UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO- UFPE

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

DOUTORADO EM ECONOMIA – PIMES

TESE DE DOUTORADO

“UM ESTUDO DE EFICIÊNCIA DE MERCADO USANDO SÉRIES TEMPORAIS COM DIFERENCIAÇÃO FRACIONÁRIA: O CASO DE COMMODITIES AGRÍCOLAS ”

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Chaves Lima

Aluno: Sylvio José Pereira dos Santos

Recife, 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO- UFPE

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

DOUTORADO EM ECONOMIA – PIMES

TESE DE DOUTORADO

“UM ESTUDO DE EFICIÊNCIA DE MERCADO USANDO SÉRIES TEMPORAIS COM DIFERENCIAÇÃO FRACIONÁRIA: O CASO DE COMMODITIES AGRÍCOLAS ”

Tese Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Economia – PIMES – da Universidade Federal de Pernambuco, como Requisito para Obtenção do Título de Doutor em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Chaves Lima

Aluno: Sylvio José Pereira dos Santos

Recife, 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - UFPE

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

DOUTORADO EM ECONOMIA – PIMES

TESE DE DOUTORADO

“UM ESTUDO DE EFICIÊNCIA DE MERCADO USANDO SÉRIES TEMPORAIS COM DIFERENCIAÇÃO FRACIONÁRIA: O CASO DE COMMODITIES AGRÍCOLAS ”

TESE APROVADA EM 10 / 03 / 2003

Aluno: Sylvio José Pereira dos Santos

BANCA EXAMINADORA

PhD Ricardo Chaves Lima – Orientador

PhD. Francisco Cribari Neto – Examinador Externo

Dr. Sinézio Fernandes Maia - Examinador Externo

PhD. Ana Catarina T. de N. Campelo – Examinador Interno

Dr. Herminio Ramos de Souza – Examinador Interno

A Idalina, minha companheira Luso Brasileira
de muitas jornadas e belas andanças.
Minha companhia por este e pelos próximos caminhos.

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, corroboraram para a realização desta Tese de Doutorado, especialmente ao meu orientador Professor Ph.D Ricardo Chaves Lima, pela competência e estímulo durante a elaboração deste trabalho.

Gostaria, também, de agradecer aos professores do Departamento de Economia, pelas valiosas contribuições para o desenvolvimento desta dissertação; aos colegas do curso de Doutorado em Economia da UFPE; e aos funcionários do PIMES.

Sou grato aos professores, funcionários e alunos do Departamento de Estatística por compartilharem o cotidiano desse período quase interminável de pesquisa.

Quero destacar o apoio principalmente da " colega de todas as horas " Profa. Dra Maria Cristina Falcão Raposo pelos préstimos inestimáveis e pela ajuda recebida do Prof. Ph.D Francisco Cribari Neto, do Prof. Ph.D Isaac de Melo Xavier Junior, da Profa. Dra Viviana Giampaoli, da Profa Dra Cláudia Regina Oliveira de Paiva Lima e do Prof. Dr Manuel Raimundo de Sena Junior.

À Gilvani S. Holanda pela paciência em digitar e corrigir este texto.

À minha querida Ida, pela paciência e compreensão e a quem dedico esta pesquisa.

Por fim, a certeza de que o silêncio não é mais necessário. Já é possível cantar o canto de todos. A nova música, ainda inacabada, começa a soar belas melodias.

" Navegar é preciso viver não é preciso ... "

R E S U M O

O principal objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento metodológico para examinar a hipótese de que uma série temporal tenha sido gerada por um processo com integração fracionária, procurando explicar algumas pecularieddades de séries financeiras que não são ajustadas por modelos univariados clássicos.Como exemplo empírico foram analisadas as séries temporais dos retornos dos preços futuros das principais *commodities* agrícolas brasileiras (café, açúcar, soja, cacau, suco de laranja entre outras, que representam cerca de 20% do total das exportações). Os dados utilizados nesta pesquisa foram obtidos da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) e da Bolsa de New York. Pretendeu-se explicar o comportamento da evolução dos retornos destas *commodities* agrícolas levando em conta que esta categoria de processo estocástico não possui raiz unitária, apesar de apresentar alta persistência.

Procurou-se averiguar de que maneira estas variáveis podem ser explicadas por um processo ARFIMA, estimando sua ordem de integração através do método de regressão do periodograma. Procurou-se ainda examinar a hipótese de que os valores estimados para ordem de integração são estatisticamente menores do que a unidade. Isto pode indicar que o processo gerador dessas séries temporais têm integração fracionária, ou seja, apresenta longa persistência.

As séries disponíveis foram analisadas globalmente(todo período) e particionada em dois períodos e, após a análise dos diversos modelos ajustados podemos destacar as seguintes conclusões: o açúcar é um mercado eficiente nas duas Bolsas com exceção para o segundo período analisado no Brasil; o café é quase sempre não eficiente na Bolsa de New York e eficiente globalmente e no primeiro período da Bolsa da BMF; o milho é não eficiente nas duas Bolsas em todos os períodos; o cacau da Bolsa de New York é eficiente em todos os períodos; o trigo é não eficiente na Bolsa de New York.

ABSTRACT

The objective this work is presenting a methodological procedure to examine the hypothesis that a time series was generated by a process with fractionally integration, in order to explain some peculiarity of financial time series that do not fit the classical univariate models. We analyzed the time series of return of future price of agriculture commodities. The data utilized in this investigation was obtained the "Bolsa de Mercadorias e Futuros" (BMF) - Brazil, and the New York stock exchange We explained the performance of the evolution of returns this commodities to take into account that this category of stochastic process has not an unit root, in spite of their low persistence. We estimating ARFIMA their integration order using the regression method of periodogram. We examined the hypothesis that the estimated values of integration order are smaller than unity. Because this fact may be indicated that the process that generated of time series has fractionally integration. The available series were analyzed in overall form and divided in two periods. The conclusions was obtained from the analysis of different models. Amongst the main conclusions, we emphasized that the sugar is an efficient market in these two stock exchange with the exception for second period analyzed in Brazil. The coffee is not always efficient in the stock exchange of New York but is efficient in overall form and in the first period of BMF. The corn is not efficient market in the two in all periods. The cacao is an efficient market in the stock exchange New York in all periods. The wheat is not efficient in the stock exchange of New York.

Í N D I C E

Introdução

Esta tese tem como intuito o de apresentar um procedimento metodológico (Modelo ARFIMA) para examinar a hipótese de que uma série temporal tenha sido gerada por um processo de integração fracionária. Para tanto analisamos as séries temporais dos retornos dos preços das principais commodities agrícolas: café, açúcar, soja em grão, farelo de soja, cacau, álcool, milho, suco de laranja, trigo, algodão.

Usamos os dados obtidos nas bolsas de Mercadoria e Futuro (BM&F) e de New York. O suporte computacional foi o software WINRATS.

Para elaboração desta pesquisa procuramos identificar o processo gerador das séries temporais que possui integração fracionária, ou seja, que apresente longa dependência ou não. Utilizando o Modelo ARFIMA buscamos provar se os mercados das commodities agrícolas são eficientes ou não.

Longa dependência pode ser definida, no domínio do tempo, como uma característica de uma série na qual as autocorrelações correspondentes a defasagens distantes não são desprezíveis e, no domínio da freqüência, como uma característica na qual a função espectral da série torna-se ilimitada para as freqüências perto de zero. Ou seja caracterizam-se por persistente dependência entre as observações ainda que distantes no tempo.

Estudos iniciais de séries com esta característica foram apresentados em 1951. Recentemente, os estudos de séries com memória longa são baseados no modelo ARIMA(p, d, q), o qual apresenta esta característica para valores não inteiros de d. Nesta situação, d torna-se um parâmetro desconhecido e então o modelo ARIMA(p, d, q) é referido como o modelo ARFIMA. A intenção é identificar, através de propriedades, características de uma série temporal com memória longa e avaliar estimadores do parâmetro d. Os modelos fracionários foram inicialmente investigados por Mandelbrot (1977), Granger e Joyeux (1980), Hosking

(1981) e Geweke e Porter-Hudak (1983).

A persistência de choques econômicos tem sido freqüentemente associada à presença de raiz unitária no processo gerador da série de tempo, ou seja, para que os choques sejam persistentes a série deve apresentar tendência estocástica.

Alta persistência e ausência de raiz unitária podem coexistir quando o processo gerador da série de tempo tem a característica de longa dependência. Além disso, os testes convencionais de raiz unitária podem confundir o pesquisador, pois têm baixa potência quando o processo é de memória longa.

O interesse pelos processos estocásticos que apresentam longa dependência ou memória longa surgiu na área de ciências geofísicas no início da década de 1950, com o trabalho pioneiro de Hurst sobre hidrologia. Somente na década 1980 esse tipo de processo passou a ser considerado em aplicações na área de Economia.

Muitas séries temporais macroeconômicas, financeiras e outras, tais como: taxa de inflação, taxa de câmbio, preços de contratos de mercadoria corrente (*commodity* futuro), preço do ouro, preço de mercadorias internacionais, preços de ações etc. apresentam persistência considerável.

Os testes de Dickey-Fuller e Phillips-Perron e suas generalizações têm sido largamente aplicados na economia para testar a hipótese de raiz unitária. A maioria desses estudos conclui que muitas séries cronológico-econômicas são bem descritas pelos processos ARIMA de baixa ordem com uma única raiz unitária. Amplos estudos empreendidos por Nelson e Plosser (1982) e Schwert (1987) fazem uso de uma variedade de testes de raiz unitária em diversas variáveis econômicas e encontram rejeição à existência de raízes unitárias. Portanto, a suposição de uma ordem integrada I(1) é arbitrária e pouco consistente. Um exemplo disto é a série da taxa de inflação, que não é um processo estacionário ARMA e nem tão pouco um processo integrado de ordem 1; e sim um modelo com diferenciação fracionária entre zero e um.

A dependência de longo prazo nesses modelos citados é capturado por um único parâmetro, chamado de parâmetro diferencial fracionário. Vários métodos são empregados para estimar d. O pioneiro destes métodos é o de regressão espectral proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). O aspecto atrativo destas metodologias é que se pode estimar o parâmetro diferencial fracionário (d) sem a especificação completa do modelo da série temporal ARIMA (Box-Jenkins).

Diversos pesquisadores têm mostrado a aplicabilidade desta metodologia em inúmeras situações econômicas. Podemos citar os seguintes: Barkoulas e Baum (1996), para preços de fundos de ações nos Estados Unidos; Barkoula, Labys e Onochie (1997) para preços futuros, Cheung (1993) para taxa de câmbio, Greene e Fielit (1997) para preços de fundos, Cheung e Lai (1993) para preços do ouro, Baum, Barkoulas e Mustala (1999) para taxa de inflação.

No estudo de análise de séries temporais, o ponto de partida para testar empiricamente a Hipótese de Mercados Eficientes é analisar a estrutura da memória dos retornos das ações. Isto explica por que trabalhos sobre memória da série e testes de não linearidade têm recentemente sido objeto de estudos científicos.

O início do estudo da existência de longa memória nos preços das ações foi baseado no trabalho de Mandelbrot (1965, 1972) que tratava do movimento Browniano fracionário e sua clássica estatística R/S. Diversos pesquisadores utilizaram ferramentas desenvolvidas por Mandelbrot e chegaram à surpreendente conclusão de que algumas séries cronológicas financeiras possuem estruturas de longa memória. Isto indicaria que os atuais movimentos no mercado financeiro associados aos preços de ações foram estocasticamente influenciados pelos dados mais remotos.

Duas técnicas podem ser utilizadas para checar esta suspeita. A primeira procura estimar o parâmetro de diferenciação fracionária d do modelo de longa memória ajustando diretamente os valores observados. A segunda propõe utilizar a estatística não paramétrica R/S na sua forma original e a sua versão modificada desenvolvida por Lo (1991).

Estes testes podem não rejeitar a hipótese nula de existência de curta ou longa memória no retorno dos preços das ações. Entretanto quando alteramos e analisamos o quadrado dos retornos, consistentemente encontramos longa memória na série, indicando a existência de persistência e de volatilidade no retorno dos preços das ações.

Esta análise ficou restrita a um particular tipo de estrutura linear para retorno dos preços das ações. Uma outra forma de trabalhar os dados é verificar de uma maneira geral a existência de uma estrutura não linear.

Nos últimos anos, o número de aplicações de técnicas não lineares em séries temporais para dados econométricos tem crescido substancialmente. Em particular, vale ressaltar que atualmente é comum assumir que os preços dos ativos possuem uma dinâmica não linear.

Brock, Hsiek e LeBaron (1991) e Hsiek (1991) descobriram e apresentaram de vários conjuntos de dados que possuem esta característica. Eles notaram que a existência da característica de não linearidade nos retornos dos preços das ações não é necessariamente incompatível com a Hipótese de Mercados Eficientes.

Uma importante característica das séries temporais financeiras observadas nos preços das ações é de que as distribuições de probabilidade das mesmas têm caudas pesadas, isto é, a série tem valores extremos com probabilidade diferente de zero e significativa. Esta característica poderia ser encontrada nos trabalhos iniciais de Mandelbrot, em 1963. Mesmo admitindo estabilidade para os modelos de séries cronológicas financeiras, ele constatou que a distribuição de probabilidade dos retornos apresenta uma curtose leptocúrtica. Entretanto, diversos autores interessados neste tema encontraram evidências de que alguns destes dados são caracterizados pela ausência de momentos condicionais, isto é, os momentos de ordens mais elevadas não são finitos (Loretan e Phillips, 1992).

Esta discussão mostra que algumas questões sobre robustez podem inferir sobre a descoberta de que os dados financeiros apresentam ou não linearidade. Pesquisadores, através de simulações, verificaram que a não linearidade pode ser aceita como uma conseqüência do fato de que alguns testes carecem de robustez, quando estão com valores cuja distribuição possui probabilidade significativa nas extremidades. Um dos testes utilizados é o BDS (Brock, Dechert, Scheinkman, 1987).

O presente estudo apresenta no Capítulo 1 uma descrição das *commodities* agrícolas brasileiras, o conceito de mercados eficientes, bem como uma introdução sobre os modelos ARFIMA; no Capítulo 2 é exposto um breve resumo dos modelos de Box-Jenkins ARIMA e da função espectral; no Capítulo seguinte são exibidas diversas características probabilísticas e fundamentos estatísticos para os modelos ARFIMA(p, d, q); no Capítulo 4 são enfocadas várias metodologias para estimar d, bem como teste de hipótese sob o parâmetro diferencial fracionário e um roteiro para estimar os parâmetros de uma série cronológica, no Capítulo 5 é feita a descrição dos dados e apresentada a metodologia sobre o teste de raiz unitária e a estimação do parâmetro fracionário d; no Capítulo 6 são exibidos os resultados dos ajustes dos modelos que indicaram quais commodities agrícolas são eficientes e finalmente no Capítulo 7 são apresentados as conclusões deste trabalho.

Chapter 1

Referencial Teórico

1.1 A Importância das *Commodities* Agrícolas na Exportação brasileira

Não se pode negar a importância das *commodities* na pauta de exportação brasileira. Embora apresentando uma trajetória descendente, as principais *commodities* ainda representam, aproximadamente, 20% das exportações brasileiras, tendo atingido seu ápice nos anos de 1970, quando representavam cerca de 70% das exportações.

A adoção, em janeiro de 1999, do regime de câmbio flutuante criou a expectativa de uma melhoria na balança comercial brasileira, devido ao aumento das exportações e à queda das importações. Contudo, alguns especialistas tendem a afirmar que esta recuperação do saldo comercial não se dará, principalmente, pelo efeito das *commodities* sobre a exportação, já que seus preços vêm caindo no mercado internacional, atingindo um patamar de 30% nos últimos 12 meses.

Não só a participação das *commodities* na pauta exportadora tem mudado nos últimos tempos, mas também sua importância. Como mostra a Tabela 1, houve uma significativa redução da participação das *commodities* na exportação total, isto é passando de 42,43%

no período de 1973/79 para 18,90%. O café era a principal *commodity* exportada pelo país, representando 18,18% da pauta de exportações brasileiras no período 1977/79. Já na década de 1980, este produto passou a representar 9,5% das exportações totais, caindo para o segundo lugar, sendo ultrapassado pela soja, que passou a ser a principal *commodity*, de exportação brasileira, com 10% de participação nas exportações. Na década de 1990, o café voltou a cair de importância, com participação de 4,60% e, neste mesmo período, a soja manteve sua posição de liderança com 8,46% na exportação total.

Dentre os outros produtos, cabe realçar a queda da participação do cacau, que passou de 5,81% no período 1977/79 para 0,56% na década de 1990.

Tabela 1 - Participação das **Commodities** na Exportação Total brasileira

(Em %)

	1977/79	1980/89	1990/98
Soja	13,42	10,00	8,46
Cacau	5,81	2,39	0,56
Café	18,18	9,50	4,60
Suco de Laranja	1,98	3,11	2,76
Açúcar	3,04	2,48	2,52
Total	42,43	27,48	18,90

1.2 Um Breve Histórico do Mercado das *Commodities* brasileiras

Historicamente, as tendências da economia brasileira oscilaram em função dos ciclos da agricultura, tendo o cultivo do algodão, do cacau, da borracha e do café seguido a produção em larga escala da cana-de-açúcar.

Baseada inicialmente em grandes empreendimentos dedicados a um único produto de exportação e dependente do trabalho escravo para sua produção, desde os primeiros anos do período colonial, a agricultura tem tido papel fundamental na economia brasileira, constituindo, até a década de 1950 o principal elo de ligação do País com a economia mundial, como foi o caso do cultivo da cana-de-açúcar a partir do século XVI.

A partir de meados dos anos 1960, verificou-se o processo de modernização agrícola, que propiciou aumento geral da produtividade e do número de produtos agrícolas exportados. Na ocasião, a produção de soja superou a dos produtos agrícolas tradicionais do Brasil, como o café, o cacau e o açúcar. Graças aos incentivos do Governo em favor dos produtos processados sobre os não processados, aumentaram substancialmente o volume, o valor e a variedade dos produtos agrícolas semiprocessados e industrializados.

Nos anos 1980, a agricultura continuou a ter papel muito importante na economia do país. Mediante incentivos fiscais e facilidades especiais de crédito, o Governo Federal promoveu maior eficiência na produção agrícola, em especial na agricultura de exportação.

Recentemente, o setor agropecuário tem experimentado grandes mudanças. Em 20 anos, a agricultura brasileira praticamente dobrou a sua produção anual de grãos. Na década de 1980, a taxa anual de crescimento do setor agrícola, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), foi 3,4% contra 1,7% do setor industrial. Em 1996, a taxa de crescimento do setor agropecuário foi de 4,1%, e em 1997, de 1,9%. Em 1999, a safra de grãos foi de 82,6 milhões de toneladas, totalizando um volume de 9,9% superior ao observado no ano de 1998. Culturas voltadas eminentemente para o mercado externo, como a soja, a cana-de-açúcar e a laranja, apresentaram excelente desempenho em termos de rendimento por área plantada nos últimos tempos, tendo crescimento anual de preços em torno de 1,9% na última década. Foram desenvolvidos esforços para controlar o movimento dos habitantes do meio rural para as áreas urbanas, estender benefícios trabalhistas ao campo, estabelecer planos racionais de reforma agrária, estimular os pequenos empreendimentos até então não rentáveis e, de modo geral, melhorar a qualidade de vida em regiões afastadas dos grandes centros. Entre as culturas agrícolas de maior volume de produção estão as de arroz, feijão, milho, algodão e laranja.

Os vários programas empreendidos nas duas últimas décadas de 1980 e 1990, com vistas a diversificar as colheitas, trouxeram resultados surpreendentes. A produção de grãos cresceu consistentemente, incluindo as lavouras de trigo, arroz, milho e soja, chegando a 77,6 milhões de toneladas em 1997. Produtos do setor extrativista, como a borracha (que já foi elemento vital para as exportações brasileiras), assim como a castanha-do-pará, caju, ceras e fibras, passaram também a ser cultivados em plantações específicas. Dados de 1996 (FIPE) indicam ser o Brasil o maior produtor mundial de café, o segundo de feijão, o terceiro produtor de cana-de-açúcar e de milho e o quarto entre os produtores mundiais de cacau.

Graças ao clima variado, o Brasil produz todos os tipos de frutas, desde variedades tropicais do norte (inclusive abacates), até cítricos e uvas, cultivadas principalmente nas regiões mais temperadas do sul. Em 1996, a produção de laranjas cresceu 10,8%, atingindo 21.811 toneladas. Em 1997, o Brasil contribuiu com 32% para o total da produção mundial de laranjas, destacando-se como o maior produtor mundial dessa fruta.

Com produção da ordem de 91 milhões de toneladas/ano, os grãos soja, milho, arroz, trigo, feijão e cevada são largamente utilizados para o atendimento da demanda interna e, ainda, têm destinado seus excedentes à alimentação de rebanhos pecuários e à exportação.

Juntamente com a produção dos grãos, outros produtos agrícolas apresentam grande importância e se destacam na economia agrícola e agroindustrial brasileira, bem como nas exportações. Estes produtos, café, açúcar, suco de laranja e os derivados da soja (farelo de soja e óleo), são os principais produtos agrícolas de exportação do Brasil e representam, hoje, para sua balança comercial, mais de 10,5 bilhões de dólares/ano em ingressos de divisas.

De outra parte, em razão de seu grande mercado interno, mesmo sendo importante produtor de trigo, milho, arroz, cevada e malte, o Brasil os importa muito, chegando a mais de 1 milhão de dólares/ano seus gastos de divisas com estes produtos.

Milho (34 milhões de toneladas), soja (37 milhões de toneladas), arroz (10,3 milhões de toneladas), trigo (2,3 milhões de toneladas), cevada (150 mil toneladas) e feijão (3,2 milhões de toneladas) são as mais importantes produções de grãos da agricultura brasileira.

O milho, além de sua importante utilização para a alimentação da população, na forma de farinha, é muito utilizado na alimentação de rebanhos suínos, na avicultura e na pecuária leiteira. Como a produção brasileira, nos útimos anos, não tem sido suficiente para atender à totalidade da demanda, têm sido importadas cerca de 1,5 milhão de toneladas/ano. Em 2001, entretanto, houve grande produção de milho e ocorreu exportação de cerca de 1 milhão de toneladas do produto.

O complexo soja (grão - 9,4 milhões de toneladas, farelo - 11,5 milhões de toneladas e óleo - 1 milhão de toneladas) é um dos importantes responsáveis pelas exportações agrícolas brasileiras, representando mais de 4,15 bilhões de dólares/ano em divisas para o país.

Arroz e feijão são produtos que têm grande produção e consumo no Brasil. Suas produções, com freqüência são prejudicadas pelo clima, em alguns anos geram excedentes e em outros, déficits. Os déficits eventuais, que podem chegar a 1,5 milhão de toneladas no caso do arroz e, aproximadamente, 300 a 500 mil toneladas, no caso do feijão, são atendidos por importações.

Café e açúcar são produtos dos mais importantes e tradicionais das exportações brasileiras. Com produção superior a 30 milhões de sacas/ano e exportações de 1 milhão de toneladas/ano (2000), o café brasileiro é exportado para quase todos os países do mundo em suas várias formas.

O valor das exportações de café em grão representaram em 2000 mais de 1,76 bilhão de dólares em ingressos de divisas para o Brasil. Açúcar e álcool (obtidos a partir da cana-de-açúcar) são produtos cujas produções chegam a aproximados 10 milhões de toneladas/ano (açúcar) e 13 bilhões de litros/ano (álcool). O álcool, no Brasil, é largamente utilizado como combustível em sua frota de automóveis, sendo responsável por mais de 25% do abastecimento total. As exportações de açúcar em 2000 foram superiores a 4,7 milhões de toneladas e alcançaram 1,19 bilhão de dólares.

A indústria cafeeira e as de açúcar e de álcool são representadas por empresas e cooperativas de produtores, sendo responsáveis também pelo desenvolvimento de grande capacidade tecnológica. Por esta razão, o Brasil também é um exportador de projetos e de equipamentos nesta área.

O Brasil é um grande produtor e exportador mundial de suco de laranja (1,02 bilhão de dólares/ano). Praticamente 70% do mercado mundial de suco de laranja é abastecido com produtos de origem brasileira.

A indústria de sucos do Brasil localiza-se, em sua maioria próxima às regiões produtoras do país. Desta forma, a produção destes sucos encontra-se junto aos estados das regiões Sudeste, Norte e Nordeste do Brasil.

Atualmente, como já referido, a principal *commodity* de exportação brasileira é a soja. Até a segunda metade da década de 1960, o mercado de soja, que abrange grão, farelo e óleo, foi amplamente dominado pelos Estados Unidos, que produziam mais de 80% da soja mundial. Com o aumento das cotações internacionais, países como Brasil e Argentina passaram a exercer um importante papel nas exportações mundiais. Nos dias de hoje, o Brasil ocupa a segunda posição no mercado mundial da soja, com os Estados Unidos mantendo sua posição de liderança. Segundo o relatório anual do Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (Usda), a safra de 1998/99 norte-americana foi de 79,87 milhões de toneladas e a brasileira de 31 milhões.

O grão e o farelo da soja são utilizados em sistemas de criação, como ração para animais, em países desenvolvidos, tendo seu mercado caracterizado por uma demanda estável no tempo. O óleo de soja, ao contrário, tem como principais demandantes no mercado internacional as nações subdesenvolvidas, sendo usado como fonte energética e por isso apresenta demanda com maior instabilidade.

A soja brasileira passou durante a década de 1980 um período de crescimento do valor exportado, causado, dentre outros motivos, pela ocorrência de quebras de safra devido a razões climáticas, à adoção de cotas de exportação para manter a estabilidade interna de preços e ao declínio dos preços internacionais. Já o final da década de 1980 marcou uma recuperação no valor exportado com um aumento dos preços internacionais e o desenvolvimento de novas áreas de cultivo, principalmente no cerrado brasileiro.

Embora tenha caído de importância como *commodity* de exportação brasileira, o Brasil continua sendo o principal produtor mundial de café. A participação brasileira no mercado caiu de quase 50% em 1950 para menos de 30% nos dias atuais (27% em 1998). Durante a década de 1980, houve um declínio progressivo do valor exportado de café. O Acordo Internacional de Café (AIC) foi a principal causa desta queda, pois o estabelecimento de quotas para as exportações dos países signatários não permitiu que o Brasil pudesse aproveitar os períodos de alta no mercado internacional. Além disso, o Brasil foi cedendo ano a ano sua participação nas exportações mundiais, a fim de manter o acordo, que foi rompido em 1989; em conseqüência, na década de 90 observa-se uma recuperação da cultura cafeeira. Hoje, o Brasil tenta dar mais dinamismo à Organização Internacional de Comércio (OIC) com maior integração entre produtores e consumidores e entre o setor público e a iniciativa privada.

Dentre todas as *commodities* brasileiras, o cacau é a que apresentou a maior queda relativa no valor exportado nas últimas décadas. Desde 1985, observa-se que a cultura cacaueira passa por uma séria crise. São inúmeras as causas para o fato. Internamente, os cacaueiros do sul da Bahia, principal região produtora no país, foram assolados por pragas como "vassoura-de-bruxa" e "podridão-parda". O clima adverso no período 1986/89 provocou a queda da produção e o endividamento dos produtores. Externamente, houve uma queda dos preços internacionais devido ao excesso de oferta ocasionado pelo surgimento de novos países produtores, principalmente no Sudeste Asiático. Além disso, a estrutura do mercado internacional de cacau confere o mais alto grau de ciclos de baixa renda dentre todas as *commodities*.

O mercado internacional de açúcar apresenta algumas características diferentes dos outros produtos. Primeiramente, a maior volatilidade-preço dentre todas as *commodities*; além disso, uma grande dependência na produção e na comercialização com relação às políticas governamentais.

O açúcar produzido nos países desenvolvidos (em geral da beterraba) é fortemente subsidiado e sujeito a políticas protecionistas de controle de produção e preços. Por outro lado, a produção dos países em desenvolvimento (a partir da cana) em geral está sujeita à taxação doméstica, às BTN (Bônus do Teseoro Nacional) e às cotas tarifárias dos países desenvolvidos. Além disso, países como o Brasil regulam o mercado interno com o objetivo de incentivar as destilarias a preencherem suas cotas na produção de álcool destilado. A estrutura do mercado de açúcar inclui mercados controlados: os Acordos Internacionais do Açúcar (AIA), que visam à estabilidade de preços através da formação de estoques reguladores e fixação de cotas de exportação; os mercados preferenciais e garantidos; e o Mercado Livre Mundial, atualmente representando a maior parcela do mercado mundial. Por fim, não se deve desprezar o avanço dos adoçantes alternativos nos mercados desenvolvidos (a participação do açúcar neste mercado teria caído de 79% em 1970 para 41% em 1988).

O Brasil é o maior produtor mundial de cana-de-açúcar, contudo percebe-se que até 1992 houve uma queda do valor exportado de açúcar. A causa primordial foi o aumento da demanda por álcool combustível ocasionado pelo aumento do preço do petróleo, fazendo com que o governo estabelecesse cotas de produção e inúmeros subsídios para a produção de álcool em detrimento da produção açucareira. A partir de 1992, com a queda do preço do petróleo no mercado mundial, há uma recuperação da produção de açúcar. Observa-se que no período da safra 1991/92 a produção dividia-se em 72% para o álcool e 28% para o açúcar, já na safra 1996/97 passou a ser de 58% para o álcool e 42% para o açúcar

O mercado de suco de laranja brasileiro tem como característica básica estar voltado quase que exclusivamente para o mercado externo. O consumo de suco concentrado no mercado interno oscila de 5% a 10% da quantidade produzida. Atualmente, o Brasil é o maior supridor mundial de suco de laranja, sendo os Estados Unidos seu principal concorrente. Ao mesmo tempo, os Estados Unidos, junto com a Alemanha, são os principais importadores do suco brasileiro. Essa simultânea posição americana de concorrente e importadora de suco de laranja deve-se ao fato do produto brasileiro ser utilizado pelos Estados Unidos para mistura ou *blend* com seus produtos devido à alta relação *brix*/acidez total do nosso suco. A exportação brasileira de suco de laranja teve um salto significativo na década de 1970, atingindo um aumento de 143,3% no período 1970/75. A partir da década de 1980, as exportações passaram a ter comportamento oscilatório, sendo bastante dependentes das geadas no Estado americano da Flórida e das pressões dos agricultores americanos para adoção de um controle sobre o produto brasileiro.

1.3 Mercados Eficientes

A Hipótese da Eficiência do Mercado (HEM) é uma das teorias mais conhecidas e polêmicas de Finanças. Alguns pesquisadores defendem a HEM demonstrando com estudos práticos a veracidade da teoria. Por outro lado, outros pesquisadores, através de estudos empíricos, chegaram a resultados que contradizem ou invalidam a HEM.

A HEM, segundo Fama (1970, 1991), é aquela que afirma que os preços refletem todas as informações relevantes disponíveis sobre um determinado ativo. Portanto, o valor presente esperado da diferência entre a compra e venda de ativos a preços de mercado seria sempre nulo. Assim, de acordo com a HEM, não existe a possibilidade de lucros anormais, pois todas as informações relevantes referentes a este ativo estão refletidas no seu preço.

Por isso, profissionais e teóricos de todo o mundo vêm estudando o comportamento de ativos financeiros em busca de ganhos extraordinários que contradizem a HEM. Contudo, a dificuldade de se encontrar facilmente esses ganhos com base em dados passados e informações públicas fez com que cada vez mais estudos fossem realizadas no sentido de tentar validar ou contradizer a HEM.

Neste estudo, e à luz dos conceitos e de pesquisas realizadas, verificamos a aplicabilidade da HEM no mercado de *commodities* agrícola. Através de um estudo de evento foi examinada a hipótese da eficiência de mercado em sua forma semiforte.

A eficiência do mercado pode ser observada de três formas: fraca, semiforte e forte.

Na forma fraca, o preço reflete todas as informações passadas que são totalmente refletidas nos preços das ações, e é a forma menos exigente de eficiência.

Informações de cotações passadas são facilmente acessíveis; se fosse possível obter lucros apenas analisando preços passados, todos o fariam e esse ganho logo desapareceria (Ross et al., 1995, p.266).

Tomando como verdadeira a hipótese de eficiência fraca, evidencia-se a impossibilidade de se obter lucros através da análise de dados passados, desacreditando a análise técnica, muito difundida no mercado financeiro. O argumento dos analistas técnicos é que toda informação relevante para se prever um preço futuro está contida em dados passados.

Na eficiência semiforte, é englobada a forma fraca e as informações privadas disponíveis que tornaram-se públicas.

A análise fundamentalista, bastante disseminada no mercado, também não proporcionaria ganhos extraordinários a partir da análise de relatórios financeiros disponíveis.

Na forma forte, o preço refletirá além das formas fraca e semiforte, informações privadas, impossibilitando ganhos por *insider information*.

Em 1953, a Royal Statistical Society reuniu-se em Londres (Brealey e Myers; 1992, p.290) e Maurice Kendall, estatístico inglês, apresentou um estudo sobre o comportamento dos preços de ações e mercadorias. Kendall, em sua pesquisa, procurou identificar comportamentos cíclicos na seqüência de preços, contudo, segundo suas conclusões, cada série parecia estar errada, e era como se ao acaso um evento qualquer estivesse ocorrido durante um período de tempo e isto acrescentasse ao preço corrente para determinar o preço do período seguinte.

Para a maioria dos economistas da época, essa hipótese era estarrecedora. Não se podia aceitar que as variações de preços fossem totalmente independentes umas das outras. Contudo, através de simulação computacional ficou mais fácil conseguir evidências que comprovassem a teoria de Kendall, que daria início ao estudo da eficiência do mercado.

Um dos pioneiros do estudo da eficiência do mercado, Eugene Fama, nos anos 1970 afirmou que:

> *"Um mercado eficiente é definido como um mercado onde há um grande número de agentes racionais maximizadores de lucros competindo ativamente e tentando prever o valor futuro de mercado dos títulos individuais e onde informações importantes estão disponíveis para todos os participantes a um custo próximo de zero. Em um mercado eficiente, a competição entre muitos participantes racionais conduz a uma situação onde, em qualquer momento no tempo, os preços reais dos ativos individuais já refletem os efeitos de informações, tanto com base em eventos que já tenham ocorrido no passado como com base em eventos que o mercado espera que ocorram no futuro. Em outras palavras, em um mercado eficiente o preço de um ativo será uma boa estimativa do seu valor intrínseco em qualquer momento"* (Fama, 1995, p.34).

Pode-se dizer, sinteticamente, que um mercado eficiente é aquele que reflete nos preços dos ativos todas as informações disponíveis. Assim, como a informação se reflete imediatamente nos preços, os investidores só devem esperar obter uma taxa normal de retorno. A tomada de conhecimento da informação apenas no momento em que é divulgada não traz vantagem alguma para o investidor. O preço se ajusta antes que o investidor tenha tido tempo de comprar ou vender a ação. Por outro lado, as empresas devem esperar receber o valor justo pelos títulos vendidos. Justo quer dizer que o preço recebido pelos títulos emitidos é o valor presente nesses títulos. Portanto, não há, em mercados eficientes de capitais, oportunidades de financiamento que produzam valor em decorrência de se ter enganado os investidores (Ross et al., 1995, p.264).

Existem três ajustes possíveis para os preços diante de uma nova informação: a reação imediata, reação retardada e reação excessiva. A reação pode ser imediata, mostrando um mercado eficiente. Neste caso, o preço se ajusta imediatamente à nova informação, não ocorrendo nenhuma outra alteração no preço. Uma reação é retardada quando decorre um período até que o preço se ajuste à nova realidade. Por fim, uma reação excessiva é aquela que se corrige no decorrer dos dias. Pode-se dizer que as reações retardadas e excessivas representam um mercado ineficiente, pois abrem brechas para se auferir lucros até que o preço atinja o equilíbrio. Neste sentido, como foi visto, a informação pode afetar de maneira distinta o preço de um ativo.

A eficiência de um mercado pode ser dividida em três formas de acordo com a velocidade de reação dos preços às novas informações: fraca, semiforte e forte.

Com o objetivo de comprovar ou contradizer a HEM, muitos estudos foram feitos ao longo dos anos. Existem formas distintas de se verificar a existência da eficiência dos mercados em suas diferentes formas.

Na forma fraca, também conhecida como passeio aleatório, o preço futuro de um ativo está relacionado com os preços passados, como já referido. Existem várias maneiras de se comprovar a forma fraca de eficiência do mercado. A forma inicial é através da correlação serial (Ross et al., 1995, p.270), sendo feita a partir da comparação do retorno corrente de um título com um retorno posterior do mesmo título. Caso a correlação se aproxime de zero, é confirmada a hipótese de eficiência fraca de mercado, pois qualquer valor superior ou inferior a zero na correlação serial pode indicar uma tendência que pode possibilitar ganhos extraordinários.

A forma semiforte pode ser comprovada de duas formas: através da análise de eventos ou pelo desempenho dos fundos mútuos. Estudos de eventos são análises estatísticas que examinam se a divulgação de informações afetam os retornos de um determinado ativo. A outra maneira de se comprovar a forma semiforte é através da análise do retorno de fundos mútuos. Caso essa hipótese seja verdadeira, o retorno médio obtido pelos fundos deve ser igual ao de um investidor comum, independente da maneira utilizada para montar sua carteira. Assim, pode-se medir a eficiência semiforte comparando o retorno do mercado com a média dos retornos obtidos pelos fundos.

A forma forte de eficiência é a mais complexa. Os órgãos reguladores do mercado de diversos países possuem legislação que restringe o uso de informação privada por parte dos administradores das empresas. A SEC (*Securities and Exchange Comission*), órgão regulador dos EUA, obriga que os administradores informem os negócios efetuados com ações de sua empresa. Um estudo desses relatórios comprova a existência de ganhos extraordinários por parte dos administradores, contradizendo a hipótese de eficiência na forma forte (Ross et al., 1995, p.76).

Em 1907, o hidrologista britânico, H.E. Hurst, descobriu que duas enchentes ou secas consecutivas do rio Nilo seriam mais freqüentes do que deveriam (segundo as freqüências de cheias e secas únicas). A distribuição não seria normal, e sim leptocúrtica. Seus estudos deram origem ao chamado expoente de Hurst, que é simplesmente a probabilidade de um evento ser seguido por outro evento similar. Se seu valor é 0,5, o gráfico resulta na curva de Gauss. Se o valor for maior que 0,5, o gráfico é leptocúrtico e produzido por um processo com tendência de repetições, como uma moeda em que uma cara tende aparecer imediatamente depois de outra cara.

Da mesma forma que as cheias ou secas conjuntas do Nilo, os retornos dos mercados de capitais também apresentariam tendências de repetições. Após analisar o comportamento dos retornos do índice S&P 500 para períodos maiores que 20 dias e menores que 110 dias e entre os anos 1928 e 1989, Peters [1991, *apud* The Economist (1993)] detectou um coeficiente de Hurst aproximadamente igual a 0,8. Suas conclusões indicaram a possibilidade de previsibilidade dos mercados de capitais: retornos positivos tenderiam a ser seguidos por positivos, da mesma forma que retornos negativos tenderiam a ser seguidos por retornos negativos. A grande dificuldade estaria em estimar os períodos nos quais os eventos tenderiam a se repetir.

A razão para a existência de comportamentos caóticos nos mercados de capitais seria a própria psicologia dos investidores: muitos investidores esperariam até ver os preços dos ativos subindo para decidir comprá-los, como também esperariam até que começassem a cair para decidir vendê-los, em ambos os casos ajudariam a reforçar as tendências de alta e de baixa.

1.4 O Primeiro Exemplo de Persistência

O hidrologista Harol Edwin Hurst, como já citado anteriormente, estudou o primeiro exemplo histórico de uma série de dados reais (níveis do rio Nilo). Ele utilizou a chamada estatística R/S, ou de amplitude ajustada, definida a seguir.

Para as variáveis observadas $X_1, X_2, ..., X_n$ dos níveis de um rio em n anos sucessivos, a amplitude ajustada R é definida como

$$R(n) = \max_{0 \leq \ell \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} X_i - \ell\overline{X} \right\} - \min_{0 \leq \ell \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} X_i - \ell\overline{X} \right\} \tag{1.1}$$

onde S é o desvio padrão

$$S(n) = n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{1.2}$$

A estatística de Hurst é o quociente entre a amplitude de oscilação ajustada pela tendência e o desvio padrão:

$$Q(n) = \frac{R(n)}{S(n)} . \tag{1.3}$$

Hurst tirou médias da estatística R/S para diferentes pontos de partida nos seus estudos do rio Nilo e de outros rios e notou que essas médias oscilavam em torno de n^h com $h \simeq 0,74$. O parâmetro h veio a ser chamado de *expoente de Hurst* e o fato de se observar $h > 1/2$ para esses dados e para muitos outros, inclusive econômicos (Mandelbrot, 1983), tornou-se um fato surpreendente.

Para a classe de processos ARMA, veio a provar-se que $h = 1/2$ e para a classe de processos ARIMA, demonstrou-se que $h = 1$. Tendo-se encontrado séries longas de observações em que h não mostrava convergência para nenhum destes valores, tornava-se necessário criar modelos em que o expoente de Hurst pudesse tomar valores no intervalo $(1/2; 1)$.

Para solucionar este problema surgiu o trabalho de Benoit Mandelbrot que veio a ter grandes repercussões na teoria dos processos estocásticos (Mandelbrot, 1965). Nesse trabalho e em alguns outros que se seguiram (Mandelbrot e Van Ness, 1968), veio a ser definido o movimento browniano fracionário e o ruído gaussiano fracionário. Este último revelou propriedades intermediárias entre os processos ARMA e os processos não estacionários (Ver Reisen, V. e Crato, N.).

1.5 Características dos Processos Estacionários e Não Estacionários

Pretendemos explicar algumas peculiaridades de séries financeiras que não são bem descritos por modelos univariados de séries de tempo tradicionais (lineares e gaussianos com memória curta como o modelo ARMA) propagados por Box e Jenkins, 1970. As principais características dos processos estacionários podem ser explicadas pela presença de:

1.Conglomerados de valores extremos em séries financeiras comentada por Mandelbrot (1963), que levou ao desenvolvimento da teoria de modelos da família ARCH propostos por Robert Engle no final dos anos de 1970.

2.Assimetrias no comportamento de retornos de diversos ativos cuja percepção é atribuída a Black (1976).

3.Que modelos GARCH estimados, freqüentemente geravam estimativas dos parâmetros cuja soma é próxima da unidade sugerindo elevada persistência na volatilidade, estimulando a pesquisa de modelos de memória longa para proxies do risco em séries financeiras.

Para investigar esta última característica usamos modelos da classe ARFIMA, introduzidos por Granger e Joyeux (1980), às séries financeiras e *proxies* de suas volatilidades e tentamos avaliar os ganhos em termos de caracterização e previsão de médio prazo.

Este trabalho preocupa-se em explorar dois aspectos principais, um prático e outro teórico. O aspecto prático é a crescente demanda por métodos científicos para avaliar riscos no comportamento de mercados financeiros, tanto do ponto de vista microeconômico do investidor que queira manter uma posição de mercado compatível com o seu comportamento diante do risco e sua relação com o retorno esperado, quanto do ponto de vista macroeconômico de antecipar e evitar possíveis *crashes* que se propaguem com profundos efeitos adversos. Essas duas formas do controle de risco estão intrinsecamente associadas à teoria de previsão, na qual a análise univariada de séries de tempo pode e deve, a nosso ver, desempenhar importante papel. Com isto não queremos dizer que acreditamos que as características essenciais de alguma série estejam fundamentalmente associadas a um modelo univariado específico, mas tão somente que tal modelo univariado pode ser uma primeira aproximação que permita a investigação de características importantes e apresente desempenho preditivo satisfatório para uma futura generalização multivariada, ou seja, estamos supondo que em alguns casos a desconsideração da presença de memória longa ou não linearidade pode ser mais grave que a desconsideração do aspecto multivariado do processo gerador dos dados.

O aspecto formal associa a teoria de previsão à teoria de mercados eficientes e sua ligação com expectativas racionais. Em particular, modelos não lineares na média podem servir como indício contrário à hipótese de mercados eficientes se fornecerem previsões suficientemente melhores a ponto de permitirem gerar estratégias de investimento com desempenho superior a um elemento representativo do desempenho do mercado como um todo.

Para entendermos as características dos processos estacionários e não estacionários utilizamos como exemplo o ruído branco e o passeio aleatório.

O ruído branco, $\{\varepsilon_t\}$, consiste numa seqüência de variáveis não correlacionadas com $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$, variância constante $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ e $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$ para todo $k \neq 0$ é estacionário fracamente, e o passeio aleatório, $X_t = X_{t-1} + a_t$ torna-se estacionário na primeira diferença, são modelos importantes que esclarece características essenciais de uma classe muito vasta de processos. O conceito de estacionaridade aqui aplicado é, habitualmente, o de estacionaridade à segunda ordem (ou em covariância, ou fraca), que é o mais simples e mais importante na análise de séries temporais.

A série temporal é dita de segunda ordem se $E(X_t^2) < \infty$ para todo $t = 0, 1, 2, \cdots$ e

será chamada estacionária de segunda ordem se o primeiro e o segundo momentos forem independentes de t , ou seja: $E(X_t) = \mu$, $\forall t$ e
$\gamma_X(k) = Cov\,(X_t, X_{t+k}) = E\left\{[X_t - E(X_t)]\ [X_{t+k} - E\,(X_{t+k})]\right\} \forall k = 0, 1, 2, \cdots$ dependa de k.

A função de autocorrelação, ρ_k, de um ruído branco é nula para todas as ordens diferentes de zero e a densidade espectral do mesmo processo é constante, $f(w) = \sigma^2/2\pi$. A função de autocorrelação e a função espectral não existem num passeio aleatório, pois este processo não é estacionário, mas pode ser estimadas com base numa qualquer realização finita deste processo. O resultado de tal estimação é uma função de autocorrelação amostral que decai muito lentamente, tendendo para uma função constante à medida que o número de defasagens aumenta. A função de densidade espectral estimada, por seu turno, revela um alto valor com freqüência nula.

O passeio aleatório pode ser visto como resultante de aplicação ao processo de ruído branco a_t do filtro $(1 - B)^{-1}$. Por aplicação formal da teoria básica das funções de transferência, verifica-se que o espectro do processo aleatório tem a forma

$$
\begin{aligned}
& f_X(w) = \left|1 - e^{-iw}\right|^{-2} \frac{\sigma^2}{2\pi}\ ,\ -\pi \leq w \leq \pi\ , \\
& f_X(w) \to \infty \quad \text{quando } w \to 0
\end{aligned}
$$

A diferença entre ruído branco e passeio aleatório mostra o contraste mais geral entre os processos ARMA(p, q), estacionários e invertíveis, e os processos ARIMA(p, d, q), não estacionários, mas redutíveis a ARMA(p, q) após aplicação de transformações nos dados, por exemplo, $(1 - B)^d X_t$, $\ell n X_t$, $(1 - B)^d \ell n X_t$.

Os processos fracionariamente integrados generalizam os processos ARMA e ARIMA, pois mostram funções de autocorrelação que não decaem para zero de forma geométrica e evidenciam funções de densidade espectral que podem ser zeros e divergir na freqüência zero. Esta generalização é notável na medida em que essas características são alcançadas por processos estacionários e invertíveis.

Chapter 2

Modelos Univariados de Séries Temporais

2.1 Modelos Estacionários

Seja $\{X_t\}$ o modelo auto-regressivo de média móvel de ordem (p,q), ARMA (p,q) e seja $\{\varepsilon_t\}$, um processo ruído branco, não observado, consistindo de uma seqüência de variáveis não correlacionadas com $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$, variância constante $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ e $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$ para todo $k \neq 0$.

Então a série observada no tempo $\{X_t\}$ satisfaz à seguinte equação

$$\Phi_p(B)\,(X_t - \mu) = \Theta_q(B)\varepsilon_t \tag{2.1}$$

onde B é o operador de defasagem

$$BX_t = X_{t-1}\ ,\ \Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p \text{ e } \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\ .$$

Para $\{X_t\}$ ser invertível, as raízes da equação característica $\Theta_q(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, e para o processo ser estacionário, as raízes da equação característica

$\Phi_p(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário. (Assume-se que $\Phi_p(B) = 0$ e $\Theta_q(B) = 0$ não possuem raízes comuns).

Sendo $\{X_t\}$ estacionário e $\mu_\varepsilon = 0$, o valor esperado é

$$E(X_t) = \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

e a função de autocorrelação - FAC - satisfaz

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p} \ , \text{ ou } \Phi_p(B)\rho_k = 0 \ , \text{ para } k \geq q + 1 \ . \qquad (2.2)$$

A função de autocovariância é dada por

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{z\varepsilon}(k) - \theta_1 \gamma_{z\varepsilon}(k-1) - \ldots - \theta_q \gamma_{z\varepsilon}(k-q) \ , \ k \leq q \ , \qquad (2.3)$$

onde $\gamma_{z\varepsilon}(k) = E(\varepsilon_t z_{t-k}) = \begin{cases} 0 \ , & k > 0 \\ \neq 0 \ , & k \leq 0 \end{cases}$

O processo ARMA(p, q) estacionário tem função de autocorrelação que decai à medida que a ordem k aumenta. Mais precisamente, qualquer processo ARMA tem função de autocorrelação que é limitada por uma sucessão geométrica

$$|\rho(k)| \leq C r^k \to 0 \ , \text{ quando } k \to \infty, \text{ com } 0 < r < 1 \ . \qquad (2.4)$$

Este resultados citados acima podem ser vistos em Box e Jenkins (1976).

Função Autocorrelação Parcial-FACP-

A função de correlação parcial mede a relação existente entre X_t e X_{t+k}, quando se fixam as variáveis intermediárias $X_{t+1}, X_{t+2}, ..., X_{t+k-1}$. Seja a regressão linear múltipla de X_{t+k} sobre X_{t+k-1}, $X_{t+k-2}, ..., X_{t+1}, X_t$ dada por:

$$X_{t+k} = \phi_{k1} X_{t+k-1} + \phi_{k2} X_{t+k-2} + \cdots + \phi_{kk} X_t + \xi_{t+k} \ ,$$

onde ϕ_{kj}, $j = 1, 2, ..., k$ são os coeficientes de regressão e ξ_{t+k} o erro não correlacionado com X_{t+k-j} para $j \geq 1$. O coeficiente ϕ_{kk} exprime a variação em X_{t+k} que acompanha em média uma variação unitária em X_t, quando $X_{t+1}, X_{t+2}, ..., X_{t+k-1}$ permanecem constantes; como as variáveis estão, por hipótese, estandardizadas, tal variação pode ser interpretada como a correlação parcial entre X_t e X_{t+k}

Sabe-se que

$$
\begin{aligned}
\rho_j &= \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k} \ , \ j = 1, ..., k \ , \\
\rho_1 &= \phi_{k1} + \phi_{k2}\ \rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\
\rho_2 &= \phi_{k1}\ \rho_1 + \phi_{k2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\
&\ \ \vdots \\
\rho_k &= \phi_{k1}\ \rho_{k-1} + \phi_{k2}\ \rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk} \\
\rho &= \underset{\sim}{P}\ \phi_{kk}
\end{aligned}
$$

a partir de onde obtemos as equações de Yule-Walker:

Logo;

$$\phi_{kk} = \frac{\left| \underset{\sim}{P_k^*} \right|}{\left| \underset{\sim}{P_k} \right|} \ ,$$

onde $\underset{\sim}{P_k}$ é a matriz de autocorrelação e $\underset{\sim}{P_k^*}$ é a matriz $\underset{\sim}{P_k}$ com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações.

i) um processo AR(p) tem FACP $\phi_{kk} \neq 0$, para $k \leq p$ e $\phi_{kk} = 0$, para $k > p$;

ii) um processo MA(q) a FAC $\neq 0$, para $k \leq q$ e é zero, para $k > q$;

iii) a FAC de um ruído branco é nula para qualquer defasagem

O Modelo AR(p)

O modelo auto-regressivo de ordem p, AR(p), pode ser escrito como

$$\Phi_p(B)X_t = \mu + \varepsilon_t \ , \quad \text{onde } \Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p \ . \tag{2.5}$$

O modelo AR(p) é sempre invertível. Para ser estacionário, as raízes de $\Phi_p(B)$=0 devem estar fora do círculo unitário.

Este processo tem o seu valor esperado dado por:

$$E(X_t) = \frac{\mu}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

e a sua variância é dada por:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i^2}$$

O que caracteriza o modelo AR(p) é que a função de autocorrelação parcial ϕ_{kk} é igual a zero para valores de k maiores do que p. No modelo AR (p) temos as equações de Yule-Walker, que nos permitem estimar os coeficientes $\phi_1, \ldots, \phi_p$, dados por

$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

O Processo MA(q)

O processo de média móvel de ordem q, MA(q), é da forma

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \ . \tag{2.6}$$

Um processo MA é sempre estacionário. Para ser invertível, as raízes de $\Theta_q(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.

O valor esperado é dado por $E(X_t) = \mu$, e a variância por:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2 \qquad \text{com} \qquad \theta_0 = 1 \ . \tag{2.7}$$

A função de autocovariância é dada por

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \left(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q\right) , & k = 1, 2, \ldots, q, \\ 0 , & k > q, \end{cases} \tag{2.8}$$

e a função de autocorrelação é

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} , & k = 1, 2, \ldots, q, \\ \\ 0 , & k > q, \end{cases} \tag{2.9}$$

2.2 Processo Linear Geral

Um processo$\{X_t\}$ é dito ser processo linear geral se puder ser representado por uma combinação linear do ruído branco $\{\varepsilon_t\}$, isto é, se X_t puder ser escrito da forma

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} , \tag{2.10}$$

onde $\{\psi_j\}$ é uma seqüência de constantes satisfazendo $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.

Pode ser mostrado que para o processo linear geral que:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= 0 , \quad Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty , \\ \gamma_k &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k} , \quad \text{e} \quad \rho_k = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i^2} , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.11}$$

A função de autocovariância para um processo linear geral é finita para cada k e expresso por:

$$|\gamma_k| = |E(X_t X_{t+k})| \leq \left[var(X_t) var(X_{t+k})\right]^{1/2} = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 .$$

2.3 Processo ARIMA(p, d, q)

$\{X_t\}$ é um processo auto-regressivo integrado de média móvel se a transformação $\nabla^d X_t, d \geq 1$ e $\nabla = 1 - B$ resultar em um processo ARMA. O modelo é expresso na forma

$$\Phi_p(B)\ (1 - B)^d (X_t - \mu) = \Theta_q(B)\varepsilon_t, \tag{2.12}$$

onde $\Phi_p(B)$ e $\Theta_q(B)$ são polinômios estacionários e invertíveis do modelo ARMA(p, q) e d é um inteiro maior ou igual a 1.

O processo ARIMA(p, d, q) é escrito na seguinte forma:

$$\Phi_p(B) U_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t, \tag{2.13}$$

onde $U_t = (1 - B)^d (X_t - \mu)$ é o processo estacionário ARMA (p, q).

2.4 Processo Estacionário no Domínio da Freqüência

Se $\{X_t\}$ é um processo estacionário com as autocovariâncias, γ_k, absolutamente convergentes, isto é, $\sum_k |\gamma_k| < \infty$. A função espectral de $\{X_t\}$ é dada por

$$f_X(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-iwk} = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k cos(wk) \right]\ ,\ w \in [-\pi, \pi], \tag{2.14}$$

onde são consideradas as propriedades $\gamma_k = \gamma_{-k}$; $sen(-wk) = -sen(wk)$; $cos(-wk) = cos(wk)$; $e^{-iwk} = cos(wk)$ - $i\ sen(wk)$; $e^{-iwk} + e^{iwk} = 2cos(wk)$.

$f(w)$ é uma função contínua real, $f(w) = f(-w)$, $f(w) \geq 0$, para todo w.

Função Espectral do Modelo ARMA

Seja $\{X_t\}$ uma série seguindo um processo ARMA(p,q) e $\{\varepsilon_t\}$ um processo ruído branco com média zero e variância σ_ε^2. A função espectral de $\{X_t\}$ é dada por

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\left|\frac{\Theta_q(e^{-iw})}{\Phi_p(e^{-iw})}\right|^2 \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \tag{2.15}$$

onde $\Phi_p(\cdot)$ e $\Theta_q(\cdot)$ são polinômios do processo ARMA(p,q):

$$\begin{aligned} \Theta_q(e^{-iw}) &= 1 - \theta_1\, e^{-iw} - \theta_2\, e^{-2iw} - \cdots - \theta_q\, e^{-qiw}, \\ \phi_p(e^{-iw}) &= 1 - \phi_1\, e^{-iw} - \phi_2\, e^{-2iw} - \cdots - \phi_p\, e^{-piw}, \\ |\phi(\cdot)|^2 &= \phi^2(\cdot)\ . \end{aligned}$$

Para um processo MA(1), a função espectral é dada por

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2-2\theta\cos w)}{2\pi}$$

e para um AR(1) $f_X(w)$ é especificada através da seguinte expressão:

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1+\phi^2-2\phi\cos w)}\ .$$

Como se admite tratar-se de processos ARMA estacionários e invertíveis, não existem raízes unitárias nesses polinômios, o que implica que o espectro $f_X(w)$ é finito e estritamente maior que zero na freqüência zero. Com efeito, $f_X(0) = 0$ implicaria a existência de uma raiz unitária no polinômio de médias móveis, indicando um processo não invertível enquanto $f_X(0) \to \infty$ implicaria a existência de uma raiz unitária no polinômio auto-regressivo, indicando um processo não estacionário. Estes resultdos podem ser encontrados no texto Time Series Analysis de Hamilton, J.

2.5 Processo Não Estacionário no Domínio da Freqüência

Seja $\{X_t\}$ um processo ARIMA(p, d, q). Se $d \neq 0$, a série $\{X_t\}$ é não estacionária e, estritamente dizendo, a mesma não possui espectro. Entretanto, o operador ∇^d aplicado ao modelo ARIMA poderá gerar uma transformação na função de densidade espectral de $f_X(w)$ gerando uma função espectral $f_{\nabla X}(w)$ dada pela seguinte expressão:

$$f_{\nabla X}(w) = f_X(w) \left|1 - e^{-iw}\right|^{2d} \ , \ w \neq 0 \ .$$

Se $\{X_t\}$ possui densidade espectral e se diferenciarmos d vezes a série temporal $\{X_t\}$, a expressão acima é rigorosamente correta. Um resultado simples de aplicação é utilizar a função de transferência $|\psi(e^{-iw})|^2$ sob o filtro $\psi(B) = (1-B)^d$, ou seja, $\psi(e^{-iw}) = (1-e^{-iw})^d$.

Considerando o caso onde $\{X_t\}$ é estacionário e com densidade espectral limitada, então para $w \simeq 0$ e $d > 0$ teremos

$$\begin{aligned} f_{\nabla X}(w) &\simeq f_X(0) \ \left|1 - e^{-iw}\right|^{2d} \simeq f_X(0)|w|^{2d} \simeq 0 \\ f_X(0) &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_X(k) + \gamma_X(0) \ ; \text{ pois } \gamma_X(k) = \gamma_X(-k). \end{aligned}$$

Dado o resultado $f_{\nabla X}(0) = 0$ num cenário de um modelo ARMA, somos obrigados a suspeitar que isto se deve a um excesso de diferenciação de série original. Excesso de diferenciação pode gerar um processo não invertível. Considerando a função de densidade espectral de um ARMA, teremos

$$f_{\nabla X}(w) = \frac{\sigma^2 \left|\theta(e^{-iw})\right|^2}{2\pi \left|\phi(e^{-iw})\right|^2}.$$

Se assumirmos que ∇X segue um modelo ARMA, a única possibilidade para que $f_{\nabla X}(0) = 0$ é o polinômio de média móvel $\theta(e^{-iw})$ ser igual a zero para $w = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \theta(e^{-iw}) &= 1 - \theta_1 \ e^{-iw} - \theta_2 \ e^{-2iw} - \cdots - \theta_q \ e^{-qiw}, \\ \theta(e^{-iw}) &= 0 \ \text{ quando } w = 0, \end{aligned}$$

implica que $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_q = 1$, o que é equivalente a $\theta(1) = 0$, ou seja, o polinômio $\theta(B)$ possui raiz da equação característica sob o círculo unitário, portanto o modelo não é invertível.

Se $f_X(w)$ não é limitada na origem, mas $f_{\nabla X}(0) = C > 0$, para alguma ordem de diferenciação, então temos o tradicional modelo ARIMA(p, d, q), com $d = 1, 2, 3, \cdots$. Mas se $f_X(w)$ não é limitada na origem e $f_{\nabla X}(0) = 0$, poderemos pensar em utilizar o operador $\nabla^d = (1 - B)^d$ para algum $d \in (0, 1)$, como uma alternativa de tornar a série $\nabla^d X_t$ estacionária. Hamilton, J. exibe estes resultados em Time Series Analysis.

2.6 Estimação da Função Espectral

Seguem-se dois estimadores da função espectral: a função periodograma e a função periodograma suavizada.

A Função Periodograma

Seja as n observações $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de um processo $\{X_t\}$, a função $I_X(w)$, denominada de periodograma, é defenida para todo $w \in [-\pi, \pi]$ por

$$I_X(w) = 2\left[R(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} R(k)cos(wk)\right] , \tag{2.16}$$

$R(k)$ sendo a função de autocovariância amostral do processo, dada por

$$R(k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-k}(X_i - \overline{X})\ (X_{i+k} - \overline{X}), k = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(n-1)$$

Seja

$$I'_X(w) = \frac{I_x(w)}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[R(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} R(k)cos(wk)\right] . \tag{2.17}$$

$I'_X(w)$ é o estimador "natural" da função $f_X(w)$. Temos

$$E[I'_X(w)] = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k cos(kw)\right] \rightarrow f_X(w) \ \text{ quando } n \rightarrow \infty .$$

$I'_X(w)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_X(w)$. Ver Box e Jenkins (1976).

Função Periodograma Suavizada

A função periodograma suavizada, denotada aqui por $f_s(w)$, é um estimador alternativo do espectro $f_X(w)$. A função é dada por

$$f_s(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) R(k) cos(kw) \ , \ w \in [-\pi, \pi], \tag{2.18}$$

onde $\lambda(k)$ é uma função real de ponderação conhecida como janela.

Chapter 3

Modelo ARFIMA(p, d, q)

3.1 Introdução

Os conceitos de integração fracionária e de derivação fracionária foram usados por Mandelbrot para criar processos em tempo contínuo de características anteriormente inexplicáveis pelos modelos existentes. De forma muito semelhante, Granger e Joyeux (1980) e, independentemente, Hosking (1981) criaram processos em tempo discreto com base na integração e diferenciação fracionárias.

A sua idéia é simples e pode ser assim explicada. Um passeio aleatório, por exemplo, transforma-se num ruído branco por aplicação de diferenciação de primeira ordem. Caso as diferenças fracionárias forem de ordem 1/2, por exemplo, dever-se-á encontrar um processo de características intermediárias entre a não estacionaridade e a estacionaridade.

Logo o modelo ARIMA (p, d, q) Auto-regressivo Integrado de Média Móvel é algumas vezes denominado como processo geral com diferenciação fracionária ARFIMA quando o parâmetro d (grau de diferenciação) assume valores não inteiros.

Seja $\{\varepsilon_t\}$ um processo ruído branco com $E(\varepsilon_t) = 0$ e $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$ e B o operador defasagem $BX_t = X_{t-1}$. Sejam $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$ polinômios de ordem p e q, respectivamente, onde $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ e $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$, com todas as raízes distintas das equações características $\Phi(B) = 0$ e $\Theta(B) = 0$ fora do círculo unitário. Seja

$$\Phi(B)(1-B)^d(X_t - \mu) = \Theta(B)\varepsilon_t, \tag{3.1}$$

onde d é o grau da diferenciação fracionária, com $d \in (-0,5; 0,5)$. Então $\{X_t\}$ é chamado de processo geral com diferenciação fracionária ARFIMA (p, d, q).

Quando $\Phi(B) = \Theta(B) = 1$, $\{X_t\}$ é definido como processo ruído branco com diferenciação fracionária e representado por

$$(1-B)^d(X_t - \mu) = \varepsilon_t \tag{3.2}$$

Hosking (1981, 1982, 1984) utiliza este modelo para analisar dados de séries hidrológicas. Juntamente com Granger e Joyeux (1980), ele foi o pioneiro nos estudos deste modelo.

A mais importante característica do modelo ARFIMA (p, d, q) é a propriedade de longa dependênca quando $d \in (0.0, 0.5)$ e curta dependência quando $d \in (-0.5, 0.0)$. Longa dependência (persistência) é caracterizada pela presença, na série, de uma significante dependência entre as observações, mesmo para defasagens distantes. Esta característica tem sido observada em séries de diferentes áreas de estudos, tais como meteorologia, astronomia, hidrologia e economia. Muitas referências podem ser encontradas em Sowell (1990).

No modelo ARFIMA (p, d, q), $d \in (-0.5, 0.5)$, as características de longa e curta dependência podem ser notadas pelo comportamento da função espectral e da função de autocorrelação.

O termo $(1-B)^d$, para $d \in R$, é definido como a expansão binomial,

$$\nabla^d = (1-B)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (-B)^k \,, \tag{3.3}$$

onde

$$\binom{d}{k} = \frac{d}{k} \, \frac{d-1}{k-1} \cdots \frac{d-k+1}{1} \,. \tag{3.4}$$

Procedendo exatamente da mesma forma como no desenvolvimento de uma série de Taylor de $(1-x)^d$ quando d não é inteiro, temos então

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k = 1 - dB - \frac{d(1-d)B^2}{2!} - \frac{d(1-d)(2-d)B^3}{3!} - \cdots,$$

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)B^k}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)}, \tag{3.5}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, ou seja, $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$, $p > 0$. $\Gamma(p) = p^{-1}\ \Gamma(p+1)$, $p < 0$, $p \neq -1, -2, -3, \ldots$. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\Gamma(p) = (p-1)!$, se p é inteiro, $\Gamma(p+1/2) = [(2p)!\sqrt{\pi}]\,/\,[p!\ 2^{2p}]$, $sen(\pi x) = \pi\ x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$. Ver Hamilton, J. em Time Series Analysis.

3.2 O Modelo ARIMA (p, d, q)

Teorema 3.1: (Hosking (1981)). Seja $\{X_t\}$ o modelo ARIMA (p, d, q) definido acima. Seja $d \in (-0.5, 0.5)$. Então:

a) $\{X_t\}$ é estacionário e invertível, com as representações infinitas de MA e AR dadas por

$$MA : X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k}\ ,\ AR : \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t\ , \tag{3.6}$$

respectivamente, onde ψ_k e π_k são coeficientes de B^k na expansão de

$$\Psi(B) = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}(1-B)^{-d} \text{ e } \Pi(B) = \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)}(1-B)^{d}\ .$$

Se $\{X_t\}$ é estacionário e invertível, temos:

b) Seja $U_t = (1-B)^d X_t$, então $\Phi(B)U_t = \Theta(B)\varepsilon_t$, logo U_t é ARMA (p, q) com densidade espectral $f_U(w)$ e função de autocovariância γ_k^U.

Seja

$$Y_t = \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)} X_t\ ,$$

então Y_t é ARIMA $(0, d, 0)$ com função espectral $f_Y(w)$ e covariância γ_k^Y mostradas por Hosking(1981). Esta demonstração pode ser vista em Reisen, V.(1994).

Então:

b.1) A densidade espectral $\{X_t\}$, $f_X(w)$, é dada por

$$\begin{aligned}
f_X(\omega) &= f_U(\omega)\,(2sen(\omega/2))^{-2d} = f_U(\omega)\left(4sen^2(\omega/2)\right)^{-d}, \\
f_X(\omega) &= \sigma_\varepsilon^2 \frac{\left|\Theta(e^{-i\omega})\right|^2}{2\pi\left|\Phi(e^{-i\omega})\right|^2}\left(4sen^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^{-d} , \\
f_X(\omega) &= \left|1 - e^{-i\omega}\right|^{-2d} \frac{\left|\theta(e^{-i\omega})\right|^2}{\left|\phi(e^{-i\omega})\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi} , \; -\pi \leq \omega \leq \pi \, .
\end{aligned}$$

Quando $w \to 0$, $\lim f_X(w) \simeq [\sigma^2/2\pi]\ [\theta(1)/\phi(1)]^2\, w^{-2d}$ e é finito.

$$f_X(w) \sim Cw^{-2d} \text{ , quando } w \to 0 \, . \tag{3.7}$$

Sendo assim, os processos ARFIMA estacionários, a densidade espectral diverge na freqüência zero quando $d > 0$ e é zero nessa mesma freqüência quando $d < 0$. O que é surpreendente é que essa divergência nas baixas freqüências, também chamada persistência, é obtida com um processo estacionário; o que era impossível no quadro dos modelos ARMA e ARIMA, e que um valor nulo na freqüência zero pode ser obtida por processos ARFIMA invertíveis, o que também era impossível no caso ARMA e ARIMA.

Enquanto a densidade espectral de processos ARFIMA é de fácil obtenção, a sua função de autocorrelação é de cálculo mais complexo. No entanto, pela transformada do espectro, verifica-se que ela decai hiperbolicamente e que se tem a seguinte relação assintótica:

$$\rho_X(k) \sim Ck^{2d-1} \text{ quando } k \to \infty \, , \tag{3.8}$$

onde C é uma constante diferente de zero. Ou seja $\rho_X(k)$ existe e é finito.

Sendo assim, os processos ARFIMA estacionários com $d \neq 0$ distinguem-se dos processos ARMA, pois o decaimento da sua função de autocorrelação não é dominado por nenhuma sucessão geométrica, o que significa que, dado qualquer ARFIMA e qualquer ARMA, a partir de certa ordem as autocorrelações do primeiro (ARFIMA) são maiores, em valor absoluto, que as do segundo (ARMA).

As condições (3.7) e (3.8) são equivalentes e definem a chamada *memória longa* ou persistência. Um processo tem memória longa se verificar (3.7) ou, equivalentemente, (3.8). Por vezes distinguem-se os casos de processos com $d > 0$, chamados *persistentes*, dos com $d < 0$, chamados *antipersistentes* ou de memória intermediária. Ou seja, se $-1/2 < d < 0$, o processo é antipersitente e se $0 < d < 1/2$, o processo é persistente. Para maiores detalhes ver Brockwell e Davis (1991).

b.2) Seja ρ_k^X a função de autocorrelação de $\{X_t\}$. Então, quando $k \to \infty$, $\lim k^{1-2d}\rho_k^X$ existe e é finito.

Pelo Teorema 3.1, pode-se deduzir casos particulares do modelo ARIMA (p, d, q), isto é, para os modelos ARIMA $(1, d, 0)$, ARIMA $(0, d, 1)$ e ARIMA $(0, d, 2)$, onde γ_k^Y e ρ_k^Y denotam as funções de autocovariância e autocorrelação do modelo ARIMA $(0, d, 0)$, e $F(\cdot)$ é a função hipergeométrica dada por

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{c\,1}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)1\;2}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)1\;2\;3}z^3 + \cdots \quad (3.9)$$

Se $d \in (0.0, 0.5)$, o processo tem a propriedade de longa dependência e exibe uma forte e positiva dependência entre as distantes observações. No domínio do tempo, as autocorrelações decaem lentamente de uma forma hiperbólica, isto é, $\rho_k \sim k^{-d}$, o oposto das autocorrelações produzidas pelo modelo ARMA (p, q), que têm decaimento exponencial, $\rho_k \sim a^k$, $0 < a < 1$. No domínio da freqüência, a função espectral tende a infinito quando a freqüência se aproxima de zero.

Se $d \in (-0.5, 0.0)$, o processo tem a propriedade de curta dependência. No domínio da freqüência, isto é indicado pelo comportamento da função espectral, que se aproxima de zero quando a freqüência também se aproxima de zero. No domínio do tempo, a função de autocorrelação poderá exibir dependências negativas entre observações distantes. Portanto, o tipo de dependência é essencialmente determinado pelo valor fracionário de d.

Segue um resumo de algumas das principais características do modelo ARIMA $(0, d, 0)$:

1) Para $d \in (-0.5; 0.5)$, $\{X_t\}$ é estacionário e invertível e os coeficientes de MA e AR decaem hiperbolicamente. $\sum_k \psi_k^2 < \infty$ e $\sum_k \pi_k^2 < \infty$, onde ψ_k e π_k são os coeficientes das representações infinitas de MA e AR.

2) Para $d \in (-0.5; 0.0)$ e $k > 0$, ρ_k é negativo e tende hiperbolicamente para zero. $\sum_k |\psi_k|$ é finito e $\sum_k |\pi_k|$ é infinito. A função de autocorrelação é absolutamente convergente, isto é, $\sum_k |\rho_k| < \infty$.

3) Para $d \in (0.0; 0.5)$ e $k > 0$, ρ_k é positivo e tende hiperbolicamente para zero de uma forma muito lenta. $\sum_k |\rho_k|$ é infinito e $\sum_k |\psi_k| \to \infty$ enquanto que $\sum_k |\pi_k| \to \infty$, $f_X(w) \to \infty$ quando $w \to 0$.

4) Se $d \in (0.5; 1.0)$, o processo deixa de ser estacionário porque sua variância não é finita, mas ele continua apresentando reversão à média. Estas observações podem ser encontradas em Reisen, V.(1994).

Assim sendo, a função de autocorrelação de uma série estacionária gerada por um processo ARFIMA pode exibir comportamento típico de séries não estacionárias, conduzindo à conclusão equivocada de que a série é integrada de ordem 1 $I(1)$ pelo simples fato de não ser integrada de ordem zero $I(0)$. Os modelos ARFIMA preenchem a lacuna que existe entre essas duas situações extremas. O valor da ordem de integração d passa agora a ser *estimado*.

Para concluir este terceiro capítulo apresentamos um teorema demonstrado por Hassler(1991) que será de fundamental importância no decorrer do texto.

Teorema 3.2: Os coeficientes da representação infinita MA do modelo ARIMA (p, d, q),

$$X_t = (1 - B)^{-d} \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t = \Psi(B) \varepsilon_t \ ,$$

decaem hiperbolicamente no sentido que para uma constante real b,

$$\psi_k \sim k^{d-1} \frac{b}{(d-1)!} \ , \ k \to \infty \ . \tag{3.10}$$

A prova do teorema 3.2 é dada por Hassler (1991).

Os coeficientes da representação infinita MA do modelo ARIMA (p, d, q) (teoremas 3.1 e 3.2) satisfazem à condição de que a soma dos quadrados dos coeficientes da representação infinita MA é finita. Portanto, tem-se o seguinte lema para o modelo ARIMA (p, d, q) quando $d \in (-0.5, 0.5)$.

Seja $\{X_t\}$ um processo ARIMA (p, d, q) quando $d \in (-0.5, 0.5)$, isto é, $\{X_t\}$ pode ser escrito da forma

$$X_t = (1-B)^{-d} \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t = \Psi(B) \varepsilon_t \ , \tag{3.11}$$

onde ε_t é um processo ruído branco. Então, $\{X_t\}$ é um processo linear geral e ψ_k é dado assintoticamente pelo teorema 3.2.

Chapter 4

Métodos de Estimação do Parâmetro d no Modelo ARFIMA

4.1 Introdução

Existem vários métodos para estimação do parâmetro d no modelo ARIMA (p, d, q). Apresentaremos alguns métodos e suas propriedades. Os comportamentos dos métodos aqui discutidos poderão ser avaliados através de resultados de simulação. Os métodos que serão estudados são:

- Método de regressão utilizando a função periodograma;
- Método de regressão utilizando a função periodograma suavizado;
- Método baseado no coeficiente de Hurst;
- Método de máxima verossimilhança.

O método de regressão usando a função de periodograma foi apresentado por Geweke e Porter-Hudak (1983). A função periodograma, entretanto, não é um estimador consistente da função espectral (Priestley, 1981). No método de regressão, Reisen (1994) propõe o uso da função periodograma suavizada, que é um estimador consistente da função espectral. O terceiro método apresentado aqui é o método do coeficiente de Hurst. Este método é baseado nos estudos de Hurst (1951, 1956), que recebeu seu nome, pois foi o pioneiro no assunto. Uma completa revisão do estudo de Hurst é dada por McLeod e Hipel (1978). Será também considerada a estimação do parâmetro d usando uma aproximação do método de máxima verossimilhança proposta por Whittle (1951).

O método da máxima verossimilhança (ML), tem sido bastante usado em trabalhos empíricos, mas por não ser o principal enfoque analítico desta tese, será apresentado de maneira simplificada. Este método apresenta uma complexidade associada à construção da função de verossimilhança e também no processo de avaliá-la repetidamente. Estas desvantagens são argumentadas nos trabalhos de McLeod e Hipel (1978) e Brockwell e Davis (1987). Em conseqüência destas desvantagens, alguns autores, tais como Brockwell e Davis (1987), Li e McLeod (1986) e Hosking (1984), sugerem uma aproximação da função de verossimilhança. Entretanto, Sowell (1990) argumenta que as desvantagens do método não têm fundamento. Ele deriva a função exata (não condicional) de verossimilhança para estimar d e a compara empiricamente com os métodos propostos por Fox e Taqqu (1986) e Geweke e Porter-Hudak (1983).

4.2 Método de Regressão

Seja $\{X_t\}$ um processo ARIMA (p, d, q), $d \in (-0.5, 0.5)$ representado por $(1-B)^d X_t = U_t$ onde $\Phi(B)U_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ é um modelo ARMA (p, q) e $\{\varepsilon_t\}$ é o processo ruído branco com média zero e variância σ_ε^2. A função espectral de $\{X_t\}$ é dada por

$$f_X(w) = f_U(w)\left(2sen(w/2)\right)^{-2d},\ w \in [-\pi, \pi]\ , \quad f_U(w) \text{ sendo a função espectral } U_t\ . \quad (4.1)$$

$$lnf_X(w) = lnf_U(w) - dln\left(2sen(w/2)\right)^2\ . \quad (4.2)$$

$$lnf_X(w) = lnf_U(0) - dln\left(2sen(w/2)\right)^2 + ln\{f_U(w)/f_U(0)\}\ . \tag{4.3}$$

Teorema 4.1: (Priestley 1981). Seja $\{X_t\}$ um processo linear geral onde os elementos da seqüência de variáveis $\{\varepsilon_t\}$ $\{t = 1, 2\ldots\}$ são independentes com $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$, $E(\varepsilon_t^4) < \infty$ e $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k|\ |k|^\delta < \infty$, $d > 0$. Então, a função periodograma $I_X^*(w_j)$ é dada por

$$I_X^*(w_j) = 2\pi f_X(w_j)\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} I_\varepsilon^*(w_j) + T_n(w_j)\ , \tag{4.4}$$

onde $E\left(|T_n(w_j)|^2\right) = O\left(\frac{1}{n^{2\delta}}\right)$ uniformemente em w e $I_\varepsilon^*(w_j)$ é o periodograma de $\{\varepsilon_t\}$;

Considera-se a freqüência $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, [n/2]$.

O teorema dado em Priestley (1981) mostra que a seqüência $\{I_\varepsilon^*(w_j)\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, [n/2]$, é independente e tem distribuição qui-quadrado quando $\{\varepsilon_t\}$ é um processo normal com média zero e variância σ_ε^2. A distribuição de $I_\varepsilon^*(w_j)$ é dada por:

$$I_\varepsilon^*(w_j) \sim \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\sigma_\varepsilon^2\chi_2^2\ , & j \neq 0\ ,\ [n/2] \\ \\ \frac{1}{2\pi}\sigma_\varepsilon^2\chi_1^2\ , & j = 0\ ,\ [n/2] \end{cases} \tag{4.5}$$

Pelo teorema 4.1 e o resultado (4.5), temos que a seqüência $I_X^*(w_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, [n/2])$ é formada de variáveis assintoticamente independentes com distribuição qui-quadrado dado por

$$I_\varepsilon^*(w_j) \sim \begin{cases} \frac{1}{2} f_X(w_j)\chi_2^2\ , & j \neq 0\ ,\ [n/2] \\ \\ f_X(w_j)\chi_1^2\ , & j = 0\ ,\ [n/2]\ . \end{cases} \tag{4.6}$$

Os resultados mostram que $I_X^*(w_j)$ é assintoticamente não viciado, mas não é estimador consistente de $f_X(w_j)$.

Como $E\left(\chi^2_{(n)}\right) = n$ e $Var\left(\chi^2_{(n)}\right) = 2n$, tem-se então:

$$E\left(I^*_X(w_j)\right) \sim f_X(w_j) \qquad \text{e} \qquad Var\left(I^*_X(w_j)\right) \sim \begin{cases} f^2_X(w_j)\ , & j \neq 0, [n/2] \\ \\ 2f^2_X(w_j)\ , & j = 0, [n/2]\ . \end{cases} \tag{4.7}$$

A expressão (4.7) confirma que $I^*_X(w_j)$ é um estimador não consistente de $f_X(w_j)$, pois quando n tende para infinito $Var(I^*_X(w_j))$ não tende para zero.

Para $d < 0$ e considerando o processo ruído branco $\{\varepsilon_t\}$ com $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2_\varepsilon$ e $E(\varepsilon_t^4) < \infty$, tem-se, pelo teorema 3.2, que os coeficientes do processo ARIMA (p, d, q) satisfazem às condições do teorema 4.1, isto é, se

$$X_t = (1-B)^{-d}\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t\ ,$$

então,

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| j^\alpha < \infty\ ,\ \text{para}\ 0 < \alpha < |d|\ . \tag{4.8}$$

Portanto, (4.9) mostra que os resultados obtidos entre as funções periodogramas de $\{X_t\}$ e $\{\varepsilon_t\}$, em (4.4), e a distribuição de $I^*_\varepsilon(w_j)$, em (4.6), podem ser usadas no processo ARIMA (p, d, q) quando $d < 0$. Tem-se, então, o seguinte resultado.

Seja $X_t = (1-B)^{-d}\dfrac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$ um processo ARIMA (p, d, q) com $d < 0$ e seja $E(\varepsilon_t^4)$ finito. Então, a função periodograma de $\{X_t\}$, $I^*_X(w)$ é assintoticamente dada por

$$I^*_X(w_j) \sim 2\pi\frac{f_X(w_j)}{\sigma^2_\varepsilon} I^*_\varepsilon(w_j)\ ,\ \frac{I^*_X(w_j)}{f_X(w_j)} \sim \frac{2\pi}{\sigma^2_\varepsilon} I^*_\varepsilon(w_j), \tag{4.9}$$

e a seqüência $\{I^*_X(w_j)\}$, $w_j \in [0, \pi]$, é assintoticamente independente com distribuição dada por (4.6). Pode-se então derivar a distribuição assintótica da variável $\{-\ell n\,[I_X(w_j)/f_X(w_j)]\}$, onde $I_X(w_j)$ e $f_X(w_j)$ são as funções periodograma e espectral de qualquer processo que satisfaça às condições do teorema 4.1.

Seja $\{X_t\}$ um processo ARIMA (p, d, q): $X_t = (1-B)^{-d}\dfrac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$, com $d < 0$ e ε_t um processo ruído branco com distribuição normal. Quando $n \to \infty$, a seqüência

$$\{-ln\,[I_x(w_j)/f_x(w_j)]\}\ ,\ w_j = \frac{2\pi j}{n},\ j = 1, 2, \ldots, [n/2] - 1,$$

é independente com distribuição de Gumbel com média 0.577216 (constante de Euler) e variância $\pi^2/6$.

4.2.1 O Estimador Baseado na Função Periodograma d_p

Substituindo w por $w_j = \dfrac{2\pi j}{n}$ e adicionando $ln(I(w_j))$ em (4.3), tem-se

$$ln\ I(w_j) = lnf_u(0) - d\ ln\left(2sen(w_j/2)\right)^2 + ln\left\{f_u(w_j)/f_u(0)\right\} + ln\left\{I(w_j)/f(w_j)\right\}\ . \quad (4.10)$$

Considera-se o limite superior de j igual a $g(n)$, que é escolhido satisfazendo $\dfrac{g(n)}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$ e para w_j próximo de zero, $w_j \leq w_{g(n)}$, onde $w_{g(n)}$ é tão pequeno quanto desejarmos. Então o termo $ln\{f_u(w_j)/f_u(0)\}$ é desprezível quando comparado com os outros termos. Ou seja, no limite superior em j,

$$\lim_{n\to\infty} g(n) \to \infty\ ,\ \lim_{n\to\infty}\left[(ln\ n)^2/g(n)\right] \to 0 \text{ e } \lim_{w_j\to 0} ln\left[f_u(w_j)/f_u(0)\right] \to 0. \quad (4.11)$$

Portanto, obtém-se uma equação aproximada como

$$lnI(w_j) \simeq ln\ f_u(0) - dln\left(2sen(w_j/2)\right)^2 + ln\left[I(w_j)/f(w_j)\right]\ . \quad (4.12)$$

Esta nova equação resulta numa equação de regressão linear simples da forma

$$y_j = a + bx_j + e_j\ , \qquad j = 1, 2, \ldots, g(n), \quad (4.13)$$

onde $y_j = lnI(w_j)$, $x_j = ln\left(2sen(w_j/2)\right)^2$, $e_j = ln\{I(w_j)/f(w_j)\} + c$, $b = -d$, $a = lnf_u(0) - c$ e $c = E\left\{-ln\left[I(w_j)/f(w_j)\right]\right\}$.

Quando $d \in (-0.5, 0.0)$, as variáveis $\{ln\left[(I(w_j)/f(w_j)\right]\}$, $j = 1, 2, \ldots, g(n)$ são aproximadamente independentes tendo distribuição de Gumbel com média -0.577216 e variância $\pi^2/6$. Portanto, as variáveis $\{e_j\}$ também são aproximadamente independentes com distribuição Gumbel com média zero e variância $\pi^2/6$. Temos que

$$E(e_j) = E\left\{ln\left[I(w_j)/f(w_j)\right]\right\} + E(c) = -c + c = 0$$

e

$$Var(e_j) = Var\left\{ln\left[I(w_j)/f(w_j)\right]\right\} + Var(c) = Var\text{ (dist. de Gumbell) } = \pi^2/6\ .$$

Este resultado sugere o estimador de d pelo método de mínimos quadrados da regressão de $y_1, y_2, \ldots, y_{g(n)}$ em $x_1, x_2, \ldots, x_{g(n)}$ onde $g(n)$ é escolhida de tal forma que quando $n \to \infty$, $g(n) \to \infty$ e $g(n)/n \to 0$. Tem-se então o estimador

$$\widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x})^2}\ . \tag{4.14}$$

O estimador de d baseado na função periodograma no método de regressão é dado por

$$d_p = -\widehat{b}, \tag{4.15}$$

com as propriedades:

$$E(d_p) = d \text{ e } Var(d_p) = Var(e_j)/\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{\pi^2}{6\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x})^2}\ . \tag{4.16}$$

A distribuição assintótica de d_p é dada pelo seguinte teorema, que sugere o uso da função potência $g(n) = n^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$.

Teorema 4.2 (Geweke e Porter-Hudak (1983)). Seja $\{X_t\}$ um processo ARIMA (p, d, q) com $d < 0$ e $I(w_j)$ sendo a função periodograma de $\{X_t\}$ nas freqüências $w_j = \dfrac{2\pi j}{n}$. Seja d_p o estimador de d na forma de (4.15), supondo-se que $g(n)$ satisfaz $g(n) \to \infty$ e $\dfrac{g(n)}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$. Então, *plim* $d_p = d$.

Se $\lim_{n\to\infty}[(ln\ n)^2/g(n)] \to 0$, então: $\dfrac{d_p - d}{\sqrt{Var(d_p)}}$ é distribuído assintoticamente $N(0,1)$, onde $Var(d_p)$ é a variância de d_p. A rigor, este resultado limite é válido para $-0.5 < d < 0$, mas simulações feitas por Geweke e Porter-Hudak (1983) indicam que ela também pode ser usada quando $d > 0$.

Todos estes resultados citados podem ser vistos nos trabalhos de Reisen, V(1994)

Hurvich e Ray (1995) demonstraram que o periodograma de um processo com integração fracionária não estacionário ou não invertível é viesado e, conseqüentemente, o estimador GPH também é viesado, exceto no caso em que $d = 1$. Os autores propuseram um procedimento que reduz o viés e que consiste em estimar a regressão baseada no periodograma de uma transformação de X_t ao invés da regressão do periodograma da série original. Essa transformação, denominada *tapering* pelos autores, produz a série $\{w_t x_t\}$, onde w_t é dado por.

$$w_t = 0.5\{1 - cos[2\pi(t + 0.5)/n]\}$$

Na estimação da regressão, deve-se também excluir a primeira ordenada do periodograma. A desvantagem desse procedimento, referido por método GPH, é o aumento na variância de d_p quando o processo é não estacionário.

4.2.2 Estimação de d usando a Função Periodograma Suavizada

Inicialmente são apresentados alguns resultados teóricos da função periodograma suavizada, que serão necessários para construção teórica do estimador de d proposto por Reisen (1994), encontrados em diversos textos econométricos, tais como Reisen, V.(1994).

Seja $f_S(w)$ a função periodograma suavizada definida como:

$$f_S(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(n-1)}^{n-1} \lambda(s)R(s)cos(sw)\ ,\ w \in [-\pi, \pi], \tag{4.17}$$

onde a função $\lambda(s)$ é uma função real de s conhecida como "lag window". Diferentes formas da função $\lambda(s)$ são sugeridas na literatura.

$f_S(w)$ pode ser escrita em termos da função periodograma, $I(w)$, na forma da seguinte integral:

$$f_s(w) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta) I(w-\theta) d\theta \ , = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(w-\theta) I(\theta) d\theta \ , \tag{4.18}$$

onde $W_n(\theta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{s=-(n-1)}^{n-1} \lambda(s) e^{-is\theta}$ é chamada de janela espectral. A forma de $I(w)$ é dada por (2.20). A função $\lambda(s)$ é escolhida satisfazendo às seguintes condições para $W_n(\theta)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta) d\theta = 1 \ , \ W_n(\theta) = W_n(-\theta) \ , \ W_n(\theta) \geq 0 \quad \text{, para todo } \theta, \tag{4.19}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\theta) d\theta = 0. \tag{4.20}$$

A expressão 4.18 pode ser aproximada pela soma discreta da forma

$$f_S(w) \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=-n/2}^{n/2} W_n(w - w_k) I(w_k) \text{ , onde } w_k = 2\pi k/n \ . \tag{4.21}$$

Sob as condições para $W_n(\theta)$ Priestley (1981) apresenta as seguintes propriedades assintóticas de $f_S(w)$:

$$E(f_S(w)) \approx f_X(w) \ , \text{ para todo } w \ , \tag{4.22}$$

isto é, $f_S(w)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_X(w)$, e

$$Var(f_S(w)) \approx (1+\delta)(2\pi/n) f_X^2(w) \int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\theta) d\theta \quad \text{ou} \tag{4.23}$$

$$Var(f_S(w)) \approx \frac{(1+\delta) f_X^2(w)}{n} \sum_{s=-(n-1)}^{n-1} \lambda_n^2(s) \ , \ -\pi \leq w \leq \pi \ , \tag{4.24}$$

onde $\delta = 1$ para $w = 0, \pm\pi$ e $\delta = 0$ para $w \neq 0, \pm\pi$.

Logo, $Var(f_S(w)) \to 0$ quando $n \to \infty$, sendo assim $f_S(w)$ é um estimador consistente de $f_X(w)$.

Para dois valores fixos de freqüências w_1, w_2 tais que $w_1 \neq w_2$ pode ser mostrado que, quando $n \to \infty$,

$$cov\left[f_S(w_1)\ ,\ f_S(w_2)\right] \to 0\ ,\ \text{isto é}\ , \tag{4.25}$$

o estimador da função espectral é assintoticamente não correlacionado em diferentes freqüências.

As janelas podem ser escritas numa forma de parâmetro de escala:

$$\lambda(s) = k(s/m), \tag{4.26}$$

onde $k(u)$ é uma função contínua real no domínio $-1 < u < 1$, com $k(0) = 1$ e $k(-u) = k(u)$. O parâmetro m é o ponto de truncamento e é função do tamanho da amostra n e é escolhido satisfazendo $(m/n) \to 0$ quando $n \to \infty$, $m \to \infty$. Então, escolhe-se $m = n^{\beta}$, $0 < \beta < 1$.

Portanto

$$f_S(w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=-m}^{m} k(s/m)R(s)cos(sw). \tag{4.27}$$

Consequentemente a $Var(f_S(w))$ é dada por

$$(n/m)Var(f_S(w)) \to (1+\delta)f^2(w)\int_{-1}^{1} k^2(u)du \text{ quando } n \to \infty \text{ e} \tag{4.28}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{m}\right)cov(f_S(w_1), f_S(w_2)) = 0\ ,\ w_1 \neq w_2\ . \tag{4.29}$$

De acordo com as condições do teorema 4.1 e de 2.20, as variáveis $\{2I_X(w_j)/f_X(w_j)\}$ são assintoticamente independentes com distribuições qui-quadrado, isto é,

$$I_X(w_j) = \begin{cases} \dfrac{f_X(w_j)}{2}\chi_2^2 & j \neq 0, [n/2], \\ f_X(w_j)\chi_1^2 & j = 0, [n/2]\ ,\ n \text{ par}, \end{cases} \qquad \frac{2I_X(w_j)}{f_X(w_j)}\begin{cases} \chi_2^2\ ; & j \neq 0,\ [n/2], \\ 2\chi_1^2\ ; & j = 0,\ [n/2],\ n \text{ par}. \end{cases} \tag{4.30}$$

Retornando à expressão (4.21), nota-se que esta é uma combinação linear de variáveis assintoticamente independentes com distribuição qui-quadrado, portanto, para $n \to \infty$ a soma (4.21) pode ser aproximada por uma distribuição qui-quadrado. Priestley (1981) apresenta os valores dos graus de liberdade para algumas janelas conhecidas.

Teorema 4.3: (Anderson (1971)). Sendo $f_S(w)$ o estimador da função espectral dado em (4.27). Seja

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k} \ , \tag{4.31}$$

onde $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| \leq \infty$ e seja $\{\varepsilon_t\}$ um processo ruído branco com $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ e $E(\varepsilon_t^4) < \infty$. Então,

$$\sqrt{n/m}\{f_S(w) - E\left[f_S(w)\right]\} \tag{4.32}$$

tem distribuição limite normal com variância dada por (4.28).

Anderson (1971) também deriva o seguinte resultado assintótico, que é aplicado para $ln(f_S(w))$:

Se $Y_n = g(X_n)$, onde plim $X_n = \mu$ e $b_n(X_n - \mu)$ tem distribuição limite normal com média 0 e variância σ^2, para alguma constante b_n tal que $b_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $g(x)$ possuindo derivada $g'(u)$ em $x = \mu$, então $b_n(Y_n - g(\mu))$ tem distribuição normal limite com média zero e variância $\sigma^2[g'(\mu)]^2$.

Teorema 4.4: (Anderson (1971)). Se as condições do teorema 4.3 e suas derivações são satisfeitas para $f_S(w)$ e $f_X(w) > 0$, então

$$\sqrt{n/m}\,\{ln\left[f_S(w)\right] - ln\left[f_X(w)\right]\} = \sqrt{n/m}\ \{ln\left[f_S(w)/f_X(w)\right]\} \tag{4.33}$$

tem, no limite, distribuição normal com média zero e variância dada por

$\sigma^2 = \int_{-1}^{1} k^2(u)\, du$ se $w \neq 0, \pm\pi$ e variância $2\sigma^2$ se $w = 0, \pm\pi$, onde $-1 < u < 1$.

Considera-se a função $\lambda(s)$ sendo a janela de Parzen, pelo fato dela possuir a propriedade de produzir somente estimativas positivas de densidade espectral.

A janela de Parzen (Parzen, 1961) é definida como:

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1 - 6(s/m)^2 + 6(|s|/m)^3 \ , & |s| \leq m/2, \\ 2\left[1 - (|s|/m)\right]^3 \ , & \frac{m}{2} < |s| \leq m, \\ 0 \ , & |s| > m \end{cases} \tag{4.34}$$

Escrevendo na forma de parâmetro de escala, obtém-se

$$k(u) = \begin{cases} 1 - 6u^2 + 6|u|^3 \ , & |u| \leq 1/2, \\ 2\,(1 - |u|)^3 \ , & 1/2 < |u| \leq 1, \\ 0 \ , & |u| > 1. \end{cases} \tag{4.35}$$

Observando a equação (4.28), podemos obter a variância assintótica de $f_S(w)$, que é dada por

$$Var(f_S(w)) \approx \begin{cases} 0,539285(m/n)f_X^2(w) \ , & w \neq 0, \pi, \\ \\ 1,07856(m/n)f_X^2(w) \ , & w = 0, \pi \ . \end{cases} \tag{4.36}$$

Priestley (1981) mostra que, as variáveis $\{f_S(w_j)/f_X(w_j)\}$ possuem assintoticamente distribuição qui-quadrado com graus de liberdade (v) dados por

$$v = 3,708617(n/m). \tag{4.37}$$

Anderson(1971) mostou que, $ln\{f_S(w)/f_X(w)\}$ possui distribuição assintoticamente normal com média zero e variância dada por

$$Var[ln(f_S(w)/f_X(w))] \approx \begin{cases} 0,539285\Big(\dfrac{m}{n}\Big) \ , & w \neq 0, \pi, \\ \\ 1,07856\Big(\dfrac{m}{n}\Big) \ , & w = 0, \pi. \end{cases} \tag{4.38}$$

Para $d \in (-0.5, 0.0)$, o teorema 3.2 mostra que os coeficientes da representação MA infinita do modelo ARIMA (p, d, q) são absolutamente convergentes, isto é, se for escrito

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \ , \text{ então } \sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j| < \infty \ . \tag{4.39}$$

Seja $f_X(w)$ a função espectral do modelo ARIMA (p, d, q) $d \in (-0.5, 0.0)$; $f_S(w)$ o estimador em (4.17), e $\lambda(s)$ a janela de Parzen. Se as condições dos teoremas 4.3 e 4.4 são satisfeitas, então $ln\{f_s(w)/f(w)\}$ tem distribuição assintótica normal com média zero e variância dada por (4.38).

O Estimador Baseado na Função Periodograma Suavizada d_{sp}

Retornando a expressão (4.10) e usando os resultados assintóticos para $ln\,[f_S(w)/f_X(w)]$, pode-se escrever a equação de regressão como

$$lnf_S(w_j) = lnf_U(0) - d\; ln(2sen(w_j/2))^2 + ln[f_S(w_j)/f_X(w_j)] + ln[f_U(w_j)/f_U(0)]\ . \quad (4.40)$$

Restringindo o domínio de $j, 1 \leq j \leq g(n)$, e escolhendo a função $g(n)$ como anteriormente, tem-se

$$lnf_S(w_j) \simeq lnf_U(0) - d\; ln\,(2sen(w_j/2))^2 + ln\,(f_S(w_j)/f_X(w_j))\ . \quad (4.41)$$

Esta equação é uma forma aproximada da equação de regressão linear simples, isto é,

$$y_j = a + bx_j + e_j\ , \qquad j = 1, 2, \ldots, g(n), \quad (4.42)$$

onde $y_j = lnf_S(w_j)$, $b = -d$, $x_j = ln\,(2sen(w_j/2))^2$, $e_j = ln\,[f_S(w_j)/f_X(w_j)]$ e $a = lnf_U(0)$.

Como notado anteriormente, quando $-0.5 < d < 0,0$, no modelo ARIMA (p, d, q), as variáveis $\{e_j\}$ são assintoticamente não correlacionadas com média zero e variância dada por (4.38). Isto sugere o método de regressão para estimar d na equação (4.42), onde $g(n)$ é escolhido como $g(n) = n^\alpha (0 < \alpha < 1)$.

O estimador de d obtido pelo método de regressão utilizando a função periodograma suavizada proposto por Reisen em 1994 e com a janela de Parzen $m = n^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, é dado por

$$d_{sp} = -\widehat{b}\ ,\ \text{onde}\ \widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \bar{x})^2}\ , \quad (4.43)$$

com variância

$$Var(ds_p) \approx Var(e_j) \cdot \frac{1}{\frac{g(n)}{\sum\limits_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}} = \begin{cases} 0,53928 \dfrac{m}{\frac{g(n)}{n \sum\limits_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}} \ , \ w \neq 0 \ , \ \pi, \\ 1,07856 \dfrac{m}{\frac{g(n)}{n \sum\limits_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}} \ , \ w = 0 \ , \ \pi. \end{cases} \tag{4.44}$$

Esses resultados podem ser generalizados para qualquer estimador da função espectral usando a janela que satisfaça às condições do teorema 4.4. A variância de e_j será aproximadamente $(m/n)\int_{-1}^{1} k^2(u)\,du$, onde o valor $\int_{-1}^{1} k^2(u)\,du$ depende da janela escolhida.

4.3 Estimação de d pelo Método do Coeficiente de Hurst

Este método é baseado nos trabalhos de McLeod e Hipel (1978) e O'Connell (1974), que estão relacionados com os estudos originais de Hurst (1951).

Seja $\{X_t\}$, $t = 1, 2, \ldots, n$, uma série temporal e seja $\overline{X}$ a média amostral. Definimos a k-ésima soma parcial como

$S_k^* = S_{k-1}^* + (X_k - \alpha\overline{X})$, onde S_0^* é zero e α é uma constante onde $0 \leq \alpha \leq 1$. Ou seja,

$$S_k^* = \sum_{i=1}^{k} X_i - k\ \alpha\ \overline{X}$$

Quando $\alpha = 1$, a soma (4.46) é dada por

$$S_k^* = S_{k-1}^* + X_k - \overline{X} = \sum_{i=1}^{K} X_i - k\overline{X} \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots, n \ , \text{ onde } S_0^* = 0 \text{ e } S_n^* = 0 \ . \tag{4.45}$$

A estatística amplitude ajustada R_n é definida como

$$R_n = M_n^* - m_n^* \ , \text{ onde } M_n^* = max(0, S_1^*, \ldots, S_n^*) \text{ e } m_n^* = min(0, S_1^*, \ldots, S_n^*) \ . \tag{4.46}$$

A estatística amplitude ajustada padronizada Q_n é definida como

$$Q_n = R_n/S_n \text{ , onde } S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}} \text{ é o desvio padrão amostral.} \tag{4.47}$$

McLeod e Hipel (1978) verificaram através de séries de dados simulados que a distribuição da variável aleatória Q_n independe da distribuição da variável dos dados observados simulados, isto é, Q_n é função somente do tamanho da amostra n.

O interesse na estatística Q_n foi estimulado pelos estudos de Hurst (1951, 1956) em dados referentes ao rio Nilo. Para os dados analisados, Hurst encontrou que Q_n tem aproximadamente uma variação em função de n de uma forma dada por

$$Q_n \sim n^h, \tag{4.48}$$

onde h é uma constante definida como coeficiente generalizado de Hurst. A equação acima pode ser escrita da forma

$$Q_n = bn^h, \tag{4.49}$$

onde b é um coeficiente que não depende de n. Os dois resultados anteriores são conhecidos como lei de Hurst.

Hurst estimou o coeficiente h pelo coeficiente k através da expressão a seguir, onde a constante b, em (4.50), foi escolhida como tendo o valor $(1/2)^h$:

$$Q_n = (n/2)^k \ . \tag{4.50}$$

Aplicando logaritmo, obtém-se k, o estimador de h, como sendo

$$k = \frac{lnR_n - lnS_n}{ln(n/2)}. \tag{4.51}$$

Hurst (1951) apresenta o valor esperado de R_n para um processo normal independente:

$$E(R_n) = (n\pi/2)^{1/2}\sigma \text{ , onde } \sigma^2 \text{ é a variância do processo.} \tag{4.52}$$

Outros estimadores para o parâmetro h têm sido formulados e são sumarizados em McLeod e Hipel (1978).

O processo gaussiano fracionário (FGN), que foi apresentado inicialmente por Mandelbrot (1965), pode ser adequadamente aplicado no fenômeno de Hurst. Mandelbrot e Wallis (1969) e Mandelbrot e Vann Ness (1968) propuseram uma rigorosa teoria para o processo FGN, que é utilizado no fenômeno de Hurst. Estas informações poderão ser encontradas em O'Connell (1974).

O processo FGN possui o parâmetro H que está entre (0,1) com a propriedade de que o processo FGN é longa memória quando $1/2 < H < 1$. Pesquisadores também mostram que para o processo FGN a estatística Q_n é função de n através de $R_n^*/D_n^* \sim n^H$. Portanto, o parâmetro H no processo FGN é freqüentemente estimado pelo método de Hurst (4.52).

O modelo ARIMA (p, d, q) está relacionado com o processo FGN. Hosking (1982, 1984) mostra que o modelo ARIMA $(0, d, 0)$ e o processo FGN com parâmetro H possuem estrutura de correlação similar. Para valores grandes de k, ρ_k tem a forma k^{2H-2} no processo FGN, assim como k^{2d-1} para o modelo ARIMA $(0, d, 0)$, mas as constantes de proporcionalidade são diferentes para os dois modelos.

A relação entre os dois processos FGN e ARIMA $(0, d, 0)$ é desenvolvida no trabalho de Geweke e Hudak (1983). Eles derivam a função espectral do processo "General Fractional Gaussian Noise" (GFGN), com parâmetro $H \in (0, 1)$, e mostram que é a mesma para o modelo ARIMA (p, d, q) $d \in (-0, 5; 0.5)$ onde o parâmetro $d = H - 0.5$.

Teorema 4.5 (Geweke e Hudak) (1983) $\{X_t\}$ é um processo ARIMA (p, d, q) com $d \in (-0.5, 0.5)$ se, e somente se, também for um proccesso "General Fractional Gaussian Noise" (GFGN) com parâmetro $H = d + 0, 5$.

Os autores também mostram que $H^* = d^* + 0.5$ é um estimador consistente de H, como também $H^* - H$ e $d^* - d$ possuem a mesma distribuição assintótica. Chamaremos H^* e d^* os estimadores de H e d, respectivamente.

Com base nos estudos apresentados acima, sugere-se o estimador de d usando o coeficiente de Hurst que é dado por

$$d_h = \widehat{H} - 0.5 \text{ , onde } \widehat{H} \text{ é obtido de acordo com a expressão (4.52).} \tag{4.53}$$

Estimação de d pela Estatística de Hurst Modificado R/S

O teste Modificado R/S pode detectar o alto grau de dependência das observações a longo prazo em uma série temporal com estrutura probabilística não gaussiana e com grandes valores para assimetria e curtose para a mesma. O teste Modificado R/S para verificação de longa-memória pode ser considerado como um teste robusto não-paramétrico e pode examinar a hipótese de que os dados são gerados por um processo que apresenta dependência de curto prazo e heterocedasticidade. A estatística do teste Modificado R/S, Q_R, é dada pela amplitude da soma dos desvios com relação à média da série cronológica dividida por um estimador consistente do desvio-padrão.

Seja $\{X_t\}$ um processo estacionário com média zero, com as seguintes condições:
(a) $E(X_t) = 0$; $\forall t$; (b) $Sup_t E(|X_t|^\beta) < \infty$ para algum $\beta > 2$;
(c) $0 < \sigma^2 \simeq \lim_{n\to\infty} n^{-1} E\left[\left(\sum_{t=1}^{n} X_t\right)^2\right] < \infty$; (d) $\{X_t\}$ é ψ-combinado e ψ_n satisfaz à condição $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^{1-2/\beta} < \infty$.

Nota-se que a condição (b) não obedece à condição da possibilidade da variância ser infinita, mas é necessária para obtermos a distribuição de probabilidade desta, afim de se poder fazer inferência. Portanto R/S Modificado é definido como

$$Q_R = \frac{R(n)}{S(n,q)}, \tag{4.54}$$

onde

$$R(n) = \max_{0\le \ell \le n}\left(\sum_{i=1}^{\ell} X_i - \ell\overline{X}\right) - \min_{0\le \ell \le n}\left(\sum_{i=1}^{\ell} X_i - \ell\overline{X}\right) \text{ , } \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \text{ ,} \tag{4.55}$$

$$S(n,q) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \frac{2}{n} w_j(q) \sum_{i=j+1}^{n} (X_i - \overline{X_n})(X_{i-j} - \overline{X_n})\right]^{1/2} \text{ ,} \tag{4.56}$$

$$S(n,q) \;=\; \left[\widehat{\sigma}^2 + 2\sum_{j=1}^{q} w_j(q)\widehat{\gamma}_X(j)\right]^{1/2}, \tag{4.57}$$

$\widehat{\sigma}^2$ e $\widehat{\gamma}_X(j)$ sendo os estimadores usuais de variância e da autocovariância da série X_t e os pesos $w_j(q)$ sendo definidos por

$$w_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}\;,\; q < n\;. \tag{4.58}$$

$S^2(n,q)$ é um estimador consistente para a soma parcial de variância, que, na presença das autocovariâncias, não é uma simples soma de variâncias dos termos individuais, como é no estimador de Hurst-Mandelbrot $S(n)$, pois agora incluímos as autocovariâncias. Os pesos sobre as autocovariâncias foram propostos por Newey e West (1987) e eles provaram ser os mesmos estimadores consistentes sob certas condições como apresentada por Phillips (1987): (e) $Sup_t E(|X_t|^{2\beta}) < \infty$, para algum $\beta > 2$; (f) q tem um erro de ordem $n^{1/4}$.

Lo mostrou, usando simulação através do método de Monte Carlo, que o valor para o parâmetro q é dado através a seguinte fórmula: $q \simeq [K_n]$, $K_n \simeq \left(\frac{2n}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{\widehat{\rho}(1)}{1-\widehat{\rho}^2(1)}\right)$, onde $[K_n]$ denota a parte inteira da expressão e $\widehat{\rho}(1)$ é o estimador usual da autocorrelação de primeira ordem. Valores críticos para o teste R/S Modificado foram apresentados por Lo em 1991. Lo provou que sob as condições de (a)-(f) citadas anteriormente, Q_R converge fracamente para amplitude do movimento browniano $(W^0(t))$ em torno do intervalo unitário.

4.4 Método de Máxima Verossimilhança

Por esse método, todos os parâmetros do modelo ARFIMA (p,d,q) são estimados simultaneamente, ao contrário dos métodos anteriores que requerem uma segunda etapa para a estimação dos parâmetros dos polinômios $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$.

Sowell (1992) desenvolveu o estimador de máxima verossimilhança para inferir o valor do parâmetro d derivando a função de verossimilhança exata (não condicional) para modelos estacionários ARFIMA(p, d, q), com os erros tendo distribuição normal com média nula e matriz de covariância σ.

Seja $X_t = (X_1, X_2 \cdots X_n)$ um vetor de valores observados de uma série temporal ARFIMA (p, d, q) gerado pelo modelo $\Phi(B)(1-B)^d\ (X_t - \mu) = \Theta(B)e_t$, onde $e_t \sim\ i.i.d\ N(0, \sigma_e^2)$. Logo, o logaritmo da função de verossimilhança do ruído branco é dado por

$$L\left(e_t; \phi, \theta, \mu, \sigma_e^2\right) = -\frac{n}{2} ln 2\pi - \frac{1}{2} ln \sigma_e^2 - \frac{1}{2}\left(e_t' \sigma^{-2} e_t\right) \tag{4.59}$$

onde $e_t = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)(1-B)^d\,(X_t - \mu)$.

O estimador de máxima verossimilhança, que é obtido maximizando em (4.60) com respeito aos parâmetros $\phi_i, \theta_j, \mu, \sigma_e^2$, é consistente e assintoticamente normal. A matriz de covariância σ é uma função complexa dos parâmetros do modelo X_t e em cada avaliação da função de verossimilhança requer a inversão da matriz $\sum_{n\times n}$, que tem um custo computacional elevado. Para uma maior compreensão do método, ver o texto "Statistics for Long-Memory Processes, Jan Beran (1994).

Fox e Taqqu (1986) e Whittle (1953) propõem uma aproximação para o estimador de máxima verossimilhança (MV) baseado no periodograma e na função de densidade espectral. Esta aproximação do logaritmo da verossimilhança gaussiana no domínio da freqüência requer minimizar o logaritmo da função de verossimilhança espectral.

O estimador d_w (Whittle) para o parâmetro d está baseado no periodograma e envolve a função

$$Q(\zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(w)}{f_x(w, \zeta)} d\zeta,$$

onde $I(w)$ é o periodograma e $f_x(w, \zeta)$ é a função de densidade espectral da série temporal X_t com freqüência w, ζ denotando o vetor de parâmetros desconhecidos $\zeta = (\phi_1, \ldots, \phi_p; \theta_1, \ldots, \theta_q; \sigma_\varepsilon^2; \mu; d)$. O estimador de Whittle (d_w) é o valor de ζ que minimiza a função $Q(\zeta)$.

Quando temos o modelo ARFIMA$(0, d, 0)$, ζ é dado somente pelo parâmetro d, μ e σ_ε^2. Para mais detalhes, ver Fox e Taqqu (1986) e Dahlhaus (1989) e Beran (1994). Computacionalmente, o estimador $\widehat{d}_W$ proposto é obtido utilizando a forma discreta de $Q(\zeta)$ sugerida por Dahlhaus (1989), que consiste em minimizar

$$L_n(\zeta) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \left[ln\ f_x(w_j, \zeta) + \frac{I_x(w_j)}{f_x(w_j, \zeta)} \right],$$

onde a função de densidade espectral $f_x(w_j; \zeta)$ é admitida conhecida e w_j são as freqüências de Fourier para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dahlhaus (1989), para um processo gaussiano, e Yajima (1985), para um modelo gaussiano ou não de uma série temporal ARFIMA$(0, d, 0)$, mostram que o estimador de MV aproximado por $\widehat{d}_w$ para d é superior aos outros estimadores em termos da consistência e de ser assintoticamente distribuído normalmente e assintoticamente eficiente segundo o conceito de Fisher.

4.5 Teste de Hipótese

O seguinte teste é formulado:

$$\begin{aligned} H_0 &: d = d_0 \\ H_1 &: d \neq d_0, \end{aligned} \tag{4.60}$$

onde d_0 assume valores no intervalo $(-0.5; 0.5)$.

De acordo com a teoria já descrita, $(d_{sp} - d)$ e $(d_p - d)$ possuem distribuição assintótica normal com média zero e variâncias dadas por (4.44) e (4.16) para d_{sp} e d_p, respectivamente. A teoria assintótica foi desenvolvida para o caso quando $d < 0$, mas simulações feitas por Geweke e Porter-Hudak (1983) indicam que também pode ser usada quando $d > 0$.

Portanto, baseando-se nos resultados assintóticos para o método de regressão usando a função periodograma e a função periodograma suavizada para estimar d, a seguinte estatística (sob a hipótese nula) será usada para o teste de hipóteses:

$$Z = \frac{\widehat{d} - d_0}{\sqrt{\widehat{V}ar(\widehat{d})}}\ , \tag{4.61}$$

onde $\widehat{d} = d_{sp}$ ou d_p e $\widehat{V}ar(\widehat{d})$ é a estimativa da variância (sob H_0) do estimador escolhido. Para $d < 0$ a estatística do teste Z tem distribuição assintótica normal com média zero e variância 1.

4.6 Estimação dos Parâmetros do Modelo ARIMA(p, d, q)

Hosking (1981) e Brockwell e Davis (1991) sugerem o procedimento para identificar e estimar todos os parâmetros do modelo ARIMA (p, d, q).

Seja $\{X_t\}$ um modelo ARIMA (p, d, q), $\Phi(B)(1-B)^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ onde $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$ são polinômios de ordem p e q, respectivamente, $\mu_x = 0$ e $\{\varepsilon_t\}$ é um processo ruído branco com média zero e variância σ_ε^2. Define-se $U_t = (1-B)^d Xt$, $\{U_t\}$ é um modelo ARMA (p, q) e $Y_t = \dfrac{\phi(B)}{\theta(B)} X_t$, $\{Y_t\}$ é um modelo ARIMA $(0, d, 0)$.

1) Estimar d no modelo ARIMA (p, d, q), obtendo $\widehat{d}$.

2) Calcular $\widehat{U}_t = (1-B)^{\widehat{d}} X_t$.

3) Usar o procedimento de Box-Jenkins para identificar e estimar os parâmetros no modelo ARMA (p, q), $\phi(B)\widehat{U}_t = \theta(B)\varepsilon_t$. No passo 3, pode-se usar o critério de Akaike (1973,1974).

4) Calcular $\widehat{Y}_t = \dfrac{\widehat{\phi}(B)}{\widehat{\theta}(B)}$.

5) Estimar d no modelo ARIMA $(0, d, 0)$, $(1-B)^d\ \widehat{Y}_t = \varepsilon_t$. O valor obtido de $\widehat{d}$ é o novo estimador de d.

6) Repetir os passos de 2 a 5 até obter-se uma convergência para d, ϕ_i, θ_j, σ_ε^2.

Após o modelo identificado, necessitamos checar a adequação do proceso selecionado e estimado.

Chapter 5

Procedimento Metodológico

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos a partir de dados diários sobre retornos das seguintes *commodities* agrícolas negociadas: açúcar, algodão, cacau, café, farelo de soja, milho, soja em grão, suco de laranja e trigo, no período de dezesseis de janeiro de 1985 até quinze de junho de 1998, comercializadas na Bolsa New York; e das seguintes *commodities* agrícolas negociadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), no período de sete de dezembro de 1999 até sete de fevereiro de 2003: açúcar, álcool, café, e milho. O retorno da *commodity* agrícola será representado por $R_t = ln(P_t/P_{t-1})$, onde P_t é o preço no tempo atual (t) e P_{t-1} é o preço no tempo imediatamente anterior ($t-1$) desta *commodity* agrícola.

O objetivo foi verificar se os mercados agrícolas são eficientes ou não, utilizando os modelos ARFIMA. Neste sentido, quando o valor estimado do parâmetro fracionário pertencer à região $(-0.5; 0.0)$, teremos um mercado eficiente, e quando $d \in (0.0; 0.5)$, este mercado possuirá longa dependência e, portanto, não será eficiente.

O software que utilizamos foi o WINRATS e o procedimento econométrico de estimação do parâmetro foi o de Porter-Hudak.

Os dados da Bolsa de New York foram analisados de duas formas. Primeiro, trabalhamos com todos os valores observados, de dezesseis de janeiro de 1985 até quinze de junho de 1998, que será denominado de período de tempo global. Posteriormente, foram particionados no tempo mediano os dados em dois períodos de tempo, ou seja, de dezesseis de janeiro de 1985 até quinze de janeiro de 1993 (chamado de primeiro período de tempo) e de dezesseis de janeiro de 1993 até quinze de janeiro de 1998 (designado de segundo período de tempo). Com esta partição, pudemos averiguar se os mercados comportaram-se eficientemente ou não em períodos de tempos distintos.

Os dados da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) foram também ana-lisados de duas formas. Primeiramente, trabalhamos com todos os valores observados, de sete de dezembro de 1999 até sete de fevereiro de 2003, que denominamos de período de tempo global. Posteriormente, foram particionados no tempo mediano os dados em dois períodos de tempo, ou seja, de sete de dezembro de 1999 até dezoito de junho de 2001 (chamado de primeiro período de tempo) e de dezenove de junho de 2001 até sete de fevereiro de 2003 (designado de segundo período de tempo). Com esta partição, pudemos averiguar se os mercados comportaram-se eficientemente ou não em períodos de tempos distintos.

5.1 Integração Fracionária e Testes de Raiz Unitária

Os testes de raiz unitária mais amplamente utilizados em trabalhos econométricos são os propostos por Dickey e Fuller (1979, 1981) teste DF, por Said e Dickey (1984) teste ADF e por Phillips e Perron (1988) teste PP. Todos têm como hipótese nula a existência de uma raiz unitária, ou seja, a série em estudo é integrada de ordem 1 ($d = 1$). A hipótese alternativa é que a série é estacionária, ou seja, seu processo gerador é um ARMA(p, q), $p \geq 0$ e $q \geq 0$.

Ocorre, porém, que uma série estacionária não é necessariamente um ARMA(p, q). Conforme visto anteriormente, ela pode ser um ARFIMA(p, d, q), $0.0 < d < 0.5$. A questão que então se coloca é se os testes convencionais de raiz unitária conseguem distinguir os processos $I(1)$ de processos com integração fracionária.

Sowell (1990) encontrou a estatística assintótica do teste DF para processos integrados de ordem $1 + d$, onde $-0.5 < d < 0.5$, e mostrou que ela não é robusta em relação ao erro de especificação da ordem de integração. Ele realizou um experimento com 1000 amostras de 900 observações, para cinco valores de d entre -0.4 e 0.4, e os resultados sugeriram baixa potência dos testes de raiz unitária. Segundo sua avaliação, deveriam ser buscados testes que envolvessem a estimação de d.

Diebold e Rudebusch (1991) avaliaram a potência do teste de Dickey e Fuller por meio de experimentos de Monte Carlo, tomando por base o processo $(1 - B)^d X_t = \varepsilon_t$, com dez diferentes valores para d, que variaram de 0.3 a 1.3. Foram geradas 5000 amostras de 50, 100 e 250 observações. Os autores concluíram pela baixa potência do teste DF; esta cresce com o tamanho da amostra e com $|d - 1|$ e é assimétrica em relação à hipótese nula $d = 1$.

Hassler e Wolters (1994) demonstraram que a probabilidade de rejeitar a hipótese de existência de raiz unitária em um processo fracionariamente integrado diminui à medida que aumenta o número de defasagens utilizadas no teste ADF. Os autores também tomaram por base experimentos de Monte Carlo para avaliar o poder dos testes de raiz unitária. O processo gerador considerado é o mesmo adotado por Diebold e Rudebusch (1991). Foram replicadas 5000 amostras de tamanho 100 e 250, com seis valores para d, de 0.3 a 1. Foram realizados os testes DF e ADF com diferentes defasagens, e PP com duas autocovariâncias. Os testes DF e PP tiveram desempenho semelhante, com alta potência para $d < 0.5$; esta decresce à medida que d aumenta. O poder do teste PP quase não muda com o número de autocovariâncias utilizado. O teste ADF, por sua vez, tem potência inferior à dos outros dois testes e ela diminui substancialmente quando defasagens adicionais são consideradas.

Lee e Schmidt (1996) avaliaram a potência dos testes KPSS face à integração fracionária. Esses testes foram propostos por Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin (1992) e diferem dos testes de Dickey-Fuller e Phillips-Perron pelo fato de terem como hipótese nula a estacionariedade da série em torno de sua média ou de uma tendência determinísta.

Eles demonstraram que os testes KPSS são consistentes em relação à hipótese alternativa de que a série é $I(d)$, $-0.5 < d < 0.5$. A avaliação da potência dos testes foi feita com base em amostras de 50, 100, 250 e 500 observações, geradas para doze valores de d, de 0.1 a 1.

As conclusões obtidas foram as seguintes: o poder dos testes aumenta com o tamanho da amostra e com o valor de d e diminui à medida que se incluem mais defasagens no denominador da estatística de teste. Somente quando o tamanho da amostra é razoavelmente grande (em torno de 1000 observações), os testes KPSS conseguem distinguir, de forma confiável, processos de memória curta daqueles com longa dependência.

Os trabalhos que foram citados anteriormente demonstram a reduzida confiabilidade dos testes de raiz unitária face à eventual existência de integração fracionária no processo gerador da série, sobretudo quando o tamanho da amostra não é muito grande e o valor de d não se distancia substancialmente daquele pressuposto pela hipótese nula do teste. Assim sendo, conclusões sobre os resultados da aplicação desses testes devem levar em conta a possibilidade da série apresentar longa dependência.

Um processo estacionário, AR(p), necessita que os inversos de todas as raízes, G dada através da equação característica $\phi(B) = 0$, satisfaçam à seguinte equação

$$\Phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \cdots (1 - G_p B), \tag{5.1}$$

onde $|G_i| < 1$, $\forall i$. Suponha que pelo menos um dos inversos das raízes, digamos G_1, esteja próximo de 1, ou seja, $G_1 = 1 + \delta$, onde δ é um valor positivo tão próximo de zero quanto desejarmos. As autocorrelações são dominadas por $A_1 G_1^k$, pois

$$\rho(K) = A_1 G_1^k + \cdots + A_p G_p^k \simeq A_1 G_1^k \ , \tag{5.2}$$

visto que todos os outros termos G_i^K, $i = 2, ..., p$, tendem a zero para grandes valores de k. Além disso, o decaimento de $A_1 G_1^k$ será suave e exponencial, devido a G_1 estar próximo a 1, pois

$$A_1 G_1^k = A_1(1 - \delta)^k = A_1(1 - \delta k + \delta^2 k^2 - \cdots) \simeq A_1(1 - \delta k). \tag{5.3}$$

Portanto, uma indicação de não estacionaridade da série temporal é quando o valor estimado de $\widehat{\rho}(K)$ for considerado alto para valores grandes de k.

5.2 Teste de Raiz Unitária

O conceito de raiz unitária é importante em econometria porque, quando uma série econômica possui esse tipo de raiz, é incorreto usar a distribuição *t-Student* nas regressões que a incluem. Este conceito ganha maior importância quando temos em mente que muitas variáveis econômicas aparentam possuir raiz unitária.

A fim de entendermos o conceito, consideremos o modelo AR(1):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{5.4}$$

sendo ϕ_1 um número real e ε_t é ruído branco.

Ao examinarmos a questão da raiz unitária, iremos observar o comportamento de ϕ_1. Quando $|\phi_1| > 1$, a série apresenta um comportamento explosivo, possibilidade que, por ser considerada irrealista, não é usualmente cogitada pelos pesquisadores. Quando $|\phi_1| < 1$, X_t segue um processo estacionário (Andersen e Weiss, 1984). Quando $|\phi_1| = 1$, dizemos que o processo possui raiz unitária. Neste caso, o processo X_t não é estacionário, pois

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.5}$$

$$X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.6}$$

$$\vdots$$

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i, \tag{5.7}$$

ou seja, $Var(X_t) = t\sigma^2$, a variância de X_t cresce no tempo, o que viola a condição de estacionariedade. Por outro lado, a primeira diferença do processo, ∇X_t, será estacionária quando $\phi_1 = 1$, pois $\nabla X_t = \varepsilon_t$ e ε_t é, por definição, estacionário. Quando temos raiz unitária, $\phi_t = 1$, o modelo é chamado *estacionário em diferença* e dizemos que o processo é integrado de primeira ordem, ou $I(1)$.

Dickey e Fuller (1979) são os pioneiros nos testes de raiz unitária. A fim de examinarmos como eles o fazem, consideremos o caso mais simples, onde X_t é um processo AR(1), $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$, com X_0 dado. Esse processo pode ser reescrito como $\nabla X_t = b_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$, onde

$b_1 = \phi_1 - 1$. A hipótese de raiz unitária é dada por $b_1 = 0$ e a hipótese alternativa por $b_1 < 0$. Quatro são os modelos por eles examinados que podem ser usados para testar a hipótese da raiz unitária.

$$\nabla X_t = b_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{5.8}$$

$$\nabla X_t = b_0 + b_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{5.9}$$

$$\nabla X_t = b_1 X_{t-1} + b_2 t + \varepsilon_t, \tag{5.10}$$

$$\nabla X_t = b_0 + b_1 X_{t-1} + b_2 t + \varepsilon_t, \tag{5.11}$$

sendo que a diferença entre eles se encontra na presença da constante e da tendência determinística. A idéia do teste é simples: estimam-se uma ou mais das equações acima através dos mínimos quadrados ordinários e então se compara o resultado da estatística t do coeficiente b_1 com um valor crítico apresentado numa tabela elaborada por Dickey. Esse valor dependerá do tamanho da amostra, de qual dos modelos acima está sendo usado e do nível de significância utilizado. Se a estatística t do coeficiente b_1 for menor do que o valor tabelado corretamente escolhido, rejeitamos a hipótese nula da existência de uma raiz unitária a um dado nível de significância. Se a estatística t de Dickey-Fuller for maior que os valores críticos tabelados não rejeitamos a hipótese de não estacionaridade, ou seja, não rejeitamos a hipótese de existência de raiz unitária.

A estatística t é dada por $t = \widehat{b}_1 / \sqrt{\widehat{V}ar(\widehat{b}_1)}$, onde $\widehat{b}_1$ é obtido pelo método de mínimos quadrados $\widehat{b}_1 = (X'X)^{-1}X'Y$ e $\widehat{V}ar(\widehat{b}_1)$ é a variância estimada do estimador e é obtida através de $\widehat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$, onde $Y = \Delta X_t$ e $X = (X_{t-1})$, $X = (1, X_{t-1})$, $X = (X_{t-1}, t)$, $X = (1, X_{t-1}, t)$ respectivamente. Aqui $\widehat{\sigma}^2$ é a estimativa da variância do erro.

Dickey e Fuller (1979) mostraram que o teste apresentado era muito mais poderoso do que o feito com a estatística Q de Box e Pierce (1970), que vinha sendo utilizado nos diversos trabalhos econométricos. O teste, todavia, apresenta o viés de aceitar a hipótese nula mais freqüentemente para um b_1 próximo de, porém, menor que um. A partir deste referido artigo, uma série de outros testes e tabelas foram sendo propostos na literatura.

5.3 Teste de Dickey-Fuller Aumentado

Antes, estávamos lidando com um termo aleatório que seguia um processo AR(1); contudo, se esse termo requer um ARMA(p,q), certas modificações são necessárias.

Uma alternativa possível para solucionar esse problema é o teste conhecido como de *Dieckey-Fuller aumentado (ADF)*. Este é, em princípio, voltado para o caso de AR(p), $X_t = A_1X_{t-1} + A_2X_{t-2} + \cdots + A_pX_{t-p} + a_t$, ou seja, $X_t = A(B)X_t + a_t$ com $A(B) = \sum_{i=1}^{p} A_iB^i$. Said e Dickey (1984) sugerem que o teste permanece válido quando trabalhamos com um ARMA(p,q), pois podemos aproximar este último somente por um processo auto-regressivo de maior ordem. Entretanto, para isso ser assintoticamente válido, a ordem da parte auto-regressiva estimada, $p-1$, deve crescer para infinito, à medida que o tamanho da amostra também cresce para infinito. Podemos, então, escrever $\nabla X_t = \pi X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \nabla X_{t-j} + a_t$, sendo que p é a diferença entre os coeficientes auto-regressivos e um, $\pi = (A_1 + A_2 + \cdots + A_p) - 1$, e $\gamma_j = -\sum_{i=j+1}^{p} A_i$. Novamente estaremos no caso de raiz unitária se $\pi = 0$. Usualmente se faz o teste de Dickey-Fuller aumentado com apenas uma regressão, mas ele pode ser feito através da etimação de duas regressões de um modo similar ao sugerido por Campbell e Perron (1991).

5.4 Estimação de d pelo Método GPH

Seja $\{X_t\}$ um processo ARIMA (p,d,q), $d \in (-0.5, 0.5)$, representado por $(1-B)^d X_t = U_t$, onde $\Phi(B)U_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ é um modelo ARMA (p,q) e $\{\varepsilon_t\}$ é um processo ruído branco com média zero e variância σ_ε^2. A função espectral de $\{X_t\}$ é dada por

$$f_X(w) = f_U(w)\left(2sen(w/2)\right)^{-2d},\ w \in [-\pi, \pi]\,, \quad \text{onde} f_U(w) \text{ é a função espectral } U_t\,. \tag{5.12}$$

Aplicando o logaritmo em 5.11, obtém-se

$$lnf_X(w) = lnf_U(w) - dln\,(2sen(w/2))^2 \ . \tag{5.13}$$

Escrevendo (5.12) de outra forma, obtém-se

$$lnf_X(w) = lnf_U(0) - dln\,(2sen(w/2))^2 + ln\{f_U(w)/f_U(0)\} \ . \tag{5.14}$$

Retornando à equação (5.13) e substituindo w por $w_j = \dfrac{2\pi j}{n}$ e adicionando $ln(I(w_j))$ em (5.13), tem-se

$$ln\ I(w_j) = lnf_U(0) - d\ ln\,(2sen(w_j/2))^2 + ln\,\{f_U(w_j)/f_U(0)\} + ln\,\{I(w_j)/f_X(w_j)\} \ . \tag{5.15}$$

Considera-se o limite superior de j igual a $g(n)$, que é escolhido satisfazendo $\dfrac{g(n)}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$ e para w_j próximo de zero, $w_j \leq w_{g(n)}$ onde $w_{g(n)}$ é tão pequeno quanto desejarmos. Então, o termo $ln\{f_U(w_j)/f_U(0)\}$ é considerado desprezível quando comparado com os outros termos. Ou seja, no limite superior em j,

$$\lim_{n\to\infty} g(n) \to \infty \ , \ \lim_{n\to\infty} \left[(ln\ n)^2/g(n)\right] \to 0 \text{ e } \lim_{w_j\to 0} ln\,[f_U(w_j)/f_U(0)] \to 0. \tag{5.16}$$

Portanto, obtém-se uma equação aproximada de (5.14) como

$$lnI(w_j) \simeq ln\ f_U(0) - dln\,(2sen(w_j/2))^2 + ln\,[I(w_j)/f_X(w_j)] \ . \tag{5.17}$$

Esta nova equação resulta numa equação de regressão linear simples da forma

$$y_j = a + bx_j + e_j \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, g(n), \tag{5.18}$$

onde $y_j = lnI(w_j)$, $x_j = ln\,(2sen(w_j/2))^2$, $e_j = ln\{I(w_j)/f_X(w_j)\} + c$, $b = -d$,
$a = lnf_U(0) - c$ e $c = E\,\{-ln\,[I(w_j)/f_X(w_j)]\}$.

Este resultado sugere o estimador de d pelo método de mínimos quadrados da regressão de $y_1, y_2, \ldots, y_{g(n)}$ em $x_1, x_2, \ldots, x_{g(n)}$, onde $g(n)$ é escolhida de tal forma que quando $n \to \infty$, $g(n) \to \infty$ e $g(n)/n \to 0$.

Tem-se então o estimador

$$\widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x})^2} \ . \tag{5.19}$$

O estimador de d usando a função periodograma no método de regressão é dado por:

$$d_p = -\widehat{b}, \tag{5.20}$$

com as propriedades:

$$E(d_p) = d \text{ e } Var(d_p) = Var(e_j) / \sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{\pi^2}{6 \sum_{i=1}^{g(n)} (x_i - \overline{x})^2} \ . \tag{5.21}$$

Se $\lim_{n\to\infty} [(ln\ n)^2/g(n)] \to 0$, então: $\frac{d_p - d}{\sqrt{Var(d_p)}}$ é distribuído assintoticamente $N(0,1)$, onde $Var(d_p)$ é a variância de d_p. A rigor, este resultado limite é válido para $-0.5 < d < 0.0$, mas simulações feitas por Geweke e Porter-Hudak (1983) indicam que ela também pode ser usada quando $d > 0$.

Chapter 6

Resultados dos Modelos Ajustados

Os principais produtos primários (commodities) comercializados internacionalmente têm seus preços determinados ou fortemente influenciados pelas cotações vigentes nas principais bolsas de mercadorias, localizadas em importantes centros financeiros mundiais. Uma característica marcante observada nas cotações desse tipo de produto é a sua significativa volatilidade. Na verdade, esse fenômeno advém do fato de, teoricamente, tanto a oferta quanto a demanda nesses mercados serem tidas como inelásticas com relação aos preços no curto prazo, resultando em uma elevada sensibilidade dos preços a pequenas variações ou choques acontecidos ou esperados tanto nas suas ofertas quanto nas suas demandas.

Inicialmente verificamos se os valores dos retornos são estacionários ou não, utilizando o teste de raiz unitária; com tendência e constante(ta), somente tendência(tb), somente constante(tc) e sem ambos(td); pelo teste de Dickey-Fuller ao nível de 5 %. Após verificarmos que os dados trabalhados não apresentaram raiz unitária e nem comportamento sazonal, estimamos o valor do parâmetro fracionário d pelo método GPH.

A seguir apresentaremos cada uma das *commodities* agrícolas analisadas, por ordem alfabética, demonstrando se o mercado foi ou não eficiente nos períodos estudados,com diferentes níveis de α da função potência $g(n) = n^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$.

O açúcar é importante produto da pauta de exportação brasileira e em termos de variação de preços no mercado internacional não apresentou desempenho muito satisfatório, pois é tido como abundante no mercado mundial. A quebra da safra brasileira de açúcar também contribuiu para o recuo da balança agrícola. Com uma safra menor, decorrente da estiagem que atingiu o país, o produtor de açúcar cortou suas exportações priorizando o mercado interno, que estava com preços melhores.

Ao analisarmos o retorno da *commodity* agrícola do açúcar, observamos que a mesma apresentou quase sempre um mercado eficiente, como pode ser observado nas tabelas 2 e 3, seja quando trabalhamos com os valores em todo o período de tempo da série ou quando dividimos os dados em dois intervalos de tempo, para as duas bolsas estudadas, com exceção do o 2º período da bolsa de New York e em algumas situações da bolsa BM&F, visto que os valores estimados de d são não negativos.

Tabela 2A - Açúcar (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 32,06	- 32,05	- 30642,26	- 30282,06
1º Período	- 19,52	- 19,53	- 11159,22	- 11152,14
2º Período	- 25,52	- 25,53	- 24591,14	- 24519,69

Tabela 2 - Açúcar (Nova York) - estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	- 0,0878	- 0,0425	- 0,0685	- 0,0676
Desvio-Padrão	0,0955	0,0756	0,0604	0,0485
1º Período	- 0,2163	- 0,2209	- 0,1354	- 0,1643
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031(*)	0,0843	0,0689(*)
2º Período	0,1190	- 0,0689	- 0,1715	- 0,2028
Desvio-Padrão	0,1096	0,0878	0,0707(*)	0,0572(*)

Tabela 3A - Açúcar (BM&F)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 14,26	- 14,25	- 1996,40	- 1971,09
1º Período	- 10,38	- 10,34	- 1424,33	- 1351,00
2º Período	- 9,79	- 9,64	- 869,75	- 744,07

Tabela 3 - Açúcar (BM&F)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,0183	- 0,0117	- 0,0506	- 0,0691
Desvio-Padrão	0,1496	0,1195	0,09887	0,0813
1º Período	- 0,0629	0,1392	- 0,1023	- 0,1641
Desvio-Padrão	0,1874	0,1534	0,1279	0,1063
2º Período	0,2321	0,1043	0,0458	- 0,0289
Desvio-Padrão	0,1874	0,1534	0,1279	0,1067

O álcool comercializado na bolsa de BM&F apresentou característica de possuir longa dependência no período global e no primeiro período; contudo, no segundo período verificou-se a existência de antipersistência, como mostra a tabela 4.

Tabela 4A - Álcool (BM&F)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 12,57	- 12,57	- 998,60	- 996,18
1º Período	- 7,43	- 7,01	- 213,13	- 174,15
2º Período	- 9,95	- 9,52	- 1593,34	- 905,11

Tabela 4 - Álcool (BM&F)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,2626	0,2018	0,0789	0,0996
Desvio-Padrão	0,1532	0,1254	0,1020	0,0845
1º Período	0,4026	0,2404	0,1896	0,2114
Desvio-Padrão	0,1943	0,1573	0,1326	0,1104
2º Período	- 0,0934	- 0,1369	- 0,0184	- 0,1157
Desvio-Padrão	0,1942	0,1573	0,1326	0,1104

Com relação à pauta das commodities importadas, o Brasil vem tornando-se o maior consumidor mundial de algodão, cujas cotações reduziram-se motivadas pela menor demanda chinesa devido aos estoques destes estarem bastante elevados e pelo significativo aumento da produção de algodão nos Estados Unidos, na África e na Austrália.

Ao analisarmos o mercado do algodão no Brasil, este mostrou-se eficiente em todas as 3339 observações. Ao fazermos a análise de maneira particionada, verificamos que, no primeiro período de tempo, o mercado da *commodity* agrícola do algodão foi eficiente. A partir de dezesseis de janeiro de 1993, porém, este mercado deixou de ser eficiente como pode ser visto na tabela 5 abaixo.

Tabela 5A - Algodão (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 26,64	- 26,65	- 3961,78	- 3961,74
1º Período	- 16,33	- 16,35	- 1523,19	- 1521,08
2º Período	- 20,81	- 20,81	- 2322,10	- 2320,44

Tabela 5 - Algodão (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	- 0,1789	- 0,0460	- 0,0391	- 0,0195
Desvio-Padrão	0,0955	0,0756	0,0602	0,0483
1º Período	- 0,1138	- 0,0747	- 0,0621	- 0,0829
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031	0,0836	0,0689
2º Período	0,1014	0,0476	0,0071	0,0369
Desvio-Padrão	0,1096	0,0878	0,0703	0,0572

Os preços do cacau, do qual o Brasil é um dos maiores produtores mundiais, elevaram-se segundo o Banco Mundial, devido a uma redução da ordem 10 a 15 % que ocorreu na produção africana. O mercado agrícola do cacau apresentou características de ser eficiente quando analisamos os dados de forma particionada, ou seja, entre quinze de janeiro de 1985 até quinze de janeiro de 1993 e de dezesseis de janeiro de 1993 até quinze de janeiro de 1998 e quando trabalhamos com todos os dados de maneira global, como pode ser observado na tabela 6.

Tabela 6A - Cacau (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 26,84	- 26,83	- 4078,48	- 4071,82
1º Período	- 17,10	- 17,07	- 2049,89	- 2013,59
2º Período	- 20,68	- 20,68	- 2196,21	- 2192,89

Tabela 6 - Cacau (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	-0,1435	- 0,1788	- 0,1436	- 0,1340
Desvio-Padrão	0,0955	0,0756(*)	0,0601(*)	0,0483(*)
1º Período	- 0,1932	- 0,0677	- 0,0769	- 0,0798
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031	0,0843	0,0689
2º Período	- 0,1420	- 0,1741	- 0,1794	- 0,1213
Desvio-Padrão	0,1096	0,0870(*)	0,0703(*)	0,0567(*)

Também os preços de café, do qual o Brasil é o maior produtor e exportador e, atualmente, o segundo maior consumidor mundial, apresentaram forte elevação, acumulando ao longo do tempo estudado alta de cerca de 60 % e alcançando valores elevados desde as geadas que atingiram as lavouras brasileiras em 1994. As incertezas acerca da safra brasileira e uma longa greve de portuários na Colômbia têm sido apontados como fatores responsáveis por esse movimento nos preços. De fato, há algum tempo as cotações do café vêm apresentando significativo potencial de instabilidade, devido as fortes reduções e os decrescentes estoques acumulados junto aos países consumidores, em parte explicados pela crescente adoção de processos do tipo "just in time" nas indústrias de torrefação.

O café teve o seu mercado caracterizado como sendo não eficiente na bolsa de New York quando observamos os seus retornos, seja qual for a maneira que estes dados estivessem sendo analisados, ao nível α de 0.60 e 0.65; porém é eficiente na BM&F no período global e no primeiro período como mostram as tabelas 7 e 8 adiante.

Tabela 7A - Café (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 25,89	- 25,88	- 3364,56	- 3349,59
1º Período	- 15,36	- 15,34	- 1118,81	- 1107,04
2º Período	- 20,74	- 20,74	- 2231,22	- 2227,05

Tabela 7 - Café (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,0557	- 0,0221	0,0536	0,0600
Desvio-Padrão	0,0955	0,0751	0,0601	0,0482
1º Período	- 0,0748	0,0491	0,0646	0,0982
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031	0,0843	0,0689
2º Período	- 0,0589	- 0,0926	0,0154	0,0145
Desvio-Padrão	0,1082	0,0870	0,0699	0,0567

Tabela 8A - Café (BM&F)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 14,21	- 13,98	- 1852,38	- 1609,88
1º Período	- 10,20	- 10,21	- 1219,29	- 1206,55
2º Período	- 9,46	- 9,38	- 617,22	- 583,07

Tabela 8 - Café (BM&F)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,1122	- 0,0308	- 0,0062	- 0,0230
Desvio-Padrão	0,1462	0,1195	0,0987	0,0813
1º Período	- 0,2655	- 0,2361	- 0,2448	- 0,1588
Desvio-Padrão	0,1874	0,1534	0,1279	0,1062
2º Período	0,0969	0,1785	0,0578	0,0867
Desvio-Padrão	0,1874	0,1534	0,1279	0,1063

As variações consideráveis nas exportações do farelo de soja são provocadas por uma alteração nos preços internacionais. A taxa de câmbio real efetiva também tem grande influência sobre o volume exportado de farelo. As exportações de farelo de soja são determinadas, no curto prazo, principalmente por variáveis relacionadas ao mercado externo.

Fazendo a análise do retorno da *commodity* agrícola de farelo de soja na bolsa americana notamos que este mercado foi eficiente quando trabalhamos no período de tempo de quinze de janeiro de 1989 até quinze de janeiro de 1998. Porém quando observamos os dados de maneira particionada, ou seja, entre quinze de janeiro de 1989 e quinze de janeiro de 1993 e de dezesseis de janeiro de 1993 até quinze de janeiro de 1998, este mercado não mais se mostra eficiente, como pode ser observado na tabela 9.

Tabela 9A - Farelo de Soja (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 27,68	- 27,69	- 4823,44	- 4820,92
1º Período	- 16,55	- 16,55	- 1633,53	- 1627,87
2º Período	- 22,27	- 22,28	- 3336,59	- 3336,58

Tabela 9 - Farelo de Soja (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	- 0,0993	- 0,0763	- 0,0521	- 0,0276
Desvio-Padrão	0,0945	0,0751	0,0598	0,0482
1º Período	0,0298	0,0848	0,0661	- 0,0150
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031	0,0836	0,0685
2º Período	0,0718	0,0070	0,0427	0,0325
Desvio-Padrão	0,1082	0,0870	0,0699	0,0567

Com relação aos preços de grãos de soja, milho e trigo, que haviam contraído no segundo semestre de 1996 devido ao crescimento da produção mundial em cerca de 8 %, encontravam-se no final de 1996 em patamares bastante reduzidos. No entanto, ao contrário do que se tem observado nos mercados do milho e do trigo, produtos constantes da pauta de importações brasileira, os preços da soja em grão exportada pelo Brasil voltaram a se elevar fortemente nos primeiros meses de 1997. As principais explicações para esse comportamento diferenciado residem na manutenção da tendência de redução dos estoques de soja nos Estados Unidos, na sensivelmente menor demanda chinesa por milho e trigo e no forte crescimento das ofertas canadense e australiana de trigo e argentina de ambos os produtos.

O mercado agrícola do milho mostrou-se não eficiente, seja de que forma os retornos estivessem sendo observados quer de maneira global, quer de maneira particionada como pode ser visto na tabela 10 e 11 a seguir, com apenas duas exceções no 1º período da BM&F.

Tabela 10A - Milho (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 26,77	- 26,77	- 3972,46	- 3969,90
1º Período	- 15,91	- 15,89	- 1312,07	- 1302,69
2º Período	- 21,80	- 21,79	- 2926,70	- 2923,36

Tabela 10 - Milho (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,0362	0,1117	0,1037	0,1002
Desvio-Padrão	0,0945	0,0751	0,0599	0,0482(*)
1º Período	0,1003	0,0851	0,0574	0,0524
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031	0,0836	0,0685
2º Período	0,1465	0,1281	0,2139	0,1453
Desvio-Padrão	0,1082	0,0870	0,0699(*)	0,0567(*)

Tabela 11A - Milho (BM&F)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 9,45	- 9,47	- 1467,44	- 1467,88
1º Período	- 8,58	- 8,18	306,89	399,08
2º Período	- 6,33	- 5,85	- 494,40	- 234,65

Tabela 11 - Milho (BM&F)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,3102	0,2315	0,0385	- 0,0385
Desvio-Padrão	0,2018	0,1659	0,1379	0,1151
1º Período	0,1836	0,1801	- 0,1381	- 0,2811
Desvio-Padrão	0,2567	0,2111	0,1826	0,1552
2º Período	0,3451	0,1332	0,0697	0,0734
Desvio-Padrão	0,2567	0,2110	0,1826	0,1552

O mercado agrícola da soja em grão mostrou-se eficiente quando analisamos os dados de maneira global e no período de dezesseis de janeiro de 1993 até quinze de janeiro de 1998. Porém, no período de quinze de janeiro de 1989 até quinze de janeiro de 1993 o mercado desta commodity mostrou-se não eficiente, como é exibido na tabela 12.

Tabela 12A - Soja em Grão (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 27,84	- 27,85	- 5003,05	- 5001,95
1º Período	- 16,74	- 16,75	- 1744,35	- 1743,63
2º Período	- 22,25	- 22,26	- 3329,22	- 3329,21

Tabela 12 - Soja em Grão (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	- 0,1130	- 0,1462	- 0,0947	- 0,0655
Desvio-Padrão	0,0945	0,0751	0,0599	0,0482
1º Período	0,1217	0,1043	0,0201	- 0,0379
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031	0,0836	0,0685
2º Período	- 0,1040	- 0,1187	- 0,0242	- 0,0485
Desvio-Padrão	0,1082	0,0870	0,0700	0,0567

O suco de laranja é a commodity que apresenta exportações menos sensíveis a variações dos condicionantes da oferta, o que pode ser explicado pela rígida estrutura do setor exportador desse produto. Isso tem sido associado a uma concentração relativamente elevada, além da utilização de contratos para a comercialização dos produtos no mercado internacional.

Observando o retorno da *commodity* de suco de laranja na bolsa de New York constatou-se que este mercado não foi eficiente no período de quinze de janeiro de 1989 até quinze de janeiro de 1998 (Global) e também quando os dados foram tratados entre quinze de janeiro de 1989 e quinze de janeiro de 1993. Contudo, a partir de dezesseis de janeiro de 1993 este mercado tornou-se eficiente ao nível α de 0.55; 0.60 e 0.65 como pode ser visto na tabela 13.

Tabela 13A - Suco de Laranja (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 25,12	- 25,13	- 2868,37	- 2867,72
1º Período	- 14,55	- 14,49	- 931,84	- 923,01
2º Período	- 20,40	- 20,40	- 2016,51	- 2015,74

Tabela 13 - Suco de Laranja (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,0100	0,0446	0,0262	0,0367
Desvio-Padrão	0,0955	0,0756	0,0601	0,0483
1º Período	0,1661	0,2283	0,3083	0,2553
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031(*)	0,0843(*)	0,0689(*)
2º Período	0,0423	- 0,0486	- 0,0607	- 0,0631
Desvio-Padrão	0,1096	0,0870	0,0701	0,0567

A tabela 14 mostra o retorno da *commodity* agrícola do trigo na bolsa New York comprovando que este mercado não foi eficiente, ou seja, apresentou características de longa dependência ao nível α de 0.65 seja qual fosse o período de tempo em que os dados foram analisados. Para o 2º período analisado, o mercado não foi eficiente para todas as alternativas de poder.

Tabela 14A - Trigo (Nova York)

Tempo	Argumento do Teste de Dickey-Fuller			
	ta	tb	tc	td
Global	- 26,46	- 26,45	- 3716,46	- 3712,70
1º Período	- 16,12	- 16,10	- 1407,31	- 1394,12
2º Período	- 21,01	- 21,02	- 2361,20	- 2357,81

Tabela 14 - Trigo (Nova York)- estimativas de d

Tempo	Alfa α			
	0,50	0,55	0,60	0,65
Global	0,0401	- 0,0004	- 0,0139	0,0051
Desvio-Padrão	0,0945	0,0751	0,0599	0,0482
1º Período	- 0,2096	- 0,0611	0,0575	0,0293
Desvio-Padrão	0,1275	0,1031	0,0836	0,0685
2º Período	0,0575	0,0028	0,0252	0,0231
Desvio-Padrão	0,1082	0,0870	0,0700	0,0567

Chapter 7

Conclusão

A presente tese explorou a idéia de eficiência de um mercado usando um novo procedimento metodológico, ou seja, modelo ARFIMA na análise das *commodities* agrícolas. Baseado nos dados coletados, verificou-se que as *commodities* apresentaram comportamentos distintos em bolsas diferentes. Nesse sentido, a contribuição maior deste estudo foi a utilização desta nova metodologia para analisar esses mercados em diferentes períodos.

Os principais produtos primários (commodities) comercializados internacionalmente têm seus preços determinados ou fortemente influenciados pelas cotações vigentes nas principais bolsas de mercadorias, localizadas em importantes centros financeiros mundiais. Uma característica marcante observada nas cotações desse tipo de produto é a sua significativa volatilidade. Esse fenômeno advém do fato de que, teoricamente, tanto a oferta quanto a demanda desses mercados serem bastante sensíveis em relação aos preços no curto prazo. Isto resulta numa elevada instabilidade de seus preços gerados pelas pequenas variações, choques acontecidos ou esperados, nas suas ofertas e nas suas demandas.

Das *commodities* agrícolas analisadas, apenas o açúcar, o café e o milho foram estudadas nas bolsas de Nova York e Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F).

Um resumo das conclusões sobre eficiência e não eficiência de cada um dos mercados estudados encontra-se na tabela 15.

Tabela 15- Resumo das conclusões sobre eficiência (E) e não eficiência (N) dos mercados estudados

MERCADO	BOLSA					
	NEW YORK			BM&F		
	Global	1^o Período	2^o Período	Global	1^oPeríodo	2^oPeríodo
Açúcar	E	E	E(α_1*)	E(α_1*)	E(α_2*)	N(α_4*)
Álcool	—	—	—	N	N	E
Algodão	E	E	N	—	—	—
Cacau	E	E	E	—	—	—
Café	N(α_2*)	N(α_1*)	N(α_1*, α_2*)	E(α_1*)	E	N
Farelo de soja	E	N(α_4*)	N	—	—	—
Milho	N	N	N	N(α_4*)	N(α_3*, α_4*)	N
Soja grão	E	N(α_4*)	E	—	—	—
Suco de laranja	N	N	E(α_1*)	—	—	—
Trigo	N(α_2*, α_3*)	N(α_1*, α_2*)	N	—	—	—

(*) com uma exceção para um determinado α. $\alpha_1 * = 0.50, \alpha_2 * = 0.55, \alpha_3 * = 0.60, \alpha_4 * = 0.65$.

(**) com duas exceções para determinados níveis de α. $\alpha_1 * = 0.50$ e $\alpha_2 * = 0.55$, $\alpha_3 * = 0.60$ e $\alpha_4 * = 0.65$.

Analisando estes resultados de E (eficiência) e N (não eficiência) pode-se destacar os seguintes aspectos:

O açúcar, apesar de ser uma cultura semiperene, apresenta grande volatilidade de preço, bem como grande dependência de sua produção e comercialização. Isto se explica por que o açúcar mostrou um comportamento sempre eficiente na bolsa de Nova York, porém, quando comercializado na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) o mesmo apresentou apenas eficiência no período global e no primeiro período e longa dependência no segundo período, para quase todos os níveis de α analisados.

O café é uma cultura perene e por isso justifica-se não ser eficiente no período global e nos dois períodos observados na bolsa de Nova York e no segundo período na bolsa da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F). Apesar do declínio da quantidade do produto exportado pelo Brasil, esse mercado mostrou-se eficiente no período de 7 de dezembro de 1999 a 18 de junho de 2001, provavelmente motivado pela maior interação entre produtores e consumidores, através da organização internacional do comércio. A possibilidade do armazenamento e estoque desse produto justifica a sua antipersistência verificada no período citado.

O milho por ser uma cultura anual e utilizado, sobretudo, como ração animal para os rebanhos suíno e bovino e na avicultura, apresentou um mercado sempre não eficiente, seja de que forma os dados tivessem sido analisados na bolsa de Nova York. Verificou-se, também, longa dependência no período global e nos dois períodos parciais quando se observou sua comercialização na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F).

Ao averiguar os resultados da *commodity* agrícola álcool, negociada na BM&F, a mesma apresentou-se eficiente apenas no segundo período de tempo e mostrou-se não eficiente tanto no período global quanto no primeiro período. Isso se deve ao fato desse produto ser usado basicamente como combustível para transportes rodoviários e, dessa forma, sofrer forte influência do mercado internacional de petróleo.

O algodão que possui um ciclo vegetativo em torno de três a quatro anos sendo uma cultura permanente pois permite colheitas por vários anos sem necessidade de novo plantio, apresentou significativo aumento de produção nos continentes norte-americanos, sobretudo EUA, africano e australiano. Estando os estoques mundiais bastante elevados e dado a pequena procura pelo mercado chinês, justifica-se que essa *commodity* apresenta características de eficiência no primeiro período e no período global na bolsa de Nova York devido à estabilidade do preço do mesmo.

O cacau apesar de ser uma cultura perene, ou seja, possui um ciclo longo que requer um investimento elevado para a sua implantação, apresentou sempre eficiência, seja de que forma fossem analisados os seus dados, tanto de maneira global quanto de forma particionada na bolsa de Nova York. Pode-se explicar tal característica pela superprodução dos países do sul da Ásia, ocasionando uma estabilidade nos preços dessa *commodity*.

A soja merece destaque por ser o principal produto agrícola de exportação brasileira. É uma cultura anual e sua comercialização, tanto em farelo quanto em grão, apresentou o seu preço como sendo antipersistente em todo o período observado na bolsa de Nova York, em razão de uma demanda estável dos países desenvolvidos. Contudo, o mercado da *commodity* farelo de soja não é eficiente nos dois períodos particionados e o mercado da *commodity* grão em soja apresenta longa dependência no segundo período de tempo, quando comercializado na bolsa de Nova York. Isso pode ser justificado pela baixa de sua safra, motivada por razões climáticas no Brasil e pelas fortes variações nas cotações dos preços destas no mercado internacional.

A cultura da laranja é perene, isto é, o seu cultivo possui periodicidade longa, com ciclo médio de produção entre 25 a 30 anos e a comercialização de seu suco mostrou-se não eficiente na bolsa de Nova York, no período global e no primeiro período. Isso pode ser explicado tanto pela posição antagônica americana de importador e produtor do suco de laranja em relação ao Brasil, que é basicamente exportador, quanto por razões de ordem climática, geradas pelas fortes geadas no sudeste norte-americano.

O preço da *commodity* agrícola trigo, cuja cultura é anual, foi comercializada na bolsa de Nova York, e apresentou grande variação de eficiência e não eficiência, em função dos diferentes níveis de α. No último período, mostrou-se não eficiente pela pouca demanda desse produto pela China e por um forte crescimento de oferta canadense, australiana e argentina.

Enfim, as conclusões apresentadas sobre a eficiência (E) e não eficiência (N) das *commoditie* agrícolas estudadas tiveram seus cálculos averiguados pelo uso do procedimento metodológico ARFIMA.

Neste sentido apesar das questões de ordem histórica, política, climática e às ligadas aos ciclos vegetativos dos produtos interferirem direta ou indiretamente na eficiência dos mercados, a utilização deste modelo estatístico ARFIMA permitiu classificar o mercado destas *commoditie* agrícolas. Esta é, portanto, a principal contribuição desta tese: Um Estudo de Eficiência de Mercado Usando Séries Temporais com Diferenciação Fracionária: O Caso de *Commoditie* Agrícolas.

Trabalhos complementares de pesquisa surgirão posteriormente que venham a ampliar esta tese. Como exemplo estudo da estimativa do parâmetro fracionário d usando o método de máxima verossimilhança e a identificação dos retornos das *commodities* agrícolas através da análise do modelo ARFIMA onde o ruído branco possui uma estrutura estocástica com volatilidade do tipo GARCH. Provavelmente estes estudos e pesquisas poderão prever valores futuros destes retornos.

Bibliografia

Akaike, H. (1973). *Maximum likelihood identification of gaussian autoregressive moving average models.* Biometrika, 60, 255-265.

Akaike, H. (1974). *A new look at the statistical model identification.*IEEE. Transactions Automatic Control, 19, 716-723.

Andel, J, (1986). *Long memory time series models.* Kybernetika, 22, 105-23.

Anderson, T.W. (1971). *The statistical analysis of time series.* Wiley, New York.

Baillie, R.T., Chung, C.F. and Tieslau, M.A. (1996). *Analysing inflation by the fractionally integrated ARFIMA-GARCH Model.* Journal of Applied Econometrics, 11, 23-40.

Barkoulas, J.T. e Braum, C.F. (1997). *Fractional differencing modeling and forecasting of enrocurrency deposit rates.* The Journal of Financial Research, 20, 355-372.

Barkoulas, J.T. e Braum, C.F. (1996). *Long term dependence in stock returns.* Economics Letters, 53, 253-259.

Barkoulas, J.T.; Braum, C.F. e Caglayan, M. (1999). *Persistence in international inflation rates.* Southern Economic Journal, 65, 900-913.

Barkoulas, J.T.; Labys, W.C. e Onochie, J.I. (1999). *Long memory in futures prices.* The Financial Review, 34, 91-100.

Beran, J. (1994). *Statistics for Long Memory Process.* Chapman Hall: New York.

Black, F. (1976). *Studies of Stock Market Volatility Changes in Procedings of the 1976 Meetings of the Business and Economic Ststistics Section, American Statistical Association.*

Box, G.E.P. e Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis; Forecasting and Control.* San Francisco, Holden-Day.

Brockwell, P. e Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods.* Springer-Verlag.

Brockwell, P. e Davis, R.A. (1996). *Introduction to Time Series and Forecasting.* Springer-Verlag.

Campbell, J.Y. , Lo, A.W. e MacKinlny, A.C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets.* Princeton University Press: Princeton.

Crato, N. e Ray, B.K. (1996). *Model selection and forecasting for long-range dependent processes.* Journal of Forecasting, 15, 107-125.

Dahlhaus, R. (1989). *Efficient parameter estimation for self-similar processes.* Annals of Statistics, 17, 1749-1766.

Diebold, F.X. e Nerlov, M. (1990). *Unit roots in economic time series: a selective survey.* Advances in Econometrics, 8, 3-69.

Diebold, F.X. e Rudebusch, G.S. (1989). *Long memory and persistence in aggregate output.* Journal of Monetary Economics, 24, 189-209.

Dickey, D.A. e Fuller, W.A. (1979). *Distribution of the estimatior for auto-regressive time series with a unit root.* Journal of the American Statistical Association, 74, 427-431.

Dickey, D.A. e Fuller, W.A. (1981). *Likelihood ratio statistics for auto-regressive time series with a unit root.* Econometrica, 49, 1057-1072.

Fama, E.F. e French, K.R. (1992). *The cross-section of expected stock returns.* Journal of Finance, 47, 427-465.

Fama, E.F. e French, K.R. (1993a). *Common risk factors in the returns on stocks and bonds.* Journal of Financial Economics, 33, 3-56.

Fama, E.F. e MacBeth, J.D. (1973). *Risk, return and equilibrium: empirical tests.* Journal of Political Economy, 81, 607-637.

Fama, E.F. (1970). *Efficient capital markets: a review of theory and empirical work.* Journal of Finance, 2, 383-417.

Fama, E.F. (1976). *Foundations of finance.* New York: Basic Books.

Fama, E.F. (1991). *Efficient capital markets: II.* Journal of Finance, 5, 1575-1617.

Fench, K. (1980). *Stock returns and the weekend effect.* Journal of Financial Economics, 8, 55-69.

Fox, R e Taqqu, M.S. (1986), *Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series.* The Annals of Statistics, 14, 517-532.

Fuller, W. (1976). *Introduction of Statistical Time Series.* New York: John Wiley e Sons.

Geweke, J. e Porter-Hudak, S. (1983). *The estimation and application of long memory time series model.* Journal of time series analysis, 4, 221-238.

Granger, C.W.J. e Joyeux, R (1980). *An introduction to long memory time series models and fractional differencing.* Journal of time series analysis, 1, 15-29.

Granger, C.W.J. (1980). *Long memory relationships and the aggregation of dynamic models.* Journal of Econometrics, 14, 227-238.

Granger, C.W.J. e Morgenstern, O. (1970). *The predictability of stock market prices.* Heath-Lexington: Lexington MA.

Hamilton, J.D. (1999). *Time Series Analysis.* Princeton University Press.

Harvey, A.C. (1981). *Time Series Models.* Philip Allan.

Harvey, A.C. (1993b). *Long memory in stochastic volatility.* Mimeo, London School of Economics.

Hassler, U. (1991). *Regression of spectral estimator with fractionally integrated time series.* Institute for Statistics and Econometrics, Free University, Berlin.

Hassler, U. e Wolters, J. (1995). *Long memory in inflation rates: International evidence.* Journal of Business and Economic Statistics, 13, 37-46.

Hosking, J. (1981). *Fractional differencing.* Biometrika, 68, 165-176.

Hosking, J. (1982). *Some models of persistence in time series analysis: theory and practice 1.* North Holland Publishing Company, 641-653.

Hosking, J. (1984). *Modelling persistence in hydrological time series using fractional differencing.* Water Resources Research, 20, 1898-1908.

Hsiek, D. (1989). *Testing for nonlinear dependence in daly foreign exchange rates.* Journal of Business, 62, 339-368.

Hurst, H.E. (1951). *Long-term storage capacity of reservoirs.* Trans. Amer. Soc. Civil Eng., 116, 770-799.

Hurst, H.E. (1956). *Methods of using long-term storage in reservoirs.* Proc. Inst. Civil Eng., 1, 519-543.

Jensen, M.C. (1978). *Some anomalous evidence regarding market efficiency.* Journal of Financial Economics, 6, 95-101.

Jiri Andel (1986). *Long memory time series models*, Kybernetika, 22, 105-123.

Lima, R.C e Ohashi, A.M. (1999). *Long memory in financial market: The efficient market hypothesis and the dynamic behavior of sugar future prieces.* Revista Econômica do Nordeste, 30, 484-493.

Lo, A.W. (1991). *Long-term memory in stock market prices.* Econometrica, 59, 1279-313.

Malkiel, B.J. (1987). *Efficient market hypothesis*, págs. 127-134, in: J. Eatwell, M. Milgate e P. Newman (eds.), *The New Palgrave: Finance,* Macmillan: Londres.

Mandelbrot, B.B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature.* Freeman. New York.

Mandelbrot, B.B. (1971). *A fast fractional Gaussian noise generator.* Water Resources Research, 7, 543-553.

Mandelbrot, B.B. (1963) *The variation of certain speculative prices.* Journal of Business, 36, 394-419.

Mandelbrot, B.B. e Van Ness, J.W. (1968) *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications.* SIAM Review, 10, 442-436.

Mandelbrot, B.B. e Wallis, J.R. (1969a) *Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part One, Averages and variances.* Water Resources Research, 5, 228-241.

Mills, T.C. (1997). *The Econometric Modelling of Financial Time Series.* Cambridge University Press, London.

McLeod, A.I. e Hipel, K. (1978a). *Preservation of the rescaled adjusted range Part 1.a reassessment of the Hurst phenomenon.* Water Resources Research, 14, 491-508.

McLeod, A.I. e Hipel, K. (1978b). *Preservation of the rescaled adjusted range Part 2. Simulation studies using Box-Jenkins models.* Water Resources Research, 14, 509-516.

Nelson, C.R. e Plosser, C.I. (1981). *Trend and random walks in macroecomic time series some evidencie and implications.* Journal of Monetary Economics, 10, 139-162.

Newey, W.K. e West, K.D. (1987). *A simple positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix.* Econometrica, 55, 703-708.

O'Connell, P.E. (1974). *Stochastic Modelling of Long-Term Persistence in Stream Flow Sequences.* PhD thesis, Imperial College, London.

Parzen, E. (1961). *Mathematical consideration in the estimation of spectra.* Technometrics, 3, 167-190.

Perron, P. (1994). *Trend, unit root and structural change in macroeconomic time series*, in: Baskhara Rao, B. (ed.) (1994). *Cointegration for the applied economist.* St. Martin's Press: New York.

Peters, E.F. (1991). *Chaos and Order in the Capital Markets.* New York: Willey.

Phillips, P.C.B. (1987). *Time series regression with a unit root.* Econometrica, 35, 277-301.

Phillips, P.C.B. e Perron, P. (1988). *Testing for a unit root in time series regression.* Biometrica, 75, 335-346.

Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis in Time Series.* Academic Press.

Reisen, A. (1994). *Estimation of the fractional difference parameter in the ARIMA(p,d,q) model using the smoothed periodogram.* Journal of time series analysis, 15, 335-350.

Robinson, P.M. (1995a). *Long-periodogram regression of time series with long range dependence.* Annals of statistics, 23, 1048-1072.

Ross, S.A., Westerfield, R.W. e Jaffe, J.J. (1995). *Administração Financeira: Corporate Finance.* Editora Atlas.

Sowell, F. (1990). *Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series model.* Journal of Econometrics, 53, 165-188.

Sowell, F. (1992). *Modeling long-run behavior with the fractional ARIMA model.* Journal of Monetary Economics, 29, 277-302.

The Economist (1993). *A survey of the fronteirs of finance. 09/10/93, pp 1-20.*

Yajima, Y. (1993). *Asymptotic properties of estimates in incorret ARMA models for long memory time series, in New Directions in Time Series Analysis, Part 2, eds.* Brillinger et al., 375-382.

Wei, W. (1990). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods.* Addison Wesley.

Wu, P. e Crato, N. (1995). *New tests for stationarity and parity reversion: Evidence on New Zealand real exchange rates.* Empirical Economics, 20, 599-614.