



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JOSÉ CÍCERO ARAUJO DOS SANTOS

**UM MÉTODO MULTIESCALA E MULTINÍVEL ALGÉBRICO DINÂMICO (ADM)
PARA SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS ÁGUA-ÓLEO EM
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO MUITO HETEROGÊNEOS**

Recife
2019

JOSÉ CÍCERO ARAUJO DOS SANTOS

**UM MÉTODO MULTIESCALA E MULTINÍVEL ALGÉBRICO DINÂMICO (ADM)
PARA SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS ÁGUA-ÓLEO EM
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO MUITO HETEROGÊNEOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Energia.

Orientador: Profº. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.

Coorientador: Profº. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.

Recife

2019

- S237m Santos, José Cícero Araujo dos.
Um método multiescala e multinível algébrico dinâmico (ADM) para simulação tridimensional de escoamentos água-óleo em reservatórios de petróleo muito heterogêneos / José Cícero Araujo dos Santos. – Recife, 2019.
103 folhas, il., fig., gráfs., tabs., abrevs. e simbs.
- Orientador: Prof^o. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.
Coorientador: Prof^o. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. 2019.
Inclui Referências e Apêndices.
1. Engenharia Civil. 2. Simulação Adaptativa. 3. Método Multiescala Algébrico Dinâmico (ADM). 4. Simulação de Reservatórios. 5. Volumes Finitos. 6. Reservatórios de Petróleo Muito Heterogêneos. I. Lyra, Paulo Roberto Maciel (Orientador). II. Carvalho, Darlan Karlo Elisiário de (Coorientador). III. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

**UM MÉTODO MULTIESCALA E MULTINÍVEL ALGÉBRICO DINÂMICO (ADM) PARA
SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS ÁGUA-ÓLEO EM
RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO MUITO HETEROGÊNEOS**

defendida por

José Cícero Araujo dos Santos

Considera o candidato APROVADO

Recife, 25 de julho de 2019

Orientador - Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra – UFPE _____

Coorientador - Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho – UFPE _____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra - UFPE
(orientador)

Dr. José Roberto Pereira Rodrigues – PETROBRAS
(examinador externo)

Dr. Rafael Jesus de Moraes – PETROBRAS
(examinador externo)

Prof. Dr. José Antônio Barbosa – UFPE
(examinador interno)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe, Cícera Araujo Lima, e meu Pai Antônio Severino dos Santos, pelo amor e carinho, e todo apoio.

Aos meus orientadores, Paulo Roberto Maciel Lyra e Darlan Karlo Elisiário de Carvalho. Agradeço pela brilhante orientação, por todas as oportunidades dadas e principalmente pela enorme paciência que tiveram comigo nesses dois anos de pesquisa, graças a isso finalizo mais uma fase importante da minha vida.

A todos os meus amigos do PADMEC que estiveram ao meu lado nessa longa caminhada, em especial João e Ricardo.

À FACEPE (Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco) pelo projeto Modelagem e simulação multiescala bi e tri dimensional de escoamentos em meios porosos através do método dos volumes finitos (processo IBPG-0052-3.01/17),

À UFPE, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pela oportunidade de desenvolver esse projeto nessa instituição

RESUMO

Atualmente, os modelos geocelulares de reservatórios de petróleo podem ter tamanhos da ordem de até 10^9 volumes de controle e, em geral, a simulação dinâmica desses modelos na escala fina apresenta custo computacional impeditivo. De forma geral, são aplicadas técnicas de *upscaling* para definir modelos menos refinados, que podem ser tratados com os recursos disponíveis. Essas técnicas consistem em algum tipo de homogeneização dos parâmetros de escala fina, o que implica em perda de informação, levando à baixa acurácia (em relação à simulação direta), particularmente em meios altamente heterogêneos. Recentemente, os métodos Multiescala de Volumes Finitos Multiescala (MsFVM) foram desenvolvidos para minimizar essas perdas. Essas técnicas, nas quais operadores algébricos (restrição e prolongamento) são responsáveis pela transferência de informações entre as escalas, fornecem soluções mais precisas do que técnicas de *upscaling* com custo computacional reduzido, em comparação com a solução obtida diretamente na escala fina. Neste trabalho, é apresentado um método Multiescala e Multinível Algébrico Dinâmico (*Algebraic Dynamic Multilevel - ADM*). A fim de melhor capturar os fenômenos envolvidos, na definição da malha ADM usamos um método algébrico iterativo para a seleção da malha inicial (usada para começar a simulação bifásica), numa etapa de pré-simulação. Essa malha é posteriormente adaptada dinamicamente para que atenda a requisitos de acurácia pré-estabelecidos pelo usuário. Para a solução das equações que modelam o escoamento de água e óleo em reservatórios de petróleo, foi utilizada a estratégia segregada IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) onde o problema da pressão foi discretizado através do método multiescala e multinível ADM com o método dos volumes finitos com fluxos nas faces aproximadas por TPFA (*Two Point Flux Approximation*) e uma formulação *upwind* de primeira ordem no problema de saturação. Diversos problemas modelo foram estudados com bons resultados alcançados, como exemplo, uma norma de erro L_2 de 0,014 na pressão com 20% de volumes ativos para um caso de teste proveniente do SPE-10 benchmark, com aceleração do processamento da ordem de 4.

PALAVRAS-CHAVE: Simulação Adaptativa. Método Multiescala Algébrico Dinâmico (ADM). Simulação de Reservatórios. Volumes Finitos. Reservatórios de Petróleo Muito Heterogêneos.

ABSTRACT

Nowadays, large reservoir fluid flow models may size up to 10^9 control volumes and sometimes, the simulation of these fine scale models is impossible even using the most powerful parallel machines. In general, upscaling techniques are applied to define coarser, i.e., smaller, models that can be treated at reasonable computer resources and time. These techniques consist in homogenization of the fine scale models, in order to obtain representative static properties such as porosities and transmissibilities. This procedure naturally implies in loss of information, including small scale fractures, vugs and other details from the fine scale mesh. Recently, Multiscale Finite-Volume Methods (MsFVM) have been developed to handle highly heterogeneous reservoirs. These techniques, in which operators (restriction and prolongation) are responsible for transferring information between the fine and coarse scales, provide more accurate solutions than upscaled models with reduced CPU cost, compared to full fine scale simulations. In order to better capture the phenomena involved, in the definition of the ADM mesh we use an iterative algebraic method to select the initial mesh in a preprocessing step. This mesh is later dynamically adapted to meet pre-established accuracy requirements. For the solution of the equations that model the flow of water and oil in oil reservoirs, the Implicit Pressure Explicit Saturation (IMPES) strategy was used and the pressure problem was discretized through the multiscale and multilevel ADM method with the finite volume method with fluxes on the faces approximated with finite differences (Two Point Flux Approximation -TPFA) and a first-order upwind formulation in the saturation problem.

KEYWORDS: Adaptive Simulation. Algebraic Dynamic Multilevel Method (ADM). Reservoir Simulation. Finite Volumes. Highly Heterogeneous Oil Reservoirs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Representação do domínio bidimensional Ω , dos contornos de Dirichlet, Γ_D , e Neumann, Γ_N , e dos poços injetor, Γ_I , e produtor, Γ_P , em um reservatório bidimensional genérico	27
Figura 2 –	Estratégia IMPES.....	29
Figura 3 –	Face, IJ , adjacente aos volumes I e J	30
Figura 4 –	Transferências de escala realizadas pelo método ADM.....	34
Figura 5 –	Malha primal, linha grossa, construída com uma razão de engrossamento (3, 3) e malha fina, linha estreita.....	36
Figura 6 –	Malhas grossas: a) dual do MsFVM apresentando os volumes reais, com cores sólidas, e os ghost volumes, área com transparência b) Malha primal, linhas claras representam as fronteiras dos volumes de controle da malha fina, linhas escuras representam os agrupamentos da malha grossa e c) Malha dual do MMVCM.....	37
Figura 7 –	Malha dual tridimensional.....	38
Figura 8 –	Exemplo de malha ADM.....	38
Figura 9 –	Transferências de escala realizadas pelos operadores de restrição	39
Figura 10 –	a) Malha ADM e seus conjuntos gama, (b) Γ_2 , (c) Γ_1 e (d) Γ_0	40
Figura 11 –	Transferência de escalas realizada pelo operador de prolongamento	40
Figura 12 –	Conjunto Π^1 , vértices destacados em vermelho	41
Figura 13 –	Malha fina e localização dos poços, um poço injetor (à esquerda) e um poço produtor (à direita)	46
Figura 14 –	Malhas auxiliares do problema bidimensional, malha primal (a), malha dual (b) e malha ADM (c). Os números correspondem aos Ids que identificam cada volume	46
Figura 15 –	Operador de restrição ADM	47
Figura 16 –	Matriz de transmissibilidade na malha fina com explicitação do tipo de volume na malha dual	47
Figura 17 –	Matriz Wirebasket ou transmissibilidade reordenada	48
Figura 18 –	Explicitação das sub-matrizes componentes da Wirebasket	48
Figura 19 –	Operador de prolongamento multiescala, cada coluna corresponde a uma função de base	49

Figura 20 –	Operador de prolongamento ADM	49
Figura 21 –	Prolongamento da solução de pressão	50
Figura 22 –	Adaptação da malha ADM ao posicionamento dos poços: a) Configuração horizontal de poços, b) Resolução/malha ADM correspondente a essa configuração.....	51
Figura 23 –	Relação entre o percentual de volumes ativos e o erro máximo relativo, usando como referência: a pressão obtida com TPFA, p^{TPFA} , na malha fina (linha preta), a pressão iterada, $\tilde{p}$ (linha vermelha). Para um reservatório contido no SPE-10, iniciando na origem, com $45 \times 45 \times 45 = 91125$ volumes.....	53
Figura 24 –	Esquema da aplicação do processo iterativo, os números indicam os parâmetros de entrada e as letras indicam processos, estes símbolos estão descritos no algoritmo 1.....	55
Figura 25 –	Exemplo de campo de saturação em um volume primal.....	56
Figura 26 –	Parte de uma malha ADM inicial 2D (a) em que os volumes de Id 1 (Nível 2) e Id 14 (nível 1) serão reduzidos em um nível o volume de Id 1, observe o processo de redução do nível 2 para o nível 1 (b) e do nível 1 para o nível 0 (c). Os volumes que não têm seu nível alterado não são objeto da análise.....	57
Figura 27 –	Tamanho das sub-matrizes T_{ii} , T_{ff} , T_{aa} , em relação à matriz de transmissibilidade da malha fina para diferentes razões de engrossamento.....	59
Figura 28 –	Percentual de colunas calculadas (azul, verde e amarelo escuros) e não calculadas (azul verde e amarelo claros) em relação ao número total de colunas da matriz de transmissibilidade para diferentes razões de engrossamento.....	60
Figura 29 –	Malha dual 3-d (a), e explicitação dos subconjuntos volumes do tipo Interno, em azul b), destaca-se que cada um desses subconjuntos não compartilha face com os demais do mesmo tipo.....	61
Figura 30 –	Aceleração do processamento, razão entre o tempo para solução de n_v sistemas lineares e o tempo para solução considerando a distribuição em blocos menores.....	62

Figura 31 –	Campo de permeabilidade do reservatório com análise escala em m^2	63
Figura 32 –	Configuração vertical de poços.....	64
Figura 33 –	Norma de erro L_2 para diferentes razões de engrossamento.....	65
Figura 34 –	Norma de erro L_{inf} para diferentes razões de engrossamento.....	65
Figura 35 –	Norma de erro L_2 para diferentes direções preferenciais de engrossamento.....	66
Figura 36 –	Norma de erro L_{inf} para diferentes direções preferenciais de engrossamento.....	66
Figura 37 –	Norma de erro L_2 para diferentes taxas de refinamento.....	67
Figura 38 –	Norma de erro L_{inf} para diferentes taxas de refinamento.....	67
Figura 39 –	Malha ADM utilizada na configuração vertical de poços.....	68
Figura 40 –	Solução ADM para o campo de pressão.....	69
Figura 41 –	Solução TPFA para o campo de pressão.....	69
Figura 42 –	Configuração horizontal de poços utilizada.....	69
Figura 43 –	Norma de erro L_2 da configuração horizontal de poços versus percentual de volumes ativos.....	70
Figura 44 –	Norma de erro L_{inf} da configuração horizontal de poços versus percentual de volumes ativos.....	70
Figura 45 –	Malha ADM utilizada na configuração horizontal de poços.....	71
Figura 46 –	Solução ADM para o campo de pressão na configuração horizontal de poços.....	71
Figura 47 –	Solução TPFA para o campo de pressão na configuração horizontal de poços.....	71
Figura 48 –	Norma de erro L_2 do mesmo reservatório com poços horizontais ou verticais.....	72
Figura 49 –	Norma de erro L_{inf} do mesmo reservatório com poços horizontais ou verticais.....	72
Figura 50 –	Dimensões e discretização dos reservatórios utilizados nos exemplos bifásicos.....	73
Figura 51 –	Configuração de poços do exemplo homogêneo. Um poço produtor com pressão prescrita, em vermelho, e um poço injetor com vazão prescrita, em azul.....	74

Figura 52 –	Condição inicial de saturação no reservatório homogêneo, observa-se que apenas os volumes correspondentes ao poço injetor possuem saturação de água maior que a residual.....	74
Figura 53 –	Malha ADM adaptada ao posicionamento dos poços do problema homogêneo.....	75
Figura 54 –	Relação entre o valor máximo relativo do estimador de erro e o percentual de volumes ativos para o exemplo homogêneo.....	75
Figura 55 –	Malha ADM, primeira coluna, adaptada ao campo de saturação obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, segunda coluna Sw ADM, e campo de saturação de referência, terceira coluna Sw TPFA, obtido com o uso de TPFA na malha fina para solução da equação da pressão, no problema homogêneo.....	76
Figura 56 –	Produção de óleo versus volume poroso injetado para o exemplo homogêneo utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e TPFA na malha fina, curva preta.....	76
Figura 57 –	Razão água óleo em relação ao volume poroso injetado (VPI) para o exemplo homogêneo, utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.....	77
Figura 58 –	Percentual de volumes ativos em relação ao volume poroso injetado (VPI) do exemplo com barreiras.....	78
Figura 59 –	Configuração de poços do exemplo com barreiras. Um poço produtor com pressão prescrita, em vermelho, e um poço injetor com vazão prescrita, em azul.....	79
Figura 60 –	Condição inicial de saturação no reservatório, observa-se que apenas os volumes correspondentes ao poço injetor possuem saturação de água maior que a residual.....	79
Figura 61 –	Campo de permeabilidade do exemplo com barreiras, em azul, ambas atravessam todas as camadas horizontais, 45 no total.....	80
Figura 62 –	Malha ADM adaptada ao posicionamento dos poços.....	80
Figura 63 –	Relação entre o valor máximo relativo do estimador de erro e o percentual de volumes ativos para o exemplo com barreiras.....	81
Figura 64 –	Malha ADM inicial utilizada no problema com barreiras.....	81

Figura 65 –	Malha ADM, primeira coluna, adaptada ao campo de saturação obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, segunda coluna, e campo de saturação de referência, terceira coluna, obtido com o uso de TPFA na malha fina para solução da equação da pressão.....	82
Figura 66 –	Produção de óleo versus volume poroso injetado para o exemplo com barreiras utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.....	83
Figura 67 –	Razão água óleo em relação ao volume poroso injetado (VPI) para o exemplo com barreiras, utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.....	83
Figura 68 –	Percentual de volumes ativos em relação ao volume poroso injetado (VPI) do exemplo com barreiras.....	84
Figura 69 –	Aceleração do processamento, razão entre o tempo para finalizar uma passo da solução de referência e o tempo para finalizar esse passo de tempo utilizando a solução ADM atualizando o operador de prolongamento AMS a cada passo de tempo.....	85
Figura 70 –	Curvas de produção obtidas com solução de pressão obtida com: TPFA na malha fina, preto, e método ADM, com atualização do operador AMS a cada passo de tempo, vermelho. e sem atualização do operador AMS, azul.....	86
Figura 71 –	Curva de aceleração do processamento versus VPI, utilizando o método ADM no cálculo da pressão sem atualizar o operador de prolongamento AMS.....	86
Figura 72 –	Campo de permeabilidade e posição do reservatório no interior do SPE-10.....	87
Figura 73 –	Configuração de poços do exemplo muito heterogêneo. Um poço produtor com pressão prescrita, em vermelho, e um poço injetor com vazão prescrita, em azul.....	88
Figura 74 –	Condição inicial de saturação no reservatório, observa-se que apenas os volumes correspondentes ao poço injetor possuem saturação de água maior que a residual.....	88

Figura 75 –	Malha ADM adaptada ao posicionamento dos poços do reservatório muito heterogêneo.....	89
Figura 76 –	Relação entre o valor máximo relativo do estimador de erro e o percentual de volumes ativos para o reservatório muito heterogêneo.....	90
Figura 77 –	Malha ADM inicial utilizada no problema com barreiras.....	90
Figura 78 –	Campo de pressão obtido com a aplicação do método ADM à malha inicial, a) e campo de pressão obtido com o uso de TPFA na malha fina b).....	91
Figura 79 –	Malha ADM, primeira coluna, adaptada ao campo de saturação obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, segunda coluna, e campo de saturação de referência, terceira coluna, obtido com o uso de TPFA na malha fina para solução da equação da pressão.....	93
Figura 80 –	Produção de óleo versus volume poroso injetado para o exemplo muito heterogêneo utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.....	94
Figura 81 –	Razão água óleo em relação ao volume poroso injetado (VPI) para o exemplo muito heterogêneo, utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.....	94
Figura 82 –	Percentual de volumes ativos em relação ao volume poroso injetado (VPI) do exemplo muito heterogêneo.....	95

LISTA DE ABREVIATURAS

ADM	Algebraic Dynamic Multilevel
AMS	Algebraic Multiscale Solver
FVM	Finite Volume Method
IMPES	Implicit Pressure-Explicit Saturation
MPFA	Multi-Point Flux Approximation
MsFVM	Multiscale Finite Volume Method
TPFA	Two-Point Flux Approximation

LISTA DE SÍMBOLOS

CR^l	Razão de engrossamento do nível l
CFL	Número de Courant-Friedrichs-Lewy
E_{rel}	Erro relativo
E_{abs}	Erro absoluto
$\tilde{e}$	Erro obtido de um processo iterativo
$\bar{e}$	Erro restringido
$\vec{F}_{IJ}$	Fluxo na face IJ
f_w	Fluxo fracionário de água
g_D	Pressão prescrita
g_N	Fluxo normal prescrito
G	Matriz de permutação
h_i	Taxa de refinamento
IJ	Face adjacente aos volumes I e J
k_{ri}	Permeabilidade relativa da fase i
$\tilde{K}$	Tensor de permeabilidade absoluta da rocha
K_{eq}	Permeabilidade equivalente
K_{rw}^o	Valor final da permeabilidade relativa da água
l	Nível qualquer multiescala
L	Maior dos níveis multiescala
M	Matriz <i>Wirebasket</i> modificada

N_f	Número de volumes na malha fina
$\vec{n}$	Vetor área normal
$\vec{n}_{IJ}$	Vetor área normal à face IJ
N_l	Número de volumes no nível l
N_L	Número de volumes ativos na malha ADM
N_{VC}	Número de volumes de controle avaliados
N_o	Coeficiente de Brooks & Corey para ajuste da curva de retenção para a fase óleo
N_w	Coeficiente de Brooks & Corey para ajuste da curva de retenção para a fase água
$N_{Máx}$	Número máximo de volumes ativos
o	Fase óleo
p	Pressão
p_{IJ}	Pressão na face IJ
p_V	Pressão no volume V
p^{ADM}	Pressão na resolução ADM
p^{TPFA}	Pressão obtida com o uso de TPFA na malha fina
$\tilde{p}$	Pressão ADM prolongada nos volumes da malha fina
$\bar{p}$	Pressão obtida por processo iterativo
P	Produtório dos operadores de prolongamento ADM
P_{l-1}^l	Operador de prolongamento multinível do nível l para o nível $l-1$
$\hat{P}_{l-1}^l$	Operador de prolongamento multiescala do nível l para o nível $l-1$
q_i	Vazão da fase i em um volume de controle

Q_i	Vazão específica da fase i em um volume de controle
Q_T	Vazão específica total em um volume de controle
$\bar{Q}_{\hat{V}}$	Injeção ou produção específica em um volume de controle
R	Produtório dos operadores de restrição ADM
R_{l-1}^l	Operador de restrição ADM do nível l para o nível $l-1$
$\hat{R}_{l-1}^l$	Operador de restrição AMS do nível l para o nível $l-1$
S_i	Saturação da fase i
S_{or}	Saturação de óleo residual
S_{wi}	Saturação de água irreduzível
S_{wn}	Saturação de água normalizada
$\bar{S}_w^0$	Distribuição inicial de água no reservatório
$\bar{S}_w$	Saturação prescrita em um conjunto de poços injetores
$S_{W_{\hat{V}}}^n$	Saturação de um volume de controle genérico no tempo n
T	Matriz de transmissibilidade
T_{IJ}	Transmissibilidade na face IJ
t	Tempo
TOL	Tolerância a uma norma de erro
$\hat{V}$	Volume de controle genérico
$\vec{v}$	Velocidade de Darcy
$\vec{v}_{IJ}$	Velocidade normal à face IJ
W	Matriz <i>Wirebasket</i>

w	Fase água
Γ	Contorno de domínio
Γ_D	Contorno de Dirichlet
Γ_N	Contorno de Neumann
Γ_I	Contorno associado a um poço injetor
Γ_P	Contorno associado a um poço produtor
Γ^l	Conjunto dos volumes pertencentes ao nível l ou a algum nível superior
Π^l	Conjunto de todos os <i>Vértices</i> de nível l
Δ_{sat}	Máxima variação de saturação em um volume da malha primal de nível 1
Δ_{sat_lim}	Valor limite para variação de saturação que implica em redução de nível

ADM

ρ_i	Densidade da fase i
ϕ	Porosidade da rocha
μ_i	Viscosidade da fase i
λ_i	Mobilidade da fase i
λ_{IJ}	Mobilidade na face IJ
λ_T	Mobilidade total
Ω	Domínio computacional
Ω_f	Domínio computacional referente à malha fina
$\vec{\nabla}$	Operador gradiente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	21
1.1	OBJETIVOS.....	23
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	23
2	MODELO MATEMÁTICO.....	24
2.1	EQUAÇÃO DA PRESSÃO.....	25
2.2	EQUAÇÃO DA SATURAÇÃO.....	26
2.3	CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO.....	26
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....	28
3.1	EQUAÇÃO DA PRESSÃO.....	28
3.2	ESTRATÉGIA IMPES.....	29
3.3	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS COM APROXIMAÇÃO DO FLUXO POR DOIS PONTOS (TPFA).....	30
3.4	APROXIMAÇÃO DA SATURAÇÃO.....	31
4	MÉTODO MULTINÍVEL ALGÉBRICO DINÂMICO (ADM).....	34
4.1	MÉTODO MULTIESCALA.....	34
4.2	MALHAS AUXILIARES.....	36
4.2.1	Malhas primais.....	36
4.2.2	Malhas duais.....	36

4.2.3	Malha ADM.....	38
4.3	OPERADOR DE RESTRIÇÃO.....	39
4.4	OPERADOR DE PROLONGAMENTO.....	40
4.4.1	Operador de prolongamento do método AMS.....	41
4.4.1.1	<i>Matriz de permutação.....</i>	41
4.4.1.2	<i>Matriz Wirebasket.....</i>	42
4.4.1.3	<i>Matriz Modificada.....</i>	42
4.4.1.4	<i>Operador de prolongamento AMS.....</i>	43
4.5	Exemplo 2D.....	45
4.6	DEFINIÇÃO DA MALHA ADM.....	50
4.6.1	Definição iterativa da malha ADM.....	51
4.6.2	Adaptação dinâmica da malha ADM ao campo de saturação.....	55
4.7	OBSERVAÇÕES ACERCA DO PROCESSO DE OBTENÇÃO DO OPERADOR DE PROLONGAMENTO.....	57
4.7.1	Eliminação do cálculo de algumas colunas da matriz inversa.....	58
4.7.2	Separação das matrizes em blocos.....	60
5	APLICAÇÕES E RESULTADOS.....	63
5.1	ESCOAMENTO MONOFÁSICO: MODELO EXTRAÍDO A PARTIR DO CSP-SPE 10.....	63
5.1.1	Influência da razão de engrossamento.....	64
5.1.2	Influência do engrossamento preferencial em uma direção (anisotrópica).....	65

5.1.3	Influência da taxa de refinamento a cada iteração.....	67
5.1.4	Resultados numéricos obtidos para diferentes configurações de poços....	68
5.1.4.1	<i>Uso de poços verticais.....</i>	<i>68</i>
5.1.4.2	<i>Uso de poços horizontais.....</i>	<i>69</i>
5.2	ESCOAMENTO BIFÁSICO DE ÁGUA E ÓLEO.....	73
5.2.1	Exemplo Homogêneo.....	73
5.2.2	Exemplo Bifásico Em Reservatório Com Duas Barreiras De Fluxo.....	78
5.2.2.1	<i>Efeitos na acurácia e no tempo de processamento da não atualização do operador de prolongamento a cada passo de tempo.....</i>	<i>85</i>
5.2.3	Exemplo DO CSP-SPE 10.....	87
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	96
	REFERÊNCIAS.....	97
	APÊNDICE A - PROVA DA PROPOSIÇÃO (5.1).....	100
	APÊNDICE B - OPERADOR DE PROLONGAMENTO ALGEBRAIC MULTISCALE SOLVER (AMS)	101

1 INTRODUÇÃO

Os fenômenos físicos observados na natureza podem ser descritos de maneira aproximada através de modelos matemáticos, que podem ser utilizados para realizar simulações, isto é, previsões de resultados associados a esses fenômenos. Um dos fenômenos mais estudados no contexto de simulação numérica é o escoamento de fluidos em meios porosos, dado que esse fenômeno está intrinsecamente associado à produção de petróleo, atividade cuja importância para a economia global é fundamental (ROSA, CARVALHO, & XAVIER, 2006). A simulação desse tipo de fenômeno representa uma ferramenta muito importante para a obtenção de informações que permitam uma gestão adequada da produção, visando otimizar a recuperação de hidrocarbonetos e maximizar o retorno econômico do processo (ERTEKIN, ABOU-KASSEM, & KING, 2001).

Inúmeros reservatórios de petróleo de interesse econômico, e particularmente os reservatórios do pré-sal (CORRÊA, 2013), apresentam uma variação muito acentuada das propriedades geológicas tanto em termos espaciais como direcionais (i.e. heterogeneidade e anisotropia), requerendo uma modelagem numérico-computacional tridimensional acurada e eficiente.

O avanço nas técnicas atuais de caracterização e modelagem geoestatística permite integrar informações de diferentes escalas de modo a gerar modelos geocelulares com resoluções na ordem de 10^8 - 10^9 blocos. No entanto, mesmo com o desenvolvimento dos modernos supercomputadores, pode-se facilmente identificar vários tipos de problemas que não podem ser solucionados ou são proibitivos em função desse grande volume de dados e/ou do tempo de processamento requerido. Atualmente, os modelos típicos de simulação de reservatórios são da ordem de apenas 10^6 - 10^7 blocos e a simulação destes modelos na escala fina só é possível através do uso de computação paralela/distribuída (PARRAMORE, 2016).

Em geral, técnicas de transferência de escala são aplicadas para resolver o fluxo através de meios porosos com tempo e recursos computacionais aceitáveis. Essas técnicas consistem em algum tipo de homogeneização dos modelos de escala fina, a fim de obter propriedades equivalentes em algum modelo menos refinado. Este procedimento naturalmente implica em perda de informações de escala mais fina (QI & HESKETH, 2004).

Com o objetivo de reduzir essas perdas de informações, os Métodos de Volumes Finitos Multiescala (*Multiscale Finite Volume Method* - MsFVM) foram desenvolvidos (Jenny, 2003; Zhou, 2008; Lunati & Lee, 2009; Wang, Hajibeygi, & Tchelepi, 2015). Jenny (2003) apresentou um MsFVM para capturar os efeitos da transmissibilidade da malha fina usando as funções de base, de forma a garantir que o problema seja local e globalmente conservativo, ou seja, conservativo na malha grossa primal, criou a malha grossa dual, formada a partir da malha grossa primal. Zhou (2008) modificou o MsFVM, realizando todas as operações de maneira algébrica e definindo claramente os operadores de transferência de escala na forma matricial (operadores de prolongamento e de restrição). Em geral, as variantes dos métodos MsFVM usam a mesma organização de malhas proposta por Jenny (2003), i.e. uma malha fina e uma malha grossa primal e outra dual. O uso da malha dual implica no uso de condições de contorno reduzidas que desacoplam os subproblemas de pressão no domínio, o que insere um erro na solução do campo de pressão nas regiões próximas dos contornos dos volumes da malha grossa dual, ocasionando uma perda de acurácia da solução nas interfaces dos volumes duais (LUNATI & LEE, 2009).

Essas técnicas, nas quais os operadores (restrição e prolongamento) são responsáveis pela transferência de informações entre as escalas fina e grossa, fornecem soluções mais precisas que as fornecidas por modelos de transferência de escala com custo computacional reduzido, em comparação com simulações em escala fina. No entanto, mesmo usando uma discretização do tipo TPFA nos blocos da malha fina, os métodos MsFVM geram uma discretização do tipo MPFA na malha grossa podendo produzir soluções não monótonas em reservatórios altamente heterogêneos, o que causa grandes oscilações de pressão. Essas oscilações são associadas aos vértices da malha dual que são vizinhos das regiões de baixa permeabilidade (WANG, HAJIBEYGI, & TCHELEPI, Monotone multiscale finite volume method, 2015). Em geral, os métodos multiescala utilizam suavizadores para reduzir o grau de não monotonicidade da solução de pressão (Wang, 2015; Wang, Hajibeygi, & Tchelepi, 2015).

O método Multinível Algébrico Dinâmico (ADM) (CUSINI, VAN KRUIJSDIJK, & HAJIBEYGI, 2016) foi introduzido para permitir o mapeamento das variáveis de simulação em malhas adaptativas definidas dinamicamente em cada passo de tempo. Esse mapeamento, assim como nos métodos multiescala, é feito pelos operadores de restrição e prolongamento. O operador de prolongamento ADM utiliza as funções de base multiescala de Jenny (2003) nos volumes a serem homogeneizados, nos níveis em baixa resolução, e mantém o esquema original de aproximação, i.e. o método dos volumes finitos com fluxos aproximados por dois pontos

(TPFA) nos volumes da malha fina. Nos volumes no nível menos refinado persistem os termos não físicos, transmissibilidades negativas, herdados do uso das funções de base multiescala (WANG, HAJIBEYGI, & TCHELEPI, Monotone multiscale finite volume method, 2015). Com o objetivo de minimizar a perda de monotonicidade na pressão, provocada por esses termos, Cusini, Van Kruijsdijk & Hajibeygi (2016) substituem esses termos, que ultrapassam determinada tolerância, por termos obtidos por meio de uma abordagem de *upscaling* local.

Nesse trabalho, a fim de minimizar os efeitos de perda de monotocidade na solução de pressão, será apresentada uma metodologia iterativa para identificar, e manter na alta resolução, os volumes com termos não físicos que são relevantes para o problema de pressão.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho objetivou desenvolver e implementar na linguagem Python, um conjunto de ferramentas para viabilizar a aplicação de um método de volumes finitos Multiescala e Multinível Algébrico Dinâmico (ADM), para resolver problemas de fluxo e transporte em reservatórios de petróleo altamente heterogêneos.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Além deste capítulo introdutório, o presente texto consiste em mais seis capítulos. No capítulo 2, são apresentados os modelos matemáticos adotados para representar o fenômeno aqui estudado, precedido de suas hipóteses simplificadoras. No Capítulo 3, as técnicas numéricas empregadas para solução das equações introduzidas no Capítulo 2 são brevemente descritas. Apresentamos a estratégia IMPES, logo depois as técnicas numéricas usadas para resolver os problemas da pressão e da saturação. No Capítulo 4, apresentamos os conceitos básicos para se compreender o método multinível algébrico dinâmico (ADM), descrevendo as malhas auxiliares utilizadas por esse método, os procedimentos necessários para obtenção dos operadores e os métodos empregados para a definição da resolução ADM e descritos os artifícios utilizados para otimizar a obtenção do operador de prolongamento assim como os efeitos de sua utilização em diferentes razões de engrossamento. No capítulo 5, são

apresentados os resultados da aplicação do ADM a problemas monofásicos e bifásicos (água – óleo) para fins de validação e análise de sensibilidade, e finalmente, no Capítulo 6, são sumarizadas as principais conclusões e discutidos possíveis trabalhos futuros como continuidade desta dissertação.

2 MODELO MATEMÁTICO

A abordagem apresentada assume que, sem perda de generalidade, os fluidos (óleo-água) e rocha são incompressíveis e que o escoamento é isotérmico em um meio totalmente saturado. Será utilizada uma formulação segregada, em que as equações básicas de movimento são obtidas a partir da Lei de Conservação da Massa e da Lei de Darcy (PEACEMAN, 1977), na qual, sob certas condições, o escoamento é descrito por uma equação elíptica de pressão e uma equação hiperbólica de saturação, acopladas através da atualização do campo de velocidades. Para a solução numérica das equações que descrevem o escoamento bifásico no interior dos reservatórios de petróleo será empregada uma metodologia tipo IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*), que é de uso rotineiro na solução de problemas dessa natureza na indústria do petróleo (EWING, 1985), e cuja descrição será fornecida na Seção 3.

A equação da conservação de massa para uma fase i ($i = o$, para óleo, $i = w$, para água), pode ser escrita como em (2.1):

$$\frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i \quad (2.1)$$

onde v_i e ρ_i , representam, respectivamente, a velocidade de Darcy e a densidade da fase i , ϕ é a porosidade, i.e. a fração da rocha que pode ser ocupada por fluidos, e q_i representa os termos de fonte ou sumidouro, i.e. poços de injeção ou produção. S_i é a saturação da fase i , ou seja, a fração do volume poroso ocupado pela fase. Dessa última definição, e da hipótese de meio totalmente saturado, segue a relação de restrição das saturações:

$$S_o + S_w = 1 \quad (2.2)$$

onde S_o e S_w são as saturações de óleo e água, respectivamente.

Adicionalmente, desprezando-se os efeitos gravitacionais e capilares, pode-se escrever a velocidade de Darcy (ROSA, CARVALHO, & XAVIER, 2006) como:

$$\vec{v}_i = -\frac{k_{ri}}{\mu_i} \tilde{K} \vec{\nabla} p_i \quad (2.3)$$

onde P_i , k_{ri} e μ_i representam, respectivamente, a pressão, a permeabilidade relativa e a viscosidade da fase i , $\tilde{K}$ é o tensor de permeabilidade absoluta da rocha, e $\vec{\nabla}$ é o operador gradiente. As hipóteses simplificadoras intrínsecas à lei de Darcy são consideradas válidas nos estudos realizados (EWING, 1985).

Para determinar as permeabilidades relativas do óleo e da água, k_{ro} e k_{rw} , foi utilizado o modelo de Brooks & Corey (1964):

$$\begin{aligned} k_{ro} &= K_{ro}^o (1 - S_{wn})^{N_o} \\ k_{rw} &= K_{rw}^o S_{wn}^{N_w} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde N_o e N_w são valores obtidos empiricamente para ajuste da curva de retenção. Nesse trabalho será utilizado o valor 2 para ambos os parâmetros. K_{ri}^o é o valor final da permeabilidade relativa da fase i e S_{wn} é o valor da saturação de água normalizado:

$$S_{wn} = S_{wn}(S_w) = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \quad (2.5)$$

onde, S_{wi} é a saturação irreduzível de água S_{or} é a saturação de óleo residual.

2.1 EQUAÇÃO DA PRESSÃO

Substituindo a velocidade de Darcy, apresentada na equação (2.3), na Lei de Conservação da massa, equação (2.1), após alguma adequação algébrica e consideração das hipóteses simplificadoras, obtém-se a equação elíptica da pressão:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\lambda_T \tilde{K} \vec{\nabla} p) = Q_T \quad (2.6)$$

onde $\lambda_T = \lambda_o + \lambda_w$ e $Q_T = Q_o + Q_w$ são, respectivamente, a mobilidade total e a vazão específica total e $\lambda_i = K_{ri} / \mu_i$, $Q_i = q_i / \rho_i$ são a mobilidade e a vazão específica da fase $i = o, w$.

2.2 EQUAÇÃO DA SATURAÇÃO

Novamente, fazendo uso da lei de conservação da massa, equação (2.1), e de Darcy, equação (2.3), utilizando ainda a equação de restrição das saturações, equação (2.2), e as hipóteses assumidas, após alguma manipulação algébrica, podemos escrever a equação da saturação de água, como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}_w) + Q_w \quad (2.7)$$

onde $f_w = f_w(S_w) = \lambda_w / \lambda_T$ é a função fluxo fracionário da água, que é uma função não linear da saturação da fase água e $Q_w = q_w / \rho_w$ é a vazão específica da fase água. A equação (2.7) é de natureza hiperbólica não linear (EWING, 1985).

2.3 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

Para que o problema descrito pelas equações de pressão e saturação seja completamente determinado, é necessário que utilizemos um conjunto apropriado de condições iniciais e de contorno, que dependem das características geológicas das vizinhanças e da existência e localização de poços de injeção e/ou produção. Considerando esquematicamente um reservatório em duas dimensões, sem perda de generalidade, representado pelo domínio Ω , onde o contorno é denotado por Γ , que é dado pela união disjunta dos diferentes contornos, como mostrado na Figura 1 e identificado na equação (2.8), a seguir:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_I \cup \Gamma_P \quad (2.8)$$

onde, Γ_D , Γ_N , Γ_I , Γ_P representam a porção do contorno com condição de Dirichlet (pressão prescrita), Neumann (fluxo prescrito), poços injetores e poços produtores nos moldes do definido por Peaceman (1977) e Ertekin, Abou-Kassem, & King (2001), respectivamente.

As condições de contorno podem ser escritas como:

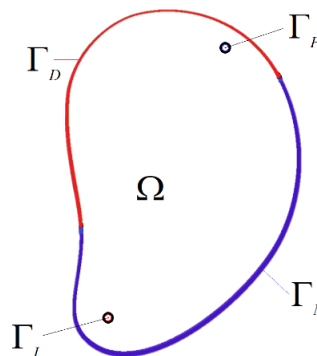
$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot \vec{n} &= Q_I \quad \text{ou} \quad p(x,t) = p_I \quad \text{sobre} \quad \Gamma_I \times [0,T] \\
 \vec{v} \cdot \vec{n} &= Q_P \quad \text{ou} \quad p(x,t) = p_P \quad \text{sobre} \quad \Gamma_P \times [0,T] \\
 \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_N, \quad \text{em} \quad \Gamma_N \times [0,T] \\
 p &= g_D, \quad \text{em} \quad \Gamma_D \times [0,T] \\
 S_w(\vec{x},t) &= \bar{S}_w, \quad \text{em} \quad \Gamma_I \times [0,T]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde, $\vec{n}$ é o vetor área normal, Q_I e Q_P são as vazões volumétricas dos poços injetores e produtores, respectivamente, g_N é o fluxo normal prescrito em Γ_N , g_D é a pressão prescrita em Γ_D , e, finalmente, $\bar{S}_w$ representa a saturação prescrita num conjunto de poços injetores. A condição inicial pode ser escrita como em (2.10):

$$S_w(x,0) = \bar{S}_w^0 \quad \text{em} \quad \Omega \times t_0 \tag{2.10}$$

onde $\bar{S}_w^0$ é a distribuição inicial da saturação de água no reservatório.

Figura 1 – Representação do domínio bidimensional Ω , dos contornos de Dirichlet, Γ_D , e Neumann, Γ_N , e dos poços injetor, Γ_I , e produtor, Γ_P , em um reservatório bidimensional genérico.



Fonte: Adaptado de Stewart (2009).

Para a pressão estar completamente definida, é necessário que $\Gamma_D \neq 0$ ou que ao menos um poço possua pressão prescrita.

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo serão desenvolvidas as formas discretas das equações de pressão e saturação através do Método dos Volumes Finitos. Para o problema de pressão usamos um método com aproximação de fluxo por dois pontos (TPFA). Para o problema de saturação usamos um método de ponderação à montante de primeira ordem (*First Order Upwind*). O tratamento do acoplamento entre essas equações será feito com a metodologia IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*).

3.1 EQUAÇÃO DA PRESSÃO

A solução aproximada da equação de pressão, utilizando-se o Método de Volumes Finitos, é obtida considerando a forma integral da equação (2.6), em um volume de controle $\hat{V}$, conforme ilustrado na Figura 1, após a discretização em N_{CV} volumes de controle. Dessa forma:

$$\int_{\Omega_{\hat{V}}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q d\Omega \quad (3.1)$$

Considerando um volume de controle genérico, $\hat{V}$, e usando o teorema da divergência de Gauss, a equação (3.1) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_{\hat{V}}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega_{\hat{V}} = \int_{\Gamma_{\hat{V}}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma_{\hat{V}} = \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q d\Omega_{\hat{V}} \quad (3.2)$$

As duas últimas integrais da equação (3.2) podem ser aproximadas utilizando o Teorema do Valor Médio, assim:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\hat{V}}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma &\cong \sum_{I,J \in \Gamma_{\hat{V}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \\ \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q d\Omega_{\hat{V}} &\cong \bar{Q}_{\hat{V}} \Omega_{\hat{V}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde, $\vec{v}_{IJ}$ é a velocidade aproximada na superfície de controle adjacente aos volumes de controle I e J , e $\vec{N}_{IJ}$ é o vetor área normal na direção dos centroides dos volumes I e J , com o somatório do lado direito realizado sobre todas as faces que compõem $\hat{V}$, $\bar{Q}_{\hat{V}}$ é o termo de injeção ou produção específica em $\hat{V}$, quando existe poço no mesmo, e $\Omega_{\hat{V}}$ representa o volume de $\hat{V}$.

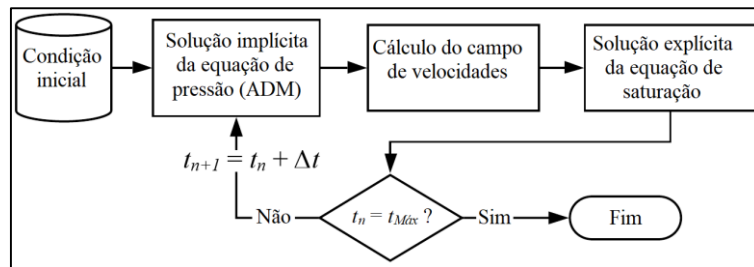
Considerando uma superfície arbitrária, e as aproximações dadas na equação (3.3), pode-se reescrever a equação (3.1):

$$\sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{V}} \Omega_{\hat{V}} \quad (3.4)$$

3.2 ESTRATÉGIA IMPES

Nesta seção apresentamos a formulação numérica para discretização da equação hiperbólica de saturação com o uso de um procedimento do tipo IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). Esse procedimento consiste na solução sequencial das equações de fluxo e de transporte de modo que, a partir de um campo inicial de saturação, a mobilidade total λ_T é calculada, e a equação da pressão é resolvida implicitamente, em seguida, a partir do campo de velocidades, calcula-se o campo de saturações. Neste trabalho, utilizamos o método multinível ADM, descrito no próximo capítulo, para o cálculo do campo de pressões, e a Lei de Darcy para o cálculo do campo de velocidades. Esse processo é repetido até o instante de tempo desejado, conforme apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Estratégia IMPES

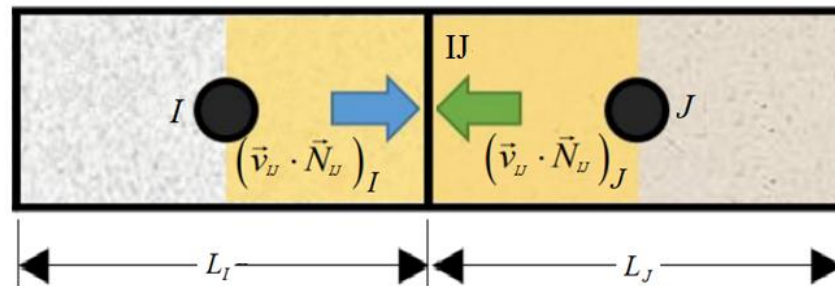


Fonte: Adaptado de Barbosa (2017)

3.3 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS COM APROXIMAÇÃO DO FLUXO POR DOIS PONTOS (TPFA)

Nesta seção utiliza-se o método dos volumes finitos clássico para aproximação dos fluxos por dois pontos (TPFA), para discretizar a equação (3.4). Define-se o fluxo na face IJ adjacente aos volumes I e J com as contribuições desses dois volumes, Figura 3.

Figura 3 – Face, IJ , adjacente aos volumes I e J .



Fonte: Adaptado de Souza (2015)

Utilizando a definição da Eq. (3.4) e a Lei de Darcy, Eq. (2.3), e aproximando o gradiente por diferenças finitas centradas, tem-se, após adequação algébrica:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_I &= -2\lambda_{IJ}K_I \left(\frac{p_{IJ} - p_J}{L_I} \right) \\ (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_J &= 2\lambda_{IJ}K_J \left(\frac{p_J - p_{IJ}}{L_J} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde, p_I é a pressão no volume I , p_J é a pressão no volume J , L_I e L_J são os comprimentos, na direção IJ , dos blocos I e J , p_{IJ} e λ_{IJ} são a pressão e a mobilidade na face IJ e K_I e K_J são as permeabilidades absolutas dos blocos I e J .

Com o objetivo de eliminar a dependência da pressão na face, é imposta a condição de continuidade do fluxo em IJ :

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_I = -(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_J. \quad (3.6)$$

Substituindo as equações (3.5) na equação (3.6), obtém-se a pressão em IJ .

$$p_{IJ} = \left(\frac{K_I}{L_I} p_I + \frac{K_J}{L_J} p_J \right) \left(\frac{K_I}{L_I} + \frac{K_J}{L_J} \right)^{-1} \quad (3.7)$$

substituindo a equação (3.7) nas equações (3.5), após adequações algébricas, obtém-se:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = -\lambda_{IJ} \frac{2K_I K_J}{K_I L_J + K_J L_I} (p_J - p_I) \quad (3.8)$$

agrupando-se os termos conhecidos da equação (3.8), define-se o termo transmissibilidade na face IJ , T_{IJ} .

$$T_{IJ} = \lambda_{IJ} \frac{2K_I K_J}{K_I L_J + K_J L_I} \quad (3.9)$$

onde T_{IJ} corresponde ao termo na linha I e coluna J da matriz de transmissibilidades T , da equação (3.10). A mobilidade total no passo de tempo anterior da face, λ_{IJ} , é obtida com a metodologia *Upwind* de primeira ordem.

A equação (3.9) aplicada a todas as faces dos blocos do reservatório fornece a matriz de transmissibilidades, T . O sistema de equações na malha fina, para o problema de pressões pode ser escrito na forma matricial como:

$$Tp = q \quad (3.10)$$

onde T representa a matriz de transmissibilidades, p o vetor pressão e q o vetor dos termos de fonte/sumidouro e as condições de contorno.

3.4 APROXIMAÇÃO DA SATURAÇÃO

Integrando a equação de saturação, equação (2.7), no intervalo de tempo entre t_n e t_{n+1} no domínio Ω avaliado, temos:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial\Omega \partial t = -\frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) \partial\Omega \partial t + \frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} Q_w \partial\Omega \partial t \quad (4.1)$$

A equação (4.1) pode ser reescrita como:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^{N_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t = -\frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^{N_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t + \frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^{N_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} Q_w \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t \quad (4.2)$$

Utilizando o teorema da divergência de Gauss no primeiro termo do lado direito da equação (4.2), para um volume de controle $\hat{V}_i$, temos:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t = -\frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}) \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t + \frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} Q_w \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t \quad (4.3)$$

Integrando a equação (4.3) no intervalo de tempo determinado usando o Teorema do Valor Médio e a aproximação de Euler *Forward* (Ewing, 1985; Rosa, Carvalho & Xavier, 2006) na derivada temporal:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t = (S_{w_{\hat{V}_i}}^{n+1} - S_{w_{\hat{V}_i}}^n) \Omega_{\hat{V}_i} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{\hat{V}_i}} (f_w \vec{v}) \cdot \vec{n} \partial \Gamma_{\hat{V}_i} \partial t = \frac{\Delta t}{\phi} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}_i}} f_w (S_{w_{IJ}}^n) \vec{v} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\phi} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} Q_w \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t = \frac{\bar{Q}_w \Delta t}{\phi} \quad (4.6)$$

onde $S_{w_{\hat{V}_i}}^{n+1}$ e $S_{w_{\hat{V}_i}}^n$ são os valores da saturação de água no volume de controle $\hat{V}_i$ nos instantes de tempo n e $n+1$, $\Omega_{\hat{V}_i}$ é o volume, $\bar{Q}_w$ o valor médio do termo de fonte ou sumidouro e $\Delta t = t - t_0$, representa o intervalo de tempo.

Assim, substituindo as equações (4.4), (4.5) e (4.6) na equação (4.3), pode-se escrever a equação da saturação na forma discreta:

$$S_{w_{\hat{V}_i}}^{n+1} = S_{w_{\hat{V}_i}}^n - \frac{\Delta t}{\phi \Omega_{\hat{V}_i}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}_i}} (\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}) + \frac{\Delta t \bar{Q}_w}{\phi \Omega_{\hat{V}_i}} \quad (4.7)$$

onde, $\vec{F}_{IJ} = f_w (S_{w_{IJ}}^n) \vec{v}_w$ representa os valores de fluxo da fase água calculados em cada face adjacente aos volumes I e J . É importante ressaltar que o passo de tempo deve atender a uma condição de estabilidade adequada. Nesse trabalho utiliza-se a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) (COURANT, FRIEDRICHS, & LEWY, 1967 [1928]), a aproximação

numérica é estável quando utilizamos valores de CFL menores que 1. Nesse trabalho, utilizamos CFL=0,5.

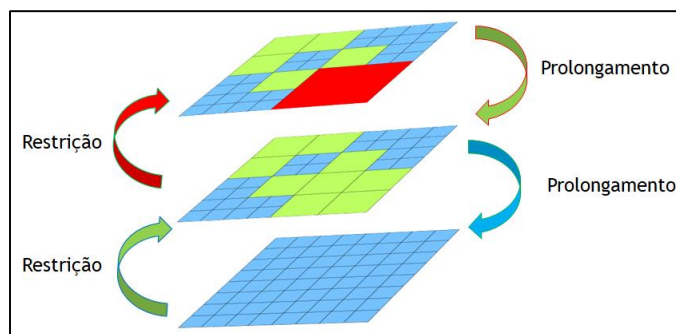
$$\Delta t_n = CFL \frac{abs(L_I + L_J)}{2|\vec{v}|(\Delta f_w(S_w^n)/\Delta S_w^n)} \quad (4.8)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade total na face adjacente aos volumes I e J , f_w é o fluxo fracionário de água que atravessa essa face, S_w^n é a saturação de água no tempo n , e L_I e L_J são os comprimentos dos blocos I e J na direção dos vetor que liga os centroides de I e J .

4 MÉTODO MULTINÍVEL ALGÉBRICO DINÂMICO (ADM)

O método ADM, assim como alguns métodos multiescala (Zhou, 2008; Wang, 2015; Parramore, 2016) realiza a transferência de informações entre as escalas através do uso de operadores de prolongamento e restrição. O operador de restrição realiza a integração em cada volume de controle primal, enquanto o operador de prolongamento relaciona as informações da escala grossa com informações na escala fina. A Figura 4 esquematiza as transferências de escala realizadas pelos operadores utilizados nesse método.

Figura 4 – Transferências de escala realizadas pelo método ADM.



Fonte: O autor.

4.1 MÉTODO MULTIESCALA

Nesta seção, apresentamos a variante do MsFVM proposta originalmente por Jenny et al. (2003), mas com as modificações propostas por Zhou (2010) e (WANG, HAJIBEYGI, & TCHELEPI, 2014a). Decidimos pelo uso desta variante do MsFVM para realizar as transferências de escala entre os diversos níveis, pois a mesma, garante conservação local da massa nas diferentes escalas e utiliza operadores de prolongamento e restrição que transferem as informações entre as diferentes escalas por meio de operações algébricas matriciais.

Assumindo que a estratégia multiescala está restrita apenas à solução do problema de pressão, com o problema de transporte (i.e., saturação) sendo resolvido diretamente na malha fina, o MsFVM pode ser descrito de maneira sintética através dos seguintes passos (BARBOSA, 2017):

1. Dado um domínio Ω , discretizado através de uma malha fina, com n_f volumes de controle, constrói-se uma malha grossa primal com n_l volumes de controle;
2. A partir da malha grossa primal uma malha grossa dual é construída;
3. Monta-se a matriz de transmissibilidades da malha fina;
4. Para cada volume da malha grossa primal, um conjunto de funções de base, é construído através da solução de um problema de pressão local;
5. Através das funções de base, constrói-se um operador de prolongamento (matricial), que transferirá dados da malha grossa para a malha fina;
6. Constrói-se também um operador de restrição que transmitirá informações da malha fina para a malha grossa (matricial);
7. Calcula-se a transmissibilidade da malha grossa, através dos operadores de prolongamento, restrição e da matriz de transmissibilidade da malha fina;
8. Calcula-se o campo de pressões na malha grossa;
9. A pressão na malha fina é reconstruída através da aplicação do operador de prolongamento no campo de pressões da malha grossa;
10. Para garantir a conservação local da massa em todos os volumes de controle, em todas as escalas, recalcula-se a pressão nos volumes da malha grossa primal, usando os valores da pressão conhecidos para definir condições de contorno de Neumann nas interfaces dos volumes da malha grossa primal (Problema de Neumann);
11. Com o campo de velocidade conservativo na malha grossa primal (passo 10), calcula-se a velocidade na malha fina. Essa velocidade é utilizada para calcular as equações de transporte (saturação ou concentração) na malha fina;
12. Calcula-se a saturação ou a concentração na malha fina (avanço no passo de tempo);
13. Com a mudança da mobilidade em cada passo de tempo, verifica-se a necessidade de se recalcular ou não as funções de base, caso seja necessário, as funções de base são recalculadas apenas nos volumes da malha grossa dual que apresentarem variações de mobilidade acima de uma tolerância previamente determinada, e volta-se ao passo 3.

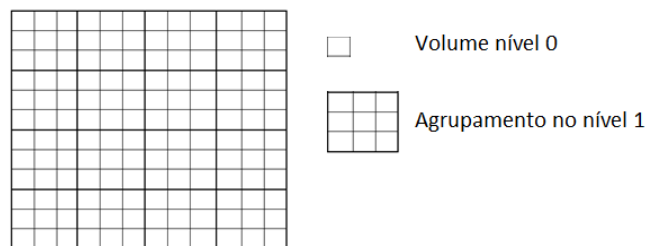
4.2 MALHAS AUXILIARES

Para a aplicação do método ADM é necessária a definição de malhas auxiliares, primais, duais (para definir os operadores multiescala) e ADM (para definir onde os operadores multiescala serão utilizados). Essas malhas são necessárias para definir os operadores de prolongamento e restrição. Nas FiguraFigura as malhas foram inicialmente apresentadas em duas dimensões.

4.2.1 Malhas primais

As malhas primais agrupam volumes de nível L em volumes de nível $L+1$. Esse agrupamento é feito em todo o reservatório, independentemente do nível a que cada volume pertence na malha ADM. A Figura5 apresenta um exemplo de malha primal e dois níveis de malha: o nível 0 representa a malha fina e o nível 1 representa a malha grossa.

Figura 5 – Malha primal, linha grossa, construída com uma razão de engrossamento (3, 3) e malha fina, linha estreita.



Fonte: O autor.

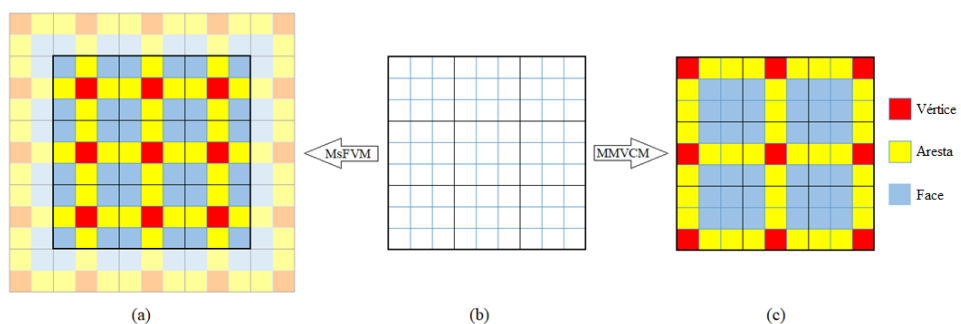
4.2.2 Malhas duais

As malhas duais são construídas com o objetivo de garantir a conservação na malha grossa (JENNY, 2003). Nessas malhas são hierarquizados os volumes da malha fina

pertencentes a cada agrupamento primal de acordo com a posição no interior do agrupamento, no caso 3-d, temos: *Vértice*, *Aresta*, *Face* ou *Interno*.

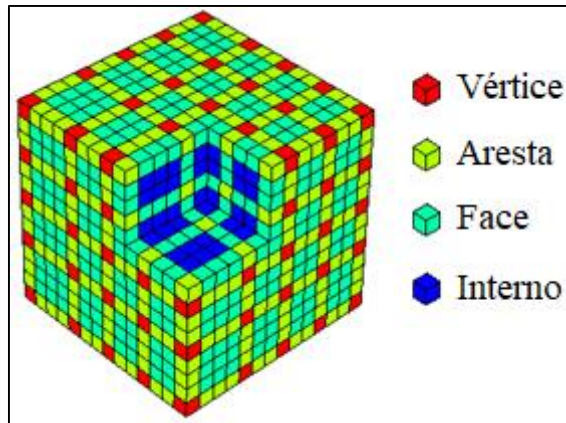
Tradicionalmente, nos métodos de volumes finitos multiescala (MsFVM) (Zhou, 2008; Lunati & Lee, 2009; Wang & Yixuan, 2015) e multiescala e multinível (Künze, Lunati, & Lee, 2013; Cusini, Van Kruijsdijk, & Hajibeygi, 2016), definem-se os vértices dos volumes das malhas duais do nível l como sendo o volume do nível $l-1$ que contém o centroide dos volumes da malha primal do nível l ou o que está mais próximo a este, isso gera a necessidade de utilização de volumes fictícios (*Ghost Volumes*) nas fronteiras externas ao reservatório, o que diminui a qualidade das funções de base, visto que é necessário atribuir propriedades físicas a um meio que não existe fisicamente (BARBOSA, 2017). Como forma de evitar esse problema, nesse trabalho foi utilizada a localização dos vértices proposta por (DEHKORDI & MANZARI, 2013) no método multiescala modificado para volume de controle (MMVCM) (BARBOSA, 2017). Na região dos contornos, deslocamos os *Vértices* do centroide do volume primal para a parte mais externa do domínio físico, no restante do domínio os *Vértices* continuam no centroide do volume da malha primal. Essa modificação aumenta a qualidade das funções de base, visto que usamos apenas informações do domínio físico real. Barbosa (2017) realizou vários experimentos, comparando a técnica clássica do método MsFVM com o MMVCM, e, para todas as simulações realizadas, foi percebida uma maior acurácia no campo de pressão quando se utiliza o MMVCM. A Figura6 ilustra as configurações da malha dual propostas por esses dois métodos. Cabe notar que, em reservatórios 3D, além dos tipos de volume mostrados nessa figura, também existem os volumes internos, vide Figura7.

Figura 6 – Malhas grossas: a) dual do MsFVM apresentando os volumes reais, com cores sólidas, e os *ghost volumes*, área com transparência b) Malha primal, linhas claras representam as fronteiras dos volumes de controle da malha fina, linhas escuras representam os agrupamentos da malha grossa e c) Malha dual do MMVCM. Adaptado de Barbosa (2017).



Fonte: O autor.

Figura 7 – Malha dual tridimensional.

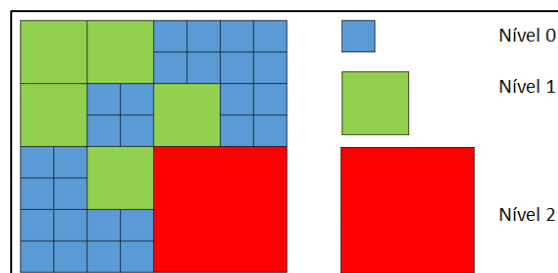


Fonte: O autor.

4.2.3 Malha ADM

Essa malha é formada por volumes de diferentes níveis e representa a resolução ADM. No código, ela é definida por flags nos volumes delimitados pelas malhas primais, as propriedades físicas e geométricas são armazenadas apenas na malha fina. A definição da malha ADM pode levar em conta diversos fatores, que terão mais ou menos importância para a qualidade da solução a depender de vários fatores, como poços, campo de permeabilidade e frente de saturação. Nesse trabalho, utilizamos um processo iterativo para obtenção de uma malha inicial, de forma a minimizar o erro no campo de pressão, e uma adaptação dinâmica ao campo de saturação para minimizar o erro no campo de saturação. A Figura ilustra um exemplo dessa malha com os respectivos níveis a que pertencem os volumes.

Figura 8 – Exemplo de malha ADM.

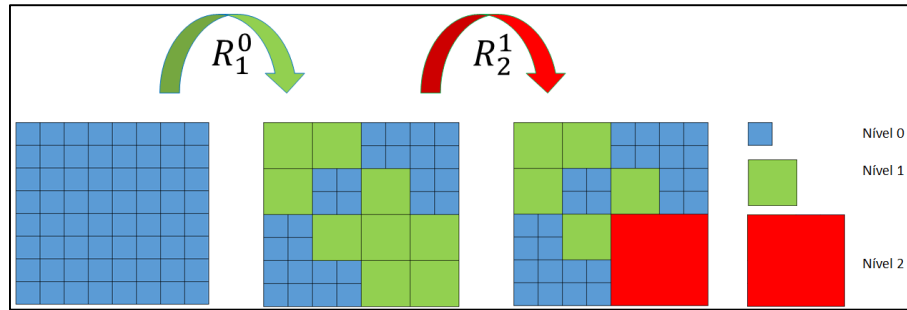


Fonte: O autor.

4.3 OPERADOR DE RESTRIÇÃO

O operador de restrição R_l^{l-1} é responsável por agrupar os volumes pertencentes ao nível $l-1$ em volumes pertencentes ao nível l , nas regiões pertencentes ao nível l ou a algum nível superior, e por mapear os Ids (Números que identificam cada volume em cada nível de resolução) do nível $l-1$ para o nível l , nas demais regiões. A Figura 9 ilustra as transferências de escala realizadas por esse operador.

Figura 9 – Transferências de escala realizadas pelos operadores de restrição.



Fonte: O autor.

A definição do operador de restrição utilizado nesse trabalho, assim como a proposta por Cusini, Van Kruijsdijk, & Hajibeygi (2016), equação (4.10), toma como base a proposta de Jenny (2003), equação (4.9).

$$\hat{R}_l^{l-1}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Omega_{l-1}^j \subset \Omega_l^i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in (1, \dots, n_l); \forall j \in (1, \dots, n_{l-1}) \quad (4.9)$$

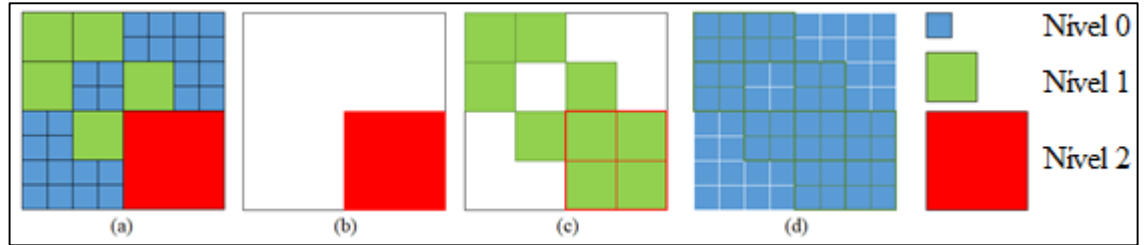
onde, Ω_l é o conjunto de todos os volumes do nível l e n_l é o número de volumes desse conjunto.

$$R_l^{l-1}(i, j) = \begin{cases} \hat{R}_l^{l-1}(i, j), & \text{se } i \in \Gamma^l \text{ e } j \in \Gamma^{l-1} \\ \delta_{ij}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in (1, \dots, n_l); \forall j \in (1, \dots, n_{l-1}) \quad (4.10)$$

onde, Γ^l é o conjunto dos volumes pertencentes ao nível l ou a algum nível superior, e δ_{ij} é o delta de Kronecker mostrado na equação (4.11). A Figura explicita os conjuntos gama b) Γ^2 , c) Γ^1 e d) Γ^0 , para a) um exemplo de malha ADM.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ e } j \text{ são Ids do mesmo volume nos níveis } l \text{ e } l-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.11)$$

Figura 10 – a) Malha ADM e seus conjuntos gama, (b) Γ^2 , (c) Γ^1 e (d) Γ^0 .

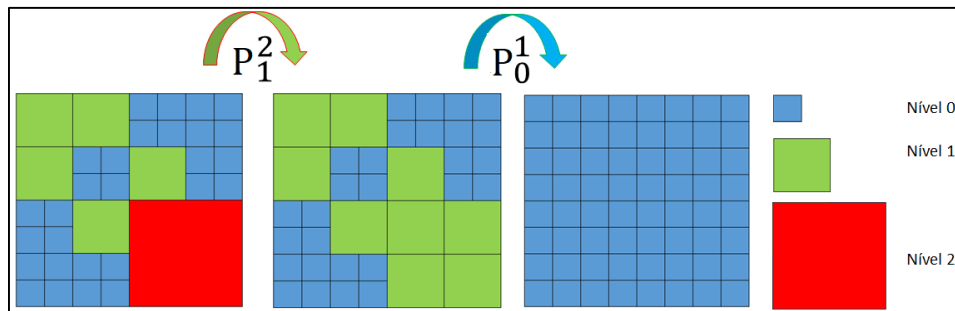


Fonte: O autor.

4.4 OPERADOR DE PROLONGAMENTO

O operador de prolongamento P_{l-1}^l , transfere as informações dos volumes do nível l (uma menor resolução) para o nível $l-1$ (uma maior resolução). Essas informações são: transmissibilidade, durante o mapeamento do sistema na malha fina para o sistema ADM, e pressão, após a solução do sistema ADM, a Figura ilustra esse processo.

Figura 11 – Transferência de escalas realizada pelo operador de prolongamento.



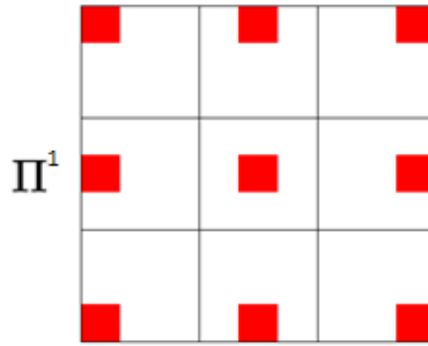
Fonte: O autor.

O operador de prolongamento ADM utilizado nesse trabalho, equação (4.12), assim como o proposto por Cusini, Van Kruijsdijk, & Hajibeygi (2016) é definido com base no resolvidor algébrico multiescala (*Algebraic Multiscale Solver - AMS*) (WANG, An Algebraic Multiscale Solver for flow problems in heterogeneous porous media, PhD thesis, 2015).

$$P_{l-1}^l(i, j) = \begin{cases} \hat{P}_{l-1}^l(i, j), & \text{se } i \in \Gamma^{l-1} \text{ e } j \in \Pi^l \\ \delta_{ij}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i \in (1, \dots, n_l); \forall j \in (1, \dots, n_{l-1}) \quad (4.12)$$

onde, $\hat{P}_{l-1}^l$ é o operador de prolongamento AMS do nível l para o nível $l-1$, equação (4.21), Γ^{l-1} é o conjunto dos volumes pertencentes ao nível $l-1$ ou a algum nível superior, conforme esquematizado na Figura e Π^l é o conjunto de todos os vértices do nível l . A Figura apresenta o conjunto Π^1 correspondente à malha primal da Figura, no nível 1.

Figura 12 – Conjunto Π^1 , vértices destacados em vermelho.



Fonte: O autor.

4.4.1 Operador de prolongamento do método aMs

Nos itens a seguir são feitas as definições e descritos os procedimentos necessários para obtenção do operador de prolongamento AMS (Wang, Hajibeygi, & Tchelepi, 2014).

4.4.1.1 Matriz de permutação

Para ordenar a matriz de transmissibilidade, T , equação (3.10), e evidenciar os termos correspondentes aos grupos de volumes da malha dual, define-se a matriz de permutação, G . Essa matriz permuta as linhas e colunas de T de acordo com o tipo de volume correspondente na malha dual, na seguinte ordem: *Internos* (i), *Faces* (f), *Arestas* (e), *Vértices* (v).

4.4.1.2 Matriz Wirebasket

A matriz Wirebasket (matriz do sistema permutada), W , corresponde à matriz de blocos em que as influências dos diferentes tipos de volume são evidenciadas e é obtida a partir das matrizes G e T , como segue:

$$W = GTG^T \quad (4.13)$$

Em um esquema TPFA a matriz W tem a seguinte forma:

$$W = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ T_{fi} & T_{ff} & T_{fe} & 0 \\ 0 & T_{ef} & T_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & T_{ve} & T_{vv} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

O sistema de equações da malha fina, equação (3.10), após as operações de permutação, pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ T_{fi} & T_{ff} & T_{fe} & 0 \\ 0 & T_{ef} & T_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & T_{ve} & T_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_f \\ p_e \\ p_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_f \\ q_e \\ q_v \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.4.1.3 Matriz Modificada

A Matriz modificada, M , é obtida a partir do desacoplamento do problema original, i.e., da separação do problema global em problemas locais.

O desacoplamento é feito da seguinte forma:

- Anula-se os blocos abaixo da diagonal principal:

$$T_{fi} = T_{ef} = T_{ve} = 0 \quad (4.16)$$

- Adiciona-se os termos anulados aos termos correspondentes na diagonal principal, essa compensação é feita para manter a conservação de massa (WANG, An Algebraic Multiscale Solver for flow problems in heterogeneous porous media, PhD thesis, 2015).

$$\begin{aligned}
T'_{ff}(k, k) &= T_{ff}(k, k) + \sum_{c=1}^{nf} T_{fi}(k, c) \\
T'_{ee}(k, k) &= T_{ee}(k, k) + \sum_{c=ne+1}^{ne+nf} T_{ef}(k, c)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde ne e nf são, respectivamente, o número de arestas e o número de faces da malha dual correspondente.

Após as operações descritas nas equações (4.13) a (4.17), a matriz *wirebasket* modificada, M , assume a forma:

$$M = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{ff} & T_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & 0 & T_c \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

O termo T_c representa a influência dos volumes *Vértice* nos volumes *Vértice*, portanto, representa a matriz de transmissibilidade da escala grossa e é utilizado como matriz de transmissibilidade para obter o próximo operador de prolongamento, tendo esse termo, T_c , a seguinte forma:

$$T_c = RTP \tag{4.19}$$

onde T é a matriz de transmissibilidades da escala fina, o nível 0, R e P são os operadores de prolongamento e restrição, dados pela equação (4.25).

Observa-se que o procedimento descrito pelas equações (4.16) e (4.17) é o que, para simplificar o problema (transformando-o em triangular), insere um erro no modelo.

4.4.1.4 Operador de prolongamento AMS

Precisamos agora encontrar uma relação entre as pressões dos volumes *Interno*, *Face* e *Aresta* com as pressões nos volumes *Vértice*. Para isso, escrevemos o sistema modificado:

$$\begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{ff} & T_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & 0 & T_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_i \\ p'_f \\ p'_e \\ p'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_f \\ q_e \\ q_v \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

depois de algumas adequações algébricas (substituição à montante), obtém-se:

$$\hat{P} = G^T \begin{bmatrix} -T_{ii}^{-1} \cdot (T_{if} \cdot T'^{-1}_{ff} \cdot T_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T_{ev}) \\ T'^{-1}_{ff} (T_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T_{ev}) \\ -T'^{-1}_{ee} \cdot T_{ev} \\ I_{vv} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

onde $\hat{P}$ é o operador de prolongamento AMS que utilizamos do nível 0 para o nível 1, G^T é a transposta da matriz de permutação, e I_{vv} é a matriz identidade de ordem n_v , com n_v sendo o número de volumes *Vértice*.

No segundo nível, a matriz de *wirebasket* (4.14) não tem qualquer termo nulo devido às operações de restrição e prolongamento. Geralmente, os métodos multinível clássicos (CUSINI, VAN KRUIJSDIJK, & HAJIBEYGI, 2016) tornam nulos os novos termos, que não existiriam em um esquema TPFA (T_{ie} , T_{iv} , T_{fv} e seus simétricos), e os compensam na diagonal principal, de forma a utilizar a equação (4.21) para calcular os operadores dos vários níveis. Neste trabalho, utilizamos a matriz *wirebasket* completa, equação (4.22), no segundo nível, ou seja, sem descontar os termos não TPFA advindos do uso dos operadores multiescala. O processo para obtenção do operador de prolongamento utilizando a matriz completa, equação (4.23), é mostrado no apêndice B.

$$W = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & T_{ie} & T_{iv} \\ T_{fi} & T_{ff} & T_{fe} & T_{fv} \\ T_{ei} & T_{ef} & T_{ee} & T_{ev} \\ T_{vi} & T_{vf} & T_{ve} & T_{vv} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\hat{P} = G^T \begin{bmatrix} -T_{ii}^{-1} \cdot (T_{if} \cdot (T'^{-1}_{ff} (T_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T_{ev} - T_{fv})) - T_{ie} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T_{ev} - T_{iv}) \\ T'^{-1}_{ff} (T_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T_{ev} - T_{fv}) \\ -T'^{-1}_{ee} \cdot T_{ev} \\ I_{vv} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Uma vez definidos os operadores, de restrição e prolongamento, o sistema ADM é fornecido por:

$$RTPp^{ADM} = Rq \quad (4.24)$$

com R e P dados pelos produtórios:

$$\begin{aligned} R &= \prod_{l=1}^L R_l^{l-1} \\ P &= \prod_{l=1}^L P_{l-1}^l \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde L é o nível de menor resolução, com 0 representando a escala fina. Obtemos a solução de pressão na resolução ADM resolvendo (4.24) para obter p^{ADM} , e prolongamos essa pressão para obter a pressão ADM na escala fina, $\tilde{p}$:

$$\tilde{p} = Pp^{ADM} \quad (4.26)$$

A equação (4.24) é resolvida em uma resolução de malha adaptada dinamicamente pelo método ADM. Segundo Cusini, Van Kruijsdijk, & Hajibeygi, (2016) a solução prolongada para a escala fina é considerada boa o suficiente para capturar a física envolvida no processo.

Em um domínio com $N_f = N_{fx} \times N_{fy} \times N_{fz}$ volumes, o ADM emprega uma hierarquia de $L+1$ níveis. Em cada nível l (valores mais altos denotam resoluções menores), a malha correspondente consiste em $N_l = N_{lx} \times N_{ly} \times N_{lz}$ volumes de controle. A razão de engrossamento em cada nível CR^l é definida como:

$$CR^l = \left(\frac{N_{fx}}{N_{lx}}, \frac{N_{fy}}{N_{ly}}, \frac{N_{fz}}{N_{lz}} \right) \quad (4.27)$$

4.5 EXEMPLO 2D

Com o objetivo de ilustrar a aplicação do método ADM de forma direta (com explicitação dos termos das matrizes) foi elaborado um problema bidimensional. Com

condições de contorno de fluxo nulo em todas as fronteiras, permeabilidade e dimensões unitárias. A configuração de poços e a malha fina são mostrados na Figura 3.

Figura 13 – Malha fina e localização dos poços, um poço injetor (à esquerda) com vazão prescrita (valor 2) e um poço produtor (à direita) com pressão prescrita (valor 1).

Vazão	2								1	Pressão
	2								1	
	2								1	

Fonte: O autor.

Ao se utilizar uma razão de engrossamento $CR = (3, 3)$ definimos as malhas auxiliares mostradas na Figura.

Figura 14 – Malhas auxiliares do problema bidimensional, malha primal (a), malha dual (b) e malha ADM (c). Os números correspondem aos Ids que identificam cada volume.

a)

1	2	3
---	---	---

b)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27

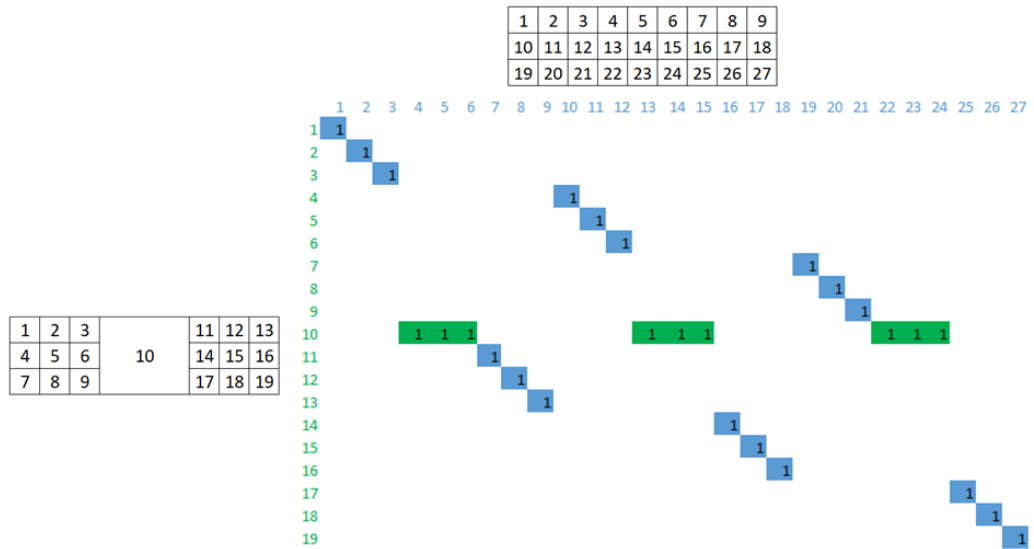
c)

1	2	3	10	11	12	13
4	5	6		14	15	16
7	8	9		17	18	19

Fonte: O autor.

A partir da malha ADM, podemos definir o operador de prolongamento ADM mostrado na Figura 5. Nessa figura, observa-se que o volume no nível grosso da malha ADM (Id 10) recebe a linha correspondente no operador multiescala identificando os volumes no nível fino associados, enquanto que nos volumes no nível fino, ocorre apenas o mapeamento de Ids do nível fino para Ids ADM.

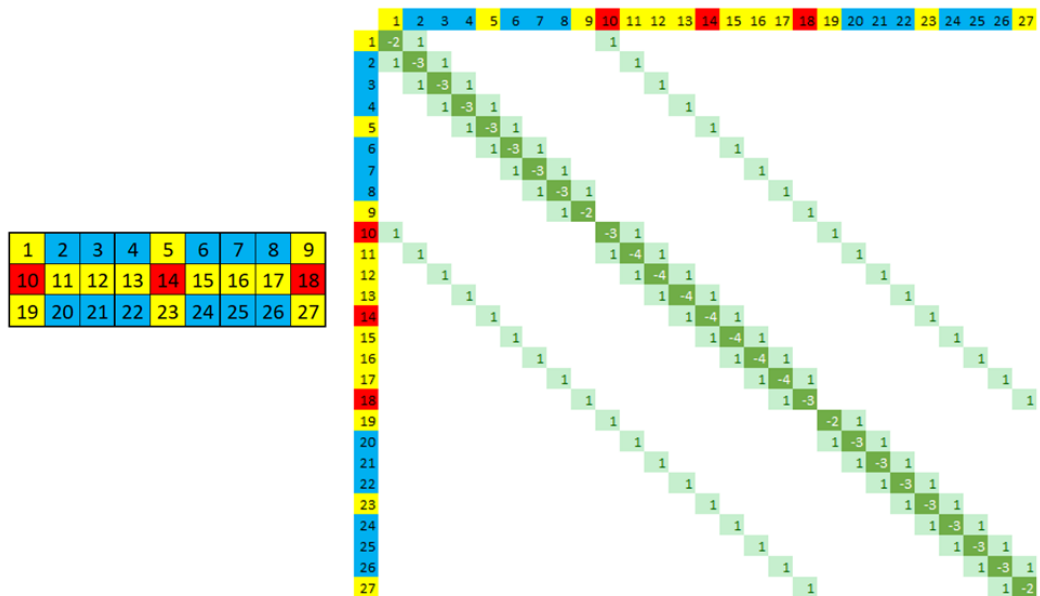
Figura 15 – Operador de restrição ADM.



Fonte: O autor.

Para a obtenção do operador de prolongamento é necessária a definição da transmissibilidade na malha fina, cabe notar que, para a definição desse operador, não são inseridas as condições de contorno de Dirichlet nessa matriz. A Figura 6, mostra a matriz correspondente ao exemplo em questão com explicitação do tipo de volume na malha dual.

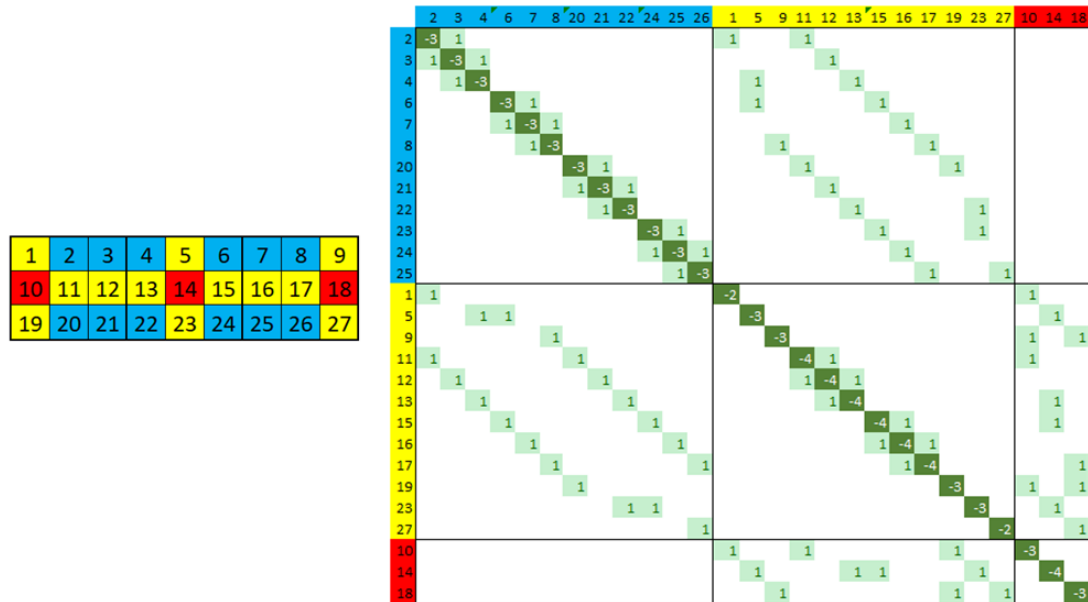
Figura 16 – Matriz de transmissibilidade na malha fina com explicitação do tipo de volume na malha dual.



Fonte: O autor.

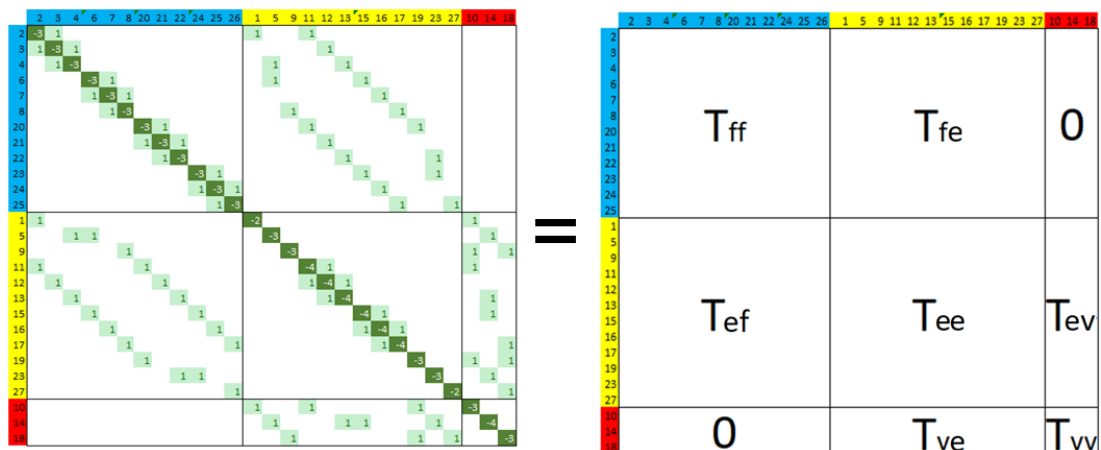
Uma vez obtida a matriz de transmissibilidades na escala fina é realizada a permutação das linhas e colunas para definição da matriz *Wirebasket*, essa matriz é mostrada na Figura17 e as sub-matrizes são nomeadas na Figura18.

Figura 17 – Matriz *Wirebasket* ou transmissibilidade reordenada.



Fonte: O autor.

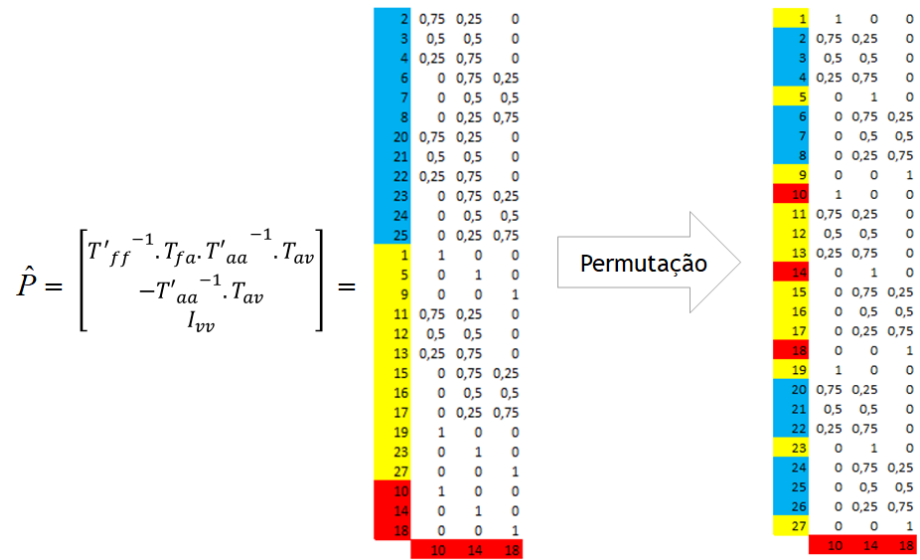
Figura 18 – Explicitação das sub-matrizes componentes da *Wirebasket*.



Fonte: O autor.

A aplicação da formulação para cálculo do operador multiescala nas componentes da matriz *Wirebasket* fornece o operador de prolongamento multiescala, $\hat{P}$, esse operador é mostrado na Figura19.

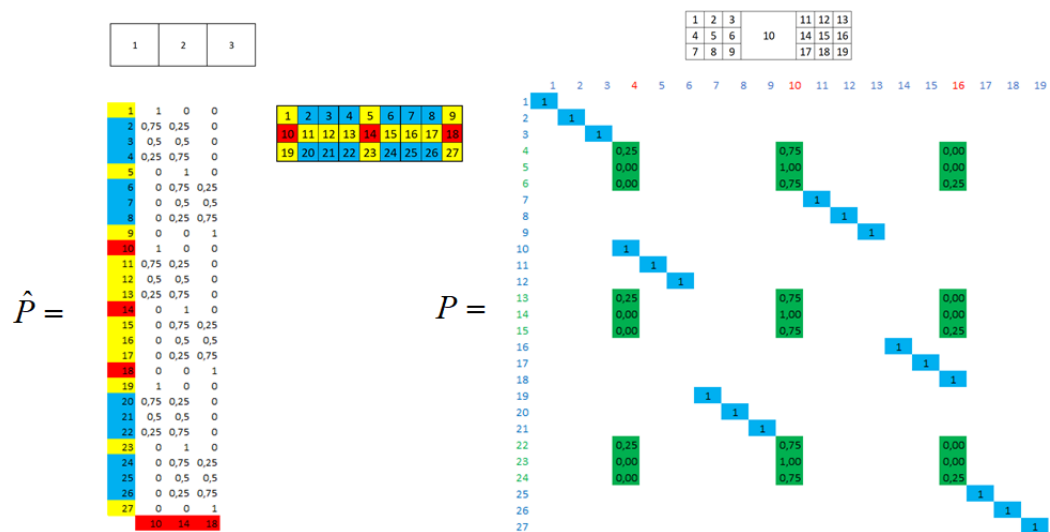
Figura 219 – Operador de prolongamento multiescala, cada coluna corresponde a uma função de base.



Fonte: O autor.

A consideração da malha ADM e desse operador, fornece o operador de prolongamento ADM, P , esse operador é mostrado na Figura20, onde se verifica que os volumes que pertencem ao nível grosso recebem o prolongamento multiescala, enquanto que nos volumes mantidos na malha fina a ocorre o simples mapeamento de Ids entre o a malha fina e a malha ADM.

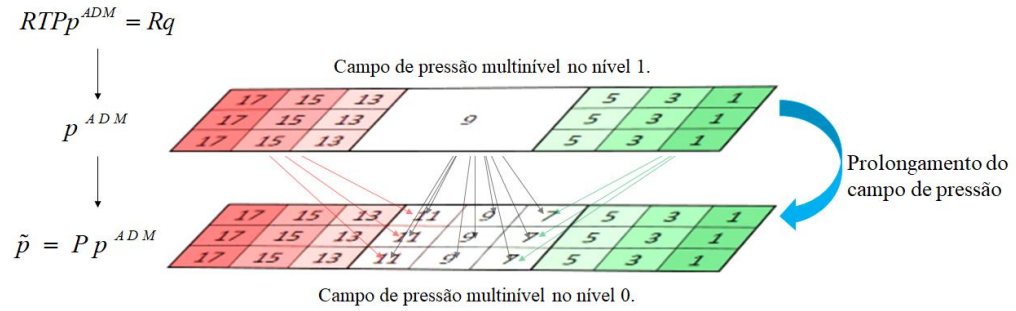
Figura 20 – Operador de prolongamento ADM.



Fonte: O autor.

Com os operadores ADM e a transmissibilidade na malha fina, resolvemos o problema ADM, equação (4.24) e prolongamos a solução para obter a solução na escala fina. A Figura 21 ilustra esse processo. Observa-se ainda que a solução obtida com o prolongamento é linear exata.

Figura 21: Prolongamento da solução de pressão.



Fonte: O autor.

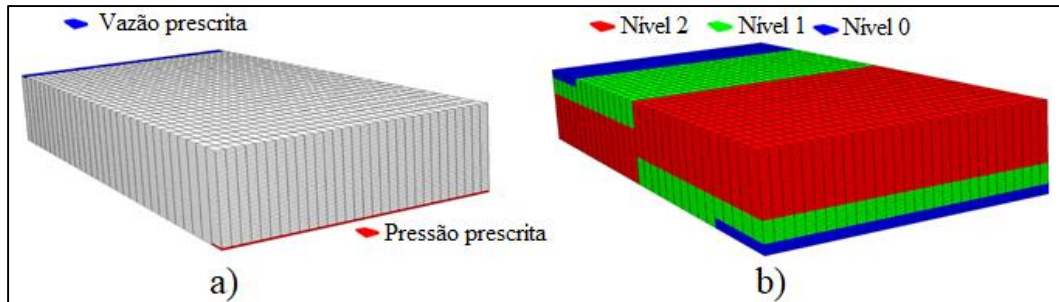
4.6 DEFINIÇÃO DA MALHA ADM

Uma das etapas mais importantes dos métodos multinível é a definição da malha, ou resolução, multinível. Essa definição pode levar em conta diversos fatores, a depender do grau de acurácia desejado e dos recursos computacionais disponíveis. Nesse capítulo, é apresentada a definição da malha ADM inicial, a ser utilizada no primeiro passo do problema transiente, a partir de um método iterativo para adaptação ao campo de pressão, assim como a estratégia utilizada para a adaptação dinâmica da malha ADM ao campo de saturação.

Para que seja utilizado o processo iterativo de seleção da malha ADM é necessária a definição de uma malha a ser utilizada para começar esse processo. Nesse trabalho foi utilizada a existência de poços, essa é a primeira classe de volumes a serem mantidos no nível fino e consiste nos volumes, do nível 1, que contém volumes do nível 0 (malha fina) com presença de poços. Quanto aos volumes restantes para completar um volume de nível 2, estes são inseridos no nível 1. A Figura 22 ilustra a aplicação desse critério, onde verifica-se a manutenção da malha fina, nível 0, na região dos poços. Os restantes, para completar volumes de nível 2, no nível 1. E os que não possuem nenhum volume de poço, no nível 2.

Optou-se por manter os volumes que contém poços na escala fina devido ao aumento do erro na região dos poços oriundo da criação de problemas locais que se utilizam de condições de contorno reduzidas que desacoplam o problema na malha grossa dual (LUNATI, TYAGI, & LEE, 2011).

Figura 22 – Adaptação da malha ADM ao posicionamento dos poços: a) Configuração horizontal de poços, b) Resolução/malha ADM correspondente a essa configuração.



Fonte: O autor.

4.6.1 Definição iterativa da malha ADM

A definição iterativa da malha ADM é baseada na solução sucessiva de problemas de pressão com o método ADM, equação (4.24). Cada solução é utilizada para obter um erro estimado e definir uma nova malha, caracterizando um novo problema.

Esse tipo de definição de malha fornece um dado particularmente interessante para problemas bifásicos, a relação entre a estimativa de erros na pressão e o percentual de volumes ativos (razão entre o número de graus de liberdade do sistema ADM e o número de graus de liberdade do sistema na malha fina) como mostrado na Figura, esse dado possibilita a escolha da malha inicial que melhor se adequa à tolerância desejada. Essa importância advém do fato de que em problemas bifásicos é necessária a solução sucessiva de problemas de pressão e a seleção de uma malha com baixo percentual de volumes ativos é importante para a eficiência na aplicação do método. O procedimento para usar este método de definição da malha ADM é descrito no Algoritmo 1:

Algoritmo 1: Definição iterativa da malha ADM inicial.

- 1- Defina as razões de engrossamento e obtenha o operador de prolongamento do método AMS, equação (4.21);
- 2- Defina a malha inicial (neste trabalho usamos a malha definida a partir da localização dos poços), com N_L volumes ativos;
- 3- Defina o número de volumes em um nível l a serem adicionados ao nível $l-1$ a cada iteração (h_i), escolha do usuário. Obs. (i);
- 4- Defina a tolerância (TOL) para a norma de erro L_∞ , escolha do usuário. Obs. (ii);
- 5- Defina o número máximo de volumes ativos ($N_{Máx}$), escolha do usuário. Obs. (iii);
- 6- Inicie o estimador de erro $\tilde{e}$ com algum valor que satisfaça à condição *While* 7 (por exemplo, $\tilde{e} = 2 * TOL$);

7- **While** $máx(\tilde{e}) > TOL$ **and** $N_L < N_{Máx}$ **do**:

- a. Defina os operadores ADM de restrição (4.10) e prolongamento (4.12);
- b. Resolva o problema ADM (4.24) para obter p^{ADM} ;
- c. Prolongue o campo obtido em b. para obter a solução ADM na malha fina $\tilde{p} = Pp^{ADM}$, com P definido na equação (4.25);
- d. Itere a solução $\tilde{p}$ no sistema de escala mais refinada (neste trabalho usamos o método de Jacobi) para obter uma solução mais suave $\bar{p}$. Obs. (iv);
- e. Calcule o estimador de erro $\tilde{e} = abs(\bar{p} - \tilde{p})$. Obs. (v);
- f. Aplique o operador de restrição AMS, $\hat{R}$, Equação (4.9), para obter o estimador de erro restringido $\bar{e} = \hat{R}\tilde{e}$. Obs. (vi).
- g. Inclua os volumes da malha primal de nível l com os h_i maiores valores de $\bar{e}$ no nível $l-1$ e defina a nova malha ADM com N_L volumes ativos. Obs. (i).

end while.

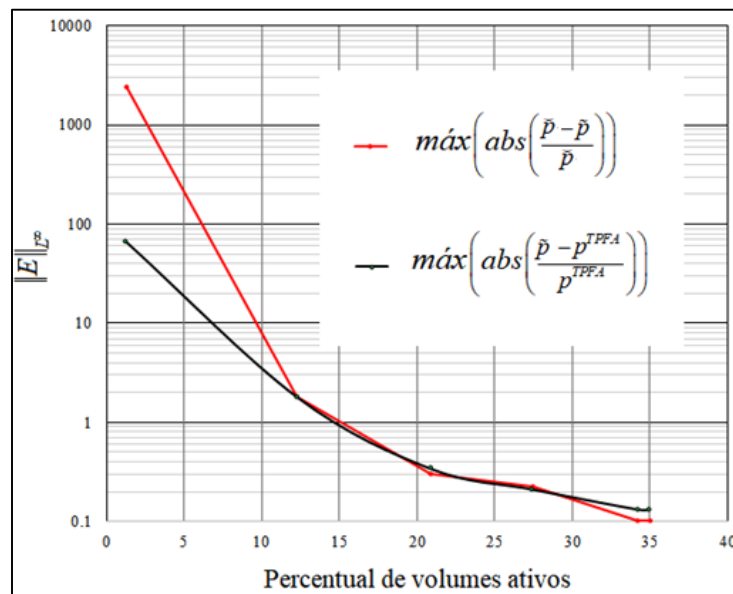
Seguem algumas observações acerca desse processo:

Nesse trabalho foi imposto que a cada iteração, cada volume pode ser inserido, no máximo, um nível abaixo do seu nível na iteração anterior, i.e. volumes do nível 2, se necessário, são inseridos no nível 1 e volumes no nível 1, se necessário, são inseridos no nível 0;

(i) A taxa de refinamento, ou número de volumes a terem seu nível reduzido, h_i , implica na qualidade da curva de volumes ativos versus acurácia. Quanto menor for esse número melhor será a curva, que será composta por mais pontos, conforme será analisado no item 5.1.3. No entanto, o uso de taxas de refinamento menores implica na solução de um maior número de sistemas;

(ii) O erro numérico, a ser utilizado para definir a malha ADM, pode ser qualquer tipo de erro numérico calculável a partir da informação da pressão, como erros nas velocidades e gradientes de pressão. Observa-se que à medida que é aplicado o processo descrito no Algoritmo 1 o erro em relação à solução iterada $\bar{p}$, tende para o erro em relação à solução direta, com o uso de TPFA na malha fina p^{TPFA} , conforme mostra a Figura 23.

Figura 23 – Relação entre o percentual de volumes ativos e o erro máximo relativo, usando como referência: a pressão obtida com TPFA, p^{TPFA} , na malha fina (linha preta), a pressão iterada, $\bar{p}$ (linha vermelha). Para um reservatório contido no SPE-10, iniciando na origem, com $45 \times 45 \times 45 = 91125$ volumes descrito em detalhes no ítam 5.1.



Fonte: O autor.

(iii) O número máximo de volumes ativos é utilizado para limitar o tamanho do problema ADM e evitar que seja gerado um problema maior que o resolvível pelo computador.

(iv) A iteração da solução ADM na malha fina é realizada para tornar possível a estimativa do erro, visto que a solução iterada, $\tilde{p}$, é mais próxima da solução na escala fina que a solução ADM, $\tilde{p}$. Cabe ressaltar que a pressão iterada, $\tilde{p}$, não garante conservação de massa, por não ser feito um número suficiente de iterações, o que limita sua utilização à estimativa do erro. Com isso, a solução de pressão a ser utilizada é a pressão ADM prolongada, $\tilde{p}$. Nos exemplos adotamos o seguinte critério de parada, com $\alpha = 0,5$.

$$\frac{\max(abs(\tilde{p}^{n+1} - \tilde{p}^n))}{\max(abs(\tilde{p}^n - \tilde{p}^{n-1}))} > \alpha \quad (4.28)$$

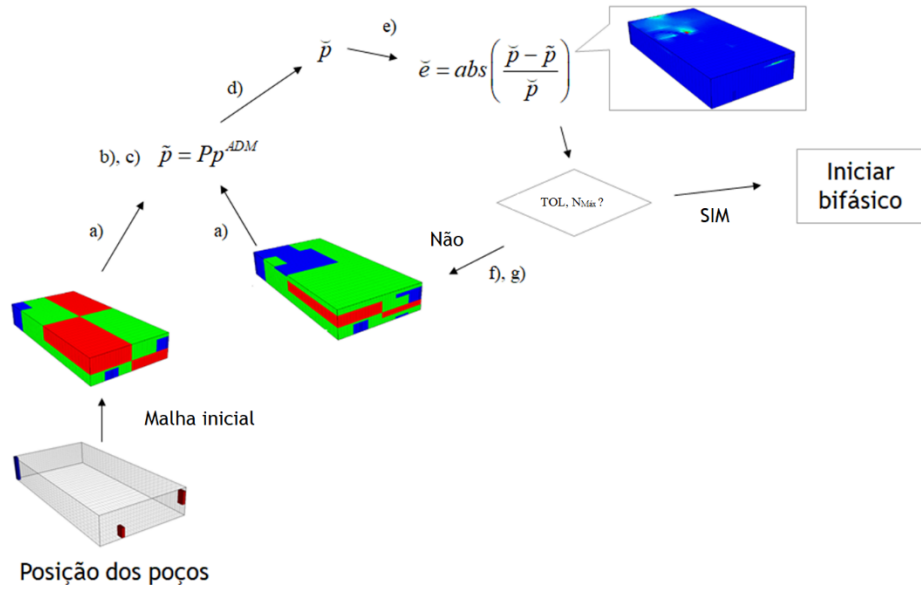
onde $\tilde{p}^0 = \tilde{p}$.

(v) Inicialmente tentou-se utilizar um indicador de erro, o resíduo, para indicar quais volumes a serem inseridos nas maiores resoluções. No entanto, esse parâmetro não se mostrou eficiente para reduzir os erros de pressão, principalmente nas regiões de baixa permeabilidade, em que mesmo com valores baixos de resíduo pode-se ter valores elevados de erro no campo de pressão.

(vi) A aplicação do operador de restrição AMS tem como objetivo associar um erro a cada volume da malha primal, no nosso caso, essa estimativa foi feita no nível intermediário, nível 1. A operação de restrição, nesse caso, é equivalente a somar os erros absolutos em cada agrupamento, ou volume, da malha primal. Poderíamos também utilizar outras formas de associar o erro a cada volume da malha primal, como, por exemplo, utilizar o erro máximo em cada volume da malha primal ou o erro no vértice de cada volume da malha primal.

A Figura24 ilustra a aplicação do algoritmo 1.

Figura 24: Esquema da aplicação do processo iterativo as letras indicam os passos do algoritmo 1.



Fonte: O autor.

4.6.2 Adaptação dinâmica da malha ADM ao campo de saturação

Uma vez resolvido o problema de pressão na resolução ADM, o problema de transporte é resolvido explicitamente na escala fina. Para garantir a conservação local da massa em todos os volumes de controle, em todas as escalas, recalcula-se a pressão nos volumes da malha grossa primal, usando os valores da pressão conhecidos (obtidos com o uso do método ADM, $\tilde{p}$) para definir condições de contorno de Neumann nas interfaces dos volumes da malha grossa primal (Problema de Neumann).

Uma vez definida a malha inicial, de acordo com o item 4.6.1, é realizada, dinamicamente, a definição da malha ADM de acordo com o campo de saturação que baseia-se na máxima variação de saturação em cada volume da malha primal do nível 1, sendo a definição do nível 2 corolário dessa análise, mas garantindo sempre que os volumes que são do nível 0, segundo esse critério, não sejam vizinhos de face de volumes no nível 2, ao torná-los nível 1. Essa imposição é feita para evitar perdas de acurácia provocadas por distorções no campo de velocidade (CUSINI, VAN KRUIJSDIJK, & HAJIBEYGI, 2016). No exemplo da Figura 25, que mostra um campo de saturação em um agrupamento do nível 1 contendo 3x3

volumes de nível 0, ter-se-ia uma máxima variação de saturação de $\Delta_{sat} = 0,9 - 0,6 = 0,3$, segundo a equação (4.29):

$$\Delta_{sat} = \max(S_w) - \min(S_w) \quad (4.29)$$

em que S_w é o conjunto dos valores de saturação no volume primal.

Figura 25 – Exemplo de campo de saturação em um volume primal.

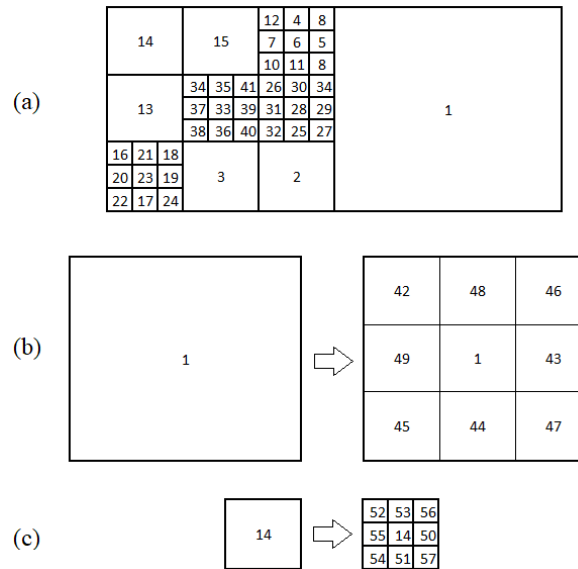
	0.8	0.7	0.6
	0.9	0.8	0.7
	0.9	0.9	0.9

Fonte: O autor.

Tendo-se o valor de Δ_{sat} em cada volume primal do nível 1, procede-se a comparação desse valor com o valor limite para refinamento, Δ_{sat_lim} . Caso esse valor seja maior que o limite, o volume primal é incluído no nível fino, caso contrário, não.

Uma vez definido que será feito o refinamento em determinado bloco é aplicada uma técnica de geração da malha ADM similar à empregado por Gielisse (2015). Essa técnica cria novos *Ids*, números que identificam os volumes, apenas nas regiões a serem refinadas, e mantém os demais inalterados, o que reduz o custo computacional para gerar uma nova malha ADM, esse processo é mostrado na Figura26.

Figura 26 – Parte de uma malha ADM inicial 2D (a) em que os volumes de Id 1 (Nível 2) e Id 14 (nível 1) serão reduzidos em um nível o volume de Id 1, observe o processo de redução do nível 2 para o nível 1 (b) e do nível 1 para o nível 0 (c). Os volumes que não têm seu nível alterado não são objeto da análise.



Fonte: Adaptado de Gielisse (2015).

4.7 OBSERVAÇÕES ACERCA DO PROCESSO DE OBTENÇÃO DO OPERADOR DE PROLONGAMENTO

Para o cálculo do operador de prolongamento do resolvidor algébrico multiescala (*Algebraic Multiscale Solver* - AMS), é necessária a inversão de algumas matrizes (T_{ii} , T_{ff} e T_{ee}), o que pode representar um significativo tempo de processamento. Nas seções seguintes são propostos dois artifícios, um matemático (que elimina o cálculo de colunas) e outro geométrico (baseado na malha grossa dual) que foram capazes de reduzir significativamente o tempo de inversão dessas matrizes e, consequentemente, de obtenção do operador de prolongamento. Vale lembrar que não existe nenhum erro associado a esses artifícios, i.e. o operador de prolongamento obtido é igual ao obtido sem usá-los.

4.7.1 ELIMINAÇÃO DO CÁLCULO DE ALGUMAS COLUNAS DA MATRIZ INVERSA

Seja A uma matriz de dimensão $m \times m$, B uma matriz de dimensão $m \times n$ e $C = AB$. Nessas condições, é válida a seguinte proposição:

$$B(i, j) = 0, \forall j \in (1, \dots, n) \rightarrow C \text{ não depende de } A(k, i), \forall k \in (1, \dots, m) \quad (5.1)$$

A proposição (5.1) pode ser lida da seguinte forma: Se a i -ésima linha de B for nula, C independe da i -ésima coluna de A . A prova dessa proposição é feita no apêndice A.

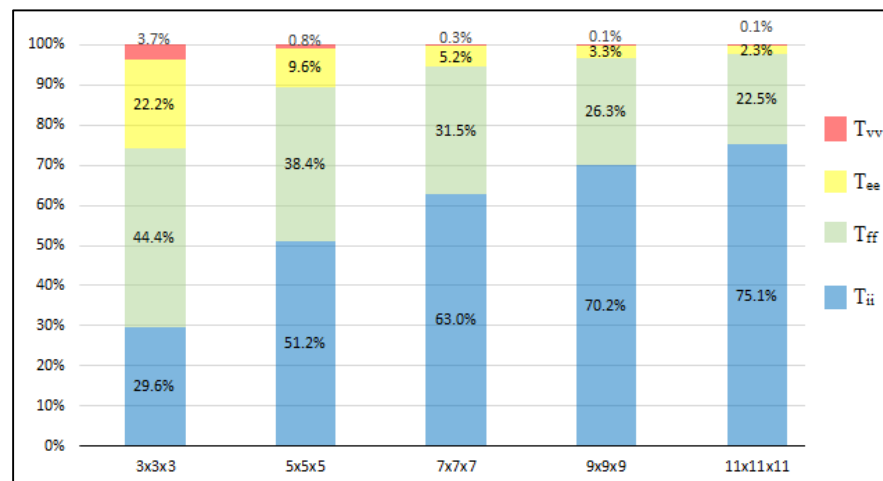
A proposição (5.1) torna possível a obtenção do operador de prolongamento sem a necessidade de cálculo de diversas colunas de inversas (T_{ii}, T_{ff}, T_{ee}). Vale ressaltar que a quantidade de colunas que não precisam ser calculadas aumenta à medida que a razão de engrossamento aumenta, conforme mostra a Figura, que mostra o percentual de colunas calculadas e não calculadas em relação ao número total de colunas da matriz de transmissibilidade para diferentes razões de engrossamento. Isso se deve ao fato de que nos blocos cruzados da matriz *wirebasket* equação (4.14), T_{ii}, T_{ff}, T_{ee} , as linhas nulas correspondem a:

- Volumes *Internos* que não possuem transmissibilidade com volumes *Faces*, ou seja, volumes do tipo *Interno* que têm como vizinhos apenas volumes do tipo *Interno* em T_{if} ;
- Volumes *Faces* que não possuem transmissibilidade com volumes *Arestas*, ou seja, volumes do tipo *Face* que têm como vizinhos apenas volumes *Face* em T_{fe} ;
- Volumes *Arestas* que não possuem transmissibilidade com volumes *Vértice*, ou seja, volumes do tipo *Aresta* que têm como vizinhos apenas volumes *Aresta* em T_{ev} .

Cabe notar que, com o método utilizado nesse trabalho para solução dos sistemas foi utilizada decomposição LU (BOLDRINI, 1980), o tempo de processamento economizado com a implementação desse artifício é proporcionalmente igual à razão entre as colunas eliminadas do cálculo e o total de colunas, i.e. se for desnecessário o cálculo de 40% das colunas, será economizado 40% do tempo de processamento. Vale ressaltar que o tamanho relativo dos

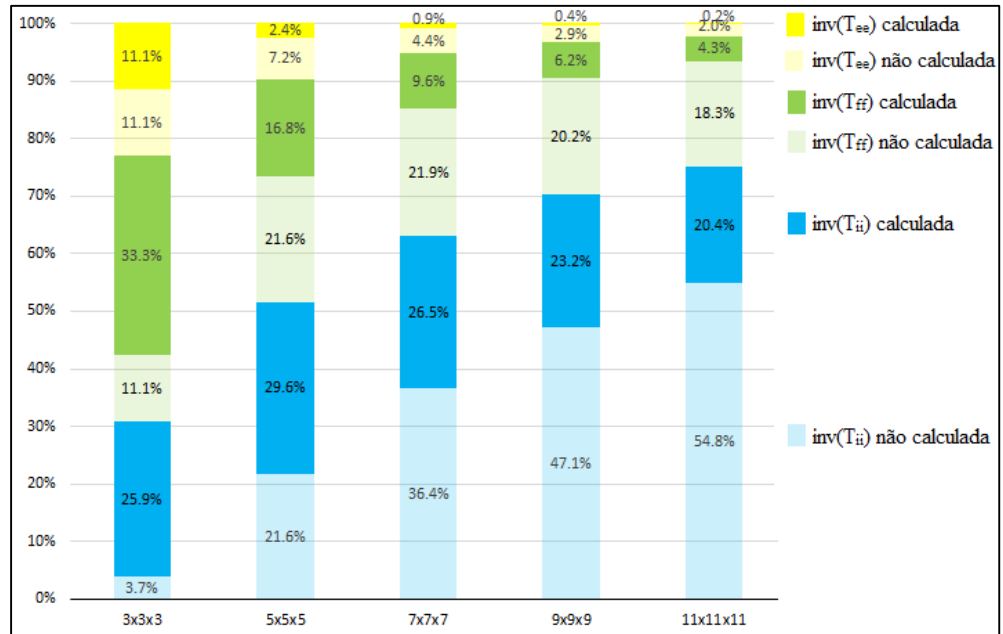
sistemas a serem resolvidos altera-se com a razão de engrossamento. A Figura 27 mostra, por exemplo, que a proporção de volumes classificados como interno, representados por T_{ii} , aumenta com a razão de engrossamento, o que faz com que o tempo para solução dos sistemas correspondentes aos internos seja consideravelmente maior que o necessário para o cálculo dos demais. No entanto, conforme mostra a Figura 28 os volumes *Internos* são os que mais possuem colunas que não precisam ser calculadas para maiores razões de engrossamento, o que reduz o impacto do aumento da razão de engrossamento no tempo necessário para solução.

Figura 27: Tamanho das sub-matrizes T_{ii} , T_{ff} , T_{aa} , em relação à matriz de transmissibilidade da malha fina para diferentes razões de engrossamento.



Fonte: O autor.

Figura 28 – Percentual de colunas calculadas (azul, verde e amarelo escuros) e não calculadas (azul verde e amarelo claros) em relação ao número total de colunas da matriz de transmissibilidade para diferentes razões de engrossamento.



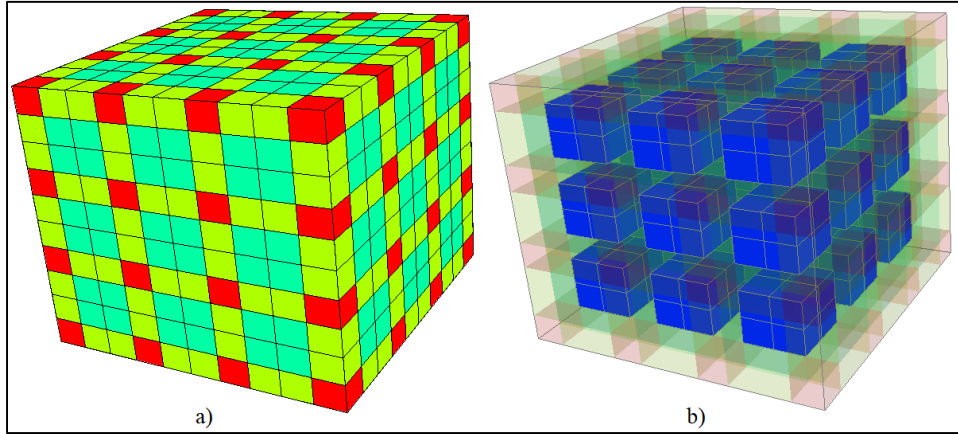
Fonte: O autor.

4.7.2 SEPARAÇÃO DAS MATRIZES EM BLOCOS

A análise da definição da matriz *Wirebasket* e da malha dual levou a duas observações:

1. O operador de prolongamento AMS correspondente a um esquema numérico TPFA aplicado a uma malha 3D estruturada tem a forma da equação (4.21) e os termos T_{ii} , T_{ff} e T_{ee} , por definição, contém transmissibilidades fora da diagonal apenas de seus volumes correspondentes, i.e.:
 - As transmissibilidades fora da diagonal de T_{ii} são de volumes do tipo *Interno*;
 - As transmissibilidades fora da diagonal de T_{ff} são de volumes do tipo *Face*;
 - As transmissibilidades fora da diagonal de T_{ee} são de volumes do tipo *Aresta*.
2. Cada um desses conjuntos (*Internos*, *Faces*, *Arestas*) é constituído por diversos subconjuntos sem transmissibilidade fora da diagonal com os demais subconjuntos do mesmo tipo (por não compartilharem faces entre si, ver Figura29)

Figura 29 – Malha dual 3-d (a), e explicitação dos subconjuntos volumes do tipo *Interno*, em azul b), destaca-se que cada um desses subconjuntos não compartilha face com os demais do mesmo tipo.



Fonte: O autor.

Com essas duas observações é possível garantir que existe uma ordenação nos *Ids* dos volumes que torna cada uma dessas matrizes (T_{ii} , T'_{ff} e T'_{ee}) diagonal por blocos. Ou seja, a inversão dessas matrizes pode ser feita pela inversão de diversas sub-matrizes de dimensão muito inferior à total. Para aproveitar esse fato, foi desenvolvido um procedimento para obtenção dos termos do operador de prolongamento AMS que multiplicam as inversas das matrizes, T_{ii} , T'_{ff} , T'_{ee} . Esse procedimento consiste em:

- a) Montagem de cada uma das sub-matrizes correspondentes a cada sub-conjunto segregado;
- b) Solução de cada sistema associado a cada sub-conjunto;
- c) Agrupamento de cada bloco do operador de prolongamento, formando assim cada um dos blocos que contém o produto de $inv(T_{ii})$, $inv(T'_{ff})$ ou $inv(T'_{ee})$ pelos outros blocos da matriz *Wirebasket*.

Como forma de analisar o impacto no tempo para a obtenção do operador de prolongamento, vamos considerar o tempo para a obtenção do bloco desse operador correspondente aos volumes internos ($T_{ii}^{-1}T_{ev}$). Utilizando a estratégia de resolver n_v sistemas lineares necessitaríamos do tempo t_1 , já considerando a possibilidade de separação em sistemas de ordem menor, necessitaríamos de t_2 :

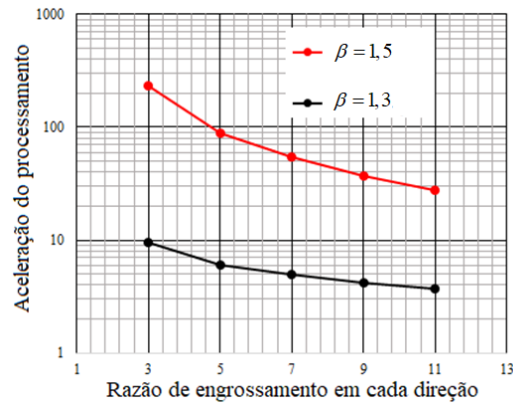
$$\begin{aligned}
 t_1 &= cn_v n_i^\beta \\
 t_2 &= cn_v^2 \left(\frac{n_i}{n_v} \right)^\beta
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

onde c e β são constantes que dependem do método de solução ($\beta > 1$), n_i é o número de volumes do tipo *Interno* e n_v é o número de volumes do tipo *Vértice*.

A aceleração do processamento dada por $t_1 / t_2 = n_v^{\beta-1}$.

A Figura 30 mostra o impacto dessa consideração, foram consideradas duas potências de crescimento do tempo de processamento com o tamanho do sistema linear $\beta = 1,3$ e $\beta = 1,5$ e analisado o tempo para a obtenção linhas do operador de prolongamento correspondentes aos volumes internos.

Figura 30 – Aceleração do processamento, razão entre o tempo para solução de n_v sistemas lineares e o tempo para solução considerando a distribuição em blocos menores para obtenção do bloco do operador de prolongamento correspondente aos volumes internos para um problema com 1.000.000 volumes na malha fina.



Fonte: O autor.

Observa-se que com o aumento do fator de potência, β , o uso da consideração de separação em blocos apresenta maiores ganhos, o que é especialmente interessante ao se utilizar métodos mais acurados de solução do sistema. Além disso, a aceleração do processamento é maior ao se utilizar menores razões de engrossamento, o que já era esperado, visto que existem mais sistemas a serem resolvidos devido ao maior número de vértices.

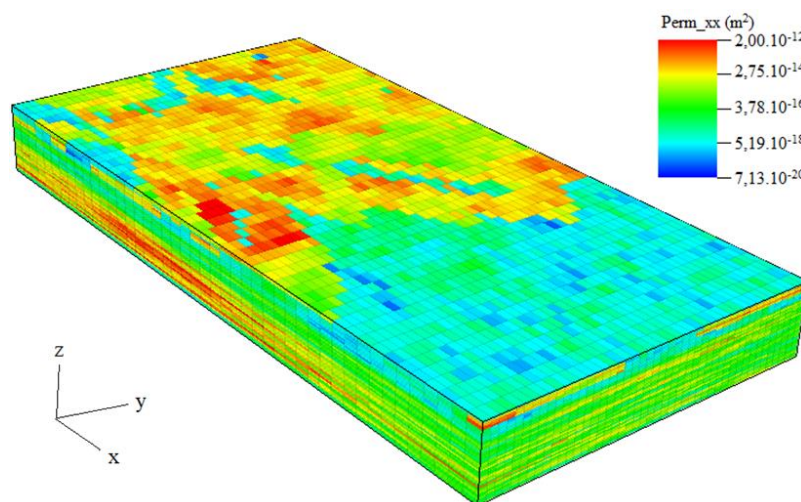
5 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Nessa seção, são apresentados resultados obtidos com a aplicação do método ADM à solução de problemas de fluxo e desse método como *solver* de pressão em uma estratégia do tipo IMPES em problemas de transporte.

5.1 ESCOAMENTO MONOFÁSICO: MODELO EXTRAÍDO A PARTIR DO CSP-SPE 10

Para analisar os efeitos da aplicação do método ADM utilizamos o *Comparative Solution Project* SPE 10 (CHRISTIE & BLUNT, 2001). Nas próximas seções são apresentados resultados que permitem analisar a influência de diversos parâmetros na eficiência do método ADM. Para isso, foi utilizado uma parte do benchmark SPE10 com 45x45x45 volumes. Esta parte do reservatório está situada entre o *Upper Ness* (de origem fluvial), 15 camadas superiores, e a formação *Tarbert* (depósitos de sistema costeiro raso), 35 camadas inferiores. O campo de permeabilidades do modelo de reservatório analisado é apresentado na Figura.

Figura 31 – Campo de permeabilidades do reservatório em análise.

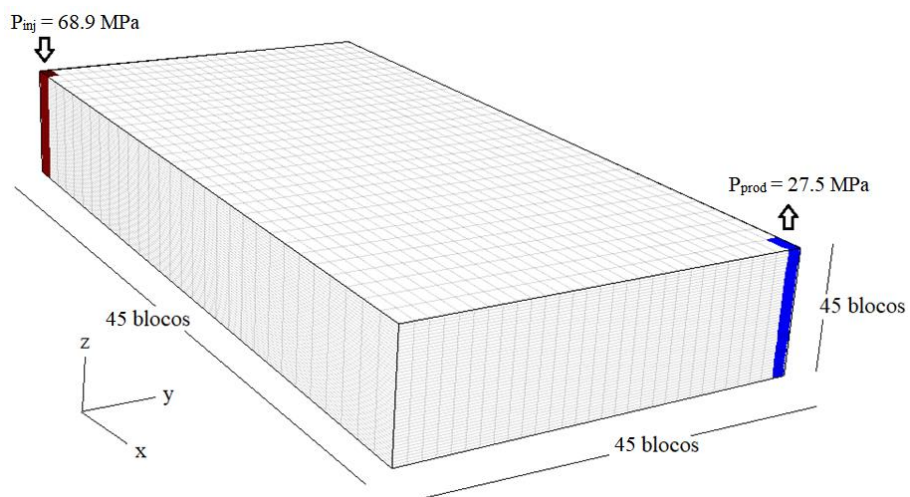


Fonte: O autor.

A razão de engrossamento do nível 2 CR^2 é, em cada uma das direções (x, y, z), 3 vezes maior que a razão de engrossamento do nível 1 de CR^1 . Assumimos fluxo nulo em todas as seis

faces do reservatório. A configuração de poços utilizada foi a mostrada na Figura 6.2, com um poço de injeção no canto esquerdo com $P_{inj} = 68,9 MPa$ e um poço de produção no canto direito, com $P_{prod} = 27,5 MPa$

Figura 32 – Configuração vertical de poços.



Fonte: O autor.

5.1.1 Influência da razão de engrossamento

Para testar a influência deste parâmetro, foram utilizadas três razões de engrossamento, todas com o mesmo valor em cada direção, esses valores, assim como a nomenclatura dos casos são mostrados na Tabela.

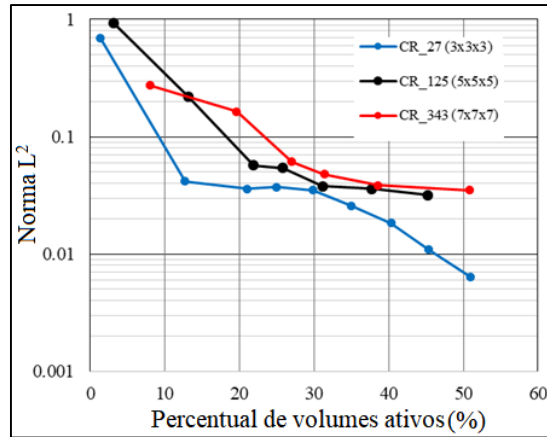
Tabela 2 – Razão de engrossamento do nível 1 em cada direção.

Caso	Razão de engrossamento
CR_27 (3x3x3)	3
CR_125 (5x5x5)	5
CR_343 (7x7x7)	7

Fonte: O autor.

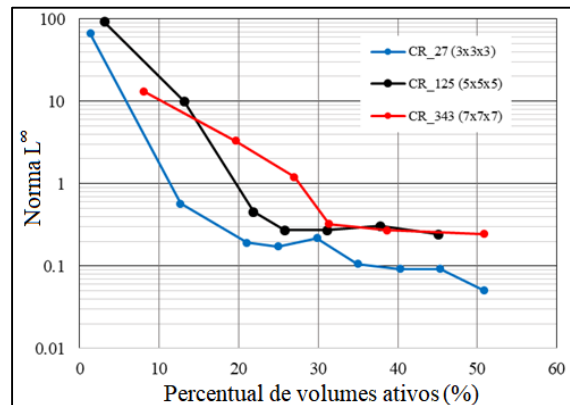
Observamos que, em geral, os menores valores para o erro (em relação à solução na escala fina), tanto na norma L^2 , Figura, quanto na norma L^∞ , Figura, foram obtidos usando as menores razão de engrossamento, CR=3 (isotrópica), exceção feita a primeira interação, em que o menor erro foi obtido com CR=7.

Figura 33 – $\|E\|_{L^2}$ para diferentes razões de engrossamento.



Fonte: O autor.

Figura 34 – $\|E\|_{L^\infty}$ para diferentes razões de engrossamento.



Fonte: O autor.

5.1.2 Influência do engrossamento preferencial em uma direção (ANISOTRÓPICA)

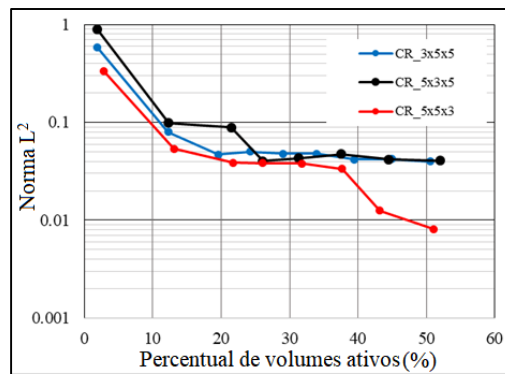
Para testar esse parâmetro, utilizou-se uma razão de engrossamento em uma direção menor que as demais, conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Razão de engrossamento menor em uma direção.

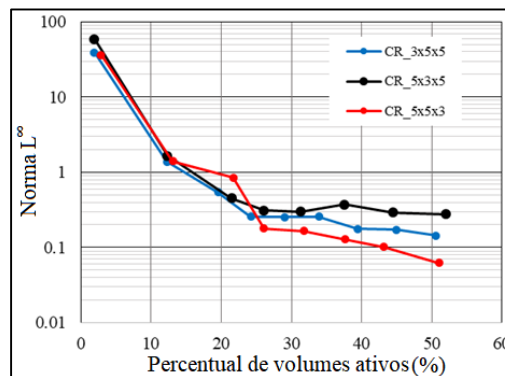
Caso	Razão de engrossamento		
	x	y	z
CR_3x5x5	3	5	5
CR_5x3x5	5	3	5
CR_5x5x3	5	5	3

Fonte: O autor.

Observou-se que os menores valores da norma L^2 , Figura, e L^∞ , Figura, foram apresentados ao se aplicar uma menor razão de engrossamento na direção z. Isso era previsível, devido à maior variação do campo de permeabilidade nessa direção. Dessa forma, é recomendável o uso de menores razões de engrossamento na direção das maiores heterogeneidades do modelo.

Figura 35 – $\|E\|_{L^2}$ para diferentes direções preferenciais de engrossamento.

Fonte: O autor.

Figura 36 – $\|E\|_{L^\infty}$ para diferentes direções preferenciais de engrossamento.

Fonte: O autor.

5.1.3 Influência da taxa de refinamento a cada iteração

Este parâmetro representa a quantidade de volumes da malha grossa primal a serem refinados em cada iteração. Para testar sua influência na acurácia das soluções, foram utilizados os três valores apresentados na Tabela. Em cada direção adotamos $CR=5$.

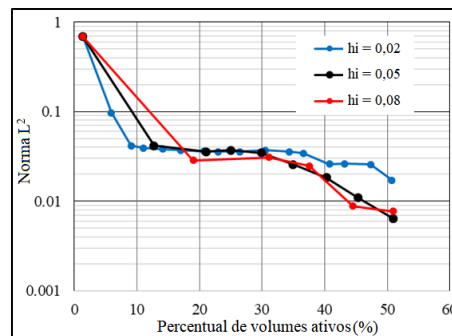
Tabela 3 – Taxas de refinamento em cada iteração.

Caso	Taxa de refinamento
$hi = 0,02$	2%
$hi = 0,05$	5%
$hi = 0,08$	8%

Fonte: O autor.

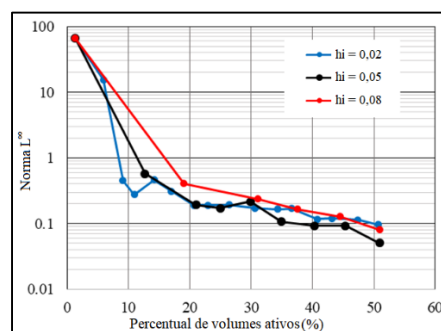
Observou-se que o uso de valor de taxa de refinamento a cada iteração $Ri=0,02$ fez oscilar a norma do erro L^∞ , Figura 33. O valor intermediário de $Ri=0,05$ foi o que nos pareceu mais adequado.

Figura 37 – $\|E\|_{L^2}$ para diferentes taxas de refinamento.



Fonte: O autor.

Figura 33 – Norma $\|E\|_{L^\infty}$ para diferentes taxas de refinamento.



Fonte: O autor.

5.1.4 Resultados numéricos obtidos para diferentes configurações de poços

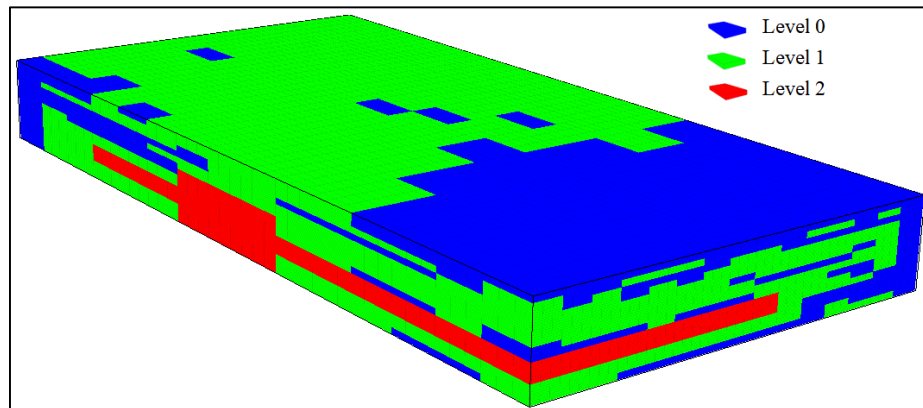
Para testar o efeito da posição dos poços é apresentada a malha ADM escolhida com base na análise feita nas seções 5.1.1 a 5.1.3 com o campo de permeabilidade da Figura.

5.1.4.1 Uso de Poços verticais

O conjunto vertical de poços é apresentado na

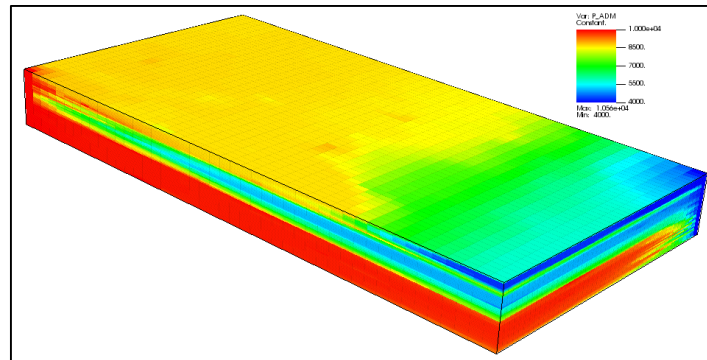
Figura. Como razão de engrossamento em relação à malha fina utilizamos $CR^1 = (3, 3, 3)$, para o primeiro nível e $CR^2 = (9, 9, 9)$, para o segundo nível. Como taxa de refinamento para cada iteração foi usado 0,05 (5% dos volumes em níveis de malha grossa são refinados a cada iteração). A malha escolhida para solução do caso de teste é apresentada na Figura 3. A aplicação do método ADM a essa malha com 21% dos volumes ativos tem erros de $\|E\|_{L^\infty} = 0,193$ e $\|E\|_{L^2} = 0,0359$, a solução para o campo de pressão é apresentada na Figura. A solução direta na malha mais refinada, obtida com o uso de TPFA, é mostrada na Figura 41.

Figura 39 – Malha ADM utilizada na configuração vertical de poços.



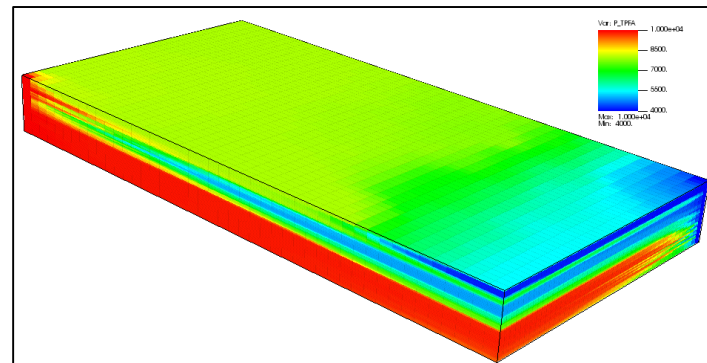
Fonte: O autor.

Figura 40 – Solução ADM para o campo de pressão.



Fonte: O autor.

Figura 41 – Solução TPFA para o campo de pressão.

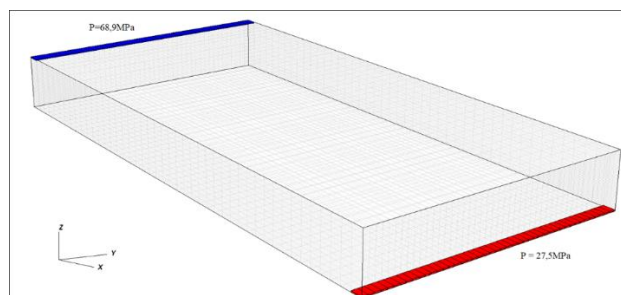


Fonte: O autor.

5.1.4.2 *Uso de Poços horizontais*

Dois poços horizontais foram utilizados como mostrado na Figura.

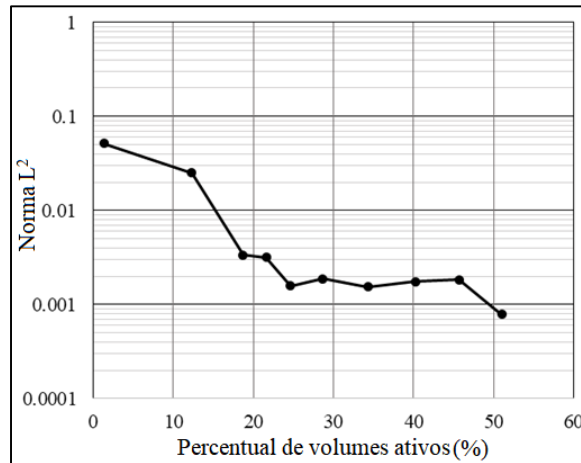
Figura 42 – Configuração horizontal de poços utilizada.



Fonte: O autor.

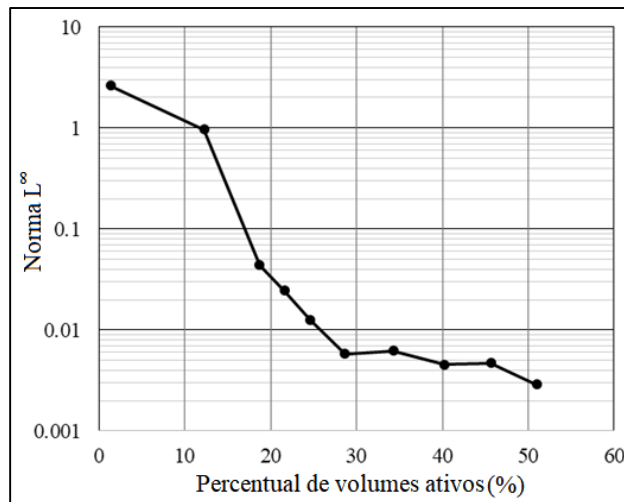
Para definição da malha ADM a ser utilizada nesta simulação, analisamos os erros nas normas L^2 e L^∞ , Figura 43 e Figura 44.

Figura 43 – Norma $\|E\|_{L^2}$ da configuração horizontal de poços versus percentual de volumes ativos.



Fonte: O autor.

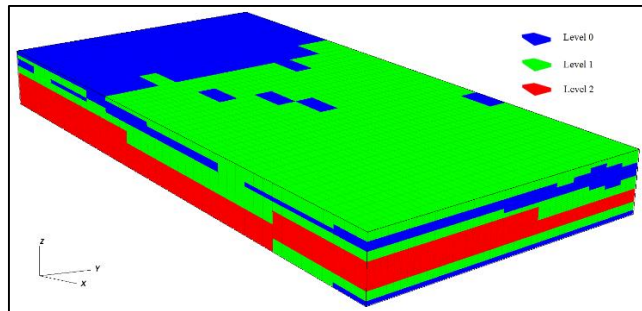
Figura 44 – $\|E\|_{L^\infty}$ da configuração horizontal de poços versus percentual de volumes ativos.



Fonte: O autor.

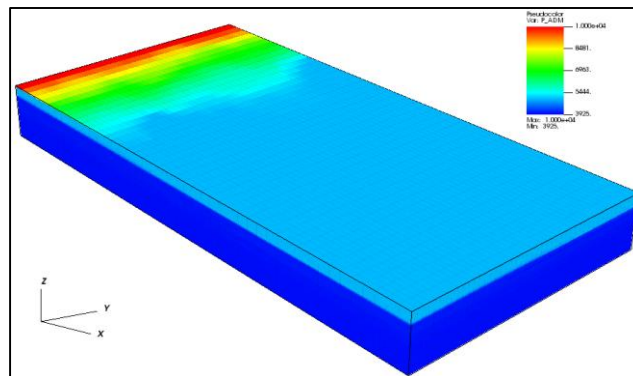
A aplicação do método ADM à malha com 18,7% de nós ativos, mostrada na Figura, apresenta erros de $\|E\|_{L^\infty} = 0,044$ e $\|E\|_{L^2} = 0,00336$ para o campo de pressões apresentado na Figura 4. A solução direta na malha mais refinada, obtida com o uso de TPFA, é mostrada na Figura 4.

Figura 45 – Malha ADM utilizada na configuração horizontal de poços.



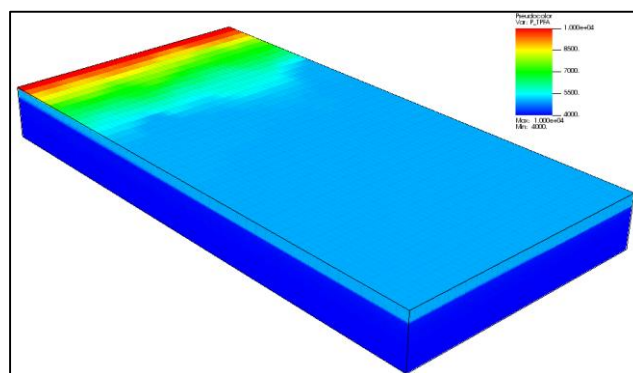
Fonte: O autor.

Figura 46 – Solução ADM para o campo de pressão na configuração horizontal de poços.



Fonte: O autor.

Figura 47 – Solução TPFA para o campo de pressão na configuração horizontal de poços.

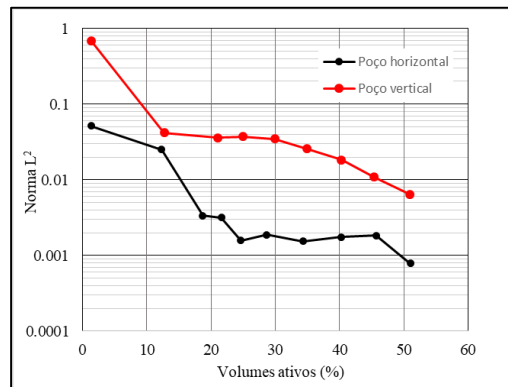


Fonte: O autor.

Podemos observar que, mesmo sendo resultados oriundos do mesmo modelo de reservatório, a mudança na disposição dos poços fez com que os resultados obtidos nas normas de erro L^2 e L^∞ , Figura e Figura, apresentasse diferenças significativas na análise. Isso foi

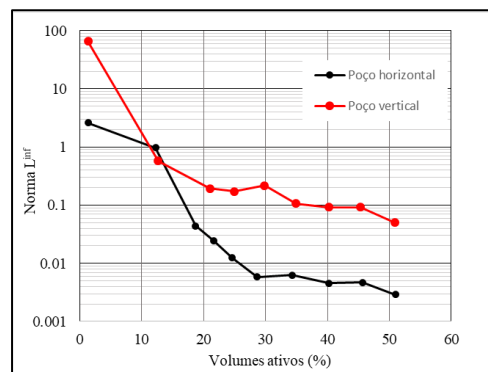
observado ao longo de toda a faixa de refinamentos avaliada que compreendeu até pouco mais de 50% de volumes ativos. Essas diferenças indicam a importância do estudo de sensibilidade acerca da malha inicial a ser utilizada para cada reservatório e configuração de poços. Uma vez que os volumes mantidos na alta resolução segundo esse critério (campo de pressão) não são posteriormente inseridos em resoluções inferiores é importante iniciar a simulação com a malha de menor quantidade de volumes ativos que atenda aos critérios de acurácia. Dessa forma, é recomendável a realização de análises de sensibilidade antes de ser iniciada a solução do problema de transporte.

Figura 48 – $\|E\|_{L^2}$ do mesmo reservatório com poços horizontais ou verticais.



Fonte: O autor.

Figura 49 – $\|E\|_{L^\infty}$ do mesmo reservatório com poços horizontais ou verticais.



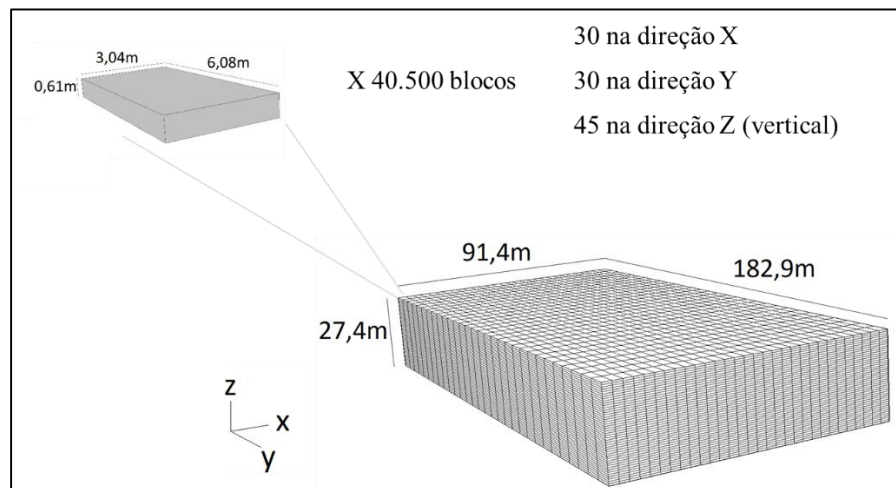
Fonte: O autor.

5.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO DE ÁGUA E ÓLEO

Nas simulações utilizando o método ADM, foi utilizado o valor de 0,1 como limite para refinamento devido ao campo de saturação, ou seja, os volumes da malha primal de nível 1 que apresentarem uma variação maior que esse valor, são inseridos no nível 0 (malha fina) e, conforme já comentado, seus vizinhos de face, caso pertençam ao nível 2, são inseridos no nível 1 (sendo esse um indicador *a priori* do erro na saturação).

Os modelos de reservatório utilizados tem as mesmas dimensões e são discretizados de acordo com a Figura 5, que mostra as dimensões de um bloco, do reservatório e a quantidade de blocos em cada direção. Para as saturações residuais de óleo e de água utilizadas são $S_{or} = S_{wr} = 0.2$, e como razão de mobilidade foi usado $\mu_o / \mu_w = 5$. As densidades utilizadas para a água e o óleo foram $\rho_w = 1000 \text{Kg} / \text{m}^3$ e $\rho_o = 900 \text{Kg} / \text{m}^3$, $k_{ro}^0 = 0,6$. As condições de contorno externas são de fluxo nulo em todas as fronteiras. Como critério de estabilidade foi utilizado $CFL = 0,5$.

Figura 50 – Dimensões e discretização dos reservatórios utilizados nos exemplos bifásicos.

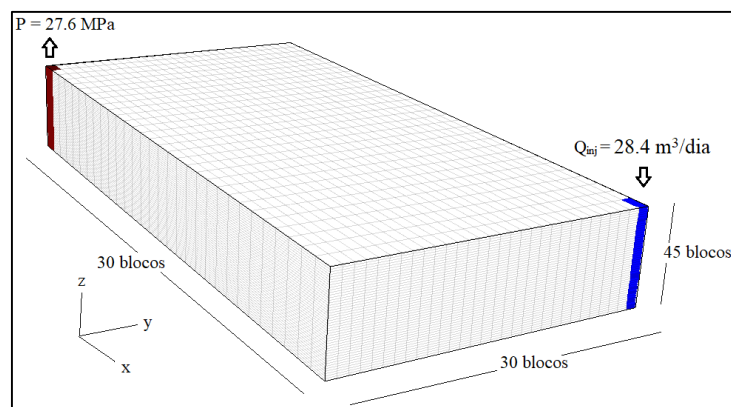


Fonte: O autor.

5.2.1 Exemplo Homogêneo

Nesse exemplo, Foi utilizada a configuração de poços mostrada na Figura 5, que mostra dois poços, um poço de injeção no canto direito com $Q_{inj} = 29,4 m^3/dia$, e um poço de produção no canto esquerdo, com $P_{prod} = 27,5 MPa$. A porosidade adotada foi de 0.3 em todo o reservatório. E a permeabilidade foi de 1mD nas três direções.

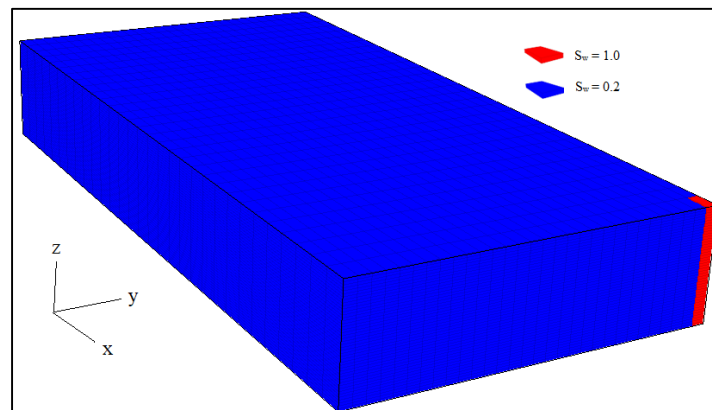
Figura 51 – Configuração de poços do exemplo homogêneo. Um poço produtor com pressão prescrita, em vermelho, e um poço injetor com vazão prescrita, em azul.



Fonte: O autor.

Como condição inicial, foi adotada uma saturação igual à residual de água, 0.2, à exceção do poço injetor, que começou a simulação totalmente saturado por água, como mostra a Figura 5.

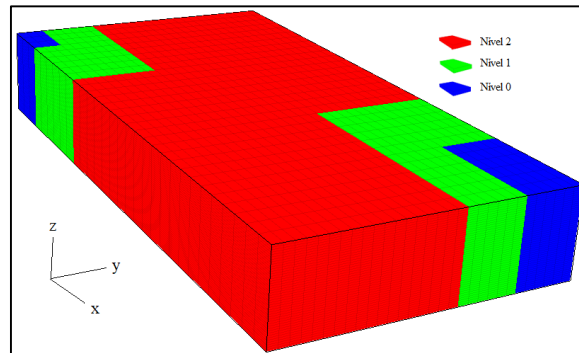
Figura 52 – Condição inicial de saturação no reservatório homogêneo, observa-se que apenas os volumes correspondentes ao poço injetor possuem saturação de água maior que a residual.



Fonte: O autor.

Uma vez definido o problema na escala fina, parte-se para a definição do problema ADM, a iniciar pelas razões de engrossamento a serem utilizadas. Nesse exemplo, por se tratar de um reservatório pequeno, optou-se pelo uso de razões de engrossamento pequenas, $CR^1 = (3, 3, 3)$ e $CR^2 = (9, 9, 9)$. Com essa definição foi construída a malha para adaptação aos poços a ser utilizada para iniciar o processo iterativo, essa malha é mostrada na Figura 5.

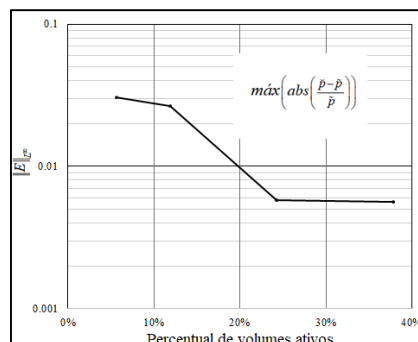
Figura 53: Malha ADM adaptada ao posicionamento dos poços do problema homogêneo.



Fonte: O autor.

Definida a malha inicial, mostrada na Figura 5, a aplicação do processo iterativo fornece a curva da Figura 5, que relaciona o percentual de volumes ativos com a estimativa do erro. Após análise dessa curva, optou-se por iniciar a simulação do problema bifásico com a malha definida na primeira iteração, ou seja, a malha definida a partir da posição dos poços visto que, o estimador de erro obtido com o uso da malha definida a partir dos poços, apresenta um máximo do estimador de erro relativamente pequeno, cerca de 2%, o que faz com que não seja prejudicada a acurácia do campo de velocidades e, conseqüentemente, do problema transiente.

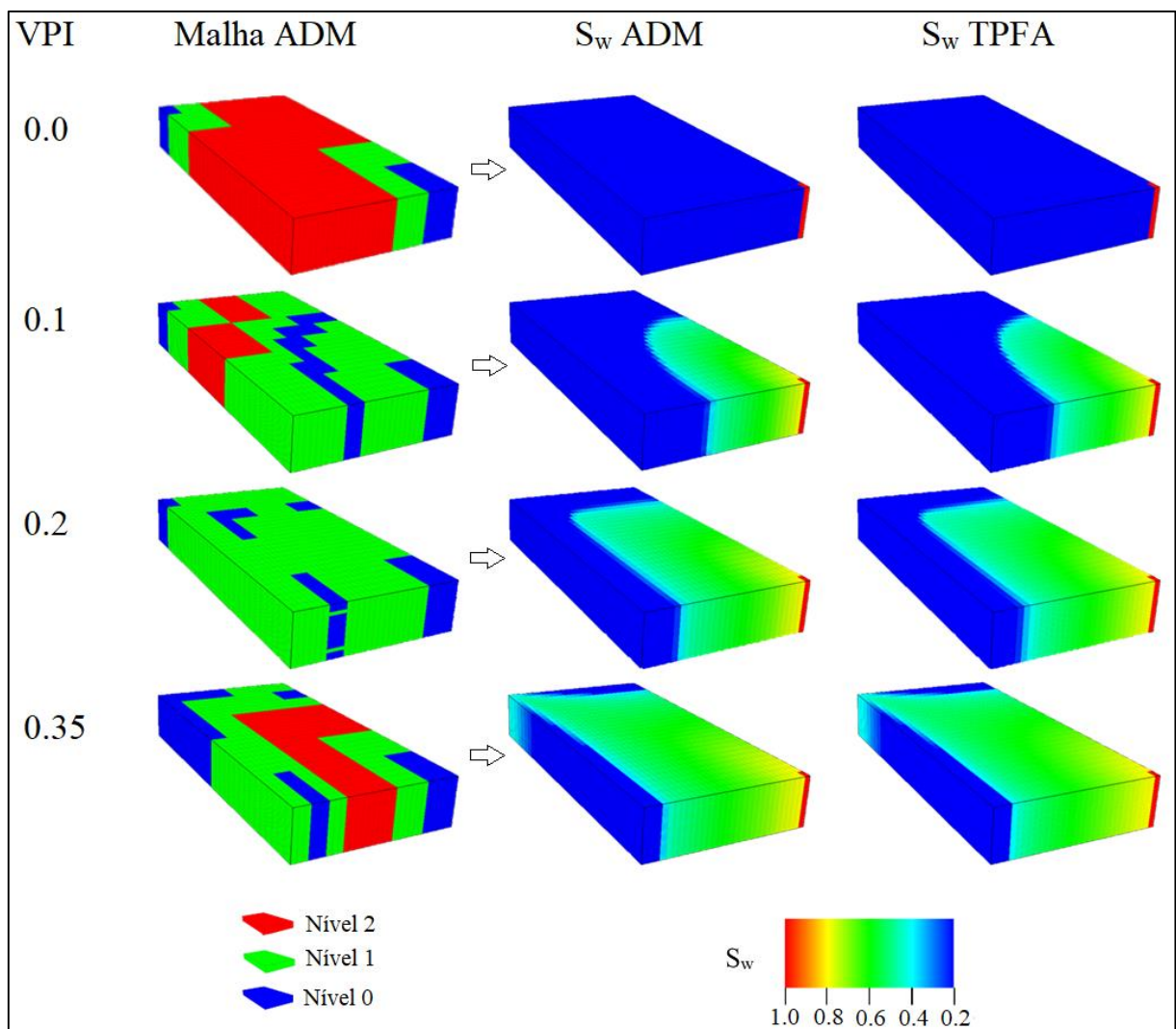
Figura 54 – Relação entre o valor máximo relativo do estimador de erro e o percentual de volumes ativos para o exemplo homogêneo.



Fonte: O autor.

Dessa forma, a malha inicial a ser utilizada no problema de transporte coincide com a malha criada com a consideração dos poços, mostrada na Figura 5. Escolhida a malha ADM inicial a ser utilizada, procede-se a solução do problema de transporte. Foi utilizada a metodologia IMPES. Os resultados de saturação obtidos ao longo da simulação são mostrados na Figura 5, que mostra, para diversos valores de volume poroso injetado (VPI), a malha ADM utilizada no passo de tempo correspondente, o campo de saturação de água obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, S_w_ADM , e o obtido com o uso de TPFA na malha fina, S_w_TPFA , como referência.

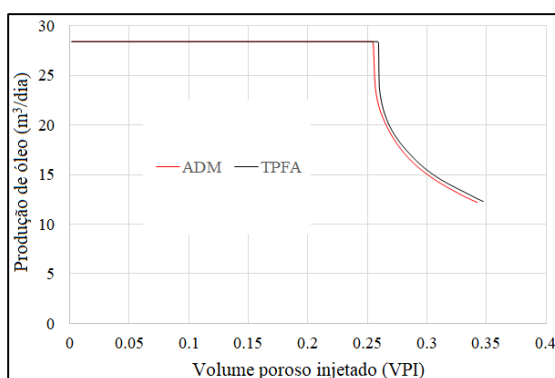
Figura 55 – Malha ADM, primeira coluna, adaptada ao campo de saturação obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, segunda coluna S_w ADM, e campo de saturação de referência, terceira coluna S_w TPFA, obtido com o uso de TPFA na malha fina para solução da equação da pressão, no problema homogêneo.



Fonte: O autor.

Com o objetivo de acompanhar a acurácia da solução ADM em relação à produção de óleo, foi elaborado um gráfico que mostra, na Figura 5, que mostra a produção de óleo versus VPI utilizando o método ADM para solução da pressão, curva vermelha, e a solução com o uso de TPFA na malha fina, curva preta.

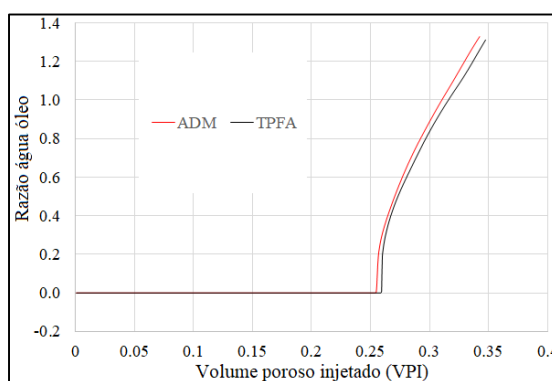
Figura 56 – Produção de óleo versus volume poroso injetado para o exemplo homogêneo utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e TPFA na malha fina, curva preta.



Fonte: O autor.

Nota-se que a curva de produção de óleo com solução da pressão obtida através do método ADM apresenta boa acurácia para o problema apresentado, visto que tanto a forma quanto a posição da curva de produção praticamente coincidem com a solução de referência, a solução com uso do método ADM está adiantada em relação à solução de referência. Foi feito também o gráfico da razão água óleo, mostrado na Figura 5.

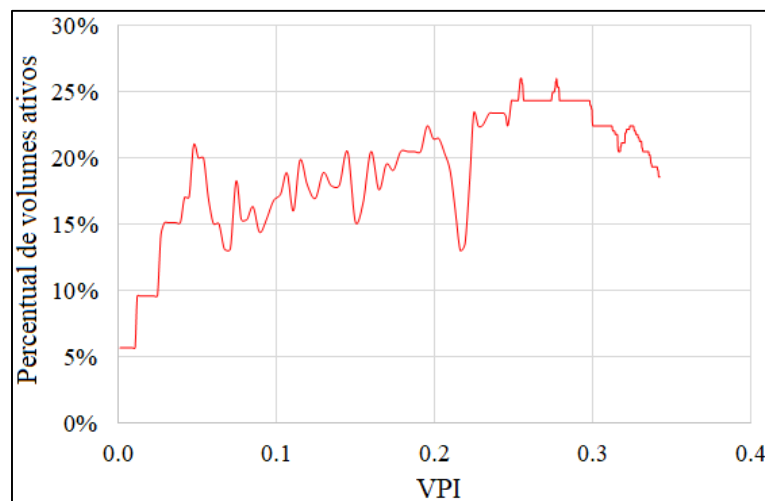
Figura 57 – Razão água óleo em relação ao volume poroso injetado (VPI) para o exemplo homogêneo, utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.



Fonte: O autor.

Em seguida, foi analisado o grau de refinamento da malha ADM ao longo da simulação. Para isso, utilizamos o percentual de volumes ativos, que corresponde à razão entre o tamanho do sistema ADM e o tamanho do sistema totalmente na escala fina. Essa análise é feita a partir da Figura 5, que mostra a variação do percentual de volumes ativos em relação ao VPI, observa-se que ocorre uma maior taxa de aumento no número de volumes ativos na parte inicial do problema transiente. Isso se deve ao fato de que, nessa fase os volumes estão sendo inseridos na malha de alta resolução (malha fina) devido ao avanço da frente de saturação. Observa-se também, a partir de certo ponto, oscilações desse número, o que é atribuído à reinserção dos volumes ultrapassados pela frente de saturação nos níveis mais elevados.

Figura 58 – Percentual de volumes ativos em relação ao volume poroso injetado (VPI) do exemplo com barreiras.

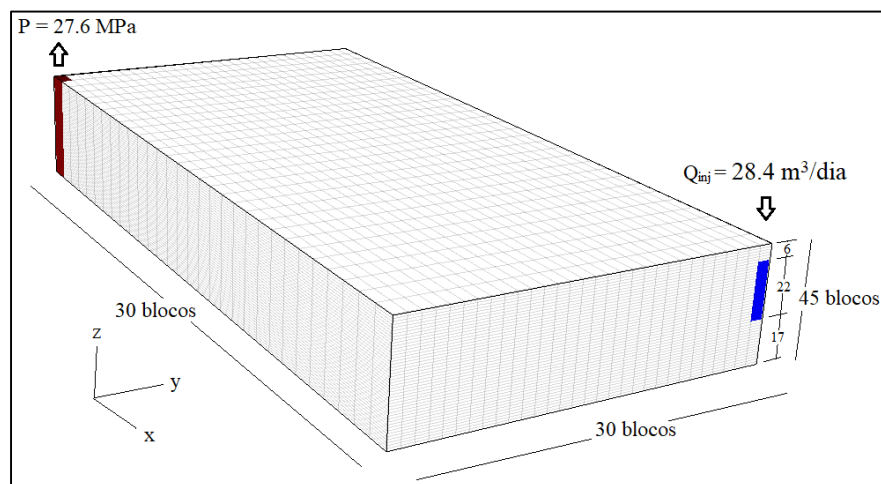


Fonte: O autor.

5.2.2 Exemplo bifásico em reservatório com duas barreiras de fluxo

Nesse exemplo, são inseridas duas barreiras no interior do reservatório posicionadas em regiões próximas aos poços. Foi utilizada a configuração de poços mostrada na Figura 5. Neste exemplo, foram utilizados um poço de injeção no canto direito com $Q_{inj} = 29,4 m^3/dia$ e um poço de produção no canto esquerdo, com $P_{prod} = 27,5 MPa$. Como valor para a porosidade foi utilizado $\phi = 0.3$ e permeabilidade de 1md nas três direções em todo o reservatório.

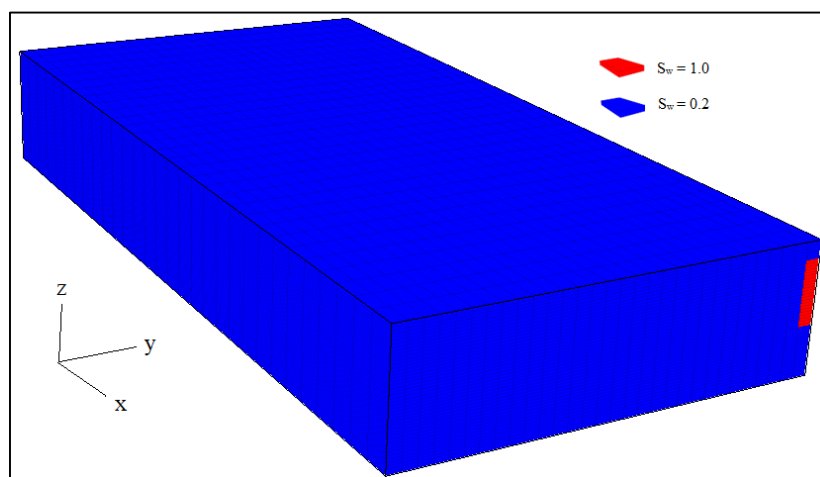
Figura 59 – Configuração de poços do exemplo com barreiras. Um poço produtor com pressão prescrita, em vermelho, e um poço injetor com vazão prescrita, em azul.



Fonte: O autor.

Como condição inicial, foi adotada a saturação de água igual à residual de água, 0.2, e o restante do volume poroso saturado com óleo, à exceção do poço injetor, que começou a simulação totalmente saturado por água, como mostra a Figura 60.

Figura 60 – Condição inicial de saturação no reservatório, observa-se que apenas os volumes correspondentes ao poço injetor possuem saturação de água maior que a residual.

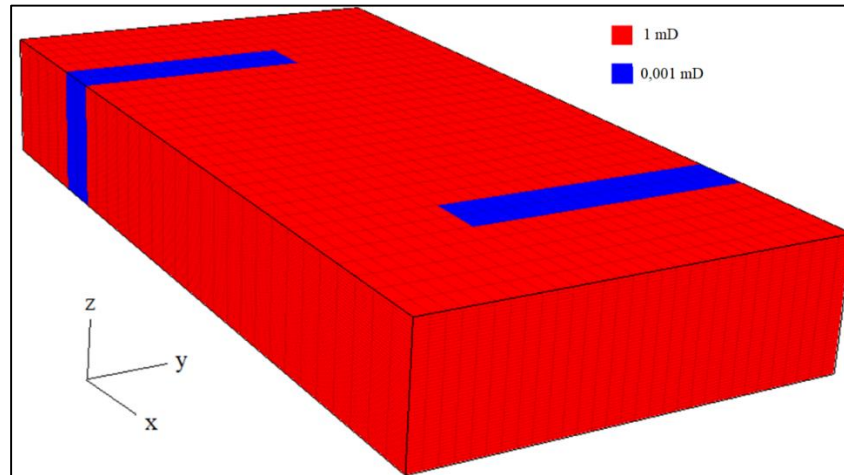


Fonte: O autor.

Para definição da barreira, foi utilizado um contraste de 1/1000 na permeabilidade. Nas regiões com barreira foi utilizada a permeabilidade de 0.001 mD nas três direções, e nas demais

foi utilizado o valor de 1 mD. A Figura 65 mostra o posicionamento das duas barreiras no interior do reservatório, ambas atravessam todas as camadas horizontais, 45 camadas.

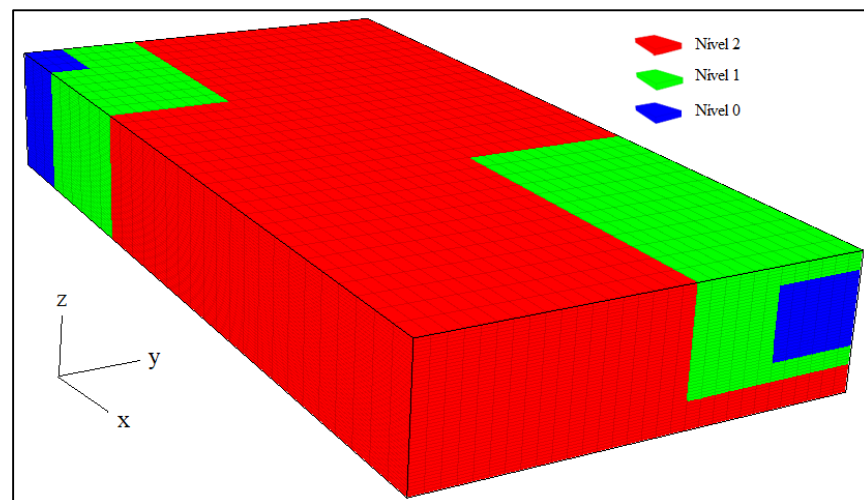
Figura 65: Campo de permeabilidade do exemplo com barreiras, em azul, ambas atravessam todas as camadas horizontais, 45 no total.



Fonte: O autor.

Uma vez definido o problema na escala fina, parte-se para a construção do problema ADM, a iniciar pelas razões de engrossamento a serem utilizadas. Nesse exemplo, por se tratar de um reservatório pequeno, optou-se pelo uso de razões de engrossamento pequenas, $CR^1 = (3, 3, 3)$ e $CR^2 = (9, 9, 9)$. Com essa definição é construída a malha para adaptação aos poços a ser utilizada para iniciar o processo iterativo. Essa malha é mostrada na Figura 6.

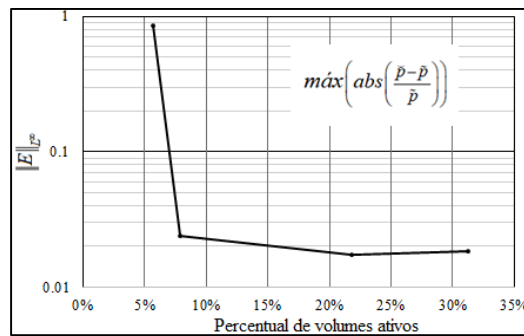
Figura 62 – Malha ADM adaptada ao posicionamento dos poços.



Fonte: O autor.

Definida a malha inicial, mostrada na Figura 6, a aplicação do processo iterativo fornece a curva da Figura, que relaciona o percentual de volumes ativos com a estimativa do erro. Após análise dessa curva, optou-se por iniciar a simulação do problema bifásico com a malha definida na segunda iteração, visto que a partir desse ponto a inserção de novos volumes na alta resolução, nível 0, não implica em queda significativa do erro. Além disso, o estimador de erro obtido com o uso da malha definida a partir dos poços, apresenta um máximo do estimador de erro relativamente elevado, o que poderia prejudicar a acurácia do campo de velocidades e, consequentemente, do problema transiente

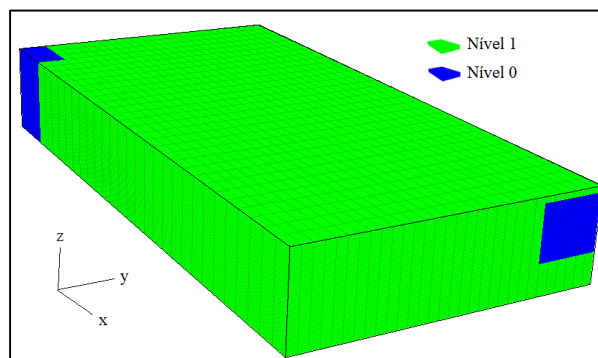
Figura 63 – Relação entre o valor máximo relativo do estimador de erro e o percentual de volumes ativos para o exemplo com barreiras.



Fonte: O autor.

Cabe notar que, já na primeira iteração, o algoritmo de adaptação de malha, apresentado no item 4.6.1, detectou que os maiores erros encontravam-se nos volumes pertencentes ao nível 2 e os adicionou ao nível 1, tornando esse um problema com apenas 2 níveis, cuja malha é apresentada na Figura 6. Nota-se as regiões, próximas aos poços, no nível 0, em azul, e as regiões no nível 1, em verde.

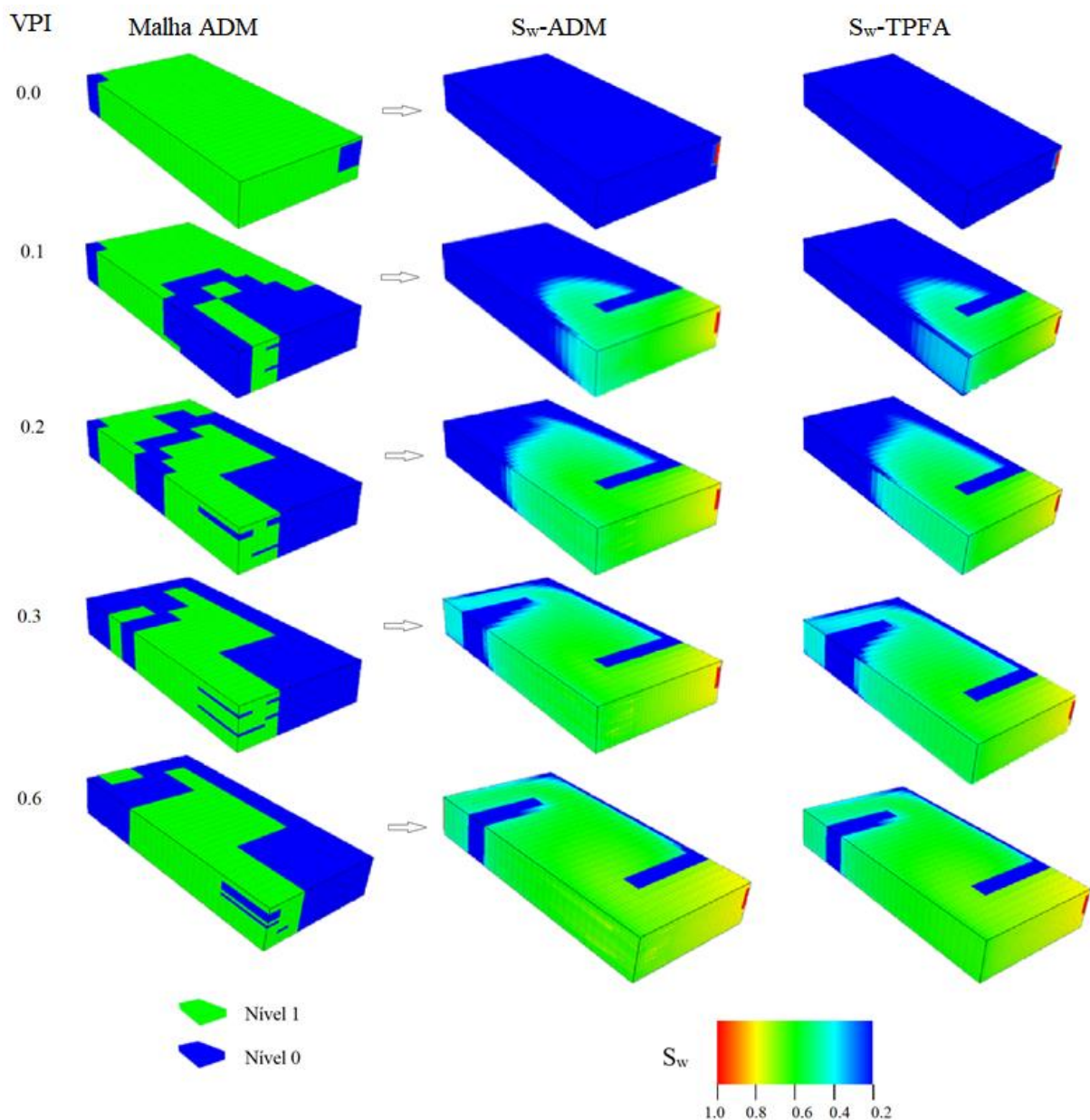
Figura 64 – Malha ADM inicial utilizada no problema com barreiras.



Fonte: O autor.

Escolhida a malha ADM inicial a ser utilizada na solução do problema bifásico, Figura 6, procede-se a solução do problema de transporte com o uso da metodologia IMPES, os resultados obtidos ao longo da simulação são mostrados na Figura , que mostra, para diversos valores de volume poroso injetado (VPI), a malha ADM utilizada no passo de tempo correspondente, o campo de saturação de água obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, $S_w\text{-ADM}$, e o obtido com o uso de TPFA na malha fina, $S_w\text{-TPFA}$, como referência.

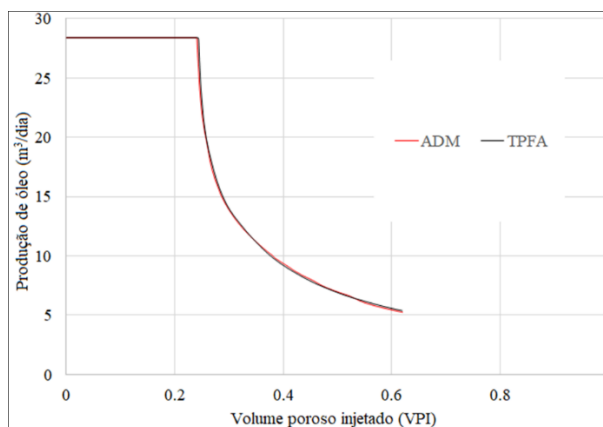
Figura 65 – Malha ADM, primeira coluna, adaptada ao campo de saturação obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, segunda coluna, e campo de saturação de referência, terceira coluna, obtido com o uso de TPFA na malha fina para solução da equação da pressão.



Fonte: O autor.

Com o objetivo de acompanhar a acurácia da solução ADM em relação à produção de óleo, foi traçada a curva de produção de óleo versus VPI, Figura. Na Figura apresentamos a razão água-óleo no poço produtor.

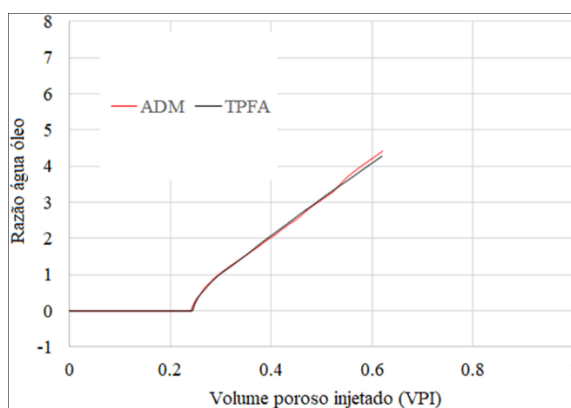
Figura 66 – Produção de óleo versus volume poroso injetado para o exemplo com barreiras utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.



Fonte: O autor.

Como podemos observar nas Figura e 67, a solução ADM apresenta bons resultados para a produção de óleo e razão água-óleo quando comparada com as soluções obtidas diretamente na malha fina.

Figura 67 – Razão água óleo em relação ao volume poroso injetado (VPI) para o exemplo com barreiras, utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.

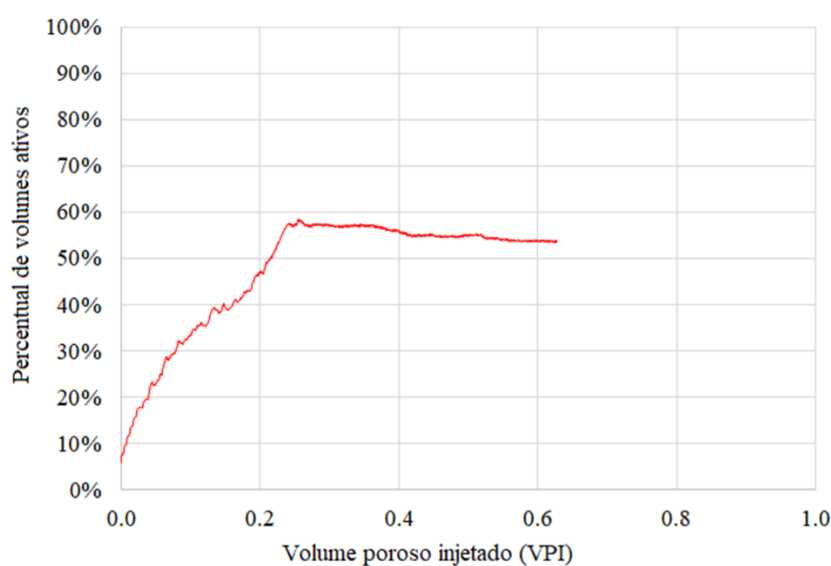


Fonte: O autor.

A observação da razão água óleo nos faz chegar a conclusão semelhante ao que foi observado para a Figura, o método ADM apresenta boa acurácia para o problema em questão.

Resta agora analisar o grau de refinamento da malha ADM ao longo da simulação. Para isso utilizamos o percentual de volumes ativos, que corresponde ao tamanho do sistema ADM dividido pelo tamanho do sistema na escala fina. Essa análise é feita a partir da Figura 6, que mostra a variação do percentual de volumes ativos em relação ao VPI, observa-se que ocorre uma maior taxa de aumento no número de volumes ativos na parte inicial do problema transiente. Isso se deve ao fato de que, nessa fase os volumes estão sendo inseridos na alta resolução (malha fina) devido ao avanço da frente de saturação. Observa-se também oscilações desse número, o que é atribuído à reinserção dos volumes ultrapassados pela frente de saturação no nível menos refinado da malha.

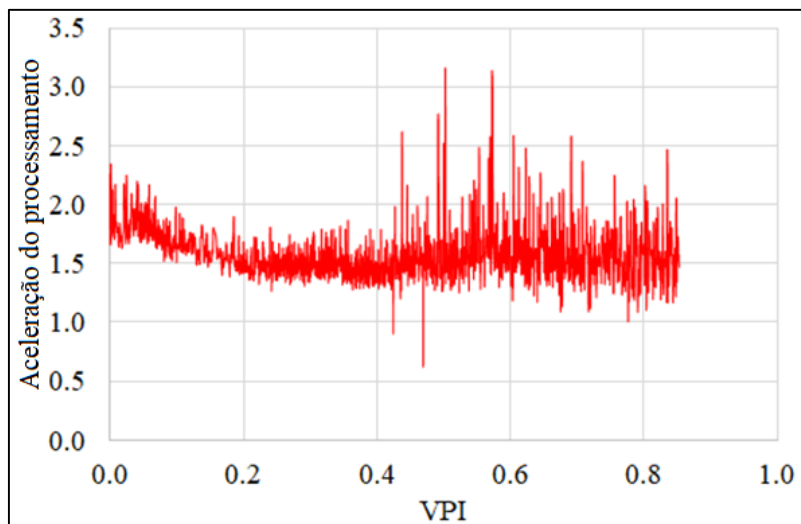
Figura 68 – Percentual de volumes ativos em relação ao volume poroso injetado (VPI) do exemplo com barreiras.



Fonte: O autor.

Uma análise complementar à de percentual de volumes ativos é a de aceleração do processamento (*Speed up*), razão entre o tempo para realizar um passo na solução de referência, usando TPFA na malha fina, e o tempo para realizar um passo com o uso do método ADM. Nesse exemplo, foi realizado o cálculo do operador de prolongamento em todo o reservatório a cada passo de tempo. A solução ADM apresentou maior eficiência ao longo de praticamente toda a simulação, conforme mostra a Figura, mesmo com os percentuais de volumes ativos maiores e sendo esse um reservatório pequeno.

Figura 69 – Aceleração do processamento, razão entre o tempo para finalizar uma passo da solução de referência e o tempo para finalizar esse passo de tempo utilizando a solução ADM atualizando o operador de prolongamento AMS a cada passo de tempo.

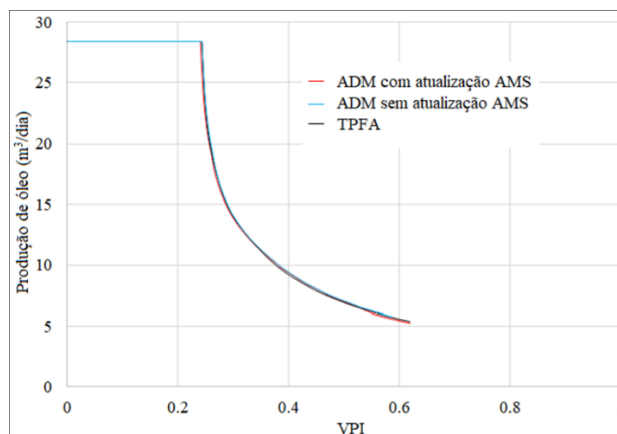


Fonte: O autor.

5.2.2.1 Efeitos no tempo de processamento e na acurácia da não atualização do operador de prolongamento AMS a cada passo de tempo

Para fins de comparação, esse mesmo exemplo, com barreiras, foi processado novamente com o método ADM mas sem a atualização do operador de prolongamento AMS a cada passo de tempo (nos exemplos anteriores foi realizada a atualização a cada passo), ou seja, esse operador foi calculado apenas no pré-processamento assim como foi realizado por Cusini, Van Kruijsdijk, & Hajibeygi (2016). O operador de prolongamento ADM foi atualizado a partir desse último, a cada passo de tempo. O impacto dessa consideração na acurácia através da curva de produção é mostrado na Figura , que mostra que, para o exemplo com barreiras a não atualização do operador de prolongamento AMS não gera erros consideráveis na curva de produção de óleo.

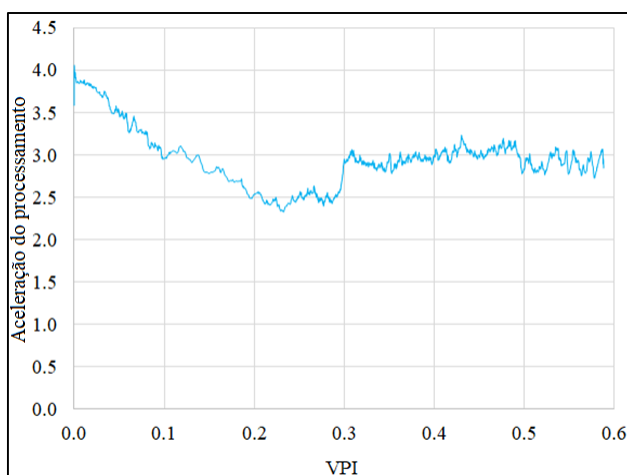
Figura 70 – Curvas de produção obtidas com solução de pressão obtida com: TPFA na malha fina, preto, e método ADM, com atualização do operador AMS a cada passo de tempo, vermelho, e sem atualização do operador AMS, azul.



Fonte: O autor.

A análise dos resultados apresentados na Figura permite concluir que calcular o operador de prolongamento AMS apenas no pré-processamento representa uma excelente aproximação, para esse tipo de reservatório. Em relação ao efeito dessa aproximação no tempo de processamento, novamente faremos o uso da curva de aceleração do processamento, Figura, que mostra que a solução utilizando o método ADM é, em média, cerca de três vezes mais rápida que a solução na malha fina com o uso de TPFA, sem, entretanto, atualizar o operador de prolongamento. Observamos que esse ganho é ainda maior no início da simulação, o que já era esperado, tendo em vista que existem menos volumes ativos neste período.

Figura 71 – Curva de aceleração do processamento versus VPI, utilizando o método ADM no cálculo da pressão sem atualizar o operador de prolongamento AMS.



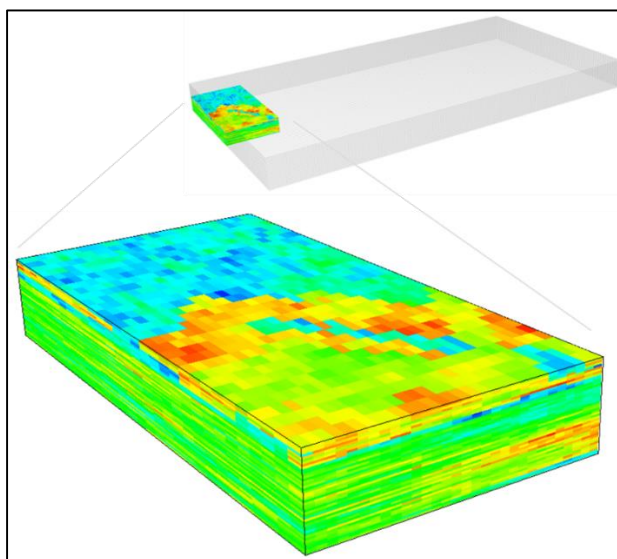
Fonte: O autor.

Vale ressaltar que essa análise considerou o tempo total para obtenção da solução, inclusive etapas que não passaram por nenhum tipo de otimização, computacionalmente falando, chama atenção uma das etapas, que é o recálculo do campo de velocidades para garantir que haja conservação (WANG, An Algebraic Multiscale Solver for flow problems in heterogeneous porous media, PhD thesis, 2015), essa etapa, no caso sem recálculo do operador AMS representa cerca de 50% do tempo para calcular cada passo, visto que sequer está vetorizada. Ou seja, poderíamos ter acelerações do processamento ainda maiores, mesmo em um exemplo pequeno como esse.

5.2.3 Exemplo DO CSP-spe 10

Nesse exemplo, utiliza-se um reservatório com as mesmas dimensões que os anteriores, porém com propriedades de porosidade e permeabilidade retirados de uma parte do CSP-SPE 10 com $30 \times 30 \times 45$ volumes iniciando na origem desse *benchmark*. A Figura 2 mostra a posição e o campo de permeabilidade do reservatório em questão. Observa-se que o reservatório utilizado é composto por dois tipos de ambiente deposicional, Fluvial, na parte superior, e Costeiro raso, na parte inferior.

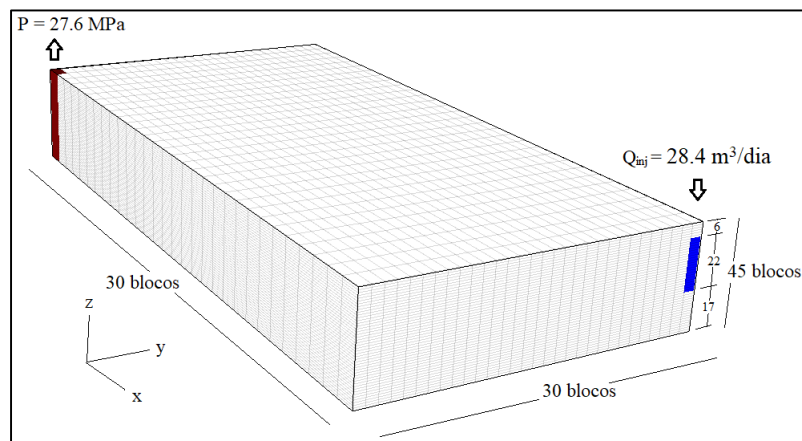
Figura 72 – Campo de permeabilidade (na direção x) e posição do reservatório no interior do SPE-10.



Fonte: O autor.

Foi utilizada a configuração de poços mostrada na Figura 7. No poço produtor, com pressão prescrita, foi utilizado o mesmo valor do SPE-10 para esse tipo de poço, 4000 psi ou 27,6 Mpa. No poço injetor, com vazão prescrita, foi utilizado o valor proporcional ao volume, ou seja, 3.6% da vazão injetada no SPE-10 (28.4 m³/dia). As condições de contorno externas são de fluxo nulo em todas as fronteiras.

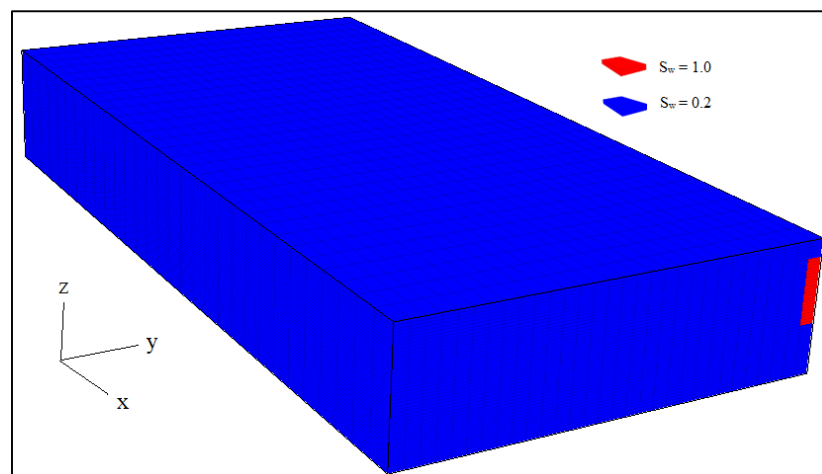
Figura 73 – Configuração de poços do exemplo muito heterogêneo. Um poço produtor com pressão prescrita, em vermelho, e um poço injetor com vazão prescrita, em azul.



Fonte: O autor.

Como condição inicial, foi adotada uma saturação igual à residual de água, 0.2, e o restante do volume poroso saturado com óleo, à exceção do poço injetor, que começou a simulação totalmente saturado por água, como mostra a Figura 74.

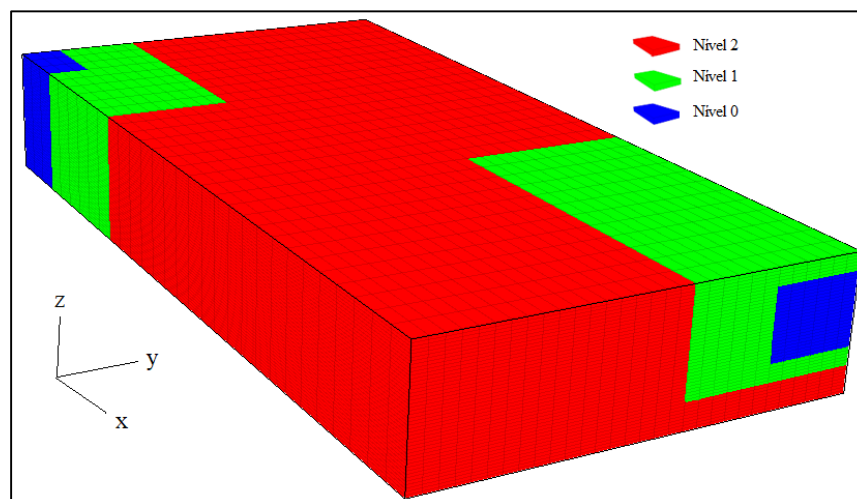
Figura 74 – Condição inicial de saturação no reservatório, observa-se que apenas os volumes correspondentes ao poço injetor possuem saturação de água maior que a residual.



Fonte: O autor.

Uma vez definido o problema na escala fina, foi realizada a definição do problema ADM, a iniciar pelas razões de engrossamento a serem utilizadas. Nesse exemplo, novamente optou-se pelo uso das razões de engrossamento $CR^1 = (3, 3, 3)$ e $CR^2 = (9, 9, 9)$. Com essa definição foi construída a malha para adaptação aos poços a ser utilizada para iniciar o processo iterativo, essa malha é mostrada na Figura .

Figura 75 – Malha ADM adaptada ao posicionamento dos poços do reservatório muito heterogêneo.

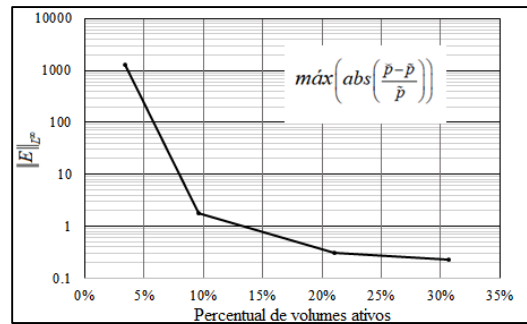


Fonte: O autor.

Definida a malha inicial, mostrada na Figura , a aplicação do processo iterativo fornece a curva da

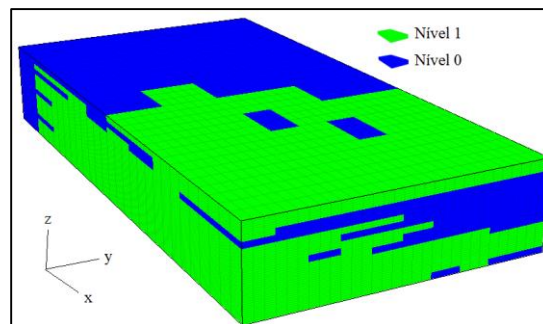
Figura , que relaciona o percentual de volumes ativos com a estimativa do erro. Após análise dessa curva, optou-se por iniciar a simulação do problema bifásico com a malha definida na terceira iteração, visto que a partir desse ponto a inserção de novos volumes na alta resolução, nível 0, não implica em queda significativa do erro. Cabe notar que novamente o algoritmo para seleção da malha ADM inicial nos forneceu uma malha com apenas dois níveis que apresenta um erro máximo de 28%, para iniciar a solução do problema de transporte (Como o aumento no percentual de volumes ativos não levaria à redução significativa do erro, optamos por utilizar essa malha para iniciar o problema bifásico).

Figura 76 – Relação entre o valor máximo relativo do estimador de erro e o percentual de volumes ativos para o reservatório muito heterogêneo.



Fonte: O autor.

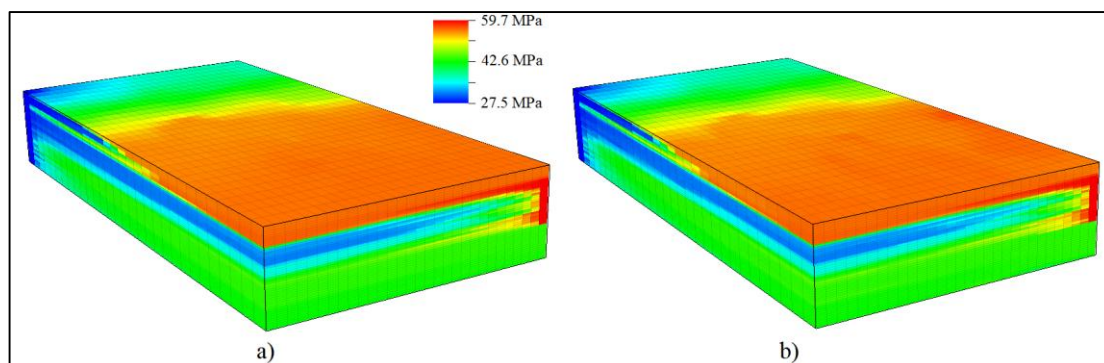
Figura 77 – Malha ADM inicial utilizada no problema com barreiras.



Fonte: O autor.

Para fins de comparação, a Figura mostra o campo de pressão obtido com a aplicação do método ADM à malha inicial mostrada na Figura 7 e o campo de pressão de referência, obtido com o uso de TPFA na malha fina.

Figura 78 – Campo de pressão obtido com a aplicação do método ADM à malha inicial, a) e campo de pressão obtido com o uso de TPFA na malha fina b).

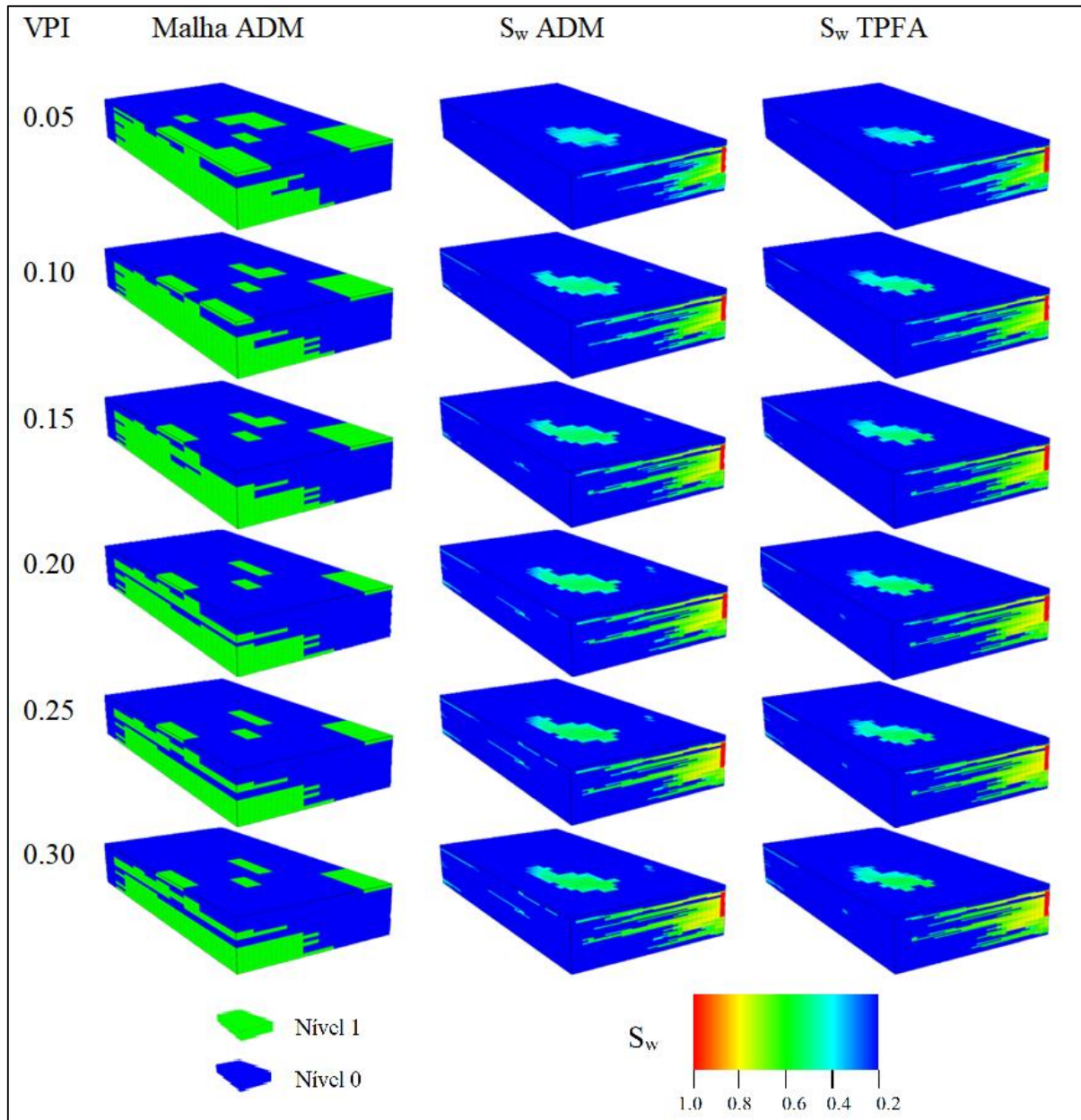


Fonte: O autor.

Escolhida a malha ADM inicial a ser utilizada na solução do problema bifásico Figura 7, procede-se a solução do problema de transporte com o uso da metodologia IMPES, os resultados obtidos ao longo da simulação são mostrados na

Figura, que mostra, para diversos valores de volume poroso injetado (VPI), a malha ADM utilizada no passo de tempo correspondente, o campo de saturação de água obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, S_w ADM, e o obtido com o uso de TPFA na malha fina, S_w TPFA, como referência.

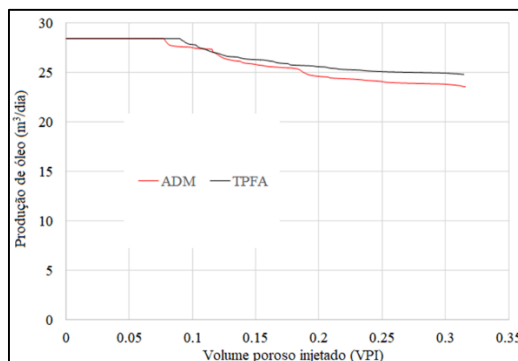
Figura 79 – Malha ADM, primeira coluna, adaptada ao campo de saturação obtido com o uso do método ADM para solução da pressão, segunda coluna, e campo de saturação de referência, terceira coluna, obtido com o uso de TPFA na malha fina para solução da equação da pressão.



Fonte: O autor.

Novamente, com o objetivo de acompanhar a acurácia da solução ADM em relação à função objetivo do nosso problema, a Figura mostra a produção de óleo versus VPI, para a solução obtida com o uso do método ADM e a obtida com o uso do TPFA na malha fina.

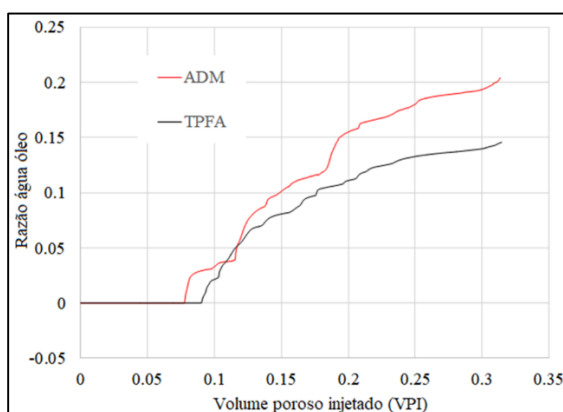
Figura 80 – Produção de óleo versus volume poroso injetado para o exemplo muito heterogêneo utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.



Fonte: O autor.

Observa-se que a curva de produção de óleo desse exemplo, apesar de iniciar a produção de água mais cedo, com menos de 10% de VPI, apresenta uma queda na produção de óleo menos acentuada que nos exemplos anteriores. Nota-se que, para esse problema, a solução que utiliza a pressão calculada com método ADM apresenta maior distinção em relação à que utiliza a pressão calculada com TPFA na malha fina. Foi feito também o gráfico da razão água óleo, que é mostrado na Figura 81.

Figura 81 – Razão água óleo em relação ao volume poroso injetado (VPI) para o exemplo muito heterogêneo, utilizando duas formas de solução do problema de pressão, o método ADM, curva vermelha, e o uso de TPFA na malha fina, curva preta.

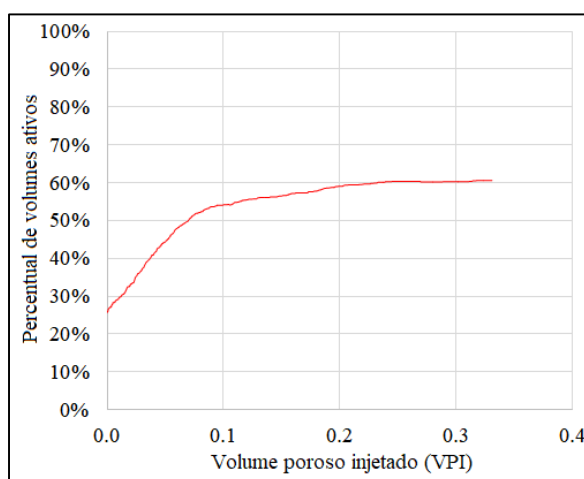


Fonte: O autor.

Resta agora analisar o grau de refinamento da malha ADM ao longo da simulação. Para isso, utilizamos o percentual de volumes ativos, que corresponde ao tamanho do sistema ADM dividido pelo tamanho do sistema na escala fina. Essa análise é feita a partir da Figura, que

mostra a variação do percentual de volumes ativos em relação ao VPI, observa-se que nesse exemplo não ocorrem muitas oscilações no percentual de volumes ativos como nos exemplos anteriores e que, assim como nos outros exemplos, ocorre estagnação no crescimento do percentual de volumes ativos a partir de um certo ponto, nesse caso, porém, um possível motivo para isso é a existência de regiões que ficam praticamente segregadas no problema de transporte por estarem virtualmente isoladas por regiões que se comportam como barreiras de permeabilidade. Outra consequência da segregação de regiões e a persistência de volumes em alta resolução, que fez com que, diferente dos exemplos anteriores, não houvesse redução do percentual de volumes ativos a partir de certo ponto da simulação, ocorrendo apenas uma estagnação do crescimento do percentual de volumes ativos.

Figura 82 – Percentual de volumes ativos em relação ao volume poroso injetado (VPI) do exemplo muito heterogêneo.



Fonte: O autor.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, um método multiescala Multinível Algébrico Dinâmico (ADM) foi implementado e algumas técnicas para melhorar a eficiência em sua aplicação e definir a malha ADM foram propostas. As melhorias de eficiência, como a separação das matrizes em sub-blocos que reduz o tempo para obtenção dos operadores, foram possíveis devido à natureza da malha dual e da matriz *Wirebasket*. A definição da malha ADM adaptada ao campo de pressões foi feita através de um método iterativo que adapta a malha ADM a qualquer campo de permeabilidade e qualquer configuração de poços de forma a minimizar os erros no campo de pressões. A partir dessa malha inicial é feita a adaptação ao campo de saturações.

A precisão do método ADM é altamente dependente da malha ADM escolhida o que torna indispensável o uso de estratégias para determinar malhas que apresentem boa acurácia com baixos percentuais de volumes ativos. Ainda que no mesmo modelo de reservatório, diferentes configurações de poços podem alterar completamente a relação entre o erro e o percentual de volumes ativos. Uma análise dos efeitos do grau de refinamento e da razão de engrossamento deve ser realizada para definir uma malha “ADM ótima” para iniciar a simulação multifásica. O processo iterativo descrito neste trabalho pode ser útil nesta análise.

Podemos mencionar as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

1. Desenvolver metodologias híbridas que utilizem multinível com refinamento adaptado ao campo de pressões e suavizadores;
2. Aplicar a metodologia de 1. para o uso em modelos composicionais e malhas não estruturadas;
3. Utilizar esse método com uma metodologia sequencial implícita (SEQ);
4. Estudar os efeitos do refinamento adaptado ao campo de pressão em uma metodologia *fully implicit*;

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, L. M. (2017). **Formulações multiescala localmente conservativas para a simulação de reservatórios de petróleo muito heterogêneos e anisotrópicos** /Tese de doutorado, 163p. Recife.
- BOLDRINI, J. L. (1980). **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil.
- BROOKS, R. H., & COREY, A. T. (1964). **Hydraulic properties of porous media**. Fort Collins, Colorado: Colorado State university.
- CARVALHO, D. K. (2005). **Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-estruturadas com Estrutura de Dados por Arestas para a Solução de Escoamentos em Meios Porosos**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco.
- CHRISTIE, M., & BLUNT, M. (2001). **Tenth SPE Comparative Solution Project: A Comparison of Upscaling Techniques**. SPE Reservoir Evaluation & Engineering 4, 308-317.
- CORRÊA, A. C. (2013). **A Extração do petróleo da camada pré-Sal brasileira: desafios e oportunidades**. Advir, 21-27.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K., & LEWY, H. (1967 [1928]). **On the partial difference equations of mathematical physics**. IBM Journal of Research and Development, 215-234.
- CUSINI, M., FRYER, B., VAN KRUIJSDIJK, C., & HAJIBEYGI, H. (2017). **Algebraic dynamic multilevel method for compositional flow in heterogeneous porous media**. Journal of Computational Physics, 354, 10.1016/j.jcp.2017.10.052.
- CUSINI, M., VAN KRUIJSDIJK, C., & HAJIBEYGI, H. (2016). **Algebraic Dynamic Multilevel (ADM) method for fully implicit simulations of multiphase flow in porous media**. Journal of Computational Physics, 60-79.
- DEHKORDI, M. M., & MANZARI, M. (2013). **Effects of using altered coarse grids on the**. Adv Water Resour, 221-237.
- ERTEKIN, T., ABOU-KASSEM, J. H., & KING, G. R. (2001). **Basic Applied Reservoir simulation**. Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers (SPE).
- EWING, R. E. (1985). **The Mathematics of Reservoir Simulation**. Philadelphia, SIAM,. Communications in applied numerical methods, 261-261.

- GIELISSE, R. (2015). **Dynamic Local Grid Refinement for Incomplete Mixing in Reservoir Simulation**. Delft: Delft University of technology.
- JENNY, P. L. (2003). **Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation**. Journal of Computational Physics., v. 187., 47–67.
- KÜNZE, R., LUNATI, I., & LEE, S. H. (2013). **A Multilevel Multiscale Finite-Volume Method**. Journal of Computational Physics, 502-520.
- LUNATI, I., & LEE, S. H. (2009). **An operator formulation of the Multiscale Finite-Volume Method with correction function**. Multiscale Modeling & Simulation, v. 8., 96-109.
- LUNATI, L., TYAGI, M., & LEE, S. (2011). **An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution**. Journal of Computational Physics v. 230, 1849–1864.
- PARRAMORE, E. E. (2016). **Multiscale Finite-Volume CVD-MPFA Formulations on Structured and Unstructured Grids**. Multiscale Modeling & Simulation 14.2, 559-594.
- PEACEMAN, D. W. (1977). **Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation**. Amsterdam: Elsevier.
- QI, D., & HESKETH, T. (2004). **Quantitative Evaluation of Information Loss in Reservoir Upscaling**. Petroleum Science And Technology Vol. 22, 1625-1640.
- ROSA, A. J., CARVALHO, R. S., & XAVIER, J. A. (2006). **Engenharia de reservatórios de petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência.
- SOUZA, M. R. (2015). **Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- WANG, Y. (2015). **An Algebraic Multiscale Solver for flow problems in heterogeneous porous media**, PhD thesis. Palo alto: Stanford.
- WANG, Y., HAJIBEYGI, H., & TCHELEPI, H. (2014). **Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous porous media**. Journal of Computational Physics, 259, 284-303.
- WANG, Y., HAJIBEYGI, H., & TCHELEPI, H. A. (2015). **Monotone multiscale finite volume method**. Computational Geoscience, DOI 10.1007/s10596-015-9506-7.

ZHOU, H. T. (2008). **Operator-based Multi-scale Method for Compressible Flow**. Society of Petroleum Engineering Journal, v. 13, 267-273.

APÊNDICE A - PROVA DA PROPOSIÇÃO (5.1)

Seja A uma matriz de dimensão $m \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{km} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Seja B uma matriz de dimensão $m \times n$:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

onde $b_{ij} = 0, \forall j \in (1, \dots, n)$

Seja C o produto de A por B :

$$C = AB \quad (5.5)$$

A j -ésima coluna de C é:

$$\begin{bmatrix} a_{11}.b_{1j} + a_{12}.b_{2j} + \cdots + a_{1i}.0 + \cdots + a_{1m}.b_{mj} \\ a_{21}.b_{1j} + a_{22}.b_{2j} + \cdots + a_{2i}.0 + \cdots + a_{2m}.b_{mj} \\ \vdots \\ a_{k1}.b_{1j} + a_{k2}.b_{2j} + \cdots + a_{ki}.0 + \cdots + a_{km}.b_{mj} \\ \vdots \\ a_{m1}.b_{1j} + a_{m2}.b_{2j} + \cdots + a_{mi}.0 + \cdots + a_{mm}.b_{mj} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

A equação (5.6) mostra que a j -ésima coluna de C , e, como corolário, toda a matriz C , independe da i -ésima coluna de A .

APÊNDICE B - OPERADOR DE PROLONGAMENTO ALGEBRAIC MULTISCALE SOLVER (AMS)

Em problemas tridimensionais com o uso de esquemas MPFA, ou em esquemas TPFA prolongados para um nível superior, a matriz Wirebasket tem a seguinte forma:

$$W = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & T_{ie} & T_{iv} \\ T_{fi} & T_{ff} & T_{fe} & T_{fv} \\ T_{ei} & T_{ef} & T_{ee} & T_{ev} \\ T_{vi} & T_{vf} & T_{ve} & T_{vv} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Onde os subscritos i, f, e, v correspondem, respectivamente, aos volumes: Internos, faces, arestas e vértices.

A Matriz modificada, M , é obtida a partir do desacoplamento do problema original, ou seja, da separação do problema global em problemas locais.

O desacoplamento é feito da seguinte maneira:

- Anula-se os blocos abaixo da diagonal principal.

$$T_{fi} = T_{ei} = T_{ef} = T_{vi} = T_{vf} = T_{ve} = 0 \quad (6.2)$$

- Soma-se os termos anulados aos da diagonal principal. Essa compensação é feita para manter a conservação de massa.

$$T'_{ff}(k, k) = T_{ff}(k, k) + \sum_{c=1}^{nf} T_{fi}(k, c) \quad (6.3)$$

$$T'_{ee}(k, k) = T_{ee}(k, k) + \sum_{c=1}^{ne} T_{ei}(k, c) + \sum_{c=ne+1}^{ne+nf} T_{ef}(k, c) \quad (6.4)$$

Onde ne e nf são, respectivamente, o número de arestas e o número de faces da malha dual correspondente.

Após as modificações descritas nas equações (6.3) e (6.4), a matriz M assume a forma da equação (6.5):

$$M = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & T_{ie} & T_{iv} \\ 0 & T'_{ff} & T_{fe} & T_{fv} \\ 0 & 0 & T'_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & 0 & T'_{vv} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

O termo T'_{vv} corresponde à transmissibilidade do problema correspondente na malha grossa e o problema correspondente na malha grossa mostrado na equação (6.6):

$$Mp' = q' \quad (6.6)$$

Com isso, o sistema a ser resolvido tem a seguinte forma da equação (6.7):

$$\begin{bmatrix} T_{ii} & T_{if} & T_{ie} & T_{iv} \\ 0 & T'_{ff} & T_{fe} & T_{fv} \\ 0 & 0 & T'_{ee} & T_{ev} \\ 0 & 0 & 0 & T'_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_i \\ p'_f \\ p'_e \\ p'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q'_f \\ q'_e \\ q_v \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

A solução do problema na malha grossa, última linha do sistema de equações (6.7) tem a forma de (6.8):

$$p'_v = T'^{-1}_{vv} Rv \quad (6.8)$$

Com a manipulação da terceira linha de (6.7) obtém-se a equação (6.9):

$$p'_e = T'^{-1}_{ee} (q'_e - T_{ev} p'_v) \quad (6.9)$$

A substituição de (6.9) na segunda linha de (6.7) leva a (6.10):

$$p'_f = T'^{-1}_{ff} (q'_f - T_{fe} p'_e - T_{fv} p'_v) \quad (6.10)$$

Substituindo p'_e , obtido em (2), na equação (3), tem-se:

$$p'_f = T'^{-1}_{ff} (q'_f - T'_{fe} (T'^{-1}_{ee} (q'_e - T_{ev} p'_v)) - T_{fv} p'_v) \quad (6.11)$$

A substituição das equações (1), (2) e (3) na primeira linha do sistema acima resulta na equação (5)

$$p'_i = T'^{-1}_{ii} (q'_i - T'_{if} p'_f - T'_{ie} p'_e - T'_{iv} p'_v) \quad (6.12)$$

substituindo p'_e , obtido em (6.9), e p'_f , obtido em (6.11), na equação (6.12), tem-se:

$$p'_i = T'^{-1}_{ii} \left(q'_i - T'_{if} \left(T'^{-1}_{ff} \left(q'_f - T'_{fe} \left(T'^{-1}_{ee} (q'_e - T'_{ev} p'_v) \right) - T'_{fv} p'_v \right) \right) - T'_{iv} p'_v \right) - T'_{ie} \left(T'^{-1}_{ee} (q'_e - T'_{ev} p'_v) \right) - T'_{iv} p'_v \right) \quad (6.13)$$

A separação dos termos que multiplicam p'_v , nas equações (6.9), (6.11) e (6.13), resulta no seguinte:

$$\begin{bmatrix} p'_i \\ p'_f \\ p'_e \\ p'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'^{-1}_{ii} \cdot (T'_{if} \cdot (T'^{-1}_{ff} (T'_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} - T'_{fv})) - T'_{ie} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} - T'_{iv}) \\ T'^{-1}_{ff} (T'_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} - T'_{fv}) \\ -T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} \\ I_{vv} \end{bmatrix} p'_v \quad (6.14)$$

onde I_{vv} é a matriz identidade de dimensão $N_c \times N_c$, N_c é o número de volumes do nível superior.

Os termos restantes da equação (6.7), que multiplicam os termos fonte, são aplicados no método AMS para corrigir a posição das condições de contorno de vazão prescrita, que antes eram inseridas em volumes da malha fina e passam a ser posicionados em volumes da malha grossa. No caso do método ADM, como as regiões com termo fonte, devido ao refinamento por poços, pertencem à malha fina, essa correção é nula, assim como o considerado por Zhou (2008).

A equação (6.14) relaciona as pressões nos vértices da malha grossa com as pressões na malha fina. Com isso, o termo RHS que multiplica a pressão corresponde ao operador de prolongamento em relação ao ordenamento Wirebasket. O operador de prolongamento em relação ao ordenamento original é obtido com a equação (8).

$$P = G^T \begin{bmatrix} -T'^{-1}_{ii} \cdot (T'_{if} \cdot (T'^{-1}_{ff} (T'_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} - T'_{fv})) - T'_{ie} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} - T'_{iv}) \\ T'^{-1}_{ff} (T'_{fe} \cdot T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} - T'_{fv}) \\ -T'^{-1}_{ee} \cdot T'_{ev} \\ I_{vv} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$