nada que os deixasse desconfortáveis ou prejudicasse sua argumentação.

Na apresentação, os alunos mostraram que a resolução feita pelo personagem Tales de Mileto se baseava no conceito de semelhança, no qual o triângulo maior, formado a partir da sombra da pirâmide, era proporcional ao triângulo formado com o graveto e sua sombra. Essa atividade permitiu a leitura e interpretação de uma situação, na qual os estudantes precisaram relacionar alguns objetos matemáticos (triângulos, lados e ângulos) e justificar um pensamento proposto. Algumas das falas dos estudantes podem ser vistas abaixo.

E5: a proporção era a mesma entre os lados. Se multiplicasse a altura do graveto por um certo valor, daria a altura da pirâmide.

E18: são semelhantes porque tem o mesmo ângulo.

E13: são figuras semelhantes, porque tem o mesmo formato, têm ângulos semelhantes e lados proporcionais.

P: os ângulos são semelhantes ou iguais?

E13: ah, são iguais, isso mesmo.

A leitura seguinte da HQ levou os estudantes a refletirem sobre as características do triângulo retângulo: hipotenusa e catetos, e sobre o uso do teorema de Pitágoras.

P: gente, quando eu tenho a medida de dois lados do triângulo retângulo e quero achar o terceiro, tem como?

[Alguns estudantes respondem que tem]

P: como?

E13: fazendo $a^2 = b^2 + c^2$.

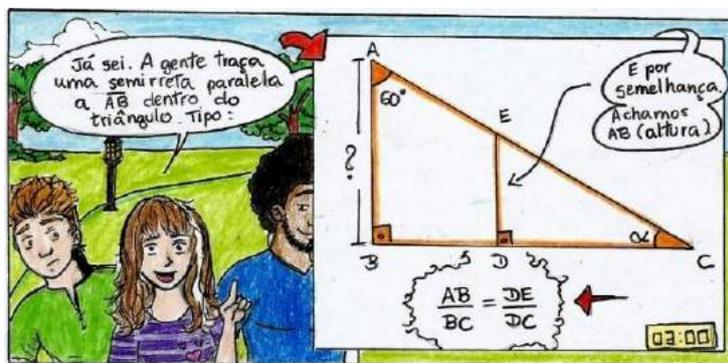
P: que teorema é esse?

E7: Pitágoras! O teorema de Pitágoras!

Na discussão deste momento, os alunos tiveram bastante segurança em como utilizar o teorema e como identificar os lados do triângulo, contrastando

com o que pudemos observar no questionário diagnóstico, no qual apenas nove estudantes souberam nomear os lados do triângulo retângulo. Isso mostra um avanço em sua aprendizagem.

Figura 36 – Resolução do problema do triângulo retângulo pela personagem



Fonte: O Autor, 2019.

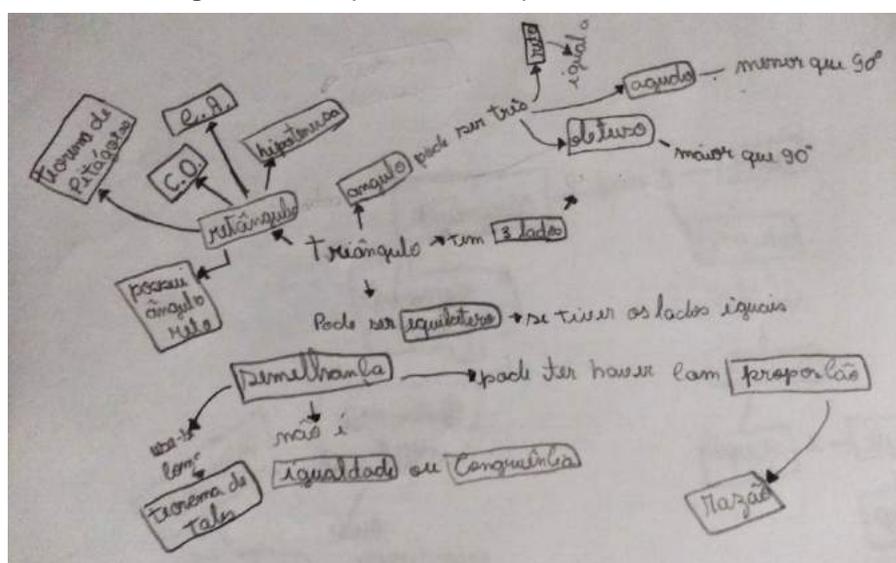
A comparação com o modo de resolução da personagem (figura 36) fez os estudantes pensarem sobre os diferentes caminhos possíveis de resolução de um problema, baseando-se nas informações dadas. Ou seja, foi possível compreender a importância de analisar os dados de uma questão ou problema para sua resolução.

(Sessão III) – O início da sessão foi marcado pela retomada da leitura de toda a história até a página que havíamos parado. Ao chegar na página 17 da HQ, nos deparamos com um mapa com os conceitos trabalhados até o momento, como triângulo retângulo, ângulo, semelhança e congruência.

Através da análise da página, os estudantes deveriam construir seu próprio mapa relacionando os conceitos estudados até o momento: o objetivo era revelar e compreender quais os significados pessoais estavam emergindo e como eles estabeleciam a relação entre eles. Para facilitar o processo, fizemos um momento em grupo de colocar na lousa todas as palavras que lembrássemos relacionadas ao assunto e a partir delas o mapa seria construído. Para a grande parte da turma foi uma atividade mais complexa, uma vez que nunca haviam realizada uma tarefa similar, no entanto a atividade foi concluída por todos.

Em muitos momentos, os alunos esqueciam o significado de algum conceito, sendo discutido e esclarecido conosco e com seus colegas. A seguir, pode-se ver um dos mapas de uma das estudantes.

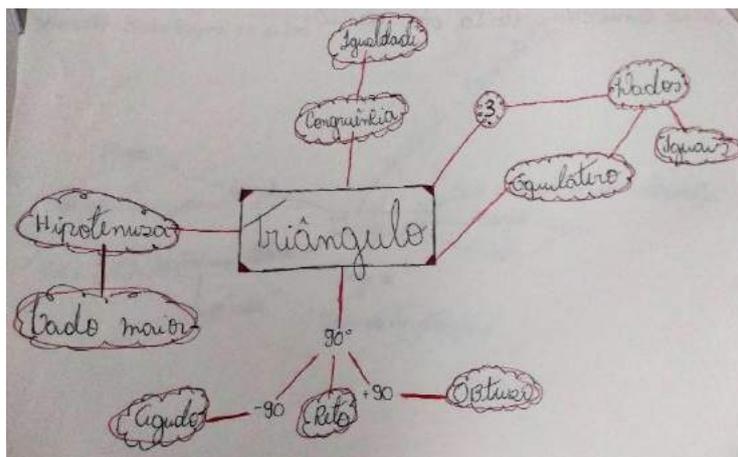
Figura 37 – Mapa construído pela estudante E10



Fonte: O Autor, 2019.

Como pode ser observado, a aluna traz os significados implementados durante a sequência, conseguindo estabelecer relações entre eles de maneira coerente. O único significado que fica “solto” no mapa é o conceito de *semelhança*: este poderia estar ligado ao triângulo, como uma das possibilidades. No entanto, a estudante faz outras associações corretas partindo deste significado. Em contraste, tivemos alguns mapas que fizeram uso de poucos significados e não conseguiram estabelecer associações com verbos de ligação ou outros termos que esclarecessem o pensamento do aluno, como pode ser observado na figura 38.

Figura 38 – Mapa construído pelo estudante E12



Fonte: O Autor, 2019.

Esse estudante não conseguiu deixar evidente quais as associações existentes entre os significados que ele escolheu para seu mapa. Mesmo entendendo alguns conceitos, ele não consegue relacioná-los de modo claro e objetivo. Isso mostra uma aprendizagem em construção, em um nível mais inicial.

Durante a construção dos mapas, instigamos os alunos a utilizarem frases de ligação para ajudar na compreensão do mapa. Entretanto, alguns não conseguiram.

P: ligue as palavras que você acha que tem ligação uma com a outra.

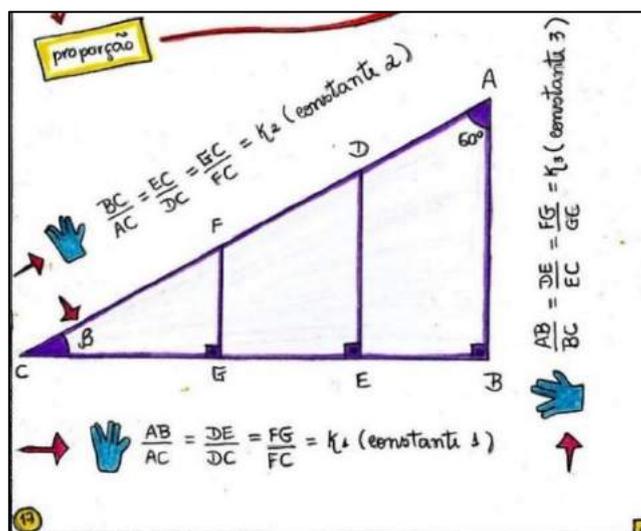
E15: ah, então não é o certo não? É o que eu acho?

P: não, é o que você acredita, mas tem que estar de acordo com o que a gente estudou.

Percebe-se que o aluno tem dificuldades em como construir o seu mapa, buscando criá-lo simplesmente pela associação arbitrária entre os significados. É nesse momento que o trabalho do professor se torna importante: mostrar ao aluno onde ele está e aonde ele precisa chegar, com os meios que se tem disponíveis.

A atividade que se seguiu levou os estudantes a realizarem medições em triângulos semelhantes presentes na história em quadrinhos. Eles deveriam realizar as medições, encontrando as razões solicitadas (figura 39) e anotar suas impressões sobre os resultados. O objetivo era fazê-los perceber as constantes nos triângulos retângulos como um resultado associado ao ângulo e não aos lados.

Figura 39 – Razões nos triângulos retângulos



Fonte: O Autor, 2019.

O encontro dos valores fez os alunos perceberem as regularidades, no entanto eles não notaram inicialmente a relação delas com o ângulo do triângulo. Essa capacidade de análise e síntese na interpretação de problemas matemáticos precisa ser um aspecto forte no trabalho do professor, para a superação das dificuldades dos estudantes (MEDEIROS, 2012). A percepção foi proposta por nós até que eles chegassem neste pensamento. Disso, sistematizamos que essas constantes eram o **seno**, **cosseno** e a **tangente** do ângulo β .

(Sessão IV) – Na última sessão da sequência didática, sistematizamos o seno, o cosseno e a tangente para os ângulos notáveis: 30° , 45° e 60° . O objetivo foi construir uma tabela com esses valores a partir de construções geométricas. Tendo como base um quadrado e um triângulo equilátero, foi possível estabelecer estes resultados.

A estruturação da tabela dos ângulos notáveis foi uma atividade demorada, uma vez que demandou dos alunos a construção das figuras com os instrumentos adequados (régua, esquadros e transferidor), além da realização de processos algébricos para encontrar os valores requeridos.

Alguns alunos tinham dificuldades para montar as figuras de modo correto usando a régua e o transferidor. Neste momento, tivemos que intervir, mostrando como realizar a construção corretamente pela medição dos ângulos e

dos lados. Isso porque muitos acreditavam que para construir um quadrado bastava que os quatro lados fossem iguais, desconsiderando a medida do ângulo reto. O mesmo ocorreu com o triângulo equilátero.

Também foi necessário relembrarmos processos como racionalização durante a atividade. Para fazer os alunos terem mais segurança na resolução, convidamos alguns para apresentar os resultados na lousa, de modo a todos chegarem na mesma resposta.

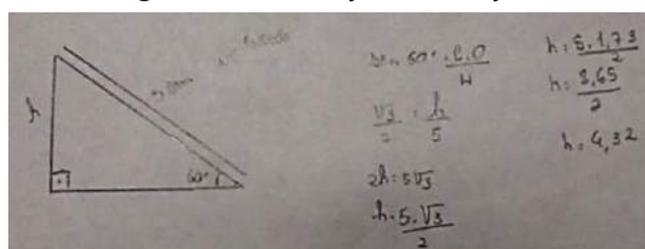
Figura 40 – Tabela dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: (KILHIAN, 2010)

A construção da tabela serviu para o aprofundamento do pensamento algébrico dos estudantes, fato citado como uma das dificuldades dos estudantes em Moreira (2012). Dando continuidade, foram propostas três situações que utilizavam as razões trigonométricas. Sempre buscávamos lembrar que as razões dependiam dos ângulos, noção que se consolidou junto aos estudantes. A resolução da primeira situação foi feita pelo grande grupo, onde todos puderam se ajudar. Um esboço de uma aluna pode ser visto na figura 41.

Figura 41 – Resolução da situação 1

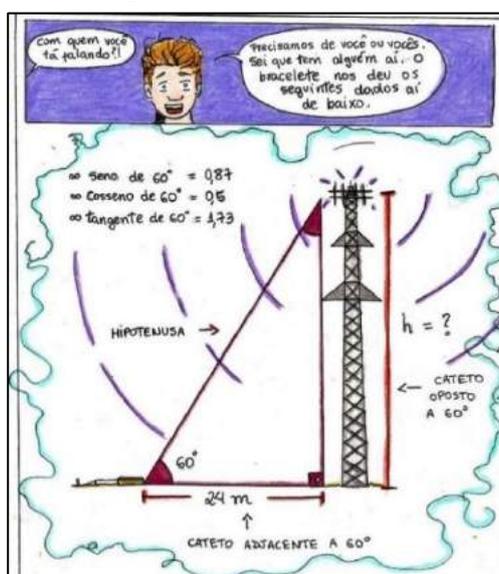


Fonte: O Autor, 2019.

Tivemos o cuidado de trabalhar a aproximação de valores decimais para as raízes não exatas, como a $\sqrt{3}$, uma vez que os problemas envolvendo as razões trigonométricas podem fazer uso das diversas representações. O objetivo dessas situações era fazer os alunos identificarem qual é a razão mais adequada para cada problema: usar o seno, caso a situação precise do cateto oposto e da hipotenusa, por exemplo. Este tipo de interpretação é importante, sendo apontada por Mastronicola (2014) e Batista (2015).

A situação proposta na história em quadrinhos servia como o clímax do enredo e, através do recurso da quebra da quarta parede, envolve os estudantes em sua resolução. O objetivo final é resolver o problema e impedir que o “vilão” desestabilize a história matemática. Foi interessante perceber a imersão dos estudantes neste momento, tendo uma identificação com o personagem e com seu problema.

Figura 42 – Clímax da HQ



Fonte: O Autor, 2019.

Na resolução da atividade, os alunos foram divididos em grupos para facilitar a discussão. Depois de um certo tempo, um dos alunos foi convidado a explicar o resultado do seu grupo. Todos os grupos, mesmo resolvendo de maneiras diferentes, chegaram ao resultado corretamente: interpretaram o problema para descobrir qual era a razão trigonométrica mais adequada (tangente) e encontraram a medida da altura. Um dos estudantes fez uso das três relações (seno, cosseno e

tangente) para provar sua resposta, aspecto interessante, uma vez que sugerimos que utilizassem apenas uma. Isso mostra autonomia e desenvolvimento das capacidades de articulação entre os conceitos estudados. Por fim, em grupos, foram levados a desenhar a última página da HQ, finalizando nossa sequência.

Nesta última sessão, os estudantes mobilizaram muitos dos significados implementados durante toda a sequência e puderam sistematizar conceitualmente as razões trigonométricas, bem como suas aplicações em diferentes situações.

7.3.1 Visão Geral da Idoneidade Cognitiva

O conjunto das atividades ao longo das sessões permitiu o avanço progressivo dos significados institucionais que buscamos implementar de modo a desenvolver com os estudantes o conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo. Um dos componentes de análise para esta faceta é a inserção dos conhecimentos prévios dos estudantes para a implementação do estudo (GODINO, 2011). Pelo questionário diagnóstico, tivemos acesso e compreendemos quais os conhecimentos que eles mobilizavam no contexto da trigonometria. Isso ajudou a direcionar nossa prática ao longo da sequência.

Como ficou explícito, a história em quadrinhos foi construída com o objetivo de perpassar os conhecimentos e significados pertinentes a este campo de estudo: ângulos, triângulos, semelhança e razões. Assim, pode-se direcionar a sequência a partir das noções mais inclusivas até as menos, que são as específicas. Este tipo de raciocínio contribui para o aprofundamento da aprendizagem. Pudemos, então, tratar a HQ através de uma visão superada de apenas um fator motivador, mas como um recurso didático que promove o pensamento científico, a prática da leitura e a interpretação de texto.

Outro aspecto a ser considerado é a adaptação do processo às diferenças individuais: compreendemos que na resolução das atividades os estudantes eram levados a questionar, refletir e conjecturar sobre os problemas e situações apresentadas. Neste contexto, sempre respeitamos o tempo dos alunos e mediávamos o processo, percebendo aqueles que tinham mais dificuldade, seja na

manipulação de algum instrumento, seja na interpretação ou nos cálculos a serem feitos.

Atividades para reforçar algum conceito ou noção construída não foram incluídas durante a sequência, pois cremos que as tarefas e situações apresentadas deram conta de nossos objetivos de ensino e aprendizagem. Entretanto, destacamos que algumas atividades poderiam ter sido mais bem exploradas: a construção dos mapas com os significados implementados foi umas delas. Os estudantes construíram seus mapas, estabelecendo relações entre os conceitos, sendo sempre por nós orientados. Porém, após a finalização de suas versões e a sistematização das noções, não lhes foi oportunizado refazerem seus mapas. Isto poderia ter sido realizado, como um momento de reflexão sobre a própria organização do pensamento.

Os conflitos semióticos emergentes na sequência: a noção de ângulo associado à sua representação; as dificuldades no uso de instrumentos de medição; a comparação do significado de semelhança com congruência; o estabelecimento de razões; e o cálculo com números decimais foram percebidos ao longo do processo e solucionados, seja por nossa intervenção direta, seja pela articulação entre os estudantes. Isso está de acordo com Godino, Batanero e Font (2008), ao nos mostrarem a necessidade do equilíbrio nas abordagens didáticas, trazendo que “uma vez obtido um certo equilíbrio entre as dimensões epistêmica e cognitiva é necessário que a trajetória didática otimize a identificação e solução de conflitos semióticos” (p.24). Nossa proposta buscou atender esta demanda.

Os argumentos mostraram que os alunos passaram a compreender algumas regularidades presentes nas razões trigonométricas que são importantes para o estudo em trigonometria (mais especificamente no campo das funções).

Assim, foi percebida a apropriação do significado institucional razões trigonométricas e noções associadas através das compreensões conceituais e proposicionais (semelhança, razões de semelhança, ângulos internos e externos, o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo e as razões trigonométricas), procedimentais (regra de três, divisão, racionalização, medição), além de competências comunicativa, argumentativa e, levemente, metacognitiva. Desse modo, consideramos a idoneidade cognitiva do processo como ALTA.

7.4 IDONEIDADE AFETIVA

Nesta faceta, consideram-se componentes relacionados aos interesses e necessidades dos estudantes, suas atitudes durante o processo e as emoções referentes à aprendizagem, como o trabalho com a autoestima e a apreciação estética da matemática enquanto ciência com características próprias e precisas (GODINO, 2011).

No que diz respeito aos interesses e atitudes dos estudantes, podemos considerar que o grupo participante estava motivado, uma vez que se colocaram como voluntários, estando livres para deixarem de participar quando quisessem. Apenas dois estudantes não participaram das quatro sessões, por motivos pessoais. Isso mostrou engajamento e compromisso do grande grupo durante a aplicação da sequência.

Deixamos claro a importância do estudo das razões trigonométricas, bem como dos processos subjacentes envolvidos (compreensão de regularidades, construção da noção de semelhança) para a construção do pensamento científico e da compreensão da matemática enquanto ciência próxima e aplicável. Todavia, o aspecto profissional não foi discutido com propriedade. Em poucos momentos, citamos a possibilidade de os estudantes estarem inseridos em uma realidade profissional que exigisse deles conhecimentos de análise de dados e regularidades. Como traz Nörnberg (2008)

Adequar o currículo à vida dos alunos é um constante exercício que pode ser feito pelos professores. Para isso é essencial movimentar-se no mundo dos alunos, usando a sensibilidade para perceber os elementos presentes em suas vidas. Além disso, também se faz necessário um investimento para detectar os conhecimentos prévios dos estudantes, estabelecendo a partir daí os caminhos que o programa a ser seguido percorrerá (p.91).

Nossa busca por conhecer os conhecimentos iniciais dos alunos antes da aplicação da sequência corrobora com a fala acima. Além disso, temos a inserção das histórias em quadrinhos como elemento norteador do processo. O referido autor vem trazer que o uso das histórias em quadrinhos no contexto educacional pode contribuir para que o aluno passe de coadjuvante a protagonista em sala de aula. Elas possibilitam infindas alternativas de trabalho que estimulam a participação intensiva do aluno durante o processo de construção do conhecimento.

Em nossa sequência, percebemos vários momentos nos quais a imersão na história se tornou um caráter motivador para adentrar na resolução dos problemas:

P: gente, agora só iremos continuar a leitura no próximo encontro. (Sessão II)

E4: ah professor! Queria saber o que vai acontecer.

P: aguardem!

E15: e eu não falo mais não é?! (referindo-se à leitura das falas nos balões)

Como destacamos em nossos textos introdutórios, as HQ surgem como um elemento forte de identificação e motivação para o público jovem. Isso de fato, se mostrou real no desenvolvimento da sequência. Os estudantes demonstraram interesse em conhecer a história e os personagens. Em muitos momentos, realizamos a leitura em conjunto, sendo que, em cada um deles, os alunos podiam escolher qual personagem poderiam interpretar e isso gerava momentos de descontração, protagonismo e criatividade entre a turma. Isso vai ao encontro dos resultados encontrados em Testoni (2004) e Tonon (2009).

Figura 43 – Imersão na HQ em grupo



Fonte: O Autor, 2019.

Assim, os problemas que iam surgindo ao longo do enredo se tornavam interessantes, quando era preciso encontrar sua resolução para continuar com a história. Nisto se percebe a função educativa presente no tratamento com esta HQ em particular. Soares (2016), em sua fala sobre jogos, discute sobre esta função ao relacioná-la com a intencionalidade do professor “para ensinar qualquer coisa que compete o indivíduo em seu saber, seus conhecimentos e sua apreensão de mundo” (p.11). Isso não se difere na abordagem com as histórias em quadrinhos. Além disso, há a possibilidade de desenvolvimento pelo uso da HQ enquanto recurso formativo na prática da ludicidade (MASSA, 2015).

Os elementos artísticos das histórias em quadrinhos serviram como um incentivo a mais para a imersão nos problemas. Todo o emaranhado de imagens, onomatopeias, falas e cenários que são próprios das HQ permitiram aos estudantes se dedicarem um pouco mais em suas interpretações e resoluções. O processo de *expressão corporal* nos níveis de interação explicitados em Soares (2016) nas atividades lúdicas também se fez presente no momento em que os alunos faziam uma interpretação quase que teatral durante a leitura. Isso descontraía e mobilizava o grupo para a atividade seguinte.

Concordamos com Cavalcante (2014) ao apontar para a necessidade de se ter um olhar – tanto dos docentes quanto dos discentes – menos preconceituoso e mais visionário com relação às histórias em quadrinhos:

Percebemos, assim, que as histórias em quadrinhos, apesar de serem um elemento que pode contribuir positivamente para as aulas de matemática, e em âmbito mais geral na educação como um todo, não tem seu verdadeiro valor, potencial, reconhecido por alguns professores. Utilizam este recurso se preocupando apenas em atribuir aos conceitos matemáticos um visual mais agradável ao aluno. Defendemos o uso de HQ como algo contribuinte para o desenvolvimento da imaginação, leitura, raciocínio lógico, criticidade e autonomia (p.154).

Durante todo o processo de construção de nosso significado institucional, as situações que emergiam da HQ tinham este objetivo: o desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de argumentação e sistematização entre os estudantes.

As histórias em quadrinhos podem ser uma porta de entrada para a imersão dos alunos nos conceitos que se quer trabalhar, compartilhando conteúdos e significados mais complexos não necessariamente de modo mais fácil, porém mais acessível (PAIVA, 2017). Do mesmo modo, foi possível fazê-los participantes ativos

do processo na solicitação da criação da última página da história em quadrinhos. Muitos afirmaram que não sabiam desenhar, “não tinham esta habilidade”. Deixamos claro que o desenho é uma parte da história, mas a construção lógica do enredo em quadros é tão importante quanto, não precisando “ter dom para desenhar” para construir uma HQ interessante.

A participação e responsabilidade na realização das atividades mostrou engajamento pela maioria dos estudantes e a busca por continuar o processo. Destacamos que, quando a leitura da HQ era interrompida para ser continuada em outra aula, os alunos ficavam ansiosos para descobrir o que viria a seguir. Isso também motivava sua participação efetiva.

Portanto, consideramos a idoneidade afetiva do processo de instrução com ALTA.

7.5 IDONEIDADE INTERACIONAL

Para discutir esta faceta, devemos levar em consideração os componentes de interação docente-discente (argumentação clara e objetiva do tema, reconhecimento dos conflitos dos estudantes, envolvimento e inclusão dos alunos nas dinâmicas da aula), discente-discente (diálogo e desenvolvimento de competências comunicativas), autonomia dos estudantes e observação sistemática do desenvolvimento do processo cognitivo dos alunos, na perspectiva de uma avaliação formativa.

Destacamos que o processo principal de interação durante a sequência didática foi o diálogo. Sempre estimulávamos os estudantes a argumentarem, compartilharem suas ideias/resoluções para seus colegas e discutirem suas estratégias em grupos. Em muitos momentos, os alunos foram convidados a compartilhar suas resoluções na lousa, sem constrangimento ou medo de errar. Alguns trechos podem constatar a sequência como um espaço de diálogo e interação:

P: todos terminarem de ler? Agora gostaria que alguém explicasse sobre o que fala a história (Sessão I)

P: quem pode vir responder aqui no quadro? (Sessão II)

P: venha aqui responder e explicar para o pessoal (Sessão IV)

Os próprios estudantes se mobilizavam para participar e instigavam seus colegas a fazerem o mesmo. As falas abaixo balizam este argumento:

E17: eu vou resolver aí, professor.

E11: vai amiga, nos representa!

Na sessão IV, por exemplo, um dos alunos utilizou as três relações (seno, cosseno e tangente) na resolução do problema final, explicando aos seus colegas na lousa e sendo aplaudido em seguida.

Em nossas interações, buscávamos sempre auxiliar os alunos em suas dificuldades, seja no trato com os colegas, seja na resolução das atividades, incluindo a todos. Foi necessária nossa intervenção em vários momentos das atividades, tanto nas construções quanto na realização dos cálculos. Isso facilitou seu desenvolvimento progressivo, mesmo demandando mais tempo.

Desenvolveu-se uma maior interação entre eles, promovida pela leitura da HQ em conjunto e da resolução das atividades em grupo. Destacamos um fato interessante: inicialmente, os estudantes sentaram-se em basicamente dois grupos distintos, meninos e meninas. A composição primeira das mesas permitiu isso. No entanto, pretendíamos um trabalho colaborativo, sem a perpetuação de estereótipos de qualquer tipo, inclusive de gênero. Assim, convidamos os alunos a mudarem suas posições durante as outras sessões. Isto facilitou a interação do grupo.

Foi possível ter um olhar para o processo cognitivo dos estudantes de modo progressivo, uma vez que as todas as atividades perpassavam conceitos, definições e procedimentos imprescindíveis para a construção do significado de razões trigonométricas, corroborando com o trabalho de Medeiros (2012), ao trazer a importância de se trabalhar os conhecimentos geométricos necessários para a aprendizagem em trigonometria.

Diante do exposto, consideramos a idoneidade interacional do processo como ALTA.

7.6 IDONEIDADE MEDIACIONAL

No que se refere à idoneidade mediacional, Godino (2011) aponta para os recursos materiais (materiais manipulativos, informatizados); uma abordagem por meio de um conjunto estruturado de situações-problema; as condições estruturais do ambiente e a articulação com a quantidade de alunos; assim como o uso adequado do tempo para a efetivação da aprendizagem.

A aprendizagem de um significado matemático pode demandar o caminho sobre um campo amplo de situações e atividades, sendo necessário selecionar um conjunto de atividades pertinentes que estejam articuladas com o caráter epistêmico do mesmo, para que o tempo seja suficiente para o trabalho.

A respeito dos recursos, ficou claro que a história em quadrinhos foi o componente principal, norteando os problemas e situações pertinentes à aprendizagem. Pelo fato de não termos acesso à internet com facilidade, o uso de computadores para pesquisa e interação não esteve presente. Este fato pode ser melhorado em outras abordagens. Também utilizamos materiais como régua, conjunto de esquadros, transferidor, textos e atividades impressas e calculadoras. O uso destes recursos permitiu, por exemplo, realizar as medições das razões de semelhança no triângulo retângulo e inferir sobre os resultados obtidos.

A quantidade de alunos para o espaço disponível que tínhamos, o Laboratório de Ensino de Matemática da escola, estava adequada. Diferentemente de uma sala de aula “comum”, o espaço do LEM permite aos alunos se organizarem em grupos que facilitam a discussão dos problemas, além de deixá-los mais à vontade. Esta disposição também permitiu maior fluidez ao processo, pois podíamos caminhar pela sala e perceber as dificuldades dos alunos mais rapidamente.

Nas quatro sessões, o tempo destinado ao estudo foi satisfatório. Todavia, a última sessão poderia ter sido mais bem explorada, para a construção da página da HQ após a realização dos cálculos relacionados ao último problema (desenhar e colorir). Isso porque algumas atividades de medição e análise de dados demandaram mais tempo do que esperávamos, entretanto não apressamos o processo para não haver prejuízo na aprendizagem dos estudantes. A construção dos mapas na sessão III, por exemplo, foi a atividade mais demorada, justamente por ter sido algo novo para os alunos.

Concluimos que a idoneidade mediacional do processo foi **SATISFATÓRIA**.

7.7 PERSPECTIVA GERAL DA IDONEIDADE DIDÁTICA

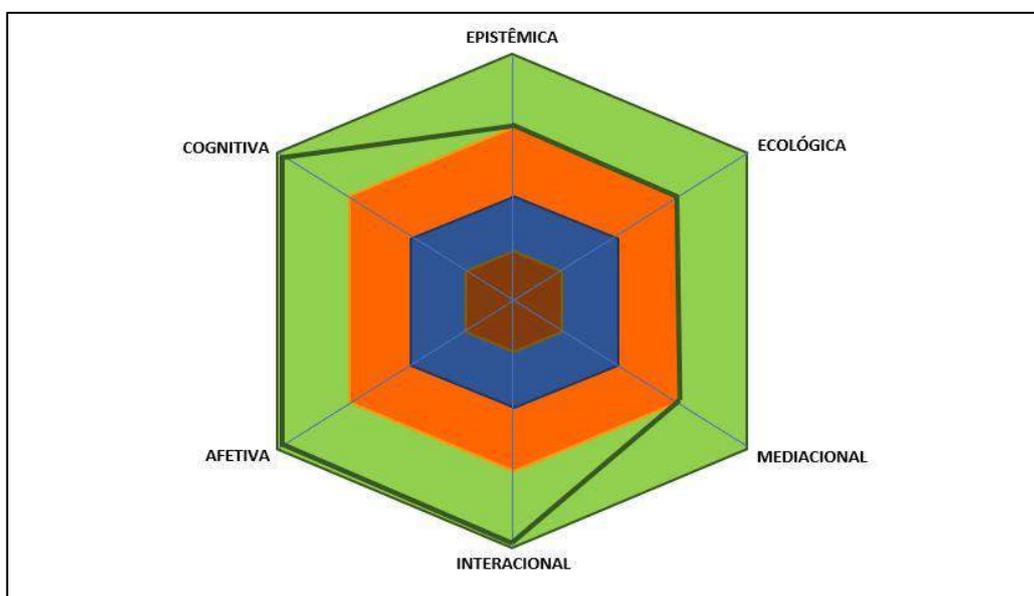
A análise e o passeio entre as facetas da idoneidade a partir de seus componentes nos permite compreender um processo de ensino e aprendizagem de modo amplo e sistemático. Estes critérios devem ser entendidos como horizonte de todos os critérios que a comunidade científica formula e consente sobre a melhora dos processos de instrução (BREDA, FONTE E LIMA, 2015).

É possível construir um gráfico que represente esta compreensão, como mostramos em nossa discussão sobre o EOS (figura 4). Como traz Carvalho (2017, p.320)

É comum em trabalhos que se debruçam sobre a compreensão de um processo formativo de professores e/ou de instrução matemática com base em um determinado conteúdo matemático (GIMÉNEZ, VANEGAS, FONT E FERRERAS, 2012; BREDA, FONT E LIMA, 2014; GODINO, 2002) construir um gráfico que represente o movimento das seis idoneidades avaliadas.

Baseando-se também em sua categorização, utilizamos os termos baixa (faixa marrom), média (faixa azul), satisfatória (faixa laranja) e alta (faixa verde). A figura 44 apresenta o gráfico do hexágono para a idoneidade didática de nossa sequência.

Figura 44 – Hexágono da Idoneidade didática do processo de instrução



Fonte: O Autor, 2019.

Desse modo, a sequência didática contribuiu para a formação e desenvolvimento do significado de razões trigonométricas a partir do trabalho com as noções subjacentes a este estudo (ângulos, semelhança de triângulos, razões de semelhança, triângulo retângulo e proporcionalidade), culminando no trato com essas razões tanto nas situações propostas a partir da HQ quanto nas demais. As idoneidades cognitiva, afetiva e interacional mostraram-se como altas. Já a epistêmica, ecológica e mediacional como satisfatórias.

Observando todas as idoneidades, elas situam-se nas faixas verde e laranja, assim, podemos valorar todo o processo de instrução com alta idoneidade didática.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

“Os sonhos nos salvam. Eles nos motivam e nos transformam.
Por isso juro pela minha alma, que até que exista um mundo
onde a dignidade, a honra e a justiça se transformem numa realidade,
eu nunca vou parar de lutar!” Superman.

Os ideais defendidos pelo Superman poderiam ser transcritos para a fala daqueles que buscam fazer da Educação algo melhor. Essa busca leva em consideração, dentre tantos fatores, a efetivação da aprendizagem e a construção de processos de ensino que permitam e tornem isso realidade.

A compreensão dos componentes que permeiam um processo de ensino de matemática perpassa as preocupações docentes. Nesse sentido, foi que esta pesquisa teve por objetivo investigar o desenvolvimento de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do conceito de razões trigonométricas pelo uso de histórias em quadrinhos em uma turma de 1º série do Ensino Médio. Para realizar esta investigação, fizemos uso das ferramentas teóricas apresentadas no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS (GODINO, 2003; 2011; GODINO, BATANERO E FONT, 2008), no que concerne à análise da idoneidade didática.

As etapas de nossa pesquisa caminharam no sentido de compreender o ensino das razões trigonométricas, tendo uma história em quadrinhos como elemento/recurso norteador das discussões e situações-problema. Em um primeiro momento, buscamos, através de um questionário diagnóstico, compreender os conhecimentos iniciais dos estudantes sobre os conceitos que seriam trabalhados na sequência, a saber: ângulos, semelhança de figuras planas, triângulo retângulo, proporcionalidade e as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

Esta análise permitiu perceber que os estudantes apresentavam alguns conhecimentos limitados em proporcionalidade, havendo confusão entre semelhança e congruência de figuras planas e a não percepção da manutenção dos ângulos correspondentes em figuras semelhantes. Também foi possível evidenciar que os alunos não possuíam o domínio sobre as razões trigonométricas, mesmo já tendo tido o contato com as mesmas. Assim, a análise do diagnóstico nos trouxe um

novo olhar para a construção da sequência para o trabalho com o significado das razões trigonométricas e noções subjacentes.

A construção da sequência didática junto com a HQ foi pensada levando em consideração estas dificuldades encontradas, bem como o trabalho com os conceitos e objetos matemáticos concernentes a este campo da matemática. Isso corrobora com o que nos traz Cavalcante (2014):

É preciso existir uma intencionalidade por parte do educador na utilização das HQ em sala de aula. E para que esta intencionalidade seja realmente levada em conta, é preciso que o educador saiba as necessidades e carências do público alvo e o que determinada história em quadrinhos pode contribuir para um processo de aprendizagem mais rico, trabalhando justamente na superação destas carências. (p. 82)

Assim, a compreensão dos conhecimentos iniciais dos estudantes e a HQ permitiu um passeio pelas noções e conceitos necessários à aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo e o desenvolvimento progressivo dos significados, conceitos e objetos.

O trabalho com a história em quadrinhos foi enriquecedor e nos trouxe um novo olhar sobre as abordagens metodológicas e didáticas no ensino de matemática. Os trabalhos discutidos sobre o uso de HQ em Educação, mais especificamente no ensino de matemática, demonstram o avanço deste tema com iniciativas para a aproximação dos quadrinhos em atividades educacionais. É necessário, ainda, que qualquer estigma social e histórico seja quebrado, para que o trabalho sério e consciente com as HQ se efetive em sala de aula, nas pesquisas e nos ambientes acadêmicos, gerando reflexão, frutos e práticas investigativas.

Assim, em âmbito educacional as HQ podem ser utilizadas como **ferramenta para a disseminação de ideais** na campanha de uma ressignificação social. Trabalhando deste modo, os professores podem levar os estudantes a uma reflexão, sobre a realidade em que vivem e formas de atuação para melhorar a vida em sociedade. (Idem, p.73)

As ferramentas de análise da idoneidade didática para o processo de ensino – análise epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva, interacional e mediacional – nos permitiram mergulhar no estudo da aplicação da sequência, nos conflitos semióticos epistêmicos e cognitivos emergentes, nos processos instrucionais, emocionais e cognitivos da mesma, objetivando a valoração de sua idoneidade e a resposta ao nosso problema de pesquisa:

- *Como se desenvolvem as relações epistêmico-ecológica, instrucional e cognitivo-afetiva em um processo de ensino e aprendizagem das razões trigonométricas com o uso de histórias em quadrinhos?*

A análises epistêmica e ecológica mostraram o conjunto de atividades, situações-problema, conceitos e procedimentos no que diz respeito a sua representatividade com relação ao conhecimento matemático (relevância das atividades desenvolvidas), bem como sua relação com os documentos oficiais que orientam os processos de ensino de matemática no país.

Nas questões cognitiva e afetiva, pudemos evidenciar o desenvolvimento progressivo dos estudantes com relação aos conceitos, situações e procedimentos e os processos de interação com os recursos utilizados, em especial a história em quadrinhos. As unidades temáticas ou sessões foram importantes para dar espaço para o trabalho articulado com os conceitos subjacentes à aprendizagem da trigonometria e contribuir com a solução dos conflitos que iam surgindo durante o processo. Estas facetas mostraram que foi possível desenvolver com os estudantes os conceitos propostos de modo satisfatório, além da evidência de aspectos motivacionais.

As últimas facetas, interacional e mediacional, deixaram claro que a sequência se mostrou como um espaço aberto para o diálogo, com o incentivo ao desenvolvimento de processos de argumentação, interação docente-discente, trabalho em equipe e autonomia na construção do conhecimento. O trabalho do professor é extremamente importante nos processos de ensino e aprendizagem, todavia devemos sempre considerar a abertura para o trabalho colaborativo entre os estudantes e a socialização como oportunidade de crescimento coletivo.

A partir do que foi exposto no capítulo 6, podemos afirmar que nossa questão de pesquisa foi respondida de modo satisfatório, pois foi possível analisarmos e compreendermos o desenvolvimento das relações epistêmico-ecológica, cognitivo-afetiva e instrucional em um processo de ensino e aprendizagem das razões trigonométricas com estudantes da 1ª série do Ensino Médio, com o uso de uma história em quadrinhos.

Destacamos a importância de se trabalhar os conhecimentos prévios dos estudantes, bem como o foco no campo de conhecimentos necessários para a

aprendizagem e implementação de um significado institucional, em nosso caso, das razões trigonométricas. A HQ enquanto elemento estimulador de situações-problema surge como aliada neste processo.

Creemos que esta pesquisa abre caminhos para a reflexão e expansão das histórias em quadrinhos como recurso possível para a formação do pensamento matemático na Educação Básica, como também em outros níveis educacionais. Mostra também importância de nos debruçarmos sobre os elementos que compõem um processo de ensino, tendo uma visão articulada dos mesmos.

Sabemos que as discussões não se encerram por aqui, então que a busca por alternativas que fomentem o aprendizado efetivo seja uma luta incessante, assim como o ideal do herói o faz lutar para salvar o mundo ou, simplesmente, a vizinhança, pois “com grandes poderes...”

REFERÊNCIAS

ALMOULOU, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lucia; SILVA, Maria José Ferreira da; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**. [online], n.27, pp.94-108, 2004.

ALVES, Robewilton da Silva. **Proposta metodológica para o ensino da Trigonometria baseada na Psicologia Pedagógica**. 2016. 100 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, PROFMAT, Natal, 2016.

ANDRADE, Luísa Silva; KAIBER, Carmen Teresa. Reflexões sobre o ensino de funções sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico. **Educação Matemática em Revista**, RS, ano 14, v.2, n.14, pp. 27 a 36, 2013.

ARAÚJO, Denise Lino de. O que é (e como faz) sequência didática. **Entrepalavras**, Fortaleza - ano 3, v.3, n.1, p. 322-334, jan/jul, 2013. Disponível em: <<http://www.entrepalavras.ufc.br/revista/index.php/Revista/article/view/148/181>>. Acesso em: 05 abr. 2017.

BARBOSA, Aline Oliveira da Silva. **A Trigonometria do ciclo trigonométrico: uma análise da transposição didática realizada pelo livro didático na 2ª série do Ensino Médio à luz da Teoria Antropológica do Didático**. 2015. 156 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências e Matemática, Recife, 2015.

BATISTA, Valéria Nogueira. **Uma proposta metodológica para o ensino das funções trigonométricas**. 2015. 189 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2015.

BÍBLIA, N. T. Tiago. In: BÍBLIA. Português. **Bíblia Sagrada**. Traduzida por João Ferreira de Almeida. Revista e Atualizada no Brasil. Barueri, SP: Sociedade Bíblica do Brasil, 2018.

BORTOLI, Gladis. **Um olhar histórico nas aulas de Trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa**. 2012. 148 f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Univates, Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, Lajeado, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: 04 mar. 2019.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** /Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC /SEF, 1998.

BREDA, Adriana; FONT, Vicenç; LIMA, Valderez Marina do Rosário. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education**, v.8, n.2, 2015.

CARDOSO, Franciele Catelan. **O ensino da geometria e os registros de representação sob um enfoque epistemológico**. In: IX ANPED SUL Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul, Unijuí, 2012. Disponível em: <<http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/831/270>>. Acesso em: 04 mar. 2019.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental**. 2017. 344 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

CAVALCANTE, Luis Adolfo de Oliveira. **No dia mais claro: um estudo sobre o sentido atribuído às histórias em quadrinhos por professores que ensinam matemática em formação**. 2014. 212 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

COSTA, Cristiane Santos da; DUARTE, Jorge Henrique; CAVALCANTE, Jose Airton; ALMEIDA, Jaelson Dantas de; MELO FILHA, Elisabeth Francisca de. Uso de Cartuns Como Didático nas Aulas de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., Curitiba – PR, 2013. **Anais do XI ENEM**, 2013, p. 2-6.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GARCIA SÁNCHEZ, Jesus Nicasio. **Dificuldades de aprendizagem e intervenção psicopedagógica**, tradução Ernani Rosa. – Porto Alegre, ARTMED, 2004.

GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan Díaz; WILHELMI, Miguel R; BLANCO, Teresa F. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. **Revista Complutense de Educación**, v.29, n.4, pp.1-24, 2017. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/11338/1/Giacomone.pdf>>. Acesso em: 20 dez. 2018.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches em Didactiques des Mathematiques**, v.26, n.1, p.39-88, 2006.

GODINO, Juan Díaz. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIAEM-IACME), 13., 2011, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife, 2011. Disponível em: <<http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/CP-godino.pdf>>. Acesso em: 03 jan. 2018.

_____. **Teoría de las Funciones Semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática**. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2003. Disponível em: <<http://www.ugr.es/local/jgodino/>>. Acesso em: 28 dez. 2017.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. v.10, n.2 - Jul./Dez. p.7-37, 2008.

GOMES, Severino Carlos. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino de trigonometria numa abordagem histórica**. 2011. 61 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

GUIMARÃES, Yara. A. F.; GIORDAN, Marcelo. **Elementos para validação de sequências didáticas**. In: Atas do Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 9., ENPEC, 9., Águas de Lindóia, SP, 2013. Disponível em: <<http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/ixenpec/atas/resumos/R1076-1.pdf>>. Acesso em: 01 jun. 2016.

HRISTOV SOBRINHO, Dimitrie. **O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas**. 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2015.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. São Paulo: Perspectiva, 2007.

JUNG, Karen M. **Algumas considerações sobre ângulos**. 2008. 49f. Trabalho de conclusão de curso – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://euler.mat.ufrgs.br/~comgradmat/tccs/monos_0802/TCC_Karen.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2019.

KILHIAN, Kleber. **Tabela dos ângulos notáveis**. 2010. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2010/05/demonstracao-dos-angulos-notaveis.html>>. Acesso em: 20 mar. 2019.

LE MOS, Andrielly Viana; KAIBER, Carmen Teresa. A noção de ângulo: uma análise epistêmica e cognitiva. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., São Paulo – SP, 2016. **Anais do XII ENEM**, 2016.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Ludicidade e atividades lúdicas**: uma abordagem a partir da experiência interna. Salvador: GEPEL, Programa de Pós-Graduação em Educação, FAGED/UFBA, 2002. (Coletânea Educação e Ludicidade – Ensaio 02).

MASSA, Monica de Souza. Ludicidade: da etimologia da palavra à complexidade do conceito. **APRENDER - Cad. de Filosofia e Psic. da Educação**, Vitória da Conquista, ano 9, n.15, p.111-130, 2015.

MASTRONICOLA, Natália Ojeda. **Trigonometria por apps**. 2014. 66 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

MEDEIROS, Susany Cecília da Silva. **Elaboração de uma sequência didática sobre os conceitos geométricos preliminares ao estudo da trigonometria**. 2012. 91 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal, 2012.

MELO, Luciano Marques de. **O ensino de trigonometria para deficientes visuais através do Multiplano Pedagógico**. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2014.

MIRANDA, Catarina de Jesus Valado. **A aprendizagem da Trigonometria do triângulo retângulo através da Resolução de Problemas**. 2010. 147 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Lisboa, 2010.

MOREIRA, Mário Wedney de Lima. **A geometria dinâmica como ferramenta para o ensino de funções trigonométricas em um ambiente virtual de aprendizagem**. 2012. 125 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

NÖRNBERG, Igor Ferreira. **Ciência em revista: a construção de conhecimentos científicos através da utilização de histórias em quadrinhos**. 2008. 119 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Faculdade de Física, Porto Alegre - RS, 2008.

NOGUEIRA, Isabel Cláudia. Análise Ontossemiótica de processos instrucionais de Matemática, melhoria de práticas e desenvolvimento profissional docente. **Revista de Estudos e Investigación en Psicología y Educación**, v. extr. 6, pp. 213-217, 2015.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes. **A Trigonometria da Educação Básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**. 2013. 134 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG, 2013.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 6 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

OSORIO, Victor Larios; GONZÁLEZ, Noraísa González. **Integración de instrumentos metodológicos para el análisis de la validación matemática en la escuela**. In: Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, 2017. Disponível em: <enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>. Acesso em: 10 jan. 2019.

PAIVA, Fabio. **Histórias em quadrinhos na educação**. Recife: Editora Quadro a Quadro, 2017.

PASSOS, Cármen Lúcia B. **Que Geometria acontece na sala de aula?** In: MIZUKAMI, Maria da Graça N., REALI, Aline Maria M. R. Processos formativos da docência: conteúdos e práticas. São Carlos: EDUFSCar, pp.16-44, 2005.

PASTANA, Claudionor de Oliveira. **A utilização do software *Modellus* para o ensino de funções trigonométricas por meio do movimento harmônico simples**. 2017. 122 f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Univates, Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, Lajeado, 2017.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática / Secretaria de Educação**. - Recife: SE. 2008. 134p.

PEREIRA, Cícero da Silva. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio: contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa**. 2011. 89 f. Dissertação (Mestrado) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. Sequência didática na Matemática. **Revista da Educação do IDEAU**, Caxias do Sul/RS, v.8, n.17, Janeiro – Junho (semestral), 2013.

PIASESKI, Claudete Maria. **A geometria no ensino fundamental**. 2010. 35 f. (Monografia) – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim/ RS, 2010.

PICCOLO, Gustavo Martins. O universo lúdico proposto por Caillois. **Revista Digital**, Buenos Aires, ano 13, n.127, dez. 2008

RAMÍREZ MACIEL, Juan Carlos; ACUÑA SOTO, Claudia Margarita. **Análisis de estrategias utilizadas por estudiantes de bachillerato al resolver problemas de proporcionalidad**. In: Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, 2017. Disponível em: <enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>. Acesso em: 22 jan, 2019.

SANTOS, Roberto Elísio dos; VERGUEIRO, Waldomiro. Histórias em quadrinhos no processo de aprendizado: da teoria à prática. **EccoS**, São Paulo, n. 27, p. 81-95. jan./abr. 2012.

SILVA, Ana Paula Pereira do Nascimento. **A leitura de fontes antigas e a formação de um corpo interdisciplinar de conhecimentos: um exemplo a partir do Almagesto de Ptolomeu**. 2013. 95 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal, 2013.

SILVA, Francisco Adeilton da. **Potencialidades pedagógicas da História da matemática nos livros didáticos no Ensino Médio no conteúdo de trigonometria**. 2017. 192 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2017.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica - Incerteza, Matemática, Responsabilidade**. São Paulo: Cortez, 2007.

SOARES, Márlon Herbert Flora Barbosa. Jogos e atividades lúdicas no ensino de química: uma discussão teórica necessária para novos avanços. **REDEQUIM**, Recife, v.2, n.2, out. 2016.

TESTONI, Leonardo André. **Um corpo que cai: As histórias em quadrinhos no ensino de Física**. 2004. 158 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, 2004.

TONON, Sandra de Fátima Tavares Rodrigues. As histórias em quadrinhos como recurso didático nas aulas de matemática. **Em Extensão**, Uberlândia, v. 8, n. 1, p. 72 - 81, jan./jul. 2009.

VASCONCELOS, Danilo Monteiro de. **Onde ninguém jamais esteve: o ensino de trigonometria por meio de histórias em quadrinhos**. 2016. 98 f. Trabalho de conclusão de curso (Monografia) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru/PE, 2016.

VERGUEIRO, Waldomiro. **Uso das HQs no ensino**. In: RAMA, A.; VERGUEIRO, Waldomiro. (Orgs). Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula. 4ª ed., 2ª reimpressão. – São Paulo: Contexto, 2014. – (Coleção Como usar na sala de aula).

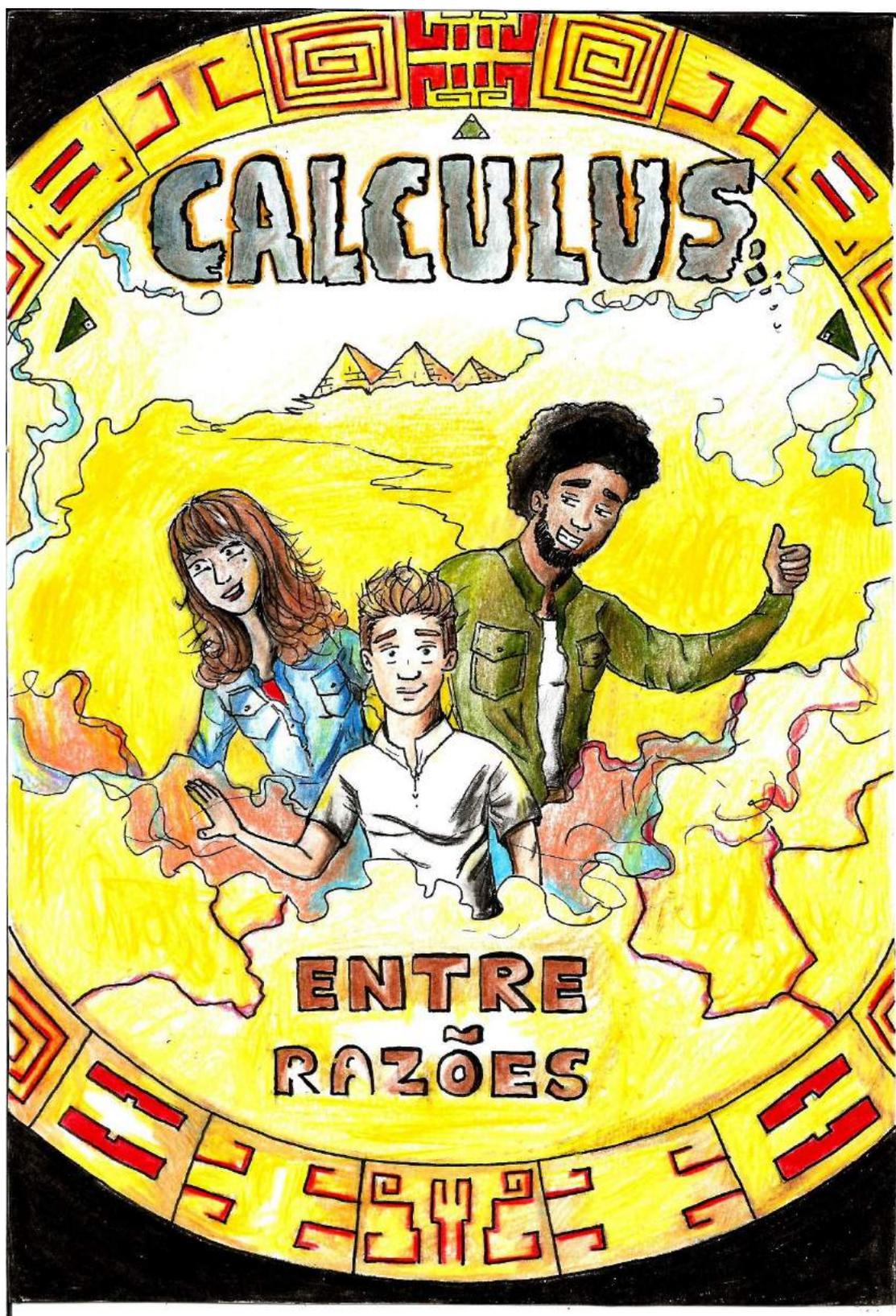
WIDYASTUTI, P. D.; MARDIYANA, M.; SAPUTRO, D. R. S. **An Instructional Media using Comics on the Systems of Linear Equation**. 2017. In: IOP Conference Series: Journal of Physics. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/895/1/012039/pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2019.

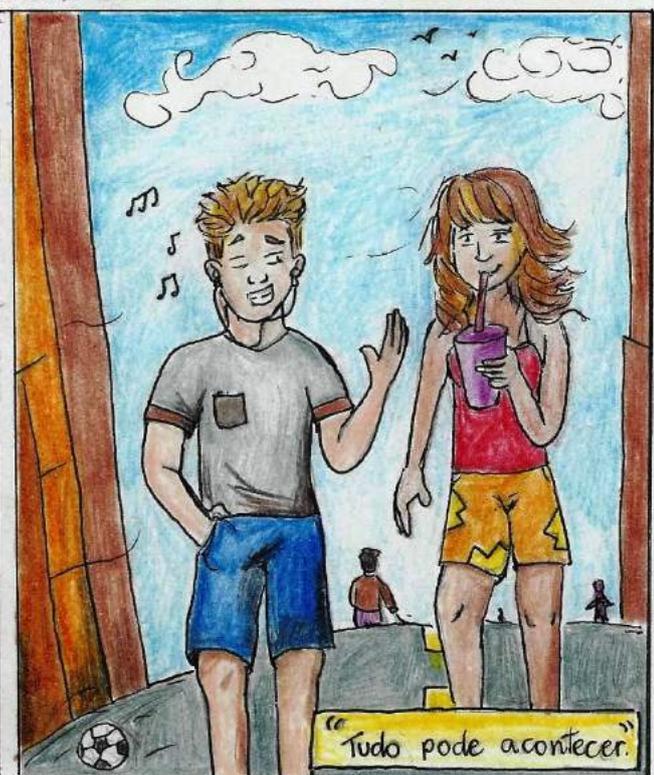
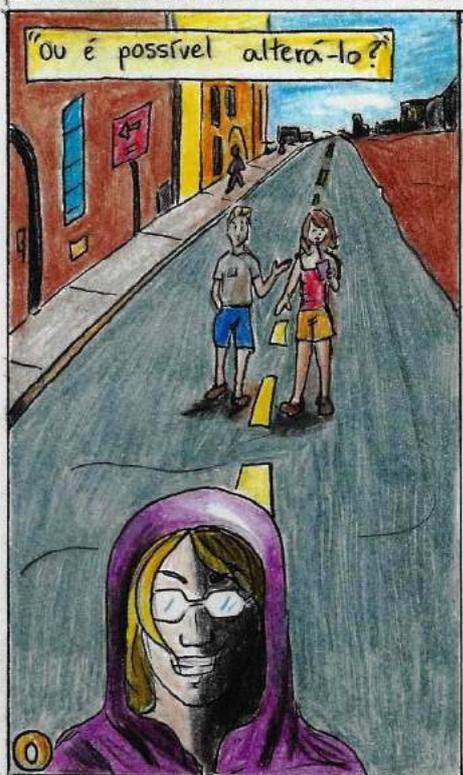
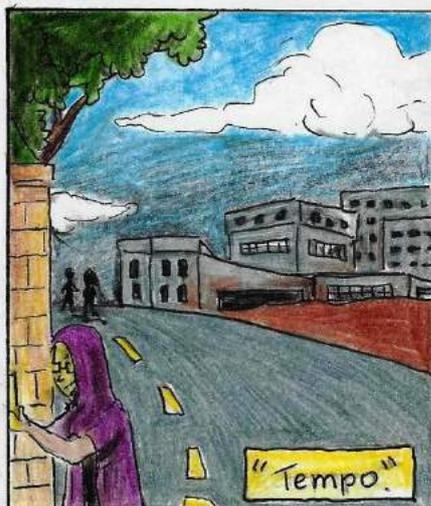
WILHELMI, Miguel R. **Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria**. In: Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico

del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, 2017. Disponível em:
<enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>. Acesso em: 23 jan. 2019.

YACKEL, Erna; COBB, Paul. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.27 n.4, pp.458-477, 1996.

APÊNDICE A – HQ “CALCULUS”





A HISTÓRIA ATÉ AQUI

Em um futuro não muito distante, o povo da Terra descobriu a viagem através do tempo-espaço. A organização conhecida como Calculus, formada por historiadores matemáticos, monitora através da tecnologia M.A.T.H. (Manipulação de Algoritmos e Traços Históricos) toda a atividade matemática da história, ou seja, os acontecimentos de importância para o conhecimento matemático em construção.

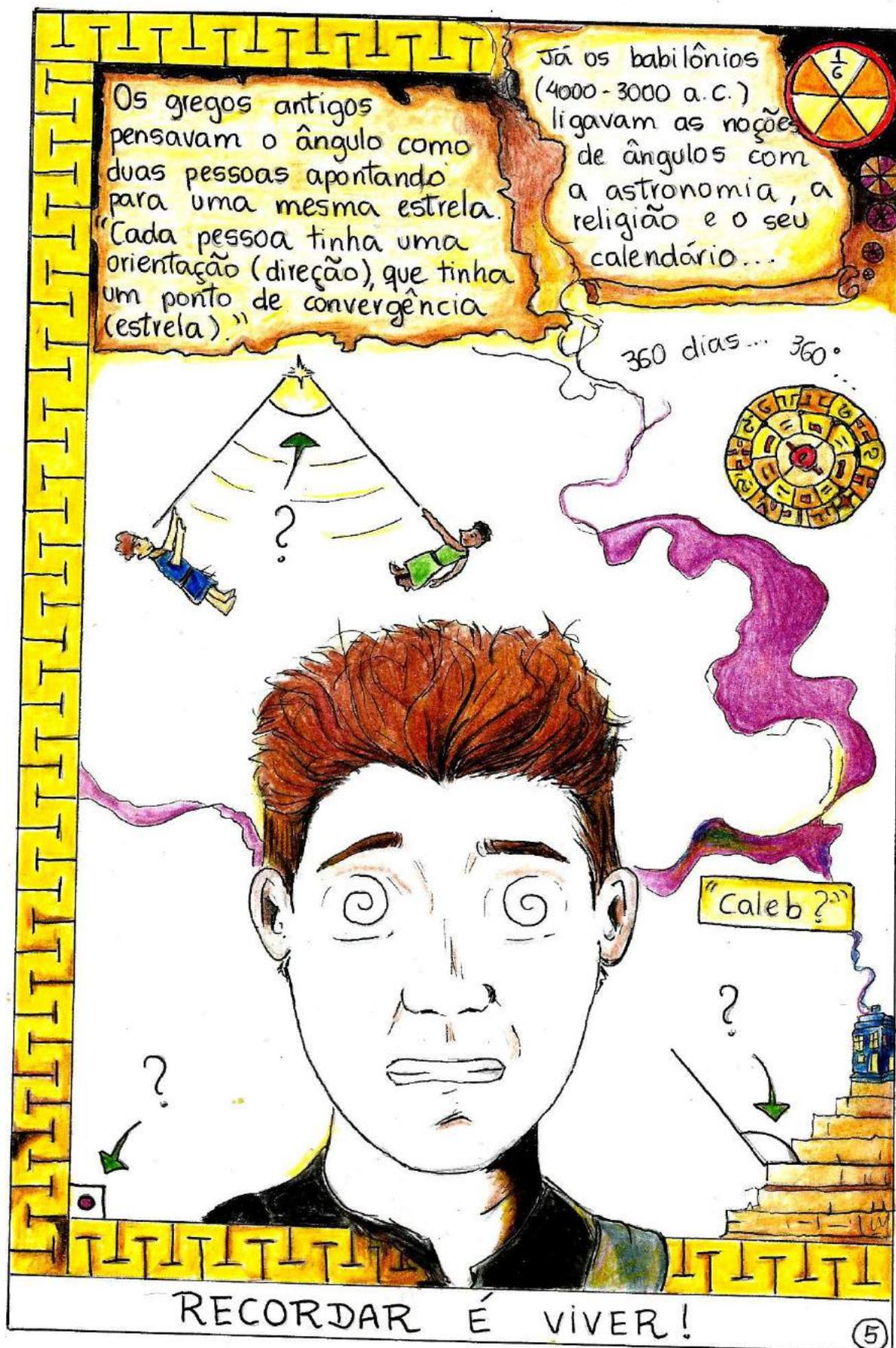
Dentro da organização existem os agentes temporais: viajantes do tempo que se infiltram através da história matemática para monitorar e estudar seu desenvolvimento. O agente Delta12 buscou usar a tecnologia para seus próprios desejos, renegando seus companheiros. A Calculus consegue prendê-lo, mas não antes dele desestabilizar vários registros móveis. A diretora Donna envia o agente Beta17 para alguns destes, a fim de garantir sua existência como conhecem. Em um destes, estava Caleb.

Para Caleb, se a distância entre ele e a Matemática pudesse ser mensurada, seria preciso um número com bastantes zeros. Mas não por muito tempo...

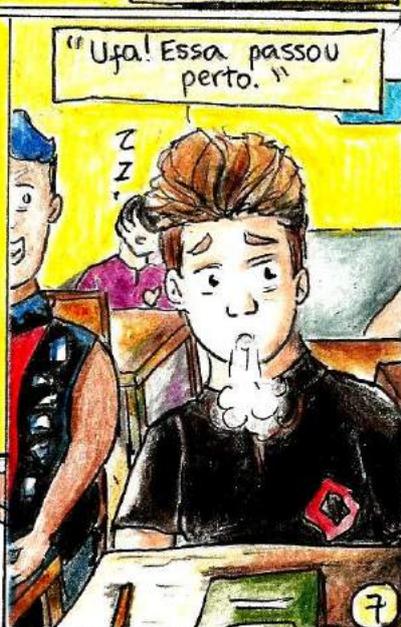
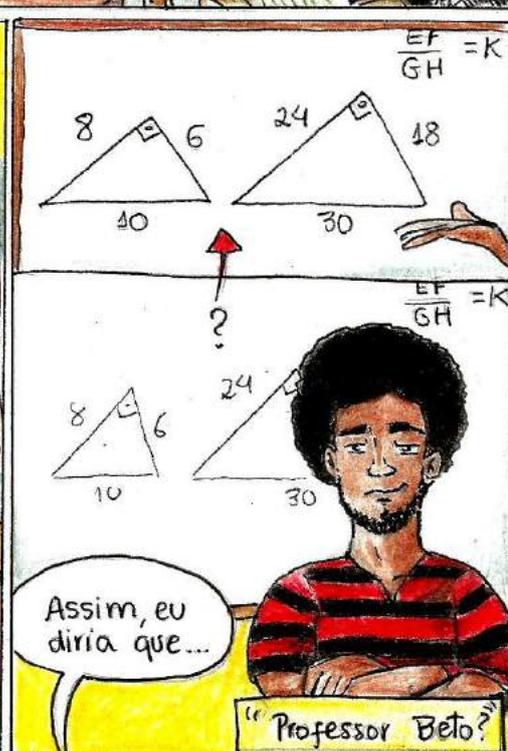
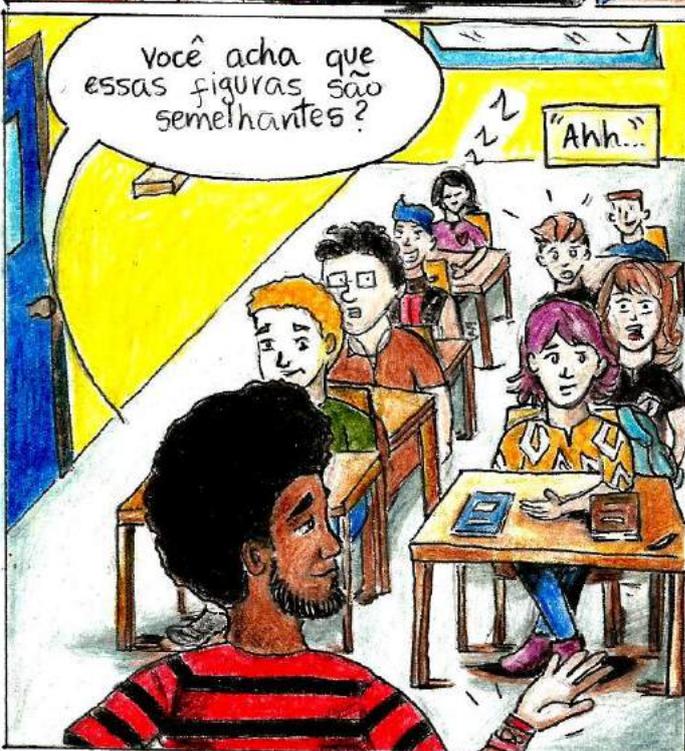












Em algum lugar no centro da cidade.

"Agente Beta11 falando."

Eu sei disso chefa. Vou acessar a sondagem temporal agora.

Só preciso de um lugar seguro.

Sob a mesma razão

14:07

"Acessar."

WOM! WOM!

ENTRADA

Humm, acredito que tenho que agrupar as figuras semelhantes.

As leituras indicam isso....

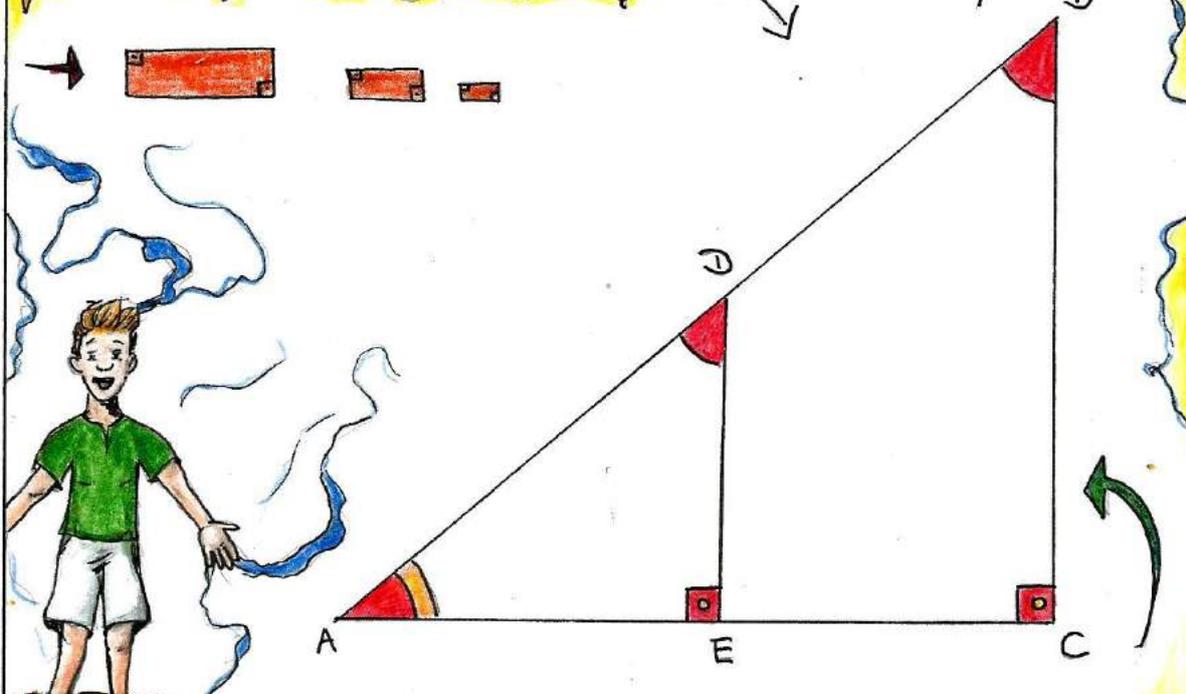
8

Aquele não é o professor Beto?

Mas o quê....

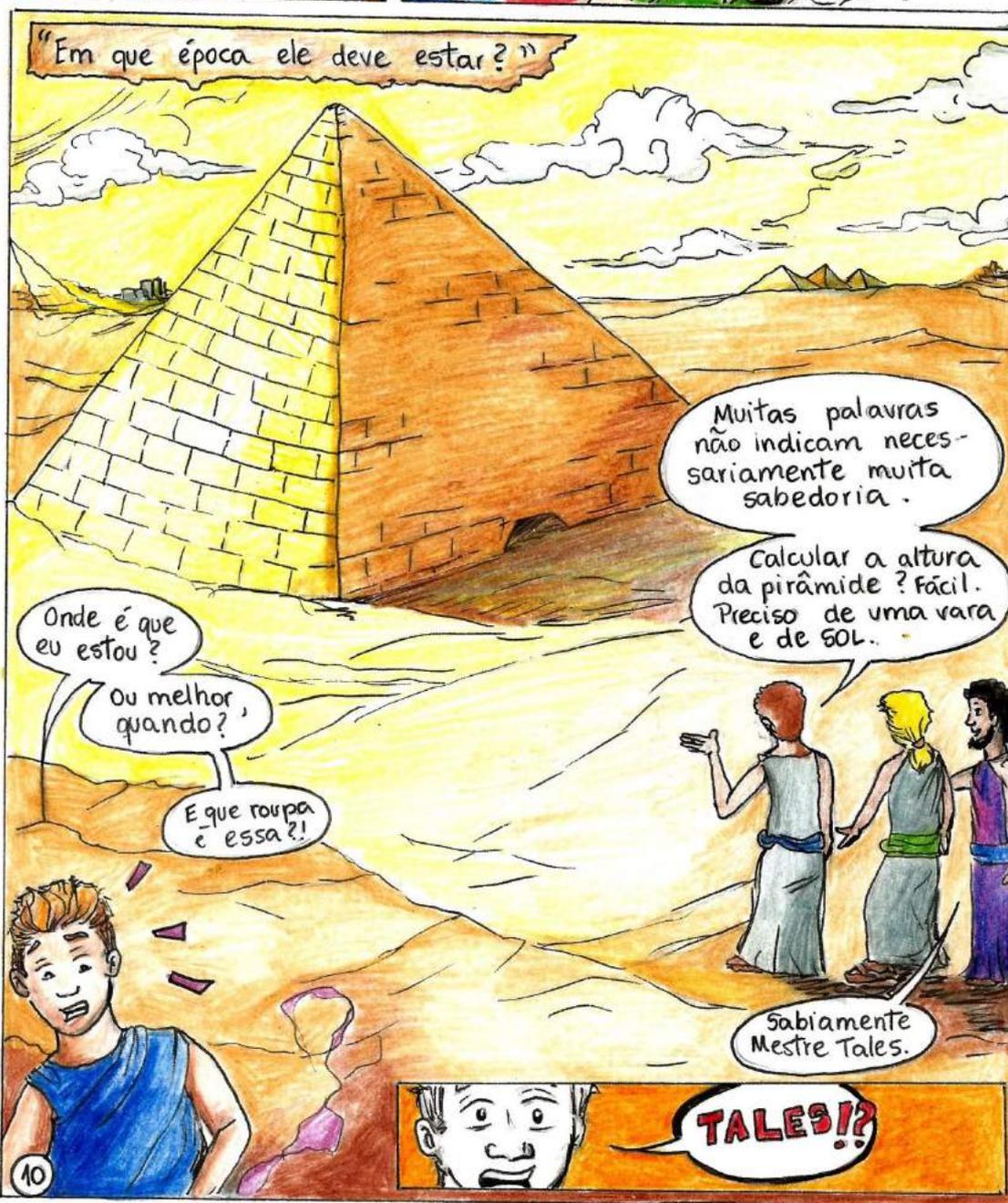


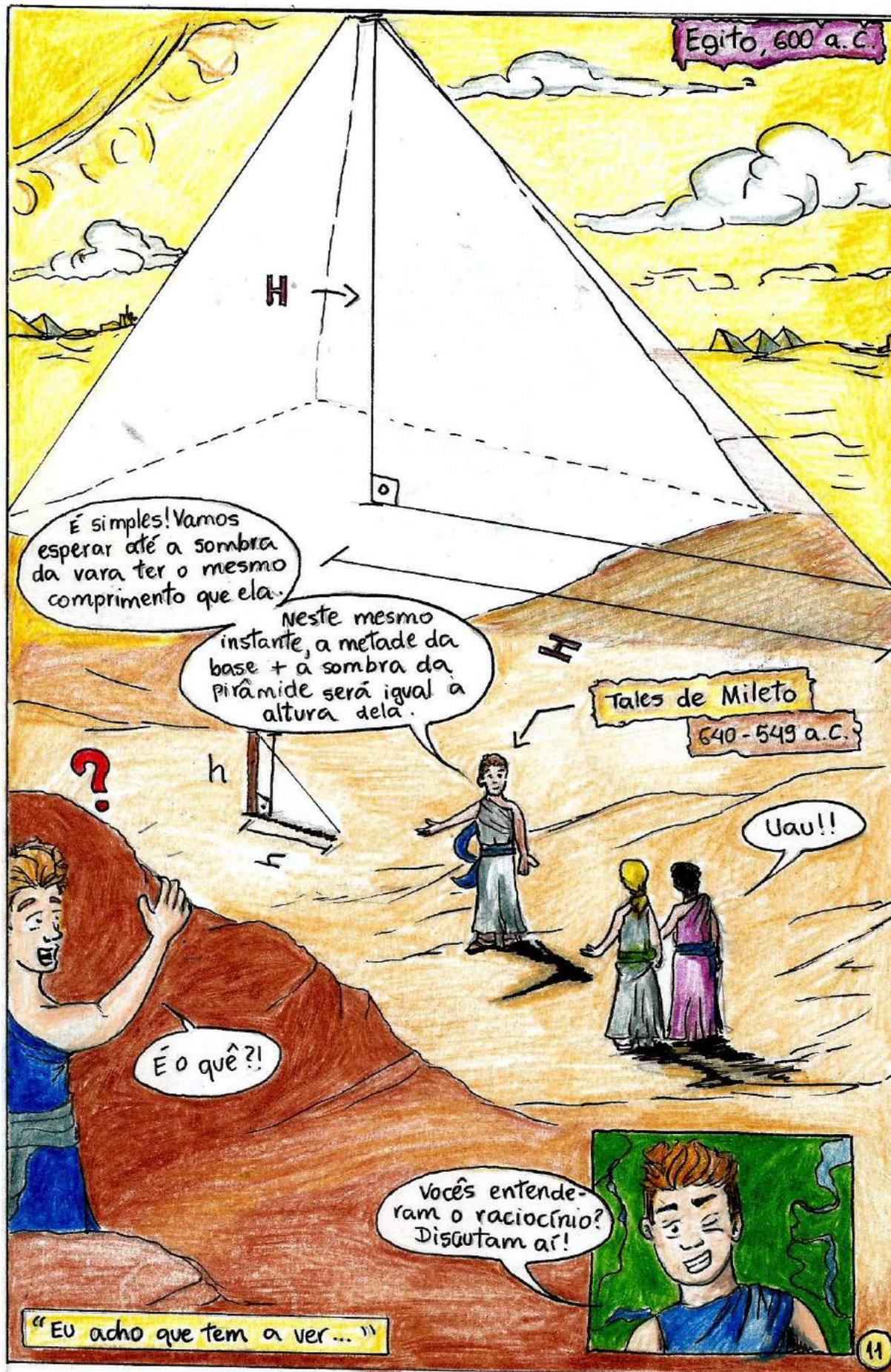
"Os geômetras gregos elevaram o estudo das proporções entre grandezas e, em particular, o confronto entre figuras semelhantes."



A semelhança entre triângulos retângulos e o cálculo de alturas!

RECORDAR É VIVER !!!









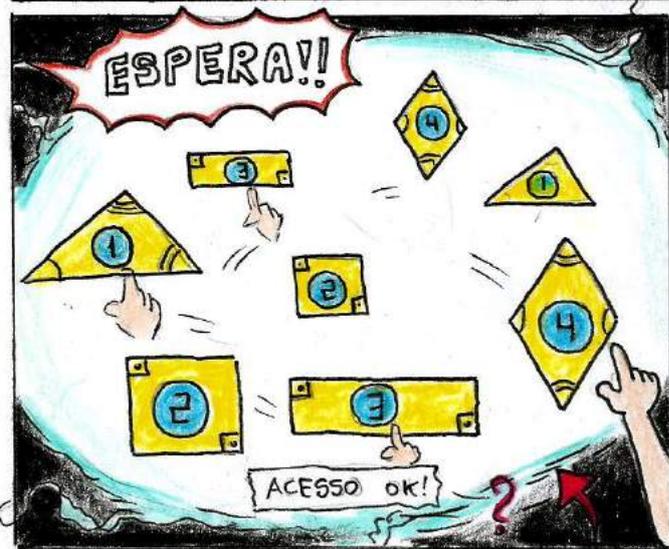
Preciso acessar os dados de sondagem. Mas antes, o código de acesso.

Como eu dizia, envolve SEMELHANÇA de figuras.



O que é isso? Matemática?!

Espera, eu acho que sei...



Hum, legal. Mas ele vai pedir mais verificações...

"Xá" comigo!

Imagina quando eu contar a Júlia!!



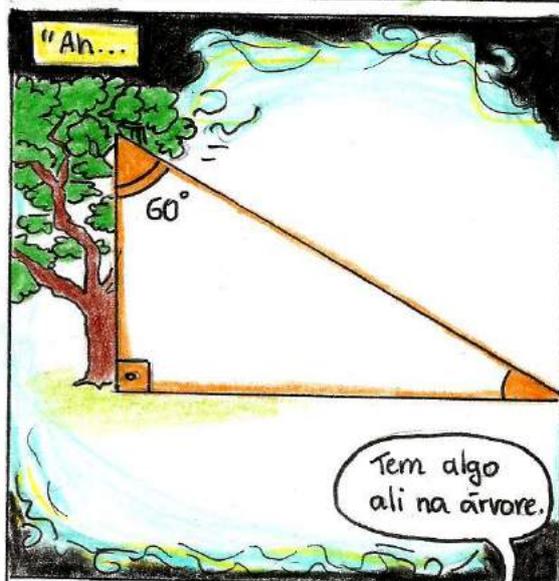
Ei, você não pode contar a ninguém sobre isso!

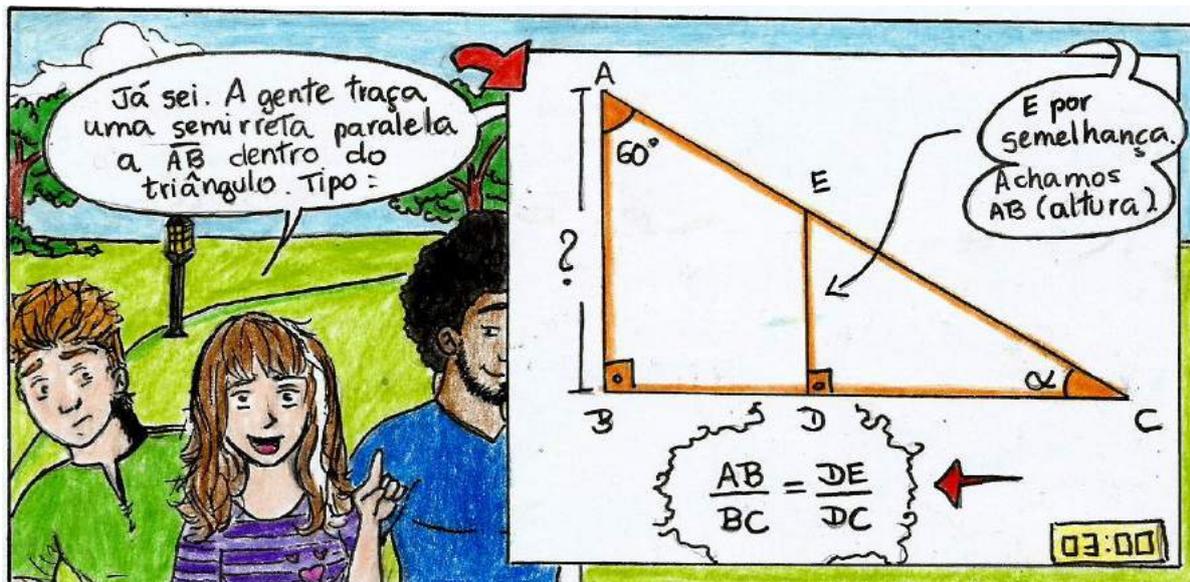
Mas ...

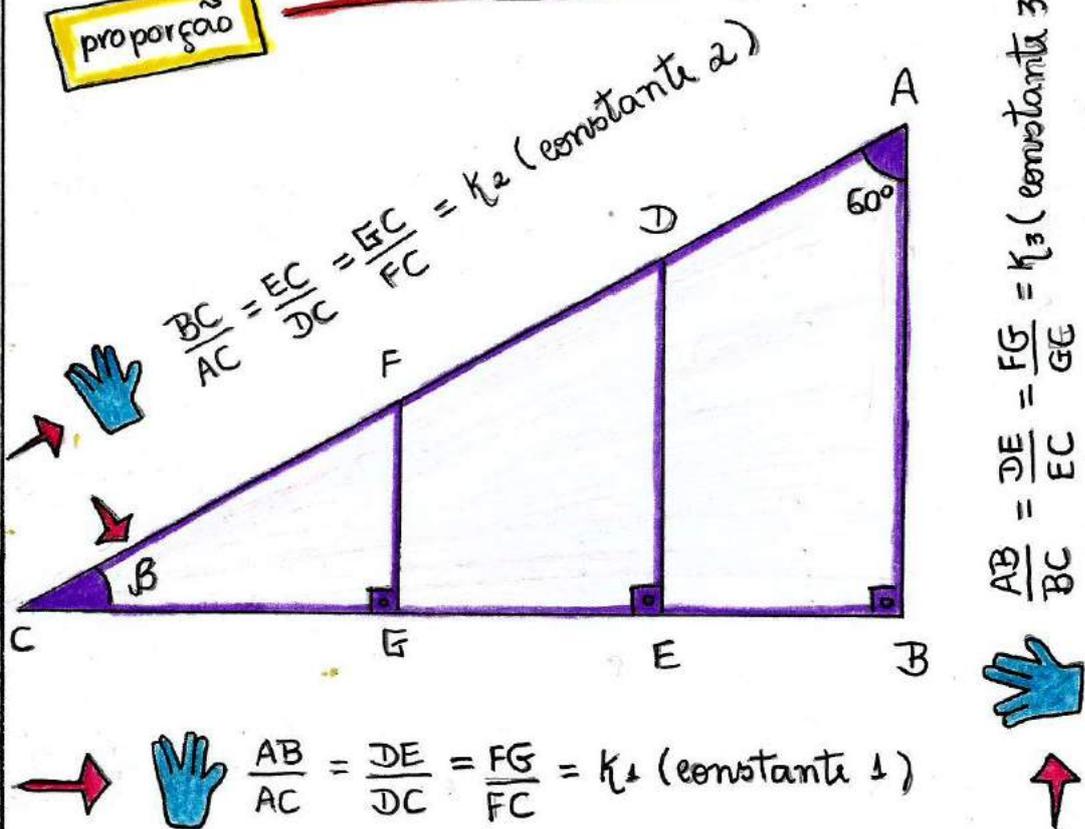
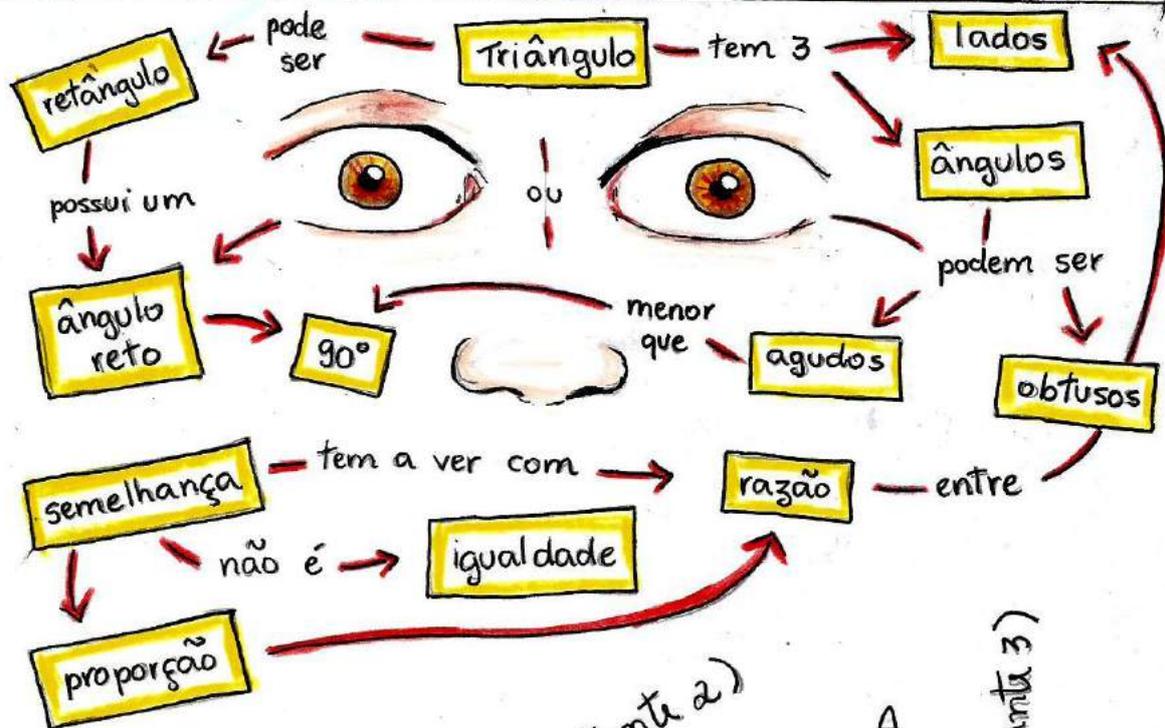


Tarde demais, "praf" Agora, estamos, sob a mesma RAZÃO!











"A primeira constante (K_1) era o resultado da razão entre os lados opostos ao ângulo β e a hipotenusa de cada um dos triângulos."

$$K_1 = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$K_2 = \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

"A segunda (K_2) era a divisão entre o lado adjacente* e a hipotenusa de cada um deles."

"Já a terceira surgia da razão (divisão) entre o lado oposto e o lado adjacente ao ângulo β de todos os três triângulos."

$$K_3 = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{CATETO ADJACENTE}}$$


* Adjacente: posto ao lado de; junto; pegado.





com quem você
tá falando?!

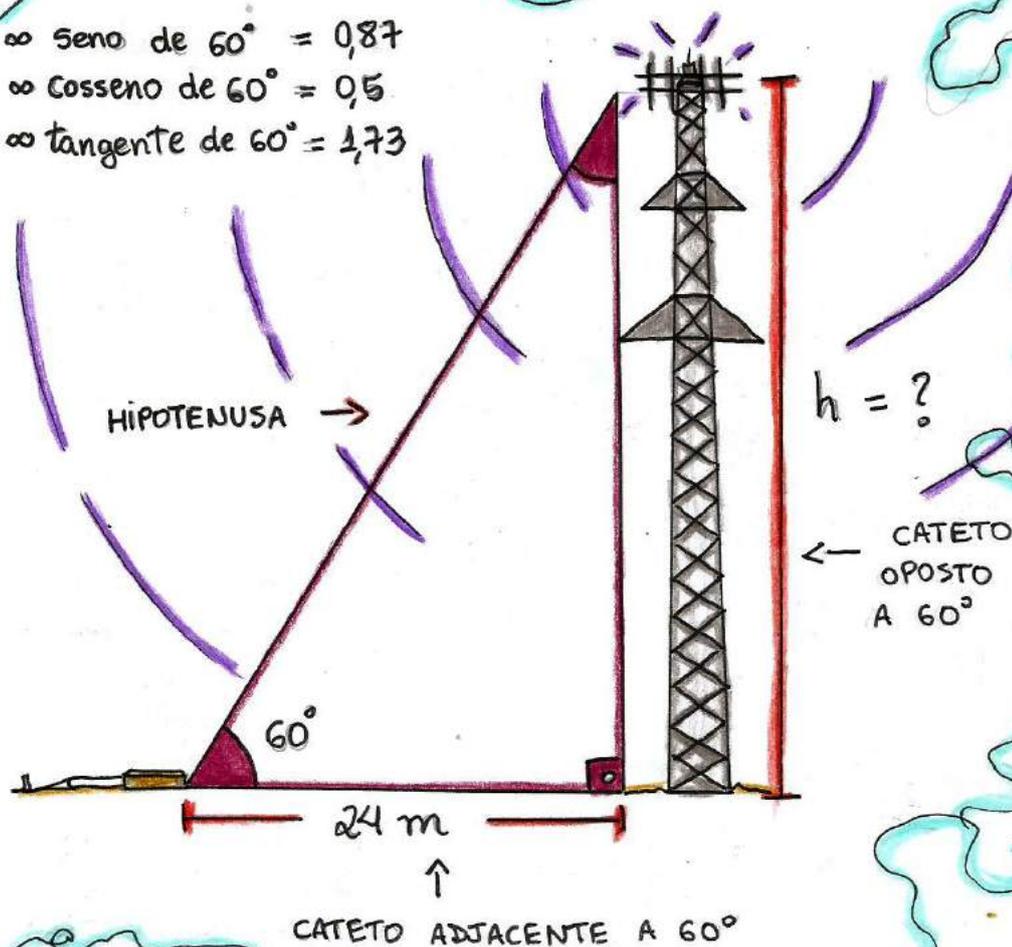


Precisamos de você ou vocês.
Sei que tem alguém aí. O
bracelete nos deu os
seguintes dados aí
de baixo.

∞ Seno de $60^\circ = 0,87$

∞ Cosseno de $60^\circ = 0,5$

∞ tangente de $60^\circ = 1,73$



"O futuro está nas mãos... ou melhor, nos cálculos de vocês."

DADO (ALTURA) : —