Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Física

Jheniffer Janice Gonsalves

Modelo de Oscilações Críticas com Conexões de Longo Alcance

Recife

2019

Jheniffer Janice Gonsalves

Modelo de Oscilações Críticas com Conexões de Longo Alcance

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Física.

Área de concentração: Dinâmica Não-linear, Caos e Sistemas Complexos

Orientador: Mauro Copelli Lopes da Silva.

Recife

2019

Catalogação na fonte
Bibliotecária Arabelly Ascoli CRB4-2068

G639m Gonsalves, Jheniffer Janice
Modelo de oscilações críticas com conexões de longo alcance / Jheniffer Janice Gonsalves. – 2019.
78 f.: il., fig., tab.

Orientador: Mauro Copelli Lopes da Silva
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física. Recife, 2019.
Inclui referências e apêndices.

1. Dinâmica não-linear. 2. Criticalidade. 3. Avalanches neuronais. 4. Neurociência. I. Silva, Mauro Copelli Lopes da (orientador). II. Título.

515.39 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2019-67

JHENIFFER JANICE GONSALVES

MODELO DE OSCILAÇÕES CRÍTICAS COM CONEXÕES DE LONGO ALCANCE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Física.

Aprovada em: 26/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Pedro Valadão Carelli
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Antônio Carlos Roque da Silva Filho
Examinador Externo
Universidade de São Paulo

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família por serem os pilares do que eu sou, por todo o apoio que recebi ao longo dos anos. Em especial aos meus pais, João e Joanice por todo suporte, amor e atenção, sem os quais nada disso seria possível. Por me incentivarem e seguir meus sonhos, mesmo quando isso fez com que eu mudasse de cidade e me afastasse.

Agradeço ao meu orientador pelo apoio, paciência, sabedoria, pelas discussões, pelas broncas veladas (e não tão veladas assim). Aos professores Antonio Carlos Roque da Silva, Paulo R. A. Campos, Pedro Carelli e Viviane M. de Oliveira, que aceitaram fazer parte da banca e da minha formação.

Agradeço a todos meus amigos, colegas de sala e de grupo, pelos momentos de sabedoria e de descontração, mesmo aqueles que estão distantes no momento. Em especial aos meus amigos Helena e Leandro pelo apoio em momentos de crises emocionais e existenciais, por estarem presente, tanto nos momentos de alegria, quanto nos problemas ou por simplesmente me ouvirem. Enfim, agradeço à todos os amigos, cujos nomes foram omitidos, o que por incrível que pareça, foram muitos.

Ao CNPQ pelo suporte financeiro através da bolsa de mestrado.

O meu muito obrigada a todos que me acompanharam, alguns ainda acompanham, eu não teria chegado até aqui, e muito menos continuaria, sem o apoio e o carinho de vocês!

Sometimes you fall before you rise
Sometimes you lose it all to find
You've gotta keep fighting
And get back up again
My champion
Oh, my champion

You've lost so many times it hurts
But failures made are lessons learned
'Cause in the end what you are will be much more
Than you were

May this lift you up
When you feel you'll fall again
You cannot win
Hope these words are enough
For you to be strong, my friend

(Alter Bridge - My Champion [1])

RESUMO

O modelo de oscilações críticas foi proposto no âmbito do estudo de transições de fase e criticalidade em redes de neurônios. Seu principal mérito foi exibir simultaneamente correlações temporais de longo alcance e leis de potência nas distribuições de tamanho e duração de avalanches neuronais, reproduzindo diversas características de resultados experimentais. Entretanto, uma relação de escala envolvendo os expoentes de avalanches deveria ser satisfeita num ponto crítico, o que ainda não foi reportado no modelo. Esta relação de escala é reexaminada neste trabalho através de duas abordagens. A primeira consiste na modificação da definição de avalanche neuronal, substituindo o limiar na atividade global da rede, originalmente proposto, por limiares locais em cada eletrodo, ao encontro do que é feito na análise de dados experimentais. A segunda abordagem mantém a definição de avalanche inicialmente proposta para o modelo, mas altera a topologia do acoplamento entre neurônios. Ao invés da conectividade bidimensional original, conexões de longo alcance foram adicionadas, permitindo o estudo de redes de mundo pequeno e grafos aleatórios.

Palavras-chave: Criticalidade. Avalanches Neuronais. Neurociência. Transição de Fase.

ABSTRACT

The critical oscillation model was proposed in the scope of phase transitions and criticality in neuronal networks. Its main virtue was to simultaneously exhibit long-term temporal correlations and power laws in the size and duration distributions of neuronal avalanches, reproducing several features of experimental results. However, a scaling relationship concerning avalanche exponents is expected to be satisfied at a critical point, which has not yet been found in the model. This scaling relationship is reexamined in this work through two approaches. The first one is the adjustment of the definition of a neuronal avalanche, replacing the originally proposed threshold for overall network activity, by local thresholds on each electrode, following the procedure of experimental data analysis. T he second approach maintains the originally proposed avalanche definition to the model but alters the topology of neuronal coupling. Instead of the original two-dimensional connectivity, long-range connections were added, allowing for the study of small-world networks and random graphs.

Keywords: Criticality. Neuronal Avalanches. Neuroscience. Phase Transition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Dado de uma matriz de 60 eletrodos mostrando detecção de eventos através da deflexão do valor do LFP detectado por eletrodos. Extraído de [2]. 20
Figura 2 – A: *Raster plot* com os eventos detectados pela matriz de eletrodos, o eixo vertical indica o eletrodo e o eixo horizontal o tempo do evento. B: Divisão do tempo em intervalos (*bins*) de 4 ms. Definição de avalanche como atividade contida entre dois *bins* silenciosos (sem atividade). Extraído de [2]. 21
Figura 3 – Dependência do expoente de tamanho das avalanches com o *bin* escolhido. Apenas para *bins* $= \langle IEI \rangle = 4$ ms é que tem-se os expoentes de percolação direcionada (DP). Extraído de [2]. 22
Figura 4 – Gráfico log-log das flutuações $F_d(l)$ em função do tamanho das janelas l. Mostrando uma simulação de caminhada aleatória descorrelacionada (representada pelo símbolo x) juntamente com o genoma de uma região da E.coli (símbolo $\square$), ambos apresentam $\alpha = 0.51$. Enquanto que a simulação de um processo correlacionado (símbolo +) apresenta o mesmo expoente, igual à 0.61, dos locais dos receptores alfa/delta da célula T humana (símbolo $\circ$). Extraído de [3]. 23
Figura 5 – Expoentes de duração τ_T e tamanho τ das distribuições de avalanches seguem uma inclinação de ~ 1.28, assim como reportado em diversos trabalhos experimentais. Extraído de [4]. 24
Figura 6 – Dependência do expoente de tamanho das avalanches com o limiar e o *bin* escolhidos. A linha preta com círculos amarelos mostra as avalanches que possuem o mesmo expoente que MF-DP. Extraído de [5]. 25
Figura 7 – Transição de fase típica para modelos do tipo percolação direcionada, mostrada através da variação do parâmetro de ordem (densidade de sítios ativos) em função do parâmetro de controle (acoplamento probabilístico entre as unidades). A transição ocorre quando o parâmetro de controle atinge o valor crítico P_c. 27

Figura 8 – A. Rede de neurônios quadrada, de aresta L. Um neurônio i, círculo preto preenchido, pode se conectar com elementos da vizinhança quadrada de lado ℓ. O número de neurônios conectados à i depende das densidades de conexão excitatória r_e ou inibitória r_i. 3 exemplos de densidades de conexão estão exibidos nos quadrados menores, alinhados verticalmente, com valores de r_E/r_I iguais à 70%, 45% e 25%, de baixo para cima. B. O peso das sinapses depende apenas da natureza dos neurônios pré e pós sinápticos. Extraído de [6]. 28
Figura 9 – Definição de uma avalanche. O gráfico mostra a atividade da rede (número de neurônios disparando) em função do tempo. O limiar (linhas tracejada vermelha), é usado para definir o início e o final de uma avalanche. Toda vez que a atividade global da rede (linha contínua azul) cruza o limiar enquanto sobe, uma avalanche se inicia, encerrando quando a atividade cruza o limiar novamente. A área cinza representa o tamanho, e sua projeção no eixo horizontal a duração. Extraído de [7]. 31
Figura 10 – A. Espectro de frequência, transformada de Fourier da série temporal. Os picos no espectro vão se tornando mais intensos na medida em que a o balanço r_E/r_I aumenta. B. Mapa de calor da frequência característica de atividade. As setas azul, verde e vermelha, indicam a região do espaço de parâmetros em que os espectros mostrados em A foram calculados. Extraído de [7]. 32
Figura 11 – A. Intensidade do Pico do Espectro de Frequências. B. Expoente α do DFA. C. Indice κ das distribuições de tamanho de avalanches. Extraído de [7]. 33
Figura 12 – Relação entre os expoentes de DFA e o Índice κ mostra como α é maior quando $\kappa \approx 1$. Extraído de [7]. 33
Figura 13 – Duas maneiras diferentes de definir avalanches. Como a área sob a curva, indicado por s_g, que a mesma forma mostrada na fig 9. E como a área entre a curva e o limiar, indicado por s_θ. A definição de duração se mantém a mesma, como sendo o tempo que a série temporal se manteve acima do limiar. Extraído de [6]. 34
Figura 14 – Mapas de calor mostrando os valores encontrados para o índice κ, das distribuições de tamanho (A e B) e de duração (C e D). Utilizando os expoentes de DP-2D (A e C) DP-CM (B e D). Extraído de [6]. 35
Figura 15 – Região cinza mostra onde as leis de potência aparecem. Os pontos amarelos mostram que o máximo do expoente de DFA se encontra no interior da região cinza, bem como é onde a transição na intensidade do espectro de potência começa. Extraído de [6]. 36

Figura 16 – Distribuições de tamanho (A) e duração (B) de avalanches, nos três regimes. Ajuste feito considerando $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms. Reprodução própria equivalente à Fig. 5 de [6] 36
Figura 17 – Os expoentes de tamanho e duração variam continuamente com a variação dos parâmetros, incluindo expoentes reportados experimentalmente [8], e expoentes de duas classes de universalidade MF-DP e 2D-DP. Extraído de [6]. 37
Figura 18 – Relação de escala entre os expoentes de duração e tamanho de avalanche, como descrito pela equação 1.7. Os triângulos representam o lado direito, e os quadrados o lado esquerdo. Extraído de [6]. 37
Figura 19 – Representação de uma rede de tamanho $L = 30$ com duas matrizes de eletrodos de tamanhos diferentes. Em A: $L_e = 3$ e $L_p = 10$, ou seja, uma matriz de 9 eletrodos, com cada um abrangendo 100 neurônios. Em B: $L_e = 6$ e $L_p = 5$, ou seja, uma matriz de 36 eletrodos, com cada um abrangendo 25 neurônios. Como o tamanho da rede é o mesmo, alterar L_p implica em alterar L_e e vice-versa. 39
Figura 20 – Série temporal de um eletrodo, as linhas horizontais representam diferentes valores de limiar; e *Raster plot* dos eventos equivalente à série temporal, o eixo vertical representa o valor de n para Tr. As cores dos pontos correspondem às cores dos respectivos limiares, com as linhas tracejadas verticais ligando os picos aos eventos correspondentes. . . . 40
Figura 21 – Fixando uma linha do eixo vertical, pode-se ver todos os instantes de tempo que um dado eletrodo detectou um evento. Se uma coluna do eixo horizontal for fixada, enquanto se percorre todas as linhas, têm-se todos os eletrodos que detectaram um evento naquele instante de tempo. 40
Figura 22 – Entre os bins i e j é possível ver uma região cinza, onde tem-se uma avalanche de tamanho $x_{ij} = 8$, dado pela contagem de eventos em seu interior (contagem de pontos), e de duração $j - i = 4$, dado pelo número de *bins* que a compõe. Extraído de [4]. 41
Figura 23 – Figura mostrando como o parâmetro de religamento p afeta a topologia de uma rede regular em formato de anel ($p = 0$), até transformá-la em um grafo aleatório ($p = 1$). Retirada de [9] 43
Figura 24 – Figura mostrando a variação do coeficiente de aglomeração $C(p)$ e a distância média entre pares de nós $L(p)$ em função do parâmetro de religamento p. Retirada de [9] 43
Figura 25 – Exemplo de $\langle IEI \rangle$, com $r_E = 0.360$, para diferentes valores de n. A linha tracejada indica quando $\langle IEI \rangle = 1$ ms. 45
Figura 26 – Distribuições de tamanho (Fig. A) duração (Fig. B) de avalanches com limiar local, para 3 combinações distintas de parâmetros, $n_b = 1$. 46

Figura 27 – Mapas de calor mostrando os valores encontrados para $\mathcal{R}$ (razão das máximas verossimilhanças, Eq. A.4) das distribuições de tamanho (A e C) e de duração (B e D), com limiar local. Para as Figs. A e B: $L_e = 35, n_b = 1.0$. Para C e D: $L_e = 3, n_b = 7.5$ 48
Figura 28 – A. e C. Distribuições de tamanho com o espaçamento logaritmo e linear, respectivamente, entre os *bins* do histograma; B. e D. Distribuições de duração com o espaçamento logaritmo e linear, respectivamente, entre os *bins* do histograma. Limiar local, $L_e = 3$, $r_E = 0.12$ 49
Figura 29 – Matriz de adjacência para as três topologias exploradas. Conexões inibitórias em azul e excitatórias em vermelho. 51
Figura 30 – Limiar global, topologia bidimensional. A. Distribuição de tamanho das avalanches; B. Distribuição de duração; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches. 53
Figura 31 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). Mapas de cor mostrando os valores encontrados para o LLR ao comparar o ajuste de uma lei de potência truncada (em vermelho) com uma exponencial (em azul nas figuras A e B) ou com uma lognormal (em azul nas figuras C e D) A e C mostram distribuições de tamanho e B e D de duração. Considerando $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$. 54
Figura 32 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). A. Distribuição de tamanho de avalanches para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; B. Distribuição de duração para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches, com seu respectivo ajuste e expoente. 54
Figura 33 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). Influência da região de ajuste no cálculo dos expoentes das distribuições. Topologia bidimensional ($p = 0.0$), $r_E = 0.095$, $\Gamma = 0.5$ A. Distribuição de tamanho: os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. B. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de tamanho em função de s_{min}. C. Distribuição de duração, os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. D. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de duração em função de t_{min}. E. Mapa de cores para o lado direito da relação de escala (Eq. 1.7). Quando a relação entre os expoentes τ e τ_t é ~ 1.26, valor encontrado para o expoente $1/\sigma\nu z$, o mapa de cores exibe cor branca. Destaque para as combinações de s_{min} e t_{min} utilizados para os gráficos da relação de escala 55

Figura 34 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). Média de 5 realizações da relação de escala para diferentes valores de Γ, para 3 pares de limites inferiores para as distribuições. A: $s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$ ms; B $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms; C $s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$ ms. 56
Figura 35 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). A. Distribuição de tamanho de avalanches para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; B. Distribuição de duração para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches, com seu respectivo ajuste e expoente. 57
Figura 36 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). Mapas de cor mostrando os valores encontrados para LLR ao comparar o ajuste de uma lei de potência truncada (em vermelho) com uma exponencial (em azul nas Figs. A e B) ou com uma lognormal (em azul nas Figs. C e D). A e C mostram distribuições de tamanho e B e D de duração. Considerando $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms. 58
Figura 37 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). Influência da região de ajuste no cálculo dos expoentes das distribuições. $r_E = 0.070$, $\Gamma = 0.8$ A. Distribuição de tamanho: os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. B. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de tamanho em função de s_{min}. C. Distribuição de duração, os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. D. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de duração em função de t_{min}. E. Mapa de cores para o lado direito da relação de escala (Eq. 1.7). Quando a relação entre os expoentes τ e τ_t é ~ 1.23, valor encontrado para o expoente $1/\sigma\nu z$, o mapa de cores exibe cor branca. Destaque para as combinações de s_{min} e t_{min} utilizados para os gráficos da relação de escala 59
Figura 38 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). Média de 5 realizações da relação de escala para diferentes valores de Γ, para 3 pares de limites inferiores para as distribuições. A: $s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$ ms; B: $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms; C: $s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$ ms. 60
Figura 39 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). A. Distribuição de tamanho de avalanches para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; B. Distribuição de duração para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches, com seu respectivo ajuste e expoente. 61

Figura 40 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). Mapas de cor, para o grafo aleatório, mostrando os valores encotrados para o LLR ao comparar o ajuste de uma lei de potência truncada com uma exponencial (A e B) ou com uma lognormal (C e D) A e C mostram distribuições de tamanho e B e D de duração 62
Figura 41 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). Influência da região de ajuste no cálculo dos expoentes das distribuições. $r_E = 0.05$, $\Gamma = 0.2$ A. Distribuição de tamanho: os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. B. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de tamanho em função de s_{min}. C. Distribuição de duração, os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. D. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de duração em função de t_{min}. E. Mapa de cores para o lado direito da relação de escala (Eq. 1.7). Quando a relação entre os expoentes τ e τ_t é ~ 1.28, valor encontrado para o expoente $1/\sigma\nu z$, o mapa de cores exibe cor branca. Destaque para as combinações de s_{min} e t_{min} utilizados para os gráficos da relação de escala 63
Figura 42 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). Média de 5 realizações da relação de escala para diferentes valores de Γ, para 3 pares de limites inferiores para as distribuições. A: $s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$; B $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$; C $s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$. 64
Figura 43 – Relação dos expoentes críticos de duração τ_t e tamanho τ das distribuições de avalanches, para as 3 topologias: $p = 0 \rightarrow$ bidimensional; $p = 0.1 \rightarrow$ mundo pequeno; $p = 1 \rightarrow$ grafo aleatório. Para dois pares de limites inferiores ($s_{min} = 2$, $t_{min} = 2$) e ($s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$). 66
Figura 44 – Relação dos expoentes de duração e tamanho das distribuições de avalanches, para as 3 topologias: $p = 0 \rightarrow$ bidimensional; $p = 0.1 \rightarrow$ mundo pequeno; $p = 1 \rightarrow$ grafo aleatório. Para dois pares de limites inferiores ($s_{min} = 10$, $t_{min} = 4$). A linha tracejada indica a tendência linear da relação ~ 1.28 e o quadrado preto o valor dos expoentes para MF-DP. Área preenchida pela cor verde mostra os valores dos expoentes para o camundongo. Área sombreada por laranja para o rato. Círculos preenchidos indicam os expoentes para o parâmetro crítico r_Ec (0.095, 0.065, 0.050, topologias bidimensional, mundo pequeno e grafo aleatório, respectivamente) 67

Figura 45 – Comparação de 3 diferentes ajustes da mesma distribuição. Utilizando o pacote *powerlaw* e ajustando uma lei de potência pura (laranja), uma lei de potência com truncamento exponencial (vermelho), e utilizando a *pmle* (roxo) que apenas ajusta lei de potência pura. a) Os limites não foram impostos: a *NCC toolbox* calcula o ajuste para todo o conjunto de dados; o pacote *powerlaw* para uma lei de potência pura, estima o x_{min} ótimo, porém não tem limite superior; para uma lei de potência truncada, x_{max} é estimado como sendo onde começa o truncamento exponencial. b) Os limites foram impostos a mão ($x_{min} = 31$ e $x_{max} = 43000$): as linhas roxas e laranjas, apresentam expoentes relativamente próximos, com a diferença ocorrendo apenas na 4^{a} casa decimal. Ao impor um limite superior para o ajuste da lei de potência truncada, o pacote *powerlaw* vai encontrar um limite ainda menor para o ajuste, visto que ele estima onde a cauda exponencial começa, dentre o limite imposto. c) O limite inferior foi imposto em $x_{min} = 10$, e o superior foi deixado em aberto, o que significa que ambos os pacotes deveriam ajustar os dados a partir de x_{min} até o final. O que implica em os ajustes de lei de potência pura serem parecido. O que não ocorre. As curvas laranja e roxa apresentam expoentes que diferem logo na segunda casa decimal. . 76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Expoentes críticos das distribuições de duração τ_t e tamanho τ para a classe DP, para diferentes dimensões [10]. 26
Tabela 2 – Tabela com os parâmetros utilizados por Poil e colaboradores [7]. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as com fundo branco os parâmetros fixos. 30
Tabela 3 – Tabela com os parâmetros utilizados por Dalla Porta e Copelli. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as fundo branco os parâmetros fixos. 34
Tabela 4 – Tabela com os parâmetros utilizados para as simulações com limiar local. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as com fundo branco os parâmetros fixos. 45
Tabela 5 – Tabela com os parâmetros utilizados durante a análise dos dados do modelo CROS com limiar local. 47
Tabela 6 – Tabela de parâmetros utilizados nas simulações com limiar global. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as de fundo branco os parâmetros fixos. 52
Tabela 7 – Expoentes críticos das distribuições de duração τ_t e tamanho encontrados por Fontenele e colaboradores [4]. 65
Tabela 8 – Tabela com algumas das características da duas funções utilizadas para o ajuste das distribuições de avalanches [11, 12]. 75

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
1.1 CRITICALIDADE 18
1.1.1 Avalanches 19
1.1.2 Expoentes Críticos e Relação de Escala 20
1.1.3 Correlações Temporais de Longo Alcance 22
1.1.4 Variabilidade em Resultados Experimentais 24
1.2 MODELOS 25
1.2.1 Percolação Direcionada 26

2 O MODELO DE OSCILAÇÕES CRÍTICAS - CROS 28
2.1 TOPOLOGIA E DINÂMICA DO MODELO 28
2.2 RESULTADOS ANTERIORES 30
2.2.1 Avalanches Neuronais e Correlação Temporal de Longo Alcance . . 30
2.2.2 Expoentes Variam Continuamente 33

3 MODIFICAÇÕES DO MODELO 38
3.1 LIMIAR LOCAL 38
3.2 CONEXÕES DE LONGO ALCANCE COM LIMIAR GLOBAL 41

4 RESULTADOS 44
4.1 LIMIAR LOCAL 44
4.1.1 Distribuições de Avalanches e a Ausência de Leis de Potência . . . 46
4.2 CONEXÕES DE LONGO ALCANCE COM LIMIAR GLOBAL 49
4.2.1 Bidimensional Quadrada 52
4.2.2 Mundo Pequeno 57
4.2.3 Grafo Aleatório 61
4.2.4 Expoentes Variam Continuamente 64

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 68

REFERÊNCIAS 70

APÊNDICE A – PACOTES DE AJUSTE E TESTES ESTATÍSTICOS 74

1 INTRODUÇÃO

O cérebro é um sistema complexo composto de bilhões de células. Destas bilhões de células um tipo celular se destaca, os neurônios. Os neurônios são considerados a unidade morfofuncional do cérebro, sendo células altamente especializada em gerar e propagar sinais elétricos [13]. Há uma grande variedade de tipos de neurônios, bem como diversas maneiras de catalogá-los, seja devido a morfologia, função, biofísica, localização no tecido cerebral. As características biofísicas dos neurônios permitem que esses tipos de células sejam capazes de gerar alterações rápidas do potencial de membrana produzindo os chamado potencial de ação (PA). O PA é gerado em uma parte especializada do corpo celular do neurônio e propagado através do seu axônio até que chegue ao próximo neurônio. A comunicação entre dois neurônios ocorre através de uma zona chamada de sinapse. Através da sinapse é possível a transmissão de sinais elétricos (sinapse elétrica) ou químicos (sinapse química) [13].

Quando se tem uma população de neurônios interagindo, pode emergir um padrão de atividade em forma de oscilações, propagação de ondas, sincronização, etc. Através destes padrões é possível conferir fases ao sistema. Tais fases podem ser classificadas e interpretadas de diversas formas, como ordem/desordem, sincronizado/dessincronizado, ativo/oscilatório.

Dada a existência de duas ou mais fases do sistema, sejam elas quais forem, existe uma transição de uma fase para outra. As transições de fases podem ser caracterizadas através do parâmetro de ordem (ou análogos) do sistema. Parâmetros de ordem são grandezas que possuem valor nulo em uma fase e valor não-nulo em outra (como a magnetização para sistemas magnéticos). A maneira como o parâmetro de ordem muda classifica a transição como sendo contínua ou não. O ponto no espaço de parâmetros do sistema onde o parâmetro de ordem começa a ser modificado é conhecido como ponto crítico do sistema. Este ponto possui uma série de características peculiares que levaram à conjectura de que o cérebro opera próximo à uma transição de fase, ou seja de que o cérebro é um sistema crítico [14, 15, 16, 17, 18]

Se o cérebro opera no regime crítico, ou próximo dele, qual é a transição de fase em questão? Diversos trabalhos exploraram tal questão, [2, 4, 19]. Muitos deles utilizando modelos de neurônios e de redes de neurônios, alguns analíticos outros numéricos, para tentar entender e reproduzir comportamentos detectados experimentalmente. Desde o trabalho de Beggs e Plenz [2], por muitos anos se acreditou que o tipo de modelo mais adequado apresenta a transição de um estado quiescente para um estado ativo. Entretanto, sabe-se que o cérebro sempre apresenta atividade elétrica, ou seja, mesmo na ausência de qualquer estímulo, o cérebro nunca está em silêncio. A criticalidade não está presente

apenas neste tipo de transição e apesar dos diversos resultados que estudos sobre esta classe de modelo trouxe, algumas alternativas surgiram [20, 7]. Muitos dos comportamentos encontrados na atividade cerebral possuem caráter oscilatório, logo, transições envolvendo oscilações passaram a ser uma alternativa.

Este trabalho se dedica ao estudo da criticalidade de um modelo que possui duas fases principais: i) o estado ativo, em que a rede sempre apresenta atividade, por menor que seja; ii) estado oscilatório, que possui uma frequência característica. Para tal, nas seções seguintes é apresentado uma breve discussão sobre criticalidade na neurociência, seguida por uma seção sobre modelos. No segundo capítulo tem-se a introdução do modelo de Oscilações Críticas (CROS), juntamente de uma revisão na literatura do mesmo. O capítulo 3 traz as modificações implementadas, modificações estas que trouxeram os resultados apresentados no capítulo 4.

1.1 CRITICALIDADE

Há diversas nuances na definição de criticalidade e ponto crítico [18] e há um certo consenso de que criticalidade se refere à situação intermediária entre ordem e desordem, um ponto de transição contínua entre uma fase e outra do sistema. Sistemas operantes num regime crítico ou próximo à criticalidade apresentam características peculiares. Dentre elas destaca-se a ausência de um tamanho característico de atividade, o que impossibilita a caracterização do sistema por um fator de escala. Isto implica a existência de flutuações de todas as ordens de grandeza afetando a dinâmica do sistema. Como exemplo das vantagens que um sistema biológico teria por estar sintonizado perto da criticalidade, mostrou-se que estes sistemas são sensíveis a uma faixa maior de estímulos [21].

Como são sistemas estocásticos, tais sistemas são descritos por distribuições de probabilidade ligadas às suas grandezas. A mais notória forma de distribuição que é livre de escala são as leis de potência. Ao reescalar uma variável por uma constante multiplicativa, a sua densidade de probabilidade mantém a mesma forma, uma característica de sistemas governados por distribuições de probabilidade em forma de leis de potência. Supondo

$$P(x) = Ax^{-\alpha} \,, \tag{1.1}$$

onde $P(x)$ é a distribuição densidade de probablidade, A é uma constante e x uma grandeza do sistema, então

$$P(\Lambda x) = A(\Lambda x)^{-\alpha} \,, \tag{1.2}$$

$$= \Lambda^{-\alpha} P(x) \,, \tag{1.3}$$

$$\frac{P(\Lambda x)}{P(x)} = \Lambda^{-\alpha} \,,$$

o que caracteriza um sistema como invariante por escala. Logo, distribuições de probabilidade seguindo leis de potência são condições necessárias, mas não suficientes para um regime ser dito crítico [22].

Sethna e colaboradores [23] citam uma analogia com o comportamento de um fluido, que microscopicamente possui um comportamento complicado, com moléculas se chocando e criando um comportamento caótico. Entretanto, em escalas de tempo e tamanho maiores podem ser descritos pela equação de Navier-Stokes, que depende apenas da densidade e da viscosidade do fluido. Ou seja, as flutuações microscópicas desaparecem para grandes escalas. Isso não acontece em sistemas governados por leis de potência, pois são invariantes por escala.

Para descrever completamente uma lei de potência basta saber o valor do expoente α. Segundo a teoria do grupo de renormalização, leis de potência com o mesmo expoente pertencem à mesma classe de universalidade, consequentemente cria-se uma equivalência entre diferentes processos que independe dos mecanismos intrínsecos de cada um, sejam eles microscópicos ou macroscópicos. Sabendo que dois modelos pertencem à mesma classe de universalidade é possível explorar o modelo mais simples para entender o funcionamento do modelo mais complexo, mesmo que estes em princípio sejam diferentes. O que também serve como justificativa para a comparação de simulações computacionais de modelos simplificados com resultados experimentais [23].

1.1.1 Avalanches

Beggs e Plenz [2] definiram o conceito de avalanches neuronais através de dados de LFP (*Local Field Potential*) em culturas de neurônios, onde grandes deflexões negativas foram identificadas e consideradas como um evento, como os picos observados na Fig. 1. Tais picos estão associados com a passagem sincronizada de muitas correntes sinápticas, o que pode indicar a geração de um (ou mais) potencial de ação. Ou seja, há uma correlação de tais picos de LFP com os disparos (*spikes*) dos neurônios[24].

Os eventos detectados por cada eletrodo são então agrupados e podem ser vistos através de um *raster plot*, gráfico que mostra a ocorrência de eventos no tempo, como o gráfico da Fig. 2. Uma avalanche é então definida como a atividade contida entre dois *bins* silenciosos, que não tiveram atividade nenhuma. A duração da avalanche é a quantidade de *bins* contidos entre os dois *bins* vazios e o tamanho é o número de eventos detectados naquele intervalo de tempo. Beggs e Plenz [2] mostraram que as distribuições de tamanho e duração das avalanches, seguem leis de potência, com expoentes iguais a 1.5 e 2, respectivamente.

Estes expoentes coincidem com os da classe de universalidade de percolação direcionada de campo médio (MF-DP, do inglês *Mean-Field Directed Percolation*). Esta coincidência levou subsequentemente à busca de tais expoentes nas distribuições, causando

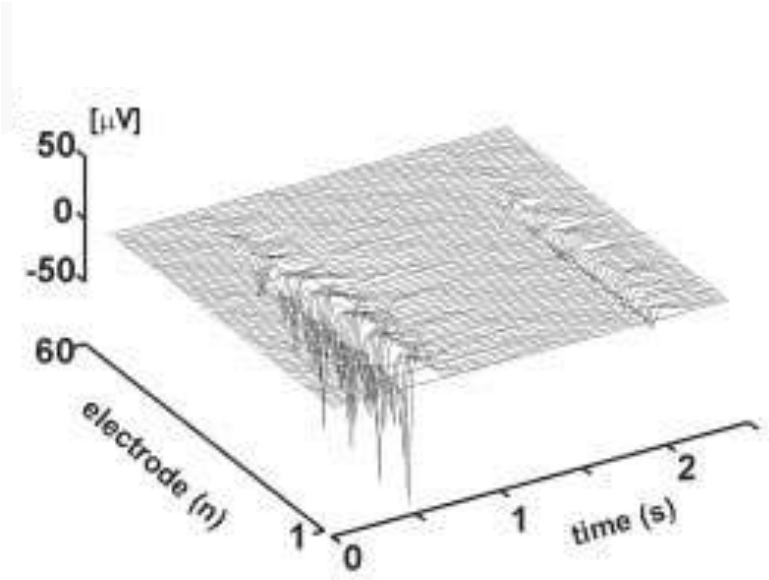

Figura 1 – Dado de uma matriz de 60 eletrodos mostrando detecção de eventos através da deflexão do valor do LFP detectado por eletrodos. Extraído de [2].

um viés na análise de dados de avalanches neuronais. Contudo, a robustez do valor dos expoentes obtidos por Beggs e Plenz é relativa, pois há uma dependência entre o valor do expoente e o tamanho do *bin* utilizado [2], como mostrado na Fig. 3. Este não é o único trabalho que mostra a variabilidade dos expoentes, e este assunto será abordado em mais detalhes nas seções 1.1.4 e 2.2.2

O expoente de tamanho de avalanches da classe MF-DP é encontrado apenas quando os autores utilizam como *bin* o tempo médio entre eventos (*IEI - Inter Events Interval*). O uso do $\langle IEI \rangle$ é justificado por este ser considerado uma propriedade intrínseca do sistema, um tempo característico, que emerge da própria dinâmica em questão. Evitando portanto *bins* excessivamente pequenos (que favorecem avalanches pequenas) e *bins* excessivamente grandes (que favorecem avalanches grandes). A não ser por esta justificativa, esta escolha de *bin* é arbitrária. Além disso, com o avanço de pesquisas na área, sabe-se que o ajuste de leis de potência é extremamente sensível aos parâmetros escolhidos [25] e a escolha entre diferentes ajustes nem sempre é trivial.

1.1.2 Expoentes Críticos e Relação de Escala

Expoentes críticos descrevem o comportamento físico de sistemas próximos à criticalidade. Costumam depender apenas da classe de universalidade em que estão contidos e da dimensionalidade do sistema. A teoria do grupo de renormalização prevê que no limite termodinâmico sistemas contidos em uma mesma classe vão possuir os mesmos expoentes.

Na estatística de avalanches os expoentes críticos de interesse estão relacionados às

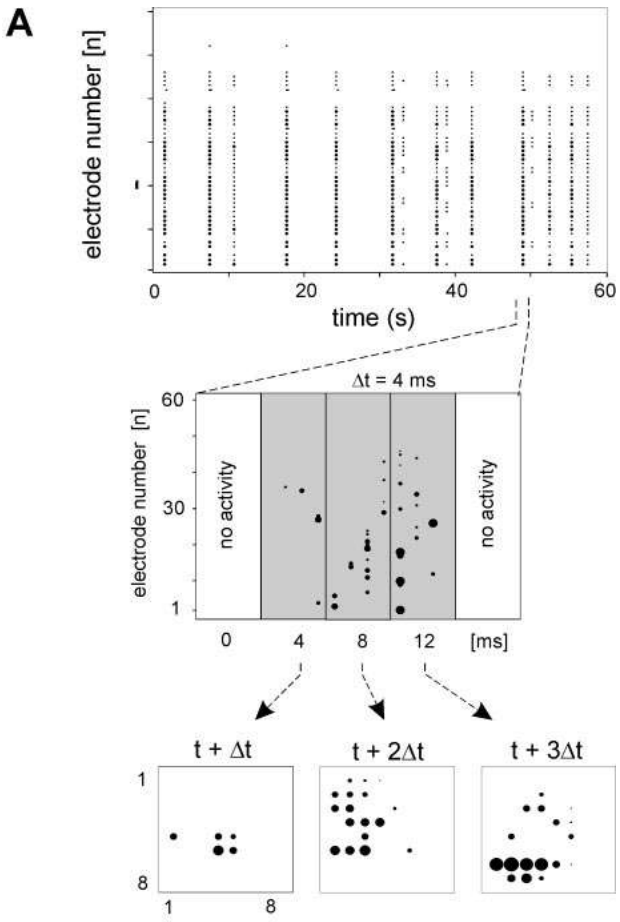

Figura 2 – A: *Raster plot* com os eventos detectados pela matriz de eletrodos, o eixo vertical indica o eletrodo e o eixo horizontal o tempo do evento. B: Divisão do tempo em intervalos (*bins*) de 4 ms. Definição de avalanche como atividade contida entre dois *bins* silenciosos (sem atividade). Extraído de [2].

distribuições de tamanho e duração:

$$P(S) \sim S^{-\tau} \,, \tag{1.4}$$

$$P(T) \sim T^{-\tau_t} \,, \tag{1.5}$$

$$\langle S \rangle (T) \sim T^{1/\sigma\nu z} \,. \tag{1.6}$$

A Eq. 1.4 relaciona o expoente τ à distribuição de probabilidade de tamanho S; a Eq. 1.5 relaciona o expoente τ_t à distribuição de duração T; e por fim a Eq. 1.6 relaciona o conjunto de expoentes $1/\sigma\nu z$ ao tamanho médio das avalanches em função de suas respectivas durações. No estudo de avalanches σ, ν, z são tratados como um único expoente e poderia ser tratado por uma única letra, suponha β. Entretanto, por estar relacionado aos expoentes termodinâmicos, a notação (σ, ν, z) será mantida.

Baseado nos cálculos propostos por Sethna e colaboradores (2001), Friedman *et al.*

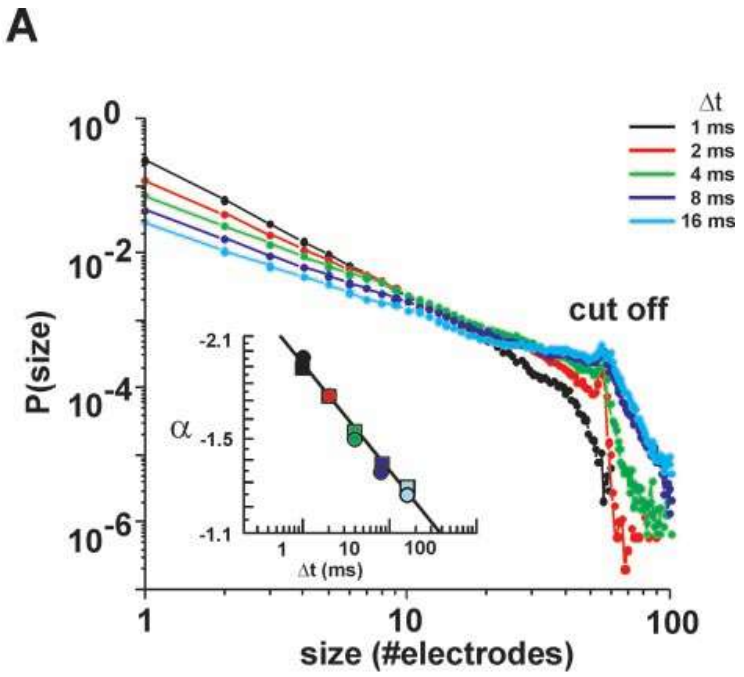

Figura 3 – Dependência do expoente de tamanho das avalanches com o *bin* escolhido. Apenas para *bins* $= \langle IEI \rangle = 4$ ms é que tem-se os expoentes de percolação direcionada (DP). Extraído de [2].

(2012) estabeleceram que no ponto crítico existe uma relação de escala, para os expoentes acima, que deve ser obedecida:

$$\frac{1}{\sigma\nu z} = \frac{\tau_t - 1}{\tau - 1} \,. \tag{1.7}$$

Através de simulações do modelo proposto por Brunel [20], Touboul e Destexhe (2017) mostraram que as leis de potência 1.4, 1.5 e 1.6 podem surgir longe da criticalidade como um efeito do caos de Boltzmann, presente em sistemas grandes. Porém, aparentemente, a relação de escala dada pela Eq. 1.7 apenas é obedecida no ponto crítico. O que a torna como uma condição necessária e suficiente para que um modelo seja classificado como crítico.

1.1.3 Correlações Temporais de Longo Alcance

Num ponto crítico espera-se que tanto o comprimento característico de correlações espaciais como o tempo característico de correlações temporais divirjam. Uma das assinaturas de criticalidade que emergiram na literatura foi a presença de correlações temporais de longo alcance (LRTC, do inglês *Long-Range Temporal Correlations*) [27]. Uma série com LRTC indica que eventos futuros possuem memória de eventos passados, ou seja eventos futuros dependem do que já aconteceu [28]. Enquanto leis de potência ocorrem em escalas de tempo menores (da ordem de ms), LRTCs estão na escala de tempo de segundos, algumas vezes até mesmo horas. Ambas são indícios independentes de criticalidade.

Uma das principais ferramentas matemáticas utilizadas para quantificar correlações em séries não estacionárias é a análise de flutuação destendênciada (DFA, do inglês Detrended Fluctuation Analysis), proposto por Peng e colaboradores [3]. A técnica consiste em dividir a série temporal em intervalos de tempo, e a flutuação média com respeito a um ajuste linear dos dados por intervalos é calculada. Ao variar o tamanho do intervalo e repetir o processo diversas vezes, tem-se como resultado a flutuação do sinal em função do tamanho dos intervalos em que a série temporal foi dividida. Se esta relação seguir uma lei de potência com expoente α, como mostrado na Fig. 4, pode-se associar este comportamento a uma autocorrelação do sinal que também decai como uma lei de potência, $C(t) \sim t^{-\gamma}$, onde $\gamma = 2 - 2\alpha$ e a um decaimento tipo lei de potência para o espectro de potência, $S(f) \sim f^{-\beta}$, com $\beta = 1 - \gamma = 2\alpha - 1$. O expoente α caracteriza a correlação temporal da rede. Para uma caminhada aleatória descorrelacionada, $\alpha \approx 0.5$, expoente que representa o ruído branco, logo, descorrelação. Para o ruído $1/f$, com correlações temporais fortes, o α se aproxima de 1.

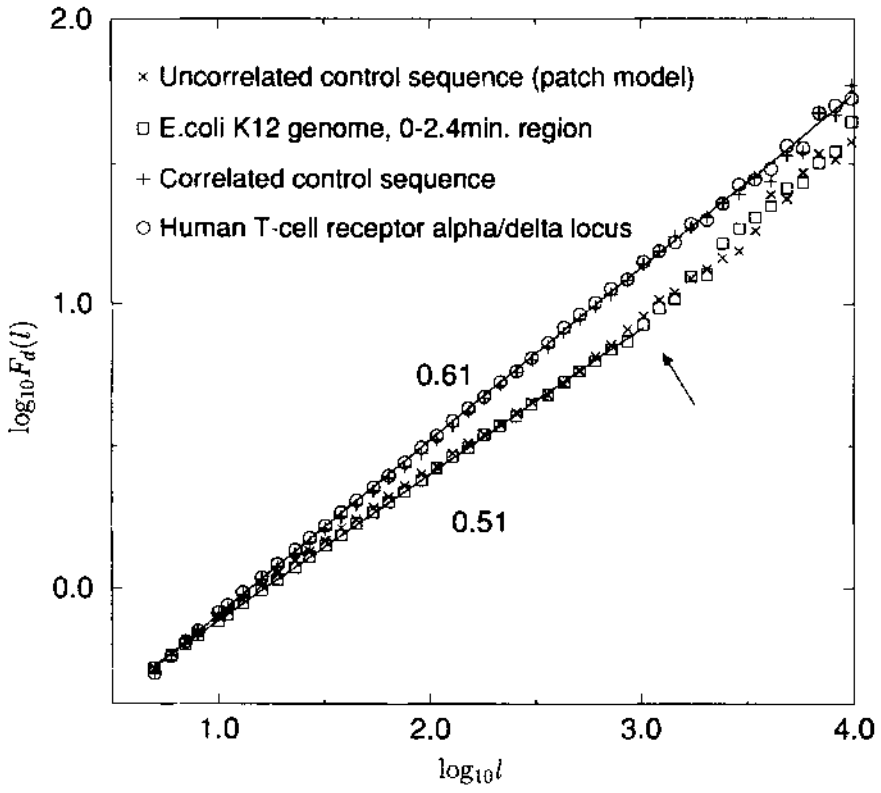

Figura 4 – Gráfico log-log das flutuações $F_d(l)$ em função do tamanho das janelas l. Mostrando uma simulação de caminhada aleatória descorrelacionada (representada pelo símbolo x) juntamente com o genoma de uma região da E.coli (símbolo □), ambos apresentam $\alpha = 0.51$. Enquanto que a simulação de um processo correlacionado (símbolo +) apresenta o mesmo expoente, igual à 0.61, dos locais dos receptores alfa/delta da célula T humana (símbolo ○). Extraído de [3].

Desde então uma série de trabalhos tem identificado a presença de LRTC em sinais neurais, muitas vezes associados a avalanches com distribuição de probabilidade (tamanho e duração) seguindo leis de potência [27, 29, 8, 5, 4].

1.1.4 Variabilidade em Resultados Experimentais

Trabalhos mais recentes mostram que leis de potência não são suficientes para indicar criticalidade, pois foram encontradas fora de uma região de transição. Além disso, trabalhos experimentais reportam que os expoentes de tamanho e de duração de avalanches variam continuamente próximo à região de transição [26, 7, 30]. Tal comportamento foi resumido e agrupado na Fig. 5 por Fontenele e colaboradores [4], mostrando resultados de diferentes experimentos no plano (τ, τ_t). Apesar de a única relação existente entre os experimentos ser o fato de que todos são medidas no córtex cerebral, os expoentes seguem uma tendência linear similar, com inclinação ~ 1.28, sejam eles medidas feitas em fatias do córtex de ratos [26], em camundongos com livre comportamento [31], macacos [32] e ratos anestesiados [4], ou ainda no córtex *ex vivo* da tartaruga [30]. Entretanto, os expoentes para MF-DP estão fora dessa tendência.

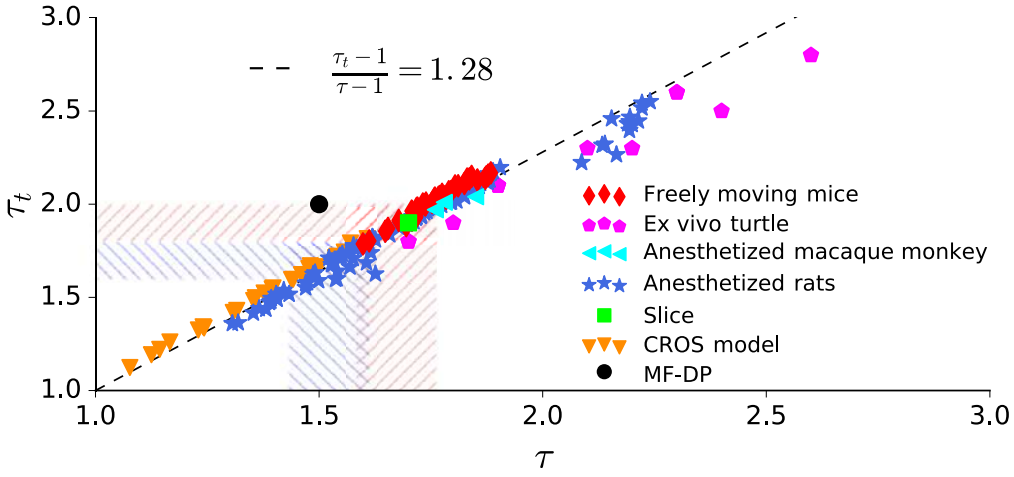

Figura 5 – Expoentes de duração τ_T e tamanho τ das distribuições de avalanches seguem uma inclinação de ~ 1.28, assim como reportado em diversos trabalhos experimentais. Extraído de [4].

Além da variabilidade observada entre diferentes experimentos, mesmo para um único *setup* experimental há uma dependência dos valores dos expoentes em relação ao limiar que define um evento binário. Tal dependência é análoga à reportada por Beggs e Plenz 2003 com relação ao tamanho do *bin* utilizado na definição de avalanche (Fig. 3). Um estudo detalhado da dependência do expoente de tamanho de avalanche em relação ao *bin* e ao limiar foi feito por Zhigalov e colaboradores no estudo de dados de magneto encefalografia em humanos [5], conforme mostrado na Fig. 6. Considerando que ambos os parâmetros são arbitrários, é necessário ter cautela ao classificar os modelos nas classes

de universalidade. O ideal seria encontrar algum critério que permitisse decidir entre as diferentes escolhas de parâmetros.

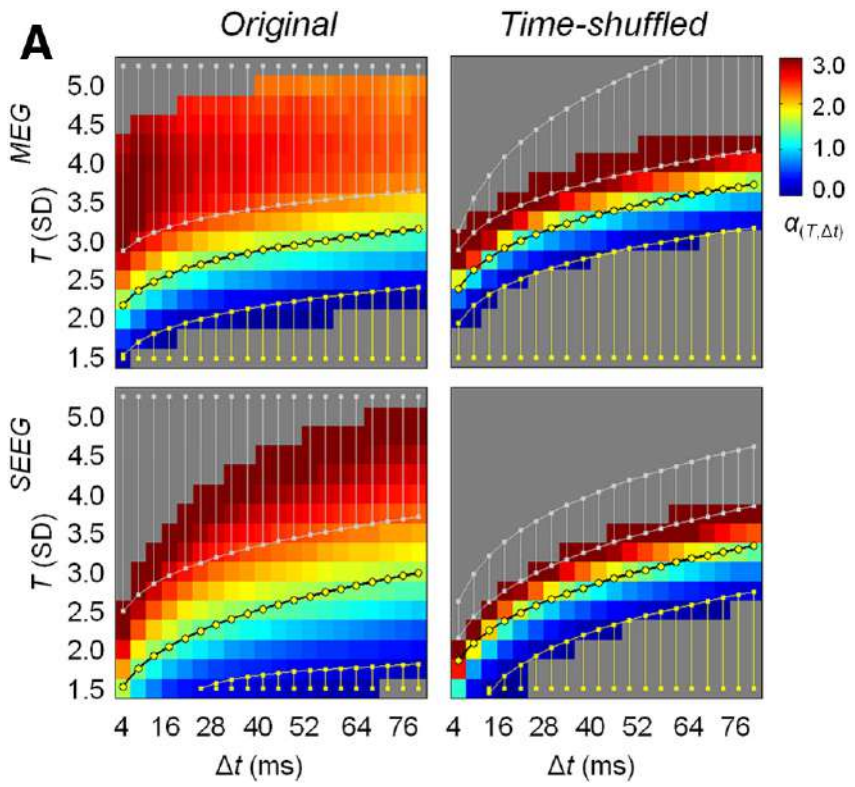

Figura 6 – Dependência do expoente de tamanho das avalanches com o limiar e o *bin* escolhidos. A linha preta com círculos amarelos mostra as avalanches que possuem o mesmo expoente que MF-DP. Extraído de [5].

1.2 MODELOS

Quando o assunto são modelos utilizados em neurociência, tem-se basicamente uma divisão em duas abordagens, modelos de neurônios isolados e modelos de redes de neurônios. Modelos do primeiro tipo, que tem como exemplar o modelo de Hodgkin-Huxley - HH [33], se preocupam em descrever o comportamento de um neurônio individualmente. No caso do HH, por exemplo, o potencial de membrana e as condutâncias dos canais de sódio e potássio são modeladas através de 4 equações diferenciais acopladas, o que torna o modelo custoso computacionalmente. É possível acoplar neurônios de Hodgkin-Huxley em rede, entretanto o alto custo computacional é um limitador sério do número de neurônios que é factível simular.

Para o estudo de avalanches é necessário redes de tamanhos muito grandes. Neste caso, modelos de neurônios mais simples e mais eficientes costumam ser utilizados, podendo ser um modelo extremamente simples, como o autômato celular [21], até modelos como o

de Izhikevich [34], que pode exibir uma dinâmica tão rica quanto o HH, porém tem um custo computacional muito menor.

1.2.1 Percolação Direcionada

Devido aos valores de expoentes ($\tau_t = -2$ e $\tau = -3/2$) encontrados em diversos trabalhos experimentais [2, 35, 36], por muito tempo assumiu-se que o modelo mais indicado para estudar avalanches neuronais deveria pertencer à classe dos modelos de percolação direcionada de campo médio (MF-DP). Apesar do seu sucesso em diversos aspectos, como ao prever que a faixa dinâmica, grandeza relacionada à resposta da rede ao estímulo recebido, é maior no ponto crítico [21, 30], tais modelos apresentam um problema. A transição de fase neste tipo de modelo é do estado quiescente para o estado ativo. Isto está mostrado na Fig. 7, que traz a transição típica do parâmetro de ordem (densidade de sítios ativos) como função do parâmetro de controle (acoplamento probabilístico entre as unidades). Usualmente em modelos de neurônios o parâmetro de ordem representa a taxa média de disparos, o que significa que, abaixo do ponto crítico, o ponto fixo do sistema é o estado absorvente, que não possui atividade nenhuma. Este regime é muito difícil de reconciliar com um cérebro real, visto que mesmo na ausência de estímulo este não se encontra desprovido de atividade. Além disso, para o sistema sair do estado absorvente, é necessário um estímulo externo, o que teoricamente causaria a perda das correlações temporais de longo alcance, visto que não há memória do estado anterior. Os expoentes críticos de uma dada classe de universalidade dependem da dimensão do modelo, apenas para altas dimensões é que possuem os expoentes de campo médio (MF - do inglês *Mean Field*). O que é considerado altas dimensões também varia de acordo com o modelo. Para o caso da percolação direcionada a maior dimensão é 4 (dimensão crítica superior), acima disso, a aproximação de campo médio se aplica. Na tabela 1 é possível ver os expoentes de tamanho e duração para todas as dimensionalidades de DP.

Expoente	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d \geqslant 4$ (MF)
τ	1.108	1.268	1.395	3/2
τ_t	1.159	1.450	1.739	2

Tabela 1 – Expoentes críticos das distribuições de duração τ_t e tamanho τ para a classe DP, para diferentes dimensões [10].

Algumas alternativas de modelos intermediários entre as equações diferenciais não-lineares de HH e os elementos binários da classe DP (como o automato celular por exemplo), são os modelos criados a partir de neurônios do tipo integra-e-dispara, referenciados pela sigla IF (do inglês *Integrate-and-Fire*). Esta classe de modelo não se preocupa com a natureza do potencial de ação, logo é um modelo de neurônio simplificado e pouco custoso computacionalmente, se comparados com modelos como o de Hodgkin-Huxley. Um bom

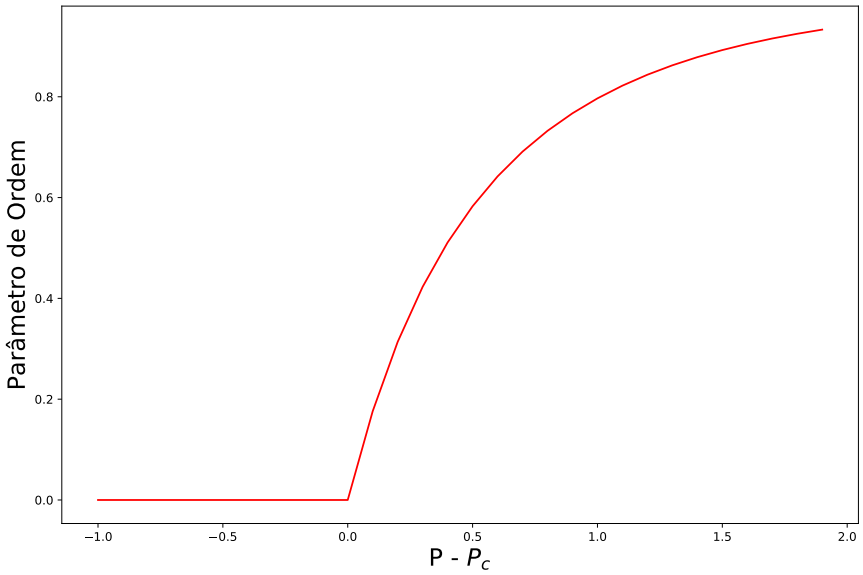

Figura 7 – Transição de fase típica para modelos do tipo percolação direcionada, mostrada através da variação do parâmetro de ordem (densidade de sítios ativos) em função do parâmetro de controle (acoplamento probabilístico entre as unidades). A transição ocorre quando o parâmetro de controle atinge o valor crítico P_c.

exemplo de modelos da classe IF, é o modelo de Izhikevich [34], que apesar da sua simplicidade com relação ao HH, apresenta uma dinâmica tão rica quanto, porém a um custo muito menor. Sumariamente, em modelos do tipo IF, o neurônio pós-sináptico integra a corrente recebida de todos os seus vizinhos e ao atingir um limiar pré-definido o potencial de ação ocorre. O modelo abordado neste trabalho é uma adaptação de neurônios do tipo IF. Ao invés da corrente recebida ser integrada para ultrapassar o limiar, no modelo de oscilações críticas (CROS, do inglês *Critical Oscillations*) ela é integrada para compor a probabilidade de disparo, tornando o modelo uma espécie de integra-e-dispara probabilístico. Apesar de não ser um modelo simples, e estar implementado em uma topologia bidimensional específica, o modelo CROS parece ser uma boa alternativa para o ajuste de dados experimentais [7], como será visto no próximo capítulo.

2 O MODELO DE OSCILAÇÕES CRÍTICAS - CROS

2.1 TOPOLOGIA E DINÂMICA DO MODELO

O modelo CROS (*CRitical OScillations*), proposto por Poil e colaboradores [7], é um modelo de rede de neurônios, que pode ser dividido em duas partes. A topologia da rede, que considera a forma como seus elementos estão organizados e como eles se conectam; e a dinâmica de cada elemento, sendo esta responsável por modelar a atividade individual de cada neurônio.

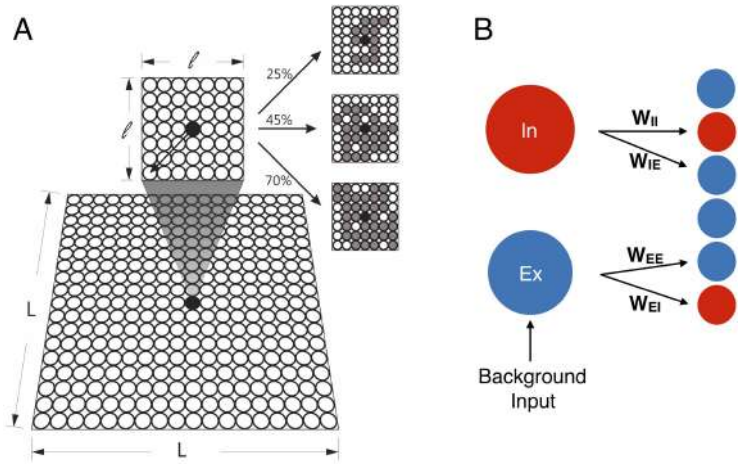

Figura 8 – A. Rede de neurônios quadrada, de aresta L. Um neurônio i, círculo preto preenchido, pode se conectar com elementos da vizinhança quadrada de lado ℓ. O número de neurônios conectados à i depende das densidades de conexão excitatória r_e ou inibitória r_i. 3 exemplos de densidades de conexão estão exibidos nos quadrados menores, alinhados verticalmente, com valores de r_E/r_I iguais à 70%, 45% e 25%, de baixo para cima. B. O peso das sinapses depende apenas da natureza dos neurônios pré e pós sinápticos. Extraído de [6].

Os neurônios são organizados em uma rede bidimensional quadrada de aresta L (Fig. 8), com condições de contorno abertas. Dos neurônios que compõem a rede, 75% são excitatórios e 25% inibitórios. Tal proporção é comumente utilizada em trabalhos teóricos e/ou computacionais que simulam o córtex cerebral, visto que dados experimentais do córtex cerebral de mamíferos reportam uma proporção média de 70% a 80% de neurônios excitatórios e 20% a 30% inibitórios [37].

Cada elemento possui uma conectividade local, limitada a uma vizinhança quadrada de aresta ℓ, centrada no próprio elemento. Desta forma o número máximo possível (N_c) de conexões por neurônio é igual à quantidade de elementos contidos na vizinha quadrada:

$$N_c = \ell^2 - 1 \, . \tag{2.1}$$

Um neurônio não pode se conectar consigo mesmo, logo, se torna necessário a sua exclusão da própria vizinhança, por essa razão o termo -1 aparece. Devido às condições de contorno abertas, os neurônios da borda da rede possuem menos conexões do que os centrais, então a equação 2.1 não se aplica para elementos de borda.

A existência ou não de uma sinapse conectando um par de neurônios é definida probabilisticamente no início da simulação, sendo que a probabilidade P de conexão decai exponencialmente com a distância r entre os neurônios:

$$P = \frac{Ce^{-r}}{\sum_r e^{-r}} \,, \tag{2.2a}$$

onde

$$C = \begin{cases} N_c r_e, & \text{Excitatório} \\ N_c r_i, & \text{Inibitório} \end{cases} \tag{2.2b}$$

é uma constante de normalização que depende da natureza do neurônio. Os parâmetros r_E e r_I são densidades de conectividade relacionadas à natureza do neurônio, tal que $\sum P = r_E(r_I)$ para os excitatórios(inibitórios), onde a soma é feita sob os neurônios pós-sinápticos conectados ao pré-sináptico, que são os principais parâmetros de controle do modelo.

Com relação à modelagem da dinâmica da rede, o neurônio pós-sináptico integra uma porcentagem do sinal recebido por cada vizinho que disparou no tempo anterior. Esta porcentagem depende do peso de conexão, W_{ij}, que por sua vez depende da natureza dos neurônios i e j, pré e pós-sinápticos, respectivamente. A corrente integrada possui um decaimento exponencial no tempo:

$$I_i(t + dt) = I_i(t) + \sum_j W_{ij} S_j(t) \,, \tag{2.3a}$$

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \frac{I_0 - I_i(t)}{\tau_I} \,. \tag{2.3b}$$

Nas equações 2.3, $S_j(t) = 1$ se o neurônio j disparou no tempo t e 0, caso contrário. O peso sináptico é um parâmetro fixado em $W_{EE} = 0.02$, $W_{EI} = -2$, $W_{IE} = 0.011$ e $W_{II} = -2$. O tempo característico de decaimento da corrente ($\tau_I = 9$ ms) e a corrente inicial em cada elemento ($I_0 = 0$) são fixos e independem da natureza do neurônio. A corrente integrada é então utilizada para, através da variável R_{S_i} computar a probabilidade de disparo $P_{S_i}(t)$ do neurônio i no tempo t, de modo que

$$R_{S_i}(t + dt) = R_{S_i}(t) + I_i(t + dt) \,, \tag{2.4a}$$

$$\frac{dR_{S_i}(t)}{dt} = \frac{P_0 - R_{S_i}(t)}{\tau_P} \,, \tag{2.4b}$$

$$P_S(t) = \begin{cases} R_{S_I}(t) \times \Theta(R_{S_I}), & \text{se} \quad R_{S_I} < 1 \\ 1, & \text{se} \quad R_{S_I} \geqslant 1 \end{cases} \,, \tag{2.4c}$$

onde $\Theta(R_{S_I})$ é a função de Heaviside. A introdução da função de Heaviside é uma contribuição de Dalla Porta e Copelli para evitar as probabilidades negativas que antes existiam. Os tempos característicos, juntamente com a probabilidade inicial de disparo, foram previamente fixados em τ_P(excitatório)= 6 ms, τ_P(inibitório)= 12 ms, juntamente com a probabilidade inicial de disparo, P_0(excitatório)= 10^{-6}, P_0(inibitório)= 0. Neurônios possuem períodos refratários variáveis, numa escala de tempo maior que a duração do potencial de ação, o que os impedem de disparar duas vezes consecutivas em intervalos muito curtos(da ordem de ms) [13]. Para modelar tal comportamento, após o disparo R_{S_i} é redefinida para R_r(excitatório)= -2 e R_r(inibitório)= -20.

Todas as simulações são iniciadas com 10% dos elementos da rede disparando. Tais elementos são escolhidos aleatoriamente.

2.2 RESULTADOS ANTERIORES

2.2.1 Avalanches Neuronais e Correlação Temporal de Longo Alcance

Ao propor o modelo, Poil et al. [7] ressaltam que tanto avalanches neuronais quanto oscilações são dependentes de um balanço entre excitação e inibição, portanto é plausível relacionar ambas características (avalanches e oscilação). Para investigar tal aspecto, os autores simularam durante 1000 s, com um passo de tempo de 1 ms, 5 redes para cada combinação de parâmetros. Sendo que os parâmetros de controle do modelo foram as densidades de conectividade excitatória (r_E) e inibitória (r_I). Para limitar a quantidade de parâmetros livres os demais foram mantido fixos. Os parâmetros simulados estão mostrados na tabela abaixo:

Parâmetros dos Neurônios

	Excitatórios (E)	Inibitórios (I)
$r_$	$[0.1, 0.7]$	$[0.3, 0.9]$
τ_P	6 ms	12 ms
τ_I	9 ms	9 ms
I_0	0	0
P_0	10^{-6} ms	0
$W_{E_}$	0.02	-2
$W_{I_}$	0.011	-2

Parâmetros da Rede	
$L = 50$	$\ell = 7$
$t = 1000$ s	$dt = 1$ ms

Tabela 2 – Tabela com os parâmetros utilizados por Poil e colaboradores [7]. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as com fundo branco os parâmetros fixos.

A rede simulada apresenta desordem, pois a escolha da natureza do neurônio se

dá de maneira aleatória, respeitando a proporção de 75% neurônios excitatórios e 25% inibitórios. Além disso, para uma mesma combinação de valores de r_E e r_I, diferentes realizações da rede poderão ter diferentes pares de neurônios conectados, dependendo do sorteio feito inicialmente.

Para certas combinações de parâmetros, a rede não apresenta silêncio, ou seja, não é possível utilizar a definição de avalanches proposta por Beggs e Plenz [2] e descrita na seção 1.1.1. Então os autores utilizaram uma definição modificada de avalanche. Um limiar de atividade global da rede (número de neurônios disparando) é escolhido, e sempre que a atividade está acima deste limiar tem-se uma avalanche, como mostrando na Fig. 9. Sua duração é definida pelo intervalo de tempo T que a atividade se manteve acima do limiar. Seu tamanho S é dado pelo número de neurônios que dispararam nesse intervalo de tempo. Os autores utilizaram como limiar 50% da mediana da série temporal.

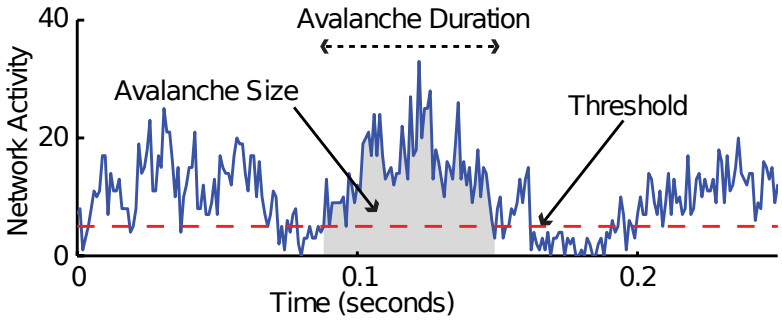

Figura 9 – Definição de uma avalanche. O gráfico mostra a atividade da rede (número de neurônios disparando) em função do tempo. O limiar (linhas tracejada vermelha), é usado para definir o início e o final de uma avalanche. Toda vez que a atividade global da rede (linha contínua azul) cruza o limiar enquanto sobe, uma avalanche se inicia, encerrando quando a atividade cruza o limiar novamente. A área cinza representa o tamanho, e sua projeção no eixo horizontal a duração. Extraído de [7].

A análise dos dados se deu em 3 aspectos:

1. Análise de flutuações retificadas das correlações temporais de longo alcance (*Detrended Fluctuation Analysis of Long-Range Temporal Correlations* - DFA). O cálculo do DFA foi aplicado ao envelope da série temporal (transformada de Hilbert).

2. Análise dos picos de frequência. O espectro de frequência é calculado através da transformada de Fourrier, e apresenta um pico na frequência em que predomina a atividade.

3. Índice κ para quantificação de leis de potência. Como as distribuições nem sempre apresentavam forma de lei de potência, o índice κ foi utilizado como uma maneira de quantificar a criticalidade do modelo. O método consiste em comparar a distribuição cumulativa apresentada pelos dados, divididos em 10 janelas espaçadas

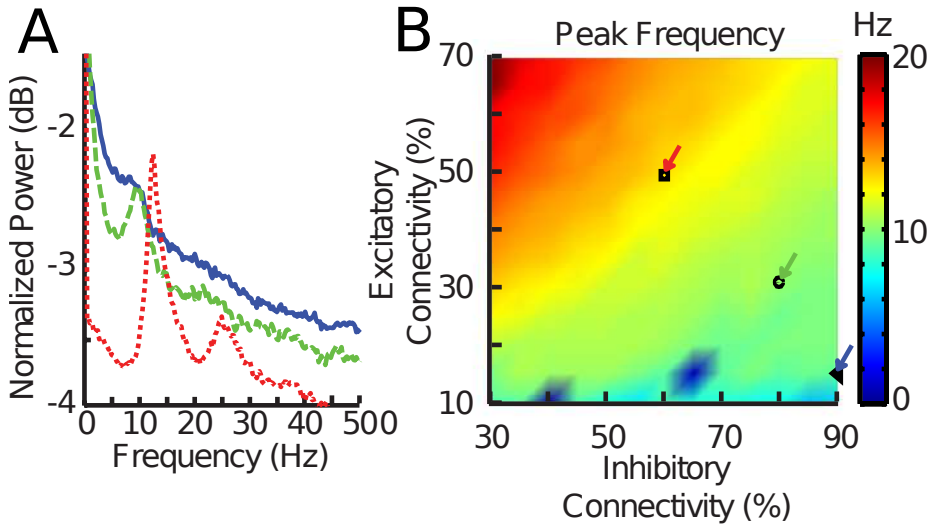

Figura 10 – A. Espectro de frequência, transformada de Fourier da série temporal. Os picos no espectro vão se tornando mais intensos na medida em que a o balanço r_E/r_I aumenta. B. Mapa de calor da frequência característica de atividade. As setas azul, verde e vermelha, indicam a região do espaço de parâmetros em que os espectros mostrados em A foram calculados. Extraído de [7].

logaritmamente, com a distribuição cumulativa de uma lei de potência com expoente previamente fixado, neste caso com expoente -1.5. O índice κ é dado pela diferença média entre tais distribuições e seus valores indicam o regime do sistema. Para $\kappa < 1$, o sistema se encontra no regime subcrítico, $\kappa \approx 1$ no regime crítico, e $\kappa > 1$ supercrítico.

Como resultado, o modelo apresentou um pico de frequência, quando no regime supercrítico, na banda de frequências das oscilações α entre $8 - 16$ Hz, como mostrado na Fig. 10. Na medida em que o balanço r_E/r_I aumenta, a intensidade do pico passa por uma transição, como mostrado na Fig. 11A.

Além disso, é observada uma transição nos valores do índice κ e no expoente de α do DFA. Como mostrado na Fig. 11, o DFA apresenta $\alpha \approx 1$ na mesma região em que o índice $\kappa \approx 1$, que é a mesma em que aparece a transição na intensidade do pico do espectro de frequências. É possível ver, na Fig. 12, um *scatter plot* em que o pico no valor de α aparece sempre que o κ se aproxima de 1, o que indica que o modelo apresenta correlações temporais de longo alcance na mesma região do espaço de parâmetros em que apresenta leis de potência na distribuição de tamanho de avalanche com expoente $-3/2$.

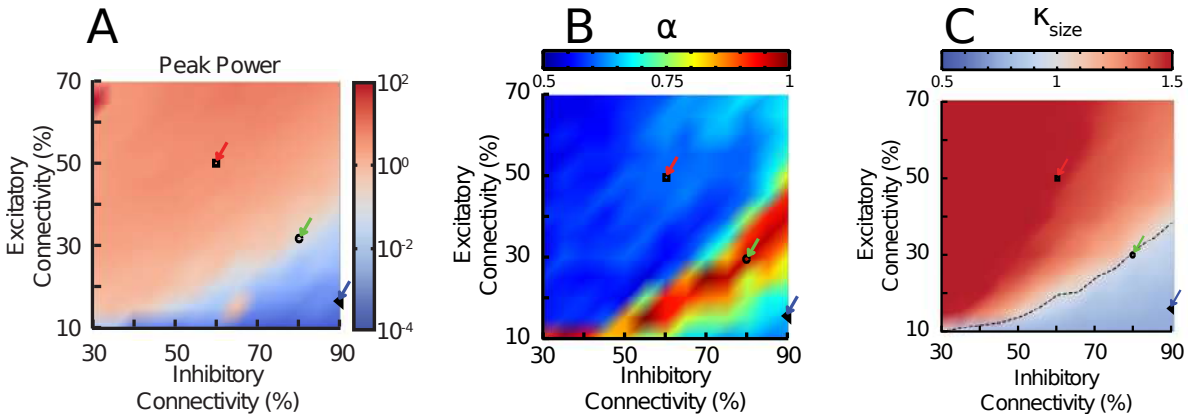

Figura 11 – A. Intensidade do Pico do Espectro de Frequências. B. Expoente α do DFA. C. Indice κ das distribuições de tamanho de avalanches. Extraído de [7].

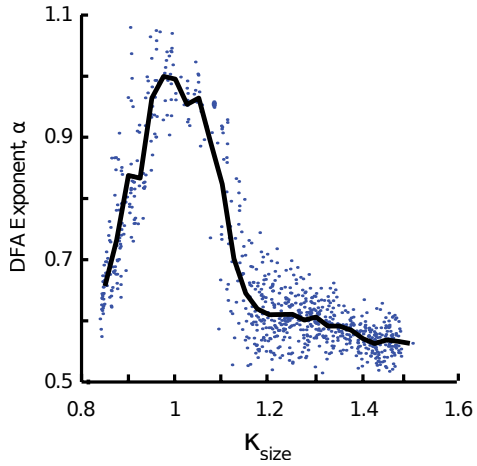

Figura 12 – Relação entre os expoentes de DFA e o Índice κ mostra como α é maior quando $\kappa \approx 1$. Extraído de [7].

2.2.2 Expoentes Variam Continuamente

Porta e Copelli [6] expandiram a análise feita por Poil et al. [7] aumentando a quantidade de parâmetros livres presentes no modelo, que estão mostrados na tabela 3. E estenderam a análise para as distribuições de duração das avalanches. A falta de silêncio na rede já tinha sido abordada anteriormente com a definição de um limiar para estabelecer o início e o final de uma avalanche. Apesar de inicialmente ser considerado como fixo [7], a escolha desse limiar é arbitrária. Para avaliar a sua influência os autores o consideram como um parâmetro da análise de dados, definido como

$$\theta = \Gamma \times \tilde{m} \, , \tag{2.5}$$

onde Γ é um número que representa uma porcentagem da mediana $\tilde{m}$ de atividade da rede. $\Gamma = 0.5$ representa o valor de limiar utilizado anteriormente.

Parâmetros dos Neurônios		
	Excitatórios (E)	Inibitórios (I)
$r_$	$[0.1, 0.7]$	$[0.3, 0.9]$
τ_P	6 ms	12 ms
τ_I	9 ms	9 ms
I_0	0	0
P_0	10^{-6} ms	0
$W_{E_}$	0.02	-2
$W_{I_}$	0.011	-2
Parâmetros da Rede		
$L = [50, 100, 200, 300]$		$\ell = 7$
$t = 1048.576$ s		$dt = 1$ ms
$\Gamma = [0.2, 0.9]$		

Tabela 3 – Tabela com os parâmetros utilizados por Dalla Porta e Copelli. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as fundo branco os parâmetros fixos.

A definição de avalanche também foi estendida, sendo considerada de duas maneiras diferentes, como mostrado na Fig. 13: i) como a área (s_g) sob a curva de atividade temporal; ii) como a área (s_θ) entre a série temporal e o limiar. Quanto à análise dos dados, o índice

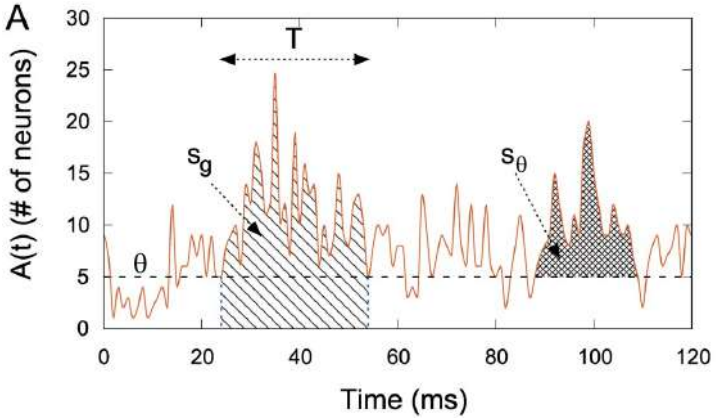

Figura 13 – Duas maneiras diferentes de definir avalanches. Como a área sob a curva, indicado por s_g, que a mesma forma mostrada na fig 9. E como a área entre a curva e o limiar, indicado por s_θ. A definição de duração se mantém a mesma, como sendo o tempo que a série temporal se manteve acima do limiar. Extraído de [6].

κ, que compara duas distribuições, foi empregado para as duas definições de tamanho, sendo referido como κ_g e κ_θ, e para as distribuições de tamanho κ_T. Contudo, o uso do índice implica em impor um expoente para a distribuição teórica. Previamente, o expoente escolhido foi o da classe de universalidade de percolação direcionada, para campo médio $\tau = 3/2$. Dado que a topologia da rede é um quadrado bidimensional, então é cabível fazer

os cálculos utilizando os expoentes de percolação direcionada para 2 dimensões. Então foram utilizados tanto os expoentes de DP-MF ($\tau = 3/2$ e $\tau_t = 2$), quanto de DP-2D ($\tau = 1.450$ e $\tau_T = 1.268$). Para ambas as classes de universalidade o modelo apresentou $\kappa \approx 1$ em alguma região do espaço de parâmetros, embora em regiões levemente diferentes, como mostrado na Fig. 14.

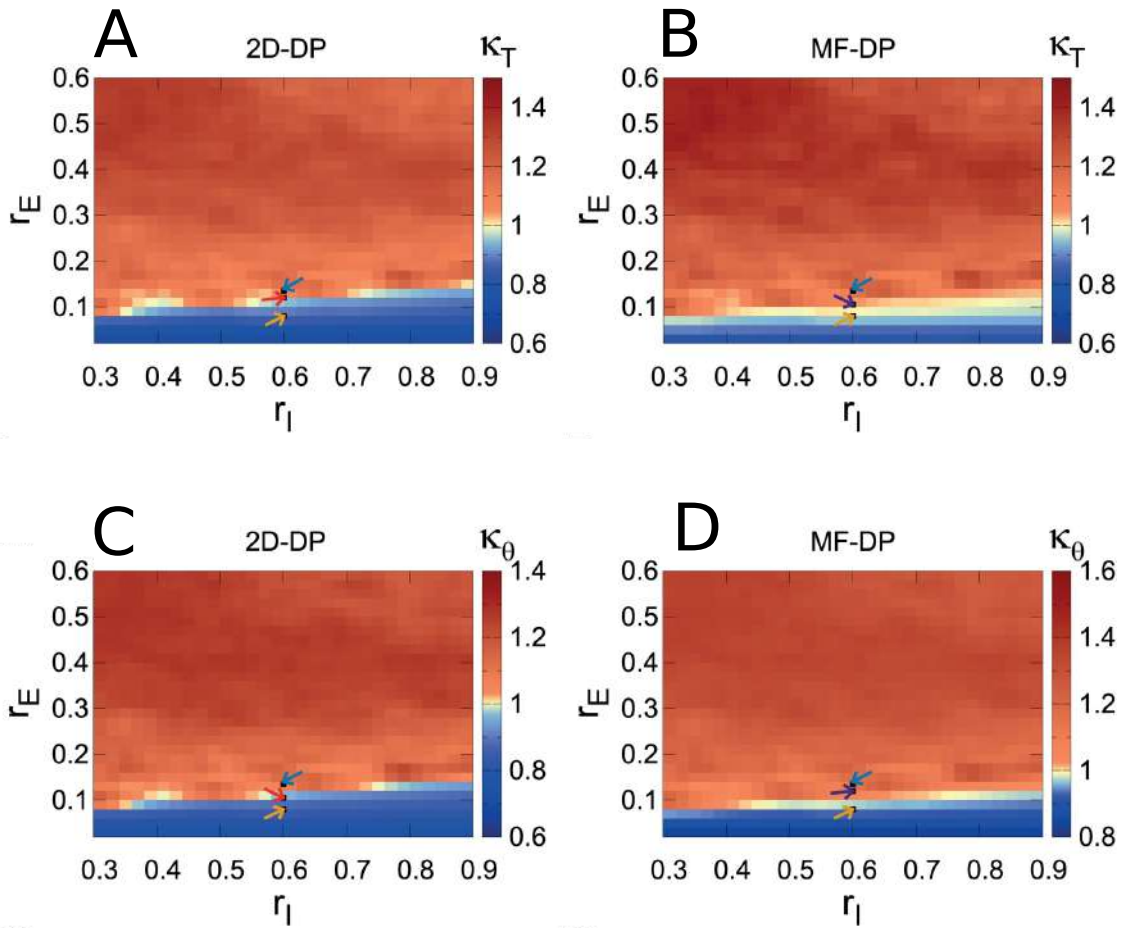

Figura 14 – Mapas de calor mostrando os valores encontrados para o índice κ, das distribuições de tamanho (A e B) e de duração (C e D). Utilizando os expoentes de DP-2D (A e C) DP-CM (B e D). Extraído de [6].

Uma vez que o κ possui a desvantagem de só comparar leis de potência com expoentes conhecidos, e o modelo mostrou ter regiões compatíveis com 2 classes de universalidade, o teste da razão de máxima verossimilhança (para mais detalhes ver Apêndice A.2), foi utilizado para comparar 4 tipos de distribuições diferentes, lognormal, exponencial, lei de potência pura e lei de potência com truncamento exponencial. Através desta comparação a região melhor descrita por uma lei de potência truncada foi identificada, indicada pela área sombreada na Fig. 15. Nesta mesma região pode-se observar o valor máximo de α, o expoente do DFA, e um aumento na intensidade no pico do espectro de

potência.

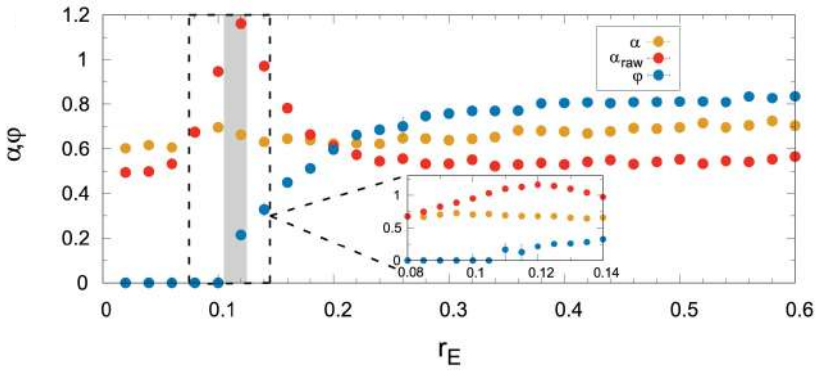

Figura 15 – Região cinza mostra onde as leis de potência aparecem. Os pontos amarelos mostram que o máximo do expoente de DFA se encontra no interior da região cinza, bem como é onde a transição na intensidade do espectro de potência começa. Extraído de [6].

Dentro da região cinza tem-se as distribuições em forma de lei de potência, enquanto que fora dela não. É possível ver na Fig. 32 as distribuições de tamanho e de duração para os três regimes encontrados na rede. Dentro da região de transição os expoentes obtidos pelo método da máxima verossimilhança variam continuamente, como mostrado na Fig. 17. Esta variação contínua dos expoentes de duração e tamanho em função do limiar Γ é semelhante à dependência dos valores mostrada por Beggs e Plenz 2003 com relação ao *bin* utilizado para o cálculo dos expoentes. Além disso, como já discutido na seção 1.1.4 também é encontrada em dados experimentais [8, 30, 5, 4]. Não somente isso, a inclinação da linha formada no *scatter plot* dos expoentes de tamanho e duração (τ *vs.* τ_T) é ≈ 1.28, o que é compatível com diversos trabalhos experimentais (Fig. 5) [4].

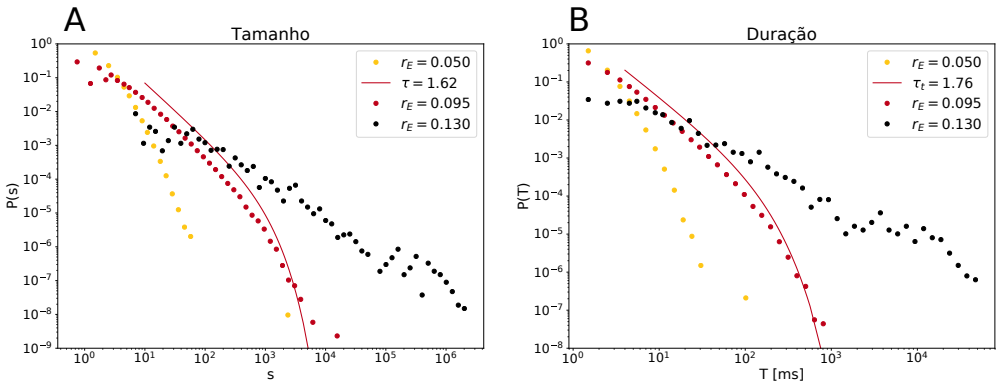

Figura 16 – Distribuições de tamanho (A) e duração (B) de avalanches, nos três regimes. Ajuste feito considerando $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms. Reprodução própria equivalente à Fig. 5 de [6]

Todavia, o modelo não satisfaz a relação de escala 1.7 que se espera ser obedecida no regime crítico, como mostrado na Fig. 18, mesmo variando o limiar. Apesar dos dois

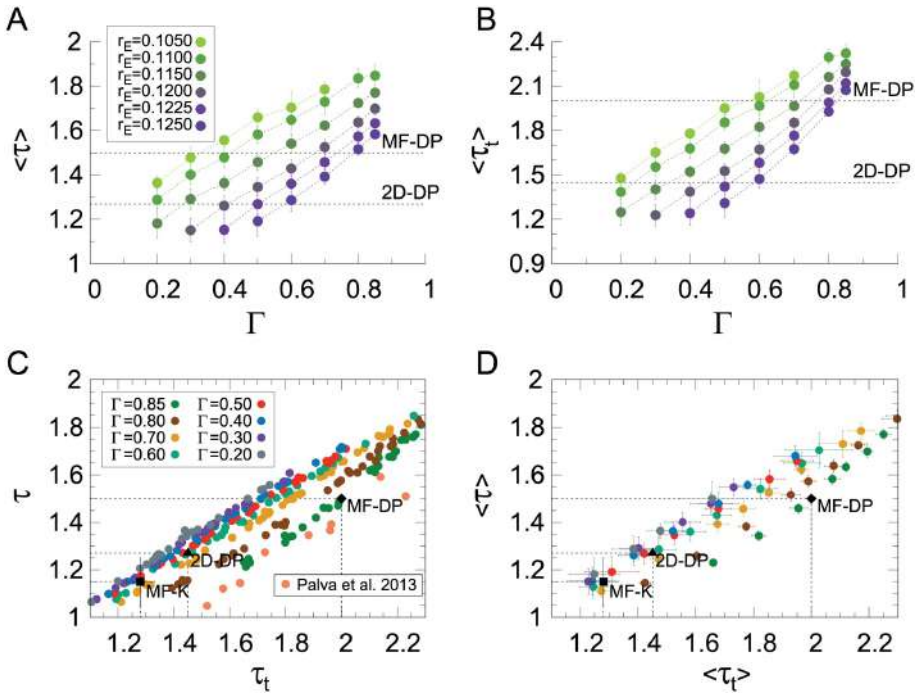

Figura 17 – Os expoentes de tamanho e duração variam continuamente com a variação dos parâmetros, incluindo expoentes reportados experimentalmente [8], e expoentes de duas classes de universalidade MF-DP e 2D-DP. Extraído de [6].

lados da relação se aproximarem, eles não se encontram.

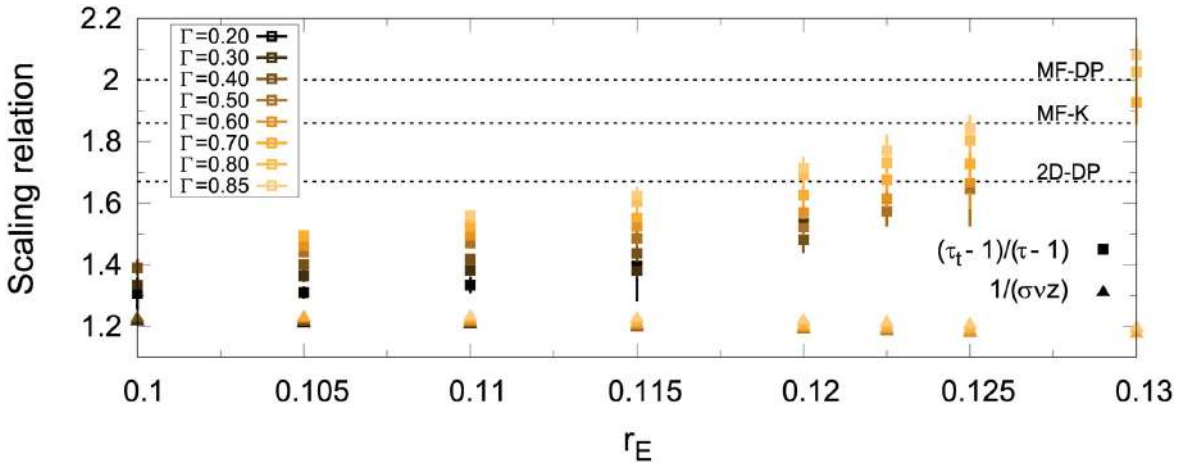

Figura 18 – Relação de escala entre os expoentes de duração e tamanho de avalanche, como descrito pela equação 1.7. Os triângulos representam o lado direito, e os quadrados o lado esquerdo. Extraído de [6].

3 MODIFICAÇÕES DO MODELO

O modelo CROS apresenta resultados promissores, como descrito no capítulo anterior, contudo, traz consigo alguns problemas. Dentre eles destaca-se a falta de um ponto crítico que obedeça a relação de escala da Eq. 1.7, o que impossibilita a caracterização do modelo como sendo crítico; e a necessidade de um limiar na definição de avalanches, consequentemente utilizando como avalanche neuronal uma definição diferente da originalmente proposta por Beggs e Plenz [2]. Para explorar estes dois aspectos, duas modificações foram feitas. Inicialmente, buscando se aproximar da definição original de avalanche neuronal modificou-se a maneira como os dados são analisados, sendo incluído um limiar local. Tal modificação está descrita em mais detalhes na seção 3.1. Nesta primeira abordagem, apenas a análise dos dados foi modificada, sem em nada alterar o modelo. Em seguida, retomou-se uma das definições de avalanches utilizada por Dalla Porta e Copelli [6], sendo a definição de tamanho dada por s_θ da Fig. 13. Neste caso foram consideradas duas outras topologias, além da bidimensional quadrada proposta por Poil e colaboradores [7]. Esta modificação está descrita na seção 3.2. Os resultados de ambas as modificações foram explicitados no capítulo 4.

3.1 LIMIAR LOCAL

A definição de avalanche utilizada no modelo é diferente da tradicional, devido à ausência de silêncio na rede. Visando se aproximar da metodologia de análise de dados empregada em trabalhos experimentais sobre avalanches neuronais, uma matriz de eletrodos implementada na rede foi simulada. De forma a tornar possível a binarização dos dados.

Para simular uma matriz de eletrodos de tamanho linear L_e, ou seja contendo $N_e = L_e^2$ eletrodos, a rede foi dividida em quadrados menores de lados L_p, como mostrado na figura 19. O centro de cada quadrado é o equivalente a posição de cada eletrodo na rede, e suas bordas o limite do alcance do eletrodo. A matriz foi construída de forma a ser capaz de cobrir a rede toda, no entanto, não há superposição entre os eletrodos. Ou seja, o tamanho da matriz de eletrodos é inversamente proporcional ao alcance de cada um deles, $L_e = \dfrac{L}{L_p}$. Desta forma, ao invés de ter uma série temporal para a rede toda, têm-se N_e séries temporais, uma para cada eletrodo. Um eletrodo mede a quantidade de elementos, dentro do seu quadrado de alcance, que dispararam naquele instante de tempo. Sendo assim, cada série temporal representa a atividade somada de uma certa região da rede.

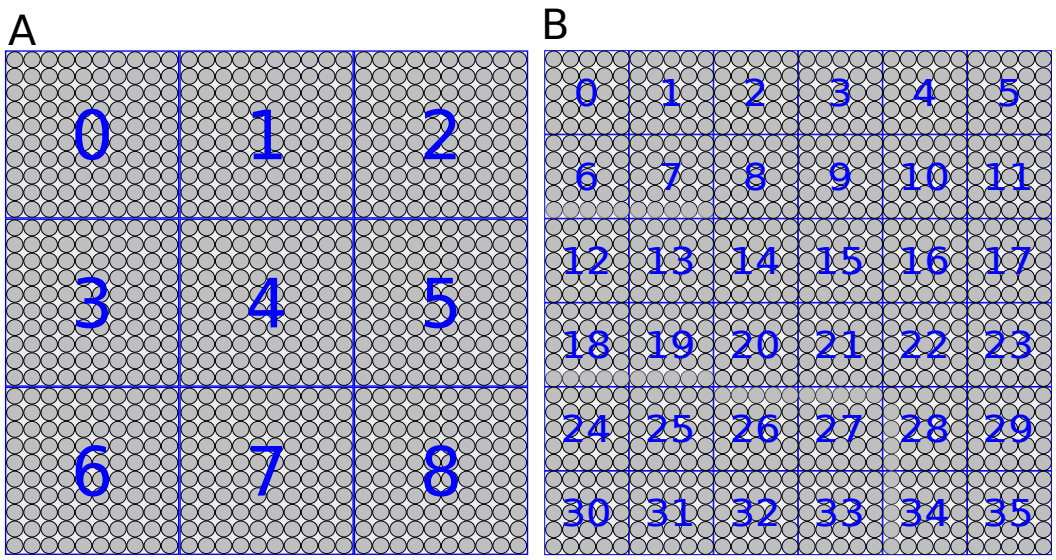

Figura 19 – Representação de uma rede de tamanho $L = 30$ com duas matrizes de eletrodos de tamanhos diferentes. Em A: $L_e = 3$ e $L_p = 10$, ou seja, uma matriz de 9 eletrodos, com cada um abrangendo 100 neurônios. Em B: $L_e = 6$ e $L_p = 5$, ou seja, uma matriz de 36 eletrodos, com cada um abrangendo 25 neurônios. Como o tamanho da rede é o mesmo, alterar L_p implica em alterar L_e e vice-versa.

Semelhante à abordagem de Palva e colaboradores [8] para dados de MEG e SEEG (do inglês *MagnetoEncephaloGraphy* e *Stereotactical ElectroEncephaloGraphy*) os dados de cada eletrodo foram binarizados em eventos discretos, como mostrado no exemplo da Fig. 20. Este procedimento, conhecido em inglês como *Point Process,* consiste em estipular um limiar Tr para a atividade e dizer que ocorreu um evento toda vez que a série temporal estiver acima de tal limiar. Desta forma, um evento representa uma flutuação grande na atividade do eletrodo. Diz-se então que o evento ocorre no tempo do maior pico [2, 8]. O resultado final consiste em um vetor binário que terá valor 1 caso o evento tenha ocorrido naquele tempo e 0 caso contrário. Apesar de Tr, em princípio, poder ser arbitrário, o evento detectado precisa ser algo de destaque entre a atividade usual. Portanto Tr será definido de forma análoga ao *z-score*, uma medida de distância, em termos de quantos desvios padrões a atividade está da média:

$$Tr = \langle x \rangle_t + n\sigma \ , \tag{3.1}$$

onde $\langle x \rangle_t$ é a média temporal da atividade, σ é desvio padrão da média e n um parâmetro positivo. É possível ver, Fig. 20b. como a escolha de n afeta não somente a quantidade, mas também os instantes em que os eventos de uma mesma série temporal são detectados.

Quanto maior o limiar, menos atividade o eletrodo detecta. Porém, pode acontecer de na medida em que o limiar for subindo, a série temporal cruzá-lo duas vezes, e tem-se então dois eventos ao invés de um. Como mostrado na Fig. 20b, os últimos dois eventos do limiar intermediário são detectados como apenas um evento pelo limiar mais baixo, visto que, no segundo caso, os dois eventos fazem parte da mesma curva, e consequentemente, o eletrodo só detecta o instante da maior atividade.

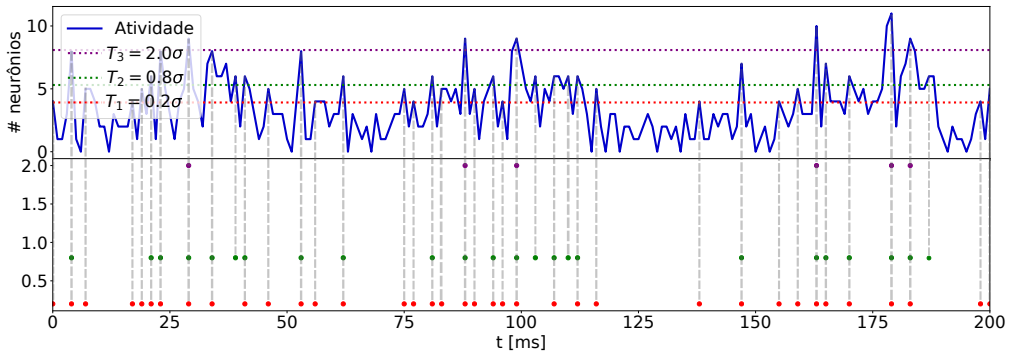

Figura 20 – Série temporal de um eletrodo, as linhas horizontais representam diferentes valores de limiar; e *Raster plot* dos eventos equivalente à série temporal, o eixo vertical representa o valor de n para Tr. As cores dos pontos correspondem às cores dos respectivos limiares, com as linhas tracejadas verticais ligando os picos aos eventos correspondentes.

Após repetir a binarização para todos os eletrodos, tem-se um *raster plot*, de todos os eventos ocorridos, como mostrado na Fig. 21. Cada ponto representa um evento, sendo o eixo vertical o índice do eletrodo que o detectou, e o eixo horizontal o instante do ocorrido.

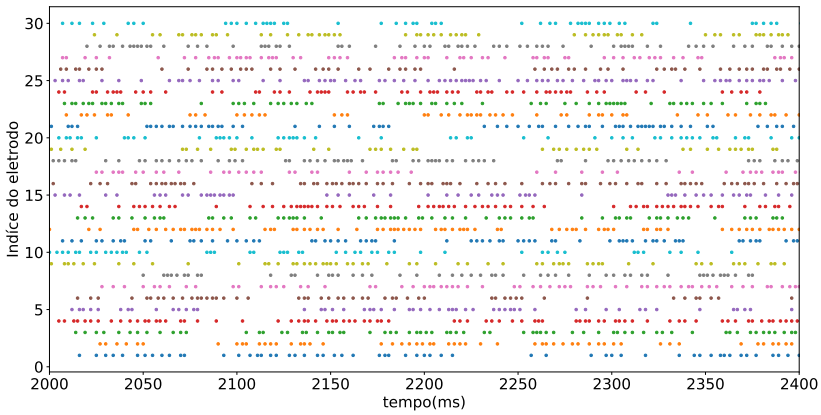

Figura 21 – Fixando uma linha do eixo vertical, pode-se ver todos os instantes de tempo que um dado eletrodo detectou um evento. Se uma coluna do eixo horizontal for fixada, enquanto se percorre todas as linhas, têm-se todos os eletrodos que detectaram um evento naquele instante de tempo.

O passo seguinte é particionar o tempo em pequenos intervalos (*bins*) de tamanho Δt e agrupar eventos que estão em um mesmo intervalo, como na Fig. 22. Uma avalanche é então definida como a atividade contida entre dois intervalos de silêncio (*bins* que não possuem eventos) [2]. Neste caso, a duração de uma avalanche é dada pelo número de *bins* ocupados, e o tamanho pela quantidade de eventos contidos nesses *bins,* como mostrado na Fig. 22. A escolha do tamanho da janela de tempo é de suma importância na hora

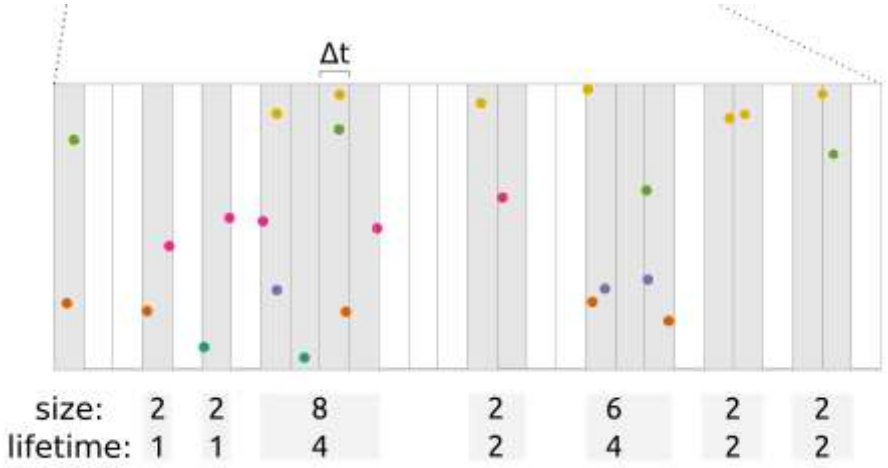

Figura 22 – Entre os bins i e j é possível ver uma região cinza, onde tem-se uma avalanche de tamanho $x_{ij} = 8$, dado pela contagem de eventos em seu interior (contagem de pontos), e de duração $j - i = 4$, dado pelo número de *bins* que a compõe. Extraído de [4].

de fazer análises de criticalidade, visto que um Δt grande favorece avalanches maiores enquanto que um Δt muito pequeno tende a favorecer avalanches menores [12]. Desde que as avalanches neuronais foram definidas por Beggs e Plenz [2], Δt é tradicionalmente escolhido como o tempo médio entre dois eventos/disparos ($\langle IEI \rangle$ - do inglês *Inter Event Interval*), pois este representa a escala de tempo "intrínseca" do sistema. Portanto, para avaliar a influência do tamanho do *bin,* este será um parâmetro da análise de dados

$$\Delta t = n_b \langle IEI \rangle \ , \tag{3.2}$$

onde n_b é um parâmetro positivo.

Após a contagem de tamanho e duração das avalanches é feito um histograma para avaliar a forma de suas distribuições, se são leis de potência ou não, e em caso positivo quais seus expoentes.

3.2 CONEXÕES DE LONGO ALCANCE COM LIMIAR GLOBAL

Redes de mundo pequeno (*"small world"*), recebem esse nome em analogia ao fenômeno de mundo pequeno [9]. São redes que apresentam algumas características de redes regulares, enquanto que outras características coincidem com as de redes totalmente

aleatórias. Os autores propõem um modelo partindo de uma rede totalmente regular, em formato de anel, onde cada elemento é conectado com seus 2 primeiros vizinhos, como mostrado na Fig. 23. Define-se um parâmetro de religamento p, que equivale à probabilidade de uma ligação(da rede regular) ser refeita com outro elemento(totalmente aleatório) não importando a distância. Logo, para $p = 0$ tem-se a topologia regular inicial e para $p = 1$ uma rede completamente aleatória. Quanto maior for o valor de p, maior é o número de ligações de longo alcance, e maior a irregularidade da rede. Para as redes de mundo pequeno, que possuem valores intermediários de p, têm-se um indicador de ordem local com o coeficiente de aglomeração com valores próximos ao encontrado para redes regulares. Enquanto que a distância média de separação entre pares de nós cai rapidamente, se aproximando dos valores para redes aleatórias, como na Fig. 24.

O mesmo foi feito com a topologia do modelo CROS. Inicialmente, a rede foi estruturada seguindo os critérios propostos por Poil *et al.* 2012, conforme descrito na seção 2.1. Logo em seguida, cada conexão excitatória foi revisitada, e refeita aleatoriamente, sem imposição de limite de distância, com probabilidade p. Sendo assim, para valores de p próximos a 0 a rede continua uma rede quadrada regular com a maioria de suas conexões sendo locais. Porém, à medida que $p \to 1$, mais conexões, que podem ser de longo alcance, vão surgindo. A quantidade de tais ligações é diretamente proporcional ao valor de p. Uma vez fixado o valor de p, a análise das avalanches usando o limiar global é feita conforme discutido previamente na seção 2.2

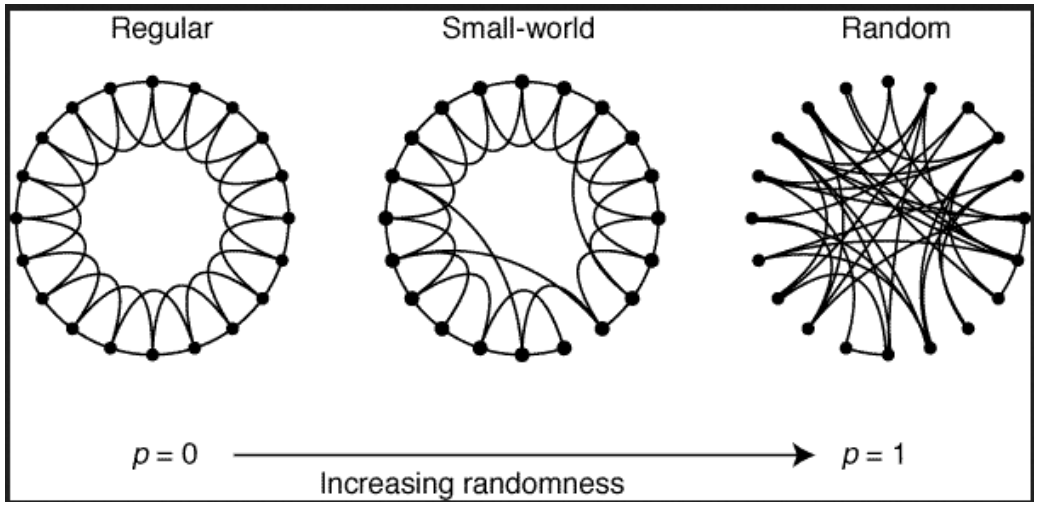

Figura 23 – Figura mostrando como o parâmetro de religamento p afeta a topologia de uma rede regular em formato de anel ($p = 0$), até transformá-la em um grafo aleatório ($p = 1$). Retirada de [9]

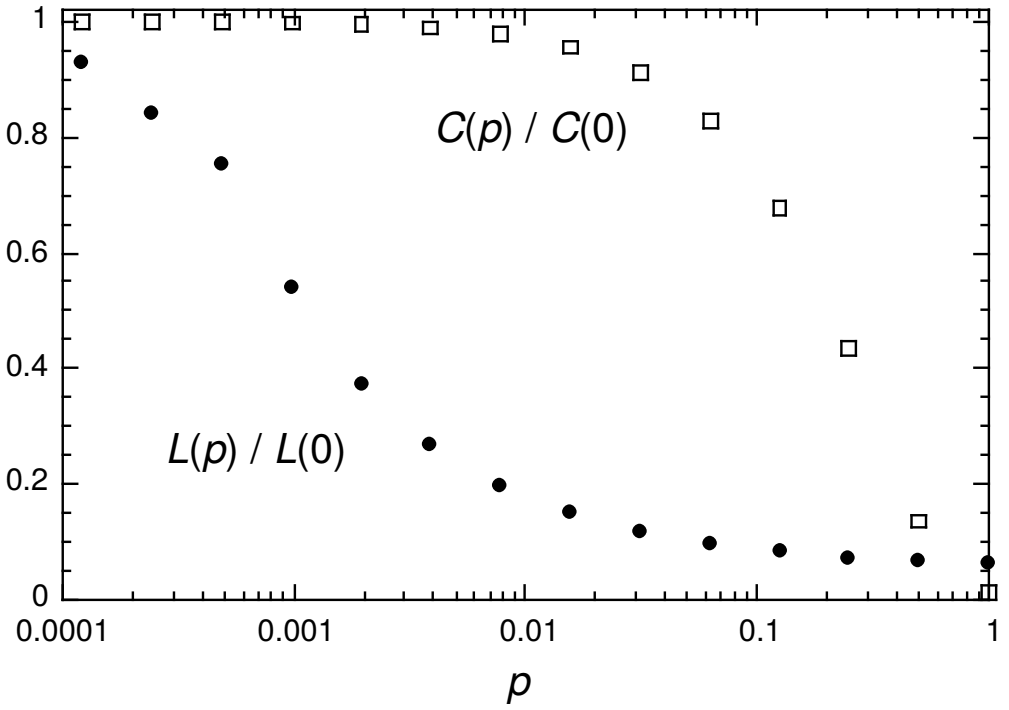

Figura 24 – Figura mostrando a variação do coeficiente de aglomeração $C(p)$ e a distância média entre pares de nós $L(p)$ em função do parâmetro de religamento p. Retirada de [9]

4 RESULTADOS

Neste capítulo serão relatados os resultados relativos às modificações do modelo CROS descritas no capítulo 3. Eles estão divididos em duas partes. A primeira relata a análise para as simulações definindo avalanches através de um limiar local, ressaltando que nesta parte não houve modificação na rede, apenas na maneira como os dados foram analisados. A segunda, mostra as consequências de uma alteração na topologia da rede, através da introdução de conexões de longo alcance na rede, alterando assim a sua topologia.

4.1 LIMIAR LOCAL

Para a simulação, o tamanho da rede e da vizinhança de cada neurônio foram mantidos constantes, sendo $L = 315$ e $\ell = 7$ respectivamente. Estes valores foram escolhidos de forma a ter o máximo de possibilidades na escolha de L_e, que corresponde à quantidade de eletrodos simuladas, dadas as nossas limitações computacionais. Para limitar a quantidade de parâmetros livres do modelo, a densidade de conexão dos neurônios inibitórios foi mantida constante ($r_I = 0.6$), enquanto que a de neurônios excitatórios (r_E) é um dos parâmetros de controle da simulação. O tamanho linear da matriz de eletrodos, L_e, e consequentemente o alcance linear de cada eletrodo L_p, são parâmetros de controle que estão relacionados através da relação $L = L_e \times L_p$, de forma que

$$L_e \in [35, \quad 21, \quad 15, \quad 9, \quad 7, \quad 5, \quad 3]$$
$$L_p \in [9, \quad 15, \quad 21, \quad 35, \quad 45, \quad 63, \quad 105].$$

Em outras palavras, aumentando-se o número de neurônios detectados em cada eletrodo, diminui o número de eletrodos. Como não há superposição entre a atividade detectada por diferentes eletrodos e a matriz foi construída para sempre cobrir a rede toda, toda a discussão a partir de agora será feita em termos de L_e, o número de eletrodos. Apesar de ser um parâmetro de análise de dados, o programa que simula a rede foi alterado para salvar as atividades de cada eletrodo (L_e^2 séries temporais), ao invés de salvar a atividade global (1 série temporal). Os parâmetros discutidos anteriormente e discutidos nas seções 2.2.1 e 2.2.2, foram essencialmente mantidos como mostrado na tabela 4.

Definidos os parâmetros da simulação, ainda têm-se os parâmetros da análise dos dados, como descrito nas equações 3.1 e 3.2. As discussões serão feitas em termos dos parâmetros do limiar e do *bin,* n e n_b. Contudo, tais parâmetros precisam ser escolhidos com cautela. Através da Fig. 25 é possível perceber dois dos problemas que podem aparecer na escolha de n. Para $L_e = 3$ não foi possível calcular o $\langle IEI \rangle$ quando $n \geqslant 6.5$, pois toda atividade encontra-se abaixo do limiar ou seja, os eletrodos não detectaram nenhuma atividade acima do limiar. Em contrapartida, é possível ver que para valores menores

Parâmetros dos Neurônios		
	Excitatórios (E)	Inibitórios (I)
$r_$	[0.12,0.58]	0.6
τ_P	6 ms	12 ms
τ_I	9 ms	9 ms
I_0	0	0
P_0	10^{-6} ms	0
$W_{E_}$	0.02	-2
$W_{I_}$	0.011	-2
Parâmetros da Rede		
$L = 315$		$\ell = 7$
$t = 10^2$ s		$dt = 1$ ms

Tabela 4 – Tabela com os parâmetros utilizados para as simulações com limiar local. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as com fundo branco os parâmetros fixos.

de n, eventualmente $\langle IEI \rangle$ mantém-se abaixo de 1. Principalmente para valores de L_e muito grandes, têm-se muitos eletrodos, de baixo alcance, que detectam atividade ao mesmo tempo, e/ou tempos muito próximos, consequentemente $\langle IEI \rangle \leqslant 1$ ms, que é o tamanho do passo de tempo utilizado na simulação. Isto implica não haver silêncio, e como a definição de avalanche depende de momentos de silêncio, todos os eventos são considerados como parte de uma mesma avalanche, impossibilitando que a estatística seja feita. Por fim, há o caso, em que n é suficientemente pequeno, e é possível calcular o

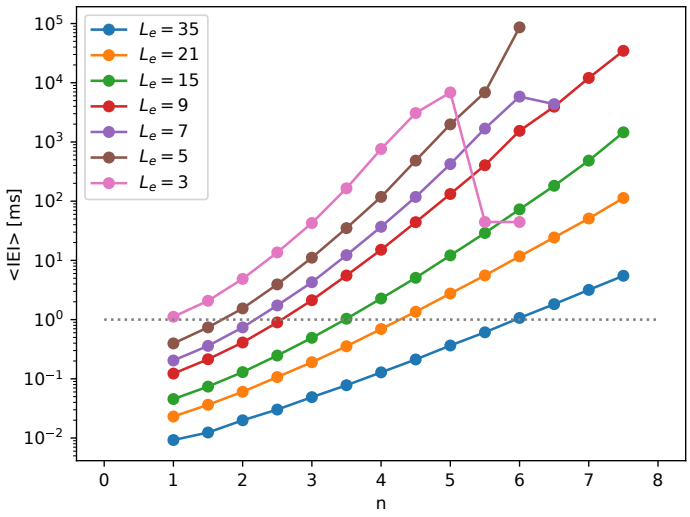

Figura 25 – Exemplo de $\langle IEI \rangle$, com $r_E = 0.360$, para diferentes valores de n. A linha tracejada indica quando $\langle IEI \rangle = 1$ ms.

$\langle IEI \rangle$, porém n é grande o bastante para que existam poucos eventos muito próximos e/ou que estejam muito espaçados entre eles. Por exemplo para $L_e = 3$, houve uma queda no

valor do $\langle IEI \rangle$, o que indica poucos eventos muito próximos, enquanto que, para $L_e = 5$ o $\langle IEI \rangle$é bem próximo do tempo tempo total de simulação (10^5 ms) o que indica dois eventos bem distantes. Consequentemente têm-se todos os eventos agrupados em uma única avalanche ou eventos bem dispersos formando avalanches de tamanho 1. Em ambos os casos, não é possível fazer as distribuições. Os mesmos problemas acontecem com a variação do *bin*: ao aumentá-lo, avalanches maiores são favorecidas, entretanto o número de avalanches cai.

4.1.1 Distribuições de Avalanches e a Ausência de Leis de Potência

As primeiras distribuições foram feitas considerando o parâmetro de *bin*, constante, $n_b = 1$. Ou seja, os eventos foram agrupados em intervalos de tempo do tamanho do $\langle IEI \rangle$ da rede, o que limita as combinações de n, r_E e L_e possíveis. Por exemplo, para $L_e = 35$, o maior utilizado, só foi possível fazer a análise para $n \geqslant 6$ e $r_E \geqslant 0.24$. Enquanto que para $L_e = 3$, o menor utilizado, o n pôde ser variado no intervalo $[1, 4]$ e $0.08 \leqslant r_E \leqslant 0.38$. Contudo, ao analisar as distribuições de tamanho e duração de avalanches, observamos que elas não possuem um aspecto linear em um gráfico log-log, como deveria ocorrer para uma distribuição do tipo lei de potência (Fig. 26). E, de fato, ao utilizar o teste da razão das máximas verossimilhanças (LLR) (apêndice A), o critério diz que estas distribuições são melhores ajustadas por uma lognormal, se comparada com exponencial ou lei de potência truncada.

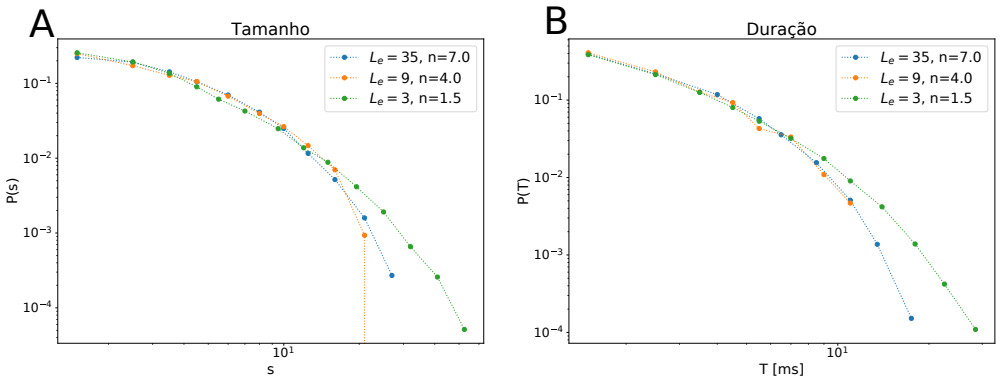

Figura 26 – Distribuições de tamanho (Fig. A) duração (Fig. B) de avalanches com limiar local, para 3 combinações distintas de parâmetros, $n_b = 1$.

Procurando a região em que os dados são melhor ajustados por uma lei de potência, seja ela pura ou truncada, o LLR foi calculado, sempre que possível, para as combinações de parâmetros mostradas na tabela 5, cuja 1ª coluna mostra o nome do parâmetro, a 2ª o intervalo em que o parâmetro em questão foi variado, e a última o tamanho do passo da variação de cada parâmetro.

Mesmo com tantas variações de parâmetros possíveis, quando aplicado o teste da razão de máxima verossimilhança, a distribuição eleita como a que melhor ajusta os dados,

Parâmetro	Intervalo	Δ
L_e	$[3, 5, 7, 9, 15, 21, 35]$	
n	$[1, 8]$	$\Delta n = 0.5$
n_b	$[1, 8)$	$\Delta n_b = 0.5$
r_E	$[0.18, 0.58]$	$\Delta r_E = 0.02$

Tabela 5 – Tabela com os parâmetros utilizados durante a análise dos dados do modelo CROS com limiar local.

foi, na maioria das vezes, a lognormal, e em outras poucas situações a exponencial. Devido à grande quantidade de combinações de parâmetros, e ao fato de todas apresentarem mapas de cores semelhantes, mostrando sempre um favorecimento às duas distribuições citadas ao invés da lei de potência, apenas alguns exemplos foram escolhidos para representar tais resultados (Fig. 27).

É possível ver através da Fig. 25 que o tamanho do *bin* afeta as combinações de r_E e n para as quais é possível fazer o cálculo do ajuste das distribuições. Como a variação do *bin* é dada através do fator multiplicativo n, na medida que este aumenta, os valores do *bin* também aumentarão. Para $n_b > 1$, os valores do *bin* apresentam as mesmas curvas para o $\langle IEI \rangle$ mostradas na Fig. 25, a única diferença é que estas se encontram deslocadas verticalmente para cima. Consequentemente alguns dos valores de n para os quais $\langle IEI \rangle < 1$, poderão ser usados. Pois, o tamanho do *bin* é igual à $n_b \times \langle IEI \rangle$ que poderá ser > 1, enquanto que outros deixarão de ser, quando $n_b \times \langle IEI \rangle$ for da ordem do tempo de simulação.

Os mapas de cores mostrados na Fig. 27 apresentariam valores positivos se regiões com distribuições em forma de lei de potência existissem; e valores negativos quando outra distribuição (exponencial ou lognormal) fosse escolhida. Como é o suficiente que a lei de potência seja preterida por apenas uma das outras distribuições em questão, apenas o mapa de calor com a distribuição eleita é mostrado, sendo redundante a exibição do outro. Todavia, o LLR pode falhar [25], como mostrado na Fig. 28. Apesar do mapa de calor indicar que distribuição que ajusta melhor os dados é uma lei de potência, ao visualizar as distribuições (Fig.28, seja ela de tamanho ou de duração, é possível ver que ela não é uma reta em um gráfico log-log, portanto não pode ser uma lei de potência. Para efeitos de visualização, o histograma das distribuições é mostrado tanto para *bins* (do histograma) com espaçamento linear, quanto para *bins* com espaçamento logaritmo. No caso do *bin* linear é ainda mais visível o fato da distribuição não ser bem ajustada por uma lei de potência, dada a nuvem de pontos que aparece no histograma.

A única combinação de parâmetros em que as leis de potência foram detectadas, foi para $L_e = 3$. Ou seja, quando haviam apenas 9 eletrodos cobrindo todos os 9^4 neurônios da rede. O que implica em cada eletrodo ser capaz de detectar a atividade individual de

$L_p^2 = 105^2 = 11025$ neurônios. O que é totalmente irreal, visto que em experimentos um eletrodo consegue diferenciar a atividade de um único neurônio apenas quando este está muito próximo da sua área de contato. Mesmo matrizes de eletrodos de alta densidade apenas diferenciam aproximadamente 5 neurônios por eletrodos. Pois, na medida em que a distância, com relação ao eletrodo aumenta, a sua precisão diminui, não sendo capaz de diferenciar atividades de um único neurônio, detectando apenas comportamentos coletivos ou ruído [38].

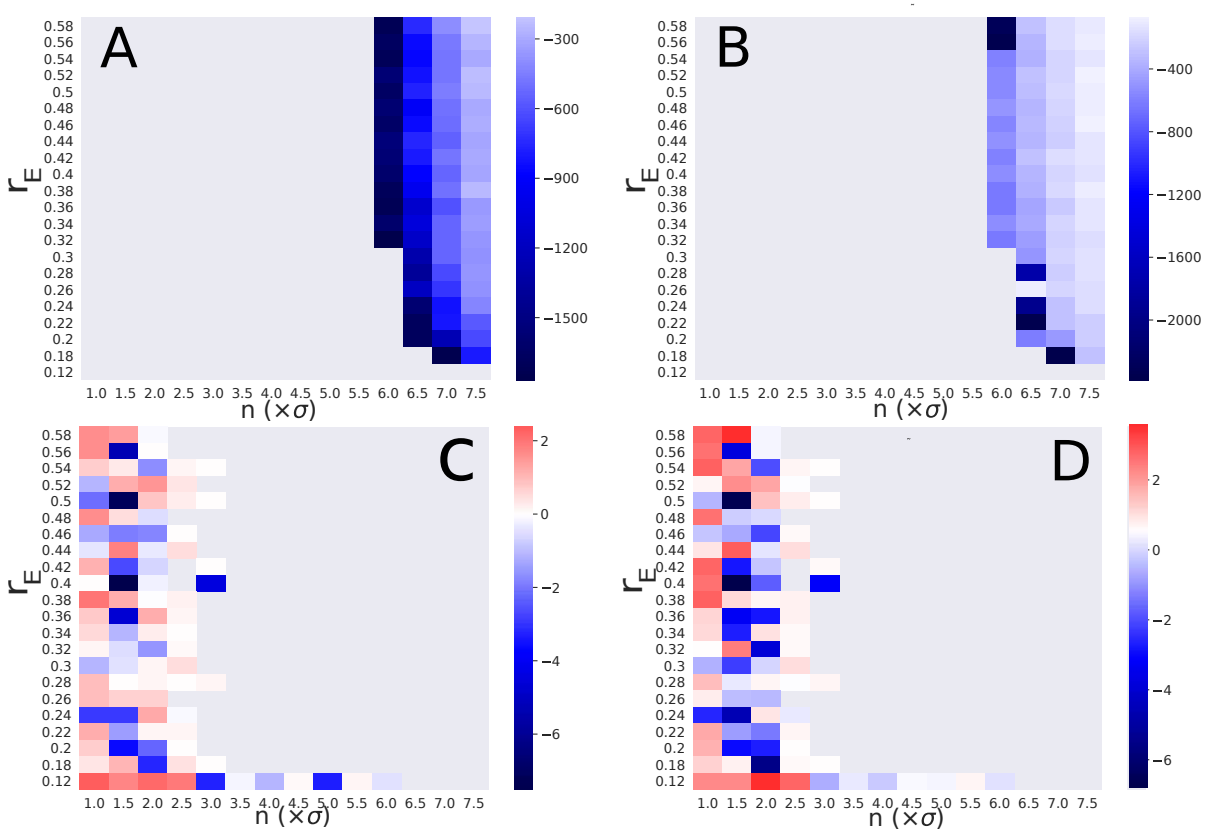

Figura 27 – Mapas de calor mostrando os valores encontrados para $\mathcal{R}$ (razão das máximas verossimilhanças, Eq. A.4) das distribuições de tamanho (A e C) e de duração (B e D), com limiar local. Para as Figs. A e B: $L_e = 35, n_b = 1.0$. Para C e D: $L_e = 3, n_b = 7.5$

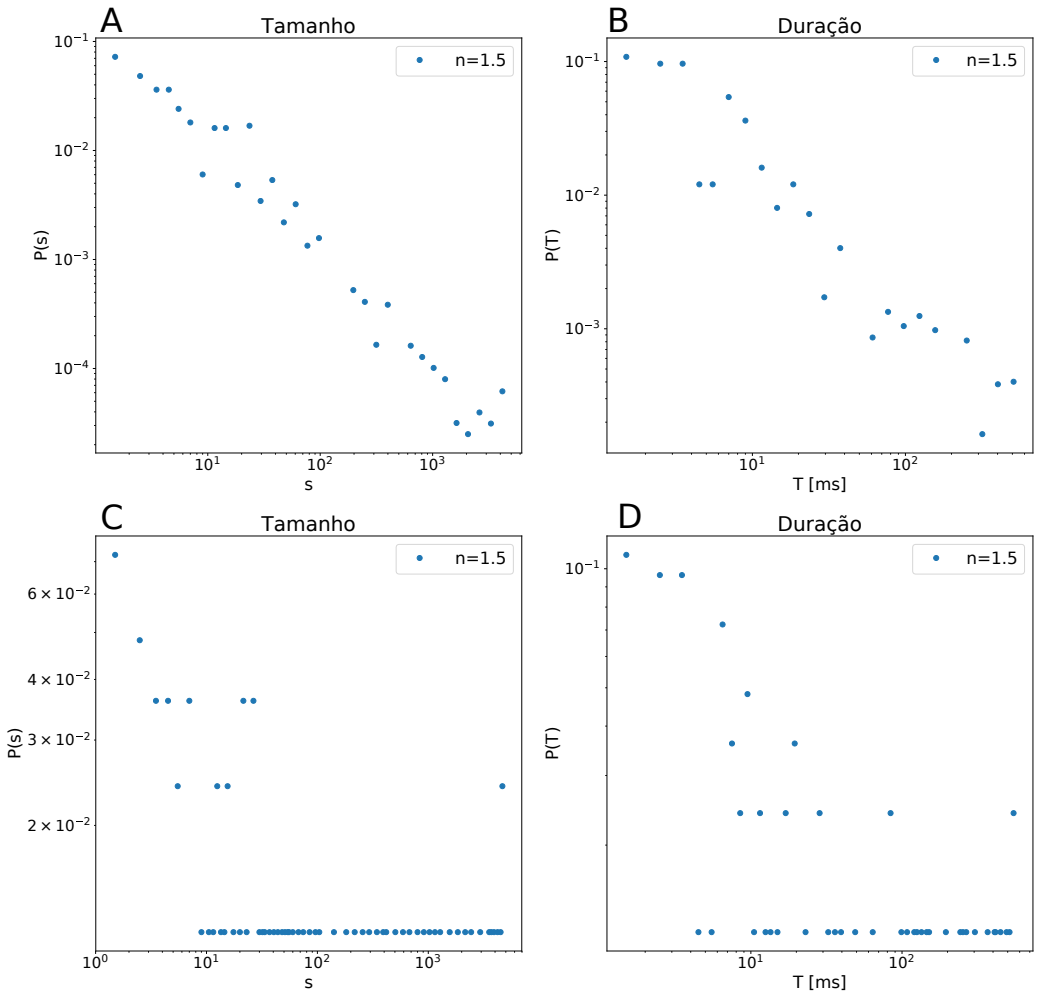

Figura 28 – A. e C. Distribuições de tamanho com o espaçamento logaritmo e linear, respectivamente, entre os *bins* do histograma; B. e D. Distribuições de duração com o espaçamento logaritmo e linear, respectivamente, entre os *bins* do histograma. Limiar local, $L_e = 3$, $r_E = 0.12$

4.2 CONEXÕES DE LONGO ALCANCE COM LIMIAR GLOBAL

Na seção anterior a topologia do modelo foi a mesma utilizada em trabalhos anteriores e modificou-se a definição de avalanches. Agora, retoma-se a definição de avalanches proposta por Poil e colaboradores [7] para o modelo, utilizando limiar global. Entretanto, a topologia do modelo é alterada, sendo inserido conexões de longo alcance para os neurônios pré-sinápticos excitatórios. Como citado na Sec. 3.2, o parâmetro de religamento determina a probabilidade de cada conexão ser refeita, ou equivalentemente, a porcentagem de ligações que foram rearranjadas. Porém redes de neurônios não são

homogêneas, constituem-se de uma mistura de neurônios inibitórios e excitatórios. Sabe-se que neurônios inibitórios tipicamente possuem axônios mais curtos com relação aos excitatórios [13], o que limita a distância máxima de suas conexões. Portanto, apenas os excitatórios possuem conexões de longo alcance. Ou seja, o parâmetro de religamento p apenas afeta o acoplamento do neurônio pré-sináptico se este for excitatório. Com relação à variação de p, apenas 3 valores foram considerados:

- $p = 0.0 \rightarrow$ Topologia tradicional do modelo CROS, uma rede bidimensional quadrada, com desordem local;
- $p = 0.1 \rightarrow$ Topologia tradicional do modelo CROS com, em média, 10% de conexões de longo alcance. Uma rede de mundo pequeno;
- $p = 1.0 \rightarrow$ Modelo CROS com 100% das ligações excitatórias refeitas de maneira aleatória. Um grafo aleatório.

A matriz de adjacência para as 3 topologias, com dois valores diferentes de densidade de conectividade excitatória está representada na Fig. 29. Para visualização da matriz de adjacência foi simulada uma rede de tamanho 50×50, que não equivale aos tamanhos simulados durante este trabalho, mas foi escolhida devido à melhor visualização das conexões. Como a rede originalmente é bidimensional, para compor a representação gráfica da matriz de adjacência, os elementos foram dispostos unidimensionalmente. A rede foi dividida em linhas e tais linhas foram concatenadas em uma única linha, de forma que o primeiro elemento da segunda linha está logo depois do último elemento da primeira linha, e assim sucessivamente, de maneira que neurônios de uma mesma linha não mudaram de ordem. Para a rede bidimensional, é possível perceber que tanto as conexões excitatórias indicadas pelos pontos vermelhos, quanto as conexões inibitórias (pontos azuis) estão distribuídas em linhas diagonais, o que indica que são conexões locais. Na medida em que p vai aumentando, as conexões excitatórias se tornam conexões de longa distância, o que é visível quando os pontos vermelhos vão se dispersando pelo gráfico, contudo, as conexões inibitórias mantêm o seu caráter local. Para a rede aleatória, as conexões excitatórias estão completamente espalhadas pela rede, não sendo perceptível nenhuma tendência nos pontos vermelhos do gráfico.

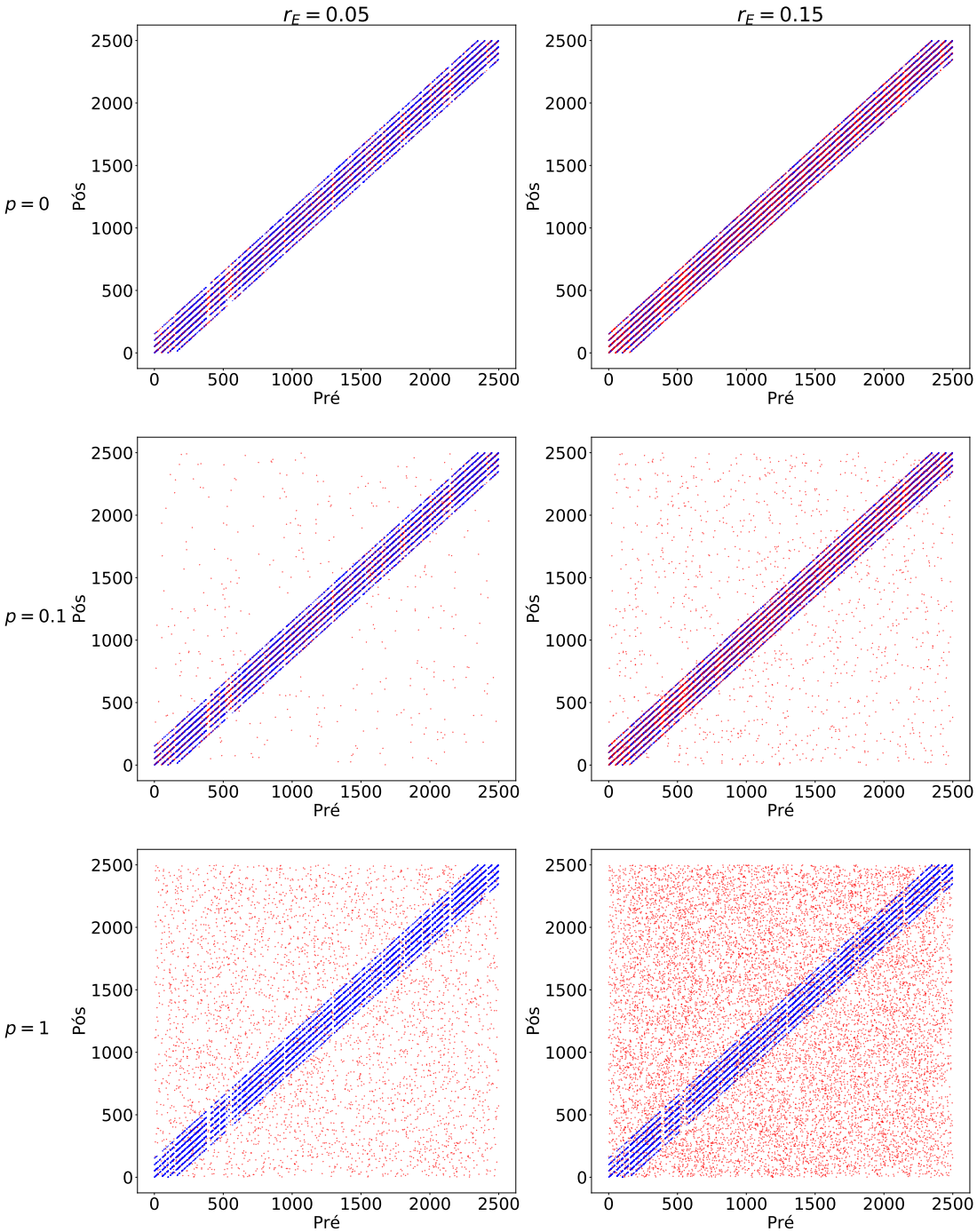

Figura 29 – Matriz de adjacência para as três topologias exploradas. Conexões inibitórias em azul e excitatórias em vermelho.

Novamente para diminuir a quantidade de parâmetros livres L, ℓ e r_I foram mantidos constantes, enquanto que r_E e p foram os principais parâmetros de controle das simulações. Com relação aos parâmetros da análise de dados, além do limiar global Γ já utilizado, têm-se os parâmetros de ajuste das distribuições de leis de potência, s_{min} e t_{min}. A estimativa dos expoentes, através do critério de máxima verossimilhança (*Maximumum Likelihood Estimator* - MLE), é extremamente sensível à porção da distribuição onde o ajuste é realizado [25] Os parâmetros, tanto de simulação quanto de análise dos dados, podem ser vistos na Tabela 6. Cada configuração da rede foi simulada 5 vezes.

	Neurônios	
	Excitatórios (E)	Inibitórios (I)
$r_$	[0.05, 0.58]	0.6
τ_P	6 ms	12 ms
τ_I	9 ms	9 ms
I_0	0	0
P_0	10^{-6} ms	0
$W_{E_}$	0.02	-2
$W_{I_}$	0.011	-2
Análise de dados	Rede	
$s_{min} = [2, 5, 10, 20, 49]$	$L = 300$	$\ell = 7$
$t_{min} = [2, 4, 8, 10, 20]$	$t = 10^3$ s	$dt = 1$ ms
$\Gamma = [0.2, 0.9]$	$p = [0,\ 0.1,\ 1]$	

Tabela 6 – Tabela de parâmetros utilizados nas simulações com limiar global. As células com fundo cinza mostram os parâmetros livres, com os devidos intervalos de variação, as de fundo branco os parâmetros fixos.

Os resultados serão divididos de acordo com o valor de p. Primeiro analisamos $p = 0.0$, que é equivalente à topologia utilizada anteriormente [7, 6]; em seguida, $p = 0.1$, mostram-se os resultados obtidos para redes de mundo pequeno, encerrando o capítulo com o grafo aleatório, quando $p = 1.0$.

4.2.1 Bidimensional Quadrada

Esta configuração foi usada como situação controle, visto que um $p = 0$ implica que mesmo com as conexões sendo revisitadas, elas não deveriam ser alteradas. Logo, os resultados devem ser consistentes com o que já foi reportado na literatura do modelo [7, 6].

As três regiões, cujos comportamentos das distribuições foram mostrados por Dalla Porta e Copelli [6], estão exibidas na Fig. 32 No entanto a região de transição, antes indicada pela área cinza na Fig. 15, foi mapeada no espaço de parâmetros de r_E e Γ. Seu reconhecimento se deu através do LLR, ao comparar o ajuste de uma lei de potência truncada, com o de uma exponencial e com a lognormal. Os valores

obtidos estão representados por mapas de cores; quando positivo, indicam que a primeira distribuição é favorecida (lei de potência truncada); quando negativo, a segunda (lognormal ou exponencial).

A faixa vermelha na Fig. 31 é coerente, tanto com a região cinza da Fig. 15, quanto com os mapas de calor para os índices κ da Fig. 14. O fato dela ser mais extensa é explicado ao considerar que para calcular o índice κ restringe-se a leis de potência de um expoente pré-definido. Tal restrição não ocorre ao utilizar o LLR, possibilitando uma banda maior de leis de potência. A região em vermelho da Fig. 31, para $r_E \geqslant 0.2$ não é possível calcular os expoentes das distribuições visto que há pouca variedade no tamanho das avalanches, como mostrado na Fig. 30, que apresenta pouquíssimos pontos.

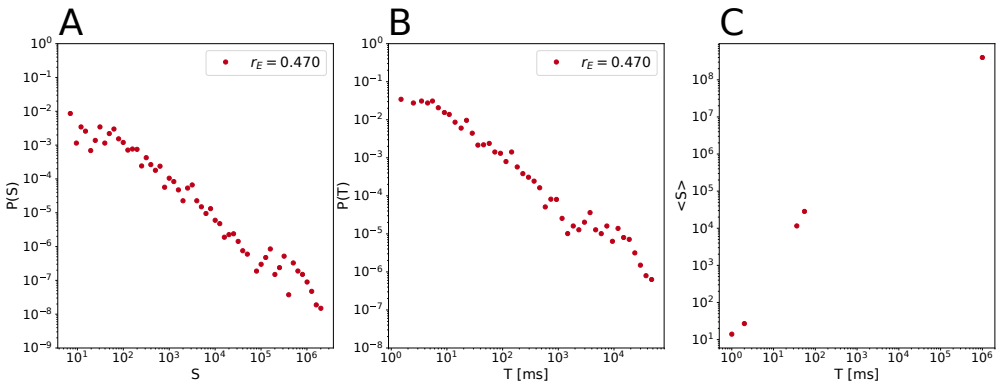

Figura 30 – Limiar global, topologia bidimensional. A. Distribuição de tamanho das avalanches; B. Distribuição de duração; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches.

Tendo a região de transição mapeada, o cálculo dos expoentes das leis de potência pode ser feito. Como mostrado nas Figs. 32 A, B e C respectivamente, o expoente τ, assim como na Eq. 1.4 está relacionado à distribuição de tamanho; τ_t à distribuição de duração (Eq. 1.5); e o expoente $1/\sigma\nu z$ à relação do tamanho médio de uma avalanche dada uma duração.

Entretanto, não somente os expoentes, como também o próprio LLR são extremamente sensíveis à região de ajuste escolhida [25], o que pode ser observado na Fig 33. Em A. e C. o gráfico das distribuições de tamanho e duração respectivamente, podem ser vistos. Cada linha dentro dos gráficos representa o ajuste da distribuição para dado valor de s_{min} e t_{min}. Os ajustes estão deslocados verticalmente com relação aos pontos devido à normalização aplicada para manter a área sob a curva igual à um. O uso de linha contínua indica que a distribuição foi aprovada pelo LLR como uma lei de potência; por sua vez, uma linha tracejada indica que o critério escolheu uma exponencial ou lognormal como mais apropriadas. Mesmo quando a distribuição falha no critério do LLR, um expoente foi calculado. O valor estimado do expoente em função do limite do ajuste está mostrado na Fig. 33B. para a distribuição de tamanho e na Fig. 33D. para a distribuição de duração.

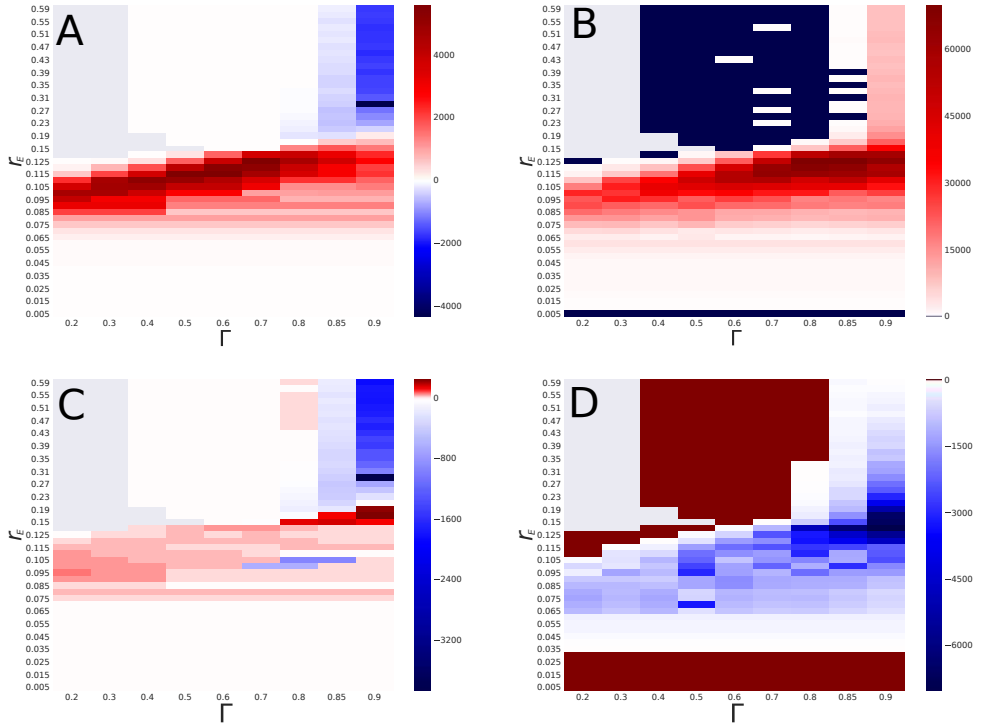

Figura 31 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). Mapas de cor mostrando os valores encontrados para o LLR ao comparar o ajuste de uma lei de potência truncada (em vermelho) com uma exponencial (em azul nas figuras A e B) ou com uma lognormal (em azul nas figuras C e D) A e C mostram distribuições de tamanho e B e D de duração. Considerando $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$.

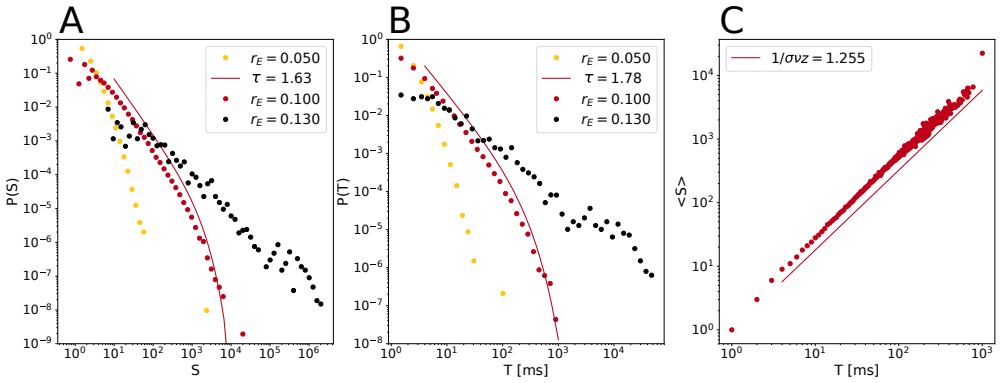

Figura 32 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). A. Distribuição de tamanho de avalanches para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; B. Distribuição de duração para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches, com seu respectivo ajuste e expoente.

As curvas dos expoentes em função do limite inferior parecem ter um comportamento assintótico, para a topologia bidimensional e para os valores de parâmetros em questão ($r_E = 0.095$, $r_I = 0.600$). Tal mudança no valor dos expoentes afeta diretamente o lado direito da relação de escala (Eq. 1.7), como mostrado no mapa de cores da Fig. 33E. Valores em vermelho indicam que o lado da equação relacionado a τ e τ_t é maior, valores em azul, o contrário. Quando a célula encontra-se na cor branca, os dois lados da equação são iguais, satisfazendo os requisitos propostos por Touboul e Destexhe [22] para que o conjunto de parâmetros em questão possa ser considerado um ponto crítico do modelo.

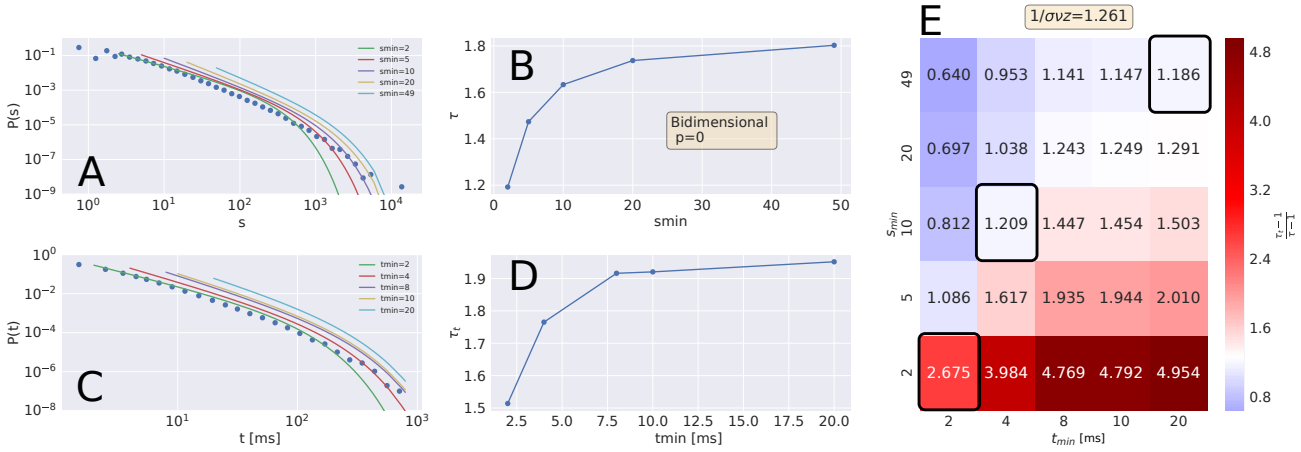

Figura 33 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). Influência da região de ajuste no cálculo dos expoentes das distribuições. Topologia bidimensional ($p = 0.0$), $r_E = 0.095$, $\Gamma = 0.5$ A. Distribuição de tamanho: os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. B. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de tamanho em função de s_{min}. C. Distribuição de duração, os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. D. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de duração em função de t_{min}. E. Mapa de cores para o lado direito da relação de escala (Eq. 1.7). Quando a relação entre os expoentes τ e τ_t é ~ 1.26, valor encontrado para o expoente $1/\sigma\nu z$, o mapa de cores exibe cor branca. Destaque para as combinações de s_{min} e t_{min} utilizados para os gráficos da relação de escala

A distância entre os valores mínimo e máximo encontrados mostra como a escolha dos parâmetros de ajuste pode alterar em até uma ordem de grandeza um dos lados da relação de escala, o que torna a detecção de um ponto crítico sensível a esta escolha.

Em busca do ponto crítico do modelo, a relação de escala dada pela Eq. 1.7 foi testada para diferentes valores dos parâmetros de ajuste. Assim como Dalla Porta e Copelli (2019) o cálculo dos expoentes se restringiu à região identificada pelo LLR como sendo leis de potência. Três duplas de s_{min} e t_{min} foram escolhidos para fazer o gráfico da relação de escala (Fig. 34): $s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$ foram escolhidos por serem os valores utilizados por Fontenele e colaboradores [4]; $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ por serem os valores utilizados por Dalla Porta e Copelli [6]; por sua vez, $s_{min} = 49$ é o tamanho da vizinhança de cada

neurônio no modelo, por isso também foi escolhido. Já $t_{min} = 20$ foi escolhido por ser o valor máximo que preserva a lei de potência da distribuição de duração por pelo menos uma década. No entanto, tais valores são arbitrários, desde que façam um bom ajuste, e foram escolhidos com base na distribuição exibida na Fig 33C, o que não necessariamente implica em serem os valores mais apropriados para todas as distribuições.

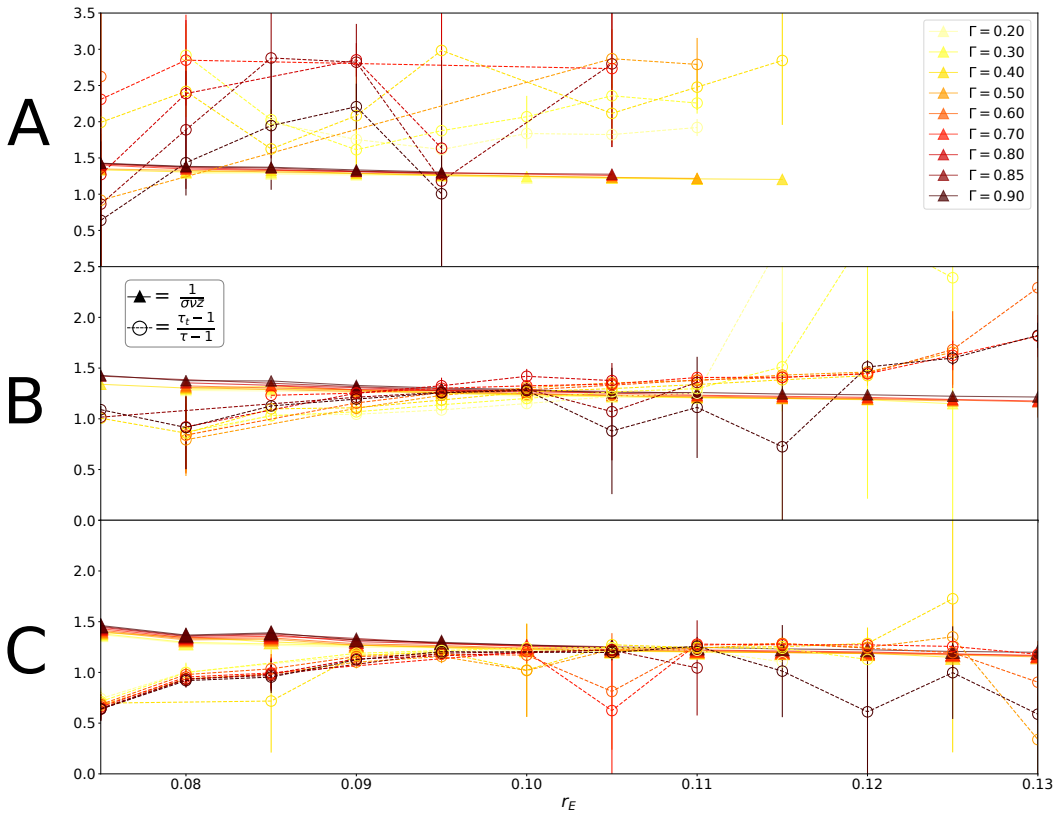

Figura 34 – Limiar global, topologia bidimensional ($p = 0$). Média de 5 realizações da relação de escala para diferentes valores de Γ, para 3 pares de limites inferiores para as distribuições. A: $s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$ ms; B $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms; C $s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$ ms.

Para algumas configurações de parâmetros o expoente τ assume valores muito próximos de 1, o que leva a divergências na expressão $\frac{\tau_t - 1}{\tau - 1}$. Para evitá-las, não foram considerados valores em que razão em questão apresentou valor maior do que 3, o que acarretou a ausência de alguns pontos nos três gráficos, apesar de ser mais evidente na Fig. 34. Percebe-se que a escolha dos limites inferiores pode ser importante para o aparecimento de pontos críticos, afetando o valor de r_E em que o ponto se encontra, quando existe. Todavia, o valor assumido pela relação de escala não parece ser afetado. As linhas representantes dos dois lados da equação 1.7 se cruzam no meio do caminho entre 1

e 1.5, o que é consistente com a reta mostrada na Fig. 5, onde diversos trabalhos, tanto experimentais quanto teóricos reportam como coeficiente angular da relação $\frac{\tau_t}{\tau}$, o valor de 1.28. Este valor parece ser robusto com relação aos parâmetros de ajuste (s_{min} e t_{min}) e de análise (Γ) de dados.

4.2.2 Mundo Pequeno

Os mesmos 3 comportamentos da distribuição encontrados para a topologia bidimensional podem ser observados na rede de mundo pequeno, como exemplificado na Fig. 35. Após identificar a existência de distribuições em forma de lei de potência, a região em que estas se encontram foi mapeada através do LLR, usando $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms.

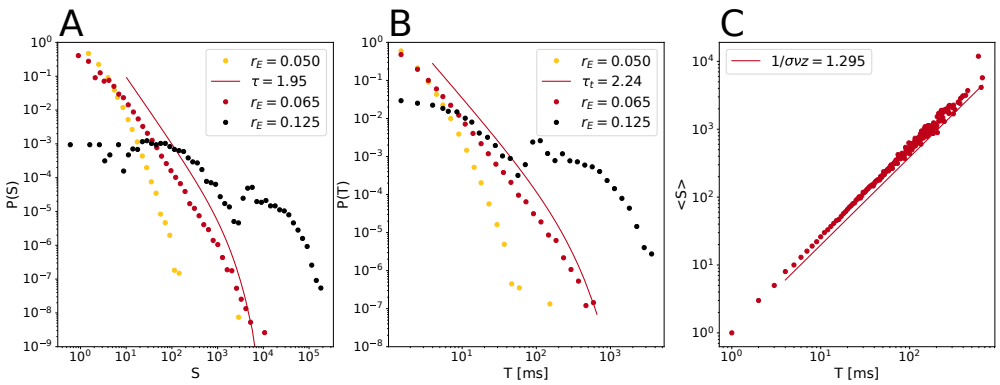

Figura 35 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). A. Distribuição de tamanho de avalanches para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; B. Distribuição de duração para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches, com seu respectivo ajuste e expoente.

Com relação à topologia bidimensional, é possível observar na Fig. 36 que a região considerada como lei de potência é extremamente dependente do limiar de atividade global Γ. Na medida em que o limiar aumenta, a região vai ficando mais espessa, o que não ocorria na topologia anterior, a espessura da faixa vermelha na Fig. 31 é quase constante. Outra mudança foram os valores de r_E em que ela aparece, que são valores mais baixos. Isso ocorre devido ao fato de conexões de longa distância facilitarem a propagação de sinal.

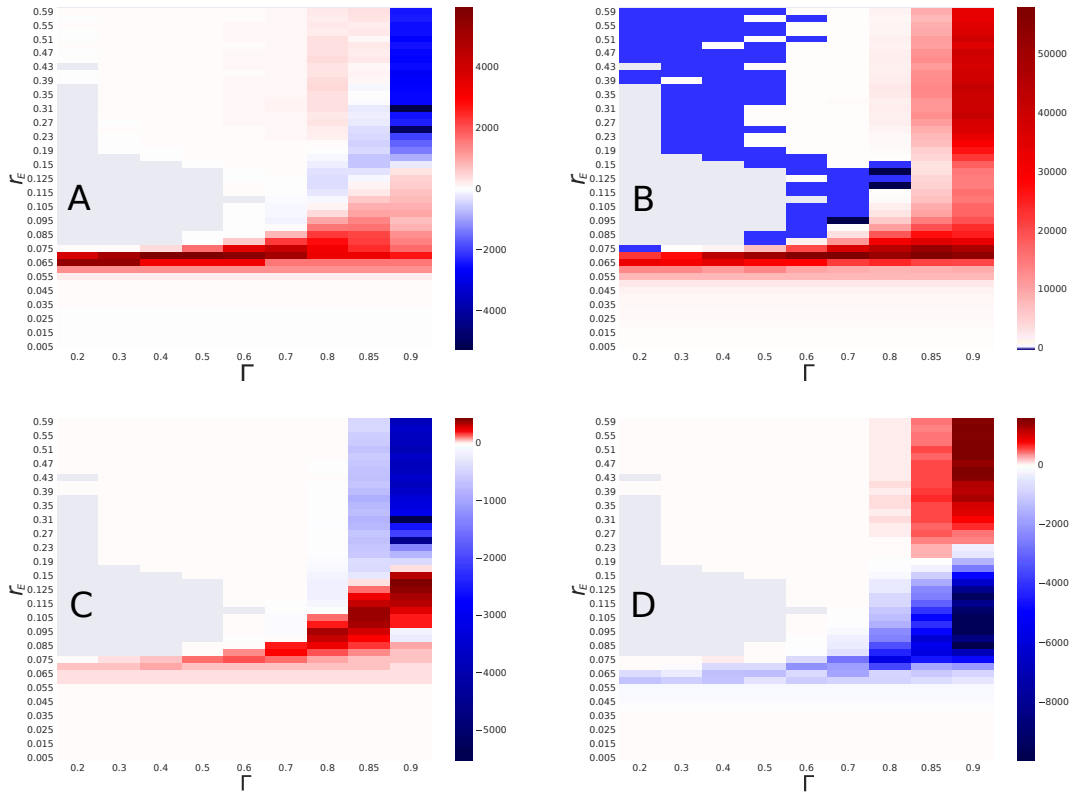

Figura 36 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). Mapas de cor mostrando os valores encontrados para LLR ao comparar o ajuste de uma lei de potência truncada (em vermelho) com uma exponencial (em azul nas Figs. A e B) ou com uma lognormal (em azul nas Figs. C e D). A e C mostram distribuições de tamanho e B e D de duração. Considerando $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms.

Os parâmetros de ajuste testados foram os mesmos utilizados para a topologia bidimensional. Como era esperado, as redes de mundo pequeno apresentam a mesma sensibilidade aos parâmetros de ajuste. Entretanto, no conjunto de parâmetros escolhido, o expoente de duração das avalanches não cresce assintoticamente, como anteriormente. É possível observar uma pequena queda no seu valor para $t_{min} = 20$ ms.

Diferentemente do que ocorreu para a topologia bidimensional, onde a região de ajuste altera o valor de r_E para o qual os dois lados da relação de escala são iguais, para as redes de mundo pequeno isso não ocorreu. As linhas continuam se encontrando para um $r_E \approx 0.065$, apesar da forma dos curvas referentes à relação de escala serem alteradas de acordo com o limites, o valor em que se encontram não muda.

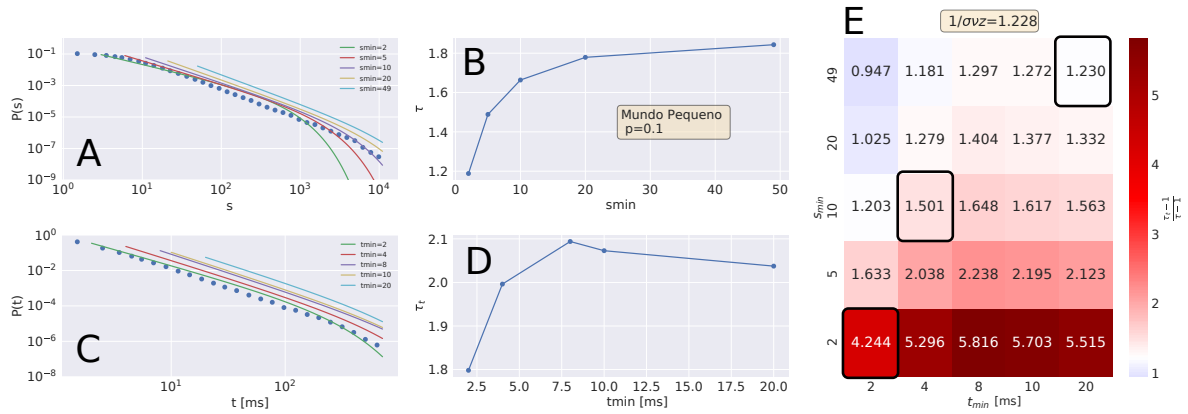

Figura 37 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). Influência da região de ajuste no cálculo dos expoentes das distribuições. $r_E = 0.070$, $\Gamma = 0.8$ A. Distribuição de tamanho: os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. B. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de tamanho em função de s_{min}. C. Distribuição de duração, os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. D. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de duração em função de t_{min}. E. Mapa de cores para o lado direito da relação de escala (Eq. 1.7). Quando a relação entre os expoentes τ e τ_t é ~ 1.23, valor encontrado para o expoente $1/\sigma\nu z$, o mapa de cores exibe cor branca. Destaque para as combinações de s_{min} e t_{min} utilizados para os gráficos da relação de escala

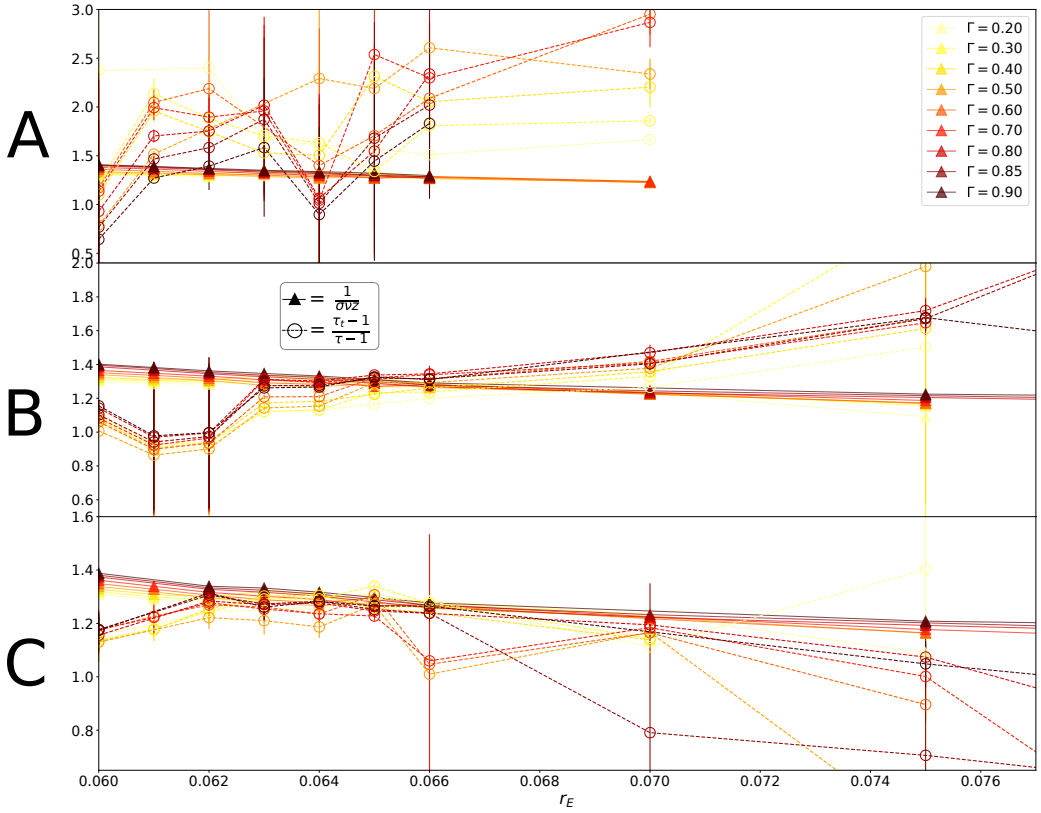

Figura 38 – Limiar global, topologia mundo pequeno ($p = 0.1$). Média de 5 realizações da relação de escala para diferentes valores de Γ, para 3 pares de limites inferiores para as distribuições. A: $s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$ ms; B: $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$ ms; C: $s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$ ms.

4.2.3 Grafo Aleatório

Com 100% das ligações dos neurônios excitatórios refeitas sem restrição de distância, surgem mais conexões de longo alcance, o que fez com que a região de leis de potência aparecesse para valores menores de r_E (em comparação à topologia bidimensional e de mundo pequeno) (Figs. 39 e 40). Além disso, a região de transição se tornou menor, tendências estas que foram observadas na medida em que p foi aumentando. É possível

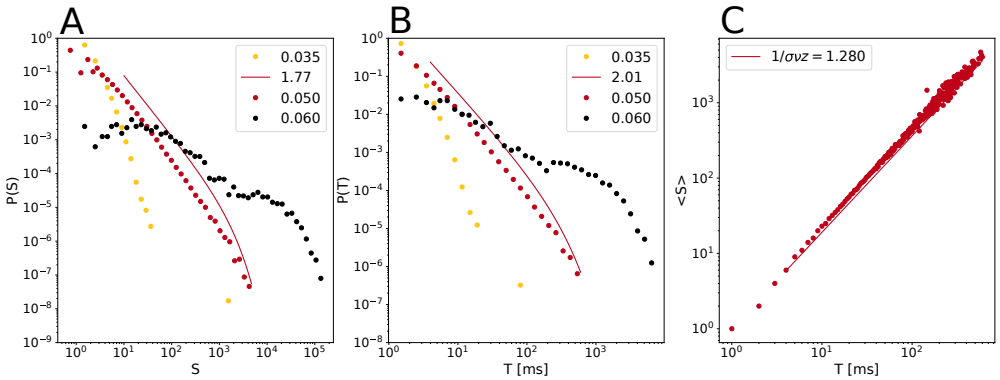

Figura 39 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). A. Distribuição de tamanho de avalanches para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; B. Distribuição de duração para 3 valores de r_E, como o ajuste e o respectivo expoente para a lei de potência; C. Tamanho médio dada uma duração de avalanches, com seu respectivo ajuste e expoente.

observar a influência dos parâmetros de ajuste no cálculo dos expoentes (Fig. 41), o que faz com o lado direito da relação de escala aumente em até uma ordem de grandeza.

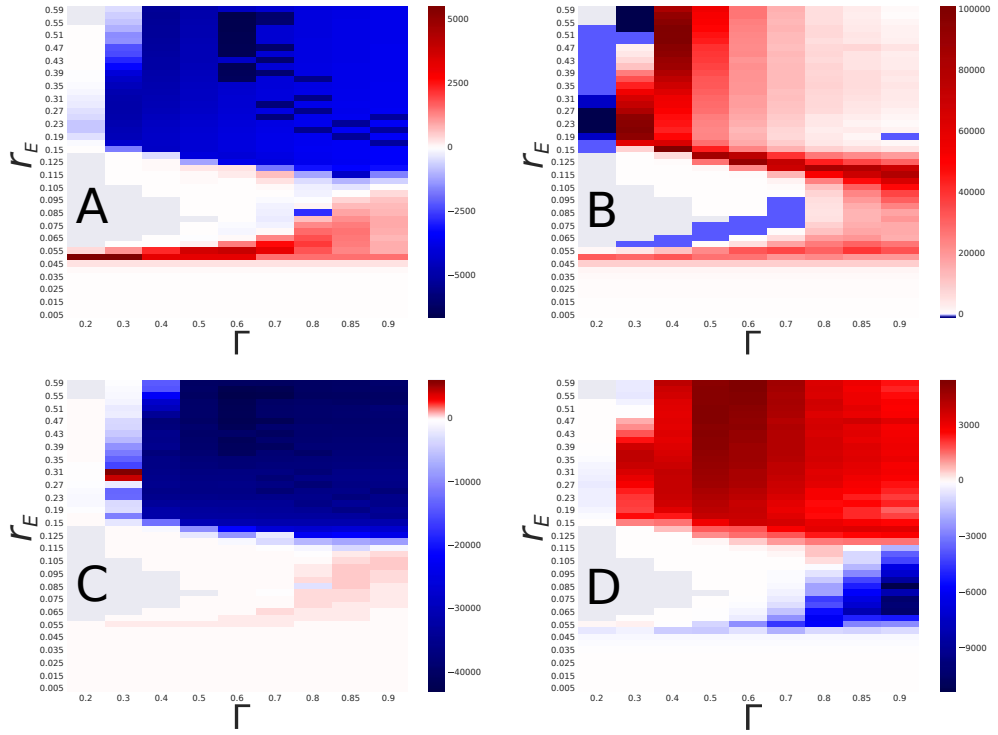

Figura 40 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). Mapas de cor, para o grafo aleatório, mostrando os valores encotrados para o LLR ao comparar o ajuste de uma lei de potência truncada com uma exponencial (A e B) ou com uma lognormal (C e D) A e C mostram distribuições de tamanho e B e D de duração

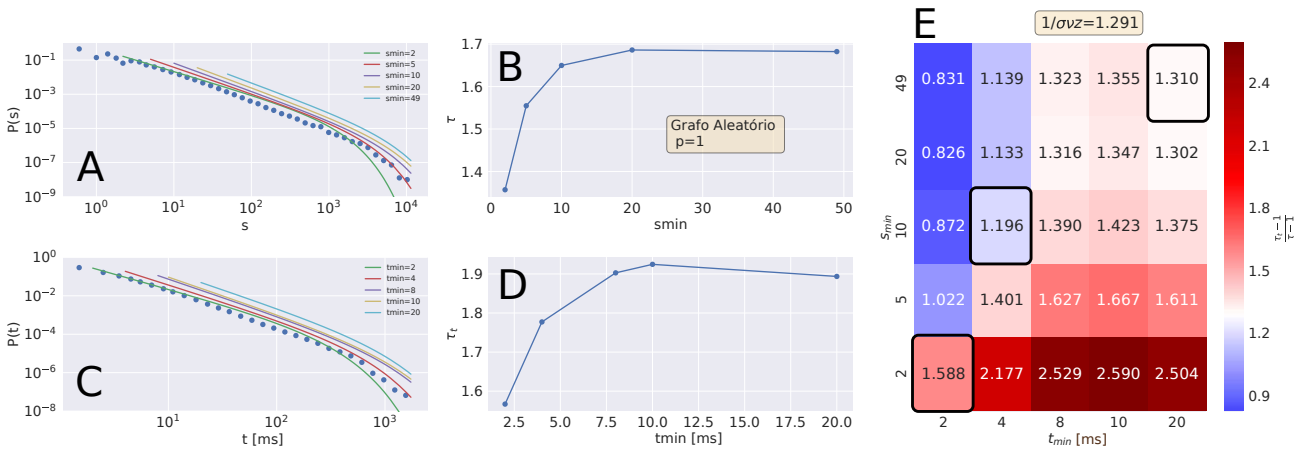

Figura 41 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). Influência da região de ajuste no cálculo dos expoentes das distribuições. $r_E = 0.05$, $\Gamma = 0.2$ A. Distribuição de tamanho: os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. B. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de tamanho em função de s_{min}. C. Distribuição de duração, os pontos indicam a distribuição; as linhas os diferentes ajustes. D. Valores obtidos para os expoentes da distribuição de duração em função de t_{min}. E. Mapa de cores para o lado direito da relação de escala (Eq. 1.7). Quando a relação entre os expoentes τ e τ_t é ~ 1.28, valor encontrado para o expoente $1/\sigma\nu z$, o mapa de cores exibe cor branca. Destaque para as combinações de s_{min} e t_{min} utilizados para os gráficos da relação de escala

Apesar de ser mais evidente para $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$, o ponto em que a relação de escala (Eq. 1.7) é válida para o grafo aleatório independe da região de ajuste escolhida. Sendo que o valor obtido para tal relação é o mesmo que já reportado anteriormente para a rede bidimensional quadrada e para a rede de mundo pequeno, entre 1.2 e 1.3. A diferença observada entre os valores de r_E considerados críticos já era esperado, pois a inserção de conexões de longo alcance facilita a comunicação na rede.

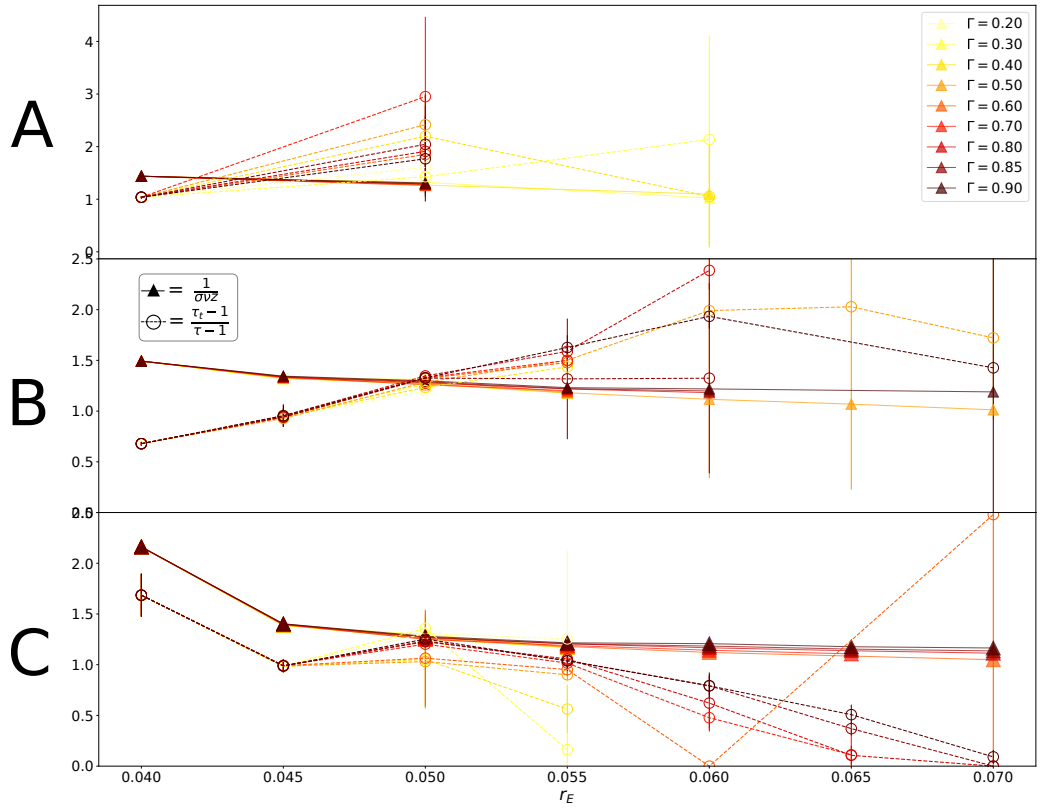

Figura 42 – Limiar global, topologia grafo aleatório ($p = 1$). Média de 5 realizações da relação de escala para diferentes valores de Γ, para 3 pares de limites inferiores para as distribuições. A: $s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$; B $s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$; C $s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$.

4.2.4 Expoentes Variam Continuamente

O ponto crítico para o modelo CROS, com as três topologias utilizadas (bidimensional, mundo pequeno e grafo aleatório), apresenta certa robustez com relação ao limiar global Γ. Contudo, Dalla Porta e Copelli [6] reportaram uma dependência do valor de ambos os expoentes com Γ e r_E. Através do ajuste das distribuições (Figs. 33, 37 e 41) percebe-se que os parâmetros ($s_{min} = 2$ e $t_{min} = 2$) e ($s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$) não são

as melhores escolhas. Para o primeiro par de parâmetros os ajustes falham na cauda exponencial. Para o segundo as leis de potência são muito pequenas. O que se confirma ao visualizar o tamanho da barra de erro nos gráficos das relações entre os expoentes τ_t e τ (Fig. 43). Portanto, as discussões focarão nos expoentes encontrados para ($s_{min} = 10$ e $t_{min} = 4$), que, além de apresentarem os valores com barra de erro menores, coincidem com os limites utilizados por Dalla Porta e Copelli [6].

No ponto crítico, para a topologia bidimensional ($p = 0$), ambos expoentes aumentam de valor na medida que o limiar local Γ aumenta. Contudo, para as outras duas topologias, surgem platôs na relação τ_t *vs.* τ, como mostrado na Fig. 44. Estes valores podem ser comparados aos expoentes críticos calculados por Fontenele e colaboradores para ratos anestesiados com uretana e para o camundongo em comportamento livre, os valores estão mostrados na Tabela 7, o ponto crítico está representado como um intervalo devido à barra de erro dos expoentes. A área laranja (verde) nos gráficos da Fig. 44, indica o intervalo dos expoentes críticos para o camundongo em comportamento livre (rato anestesiado com uretana). Ou seja, o modelo CROS reproduz os expoentes críticos experimentais ao variar o valor de Γ, visto que a relação de escala é robusta com relação ao limiar global, porém o valor dos expoentes críticos não.

	τ	τ_t
Camundongo	$[1.6, 1.75]$	$[1.8, 2.0]$
Rato	$[1.4, 1.65]$	$[1.6, 1.8]$

Tabela 7 – Expoentes críticos das distribuições de duração τ_t e tamanho encontrados por Fontenele e colaboradores [4].

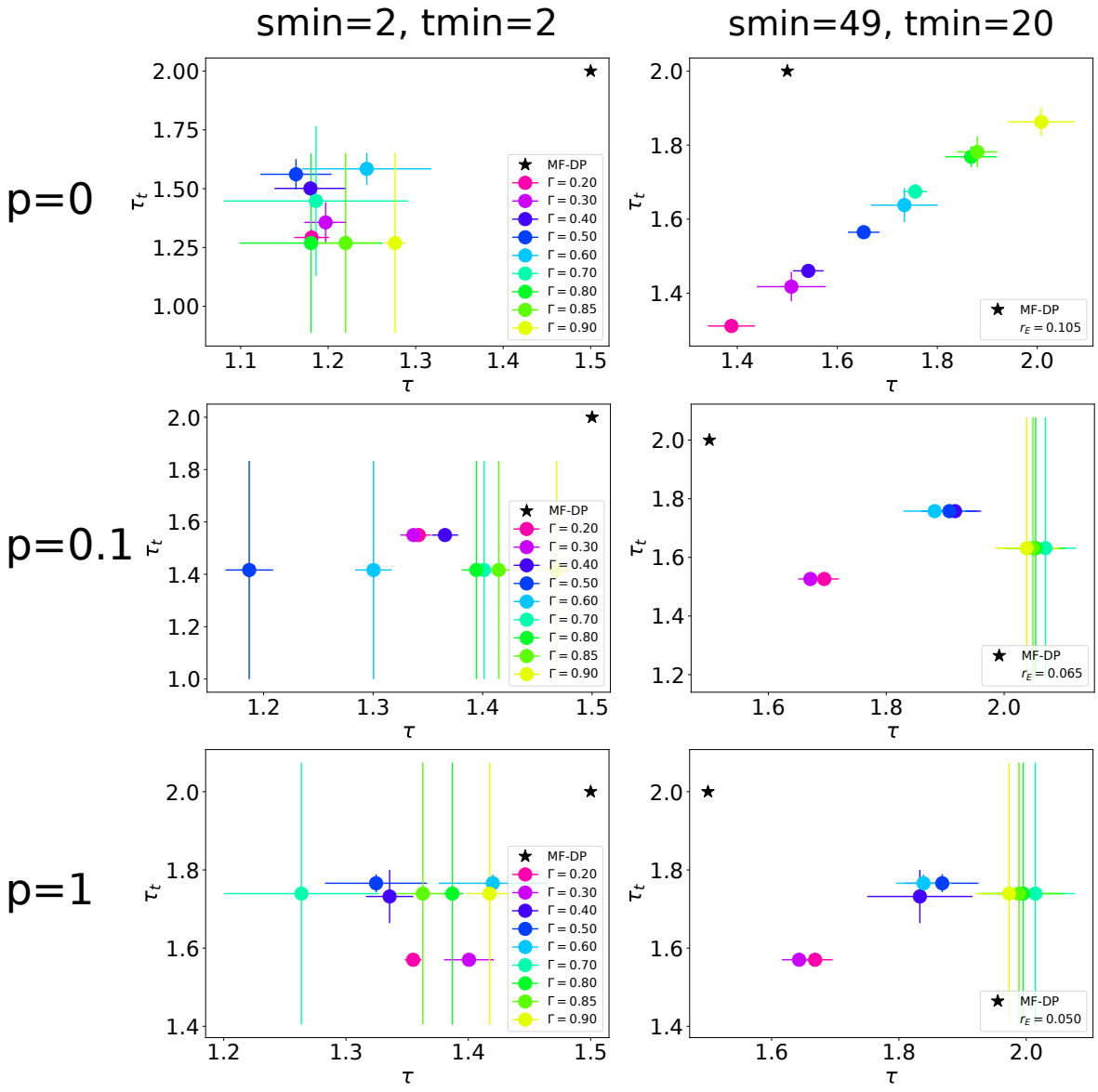

Figura 43 – Relação dos expoentes críticos de duração τ_t e tamanho τ das distribuições de avalanches, para as 3 topologias: $p = 0 \rightarrow$ bidimensional; $p = 0.1 \rightarrow$ mundo pequeno; $p = 1 \rightarrow$ grafo aleatório. Para dois pares de limites inferiores ($s_{min} = 2$, $t_{min} = 2$) e ($s_{min} = 49$ e $t_{min} = 20$).

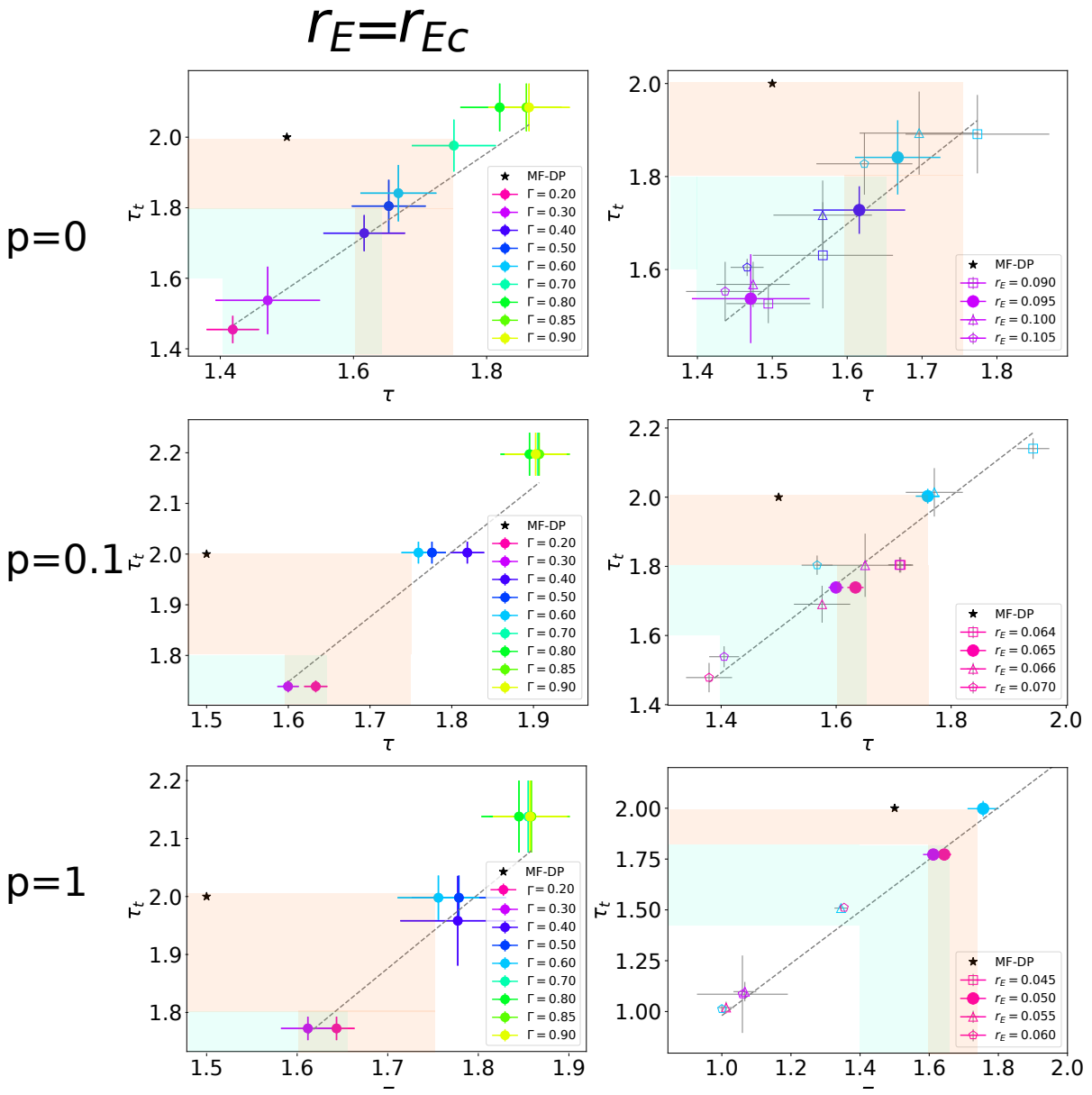

Figura 44 – Relação dos expoentes de duração e tamanho das distribuições de avalanches, para as 3 topologias: $p = 0 \rightarrow$ bidimensional; $p = 0.1 \rightarrow$ mundo pequeno; $p = 1 \rightarrow$ grafo aleatório. Para dois pares de limites inferiores ($s_{min} = 10$, $t_{min} = 4$). A linha tracejada indica a tendência linear da relação ~ 1.28 e o quadrado preto o valor dos expoentes para MF-DP. Área preenchida pela cor verde mostra os valores dos expoentes para o camundongo. Área sombreada por laranja para o rato. Círculos preenchidos indicam os expoentes para o parâmetro crítico r_Ec (0.095, 0.065, 0.050, topologias bidimensional, mundo pequeno e grafo aleatório, respectivamente)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi explorado o modelo CROS como uma alternativa aos modelos de percolação direcionada usualmente utilizados no estudo de simulações de redes de neurônios. A falta e a busca de um ponto crítico no CROS levou à duas abordagens diferenciadas. Inicialmente, sem modificações no modelo, mudou-se a definição de avalanches, recuperando a definição clássica de avalanche neuronal proposta por Beggs e Plenz [2]. Para isso uma matriz de eletrodos foi simulada e a atividade da rede, que antes era analisada globalmente, agora passou a ser analisada localmente, por eletrodo. Com esta alteração da maneira como os dados são analisados, a região com leis de potência desapareceu. O que pode ter ocorrido devido a 3 fatores, listados abaixo.

1. **A precisão dos parâmetros utilizados:**
   A largura da região de transição reportada previamente na literatura do modelo, em função de r_E (Fig. 15), é da ordem do tamanho do passo utilizado aqui para varrer o espaço de parâmetros. Isso poderia ter feito a região de leis de potência ter passado despercebida.

   Dada as nossas limitações computacionais, especialmente no âmbito de espaço de armazenamento em disco, não foi possível fazer uma varredura mais precisa no espaço de parâmetros do modelo.

2. **Falta de superposição entre as regiões de alcance dos eletrodos:**
   Não há superposição entre a atividade detectada por eletrodos diferentes. Tampouco há ruído no sinal recebido por cada um. O que não ocorre em eletrodos reais, num experimento, eletrodos são capazes de detectar atividades de neurônios isolados apenas quando estes se encontram muito próximos do ponto de leitura. Já para neurônios distantes, detectam apenas ruídos, existindo uma região entre a de detecção de atividades unitárias e de ruído que apenas são detectados atividades sincronizadas de um grupo de neurônios, não sendo possível identificar exatamente qual foi a origem do evento [38].

   Seria necessário uma modificação na simulação da matriz de eletrodos para considerar que um neurônio pudesse ser detectado por mais de um eletrodo. Contudo, isso implicaria adicionar pelo menos mais um parâmetro à análise de dados, o alcance de cada eletrodo: ao modificar o alcance de cada eletrodo, a área de intersecção entre as atividades de cada um também dependeria da distância entre eles.

3. **Interpretação dos dados:**
   A binarização dos dados foi feita de maneira análoga ao que é feito para dados de

LFP e MEEG, entretanto o CROS é um modelo de disparos de neurônios, ou seja, a maneira como o limiar local, através de uma matriz de eletrodos, foi simulada pode não ser adequada ao modelo.

Estas questões seriam merecedoras de serem investigadas no futuro. Especialmente a número 3. É preciso considerar a binarização dos dados de maneira coerente com o modelo.

O próximo passo foi modificar a topologia da rede, inserindo conexões de longo alcance. Nesta situação, a definição de avalanche com limiar global foi recuperada, retomando a análise utilizada previamente no modelo [6, 7]. Entretanto ao realizar o estudo de avalanches no modelo, surgiram alguns detalhes que mereceram uma certa cautela. Dentre eles destaca-se a sensibilidade dos expoentes obtidos para as distribuições de leis de potência. Os expoentes encontrados são extremamente sensíveis aos parâmetros de ajuste escolhidos. Devido a efeitos de tamanho finito, é preciso considerar com cuidado os limites do ajuste das leis de potência. Usualmente tal escolha é feita visualmente, mas isto se torna muito desafiador quando se está percorrendo um grande número de pontos no espaço de parâmetros de um modelo, devido à grande quantidade e variação do tamanho das leis de potência encontrados. Faz-se necessária uma maneira eficiente e sem viés de encontrar a região das distribuições que podem ser ajustadas por leis de potência.

Diferente do esperado, foram encontrados pontos críticos para o modelo nas três topologias, com valor robusto quanto ao limiar global Γ utilizado, porém não em relação aos parâmetros de ajuste. Este é um ponto que merece atenção futura, visto que contradiz o resultado de Dalla Porta e Copelli[6]. Tal divergência é parcialmente explicada devido à diferença em espessura entre as regiões de transição. O ponto crítico da topologia bidimensional se encontra fora da região reportada por Dalla Porta e Copelli, contudo, está inserido na região encontrada neste trabalho. Esta diferença em espessuras da região de transição ainda será explorada com cautela, sendo que, uma das possíveis causas é a sensibilidade do modelo à flutuações.

Todavia ainda falta analisar se, ao modificar a topologia da rede, as correlações temporais de longo alcance não foram perdidas e se coincidem com os pontos críticos encontrados, visto que o diferencial do modelo é a presença das LRTCs e das leis de potência na mesma região.

REFERÊNCIAS

1 BRIDGE, A. My champion. M. Kennedy e M. Tremonti [Compositor]. In: _____. *The Last Hero*. Orlando: Studio Barbarosa, 2016. 1 disco sonoro (66 min), faixa 4, (4 min 40 s). Citado na página 5.

2 BEGGS, J. M.; PLENZ, D. Neuronal avalanches in neocortical circuits. *Journal of neuroscience*, Soc Neuroscience, v. 23, n. 35, p. 11167–11177, 2003. Citado 14 vezes nas páginas 8, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 31, 36, 38, 39, 41 e 68.

3 PENG, C.-K. et al. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical review e*, APS, v. 49, n. 2, p. 1685, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 23.

4 FONTENELE, A. J. et al. Criticality between cortical states. *Physical review letters*, APS, v. 122, n. 20, p. 208101, 2019. Citado 11 vezes nas páginas 8, 10, 15, 17, 24, 36, 41, 55, 65, 74 e 77.

5 ZHIGALOV, A. et al. Relationship of fast-and slow-timescale neuronal dynamics in human meg and seeg. *Journal of Neuroscience*, Soc Neuroscience, v. 35, n. 13, p. 5385–5396, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 8, 24, 25 e 36.

6 DALLA PORTA, L.; COPELLI, M. Modeling neuronal avalanches and long-range temporal correlations at the emergence of collective oscillations: continuously varying exponents mimic m/eeg results. *PLOS Computational Biology*, Public Library of Science, v. 15, n. 4, p. e1006924, 2019. Citado 16 vezes nas páginas 9, 10, 28, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 52, 56, 64, 65, 69, 74 e 76.

7 POIL, S.-S. et al. Critical-state dynamics of avalanches and oscillations jointly emerge from balanced excitation/inhibition in neuronal networks. *Journal of Neuroscience*, Soc Neuroscience, v. 32, n. 29, p. 9817–9823, 2012. Citado 15 vezes nas páginas 9, 15, 18, 24, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 38, 42, 49, 52 e 69.

8 PALVA, J. M. et al. Neuronal long-range temporal correlations and avalanche dynamics are correlated with behavioral scaling laws. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 110, n. 9, p. 3585–3590, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 10, 24, 36, 37 e 39.

9 WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world'networks. *nature*, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 10, 41 e 43.

10 MUÑOZ, M. A. et al. Avalanche and spreading exponents in systems with absorbing states. *Physical Review E*, APS, v. 59, n. 5, p. 6175, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 26.

11 ALSTOTT, J.; BULLMORE, E.; PLENZ, D. powerlaw: a python package for analysis of heavy-tailed distributions. *PloS one*, Public Library of Science, v. 9, n. 1, p. e85777, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 15, 74 e 75.

12 MARSHALL, N. et al. Analysis of power laws, shape collapses, and neural complexity: new techniques and matlab support via the ncc toolbox. *Frontiers in physiology*, Frontiers, v. 7, p. 250, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 15, 41, 74 e 75.

13 KANDEL, E. R. et al. *Principles of neural science*. [S.l.]: McGraw-hill New York, 2000. v. 4. Citado 3 vezes nas páginas 17, 30 e 50.

14 CHIALVO, D. R. Emergent complex neural dynamics. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 10, p. 744, 2010. Citado na página 17.

15 SHEW, W. L.; PLENZ, D. The functional benefits of criticality in the cortex. *The neuroscientist*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 19, n. 1, p. 88–100, 2013. Citado na página 17.

16 SCHUSTER, H. G. *Criticality in neural systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014. Citado na página 17.

17 COCCHI, L. et al. Criticality in the brain: A synthesis of neurobiology, models and cognition. *Progress in neurobiology*, Elsevier, v. 158, p. 132–152, 2017. Citado na página 17.

18 MUÑOZ, M. A. Colloquium: Criticality and dynamical scaling in living systems. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 90, n. 3, p. 031001, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

19 WILTING, J.; PRIESEMANN, V. 25 years of criticality in neuroscience–established results, open controversies, novel concepts. *arXiv preprint arXiv:1903.05129*, 2019. Citado na página 17.

20 BRUNEL, N. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *Journal of computational neuroscience*, Springer, v. 8, n. 3, p. 183–208, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.

21 KINOUCHI, O.; COPELLI, M. Optimal dynamical range of excitable networks at criticality. *Nat. Phys.*, v. 2, p. 348–351, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 18, 25 e 26.

22 TOUBOUL, J.; DESTEXHE, A. Power-law statistics nd universal scaling in the absence of criticality. *Physical Review E*, APS, v. 95, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 19, 22 e 55.

23 SETHNA, J. P.; DAHMEN, K. A.; MYERS, C. R. Crackling noise. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 410, n. 6825, p. 242, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

24 DESTHEXHE, A.; BEDARD, C. *Local field potential*. <http://www.scholarpedia.org/article/Local_field_potential>. Acessado em: Setembro de 2019. Citado na página 19.

25 DELUCA, A.; CORRAL, Á. Fitting and goodness-of-fit test of non-truncated and truncated power-law distributions. *Acta Geophysica*, Springer, v. 61, n. 6, p. 1351–1394, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 20, 47, 52, 53, 74 e 77.

26 FRIEDMAN, N. et al. Universal critical dynamics in high resolution neuronal avalanche data. *Physical review letters*, APS, v. 108, n. 20, p. 208102, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.

27 LINKENKAER-HANSEN, K. et al. Long-range temporal correlations and scaling behavior in human brain oscillations. *Journal of Neuroscience*, Soc Neuroscience, v. 21, n. 4, p. 1370–1377, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.

28 NIKULIN, V. V.; BRISMAR, T. Long-range temporal correlations in electroencephalographic oscillations: relation to topography, frequency band, age and gender. *Neuroscience*, Elsevier, v. 130, n. 2, p. 549–558, 2005. Citado na página 22.

29 HARDSTONE, R. et al. Detrended fluctuation analysis: a scale-free view on neuronal oscillations. *Frontiers in physiology*, Frontiers, v. 3, p. 450, 2012. Citado na página 24.

30 SHEW, W. L. et al. Adaptation to sensory input tunes visual cortex to criticality. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 11, n. 8, p. 659, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 36.

31 SENZAI, Y.; FERNANDEZ-RUIZ, A.; BUZSÁKI, G. Layer-specific physiological features and interlaminar interactions in the primary visual cortex of the mouse. *Neuron*, Elsevier, v. 101, n. 3, p. 500–513, 2019. Citado na página 24.

32 KOHN, A.; SMITH, M. A. Utah array extracellular recordings of spontaneous and visually evoked activity from anesthetized macaque primary visual cortex (v1). *Proceedings of the Collaborative Research in Computational Neuroscience (CRCNS 2016)*, 2016. Citado na página 24.

33 HODGKIN, A. L.; HUXLEY, A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, Wiley Online Library, v. 117, n. 4, p. 500–544, 1952. Citado na página 25.

34 IZHIKEVICH, E. M. Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on neural networks*, IEEE, v. 14, n. 6, p. 1569–1572, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

35 PETERMANN, T. et al. Spontaneous cortical activity in awake monkeys composed of neuronal avalanches. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 106, n. 37, p. 15921–15926, 2009. Citado na página 26.

36 HAHN, G. et al. Neuronal avalanches in spontaneous activity in vivo. *Journal of neurophysiology*, American Physiological Society Bethesda, MD, v. 104, n. 6, p. 3312–3322, 2010. Citado na página 26.

37 MARKRAM, H. et al. Interneurons of the neocortical inhibitory system. *Nature reviews neuroscience*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 10, p. 793, 2004. Citado na página 28.

38 REY, H. G.; PEDREIRA, C.; QUIROGA, R. Q. Past, present and future of spike sorting techniques. *Brain research bulletin*, Elsevier, v. 119, p. 106–117, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 68.

39 CLAUSET, A.; SHALIZI, C. R.; NEWMAN, M. E. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, SIAM, v. 51, n. 4, p. 661–703, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 77.

40 KLAUS, A.; YU, S.; PLENZ, D. Statistical analyses support power law distributions found in neuronal avalanches. *PloS one*, Public Library of Science, v. 6, n. 5, p. e19779, 2011. Citado na página 74.

41 ALSTOTT, J.; BULLMORE, E.; PLENZ, D. *powerlaw: A Python package for analysis of heavy-tailed distributions*. [S.l.], 2014. Disponível em: <https://github.com/jeffalstott/powerlaw>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.

42 AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, v. 19, n. 6, p. 716723, 1974. Citado na página 77.

43 HURVICH, C. M.; TSAI, C.-L. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 76, n. 2, p. 297–307, 1989. Citado na página 77.

APÊNDICE A – PACOTES DE AJUSTE E TESTES ESTATÍSTICOS

A.1 Comparação dos Pacotes de Ajuste

Dalla Porta e Copelli [6] utilizaram o pacote *"powerlaw"* criado por Alstott e colaboradores[11], baseado nos métodos desenvolvidos por Clauset, Klaus e colaboradores [39, 40], para fazer o ajuste de distribuições de probabilidade de lei de potência, seja ela pura ou com truncamento exponencial:

$$P \propto x^{-\alpha} \,, \tag{A.1a}$$

$$P \propto x^{-\alpha} e^{-\lambda x} \,. \tag{A.1b}$$

Por outro lado, Fontenele et al. [4] utilizaram uma tradução própria para Python da função *pmle* presente na *NCC toolbox* [12], que por sua vez, utiliza o método proposto por Deluca e Corral [25].

Ambos os pacotes calculam o expoente do ajuste através do método da máxima verossimilhança (do inglês *Maximum Likelihood Estimator* - MLE), e permitem que o usuário imponha os limites da região em que o ajuste será feito. A principal diferença é quando tal imposição não é feita. Na função *pmle*, o cálculo é feito para todos os dados apresentados, enquanto que o pacote *powerlaw* é capaz de estimar qual o limite mais adequado para o ajuste dos dados. Para encontrar o limite inferior (x_{min}), são criados vários ajustes, cada um deles partindo de um x_{min} diferente e único, que aparece na distribuição de interesse. Então é calculada a distância de Kolmogorov-Smirnov entre os ajustes teóricos e a distribuição que se deseja ajustar, o x_{min} cujo ajuste que apresentar a menor distância é o escolhido. Se o limite superior não for informado, o ajuste será feito até o valor máximo apresentado nos dados. Contudo, é possível estimar o ajuste de uma lei de potência com truncamento exponencial e, neste caso, é possível estimar onde a parte exponencial da distribuição começa. Desta forma, é possível extrair ambos os limites do ajuste. *powerlaw* permite o ajuste de outras distribuições que não leis de potência, como a exponencial e exponencial esticada, lognormal e lognormal positiva. Entretanto, ao utilizar a ferramenta que compara a qualidade do ajuste por duas distribuições diferentes, considera que tais distribuições são aninhadas, ou seja que uma delas é uma subclasse da outra. As funcionalidades dos dois pacotes encontram-se resumidas na Tabela 8.

A.1.1 Pacotes *powerlaw* e *NCC toolbox*

Segundo De Lucca e Corral [25], A chave para um bom ajuste de lei de potência, não é o cálculo do MLE, tampouco os testes de quão bom é o ajuste, mas sim o intervalo no qual o ajuste é válido. Em outras palavras, o ideal é encontrar a região adequada para

	pmle	*powerlaw*
Método do cálculo do ajuste de LP	MLE	MLE
Imposição dos limites do ajuste	✓	✓
Estima o limite inferior		✓
Ajuste de lei de potência pura	✓	✓
Ajuste de lei de potência com truncamento exponencial	✓	✓
Ajuste de outras distribuições		✓
Cálculo dos *Likelihoods vs.* expoentes	✓	
Comparação entre duas distribuições		✓

Tabela 8 – Tabela com algumas das características da duas funções utilizadas para o ajuste das distribuições de avalanches [11, 12].

realizar o ajuste. Como exemplo do uso de ambos os pacotes, foram testados três ajustes, dois com *powerlaw*, um deles considerando uma lei de potência pura e outro considerando um truncamento exponencial, e um ajuste com a *pmle*. Os dois pacotes permitem ao usuário que a região do ajuste seja (ou não), fixada previamente. Para demonstrar os resultados, a mesma distribuição foi ajustada de 3 maneiras diferentes:

a) sem a imposição de limites. O que significa que cada pacote lidou à sua maneira com a escolha da região;

b) com a imposição dos limites superiores e inferiores, escolhidos visualmente;

c) apenas com a imposição do limite inferior, o que significa que ambos os pacotes deveriam ajustar a mesma região, começando no limite inferior imposto e terminando no valor máximo fornecido pelos dados.

Supondo que a região de interesse seja a mesma, como nas Fig. 45.b) e c), espera-se que os dois ajustes de lei de potência pura apresentem os mesmos expoentes. O que acontece quando ambos os limites foram fixados, como mostrado na Fig. 45. b). A diferença no valor dos expoentes ocorre apenas a partir da terceira casa decimal. Porém quando o limite superior não é imposto, como na Fig 45. c) isso não ocorre, a diferença aparece logo na segunda casa decimal. Todavia, os expoentes, dados pelos dois pacotes voltam a ser parecidos se o x_{max} for forçado a ser o valor máximo fornecido pelos dados, o que indica que o pacote *powerlaw* utiliza algum outro valor como limite superior.

O pacote *powerlaw* não permite estimar o valor máximo, quando não imposto, e nem a documentação [41], nem o artigo sobre o pacote [11] explicam como o x_{max} é calculado:

> "A presença de um limite superior depende da natureza dos dados e do contexto no qual [o dado] foi coletado, então pode apenas ser ditado pelo usuário." (Tradução livre de [11])

> "[...] Estes métodos identificam a porção da cauda da distribuição que segue uma lei de potência, acima de um valor x_{min}. Se x_{min} não for sugerido pelo usuário, então um valor ótimo é calculado." (Tradução livre de [41]

O que pode levar à falsa interpretação de que o ajuste é feito até o final da distribuição.

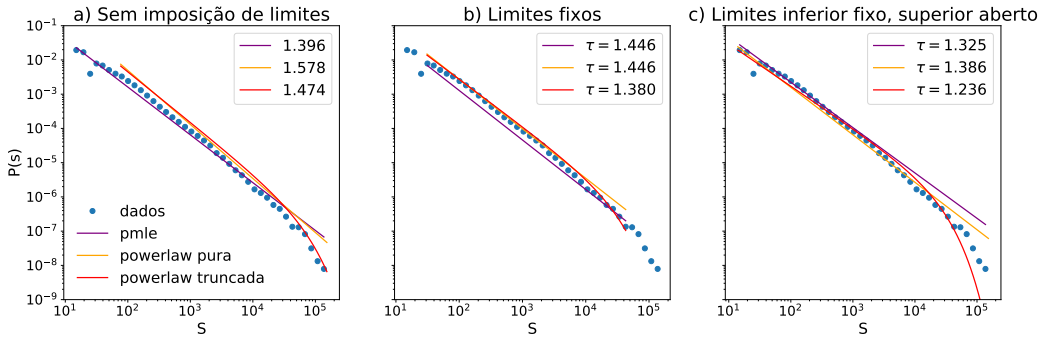

Figura 45 – Comparação de 3 diferentes ajustes da mesma distribuição. Utilizando o pacote *powerlaw* e ajustando uma lei de potência pura (laranja), uma lei de potência com truncamento exponencial (vermelho), e utilizando a *pmle* (roxo) que apenas ajusta lei de potência pura. a) Os limites não foram impostos: a *NCC toolbox* calcula o ajuste para todo o conjunto de dados; o pacote *powerlaw* para uma lei de potência pura, estima o x_{min} ótimo, porém não tem limite superior; para uma lei de potência truncada, x_{max} é estimado como sendo onde começa o truncamento exponencial. b) Os limites foram impostos a mão ($x_{min} = 31$ e $x_{max} = 43000$): as linhas roxas e laranjas, apresentam expoentes relativamente próximos, com a diferença ocorrendo apenas na 4ª casa decimal. Ao impor um limite superior para o ajuste da lei de potência truncada, o pacote *powerlaw* vai encontrar um limite ainda menor para o ajuste, visto que ele estima onde a cauda exponencial começa, dentre o limite imposto. c) O limite inferior foi imposto em $x_{min} = 10$, e o superior foi deixado em aberto, o que significa que ambos os pacotes deveriam ajustar os dados a partir de x_{min} até o final. O que implica em os ajustes de lei de potência pura serem parecido. O que não ocorre. As curvas laranja e roxa apresentam expoentes que diferem logo na segunda casa decimal.

Como as simulações estão sempre limitadas a um tamanho fixo, suas distribuições de lei de potência também o estarão. Logo, não é viável considerá-las como sendo leis de potência puras, sem os truncamentos superior e inferior.

Os parâmetros de ajuste ideais dependem dos parâmetros da rede, então, é necessário ter uma maneira sistemática e automatizada de escolher as regiões de interesse. O ajuste da lei de potência truncada permite que o x_{max} seja um parâmetro livre do ajuste. O fato de Dalla Porta e Copelli [6] terem utilizado o *powerlaw*, aliado ao fato da *NCC Toolbox* ainda não ter sido toda traduzida para python, e ser escrita em MATLAB, foram outros fatores que fizeram com que o *powerlaw* fosse o escolhido no decorrer deste trabalho, apesar

de apresentar alguns problemas (considerar que as distribuições são aninhadas e a escolha com viés dos limites do ajuste) [25]

A.2 Testes Estatísticos

Antes de fazer o cálculo dos expoentes das distribuições é preciso se certificar de que elas são de fato leis de potência (LP). Para isto, há diferentes testes estatísticos, dentre eles o Critério de Informação de Akaike (do inglês *Akaike Information Criterion* - AIC) e a Razão de Máxima Verossimilhança (do inglês *Log-Likelihood Ratio* - LLR). Ambos os métodos comparam pares de distribuições e através do MLE escolhem uma das duas como sendo a mais adequada para os dados em questão.

Quanto mais parâmetros uma distribuição possui, mais maleável é a sua forma, logo, supostamente melhor é o ajuste dado pela distribuição. Tal fenômeno é conhecido como *overfitting*. Para compensá-lo, o critério de informação de Akaike [42],

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L}) \,, \tag{A.2}$$

possui o primeiro termo dependente da quantidade (k) mínima de parâmetros necessários para construir uma dada distribuição, e o segundo é refente ao valor da máxima verossimilhança ($\hat{L}$) estimado pelo MLE.

Quando a amostra é pequena, ainda há uma probabilidade não-nula do AIC escolher a distribuição com mais parâmetros. Para corrigir este problema há um termo de correção [43] dependente do tamanho (n) da amostra

$$AIC_c = AIC + \frac{2k^2 + 2k}{n - k - 1} \,. \tag{A.3}$$

O critério da razão da máxima verossimilhanças (LLR) [39]

$$\mathcal{R} = \ln\left(\frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_2}\right), \tag{A.4}$$

compara os valores máximos das verossimilhanças (L_1, L_2) de duas distribuições ($dist1$, $dist2$), de forma que apresenta valor positivo(negativo) se a primeira(segunda) distribuição for mais adequada. *Powerlaw* compara o ajuste dado por duas distribuições através do cálculo de $\mathcal{R}$.

Dado um conjunto de possíveis distribuições, o critério de informação de Akaike prescreve que a que melhor ajusta os dados é aquela que apresenta o menor valor de AIC_c. Pode-se então definir um Δ_{AIC} em função de duas distribuições ($dist$ 1 e $dist$ 2) [4]

$$\Delta_{AIC}(dist\ 1, \quad dist\ 2) = AIC_c(dist\ 2) - AIC_c(dist\ 1) \,, \tag{A.5}$$

de forma que para $\Delta_{AIC} \geqslant 0$ ($\Delta_{AIC} \leqslant 0$) a distribuição $dist$ 1($dist$ 2) é mais adequada. Com o Δ_{AIC} tem-se um resultado análogo ao $\mathcal{R}$, ambos adquirem valor positivo caso a primeira distribuição seja escolhida e negativo caso seja a segunda.

Ao comparar as equações citadas acima, percebe-se que o $\mathcal{R}$ e o Δ_{AIC} são essencialmente equivalentes. Comparado a $\mathcal{R}$, o AIC_c possui duas constantes a mais. Uma delas ($2k$) referente à quantidade de parâmetros necessárias pada dada distribuição, e a outra $\frac{2k^2+2k}{n-k-1}$ à correção para amostras pequenas. Com exceção da lei de potência pura, as distribuições comparadas (lei de potência truncada, exponencial e lognormal) possuem sempre 2 parâmetros, ao calcular Δ tais constantes de anulam, tornando os valores de ambos os critérios iguais. Devido a isso, e à praticidade do uso do LLR, já implementado no pacote *power law*, este será o critério empregado neste trabalho.