



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CARTOGRÁFICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E  
TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO

GLAUCO LEITE DE FREITAS

**AJUSTAMENTO DE REDE GEODÉSICA 3D POR TRILATERAÇÃO**

Recife

2019

GLAUCO LEITE DE FREITAS

**AJUSTAMENTO DE REDE GEODÉSICA 3D POR TRILATERAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de mestre em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação.

Área de Concentração: Geodésia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Jacks dos Anjos Garnés.

Recife

2019

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

F866a Freitas, Glauco Leite de.

Ajustamento de rede geodésica 3D por trilateração / Glauco Leite de Freitas.  
- 2019.

110 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Jacks dos Anjos Garnés.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.  
Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da  
Geoinformação, 2019.

Inclui Referências, Apêndices e Anexo.

1. Engenharia Cartográfica. 2. Trilateração. 3. Rede geodésica. 4.  
Ajustamento. 5. Método dos Mínimos Quadrados. I. Garnés, Silvio Jacks  
dos Anjos. (Orientador). II. Título.

UFPE

526.1 CDD (22. ed.)

BCTG/2019-469

GLAUCO LEITE DE FREITAS

**AJUSTAMENTO DE REDE GEODÉSICA 3D POR TRILATERAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências Geodésicas e Tecnologia da Geoinformação.

Aprovada em: 10 / 12 / 2019.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Silvio Jacks dos Anjos Garnés (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Profa. Dra. Andréa, de Seixas (Examinadora Interna)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Daniel Carneiro da Silva (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho a minha mãe Eliane Freitas, que sempre acreditou em mim, mesmo em meio as dificuldades, incentivando a nunca desistir e também a minha esposa Carla Barbosa, por me manter focado, possibilitando a conclusão de mais uma etapa em minha vida.

“Não sobreveio a vocês tentação que não fosse comum aos homens. E Deus é fiel; ele não permitirá que vocês sejam tentados além do que podem suportar. Mas, quando forem tentados, ele mesmo providenciará um escape, para que o possam suportar“. 1 Coríntios 10:13

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pela graça da vida e pela capacidade que me proporcionou por chegar nesse estágio, ao criador dedico toda a honra e toda a glória, para sempre.

A minha mãe, pela confiança e segurança. Eliane, obrigado mãe pelo incentivo.

À minha esposa Carla Barbosa, pessoa amiga, companheira. Carla Barbosa a você dou todo meu amor e gratidão, pelos momentos difíceis que nós passamos juntos.

Ao meu orientador Prof. Silvio Garnés pelo direcionamento dos estudos nessa temática.

A Profa. Andrea de Seixas, Prof. Jaime Mendonça e Prof. Daniel Carneiro, pelas contribuições ao longo das defesas do projeto de pesquisa, exame de qualificação e defesa final que culminou nessa dissertação.

À CAPES pela bolsa de estudo para o desenvolvimento da dissertação.

A Elizabeth e a Judite por serem sempre prestativas e torcerem pelo meu sucesso nas várias etapas do curso.

Aos meus amigos e “Brothers” da Universidade, Weyller Diogo, José Paulo e Aurélio Melo, por me ajudarem e incentivarem nos momentos difíceis enfrentados no desenvolvimento da dissertação.

Ao Coronel Alberto, Claudianne Brainer, Clériston e os demais da minha turma, pela união, por conta que, sempre podíamos contar uns com os outros.

Um agradecimento especial ao amigo Luiz Canto, meu amigo de levantamento de campo, e também aos amigos do projeto de Igarassu, professora Malu, Bruno, Yan, Vinicius, por tornarem os dias mais divertidos. A Margarida Regueira, Fernanda Miranda e Edlene da CPRM, por me incentivaram a fazer o mestrado.

Ao longo da caminhada meus sinceros agradecimentos a tantos outros amigos que ajudaram de maneira mais sutil e aos membros da minha família que mesmo mais distantes me apoiaram, Deus abençoe a todos vocês.

## RESUMO

Essa dissertação tem por finalidade de resolver o ajustamento de rede de trilateração geodésica 3D do método clássico. Para isso, foram utilizadas as distâncias inclinadas teóricas e observadas simuladas, em uma rede de oito vértices que representa uma poligonal que delimita todo o município do Recife - PE. Diante disso, para o processamento dos dados, foram elaboradas várias rotinas a partir dos softwares Matlab 2010, bem como utilizado o AstGeoTop 2019 como comparativo. Tais rotinas contemplam redes geodésicas por trilateração tridimensional de três vértices (triângulo) e quatro vértices (quadrilátero), em seguida generalizadas para a resolução de uma rede de “ $n$ ” vértices. Os experimentos foram conduzidos na trilateração gradativamente a partir de um triângulo depois um quadrilátero e generalizado a uma rede de até oitos vértices. Durante as soluções foram detectadas a presença de mal condicionamento nos sistemas e um tratamento adequado teve que ser efetuado. O modelo matemático utilizado para o ajustamento foi Paramétrico usando Método dos Mínimos Quadrados – MMQ. Durante os testes foram utilizadas as injunções absolutas, funcionais e de peso. Além disso, usou-se dois sistemas de coordenadas; o Sistema de Coordenadas Cartesiano Geocêntrico e o Sistema de Coordenadas Geodésico Local. Com o uso dos dois sistemas, foi possível interpretar a questão do mal condicionamento e propor uma melhor resolução para o tipo de problemática que envolve mais de uma solução. A partir do resultado obtido, pode-se perceber que é possível obter solução única com uma precisão na ordem dos centímetros para a rede de trilateração de oito vértices investigada com desvio padrão das observações variando entre  $\pm 1$ cm e  $\pm 10$  cm e com isso, analisar o tipo de injunção a ser empregada, como também o melhor Sistema de Coordenadas a ser adotado no ajustamento. As proposições e formas de análise apresentadas têm potencial para serem utilizadas em qualquer tipo de rede geodésica clássica 3D, ou seja, trilateração, triangulação e triangulateração.

Palavras-chave: Trilateração. Rede geodésica. Ajustamento. Método dos Mínimos Quadrados.

## ABSTRACT

This dissertation aims to solve the 3D geodetic trilateration network adjustment of the classical method. For this, we used the theoretical and observed simulated inclined distances in a network of eight vertices that represents a polygonal that delimits the entire city of Recife - PE. Therefore, for data processing, several routines were elaborated from Matlab 2010 software, as well as AstGeoTop 2019 as a comparison. Such routines include geodetic networks by three-dimensional trilateration of three vertices (triangle) and four vertices (quadrilateral), then generalized for the resolution of a network of "n" vertices. The experiments were conducted in the trilateration gradually from a triangle then a quadrilateral and generalized to a network of up to eight vertices. During the solutions the presence of ill-conditioning in the systems was detected and an appropriate treatment had to be performed. The mathematical model used for the adjustment was Parametric using the Least Squares Method - MMQ. Absolute, functional and weight injunctions were used during the tests. In addition, two coordinate systems were used; the Cartesian Geocentric Coordinate System and the Local Geodetic Coordinate System. Using both systems, it was possible to interpret the issue of ill-conditioning and propose a better resolution for the type of problem that involves more than one solution. From the obtained result, it can be seen that it is possible to obtain a single solution with a precision of the order of centimeters for the eight-vertex trilateration network investigated with standard deviation of the observations varying between  $\pm 1$  cm and  $\pm 10$  cm and, with this, analyze the type of injunction to be employed, as well as the best Coordinate System to be adopted in the adjustment. The propositions and forms of analysis presented have the potential to be used in any type of classical 3D geodetic network, ie trilateration, triangulation and triangulation.

Keywords: Trilateration. Geodetic Network. Adjustment. Least Squares.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Região de Aceitação da Distribuição do Qui-Quadrado .....	23
Figura 2 – Exemplo de uma rede de Trilateração .....	25
Figura 3 – Relação entre o SGG ( $\varphi\lambda h$ ) e o SCG (XYZ) .....	34
Figura 4 – Relação entre os Sistemas de Coordenadas no SCG e SGL .....	35
Figura 5 – Área de Estudo abrangendo o Município de Recife .....	49
Figura 6 – Rede Geodésica 3D por Trilateração .....	56
Figura 7 – Trilateração em 3D condições iniciais no triângulo. ....	61
Figura 8 – Trilateração em 3D em um quadrilátero .....	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas Geodésicas elipsoidais SIRGAS2000 .....	50
Tabela 2 – Coordenadas Altimétricas .....	50
Tabela 3 – Coordenadas Geodésicas elipsoidais SIRGAS2000 .....	51
Tabela 4 – Coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas SIRGAS2000 dos vértices da rede geodésica simulada .....	53
Tabela 5 – Coordenadas geodésicas cartesianas Locais SIRGAS2000 dos vértices da rede geodésica simulada com origem no ponto M01 .....	53
Tabela 6 – Valores teóricos e simulados observados da rede geodésica 3D por trilateração.....	58
Tabela 7 – Valores teóricos e observados da rede geodésica de trilateração; .....	62
Tabela 8 – Dados para a trilateração geodésica – quadrilátero. ....	71
Tabela 9 – Valores teóricos e simulados observados dos 8 vértices da rede geodésica 3D por trilateração, possuindo como M01, M02 e M08, como injunções absolutas. ....	80
Tabela 10 – Resultados da trilateração do triângulo no SGL, usando distâncias inclinadas teóricas .....	86
Tabela 11 – Resultados da trilateração do triângulo no SGL, usando distâncias inclinadas observadas .....	86
Tabela 12 – Discrepâncias entre os resultados do ajustamento considerando as distâncias teóricas e as distâncias observadas no SGL.....	87
Tabela 13 – Resultados da trilateração do triângulo no SCG, usando distâncias teóricas.....	87
Tabela 14 – Resultados da trilateração do triângulo no SCG, usando distâncias observadas.....	88
Tabela 15 – Discrepâncias entre os resultados das distâncias inclinadas teórica e observada no SCG .....	88
Tabela 16 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SGL, usando distâncias teóricas.....	89
Tabela 17 – Discrepâncias entre os resultados do ajustamento da solução 1 e 2 das distâncias teóricas no SGL.....	90
Tabela 18 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SGL, usando distâncias observadas.....	90

Tabela 19 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SCG, usando distâncias teóricas.....	90
Tabela 20 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SCG, usando distâncias observadas.....	91
Tabela 21 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SCG, usando distâncias inclinadas observadas com injeção de direção .....	92
Tabela 22 - Parâmetros Aproximados utilizados no ajustamento da rede geodésica de 8 vértices .....	93
Tabela 23 – Resultados da trilateração na rede no SCG, com distâncias teóricas e injeção de azimute .....	94
Tabela 24 – Resultados da trilateração na rede no SCG, com distâncias observadas e injeção de azimute .....	94
Tabela 25 – Resultados da trilateração na rede no SCG, com distâncias observadas	95
Tabela 26 – Discrepâncias em relação as coordenadas teóricas e erro 3D do ajustamento da rede de trilateração clássica com injeções de direção ..	95

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIações

2D	Duas Dimensões
3D	Três Dimensões
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
DD	Dupla Diferença
GNSS	Sistema Global de Navegação por Satélite ( <i>Global Navigation Satellite System</i> )
GPS	Sistema de Posicionamento Global ( <i>Global Positioning System</i> )
GRS80	Sistema de Referência Geodésico 1980
IAU	União Astronômica Internacional
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
INCRA	Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária
INE	Instituto Nacional de Estatística
ITRS	Sistema de Referência Terrestre Internacional
MDS	Modelo Digital de Superfície
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
MVC	Matriz Variância e Covariância
NBR	Normal Brasileira
PPP	Posicionamento por Ponto Preciso
RBMC	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
RTK	Cinemático em Tempo Real
SAD69	<i>Datum</i> Sul Americano de 1969 ( <i>South America Datum</i> )
SCA	Sistema de Controles Ativos
SCG	Sistema de Coordenadas Cartesiano Geocêntricas
SGB	Sistema Geodésico Brasileiro
SGL	Sistema Geodésico Local
SIG	Sistema de Informação Geográfica
SIRGAS2000	Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas 2000
STL	Sistema Topográfico Local
UTM	Universal Transversa de Mercator

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$	Desvio padrão
$\sigma^2$	Variância
$\emptyset$	Forma quadrática dos resíduos
$\varphi$	Latitude
$\lambda$	Longitude
$\Delta$	Diferença
$\Sigma$	Matriz Variância – Covariância
$\sigma_0^2$	Sigma Zero a priori
$\hat{\sigma}_0^2$	Sigma Zero a posteriori
$\chi^2$	Distribuição do Qui-Quadrado
$\partial$	Derivada Parcial
$\alpha$	Nível de Significância

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
1.1	OBJETIVOS .....	16
1.1.1	<b>Objetivo Geral</b> .....	<b>16</b>
1.1.2	<b>Objetivos Específicos</b> .....	<b>16</b>
1.2	ESTRUTURAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	16
<b>2</b>	<b>EMBASAMENTO TEÓRICO</b> .....	<b>18</b>
2.1	ESTADO DA ARTE (TRILATERAÇÃO).....	18
2.2	AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES .....	20
2.2.1	<b>Modelo dos Parâmetros</b> .....	<b>20</b>
2.2.2	<b>Teste de Hipótese para Validar o Ajustamento</b> .....	<b>23</b>
2.2.3	<b>Ajustamento do Método Clássico de uma Trilateração</b> .....	<b>24</b>
2.2.4	<b>Injunções</b> .....	<b>27</b>
2.2.4.1	Injunções Funcionais .....	28
2.2.4.2	Injunções de Peso .....	31
2.2.4.3	Injunções Absolutas.....	32
2.3	SISTEMAS DE COORDENADAS.....	32
2.4	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS .....	36
2.4.1	<b>Coordenadas Geodésicas Elipsoidais para Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas</b> .....	<b>37</b>
2.4.2	<b>Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas para Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais</b> .....	<b>38</b>
2.4.3	<b>Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais para Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas</b> .....	<b>39</b>
2.4.4	<b>Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas para Coordenadas Geodésicas Elipsoidais</b> .....	<b>39</b>
2.5	POSICIONAMENTO PELO GNSS .....	41
2.6	POSICIONAMENTO POR MÉTODOS CLÁSSICOS EM 3D.....	45
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTO METODOLÓGICO</b> .....	<b>48</b>
3.1	ÁREA DE ESTUDO .....	48
3.2	MATERIAIS UTILIZADOS .....	51
3.2.1	<b>Equipamentos</b> .....	<b>51</b>

<b>3.2.2</b>	<b>Softwares .....</b>	<b>51</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Apoio Logístico.....</b>	<b>51</b>
<b>3.3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>52</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Ajustamento de Rede Geodésica 3D por Trilateração .....</b>	<b>53</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Análise da geometria dos problemas para obtenção de solução única .....</b>	<b>55</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Ajustamento no Triângulo .....</b>	<b>60</b>
<b>3.3.4</b>	<b>Ajustamento no Quadrilátero .....</b>	<b>69</b>
<b>3.3.5</b>	<b>Ajustamento da Rede Geodésica.....</b>	<b>77</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>84</b>
<b>4.1</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES DO PRIMEIRO PROBLEMA – TRIÂNGULO.....</b>	<b>85</b>
<b>4.2</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO DO SEGUNDO PROBLEMA – QUADRILÁTERO .....</b>	<b>89</b>
<b>4.3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO DO TERCEIRO PROBLEMA – REDE GEODÉSICA .....</b>	<b>93</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>97</b>
<b>5.1</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>97</b>
<b>5.2</b>	<b>RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>99</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>101</b>
	<b>APÊNDICE A - FIGURA QUE REPRESENTA A GEOMETRIA DA REDE DE TRILATERAÇÃO .....</b>	<b>107</b>
	<b>APÊNDICE B - TRILATERAÇÃO EM 3D CONDIÇÕES INICIAIS NO TRIÂNGULO .....</b>	<b>108</b>
	<b>APÊNDICE C - TRILATERAÇÃO EM 3D CONDIÇÕES INICIAIS NO QUADRILÁTERO.....</b>	<b>109</b>
	<b>ANEXO A - FIGURA OBTIDA DO ESIG.....</b>	<b>110</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo proposto nessa dissertação surgiu com o intuito de utilização da metodologia de ajustamento de rede geodésica 3D por trilateração para fins de grandes áreas, que possuam distâncias entre vértices superiores a 10 km. No entanto, a metodologia pode também ser aplicada a distâncias menores, também estando em três dimensões. A maioria dos trabalhos relacionados com essa temática, é abordada com ajustamento 2D pelos métodos clássicos da trilateração, triangulação e/ou triangulateração, e são aplicados em pequenas áreas, cujas distâncias entre os vértices são inferiores a 1km.

O ajustamento de rede geodésica 3D por trilateração proposto nesta dissertação pode ser utilizado em projetos de larga escala e longo alcance de visadas, em que se precisa estabelecer uma rede geodésica, como por exemplo a criação de uma rede geodésica local de um Município ou em algum projeto que precise de um transporte de coordenadas envolvendo visadas curtas e/ou longas, construção de um canal, a construção de uma barragem, dentre outros.

Porém, quando se trabalha com as distâncias grandes entre vértices (exemplo, superiores a 10 km), surge o problema de mal condicionamento do sistema por conta da geometria envolver pequenas diferenças de altitudes comparadas com o tamanho dos lados. Os produtos perdem em acurácia e/ou possuem mais de uma solução próximas.

A finalidade nesta dissertação é de apresentar algumas possibilidades de como se pode efetuar o ajustamento, e verificar qual a melhor resolução para obtenção de uma solução 3D com acurácia na ordem dos centímetros, podendo chegar na casa dos milímetros. Para isso foi utilizado nesta dissertação as injunções absolutas de posição, injunções de peso e injunções funcionais de direção, sendo também efetuados em modelos geométricos contendo três (triângulo), quatro (quadrilátero) e quantidades superiores de vértices.

Para que não fosse preciso efetuar separadamente o ajustamento de altimetria e de planimetria, esta dissertação discutiu a execução do ajustamento de uma rede 3D por trilateração pelos métodos clássicos, utilizando injunções para qualquer rede geodésica. Para isso, foi elaborado uma metodologia em conjunto com rotinas de programação no MATLAB e para verificações utilizou-se também o módulo de ajustamento de redes geodésicas clássicas do software AstGeoTop.

## 1.1 OBJETIVOS

Esta dissertação teve os seguintes objetivos:

### 1.1.1 Objetivo Geral

Esta dissertação tem como objetivo geral desenvolver uma modelagem matemática aplicada ao ajustamento de rede geodésica 3D por trilateração.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- a) Desenvolver uma metodologia que permita trabalhar no ajustamento 3D de redes geodésicas pelo método clássico no SGL e/ou SCG.
- b) Efetuar análises e comparações entre os ajustamentos elaborados e definir qual a melhor forma de utilizar o ajustamento 3D de uma rede geodésica pelos métodos clássicos.
- c) Desenvolver aplicativos computacionais para testar as metodologias propostas.

## 1.2 ESTRUTURAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A estrutura que compõe essa dissertação tem como base, a fundamentação teórica, procedimento metodológico, resultados e discussões, conclusões e recomendações, referências bibliográficas, anexos e apêndices.

O capítulo dois corresponde ao Embasamento Teórico, onde é abordado o estudo mais geral com relação ao ajustamento de uma rede geodésica pelo método clássico da trilateração 3D, por conta disso, este tópico está composto de subtópicos que estão diretamente relacionados com o ajustamento das observações, sistema de coordenadas, transformação de coordenadas, posicionamento GNSS e por métodos clássicos, todos esses tópicos com as devidas referências bibliográficas.

O capítulo três aborda o tópico de Procedimento Metodológico, apresenta todos os materiais, os métodos e a área de estudo utilizada para que se pudesse efetuar o ajustamento das observações pelo método clássico de trilateração 3D.

O capítulo quatro aborda os Resultados e Discussões, apresentando-se todos os resultados obtidos com relação ao ajustamento das observações.

No capítulo cinco são apresentadas as conclusões e recomendações. Finalizando-se com as referências bibliográficas, anexos e apêndices.

## 2 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo da dissertação aborda-se: o estudo de uma forma mais generalizada com relação ao ajustamento de uma trilateração, possibilitando a utilização em diversas atividades que necessitam acurácia posicional, com relação a medições de distâncias, em consequência a isso, os temas utilizados foram, o ajustamento das observações e mais especificamente o ajustamento do MMQ pelo modelo dos parâmetros, com testes de hipóteses e utilização de injunções para o ajustamento; sistemas de coordenadas geocêntricas e topocêntricas e respectivas transformações entre coordenadas; finalizando com os métodos de posicionamento por GNSS e pelos métodos clássicos de rede.

### 2.1 ESTADO DA ARTE (TRILATERAÇÃO)

Existem alguns estudos com o intuito de desenvolver e aperfeiçoar metodologias com relação ao ajustamento das observações de uma rede pelo método clássico da trilateração, em que todos eles buscam uma melhor qualidade posicional para os vértices das redes, pois, para se conseguir tal objetivo, são utilizadas técnicas com especificações distintas, no entanto, dependendo da área em que está sendo executada, deve-se definir quais injunções utilizar, e como determinar a Matriz dos Pesos, qual o valor do sigma *a priori*, dentre outros.

Os autores Zaki; Kady e Ahmed (1992) abordam o ajustamento de redes geodésicas sem a utilização de nenhum tipo de ângulos para obtenção do ajustamento da rede, ou seja, abordam o ajustamento de uma rede de trilateração, trabalhando apenas com as distâncias.

Em Wolf e Ghilani (1997) são abordados os métodos clássicos utilizados no software ADJUST v. 5.10., efetuando-se alguns ajustamentos com o intuito de demonstração e divulgação do mesmo software para alguns ajustamentos posicionais. Em Wolf e Ghilani (2002) são apresentadas algumas aplicações em um *software* livre, chamado *WOLFPACK*, sendo este um software similar ao *ADJUST*. Anos depois os mesmos autores elaboraram um livro, Wolf e Ghilani (2006), no qual são efetuados diversos ajustamentos computacionais, com análises espaciais nos dados utilizados.

Murphy Jr. e Hereman (1999) utilizam em seu estudo dois tipos de formas de efetuar a trilateração, pelas distâncias exatas e pelas distâncias aproximadas e no final se faz uma análise e demonstra que a forma convencional possui uma melhor acurácia posicional com relação ao método de distâncias aproximadas.

No mesmo ano em NAVIDI, MURPHY Jr., HEREMAN (1999) elaboraram um estudo de Métodos Estatísticos em Levantamento por Trilateração, pois todos os levantamentos possuem erros, então, os autores fazem as estimativas por um estimador de mínimos quadrados usando métodos não lineares.

Aguiar, Camargo e Galo (2002) efetuaram o ajustamento das observações em transformação de coordenadas de um Sistema de Coordenadas para outro, porém, em seus cálculos se fez necessário a obtenção da Matriz Variância e Covariância (MVC) com relação à Matriz Correlação em conjunto com as incertezas dos parâmetros, no qual é de extrema importância para o ajustamento de rede GNSS.

Os autores em Mendonça et al. (2010) efetuaram uma análise comparativa entre a trilateração em 2D, efetuando o ajustamento das observações tanto no plano de projeção UTM (Universal Transversa de Mercator), quanto no SGL, utilizando para a identificação e resolução dessa análise a técnica de Ajustamento Livre para detecção de inconsistência no ajustamento, isto com relação, a não normalidade, em que, são verificados se o sistema é mal condicionado, modelo matemático é inconsistente e se a estimativa das observações superestimadas ou subestimadas.

Os autores Melo, Souza e Silva (2012) efetuaram o ajustamento de trilateração utilizando o software ADJUST e em sequência foram efetuadas algumas análises com relação aos resultados obtidos no ajustamento das observações da trilateração em 2D. Essas análises correspondem a resolução do ajustamento e o melhor caminho para se obter o resultado utilizando o software.

Em Gemael, Machado, e Wandresen (2015), encontram-se diversos ajustamentos para fins práticos, sendo efetuados utilizando diversos métodos clássicos (trilateração, triangulação, poligonação) em exercícios resolvidos e exercícios propostos, porém, todos eles se encontram em duas dimensões (x e y) ou em apenas uma dimensão (h), este para fins de nivelamento. Nesse livro é explicitado com detalhes as metodologias utilizadas no ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), trata-se de um livro texto elaborado na língua portuguesa, sendo a primeira edição publicada no ano de 1994 (GEMAEEL, 1994).

## 2.2 AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES

O Método dos Mínimos Quadrados foi utilizado pela primeira vez de forma independente por Legendre em 1806 e Gauss em 1809 (STIGLER, 1977; STIGLER, 1981; GARNÉS, SAMPAIO e DALMOLIN, 1997). Sendo que hoje em dia é o método de ajustamento das observações mais utilizados para fins de posicionamento, pois, em meados da década de 1990 existiu um avanço tecnológico nos *hardwares* computacionais possibilitando eliminar limitações como “tempo de processamento” e “memória” (OGUNDARE, 2018).

O ajustamento das observações serve para fornecer uma estimativa da grandeza desejada e que torne mínima a forma quadrática dos resíduos, ponderados ou não. Tem por base a teoria dos erros os quais são decorrentes de falhas humanas, imperfeição no equipamento e influência das condições ambientais (GEMAEL; MACHADO e WANDRESEN, 2015).

Os ajustamentos das observações, em geral, são conduzidos mediante três modelos, esses modelos nas literaturas são conhecidos por: modelo dos correlatos; modelo paramétrico; e modelo combinado (GEMAEL, 1994; GARNÉS, 1996; KLEIN e GUZATTO, 2018).

A qualidade de um o ajustamento por MMQ é verificada por meio de testes estatísticos, sendo eles, teste do Qui-Quadrado, para verificação da normalidade das observações e caso haja erros sistemáticos, pode-se tentar identificá-los usando testes de detecção de erros, tais como *Baarda* e *Tau* (BAARDA, 1968) e *Tau* (POPE, 1976).

### 2.2.1 Modelo dos Parâmetros

O modelo dos parâmetros ou método paramétrico tem como finalidade o ajuste dos parâmetros de uma função explícita, com relação ao vetor das observações.

Em Gemael; Machado e Wandresen (2015), pode-se obter com maiores detalhes sobre todo o método paramétrico, no entanto, um resumo do método é apresentado através do modelo matemático e da forma residual linearizada como demonstrado nas equações (1) e (2), respectivamente.

$$L_a = F(X_a) \quad (1)$$

$$V_{(nx1)} = A_{(nxu)}X_{(ux1)} + L_{(nx1)} \quad (2)$$

Em que,

$L_b$  → vetor (nx1) dos valores observados;

$L_0$  → vetor (nx1) dos valores calculados;

$L$  → A diferença entre  $L_0 - L_b$ ;

$F$  → Função paramétrica;

$X$  → vetor correção dos parâmetros (ux1);

$X_a$  → vetor dos parâmetros ajustados;

$X_0$  → vetor (ux1) cujas componentes são os valores aproximados dos parâmetros;

$A$  → matriz das derivadas parciais, equação (3);

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} \quad (3)$$

Para a obtenção da solução MMQ a forma quadrática dos resíduos “ $\emptyset$ ”, tem que ser mínima, equação (4).

$$\emptyset = V^T P V = \min \quad (4)$$

A matriz dos Pesos “P” é considerada na maioria dos casos como sendo uma matriz simétrica e positiva definida, sendo que na maior parte dos casos o vetor “ $L_b$ ” possui independência entre as observações, e por conta disso, a matriz dos pesos torna-se diagonal (MENDONÇA et al., 2010), resultando de acordo como demonstrado na equação (5).

$$P = \sigma_0^2 \left( \sum L_b \right)^{-1} \quad (5)$$

A Matriz dos Pesos “P” fica determinada a partir da Matriz Variância-Covariância das observações “ $L_b$ ” (MIKHAIL e ACKERMAN, 1976; MIKHAIL e GRACIE, 1981).

A solução que leva ao mínimo a equação (4) vem do sistema de equações normais, equações (6) e (7).

$$N = A^T P A \quad (6)$$

$$U = A^T P L \quad (7)$$

No caso de  $F(\mathbf{X}_a)$  ser não linear  $X$  representa um vetor de correção do processo iterativo, cuja solução explícita é dada pela equação (8).

$$X = -N^{-1}U \quad (8)$$

O vetor dos resíduos, após a convergência do processo iterativo, no caso não linear, ou da solução dos parâmetros,  $x_a=x$ , no caso linear, é obtido pela equação (9).

$$V = AX + L \quad (9)$$

O Sigma *a posteriori* " $\hat{\sigma}_0^2$ ", pode ser obtido pela equação (10), em que o "gl" corresponde ao grau de liberdade, que é a diferença entre a quantidade de equações o posto da matriz das derivadas "A".

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} gl = \frac{V^T P T}{gl} \quad (10)$$

Do vetor das correções "X" obtém-se o vetor dos parâmetros ajustados, equação (11).

$$X_a = X_0 + X \quad (11)$$

E o vetor dos valores observados ajustados " $L_a$ " é obtido por meio da equação (12).

$$L_a = L_b + V \quad (12)$$

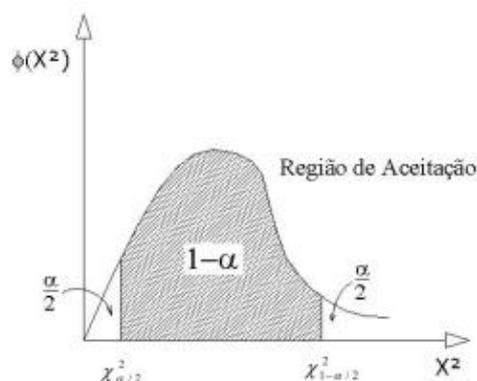
## 2.2.2 Teste de Hipótese para Validar o Ajustamento

O Teste de Hipótese é realizado para a verificação e validação dos resultados obtidos nos ajustamentos das observações, sendo o teste de hipótese mais utilizado o bilateral da distribuição do Qui-Quadrado “ $\chi^2$ ”. Nos testes hipóteses são utilizadas duas Hipóteses, sendo elas: H0 (Hipótese nula) e H1 (Hipótese alternativa), como demonstrado na equação (13) (GEMAEL; MACHADO e WANDRESEN, 2015).

$$H_0: \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \quad (13)$$

Para que o ajustamento seja aceito no teste de hipótese deve-se determinar os valores dos percentis máximo “ $\chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2$ ” e mínimo “ $\chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2$ ”. Esses valores podem ser obtidos de tabelas estatísticas ou calculados por meio de integração numérica entrando com o grau de liberdade “gl” e o nível de significância “ $\alpha$ ” do teste.

Figura 1 – Região de Aceitação da Distribuição do Qui-Quadrado



Fonte: Mendonça *et al.* (2010).

Para a não rejeição da hipótese nula H0, a estatística do teste “ $\chi^2$ ” deve estar na região de aceitação, ou seja, entre os percentis mostrado na equação (14).

$$\chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2 < \chi^2 < \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2 \quad (14)$$

A estatística do teste é obtida pela equação (15).

$$\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} gl = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} \quad (15)$$

Em que:

$gl$  → graus de liberdade;

$\sigma_0^2$  → Variância da observação de peso unitário a priori;

$\hat{\sigma}_0^2$  → Variância da observação de peso unitário a posteriori;

$V$  → Vetor dos Resíduos;

$P$  → Matriz dos Pesos.

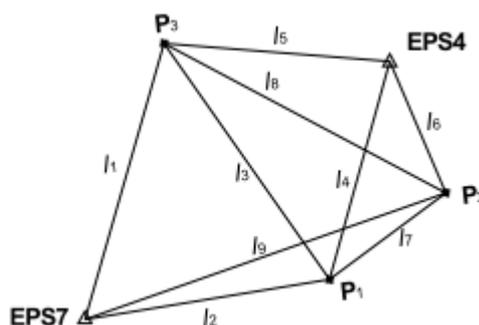
### 2.2.3 Ajustamento do Método Clássico de uma Trilateração

A trilateração é um método empregado, que possibilita através do uso das medições de distância determinar, por exemplo, as coordenadas dos pontos detalhes ou vértices de uma propriedade, isto, para o caso de Topografia e Geodésia, podendo essas distâncias serem inclinadas, para o caso 3D e/ou horizontais, para o caso 2D.

O cálculo e determinação da trilateração pode ser utilizada em formato de rede, possuindo com isso a distância entre os vértices de uma poligonal, como foi demonstrado na Figura 2.

É necessário para a resolução de uma rede de trilateração, três ou mais vértices de uma poligonal, podendo com isso, ser ou pertencer ao limite de uma propriedade ou de uma determinada área que vai ser estudada ou analisada, sendo que para efetuar os devidos cálculos é preciso utilizar todas as distâncias internas e ao longo do polígono escolhido, formando com isso diversos triângulos internos como demonstrado na Figura 2. Porém, isto não pode acontecer se caso o polígono possuir apenas três vértices, pois só há possibilidade de um triângulo.

Figura 2 – Exemplo de uma rede de Trilateração



Fonte: Mendonça *et al.* (2010).

Existem diversos estudos com relação à trilateração, isto demonstra que este método se encontra bastante difundido, pois, esse método possibilita a obtenção de uma boa precisão no levantamento efetuado por distanciômetro eletrônico e/ou estação total (WOLF e GHILANI, 1997; ZAKI *et al.*, 1992; CHRZANOWSKI e KONENCY, 1965). De acordo com MELO; SOUZA e SILVA (2012) a trilateração é o método clássico mais utilizado, por conta de sua praticidade com relação à execução, caso for comparado com os demais métodos clássicos (triangulação, triangulateração e poligonização), os resultados e as incertezas obtidas pelo método em estudo possibilitando chegar a valores aceitáveis.

A equação (16) demonstra como é obtido a distância inclinada entre dois pontos de coordenadas tridimensionais conhecidas, sendo esse o modelo matemático utilizado no ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros, sendo “i” e “j” os vértices da poligonal e “k” varia de 1 até a quantidade máxima de distâncias entre os vértices existentes, como no exemplo demonstrado Figura 2, “k” varia entre 1 e 9.

$$l_k = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (16)$$

Considerando “L” como uma variável aleatória m-dimensional representando as observações de distâncias, em conjunto com as funções das coordenadas dos pontos que possuem n-parâmetros, tem-se um sistema de equações na forma da equação (17).

$$L = F(x), \quad F: R^n \rightarrow R^m, \text{ não linear.} \quad (17)$$

Para que se possa resolver pelo ajustamento das observações deve ser efetuado a linearização do modelo paramétrico de trilateração por mínimos quadrados, logo se utiliza a forma usual em Geodésia (GEMAEL; MACHADO E WANDRESEN, 2015), (DALMOLIN, 2002) e (MENDONÇA et al., 2010) apresentada na equação (18).

$$L_a = L_b + v = F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) = F(x) \quad (18)$$

Os elementos não nulos obtidos da matriz Jacobiana  $A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0}$ , são as equações (19) e (20):

$$\frac{\partial l_k}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{l_k}; \quad \frac{\partial l_k}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)}{l_k}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial l_k}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_j)}{l_k}; \quad \frac{\partial l_k}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)}{l_k}; \quad (20)$$

Utilizando a mesma sequência com relação as coordenadas do vetor dos parâmetros em "X", obtém-se a equação (21):

$$X = [X_{EPS3} \ Y_{EPS3} \ X_{P1} \ Y_{P1} \ X_{P2} \ Y_{P2} \ X_{EPS4} \ Y_{EPS4} \ X_{P3} \ Y_{P3}] \quad (21)$$

O vetor dos resíduos obtidos pode ser utilizado da seguinte forma, como demonstrado na equação (22):

$$v = Ax - [L_b - F(X_0)] \quad (22)$$

De acordo com Paciléo Netto (1990) todo o fabricante de um medidor eletrônico de distância fornece a precisão do instrumento, como descrito na equação (23):

$$\begin{cases} \sigma = \pm(a + bxD) \\ \sigma = \pm(a \text{ mm} + b \text{ ppm}) \end{cases} \quad (23)$$

Cuja a variância da distância medida pela equação (24):

$$\sigma_d^2 = a^2 + b^2 \left( \frac{D}{1000} \right)^2 \quad (24)$$

Lembrando que a distância D na expressão é medida em metros e a divisão por 1000 serve para transformar em quilômetros. Logo para a determinação da matriz dos Pesos “P”, deve ser utilizados o desvio padrão obtido utilizando a equação (24) e o sigma a priori “ $\sigma_0^2$ ”, com relação as distâncias inclinadas, resultando na equação (25):

$$P = \sigma_0^2 \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_{d_k}^2} \right)^2, \quad k = 1, \dots, 9 \quad (25)$$

E para finalizar deve ser efetuado o teste de hipótese do Qui-Quadrado, pois, esse teste possibilita entender melhor com relação ao resultado obtido e diante disso existe a possibilidade de efetuar algumas análises para resultado obtido em questão.

#### 2.2.4 Injunções

O Método dos Mínimos Quadrados é constituído em uma das principais ferramentas que possibilita homogeneizar os resultados obtidos de acordo com os dados observados e de suas devidas análises, utilizadas em todas as áreas do conhecimento. Muitas das vezes, para a resolução do ajustamento pelo MMQ de um determinado problema, além da soma do quadrado dos resíduos ponderados, se faz necessária a utilização de uma ou mais condições, devendo ser(em) cumprida(s) para obtenção do resultado final. Essas condições impostas são conhecidas como injunções.

Existem diversos tipos de injunções, porém, nessa dissertação são abordadas as injunções consideradas como funcionais, de peso e absolutas. As injunções utilizadas nesta dissertação são detalhadas no capítulo (3) referentes aos procedimentos metodológicos para a solução do ajustamento da rede geodésica 3D por trilateração e no capítulo (4) referentes aos resultados e discussões, apresentam-se que essas injunções são suficientes para efetuar o ajustamento e a obtenção das soluções no ajustamento, efetuando-se em seguida as análises com relação aos resultados obtidos.

### 2.2.4.1 Injunções Funcionais

Segundo Camargo (2010), as injunções funcionais são utilizadas quando existe entre os parâmetros uma relação funcional explícita, que obedecem a uma determinada condição geométrica ou física, com valores conhecidos ou não.

No caso do ajustamento de uma rede geodésica 3D por trilateração, as injunções necessárias são anunciadas de maneira que o problema de mínimos quadrados a ser solucionado seja enunciado conforme a equação (26).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar } V^T P V \\ \text{Sujeito a: } G(X_a) = t \end{array} \right\} \quad (26)$$

Na equação (26), “V” está representando o vetor dos resíduos que deve ser minimizado, o “P” representa a matriz dos pesos, simétrica e definida positiva, diagonal ou completa a depender do problema; “G(X<sub>a</sub>)” representa as injunções funcionais que deverão ser cumpridas no ajustamento; “t” representa um vetor de constantes; “X<sub>a</sub>” representa o vetor de parâmetros a ser encontrado no ajustamento. Considerando a equação (27).

$$V = V(X_0); L = L_b - L_0; L_0 = F(X_0); A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_a=X_0}; X = X_a - X_0. \quad (27)$$

E efetuando uma aproximação linear com relação às injunções no mesmo ponto aproximado de “X<sub>0</sub>”, as injunções serão representadas pela equação (28).

$$BX - f = 0 \quad (28)$$

Sendo B dado pela equação (29),

$$B = \left. \frac{\partial G}{\partial X_a} \right|_{X_a=X_0}; f = t - G(X_0); \quad (29)$$

Inserindo as equações (26), e (28), no problema demonstrado na equação (29), pode ser reescrito como demonstrado na equação (30):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar } (AX - L)^T P (AX - L) \\ \text{Sujeito a: } BX - f = 0 \end{array} \right\} \quad (30)$$

Para solucionar um problema com restrições não é uma tarefa trivial. Todavia, a estratégia mais usualmente utilizada é de transformar o problema da equação (30) em um problema equivalente sem as restrições impostas, utilizando a função Lagrangeana,  $\mathcal{L}$  (DENNIS e SCHNABEL, 1983). A função Lagrangeana que deve ser minimizada está demonstrada na equação (31):

$$\min \mathcal{L}(X, K, ) = (AX - L)^T P (AX - L) - 2K^T (BX - f) \quad (31)$$

Em que, “K” é o vetor composto por parâmetros denominados como multiplicadores de Lagrange.

Através da condição de otimalidade de primeira ordem, o ponto extremo de uma função é aquele ponto que anula o vetor gradiente da função e a condição de mínimo do ponto extremo é atribuída pela condição de segunda ordem, a matriz hessiana, deve ser definida positiva (GARNÉS, 1996).

Com relação ao cálculo do vetor gradiente da função lagrangeana, deve-se ter o sistema de equações normais de mínimos quadrados, em que pode ser colocado no formato de um hipersistema resultando na equação (32) (LEICK; RAPOPORT e TATARNIKOV, 2015):

$$\begin{bmatrix} A^T P A & -B^T \\ -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P L \\ -f \end{bmatrix} \quad (32)$$

Uma vez que determinado adequadamente as injunções necessárias para dar a rigidez a trilateração ou a rede de trilateração, a hipermatriz do lado esquerdo da equação (32) gerada possuirá inversa ordinária.

A solução determinada na equação (32) é o primeiro passo do método iterativo para tentativa de se obter solução com relação a equação (26), podendo com isso, chegar ou não chegar a solução, pois os métodos apresentados não dão garantias de convergência global, possibilitando a divergência. Existe um método que possui em um de seus passos para determinação da solução o vetor dado por “[XK]<sup>T</sup>” proveniente da solução da equação (32), esse método é conhecido de Gauss-Newton, com maiores detalhes pode ser encontrado em Dennis e Schnabel (1983), Garnés (1996) e Garnés (2001).

Na singularidade da hipermatriz do lado esquerdo, pode ser de interesse dentre as infinitas soluções existentes para (33), a solução de norma mínima que resolve o problema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar } (AX - L)^T P (AX - L) \\ \text{sujeito a: } BX - f = 0 \\ \|X\|_2 = \text{mínima} \end{array} \right\} \quad (33)$$

Com  $\|X\|_2$  sendo a norma euclidiana de vetor, e inserindo na equação (33), a solução do problema da equação (33) vai ser obtida como demonstrado em Garnés e Dalmolin (1998):

$$\begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P A & -B^T \\ -B & 0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} A^T P L \\ -f \end{bmatrix} \quad (34)$$

Sendo o superescrito (+), o símbolo que denota a matriz pseudoinversa, sendo a única a cumprir as condições de Penrose (LAWSON e HANSON, 1974).

O vetor dos parâmetros estimado, o vetor dos resíduos estimado e a variância da unidade de peso a posteriori, após a última iteração do método, quando  $\|\text{grad } \mathcal{L}(X, K)\|_2 \rightarrow 0$  e  $\|X\|_2 \rightarrow 0$  da função residual original, pode ser calculado pelas equações (35), (36) e (37), respectivamente:

$$X_a = X_0 + X \quad (35)$$

$$V = AX - L \cong -L \quad (36)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{gl} \quad (37)$$

Sendo,  $gl = n_{\text{obs}} + n_{\text{inj}} - n_{\text{par}}$ ; o número de graus de liberdade é obtido através da soma do número de observações com o número de injunções menos o número de parâmetros.

A Matriz Variância-Covariância dos parâmetros ajustados " $\sigma_{X_a}$ " é obtida da submatriz  $n_{\text{par}}$ -dimensional superior esquerda da inversa ordinária ou da pseudoinversa da matriz das equações normais multiplicada pela variância da unidade peso a posteriori estimada.

#### 2.2.4.2 Injunções de Peso

Segundo Monico (1988), quando para a obtenção da solução do ajustamento, são fixados algumas das observações, associando a eles um peso com um valor excessivamente grande, estes, serão considerados como injunções de peso, pois, esse valor excessivo impossibilita a variação das observações diretamente relacionadas.

Em todos os problemas determinados no capítulo (3) referente ao procedimento metodológico, sendo eles o triângulo, quadrilátero e na rede de trilateração com oito vértices, sendo explanado rapidamente sobre o pentágono e o hexágono, pode-se fixar a posição de vértices, distâncias ou uma direção, sendo azimutal ou zenital, através da utilização de injunções de peso. Com relação à injunção de posição, devem ser tratadas as coordenadas dos pontos de apoio como observações, em seguida deve ser inserido um valor suficientemente grande no peso, ao ponto de as coordenadas não se modifiquem após a conclusão do ajustamento.

Com isso, as injunções  $g_i(X_a)$  são transferidas para as equações de observações  $F(X_a)$ , e o problema da equação (36) e o lagrangeano da equação (36) recai no tradicional ajustamento paramétrico, equação (38):

$$\min f(X) = (AX - L)^T P (AX - L) \quad (38)$$

Em que a solução dada na equação (38) vai ficar particularizada com relação a equação (39). Os parâmetros ajustados, o vetor dos resíduos e a variância da unidade peso a posteriori são calculados pelas mesmas expressões fornecidas nas equações de (35), (36) e (37), respectivamente.

$$X = [A^T P A]^{-1} A^T P L \quad (39)$$

A matriz variância-covariância dos parâmetros estimados nesse caso é obtida diretamente a partir da matriz das equações normais, pela aplicação da lei de propagação das covariâncias como demonstrado na equação (40) (GEMAEL; MACHADO e WANDRESEN, 2015):

$$\sigma X_a = \hat{\sigma}_0^2 [A^T P A]^{-1} \quad (40)$$

#### 2.2.4.3 Injunções Absolutas

Segundo Camargo (2010), quando em um ajustamento alguns dos parâmetros são considerados como fixos, esses parâmetros serão considerados como injunções absolutas, sendo que para este caso, a variância do parâmetro deve ser considerada nulo, pois, se essa variância for conhecida, será tratada como observações adicionais ou pseudo-observações, constituindo as conhecidas injunções relativas.

A injunção absoluta no sentido abordado nesta dissertação é a utilização dos valores coordenados dos vértices de uma rede, diretamente na equação de observação de maneira que o parâmetro que deveria ser estimado, deixa de ser parâmetro e se torna constantes nas equações de observação.

Uma situação para exemplificar sobre as injunções absolutas está determinada quando elaborado na configuração do quadrilátero nos procedimentos metodológicos do capítulo (3), pois, foi quando transformou três dos quatro vértices em injunções absolutas. Assim, as coordenadas dos pontos  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ,  $B(X_B, Y_B, Z_B)$  e  $C(X_C, Y_C, Z_C)$ , entram como constantes e deixam de fazer parte do vetor dos parâmetros, por conta disso, as observações “ $d_{AB}$ ,  $d_{AC}$ ,  $d_{BC}$ ” perdem o sentido e não entram no vetor “ $L_b$ ”.

O problema nesse caso é o enunciado na equação (38) e a solução é dada pela equação (39), com as demais equações também válidas, equações (35), (36), (37) e (40).

### 2.3 SISTEMAS DE COORDENADAS

Segundo Nadal (2006) e Dal’Forno et al. (2010) os sistemas de coordenadas mais comumente utilizados para fins de Topografia e Geodésia, são os Polares (ou Geodésicos), Retangulares / Cartesianos (ou Tridimensionais) e Plano-Retangulares (ou Plano Topográfico Local). Com isso, para que se possa ter um levantamento georreferenciado é necessário que a posição dos objetos (pontos de detalhe) levantados estejam vinculados a um Sistema Geodésico de Referência. Nos Sistemas Geodésicos de Referências modernos, como é o caso do SIRGAS2000

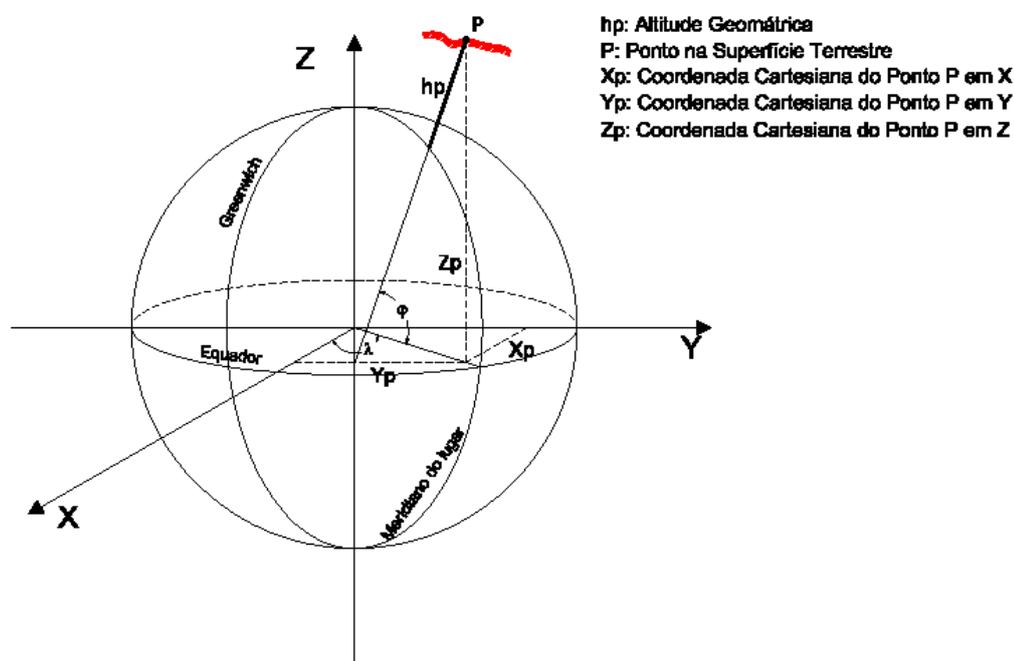
pode estar associado a um sistema de eixos cartesianos tridimensional (X, Y e Z) ou em um sistema de coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$  e  $h$ ). No qual em ambos os casos a origem dos sistemas se encontram no geocentro da Terra (IBGE, 2000).

Para a determinação de um sistema geodésico de referência é estabelecido uma rede geodésica de pontos coordenados ao longo da superfície da Terra, possibilitando com isso, determinar os parâmetros matemáticos que melhor represente um elipsoide de revolução.

Para determinação de um Sistema de Referência, deve-se estabelecer uma rede geodésica de pontos coordenados, em que, é de fundamental importância o posicionamento dos pontos de acordo com o Sistema de Coordenadas utilizado. Para isso, deve ser determinado a posição relativa do ponto, com relação a origem do sistema e em função de qual a superfície geométrica de referência foi empregada. Sendo que para cada Sistema de Referência utilizado, pode ser utilizado um Sistema de Coordenadas diferente. Com isso, as coordenadas com relação aos Sistemas de Coordenadas com abordagem Geodésica podem ser apresentadas de três formas distintas, sendo elas: cartesianas, geodésicas (ou elipsoidais) e planas. Nessa dissertação aborda-se as coordenadas no Sistema Geodésico Geocêntrico (SGG), no Sistema Cartesiano Geocêntrico (SCG) e no Sistema Geodésico Local (SGL), sendo os dados de entrada fornecidos no SGG e após efetuar a transformação de coordenadas para o SCG e SGL, é efetuado o ajustamento da rede geodésica 3D por trilateração, considerando os dois últimos sistemas.

O SGG possui como superfície de base, o elipsoide de revolução. O centro do Sistema de Coordenadas corresponde ao centro de massa da Terra e os parâmetros básicos para o cálculo das coordenadas dos vértices ao longo do território “a”, “b” e “f”, sendo o semieixo maior, semieixo menor e achatamento, respectivamente. As coordenadas posicionais dos pontos ao longo da superfície são representadas por latitude ( $\varphi$ ) e longitude ( $\lambda$ ) e altitude geométrica ( $h$ ), em que a latitude é o ângulo formado entre a Normal ao Elipsoide no ponto e o plano do Equador, a longitude é o ângulo formado entre o Meridiano que passa pelo ponto e o plano do Meridiano de Origem (Greenwich) e a altitude é a distância entre o ponto e o elipsoide ao longo da normal geodésica (Figura 2).

Os sistemas de coordenadas podem ser diretamente relacionados, como demonstrado na Figura 3, em que a uma relação direta entre o SGG e o SCG.

Figura 3 – Relação entre o SGG ( $\varphi\lambda h$ ) e o SCG (XYZ)

Fonte: O Autor (2019).

O SCG é considerado um Sistema Geodésico moderno, onde também pode ser considerado por Sistema Cartesiano tridimensional, pois as suas coordenadas se encontram em três dimensões (X, Y, Z). Para caracterização de um sistema moderno é de extrema necessidade a adoção de um elipsoide de revolução, cuja origem coincide com o centro de massa da Terra e o eixo de revolução coincidente com o eixo de rotação da Terra, porém para a determinação desses sistemas devem ser elaboradas técnicas de posicionamento espacial de alta precisão. Desta forma, todas as medições realizadas no sistema cartesiano tridimensional (3D) devem ter origem ao geocentro (IBGE, 2000), possibilitando com isso também uma relação direta entre o SGL e o SCG.

Todos os levantamentos efetuados com relação às áreas de Topografia e Geodésia, são efetuados sobre a superfície terrestre, em que os instrumentos utilizados para tal finalidade podem ser: teodolitos, estações totais, receptores GNSS, distanciômetros, dentre outros. Cujas finalidades desses levantamentos efetuados são de obtenção das coordenadas posicionais de um objeto, podendo ser de pequeno porte (poste, lotes, quadras) ou grande porte (estado, país, dentre outros.), georreferenciados em um Sistema de Referência conhecido. Todo o



dentre elas existem as NBR 13133 (ABNT, 1994), INCRA (2013) e NBR 14166 (ABNT, 1998) que são a “Norma de execução de levantamento topográfico”, a Norma Técnica de Georreferenciamento de Imóveis Rurais do INCRA e a “Norma da Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimento”, respectivamente.

## 2.4 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

As transformações de coordenadas é uma metodologia utilizada que possibilita a transformação da posição de um determinado objeto, entre dois sistemas de coordenadas distintos, conhecendo em um dos sistemas, e apresentá-los em outro sistema (SILVA & SEGANTINE, 2015). Neste estudo foram demonstradas as transformações de coordenadas geodésicas elipsoidais para coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e vice-versa e coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas para coordenadas geodésicas cartesianas locais e vice-versa, pois, os dados inicialmente simulados estão no SGG e devem ser transformados para os demais sistemas.

No início do século 21, pode-se afirmar que a transformação de coordenadas entre os sistemas de coordenadas Geodésicas elipsoidais ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) e Cartesianas 3D ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) geocêntricas foi bastante estudada, principalmente nas áreas de Geodésia, Aeroespacial e áreas afins (SILVA, 2013). Contudo, a área não foi completamente explorada, ocorrendo até repetições ideológicas com relação a transformação de coordenadas (FEATHERSTONE e CLAESSENS, 2008), alterando apenas algumas informações, mas, o conteúdo é quase a mesma coisa. Porém, Seemkooei (2002), afirma que a conversão de coordenadas geodésicas em cartesianas é uma das mais importantes tarefas em Geodésia computacional.

O modelo direto de transformação de coordenadas geodésicas é relativamente simples, porém, o modelo inverso não é trivial, em que pode ser direto (PAUL, 1973; OZONE, 1985 e SOFAIR 1993) ou iterativo o cálculo da latitude (FOK e IZ, 2003; BURTCH, 2006; GERDAN e DEAKIN, 1999; CLYNCH, 2006 e FEATHERSTONE e CLAESSENS, 2008). Por ser um dos mais antigos e eficaz, o modelo comumente utilizado para a transformação de coordenadas é o iterativo, mas especificamente o descrito por Heiskanen e Moritz (1967).

A utilização do processo iterativo possibilita obter um resultado mais coerente com relação ao valor das coordenadas reais, sendo inerentes a erros (FRANCOIS,

2000). Como para esse caso o erro vai se tornar o limiar de parada do processo iterativo, então o resultado pode variar de acordo com cada software utilizado.

Segundo Gerdan e Deakin (1999), as utilizações dos métodos diretos possibilitam na redução do tempo de processamento, porém, apresentam problemas quando se refere a baixas latitudes. Seguindo esse contexto, o autor Silva (2013), propõe em seu estudo um modelo para cálculo direto da latitude em função das coordenadas cartesianas, a partir do terno de coordenadas cartesianas e dos parâmetros de superfície de referência (elipsoide de revolução).

Porém, no Brasil a transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no Sistema Topográfico Local está normalizada pela NBR 14166 (Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimento). Os procedimentos, conceitos e a formulação matemática estão descritos na referida Norma e respectivos Anexos.

No entanto, com a evolução dos métodos de levantamento, outras metodologias podem ser utilizadas e, dentre essas, pode-se destacar o método que transforma as coordenadas expressas no Sistema Geodésico Cartesiano Tridimensional em coordenadas referidas ao Sistema Geodésico Local, pelo emprego de rotações e translações (DAL'FORNO et al, 2010). Nos subtópicos do item 2.4, poderá ser encontrado com maiores detalhes sobre a temática, nos estudos efetuados por Garnés (1998); Seeber (2003); Leick, Rapoport e Tatarnikov (2015).

#### **2.4.1 Coordenadas Geodésicas Elipsoidais para Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas**

Com relação a transformação de coordenadas partindo de coordenadas Geodésicas Elipsoidais  $(\varphi, \lambda, h)$  e chegando em coordenadas geodésicas Cartesianas Geocêntricas  $(X, Y, Z)$ , pode ser efetuado de uma forma mais direta, como demonstrado nas equações (41) à (43) (GARNÉS, 2005).

$$X = (N + h)\cos\varphi \cos\lambda \quad (41)$$

$$Y = (N + h)\cos\varphi \sen\lambda \quad (42)$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h]\sen\varphi \quad (43)$$

Porém, para que se possa calcular a transformação, se deve também obter os valores do quadrado da 1ª Excentricidade “ $e^2$ ” e da Grande Normal “ $N$ ”, como demonstrado nas equações (44) e (45), sendo as coordenadas geodésicas da latitude “ $\varphi$ ” e longitude “ $\lambda$ ” relacionadas ao ponto coordenado, cujo achatamento “ $f$ ” e o semieixo maior “ $a$ ” com relação ao Sistema de Referência escolhido, que para o caso da dissertação foi o SIRGAS2000. (GEMAEL, 1977)

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = f * (2 - f) \quad (44)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (45)$$

Como já foi obtido as Coordenadas Cartesianas Geocêntricas, pode-se determinar as Coordenadas Cartesianas Topocêntricas, como demonstrado no tópico 2.4.2.

#### **2.4.2 Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas para Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais**

Para a transformação de coordenadas de mais de um ponto, entre dois Planos Cartesianos, sendo eles o SCG (XYZ) e o SGL (xyz), é necessário que seja fixado pelo menos um ponto, sendo esse ponto a origem da rede, ou seja, deve escolher um ponto, cujas coordenadas geodésicas Cartesianas Geocêntricas ( $X_0, Y_0, Z_0$ ) e coordenadas geodésicas Cartesianas locais ( $x_0, y_0, z_0$ ) são conhecidas, pois, com isso pode-se determinar as coordenadas dos demais pontos da rede, como demonstrado utilizando as equações (46) e (47). (GARNÉS, 1998)

$$\begin{bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Para essa transformação de coordenadas, se faz necessário a utilização da matriz de rotação entre os planos, porém, para isso, deve-se ter conhecimento das coordenadas geodésicas geocêntricas ( $\varphi_0, \lambda_0, h_0$ ), com relação ao ponto de referência. Garnés (1998) demonstra mais detalhadamente a transformação de

coordenadas, utilizando por meio de transformação de base vetorial pela matriz de rotação “R”, resultando na equação (47). (GARNÉS, 1998)

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\lambda_0 & \text{cos}\lambda_0 & 0 \\ -\text{sen}\varphi_0 \text{cos}\lambda_0 & -\text{sen}\varphi_0 \text{sen}\lambda_0 & \text{cos}\varphi_0 \\ \text{cos}\varphi_0 \text{cos}\lambda_0 & \text{cos}\varphi_0 \text{sen}\lambda_0 & \text{sen}\varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \end{bmatrix} \quad (47)$$

#### 2.4.3 Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais para Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas

Na transformação de coordenadas geodésicas cartesianas locais para as coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas, deve-se como explicitado no tópico 2.4.2., saber quais as coordenadas geodésicas cartesianas locais, coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas geodésicas elipsoidais do ponto de referência, para que se possa ser efetuada a transformação de coordenadas. Em seguida deve ser determinada a variação de coordenadas geodésicas cartesianas locais com relação a coordenadas do ponto de origem do sistema. Para efetuar essa transformação de coordenadas deve ser utilizado à mesma matriz de rotação como demonstrado na equação (47), porém, para esse caso deve ser a sua transposta “R<sup>T</sup>”, como demonstra a equação (48).

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\lambda & -\text{cos}\lambda \text{sen}\varphi & \text{cos}\lambda \text{cos}\varphi \\ \text{cos}\lambda & -\text{sen}\lambda \text{sen}\varphi & \text{sen}\lambda \text{cos}\varphi \\ 0 & \text{cos}\varphi & \text{sen}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

#### 2.4.4 Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas para Coordenadas Geodésicas Elipsoidais

A transformação do Sistema de Coordenadas geodésicas Cartesianas Geocêntricas para Coordenadas Geodésicas elipsoidais pode ser efetuada de duas formas, a forma aproximada e a forma exata, em no primeiro caso é efetuado de uma forma direta, sem iteração matemática, porém, no segundo devem ser efetuado iterações matemáticas para a obtenção do resultado da transformação.

Pelo método direto a precisão obtida será inferior com relação ao método iterativo, porém, dependendo de que projeto será utilizado e do tamanho da linha de base utilizada, essa diferença na precisão pode ser descartada, possibilitando a

utilização dos dois métodos. As equações de (49) à (52) demonstram o método direto. A ordem de grandeza utilizada pelo método direto pode chegar à casa dos centímetros, porém, o método iterativo possibilita chegar à ordem dos milímetros, porém, depende da transformação a ser efetuada. (SILVA, 2015; ANDRADE, 2008)

$$\lambda_g = \tan^{-1} \left( \frac{Y}{X} \right) \quad (49)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{Z a}{\sqrt{X^2 + Y^2} b} \right) \quad (50)$$

$$\phi_g \cong \tan^{-1} \left[ \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{\sqrt{X^2 + Y^2} - (e^2 a \cos^3 \theta)} \right] \quad (51)$$

$$h \cong \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \phi_g} - N \quad (52)$$

O método iterativo possibilita uma precisão melhor que o método direto, ou seja, metodologia possibilita a obtenção da precisão na casa dos milímetros para pequenas distâncias (inferiores a 10 km). Para que se possa calcular foi efetuado um passo a passo de como devem ser os cálculos (MONICO, 2008; SILVA, 2015):

- a) Calcular o parâmetro “p”, como demonstrado na equação (53).

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (53)$$

- b) Calcular um valor aproximado para latitude inicial “ $\phi_0$ ”, utilizando a equação (54).

$$\tan \phi_0 = \frac{Z}{p} \left( \frac{1}{1 - e^2} \right) \quad (54)$$

- c) Calcular um valor aproximado para a grande Normal “ $N_0$ ” utilizando a equação (55).

$$N_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi_0 + b \sin^2 \phi_0}} \quad (55)$$

- d) Calcular a altitude elipsoidal de acordo com a equação (56).

$$h = \frac{p}{\cos \phi_0} - N_0 \quad (56)$$

e) Calcular um novo valor para a latitude “ $\phi$ ” utilizando a equação (57).

$$\tan \phi = \frac{Z}{P} \left[ \frac{1}{(1 - e^2) * \left( \frac{N_0}{N_0 + h} \right)} \right] \quad (57)$$

Em seguida deve-se verificar utilizando “ $\phi = \phi_0$ ”, pois, se esse fato acontecer o cálculo está finalizado, porém, possa ser que não aconteça, então deve-se colocar um fator de parada aproximado, para que seja efetuada uma nova iteração, cujo início vai ser a partir do tópico c), em que a latitude inicial vai ser a obtida no tópico e).

## 2.5 POSICIONAMENTO PELO GNSS

O posicionamento pelo GNSS são técnicas utilizadas com receptores GNSS que possibilitam determinar a posição de um objeto utilizando os dados obtidos através da relação com os satélites, podendo ser absolutas, relativas e/ou Por Ponto Preciso (PPP).

Com relação à absoluta, o posicionamento está diretamente ligado à obtenção das coordenadas posicionais de pontos-objeto, estes com base em observações da pseudodistância, derivadas de código, fixando todos os parâmetros dos satélites e suas respectivas órbitas, com relação aos valores obtidos pelas mensagens de navegação por conta das efemérides transmitidas. Com isso as coordenadas do ponto são determinadas dependendo do referencial vinculado ao sistema que está sendo utilizado.

Para o caso do posicionamento relativo, as coordenadas do ponto vão ser obtidas com relação a outro ponto coordenado, podendo ser entre dois receptores ou entre um receptor e um Sistema de Controle Ativos (SCA), cujas coordenadas de um ponto vão ser relacionadas diretamente as coordenadas de um outro ponto qualquer do SCA ou de um outro receptor GNSS.

Com relação ao PPP são necessárias a utilização das observáveis de pseudodistância ou fase da onda portadora, ou ambas, em que elas serão coletadas

por receptores de simples ou duplas frequências, porém, serão utilizadas as efemérides precisas, para determinação das coordenadas dos demais pontos (MONICO, 2008), em que as efemérides precisas podem ser obtidas pelo site GNSS Calendar (<http://www.gnsscalendar.com/>).

Os métodos empregados para os diversos tipos de posicionamentos relativos por GNSS são: estático, estático rápido, semi cinemático (ou Stop and Go) e cinemático (SEEBER, 2003). Podendo este último ser pós processado, tempo real (Real Time Kinematic – RTK) e de redes (LEICK; RAPOPORT E TATARNIKOV, 2015). Esses métodos empregados podem ser utilizados de diversas formas, principalmente quando utilizados para a obtenção das coordenadas precisas para determinar a base do levantamento de uma poligonal do imóvel, podendo estar em meio urbano ou rural através das metodologias de posicionamento relativo estático e/ou cinemático, em ambos os casos se deve ter cuidado com os erros envolvidos, pois, árvores, prédios e outros obstáculos podem inserir erros grosseiros ao levantamento com receptores GNSS.

No final do século 20, para a realização da metodologia de posicionamento relativo GNSS era preciso a utilização de no mínimo dois receptores estáticos trabalhando simultaneamente rastreando diversos satélites em comum. Porém, com o avanço tecnológico na presente data, é preciso apenas de um receptor estático ou cinemático para esse tipo de posicionamento, sendo utilizados os dados de um SCA diretamente conectado com um receptor via navegação de rede sem fio Wifi ou 3G e/ou afins. No Brasil o SCA é a Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC), caracterizando um posicionamento relativo cinemático de redes.

A simultaneidade das observações serve para a redução de erros como o de recepção e transmissão do sinal dos satélites e receptores, erro do relógio e do satélite e demais erros, possibilitando uma melhor precisão para estes tipos de posicionamentos.

O posicionamento relativo estático utiliza a Dupla Diferença (DD) da fase da onda portadora, porém, também pode utilizar a DD da pseudodistância, ou ambas. A utilização de ambas possibilita um melhor resultado com relação à acurácia posicional. Para o posicionamento relativo estático, será rastreado com dois ou mais receptores em um determinado período de tempo variando entre 20 minutos e algumas horas. Esse tipo de posicionamento pode ser dividido em estático e estático rápido, sendo a única diferença no tempo de coleta dos receptores, pois, o estático

rápido o tempo de coleta é inferior a 20 minutos e a distância entre os receptores inferiores a 10km, porque, quanto maior a linha de base maior é o tempo de rastreo.

Com relação ao posicionamento relativo estático deve ser utilizado as Duplas Diferenças (DD) da fase da onda portadora, pois, possui uma maior precisão referente a da pseudodistância, isto acontece, pois, a utilização da pseudodistância não melhora a precisão significativamente, no entanto, a DD da pseudodistância auxilia no processamento e na estimativa do erro do relógio do receptor, ou calcula o instante aproximado de transmissão de sinal enviado pelo satélite em órbita (MONICO, 2008).

A diferença entre o posicionamento relativo estático e cinemático se encontra na coleta das observáveis, pseudodistância e fase da onda portadora, no primeiro caso os receptores serão obtidos parados estaticamente, como por exemplo as estações que compõem a rede RBMC e no outro caso os receptores são transportados de vértice em vértice cinematicamente, porém, existem um tempo de coleta necessário para que sejam aprovados, segundo as normas citadas anteriormente NBR13133 (ABNT, 1994) e a do INCRA (2013).

O tamanho da linha de base entre todos os vértices do levantamento é de extrema importância. Portanto, de acordo com estudos efetuados por Briceño (2001) ele demonstrou que não só o tamanho, como também para melhorar a precisão se pode utilizar o tempo de coleta entre os receptores nos vértices, cujas linhas de base em seu estudo variou de 20 a 96 km. O resultado final para uma distância de linha de base igual à 100km é de utilizar no mínimo 4 horas de rastreo, pois, pode-se obter uma precisão inferior aos 5 cm.

O método de posicionamento relativo cinemático pode ser abordado como em tempo real, RTK em redes e pós-processado. Para o primeiro caso, as posições dos objetos são obtidas no lugar, onde está sendo efetuado o posicionamento, ou seja, serão obtidas as coordenadas e suas devidas precisões no instante do levantamento em campo, possibilitando uma precisão na casa dos poucos centímetros (inferiores a 5 cm).

No segundo caso a base estará diretamente conectada a uma rede SCA, possibilitando também uma precisão na casa dos centímetros, com maiores detalhes em Alves (2008; 2011); Alves e Monico (2011), no entanto, para este caso foi criado um sistema nas redes ativas SCA, chamada de The BKG Ntrip Client (BKG-BNC), em que, o BKG-BNC possibilita ligar o receptor cinemático à rede RBMC

diretamente, através de um cadastramento via internet conectado diretamente ao receptor e obter os dados em tempo real.

E por fim no caso pós-processado, os valores são processados em escritório, cuja precisão obtida vai depender do processamento, pois, dependendo da metodologia utilizada se podem obter valores posicionais melhores em termos de precisão, podendo alcançar a casa dos milímetros. Para o posicionamento cinemático pós-processado as observações simultâneas em dois ou mais receptores possibilitam calcular as DDs, possibilitando uma redução nos erros relacionados às observáveis. No caso de ter que resolver o vetor de ambiguidades, deve-se ter duas opções: solucionar antes de efetuar o levantamento ou estimá-lo com os dados obtidos após o levantamento. Com maiores detalhes em Monico (2008).

O método de Posicionamento por Ponto Preciso (PPP) pode ser efetuado como pós-processado ou em tempo real. Para o primeiro caso, os dados serão processados fazendo uso das efemérides precisas como base para as correções e no caso em tempo real será utilizada uma estação SCA como base para as correções do PPP como demonstrado por Souza, Garnés e Marques (2014). Também se pode obter maiores detalhes sobre PPP em tempo real em Costa et al. (2009).

Com relação à metodologia citada alguns autores efetuaram alguns questionamentos, dentre esses, King; Edwards e Clarke (2002) fizeram uma comparação entre metodologias para saber quais dos posicionamentos, relativo ou PPP seriam mais bem utilizados para determinadas atividades. Por isso os autores compararam as vantagens e desvantagens de cada posicionamento. Outros autores que possuíam ideias semelhantes, porém, com uma abordagem com relação ao tema diferente, como por exemplo, Ebner e Featherstone (2008) que discutiram as desvantagens do posicionamento relativo e do PPP. Porém, Hurber et al. (2010), focaram em uma metodologia avaliando o método do PPP, quanto as suas limitações e as oportunidades oferecidas nos levantamentos. Grinter e Roberts (2011) concluíram sobre os avanços obtidos pela metodologia do PPP e com a chance de obtenção de produtos melhores. Rizos et al. (2012) fizeram uma indagação sobre um possível desuso com relação a metodologia de posicionamento relativo.

## 2.6 POSICIONAMENTO POR MÉTODOS CLÁSSICOS EM 3D

A NBR 13133 (ABNT, 1994) define um levantamento topográfico de detalhe como “Conjunto de operações topográficas clássicas (poligonais, irradiações, interseções, ou por ordenadas sobre uma linha-base), destinadas à determinação das posições planimétrica e/ou altimétrica dos pontos, que vão permitir a representação do terreno a ser levantado topograficamente a partir do apoio topográfico. Estas operações podem conduzir, simultaneamente, à obtenção da planimetria e da altimetria, ou então, separadamente, se condições especiais do terreno ou exigências do levantamento obrigarem à separação”.

Segundo o IBGE (1996), com o avanço tecnologia dos equipamentos de aquisição de dados de coordenadas posicionais de pontos-objetos em 3D, pode-se efetuar o levantamento geodésico, que é o levantamento efetuado para distâncias superiores a 10km, pois, existe uma influência direta da refração e da curvatura da Terra no levantamento. Como para este caso são regiões muito extensas, logo se torna inviável arbitrar pontos de vértices para a execução do levantamento geodésico, logo, a maior parte do levantamento estará diretamente relacionada com alguns Sistemas de Coordenadas vigente no Sistema de Coordenadas Geodésico Brasileiro (SGB).

O levantamento topográfico pode ser georreferenciado ou de pontos arbitrários, porém, para fins de regularização de propriedade o levantamento topográfico Sistema de Coordenadas Geocêntrico ou de um Sistema Geodésico Local, porém este último, apenas pode ser efetuado se caso o Município já implantou uma rede geodésica no SGL para fins de levantamentos topográficos e dependendo da distância entre os vértices podendo ser de caracteres geodésicos no Município. Para este caso é que todos os pontos levantados estejam relacionados a um dos Sistemas de Referências, como Garnés, Siqueira e Cacho (2005) demonstraram em seu estudo. O SGL possui uma relação direta com o SGE, através dos parâmetros de translação, rotação e escala, pois, no Brasil todos os levantamentos estão diretamente ligados ao levantamento topográfico e/ou geodésicos cadastrais, com isso, estão diretamente relacionados ao SGB, no SIRGAS2000, na época 2000.4.

De acordo com Silva e Segantine (2015) existem alguns propósitos para a utilização de uma rede topográfica, sendo eles:

- Mapeamentos Topográficos;
- Mapeamento Cadastral;
- Rede de apoio para levantamento e implantação de obras;
- Rede de apoio para a construção de vias de transporte;
- Rede de apoio para monitoramento geodésico de obras;
- Pontos de controle para aerofotogrametria;

Segundo o manual técnico do INCRA (2013), as metodologias empregadas para obtenção das posições coordenadas dos objetos detalhes e dos vértices que delimitam uma propriedade rural pelos métodos clássicos, são os métodos de trilateração, triangulação, triangulateração e poligonação, porém, o mesmo manual inseriu os métodos de aquisição de dados (ângulos e distâncias) com estação total, teodolitos e/ou distanciômetros da Topografia (Irradiação e as Interseções a Ré e Vante) como fazendo parte também dos métodos clássicos. Porém, são apresentadas soluções para a obtenção de coordenadas em 2D e em conjunto com o nivelamento Trigonométrico e/ou Geométrico, pode-se determinar a rede de nivelamento.

O método clássico escolhido para estudo nesta dissertação é a trilateração 3D, serve para determinar as coordenadas planialtimétricas, utilizando apenas distâncias inclinadas, com relação a um conjunto de vértices delimitadores de uma propriedade rural ou urbana, para fins de georreferenciamento do imóvel, sendo que esses possuem distâncias inclinadas também superiores a 10km.

Em busca da obtenção de uma melhor precisão e acurácia no posicionamento topográfico ou geodésico, é de extrema importância a verificação da quantidade de erros existentes, ou seja, deve ser efetuado um estudo com relação a esses erros, para determinar se são grosseiros, sistemáticos e aleatórios, para com isso eliminar os que podem e reduzir ao máximo os que não podem ser eliminados em 100%.

Os erros grosseiros em um posicionamento ocorrem devido a falhas humanas através da falta de atenção de alguém no levantamento de campo, como por exemplo, anotação de informação errada em um croqui, não centrou e/ou calou corretamente o instrumento, o auxiliar não se preocupou em ficar observando a bolha calante do prisma, dentre outras situações.

Os erros sistemáticos podem acontecer até em instrumentos recém-comprados, instrumentos descalibrados (estação total, teodolitos, distanciômetros,

primas, dentre outros), porém, existem diversas técnicas para detecção e eliminação desses tipos de erros.

Porém, os erros aleatórios são os mais difíceis de serem detectados, pois, como o seu nome já diz, são erros que tem a ver com a aleatoriedade da natureza, como por exemplo, o clima, através de chuva, neblina, ventos fortes, descargas elétricas, e outros, porém, existem estudos que conseguem quantificar essas variáveis, possibilitando a minimização deste tipo de erro nos resultados obtidos.

Para a resolução nessa dissertação, o método clássico utilizado foi o da trilateração 3D, que em conjunto com o ajustamento das observações do MMQ pelo modelo dos Parâmetros, serviram para determinar as coordenadas planialtimétricas dos vértices que determinam o limite da propriedade, por conta da metodologia foi utilizada apenas as equações de distâncias entre os vértices como o vetor das observações, tanto no SCG, quanto no SGL, porém, em ambos os casos estão diretamente relacionados aos sistemas de coordenadas geodésicas geocêntricas e possuem como unidade de medida em metro.

### 3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

A metodologia empregada nessa dissertação está diretamente relacionada ao ajustamento das observações de uma trilateração (ajustamento pelo método clássico por trilateração e ajustamento de uma rede GNSS) com modelagem matemática descrita no espaço tridimensional, sendo esse o Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico ( $X, Y, Z$ ) e o Sistema Geodésico Cartesiano Local ( $x, y, z$ ). Com relação, a esses modelos, são apresentadas as técnicas utilizadas para a resolução dessas metodologias empregadas, bem como as equações que relacionam observações e parâmetros, as matrizes das derivadas e dos Pesos para a obtenção da solução única para cada um dos modelos, utilizando com isso o modelo paramétrico pelo Método dos Mínimos Quadrados. Para um teste de hipótese do Qui-Quadrado com um nível de confiança de 95%.

#### 3.1 ÁREA DE ESTUDO

A ideia de se trabalhar com o ajustamento das observações de uma trilateração surgiu a partir de uma metodologia que não vem sendo muito utilizada nos dias de hoje. Porém, essa metodologia em conjunto com os métodos clássicos, foi bastante utilizada, principalmente entre o século XIX até o Início do Século XXI. Com a finalidade de trazer de volta esse conhecimento que está sendo esquecido por causa dos avanços tecnológicos, foi escolhida uma melhor área que pudesse representar o estudo da temática desta dissertação. Por conta disso essa área abrange todo o Município de Recife, situado no estado de Pernambuco, onde este é um dos estados que compõe à região do nordeste brasileiro.

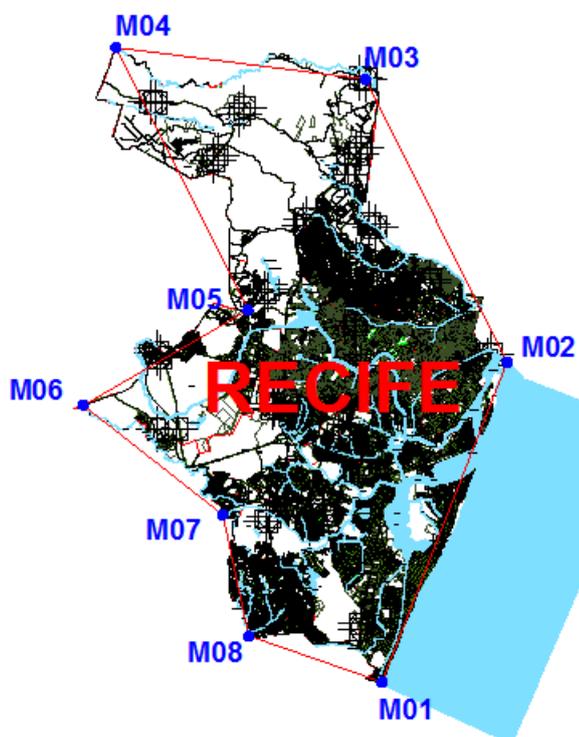
Outro fato importante para a escolha dessa área foi com relação ao tamanho das linhas de base entre os vértices da poligonal limítrofe, pois isto possibilita uma abordagem mais geodésica do estudo envolvendo distâncias superiores a 10km. O motivo, diz respeito à quantidade de observações para a obtenção de uma única solução do sistema, pois, os dados de observação foram simulados obedecendo ao princípio de normalidade de Gauss.

Os dados simulados foram obtidos de duas formas distintas, com relação aos dados de planimetria utilizou-se a base cartográfica fornecida pela Prefeitura Municipal do Recife, por intermédio do seu Sistema de Informação Geográfica –

ESIG (Recife, 2018) e com relação aos dados de altimetria foram obtidos pelo Modelo Digital de Superfície (MDS), disponibilizado pelo software Google Earth Pro (versão 7.3.1.4507), em que foi assumido que tais altitudes seriam “ortométricas”.

Os dados planimétricos foram obtidos em arquivo de formatação DWG (formato de arquivos do AutoCAD), sendo o *download* efetuado diretamente pelo próprio site do ESIG. Como os dados abrangem todo o município do Recife, foram selecionados 8 vértices que representasse bem a geometria do município, com distâncias superiores a 10km, mantendo a abordagem geodésica, como ilustrado na Figura 5 e em maior tamanho no ANEXO A.

Figura 5 – Área de Estudo abrangendo o Município de Recife



Fonte: ESIG Recife (2018).

Para a utilização na dissertação se fez necessário a utilização de dados de coordenadas geométricas ao longo do elipsoide, logo, foi efetuado uma transformação de coordenadas da projeção UTM para coordenadas geodésicas elipsoidais com o elipsoide de referência é o GRS80 utilizado no SGR SIRGAS2000. Para essa transformação foi utilizado o software AstGeoTop (GARNÉS, 2019), obtendo com isso os dados no Sistema de Coordenadas Geodésicas Geocêntricas ( $\varphi, \lambda$ ), como demonstrado na Tabela 1

Tabela 1 – Coordenadas Geodésicas elipsoidais SIRGAS2000

Vértice	Latitude	Longitude
M01	-8°09`18,05771"	-34°54`33,47688"
M02	-8°02`26,46830"	-34°51`51,38285"
M03	-7°56`21,12474"	-34°54`51,54861"
M04	-7°55`38,13642"	-35°00`10,43383"
M05	-8°01`17,59472"	-34°57`23,35601"
M06	-8°03`18,44533"	-35°00`55,27834"
M07	-8°05`41,07544"	-34°57`57,08750"
M08	-8°08`17,93149"	-34°57`24,02183"

Fonte: O Autor (2019).

Como os dados altimétricos obtidos se encontra em coordenadas de altitudes supostamente definidas como altitudes “ortométricas”, são de extrema importância a transformação para altitudes elipsoidais. Para a transformação das altitudes ortométricas em altitudes elipsoidais foi utilizado o Modelo Geoidal Local do Recife, elaborado em Lima (2017) e Garnés (2017) para a determinação das respectivas ondulações Geoidais de cada vértice da área de estudo. A ondulação geoidal vincula os dois tipos de altitudes, resultando os valores em metros apresentados na Tabela 2

Tabela 2 – Coordenadas Altimétricas

Vértice	h(elips)	N(ond)	H(orto)
M01	-0,737	-5,752	5,015
M02	-0,410	-5,445	5,035
M03	26,402	-5,168	31,570
M04	98,590	-5,525	104,115
M05	3,598	-5,402	9,000
M06	64,066	-5,378	69,444
M07	18,682	-5,441	24,123
M08	12,503	-5,501	18,004

Fonte: O Autor (2019).

(H – Altitude ortométrica, h – Altitude elipsoidal e n - Ondulação geoidal). Unidades em metros.

O resultado final das Coordenadas Geodésicas elipsoidal está representado na Tabela 3. Esses valores são essenciais para a obtenção das coordenadas desses mesmos vértices no Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e no Sistema Geodésico Local.

Tabela 3 – Coordenadas Geodésicas elipsoidais SIRGAS2000

Vértice	Latitude	Longitude	h (elips) m
M01	-8°09`18,05771"	-34°54`33,47688"	-0,737
M02	-8°02`26,46830"	-34°51`51,38285"	-0,410
M03	-7°56`21,12474"	-34°54`51,54861"	26,402
M04	-7°55`38,13642"	-35°00`10,43383"	98,590
M05	-8°01`17,59472"	-34°57`23,35601"	3,598
M06	-8°03`18,44533"	-35°00`55,27834"	64,066
M07	-8°05`41,07544"	-34°57`57,08750"	18,682
M08	-8°08`17,93149"	-34°57`24,02183"	12,503

Fonte: O Autor (2019).

## 3.2 MATERIAIS UTILIZADOS

Nesse tópico serão apresentados todos os materiais utilizados na dissertação. A seguir são descritos os equipamentos, os softwares e os apoios logísticos necessários para o desenvolvimento desta dissertação.

### 3.2.1 Equipamentos

Com relação aos equipamentos utilizados para a realização do ajustamento de rede geodésica 3D por trilateração, tem-se:

- Notebook Lenovo ideapad, processador i5 3ª Geração, placa de vídeo de NVIDIA 4000, 8 de Memória Ram DDR2;

### 3.2.2 Softwares

- AutoCAD 2014;
- Matlab2010;
- Excel 2013;
- Software AstGeoTop 2018 (GARNÉS, 2019).

### 3.2.3 Apoio Logístico

- Dados Simulados de toda a área limítrofe da cidade do Recife:

- Para a planimetria foi utilizado o ESIG da Prefeitura do Recife;
- Para a altimetria foi utilizado o Modelo Digital de Superfície (MDS), disponibilizado pelo software Google Earth Pro (versão 7.3.1.4507),

### 3.3 METODOLOGIA

Nesta dissertação os dados utilizados para delimitação da área de estudo foram simulados abrangendo todo o Município de Recife (cf. item 3.3.1).

Após a definição dos objetivos específicos, iniciou-se o estudo do ajustamento das observações de uma rede geodésica 3D por trilateração. Para isso o estudo foi dividido em três etapas. Na primeira, utilizou-se a figura de um triângulo, sendo esta uma rede perfeita para se realizar o estudo do ajustamento considerando o mínimo de parâmetros possíveis (três vértices e três distâncias). No ajustamento desta rede utilizaram-se três tipos de injunções separadamente com a finalidade de avaliar o melhor tipo de injunção para ser utilizada na rede (cf. item 3.3.3).

Na segunda etapa foi inserido mais um vértice resultando em um quadrilátero, totalizando seis distâncias e quatro vértices. Partindo do resultado obtido na primeira etapa, ou seja, após definição do melhor tipo(s) de injunção(ões) a ser(em) utilizada(s), foi feito um estudo envolvendo os dois sistemas de coordenadas propostos para a resolução dessa rede geodésica, com a finalidade de avaliar o melhor sistema a ser utilizado na rede, para assim generalizar para uma rede com número de vértices superior a quatro (cf. item 3.3.4).

Na terceira etapa foram adicionados sucessivamente vértices, de um em um, ao quadrilátero da segunda etapa, sendo efetuadas análises para cada ajustamento até resultar na rede geodésica proposta nesta dissertação, contendo oito vértices conforme ilustração da Figura 5 e Figura 6 (cf. item 3.3.5).

Para a resolução dessas etapas, foram utilizados os softwares AstGeoTop (GARNÉS, 2019) e MATLAB2010. Este último possibilitou a elaboração de rotinas dos ajustamentos das observações, a verificação de erros existentes, mau condicionamento da rede por conta da geometria ou das equações e verificação de solução única para a rede. Sendo o teste de hipótese bilateral do Qui-Quadrado utilizado para identificar possíveis erros com relação à geometria da rede (cf. item 5.1).

### 3.3.1 Ajustamento de Rede Geodésica 3D por Trilateração

Para o ajustamento de uma trilateração pelo método clássico em 3D, foram abordados de duas formas distintas, sendo o primeiro ajustamento no Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico (X, Y, Z) e o outro no Sistema Geodésico Local (x, y, z).

Para que se possa efetuar os dois ajustamentos, foram preciso efetuar mais duas transformações de coordenadas, sendo que no primeiro caso, foi do Sistema Geodésico Elipsoidal para o Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e no segundo caso foi do Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico para o Sistema Geodésico Local utilizando o software AstGeoTop (GARNÉS, 2019) no modulo de transformação de coordenadas. Maiores detalhes sobre a transformação podem ser encontrados em Garnes (1998) e no subitem 2.4.

Os valores simulados obtidos para os ajustamentos no Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e no Sistema Geodésico Local se encontram nas Tabela 4 e Tabela 5, respectivamente. Sendo esses, como comentado anteriormente, dado simulados que não possui erros que possam interferir no ajustamento.

Tabela 4 – Coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas SIRGAS2000 dos vértices da rede geodésica simulada

Vértice	X (m)	Y (m)	Z (m)
M01	5177906,054	-3613406,791	-898753,892
M02	5182205,787	-3610354,954	-886235,501
M03	5180351,343	-3615788,186	-875124,428
M04	5174963,020	-3623938,249	-873826,375
M05	5176633,918	-3618862,427	-884140,940
M06	5172536,905	-3623915,597	-887825,602
M07	5175124,429	-3619067,236	-892157,574
M08	5175141,902	-3617844,263	-896927,253

Fonte: O Autor (2019).

Tabela 5 – Coordenadas geodésicas cartesianas Locais SIRGAS2000 dos vértices da rede geodésica simulada com origem no ponto M01

Vértice	x (m)	y (m)	z (m)
M01	150000,000	250000,000	0,000
M02	154963,333	262644,234	-14,219
M03	149446,503	273868,292	-17,837
M04	139679,346	275188,024	40,9176
M05	144798,040	264760,083	-14,977
M06	138309,508	261046,298	44,462
M07	143766,235	256665,546	12,867
M08	144779,145	251846,851	10,834

Fonte: O Autor (2019).

Os dados de distâncias simulados entre os vértices da poligonal para essa dissertação foram obtidos através da equação (16) do subitem 2.2.3 de ajustamento de uma trilateração. Se caso fosse efetuar um levantamento topográfico planialtimétrico, deveria ser utilizado o transporte de coordenadas planimétrica com visadas de ré e vante para os vértices da poligonal que delimita, por exemplo, uma propriedade, e para os dados altimétricos, deveria ser efetuado o transporte de altitude com relação aos mesmos vértices.

Existem formas distintas de obtenção dos ângulos zenitais e/ou horizontais e distâncias inclinadas, em que podem variar de acordo com o equipamento utilizado e o seu fabricante, ou seja, as empresas fabricam os devidos equipamentos e inserem no manual como deve ser efetuado o levantamento e os parâmetros internos do equipamento, com isso possibilita uma melhor qualidade e uma menor incerteza.

O vetor das observações “ $L_b$ ” contém as distâncias inclinadas entre os vértices, porém, foram inseridos erros “aleatórios” que não ultrapassem o determinado por Paciléo (1990).

Sabe-se que a precisão linear dos Medidores Eletrônicos de Distância (MED) é representada de acordo com a equação (58).

$$\sigma_d = a_{\text{mm}} + b_{\text{ppm}} d_{\text{km}} \quad (58)$$

Porém, Paciléo Netto (1990), todavia determinou que a equação (58) é uma forma simplificada de representação do desvio padrão do equipamento e para ser calculado com mais rigor, deve-se usar a equação (59).

$$\sigma_d = \sqrt{a_{\text{mm}}^2 + (b_{\text{ppm}} D_{\text{km}})^2} \quad (59)$$

Nas equações (58) e (59), “ $a$ ” é a parte constante da precisão do equipamento e “ $b$ ” a parte que depende diretamente da distância inclinada ( $D$ ), estando “ $a$ ” em milímetro, “ $b$ ” em parte por milhão e “ $D$ ” em quilômetros, com isso o resultado obtido  $\Sigma_D$  vai estar em milímetros (mm).

Para a simulação da rede nessa dissertação, usou-se um MED classe IP conforme classificação da NBR 13133 (ABNT, 1994) com  $\sigma_d = 5_{\text{mm}} + 5_{\text{ppm}} d_{\text{km}}$ .

Foi adotado o valor de  $1,966 \cdot \sigma_d$  para o intervalo do erro na medida da distância com base no MED adotado da classe IP da NBR 13133, estando assim, no intervalo de 95% de confiança com base na curva de Gauss (GEMAEL, 1994), conforme equação (60).

$$d_{\text{teórica}} - 1,966 \cdot \sigma_d \leq d_{\text{observada}} \leq d_{\text{teórica}} + 1,966 \cdot \sigma_d \quad (60)$$

Desta forma, se pode inserir erros nas observações, ao ponto de simular dados reais de campo e estudar os resultados obtidos no ajustamento, assim como, as coordenadas ajustadas, os resíduos e as incertezas das coordenadas ajustadas.

### 3.3.2 Análise da geometria dos problemas para obtenção de solução única

O ajustamento da rede geodésica 3D por trilateração, nesta dissertação exemplificada por uma rede composta com 8 vértices e 25 distâncias, a serem determinados respectivamente em cada Sistema Geodésico.

Na trilateração são utilizadas apenas as distâncias, podendo ser horizontais ou inclinadas dependendo da aplicação (cf. item 2.2.3). Para a resolução da problemática sugerida na dissertação, a rede foi fixada com relação a sua posição na Terra, através da fixação da translação, rotação e escala, ou seja, a não fixação destes elementos podem possibilitar no(a):

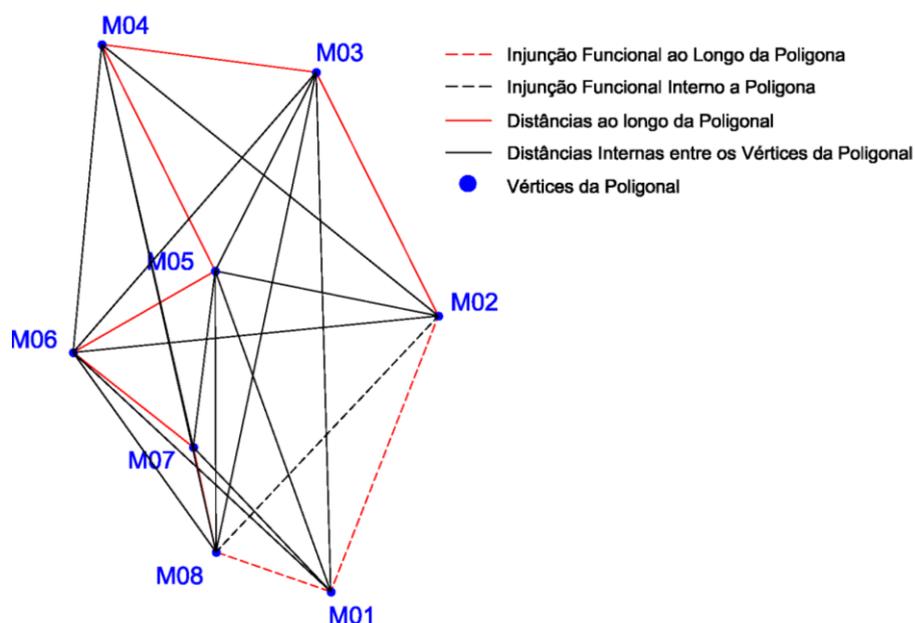
- Obtenção de mais de uma solução no ajustamento;
- Divergência do ajustamento, ou seja, não converge para solução única;
- Mal condicionamento do sistema.

A translação foi fixada através da utilização de injunção absoluta, onde, foi escolhido um dos vértices da poligonal como a origem da rede de trilateração 3D, com relação a rotação, foram utilizadas as injunções funcionais, ou seja, equações de ângulos azimutais e/ou zenitais e com relação a escala foram utilizadas injunções funcionais, sendo estas as equações de distâncias inclinadas.

Como citado anteriormente, para o caso 3D de trilateração são utilizadas distâncias inclinadas, sendo que as injunções necessárias para fixar ou apoiar a rede são de pelo menos três vértices, o que representa a fixação de um ângulo horizontal, um ângulo vertical e uma distância inclinada, resultando em 12 injunções. Porém, utilizando-se apenas três vértices, não foi possível a obtenção da solução única.

Se o ajustamento é conduzido utilizando as equações de distância inclinada no espaço  $d(\Delta x, \Delta y, \Delta h)$ , então, são necessárias pelo menos 15 distâncias inclinadas para a resolução deste problema com solução única. Assim, além das 8 distâncias inclinadas ao longo da poligonal, é preciso de pelo menos mais 7 distâncias inclinadas para que se possa resolver com solução única, o que significa um número mínimo de 22 distâncias. Porém, para esse caso foram utilizadas 25 distâncias inclinadas, sendo 6 delas ao longo da poligonal e mais 19 distâncias inclinadas internas a poligonal entre os vértices da mesma, pois, as distâncias entre as injunções não vão influenciar no ajustamento, por isso, foram retiradas. Mesmo assim, vai existir uma superabundância de equações, com relação à quantidade de incógnitas (parâmetros) no ajustamento, como maiores detalhes com relação a geometria está ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Rede Geodésica 3D por Trilateração



Fonte: O Autor (2019).

As injunções utilizadas para o ajustamento foram os vértices  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  e  $M_{08}$  escolhidos aleatoriamente, sendo o ponto  $M_{01}$  o *datum* dos dois sistemas (Sistema Geodésico Local e Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico). Foram utilizadas técnicas de verificação do mal condicionamento da metodologia de trilateração 3D.

Para a resolução dessa rede por trilateração 3D, foram efetuados alguns ajustamentos em áreas menores, isto possibilita detectar erros e/ou mau

condicionamento e com isso obter um melhor entendimento do que está acontecimento na rede. O primeiro dos ajustamentos foi efetuado em um triângulo, ou seja, apenas 3 (três) vértices e 3 (três) distâncias inclinadas, obtendo com isso, o grau de liberdade “gl” igual a 0, no segundo foi efetuado com relação a um quadrilátero, utilizando 4 (quatro) vértices e 6 (seis) distâncias inclinadas e por fim na rede com todos os 8 vértices e todas as 25 distâncias apresentadas na Figura 6. Em seguida foram efetuadas demonstrações dos resultados obtidos e suas devidas análises (cf. item 4). A Tabela 4 e a Tabela 5 apresentam todos os vértices.

Para a determinação das injunções absolutas no triângulo, quadrilátero e na rede do ajustamento da trilateração 3D, foram utilizados apenas 2 (dois) vértices para o triângulo, sendo eles os vértices  $M_{01}$  e  $M_{02}$  e para o caso do quadrilátero e da rede utilizaram-se 3 (três) vértices, sendo eles os vértices  $M_{01}$ , o  $M_{02}$  e o  $M_{08}$ .

Todas as distâncias inclinadas simuladas e consideradas nesta dissertação supostamente como observadas e utilizadas para a resolução do ajustamento 3D por trilateração com relação ao triângulo, ao quadrilátero e à rede geodésica foram extraídas da Tabela 6.

Para a determinação do “ $\sigma_d$ ” segundo Paciléo Neto (1990) e Mendonça et al. (2010), as incertezas ou a estimativa da precisão linear das estações totais podem ser obtidas com maior rigor utilizando a equação (61), cujas precisões do instrumento “a” é em milímetro (mm) e “b” é em parte por milhão (ppm), ambas precisões podem ser obtidas utilizando o manual da estação total a ser utilizada, e por fim, o “ $d_i$ ” da equação (49) representa a distância inclinada, que corresponde ao vetor das observações.

$$\sigma_d = \sqrt{a^2 + b^2 \left( \frac{d_i}{1000} \right)^2} \quad (61)$$

Com relação a suposta estação utilizada para obtenção das distâncias teóricas, os valores de “a” e “b”, foram de 5 mm e 5 ppm, respectivamente, em que, está classificada segundo a NBR 13133 (ABNT, 1994) como de classe 2 – precisão média.

Os valores obtidos com relação ao desvio padrão “ $\sigma_d$ ” em conjunto com cada distância inclinada teórica “ $d_{\text{verdadeira}}$ ” pode-se determinar as distâncias inclinadas com relação ao vetor das observações “ $L_b$ ”, sendo que esses valores devem

corresponder ao intervalo de confiança, no qual, para esse caso foi de 99% de probabilidade que vai ser de  $3\sigma$ , como demonstrado na equação (62). As observações que se encontram fora do intervalo de confiança foram considerados como erros grosseiros.

$$d_{\text{verdadeira}} - 3\sigma_d < d_{\text{observada}} < d_{\text{verdadeira}} + 3\sigma_d \quad (62)$$

Uma característica adicional é que posteriormente ao ajustamento deve ser verificada a validade do modelo de ajuste e das observações, frente ao teste de hipótese global de Qui-Quadrado " $\chi^2$ ", como foi demonstrado no item 2.2.2 de teste de hipótese. Para isso, tais observações deveriam ser provenientes da distribuição de Gauss.

Para a resolução da rede 3D de trilateração no modelo paramétrico, em todos os métodos propostos para a resolução dos ajustamentos (triângulo, quadrilátero e rede), os dados utilizados, foram os valores teóricos das distâncias inclinadas e suas devidas incertezas, os valores observados e o erro das observações como demonstrados na Tabela 6.

As observações teóricas são obtidas com a utilização direta da equação (16), por conta disso, a quantidade de casas decimais utilizadas foram as possíveis obtidas pelo software MATLAB2010. A incerteza dos valores teóricos foi obtida utilizando a equação (61). O erro inserido nos valores observados foram valores aleatórios correspondentes ao limite permitido proposto, demonstrado na equação (62) e a observação simulada é justamente a soma entre as equações (16) e o erro inserido, porém, como a "estação total" permite trabalhar com dados de distância com precisão na casa dos milímetros, utilizou-se da mesma referência para a utilização das 3 (três) casas decimais nos valores observados e no erro. Em todos os casos a unidade de medida relacionada é o metro (m).

Tabela 6 – Valores teóricos e simulados observados da rede geodésica 3D por trilateração

Est	Pto Visado	Nome	Valores Teóricos			Valores Observados	
			D. Inclinada(SGL) m	D. Inclinada(SCG) m	$\sigma_d$ (m)	D. Inclinada m	erro(m)
M01	M08	d1	5537,89697654101	5537,89732934412	0,028	5537,934	0,037
M01	M07	d2	9126,30785767334	9126,30770858005	0,046	9126,292	-0,016
M01	M06	d3	16083,85151561380	16083,85193929360	0,081	16083,788	-0,064
M01	M05	d4	15649,94128803740	15649,94117382730	0,078	15649,934	-0,008
M01	M04	d5	27220,47302032620	27220,47293036250	0,136	27220,335	-0,138
M01	M03	d6	23874,71549746390	23874,71568161150	0,119	23874,668	-0,047
M01	M02	d7	13583,50212925980	13583,50201507600	0,068	13583,510	0,007
M02	M08	d8	14842,56691144910	14842,56673776280	0,074	14842,688	0,121

M02	M07	d9	12693,32294847750	12693,32265839140	0,064	12693,389	0,066
M02	M06	d10	16730,41332575150	16730,41372535020	0,084	16730,509	0,095
M02	M05	d11	10383,15941037280	10383,15971391230	0,052	10383,187	0,028
M02	M04	d12	19772,45505162980	19772,45502853230	0,099	19772,515	0,060
M02	M03	d13	12506,59443358540	12506,59475302820	0,063	12506,669	0,074
M03	M05	d14	10225,83432437910	10225,83480313460	0,051	10225,927	0,093
M03	M04	d15	9856,08958143271	9856,08936769649	0,050	9856,056	-0,034
M03	M06	d16	16983,52345455620	16983,52368064090	0,085	16983,500	-0,024
M03	M07	d17	18116,31467015180	18116,31470531230	0,091	18116,160	-0,155
M03	M08	d18	22510,64007181690	22510,63993560800	0,113	22510,605	-0,036
M04	M05	d19	11616,63102622130	11616,63099767310	0,058	11616,517	-0,114
M04	M06	d20	14207,91670547860	14207,91652633310	0,071	14207,972	0,055
M04	M07	d21	18968,01672071820	18968,01666578600	0,095	18968,055	0,039
M04	M08	d22	23891,82360600570	23891,82312830780	0,120	23891,739	-0,085
M05	M08	d23	12913,27161932910	12913,27102825250	0,065	12913,247	-0,025
M05	M07	d24	8160,08125515486	8160,08091585327	0,041	8160,063	-0,018
M05	M06	d25	7476,41488522205	7476,41476366981	0,038	7476,399	-0,016
M06	M07	d26	6997,70361490524	6997,70422692733	0,035	6997,685	-0,018
M06	M08	d27	11246,65100640910	11246,65095488020	0,056	11246,641	-0,010
M07	M08	d28	4924,00368645415	4924,00326730913	0,025	4923,994	-0,010

Fonte: O Autor (2019).

Para que se possa efetuar o ajustamento 3D das observações pelo MMQ no modelo paramétrico de uma trilateração, a equação (63) de distâncias inclinadas “ $l_{ij}$ ” utilizada, com relação ao cartesiano geocêntrico do SCG e ao topocêntrico do SGL.

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (63)$$

Cuja variável aleatória m-dimensional, L, das observações de distâncias foram colocados em função das coordenadas dos pontos que possuem para esse caso n-parâmetros, utilizando isso no ajustamento pelo método clássico de trilateração em 3D, obtém-se a equação (64).

$$L = F(x), \quad F : R^n \rightarrow R^m, \text{ não linear.} \quad (64)$$

O desenvolvimento linear do modelo paramétrico de ajustes por Mínimos Quadrados na forma usual em Geodésia, como demonstrado a equação (65) (GEMAEL; MACHADO; WANDRESEN, 2015); (DALMOLIN, 2002).

$$L_a = L_b + v = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) = F(x_a) \quad (65)$$

A matriz dos pesos “P” é considerada na maioria das vezes uma matriz positiva e simétrica, pois, em grande parte dos ajustamentos efetuados os valores de “Lb” são independentes entre si, com isso, a matriz dos pesos deve ser a diagonal principal (Mendonça et al., 2010), como demonstra a equação (66).

$$P = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_d^2)^{-1} \quad (66)$$

Os elementos da matriz jacobiana  $A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_0}$  para os elementos no SGL, quando não nulos podem ser obtidos utilizando as equações (67) à (69).

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{l_{ij}}; \quad \frac{\partial l_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}}; \quad (67)$$

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_j)}{l_{ij}}; \quad \frac{\partial l_{ij}}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}}; \quad (68)$$

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial h_i} = \frac{(h_i - h_j)}{l_{ij}}; \quad \frac{\partial l_{ij}}{\partial h_j} = \frac{(h_j - h_i)}{l_{ij}}; \quad (69)$$

Cujas coordenadas escolhidas com relação ao vetor da correção dos parâmetros “X” estão ordenadas de acordo como demonstrado na equação (70).

$$X = [x_3 \ y_3 \ h_3 \ x_4 \ y_4 \ h_4 \ x_6 \ y_6 \ h_6 \ x_7 \ y_7 \ h_7]^T \quad (70)$$

Obtendo com isso como demonstrado no tópico 2.2.1 sobre o ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros, o vetor da correção dos parâmetros “X”, utilizando as matrizes das equações normais “N” e “U”.

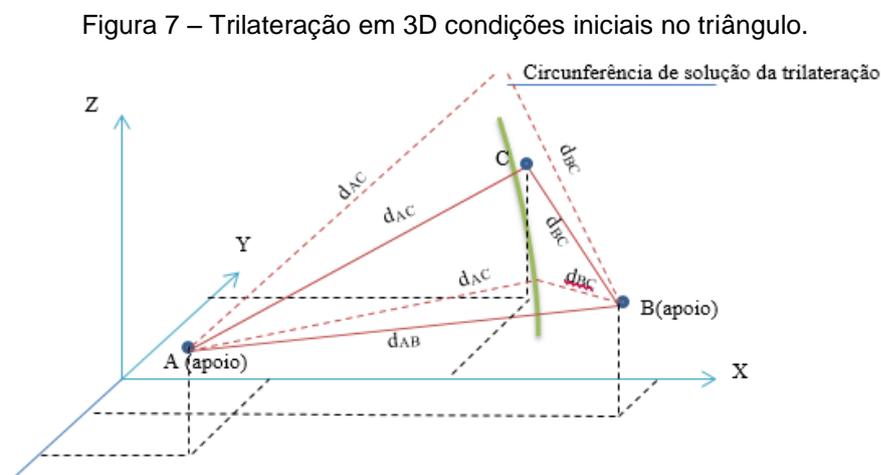
### 3.3.3 Ajustamento no Triângulo

Para melhor entendimento das condições necessárias para o ajustamento 3D de uma rede de trilateração geodésica, foram efetuados alguns estudos sobre a geometria, sobre os dados utilizados para que o ajustamento possua solução única, porém, a Figura 7 ilustra a ideia utilizada com relação ao triângulo utilizado na dissertação, em que os três vértices utilizados como exemplo para representar foram A, B e C.

Neste triângulo são dadas as distâncias entre os vértices  $d_{AB}$ ,  $d_{AC}$ ,  $d_{BC}$ . Utilizando apenas as distâncias, não existe muito que fazer, pois, a solução de norma mínima não possuiria significado geométrico de interesse.

Para que exista solução única em 3D, se faz necessário fixar dois pontos de coordenadas conhecidas e pelo menos uma direção, sendo ele um vertical ou um horizontal ou diferença de altitude. Para se chegar a essa afirmação nessa dissertação, foi efetuado uma verificação, ou seja, o triângulo deve ser fixado com relação a translação e a rotação, pois, isto possibilita que não existam variações no triângulo e impossibilita que este triângulo possua várias soluções.

Para o caso de fixar o triângulo em 2D, faz-se necessário apenas um ponto de coordenadas conhecidas e um azimute de controle como demonstrado em Mendonça et al. (2010), porém, para o caso de 3D se fez necessário a utilização de mais um vértice de coordenadas conhecidas, ou seja, é importante a utilização de dois vértices e um azimute, com por exemplo, A e B e o  $Az_{AC}$ . A Figura 7 ilustra as infinitas soluções se forem fixados os dois vértices em um sistema cartesiano qualquer.



Fonte: O Autor (2019).

Pelo que foi apresentado anteriormente, as condições necessárias para resolver uma trilateração utilizando apenas três pontos não coplanares de um triângulo qualquer é:

- Três observações:  $d_{AB}$ ;  $d_{BC}$ ,  $d_{CA}$
- Nove parâmetros:  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ;  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ ;  $C(X_C, Y_C, Z_C)$
- Seis injunções de posição:  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ;  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ ;

- Uma injunção de direção:  $AZ_{AB}$  ou  $Z_{AB}$  (azimute ou ângulo zenital) ou uma injunção de cota ( $z_C$ ) ou de diferença de cota ( $z_C - z_A$ )

Os pontos utilizados para este problema foram os  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  e  $M_{08}$  e as distâncias utilizadas para o ajustamento foram as  $d_{M_{02}-M_{08}}$ ,  $d_{M_{01}-M_{02}}$  e  $d_{M_{01}-M_{08}}$ , como demonstrado na Tabela 7. Porém, essa última distância  $d_{M_{01}-M_{08}}$  não vai influenciar no ajustamento, pois, é a distância inclinada entre dois vértices injuncionados.

**Tabela 7** – Valores teóricos e observados da rede geodésica de trilateração;

Est	Pto Visado	Nome	Valores Teóricos			Valores Observados	
			D. Inclinada(SGL)	D. Inclinada(SCG)	$\sigma_d$ (m)	D. Inclinada	erro(m)
M01	M08	d1	5537,89697654101	5537,89732934412	0,028	5537,934	0,037
M01	M02	d7	13583,50212925980	13583,50201507600	0,068	13583,510	0,007
M02	M08	d8	14842,56691144910	14842,56673776280	0,074	14842,688	0,121

Fonte: O Autor (2019).

Para a resolução do triângulo, nessa dissertação, foram efetuados de 3 (três) formas distintas, no primeiro caso foram utilizadas apenas injunções funcionais de direção com uma injunção absoluta de posição, em seguida injunções de peso com apenas uma injunção de absoluta de posição e por fim 2 (dois) vértices como injunções absolutas de posição. É importante afirmar que para todos os casos foram utilizados os vértices  $M_{01}$  e  $M_{08}$  como sendo as injunções absolutas de posição.

As coordenadas utilizadas em todos os ajustamentos efetuados no triângulo com relação as injunções absolutas de posição dos vértices de apoio  $M_{01}$  e  $M_{08}$  nos SCG e SGL, estão representados nas Tabela 4 e Tabela 5, respectivamente. O vetor dos parâmetros a ser ajustado em todos os ajustamentos no triângulo é o vértice  $M_{02}$ , sendo representado pela equação (71).

$$X_0 = [X_{M_{02}} \ Y_{M_{02}} \ Z_{M_{02}}] \quad (71)$$

As equações das distâncias inclinadas calculadas em todos os ajustamentos efetuados no triângulo obedecem a equação (72) e (73), sendo SGL e SCG, respectivamente. Porém, para o ajustamento efetuado são utilizadas apenas as distâncias com relação ao ponto  $M_{02}$ , ou seja, as distâncias  $d_{M_{01}-M_{02}}$  e  $d_{M_{08}-02}$ , pois,

os demais são entre pontos injuncionados, logo não serão alterados para o caso do  $d_{M01-08}$ .

$$d = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (72)$$

$$D = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (73)$$

Para o primeiro caso foram utilizadas 2 (duas) injunções funcionais de direção chegando no ponto  $M_{02}$  em conjunto com as injunções absolutas e com as distâncias inclinadas, ou seja, para o caso do SGL, foi utilizado o  $Az_{M01-M02} = 21^\circ 25' 54,68613''$  e  $Az_{M08-M02} = 43^\circ 19' 33,54201''$  e para o caso do SCG foi utilizado o  $Ang_{M01-M02} = 54^\circ 38' 01,94311''$  e  $Ang_{M08-M02} = 43^\circ 19' 32,11246''$  em conjunto com as distâncias inclinadas e as injunções absolutas  $M_{01}$  e  $M_{08}$ , porém, foram utilizados em 2 (dois) momentos, no primeiro momento com distâncias inclinadas teóricas e no segundo momento com distâncias inclinadas observadas.

Para o caso do vetor das observações, foram utilizadas as equações de distancias inclinadas em duas circunstâncias, primeiro as teóricas, ou seja, sem erro nenhum em um suposto levantamento e em um segundo caso, as coordenadas observadas no campo com instrumento, este contendo erros na medição. Resultando nas equações (74) e (75), sendo SGL e SCG, respectivamente.

$$L_b = [d_1 \ d_7 \ d_8 \ Az_{M01-M02} \ Az_{M08-M02}]^T \quad (74)$$

$$L_b = [D_1 \ D_7 \ D_8 \ Ang_{M01-M02} \ Ang_{M08-M02}]^T \quad (75)$$

Porém a matriz dos pesos é obtida pelas 2 (duas) primeiras linhas, as quais estão diretamente relacionadas com a observação de distância e as últimas 2 (duas) linhas com a injunção de direção, resultando no demonstrado pela equação (76) e (77), sendo no SGL e SCG, respectivamente.

$$P_{SGL} = \text{diag}([P_{d1} \ P_{d7} \ P_{d8} \ P_{Az_{M01-M02}} \ P_{Az_{M08-M02}}]) \quad (76)$$

$$P_{SCG} = \text{diag}([P_{D1} \ P_{D7} \ P_{D8} \ P_{Ang_{M01-M02}} \ P_{Ang_{M08-M02}}]) \quad (77)$$

Sendo " $P_d$ " e " $P_D$ " são os peso com relação as observações de distância inclinadas no SGL e SCG e " $P_{Az}$ " e " $P_{Ang}$ " são os pesos com relação a injunção de

direção no SGL e SCG, lembrando que as injunções não são alteradas no ajustamento, de acordo com as equações (78) e (79).

$$P_{d_i} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{d_i}^2)^{-1}; \quad P_{D_i} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{D_i}^2)^{-1}; \quad (78)$$

$$P_{Az_{i-j}} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{Az_i}^2)^{-1}; \quad P_{Ang_{i-j}} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{Ang_i}^2)^{-1}; \quad (79)$$

Sendo “ $\sigma_{d_i}^2$ ”, obtido pela equação (80) e “ $\sigma_{Az_i}^2$ ” e “ $\sigma_{Ang_i}^2$ ” pelas equações (81). Para o caso de “ $\sigma_{d_i}^2$ ”, “a” (mm - milímetro) e “b” (ppm – parte por milhão) são as precisões da estação total determinado pelo fabricante da mesma, sendo “d” e “D” (km – quilometro) as distâncias inclinadas, no SGL e no SCG, respectivamente e para o caso de “ $\sigma_{Az_i}^2$ ” e “ $\sigma_{Ang_i}^2$ ”, “ $\sigma_{Az}$ ” (segundos) e “ $\sigma_{Ang}$ ” (segundos), são as precisões angulares da estação total determinado pelo fabricante.

$$\sigma_{d_i} = \sqrt{a^2 + (b d_i)^2}; \quad \sigma_{D_i} = \sqrt{a^2 + (b D_i)^2}; \quad (80)$$

$$\sigma_{Az_i}^2 = \left(\frac{\sigma_{Az}}{3600}\right)^2; \quad \sigma_{Ang_i}^2 = \left(\frac{\sigma_{Ang}}{3600}\right)^2; \quad (81)$$

Os elementos da matriz jacobiana  $A = \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{x_0}$  para os elementos no SGL, quando não nulos podem ser obtidos utilizando as equações (82) à (84), com relação as distâncias inclinadas e (85) à (87), com relação aos ângulos de direção, sendo “dh” é a distância horizontal em 2D (duas dimensões), mesmo sabendo que as injunções não são alteradas ao longo do ajustamento..

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{d_{ij}}; \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)}{d_{ij}}; \quad (82)$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_j)}{d_{ij}}; \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)}{d_{ij}}; \quad (83)$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial z_i} = \frac{(z_i - z_j)}{d_{ij}}; \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial z_j} = \frac{(z_j - z_i)}{d_{ij}}; \quad (84)$$

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial x_i} = \frac{(y_i - y_j)}{dh_{ij}^2}; \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(y_j - y_i)}{dh_{ij}^2}; \quad (85)$$

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(x_j - x_i)}{dh_{ij}^2}; \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial y_j} = \frac{(x_i - x_j)}{dh_{ij}^2}; \quad (86)$$

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial z_i} = 0; \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial z_j} = 0; \quad (87)$$

Os elementos da matriz jacobiana  $A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{X_0}$  para os elementos no SCG, quando não nulos podem ser obtidos utilizando as equações (88) à (90), com relação as distâncias inclinadas e (91) à (93), com relação aos ângulos de direção. Sendo: “Dh” a distância horizontal em 2D (duas dimensões).

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial X_i} = \frac{(X_i - X_j)}{D_{ij}}; \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial X_j} = \frac{(X_j - X_i)}{D_{ij}}; \quad (88)$$

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial Y_i} = \frac{(Y_i - Y_j)}{D_{ij}}; \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial Y_j} = \frac{(Y_j - Y_i)}{D_{ij}}; \quad (89)$$

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial Z_i} = \frac{(Z_i - Z_j)}{D_{ij}}; \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial Z_j} = \frac{(Z_j - Z_i)}{D_{ij}}; \quad (90)$$

$$\frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial X_i} = \frac{(Y_i - Y_j)}{Dh_{ij}^2}; \quad \frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial X_j} = \frac{(Y_j - Y_i)}{Dh_{ij}^2}; \quad (91)$$

$$\frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Y_i} = \frac{(X_j - X_i)}{Dh_{ij}^2}; \quad \frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Y_j} = \frac{(X_i - X_j)}{Dh_{ij}^2}; \quad (92)$$

$$\frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Z_i} = 0; \quad \frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Z_j} = 0; \quad (93)$$

Em que a matriz “A” resultante para o caso do SGL, está demonstrada na de acordo com a equação (94).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{18}}{\partial x_2} & \frac{\partial d_{18}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{18}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial d_{12}}{\partial x_2} & \frac{\partial d_{12}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{12}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial d_{82}}{\partial x_2} & \frac{\partial d_{82}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{82}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Az_{18}}{\partial x_2} & \frac{\partial Az_{18}}{\partial y_2} & \frac{\partial Az_{18}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Az_{12}}{\partial x_2} & \frac{\partial Az_{12}}{\partial y_2} & \frac{\partial Az_{12}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Az_{82}}{\partial x_2} & \frac{\partial Az_{82}}{\partial y_2} & \frac{\partial Az_{82}}{\partial z_2} \end{bmatrix} \quad (94)$$

Em que a matriz “A” resultante para o caso do SCG, está demonstrada de acordo com a equação (95).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{18}}{\partial X_2} & \frac{\partial D_{18}}{\partial Y_2} & \frac{\partial D_{18}}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial D_{12}}{\partial X_2} & \frac{\partial D_{12}}{\partial Y_2} & \frac{\partial D_{12}}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial D_{82}}{\partial X_2} & \frac{\partial D_{82}}{\partial Y_2} & \frac{\partial D_{82}}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial \text{Ang}_{18}}{\partial X_2} & \frac{\partial \text{Ang}_{18}}{\partial Y_2} & \frac{\partial \text{Ang}_{18}}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial \text{Ang}_{12}}{\partial X_2} & \frac{\partial \text{Ang}_{12}}{\partial Y_2} & \frac{\partial \text{Ang}_{12}}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial \text{Ang}_{82}}{\partial X_2} & \frac{\partial \text{Ang}_{82}}{\partial Y_2} & \frac{\partial \text{Ang}_{82}}{\partial Z_2} \end{bmatrix} \quad (95)$$

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros como explicitado no capítulo 4. Para isso, foram obtidos as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V”, os erros e as discrepâncias entre os parâmetros ajustados e por fim efetuado o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

Para o segundo caso que é a utilização de injunções de peso, são utilizadas 2 (duas) injunções de peso com relação as distâncias inclinadas utilizadas chegando no ponto  $M_{02}$  em conjunto com as injunções absolutas e com as distâncias inclinadas, sendo separado também em dois momentos como utilizando injunções funcionais de direção, um para distâncias inclinadas teóricas e outra para distâncias inclinadas observadas.

Para o caso do vetor das observações, foram utilizadas as equações (72) e (73) de distâncias inclinadas em duas circunstâncias, primeiras às teóricas, ou seja, sem erro nenhum em um suposto levantamento e em um segundo caso, as coordenadas observadas no campo com instrumento estas contendo erros na medição. Resultando nas equações (96) e (97), sendo SGL e SCG, respectivamente.

$$L_b = [d_1 \ d_7 \ d_8]^T \quad (96)$$

$$L_b = [D_1 \ D_7 \ D_8]^T \quad (97)$$

Logo para a utilização da injunção de peso como demonstrado no item 2.2.4.2, deve ser inserido um valor pequeno para a variância dos pontos que devem

ser injuncionados, ou seja,  $\sigma_{P_{M01-M02}}^2$  e  $\sigma_{P_{M08-M02}}^2$  deve se encontrar dentro do intervalo apresentado na equação (98)

$$0 < \sigma_{P_{ij}}^2 < 1 \times 10^{-3}; \quad (98)$$

Em que a matriz dos pesos “P” fica representada de acordo como demonstrado nas equações (99) e (100), sendo as 2 (duas) linhas representando a injunção de peso “P<sub>d<sub>i</sub></sub>” multiplicado pela variância “ $\sigma_{P_{ij}}^2$ ” .

$$p_{SGL} = \text{diag}([P_{d1} * \sigma_{P_{18}}^2 \quad P_{d7} * \sigma_{P_{12}}^2 \quad P_{d8} * \sigma_{P_{28}}^2]) \quad (99)$$

$$p_{SCG} = \text{diag}([P_{D1} * \sigma_{P_{18}}^2 \quad P_{D7} * \sigma_{P_{12}}^2 \quad P_{D8} * \sigma_{P_{28}}^2]) \quad (100)$$

Em que a matriz “A” resultante para o caso do SGL, foi representada de acordo com a equação (101) e para o caso do SCG como demonstrada na equação (102).

$$A_{SGL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{18}}{\partial x_2} & \frac{\partial d_{18}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{18}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial d_{12}}{\partial x_2} & \frac{\partial d_{12}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{12}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial d_{82}}{\partial x_2} & \frac{\partial d_{82}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{82}}{\partial z_2} \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$A_{SCG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{18}}{\partial X_2} & \frac{\partial D_{18}}{\partial Y_2} & \frac{\partial D_{18}}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial D_{12}}{\partial X_2} & \frac{\partial D_{12}}{\partial Y_2} & \frac{\partial D_{12}}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial D_{82}}{\partial X_2} & \frac{\partial D_{82}}{\partial Y_2} & \frac{\partial D_{82}}{\partial Z_2} \end{bmatrix} \quad (102)$$

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros como explicitado no capítulo 4. Para isso, foram obtidos as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V”, os erros e as discrepâncias entre os parâmetros ajustados e por fim efetuator o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

Para o terceiro caso que é a utilização apenas as injunções absolutas de posição do  $M_{01}$  e  $M_{02}$ , sendo separado também em dois momentos como utilizando injunções funcionais de direção e nas injunções de peso, o primeiro para distâncias inclinadas teóricas e o segundo para distâncias inclinadas observadas.

Para o caso do vetor das observações, foram utilizadas as equações (72) e (73) de distâncias inclinadas em duas circunstâncias, primeiro as teóricas, ou seja, sem erro nenhum em um suposto levantamento e em um segundo caso, as coordenadas observadas no campo com instrumento, este contendo erros na medição. Resultando nas equações (103) e (104), sendo SGL e SCG, respectivamente.

$$L_b = [d_1 \ d_7 \ d_8]^t \quad (103)$$

$$L_b = [D_1 \ D_7 \ D_8]^T \quad (104)$$

Porém a matriz dos pesos é obtida pelas 2 (duas) linhas, que estão diretamente relacionadas com a observação de distância, resultando no demonstrado pela equação (105) e (106), sendo no SGL e SCG, respectivamente.

$$P_{SGL} = \text{diag}([P_{d1} \ P_{d7} \ P_{d8}]) \quad (105)$$

$$P_{SCG} = \text{diag}([P_{D1} \ P_{D7} \ P_{D8}]) \quad (106)$$

Sendo: “ $P_d$ ” e “ $P_D$ ” são os pesos com relação às observações de distância inclinadas no SGL e SCG, como demonstrados nas equações (78) e (79).

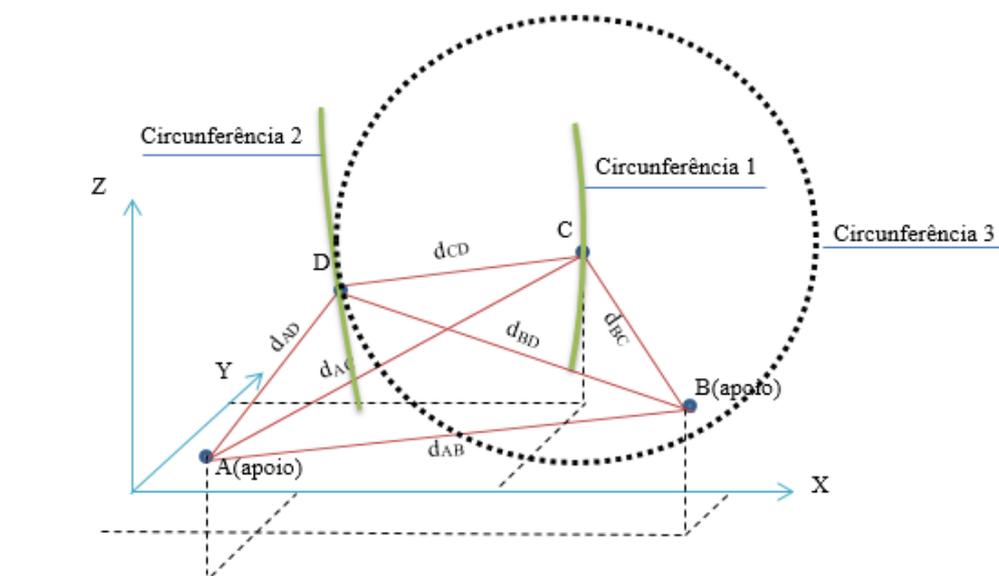
Os elementos da matriz jacobiana  $A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0}$  para os elementos no SGL e SCG fica parecido com o utilizado para as injunções de peso, ou seja, podem-se utilizar as mesmas equações (101) e (102).

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros como explicitado no capítulo 4. Para isso, foram obtidos as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V”, os erros e as discrepâncias entre os parâmetros ajustados e por fim efetuador o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

### 3.3.4 Ajustamento no Quadrilátero

Para o caso o ajustamento 3D de uma trilateração aplicada ao quadrilátero, considera-se os pontos A, B, C e D, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Trilateração em 3D em um quadrilátero



Fonte: O Autor (2019).

Para que se possa eliminar a translação e a rotação do quadrilátero deve ser fixados os dois primeiros pontos “A” e “B” como ponto de apoio, fazendo isso, apenas os pontos C e D continuam livres para diversas soluções em várias posições no espaço. Fixando a direção  $Az_{BC}$  a solução do ponto C estaria na circunferência 1, conforme ilustrado na Figura 8, porém, para esse caso o ponto D estaria livre para ter solução na superfície da esfera de raio  $d_{CD}$  com centro em C, uma das circunferências máximas da esfera é mostrada pela linha pontilhada da Figura 8. Nesse caso poderiam existir várias soluções, porém, se for fixada também a direção  $Az_{AD}$  por exemplo, então o ponto D estaria na circunferência 2. A e B não sendo coplanares entre si, então, o problema possui solução bem definida com relação ao ponto D, justamente na interseção da circunferência 2 com a circunferência 3 que se coincidem, ambas pontilhadas Figura 8. Como a linha pontilhada é mais uma circunferência máxima da esfera, se deve acontecer um ponto aproximado da solução do processo de ajustamento, pois, outras soluções poderiam existir na superfície da esfera.

Outra configuração para que se tenha solução, pode ser fixando três vértices, sendo eles não coplanares entre si, o outro vértice considerado como incógnita vai possuir duas soluções, sendo uma delas acima e a outra abaixo de um plano formado por três pontos de apoio. Ao iniciar o método de ajustamento, se as coordenadas aproximadas no início do processo iterativo, o valor da cota  $z$  estiver acima do plano, e próximo ao ponto real, o método deverá convergir para o ponto original, porém, se o ponto aproximado escolhido inicialmente for abaixo do valor real, o método deverá convergir para a segunda solução, ou seja, o ponto vai convergir para o valor que se encontra abaixo do plano.

Como no caso do quadrilátero a configuração foi determinada de duas formas distintas. Nas configurações a direção utilizada foi demonstrada para o SGL, porém pode ser utilizada para o SCG, com algumas modificações, ou seja, para se ter a solução deve-se ter:

#### Configuração 1:

Seis observações:  $d_{AB}$ ;  $d_{AC}$ ;  $d_{AD}$ ;  $d_{BC}$ ,  $d_{BD}$ ,  $d_{CD}$ ;

Doze parâmetros:  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ;  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ ;  $C(X_C, Y_C, Z_C)$ ;  $D(X_D, Y_D, Z_D)$ ;

Seis injunções de posição:  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ;  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ ;

Duas injunções de direção:  $Az_{BC}$ ,  $Az_{AD}$  ou  $Z_{BC}$   $Z_{AD}$  (azimute ou ângulo zenital) ou duas injunções de cota ( $z_C$  e  $z_D$ ).

#### Configuração 2:

Seis observações:  $d_{AB}$ ;  $d_{AC}$ ;  $d_{AD}$ ;  $d_{BC}$ ,  $d_{BD}$ ,  $d_{CD}$ ;

Doze parâmetros:  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ;  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ ;  $C(X_C, Y_C, Z_C)$ ;  $D(X_D, Y_D, Z_D)$ ;

Nove injunções de posição:  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ;  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ ;  $C(X_C, Y_C, Z_C)$ ;

Fixando os pontos A B e C, das seis distâncias existentes, três delas perderiam o significado e efetivamente o sistema ficaria com três equações e três distâncias e poderia ser solucionado.

Para a resolução no quadrilátero foram utilizados os quatros vértices da rede, sendo eles,  $M_{01}$ ,  $M_{02}$ ,  $M_{07}$  e  $M_{08}$ , da Figura 6. As distâncias teóricas e observadas possíveis para o ajustamento utilizando esses 4 (quatro) vértices com seus respectivos desvios padrões estão demonstrados de acordo com a Tabela 8, porém, para a resolução do quadrilátero foram utilizadas apenas as distâncias inclinadas em

dois momentos distintos, com relação aos 2 (dois) sistemas (SCG e SGL), no primeiro momento foram utilizadas os Valores Teóricos em um segundo momento os Valores Observados.

**Tabela 8** – Dados para a trilateração geodésica – quadrilátero.

Est	Pto Visado	Nome	Valores Teóricos			Valores Observados	
			D. Inclinada(SGL)	D. Inclinada(SCG)	$\sigma_d(m)$	D. Inclinada	erro(m)
M01	M08	d1	5537,89697654101	5537,89732934412	0,028	5537,934	0,037
M01	M07	d2	9126,30785767334	9126,30770858005	0,046	9126,292	-0,016
M01	M02	d7	13583,50212925980	13583,50201507600	0,068	13583,510	0,007
M02	M08	d8	14842,56691144910	14842,56673776280	0,074	14842,688	0,121
M02	M07	d9	12693,32294847750	12693,32265839140	0,064	12693,389	0,066
M07	M08	d28	4924,00368645415	4924,00326730913	0,025	4923,994	-0,010

Fonte: O Autor (2019).

Em um primeiro momento, foi efetuado o ajustamento do quadrilátero apenas no Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesiana Local, no segundo momento, foi efetuado no Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas. Após esses 2 (dois) momentos foi efetuada uma análise nos resultados obtidos, chegando à conclusão que para que o resultado do ajustamento no quadrilátero por trilateração 3D pelo métodos clássicos fosse satisfatório, precisaria utilizar as injunções funcionais de direção, por conta disso foi efetuado mais um ajustamento, sendo esse utilizando distâncias inclinadas, injunções absolutas de posição e injunção funcional de direção, lembrando que todos esses 3 (três) momentos foram efetuados duas vezes, uma sendo distâncias inclinadas teóricas e na outra distâncias inclinadas observadas para testar a metodologia.

Para a injunção absoluta de posição em todos os 3 (três) momentos do ajustamento citados acima, os pontos de apoio considerados são os vértices  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  e  $M_{08}$ , em que as coordenadas utilizadas para esses pontos estão no SCG e SGL, como demonstrado nas Tabela 4 e Tabela 5, respectivamente. Para o vértice a ser ajustado ( $M_{07}$ ) também foram inseridos coordenados aproximados tanto no SCG, quanto no SGL, resultando na composição do vetor dos parâmetros aproximados, sendo ele o único vértice que compõe este vetor, como demonstrado na equação (107).

$$X_0 = [X_{M_{07}} \ Y_{M_{07}} \ Z_{M_{07}}] \quad (107)$$

As equações das distâncias inclinadas calculadas obedecem à equação (108) e (109), sendo SGL e SCG, respectivamente. Porém, para o ajustamento efetuado são utilizadas apenas as distâncias com relação ao ponto  $M_{07}$ , pois, os demais são entre pontos injuncionados. Logo, não serão alterados, ou seja, as distâncias  $d_{M_{01}-M_{07}}$ ,  $d_{M_{02}-07}$  e  $d_{M_{07}-M_{08}}$ .

$$d = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (108)$$

$$D = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (109)$$

Para o caso do vetor das observações, foram utilizadas as equações de distâncias inclinadas em duas circunstâncias, primeiro as teóricas, ou seja, sem erro nenhum em um suposto levantamento e em um segundo caso, as coordenadas observadas no campo com instrumento, esta contendo erros na medição. Resultando nas equações (110) e (111), sendo SGL e SCG, respectivamente.

$$L_b = [d_2 \ d_9 \ d_{28}]^T \quad (110)$$

$$L_b = [D_2 \ D_9 \ D_{28}]^T \quad (111)$$

A matriz dos pesos é uma matriz diagonal como demonstrado na equação (66) do item 3.3.2, sendo que para a metodologia do quadrilátero foi utilizado como demonstrado na equação (112), resultando com isso na equação (113).

$$P_i = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{d_i}^2)^{-1} \quad (112)$$

$$P = \text{diag}([P_2 \ P_9 \ P_{28}]) \quad (113)$$

Sendo  $\sigma_{d_i}^2$ , obtido pela equação (114), em que “a” (mm - milímetro) e “b” (ppm – parte por milhão) são as precisões da estação total determinadas pelo fabricante da mesma e “d” (km – quilometro) é a distância inclinada.

$$\sigma_{d_i} = \sqrt{a^2 + (b \ d_i)^2} \quad (114)$$

Os elementos da matriz jacobiana  $A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{X_0}$  para os elementos no SGL, quando não nulos podem ser obtidos utilizando as equações (115) à (117).

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{d_{ij}}; \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)}{d_{ij}}; \quad (115)$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(y_i - y_j)}{d_{ij}}; \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)}{d_{ij}}; \quad (116)$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial z_i} = \frac{(z_i - z_j)}{d_{ij}}; \quad \frac{\partial d_{ij}}{\partial z_j} = \frac{(z_j - z_i)}{d_{ij}}; \quad (117)$$

Resultando na Matriz A, como demonstrado na equação (118), para o Sistema de Coordenadas Cartesiana Geodésica Local.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{17}}{\partial x_7} & \frac{\partial d_{17}}{\partial y_7} & \frac{\partial d_{17}}{\partial z_7} \\ \frac{\partial d_{27}}{\partial x_7} & \frac{\partial d_{27}}{\partial y_7} & \frac{\partial d_{27}}{\partial z_7} \\ \frac{\partial d_{78}}{\partial x_7} & \frac{\partial d_{78}}{\partial y_7} & \frac{\partial d_{78}}{\partial z_7} \end{bmatrix} \quad (118)$$

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros. Para isso, foram obtidos as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V” e por fim efetuador o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

Os elementos da matriz jacobiana  $A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_0}$  para os elementos no SCG, quando não nulos podem ser obtidos utilizando as equações (119) à (121).

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial X_i} = \frac{(X_i - X_j)}{D_{ij}}; \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial X_j} = \frac{(X_j - X_i)}{D_{ij}}; \quad (119)$$

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial Y_i} = \frac{(Y_i - Y_j)}{D_{ij}}; \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial Y_j} = \frac{(Y_j - Y_i)}{D_{ij}}; \quad (120)$$

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial Z_i} = \frac{(Z_i - Z_j)}{D_{ij}}; \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial Z_j} = \frac{(Z_j - Z_i)}{D_{ij}}; \quad (121)$$

Resultando na Matriz A, como demonstrado na equação (122), para o Sistema de Coordenadas Cartesiana Geodésica Geocêntrica.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{17}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{17}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{17}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial D_{27}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{27}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{27}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial D_{78}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{78}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{78}}{\partial Z_7} \end{bmatrix} \quad (122)$$

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros como explicitado no capítulo 4. Para isso, foram obtidas as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V”, os erros e as discrepâncias entre os parâmetros ajustados e por fim efetuado o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

Depois da análise da utilização apenas de injunção absoluta, foram utilizadas também as injunções de direção, tanto no SGL, quanto no SCG, com isso no vetor do “Lb” foi inserido as injunções de direção.

Para o caso do SGL, o vetor das observações “Lb” ficou da forma como demonstrado na equação (123), cujas equações de distâncias inclinadas foram obtidas através da utilização da equação (108), do item 3.3.1.

$$L_b = [d_2 \ d_9 \ d_{28} \ Az_{M_{02}-M_{07}}]^T \quad (123)$$

Porém a matriz dos pesos é obtida pela seguinte 3 (três) primeiras linhas, as quais estão diretamente relacionadas com a observação de distância e a última linha com a injunção de direção, resultando no demonstrado pela equação (124).

$$P = \text{diag}([P_{d2} \ P_{d9} \ P_{d28} \ P_{Az_{M_{02}-M_{07}}}] \quad (124)$$

Sendo “P<sub>d</sub>” o peso com relação as observações de distância inclinadas e “P<sub>Az</sub>” o peso com relação a injunção de direção, lembrando que as injunções não são alteradas no ajustamento, de acordo com as equações (125) e (126).

$$P_{di} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{d_i}^2)^{-1} \quad (125)$$

$$P_{Az_{i-j}} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{Az_i}^2)^{-1} \quad (126)$$

Sendo  $\sigma_{d_i}^2$  obtido segundo a equação (114) e  $\sigma_{az_i}^2$  como demonstrado na equação (127), sendo  $\sigma_{az}$ , o desvio padrão angular de direção em radianos.

$$\sigma_{Az_i}^2 = \left( \frac{\sigma_{Az}}{3600} \right)^2 \quad (127)$$

Porém, a matriz Jacobiana das Derivadas foram obtidas através das equações (115) à (118), complementadas com as equações (128) à (130).

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial x_i} = \frac{(y_i - y_j)}{d_{hij}^2}; \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial x_j} = \frac{(y_j - y_i)}{d_{hij}^2}; \quad (128)$$

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial y_i} = \frac{(x_j - x_i)}{d_{hij}^2}; \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial y_j} = \frac{(x_i - x_j)}{d_{hij}^2}; \quad (129)$$

$$\frac{\partial Az_{ij}}{\partial z_i} = 0; \quad \frac{\partial Az_{ij}}{\partial z_j} = 0; \quad (130)$$

Em que a matriz “A” resulta, como demonstrado na equação (131).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{17}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{17}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{17}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial D_{27}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{27}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{27}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial D_{78}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{78}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{78}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial AZ_{27}}{\partial X_7} & \frac{\partial AZ_{27}}{\partial Y_7} & \frac{\partial AZ_{27}}{\partial Z_7} \end{bmatrix} \quad (131)$$

Para o caso do SCG, o vetor das observações “Lb” ficou da forma como demonstrado na equação (132), cujas equações de distâncias inclinadas foram obtidas através da utilização da equação (109) do item 3.3.1.

$$L_b = [D_2 \ D_9 \ D_{28} \ \text{Ang}_{M_{02}-M_{07}}]^T \quad (132)$$

Porém a matriz dos pesos é obtida pela seguinte 3 (três) primeiras linhas, as quais estão diretamente relacionadas com a observação de distância e a última linha com a injeção de direção, resultando no demonstrado pela equação (133).

$$P = \text{diag}([P_{d2} P_{d9} P_{d28} P_{\text{Ang}_{M02-M07}}]) \quad (133)$$

Sendo “P<sub>d</sub>” o peso com relação as observações de distância inclinadas e “P<sub>Ang</sub>” o peso com relação a inunção de direção, como demonstrado nas equações (134) e (135), lembrando que as inunções não são alteradas no ajustamento.

$$P_{di} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{d_i}^2)^{-1} \quad (134)$$

$$P_{\text{Ang}_{i-j}} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{\text{Ang}_i}^2)^{-1} \quad (135)$$

Sendo  $\sigma_{d_i}^2$  obtido segundo a equação (114) e  $\sigma_{az_i}^2$  como demonstrado na equação (127), sendo  $\sigma_{az}$ , o desvio padrão angular de direção em radianos.

$$\sigma_{Az_i}^2 = \left(\frac{\sigma_{\text{Ang}}}{3600}\right)^2 \quad (136)$$

Com relação a matriz Jacobiana das Derivadas, foram obtidas através das equações (115) à (118), complementadas com as equações (137) à (139), como demonstrado em Gemael, et al. (2015) página 297, em que os autores deduzem até chegar nas equações .

$$\frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial X_i} = \frac{(Y_i - Y_j)}{d_{hij}^2}; \quad \frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial X_j} = \frac{(Y_j - Y_i)}{d_{hij}^2}; \quad (137)$$

$$\frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Y_i} = \frac{(X_j - X_i)}{d_{hij}^2}; \quad \frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Y_j} = \frac{(X_i - X_j)}{d_{hij}^2}; \quad (138)$$

$$\frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Z_i} = 0; \quad \frac{\partial \text{Ang}_{ij}}{\partial Z_j} = 0; \quad (139)$$

Em que a matriz “A” resulta, como demonstrado na equação (140).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{17}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{17}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{17}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial D_{27}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{27}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{27}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial D_{78}}{\partial X_7} & \frac{\partial D_{78}}{\partial Y_7} & \frac{\partial D_{78}}{\partial Z_7} \\ \frac{\partial \text{Ang}_{27}}{\partial X_7} & \frac{\partial \text{Ang}_{27}}{\partial Y_7} & \frac{\partial \text{Ang}_{27}}{\partial Z_7} \end{bmatrix} \quad (140)$$

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros como explicitado no capítulo 4. Para isso, foram obtidos as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V”, os erros e as discrepâncias entre os parâmetros ajustados e por fim efetuador o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

### 3.3.5 Ajustamento da Rede Geodésica

Mesmo sabendo que, com a análise feita com relação ao triângulo e ao quadrilátero já se pode ter um indicativo de como obter sucesso na definição das coordenadas de uma rede geodésica de distâncias (rede de trilateração), porém, antes da generalização ainda foram escolhidos e inseridos um quinto e um sexto ponto para completar o raciocínio.

Ao inserir um ponto a mais no quadrilátero, três parâmetros incógnitos a mais irão fazer parte do ajustamento, ou seja, no total existirão 15 vértices, sendo deles 9 fixos e 6 incógnitos e ainda serão adicionadas mais quatro equações de distâncias, totalizando dez distâncias (equações de observação). Fixando três dos vértices utilizados (utilizando esses pontos como controle para eliminar a translação e a rotação da rede), logo serão eliminadas mais três distâncias entre os pontos de apoio, restando apenas 7 equações de observações, por conta disso, o sistema possuiria em formulação sete equações e seis incógnitas, resultando em um grau de liberdade e com isso mesmo que seja retirado mais uma equação, o sistema poderia ser resolvido por MMQ.

Como comprovado através do estudo do quadrilátero, utilizando apenas as distâncias como explicitado, o sistema vai resultar em duas soluções possíveis, uma acima de um determinado um plano e outra abaixo desse mesmo plano. Sendo que uma dessas soluções não é de interesse para quem realizar o ajustamento. Como a diferença entre cota ( $\Delta z$ ) é muito pequeno, isto se comparar com o comprimento dos lados utilizados, ambas as soluções obtidas não se diferem muito uma da outra, ou seja, dependendo das coordenadas iniciais utilizadas e em seguida com uma pequena variação na casa dos centímetros para se efetuar alguns testes, percebeu-se que os resultados obtidos pelo ajustamento variaram entre as duas soluções possíveis, possibilitando utilizar a solução não desejada como a solução final.

Se por acaso fosse utilizado quatro pontos de apoio (fixos), logo seis distâncias medidas perderiam o sentido e apenas quatro seriam utilizadas para determinar três parâmetros restantes, resultando em apenas um grau de liberdade, ou seja, pode-se excluir uma das equações e ainda irá existir solução para o ajustamento. Porém, mesmo utilizando dessa forma com quatro pontos de apoio, o ajustamento resultaria em duas soluções, sendo elas, uma acima e outra abaixo do plano, e por conta disso, deve ser mantido a preocupação com relação a obtenção da solução não desejada.

Inserido mais um sexto ponto, com isso, vai existir 18 coordenadas no total, sendo nove delas fazendo parte dos três pontos de apoio (fixar translação e rotação), logo foram estimados nove das demais coordenadas incógnitas. Ao utilizar o sexto ponto, são inseridas mais cinco equações de distâncias com relação aos cinco pontos anteriores, totalizando em 15 medidas de distâncias inclinadas. Como nos ajustamentos anteriores, três das distâncias perdem o efeito, pois se encontram entre os pontos de apoio (injunções absolutas das coordenadas), resultando com isso em 12 equações de distâncias inclinadas e nove incógnitas, portanto três graus de liberdade. Porém, ao fixar um quarto ponto, como efetuado anteriormente, seis distâncias vão perder o sentido, resultando em nove distâncias e seis incógnitas, ainda permanece os três graus de liberdade. Fixando um quinto ponto, 10 distâncias perdem o sentido, cujo o sistema resultante vai possuir cinco equações e 3 parâmetros, ou seja, dois graus de liberdade. O que não se pode deixar cair no esquecimento é que da mesma forma que utilizando cinco pontos, o sistema possui duas resoluções próximas, uma acima e outra abaixo do plano e o cuidado em obter a resolução não desejada deve ser mantido.

Depois de ser efetuado esse estudo com essas quantidades de pontos, possibilita-se a generalização sobre a quantidade de equações, de parâmetros incógnitos e dos graus de liberdade, como demonstrado nas equações de (141) à (144).

$$n_{\text{par}} = 3, n_{\text{pto}} \quad (141)$$

$$n_{\text{efpar}} = 3 \cdot n_{\text{pto}} - 3 \cdot n_{\text{ctrol}} \quad (142)$$

Sendo:

$n_{\text{pto}}$ : número de pontos da rede;

$n_{\text{par}}$ : número de parâmetros;

$n_{\text{ctrl}}$ : número de pontos de apoio;

$n_{\text{efpar}}$ : número efetivo de parâmetros a estimar.

Para o número total de observações combinadas sem se repetir ( $n_{\text{obs}}$ ) entre os  $n_{\text{ptos}}$  da rede, pode-se adotar o seguinte algoritmo recursivo:

1. Para  $n_{\text{pto}} = 3$  tem-se  $n_{\text{obs}} = 3$
  2. Para  $n_{\text{pto}} = 4, 5, 6, \dots$  tem-se  $n_{\text{obs}} = (n_{\text{pto}} - 1) + n_{\text{obs\_anterior}}$
- (143)

sendo:  $n_{\text{obs\_anterior}}$  o número de observações fornecidas para o  $n_{\text{pto}}$  anterior.

A quantidade de graus de liberdade (gl) para a solução do sistema por MMQ será então calculado pela equação (144).

$$gl = n_{\text{obs}} - (n_{\text{obs\_ctrl}} + n_{\text{efpar}}) \quad (144)$$

sendo:  $n_{\text{obs\_ctrl}}$  o número de observações referentes a quantidade de pontos de apoio.

A equação (144) evidencia que para que só exista solução significativa, quando o  $gl > 0$ , caso contrário até que poderia ser fornecida uma infinidades de soluções utilizando inversa generalizada, porém, a resolução por essa estratégia não possibilita uma utilidade significativa para o problema em questão nessa dissertação.

Partindo dos estudos efetuados dos devidos ajustamentos em uma trilateração 3D abordados na dissertação, com relação ao triângulo e ao quadrilátero, pode-se afirmar que, a metodologia utilizada para a resolução de qualquer rede geodésica deve utilizar injunções de direção, sendo que o sistema de coordenadas do ajustamento deve ser o Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas.

Como no quadrilátero, para a resolução do ajustamento de uma trilateração 3D pelos métodos clássicos de uma rede geodésica contendo 8 (oito) vértices, foram efetuados também de duas formas distintas, na primeira utilizando as distâncias inclinadas teóricas e na segunda utilizando as distâncias inclinadas observadas.

Os dados com relação as equações de observações teóricas, observadas e o desvio padrão das observações utilizadas para resolução da rede de trilateração em 3D foram demonstrados de acordo com a Tabela 9.

Tabela 9 – Valores teóricos e simulados observados dos 8 vértices da rede geodésica 3D por trilateração, possuindo como M01, M02 e M08, como injunções absolutas.

Est	Pto Visado	Nome	Valores Teóricos			Valores Observados	
			D. Inclinada(SGL) m	D. Inclinada(SCG) m	$\sigma_d(m)$	D. Inclinada m	erro(m)
M01	M07	d1	9126,30785767334	9126,30770858005	0,046	9126,292	-0,016
M01	M06	d2	16083,85151561380	16083,85193929360	0,081	16083,788	-0,064
M01	M05	d3	15649,94128803740	15649,94117382730	0,078	15649,934	-0,008
M01	M04	d4	27220,47302032620	27220,47293036250	0,136	27220,335	-0,138
M01	M03	d5	23874,71549746390	23874,71568161150	0,119	23874,668	-0,047
M02	M07	d6	12693,32294847750	12693,32265839140	0,064	12693,389	0,066
M02	M06	d7	16730,41332575150	16730,41372535020	0,084	16730,509	0,095
M02	M05	d8	10383,15941037280	10383,15971391230	0,052	10383,187	0,028
M02	M04	d9	19772,45505162980	19772,45502853230	0,099	19772,515	0,060
M02	M03	d10	12506,59443358540	12506,59475302820	0,063	12506,669	0,074
M03	M05	d11	10225,83432437910	10225,83480313460	0,051	10225,927	0,093
M03	M04	d12	9856,08958143271	9856,08936769649	0,050	9856,056	-0,034
M03	M06	d13	16983,52345455620	16983,52368064090	0,085	16983,500	-0,024
M03	M07	d14	18116,31467015180	18116,31470531230	0,091	18116,160	-0,155
M03	M08	d15	22510,64007181690	22510,63993560800	0,113	22510,605	-0,036
M04	M05	d16	11616,63102622130	11616,63099767310	0,058	11616,517	-0,114
M04	M06	d17	14207,91670547860	14207,91652633310	0,071	14207,972	0,055
M04	M07	d18	18968,01672071820	18968,01666578600	0,095	18968,055	0,039
M04	M08	d19	23891,82360600570	23891,82312830780	0,120	23891,739	-0,085
M05	M08	d20	12913,27161932910	12913,27102825250	0,065	12913,247	-0,025
M05	M07	d21	8160,08125515486	8160,08091585327	0,041	8160,063	-0,018
M05	M06	d22	7476,41488522205	7476,41476366981	0,038	7476,399	-0,016
M06	M07	d23	6997,70361490524	6997,70422692733	0,035	6997,685	-0,018
M06	M08	d24	11246,65100640910	11246,65095488020	0,056	11246,641	-0,010
M07	M08	d25	4924,00368645415	4924,00326730913	0,025	4923,994	-0,010

Fonte: O Autor (2019).

Os pontos utilizados como de apoio, ou seja, os pontos considerados como fixos do ajustamento foram os  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  e  $M_{08}$  e suas coordenadas seguem na Tabela 4, referente ao Sistema de Coordenadas Geodésica Cartesiano Geocêntrico. Para os vértices a serem ajustados ( $M_{03}$ ,  $M_{04}$ ,  $M_{05}$ ,  $M_{06}$ ,  $M_{07}$ ) também foram inseridos coordenadas aproximadas no SCG, resultando na composição do vetor dos parâmetros aproximados, sendo ele o único vértice que compõe este vetor, como demonstrado na equação (145).

$$X_0 = [X_{M_{03}} \ Y_{M_{03}} \ Z_{M_{03}} \ X_{M_{04}} \ Y_{M_{04}} \ Z_{M_{04}} \ X_{M_{05}} \ Y_{M_{05}} \ Z_{M_{05}} \ X_{M_{06}} \ Y_{M_{06}} \ Z_{M_{06}} \ X_{M_{07}} \ Y_{M_{07}} \ Z_{M_{07}}] \quad (145)$$

Para o ajustamento da rede contendo 8 (oito) vértices no SCG foi utilizado inicialmente em primeira abordagem um ajustamento utilizando apenas o ângulo  $Ang_{M02-M07}$  como injunção de direção, em que, possui origem no eixo Y e contando no sentido horário. Em uma segunda abordagem foram utilizadas em vez de apenas um ângulo, todos os ângulos possíveis formados tendo como vértice inicial as injunções  $M_{01}$  e  $M_{02}$ , ou seja, foram utilizadas as injunções de direção como sendo,  $Ang_{M01-M03}$ ;  $Ang_{M01-M04}$ ;  $Ang_{M01-M05}$ ;  $Ang_{M01-M06}$ ;  $Ang_{M01-M07}$ ;  $Ang_{M02-M03}$ ;  $Ang_{M02-M04}$ ;  $Ang_{M02-M05}$ ;  $Ang_{M02-M06}$ ;  $Ang_{M02-M07}$ , partindo do mesmo princípio de quando se utilizava apenas o ângulo  $Ang_{M02-M07}$ , origem no eixo Y e contando no sentido horário.

Para o caso do vetor das observações, foram utilizadas as equações de distancias inclinadas em duas circunstâncias, primeiro as teóricas, ou seja, sem erro nenhum em um suposto levantamento e em um segundo caso, as coordenadas observadas no campo com instrumento, estas contendo erros na medição.

Resultando nas equações (146). Para o caso de utilização de apenas uma injunção de direção  $Ang_{M02-M07}=219^{\circ}06'15,4''$ .

$$L_B = [D_1 \dots D_{25} Ang_{M02-M07}]^T \quad (146)$$

Lembrando que pôr o  $Ang_{M02-M07}$  ser a injunção de direção deve entrar nas observações calculadas " $L_0$ ", porém, o seu resultado não se altera no fim da iteração, por conta que é a injunção, ou seja, o seu valor continua fixo, ou travado quando se utilizar a equação (147). Logo as linhas que correspondem as injunções de direção o vetor " $L = 0$ ", não alterando o valor das correções das observações " $L$ ". E que as distâncias entre injunções absolutas não são utilizadas resultando em 25 (vinte e cinco) distâncias inclinadas e 1 (uma) injunção de direção.

$$L = L_b - L_0 \quad (147)$$

Porém a matriz dos pesos foi obtida pelas 25 (vinte e cinco) primeiras linhas, as quais estão diretamente relacionadas com a observação de distâncias inclinadas e a última linha com a injunção de direção, resultando no demonstrado pela equação (148).

$$P = \text{diag}([P_{d1} \dots P_{25} P_{Ang_{M02-M07}}]) \quad (148)$$

Sendo “ $P_d$ ” o peso com relação as observações de distância inclinadas e “ $P_{Ang}$ ” o peso com relação a inunção de direção, lembrando que as inunções não são alteradas no ajustamento, como demonstrado nas equações (149) e (150).

$$P_{di} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{d_i}^2)^{-1} \quad (149)$$

$$P_{Ang_{i-j}} = \sigma_0^2 \text{diag}(\sigma_{Ang_i}^2)^{-1} \quad (150)$$

Sendo  $\sigma_{d_i}^2$  obtido segundo a equação (114) e  $\sigma_{Az_i}^2$  como demonstrado na equação (127), sendo  $\sigma_{az}$ , o desvio padrão angular de direção em radianos.

Com relação a matriz Jacobiana “A”, foram obtidas através das equações (119) à (121), complementadas com as equações (137) à (139). Em que a matriz “A” resulta em uma matriz que relaciona em seu ordenamento, para as colunas o vetor dos parâmetros e para as linhas o vetor das observações, como demonstrado no quadrilátero no item 3.3.4.

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros como explicitado no capítulo 4. Para isso, foram obtidos as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V”, os erros e as discrepâncias entre os parâmetros ajustados e por fim efetuator o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

Para o caso de utilização de todas as inunções de direção possíveis, partindo de  $M_{01}$  e  $M_{02}$ , tem-se  $Ang_{M_{01}-M_{03}}=134^\circ 14' 29,7''$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{04}}=195^\circ 36' 47,2''$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{05}}=193^\circ 07' 32,2''$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{06}}=207^\circ 03' 48,1''$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{07}}=206^\circ 10' 12,6''$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{03}}=198^\circ 50' 44,0''$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{04}}=208^\circ 04' 01,4''$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{05}}=213^\circ 13' 20,4''$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{06}}=215^\circ 29' 21,4''$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{07}}=219^\circ 06' 15,4''$ , resultando na equação (151).

$$L_b = [D_1 \dots D_{25} \text{ Ang}_{M_{01}-M_{03}} \dots \text{ Ang}_{M_{02}-M_{07}}]^T \quad (151)$$

A mesma ideia foi realizada com relação as inunções de direção,  $Ang_{M_{01}-M_{03}}$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{04}}$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{05}}$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{06}}$ ;  $Ang_{M_{01}-M_{07}}$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{03}}$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{04}}$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{05}}$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{06}}$ ;  $Ang_{M_{02}-M_{07}}$ . E que as distâncias entre inunções absolutas não são utilizadas resultando em 25 (vinte e cinco) distâncias inclinadas e 10 (dez) inunções de direção.

Porém a matriz dos pesos foi obtida pelas 25 (vinte e cinco) primeiras linhas, as quais estão diretamente relacionadas com a observação de distâncias inclinadas “P<sub>d</sub>” e as últimas dez (10) linhas com as injunções funcionais de direção “P<sub>Ang</sub>”, resultando no demonstrado pela equação (152).

$$P = \text{diag}([P_{d1} \dots P_{25} P_{\text{Ang}_{M01-M03}} \dots P_{\text{Ang}_{M02-M07}}]) \quad (152)$$

Sendo  $\sigma_{d_i}^2$  obtido segundo a equação (114) e  $\sigma_{az_i}^2$  como demonstrado na equação (135), sendo  $\sigma_{az}$ , o desvio padrão angular de direção em radianos.

Com relação a matriz Jacobiana “A”, foram utilizadas as equações (119) à (121), complementadas com as equações (137) à (139), relacionando todos os vértices e distâncias inclinadas, utilizadas na rede geodésica. Em que a matriz “A” resulta em uma matriz que relaciona em seu ordenamento, para as colunas o vetor dos parâmetros e para as linhas o vetor das observações, como demonstrado no quadrilátero no item 3.3.4.

Em seguida foram efetuados os demais cálculos para obtenção do resultado final do ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros como explicitado no capítulo 4. Para isso, foram obtidos as Normais “N” e “U”, parâmetro ajustado “Xa”, correção dos parâmetros “X”, resíduos “V”, os erros e as discrepâncias entre os parâmetros ajustados e por fim efetuar o teste estatístico de hipótese do Qui-Quadrado, como explicitado no item 2.2.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nessa dissertação foram criadas rotinas no Matlab 2010 para resolver os dois primeiros problemas de ajustamento referentes ao triângulo (cf. item 3.3.3) e ao quadrilátero (cf. item 3.3.4), seguindo os determinados aspectos isolados: a) resolução utilizando injunções funcionais; b) resolução utilizando injunções de peso; c) resolução utilizando injunções absolutas. O problema com relação a rede de trilateração utilizando os oito vértices (cf. item 3.3.5) foi resolvido no software AstGeoTop (GARNÉS, 2019) no módulo de Ajustamento de redes geodésicas, em que o *software* elabora testes estatísticos com relação ao ajustamento, pois, possibilita análises dos dados mais detalhada, importante para a verificação de mal condicionamento no método da trilateração, se caso possuir, de onde está, e a generalização da entrada de dados, para a resolução de qualquer tipo de problema relacionado à Redes Geodésicas por trilateração, triangulação e triangulateração.

Para que se pudesse resolver o ajustamento das observações pelo modelo dos parâmetros de uma trilateração 3D, foram utilizados diversos valores para as coordenadas de parâmetro aproximado "X0", pois, foi verificado que a trilateração possui um mal condicionamento e principalmente, alguns dos ajustamentos possuem mais de uma solução. Logo, para estes ajustamentos com mais de uma solução, foram apresentados ao longo de cada um dos subtópicos do capítulo 4, colocando quais as coordenadas aproximadas possibilitaram a outra solução, não desejável para o ajustamento.

A seguir, são apresentados os resultados e discussões referentes aos testes executados para cada método utilizado nessa dissertação em separado, sendo eles no triângulo, no quadrilátero e na rede geodésica contendo 8 vértices.

Para o ajustamento da trilateração 3D com relação ao triângulo, foram utilizadas apenas observações de distâncias inclinadas em conjunto com as injunções absolutas, de peso e funcional (apenas a de distância), utilizadas separadamente, com isso, pode-se obter qual(is) a(s) injunção(ões) que melhor(res) deu(eram) resultado(s) no ajustamento do triângulo, ou seja, melhor precisão e acurácia em conjunto com solução única do sistema, pois, isso possibilita entender melhor o que está acontecendo aos vértices escolhidos para a rede de triângulos, se existe mal condicionamento com relação aos vértices selecionados inicialmente.

Para o ajustamento de trilateração 3D com relação ao quadrilátero, foi dado início escolhendo os mesmos requisitos obtidos através do estudo do triângulo, ou seja, foram utilizados como observação as distâncias inclinadas em conjunto com as injunções absolutas e funcionais, porém, para este caso apenas a injunção funcional de distância não conseguiu resolver o ajustamento. Logo, foi preciso utilizar a injunção funcional de direção.

Para o ajustamento de trilateração 3D com relação a rede geodésica contendo os 8 vértices, foram utilizados a metodologia que possuiu melhor resultado com relação ao triângulo e ao quadrilátero, ou seja, foram utilizadas as observações de distâncias inclinadas, em conjunto com as injunções absolutas e funcionais de distâncias e de direção, no Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntrica.

#### 4.1 RESULTADOS E DISCUSSÕES DO PRIMEIRO PROBLEMA – TRIÂNGULO

O resultado do primeiro problema do ajustamento 3D da trilateração para o caso do triângulo possuindo como os vértices  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  e  $M_{08}$  retirados da Figura 6, em que o  $M_{02}$  é o vértice a ser ajustado, foram considerados os três tipos de injunções tratadas nesta dissertação (cf. item 2.2.4), sendo utilizado em conjunto com as distâncias teóricas, como demonstrado na Tabela 7 do Tópico 3.3.3, porém, o resultado foi alcançado quase que imediato, com o máximo de quatro iterações, utilizando o critério de parada igual a  $\|\Delta X\|_2 < 1.10^{-6}$ , pois, esse valor permite informar que o vetor positivo das correções em “X” resultou na casa do décimo de milímetro, com relação a quarta iteração e utilizando também as coordenadas aleatórias para a determinação do ponto inicial, estando aproximada das coordenadas simuladas de acordo como demonstrado nas Tabela 4 e na Tabela 5 com relação ao vértice  $M_{02}$ , como demonstrado na primeira linha da Tabela 10. Como não existem graus de liberdade, logo, está sendo utilizado no cálculo os desvios padrão dos parâmetros, o  $\sigma_0^2=1$ . Os resultados obtidos no ajustamento estão apresentados na **Erro! Autoreferência de indicador não válida.**

Tabela 10 – Resultados da trilateração do triângulo no SGL, usando distâncias inclinadas teóricas

	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Valor aprox..	M <sub>02</sub>	154960	-----	262640	-----	-0,410	-----
SOLUÇÃO							
Tipo injeção	Est	X	$\sigma X$	Y	$\sigma Y$	Z	$\sigma Z$
Funcional	M <sub>02</sub>	154963,333	1,013	262644,234	2,580	-14,219	1903,593
Peso	M <sub>02</sub>	154963,333	1,013	262644,234	2,580	-14,219	1903,593
Absoluta	M <sub>02</sub>	154963,333	1,013	262644,234	2,580	-14,219	1903,593

Fonte: O Autor (2019).

Com relação a primeira solução das distâncias teóricas, os resultados obtidos para as Injeções Funcionais, de Peso e Absolutas estão apresentados na Tabela 10, sendo o valor exato das coordenadas do ponto M<sub>02</sub>, mas evidencia que a maior incerteza foi obtida com relação a coordenada Z.

Em seguida foram efetuados algumas alterações nas coordenadas aproximada iniciais do vértice M<sub>02</sub> e percebeu-se que quando as coordenadas de M<sub>02</sub> ficam a partir de “154931,2534363 m  $\pm$  5,619 m; 262562,5103859 m  $\pm$  14,317 m; -1541,9476138 m  $\pm$  135,008 m, se chegou a uma segunda solução, não sendo esta, uma solução desejada, com isso, pode-se dizer que o ajustamento não possui apenas uma solução, se caso for utilizado as injeções separadamente.

Utilizando as distâncias inclinadas observadas  $d_{M01-M08} = 5537,934$  m,  $d_{M01-M02} = 13583,510$  m e  $d_{M02-M08} = 14842,688$  m e os seus correspondentes desvios padrão, como demonstrado na Tabela 7, esses desvios possibilitam a elaboração da matriz dos pesos, obtendo-se o resultado apresentado na Tabela 11.

Tabela 11 – Resultados da trilateração do triângulo no SGL, usando distâncias inclinadas observadas

	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Valor aprox..	M02	154960	-----	262640	-----	-0,410	-----
SOLUÇÃO							
Tipo injeção	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Funcional	M02	154962,831	0,944	262642,957	2,403	-194,112	177,570
Peso	M02	154962,831	0,944	262642,957	2,403	-194,112	177,570
Absoluta	M02	154962,831	0,944	262642,957	2,403	-194,112	177,570

Fonte: O Autor (2019).

Como para a solução das distâncias teóricas, também foi obtida uma segunda solução para as distâncias observadas, quando foram utilizadas as coordenadas do vértice M<sub>02</sub> sendo “154938,2855186 m  $\pm$  6,494 m; 262580,4248185 m  $\pm$  16,547 m; -363,0815976 m  $\pm$  176,695 m”.

As discrepâncias com relação as coordenadas que mais se aproximam das coordenadas reais ajustadas do vértice  $M_{02}$ , encontra-se na Tabela 12.

Tabela 12 – Discrepâncias entre os resultados do ajustamento considerando as distâncias teóricas e as distâncias observadas no SGL

Est	$\Delta X(m)$	$\Delta Y(m)$	$\Delta Z(m)$
M02	0,502	1,277	-179,893

Fonte: O Autor (2019).

Os resultados obtidos com relação a esses três vértices ( $M_{01}$ ,  $M_{02}$  e  $M_{08}$ ) utilizados mostram que apenas efetuando mudanças nas distâncias teóricas em 12,1cm a diferença tridimensional da solução chega em aproximadamente a 180 m quando efetuado o ajustamento 3D de uma trilateração em um triângulo no Sistema Cartesiano Geodésico Local.

A fim de verificar se existe um ganho significativo na solução do problema utilizando no Sistema Cartesiano Geocêntrico, foi repetido o mesmo procedimento que no SGL. Em apenas 3 iterações os métodos atingem a convergência, utilizando o mesmo critério anterior  $\|\Delta X\|_2 < 1.10^{-6}$ . Os resultados obtidos estão representados na Tabela 13.

Tabela 13 – Resultados da trilateração do triângulo no SCG, usando distâncias teóricas

	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Valor aprox..	M02	5182200	-----	-3610350	-----	-886230	-----
	SOLUÇÃO						
Tipo injunção	Est	X	$\sigma X$	Y	$\sigma Y$	Z	$\sigma Z$
Funcional	M02	5182205,787	2,747	-3610354,954	1,950	-886235,5012	2,255
Peso	M02	5182205,787	2,747	-3610354,954	1,950	-886235,5012	2,255
Absoluta	M02	5182205,787	2,747	-3610354,954	1,950	-886235,5012	2,255

Fonte: O Autor (2019).

Da mesma forma que foi escolhido as coordenadas aproximadas para o M02 no SGL, foi efetuado para o SCG, porém, as coordenadas do ponto M02 da solução teórica foi quase o valor exato dos vértices simulados como demonstrado na Tabela 5, sem necessitar arredondamentos. Chama-se a atenção para a precisão da coordenada Z que melhorou sensivelmente, passando de 1903,593 m (Tabela 10 para 2,255 m (Tabela 13), enquanto que nas outras componentes ficou mantido o mesmo resultado com a utilização das injunções (absoluta, de peso e funcional)

separadamente. Desta forma, pode-se afirmar que mesmo mudando os valores do vértice M02 aproximado não houve uma segunda solução para o problema.

Utilizando agora as distâncias observadas, em vez das teóricas o resultado obtido se encontra na Tabela 14, com precisão tridimensional em torno de 30cm.

Tabela 14 – Resultados da trilateração do triângulo no SCG, usando distâncias observadas

	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Valor aprox..	M02	5182200	-----	-3610350	-----	-886230	-----
SOLUÇÃO							
Tipo injunção	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Funcional	M02	5182206,0363	0,197	-3610354,7770	0,140	-886235,6211	0,156
Peso	M02	5182206,0363	0,197	-3610354,7770	0,140	-886235,6211	0,156
Absoluta	M02	5182206,0363	0,197	-3610354,7770	0,140	-886235,6211	0,156

Fonte: O Autor (2019).

A Tabela 15 de discrepância demonstra a diferença em relação ao resultado das coordenadas cartesianas geocêntricas de  $M_{02}$  obtidas utilizando-se as distâncias inclinadas teóricas e as distâncias inclinadas observadas.

Tabela 15 – Discrepâncias entre os resultados das distâncias inclinadas teórica e observada no SCG

Est	$\Delta X(m)$	$\Delta Y(m)$	$\Delta Z(m)$
M02	0,2488	0,1765	-0,120

Fonte: O Autor (2019).

A diferença em se usar as distâncias observadas e resolver via SCG deram uma diferença tridimensional de apenas 32,8cm, enquanto no SGL teve a discrepância de aproximadamente 180m, ou seja, é uma grande vantagem utilizar no SCG com relação ao SGL.

Por conta do grau de liberdade ser igual a zero, impossibilita a execução do teste de hipótese Qui-Quadrado para validar os resultados deste primeiro problema a um certo nível de significância  $\alpha$ , por conta disso, só se pode ver o ganho na estabilidade da solução via SCG e via SGL através do número de condição de  $(A^T P A)$ . Na norma-2 de matriz, teve-se os seguintes resultados:  $\text{Cond}(A^T P A)$  SGL= 171787261,6953;  $\text{Cond}(A^T P A)$  SCG= 93,8992. Interpretando o número de condição, pode-se afirmar que quanto mais elevado o número de condição, mais o sistema fica propenso ao mal condicionamento. Tal resultado evidenciou que a solução desse problema via SGL torna o sistema um milhão de vezes pior condicionado com relação a resolução via SCG.

## 4.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO DO SEGUNDO PROBLEMA – QUADRILÁTERO

Partindo dos resultados obtidos do ajustamento da trilateração 3D no triângulo, percebe-se que para a resolução do quadrilátero, também vai possuir no mínimo duas soluções, sendo a primeira, mais próxima e a segunda, mais distante das coordenadas simuladas, porém, a segunda em alguns casos não vai diferir muito da primeira solução.

Os vértices, as distâncias e os desvios padrão utilizados para o ajustamento da trilateração 3D no quadrilátero, estão especificados no item 3.3.4. Para que se possa obter as duas soluções, foram alteradas as coordenadas do vértice  $M_{07}$ , como demonstrado na segunda linha da Tabela 16. porém, foi descoberto que em uma pequena variação na coordenada do parâmetro aproximado “X0” ou melhor  $M_{07}$ , sendo a solução 1 quando  $Z=12,9m$  e a solução 2 quando o  $Z=12,8m$ , possibilita a obtenção de dois resultados próximos entre si, ficando sobre evidência a importância que se deve ter no ajustamento, pois, em ambos os resultados existiu a convergência com a utilização de apenas 8 iterações para se chegar ao critério,  $\|\Delta X\|_2 < 1.10^{-6}$  e a aprovação do teste do Qui-Quadrado, porém, um dos resultados não corresponde ao valor real e como os valores estão próximos, dificultando determinar através de análises qual é o resultado que condiz com o valor real em campo.

Tabela 16 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SGL, usando distâncias teóricas.

	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Valor aprox..	M07	143766,000	-----	256660,000	-----	12,900 (sol1) 12,800 (sol2)	-----
RESULTADO DO AJUSTAMENTO							
Solução	Est	X	$\sigma X$	Y	$\sigma Y$	Z	$\sigma Z$
Solução 1	M07	143766,235	0,910	256665,546	0,042	12,867	399,416
Solução 2	M07	143766,230	0,827	256665,545	0,187	10,577	399,416

Fonte: O Autor (2019).

Se for comparado o resultado obtido pela solução 2 com relação a solução 1 (a solução desejada), ambos os resultados se encontram nas duas últimas linhas da Tabela 16, com isso, pode ser obtido que as discrepâncias variam entre 0,001m à 2,290m e o vetor resultante da discrepância no espaço cartesiano tridimensional é de 2,29m, como demonstrado na Tabela 17.

Tabela 17 – Discrepâncias entre os resultados do ajustamento da solução 1 e 2 das distâncias teóricas no SGL

Est	$\Delta X(m)$	$\Delta Y(m)$	$\Delta Z(m)$	$\Delta (X,Y,Z) m$
M02	0,005	0,001	2,290	2,290

Fonte: O Autor (2019).

Como não se pode afirmar pelos valores observados qual a solução almejada, qualquer uma das duas soluções pode ser possível. Por conta desse fato surge um problema, que é qual a solução deve ser adotada como a correta? Essa problemática será solucionada no fim deste item 4.2.

Em seguida, para confirmar tal problemática sugerida no parágrafo acima, foi efetuado novamente o ajustamento, sendo que desta vez, são utilizadas as distâncias observadas em vez das distâncias teóricas, utilizando o mesmo procedimento que foi realizado com relação distâncias teóricas, obtendo com isso os resultados demonstrados Tabela 18.

Tabela 18 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SGL, usando distâncias observadas

	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Valor aprox..	M07	143766,000	-----	256660,000	-----	11,800 ( <i>sol<sub>1</sub></i> ) 11,700 ( <i>sol<sub>2</sub></i> )	-----
RESULTADO DO AJUSTAMENTO							
Solução	Est	X	$\sigma X$	Y	$\sigma Y$	Z	$\sigma Z$
Solução 1	M07	143766,278	0,097	256665,478	0,076	36,415	18,522
Solução 2	M07	143766,171	0,052	256665,464	0,085	-12,971	18,522

Fonte: O Autor (2019).

As soluções 1 e 2 obtidas, não se encontram próximas uma da outra, e a diferença tridimensional entre ambas é de 49,386 m. Sendo que a solução 1 se encontra a 23,548 m da solução teórica e a solução 2 se encontra a 25,838 m da solução teórica, portanto, uma decisão nada simples e nem imediata a se tomar.

Um caminho que pode ajudar a dirimir essa dúvida é a realização do processamento no SCG. A Tabela 19 a seguir ilustra o resultado de tal processamento com as distâncias teóricas.

Tabela 19 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SCG, usando distâncias teóricas

	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
Valor aprox..	M07	5175129,500 ( <i>sol<sub>1</sub></i> ) 5175129,000 ( <i>sol<sub>2</sub></i> )	-----	-3619060,000	-----	-892150,000	-----
RESULTADO DO AJUSTAMENTO							
Solução	Est	X	$\sigma X$	Y	$\sigma Y$	Z	$\sigma Z$
Solução 1	M07	5175124,110	494,519	-3619067,015	343,439	-892157,518	86,188
Solução 2	M07	5175122,887	494,489	-3619066,165	343,519	-892157,305	86,037

Fonte: O Autor (2019).

Foi observado que na solução via SCG nenhuma das soluções resultou no valor teórico verdadeiro, diferentemente da solução via SGL que na primeira solução usando as distâncias teóricas chegou-se ao valor teórico exato das coordenadas.

A primeira solução se encontra a uma distância 0,393m do valor teórico do ponto e a segunda solução se encontra a 1,90m do valor teórico do ponto. Ambas as soluções só se distanciam de 1,50m uma da outra, portanto, muito próximas e dependendo do valor inicial o método irá convergir para um ou para outro ponto da solução.

Usando as distâncias observadas para o processamento no SCG o resultado é o apresentado na Tabela 20.

Tabela 20 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SCG, usando distâncias observadas

	Est	X(m)	$\sigma_X$ (m)	Y(m)	$\sigma_Y$ (m)	Z(m)	$\sigma_Z$ (m)
Valor aprox..	M07	5175129,500 (sol <sub>1</sub> ) 5175129,000 (sol <sub>2</sub> )	-----	-3619060,000	-----	-892150,000	-----
RESULTADO DO AJUSTAMENTO							
Solução	Est	X	$\sigma_X$	Y	$\sigma_Y$	Z	$\sigma_Z$
Solução 1	M07	5175143,652	15,006	-3619080,598	10,373	-892160,998	2,686
Solução 2	M07	5175103,318	14,977	-3619052,582	10,453	-892153,974	2,535

Fonte: O Autor (2019).

A primeira solução em relação ao valor teórico tem uma discrepância de  $dX=19,223m$ ,  $dY=-13,362m$ ; e  $dZ=-3,424m$  um afastamento tridimensional de 23,660m. A segunda solução tem uma discrepância de  $dX=-21,111m$ ,  $dY=14,654m$  e  $dZ=3,600m$ , um afastamento tridimensional de 25,949m. A solução quanto transformada para o SGL e comparada a menos de 11cm na coordenada Z é equivalente a encontrada no SGL.

Nenhumas das soluções obtidas no SGL e no SCG estão adequadas para ser utilizadas em demandas para fins geodésicos, pois é esperado discrepância de alguns centímetros. A fim de se ter uma melhor solução foi introduzida uma injunção de direção a um dos lados, sendo escolhida a direção M02-M07. As injunções foram  $AZ_{M02-M07} 241^\circ 54' 00,07938''$  para o SGL e  $Ang_{M02-M07} 219^\circ 06' 15,37635''$  para o SCG, calculadas a partir dos valores teóricos das coordenadas. Por conta da inserção da injunção de direção na solução, possibilita que o sistema fique com um grau de liberdade e o teste estatístico Qui-Quadrado possa ser aplicado para verificar a normalidade das observações.

De acordo com o ajustamento efetuado no Sistema Geodésico Local foram encontradas duas soluções utilizando injunções absolutas e funcionais de direção,

porém, ao efetuar o ajustamento no Sistema Cartesiano Geocêntrico utilizando as mesmas injunções foi obtido apenas uma solução, sendo ela exata, demonstrando confiança no resultado obtido. E em seguida foi efetuado o estudo do condicionamento e no SGL  $\text{cond}(A^T P A) = 6148947,9$  e no SCG  $\text{cond}(A^T P A) = 4,2$  ou seja, a solução é mais estável no SCG mediante a pequenos erros de arredondamento.

Depois da análise apresentada anteriormente, foi efetuado da mesma forma o ajustamento, porém, dessa vez foi utilizada as distancias inclinadas observadas em conjunto com as injunções de direções. O resultado do ajustamento de uma trilateração em um quadrilátero em 3D obtido com relação ao SGL e SCG, está apresentado na Tabela 21.

Tabela 21 – Resultados da trilateração do quadrilátero no SCG, usando distâncias inclinadas observadas com injunção de direção

Solução	Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
SCG	M07	5175124,406	0,023	-3619067,264	0,028	-892157,598	0,018
SGL	M07	143766,172	0,039	256665,512	0,023	1,003	11,688

Fonte: O Autor (2019).

O erro posicional 3D no SGL, em conjunto com a injunção de azimuth resultou em 11,862m. O erro posicional 3D no SCG foi de 4,3cm. A hipótese nula do teste Qui-Quadrado não foi rejeitada ao nível de significância de 5%, o que se pode confirmar as normalidades das observações. A solução obtida no SCG quando transformadas as coordenadas para o SGL, resulta num erro tridimensional de 5,82cm, praticamente equivalente ao erro no próprio Sistema Cartesiano Geocêntrico. Com isso já se pode determinar qual será o melhor caminho para efetuar o ajustamento da rede, ou seja, a análise detalhada da solução no quadrilátero, demonstrou que o melhor caminho a ser utilizado para o ajustamento do restante da rede geodésica é pelo SCG em conjunto com as injunções absolutas (3 vértices) e funcionais (de direção), por exemplo,  $\text{Ang}_{M02-M07}$ .

### 4.3 RESULTADOS E DISCUSSÃO DO TERCEIRO PROBLEMA – REDE GEODÉSICA

Partindo da resolução do segundo problema que foi efetuado no quadrilátero, para a resolução do terceiro problema que é na rede geodésica, sendo esta, estabelecida ao longo da poligonal limítrofe do Município de Recife, contendo 8 (oito) vértices e 25 (vinte e cinco) distâncias inclinadas com seus devidos desvios padrão. Inicialmente, foi efetuado o ajustamento diretamente relacionado ao SCG, pois, tanto no triângulo, quanto no quadrilátero provou que os resultados obtidos não foram satisfatórios para o SGL. Porém, para o caso das injunções foram utilizadas as absolutas (3 vértices) em conjunto com as funcionais (direção), porque no ajustamento do quadrilátero, obteve-se a mesma inconsistência da trilateração no triângulo, ou seja, o ajustamento da trilateração resultando em mais de uma solução. Portanto, deve ser utilizado a injunção de direção, além de distâncias inclinadas com injunção absoluta.

O ajustamento da trilateração 3D na rede geodésica foi efetuada inicialmente utilizando injunções absolutas (M01, M02 e M08) e uma injunção de direção, como por exemplo foi utilizando o  $\text{AngM02-M07}=219^{\circ}06'15,37635''$  em conjunto com as 25 distâncias inclinadas, demonstradas na Tabela 6 e seus devidos desvios padrão, possuindo como parâmetros inicial aproximado os vértices M03, M04, M05, M06 e M07, com suas devidas coordenadas como demonstrado na Tabela 22.

Tabela 22 - Parâmetros Aproximados utilizados no ajustamento da rede geodésica de 8 vértices

Est	X(m)	Y(m)	Z(m)
M03	5180351,343	-3615788,186	-875124,428
M04	5174963,020	-3623938,249	-873826,275
M05	5176633,978	-3618862,427	-884140,350
M06	5172535,905	-3623915,897	-887825,692
M07	5175124,479	-3619067,236	-892157,574

Fonte: O Autor (2019).

Utilizando esse caminho para a resolução da rede geodésica com 8 (oito) vértices, porém para o caso das observações, sendo utilizadas as distâncias inclinadas teóricas, os resultados obtidos se encontram na Tabela 23.

Tabela 23 – Resultados da trilateração na rede no SCG, com distâncias teóricas e inunção de azimute

Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
M03	5180351,392	0,028	-3615788,219	0,020	-875124,436	0,005
M04	5174963,083	0,040	-3623938,293	0,028	-873826,386	0,007
M05	5176633,943	0,016	-3618862,444	0,011	-884140,944	0,003
M06	5172536,923	0,019	-3623915,610	0,013	-887825,605	0,003
M07	5175124,429	0,000	-3619067,236	0,000	-892157,574	0,000

Fonte: O Autor (2019).

Ao comparar os resultados obtidos na Tabela 23 com relação aos dados simulados demonstrados na Tabela 4, isto para os vértices M03, M04, M05, M06 e M07, os erros posicionais 3D máximos ocorreram nos vértices M03 e M04, sendo 5,9cm e 7,8cm, respectivamente.

O teste Qui-Quadrado ao nível de significância de  $\alpha=5\%$  comprovou para essa situação a não normalidade das observações com  $gl=11$ ,  $\chi_{inf}^2=3,82$ ;  $\chi_{sup}^2=21,92$ ; e valor da estatística calculada  $\chi_{calc}^2=4,27 \times 10^{-6}$ , ficando fora da região de aceitação do teste, ou seja, o sistema ficando superestimado.

Utilizando o mesmo caminho, porém, em vez das distâncias inclinadas teóricas, sendo utilizados as distâncias inclinadas observadas o resultado obtido se encontra na Tabela 24

Tabela 24 – Resultados da trilateração na rede no SCG, com distâncias observadas e inunção de azimute

Est	X(m)	$\sigma X(m)$	Y(m)	$\sigma Y(m)$	Z(m)	$\sigma Z(m)$
M03	5180387,234	21,157	-3615813,407	14,682	-875130,769	3,743
M04	5174912,940	30,318	-3623903,524	21,119	-873817,735	5,234
M05	5176626,260	11,665	-3618857,137	8,138	-884139,665	1,988
M06	5172507,856	14,289	-3623895,540	9,940	-887820,663	2,463
M07	5175124,414	0,017	-3619067,255	0,021	-892157,590	0,015

Fonte: O Autor (2019).

Os erros posicionais 3D resultantes do ajustamento, utilizando distâncias observadas em comparação com os valores teóricos verdadeiros, foram  $E_{M03}=44,322m$ ;  $E_{M04}=61,551m$ ;  $E_{M05}=9,395m$ ;  $E_{M06}=35,645m$ ;  $E_{M07}=0,029m$ .

O teste Qui-Quadrado ao nível de significância de  $\alpha=5\%$  comprovou a normalidade das observações com  $gl=11$ ,  $\chi_{inf}^2=3,82$ ;  $\chi_{sup}^2=21,92$ ; e valor da estatística calculada  $\chi_{calc}^2=3,82$ , ficando na região de aceitação do teste.

Os resultados obtidos no ajustamento 3D de uma rede geodésica por trilateração não estão satisfatórias, demonstrando que para o método clássico ser

viável, deve estar acompanhado de injunções funcionais de direção (cf. item 4.2). Para demonstrar melhor isso, foram utilizadas algumas injunções de direções partindo dos vértices M01 e M02 (duas das injunções absolutas posicionais): AM01-M03=134°14`29,7"; AM01-M04=195°36`47,2"; AM01-M05=193°07`32,2"; AM01-M06=207°03`48,1"; AM01-M07=206°10`12,6"; AM02-M03=198°50`44,0"; AM02-M04=208°04`01,4"; AM02-M05=213°13`20,4"; AM02-M06=215°29`21,4"; AM02-M07=219°06`15,4". Com essas injunções o resultado com as distâncias observadas é mostrado na Tabela 25 e as discrepâncias desses resultados obtidos com relação ao valor teórico verdadeiro seguem na Tabela 26.

Tabela 25 – Resultados da trilateração na rede no SCG, com distâncias observadas e injunção de azimute a partir de M01 e M02

Est	X(m)	$\sigma_{X(m)}$	Y(m)	$\sigma_{Y(m)}$	Z(m)	$\sigma_{Z(m)}$
M03	5180351,342	0,004	-3615788,185	0,005	-875124,413	0,034
M04	5174963,024	0,015	-3623938,236	0,037	-873826,428	0,041
M05	5176633,918	0,008	-3618862,424	0,022	-884140,964	0,027
M06	5172536,905	0,016	-3623915,594	0,025	-887825,641	0,034
M07	5175124,434	0,015	-3619067,228	0,027	-892157,580	0,020

Fonte: O Autor (2019).

Tabela 26 – Discrepâncias em relação as coordenadas teóricas e erro 3D do ajustamento da rede de trilateração clássica com injunções de direção

Est	$\Delta X(m)$	$\Delta Y(m)$	$\Delta Z(m)$	Erro 3D
M03	-0,001	0,001	0,015	0,015
M04	0,004	0,013	-0,053	0,055
M05	0,000	0,003	-0,024	0,024
M06	0,000	0,003	-0,039	0,039
M07	0,005	0,008	-0,006	0,011

Fonte: O Autor (2019).

O Teste do Qui-Quadrado ao nível de significância de  $\alpha=5\%$  comprovou a normalidade das observações com  $gl=20$ ,  $\chi_{inf}^2=9,59$ ;  $\chi_{sup}^2=34,17$  e valor da estatística calculada  $\chi_{calc}^2=15,97$ , ficando na região de aceitação do teste.

Com relação as considerações finais da solução do ajustamento 3D de rede geodésica por trilateração, pode-se argumentar que: Mesmo com o máximo possível de cuidado utilizado para efetuar o ajustamento de uma trilateração 3D de uma rede geodésica, as discrepâncias podem ficar muito além do aceitável, com relação as exigências geodésicas, ou seja, as discrepâncias não podem passar da ordem dos centímetros.

Dentre esses caminhos foram utilizados, alguns outros, como por exemplo a utilização de um quarto ponto como injunção absoluta, depois um quinto ponto como injunção, porém, em todos os casos as discrepâncias tridimensionais finais ainda ficaram na ordem do metro, não podendo ser consideradas como compatíveis a precisão geodésica.

O caminho se mostrou satisfatório foi injuncionar, além de no mínimo três pontos coordenados, injuncionar também as direções, possuindo como ponto de partida o  $M_{01}$  e  $M_{02}$  a todos os demais vértices, com isso, os erros posicionais 3D obtido de cada ponto, como demonstrado na última coluna da Tabela 26, ficou na casa dos centímetros, evidenciado ao que se esperava para rede geodésica. Por conta disso, foi comprovado que para o tratamento das redes geodésicas clássicas 3D, deve conter injunções de direções, além das distâncias e injunções absolutas. Um caminho alternativo é inserir também as equações de observações com relação a ângulos, possibilitando um melhor resultado. Porém, essa análise foge do escopo sugerido dessa dissertação, recomendando-se para um trabalho futuro.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

De acordo com os ajustamentos efetuados, neste tópico da dissertação, são explanadas conclusões e recomendações com relação ao estudo efetuado. Por mais que a trilateração clássica seja o método mais simples com relação aos demais métodos clássicos, a sua resolução possui uma certa complexidade para fins geodésicos, e que se não for tratada adequadamente vai conduzir a soluções errôneas.

### 5.1 CONCLUSÕES

Embora pareça simples, por conta da facilidade de suas observações, ou seja, entre todos os métodos clássicos a trilateração usando os medidores eletrônicos de distâncias é considerado o método mais rápido de se obter medidas e as equações de observações no ajustamento são as mais imediatas, quando comparadas com os demais métodos, triangulação e poligonação que envolvem ângulos.

Para, resolver o ajustamento de uma trilateração de redes geodésicas 3D, a geometria envolvida não é favorável, pois, os lados dos triângulos são grandes (alguns superiores a 10km), quando comparados com as diferenças de altitudes entre os vértices envolvidos estão muito próximos (na ordem do metro).

Os autores Murphy e Hereman (1999), detectaram o mesmo problema em seu estudo, e efetuaram algumas sugestões e alguns estudos de como possa ser que funcione o ajustamento utilizando apenas observações e injunções absolutas. No entanto, não foi encontrado durante o desenvolvimento desta dissertação mais nenhum estudo.

Partindo do pressuposto que a trilateração 3D de uma rede geodésica é um sistema mal condicionado, em momento algum se deve tratar de forma convencional esse ajustamento, ou seja, devem ser utilizadas técnicas especiais e cuidados especiais para a sua resolução, como por exemplo as tratadas em Garnés (1996). Na metodologia utilizada nessa dissertação foram comprovados através de diversas técnicas utilizadas, ou seja, foram ajustados menos vértices, até chegar a rede geodésica (cf. itens 3.3.3 e 3.3.4). Foram utilizados de mais de 3 (três) vértices, como sendo injunções funcionais do ajustamento. Como já era previsto em resultado

não satisfatório, foi apenas citado no fim do item 4.3, foram utilizados várias injunções, sendo absolutas, funcionais e de peso, como demonstrado no item 3.3.3 e pôr fim a combinação entre as injunções absolutas e funcionais de direção (cf. item 3.3.5), para determinação e resolução do mal condicionamento, deve-se ter bastante cuidado; Aconselha-se dobrar a atenção no momento de aceitação da solução final obtida no ajustamento.

Para que se pudesse testar o ajustamento de uma rede geodésica utilizando trilateração pelo método clássico, com respeito ao referencial de coordenadas, foram efetuados por dois caminhos, sendo um deles pelo Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais (SGL) e o outro pelo Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas (SCG), porém, o caminho utilizado no SCG se mostrou mais estável entre os dois, cujos resultados obtidos ficaram com melhor qualidade.

Para achar a resolução no ajustamento foram utilizadas três formas distintas de tratamento com injunções, no primeiro caso foram utilizadas equações tanto para posição quanto para direções, através de injunções funcionais, na segunda forma foram tratados os parâmetros como pseudo observações e os fixando-os por meio de valores dos pesos elevados, ou seja, utilizando injunções de peso e uma terceira forma foi a substituição direta nas equações os valores das coordenadas dos pontos de apoio através de coordenadas por injunções absolutas. Das três formas utilizadas para o tratamento do problema de trilateração, por conta do mal condicionamento das equações, o que utiliza apenas injunções funcionais foi a que possuiu o pior desempenho, carecendo do uso da pseudoinversa em alguns passos do processo iterativo, evidenciando com isso, que existe indefinição da direção do decrescimento da função em alguns pontos do processo.

Existiu a necessidade de injuncionar uma direção para o tratamento do quadrilátero, pois, isso pode dar uma garantia com relação a uma solução adequada, possibilitando com que o erro obtido no ajustamento esteja na ordem dos centímetros. Com relação a rede, cuja dimensão é inferior a 30km, se não forem utilizadas injunções de direção, o erro cresce consideravelmente, estando na ordem das dezenas de metros. Isto leva a conclusão de que para obtenção de resultados consistentes na trilateração geodésica 3D de redes clássicas, deve-se inserir injunções de direções.

Em resumo para atender os objetivos específicos propostos nesta dissertação (item 1.1.2), pode-se afirmar que foi satisfatório e foram abordadas técnicas e rotinas computacionais distintas, para testar a metodologia implementada. Por conta disso, pode-se afirmar que:

- a) Foi elaborada a metodologia para a resolução do ajustamento de uma rede geodésica pelo método clássico da trilateração 3D. O mal condicionamento da rede geodésica por conta de fatores como tamanho das observações, que está diretamente relacionado com curvatura da Terra, impossibilita utilizar a mesma metodologia implementada na dissertação no SGL.
- b) Ao longo da dissertação foram apresentados diversos estudos e técnicas utilizadas para o desenvolvimento e resolução do ajustamento de uma rede de trilateração 3D pelos métodos clássicos, sendo abordado e explicitado o porquê da utilização de qual metodologia utilizada para a resolução desse ajustamento.
- c) Foram desenvolvidas várias rotinas para testar a metodologia e também usadas as implementadas no software ASTGEOTOP, no módulo de ajustamento das observações pelos métodos clássicos 3D.

## 5.2 RECOMENDAÇÕES

De um modo mais geral para o ajustamento pelo MMQ - modelo dos parâmetros é recomendado fazer:

- a) Identificar e eliminar os erros grosseiros e sistemáticos, e minimizar o máximo possível seus efeitos, pois, existem diversas técnicas estatísticas, como por exemplo, o teste Tau por Pope (1976) e Data Snooping por Baarda (1968).
- b) Verificar a possibilidade de o sistema estar mal condicionado, se por acaso estiver, aplicar métodos mais apropriados como as decomposições ortogonais QR e SVD, por exemplo.
- c) Verificar a superabundância de equação linearmente independente, com relação a quantidade de incógnitas, com relação ao grau de confiança utilizado, pois, mesmo sendo escolhido mais equações de que incógnitas, possa ser que algumas sejam consideradas linearmente dependentes por conta da geometria, não existindo superabundância das observações,

transformando a matriz jacobiana em uma matriz singular, e ter que fazer uso da solução por inversas generalizadas.

- d) Elaborar rotinas para o ajustamento é essencial, pois, possibilita entender mais
- e) precisamente o que está ocorrendo durante o processo de ajustamento.
- f) Ao perceber a inconsistência no ajustamento, é aconselhável diminuir a extensão do problema para melhor compreensão, por exemplo, iniciar de um quadrilátero e ir aumentando o número de vértices.
- g) Efetuar o ajustamento utilizando injunções de formas distintas, como por exemplo, primeiramente as injunções absolutas, funcionais e de peso usadas separadamente.
- h) Sempre que possível injuncionar alguma direção ou ângulo para ajudar na geometria do problema.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13133**: execução de levantamento topográfico. Rio de Janeiro: ABNT, 1994. 35 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14166**: rede de referência cadastral municipal – procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 1998. 23 p.

AGUIAR, C. R.; CAMARGO, P. O.; GALO, M. Transformação de coordenadas e *datum* com propagação de covariâncias. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE GEOMÁTICA, 1., 2002, Presidente Prudente-SP. **Anais [...]**. Presidente Prudente-SP: SBG, 2002. p.113-120.

ALVES, D. B. M. **Posicionamento baseado em redes GPS utilizando o conceito de estação virtual**. 2008. Tese (Doutorado em Ciências Cartográficas) – Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente-SP, 2008.

ALVES, D. B. M. **Desenvolvimento e implantação do RTK em rede para posicionamento geodésico no estado de São Paulo**. 2011. Tese (Pós-Doutorado em Ciências Geodésicas) - Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente-SP, 2011.

ALVES, D. B. M. e MONICO, J. F. G. GPS/VRS positioning using atmospheric modeling. **GPS Solutions (Heidelberg)**, v. 15, n. 3, p. 253-261, 2011. DOI 10.1007/s10291-010-0187-3.

BAARDA, W. A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission. **Publications on Geodesy**, s. 2, n. 5, Delft, Netherlands, 1968. 97p.

BRICEÑO, J. G. Avaliação do posicionamento estático para distâncias médias. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 7, p. 79-88, 2001.

BURTCH, R. A comparison of methods used in rectangular to geodetic coordinate transformations. **ACSM Annual Conference and Technology Exhibition**. Orlando. 2006. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.7504&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 13 out. 2017.

CAMARGO, P. O. Mínimos Quadrados não negativos: solução pelo método de Lemke. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO, 3., 2010, Recife-PE. **Anais [...]**. Recife-PE SBCGTG, 2010. p. 001-004.

CLYNCH, J. R. **Geodetic Coordinate Conversions**. 2006. Disponível em: [http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/clynch\\_pdfs/coordcvt.pdf](http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/clynch_pdfs/coordcvt.pdf). Acesso em: 15 out. 2017.

COSTA, S. M. A.; LIMA, M. A. A.; JÚNIOR, N. J.M.; ABREU, M. A.; SILVA, A. L. & FORTES, L. P. S. RBMC em tempo real via NTRIP e seus benefícios nos levantamentos RTK e DGPS. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO*, 2., 2008, Recife-PE. **Anais** [...]. Recife-PE: SBCGTG, 2010.

CHRZANOWSKI A.; KONECNY, G. Theoretical comparison of triangulation, trilateration and traversing. **Canadian Surveyor**, v. 19, n. 4, p-353-366, 1965.

DAL'FORNO, G. L.; AGUIRRE, A. J.; HILLEBRAND; FERNANDO, L.; GREGÓRIO, F. V. Transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas no plano topográfico local pelos métodos da norma NBR 14166:1998 e o de rotações e translações. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO*, 3., 2010, Recife-PE. **Anais** [...]. Recife-PE: SBCGTG, 2010. p. 001-007.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por mínimos quadrados**. Curitiba, PR: Editora UFPR. 2002.

DENNIS, J. E.; SCHNABEL, R. B. **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**. 1. ed. Philadelphia: Prentice Hall, 1983.

EBNER, R.; FEATHERSTONE, W. E. How well can online GPS PPP post-processing services be used to establish geodetic survey control networks? **Journal of Applied Geodesy**, v. 2, p. 149-157, 2008. DOI 10.1515/JAG.2008.017. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/42427960\\_How\\_Well\\_Can\\_Online\\_GPS\\_PP\\_Post-processing\\_Services\\_be\\_Used\\_to\\_Establish\\_Geodetic\\_Survey\\_Control\\_Networks](https://www.researchgate.net/publication/42427960_How_Well_Can_Online_GPS_PP_Post-processing_Services_be_Used_to_Establish_Geodetic_Survey_Control_Networks). Acesso em: 18 out. 2017.

FRANCOIS, A. **Sistemas de coordenadas y transformaciones**. Bases para el trabajo en SIG. Uruguay: GeoConceptos, 2000. (Folheto Técnico, n. 2).

FEATHERSTONE, W. E.; CLAESSENS, S. J. Closed-form transformation between geodetic and ellipsoidal coordinates. **Study Geophysics Geodetics**, s. 2, n. 1. p. 01-18, 2008.

FOK, H. S.; IZ, H. B. A comparative analysis of the performance of iterative and non-iterative solutions to the cartesian to geodetic coordinate transformation. **Journal of Geospatial Engineering**, v. 5, n. 2, p. 61-74. 2003.

GARNÉS, S. J. A. **Ajustamento paramétrico por Mínimos Quadrados com análise na estabilidade da solução**. 1996. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1996.

GARNÉS, S. J. A.; SAMPAIO, R. J. B. de.; DALMOLIN, Q. Ajustamento paramétrico por mínimos quadrados com análise na estabilidade da solução. **Boletim de Ciências Geodésicas**, Curitiba, v. 2, p. 3-11, 1997.

GARNÉS, S. J. A.; DALMOLIN, Q. Trilateração em redes topográficas: solução do problema linear por ajustamento livre. **Cartografia e Cadastro**, Lisboa, n.9, 1998.

GARNÉS, S. J. A. Sistema de Projeção e Orientação das Plantas Topográficas. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CADASTRO TÉCNICO MULTIFINALITÁRIO*, 1998, Florianópolis-SC. **Anais** [...]. Florianópolis-SC: COBRAC, 1998.

GARNÉS, S. J. A. **Resolução das ambiguidades GPS para linhas de base curta: análise dos algoritmos de otimização**. 2001. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR, 2001.

GARNÉS, S. J. A.; SIQUEIRA, V.P.; CACHO, J.P. Definição para implantação do sistema topográfico local de Campo Grande-MS e análise das fórmulas da NBR-14.166. *In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS*, 4., 2005, Curitiba-PR. **Anais** [...]. Curitiba-PR: CBCG, 2005.

GARNÉS, S. J. A. **Software ASTGEOTOP**, projetado para Windows 8, versão 2017: processamentos modelo Geoidal de Recife. Corporação da UFPE, 2017.

GARNÉS, S. J. A. **Software ASTGEOTOP**, projetado para Windows 8, versão 2019: processamento no módulo de transformação de coordenadas. UFPE – Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Cartográfica e de Agrimensura, 2019.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. 1. ed. Curitiba, PR: Editora da UFPR, 1994. 319p.

GEMAEL, C.; MACHADO, A. M. L.; WANDRESEN, R. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. 2. ed. Curitiba, PR: Editora UFPR, 2015. 430 p.

GERDAN, G. P.; DEAKIN, R. E. Transforming Cartesian coordinates X,Y,Z to Geographical coordinates  $\phi$ ,  $\lambda$ , h. **The Australian Surveyor**, v. 44, n. 1, p. 55-63. 1999.

GRINTER, T. & ROBERTS, C. Precise Point Positioning: Where are we now? *In: SYMPOSIUM INTERNATIONAL GLOBAL NAVIGATION SATELLITE SYSTEMS SOCIETY*, 2011, Sydney, Australia. **Proceedings** [...]. Sydney, Australia, IGNS, 2011. p. 15–17.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. USA: W. H. Freeman and Company, 1967.

HUBER, K.; HEUBERGER, F.; ABART, C.; KARABATIC, A.; WEBER R. & BERGLEZ, P. PPP: Precise Point Positioning – Constraints and Opportunities. *In: FIG CONGRESS 2010. Facing the Challenges – Building the Capacity*, 2010, Sydney, Australia. **Proceedings** [...]. Sydney, AUS: FIG, 2010.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Ajustamento da rede planimétrica do sistema geodésico brasileiro**. Rio de Janeiro: IBGE, 1996. 95 p.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Proposta preliminar para a adoção de um referencial geocêntrico no Brasil**. Rio de Janeiro: IBGE, 2000. 28 p.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Altera a caracterização do sistema geodésico brasileiro**. Rio de Janeiro: IBGE, 2005. 8 p.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Histórico do sistema geodésico brasileiro pelo IBGE**. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/institucional/o-ibge.html>. Acesso em: 30 set. 2018.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Sistema geodésico brasileiro: rede planimétrica**. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: <https://ww2.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/planimetrica.shtm>. Acesso em: 27 jan. 2018.

INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA. **Norma técnica para georreferenciamento de imóveis rurais**. 3. ed. Rio de Janeiro: INCRA, 2013.

KING, M.; EDWARDS, S. & CLARKE, P. Precise Point Positioning: Breaking the Monopoly of Relative GPS Processing. **Engineering Surveying Showcase: GPS techniques**, 2002.

KLEIN, I.; GUZATTO, M. P. **Ajustamento de Observações e Redes: Topografia e Agrimensura para Cursos Técnicos**. 1. ed. Florianópolis, SC: IFSC. 2018. 74 p.

LAWSON, C. L.; HANSON, R. J. **Solving least squares problems**. 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1974. 340 p.

LEICK, A.; RAPOPORT, L.; TATARNIKOV, D. **GPS Satellite Surveying**. 4. ed. Hoboken, New Jersey and Canada: John Wiley & Sons, 2015. 836 p. ISBN: 978-1-118-67557-1

LIMA, D. F. V. **Desenvolvimento do modelo geoidal local de Recife com base em estruturas geodésicas altimétricas: RRNN e GNSS**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Cartográfica e Agrimensura) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

MENDONÇA, F. J. B.; GARNÉS, S. J. A.; PEREIRA, C. M.; NETO, J. A. B.; MELO, W. D. A. Análise do Ajustamento por Mínimos Quadrados de Uma Trilateração Topográfica com Injunções nos Planos UTM e Topocêntrico. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO*, 3., 2010, Recife. **Anais [...]**. Recife: SBCGTG, 2010. p. 001-009.

MELO, W. D. A. SOUZA, A. N.; SILVA, D. C. Utilização do programa Adjust em ajustamento e triangulações e trilaterações. *In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE*

CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO, 4., 2012, Recife. **Anais [...]**. Recife: SBCGTG, 2012.

MENZORI, M. **Georreferenciamento: conceitos**. 1. ed. São Paulo: Baraúna, 2017. 302 p.

MIKHAIL, E.; GRACIE, G. **Analysis and adjustment of survey measurements**. 1. ed. New York: Publish Company, Van Nostrand Reinhold Company, 1981. 340 p.

MIKHAIL, E.; ACKERMAN, F. **Observations and least squares**. 1. ed. Boston: Publish Company, Thomas Y. Crowell, Inc. 1976.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2008. p. 477.

MONICO, J. F. G. **Ajustamento e Análise Estatística de Observações Aplicados na Detecção de Deformações**. 1988. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1988.

MUNDOGEO – **Banco de Dados Geodésicos**. 2005. Disponível em: <https://mundogeo.com/blog/2005/09/27/banco-de-dados-geodesicos/>. Acesso em: 24 out. 2018.

MURPHY Jr., W. S.; HEREMAN, W. **Determination of a position in three dimensions using trilateration and approximate distances**. 1999

NADAL, C. A. **Sistemas de referência e tempo em geodésia**. Departamento de Geomática, Politécnico, Universidade Federal do Paraná. 2006.

NAVIDI, W.; MURPHY Jr., S. W.; HEREMAN, W. **Statistical methods in surveying by trilateration**. U.S. Army TRADOC Analysis Center – Monterey. Naval Postgraduate School. P.O. Box 8692. Monterey, CA, 1999.

OGUNDARE, J. O. **Understanding least squares estimation and geomatics data analysis**. 1. ed. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, 2018. 649 p. DOI:10.1002/9781119501459.

OZONE, M. I. Non-iterative solution of the  $\phi$  equation. **Surveying and mapping**, Austin-Texas, v. 45, n. 2, p. 169-171, 1985.

PACILÉO NETTO, N. **Calibração de medidores eletrônicos de distância, construção de uma base multipilar na USP e metodologia de aferição**. 1990. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1990. 187p.

PAUL, M. K. A Note on Computation of Geodetic Coordinates from Geocentric (Cartesian) Coordinates. **Bulletin Géodésique**, Paris, v. 108. p. 134-139. 1973.  
POPE, A. J. **The statistics of residuals and the detection of outliers**. 1. ed. Rockville-WA: National Ocean Survey, 1976. 136 p.

RECIFE. Prefeitura Municipal do Recife. **Sistema de informação geográfica (ESIG) do município de Recife/PE**. 2018. Disponível em: <http://www.recife.pe.gov.br/ESIG/> Acesso em: 27 jul. 2018.

RIZOS, C.; JANSSEN, V.; ROBERTS, C. & GRINTER, T. PPP versus DGNS. GNSS: Precise Point Positioning. **Geomatics World**. 2012.

SEEBER, G. **Satellite Geodesy**. 2. ed. New York: Walter de Gruyter, 2003. 613 p.

SEEMKOOEI, A. A. Comparison of different algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates. **Survey Review**. v. 36, n. 286, p.627-633. 2002.

SILVA, I. & SEGANTINE, P. C. L. **Topografia para engenharia: teoria e prática de geomática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015. 412 p.

SILVA, C. R. Proposta de um modelo para cálculo direto da latitude em função das coordenadas cartesianas. **Ciência e Natura**. v. 34. n. 2, p.193-209, 2013.

SOFAIR, I.A Method for Calculating Exact Geodetic Latitude and Altitude. **Naval Surface Warfare Center**, v. 85, 1993.

SOUZA, A. N.; GARNÉS S. J. A. G. & MARQUES, H. A. Avaliação do Posicionamento GNSS obtido pelos Métodos Cinemático RTK/NTRIP e PPP em Tempo Real. **Revista Brasileira de Cartografia**, n. 66/5, p. 1117-1133, 2014. ISSN: 1808-0936.

STIGLER, S. M. An Attack on Gauss, Published by Legendre In 1820. *In: Histoxa Mathematica*, n. 4, 1977, University Of Wisconsin, Madison. **Proceedings [...]**. University Of Wisconsin-Madison: HM, 1997. p. 31-35. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/82081443.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2018. UTC. 1977.

STIGLER, S. M. Gauss and the Invention of Least Squares. Institute of Mathematical Statistics. **The Annals of Statistics**, v. 9, n. 3, p. 465-474. 1981. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2240811>. Acesso em: 13 nov. 2018.

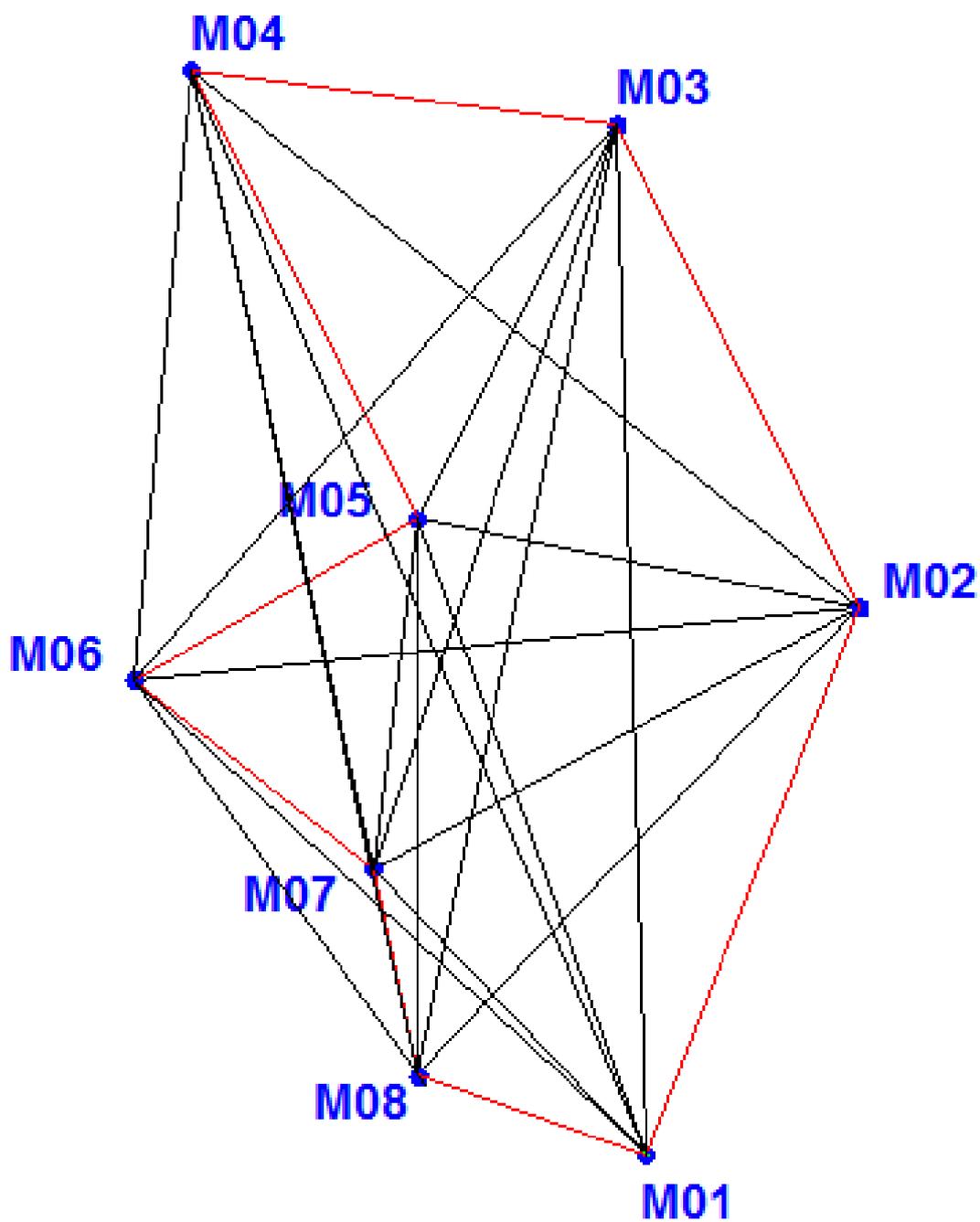
WOLF, P. R.; GHILANI, C. D. **Adjustment computations (statistics and least squares in surveying and gis)**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, INC., 1997. 564 p.

WOLF, P. R.; GHILANI, C. D. **Elementary surveying an introduction to geomatics**. 13. ed. New York: John Wiley & Sons, INC, 2017.

WOLF, P. R.; GHILANI, C. D. **Adjustment computations: spatial data analysis**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, INC. 2006. 611 p.

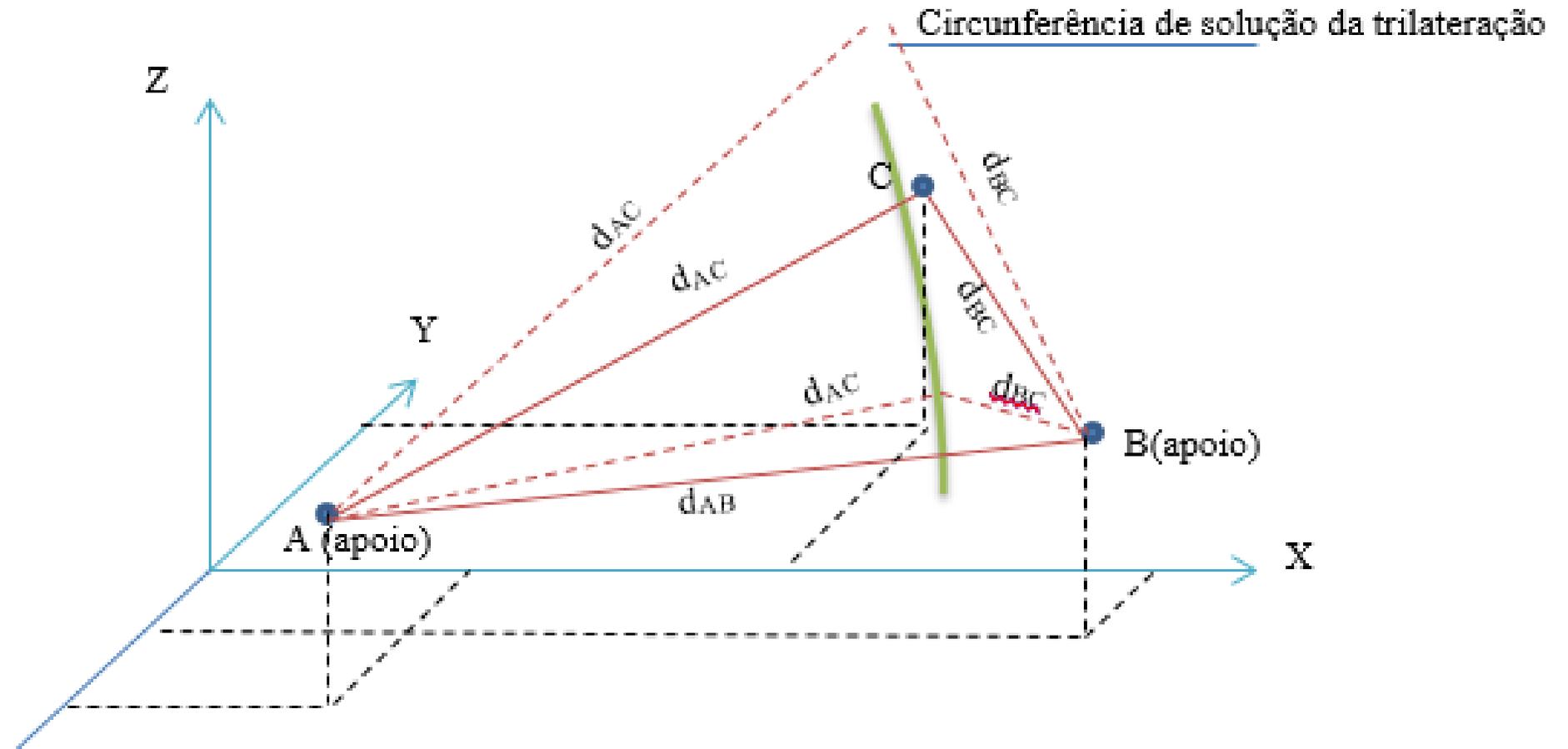
ZAKI, F.; KADY, M. E.; AHMED, M. A New Treatment for the Adjustment of Trilateration Networks. *In: CONGRESS, WASHINGTON. COMMISSION III*, 17., 1992, Washington. **Proceedings [...]**. Washington: CWC, 1992. p. 28-31.

APÊNDICE A - FIGURA QUE REPRESENTA A GEOMETRIA DA REDE DE  
TRILATERAÇÃO



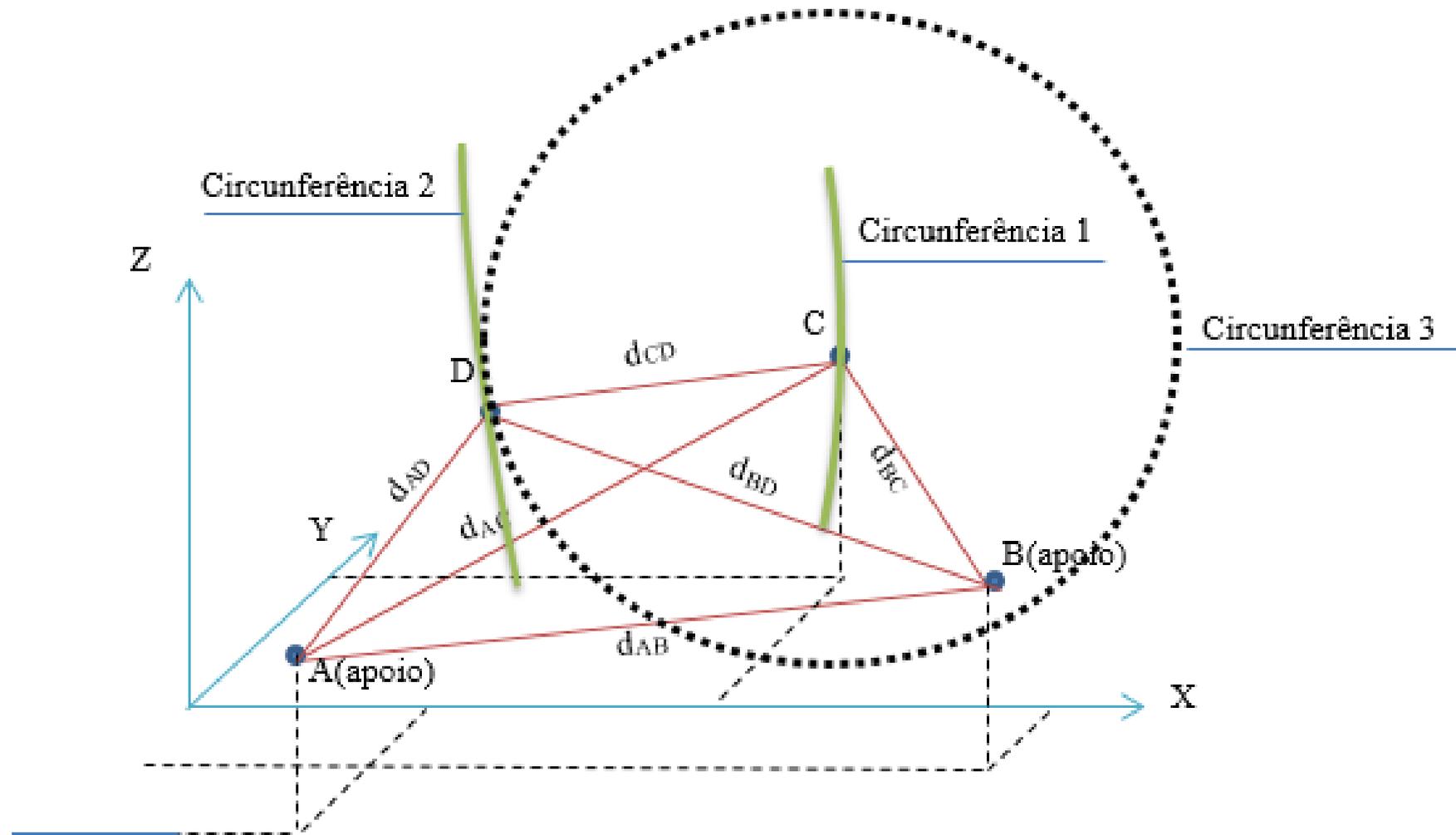
Fonte: O Autor (2019).

## APÊNDICE B - TRILATERAÇÃO EM 3D CONDIÇÕES INICIAIS NO TRIÂNGULO



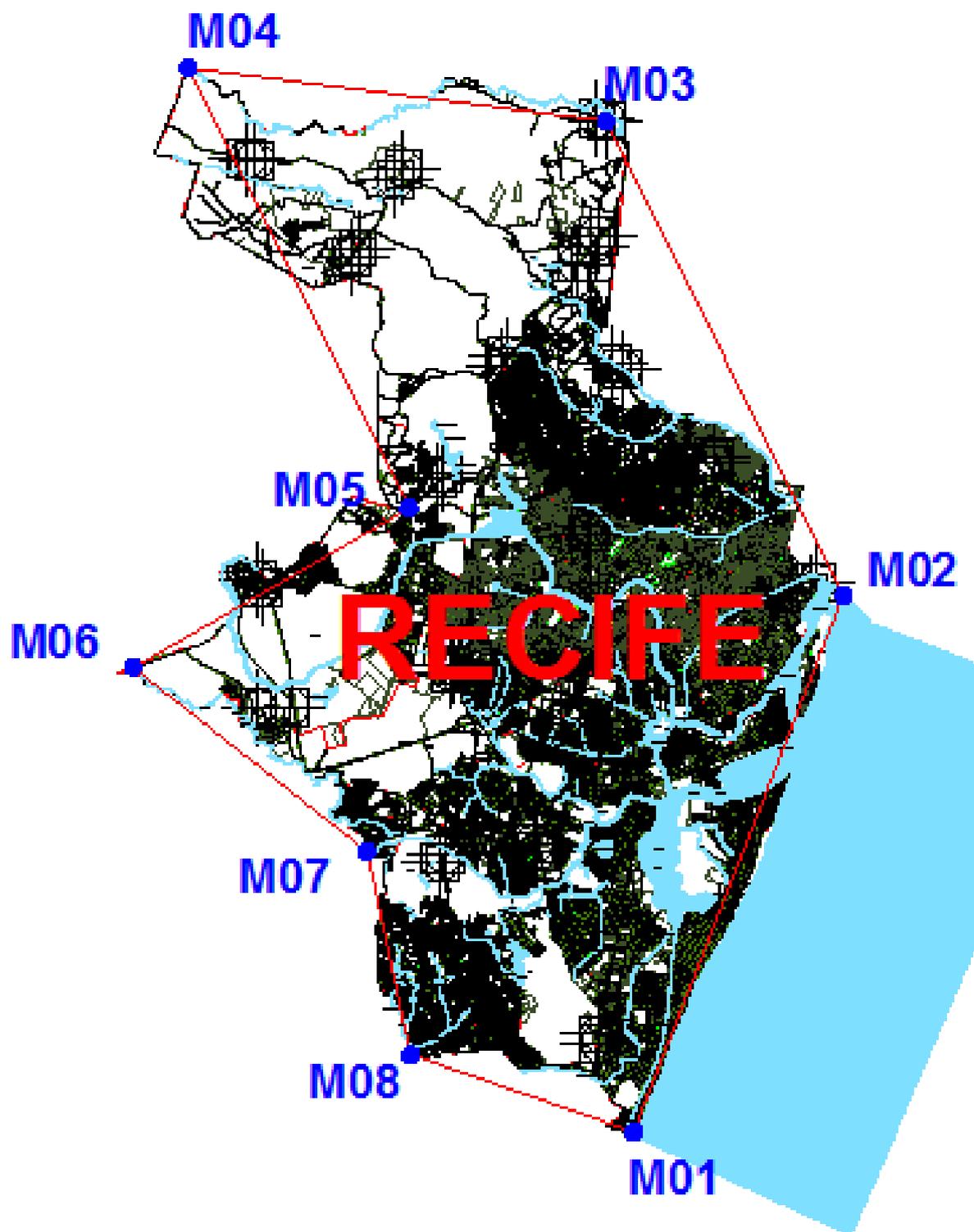
Fonte: O Autor (2019).

### APÊNDICE C - TRILATERAÇÃO EM 3D CONDIÇÕES INICIAIS NO QUADRILÁTERO



Fonte: O Autor (2019).

## ANEXO A - FIGURA OBTIDA DO ESIG



Fonte: ESIG Recife (2018).