



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS
E MATEMÁTICA

ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES

**PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: uma investigação do conceito de fração
sob a ótica da teoria antropológica do didático**

Caruaru
2020

ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES

**PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: uma investigação do conceito de fração
sob a ótica da teoria antropológica do didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa.

Caruaru

2020

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

L864p Lopes, Roberto Nogueira de Sousa.

Praxeologia do professor: uma investigação do conceito de fração sob a ótica da teoria antropológica do didático. / Roberto Nogueira de Sousa Lopes. – 2020.

180 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Edelweis José Tavares Barbosa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2020.

Inclui Referências.

1. Frações. 2. Antropologia - Metodologia. 3. Livros didáticos – Caruaru (PE). 4. Semiótica. 5. Matemática (Ensino fundamental). 6. Didática. I. Barbosa, Edelweis José Tavares (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.)

UFPE (CAA 2020-78)

ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES

**PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: uma investigação do conceito de fração
sob a ótica da teoria antropológica do didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 13/03/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

DEDICO ESTE TRABALHO

AO MEU DEUS,

Ao meu **Pai**, o **Deus** de toda a vida, que perdoa, liberta e salva no Nome Santo de **Jesus**. Porque **dEle** e por **Ele**, e para **Ele**, são todas as coisas; glória, pois, a **Ele** eternamente.

(ROMANOS 11.36).

AGRADECIMENTOS

MODELO PERFEITO DE VIDA E CONDUTA

Essa breve história de gratidão nos mostra que não vencemos sozinhos, que muitas vezes decisões de poucos se revelam futuras conquistas de muitos, que existe um Deus que nos criou para vivermos em comunhão, comunhão esta que se revela perfeitamente em dois mandamentos de alguém que vai além do extraordinário, Ele é Jesus Cristo.

Portanto, iniciarei os meus agradecimentos revelando-lhes o modelo mais perfeito de vida e de conduta, que precisamos todos, praticarmos com primazia, esse modelo se revela nas seguintes palavras: *“Amarás, portanto, o Senhor, teu Deus, de todo o teu coração, de toda a tua alma, de todo o teu entendimento e de toda a tua força”. E o segundo é: “Amarás o teu próximo como a ti mesmo. Não existe qualquer mandamento maior do que estes”. (Marcos 12.30,31).*

AO DEUS DE TODA A GRAÇA E AMOR

A Deus que está nos céus, ao Seu Filho Amando Jesus Cristo, autor da minha e da sua Salvação para todo aquele que nEle crê e o aceita como Senhor e Salvador da sua vida e ao Espírito Santo de Deus, o nosso Ajudador, que nos enche de Inspiração, Amor e Graça, dedico mais que essa conquista, dedico a minha existência, pois não há mais sentido viver sem ser para Ele e por Ele. Não há uma vitória sequer, que não tenha acontecido pela perfeita e agradável permissão de Deus. Ao pai, minha maior gratidão.

UMA BREVE HISTÓRIA DE VIDA

Acredito também que foram estes dois mandamentos do Senhor que inspiraram um homem do campo, há pouco mais de 100 anos, que deixou para trás tudo que conquistou na zona rural da cidade de Afogados da Ingazeira em Pernambuco para permitir aos seus filhos e sobrinhos suas próprias conquistas através dos estudos.

Imaginar a tamanha coragem desse homem que mesmo morando num lugar “inóspito”, castigado pela estiagem, o que trazia grandes dificuldades, que apesar desses obstáculos pôde proporcionar um norte para sua família, e se a seca foi um motivador, o desejo de oportunizar o estudo formal aos filhos e sobrinhos foi o

impulsionador, não tenho dúvidas de que a sua coragem para fazer a “travessia” do interior para a cidade só poderia ter vindo de Deus.

Hoje, eu tenho o entendimento que meu avô não estava só, Deus estava com ele, cuidando de forma especial daquela família, não é por acaso que o seu nome Manoel deriva do hebraico Immanuel que significa “*Deus conosco*”.

O meu avô foi o instrumento inicial que Deus usou para as minhas batalhas já vencidas e para tantas outras vitórias como esta que se concretiza hoje. Foi assim que a minha história iniciou, até onde eu a conheço.

Portanto, rendo graças a Deus no Nome Santo do seu Filho Amado Jesus Cristo que me deu a sabedoria para chegar até aqui e por mover pessoas como o Sr. Manoel Nogueira, meu avô materno, e tantas outras que menciono também com gratidão a partir de agora.

À MINHA FAMÍLIA

Aos meus avós maternos, o Sr. Manoel Nogueira de Souza e a Sra. Antônia Guilherme dos Santos, aos meus avós paternos, o Sr. Antônio Lopes Sobrinho e a Sra. Engrácia Maria de Siqueira, ao meu irmão Robério Nogueira de Souza Lopes, meu parceiro nas várias brincadeiras nos tempos de criança e a minha maior referência de pai, o Sr. Severino Joaquim da Silva (Todos *In memoriam*).

Retomando a linha do tempo, na cidade educou os filhos e os sobrinhos, dentre esses filhos, a minha mãe, a Sra. Francisca Nogueira de Souza Lopes, para a qual eu dedico alguns sinônimos: guerreira, filha cuidadosa, mãe e avó dedicada, sempre saudosa com os bons momentos do passado, a ela eu devo grande parte do que sou hoje, para ela os meus mais fortes agradecimentos e o meu *te amo mãe!*

Seguindo em frente, menciono agora outro daqueles filhos cuja Educação passou a ser o seu campo de trabalho, a minha tia Miriam Nogueira, ela foi minha inspiração para cursar Pedagogia, essa inspiração vem amoldada em dedicação e ética pelo que faz e o resultado aritmético só poderia equivaler a um profissional exemplar da Educação, também não poderia deixar de citar o seu esposo, o tio Cássio que é também para mim um exemplo de bom pai e bom filho, a vocês os meus agradecimentos e todo o meu amor.

Avançando nessa odisseia, logo após a separação dos meus pais, fomos morar em Caruaru, em seguida no Recife, depois em Olinda e novamente em Caruaru, a partir daí, chego a minha referência maior de pai, o Sr. Severino Joaquim da Silva, “Seu Biu” era como o chamavam, o segundo casamento da minha mãe,

juntos eles deram continuidade ao que o meu avô Manoel fez lá atrás pelos filhos e sobrinhos, atitude que repercute agora nos netos e dentre eles, eu. A esse bom homem que Deus colocou nas nossas vidas, todo o meu agradecimento amor.

Sendo fiel à linha temporal que Deus assim definiu, falo agora de Brennda Nattany de Souza Nogueira, a minha ajudadora, esposa bela e usada por Deus para abençoar a minha vida e a nossa família, obrigado por suportar minhas ausências, você também é uma grande motivadora das minhas conquistas, amo você! O que falar então da minha continuidade, as minhas filhas, o meu maior presente de Deus, na ordem de idade, Júlia Mariana, Maria Heloísa e Maria Clara, três bênçãos que me fazem feliz, vocês são um dos principais motivos para acordar todos os dias rendendo graças ao Senhor, além de serem inspirações para que eu corra atrás dos meus objetivos, como este. Amo muito vocês!

Agradeço a minha irmã Vanessa Nogueira da Silva, aos seus filhos Victor e Pedro e ao seu esposo Eliphas. Amo todos vocês!

Agradeço aos meus sobrinhos Ana Karla Nogueira e Leandro Nogueira, vocês são muito importantes na minha vida. Amo muito vocês!

Agradeço também o meu irmão de consideração e amigo Maurício Gualberto Pelloso, aos seus filhos Maurício Filho, Henrique e Filipe e a sua esposa Magareth, família sempre presente e contribuindo na minha vida pessoal e profissional.

A toda minha família, todo o meu agradecimento e todo o meu amor.

AOS AMIGOS E COLEGAS DE TURMA

A todos os meus colegas da turma do Mestrado (2018), em especial a amigo Leonardo Augusto, meu parceiro nos estudos das disciplinas do mestrado o qual considero uma pessoa iluminada por Deus e de uma inteligência rara. Destaco que ele e sua esposa Angélica foram abençoados por Deus, serão pais em breve. Ao amigo Rafael Silva, sempre solícito e disposto a ajudar com o seu marcante altruísmo. A minha amiga Rayssa Feitoza por sua dedicação partilhada e bondade em ajudar e se preocupar com todos. Saibam que as suas ações me trouxeram uma conclusão, que esse mestrado foi além da aquisição do conhecimento formal, ele foi palco para a construção de grandes amizades. A vocês, os meus agradecimentos e toda a minha admiração.

AOS AMIGOS E COLEGAS DE PROFISSÃO

À equipe da EREM Nicanor Souto Maior nas pessoas de Rafaela Sales, amiga que me acompanhou e incentivou nos momentos que mais precisei. Ao amigo

Ricardo Bruno, sempre disposto a ajudar nas traduções para o abstract. Ao amigo Jonh Cleidson, incentivador que sempre se regozija com o sucesso do próximo, às amigas Patrícia Aroeira (gestora) e Maria de Lourdes Florêncio (Assistente de gestão), pela compreensão aos meus ajustes de horários, às amigas Kyrlla Feitosa (Analista em Gestão), Clécia Maria (secretária) e Keyla Cristina (assistente administrativo) pelo incentivo e aos demais professores amigos e colegas de trabalho que compõem essa prestigiosa equipe. A vocês, os meus agradecimentos, admiração e amizade.

AOS PESQUISADOS

Ao professor de matemática e aos seus alunos da turma do 6º ano “A”, grandes motivadores dessa pesquisa, bem como à gestora da escola pesquisada, pela solicitude em conceder o espaço para realização da pesquisa, bem como a . A vocês, os meus agradecimentos, admiração e amizade.

AO PROGRAMA

Aos professores e ao coordenador do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), pela dedicação e profissionalismo ao ensino. A vocês, os meus agradecimentos, admiração e amizade.

À secretaria do PPGECM, na pessoa de Rodrigo Melo (2018-2019) e Helder Caran e Ellen, pela agilidade e presteza nas aberturas dos respectivos processos de qualificação e defesa. A vocês, os meus agradecimentos pelo profissionalismo.

AO MEU ORIENTADOR

Quero me dirigir agora de forma especial ao meu amigo e orientador, o professor Edelweis José Tavares Barbosa para dizer-lhe que você tem o Dom daqueles que perseveram, atitude vista naqueles que representam a Jesus, que a sua tranquilidade é a sua marca registrada, pois com ela você exerceu o seu papel de orientador com a sabedoria que Deus te deu, pois compreendeu e incentivou quando me senti sobrecarregado, cobrou quando foi necessário e o mais importante de tudo, você acreditou naquilo que me propus fazer. Obrigado professor Edelweis por acreditar em mim.

À BANCA DA DEFESA

Aos componentes da Banca da Defesa: Prof. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa, Prof. Dr. Fernando Emílio Leite de Almeida – UFPE, Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos – UFPE, Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho – UFPE/CAA (Suplente) e Profa. Dra. Veronica Gitirana Gomes Ferreira – UFPE

(Suplente). Por estarem dispostos em cumprir com maestria e profissionalismo a sua função. A vocês, os meus agradecimentos, admiração e amizade.

À UMA PESSOA ESPECIAL: Prof^a. Dra. Ana Paula de Avelar Brito Lima – UFRPE

Pelas importantes contribuições a esse trabalho. A você, os meus agradecimentos, admiração e amizade.

AOS PROFESSORES DO PROGRAMA

Por suas contribuições a este professor e pesquisador em crescimento, por se permitirem inspirar-me e praticar um dos mais belos atos do professor, dividir conhecimentos.

À INSTITUIÇÃO

À UFPE-CAA/CAPES, Instituições prestigiosas e de grande importância para o crescimento das ciências e do bem comum e social.

AOS CONVIDADOS

Aos presentes nesse importante momento para mim. A vocês, os meus agradecimentos, admiração e amizade.

PARA QUEM CHEGAR A LER ESTE TRABALHO

Se, com a tua boca, confessares Jesus como Senhor e, em teu coração, creres que Deus o ressuscitou dentre os mortos, serás salvo. Além disso, para conservarmos a nossa salvação, precisamos todos, termos uma vida consagrada ao Senhor (Hb 11.6), em relacionamento com Ele, que é o hábito de praticar considerando, atentando e valorizando os princípios de: **Congregar** (Hb 10.25); **Ler a Palavra** (1Tm 4.13); **Ouvir a Palavra** (Rm 10.17; Pv 4.20); **Meditar na Palavra** (Sl 1.1,2; Cl 3.1,2); **Falar alinhado à Palavra** (Js 1.8); **Orar com o espírito, em línguas** (1Co 14.4,14,15); **Orar com o entendimento** (1Co 14.15); **Interceder** (1Tm 2.1-4); **Agradecer, louvar e adorar ao Senhor** (Cl 3.16; Sl 34.1; Jo 4.20-24); e, **Jejuar** (Mt 17.21; Dn 9.3).

RESUMO

Realizamos um estudo que buscou investigar se as praxeologias do professor se aproximam ou se distanciam das praxeologias propostas pelos autores do livro didático em relação ao conceito de fração em uma turma do sexto ano do ensino fundamental. Para isso, categorizamos, analisamos e comparamos as praxeologias do professor e do livro didático que ele utilizou para planejar e executar o trabalho com frações na sala de aula. Fundamentamos a nossa pesquisa nos elementos teóricos e metodológicos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard e seus colaboradores (1991, 1999). Utilizamos também, para efeito de compreensão dos construtos decorrentes das muitas representações assumidas pelas frações, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Duval (1988, 1993, 1998, 2003). A investigação se constitui uma pesquisa de campo com abordagem de natureza qualitativa, tipificada em exploratória e descritiva, cujo cenário de investigação foi uma escola do município de Caruaru – PE. O livro didático analisado foi *Vontade de Saber Matemática* de Souza e Pataro (2015). Os registros do trabalho docente foram realizados por meio de vídeogravação e entrevista semiestruturada. Os resultados iniciais das transcrições das aulas do professor revelam que a sua *relação ao saber* ocorreu a partir do conjunto praxeológico, no qual se constatou o trabalho docente como organizador dos Tipos de tarefa e subtipos de tarefa e das técnicas de crescente complexidade praticadas rotineiramente e problematizadas na sala de aula. O professor abordou todos os Tipos e subtipos de tarefa apresentadas na categorização dos conceitos de fração, exceto o Tipo de tarefa referente ao significado de porcentagem, que foi substituído por divisão de frações. Constatamos também que o professor privilegiou um ensino com base em algoritmos em detrimento das conceituações, semelhantemente ao que foi apontado na avaliação do livro didático pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2017). O Tipo de tarefa T₂ com 27,69% das tarefas do livro didático e 33,33% das tarefas propostas pelo professor foi o modelo dominante. Verificamos que o professor trabalhou todas as técnicas sugeridas no livro didático, exceto a técnica mista $\mathcal{T}_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$, pois se refere ao trabalho com porcentagem. Na entrevista, observamos que o professor trabalhou um livro que não foi sua opção de escolha. Observamos ainda que ele fez alterações no currículo proposto pelos autores. Concluímos essa pesquisa que buscou observar a trajetória das frações como saber a ensinar até se consolidar como saber ensinado na sala de aula, na qual presenciamos o professor como mediador desse processo de transformação do saber.

Palavras-chave: Ensino de frações. Praxeologias do professor. Livro didático. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

We carried out a study that sought to investigate whether the teacher's praxeologies approach or distance themselves from the praxeologies proposed by the textbook authors in relation to the concept of fraction in a class of the sixth grade of elementary school. Thus, we categorize, analyze and compare the praxeologies of the teacher and the textbook that he used to plan and execute the work with fractions in the classroom. We base our research on the theoretical and methodological elements of the Anthropological Theory of Didactics (TAD), proposed by Chevallard and his collaborators (1991, 1999). We also used, for the purpose of understanding the constructs resulting from the many representations assumed by the fractions, the Theory of Semiotic Representation Records (TRRS), by Duval (1988, 1993, 1998, 2003). The investigation constitutes a field research with a qualitative approach, typified in exploratory and descriptive, whose research scenario was a school in the municipality of Caruaru - PE. The textbook analyzed was Souza and Pataro's Will Know Mathematics (2015). The records of the teaching work were carried out through video recording and semi-structured interviews. Initial results of the transcriptions of the teacher's classes reveal that their relationship to knowledge occurred from the praxeological set, in which the teaching work as an organizer of the Task types and task subtypes and the techniques of increasing complexity practiced routinely and problematized was verified. in classroom. Teacher addressed all types and subtypes of tasks presented in the categorization of fraction concepts, except the Type of task referring to the meaning of percentage, which was replaced by division of fractions. We also found that the teacher favored teaching based on algorithms to the detriment of conceptualizations, similarly to what was pointed out in the evaluation of the textbook by National Textbook Program – PNLD (2017). Task type T₂ with 27,69% of textbook tasks and 33,33% of tasks proposed by the teacher was the dominant model. We found that the teacher worked on all the techniques suggested in the textbook, except for the mixed technique $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$, as it refers to work with a percentage. In the interview, we observed that the teacher worked on a book that was not his choice. We also observed that he made changes to the curriculum proposed by the authors. We concluded this research that sought to observe the trajectory of fractions as knowing how to teach until consolidated as knowledge taught in the classroom, in which we witnessed the teacher as a mediator of this process of knowledge transformation.

Keywords: Teaching fractions. Teacher praxeologies. Textbook. Anthropological Theory of Didactic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Relação simbólica fracionária	31
Figura 2 –	Modelando a atividade humana	53
Figura 3 –	Evolução Praxeológica	55
Figura 4 –	Figuras que requerem a mobilização da concepção parte/todo	74
Figura 5 –	Extrato de resolução sobre fração na forma mista	92
Figura 6 –	Extrato de resolução sobre equivalência de frações	93
Figura 7 –	Extrato de resolução sobre a forma irreduzível	94
Figura 8 –	Extrato de resolução sobre adição e subtração de frações com mesmo denominador	95
Figura 9 –	Extrato de resolução sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes pelo artifício da equivalência	96
Figura 10 –	Extrato de resolução sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes pelo artifício do m.m.c.	97
Figura 11 –	Extrato de resolução sobre o produto de uma fração por um número	98
Figura 12 –	Extrato de resolução sobre o produto entre frações.....	99
Figura 13 –	Extrato de resolução sobre fração centesimal e porcentagem pelo artifício da equivalência (exemplo 1)	100
Figura 14 –	Extrato de resolução sobre fração centesimal e porcentagem pelo artifício da equivalência (exemplo 2)	101
Figura 15 –	Entrevista semiestruturada	104
Figura 16 –	Cálculo da forma mista de uma fração imprópria por meio da técnica $\tau_{DNDP(implícita)}$	112
Figura 17 –	Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{DPF(pic/aux)}$; $\tau_{DNDP(implícita)}$	132
Figura 18 –	Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{MND(NC)}$ _ $\tau_{DND(NC)}$; $\tau_{DPF(pic/aux)}$	134
Figura 19 –	Extrato de resolução utilizando a técnica $\tau_{DND(NC)}$	135

Figura 20 –	Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{SN(RD)}$; $\tau_{DPF(pic/aux)}$	136
Figura 21 –	Extrato de resolução utilizando a técnica mista $\tau_{MND(NC)_SN(RD)}$	138
Figura 22 –	Extrato de resolução utilizando a técnica mista $\tau_{FDF_D(MMC)_SN(RD)}$	139
Figura 23 –	Extrato de resolução utilizando a técnica mista $\tau_{MNQ_DND(NC)}$	140
Figura 24 –	Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{DPF(pic/aux)}$; $\tau_{M(NsDs)_DND(NC)}$	141
Figura 25 –	Extrato de resolução utilizando a técnica mista $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$ (exemplo 1)	143
Figura 26 –	Extrato de resolução utilizando a técnica mista $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$ (exemplo 2).....	144
Figura 27 –	Mapa conceitual dos Tipos e subtipos de tarefas abordados pelo professor e pelos autores do livro didático <i>Vontade de Saber – Matemática</i>	145
Figura 28 –	Distribuição dos campos da matemática escolar no livro <i>Vontade de Saber – Matemática</i>	151

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Momentos Didáticos	61
Quadro 2 –	Escala dos níveis de co-determinação didática	62
Quadro 3 –	Diferenciação entre Tratamento e Conversão	65
Quadro 4 –	Resumo das múltiplas representações assumidas pelas frações	70
Quadro 5 –	Ciclo da atividade e da identidade profissional docente	80
Quadro 6 –	Ranking Municipal dos Livros Didáticos mais adotados (6º ao 9º ano), PNLD (2017-2019)	84
Quadro 7 –	Ranking Nacional dos Livros Didáticos mais adotados (6º ao 9º ano), PNLD (2017-2019)	85
Quadro 8 –	Comparativo entre as orientações para o ensino de frações sugeridas pelos autores do livro didático e aquelas efetivamente utilizadas pelo professor nas suas aulas	86
Quadro 9 –	Estrutura curricular e recursos para o ensino de frações na versão do livro-texto Vontade de Saber Matemática (2015)	87
Quadro 10 –	Resumo dos conceitos do livro didático que apresentam Tarefas cujas técnicas denotam apenas a conversão de registros.....	91
Quadro 11 –	Resumo dos conceitos do livro didático que atendem à ecologia do bloco prático conforme Bosch; Chevallard (1999, p. 85-86)	102
Quadro 12 –	Indicadores teórico-metodológicos da pesquisa	105
Quadro 13 –	Fluxograma procedimental da pesquisa	106
Quadro 14 –	Recorte da fala do professor sobre a alteração no currículo de Matemática (Porcentagem por Divisão de frações)	110
Quadro 15 –	Organização matemática pontual do professor	111
Quadro 16 –	Recorte 3, fala do professor P sobre forma mista	113
Quadro 17 –	Recorte da fala do professor sobre a escolha do livro didático ..	115
Quadro 18 –	Recorte da fala do professor sobre a utilização do livro didático	116

Quadro 19 –	Recorte da fala do professor sobre adequações ao livro didático	116
Quadro 20 –	Os Tipos de tarefas abordados pelo professor	117
Quadro 21 –	Recorte 12, fala do professor sobre a ideia de fração	118
Quadro 22 –	Recorte 12, fala do professor sobre a História das frações	119
Quadro 23 –	Descrição dos momentos didáticos do professor	120
Quadro 24 –	Descrição dos <i>Topos</i> do professor	122
Quadro 25 –	Recorte da fala do professor sobre o Bloco I da entrevista	123
Quadro 26 –	Recortes da fala do professor sobre o Bloco II da entrevista	124
Quadro 27 –	Recorte da fala do professor sobre o Bloco III da entrevista	126
Quadro 28 –	Sequência do conteúdo frações no livro didático	128
Quadro 29 –	Abordagens sobre o ensino de frações no livro didático	129
Quadro 30 –	Recorte da fala do professor sobre forma mista	132
Quadro 31 –	Descrição dos momentos didáticos do professor	148
Quadro 32 –	Recorte da fala do professor sobre a alteração curricular	156
Quadro 33 –	Comparativo dos Tipos e subtipos de tarefas e das técnicas do livro didático e do professor	156
Quadro 34 –	Tipos e subtipos de tarefa mais requisitados no livro didático ...	159
Quadro 35 –	Comparativo dos Tipos e subtipos de tarefas e das técnicas mais requisitados pelo livro didático e pelo professor	159

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 –	Proporção dos tipos de tarefas (T) encontradas para um total de 18 exemplificações apresentadas no livro didático	152
-------------	---	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Modalidades de escolas que compõem a Rede Municipal da cidade de Caruaru-PE	83
Tabela 2 –	Os Conceitos e subconceitos sobre frações nas aulas do professor cujas técnicas tratam apenas da conversão como mudança de registro	109
Tabela 3 –	As Tarefas e os tipos de tarefas sobre frações nas aulas do professor cujas técnicas tratam da conversão de registro e do tratamento de representação	109
Tabela 4 –	Comparativo entre os Tipos de tarefas referentes ao ensino de frações pelo professor e aquelas sugeridas no livro didático	114
Tabela 5 –	Tipos e subtipos de tarefas do livro didático	147

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CONEP	Comissão Nacional de Ética em Pesquisa
HD	Hard Disk
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LD	Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MER	Modelo Epistemológico de Referência
NC-DD	Níveis de Co-determinação Didática
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PC/PE	Parâmetros curriculares de Pernambuco
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PP/SEDUC	Proposta Pedagógica da Secretaria de Educação Municipal de Caruaru
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SAEPE	Sistema de Avaliação da Educação de Pernambuco
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCLE	Termo de Consentimento Livre Esclarecido
TD	Transposição Didática
TDAH	Transtorno de Déficit de Atenção com Hiperatividade
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
TRRS	Teoria dos Registros de Representações e Semióticas
UFPE/CAA	Universidade Federal de Pernambuco / Centro Acadêmico do Agreste

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	REFLEXÕES E CONTEXTOS HISTÓRICO-CRÍTICOS	29
2.1	FRAÇÕES, DA HISTÓRIA À EVOLUÇÃO CONCEITUAL E SIMBÓLICA	29
2.2	DA PRÁTICA À PRÁXIS DOCENTE	33
2.3	O LIVRO DIDÁTICO, DO CONTEXTO HISTÓRICO À SUA ABRANGÊNCIA NAS INSTITUIÇÕES	37
3	POR DENTRO DA TEORIA	40
3.1	TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA, COMPREENDENDO A TRANSFORMAÇÃO DOS SABERES	40
3.2	TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)	50
3.2.1	As relações institucionais na TAD	50
3.3	ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA OU PRAXEOLOGIA DE FATO	53
3.3.1	Construção da realidade matemática a partir da sua praxeologia ou organização	55
3.3.2	Formas mobilizadoras dos estudos didáticos a partir da sua praxeologia	57
3.3.3	Trabalhando a relação entre as praxeologias com os Níveis de Codeterminação Didática (NC-DD)	61
3.4	COMPREENDENDO OS REGISTROS DAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES FRACIONÁRIAS	62
3.4.1	Abrangência das representações conceituais das frações	69

4	CAMINHO METODOLÓGICO DA PESQUISA	76
4.1	ABORDAGEM INVESTIGATIVA	76
4.2	<i>LOCUS</i> DA PESQUISA	78
4.3	OS PARTICIPANTES DA PESQUISA	79
4.4	PROCEDIMENTOS PARA GERAÇÃO DE DADOS	81
5	ELEMENTOS DO LIVRO VONTADE DE SABER – MATEMÁTICA E DAS AULAS DO PROFESSOR	83
5.1	ABRANGÊNCIAS INSTITUCIONAIS DO LIVRO DIDÁTICO	83
5.2	ESTRUTURA DO LIVRO DIDÁTICO	86
5.3	ANÁLISES <i>A PRIORI</i> DO LIVRO DIDÁTICO	88
5.3.1	1ª Análise do livro didático	90
5.3.2	2ª Análise do livro didático (Tipos, subtipos de tarefa e suas técnicas)	92
5.4	REGISTROS DO TRABALHO DO PROFESSOR	102
5.4.1	Filmagens e transcrições	103
5.4.2	Entrevista semiestruturada	103
5.5	SOBRE AS PRAXEOLOGIAS DO PROFESSOR E DO LIVRO DIDÁTICO	104
6	ANÁLISES, INTERPRETAÇÕES E RESULTADOS	107
6.1	AS FRAÇÕES E O TRABALHO DO PROFESSOR	107
6.2	AS PRAXEOLOGIAS OU ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICA DO PROFESSOR	107

6.2.1	Analisando as organizações matemáticas do professor	108
6.2.2	O professor e sua Organização Matemática Pontual	111
6.2.3	Análise das Organizações Didáticas das aulas do professor	116
6.3	ANÁLISE DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR	122
6.4	ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO	127
6.4.1	Apresentação e organização das frações no livro didático	127
6.4.2	O livro didático Vontade de Saber – Matemática	128
6.4.3	Análise praxeológica sobre o ensino de frações	130
6.4.4	Síntese avaliativa do livro didático Vontade de Saber – Matemática	145
6.5	SÍNTESE CONCLUSIVA DO LIVRO DIDÁTICO VONTADE DE SABER – MATEMÁTICA	152
6.6	COMPARAÇÃO ENTRE AS PRAXEOLOGIAS PROPOSTAS NO LIVRO DIDÁTICO E AQUELAS EFETIVAMENTE TRABALHADAS PELO PROFESSOR	156
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	162
	REFERÊNCIAS	166
	APÊNDICE A – AULAS DO PROFESSOR	173
	APÊNDICE B – ENTREVISTA COM O PROFESSOR	175
	ANEXO A – MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO (TCLE)	177

ANEXO B – COMPROVANTE DE ENVIO DO PROJETO AO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA (CEP) VIA PLATAFORMA BRASIL.....	179
ANEXO C – APROVAÇÃO DO PROJETO PELO CONSELHO DE ÉTICA EM PESQUISA (CEP), CONFORME PARECER 3.443.021	180

1 INTRODUÇÃO

O exercício da docência em matemática na educação básica nos revelou uma preocupação que foi tomando forma ao longo dos últimos anos, emergiam então, situações e fatos que mais tarde seriam os motivadores do nosso interesse sobre o ensino e pesquisa sobre os números racionais e mais especificamente sobre frações devido à complexidade do seu conceito. Essas situações começaram a se desenhar a partir da verificação do baixo rendimento escolar dos alunos, fato que repercutiu diretamente no processo de ensino e aprendizagem e que no final do ano letivo, se materializaria em reprovação ou no aumento do número de alunos aprovados com dependência em matemática no sistema de progressão parcial conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB, Lei 9394/96, Art. 24, Inciso III. (BRASIL, 1996).

Diante dessas inquietações, procuramos alternativas que pudessem minimizar ou mesmo solucionar as deficiências encontradas no ensino de *frações* e dessa forma, subsidiar meios para que os alunos aprendam os conhecimentos matemáticos, em especial, *frações*, visto que esses são essenciais para o desenvolvimento de questões pertinentes ao amplo currículo de matemática.

Para um estudo inicial sobre o nosso objeto *frações*, consideramos as orientações requeridas e apresentadas nos textos legais: Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997/1998), Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017), Parâmetros Curriculares de Pernambuco – PC/PE (2012/2014) e a Proposta Pedagógica da Secretaria de Educação de Caruaru – PP-SEDUC (2018), por serem documentos que servem de base para o desenvolvimento do trabalho docente junto à instituição (escola).

Essa busca nos revelou em primeira mão que no Brasil é dada uma atenção ao ensino de *frações* desde o 1º ciclo da educação básica, mas sua sistematização e escrita só iniciam a partir do 2º ciclo (4º e 5º anos) e de forma mais generalista vai até o 3º ciclo (6º e 7º anos) da educação básica, embora os PCN (1998) instruem a sua presença até o 4º ciclo ou mais especificamente, até o 8º ano. A partir daí não se tem mais vestígios do assunto nem do ensino de frações nos anos curriculares que seguem, passando a exercer apenas relevância à aprendizagem e/ou desenvolvimento de questões de outros conteúdos da sequência curricular.

Diante desse fato, emergem mais inquietações: *o que fazer com os alunos que não apreenderam sobre frações até o último ano em que se vê o assunto na grade curricular da educação básica? Como efetuar cálculos dos demais assuntos da sequência curricular que dependem de certo conhecimento sobre frações? Como fica o êxito e a proficiência nos exames internos e externos (sucesso escolar e profissional, respectivamente) daqueles alunos que não conseguiram compreender esse assunto dentro da cronologia estabelecida para o seu ensino?*

Estas e outras perguntas se originam de realidades não muito distintas de escolas que oferecem a educação básica, sejam elas de ensino fundamental (que realizam o ensino de frações) ou médio (que necessita desse ensino), realidades presenciadas ou mesmo vividas intensamente por professores e alunos e que refletem as deficiências mútuas a cerca do ensino e aprendizagem de frações, cada qual no seu contexto.

Essas deficiências chamaram a atenção de pesquisadores como Kerlake (1986), Dante (1987), Silva (1997; 2005), Nunes (2003), Valera (2003), Santos (2005), Bertoni (2009), entre outros, cujos trabalhos reforçam a importância da nossa temática além de contribuir enormemente para a qualidade do ensino da matemática e em especial de *frações* no 6º ano, por ser este, o primeiro ano das séries finais do ensino fundamental cujo assunto frações é visto de forma mais abrangente.

Wu (1998) considera o ensino de frações um assunto delicado, dada a sua abordagem no Ensino Fundamental, apresentando alto nível de abstração conceitual envolvendo classes de equivalência, diferentes significados e múltiplas representações. David; Fonseca (1997) reforçam sobre a importância do trabalho com números racionais e a sua representação fracionária estarem voltados para um ensino que se preocupe com o aspecto conceitual.

Outro dado importante diz respeito ao ensino dos números racionais em sua representação fracionária, que na maioria das escolas, “começam informando as crianças sobre nomes e símbolos de frações, apresentando quadrados, retângulos ou círculos divididos e parcialmente pintados” Bertoni, (2009, p. 16), ou seja, resume-se ao padrão didático básico que compreende aulas expositivas com “questões-modelo”, seguidas de uma bateria de exercícios repetitivos, em que o livro didático reina, geralmente, como o único material de apoio para a elaboração das estratégias didáticas das aulas de muitos professores. Segundo Gérard e Roegiers

(1998), o livro didático é “um instrumento impresso, intencionalmente estruturado para se inscrever num processo de aprendizagem, com o fim de lhe melhorar a eficácia” (p.19). Contudo, acreditamos que o livro didático não pode ter o *status* de único material de apoio didático para o professor, apesar da sua importância para o processo de ensino e aprendizagem.

Essa grande função atribuída ao livro didático por parte dos diferentes contextos escolares e, principalmente por parte do professor, não atende ao que é requerido para a construção do conceito de *frações*, pois, segundo Dante (1987, p. 32-33) prevalece ainda, um ensino focado em métodos de memorização, repetição e fixação, desprovendo os estudantes de práticas que os levem ao exercício do raciocínio, do pensar por si próprios, de experimentar as suas ideias. Para esse autor, se há uma necessidade de se utilizar tais métodos, é importante considerar que o caminho mais eficaz é o de perceber nas curiosidades e questionamentos dos estudantes um caminho para o incentivo de iniciativas que favoreçam a exploração e a descoberta de conceitos.

Por fim, precisamos considerar outro aspecto inerente ao ensino do conceito de *frações*, que segundo Valera (2003), diz respeito ao uso social e escolar dos números racionais, cuja representação dos mesmos no contexto social se dá sob a forma de números decimais, restringindo a forma fracionária e conseqüentemente, não permitindo a familiarização dessa representação no cotidiano do estudante.

Como forma de superar essa dissociação entre o seu pouco uso na forma fracionária frente à praticidade social ao utilizar mais a representação decimal, a escola procura no seu currículo, dar maior ênfase à representação fracionária, causando uma dicotomia no âmbito escola-sociedade, ou seja, entre o que a escola ensina e o que será utilizado fora dela, fato que repercute diretamente em três contextos, o primeiro diz respeito à significação e contextualização daquilo que é ensinado ao estudante em que, a falta do uso da forma fracionária cotidianamente, resulta na falta de certas situações ou exemplificações reais que poderiam ser utilizadas didaticamente pelo professor para dar sentido àquilo que é ensinado.

Por outro lado, o segundo contexto infere diretamente sobre a abstração da representação fracionária e sua complexidade para uso cotidiano e por isso menos requisitada socialmente. Um terceiro e último contexto aponta para a importância de se aprender *frações* para suprir necessidades vindouras tais como a compreensão de conteúdos requisitados na sequência do currículo de matemática da educação

básica, fator que traz ainda outra preocupação, a falta de proficiência do professor em relação ao conhecimento de métodos mais eficazes para estabelecer relações com os números racionais, principalmente com a sua representação fracionária, impedindo-o de promover situações que levem o ensino de frações a uma aplicabilidade eficiente e, conseqüentemente, a um contexto significativo.

Todos esses fatores, que de uma forma ou de outra estão interligados, repercutem diretamente nos baixos resultados escolares e conseqüentemente nos índices de desempenho de indicadores como o Sistema de Avaliação da Educação Básica – Saeb (Prova Brasil) e do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE, quando analisadas as questões que envolvem parcialmente ou totalmente, o assunto frações. Sendo assim, esse trabalho objetiva responder à seguinte problemática: *Qual a distância entre as praxeologias do professor e aquelas apresentadas no livro didático utilizado por ele para preparar as suas aulas sobre o conceito de fração no 6º ano do ensino fundamental?*

Essas dificuldades podem ser verificadas no grande quantitativo de estudos encontrados sobre frações, fato que evidencia duas situações a serem consideradas, a primeira diz respeito à importância do seu ensino como elemento essencial no currículo escolar e a segunda converge com a necessidade de qualificar esse ensino, focando na promoção de melhoria dos métodos e processos de ensino de *frações* na educação básica.

A pesquisa tem como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), cujos elementos que a compõem servirão de ferramenta teórica e metodológica para se alcançarem os objetivos propostos, buscando nesse processo, verificar a realidade matemática a partir do trabalho docente e do livro didático no tocante às frações e a partir daí, alertar e contribuir para o ensino de frações no ensino fundamental.

Sendo assim, elencamos a seguir os objetivos que visam atender aos questionamentos propostos.

OBJETIVO GERAL:

- Investigar se as praxeologias do professor se aproximam ou se distanciam das praxeologias do livro didático em relação ao conceito de fração no 6º ano do ensino fundamental.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Identificar as organizações matemática e didática do conceito de fração no livro didático;
- Verificar as organizações matemática e didática do conceito de fração a partir da prática do professor;
- Confrontar as praxeologias do professor com aquelas apresentadas no livro didático.

Definidos os objetivos a serem alcançados, discorreremos sucintamente sobre os sete capítulos que compõem este trabalho:

No primeiro capítulo, o qual corresponde à introdução, buscamos enfatizar os motivos que nos chamou a atenção para o objeto de estudo frações, a partir do qual fizemos um breve comentário sobre o seu currículo nos ciclos que compõem a educação básica, além de buscarmos outros olhares na literatura acadêmica atual e nos textos legais. Chamamos a atenção para os baixos índices alcançados nas avaliações externas no tocante à aplicação dos conceitos de fração nas questões relativas a esse conteúdo e também naquelas que envolvem, de forma direta ou indireta, o conceito e o cálculo com as representações fracionárias. Ainda neste capítulo, apresentamos a nossa fundamentação teórica e os objetivos que pretendemos alcançar ao longo desse trabalho;

O segundo capítulo trata do nosso objeto de estudo *frações*, sua origem e evolução conceitual e simbólica ao longo da história; os elementos constitutivos da práxis docente; e, sobre o manual do professor, ou seja, o seu livro didático. Para esses três pontos, fechamos esse capítulo com as orientações dos documentos legais acerca do ensino de frações;

O terceiro capítulo traz a teoria que fundamenta todo o trabalho referente ao conceito de fração, no caso a Transposição Didática (TD) Chevallard, (1991) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e seus elementos teóricos e praxeológicos, as noções de sujeito, pessoa e objeto e suas relações, as organizações matemáticas e didáticas e os fenômenos de co-determinação que os interliga, essa teoria foi proposta por Chevallard e colaboradores (1991, 1999); a compreensão das

múltiplas representações fracionárias ficaram por conta da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval (1988, 1993, 1998, 2003);

O quarto capítulo apresenta a metodologia com suas técnicas e processos utilizados na elaboração e estruturação desse trabalho. Ela abrangerá o tipo de abordagem investigativa, a delimitação do campo pesquisado, os critérios de escolha dos participantes da pesquisa e os procedimentos para obtenção dos dados, sobre os quais destacamos a pesquisa bibliográfica para verificar a abrangência institucional do livro didático e as videogravações das aulas do professor e a entrevista semiestruturada, pontos estes, que trataremos no capítulo seguinte;

O quinto capítulo dá conta de revelar os elementos caracterizadores do livro didático, no qual iniciamos as nossas análises *a priori* com o propósito de conhecer a sua abrangência, estrutura e, principalmente, as intuições dos autores sobre o ensino de frações no 6º ano de ensino fundamental. O passo seguinte projeta os olhares nas aulas do professor, cujos detalhes foram capturados com o subsídio da videogravação, além da entrevista semiestruturada, que possibilita a complementação de respostas muitas vezes não reveladas nas incursões do pesquisador no campo de pesquisa;

O sexto capítulo inicia o fechamento desse trabalho apresentando os resultados das análises praxeológicas matemáticas e didáticas das aulas do professor e do seu livro didático, realizadas a partir dos dados pesquisados. Nele são reveladas as problemáticas que circundam o ensino de frações, atendendo ao nosso objetivo geral e lançando meios para possíveis soluções;

O sétimo capítulo encerra essa pesquisa com as nossas considerações e perspectivas acerca das contribuições do nosso trabalho para o processo de ensino e aprendizagem de frações, para a matemática e para a Educação Matemática.

2 REFLEXÕES E CONTEXTOS HISTÓRICO-CRÍTICOS

O nosso objeto de estudo não foi definido de forma aleatória ou mesmo sem um contexto plausível, pelo contrário, ele foi invadindo o nosso campo de visão e chamando a nossa atenção, tendo em vista os fortes detalhes que serão destrinchados mais adiante. Além da vivência desses problemas de experiências reais, esta e outras pesquisas revelaram que desde a sua construção histórica – surgimento e transformações ao longo dos tempos – até a época atual, as frações apresentam um conceito complexo, que exige do professor uma proficiência para lidar, ou melhor, para trabalhar as suas representações e transformações numéricas (cálculos) de forma eficiente para os seus alunos.

A esse respeito David e Fonseca (1997) apontam para a importância dos trabalhos com números racionais e que a sua representação fracionária está voltada para um ensino que se preocupa com o aspecto conceitual. Contribuindo para essa ideia dos autores, os programas de ensino, os textos legais e de forma mais resumida o livro didático, apresentam certas orientações para o seu ensino com foco nos aspectos conceituais, apresentando fragmentos do seu contexto histórico, certa contextualização, além de representações e operações, entre outros, cujas orientações didáticas não devem encerrar em si mesmas, pois acreditamos que ensinar *frações* exige ultrapassar limites e que somente a práxis docente pode causar esse impacto na sua sala de aula.

2.1 FRAÇÕES, DA HISTÓRIA À EVOLUÇÃO CONCEITUAL E SIMBÓLICA

Os escritos históricos nos revelam que a ideia de fração e sua utilização remontam necessidades cotidianas desde a antiguidade e que a construção desse conceito agrega fatos, épocas e situações distintas ao longo da sua história. Conforme constatou Boyer:

Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. (Boyer, 1996, p. 9)

No Antigo Oriente a História da Matemática ganha uma nova página que remonta ao século XVII AEC com a escrita do *Papiro de Rhind* em 1650 por Ahmes

(descoberto em 1858) e com o *Papiro de Moscovo* (comprado no Egito em 1893), também conhecido como Papiro de Golenishev. Os dois papiros contêm problemas resolvidos sobre questões do cotidiano daquela região do Egito Antigo, comprovando que na Aritmética egípcia já se dispunha de certo conhecimento sobre cálculo com *frações*.

Struik (1987) nos relata que as frações, no contexto daquela época e daquele povo, eram escritas de forma diferente da simbologia usual deste século, na simbologia egípcia antiga, $\overline{10}$ representaria o correspondente à $\frac{1}{10}$ na simbologia atual. A análise do *Papiro de Rhind* revela a utilização de frações unitárias (numerador 1), mas existia uma exceção, a fração $\frac{1}{2}$ que juntamente com a fração unitária $\frac{2}{3}$, eram representadas com simbologia diferenciada das demais.

Esse autor relata que “o cálculo com frações deu à Matemática egípcia um caráter complicado e pesado”, visto que o Papiro de Rhind apresentava uma tabela de equivalências às frações unitárias para todos os números ímpares de 5 a 101 [...], cujo princípio utilizado para as reduções era carregado de subjacências, atribuindo ao cálculo pouca clareza, ocultando os seus procedimentos. Essas tabelas possibilitavam as reduções de somas unitárias e, por causa da multiplicação diádica¹, a única decomposição de frações requerida seguia o formato $\frac{2}{n}$. Desse modo, frações como $\frac{2}{7}$ eram escritas como $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$; para representar $\frac{2}{97}$, escreviam $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$, entre outros exemplos. A simbologia egípcia (notação hieroglífica) para as frações unitárias apresentavam um símbolo elíptico superposto a outro símbolo que nas definições mais recentes, correspondem respectivamente, ao numerador e ao denominador, com o visto na figura a seguir.

¹ Diádica: referente à díade, par, grupo de dois.

Figura 1 – Relação simbólica fracionária

Simbologia		Simbologia atual
	→	$\frac{1}{3}$
	→	$\frac{1}{12}$
	→	$\frac{1}{21}$

Fonte: a pesquisa (2019).

Contudo, mesmo com as latentes desvantagens, as operações com as frações unitárias foram praticadas ao longo de séculos e por povos, como os babilônios (1900 a 1600 a. C.) dispoendo de tabela de números dentre os quais estavam presentes as frações, os gregos (408 a 355 a. C.) no período dos pitagóricos, descritas no livro V dos Elementos de Euclides, sobre a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido. No referido livro se propunha a ideia de igualdade com frações na forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se $ad = bc$, cujas interpretações e representações têm proximidade com a definições de número real sugeridas no século XIX. (STRUICK 1987, apud SANTOS, 2005).

No contexto europeu, mais precisamente início da Idade Média, as contribuições partem do texto conhecido como *Liber Abbaci (Livro do Ábaco)* do matemático Leonardo de Pisa mais conhecido como Fibonacci (1170 a 1250), que descreve, mesmo nesse período, uma grande quantidade de frações unitárias além de variadas maneiras de converter outras frações em soma de frações unitárias. Nesse processo de construção ao longo da história, as frações ganharam a sua representação decimal cujo uso só foi impulsionado a partir do trabalho *De triende (O décimo)* elaborado em 1585 por Stevin (1548-1620), mas a sua representação utilizando vírgula ou ponto, como a feita atualmente, foi idealizada em 1617 por Napier (1550-1617).

Ao longo dessa trajetória, sobre a qual percebemos haver certa cronologia, não houve uma significativa evolução do conceito e da representação simbólica das frações, uma vez que as suas notações foram, ao longo dos tempos, sendo construídas sem uma conexão entre as ideias pontuais originais das civilizações

antigas. Contador (2012) reforça que, egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses conheciam as frações.

Dentre os fatores que ocasionaram essa desconexão, além das diferentes épocas em que essas ideias surgiram, evidenciamos também, as dificuldades de acesso entre os povos, ou seja, entre as suas culturas e entre as suas produções de conhecimento. Esses fatores foram obstáculos, pois a sua aplicabilidade nos problemas cotidianos, mesmo que crescente, ainda se mostrava timidamente em função das restrições simbólicas e da falta de um conhecimento mais profundo sobre esse novo “número” que surgia.

Contudo esse período de maturação conceitual gerou alguns frutos visíveis, as frações que antes serviam apenas para uso censitário, agora se mostraram adaptadas às inúmeras utilidades (comparação de duas grandezas estimando-as ou mesmo dividindo-as em partes de uma mesma espécie, padronizando-as). Mesmo diante desse desenvolvimento, as restritas notações ainda eram o espinho para os matemáticos da antiguidade, que não conseguiram unificar a ideia de fração, tão pouco construir um sistema agregador para suas unidades de medidas.

Atribui-se aos hindus, uma notação de grande semelhança à notação moderna das frações ordinárias cuja simbologia teve grande influência da numeração decimal de posição, eles assim simbolizaram na forma $\frac{34}{1265}$, sem o traço divisor, sobrepondo os números em que o número 34 e 1265 correspondem ao numerador e denominador respectivamente. “Esta notação foi posteriormente adotada e aperfeiçoada pelos árabes que inventaram a famosa barra horizontal”. (IFRAH, 1996, p. 327).

Atualmente, muitos estudiosos têm lançado esforços para desmistificar situações que fazem dos números fracionários, o “patinho feio” da matemática no ensino fundamental, cujos objetivos da maioria, senão de todos, é desvelar para a Educação Matemática (em nível de pesquisa) e para a escola (em nível de aprendizagem), o belo e importante “cisne” que existe por trás da construção do conceito de frações com suas importantes contribuições para a própria ciência exata e para a sociedade.

2.2 DA PRÁTICA À PRÁXIS DOCENTE

Tratar dos assuntos pertinentes ao trabalho do professor passa necessariamente pelos fatores que constroem as relações no seu espaço de atuação, a sala de aula. Nesse cenário, no qual é imerso o saber a ser ensinado (nesse caso, as frações), indagamos se na relação do saber ao professor, as técnicas utilizadas por ele e aquelas disponibilizadas no seu livro didático para ensinar frações aos seus alunos, se aproximam, se distanciam ou mesmo se é interessante uma aproximação ou afastamento, conforme a realidade pesquisada.

Essa prática, que demanda uma didática mediadora entre o conhecimento e as necessidades de ensino sempre atuais, é que definirá em grande parte essa aproximação ou afastamento. De forma mais específica, essa prática precisa estar em conformidade com as orientações e propostas curriculares, os Tipos e subtipos de tarefas e com as técnicas propostas pelos autores do livro didático de forma a favorecer as ações que atendam às necessidades apresentadas na sala de aula.

Nesse contexto, é essencial que o professor exercite o processo de reflexão-ação-reflexão sobre a sua prática, ou seja, sobre o seu ensino, pois só assim estará apto para avaliar e fazer os ajustes necessários ou mesmo promover a transformação do seu estado atual. Essa mudança de posicionamento permite que o professor transite de uma prática muitas vezes desestimulante e improdutiva para um estado criativo e de domínio sobre as situações, é nesse estado reflexivo e transformador que ele forja a sua práxis.

Portanto, o processo prática/práxis caracterizado na tríade prática-teoria-reflexão é o cerne do trabalho docente em função das melhorias que o qualifica, ele se constrói e se transforma no cotidiano da prática docente. Para Freire (2013, p. 127), a práxis, “sendo reflexão e ação verdadeiramente transformadora da realidade, é fonte de conhecimento reflexivo e criação”.

Pimenta (2001) é de acordo que a relação entre a teoria e a prática é indissociável e se expressa no fazer pedagógico do docente quando ele realiza as devidas reflexões sobre a sua prática, tais como: “*o que ensinar?*” (elemento teórico), “*como ensinar?*” (elemento didático), “*para quem?*” (elemento relacional) e “*para que?*” (elemento que dá sentido a um saber matemático).

Essas reflexões se materializam nas adequações curriculares com suas supressões ou acréscimos dos conteúdos sobre frações; na escolha dos melhores

métodos ou técnicas a serem utilizadas para ensiná-las; na consideração às especificidades dos seus alunos sobre as mesmas; nas intenções e instruções sobre “o que” e “como serão” ensinadas; na realização das devolutivas a fim de gerar nos seus alunos a sua autonomia sobre os seus conceitos abstratos e suas técnicas de resolução; na atenção às suas situações matemáticas; e, no estabelecimento da relação entre o que será ensinado e as necessidades sociais para as quais o saber matemático terá sentido.

Dentre essas ações, ressaltamos que, em sua maioria, referem-se às regras de negociações (geralmente implícitas) do Contrato Didático proposto por Brousseau (1996). Nesse sentido, o professor assume a parte iniciante do contrato gerando as expectativas do retorno por seus alunos em relação ao saber, cujas cláusulas contratuais estão sujeitas às influências de certos elementos que norteiam e regulam as ações do corpo docente e, mais especificamente, o ensino de frações pelo professor de matemática do 6º ano do ensino fundamental da instituição na qual o contrato se efetivou.

Esses elementos influenciadores, alguns já incorporados no fazer pedagógico da escola, podem apresentar divergências com relação às intenções do professor, contudo, é diante desses obstáculos que a práxis docente revela o seu sentido mais amplo, ao libertar-se do currículo inadequado para aquela situação específica da sala de aula, ao se permitir atuar e se aperfeiçoar mesmo frente às situações conflitantes, ao superar as deficiências existentes para promover as mudanças necessárias que atendam às cláusulas do contrato didático.

São esses elementos: i) o livro didático; ii) os textos legais; iii) as metas da instituição na qual desempenha a sua função; e, de forma muito particular, iv) as intenções do professor, em que esta última, corresponde a sua proficiência funcional no exercício da docência, sua afinidade com o objeto matemático e por fim, a sua preocupação com seus alunos. Ressaltamos que essa preocupação, revela, por conseguinte, a sua preocupação com outros contextos: o científico, o social, a visão de mundo, entre outros.

Como primeiro elemento, destacamos mais fortemente a relação do professor ao *saber* no contexto do que é proposto no seu livro didático, por ser ela a relação balizadora do nosso estudo, a qual requer certos cuidados que se materializam nas seguintes necessidades:

O professor deve desenvolver saberes e ter competências para superar as limitações próprias dos livros, que por seu caráter genérico, por vezes, não podem contextualizar os saberes como não podem ter exercícios específicos para atender às problemáticas locais. É tarefa dos professores complementar, adaptar, dar maior sentido aos bons livros recomendados pelo MEC. (NUÑEZ, et al., 2003, p.3).

Essa complementação para as limitações do livro didático não acontece se o professor não refletir sobre aquilo que lhe é entregue de forma já acabada, pois é tendencioso que as intenções do(s) autor(es) para um dado objeto de estudo, essas materializadas no livro didático, influenciem a forma de ser e fazer docentes. Nesse contexto, o livro didático pode ser um termômetro do trabalho docente, em que sua análise poderá revelar determinadas particularidades do processo de ensino.

O segundo elemento norteador da práxis docente e não menos importante, concretiza-se nos textos legais: Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997/1998), Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017), Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2017-2019), Parâmetros Curriculares de Pernambuco – PC/PE (2012/2014) e Proposta Pedagógica da Secretaria de Educação de Caruaru – PP/SEDUC (2018), nos quais o professor encontra desde normatizações até instruções de habilidades para o *saber fazer*, competências para *exercer* a sua função e orientações que podem ser adaptadas por ele às suas peculiaridades locais (regionalidades, características institucionais, sala de aula).

Os referidos textos também atribuem amparo legal ao professor, estabelecendo limites nas ações e lançando expectativas para a superação dos problemas a serem enfrentados no âmbito educacional. Em relação aos PCN (1998) e a BNCC (2017), tomamos como aporte o primeiro, especificamente, os que se referem à Matemática do 3º e 4º ciclos, por ser o texto de abrangência nacional e ainda orientador dos demais textos citados, tendo em vista que a BNCC (2017) foi homologada em 20 de dezembro de 2017 e só entrou em processo de implantação a partir de 22 de dezembro do mesmo ano, conforme a Resolução CNE/CP Nº 2, dessa mesma data. A partir daí, Estados e Municípios têm um prazo de dois anos (2018/2019) para adaptação dos seus currículos e implementação, podendo se estender até 2020. (BRASIL, 2017).

Os PCN têm como finalidade, “fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros”.

(BRASIL, 1998, p. 15). Há outros elementos que precisamos considerar em relação aos PCN, o seu caráter orientador e padronizador, considerando a autonomia das instituições para definirem os seus currículos a partir da sua realidade, ele é o texto base para esse fim, quando sugere formas e meios para o fazer pedagógico e para a prática docente.

Para focar no terceiro elemento, consideramos que o exercício da docência precisa acontecer em um ambiente acolhedor, que proporcione uma estrutura mínima, como estabelecido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB, nº 9.394/96 (BRASIL, 1996), o Estado deve garantir os “padrões mínimos de qualidade de ensino”, padrões que se referem às condições de trabalho do professor e às necessidades dos alunos em prol do processo de ensino e aprendizagem.

Esse acolhimento transcende o espaço físico, pois se traduz, sobretudo, nas práticas adquiridas pelo professor, ao comungar das metas e objetivos propostos por uma dada instituição, é uma relação que vai se forjando ao passo que os objetivos de ambos precisem convergir em prol da aprendizagem do aluno.

O parágrafo anterior já insere um contexto que exemplifica o quarto elemento citado além de abrir entendimento para a *razão de ser*² profissional e institucional do professor. Nesse contexto, podemos dizer que a relação institucional tem estreita ligação com a qualidade do desempenho das atividades realizadas pelo professor no âmbito pedagógico, repercutindo diretamente na sala de aula.

Por fim, o último elemento que nos cabe inferir algo apresenta-se de forma muito particular, são as intenções do professor sobre as quais devemos considerar inicialmente o termo “profissionalismo” na docência, que remete à sua forma de *ser e estar*, um *status quo* docente composto por sonhos, objetivos, atitudes e intenções. Dentro dessas atribuições, torna-se necessário citar um importante componente do conjunto das qualificações do professor que diz respeito ao domínio dos conteúdos, nesse caso específico sobre as frações, devido aos seus conceitos abstratos e ao seu uso restrito no cotidiano dos estudantes.

Todos esses elementos têm sua devida importância nas contribuições do professor para o processo de ensino e aprendizagem, cujas variáveis dependem do perfil, do engajamento e da proficiência de cada profissional no conjunto das suas

² Refere-se ao primordial objetivo do professor e das instituições, a aprendizagem do aluno.

funções, dentre eles, o professor do 6º ano do ensino fundamental em relação ao ensino e aprendizagem das frações.

2.3 O LIVRO DIDÁTICO, DO CONTEXTO HISTÓRICO À SUA ABRANGÊNCIA NAS INSTITUIÇÕES

O reconhecimento do livro didático no Brasil como instrumento educacional teve início com a Legislação de 1938, cujo decreto Lei nº 1.006 estabelecia o Estado como regulador do seu uso, ação que reforça a natureza político-ideológica desse reconhecimento legal. A escolha era realizada mediante uma lista pré-determinada, a partir da qual, o professor manifestava sua opção. Nesse contexto, já se percebe que o livro didático se formalizara um Direito Constitucional do estudante brasileiro assegurado pelo Art. 208, inciso VII da nossa Constituição de 1988. (BRASIL, 1988).

No entanto, esse Direito constitucional apresentava alguns entraves de ordem estrutural que repercutiam nos assuntos a serem ensinados e na sua didática apresentada, bem como num falho processo de escolha, situações que só começaram a ganhar atenção a partir da década de 90, em que o ensino fundamental brasileiro passou a ser destaque em pautas de encontros para discussões que tiveram como protagonista, o livro didático.

A partir do decreto 9154/85, o livro didático ganhou *status* de parceiro do professor e dos alunos no processo de ensino e aprendizagem e, portanto, regulamentado pelo então instituído PNLD, em que uma de suas grandes atribuições estabelecidas no seu Art. 2º corresponde à avaliação regular e padronizada dos livros didáticos visando sempre a sua melhor qualificação. Este programa, subordinado ao Ministério da Educação e Cultura – MEC é regulamentado e organizado nos termos da resolução de nº 603 de 21 de fevereiro de 2001. (BRASIL, 2001).

Apesar desse aparato legal cujo foco foi o livro didático e, posteriormente a regulamentação do PNLD, percebeu-se que ao longo dos anos as mudanças ocorriam de forma lenta e conseqüentemente com baixos resultados substanciais, sendo necessária uma reformulação, ou melhor, uma reforma curricular para os primeiros ciclos do ensino fundamental que foi iniciada em 1991.

O pacote de reforma exigiu que os novos livros didáticos se adequassem às novas e mais atuais exigências voltadas para o século XXI, dentre as quais se

destacam como elementos caracterizadores desse novo contexto educacional, a didatização e democratização do conhecimento; os valores para a formação do aluno cidadão; o enfoque na preparação dos alunos para a resolução de problemas; maior preocupação nos processos que levam os alunos a aprenderem e apreenderem os conteúdos.

Buscando atender as citadas exigências, focou-se também na qualificação docente e na incorporação das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC nas escolas, processo que iniciou com a alfabetização científica e tecnológica para os alunos e, inevitavelmente, para o professor.

Várias pesquisas no Brasil e em outros países apontam para a importância do livro didático como principal instrumento de orientação e controle do currículo (GAYAN e GARCÍA, 1997), fato que repercute diretamente na sala de aula, dada a sua utilização como principal recurso utilizado pelo professor para elaboração do seu plano de ensino, os conteúdos que serão abordados e a forma que serão ensinados, os materiais didáticos a serem utilizadas, as atividades propostas e, conseqüentemente, a avaliação.

Dessa grande influência do livro didático no ensino, emergem alguns alertas que requerem do professor certa atenção acerca da sua qualidade, coerência e possíveis desalinhamentos em relação aos objetos educacionais propostos, podendo apresentar ainda elementos didático-pedagógicos descontextualizados e atividades que não interferem, nesse caso, no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e a participação do aluno na construção do seu próprio conhecimento matemático.

Diante disso, Os PCN (1997/98), corroboram ao indagar no seu texto, que o livro didático, apesar da sua importância no processo de ensino e aprendizagem, não deve ser o único material norteador da prática docente, e continua, instruindo que é necessária a sua associação com outras fontes (currículo, programas e outros), objetivando assim, que o aluno adquira uma visão ampla sobre o conhecimento matemático.

O PNLD é executado em ciclos trienais alternados e nas suas atribuições subsidia o trabalho docente a partir da distribuição das coleções aprovadas, atendendo aos alunos da educação básica. O livro didático e mais especificamente o de ciências, conforme Vasconcelos e Souto (2003, p. 93) “têm uma função que os difere dos demais – a aplicação do método científico, estimulando a análise de

fenômenos, o teste de hipóteses e a formulação de conclusões”. Ainda segundo os autores, o livro dessa área “deve propiciar ao aluno uma compreensão científica, filosófica e estética de sua realidade oferecendo suporte no processo de formação dos indivíduos/cidadãos” (VASCONCELOS; SOUTO, 2003, p. 93).

As atribuições pertinentes ao livro didático o institui historicamente como um dos importantes instrumentos para o ensino e aprendizagem. Para Soares (2001, apud Núñez, 2003, p. 2) “o livro didático nasce com a própria escola, e está presente ao longo da história, em todas as sociedades, em todos os tempos”.

3 POR DENTRO DA TEORIA

Este trabalho buscou a sua fundamentação teórica nas abordagens da Didática da Matemática francesa. Sendo assim, o capítulo seguinte objetiva descrever como ocorrem as transformações por que passam os conteúdos da educação matemática, no nosso caso em particular, do objeto de estudo *frações*, nos enfoques da *Transposição Didática (TD)* e da *Teoria Antropológica do Didático (TAD)*, desenvolvidas por Chevallard (1991, 1999), respectivamente, para a análise dos fenômenos didáticos, teorias estas que serão conceituadas e descritas mais adiante.

3.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA, COMPREENDENDO A TRANSFORMAÇÃO DOS SABERES

A Transposição Didática (a partir desse ponto TD em determinados momentos) é um conceito criado pelo sociólogo Michel Verret (1975)³ na sua tese de doutorado e que mais tarde teve a sua aplicabilidade à Didática da Matemática por Yves Chevallard da década de 80. De forma ampla, a Transposição Didática “é entendida no sentido da evolução das ideias, no plano histórico da produção intelectual da humanidade” (PAIS, 2015, p. 17). Ainda parafraseando o autor, a TD ocorre, de forma mais específica, ou seja, em relação às “Ciências e à Matemática, sob um controle mais intenso de certos paradigmas” os quais, segundo Khun (1975 apud Pais 2015, p. 20) são “princípios e regras que os membros de uma comunidade científica compartilham entre si, visando à validação dos saberes produzidos nesse contexto”.

O conjunto das transformações impostas ao saber referencial (saber sábio) no processo de aptidão para o ensino é determinado pela TD, que visa combater um histórico distanciamento estabelecido entre os conhecimentos científico e escolar, distanciamento este que desrespeita certas especificidades dos alunos, tais como a heterogeneidade intelectual que estabelece níveis diferentes de assimilação dos saberes pelos alunos, incluindo-se aqueles mais severos que orbitam o campo dos *déficits* e *transtornos* (TDAH, discalculia, disgrafia, dislexia), as limitações físicas e

³ VERRET, M. (1975). *Le temps d'Etude*. Paris: Librairie honoré Champion.

organizacionais das instituições e suas intencionalidades, enfim, processos nos quais os alunos, os professores e o saber estão imersos e dependentes.

A transformação por que passa o *saber científico* na sua trajetória até o momento de sua mutação (mutável por natureza) para *objeto de ensino*, incorporando-se assim, ao sistema didático tríplice *professor-aluno-saber* (BROUSSEAU, 1996) e dessa forma estabelecendo-se em um *saber ensinado*, é trabalho da Transposição Didática.

Os dois aportes (termo cunhado por Verret e o sistema didático por Brousseau), foram as bases iniciantes das discussões de Yves Chevallard e colaboradores na década de 80 para o campo da didática, partindo do princípio de que o saber sofre transformações no percurso entre o campo científico e a escola, mais especificamente, a sala de aula.

Em seu trabalho Chevallard analisou como o conceito de “distância” se estabeleceu no campo da pesquisa em Matemática Pura, sua transição durante os muitos setores da comunidade científica e social com suas consideráveis modificações no contexto do ensino de Matemática.

Trabalho este que se materializou na noção de TD como um conjunto de ações que promovem as transformações necessárias para fazer de um saber sábio, um saber ensinável. Nesse contexto, decorrem outras noções que constituem a problemática ecológica (ecologia dos saberes ensinados), a qual é regida por leis específicas e moldada pelas condições e limitações próprias da relação didática (inter-relações), considerando as noções de *saberes* e *instituições*. Chevallard define assim a TD:

Um conteúdo do saber que foi designado como saber a ensinar sofre a partir daí, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que transforma um objeto do saber a ensinar em objeto de ensino é denominado de transposição didática. (Chevallard, 2001, p. 20).

Sobre essas noções Chevallard (1991) infere que: i) todo saber é saber de uma instituição; ii) um mesmo objeto do saber pode existir em diferentes instituições; a existência de um saber em uma instituição exige a sujeição deste a determinadas exigências, fato que implica diretamente na sua transformação, caso contrário, não poderá compor o quadro dos saberes de nenhuma instituição. Esse autor infere ainda que as noções citadas se configuraram a partir do princípio de que um saber

não existe por si só (no vazio), pois segundo o mesmo, todo saber surge em momentos distintos da sociedade e são inseridos em uma ou mais instituições. Considerando todos esses princípios, Chevallard (1991), define a Transposição Didática como um instrumento eficiente para analisar o processo pelo qual o saber produzido pela comunidade científica (Saber Sábio) se transforma a partir dos elementos formadores da Noosfera nas suas dimensões interna e externa. Para Chevallard:

[...] um saber dado S se encontra em diversos tipos de instituição I, que são para ele, em termos de ecologia dos saberes, respectivos habitats diferentes. Desse modo o saber ocupa regularmente nichos muito diferentes, logo as relações entre os saberes e as instituições também são diversas. Correlativamente, a maneira que os agentes da instituição vão “manipular” esse saber será variável. (Chevallard, 1991, p. 153).

Conforme se apresentam com suas distintas características e sob a ação manipulativa dos agentes institucionais, consideram-se quatro formas para que essa transformação aconteça no âmbito das instituições: a utilização, o ensino, a produção e por fim, a manipulação *transpositiva*. Das quatro formas manipulativas do saber pelas instituições, a *transpositiva*, configura-se como ponto primordial da transposição didática, pois é a partir dela que ocorre o processo de transição dos saberes entre as instituições.

O autor considera ainda que há uma diferenciação entre *saberes* e práticas sociais, em que o conceito de *saber* refere-se ao corpo do conhecimento legitimado no âmbito epistemológico, legitimação esta superior àquela de ordem cultural, portanto, a escola como instituição transpositiva, depende da legitimidade a ela concedida ou negada pela sociedade. Assim, os saberes originados das práticas sociais só serão considerados *saberes* a partir de sua legitimação cultural e, sobremaneira a partir da sua legitimação epistemológica.

Considerando a transposição dos saberes pelas instituições, o que justifica a terminologia *Transposição Didática* é o âmbito em que ela acontece, para tal, consideram-se, as instituições de ensino como aquelas em que dão sentido a transposição do saber na sua forma e conceito apresentados. Partindo dessas premissas, Chevallard (1991) considera inicialmente três tipos de saberes: o saber científico (*savoir savant*) oriundo da esfera científica, o saber a ensinar (*savoir à*

enseigner) selecionado, transformado e validado pela noosfera e o saber ensinado (*savoir enseigné*) transposto pelo trabalho do professor na sua sala de aula.

Dentre as etapas pelas quais o saber é manipulado no processo de transformação e adequação, que se estende do *saber científico* até o *saber ensinado*, destacamos o *saber a ensinar* como etapa intermediária configurada nas ações das Instituições subordinadas ao conjunto de regras e Leis que regem o sistema educacional brasileiro. Reportamo-nos aos programas de ensino e suas diretrizes (BNCC, PCN, PC-PE, entre outros), que segundo Chevallard (1991), devem ser acessíveis ao professor. Para Brito Menezes (2006) essa primeira etapa da Transposição Didática caracteriza-se por acontecer externamente. (p. 76). "Quando os programas são preparados, começa outro trabalho: *é a transposição didática interna*" (CHEVALLARD 1991, p. 44). Discorreremos mais sobre essas duas fases da transposição mais adiante.

De forma semelhante ao *saber científico*, que segue determinadas normas para sua validação pela comunidade científica, o *saber a ensinar* também requer de normas bem definidas para sua textualização e dessa forma, ingressar no contexto escolar. No processo de transposição didática, Chevallard (1991) chamou de "constrangimentos" didáticos, as ações que modificam a natureza do saber sábio ao transformá-lo em objeto de ensino. Assim, devem ser considerados e analisados os seguintes processos:

i) *Dessincretização (separa o saber em partes)*, processo que delimita o que constitui o campo do saber a ser ensinado na medida em que precise atender às práticas da aprendizagem, nesse processo o saber é separado e organizado em saberes pontuais, aqueles de interesse dos órgãos e sistemas educacionais para comporem os currículos em suas várias áreas.

ii) *Despersonalização (desvincula o saber do seu autor)*, que reivindica determinado grau de separação entre o produtor e o saber científico, ou seja, desvincula-se da sua autoria. Para Chevallard (1982, p. 7), a despersonalização implica a publicidade do saber. (apud KLUTH; ALMOULOU, 2020, p.9).

iii) *Descontextualização (liberta o saber das suas origens)*, desprovendo-o da sua historicidade ou mesmo do problema que o originou e lhe deu sentido. Esse processo prevê que o objeto do saber se liberte das suas características de *saber sábio (científico, original)* – inadequado para ser ensinado – para adquirir as

características necessárias para se tornar apto a ser objeto de ensino e, portanto, *saber ensinado*.

No entremeio em que se processa a descontextualização do saber, há um propósito decorrente do trabalho do professor, a recontextualização do saber em um discurso diferente, um texto novo e diferente do original, um metatexto como diz Chevallard (1991). Nesse sentido, para Almouloud (2011, p. 195), isso consiste em “colocar o aluno em situações problemáticas cuja solução levaria à construção do conhecimento visado”. Ainda segundo o autor, “O conhecimento é então recontextualizado, é conhecimento que aparece então como solução a um problema específico”;

iv) *Destemporalização (estabelece um novo vocabulário na forma de definição)*, supressão do tempo da pesquisa com a produção de um discurso atemporal (acrônico). Almouloud, 2011, reforça que esses procedimentos permitem que o *saber* seja reinvestido em diferentes situações sejam elas profissionais, didáticas, de aprendizagens, entre outras. (p. 196).

v) *Programabilidade (articula o saber de forma sequencial e temporal)*, processo que consiste na inserção desse saber em um programa de ensino tendo por base, conforme Barbosa (2017, p 38), “um planejamento de aprendizagem conforme fluxo crescente e lógico”, ou seja, que esteja em concordância com os objetivos de ensino e aprendizagem para os quais foi transposto.

vi) *Publicidade (divulga o saber no meio social)*, ação que torne viável a sua apropriação por aqueles que deverão transmiti-lo e por aqueles que deverão recebê-lo e, dessa forma, legitimado oficialmente. Parafraseando Pais (2015, p. 33), é a definição explícita do saber outrora transposto, transformado e adaptado, aquele que deverá ser ensinado. Esse processo requer a organização do saber, a partir da qual, se estabelece o “controle social das aprendizagens” que é praticado com a avaliação para certificações oficiais.

Para Almouloud (2011, p. 195), as ações de repersonalizar e recontextualizar o conhecimento matemático são inerentes ao trabalho docente e se concretizam a partir da construção das situações-problema elaboradas pelo professor. Nesse sentido, é fundamental que o trabalho do professor direcione mais esforços para o estabelecimento e crescimento da relação entre o aluno e o conhecimento, disso demanda a qualidade das suas repersonalizações e recontextualizações, que se

configuram em tornar o conhecimento ainda mais acessível e de maior interesse para o aluno.

Correlativamente, as ações de despersonalizar e descontextualizar correspondem ao trabalho discente. Segundo Almouloud (2011, p. 196):

Esse trabalho de descontextualização e de despersonalização deve necessariamente ser feito pelo aluno para que possa integrar esse novo conhecimento ao seu patrimônio cultural. Ele deve então, como o pesquisador, fazer uma comunicação escrita ao conjunto de seus colegas de classe no intuito de provocar debates que enriqueceriam, esclareceriam esse novo saber ou delimitariam as condições de suas aplicações.

Todo esse processo que envolve transformação, supressão e adequação do saber sábio em objeto de ensino ocorre sob os olhares dos membros da noosfera, é o que Chevallard (1991) chamou de vigilância epistemológica, cujo objetivo é não permitir que a essência criadora do saber original seja totalmente perdida ao longo das etapas de transposição. Contudo, a atuação noosférica não tem total “livre arbítrio” sobre aquilo que está em processo de transformação, pois existem regras para serem cumpridas ao longo do percurso de transposição do saber até estar apto a ser ensinado na sala de aula (adquire significados próprios da instituição transpositiva).

A noosfera é definida por Chevallard (1991) como uma Instituição “invisível”, uma esfera pensante, cujo conceito torna-se central para o seu entendimento. Nela ocorrem os processos de interação entre o sistema de ensino em suas mais variadas instâncias (composto por todos aqueles que interferem no processo educativo) com o entorno social, de onde se desenrolam os conflitos, se estabelecem as negociações e se constroem as possíveis soluções.

Esse processo de transformação do saber científico em saber ensinado requer a ação de instituições e indivíduos que, como participantes da noosfera, tornam-se responsáveis por estabelecerem quais saberes devem ou não ser ensinados e com qual roupagem eles devem chegar à sala de aula, cada qual agindo conforme a sua função. Pesquisadores, técnicos, analistas, coordenadores e orientadores educacionais, gestores, especialistas, ou seja, todos aqueles que atuantes em instituições como Ministério, departamentos de Educação, Universidades/Faculdades, Redes de Ensino, Escolas e entre outros, compõem essa noosfera pensante. Sobre isso Almouloud nos infere que:

As transformações do objeto de saber em objeto de ensino devem ser necessariamente acompanhadas de uma análise epistemológica, das hipóteses de aprendizagem e do contexto social. O professor não transforma por iniciativa própria o saber sábio em objeto de ensino. A escolha dos objetos a ensinar é definida institucionalmente por meio de propostas curriculares, e é controlada de alguma forma pela sociedade (autoridades locais, pais de alunos, autoridades administrativas da educação). (ALMOULOUD, 2011, p. 196).

No Brasil, as ações dessa noosfera atuante se revelam nos documentos oficiais: PCN (1997/98), BNCC (2017), PNLD (2017-19), PC/PE (2012/14) e PP-SEDUC (2018), que orientam o ensino além de oferecer diretrizes curriculares específicas para todas as disciplinas, aqui em destaque àquela do nosso interesse, a Matemática. No nosso caso, a noosfera desempenha outra forma de vigilância, aqui realizada por outra instituição oficial, o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (BRASIL, 1998), que observa e faz cumprir as exigências dos documentos norteadores dos currículos e suas diretrizes, em relação ao livro didático.

Atuando desde 1985, o PNLD tem intensificado as suas ações de regulação e vigilância ao texto do saber apresentado no livro didático, no qual se materializa a transposição didática. Destacamos que, devido às diferenças nos sistemas educacionais do Brasil e da França, este último berço da Teoria da Transposição Didática, os processos de transposição refletem essa diferenciação entre os dois países. Por lá, a transposição se concretiza a partir das determinações dos programas de governo executados nas instituições de ensino, por aqui, temos os Parâmetros Curriculares (abrangência nacional) e as diretrizes curriculares (abrangência estadual), além da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), que pretende mudar uma realidade de mais de duas décadas.

Frente a todos esses processos pelos quais passa o *saber a ensinar* a fim de ser validado pela comunidade de ensino, Chevallard (1991), chama a atenção para que não ocorram meras simplificações dos objetos selecionados no universo da pesquisa. Ele alerta que o resultado obtido no final do processo de transposição deve corresponder a “novos” conhecimentos aptos a atender aos dois contextos epistemológicos: o da Ciência (origem dos saberes) e o da Escola (onde serão aplicados).

Nessa etapa do percurso, não há participação do professor no processo de escolha do *saber a ensinar* nos níveis escolares do sistema de ensino, embora seja dada ao professor a liberdade de criação, esse novo “estado de ser” do saber

original não permite que esse agente de transposição interna participe da escolha do que será ensinado na sua sala de aula. Contudo, lhe é permitido, inserir ou suprimir conteúdos dentro das regras estabelecidas pela noosfera na etapa transpositiva que o originou.

As contribuições do professor nessa etapa da transposição didática interna que compreende dois “estados de ser” do saber, o *saber a ensinar* e o *saber ensinado*, com sua didática, sua forma particular de se relacionar com o saber e como “facilitador” da apreensão e compreensão do conhecimento para o aluno, aguçaram a percepção de Ravel (2003) para a necessidade de outra etapa intermediária no processo de transposição didática interna, intitulada de saber aprontado (*savoir apprêté*), que surge das escolhas didáticas e matemáticas realizadas pelo professor para ensinar um determinado objeto do saber matemático.

Na sua ação docente, o professor coloca em prática o planejamento resultante das escolhas objetivadas no seu plano de aula (suas intenções), materializadas no *saber aprontado*, cujas expectativas serão ou não, evidenciadas na última etapa da transposição didática, que é o *saber ensinado* na sala de aula, o qual deve estar em conformidade com o *saber a ensinar*. (CHEVALLARD, 1991).

A jornada pela qual passa o saber produzido na comunidade científica até chegar à sala de aula como *saber ensinado*, compreende duas instâncias (*externa* e *interna*), assim definidas de acordo com a forma e o tipo de instituição transpositiva a qual o saber foi submetido. Quando a transposição didática refere-se às transformações sofridas pelo *saber científico* para se tornar um *saber a ensinar*, dizemos que ela é *externa* e nela atuam, diretamente ou indiretamente, diversos indivíduos e órgãos componentes da noosfera (autores de livros didáticos, autoridades ligadas aos Conselhos e às Secretarias de Educação, o MEC, professores, escolas, comunidade escolar, entre outros).

Quando no seu interior da escola é realizado o trabalho para transformar o *saber a ensinar* em um *saber ensinado*, chamamos esse processo de transposição didática *interna* que tem no professor o seu maior agente atuante. Atuação que ocorre dentro da sala de aula e que conta com a parceria entre o professor (como agente mobilizador dessa transposição) e o aluno (como agente colaborador). Esse trabalho se materializa logo após a incorporação dos novos elementos do saber pelo sistema de ensino, nesse processo, o professor terá acesso às

adaptações/deformações do saber em conformidade com os manuais de ensino e os livros didáticos, contudo, o saber original fica praticamente inacessível a ele.

Para Pais (1999), o professor tem um trabalho extra, pois enquanto o pesquisador matemático busca descontextualizar o conteúdo (saber), tornando-o mais abstrato e genérico, o professor de matemática precisa seguir na contramão, ou seja, para que o objeto do saber seja acessível ao aluno, ele precisa ser recontextualizado, atribuindo-lhe um sentido próprio que, para o aluno, significa torná-lo cotidianamente reconhecível e utilizável.

Ao preparar as suas aulas, o professor precisa considerar duas dimensões atuantes no sistema didático e inevitáveis para o seu planejamento. A esse respeito, Chevallard (1986) diz que a primeira dimensão é o *tempo didático*, que rege os calendários escolares oficiais, pois cumpre certas exigências normativas. Esse autor diz ainda que a segunda dimensão é o *tempo de aprendizagem*, que corresponde ao tempo necessário para um dado conceito ser assimilado. (CHEVALLARD, 1986). Por lidar com o processo cognitivo (ato de aprender), ele não é sequencial, tão pouco linear, pois considera as especificidades de cada indivíduo.

Tendo como aporte as contribuições apresentadas sobre o tempo e suas funcionalidades no sistema didático, Câmara dos Santos (1997), avança nesse conceito ao propor um modelo com mais duas dimensões, assim denominadas, de *tempo noosférico* e *tempo lógico*. Antes das definições e abrangências dessas duas outras dimensões, o autor situa o *sistema didático* como o cerne das relações construídas entre o *conhecimento*, o *professor* e o *aluno*.

O conceito de *tempo noosférico*, segundo Câmara dos Santos (1997), considera antes de tudo, que o processo de aparecimento do conhecimento nas comunidades *matemática* e *escolar*, apresenta diferenciação como diferentes são as suas dinâmicas. Na primeira, esse processo ocorre a partir da resolução de problemas, gerando outros, cuja ordem dessa resolução não se sujeita à distribuição no tempo. Já na segunda, esse processo está pré-estabelecido no texto escolar, são os conhecimentos que deverão ser ensinados e que determinam certa programação escolar, cuja própria construção já estabelece uma relação particular com o tempo, assim caracterizado como a “interação de um texto e de uma duração”. Chevallard (1986, apud Câmara dos Santos, 1997, p. 109).

Segundo esse pesquisador, é “o tempo noosférico que dá ritmo ao funcionamento institucional do sistema didático” Câmara dos Santos (1997, p. 109)

e, infere ainda que a ele, se integram dois componentes que associados, atuam em sincronia, falamos então do *tempo legal* e do *tempo lógico*. O primeiro é o regulador do ritmo com que surgem os objetos do conhecimento na relação didática a partir da fragmentação do texto escolar. O segundo corresponde a um tempo linear (contínuo), ligado a sequencia com que um objeto do conhecimento origina outro, estabelecendo assim uma cadeia de pré-requisitos, ele é intrínseco ao próprio conhecimento matemático.

Por fim, a outra contribuição de Câmara dos Santos (1997) para uma melhor compreensão da relação didática inerente ao sistema didático, é a proposição do *tempo do professor*, ao considerar a importância deste agente para o desempenho do processo didático, pois conforme o mesmo,

"ele foi habilitado para ser o representante de uma comunidade científica e ele está condicionado, pela instituição didática que o emprega, a ser o bastão do conhecimento a ser ensinado." (Câmara dos Santos, 1997, p. 114).

Esse *tempo do professor* está diretamente ligado ao professor como um *sujeito didático* e o seu gerenciamento ancora-se na relação professor/conhecimento matemático. Concretamente, podemos perceber a ação desse tempo no contexto da sala de aula, a partir de situações cotidianas em que os avanços ou retrocessos realizados pelo professor no relógio didático, dependem fortemente da sua relação (familiaridade) com o conhecimento matemático vivenciado. Analogamente podemos inferir que a qualidade dessa relação é diretamente proporcional ao tempo dedicado ao ensino do objeto do saber, ou seja, o relógio didático é atrasado. Contudo, se a situação é contrária, se não houver uma boa relação do professor com o objeto do saber, o relógio é adiantado e menos tempo é dedicado ao seu ensino, dessa forma ele tende a ser afastado da relação.

A partir dessa elucidação sobre a Transposição Didática e dos elementos que a caracterizam externamente e internamente, avançamos nesse estudo buscando outros conceitos que nos ajudaram na tarefa de, efetivamente, mostrar e demonstrar as práticas que acarretam o processo de ensino e aprendizagem do nosso objeto de estudo *Frações*. Para tanto, categorizamos e analisamos o livro didático no tocante ao objeto de estudo citado e analisamos a prática do professor do 6º ano do ensino fundamental, cujas aulas foram filmadas e transcritas em textos que relatam sua

atuação na sala de aula, após isso confrontamos as duas situações. Prosseguimos elucidando sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e seus elementos constituintes.

3.2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO - TAD

Essa teoria compreende o estudo do homem perante o saber matemático e, de forma mais específica, frente às situações matemáticas. Desenvolvida por Chevallard (1998), ela descreve nas suas concepções que os objetos matemáticos não são existentes em si, ele defende que eles são entidades emergentes dos sistemas e das práticas existentes em determinadas instituições, aqui com enfoque para as instituições de ensino.

A Teoria Antropológica do Didático (a partir de agora TAD em determinados momentos) é considerada uma extensão da Transposição Didática (TD), motivo este, dentre outros, que lhe garantem grande importância para a Didática das Ciências e, neste caso específico, para a matemática, pois insere a Didática no campo da Antropologia, ou seja, ela situa a atividade matemática e, por conseguinte, o seu estudo, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais (CHEVALLARD, 1999, p. 233).

Conforme Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015), sobre a TAD:

Ela se propõe a analisar um dos problemas do professor que é preparar o seu curso de aulas e depois colocá-lo em prática, ou seja, como organizar um objeto de estudo (matemático) e fazê-lo funcionar em sala de aula. (CÂMARA DOS SANTOS; BESSA DE MENEZES, 2015, p. 649).

3.2.1 As relações institucionais na TAD

A Teorização da TAD requer inicialmente três conceitos primitivos: os *objetos* (O), as *pessoas* (X) e as *instituições* (I), sobre os quais se infere a respeito da natureza e especificidades parafraseando o autor. Para Chevallard (1991), *tudo é objeto!* Pessoas, instituições, ou seja, toda entidade material ou imaterial que exista ou venha a existir para um ou mais indivíduos, existência que dependerá do seu reconhecimento por pelo menos uma pessoa (X) ou por uma instituição (I).

O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise conduziu-me a propor uma teorização em que todo objeto possa aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas há também o objeto “escola”, o objeto “professor”, o objeto “aprender, o objeto “saber”, o objeto “dor de dente”, o objeto “fazer pipi”, etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar a didática no seio da antropologia (CHEVALLARD, 1996, p.127).

Esse reconhecimento é consequência de relações entre esses conceitos, mais especificamente entre o objeto (O) com ao menos um dos outros dois conceitos, dentre as quais pode ocorrer: a relação pessoal de (X) com (O) representada por $R(X,O)$ e a relação institucional de (I) com (O) representada por $R(X,O)$. Para Chevallard (1991), o que define a pessoa (X) são as várias relações que ela manteve ou mantém com as várias instituições para as quais se submeteu ou se submete. Ressalta ainda que a pessoa (X) é, no contexto das relações, o estágio final da evolução que tem o seu início no indivíduo (estágio mais primitivo), passando pelo sujeito (estágio intermediário).

Seguindo as ideias do autor, as instituições (I) são dispositivos sociais totais ou mesmo parciais (extensão reduzida) que impõem aos seus sujeitos maneiras próprias de agir e de pensar específicos de cada uma e que, segundo Chevallard (1991), se apresentam de quatro formas:

- i) produtoras (academias, com seus cientistas, teóricos, pesquisadores, entre outros);
- ii) utilização (organizações tais como empresas, indústrias, comércios, entre outras);
- iii) ensino (escolas, Institutos Federais, Universidades, entre outros), nas quais o seu representante mais notório é o professor na sua ala de aula;
- iv) transpositivas (conjunto da noosfera), impulsionadoras do processo de transmissão dos saberes entre as instituições.

Considerando os conceitos até aqui apresentados, além de outros que aparecerão à medida que discorreremos sobre a TAD, Chevallard (1991) infere ainda que o conhecimento toma forma nessa teoria através da noção de relação. Sendo assim, esse autor reforça que a Relação de (X) com (O), expressa como $R(X, O)$ acontece em determinado período da vida da pessoa (X) e ressalta que ela, a pessoa (X), muda de acordo com a sua relação com o objeto (O) enquanto que o indivíduo permanece invariável.

Nesse processo de relações, o “passaporte” para que um indivíduo (X) se torne sujeito de uma dada instituição significa que ele deve assumir certa posição na nela, fato que o torna submisso às normas e vontades que regem a referida instituição. Dessa forma, para Chevallard (1991), o sujeito é o resultado das várias submissões à(s) instituição(ões) da(s) qual(is) participou ao longo da vida. São, portanto, essas práticas envolvendo o objeto (O), que definem RI (O), ou seja, a relação institucional a O em I).

Na relação institucional com o objeto (O), Bosch; Chevallard (1999) conduzem à ideia de que a sua construção se dá a partir das práticas sociais realizadas nas instituições, colocando em ‘jogo’ o objeto (O) considerado (disponibilizando-o para se relacionar), para isso, leva-se em conta a forma como esse objeto (O) é utilizado pelas instituições. Essa utilização, ou seja, a relação R(I, O) interfere diretamente na relação da pessoa (X) com o objeto do saber (O).

Para Chevallard (1999), no momento em que uma pessoa (X) entra numa instituição (I), se estabelece uma relação pessoal como o objeto do saber (O) existente em (I), caso (O) ainda não exista para (X). Se no contrário, essa relação não é estabelecida, mas modificada.

Nas duas perspectivas, a relação entre (X) e (O) acontece sob a dependência da relação de (I) com (O), dependência esta, aqui representada tomando como exemplo o símbolo (*dupla catraca*) da *lógica proposicional* em que $R(I, O) \models R(X, O)$, cujo significado diz que a relação R(I, O) acarreta a relação R(X, O), tomando o verbo ‘acarretar’ no sentido de ‘ter como consequência’, ‘causar’. (BECHARA, 2011, p. 220). Analogamente, para Chevallard (1999) a aprendizagem ocorre quando a relação R(X, O) se altera, em outras palavras, (X) assimilou as características, conceitos e práticas sobre o objeto de ensino (O).

Ainda segundo o autor, a relação R(X, O) demanda da instituição (I), uma atitude intencional a fim de, modificando a citada relação, se construa o que Chevallard (1999) chama de *sujeito adequado*, o que só ocorre quando se estabelece a partir das ações institucionais, uma concordância mútua entre as relações R(X, O) e R(I, O), ou seja, (X) aceita as regras e normatizações que regem (I). Na situação inversa, o sujeito é considerado *não adequado* à instituição, onde para Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015), essa *inadequação* fere o contrato institucional. Esse processo em que as práticas institucionais (suas

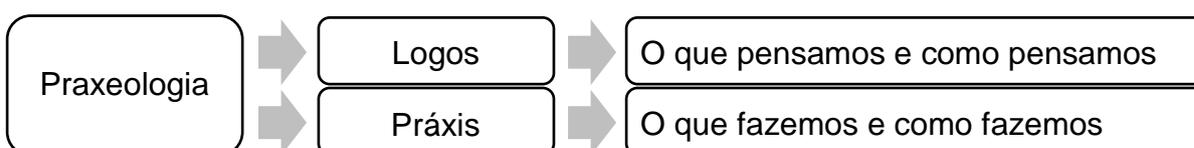
intencionalidades), focam na conformidade ou não do sujeito, configura-se na avaliação institucional.

Os avanços ou fracassos obtidos dessa relação pessoal decorrem da forma de como as instituições lidam com as suas aprendizagens acerca dos objetos de estudo que elas detêm. Para tal, Chevallard (1999) acrescenta que a TAD também se apresenta como uma ferramenta com a qual se pode identificar, descrever e analisar as formas e procedimentos das práticas institucionais a partir da noção de *praxeologia* para identificar elementos que indicam a prática docente, ou seja, “como o professor dá conta de preparar suas aulas e coloca elas em prática no cenário didático”. (CÂMARA DOS SANTOS; BESSA DE MENEZES, 2015, p. 655).

3.3. ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA OU PRAXEOLOGIA DE FATO

Para Chevallard (2007), o conhecimento não é homogêneo, isotrópico⁴, absoluto ou mesmo inquestionável, ele configura-se em mudança da realidade que, adaptada ao seu habitat⁵ institucional, ocupa o seu *nicho*⁶. Essa adaptação às instituições ocorre pelas vias da atividade humana. Essas dadas características “relativizam”⁷ o conhecimento fazendo-o questionável, subjetivo, passível de adequação.

Figura 2 – Modelando a atividade humana



Fonte: adaptado de Achiem (2014).

Segundo Matheron (2000, p. 52), essa dimensão ecológica nos permite questionar: “como é ensinado um objeto identificado num livro didático? Que tipo de

⁴ Traz em si as características que o originou.

⁵ Lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. (Chevallard, 1994).

⁶ Lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou praxeologia dos objetos com os quais interage. (Chevallard, 1994).

⁷ “Relativismo é uma corrente de pensamento que questiona as verdades universais do homem, tornando o conhecimento subjetivo”. (...). “A relativização é a desconstrução das verdades pré-determinadas, buscando o ponto de vista do outro”. Disponível em: <<https://www.significados.com.br/relativismo>>. Acesso em: 07 de abril de 2019.

exercícios (tarefas) a realizar e com que tipo de técnicas disponíveis (ou não)? Qual é a *organização matemática*, e por consequência, que tipo de progressão considerar?”.

Essas ações, aqui direcionadas para o campo da didática da matemática e focadas na prática docente, é desvelada nas concepções da TAD como a realização de certo tipo de tarefa (T), expressada por uma forma verbal imperativa ou infinitiva, por meio de um modo específico de fazer com o uso de uma técnica (τ).

É a associação tarefa-técnica [T, τ] que definirá um saber-fazer (a práxis) específico para cada tipo de tarefa (T), associação esta que tem a necessidade de ser compreendida e validada por uma tecnologia (θ) e que por sua vez necessita ser fundamentada por uma teoria (Θ). Da conexão desses dois outros elementos praxeológicos surge uma segunda associação representada pelo par tecnologia-teoria [θ , Θ] e que, segundo o autor, corresponde ao saber, a razão (o logos). Para Bosch e Chevallard,

(...) a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e a gente supõe que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada (...) essa necessidade ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificado das tarefas e técnicas que a gente chama de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que a gente chama teoria da técnica e que constitui o fundamento último. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85-86)

Frente a todas as especificidades demandadas pelos elementos praxeológicos, a saber: tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), a fim de atender às necessidades ecológicas, o autor distingue e nomeia praxeologia nas quatro categorias apresentadas a seguir, conforme suas definições e associações:

i) *praxeologia pontual* [T, τ , θ , Θ], quando uma única tarefa (T) é o elemento central e a ela está associada uma praxeologia denotada por pelo menos uma técnica (τ), uma tecnologia (θ) e uma teoria (Θ), sobre a qual Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015) destacam a raridade desse tipo de praxeologia, pois segundo eles, no contexto real, o mais comum é que numa dada instituição (I), a teoria (Θ) seja capaz de justificar não apenas uma, mas várias tecnologias (θ_j) e estas por sua vez o fazem com as várias técnicas (τ_{ij}) que também o fazem com as várias tarefas (T_{ij});

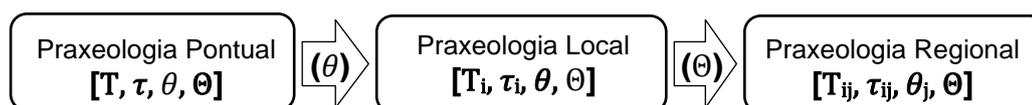
ii) *praxeologia local*, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, tem sua existência no conjunto das praxeologias pontuais e está associada a uma tecnologia (θ);

iii) *praxeologia regional*, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, realiza-se em função de uma determinada teoria (Θ);

iv) Por fim, a *praxeologia global* $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$, resultante do conjunto de várias praxeologias regionais, estas correspondentes às diversas teorias (Θ) que residem em uma determinada instituição.

Sobre as praxeologias citadas, e considerando a sua dinâmica dentro de certa instituição (I), Chevallard (1999) nos esclarece que as evoluções entre elas ocorrem sempre *evidenciando um dado elemento*, conforme se percebe na ilustração.

Figura 3 – Evolução Praxeológica



Fonte: a pesquisa (2019).

Essa conjuntura praxeológica nos remete ao cerne das práticas realizadas em uma dada instituição (I), na sala de aula para ser mais objetivo, nela se analisam dois contextos: o primeiro nos remete à realidade matemática a ser construída, cujos indícios constam no livro didático, nos programas de ensino entre outros, (sua Organização Matemática); a outra nos remete à forma como ocorre essa construção, é o papel destinado ao professor, (sua Organização Didática). Segundo Chaachoua; Bittar (2019, p. 32), “Falamos sobre praxeologia matemática – ou organização matemática (OM) – quando os tipos de tarefas T vêm da matemática, e de praxeologia didática – ou organização didática – quando os tipos de tarefas T são tipos de tarefas de estudo”. Sobre as ações que as constituem, discorreremos com mais detalhes a seguir.

3.3.1 Construção da realidade matemática a partir da sua praxeologia ou organização

As Organizações Matemáticas (O.M.) ou Praxeologias Matemáticas, termo mais usual, referem-se à *realidade* Matemática vivenciada em sala de aula e, por

isso, construída em relação a um determinado objeto do saber matemático (saber a ser ensinado). Para Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015), considerando a prática docente não desvinculada dessa realidade, a Organização Matemática começa justamente pela análise do professor sobre todo o aparato norteador que ele possa deter em favor das suas escolhas, a partir das escolhas já realizadas nas etapas da transposição desse saber. Para os autores, tais aparatos se materializam no livro didático, nos programas e manuais de ensino, entre outros.

Dentre esses outros, é importante destacar que hoje, de forma mais abrangente (em termos de acesso), o professor também tem à disposição, informações na internet (Portais do MEC, das Secretarias Estaduais e Municipais, Google, YouTube, Redes Sociais, entre outros sites), oficiais e não oficiais, mas que, diretamente ou indiretamente, influenciam na construção dessa *realidade* matemática porque se constituíram fontes corriqueiras de pesquisa do professor.

Para Chevallard (1997), essa Organização Matemática é estruturada em torno de vários tipos de tarefas bem definidas, inerentes à própria matemática, exigindo a criação de técnicas de resolução adaptadas, que por sua vez são justificadas por tecnologias fundamentadas e desenvolvidas no contexto de uma teoria clara e compreensível.

Nesse processo de construção da realidade matemática em uma determinada instituição (**I**), Barbosa (2011, p. 68), infere que “as praxeologias envelhecem, pois seus artefatos teóricos e tecnológicos perdem sua credibilidade”. Contudo, para esse autor, “em uma determinada instituição (**I**) aparecem novas praxeologias que poderão ser (re)produzidas se existem em alguma instituição.” (Ibidem, p. 68).

No processo de definição dos conteúdos matemáticos a serem trabalhados, estão implícitas outras ações impetradas ao professor, sobre as quais estão: a definição dos tipos de tarefas que compõem esses conteúdos e o nível de desenvolvimento inerente aos demais elementos (técnica, tecnologia e teoria). A esse respeito, recai sobre a responsabilidade do professor, a busca de respostas para as indagações que veremos a seguir:

- A tarefas conseguem apresentar clareza e são bem definidas a fim de estabelecer identidade? Elas atendem às necessidades matemáticas propostas nos conteúdos curriculares?

○ As técnicas escolhidas para a resolução dos tipos de tarefas foram de fato bem elaboradas? Elas darão conta dos tipos de tarefas propostas? Oferecem possibilidades para evoluir?

○ As tecnologias disponíveis atendem às técnicas escolhidas? Elas são suficientes para esclarecer essas técnicas?

○ Os elementos teóricos são revelados? Eles justificam a tecnologia empregada?

Dentro dessa visão que abrange teoria e prática, outra questão inerente à prática docente precisa ser considerada a partir desse ponto: *como o professor vai gerir a praxeologia matemática de fato na sua sala de aula, ou seja, como ele vai transpor de uma realidade matemática para uma realidade didática?*

Essas questões remetem à necessidade de se realizar um estudo sobre um assunto ou tema, no nosso caso específico, sobre um objeto matemático. As respostas para o modo que possibilita a realização desse estudo se configuram na forma como o professor mobiliza o conjunto de tarefas, de técnicas, de tecnologias ou mesmo de teorias para o estudo acontecer. Chevallard (1997) chama esse processo de Organização Didática (O.D.) ou Praxeologia Didática, sobre a qual detalhamos a seguir.

3.3.2 Formas mobilizadoras dos estudos didáticos a partir da sua praxeologia ou organização

As Organizações Didáticas (O.D.) ou Praxeologias Didáticas dizem respeito às escolhas e formas de como o professor põe em prática o conteúdo matemático, no caso desse estudo, frações. Para Chevallard (1999),

Por organização didática podemos entender, a priori, o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias, etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta. O enfoque clássico em didática da matemática tem ignorado em geral os aspectos mais genéricos de uma organização de estudo de um tipo dado de sistemas didáticos. (p. 238).

Ainda segundo Chevallard (1999 apud Barbosa, 2011, p. 69), “a construção da praxeologia se inicia em uma falta de técnica para a resolução de um determinado tipo de tarefa”. Observemos a exemplificação desse contexto com a seguinte pergunta: *Como somar frações com denominadores diferentes?* Para essa

indagação, a versão para uma Organização Didática significa dar resposta à outra pergunta: *Como realizar o ensino da resolução da soma de frações com denominadores diferentes?*

Prossegue o autor inferindo que uma organização didática mobiliza os elementos praxeológicos para o “estudo concreto em uma instituição concreta” (CHEVALLARD, p. 238). Essas atividades de estudo e investigação podem tomar formas diversas em consequência da instituição escolar e da organização matemática (OM) local considerada. Esse estudo inicia a partir de uma situação cotidiana que visa trazer à luz uma questão problemática cuja resolução possibilite a reconstrução da (OM) local em questão. (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 77, 78). Apesar dessa diversidade, algumas situações se mostram presentes quali/quantitativamente.

Essa apresentação (divulgação) da situação pelo professor à comunidade (sala de aula) dá início a um processo de estudo que Chevallard (1999) denomina de *momentos de estudo* ou *momentos didáticos*, pois na visão desse autor, qualquer que seja o caminho a ser escolhido e seguido, se chegará, inevitavelmente, a um momento em que a forma (ou modelo) de estudo será colocada em prática através de um momento de fixação, de institucionalização, ou mesmo gerando questionamento da validade do que foi construído (momento avaliativo), entre outros. Para Chevallard,

A noção de momento não remete mais que em aparência à estrutura temporal do processo de estudo. Um momento, no sentido dado a palavra aqui, é em primeiro lugar uma *dimensão* em um espaço multidimensional (...) uma *sã* gestão do estudo exige que cada um dos momentos didáticos se realize *no bom momento*, ou mais exatamente, nos *bons momentos*. (CHEVALLARD, 1999, p 242).

Discorreremos a seguir sobre os seis momentos didáticos, como eles ocorrem, suas características e especificidades.

O *Primeiro Momento* é o primeiro *encontro* com a organização matemática (OM), ou seja, ela passa a existir para o aluno ao ser disponibilizada no cenário didático (sala de aula). Essa existência pode ser inédita ou não, caso o aluno já a conheça, será então um reencontro. Há várias formas desses (re)encontros ocorrerem, contudo, uma delas atenderá emergencialmente, a um grupo de problemas referentes a no mínimo um tipo de tarefas (T) que a constitui;

O *Segundo Momento* corresponde à *exploração* de um tipo de tarefas (T) e a *elaboração* de uma técnica (τ) relativa a (T). Segundo Chevallard (1999), o estudo dos problemas é um meio que permite elaborar e utilizar uma determinada técnica relativa a problemas de mesma tipologia. Em outras palavras, a elaboração das técnicas firma-se como meio de resolução quase que rotineira desses problemas. Sobre a importância da elaboração de técnicas esse autor faz a seguinte analogia, a *elaboração de técnicas é o coração da atividade matemática*;

O *terceiro momento* materializa-se na *constituição* do bloco tecnológico-teórico [θ , Θ], relativo à técnica. O autor ressalta que esse momento não está isolado dos outros citados anteriormente (1º e 2º), existe uma inter-relação estreita com cada um dos outros momentos, fato justificado no entendimento de que, ao elegermos certa técnica, ela estará diretamente ligada ao referido bloco devido à necessidade de ser explicada e justificada por ele. Em certas instituições com suas especificidades e para certos professores com suas concepções, esse momento poderá ser a primeira etapa de estudo de uma dada organização matemática (OM);

O *quarto momento* refere-se ao *trabalho* da técnica (τ), que visa aperfeiçoá-la, fazendo-a mais confiável, aumentando assim o seu domínio, ação que geralmente requer o aprimoramento da tecnologia (θ) em questão;

O *quinto momento* é o da institucionalização, que classifica e oficializa os elementos que de fato foram escolhidos para integrar à Organização Matemática (OM) e o descarte daqueles não requisitados a sua construção. Para Chevallard,

O momento da institucionalização é, de início, aquele que, na construção 'bruta' que pouco a pouco, emergido do estudo, vão separar, por um movimento que compromete o porvir, o 'matematicamente necessário', que será conservado, e o 'matematicamente contingente', que logo será esquecido. (CHEVALLARD, 1999, p. 244)

O autor destaca que a importância deste momento reside em expor para o aluno o que é necessário conhecer para resolver uma tarefa estudada ou o tipo de tarefa estudada.

O *sexto momento* é aquele da avaliação que se articula com o momento da institucionalização. Essa avaliação compreende os aspectos das relações pessoais e institucionais. Segundo Kluth e Almouloud (2018, p. 19), esse momento é permeado pela seguinte pergunta: "Quanto vale, de fato, a organização matemática

que se construiu e se institucionalizou? A técnica utilizada é por si só potente, manejável, segura, robusta?”. Segundo Chevallard (1998), o direcionamento dessas perguntas amplia a avaliação das relações pessoais para uma avaliação voltada para a relação institucional que se coloca como referência. Essa avaliação proposta pelo autor, não se destina mais a ser formadora de uma pessoa, mas de uma praxeologia.

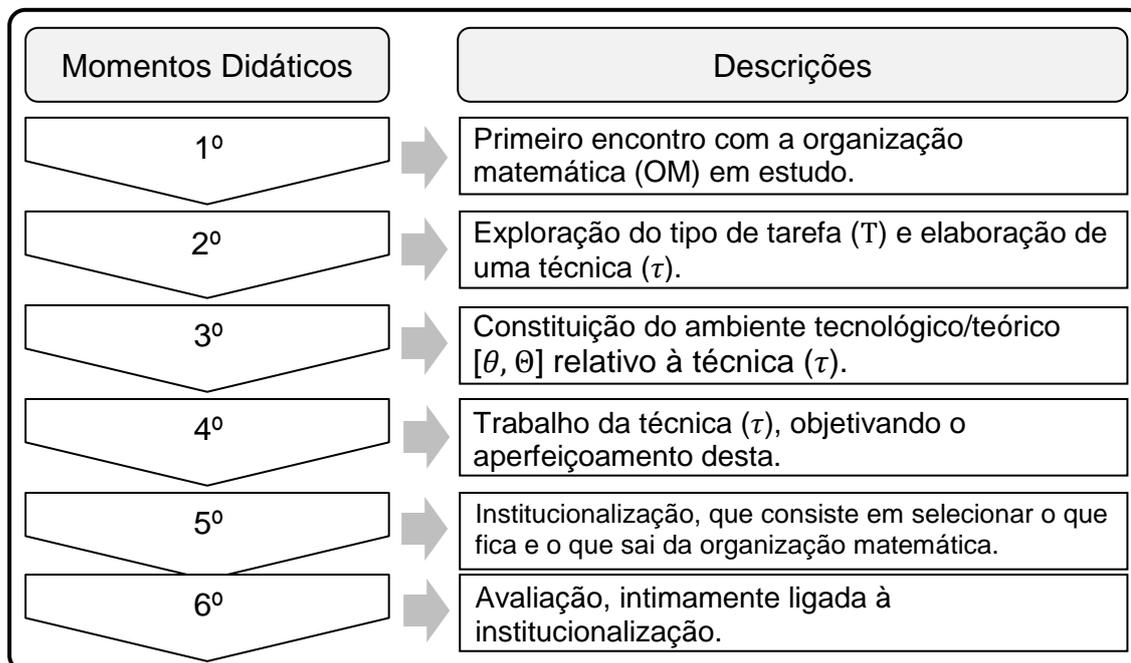
É nesse momento que o sucesso ou o insucesso da organização matemática (OM) emerge, ou seja, determina (no caso da instituição escolar), o que o aluno aprendeu. Diante desse estado de aprendizagem do aluno, a avaliação estimulará a retomada dos momentos didáticos ou mesmo de toda a jornada didática. Conforme Chevallard:

[...] este momento de reflexibilidade, onde qualquer que seja o critério e o juiz se examina o que vale o que se já aprendeu, este momento de reflexão que, apesar das recordações de infância, não é em absoluto invenção da Escola, participa de fato da ‘respiração’ mesma de toda atividade humana. (CHEVALLARD, 1999, p. 245)

Sobre esse momento de avaliação, percebe-se que o autor enfatiza a sua importância na qual o professor passa a considerar as soluções produzidas por seus alunos como objetos de estudo. Nesse momento flexível, o aluno se apropria das várias *formas de fazer* através da análise e avaliação das soluções do professor (em sala) e/ou das exemplificações apresentadas no seu livro didático a fim de desenvolver as suas próprias soluções. Acreditamos que esse “toque particular” na forma ou nos caminhos encontrados por alguns alunos para suas soluções, podem ter também, como contribuintes, as experiências de outros alunos.

A seguir tecemos de forma resumida os momentos didáticos e suas especificidades:

Quadro 1 – Momentos Didáticos



Fonte: adaptado de Almouloud (2000, p. 200 apud Barbosa, 22011, p. 71).

3.3.3 Trabalhando a relação entre as praxeologias através dos Níveis de Co-Determinação Didática (NC-DD)

Entre as organizações matemática e didática existe uma relação que Chevallard (2002) chamou de fenômeno de co-determinação didática. Para trabalhar com essa relação entre as praxeologias e assim torná-la didática (explicável), esse autor faz uso de alguns termos da biologia tais como: *nicho*, *habitat* e *ecologia*, voltados para o contexto da didática cujos significados diferem dos termos biológicos.

Dessa forma, dando identidade a essa relação, caracterizando-a como um fenômeno e utilizando termos biológicos nas concepções da TAD, Chevallard infere que há uma hierarquização do saber cuja escala é composta de níveis e que esses níveis correspondem a realidades diferentes entre si. Nesse contexto, *habitat* é o lugar que detém objetos matemáticos nos quais se encontram um dado saber e *nichos* se refere às funções exercidas por esses objetos matemáticos.

Segundo Almouloud (2007, p. 113 apud Barbosa, 2017, p. 54), o autor busca explicar, a partir dessas terminologias, as relações entre os objetos e o estudo dos objetos em si mesmos. Para Chacón (2008, p. 73), a co-determinação didática é

entendida como uma modelagem que engloba as condições e restrições segundo as quais se determinam mutuamente as organizações matemática e didática.

O níveis de co-determinação e suas interações, nove no total, caracterizados em comuns e específicos, são apresentados no quadro abaixo conforme a sua hierarquização.

Quadro 2 – Escala dos níveis de co-determinação didática



Fonte: Chacón (2008, p. 73).

A partir dos níveis de co-determinação didática verificamos as relações entre os princípios que regem as escolhas realizadas em relação às questões propostas sobre frações no livro didático do 6º ano do ensino fundamental.

3.4 COMPREENDENDO OS REGISTROS DAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES FRACIONÁRIAS E SUAS RELAÇÕES

Essa pesquisa constitui-se no universo matemático dos *Números* dos quais focamos o objeto matemático *Números Racionais* e, mais especificamente, o conteúdo *Frações* por ser esta, a sua representação mais polêmica dado o seu alto teor de abstração e complexidade. Sendo assim, convém utilizarmos a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymund Duval (1993), apoiado na ideia do autor que afirma só haver mobilização do conhecimento pelo

sujeito (aluno), principalmente do saber matemático, quando este recorre à noção de representação semiótica⁸.

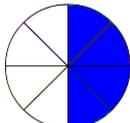
Duval (2003) emprega o termo *registro* em função dos diferentes tipos de representação semiótica e acrescenta que há um requisito para se considerar um sistema semiótico como registro de representação, que ele possibilite a comunicação, a objetivação e o tratamento. Ele considera como exemplos de registros: nos números, os sistemas de numeração; na álgebra, a sua escrita; na geometria, as figuras; nos sistemas linguísticos, a língua natural, entre outros.

Para esse autor, os diversos registros de representação semiótica não podem ser separados da função cognitiva do pensamento humano, ou seja, a apreensão do conceito de um objeto ou *noésis*, não ocorre sem a apreensão ou produção de uma representação semiótica ou *semiósis*. Duval (2004, apud Soares, 2007, p. 27).

Dessa forma, trazendo essas noções para o universo dos números racionais, percebemos no exemplo apresentado por Soares (2007) que um mesmo número racional possibilita quatro diferentes *registros de representação* sem fugir do conteúdo apresentado, como vemos a seguir:

i) fracionária $\frac{1}{2}$;

ii) decimal 0,5;

iii) figural e, 

iv) pela língua natural: *um meio ou metade*.

Pelos enfoques da TRRS, concluímos que a proficiência do aluno na resolução de uma atividade envolvendo o número racional na sua forma fracionária ou qualquer outra das quatro apresentadas (*semióses*), não garante que ele tenha apreendido o conceito de número racional (*noésis*). (SOARES, 2007 p. 27). Visto que os registros de representação de cada objeto matemático são parciais em relação a ele. Diante dessa questão, Duval (2003), diz que a aquisição conceitual de um objeto (*noésis*), só ocorre a partir da mobilização de muitas representações, visto

⁸ Ciência que estuda os signos, ou seja, a linguagem formal. Sua teorização encontra-se em PIERCE, C. S. *Semiótica*. Tradução José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005.

que, cada registro de representação apresenta um determinado conteúdo, uma dada característica, um diferente sentido do objeto.

A coordenação de muitos registros de representação semiótica ocorre, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos, para tanto, são necessárias duas condições: que o objeto não seja confundido com suas possíveis representações e que seja reconhecido em cada uma delas. É dessa forma que uma representação permite o acesso ao objeto representado. (DUVAL, 2003).

Essa possibilidade de confusão entre o objeto e suas representações revela um lado contraditório da atividade matemática. Como não fazer essa confusão se a apreensão do objeto matemático demanda necessariamente, representações semióticas sobre o mesmo? Como resposta a essa indagação, o autor responde que apenas os alunos que conseguem realizar mudanças de registros de representação, não confundem o objeto com a sua representação. Duval (2003, apud Soares, 2007, p. 27-28).

Tal situação revela que o manuseio de um objeto matemático através de um único registro de representação “conduz a um fechamento de registros de representação para os alunos, dificultando o reconhecimento dos mesmos objetos através das representações que lhes são dadas por sistemas semióticos diferentes” (Duval, 1993, p.52) e ainda esclarece que isso afeta também outros contextos diferentes daqueles vistos no ensino.

Exemplificando essa dada situação a partir Soares (2007, p. 28), para o universo dos números racionais e, mais precisamente com as frações, temos que: $\frac{1}{2}$ corresponderia a um número racional e não a uma representação do objeto matemático, com possibilidades de o aluno negar que $\frac{1}{2} = 0,5$.

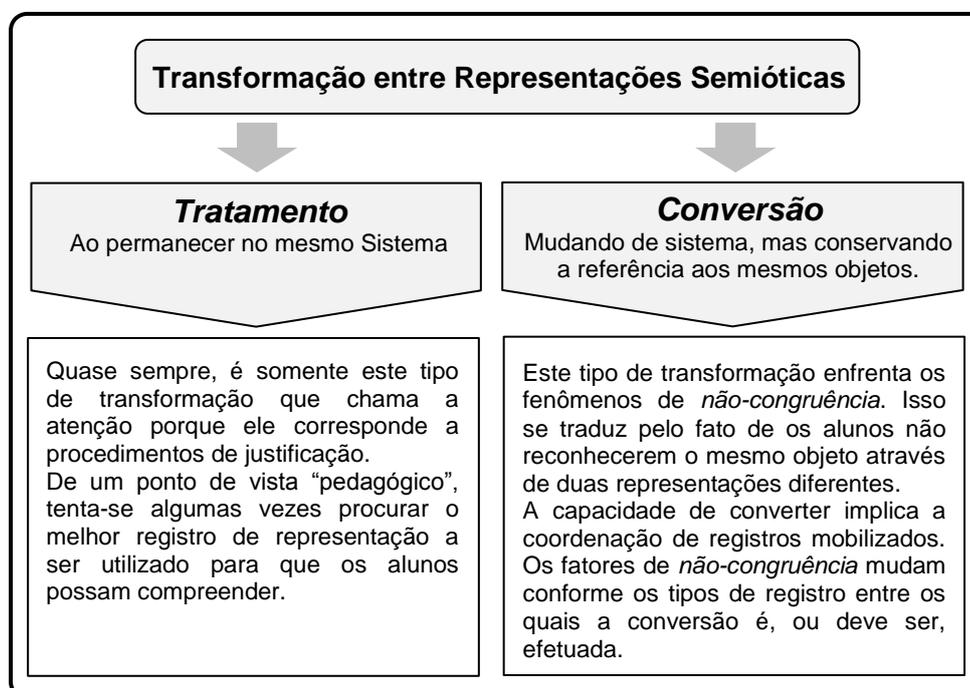
Segundo Duval (2003), para apreensão de um objeto matemático, é muito importante que a distinção entre o objeto e suas representações fique clara para o aluno. Além da importância de não utilizar apenas uma representação semiótica para chegar à solução de um problema, mas efetuar o trabalho com as possíveis representações que cabem ao objeto.

O trabalho com as representações é descrito por Duval (2003, p. 28) como transformações. Para isso, o sistema semiótico deve permitir que ocorram três atividades cognitivas associadas à *semiósis* sobre as quais discorremos a seguir conforme as concepções desse autor:

- A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: estabelecida na elaboração de um texto ou esquema, enunciado compreensível na escrita de uma sentença, de um gráfico, desenho de uma figura geométrica. A formação se faz em função de unidades e *regras de formação*⁹ que são próprias do registro semiótico do qual a representação é produzida.
- O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação dentro do próprio registro do qual ela foi elaborada.
- A conversão de uma representação é uma transformação dessa representação em outra representação, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente da atividade do tratamento.

Sobre tratamento e conversão, há consideráveis diferenciações como vemos no quadro a seguir:

Quadro 3 – Diferenciação entre Tratamento e Conversão



Fonte: adaptação de Duval, (2003, p. 15, apud Soares, 2007, p. 34).

⁹ São aquelas já estabelecidas na sociedade, não sendo competências do sujeito criá-las, mas sim utilizá-las para reconhecer as representações. São exemplos dessas regras: as gramaticais que auxiliam na composição de um texto, as posicionais para o algoritmo da multiplicação, entre outras, cuja função é assegurar as condições de identificação e possibilidade de tratamento. Duval (2003).

Para exemplificar sobre as atividades cognitivas associadas à *semiósis*, partimos da seguinte situação:

Um estacionamento no centro da cidade atende motoristas de carros e motos. Todos os dias, no final da tarde, o Sr. Manoel (o proprietário) pede ao João (o funcionário), um levantamento da quantidade de carros e motos estacionados até aquele momento. Como a amizade deles é estreita, João quis fazer uma “pegadinha” com o Sr. Manoel e respondeu que havia naquele momento, dois quintos de carros e nove quinze avos de motos estacionados. Nesse estacionamento há mais carros ou mais motos? Qual número representa a diferença entre essas quantidades?

Resolução:

1ª etapa: Carros (C) $\frac{2}{5}$; Motos (M) $\frac{9}{15}$ (*Conversão*: ocorreu o registro da língua natural para o registro numérico).

2ª etapa: Encontrando frações equivalentes:

Carros (C) $\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$ (*com tratamento*); Motos (M) $\frac{9}{15}$ (*sem tratamento*);

3ª etapa: Comparando as frações: $\frac{6}{15} < \frac{9}{15}$, logo $C < M$.

4ª etapa: Diferença entre as quantidades: $\frac{9}{15} - \frac{6}{15} = \frac{3}{15}$ (*Tratamento*: transformação dentro de um mesmo registro numérico).

Algumas considerações com relação à exemplificação apresentada:

- A formação da representação foi identificada quando ocorreu a conversão do registro da língua natural para o registro numérico, pois para que isso ocorra, é necessário que se identifique o objeto matemático, no caso, número racional;
- O *tratamento* ocorreu na 2ª e 4ª etapas do cálculo;
- É importante lembrar que, ao se tratar de frações, a ordem em que o cálculo tende a ser desenvolvido interfere na resposta correta daquele aluno que ainda não evoluiu ao ponto da *noésis*, e, por conseguinte, não consegue identificar e comparar frações. Portanto, é possível que ele tente subtrair uma fração maior de uma menor.

Ainda sobre registros, sua mudança e coordenação para o ensino e aprendizagem da matemática, Almouloud (2007) tece o seguinte enunciado:

Falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessível à compreensão da matemática. A noção de registro permite salientar a importância da mudança de registro e considerar a necessidade de uma coordenação de registros. Uma mudança de registros tem vantagens do ponto de vista do tratamento, podendo facilitar a compreensão ou a descoberta (p. 72).

Através de observações feitas ao longo das diferentes fases da aprendizagem matemática, alunos revelaram suas dificuldades ao realizar a atividade de conversão por meio da mudança de registro. (CATTO, 2000, p. 30). A partir das dificuldades apresentadas, conjecturamos que essa realidade também se aplica ao conteúdo fração e que ficando restrita a um único registro de representação, limitam-se por consequência, os seus possíveis tratamentos.

Na perspectiva de Duval (2003), as regras que promovem a realização dos registros, as quais devem ser utilizadas para que o aluno reconheça as representações dos conteúdos estudados, decorrem da necessidade de somente ocorrer apreensão do objeto matemático quando o aluno utilizar pelo menos dois registros de representação semiótica.

A respeito dessas limitações, Shoenfeld (1986, p. 239-244) chama a atenção para a compartimentalização inadequada ocorrida no ensino da matemática, na qual “os estudantes podem, virtualmente, não fazerem as conexões que esperaríamos deles entre domínios de referências e os sistemas de símbolos, [...]”.

Com relação a essa mesma questão, reportamo-nos a algumas situações verificadas nos livros didáticos, tais como: a simplificação teórico-prática; as “falsas” contextualizações apresentadas em questões cujo objeto matemático requer maior conexão com o cotidiano do aluno, ou seja, significância; limitação das conceituações; falta de exemplificações mais detalhadas; e, singelos exercícios desprovidos da boa elaboração.

Além do seu lado conceitual, a atividade de *conversão* se realiza nos conceitos de *congruência* e *não-congruência*. Para Duval (2003), há ocorrência de *congruência* quando a representação terminal transparece na representação de saída e, a *não-congruência* ocorre sempre que a representação terminal não transparece, em absoluto, na inicial.

Por esse motivo o autor considera, sob os enfoques da sua teoria, a necessidade do professor trabalhar os dois tipos de conversão (*congruente e não-congruente*) ao ensinar um conceito na sua aula. As conversões congruentes atendem aos três critérios seguintes: i) existência de correspondência semântica entre as unidades significantes¹⁰ do registro de partida e o de chegada, os símbolos apresentam o mesmo significado; ii) existência de uma mesma ordem de apreensão das unidades significantes nas duas representações; e iii) Existência de univocidade¹¹ semântica, ou seja, há correspondência entre as unidades significantes dos registros de partida e de chegada nos dois sentidos. Nessa prática, há forte inclinação docente ao utilizar as exemplificações propostas aos alunos no sentido desse tipo de conversão. (DUVAL, 2003, p. 20).

As conversões que não atendem a pelo menos um dos critérios citados são classificadas por *não-congruentes*, o que determina a sua classificação em maior ou menor em decorrência da quantidade de critérios que são ou não atendidos. A conversão por *não-congruência*, requer certa atenção, pois oferece bem mais dificuldades devido a quase total ausência de regras para sua realização.

Diante dessas duas questões atribuídas à prática docente, o autor chama a atenção para a necessidade de uma *coordenação de registros* como condição essencial para que ocorra aprendizagem na matemática. Para ele, “tal coordenação não se opera espontaneamente e não é consequência de nenhuma ‘conceitualização’ a-semiótica” (DUVAL, 2003, p. 29).

No contexto das frações, mesmo com a sua forte hierarquização conceitual, é possível realizar conversões entre a representação fracionária e a representação decimal do número racional visto que a partir de Duval (2003) e a pesquisa de Catto (2000, apud Soares, 2007, p. 30), os números racionais podem ser explicitados em vários sistemas semióticos de representação, sendo que os mais populares são a representação fracionária (foco deste trabalho) e a representação decimal.

Entendemos até esse ponto que nos é suficiente o uso das contribuições do quadro teórico da TRRS, para um melhor entendimento do conceito genérico de fração expresso pela razão de dois inteiros $\frac{a}{b}$, em que **a** representa o numerador e **b**, o denominador de uma dada fração, com **b** \neq **0**.

¹⁰ Unidade significativa é a unidade mínima de informação presente em uma representação.

¹¹ Univocidade é a característica do que tem um só significado ou interpretação.

3.4.1 Abrangência das representações conceituais das frações

A pesquisa nos revelou uma concordância entre as concepções de alguns autores pesquisados e ao mesmo tempo uma discordância entre outros, isso inclui o professor, os autores do livro didático e os autores dos textos oficiais, fato atribuído a alguns fatores, são eles: a abstração conceitual das frações, que leva a diferentes formas de se pensar esse conteúdo com seus significados; a influência do livro didático nas concepções sobre quais significados são relevantes para a aprendizagem do aluno, no caso do professor; a influência dos trabalhos de pesquisas sobre assunto e; as normatizações contidas nos textos oficiais que norteiam o que precisa ser ensinado sobre frações. Para chegarmos a essa conclusão, analisamos as aulas do professor e o seu livro didático, utilizamos os textos legais (PCN, 1998); (BNCC, 2017); (PC/PE, 2012, 2014) e (PP-SEDUC, 2018) como apoio e trabalhos correlatos apresentados no quadro a seguir.

Quadro 4 – Resumo das múltiplas representações assumidas pelas frações

Títulos, textos e trabalhos	Medida	Razão	Quociente	Parte-todo	Operador	Número	Porcentagem	Probabilidade	Taxa	Coordenadas Lineares	Decimal
Autores do LD Analisado (2015)		•	•	•	•		•				•
Autores da BNCC (2017)		•	•	•	•		•	•			•
Autores dos PCN (1998)		•	•	•	•			•			
Autores dos PC-PE (2012, 2014)	•	•	•	•	•			•			
Autores da PP-SEDUC (2018)	•	•	•	•	•			•			
Professor (2019)	•	•		•	•						
Moutinho (2004/2005)	•		•	•	•	•					
Nunes (1997, 2003)	•		•	•	•	•			•	•	
Bryant (1997)	•		•	•	•	•					
Santos (2005)	•		•	•	•	•					
Soares (2007)	•		•	•	•	•					
Romanatto (1997)	•	•	•		•	•	•				
Behr et al. (1983)	•	•	•		•				•	•	•
Kieren (1988)	•	•	•	•	•						
Ohlsson (1989)	•	•	•	•	•						
Catto (2000)	•	•	•	•	•		•				
Câmara dos Santos e Cavalcanti (2006)		•	•	•	•						

Fonte: a pesquisa (2019).

Os trabalhos aqui citados, além das suas contribuições para o campo da matemática e, nesse caso, para o ensino e aprendizagem das frações, nos revelam segundo as suas análises, uma convergência em relação a determinados conceitos que definimos como centrais. Esse *status* atribuído às representações fracionárias apresentadas no quadro anterior transparece a percepção dos autores quanto à sua abrangência conceitual. Nesse contexto, entendemos que a aquisição do conceito de número racional, com relação à sua representação fracionária, o qual

convencionamos chamar de fração, poderá ser construído com êxito se explorados esses determinados conceitos centrais.

Portanto, neste trabalho analisaremos as praxeologias matemáticas e didáticas do professor e do seu principal manual de aula (o livro didático) em relação aos significados: *Medida, razão, quociente, parte-todo, operador multiplicativo e porcentagem*, os quais representam as intenções dos autores, sobre os quais buscamos posteriormente verificar se foram também as intenções do professor para lecionar aos seus alunos. Contudo, acreditamos que outros construtos (número, probabilidade, entre outros) não encontrados no Modelo de Referência (o Livro Didático) e não ensinados pelo professor, sejam relevantes para serem trabalhados de forma integrada acerca da compreensão do conceito de fração no sexto ano do Ensino Fundamental. A seguir, apresentamos os detalhes desses significados:

i) **Medida**, concepção que remete ao início da história das frações, surgiu da necessidade de realização de medições naquele contexto social. Essa prática era consequência da determinação de unidades para quantificar certa grandeza a ser medida e comparar essa unidade com o que se pretendia medir. Foi dessa realidade prática que a humanidade idealizou os números naturais (pela necessidade de contagem) e, por conseguinte, os racionais (pela necessidade de medida) com sua representação mais abstrata, a fracionária.

Para Caraça (1984), os números racionais têm sua origem concreta na forma de expressão numérica de medição de segmentos. Esse tipo de significado traz a ideia de dividir uma unidade em partes iguais ou subunidades e dessa forma verifica-se quantas dessas partes caberão naquilo que se quer medir. Tomando o exemplo para essa situação nas concepções de Wu (2009) tem-se: Localizar a fração $\frac{1}{4}$ no segmento de reta cujo comprimento é o conjunto do segmento unidade $[0,1]$.

Para esse exemplo, o autor faz algumas ressalvas que são melhor compreendidas a partir da seguinte citação: “Porque uma fração é um número e não uma forma ou uma figura geométrica.” Wu (2009, apud Araújo, 2016, p. 6). Para esse autor, há uma problematização em relação ao tipo de linguagem entendida como *partes iguais* quando aplicada em determinados contextos.

Ainda segundo ele, essa linguagem só apresenta clareza de significado quando aplicada no contexto de *medida de segmento de reta* e, para os demais contextos, esse significado perde a clareza, como podemos perceber através do seguinte parafraseado: “se o todo é um pernil, fazer ‘partes iguais’ significa peças com pesos iguais, comprimentos iguais, quantidades iguais de carne, quantidades iguais de ossos, etc.”. WU (2009, Apud Araújo, 2016, p. 6).

Trazendo essas reflexões para o exemplo dado, o autor infere que a significação correta para a divisão do segmento $[0,1]$ em *partes iguais* é: dizer que ele foi dividido em segmentos de comprimentos iguais e comprovar que a junção dos quatro segmentos correspondem ao segmento de comprimento 1.

ii) **Razão**, uma *fração* é interpretada como *razão* quando o contexto exige que ela represente, parafraseando os PCN (1998), “um índice comparativo entre duas quantidades”, conforme situações dos tipos exemplificados a seguir: Exemplo₁: “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes, logo $\frac{2}{3}$ da população da cidade é de imigrantes” (ibidem, p.102). Quando remete à noção de probabilidade. Exemplo₂: “a chance de sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores é de $\frac{2}{10}$ ” (ibidem, p. 102). Agora abordando situações com escalas que envolvem números que representam grandezas geralmente de unidades de medidas diferentes. Exemplo₃: A “escala de 1cm para 100m, representada por 1:10.000 ou $\frac{1}{10.000}$ ”. (ibidem, p. 102). Por fim, temos a *fração* interpretada como porcentagem. Exemplo₄: “70 em cada 100 alunos gostam de futebol”, o que numericamente corresponde a $\frac{70}{100} = 0,70$ ou 70% ou ainda $\frac{7}{10}$ ou 0,7”. (ibidem, p. 102).

iii) **Quociente**, compreende inicialmente uma representatividade para a qual deve-se interpretar que a *fração* assume a identidade de divisão entre dois inteiros, (**a: b, com $b \neq 0$**) portanto, a representação clássica de $\frac{a}{b}$ assume dupla identidade que só serão reveladas, cada uma na sua especificidade, a partir da inferência textual em forma de conceito ou de problemas. São duas situações distintas (relação

parte/todo e quociente), cujas diferenças podem ser percebidas na situação apresentada a seguir.

Exemplo: “[...], dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais.

No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número: $\frac{2}{3}$.” (PCN, 1998, p. 102).

iv) Relação *parte/todo*, a fração pensada nesse sentido, define que o denominador indica em quantas partes a unidade foi dividida. Já o seu numerador por sua vez indica quantas partes dessas foram tomadas ou consideradas. Assim, na representação $\frac{n}{1}$, n corresponde às partes equivalentes tomadas do todo e o algarismo 1 define o todo ou a unidade conforme cada caso. Segundo Bertoni, (2009, p. 76),

A correspondência entre as partes e o todo acontece de duas formas: pode ser entre uma parte contínua de um todo e uma parte contínua de outro todo (1/3 da maçã e 1/3 do bolo) ou entre uma parte contínua de um todo e uma parte discreta de outro todo (1/3 do bolo e 1/3 da dúzia de ovos).

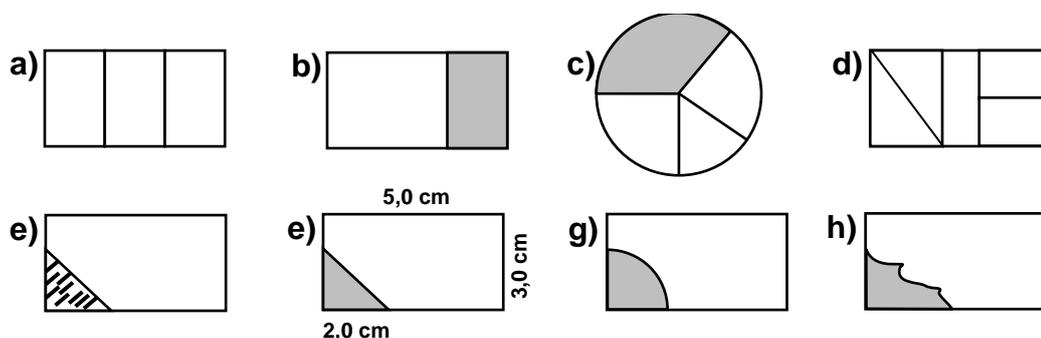
Uma representação muito utilizada é a dupla contagem para produção das respostas. Exemplo: as clássicas divisões de uma figura geométrica em partes equivalentes. Nesse tipo de situação, os PCN (1998), almejam que o aluno seja capaz de identificar a unidade representativa do todo, além de ter a habilidade para realizar divisões operando com grandezas contínuas e discretas.

Contudo, não se utilizam apenas as figuras que representam grandezas contínuas. Para Silva e Almouloud (2008), “qualquer que seja a parte considerada de uma figura pode-se associar a ela, mesmo que aproximadamente, um número fracionário, independente de ela estar totalmente dividida em partes congruentes.” (p. 58).

Algumas representações figurais dificultam o trabalho do aluno na divisão do todo em partes iguais, o que dependerá da uniformidade geométrica da área da figura a ser trabalhada. Em outras palavras, ao contar as partes, o aluno poderá não encontrar uma quantidade correspondente ao visualizado por ele, é o que se

observa na figura a seguir, cujos exemplos requerem a concepção *parte-todo* para o seu desenvolvimento.

Figura 4 – Figuras geométricas que requerem a mobilização da concepção parte-todo



v) Operador Multiplicativo, nesse contexto a fração “[...] desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica”. Exemplo: “que número devo multiplicar por 5 para obter 2”. (PCN, 1998, p. 102-103).

vi) Porcentagem apesar dessa representação corresponder à razão de um determinado valor n para um valor centesimal ou seja, $\frac{n}{100} = n\%$, resolvemos tratar sobre porcentagem nesse tópico devido a sua representação simbólica específica bem como sua aplicabilidade em determinadas situações do cotidiano do aluno, como vemos nos exemplos seguintes.

Exemplo: Na sala de aula do 6º ano “A”, 70% dos estudantes são do sexo feminino. Se na sala estudam 40 estudantes, quantas meninas há nessa sala?

Resolução: Como $70\% = \frac{70}{100}$ e o total estudantes é **40**, podemos fazer então, o produto de $\frac{70}{100} \cdot 40 = \frac{2800}{100} = \frac{2800:100}{100:100} = 28$. Logo, 28 dos 40 estudantes são meninas.

Nas seis perspectivas elencadas, que compõe o conjunto conceitual de frações, objetiva-se um ensino consolidado desses significados, a partir de um trabalho sistemático ao longo do terceiro e quarto ciclos (anos finais do ensino fundamental) possibilitando a análise pelos pressupostos da TAD, das várias

situações-problema propostas nos livros didáticos, em especial naquele adotado pelo professor pesquisado.

Para Almouloud (2015, p. 12) “a análise de livros didáticos continua a ser a entrada principal para o questionamento ecológico ou antropológico” e para tal, apresentaremos em seguida uma proposta de modelização *a priori* tendo como aporte as praxeologias matemáticas pontuais, fundamentadas nos subtipos de tarefa referentes ao conceito e aplicabilidade de *frações*. O material de referência será o livro didático *Vontade de Saber Matemática*, dos autores Souza; Pataro (2015, p. 126-157).

Esse material teórico subsidiou o nosso estudo prexeológico (Organizações Matemática e Didática) sobre o conceito de *fração* no livro didático, bem como, sobre o trabalho do professor, a partir dos quais serão verificados os tipos e subtipos de tarefas propostas e suas técnicas associadas, além das possíveis tecnologias e teorias, caso estejam apresentadas. O momento-chave será a confrontação dos dados que busca responder a questão de pesquisa.

4 CAMINHOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Esse capítulo é responsável por delinear os caminhos que a pesquisa tomou para geração dos dados, onde foi desenvolvida, quem participou e onde pretendemos chegar.

Entendemos que, a partir de Goergen (1981), o conceito de produção do objeto remete a uma leitura de realidades empíricas, percepção que enreda os interesses do sujeito sob um ponto de vista já estabelecido e em sintonia com uma perspectiva interpretativa, o que requer, para a condução da pesquisa, que se considerem os contextos conceitual, histórico e social.

Nosso estudo dirige-se ao campo dos números fracionários, considerando a sua conceituação, representação e importância curricular e social com base nos pressupostos epistemológicos e teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), na qual Chevallard (1999, p. 233), situa a atividade matemática e, conseqüentemente, o seu estudo no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais.

Diante do exposto, entendemos que a nossa pesquisa se insere na área educativa que, por sua vez, é do domínio das Ciências Sociais. Essa importante elucidação hierárquica, alerta-nos que a produção de um trabalho científico não ocorre de maneira aleatória, mas que precisa ter o rigor científico como norteador e, conseqüentemente, um método que atenda às necessidades do objeto de estudo.

Assim, neste capítulo, apresentaremos o percurso metodológico que conduzirá este estudo, desde a abordagem de investigação, a delimitação do campo e dos participantes da pesquisa, aos procedimentos para produção dos dados a serem posteriormente analisados.

4.1 ABORDAGEM INVESTIGATIVA DA PESQUISA

A escolha pela pesquisa qualitativa se justifica por não restringir a observação a uma quantificação estatística ou a uma análise simples e objetiva. Para Goldenberg (1998), ela caracteriza-se pela preocupação em aprofundar a compreensão de um determinado grupo social, organização, instituição, entre outros, isso permite que se investigue o aspecto estudado, abordando a sua complexidade. Diante disso, inferimos que o método de cunho qualitativo não se

atém a uma quantificação dos dados, contudo, os considera quando necessário. Para Minayo:

A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (MINAYO, 2001, p. 21-22).

As respostas advindas da pesquisa qualitativa, em função do seu grande número de detalhes requerem, para sua interpretação, a participação ativa do pesquisador no campo de pesquisa, esse motivo faz dela a mais requisitada nas ciências sociais. Para corroborar com a dinamicidade característica do campo pesquisado, elegemos como tipologias mais adequadas aquelas que subsidiarão maior riqueza de dados ao nosso trabalho, sendo assim, a nossa pesquisa configura-se em exploratória e descritiva.

Para Gil (2008), a pesquisa exploratória atende à necessidade de se desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, objetivando a formulação de problemas mais precisos ou mesmo hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores.

De forma geral, esse tipo de pesquisa configura-se como a primeira etapa de uma investigação mais ampla quando se deseja pesquisar sobre um tema bastante genérico, tornando-se necessário o seu esclarecimento e a sua delimitação. O autor acrescenta que a pesquisa exploratória tem por objetivo descrever características de determinados grupos sociais ou fenômenos, além de subsidiar os meios para estabelecer relações entre variáveis.

“As pesquisas descritivas são, juntamente com as exploratórias, as que habitualmente realizam os pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática” (Ibidem, p. 28). Sendo assim, a pesquisa qualitativa, com suas tipologias exploratória e descritiva definidas, possibilita ao pesquisador o contato direto com o campo de estudo, ampliando a sua visão em relação ao conhecimento da realidade *in loco*.

No contexto de investigação do livro didático para posterior análise, entendemos que outra tipologia de pesquisa se faz necessária, a bibliográfica, pois segundo Oliveira (2016), “A pesquisa bibliográfica é uma modalidade de estudo e

análise de documentos de domínio científico tais como livros, enciclopédias, periódicos, ensaios críticos, dicionários e artigos científicos”. (p. 69).

Portanto, entendemos que essas abordagens são fundamentais para compreendermos a práxis docente no contexto da institucionalização do conhecimento e, de forma mais específica, sobre o conceito de *fração* apresentado no livro didático de matemática escolhido pela instituição e sobre a transposição desse conceito aos alunos.

4.2 LOCUS DA PESQUISA

Selecionamos como campo de pesquisa, uma escola da Rede Municipal de Caruaru-PE. Verificamos que essa escola passou por mudança de localização em virtude de interdição do prédio pela Defesa Civil desta cidade. A mudança ocorreu no início de 2019 e a sua atual, mas também provisória localização é no prédio de uma faculdade. A gestora informou que a construção da sua sede definitiva tem previsão de término para junho de 2020.

Relacionamos abaixo as características e informações sobre a referida escola em relação ao tema *complexidade da gestão escolar*¹² proposto e disponível na página do INEP/Censo (2019), são elas: 1.064 alunos; 18 salas de aulas; 35 turmas; 2 turnos; 34 docentes, 1 tradutor de Libras, 2 professores assistentes, 2 professores substitutos, totalizando 39 funcionários que atuam diretamente com os alunos; Indicador de Nível Socioeconômico – INSE: Grupo 3; Indicador de Complexidade de gestão: Nível 6; Modalidades/Etapas oferecidas: Educação Infantil, Anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e EJA do Ensino Fundamental.

Desse conjunto de características da escola citada, focamos em uma das cinco turmas do 6º (sexto) ano do ensino fundamental, a turma “A” do turno manhã, como *habitat* no qual se desenvolveu essa pesquisa.

Alguns fatores foram considerados decisivos para essa escolha: i) o quadro docente que atende a um dos pré-requisitos da pesquisa (professores formados em matemática); ii) o espaço físico (quantitativo de salas de aula e alunos), que atribui a

¹² O indicador classifica as escolas de acordo com sua complexidade de gestão – níveis elevados indicam maior complexidade. Assume-se que complexidade de gestão está ligada às seguintes características: porte da escola, número de turnos de funcionamento, quantidade e complexidade de modalidades/etapas oferecidas. (Brasil, Ideb-INEP, 2019).

essa escola abrangência no contexto educacional; e, iii) consentimento do professor em comum acordo com a gestão para realização da pesquisa.

A escolha dos anos finais do ensino fundamental e, mais especificamente, o 6º ano se justifica por dois critérios: o primeiro passa pelo crivo curricular, pois é nele que os documentos oficiais PCN (1997/1998), BNCC (2017), PNLD (2017-2019), PC/PE (2012/2014) e PP-SEDUC (2018) orientam mais fortemente para o ensino das *frações*.

O segundo, diz respeito ao maior fluxo de capacitações oferecidas pela Secretaria de Educação Municipal desta cidade em relação ao ensino de matemática dos anos finais, os quais iniciam com o 6º ano, este, porta de entrada para apresentação de conceitos mais abstratos aos alunos e dos quais dependem os conteúdos da sequência curricular de frações, além de ser requisito para o desempenho dos cálculos advindos de outros conceitos do currículo de matemática. Esse fluxo de capacitações é devido à Matemática em si, por ser uma das disciplinas cujo desempenho é fortemente acompanhado pelas avaliações externas como o SAEPE (abrangência estadual) e o a Prova Brasil do SAEB (abrangência nacional).

Ressaltamos que os dados da Prova Brasil (SAEB), associados aos resultados do Censo Escolar, compõem o índice IDEB que qualifica o ensino nas escolas e conseqüentemente, na escola selecionada, onde a matemática entra como grande contribuinte para a substancialidade dessa qualificação. Conforme percebemos,

Art. 6º, O SAEB terá como público-alvo: I - todas as escolas públicas, localizadas em zonas urbanas e rurais, que possuam dez ou mais estudantes matriculados em turmas regulares de 3º ano do Ensino Fundamental, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. (BRASIL, PORTARIA Nº - 564, de 19 de abril de 2017).

4.3 O PARTICIPANTE DA PESQUISA

Para participação da pesquisa, selecionamos um dentre os cinco docentes que lecionam matemática na referida escola, sobre estes, incidiu o critério de lecionar no 6º ano, reduzindo esse universo para três, dos quais foi selecionado um, que atendeu aos quatro critérios estabelecidos. Utilizamos os seguintes critérios de seleção: i) a solicitude do professor em participar da pesquisa; ii) a sua formação

acadêmica (licenciatura em matemática), iii) o tempo de docência (mínimo de três anos) e, iv) que lecionasse em turma do 6º ano.

A definição da turma considerou a distribuição das aulas do professor, em que a turma “A” foi a escolhida por apresentar uma distribuição de aulas sequenciadas, fator que viabilizou o trabalho com frações com o uso de aparatos tecnológicos (notebook e projetor), além de permitir uma melhor utilização dos objetos didáticos (garrafas com marcação graduada, materiais geométricos, entre outros) para explicação dos conceitos das frações, almejando assim, obter abrangência de 100% no acesso às aulas ministradas pelo professor.

A respeito de um dos critérios de participação do professor na pesquisa, aquele que se refere ao tempo de docência, Ramalho; Nuñez; Gauthier (2004) corroboram ao dizerem que o contexto de construção da atividade profissional estabelece um espaço/tempo para outra construção, a da identidade profissional.

Ainda sobre a formação e profissão docentes, Huberman (2000), Chakur (2005) e Cavaco (1995), propõem que compreendamos o ciclo de vida do professor tendo como foco a carreira docente. Para isso, o próprio Huberman (2000, p. 47) estabelece fases do ciclo de vida dos professores que caracterizam os estados de ser, estar e agir docentes, conforme o quadro seguinte,

Quadro 5 – Ciclo da atividade e da identidade profissional docente

Anos da Carreira	Fases / Temas da Carreira
1-3	Entrada ↓
4-6	Estabilização, Consolidação do repertório teórico/pedagógico ↓
7-25	Diversificação, Ativismo, Questionamento ↓
25-35	Serenidade, Distanciamento afetivo, Conservantismo ↓
35-40	Desinvestimento (sereno e amargo)

Fonte: adaptado de Huberman (2000, p.47).

Na referida tabela, destacam-se as duas fases em que os três docentes selecionados se enquadram: dois docentes na faixa dos (4-6) anos e um docente na faixa dos (7-25) anos.

Entendemos por obstáculos à pesquisa, aqueles que não permitiriam a participação do docente, os quais correspondem ao não atendimento aos critérios de

inclusão propostos, ou seja: i) desinteresse ou desestímulo por parte de algum professor; ii) falta de formação acadêmica na disciplina matemática; iii) não ter experiência mínima na docência da matemática de pelos menos três anos; e, iv) não lecionar no 6º ano, o que fugiria ao interesse da pesquisa.

4.4 PROCEDIMENTOS PARA GERAÇÃO DE DADOS

A geração de dados exige antes de tudo, a definição de quais dados se pretende buscar, para em seguida se escolher os procedimentos necessários à realização da pesquisa. É um momento de reflexão e sistematização do conhecimento para o pesquisador e, portanto, de ordem organizacional sobre o que almejamos investigar na busca das possíveis respostas ao questionamento central da pesquisa.

Portanto, discorreremos a seguir sobre esses procedimentos e suas instituições geradoras, ressaltando, segundo Araújo (2009) que,

O conceito de Instituição, outro conceito primitivo da TAD, é definido como um dispositivo social total, que certamente pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar. (ARAÚJO, 2009, 34).

Segundo esse autor, “a sala de aula e o estabelecimento são instituições do sistema educativo, que, por sua vez, é também uma instituição.”. (Ibidem, p. 34). Portanto, realizamos a pesquisa bibliográfica para detectar o universo de abrangência do livro didático utilizado na instituição (escola campo da pesquisa), bem como as 25 vídeogravações, das aulas ministradas numa sala do 6º ano do Ensino Fundamental da referida instituição, todas, previamente autorizadas através de documentação pela gestão e pelo professor selecionado, respeitando-se todas as regras próprias da referida Instituição submetida por sua vez às regras da Secretaria de Educação Municipal desta cidade.

Documentos como os PCN (1997/98), BNCC (2017), PC/PE (2012/14) e PP-SEDUC (2018) e programas como o PNLD (2017-2019), também foram analisados para justificar aspectos de ordem legal em relação ao livro didático, tais como a organização curricular em relação ao conteúdo fração, as habilidades e

competências a serem adquiridas pelos estudantes em relação ao conceito, os critérios de aprovação do livro didático, entre outros, cada qual nas suas atribuições.

No processo de análise do livro didático (manual do professor), objetivamos identificar quais foram os significados (subconstrutos) apresentados pelos autores e quais não foram efetivamente trabalhados pelo professor, cujas categorizações serão embasadas na TAD.

5 ELEMENTOS DO LIVRO VONTADE DE SABER MATEMATICA E DAS AULAS DO PROFESSOR

Objetivando conhecer melhor o texto do saber, realizamos inicialmente uma investigação bibliográfica sobre o livro didático do 6º ano do ensino fundamental, *Vontade de Saber – Matemática* (SOUZA; PATARO, 2015, Cap. 6, p. 126-157), aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (2017-2019) e adotado pelo professor participante da pesquisa. Em seguida, em momento apropriado e de acordo com o tempo definido pelo currículo do ensino de frações, buscamos utilizar as ferramentas de coleta de dados para capturar os detalhes, as maneiras, os artifícios e as técnicas utilizados pelo professor nas suas aulas para ensinar o conteúdo frações. O cumprimento desses dois objetivos foi fundamental para que chegássemos aos resultados descritos mais adiante.

5.1 ABRANGÊNCIAS INSTITUCIONAIS DO LIVRO DIDÁTICO

Elencamos a seguir, os dados iniciais da pesquisa, os quais nos revelaram o atual panorama das escolas da Rede Municipal de ensino, bem como sobre a Instituição que selecionou o livro didático conforme o processo de escolha e distribuição, cujas características enfatizam a sua abrangência e importância institucional. A Rede Municipal de Ensino da cidade de Caruaru-PE é composta de 137 unidades de ensino, distribuídas e identificadas conforme a tabela a seguir:

Tabela 1 – Modalidades de escolas que compõem a Rede Municipal da cidade de Caruaru-PE

Identificação	Série	Quantidade	Localização
Escolas	6º ao 9º	21	Sede ¹³
Escolas	6º ao 9º	12	Campo
Creches	--	19	Sede
Independentes	--	20	--
1º Distrito	--	13	--
1º Distrito	--	16	--
1º Distrito	--	16	--
1º Distrito	--	18	--

Fonte: BRASIL/INEP (2016).

¹³ Localização da Escola em que foi realizada a pesquisa.

A escolha dos livros didáticos aprovados pelo PNLD triênio (2017-2019) nas referidas escolas se deu via formulários e ata padrão – disponíveis no site do INEP – enviados às unidades, em que, de um total de 33 (trinta e três) escolas de Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), apenas 29 (vinte e nove) das localizadas dentre a Sede e o Campo participaram do processo de escolha, pois 4 (quatro) delas são escolas recentemente formadas e não existiam no período do censo INEP (2016).

O levantamento considerou os dados de todas as escolas que têm o 6º (sexto) ano do ensino fundamental, exceto as 4 (quatro) já mencionadas, totalizando 29 escolhas em um universo de 11 Coleções aprovadas pelo PNLD para o triênio (2017-2019). Nos quadros (6 e 7) seguintes dispomos das classificações de acordo com os livros mais distribuídos em nível Municipal e Nacional, originando dessa forma um ranking para ambas as situações:

Quadro 6 – Ranking Municipal dos Livros Didáticos mais adotados (6º ao 9º ano), PNLD (2017-2019)

Classificação	Título, Autor(es), Editora e Coleção	Opção 1	Opção 2	Opção 3
1º	Vontade de Saber – Matemática¹⁴ Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro Editora FTD / 3ª edição – 2015 Coleção Tipo 1.	15	7	zero
2º	Projeto Teláris – Matemática Luiz Roberto Dante Editora Ática / 2ª edição – 2015 Coleção Tipo 2.	8	11	zero
3º	Projeto Araribá - Matemática Mara Regina Garcia Gay Editora moderna / 4ª edição - 2014 Coleção Tipo 2.	4	4	zero
4º	Matemática Bianchini Edwaldo Bianchini Editora Moderna / 8ª Edição - 2015 Coleção Tipo 2.	1	3	zero
4º	Matemática – Compreensão e Prática Énio Silveira / Editora Moderna 3ª Edição – 2015 / Coleção Tipo 2.	1	1	zero
5º	Matemática nos dias de hoje - Na Medida Certa José Jakubovic e Marília Centurión Editora Leya / 1ª edição - 2015 Coleção Tipo 1.	Zero	2	zero
5º	Matemática - Ideias e Desafios Dulce e Iracema Editora Saraiva Educação / 18ª edição 2015 Coleção Tipo 2.	zero	1	zero
Totais		29	29	zero

Fonte: Secretaria de Educação (SEDUC). Município de Caruaru-PE, (em 26/04/2018).

¹⁴ Coleção adotada na escola municipal (Campo da pesquisa). As demais Coleções não obtiveram votação.

Quadro 7 – Ranking Nacional dos Livros Didáticos mais adotados (6º ao 9º ano), PNLD (2017-2019)

Classificação	Código da Coleção (6º ao 9º ano) Código do Livro (6º ano)	Título, Autor(es), Editora, Edição e Tipo da Coleção
1º	0008P17022 0008P17022007I	Praticando Matemática (Edição renovada) Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos / Editora do Brasil / 4ª edição – 2015 / Coleção Tipo 2.
2º	0097P17022 0097P17022007I	Vontade de Saber – Matemática¹⁵ Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro Editora FTD / 3ª edição – 2015 Coleção Tipo 1.
3º	0029p17022 0029P17022007I	Matemática – Compreensão e Prática Énio Silveira / Editora Moderna / 3ª Edição – 2015 / Coleção Tipo 2.
4º	0033P17022 0033P17022007I	Projeto Teláris – Matemática Luiz Roberto Dante / Editora Ática / 2ª edição – 2015 Coleção Tipo 2.
5º	0047p17022 0047P17022007I	Matemática Bianchini Edwaldo Bianchini / Editora Moderna / 8ª Edição – 2015 / Coleção Tipo 2.
6º	0036P17022 0036P17022007I	Projeto Araribá - Matemática Mara Regina Garcia Gay / Editora moderna / 4ª edição – 2014 / Coleção Tipo 2.
7º	0066P17022 0066P17022007I	Convergências - Matemática Eduardo Chavante / Editora SM / 1ª edição – 2015 Coleção Tipo 2.
8º	0051P17022 0051P17022007I	Matemática nos dias de hoje - Na Medida Certa José Jakubovic e Marília Centurión Editora Leya / 1ª edição – 2015 / Coleção Tipo 1.
9º	0012P17022 0012P17022007I	Descobrimos e Aplicando a Matemática Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado / Editora Dimensão / 2ª edição – 2015 / Coleção Tipo 2.
10º	0046P17022 0046P17022007I	Matemática - Ideias e Desafios Dulce e Iracema / Editora Saraiva Educação / 18ª edição 2015 / Coleção Tipo 2.
11º	0013P17022 0013P17022007I	Matemática do Cotidiano Antonio José Lopes Bigode Editora Scipione / 1ª edição – 2015 / Coleção Tipo 2.

Fonte: BRASIL, PNLD (2017-2019).

5.2 ESTRUTURA DO LIVRO DIDÁTICO

Os autores buscaram relacionar a ideia de fração com a discussão sobre o quilate do ouro, justificando que essa relação com o dia a dia possibilita um estudo mais significativo para os alunos, despertando dessa forma, o seu interesse pelo assunto. Além disso, os autores também sugerem que se faça uma leitura coletiva

¹⁵ Coleção adotada em escola municipal (Campo da pesquisa).

do texto introdutório do capítulo e, em seguida, um debate. O livro-texto físico é encontrado na versão digital, no site, e acessado a partir de um breve cadastro e também em CD Rom.

Orientações de uso, seção do livro-digital (p. 481 a 496), exclusiva para o professor e não disponível no seu livro-texto, pois são informações embasadas em opiniões de professores em formato de vídeo e, portanto, disponibilizadas apenas na versão digital no site e também em CD Rom, este último acompanha o Manual do Professor. Destacamos na tabela seguinte todas as ações sobre o ensino de Frações verificadas no livro-texto e livro-digital *Vontade de Saber Matemática* de Souza e Pataro (2015), volume do 6º ano do Ensino Fundamental, editora FTD.

Quadro 8 – Comparativo entre as orientações para o ensino de frações sugeridas pelos autores do livro didático e aquelas efetivamente utilizadas pelo professor nas suas aulas.

Orientações Didático-Pedagógicas sobre Frações sugeridas pelos autores no livro físico	Opções do professor
<ul style="list-style-type: none"> • O capítulo 6 engloba todo o conteúdo curricular sobre frações e inicia com um pequeno texto sobre o ouro e o seu grau de pureza determinado pela unidade de medida, o quilate. Em seguida, são apresentadas duas figuras geométricas divididas em 24 partes iguais mostrando as partes correspondentes ao ouro e outros metais. Souza e Pataro (2015, p.127). 	Utilizado
<ul style="list-style-type: none"> • A introdução à ideia de fração é dada a partir de um singelo texto sobre história das frações. Nesse momento, é sugerido que o professor “diga aos alunos que na atividade 65 da página 146 há mais informações sobre o uso das frações no Egito.” Outra sugestão orienta que: “Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados o exemplo e as atividades apresentadas na página 310 da seção <i>Acessando Tecnologias</i>.” Nessa seção há sugestões para trabalhar frações na planilha eletrônica. Ibidem (p.128). 	Utilizado
<ul style="list-style-type: none"> • Com relação ao ensino dos tipos de frações (próprias ou impróprias), é sugerido ao professor que “Verifique se os alunos perceberam que, em uma fração aparente, o numerador é divisível pelo denominador.” Ibidem (p.133). 	Utilizado
<ul style="list-style-type: none"> • Com relação à simplificação de frações, têm-se a seguinte sugestão: “Se necessário, lembre aos alunos de que dois números são primos entre si quando o mdc entre eles é igual a 1.” Ibidem (p. 135). 	Não utilizado
<ul style="list-style-type: none"> • Com relação a adição e subtração com denominadores diferentes, na exemplificação dada a respeito das partes consumidas de uma torta, a sugestão é que o professor “diga aos alunos que considerem a torta dividida em partes iguais, o que não ocorre na prática.” Ibidem (p. 143). 	Utilizado
<ul style="list-style-type: none"> • Com relação à multiplicação de frações, o livro traz uma exemplificação que trata da distribuição de certas quantidades de DVDs para três pessoas, para a qual os autores alertam: “é importante que os alunos não confundam um número na forma mista e a multiplicação de um número natural por uma fração, que possuem representação semelhante: $5 \cdot \frac{1}{7} \neq 5 \frac{1}{7} = 5 + \frac{1}{7}$.” Ibidem (p. 147). 	Não utilizado
<ul style="list-style-type: none"> • Na seção: <i>Ampliando seus conhecimentos</i>, os autores sugerem os livros: <i>Frações (Problemas, jogos & enigmas)</i> e <i>Frações sem mistérios (A descoberta da Matemática)</i>. Ibidem (p.318 e 319). 	Não utilizado
<ul style="list-style-type: none"> • Na seção: <i>Orientações para o professor</i>, o destaque fica para o Mapa de Conteúdos e Recursos do capítulo das frações, que traz, além de outras informações, os <i>principais recursos</i> que auxiliam no processo de entendimento 	Não utilizado

do aluno. Para isso, as sugestões pedem o uso de: balança, calendário, diferentes gêneros textuais, ilustrações, infográfico, fotografias, gráfico, malha triangular, mapa, sites e tabela ou quadro. (Ver quadro 9, p. 87). Ibidem (p. 351).	
• A seção: Objetivos, comentários e sugestões que norteiam o professor acerca do que os autores almejam para o ensino de frações, além de sugerir a construção de jogo com fichas para trabalhar as frações equivalentes.	Não utilizado
Orientações Didático-Pedagógicas sobre Frações sugeridas pelos autores no Livro Digital e nas Orientações ao professor	Opções do professor
• Objeto Educacional Digital (OED), é um recurso audiovisual representado por simbologia própria. A presença desse ícone na página indica que há um OED acrescido de <i>Orientações de Uso</i> abordando pontos de reflexão sobre o ensino e a aprendizagem de determinados assuntos, além de indicações de títulos de livros. No caso das frações, a abordagem ficou por conta dos professores <i>Hélida Borges Alló Pereira (Pedagoga)</i> e <i>Nilson José Machado (Professor Universitário)</i> . O acesso aos OED, requer um breve cadastro na página da Editora do livro. Ibidem (p. 338 e 495).	Não utilizado

Fonte: adaptado de Souza e Pataro (2015).

Quadro 9 – Estrutura curricular e recursos para o ensino de frações na versão do livro-texto Vontade de Saber - Matemática (2015).

Temas	
<ul style="list-style-type: none"> ◦ Frações. ◦ Número na forma mista. ◦ Frações equivalentes. ◦ Simplificação de frações. 	<ul style="list-style-type: none"> ◦ Comparação de frações. ◦ Operações com frações. ◦ Frações e porcentagem.
Conceitos e Noções	
<ul style="list-style-type: none"> ◦ Ideias de fração. ◦ Leitura de frações. ◦ Classificação das frações. ◦ Número na forma mista. ◦ Frações equivalentes. ◦ Simplificação de frações. ◦ Frações irredutíveis 	<ul style="list-style-type: none"> ◦ Adição e subtração de frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes. ◦ Multiplicação de número natural por uma fração e de uma fração por outra. ◦ Frações e porcentagem.
Procedimentos	
<ul style="list-style-type: none"> ◦ Análise e ilustração. ◦ Análise de mapa. ◦ Autoavaliação. ◦ Elaboração de texto. ◦ Leitura e interpretação de diferentes gêneros textuais. 	<ul style="list-style-type: none"> ◦ Leitura e interpretação de gráfico. ◦ Leitura e interpretação de infográfico. ◦ Leitura e interpretação de tabela ou quadro. ◦ Trabalho em equipe.
Atitudes	
<ul style="list-style-type: none"> ◦ Agir de maneira colaborativa com colegas e professores. ◦ Conscientizar-se da importância da preservação do meio ambiente. ◦ Expressar a opinião. 	<ul style="list-style-type: none"> ◦ Reconhecer a importância de contribuições de antigas civilizações à Matemática. ◦ Respeitar e valorizar a opinião dos colegas e do professor. ◦ tomar decisão.
Recursos	
<ul style="list-style-type: none"> ◦ Balança. ◦ Calendário. ◦ Diferentes gêneros textuais. ◦ Ilustrações. ◦ Infográfico. ◦ Fotografias. 	<ul style="list-style-type: none"> ◦ Gráfico. ◦ Malha triangular. ◦ Mapa. ◦ Sugestões de sites. ◦ Tabela ou quadro.

Fonte: adaptado de Souza e Pataro (2015, Cap. 6, p. 351).

O fator propulsor da análise do livro didático são, antes de tudo, as razões para que tal investigação ocorra. Reflexões sobre “o que um livro didático pode nos contar e o que podemos perguntar ao livro didático?” (BITTAR, 2017, p. 364), são necessárias antes mesmo de pensarmos em analisar esse manual. Elucidamos essas dúvidas a partir de relatos de experiências de pesquisadores e professores interessados no assunto, e não são poucos, dada a sua importância como principal material didático que auxilia o trabalho docente e a aprendizagem dos alunos.

Para compreendermos certas dificuldades de aprendizagem dos alunos em relação ao objeto *fração*, recorreremos ao livro didático utilizado por eles e pelo professor na elaboração de suas aulas. Esse processo de estudo do LD permite ao pesquisador certa aproximação com o saber ensinado (*fração*) favorecendo o entendimento a respeito do que o autor do LD propõe, permitindo dessa forma, a elaboração de intervenções didáticas com os alunos quando necessárias.

Bittar (2017) reforça que “a análise de LD pode trazer muitas outras contribuições para as pesquisas em didática” (p. 366). Dentro dessa perspectiva, Chaachoua; Comiti (2010, apud Bittar, 2017, p. 366) “evidenciam o aporte da análise de livros didáticos para apreender (e compreender) relações institucionais de um objeto em uma determinada organização matemática”.

Partindo desse contexto de análise nos moldes da TAD, os autores referenciados propõem que esses elementos são: i) a publicação do livro; ii) a sua representatividade; iii) a sua estrutura; iv) a sua análise ecológica; e, v) a sua análise praxeológica. Para isso, apresentamos aqui uma proposta de modelização (*a priori*) das *praxeologias matemáticas pontuais*, que vigoram no contexto dos subtipos de tarefas concernentes ao conceito e estrutura das *frações* no 6º ano do ensino fundamental a partir do livro didático adotado na instituição de ensino (*locus*) da pesquisa.

5.3 ANÁLISES A PRIORI DO LIVRO DIDÁTICO

Na TAD, a palavra praxeologia remete a estrutura da organização [T, τ , θ , Θ], portanto, para essa proposta de modelização serão considerados os elementos estruturantes para a efetivação da análise: os tipos de tarefa (T) apresentados; as

técnicas (τ) utilizadas; as tecnologias (θ) justificadas e as teorias (Θ), cada qual na sua função específica.

Para Almouloud (2015, p. 12) “a análise de livros didáticos continua a ser a entrada principal para o questionamento ecológico ou antropológico” e para tal, apresentaremos em seguida uma proposta de modelização *a priori* tendo como aporte as praxeologias matemáticas pontuais, fundamentadas nos Tipos e subtipos de tarefa referentes ao conceito e aplicabilidade de *frações*. O nosso material de referência foi o livro didático *Vontade de Saber Matemática*, dos autores Souza; Pataro (2015, p. 126-157).

Além desses elementos, a proposta apresentará uma síntese da modelização *a priori* que busca revelar as concepções dos autores para o ensino do conceito de frações para o 6º ao de ensino fundamental. A seguir, serão apresentadas as categorizações decorrentes das duas análises do livro didático que foram a base de referência para a análise das aulas do professor.

Nessa primeira análise do livro didático, percebemos uma extensa variedade conceitual no tocante às frações, o que nos impeliu a selecionar os Tipos de tarefa, nos moldes da TAD, a partir das quais desenvolvemos as nossas análises. Para isso, utilizamos dois critérios que predominaram nas análises prévias devido a uma característica própria das frações, a sua representação pictórica.

No primeiro critério observamos o tipo de mudança de registros, cuja análise inicial revelou um grupo de Tipos de tarefa que apresentou apenas a conversão de registros conforme a TRRS. Dessa forma, identificamos por Conceito e subconceito aqueles Tipos de tarefa cujas técnicas, denotavam a ação de desenhar figuras e destacar a parte considerada.

O segundo critério, ainda nos moldes da TRRS foi definido, em que se percebeu apenas a representação geométrica por conversão de registros, ou seja, ausência de tratamento de representações, esses dois critérios diferenciam dessa forma os elementos das duas análises como veremos a seguir.

5.3.1 1ª Análise do livro didático

Significado: Parte-todo (Conversão)

$C_{1(RFF)}$ Representação de frações a partir de figuras geométricas (Pictórica).

Significado: Razão (Conversão)

$C_{2(FSR)}$ Fração com significado de razão entre duas quantidades intensivas para estabelecer a relação entre elas.

Significado: Parte-todo (Conversão)

$C_{3(FSQ)}$ Fração com significado de quociente entre duas variáveis.

Significado: Quociente (Conversão)

$C_{4(LF)}$ Leitura de frações:

- $C_{4.1(LFD<10)}$: Leitura de fração quando o denominador menor do que 10.
- $C_{4.2(LFDP10)}$: Leitura de fração quando o denominador for uma potência de 10.
- $C_{4.3(LFD>10)}$: Leitura de fração quando o denominador for maior do que 10.

Significado: Parte-todo (Conversão)

$C_{5(TF)}$ Tipos de frações:

- $C_{5.1(FP-RPI)}$: Frações Próprias - Representam parte de um inteiro.
- $C_{5.2(FI-RMI)}$: Frações Impróprias - Representam mais que um inteiro.
- $C_{5.3(FA-RNN)}$: Frações Aparentes - Representam um número natural.

Significado: Parte-todo (Conversão)

$C_{6(CF)}$: Comparar frações:

- $C_{6.1(CF_{DI})}$: Comparar frações com denominadores iguais.
- $C_{6.2(CF_{DD})}$: Comparar frações com denominadores diferentes.

QUADRO 10 – Resumo dos conceitos do livro didático que apresentam Tarefas cujas técnicas denotam apenas a conversão de registros

Conceitos que apresentam apenas conversão de registro				
C	c	τ	Construto	Registro
	$C_1(\text{RFF})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Parte-todo	C_R
	$C_2(\text{FSR})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Razão	C_R
	$C_3(\text{FSQ})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Quociente	C_R
$C_4(\text{LF})$	$C_{4.1}(\text{LFD}<10)$	$\tau_{\text{PMR_NN}}$	Parte-todo	C_R
	$C_{4.2}(\text{LFD} \geq 10)$	$\tau_{\text{PMR_NN}}$	Parte-todo	C_R
	$C_{4.3}(\text{LFD}>10)$	$\tau_{\text{PMR_NN}}$	Parte-todo	C_R
$C_5(\text{TF})$	$C_{5.1}(\text{FP_RPI})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Parte-todo	C_R
	$C_{5.2}(\text{FL_RMI})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Parte-todo	C_R
	$C_{5.3}(\text{FA_RNN})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Parte-todo	C_R
$C_6(\text{CF})$	$C_{6.1}(\text{CF_DI})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Parte-todo	C_R
	$C_{6.2}(\text{CF_DD})$	$\tau_{\text{PMR_NN}}; \tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$	Parte-todo	C_R

Praxeologia: C (Conceito), c (Subconceito), τ (técnica). / Registro: C_R (Conversão de Registro).

Fonte: a pesquisa (2019).

Percebemos a partir do quadro que apenas duas técnicas atendem a esse primeiro grupo de *tipos de tarefas*, as técnicas, $\tau_{\text{PMR_NN}}$ *Promover a mudança de registro da língua natural para o registro numérico* e $\tau_{\text{DPF(pic/aux)}}$ *Desenhar e pintar figuras (registro figural) para representar o número fracionário (registro numérico)*. Essas técnicas são as responsáveis por justificar conceitos importantes (parte-todo, razão e quociente), além de abranger outros conceitos igualmente importantes (representação pictórica, leitura, tipos e comparação de frações) que reforçam os significados elencados. Destacamos que a ação de promover, escrever ou converter do registro da língua natural para o registro numérico, aqui representada na técnica $\tau_{\text{PMR_NN}}$, apesar de ser uma técnica simples, ela é necessária, pois as demais técnicas se revelam no registro numérico.

O contexto acima descrito revela a falta de atenção dos autores no tocante a esses conceitos importantes, os quais necessitam de um volume maior de exemplificações e que estes, por sua vez, apresentem técnicas mais claras que permitam melhor explorar as concepções de medida, razão e quociente, o que não ocorreu devidamente no referido livro didático.

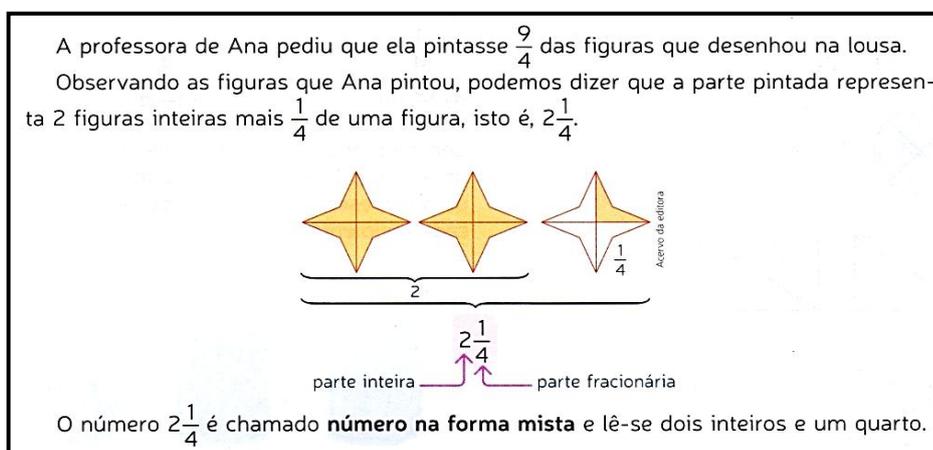
A seguir, disponibilizamos a segunda categorização do livro didático Vontade de Saber Matemática de Souza; Pataro (2015), apresentando os Tipos, Subtipos de tarefa e as técnicas explícitas e manipuladas pelos autores, as quais apresentam a mudança de registro, em sua maioria, por conversão e na sua totalidade, por tratamento de representação.

5.3.2 2ª Análise do livro didático (Tipos, subtipos de tarefa e suas técnicas)

$T_{1(EFM)}$: Escrever a forma mista de uma fração.

✓ Exemplo: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 5 – Extrato de resolução sobre fração na forma mista



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 133).

❖ $\tau_{DPF(pictória/auxiliar)}$: Desenhar e pintar figuras (registro figural) para representar o número misto $2\frac{1}{4}$ (registro numérico);
(**Conversão**)

- ❖ $\tau_{DNPD(implícita)}$: Dividir o numerador pelo denominador obtendo um número inteiro (quociente) e um número fracionário (sobreposição do resto com o divisor). Nesse exemplo, dois inteiros e um quarto fracionário.

$$\frac{9}{4} = 2 \text{ com resto igual a } 1 \rightarrow 2\frac{1}{4}$$

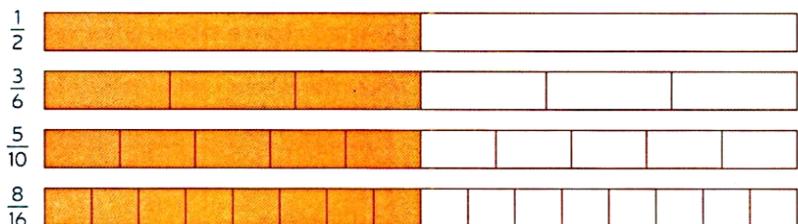
(Tratamento)

$T_{2(DFE)}$: Determinar frações equivalentes.

- $t_{2.1(CFE)}$: Calcular frações equivalentes.
- ✓ Exemplo: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 6 – Extrato de resolução sobre equivalência de frações

As figuras a seguir possuem as mesmas medidas e foram divididas em partes iguais. Veja a fração que corresponde à parte pintada de cada uma dessas figuras.



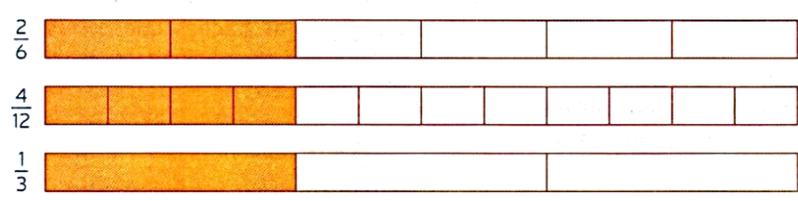
As partes pintadas de cada figura representam a mesma parte do todo. Assim, dizemos que $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ e $\frac{8}{16}$ são **frações equivalentes**, ou seja, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16}$.

Ao multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à inicial.

Vamos multiplicar e dividir, por exemplo, o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{6}$ por um mesmo número.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{4}{12} \\ \frac{2}{6} = \frac{2 : 2}{6 : 2} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Representando essas frações por meio de figuras, temos:



Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 135).

- ❖ $\tau_{MND(NC)}\text{-}\tau_{DND(NC)}$: Multiplicar ou dividir o numerador e denominador da fração por um mesmo número natural conveniente para obter frações equivalentes;
(Tratamento)
- ❖ $\tau_{DPF(pictórica/auxiliar)}$: Desenhar e pintar figuras para representar as frações equivalentes obtidas e comparar as partes pintadas.
(Conversão)
- $t_{2.2(CFI)}$: Calcular a forma irredutível de uma fração.
- ✓ Exemplo: **(Significado Parte/Todo)**.

Figura 7 – Extrato de resolução sobre a forma irredutível

Utilizando divisões vamos obter frações equivalentes a $\frac{60}{150}$.

$$\frac{60}{150} = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

O numerador e o denominador da fração $\frac{2}{5}$ não podem ser divididos simultaneamente por um mesmo número natural, pois 2 e 5 são números primos entre si. Assim, dizemos que $\frac{2}{5}$, que é a forma mais simplificada de escrever a fração $\frac{60}{150}$, é uma fração **irredutível**. Se necessário, lembre os alunos de que dois números são primos entre si quando o mdc entre eles é igual a 1.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 135).

- ❖ $\tau_{DND(NC)}$: Dividir sucessivamente numerador e denominador da fração por números naturais convenientes para obter frações equivalentes até chegar à forma irredutível.
(Tratamento)

$T_{3(SSF_DI)}$: Somar ou subtrair frações com denominadores iguais:

- ✓ Exemplo: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 8 – Extrato de resolução sobre adição e subtração de frações com mesmo denominador

> Adição e subtração de frações com denominadores iguais

Antônio vai fazer uma viagem de carro com origem em Belo Horizonte (MG) e destino em Porto Seguro (BA). Ele percorreu $\frac{3}{12}$ do trajeto até a 1ª parada e depois mais $\frac{4}{12}$ do percurso total até a 2ª parada.

Fonte: ATLAS geográfico escolar, 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Belo Horizonte a Porto Seguro

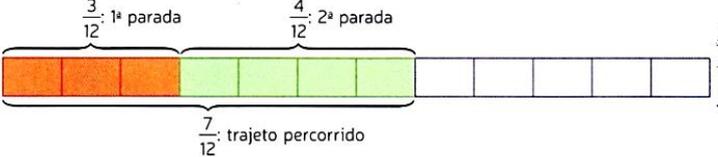


- Que fração representa o trajeto percorrido por Antônio até a 2ª parada?
Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma **adição de frações**.

$$\frac{\text{fração do trajeto da 1ª até a 2ª parada}}{\frac{3}{12} + \frac{4}{12}} = \frac{3 + 4}{12} = \frac{7}{12}$$

fração do trajeto até a 1ª parada
fração do trajeto percorrido

Representando essa adição de frações por meio de uma figura, temos:



Em uma adição de frações cujos **denominadores são iguais**, adicionamos os numeradores e mantemos o denominador.

- Que fração representa a parte do trajeto que Antônio ainda tem de percorrer?
A resposta dessa pergunta, que é dada pela parte branca da figura acima, também pode ser obtida por uma **subtração de frações**. Nesse caso, subtraímos $\frac{7}{12}$ (fração do trajeto percorrido) de $\frac{12}{12}$, que representa todo o trajeto, já que $\frac{12}{12} = 1$.

$$\frac{\text{fração do trajeto percorrido}}{\frac{12}{12} - \frac{7}{12}} = \frac{12 - 7}{12} = \frac{5}{12}$$

todo o trajeto
fração do trajeto que ainda falta ser percorrido

Assim, ainda faltam ser percorridos $\frac{5}{12}$ do trajeto.

Em uma subtração de frações cujos **denominadores são iguais**, subtraímos os numeradores e mantemos o denominador.

- ❖ $\tau_{SN(RD)}$: Somar ou subtrair os numeradores e repetir o denominador comum.
(Tratamento)
- ❖ $\tau_{DPF(pictórica/auxiliar)}$: Desenhar e pintar figuras para representar a soma das frações e observar as partes pintadas.
(Conversão)

$T_{4(SSF_DD)}$: Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes:

- $t_{4.1(SSF_PE)}$: Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o princípio da equivalência.
- ✓ Exemplo₁: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 9 – Extrato de resolução sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes pelo artifício da equivalência

➤ **Adição e subtração de frações com denominadores diferentes**

Leticia e Márcio compraram uma torta de vegetais com 12 pedaços iguais. Leticia comeu $\frac{1}{4}$ da torta e Márcio, $\frac{1}{6}$. Que fração da torta Leticia e Márcio comeram juntos? Diga aos alunos que considerem a torta dividida em partes iguais, o que não ocorre na prática.



Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma adição de frações, ou seja, devemos determinar o resultado de $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Como as frações possuem denominadores diferentes, obtemos, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \dots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \dots$$

Agora adicionamos as frações obtidas.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Assim, Leticia e Márcio comeram juntos $\frac{5}{12}$ da torta.

- ❖ $\tau_{MND(NC)_{SN}(RD)}$: Multiplicar o numerador e o denominador das duas frações por números naturais convenientes para obter frações equivalentes, com denominadores iguais. / Somar os numeradores e repetir o denominador comum.

(Tratamento e Tratamento)

- $t_{4.2(SSF_MMC)}$: Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o artifício do mmc.
- ✓ Exemplo₂: **(Significado de Parte/Todo)**

Figura 10 – Extrato de resolução sobre adição e subtração de frações com denominadores diferentes pelo artifício do mmc

Outra maneira de fazer adições ou subtrações de frações com denominadores diferentes é utilizando o **mmc**. Veja, por exemplo, como calcular $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9}$.

- Inicialmente, calculamos o mmc dos denominadores, ou seja, mmc (6,4,9).

4, 6, 9	2	
2, 3, 9	2	
1, 3, 9	3	mmc (6,4,9) = 2 · 2 · 3 · 3 = 36
1, 1, 3	3	
1, 1, 1		
- Agora, para cada fração, dividimos o mmc obtido pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador, obtendo frações equivalentes às iniciais.

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{(36 : 6) \cdot 5}{36} - \frac{(36 : 4) \cdot 1}{36} + \frac{(36 : 9) \cdot 2}{36} = \frac{30 - 9 + 8}{36} = \frac{29}{36}$$

Quando adicionamos ou subtraímos frações cujos **denominadores são diferentes**, precisamos, inicialmente, substituí-las por frações equivalentes com o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos ou subtraímos as frações equivalentes obtidas.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 144).

- ❖ $\tau_{FDF_D(MMC)_{SN}(RD)}$: Fatorar os denominadores das frações para calcular o mmc entre eles. / Dividir o mmc pelo denominador inicial de cada fração e multiplicar o resultado por seu respectivo numerador; / Somar e/ou subtrair os numeradores das frações e repetir o denominador comum.

(Tratamento)

T₅(APF): Aplicar o produto às frações:

➤ **t_{5.1}(CFN)**: Calcular a fração de um número ou quantidade.

✓ Exemplo: (**Fração de uma quantidade discreta**).

Figura 11 – Extrato de resolução sobre o produto de uma fração por um número

Tiago e dois amigos compraram certa quantidade de DVDs e a dividiram em 7 partes iguais. Tiago ficou com 5 dessas partes e os seus amigos, com uma parte cada um.



• Sabendo que Tiago e seus dois amigos compraram 35 DVDs ao todo, com quantos DVDs Tiago ficou?
Para responder a essa pergunta, precisamos calcular $\frac{5}{7}$ de 35, ou seja, $\frac{5}{7} \cdot 35$:

$$\frac{5}{7} \cdot 35 = \frac{5 \cdot 35}{7} = \frac{175}{7} = 25$$

Assim, Tiago ficou com 25 DVDs.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 147).

- ❖ **$\tau_{MNQ_DND(NC)}$** : Multiplicar o numerador da fração pela quantidade numérica e o denominador desta pelo número 1 (divisor implícito sob a quantidade numérica); / Dividir numerador e denominador por número natural conveniente para obter o valor correspondente à fração dada.
(Tratamento)

- $t_{5.2(CFF)}$: Calcular a fração de outra fração.
- ✓ Exemplo: (**Fração de uma quantidade fracionária**).

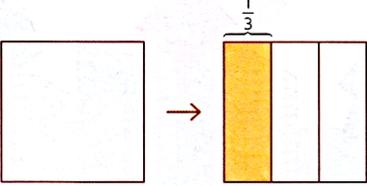
Figura 12 – Extrato de resolução sobre o produto entre frações

Em uma loja de aparelhos celulares, $\frac{1}{3}$ de todos os aparelhos disponíveis possui TV digital, e, desses, $\frac{2}{5}$ estão na promoção.

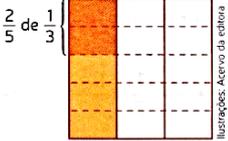
- Do total dos celulares dessa loja, que fração corresponde àqueles que têm TV digital e estão na promoção?

Para responder a essa questão, precisamos calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$, isto é, $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$. Veja como podemos fazer esse cálculo com o auxílio de figuras.

- Inicialmente, representamos o total de celulares dessa loja por meio de um quadrado. Em seguida, dividimos o quadrado em 3 partes iguais e destacamos uma dessas partes, que representa os celulares com TV digital.



- Agora, dividimos cada uma das 3 partes em 5 partes iguais. Obtemos, assim, 15 partes e consideramos duas delas, pois queremos calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$. Note que a parte considerada corresponde a 2 em um total de 15, ou seja, $\frac{2}{15}$.



Assim, a fração dos celulares dessa loja que têm TV digital e estão em promoção é $\frac{2}{15}$. De maneira prática, podemos efetuar o cálculo $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ do seguinte modo:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

Na multiplicação de frações, o resultado tem como numerador o produto dos numeradores e como denominador o produto dos denominadores.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 148).

- ❖ $\tau_{DPF(pictórica/auxiliar)}$: Desenhar e pintar figuras para representar o produto das frações obtidas e observar as partes pintadas.
(**Conversão**)
- ❖ $\tau_{M(NsDs)_DND(NC)}$: Multiplicar os numeradores entre si e os denominadores entre si; / Dividir numerador e denominador por número natural conveniente para obter o valor correspondente à fração dada.
(**Tratamento**)

$T_{6(CPQV)}$: Calcular a porcentagem de uma quantidade ou valor.

✓ Exemplo₁: (**Significado de Porcentagem**).

Figura 13 – Extrato de resolução sobre fração centesimal e porcentagem pelo artifício da equivalência (exemplo 1)

O tempo de degradação do lixo na natureza depende do material de que ele é composto. Observe alguns exemplos na cena abaixo.

Fonte: <www.institutorecicle.org.br>. Acesso em: 5 nov. 2014.

A coleta seletiva de materiais recicláveis, que evita o depósito de diversos materiais na natureza, já é uma realidade em vários municípios brasileiros. A reciclagem de metais, como o alumínio, tornou-se um hábito brasileiro.

No país, de cada 100 latas de alumínio produzidas, cerca de 98 são recicladas.

A relação 98 em cada 100 pode ser representada por uma fração cujo denominador é igual a 100 (fração decimal), ou seja, $\frac{98}{100}$.

A fração $\frac{98}{100}$ também pode ser representada na forma de **porcentagem**, e para isso utilizamos o símbolo %. Nesse caso, escrevemos 98% e lê-se noventa e oito por cento.

A porcentagem, indicada pelo símbolo %, corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Quando indicamos 30%, por exemplo, significa que estamos considerando 30 partes de um total de 100.

Toda fração decimal ou uma equivalente a ela pode ser escrita na forma de porcentagem. Veja alguns exemplos.

- Em um estacionamento há 20 carros. Entre esses carros, 7 são vermelhos. Qual a porcentagem de carros vermelhos no estacionamento?

Como 7 em cada 20 carros são vermelhos, podemos escrever a fração $\frac{7}{20}$. Escrevendo uma fração equivalente a $\frac{7}{20}$ cujo denominador é igual a 100, temos:

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 35\%$$

Assim, 35% dos carros desse estacionamento são vermelhos.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 150).

✓ Exemplo₂: (**Significado de Porcentagem**).

Figura 14 – Extrato de resolução sobre fração centesimal e porcentagem pelo artifício da equivalência (exemplo 2)

• Em uma corrida de 15 km, certo atleta já percorreu 6 km. Qual porcentagem de todo o trajeto esse atleta já percorreu?

Como 6 km de um total de 15 km já foram percorridos, escrevemos a fração $\frac{6}{15}$ e determinamos a fração equivalente, cujo denominador é igual a 100.

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$$

Assim, esse atleta já percorreu 40% do trajeto.

Para obter a fração com denominador 100 foi necessário dividir o numerador e o denominador da fração inicial por 3 e, depois, multiplicar o numerador e o denominador da fração obtida por 20.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 151).

❖ $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$: Dividir e/ou multiplicar o numerador e o denominador da fração por número natural conveniente para originar a fração centesimal equivalente à fração dada; / Escrever o numerador da fração centesimal seguido do sinal de porcentagem, fazendo uma conversão de registros.
(**Tratamento e Conversão**)

Elencados os Tipos e subtipos de tarefas, dispomos do quadro seguinte como o resumo das 11 técnicas requisitadas pelos autores do livro didático, dentre as quais, algumas foram associadas para se tornarem em técnicas mistas pela necessidade das questões propostas no referido texto do saber.

Quadro 11 – Resumo dos conceitos do livro didático que atendem à ecologia do bloco prático conforme Bosch; Chevallard (1999, p. 85-86).

2ª Parte - Tarefas que apresentam conversão e tratamento nas técnicas				
<i>T</i>	<i>t</i>	τ	Construtos	Registros
T₁(EFM)		$\tau_{DPF(pic/aux)}$; $\tau_{DNDP(imp)}$	Parte-todo	C_R ; T_R
T₂(DFE)	t_{2.1}(CFE)	$\tau_{MND(NC)}$; $\tau_{DND(NC)}$; $\tau_{DPF(pic/aux)}$	Parte-todo	T_R ; C_R
	t_{2.2}(CFI)	$\tau_{DND(NC)}$	Parte-todo	T_R
T₃(SSF-DI)		$\tau_{SN(RD)}$; $\tau_{DPF(pic/aux)}$	Parte-todo	T_R ; C_R
T₄(SSF-DD)	t_{4.1}(SSF-PE)	$\tau_{MND(NC)}$; $\tau_{SN(RD)}$	Parte-todo	T_R ; T_R
	t_{4.2}(SSF-MMC)	$\tau_{FDF_D(MMC)}$; $\tau_{SN(RD)}$	Parte-todo	T_R ; T_R ; T_R
T₅(APF)	t_{5.1}(CFN)	τ_{MNQ_DPD}	Fração de Quantidade Discreta	T_R ; T_R
	t_{5.2}(CFF)	$\tau_{DPF(pic/aux)}$; $\tau_{M(NsDs)}$; $\tau_{DND(NC)}$	Fração de fração	C_R ; T_R ; T_R
T₆(CPQV)		$\tau_{DND(NC)}$; $\tau_{MND(NC)}$; τ_{ENP}	Porcentagem	T_R ; C_R

Praxeologia: *T* (Tipo de tarefa), *t* (subtipo de tarefa), τ (técnica), *aux.* (técnica auxiliar); *imp.* (técnica implícita); *pic.* (representação pictórica). / Registro: **C_R** (Conversão de Registro). **T_R** (Tratamento de Representação).

Fonte: a pesquisa (2019).

5.4 REGISTROS DO TRABALHO DO PROFESSOR

A construção dos dados decorrentes da prática docente exige procedimentos que atendam às necessidades impostas pela própria instituição (escola) e pela complexa dinâmica das relações que são outrora construídas, desfeitas e reconstruídas entre os sujeitos professor e alunos com o saber matemático. Para tanto, registraremos os meandros dessa intrincada dinâmica a partir da observação e filmagem direta das aulas do professor com a utilização de filmadora ou celular.

A participação do voluntário na pesquisa, um professor do 6º ano do ensino fundamental, aconteceu no período de 05/08 a 1º/11/2019 totalizando, conforme os seus dias de aulas, 15 encontros destinados às 25 videogravações das 38 aulas do professor, dentre os quais ocorreu a entrevista. Esses procedimentos de coleta/produção de dados ocorreram numa escola da rede municipal de Caruaru – PE.

5.4.1 Filmagens e transcrições

A captura de imagens e áudios (vídeogravação daqui por diante) permite que o pesquisador observe detalhes que muitas vezes passam despercebidos numa pesquisa de campo. Para Sadalla; Larocca (2004) “a vídeogravação permite registrar, até mesmo, acontecimentos fugazes e não-repetíveis que muito provavelmente escapariam a uma observação direta” (p. 423).

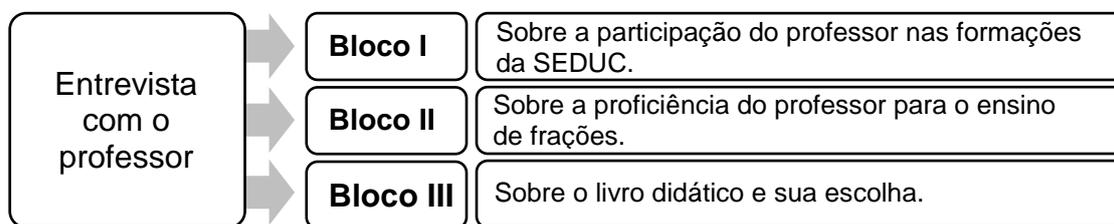
Portanto, entendemos que a vídeogravação atenderá ao que propõe essa pesquisa, que é capturar elementos da práxis docente nas aulas dedicadas ao ensino do conceito de *fração* no 6º ano do ensino fundamental. Como ferramenta de ampliação das possibilidades da pesquisa observacional, a vídeogravação, juntamente com suas transcrições (Apêndice A), constituem-se em uma poderosa ferramenta para a produção de dados científicos.

Sendo assim, entendemos que transcrever seja muito mais que assistir a uma vídeogravação e escrever falas, é um trabalho criterioso, pois é preciso considerar que a escrita de uma simples fala ou a interpretação de um singelo gesto traduz diferentes significados do discurso de um participante da pesquisa, principalmente no que se refere à análise de dados de uma atividade dinâmica e envolta de diversidades, características da ação docente.

De posse do material, realizamos as transcrições das vídeograções para posterior análise das possíveis tarefas, técnicas e tecnologias mobilizadas pelo professor.

5.4.2 Entrevista semiestruturada

Como complementação aos questionamentos que surgiram ao longo do processo de construção desse trabalho, os quais as vídeograções não deram conta, realizamos uma entrevista semiestruturada (Apêndice B), elaborada conforme se delinearam as primeiras análises, e que foi dividida em três blocos conforme se vê na figura seguinte.

Figura 15: Entrevista Semiestruturada

Fonte: a pesquisa (2019).

O Bloco I deu conta de obter respostas sobre as formações que o professor participou, além de verificar detalhes sobre a sua prática de ensino (se o ele considera-se um profissional tradicional ou não); no Bloco II as perguntas foram direcionadas às frações, indagamos principalmente sobre o conhecimento do professor sobre frações e seus significados: Razão, Parte-todo, Operador multiplicativo, Medida e Porcentagem; Por fim, o Bloco III respondeu aos questionamentos acerca do livro didático *Vontade de Saber Matemática* (Souza; Pataro, 2015), a partir do qual procuramos saber, dentre outras, sobre a participação do professor no processo de escolha, o seu nível de contentamento ao utilizar esse manual de ensino, bem como se tomou ciência acerca das sugestões e orientações dos autores citados para o ensino de frações no volume do 6º ano do Ensino Fundamental (anos finais). A entrevista na íntegra encontra-se no Apêndice B deste trabalho.

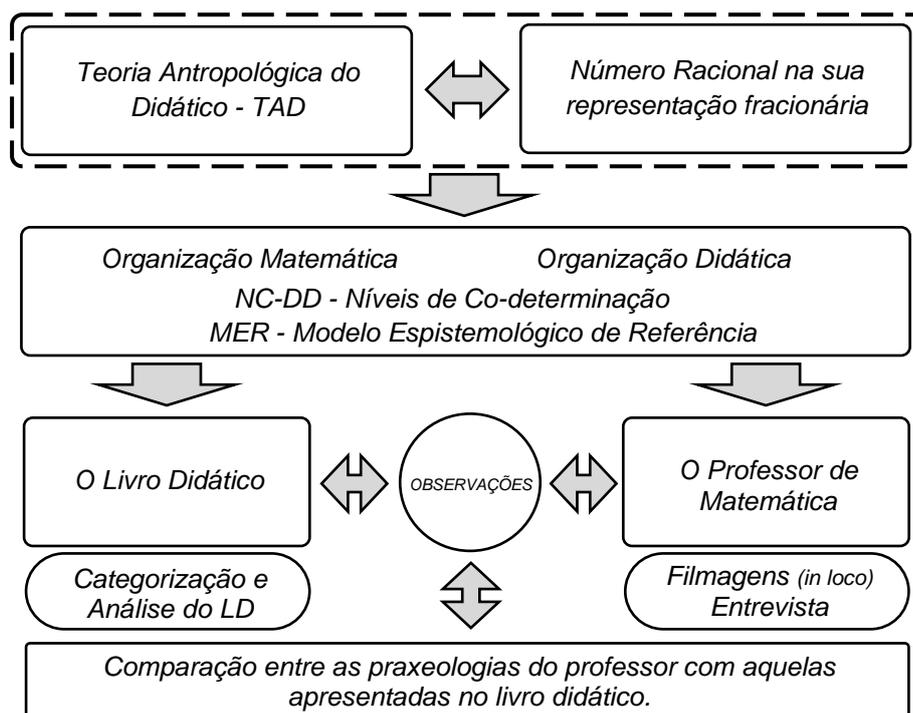
5.5 SOBRE AS PRAXELOGIAS DO PROFESSOR E DO LIVRO DIDÁTICO

Nessa parte da pesquisa será realizada a comparação entre os dados levantados a partir da categorização e análise do livro didático, da entrevista e das observações das aulas do professor por meio do instrumento da videogravação. Nessa comparação entre a transposição dos saberes instituídos via livro didático e os saberes ensinados pelo professor, objetivamos identificar qual a distância entre as praxeologias do professor de matemática e aquelas preconizadas no livro didático.

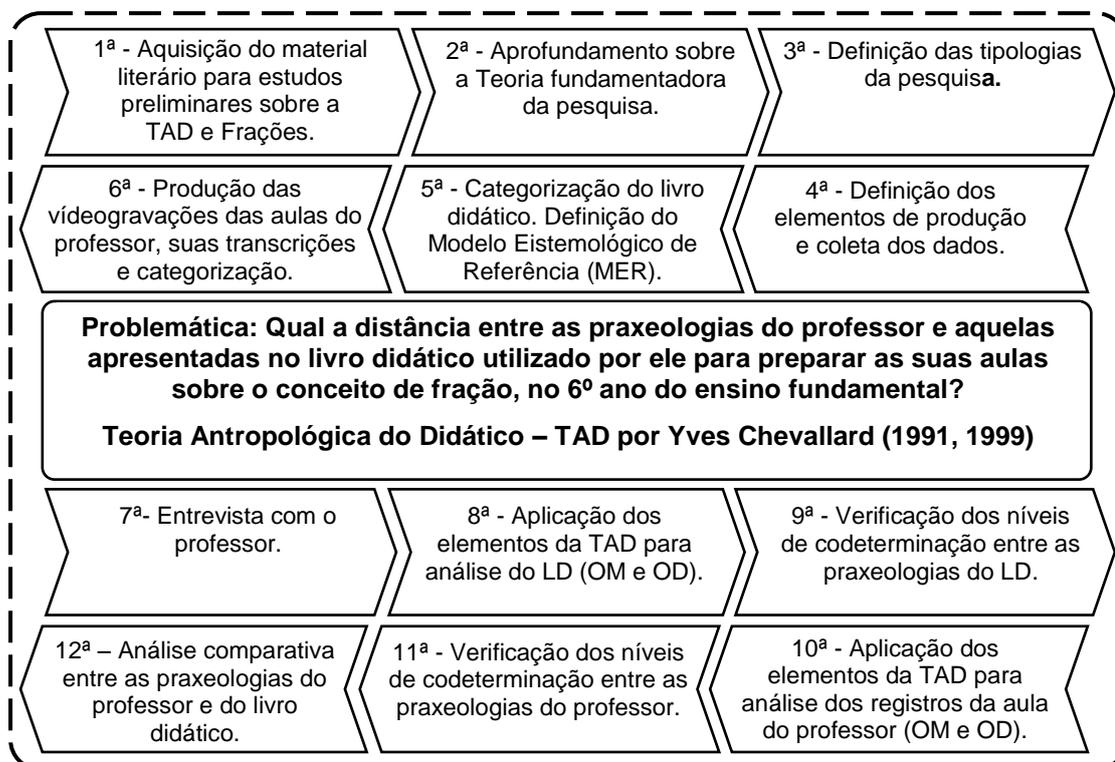
As categorias e os critérios de análise auxiliares dessa comparação são padrão para ambas as situações, ou seja, as *organizações matemáticas*, as

organizações didáticas e os níveis de *co-determinação* favorecem essa comparação sobre o conceito de fração. Para uma melhor compreensão desse percurso norteador, ilustramos no quadro a seguir, os indicadores teórico-metodológicos da pesquisa.

Quadro 12 – Indicadores teórico-metodológicos da pesquisa



Dessa forma, respaldados nos elementos teóricos e metodológicos apresentados, analisamos criteriosamente as relações institucionais mobilizadas a partir das praxeologias do professor e do seu livro didático, referentes ao conceito de *fração*, conforme percurso norteador apresentado em fluxograma disponibilizado a seguir.

Quadro 13 – Fluxograma procedimental da pesquisa

Fonte: a pesquisa (2019).

O quadro apresenta, grosso modo, os procedimentos realizadores da pesquisa, bem sabemos que numa pesquisa da área das ciências sociais, detalhes minuciosos fazem parte dessa construção. Contudo, o referido quadro atribui relevância organizacional à pesquisa, motivo da sua construção.

Dedicamos este quarto e último capítulo à análise e interpretação dos dados outrora produzidos, tabulados e sistematizados como pré-requisitos para esse próximo passo da pesquisa, a partir dos quais serão delineadas as possíveis respostas aos questionamentos elencados que sustentam esse trabalho.

6 ANÁLISES, INTERPRETAÇÕES E RESULTADOS

De posse de todos os dados e realizadas as devidas mobilizações teórico-práticas – as categorizações, as praxeologias matemáticas do livro didático e das aulas do professor, bem como as praxeologias didáticas de ambos e as análises das representatividades – buscaremos nesse capítulo, realizar a confrontação entre os resultados objetivando verificar a distância entre as praxeologias do professor e do livro didático sobre o conceito de fração no 6º ano do Ensino Fundamental.

6.1 AS FRAÇÕES E O TRABALHO DO PROFESSOR

Nesse subtópico apresentamos os procedimentos ocorridos a respeito da coleta dos dados das aulas do professor, além de discorrermos sobre o trabalho com esses dados, dos quais serão realizadas as análises praxeológicas matemática e didática; os topoi para o professor, requeridos pelo livro didático e pelos documentos oficiais, além do seu modelo epistemológico de referência dominante sobre frações no 6º ano do ensino fundamental.

A coleta dos dados demandou de 25 vídeograções das 38 aulas ocorridas sempre nas segundas-feiras (3 aulas) e nas sextas-feiras (2 aulas), no segundo semestre de 2019. Retornamos à escola no final desse semestre para realizar a segunda parte da coleta de dados com o professor, agora com uma entrevista semiestruturada composta de 21 perguntas abertas subdivididas em 3 blocos em que o primeiro buscou obter informações sobre a participação do professor nas formações da Secretaria Municipal de Educação de Caruaru, PE; o segundo procurou coletar informações sobre o professor e sua relação com o conteúdo frações e o último deu conta do livro didático seu processo de escolha e sua utilização em sala de aula pelo professor.

6.2 AS PRAXELOGIAS OU ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS DO PROFESSOR

Percorremos o caminho da descrição no tocante às vídeograções das aulas do professor, com interferências mínimas, procuramos acompanhar a sequência das aulas, as ações tomadas para ministrar o conteúdo frações e as possíveis soluções colocadas em prática para superar os obstáculos comuns e corriqueiros tipificados

numa sala de aula. Dessa forma chegamos às primeiras análises das organizações matemáticas do professor, sobre as quais discorreremos a seguir.

6.2.1 Analisando as organizações matemáticas do professor.

A primeira aula do professor aconteceu numa segunda-feira do dia 05 de agosto de 2019, com três aulas nesse dia, o professor se apresentou à turma e iniciou o seu trabalho sobre frações, trabalho que se encerrou na última aula do dia 1º de novembro do mesmo ano com certo atraso devido aos feriados e ao período eleitoral.

Seguindo os procedimentos da TAD, que no nosso caso atentará para o bloco prático na análise das aulas do professor e do livro didático, tomamos como ponto de partida os tipos de tarefas executadas pelo docente a partir da mobilização de um conjunto de técnicas cujas tecnologias que as justificam, podem ou não, estar presentes na prática do professor.

O professor iniciou a sua primeira aula sobre frações organizando a sala de aula em semicírculo, distribuindo garrafas com água no centro da sala e projetando no slide a frase: “Ideia de fração”, logo após utilizar as garrafas com água, ele conceitua fração para os seus alunos.

Após análise do material transcrito sobre frações, percebeu-se que o professor realizou 8 blocos de atividades dos quais 7 foram originados do seu livro didático e 1 foi originado de outro material de apoio, pois correspondia ao assunto divisão de frações não abordado no livro didático. No lugar de divisão de frações, os autores optaram em abordar porcentagem.

Cada bloco de atividades do livro didático adotado foi proposto no final de cada assunto lecionado, exceto os blocos de questões intitulados “Revisão” e, “ENEM e OBMEP”, localizados no final do conteúdo frações. Os blocos intitulados “Atividades” (84 questões), “Revisão” (18 questões), “ENEM e OBMEP” (2 questões), totalizaram 104 questões das quais 39 abordaram os conceitos previstos na 1ª categorização (quadro 10, p. 91), aqui apenas para título informativo. Desse total, 65 questões corresponderam aos Tipos e subtipos de tarefas analisados, estes previstos na 2ª categorização do livro didático (quadro 11, p. 102). As 104 questões foram destinadas aos exercícios de classe e casa, em que uns eram resolvidos em

sala pelo professor e os demais eram propostos para casa, com correção agendada para a aula seguinte.

Tabela 2 – Os Conceitos e subconceitos sobre frações nas aulas do professor cujas técnicas tratam apenas da conversão como mudança de registro

Conceitos e subconceitos		Significado	Quantidade	Percentual
C ₁		Parte-todo	17	43,59
C ₂		Razão	1	2,56
C ₃		Quociente	2	5,13
C ₄	C _{4.1}	Parte-todo	1	2,56
	C _{4.2}	Parte-todo	1	2,56
	C _{4.3}	Parte-todo	1	2,56
C ₅	C _{5.1}	Parte-todo	1	2,56
	C _{5.2}	Parte-todo	1	2,56
	C _{5.3}	Parte-todo	1	2,56
C ₆	C _{6.1}	Parte-todo	2	5,13
	C _{6.2}	Parte-todo	11	28,21

Fonte: a pesquisa (2019).

O quadro acima nos revela que foi dada pouca atenção aos conceitos C₂ (razão) e C₃ (quociente), esses significados são pouco ou quase nada abordados na maioria dos livros didáticos do 6º ano, fator que pode acarretar deficiências de compreensão dos alunos em relação a outros conteúdos da sequência curricular.

Tabela 3 – As Tarefas e os tipos de tarefas sobre frações nas aulas do professor cujas técnicas tratam da conversão de registro e do tratamento de representação

Tipos e subtipos de tarefas		Significado	Quantidade	Percentual
T ₁		Parte-todo	6	6,90
T ₂	t _{2.1}	Parte-todo	22	25,29
	t _{2.2}	Parte-todo	11	12,64
T ₃		Parte-todo	5	5,75
T ₄	t _{4.1}	Parte-todo	-	-
	t _{4.2}	Parte-todo	11	12,64
T ₅	t _{5.1}	Fração de quantidade discreta	19	21,84
	t _{5.2}	Fração de fração	9	10,34
T ₆		Porcentagem	-	-
T ₇		Quociente	4	4,60

Fonte: a pesquisa (2019).

Percebemos claramente que as quantidades de atividades abordadas, incluindo aquelas apresentadas nos dois últimos blocos (Revisão, ENEM e OBMEP), se equiparam. Esse fator é atribuído à representatividade dos conceitos das frações e suas abstrações, motivo que nos impeliu a utilizar, para fins de explicação, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRSS) em Duval (1993, 2004). Esse atributo das frações e o uso da TRSS foram os motivadores para que ocorresse a diferenciação entre as duas categorizações apenas para fins de análise. Adiante, trataremos exclusivamente das análises referentes à tabela 3, que nos fornece as Tarefas e subtipos de tarefas com suas técnicas claras e mais elaboradas.

Com relação aos significados, fica claro que fração com significado parte/todo é o conceito mais abrangente. Podemos também verificar que outros significados importantes não foram pontuados nas intenções dos autores, além daqueles já citados e singelamente pontuados na tabela 2.

Dos significados apresentados, chamamos a atenção para a fração enquanto medida, pois este originou as primeiras frações, uma vez que os povos da antiguidade fizeram os primeiros rabiscos de uma fração pela necessidade de medição em determinadas situações do seu cotidiano.

Por fim, faremos uma menção ao significado de fração como porcentagem, cuja importância curricular e social é enorme, o que daria para introduzir o conceito de divisão de frações sem necessariamente retirar dos alunos essa possibilidade. Veremos em seguida a justificativa do professor sobre essa atitude, informação coletada através de entrevista com o mesmo.

Quadro 14 – Recorte da fala do professor sobre a alteração no currículo de Matemática (Porcentagem por Divisão de frações).

Pergunta do Bloco III – nº 13.1

13.1. Com relação ao ensino de frações, você pode relatar alguma(s) alteração(ões) realizada(s)?

R_{13.1}: Sim. Por exemplo, no livro 'Vontade de Saber', utilizado na rede, eu preferi dar para os alunos na conclusão do assunto, divisão de frações que o livro não aborda ao invés de porcentagem, isso porque porcentagem com certeza, mais adiante em outras séries eles voltarão a estudar ou terão uma abordagem mais profunda nesse conteúdo, enquanto a divisão de fração que o livro não traz, eles não teriam uma abordagem tão específica quanto a série exige, no caso o 6º ano.

6.2.2 O professor e sua organização matemática pontual.

Esse subtópico responde pelas organizações matemáticas pontuais observadas na aula do professor, elas e referem aos Tipos de tarefa, subtipos de tarefa, as técnicas utilizadas e as tecnologias caso sejam detectadas, ancorados na modelização *a priori* (quadro 12, p. 96). As organizações matemáticas pontuais, reveladas no dia-a-dia da sala de aula do professor pelas vídeo-gravações e posteriormente suas transcrições nos possibilitaram ver as seguintes praxeologias apresentadas no quadro abaixo.

Quadro 15 – Organização matemática pontual do professor

Tarefas e subtipos de tarefa	Técnicas utilizadas
<ul style="list-style-type: none"> Relacionar a fração com sua representação pictórica. 	<ul style="list-style-type: none"> Desenhar ou manipular objetos e escrever a parte considerada como numerador e o todo como denominador.
<ul style="list-style-type: none"> Estabelecer a relação entre a parte e o todo na sua forma $\frac{a}{b}$ e a equivalente $a:b$, buscando saber a quantidade de partes que cabem no todo. 	<ul style="list-style-type: none"> Escrever a forma fracionária e simplificar ou dividir o numerador pelo denominador.
<ul style="list-style-type: none"> Escrever a forma mista de uma fração imprópria e vice-versa. 	<ul style="list-style-type: none"> Dividir o numerador pelo denominador, escrever o seu quociente como parte inteira, o resto como numerador e o divisor como denominador da fração. No processo inverso, repete-se o denominador da parte fracionária e o numerador compreende a multiplicação do denominador pelo inteiro e o resultado soma como o numerador.
<ul style="list-style-type: none"> Obter frações equivalentes a uma fração dada. 	<ul style="list-style-type: none"> Multiplicar ou dividir numerador e denominador por um mesmo número natural conveniente.
<ul style="list-style-type: none"> Simplificar frações. 	<ul style="list-style-type: none"> Utilizar a técnica de frações equivalentes com a divisão.
<ul style="list-style-type: none"> Comparar duas ou mais frações. 	<ul style="list-style-type: none"> Utilizar a técnica das frações equivalentes. Determinar o menor múltiplo comum (ou usar técnica auxiliar fatorando os denominadores), dividir o m.m.c. pelo denominador de cada fração e multiplicar o resultado por seu numerador respectivo, depois soma os numeradores e repete o denominador.
<ul style="list-style-type: none"> Somar ou subtrair frações. 	<ul style="list-style-type: none"> Utilizar a técnica das frações equivalentes. Determinar o menor múltiplo comum (ou usar técnica auxiliar fatorando os denominadores), dividir o m.m.c. pelo denominador de cada fração e multiplicar o resultado por seu numerador respectivo, depois soma os numeradores e repete o

	denominador.
<ul style="list-style-type: none"> • Calcular a fração de um número ou de outra fração. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Multiplicar os numeradores entre si e os denominadores também entre si. Simplificar o resultado se possível (técnica complementar).
<ul style="list-style-type: none"> • Efetuar a divisão entre frações ou entre número e fração. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Inverter a segunda fração, multiplicar os numeradores entre si e os denominadores também entre si. Simplificar o resultado se possível (técnica complementar).

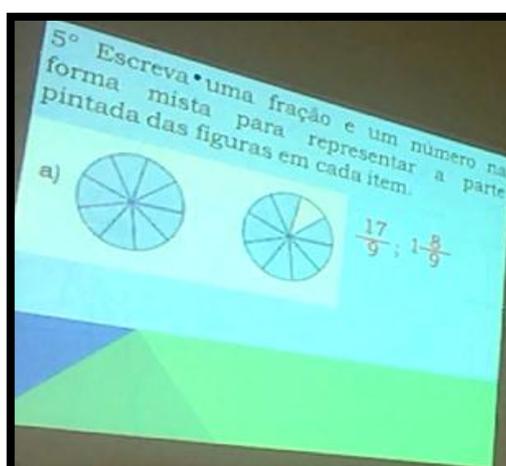
Fonte: a pesquisa (2019).

As informações dispostas no quadro no revelam que a praxeologia pontual do professor atendeu a nove subtipos de tarefa referentes ao ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental.

O professor fez opção por três das técnicas utilizadas: Multiplicar ou dividir numerador e denominador por um mesmo número natural conveniente; determinar o menor múltiplo comum (ou usar técnica auxiliar fatorando os denominadores), dividir o m.m.c. pelo denominador de cada fração e multiplicar o resultado por seu numerador respectivo, depois soma os numeradores e repete o denominador; e, multiplicar os numeradores entre si e os denominadores também entre si. Simplificar o resultado se possível (técnica complementar).

Registramos o primeiro cálculo com frações no 4º encontro (filmagem da aula) no qual o professor anunciou a Tarefa: Escrever a forma mista de uma fração imprópria e vice-versa. A aula foi sequenciada tendo como aporte o livro do professor, Vontade de saber Matemática do qual temos o fragmento da figura.

Figura 16 – Cálculo da forma mista de uma fração imprópria por meio da técnica $\tau_{\text{DNPD}}(\text{implícita})$



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 133).

O recorte abaixo transcrito da aula do professor descreve e torna explícita a técnica utilizada por ele para calcular a forma mista de uma fração imprópria. No trecho da sua fala, foi utilizado um exemplo semelhante ao recorte da figura 16, p. 112.

Quadro 16 – Recorte 03, fala do professor P sobre forma mista.

Ação: O professor P faz a leitura com os alunos da seguinte projeção:

R_{TEC}: Projeção da seguinte definição de número misto: Número misto é um número escrito na forma da soma de sua parte inteira com a sua parte fracionária (esta é sempre uma fração própria). Os números mistos também podem ser escritos como frações não contáveis. Exemplo: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. O quociente será o primeiro número, o resto será o novo numerador e o denominador permanente.

P: Ó! Vamos a um exemplo aqui de como eu coloco um número (pausa). Oh! A₄₄, você está aí com o seu inteiro dividido em quantas partes mesmo?

R_{TEC}: **Projeção de etapas da escrita do número misto na lousa.**

A₄₄: três!

P: Dividido em três partes, não é?

A₄₄: É!

P: A₄₄, retire por favor, uma parte qualquer aí. Só uma. De um desses inteiros. Ó! Você retirou uma parte aí não foi A₄₄? Você retirou uma parte de um dos inteiros. (...) Veja, o seu inteiro está dividido aí em quantas partes?

A₄₄: Três!

P: Em três partes. De três você retirou uma. Quantos inteiros havia restado?

A₄₄: dois!

P: Restaram dois inteiros não foi? Estão aqui A₄₄. Esses dois inteiros aqui são os canudos que você tem por completo aí. Agora veja só A₄₄, qualquer fração que você queira escrever para representar a forma mista que você tem, essa fração A₄₄, ela vai ter denominador quanto?

A₄₄: três!

P: Porque denominador três? O inteiro está dividido em?

A₄₄: Três!

P: Em três partes. Do inteiro A₄₄ que você retirou uma parte, quantas restaram?

A₄₄: duas!

P: Restaram duas não foi? Então quanto vai ser o numerador dessa fração? Olhe, veja se você compreendeu. Você tem aí dois inteiros dos canudos que estão com todas as suas partes completas e o outro inteiro que está dividido em três partes, você está considerando quantas dessas partes?

A₄₄: Duas!

P: Duas partes. Então dois inteiros e dois terços, é o número que está representado na sua forma mista.

Fonte: a pesquisa (2019).

Em virtude de o assunto frações não ser entendido como objeto de estudo, pois é parte do grande conjunto dos Números Racionais (esse sim, objeto de estudo), esse conteúdo não apresenta no livro didático, tecnologias que justifiquem o universo das suas técnicas, sendo por isso, que trabalhamos apenas com o bloco

prático em relação às intenções dos autores do livro didático e do professor que o utiliza como referência.

A seguir, mostraremos um comparativo entre as tarefas propostas pelos autores do livro didático vontade de saber matemática, utilizado pelo professor para construir a sua praxeologia matemática e as tarefas efetivamente trabalhadas. Com isso, procuramos verificar aproximações ou distanciamentos entre as intenções dos autores e a prática docente nessa turma de 6º ano do Ensino Fundamental anos finais.

Tabela 4 – Comparativo entre os Tipos de tarefas referentes ao ensino de frações pelo professor e aquelas sugeridas no livro didático.

Tipos e subtipos de tarefas	Tarefas sugeridas no livro didático	%	Tarefas propostas pelo professor	%
T ₁	6	9,23	6	11,11
T ₂	t _{2.1}	12	12	22,22
	t _{2.2}	6	6	11,11
T ₃	5	7,69	5	9,26
T ₄	t _{4.1}	1	-	-
	t _{4.2}	6	6	11,11
T ₅	t _{5.1}	10	10	18,52
	t _{5.2}	5	5	9,26
T ₆	14	21,54	-	-
T ₇	-	-	4	7,41
Total	65	100,00	54	100,00

Fonte: a pesquisa (2019).

Em relação ao livro didático, a tabela 4 revela a predominância do Tipo de tarefa T₂ correspondente aos seus subtipos t_{2.1} com 18,46% e t_{2.2} com 9,23%, que trata da equivalência entre frações, totalizando para o Tipo de tarefa T₂ uma abrangência de 27,69% na preferência dos autores. Em segunda opção ficou o tipo T₅, cujos subtipos alcançaram t_{5.1} com 15,38% e t_{5.2} com 7,69%, totalizando para esse grupo 23,70% constantes no livro didático. Por fim, o tipo T₆ que alcançou 21,54% da preferência dos autores.

Destacamos que essa opção dos autores sobre os Tipos de tarefa se configuraram também como os “Topos” do professor, frente a isso, percebemos na tabela, que a sua preferência esteve de acordo com as propostas do livro didático com certa ampliação para algumas, a exemplo do Tipo de tarefa T₂ com seus

subtipos $t_{2.1}$ (22,22%) e do $t_{2.2}$ (11,11%) alcançando 33,33% das tarefas propostas. Em seguida o tipo T_5 cujos subtipos alcançaram $t_{5.1}$ (18,52%) e do $t_{5.2}$ (9,26%), totalizando 27,78% da preferência do professor, já o Tipo de tarefa T_6 (porcentagem, com 21,54%) constante no livro didático analisado não integrou as opções do professor, cuja preferência recaiu sobre o T_7 (divisão de frações, com 7,41%), como vimos na resposta do professor à pergunta nº 13.1 do Bloco III da entrevista (quadro 14, p. 110).

Destacamos que o livro didático *Vontade de Saber Matemática*, distribuído pelo PNLD (2017-2019) e adotado na escola pesquisada, não foi a opção do professor pesquisado, embora ele tenha utilizado a proposta do livro em suas aulas. O fragmento da entrevista relata essa situação, vamos a ele.

Quadro 17 – Recorte da fala do professor sobre a escolha do livro didático.

Pergunta do Bloco III – nº 10.3

10.3. Você optaria pelo livro didático disponibilizado pela Secretaria Municipal de Educação de Caruaru? Justifique sua resposta.

R_{10.3}: Não, não optaria por este livro que foi utilizado no período 2017-2019. Por ter conhecimento de que existiam naquele momento outros livros que trabalhavam não só o conteúdo fração, mas outros diversos conteúdos de uma forma bem melhor do que o que foi “escolhido”, como exemplo, a Conquista da Matemática, livro este que foi escolhido novamente agora no ano de 2019, mas a gente já recebeu informação de que a Prefeitura não aderiu a essa escolha, escolheu lá um livro que nem na escola para ser analisado esse livro chegou, mas foi a Secretaria Municipal que fez a opção de utilizar no próximo ano (2020) na rede.

Fonte: a pesquisa (2019).

Percebemos que, mesmo não concordando com a escolha do livro didático, o professor decidiu trabalhar com ele, atendendo às normatizações da Rede Municipal de Ensino, entendendo as demandas dos seus alunos e buscando fazer as adequações necessárias para melhorar a sua aula, além de entender que o processo de elaboração, estruturação, escolha e distribuição do livro didático costumam caro à população. Vejamos os dois próximos fragmentos que seguem.

Quadro 18 – Recorte da fala do professor sobre a utilização do livro didático.

Pergunta do Bloco III – nº 11

11. Você utilizou o livro didático *Vontade de Saber Matemática* nas suas aulas? Se a resposta for sim, qual a constância desse uso?

R₁₁: Utilizo sempre. Sempre que abordo um conteúdo, procuro direcioná-lo ao livro didático, até porque não faria sentido o aluno dispor dessa ferramenta e você não fazer utilização dela.

Fonte: a pesquisa (2019).

Quadro 19 – Recorte da fala do professor sobre adequações ao livro didático.

Pergunta do Bloco III – nº 13

13. Ao utilizar o livro didático, você segue os encaminhamentos teórico-metodológicos propostos pelos autores ou faz alterações/adequações aos mesmos?

R₁₃: Tenho conhecimento, mas procuro fazer adequações ou alterações que eu acho pertinentes para trabalhar com as turmas e as variedades de alunos que a gente tem, até porque, o livro, ele é escolhido para uma rede nacional muitas vezes né? Mas cada região, cada município tem suas peculiaridades que você tem que fazer as adaptações necessárias.

Fonte: a pesquisa (2019).

A seguir, trataremos da análise das organizações didáticas das aulas do professor com ênfase aos seus momentos didáticos.

6.2.3 Análise das organizações didáticas das aulas do professor

Esse subtópico apresenta os seis momentos didáticos, pelos quais analisamos as aulas do professor, da primeira à última aula. São eles: o primeiro, é o encontro com o objeto de estudo, no nosso caso, o conteúdo frações; o segundo, se refere à utilização das técnicas; o terceiro, é alusivo à constituição do ambiente tecnológico-teórico; o quarto, diz respeito ao trabalho da técnica; o quinto, tange à institucionalização; e, o sexto, concerne à avaliação.

O professor trabalhou o conteúdo frações em 15 encontros totalizando 38 aulas, devidamente filmadas e transcritas o que gerou o quadro abaixo.

Quadro 20 – Os Tipos de tarefas abordados pelo professor.

Data	Aula	Atividades
05/08/2019	01	Conceituar fração.
	02	Relacionar a parte com o todo (numerador e denominador).
	03	Ler frações.
09/08/2019	04	Representar com figuras, relacionar razão com a divisão.
	05	Fração do inteiro, resolver problemas com frações.
12/08/2019	06	Resolver exercícios.
	07	Classificação das frações.
	08	Forma mista de uma fração imprópria. Resolver exercícios.
19/08/2019	09	Corrigir exercícios.
	10	Resolver exercícios com o software Professor Sagaz.
23/08/2019	11	Resolver exercícios com o software Professor Sagaz.
	12	Equivalência de frações através do software Professor Sagaz.
26/08/2019	13	Equivalência de frações.
	14	Simplificação de frações.
	15	Simplificação de frações.
30/08/2019	16	Resolver exercícios.
	17	Resolver exercícios.
02/09/2019	18	Corrigir exercícios.
	19	Comparação de frações com denominadores iguais e diferentes.
	20	Comparação de frações com denominadores iguais e diferentes.
13/09/2019	21	Resolver exercícios.
	22	Comparar frações com denominadores iguais e diferentes.
16/09/2019	23	Resolver exercícios.
	24	Corrigir exercícios.
	25	Somar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes.
20/09/2019	26	Somar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes.
	27	Somar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes.
23/09/2019	28	Resolver exercícios.
	29	Corrigir exercícios.
	30	Calcular as expressões numéricas.
27/09/2019	31	Calcular as expressões numéricas.
	32	Resolver Exercícios.
21/10/2019	33	Multiplicação de fração por um número inteiro.
	34	Corrigir exercícios.
	35	Multiplicação de uma fração por outra.
01/11/2019	36	Resolver exercícios.
	37	Divisão de frações.
	38	Resolver exercícios.

Fonte: a pesquisa (2019).

Após esse momento, identificamos que o primeiro encontro sobre as frações ocorreu em 05 de agosto de 2019, cujo registro relata que o professor trouxe um pouco da história da origem das frações, sua representação gráfica e numérica com atividades lúdicas e recursos tecnológicos, logo após, apresentou o assunto aos alunos, como podemos ver no recorte da sua fala disponível no quadro abaixo.

Quadro 21 – Recorte 12, fala do professor sobre a ideia de fração.

Ação: O professor organiza a sala de aula em semicírculo.

P: Bom dia pessoal, vejam só. Olhem vejam só pessoal, a gente vai iniciar, hoje, o estudo das frações no sexto ano.

R_{TEC}: **O professor projeta no quadro o tema: Ideia de Fração.**

Esse conteúdo para vocês, a certeza de que não é a primeira vez que vocês vão ver o professor falar sobre o assunto. No quinto ano, aqueles que não são repetentes aqui, vieram do quinto ano passado, todos vocês viram, acredito eu, fração, com a professora que lá trabalhava com vocês.

A_x: Vi não! Mais ou menos!

P: Vocês não vão fazer nenhuma anotação agora, tá certo? Vocês não vão fazer nenhuma anotação agora, tá certo? Antes da gente ir para a parte das anotações, eu quero que vocês interajam comigo no que a gente vai fazer aqui e agora.

Ação: O professor utiliza 11 copos descartáveis e um recipiente cheio de água para explicar sobre a ideia de fração e os distribui no meio da sala.

P: Agora eu preciso que vocês colaborem com o silêncio, ouviram? Olhe, peguei o meu recipiente que estava totalmente cheio de água e procurei dividir igualmente o que estava aqui nesse recipiente eu distribuí igualmente nesses copos colocados aí. Quantos copos eu utilizei?

A_x: Onze!

P: Foram utilizados 11 copos, tá certo? Vejam o seguinte, esses 11 copos que aqui eu tenho, se eu pegar por exemplo um deles e entregar para A₃₅. Vamos imaginar que A₃₅ tomou aquela quantidade de água que eu coloquei naquele copo. A pergunta que eu vou fazer para vocês é a seguinte: Da quantidade que eu possuía de água, distribuída nesses copos, o que A₃₅ tomou, representa que fração do total?

A₅: Meio! Representa 12!

A₁₅: Representa um onze avos!

P: Representa o que A₁₅? Representa um onze avos. Veja, a quantidade de água que existia, ela não foi colocada em onze copinhos desses? Então, se eu peguei um para A₃₅, e ela tomou a água. O que ela tomou representa um onze avos do total de água que foi colocada nesses copos aí. Certo? Agora uma outra pergunta: A₄₃, o que sobrou de água representa que fração do total que existia ali, inicialmente?

A₄₃: (Sem resposta).

A_x: Dez avos! Dez onze avos!

P: Alguém falou aí. Representa dez onze avos. Foram colocados onze copos e eu peguei apenas um, o que ela tomou e me disse que foi um onze avos, o que restou aqui foi dez onze avos.

Ação: O professor entrega 1 copo ao aluno A₃₆ e outro a aluna A₃₂.

P: Veja, entreguei mais um outro copo para A₃₆, e outro para A₃₂, se eu for considerar agora ou levar como ideia o que eu havia colocado inicialmente aqui, que porção da água inicial que foi colocada, A₃₅, A₃₆ e A₃₂, tomaram, juntos?

A_x: Três onze avos!

P: Três onze avos. E que porção da água que eu coloquei aqui inicialmente, ainda resta?

A_x: Oito onze avos!

P: Oito onze avos. Veja só, por essa colocação que a gente fez aqui, acredito que dá para vocês concluírem o seguinte: o que viria a ser uma fração? **A fração, ela representa parte ou algumas partes do inteiro ou do todo. (...)**

Ação: O professor segue exemplificando com uma corda e com cubinhos até chegar ao momento em que ele traz para os seus alunos um resumo da História das frações.

Quadro 22 – Recorte 12, fala do professor sobre a História das frações.

Ação: O professor inicia a leitura dos slides sobre a História das frações.

P: Veja! Vocês vão só observar agora aqui esse slide um pouquinho, mas não é necessário fazer anotação disso. Vê só! Diz aqui nesse pequeno texto que há três mil anos antes de Cristo, no Egito, eram feitas marcações nas terras que se localizavam em torno do rio Nilo. Mas no período entre junho e setembro devido às chuvas, o rio transbordava e apagava as delimitações. Então vê só! Para evitar que o transbordamento do rio apagasse aquelas delimitações que foram feitas, eles passaram a esticar a corda e contavam quantas vezes a aquela unidade de medida estava contida nos lados de cada terreno. Só que o seguinte: nem sempre o número era exato. Então surgiu a necessidade de se criar um novo tipo de número, **foi aí que começaram a desenvolver os números fracionários**, tá certo? Então vê só, cerca de três mil anos antes de Cristo, o homem utilizava marcações nas margens do rio Nilo. No período que o rio transbordava, essas demarcações eram apagadas, o homem então pensou o seguinte, eu vou utilizar corda para fazer essa medição, estica a corda, quando o rio transbordar não vai apagar a demarcação, só que nem sempre, utilizava-se o comprimento exato da corda então foi por conta disso ou a partir daí que o homem começou a desenvolver os números que a gente chama de números fracionários.

Fonte: a pesquisa (2019).

Os trechos acima também nos mostram, além do primeiro encontro do professor e seus com as frações, eles descrevem situações da sala de aula que foram fundamentais para a composição dos seis momentos didáticos propostos por Chevallard (1999) sobre a práxis do professor. Vejamos então os detalhes dos momentos didáticos do professor no próximo quadro.

Quadro 23 – Descrição dos momentos didáticos do professor.

Momentos Didáticos	CrITÉRIOS de Análise	CrITÉRIOS realizados pelo Professor
Momento 1	O professor fez a introdução de frações para os seus alunos?	O professor utilizou material concreto para exemplificar a ideia de fração, em seguida, apresentou a representação numérica básica de uma fração (parte de um todo), finalizando com um fragmento da história das frações contido no livro didático, esses foram os caminhos utilizados pelo professor para introduzir o assunto aos seus alunos.
Momento 2	Como ocorreu a utilização do Tipo de tarefa T em sala de aula, bem como a elaboração das técnicas τ relativas a esse Tipo de tarefa na sala de aula?	Ocorreu no 3º encontro (6ª aula) quando o professor indagou que: <i>Os números mistos também podem ser escritos como frações não contáveis. Exemplo: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. O quociente será o primeiro número, o resto será o novo numerador e o denominador permanente.</i>
Momento 3	Como foi realizada a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	Com relação a esse momento, encontramos apenas resquícios que, a partir da noção de equivalência, nos remete vagamente às propriedades gerais da igualdade, motivo esse que nos impossibilitou de realizar mais adiante, as análises no tocante ao elemento tecnologia.
Momento 4	Como ocorreu o trabalho do professor no tocante às técnicas?	Aconteceu a partir da 6ª aula mediante a resolução de atividades exemplificadas na lousa, nos exercícios realizados na sala de aula.
Momento 5	Em qual período ocorre a institucionalização pelo professor? No início, no meio ou no final do conteúdo?	A institucionalização se formalizou ao passo que as técnicas foram sendo experimentadas: determinar frações equivalentes pelo processo multiplicativo; calcular a porcentagem através de fração centesimal, entre outras, essa experimentação distinguiu aquelas consideradas “matematicamente necessárias” das “matematicamente contingentes” e, portanto, passíveis de descarte. (Chevallard, 1999, p. 244).
Momento 6	Como foi realizada a avaliação das relações pessoais $R(X;O)$ e institucionais $RI(O)$, se no início, no meio, no final da aula ou unicamente no final do conteúdo?	Esse momento foi um dos mais abrangentes, pois foi verificado nas indagações do professor para com os alunos sobre frações ao longo das 37 aulas, oralmente. Esse momento se complementou com duas avaliações escritas realizadas no meio e no final do processo, respectivamente.

Fonte: a pesquisa (2019).

Identificar os momentos de estudo foi fundamental para se compreender e analisar a proposta de ensino do professor, a partir deles foi possível verificar o seu trabalho formalizado nos Tipos de tarefa e nas técnicas utilizadas para cumprir com os seis momentos didáticos propostos por Chevallard (1999) e apresentados no quadro acima.

Ressaltamos que os momentos didáticos não seguem, necessariamente, a ordem apresentada no quadro 24, mas que a identificação e a análise da forma como ocorrem, permite uma melhor compreensão do trabalho do professor. Outra questão importante revela-se nas indagações de Bittar (2017, p. 381), "Há privilégio de algum momento em relação aos demais? Caso exista, o que isso significa?".

As respostas, buscamos em Kaspary (2014, p. 46, apud Bittar 2017, p. 381), ao afirmar que "a conclusão de que o primeiro momento coincide, recorrentemente, com a institucionalização de saberes matemáticos, como teoremas e propriedades, alerta para um ensino mais teoricista". Essa conclusão de Kaspary reforça que o entendimento sobre os momentos didáticos, ou seja, como ocorrem, qual a sequência em que ocorrem e qual(is) prevaleceu(ram), permite que sejam estabelecidas estratégias para corrigir distorções ou erros graves no processo de ensino e aprendizagem. Para Bittar (2017, p. 381), "A identificação e análise dos momentos de estudo pode ser fundamental para compreender ou, ao menos, levantar hipóteses sobre a proposta de ensino de objetos não matemáticos".

Percebemos que no nosso caso, em relação ao professor pesquisado, essa coincidência não ocorreu ou foi atenuada, pois vemos um equilíbrio entre a teorização e o trabalho das técnicas exploradas pelo professor nas suas aulas sobre frações, em que ele utilizou a sequência didática do seu livro de referência, *Vontade de Saber Matemática*. O professor buscou também, realizar atividades concretas para exemplificar os conceitos de fração no 6º ano, a utilização desses materiais concretos se formaliza como os *Topos*¹⁶ do professor alinhado às orientações dos documentos oficiais, PCN (1997/98), BNCC (2017), PC/PE (2012/14) e PP-SEDUC (2018).

Sobre os *Topos* esperados pelos autores do livro didático *Vontade de Saber Matemática* (2015) que se originam no trabalho do professor com os seus alunos, elencamos no quadro abaixo aqueles que conseguimos identificar.

¹⁶ A palavra "topos" é oriunda do grego e significa lugar. Na didática, os *Topos* constituem-se como o lugar em que se agrega o trabalho do professor e do estudante, ou seja, quando esses sujeitos didáticos são chamados para desempenharem seu papel em fases cooperativas (CHEVALLARD; GRENIER, 1997) e (CHEVALLARD, 1999).

Quadro 24 – Descrição dos *Topos* do professor.

Topos esperados pelo autor	Topos realizados pelo professor
<ul style="list-style-type: none"> ● Compreender o conceito de fração em diferentes situações; ● Ler frações e identificar seus elementos; ● Reconhecer as frações próprias e impróprias; ● Identificar os números na forma mista; ● Compreender o conceito de frações equivalentes; ● Simplificar frações; ● Comparar frações com o mesmo denominador ou com denominadores diferentes; ● Efetuar adições, subtrações e multiplicações de frações; ● Relacionar as frações e as porcentagens. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Evidenciamos que o professor desenvolveu os referidos <i>Topos</i> nas suas aulas, exceto pela seguinte alteração: não lecionou fração com significado de porcentagem, acrescentando mais <i>Topos</i> à lista dos autores, a divisão com frações. ▪ Fora isso, o professor cumpriu com os demais <i>Topos</i> esperados pelos autores do livro didático.

Fonte: a pesquisa (2019).

6.3 ANÁLISE DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR

A entrevista realizada com o professor é composta de três blocos assim divididos:

- ✓ Bloco I: Sobre as formações do professor (três perguntas);
- ✓ Bloco II: Sobre o conteúdo frações (oito perguntas);
- ✓ Bloco III: Sobre o livro didático (dez perguntas).

Optamos em apresentar os trechos das falas na mesma sequência destinada às perguntas para melhor organização e entendimento já que nesse tipo de entrevista (semiestruturada), pode ocorrer de uma fala originar outra pergunta, fato presenciado nas perguntas: 4.1 e 6.1 do Bloco II, 10.1, 10.2, 10.3 e 13.1 do Bloco III.

Iniciamos fazendo as perguntas referentes ao Bloco I, vamos a elas: “1. Você participou de formações oferecidas pelo Governo Municipal, se sim, quantas vezes por ano?”; “2. Na sua concepção, as formações contribuem para a sua qualificação docente?” e “3. Você se considera um professor tradicional?”.

- ✓ Nossas expectativas: esperávamos que o professor fornecesse informações da qualidade das formações, que fosse citada a realidade da escola como obstáculo à qualidade da aula ou mesmo uma possível jornada ampliada de trabalho e a sua concepção de tradicional e moderno.
- ❖ Apesar de não atenderem a uma parte das nossas expectativas, as respostas obtidas foram valorosas, pois trouxeram informações que podem revelar

elementos que interferem ou contribuem para qualidade das aulas do professor, como vemos nos recortes a seguir:

Quadro 25 – Recorte da fala do professor sobre o Bloco I da entrevista.

R₁: Sim, uma vez por mês acontecem essas formações continuadas na rede Municipal.
R₂: Contribuem sim, mas poderiam ser melhores.
R₃: Não, procuro sempre levar metodologias que sejam diferentes dos modelos tradicionais para que facilite a aprendizagem do aluno o máximo possível.

Fonte: a pesquisa (2019).

Entendemos o posicionamento do professor a respeito da melhoria das formações, pois apesar de ter ocorrido uma maior periodicidade em relação à sua realização, elas ainda não acontecem de forma pontual para tender a determinados conteúdos cuja natureza oferece maiores obstáculos ao seu ensino. Destacamos as frações cujas características e abstrações dificultam o seu aprendizado. Em relação ao tradicionalismo, ele buscou nas suas aulas demonstrar que realmente é aberto aos recursos e às novas experiências.

As perguntas do próximo Bloco buscaram respostas à relação do professor com o conteúdo frações, aos procedimentos adotados para dinamizar as suas aulas e a sua proficiência didática e pedagógica. Vamos a elas: “4. Ao preparar as suas aulas sobre frações, qual(is) o(s) objetivo(s) você busca dar prioridade?”; “4.1 Quais recursos você costuma utilizar na preparação das aulas para o ensino de frações?”; “5. Você encontrou alguma dificuldade ao ministrar o conteúdo frações, qual(is)?”; “6. Você tem compreensão dos construtos (significados) das frações listados a seguir? Se sim, você teria condições de dar um exemplo para cada construto: Razão / Quociente / Parte-todo / Operador Multiplicativo / Medida / Porcentagem.”; “6.1 Por que você não ensinou, aos alunos fração com significado de: razão, quociente, medida, operador multiplicativo, medida e porcentagem?”; “7. Você fez alterações nos assuntos pertinentes às frações ou seguiu à risca a proposta dos autores do livro didático?”; “8. Você costuma seguir essa sequência para as suas aulas: teoria – exemplificações teóricas e práticas – exercícios? Se não, relate como procede na maioria das vezes no tocante ao ensino de frações.”; “9. Você acha o conteúdo frações importante e necessário para os alunos e para a sociedade como um todo? Se sim, explique o(s) motivo(s).”

- ✓ Nossas expectativas: almejamos do professor em relação ao item 4, que ele fizesse menção aos documentos oficiais e aos objetivos propostos no livro didático; para o item 4.1 esperávamos aquilo que foi observado nas aulas; em relação ao item 5, esperamos uma resposta mais concreta, que expusesse mais elementos sobre a relação do professor com o conteúdo de ensino; O item 6, foi o mais desafiador, pois exigia um conhecimento mais aprofundado dos construtos de frações, objetivamos ter do professor uma exemplificação simples, mas clara da sua compreensão do construtos fracionários. Essa pergunta confronta também a resposta do item 5; No item 6.1 esperávamos explicações sobre o não ensino dos construtos listados; Para o item 7, almejamos a explicação do professor por ter retirado porcentagem do currículo da sala de aula do 6º ano e incluído divisão de frações; O item 8 esperamos que o professor propusesse outra sequência de trabalho; No 9, a sua resposta foi de acordo com o esperado.
- ❖ Nossas percepções: Dois momentos cruciais revelados no bloco II dizem respeito aos itens 5; 6; 6,1 e 7. Percebemos nas respostas contraditórias a falta de conhecimento sobre alguns dos construtos (significados) das frações, além de uma mudança radical na sequência curricular, não revelada ainda na resposta a essa pergunta, mas a partir de outra pergunta posterior pertencente ao bloco III. Vejamos as respostas desse bloco:

Quadro 26 – Recortes da fala do professor sobre o Bloco II da entrevista.

R₄: Procurar fazer com que o aluno compreenda de uma forma bastante clara os conceitos envolvidos em fração, levando para a sala de aula experimentos práticos para que essa compreensão fique mais clara possível para o aluno, não utilizando apenas o livro didático e exemplos no quadro.

R_{4.1}: Computador, projetor de slides e materiais concretos.

R₅: Não, não encontro dificuldade nenhuma. É porque hoje você dispõe de vários meios de pesquisa de buscar formas diferentes de abordar qualquer que seja o conteúdo, então não tenho dificuldade não.

R₆: Sim, tenho sim.

R_{6.1}: Medida e razão estão implícitos nas atividades propostas e porcentagem eu achei melhor dar divisão no lugar de porcentagem.

R₇: Fiz algumas alterações, buscando complementar em outros livros didáticos, pesquisando na internet e outras fontes.

R₈: Sim, costumo seguir essa sequência.

R₉: Sim, com certeza, a fração está envolvida no nosso dia a dia mesmo que muitas vezes não façamos relação com a prática em sala de aula, o aluno principalmente não faz essa relação, mas ela está presente com certeza no cotidiano de todos nós.

Esse conjunto de respostas revelou algo delicado acerca da relação do professor com determinados construtos das frações, pois mesmo com uma boa dinâmica de sala de aula, estudar é sempre necessário devido a outras dinâmicas externas à sala de aula, tais como: mudanças curriculares atreladas às novas demandas educacionais, ao envelhecimento de técnicas que não atendem mais a determinados Tipos de tarefas, enfim, necessidades de se compreender um profissional como parte de um todo e não o todo. Por isso, o contraditório passa a existir, conforme vimos nas respostas dos itens 5; 6; 6.1 que culminaram na atitude relatada no item 7.

O Bloco III tratou do livro didático, cujas perguntas buscaram saber se o professor foi um agente ativo ou passivo na escolha do material de referência para suas aulas, buscou também conhecer as intenções do professor acerca desse material didático, o conhecimento dos encaminhamentos teórico-metodológicos propostos pelos autores, a sua estrutura física e “conteúdista” do livro, ou seja, a sua relação com o livro. Prossigamos então para as perguntas: “10. Você participou da escolha do livro didático na sua escola? Justifique o(s) motivo(s).”; “10.1. Por qual motivo o livro escolhido não foi adotado?”; “10.2. Qual foi o livro didático escolhido por você e os demais professores?”; “10.3. Você optaria pelo livro didático disponibilizado pela Secretaria Municipal de Educação de Caruaru? Justifique sua resposta”; “11. Você utilizou o livro didático *Vontade de Saber Matemática* nas suas aulas? Se a resposta for sim, qual a constância desse uso?”; “12. Por que você utilizou o livro didático nas suas aulas?”; “13. Ao utilizar o livro didático, você segue os encaminhamentos teórico-metodológicos propostos pelos autores ou faz alterações/adequações aos mesmos?”; “13.1. Com relação ao ensino de frações, você pode relatar alguma(s) alteração(ões) realizada(s)?”; “14. Você leu o manual do professor? Se sim, quais as informações ou sugestões sobre o ensino das frações você utilizou nas suas aulas? Se não, qual(is) o(s) motivo(s)?”; “15. Em sua opinião, o livro didático de Souza; Pataro (2015) atende às suas expectativas? Por qual(is) motivo(s)?”.

- ✓ Nossas expectativas: almejamos no item 10, que o professor relate se viveu o processo de escolha ou não; no item 10.1, esperamos entender o que ocorre na etapa final do burocrático processo de adoção do livro didático; o 10.2, revela as intenções da Secretaria de Educação; no 10.3 esperamos revelar as intenções do professor; no 11, alcançamos o que foi visto nas aulas; no item

12, esperamos que o professor nos revelasse alguma qualidade do livro didático; no 13, esperávamos relatos de outros encaminhamentos pelo professor; no item 13.1, esperamos os relatos de possíveis alterações; no 14, se o professor realmente leu o manual e se utilizou alguma orientação do mesmo; por fim, no item 15, buscamos mais relatos da opinião do professor sobre o livro didático.

- ❖ Nossas percepções: Nesse bloco presenciamos as interferências do sistema na decisão final de adoção do livro didático, situação que permanece marcante, como será visto nos relatos do professor. Levando em conta que o livro didático se formalizou como o principal material de apoio do professor, esses entraves no processo decisório de escolha pode possibilitar o não uso nas escolas não contempladas com o material escolhido.

Quadro 27 – Recorte da fala do professor sobre o Bloco III da entrevista.

R₁₀: Sim, participei, no entanto o livro que foi escolhido não foi o adotado pela rede municipal na época.

R_{10.1}: Eu acredito que por interesse da Secretaria Municipal de Educação que estava a frente, não sei o que a Editora “ofereceu” a “ele” (*Secretário de Educação, dedução nossa*) para que fosse adotado um livro diferente daquele que foi a escolha dos professores.

R_{10.2}: Na época foi a Conquista de Matemática.

R_{10.3}: Não, não optaria por este livro que foi utilizado no período 2017-2019. Por ter conhecimento de que existiam naquele momento outros livros que trabalhavam não só o conteúdo fração, mas outros diversos conteúdos de uma forma bem melhor do que o que foi “escolhido”, como exemplo, a Conquista da Matemática, livro este que foi escolhido novamente agora no ano de 2019, mas a gente já recebeu informação de que a Prefeitura não aderiu a essa escolha, escolheu lá um livro que nem na escola para ser analisado esse livro chegou, mas foi a Secretaria Municipal que fez a opção de utilizar no próximo ano (2020) na rede.

R₁₁: Utilizo sempre. Sempre que abordo um conteúdo, procuro direcioná-lo ao livro didático, até porque não faria sentido o aluno dispor dessa ferramenta e você não fazer utilização dela.

R₁₂: “Para que facilite o seu trabalho e o seu desenvolvimento dos diversos conteúdos que você tem que fazer abordagem durante o ano letivo. Sem o livro didático, se fosse para você ter que copiar tudo, você iria perder um tempo enorme, e isso iria atrapalhar o seu cumprimento do conteúdo curricular necessário para cada etapa de ensino.”

R₁₃: Tenho conhecimento, mas procuro fazer adequações ou alterações que eu acho pertinentes para trabalhar com as turmas e as variedades de alunos que a gente tem, até porque, o livro, ele é escolhido para uma rede nacional muitas vezes né? Mas cada região, cada município tem suas peculiaridades que você tem que fazer as adaptações necessárias.

R_{13.1}: Sim. Por exemplo, no livro ‘Vontade de Saber’, utilizado na rede, eu preferi dar para os alunos na conclusão do assunto, divisão de frações que o livro não aborda ao invés de porcentagem, isso porque porcentagem com certeza, mais adiante em

outras séries eles voltarão a estudar ou terão uma abordagem mais profunda nesse conteúdo, enquanto a divisão de fração que o livro não traz, eles não teriam uma abordagem tão específica quanto a série exige, no caso o 6º ano.

R₁₄: Sim, li sim. Era sugerido que se utilizasse materiais concretos para que você aplicasse em suas aulas, no entanto, os sugeridos lá eu não achei muito conveniente não, preferi levar os meus próprios materiais para ir fazendo as adequações necessárias.

R₁₅: Atendem em parte, levando em consideração que você não vai ter nenhum livro didático que consiga atender às suas necessidades pedagógicas em 100%, ou em sua plenitude, mas tenho certeza que na ocasião que a Prefeitura Municipal de Caruaru ou Secretaria de Educação fez a escolha do livro, naquele momento existiam outros autores com livros bem melhores do que o que foi escolhido por ela.

Fonte: a pesquisa (2019).

Além das demais informações, as falas nos revelam que mesmo não participando da escolha do livro didático, o professor trabalhou com ele em todas as suas aulas, essa ação fortalece o nosso objetivo de verificar se houve aproximação ou distanciamento entre as organizações matemáticas e didáticas do professor e do livro didático.

Portanto, fechamos aqui o conjunto de respostas que retratam opiniões, intenções, modos de fazer próprios do professor cujas observações complementaram as observações das aulas para dispormos de um material mais rico em detalhes e mais realista no tocante as aulas do professor.

6.4 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

A escolha pelo livro didático Vontade de Saber Matemática de Souza e Pataro (2015), aprovado no PNLD (2017-2019), teve como fator decisivo, a sua classificação nas primeiras colocações do ranking de escolha em nível nacional (1º colocado) e municipal (2º colocado). Como norteador das aulas do professor, apresentamos no quadro abaixo o referido livro que compõe o conjunto das análises.

6.4.1 Apresentação e organização de frações no livro didático

O quadro a seguir apresenta a organização do conteúdo frações no livro didático.

Quadro 28 – Sequência do conteúdo frações no livro didático

Livro: Vontade de Saber Matemática - Capítulo 6
<ul style="list-style-type: none"> ◦ Ideias de fração. ◦ Leitura de frações. ◦ Classificação das frações. ◦ Número na forma mista. ◦ Frações equivalentes. ◦ Simplificação de frações. ◦ Frações irredutíveis. ◦ Comparação de frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes. ◦ Adição e subtração de frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes. ◦ Multiplicação de número natural por uma fração e de uma fração por outra. ◦ Frações e porcentagem.

Fonte: a pesquisa (2019).

A partir do quadro acima verificamos como os autores organizaram o conteúdo frações no livro didático, será analisado também como os autores propuseram a introdução e a organização dos conteúdos fracionários, suas organizações matemática e didática, os *topos* e o modelo dominante apresentado no livro.

6.4.2 O livro *Vontade de Saber – Matemática*

Aprovado no PNLD (2017-2019), o livro didático *Vontade de Saber Matemática* ou *Manual do Professor*, de Souza e Pataro (2015), apresenta 480 páginas assim distribuídas:

Parte I - Os 12 *capítulos* que compõem os livros do professor e do aluno. (p. 12 a 305), dos quais, o capítulo 6 corresponde às frações. (p. 126 a 157).

- Atividades (bateria de exercícios) no final de cada assunto e Revisão (bateria de exercícios) no final de cada capítulo.
- *Acessando tecnologias*, que visa integrar o ensino de determinados conteúdos às tecnologias disponíveis (p. 306 a 317), no caso das frações, é sugerido a utilização de frações na planilha eletrônica. (p. 310).
- *Ampliando seus conhecimentos*, os autores disponibilizam uma lista de livros e sites que tratam de temas relacionados aos assuntos estudados no volume em

questão, dos quais destacamos: Frações (Problemas, jogos & enigmas), Frações sem mistérios (A descoberta da Matemática), (p.318 a 320).

- Respostas dos exercícios propostos, identificados pelos autores como “Atividades” (p.321 a 336). Embora os autores às disponibilizem nessa seção, elas aparecem destacadas junto a cada questão,

- Bibliografia (p. 336).

Parte II - Orientações para o Professor (p.337 a 453).

- A seção acessando tecnologias compreende comentários sobre os conteúdos abordados em cada capítulo, figuras par recorte. (p.454 a 446).

- Na seção Mais informações os atore apresentam sugestões de livros e sites (p. 447 a 479).

- Bibliografia (p. 480).

Destacamos no quadro apresentamos um resumo das ações sobre o ensino de frações verificadas no *Vontade de Saber Matemática* de Souza e Pataro (2015), volume do 6º ano do Ensino Fundamental, editora FTD.

Quadro 29 – Abordagens sobre o ensino de frações no livro didático

Ações Didático-Pedagógicas sobre Frações	Páginas
● Seção: 1.2 Apresentação do capítulo 6 sobre frações no livro-texto.	126 a 157
● Seção: 1.4 Acessando Tecnologias: Os autores propõem a utilização de frações na planilha eletrônica, atividade proposta para o final do capítulo 6.	310
● Seção: 1.5 Ampliando seus conhecimentos, sugestão dos livros: Frações (Problemas, jogos & enigmas) e Frações sem mistérios (A descoberta da Matemática).	318 e 319
● Seção: 1.6 Atividades disponíveis no final de cada assunto que compõe o capítulo de frações.	326 a 329
● Seção: 1.7 Bibliografia, apresenta títulos sem referência direta ou específica às Frações, contudo, com menções ao contexto geral dos números e sua história.	336
● Seção: 1.8 Orientações ao Professor, nelas são destacados o Mapa de Conteúdos e os Recursos que, no caso das frações, corresponde ao quadro 9.	337
● Subseção: 1.8.4 Orientações Gerais, item (i).	342

Fonte: a pesquisa (2019).

O Capítulo 6 inicia com elementos que remetem à ideia de frações, para esse fim, os autores apresentaram uma breve história da composição de duas ligas de ouro, a primeira representada por uma barra 14 quilates, dividida em 24 partes iguais na composição de $\frac{14}{24}$ de ouro e $\frac{10}{24}$ de outros metais; a segunda representada

por uma barra de 18 quilates, dividida em 24 partes iguais na composição de $\frac{18}{24}$ de ouro $\frac{6}{24}$ de outros metais. Essa é a abordagem clássica para introdução de frações porque trabalha a relação entre a parte e o todo que a contém utilizando a representação figural (pictórica), além de apresentar a sua forma numérica clássica $\frac{a}{b}$, geralmente não especificando $b \neq 0$.

O trabalho prossegue fazendo incursões à leitura das frações, até esse ponto não há técnicas sistematizadas visto que não foram necessários procedimentos manipuláveis para cálculos, salvo a ação de desenhar e pintar para representar uma forma fracionária que entendemos como técnica auxiliar porque visa agregar outra forma de se ver o cálculo. Na sequência curricular disponibilizada pelo livro chegamos à classificação das frações, nesse ponto já podemos enxergar uma técnica no fim do túnel, pois ao se chegar às frações impróprias, chegar-se-á também a sua forma mista, fato exposto no livro didático a partir de dois processos, porque não dizer duas técnicas, primeira retoma a representação figural (pictórica) e a segunda remete à manipulação numérica ou tratamento de registros, conforme se vê a seguir.

- ❖ $\tau_{DNPD(implícita)}$: Dividir o numerador pelo denominador obtendo dois inteiros (quociente) e um quarto fracionário (sobreposição do resto com o divisor).

$$\frac{9}{4} = 2 \text{ com resto igual a } 1$$

(Tratamento)

Ressaltamos que a técnica $\tau_{DNPD(implícita)}$ é definida com implícita, pois o livro didático não a esboça, apenas apresenta um Tipo de tarefa que apresenta um contexto figural e pede para escrever a forma mista correspondente. Contudo, é sabido que o tratamento, mesmo que não realizado, remete a etapa que foi pulada no livro didático, etapa essa que, nesse caso, se constitui uma técnica.

6.4.3 Análise praxeológica sobre o ensino de frações

São especificados abaixo os componentes das análises referentes às frações, também explicitamos a constatação da ausência dos elementos tecnológicos e

teóricos. Sendo por isso que as nossas análises darão conta, apenas dos seguintes componentes de análise que compõem o bloco prático-técnico: 1) Exploração do Tipo de tarefa e elaboração da técnica; 2) Trabalho da técnica.

➤ **Tipo de Tarefa T_1 :**

- ✓ **Exploração do Tipo de tarefa $T_{1(EFM)}$ (Escrever a forma mista de uma fração) e elaboração da técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$:** Nesse momento acontece a construção da representação de uma fração com figuras (pictórica), característica própria das frações. Essa técnica é abrangente e está presente na maioria das tarefas, pois proporciona a partir da visualização, a comparação entre frações, conforme podemos ver nas figuras (17, 18, 20 e 24) das respectivas páginas (132, 134, 136 e 141) a seguir.
- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$:** Esse momento é proposto em duas seções do livro: na seção Atividades (Souza e Pataro, 2015, p. 130, 131, 134, 136, 137, 140, 141, 144 e 151) e na seção Revisão (ibidem, p. 154). Para sua concretização, os alunos trabalham essa técnica fazendo os exercícios direcionados pelo professor nos modelos propostos pelos autores do livro didático.
- ✓ **Exploração do Tipo de tarefa $T_{1(EFM)}$ (Escrever a forma mista de uma fração) e elaboração da técnica $\tau_{DNPD(implícita)}$:** momento que se concretiza com a explanação do processo de cálculo da fração $\frac{9}{4}$ para a sua forma mista, conforme se vê na figura abaixo.

Exemplo: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 17 – Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{DNP}(implícita)$

A professora de Ana pediu que ela pintasse $\frac{9}{4}$ das figuras que desenhou na lousa.
Observando as figuras que Ana pintou, podemos dizer que a parte pintada representa 2 figuras inteiras mais $\frac{1}{4}$ de uma figura, isto é, $2\frac{1}{4}$.

O número $2\frac{1}{4}$ é chamado **número na forma mista** e lê-se dois inteiros e um quarto.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 133).

Apesar da limitação do livro, esse processo foi devidamente explicado pelo professor na sua aula, conforme o quadro abaixo. Não encontramos registros de tecnologia para justificar essa técnica.

Quadro 30 – Recorte da fala do professor sobre forma mista

Ação: O professor P faz a leitura com os alunos da definição de número misto apresentada na projeção:

R_{TEC}: Projeção da definição de número misto: Número misto é um número escrito na forma da soma de sua parte inteira com a sua parte fracionária (esta é sempre uma fração própria). Os números mistos também podem ser escritos como frações não contáveis. Exemplo: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. O quociente será o primeiro número, o resto será o novo numerador e o denominador permanente.

P: Ó! Vamos a um exemplo aqui de como eu coloco um número (pausa). Oh! A₄₄, você está aí com o seu inteiro dividido em quantas partes mesmo?

R_{TEC}: Projeção de etapas da escrita do número misto na lousa.

A₄₄: três!

P: Dividido em três partes, não é?

A₄₄: É!

P: A₄₄, retire por favor, uma parte qualquer aí. Só uma. De um desses inteiros. Ó! Você retirou uma parte aí não foi A₄₄? Você retirou uma parte de um dos inteiros. (...) Veja, o seu inteiro está dividido aí em quantas partes?

A₄₄: Três!

P: Em três partes. De três você retirou uma. Quantos inteiros haviam restado?

A₄₄: dois!

P: Restaram dois inteiros não foi? Estão aqui A₄₄. Esses dois inteiros aqui são os canudos que você tem por completo aí. Agora veja só A₄₄, qualquer fração que você queira escrever

para representar a forma mista que você tem, essa fração A_{44} , ela vai ter denominador quanto?

A_{44} : três!

P: Porque denominador três? O inteiro está dividido em?

A_{44} : Três!

P: Em três partes. Do inteiro A_{44} que você retirou uma parte, quantas restaram?

A_{44} : duas!

P: Restaram duas não foi? Então quanto vai ser o numerador dessa fração? Olhe, veja se você compreendeu. Você tem aí dois inteiros dos canudos que estão com todas as suas partes completas e o outro inteiro que está dividido em três partes, você está considerando quantas dessas partes?

A_{44} : Duas!

P: Duas partes. **Então dois inteiros e dois terços, é o número que está representado na sua forma mista.**

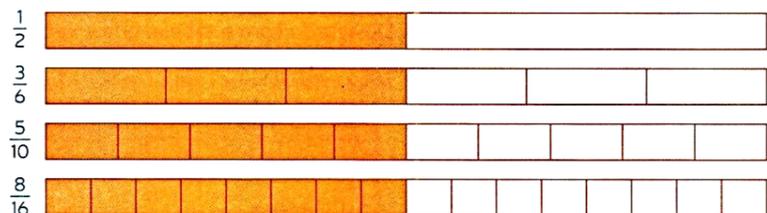
Fonte: a Pesquisa (2019).

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{DNPD(implícita)}$** : esse momento é proposto para acontecer na seção Atividades (Souza e Pataro, 2015, p. 134). Sua concretização se dá quando os alunos buscam resolver as questões propostas nas atividades pertinentes ao Tipo de tarefa que demandam essa técnica.
- **Tipo de Tarefa T_2** :
- ✓ **Exploração do Subtipo de tarefa $t_{2.1(CFE)}$ (Calcular frações equivalentes) e elaboração das técnicas $\tau_{MND(NC)}_{} \tau_{DND(NC)}$** : Esse Tipo de tarefa tem sua introdução a partir da necessidade de manipulação de uma fração pelas técnicas $\tau_{MND(NC)}_{} \tau_{DND(NC)}$ (Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural conveniente para obter frações equivalentes), resultando em n equivalentes. A partir dela, se permitem resolver Tipos de tarefa que envolvem comparação entre frações (reta numérica), adição e subtração, simplificação e porcentagem. Vejamos como os autores dispuseram a sua exemplificação na figura abaixo, na qual percebemos a sistematização da técnica.

Exemplo: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 18 – Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{MND(NC)}$ e $\tau_{DND(NC)}$

As figuras a seguir possuem as mesmas medidas e foram divididas em partes iguais. Veja a fração que corresponde à parte pintada de cada uma dessas figuras.



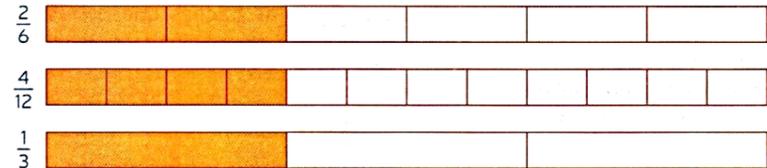
As partes pintadas de cada figura representam a mesma parte do todo. Assim, dizemos que $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ e $\frac{8}{16}$ são **frações equivalentes**, ou seja, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16}$.

Ao multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à inicial.

Vamos multiplicar e dividir, por exemplo, o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{6}$ por um mesmo número.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{4}{12} \\ \frac{2}{6} = \frac{2 : 2}{6 : 2} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Representando essas frações por meio de figuras, temos:



Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 135).

- ✓ **Trabalho das técnicas $\tau_{MND(NC)}$ e $\tau_{DND(NC)}$** : momento que o autor propõe que se efetive na seção Atividades (Souza e Pataro, 2015, p. 136 – 137). Reforçamos que as referidas técnicas são utilizadas também em questões pontuais de outras atividades.
- ✓ **Exploração do Subtipo de tarefa $t_{2.1(CFE)}$ (Calcular as frações equivalentes) e elaboração da técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$** : Percebemos que, nesse tipo de tarefa, esse momento busca demonstrar geometricamente o processo de equivalência, conforme acompanhamos na figura (18, p. 134).

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$:** para esse Tipo de tarefa, a técnica em questão é proposta na seção Atividades (Souza e Pataro, 2015, p. 136 e 137), embora ela seja abrangente para as demais.
- ✓ **Exploração do Subtipo de tarefa $t_{2.2(CFI)}$ (Calcular a forma irredutível de uma fração) e elaboração da técnica $\tau_{DND(NC)}$:** Momento proposto para ser efetivado com a apresentação do processo de cálculo apresentado na figura seguinte.

Exemplo: (**Significado Parte/Todo**).

Figura 19 – Extrato de resolução utilizando a técnica $\tau_{DND(NC)}$

Utilizando divisões vamos obter frações equivalentes a $\frac{60}{150}$.

$$\frac{60}{150} = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

O numerador e o denominador da fração $\frac{2}{5}$ não podem ser divididos simultaneamente por um mesmo número natural, pois 2 e 5 são números primos entre si. Assim, dizemos que $\frac{2}{5}$, que é a forma mais simplificada de escrever a fração $\frac{60}{150}$, é uma fração **irredutível**. Se necessário, lembre os alunos de que dois números são primos entre si quando o mdc entre eles é igual a 1.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 135).

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{DND(NC)}$:** para esse Subtipo de tarefa a técnica é proposta na seção Atividades (Souza e Pataro, 2015, p. 136 e 137), na seção Revisão (ibidem p. 154), bem como finalizando o cálculo em questões pontuais quando requerida.
- **Tipo de Tarefa T_3 :**
- ✓ **Exploração do Tipo de tarefa $T_{3(SSF_DI)}$ (Somar ou subtrair frações com denominadores iguais) e elaboração da técnica $\tau_{SN(RD)}$:** Esse momento ocorre quando os autores propõem o cálculo de adição e/ou subtração entre frações. Esse é o primeiro momento do contato com cálculo, a partir dele, são também abordados alguns problemas propostos para prática dessa e de outras técnicas.

Exemplo: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 20 – Extrato de resolução utilizando a $\tau_{SN(RD)}$

> Adição e subtração de frações com denominadores iguais

Antônio vai fazer uma viagem de carro com origem em Belo Horizonte (MG) e destino em Porto Seguro (BA). Ele percorreu $\frac{3}{12}$ do trajeto até a 1ª parada e depois mais $\frac{4}{12}$ do percurso total até a 2ª parada.

Fonte: ATLAS geográfico escolar, 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

- Que fração representa o trajeto percorrido por Antônio até a 2ª parada?
Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma **adição de frações**.

$$\frac{\text{fração do trajeto da 1ª até a 2ª parada}}{\frac{3}{12} + \frac{4}{12}} = \frac{3 + 4}{12} = \frac{7}{12}$$

fração do trajeto até a 1ª parada fração do trajeto percorrido

Representando essa adição de frações por meio de uma figura, temos:

Acervo da editora

Em uma adição de frações cujos **denominadores são iguais**, adicionamos os numeradores e mantemos o denominador.

- Que fração representa a parte do trajeto que Antônio ainda tem de percorrer?
A resposta dessa pergunta, que é dada pela parte branca da figura acima, também pode ser obtida por uma **subtração de frações**. Nesse caso, subtraímos $\frac{7}{12}$ (fração do trajeto percorrido) de $\frac{12}{12}$, que representa todo o trajeto, já que $\frac{12}{12} = 1$.

$$\frac{\text{fração do trajeto percorrido}}{\frac{12}{12} - \frac{7}{12}} = \frac{12 - 7}{12} = \frac{5}{12}$$

todo o trajeto fração do trajeto que ainda falta ser percorrido

Assim, ainda faltam ser percorridos $\frac{5}{12}$ do trajeto.

Em uma subtração de frações cujos **denominadores são iguais**, subtraímos os numeradores e mantemos o denominador.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 142).

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{SN(RD)}$** : Referente a esse subtipo de tarefa, a técnica é proposta para ser trabalhada na seção Atividades (Souza e Pataro, 2015, p. 136 e 137), na seção Revisão (ibidem p. 155).
- ✓ **Exploração do Tipo de tarefa $T_{3(SSF_DI)}$** : (**Somar ou subtrair frações com denominadores iguais**) e elaboração da técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$: Para esse

tipo de tarefa, a técnica expressa visualmente a junção de partes de figuras geométricas facilitando dessa forma a compreensão de soma ou subtração entre frações, conforme podemos observar na figura (20, p. 136) acima.

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$** : visualizado na seção Atividades (Souza e Pataro, 2015, p. 130, 131, 14, 136, 137, 140, 141, 144 e 151) e na seção Revisão (Ibidem, p. 154), essa técnica é praticada quando os alunos realizam esses exercícios propostos pelos autores.

➤ **Tipo de Tarefa T_4 :**

- ✓ **Exploração do Subtipo de tarefa $t_{4.1(SSF_{PE})}$ (Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o princípio da equivalência) e elaboração da técnica mista $\tau_{MND(NC)_{SN(RD)}}$** : Essa tarefa abrange dois métodos diferentes para esse cálculo ser efetuado, como primeiro método os autores propõem a técnica mista de se determinarem frações equivalentes para tornar os denominadores iguais e depois efetuar a soma ou subtração, conforme se vê na figura a seguir.

Exemplo₁: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 21 – Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{MND(NC)}$; $\tau_{SN(RD)}$

► **Adição e subtração de frações com denominadores diferentes**

Leticia e Márcio compraram uma torta de vegetais com 12 pedaços iguais. Leticia comeu $\frac{1}{4}$ da torta e Márcio, $\frac{1}{6}$. Que fração da torta Leticia e Márcio comeram juntos? Diga aos alunos que considerem a torta dividida em partes iguais, o que não ocorre na prática.



Para responder a essa pergunta, precisamos fazer uma adição de frações, ou seja, devemos determinar o resultado de $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Como as frações possuem denominadores diferentes, obtemos, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ cujos denominadores são iguais.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \dots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \dots$$

Agora adicionamos as frações obtidas.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Assim, Leticia e Márcio comeram juntos $\frac{5}{12}$ da torta.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 143).

- ✓ **Trabalho da técnica mista $\tau_{MND(NC)}_{SN(RD)}$** : Para o tipo de tarefa em questão, a técnica a ser utilizada consta na seção Atividades (Souza e Pataro, p. 154).
- ✓ **Exploração do subtipo de tarefa $t_{4.2(SSF_MMC)}$ (Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o artifício do mmc) e elaboração da técnica mista $\tau_{FDF_D(MMC)}_{SN(RD)}$** : Esse subtipo de tarefa é introduzido a partir de uma técnica mista que perfaz três etapas do cálculo, é

nesse momento que ocorre o cálculo do valor de **mmc** (4, 6, 9), em seguida de $[(36:6) \cdot 5] - [(36:5) \cdot 1] + [(36:9) \cdot 2]$, por fim o cálculo de $\frac{30+9+8}{36} = \frac{29}{36}$ que corresponde ao Tipo de tarefa **T₃**, de acordo com a figura (20, p. 130).

Exemplo₂: (**Significado de Parte/Todo**).

Figura 22 – Extrato modelo de resolução utilizando as técnicas $\tau_{FDF_D(MMC)_SN(RD)}$

2050? $\frac{29}{50}$

59. Calcule.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{8}$ b) $\frac{5}{9} - \frac{5}{18}$ c) $\frac{8}{7} + \frac{5}{3}$ d) $\frac{5}{4} - \frac{10}{9}$ e) $\frac{23}{16} - \frac{5}{6}$ f) $\frac{7}{12} + \frac{14}{5}$

60. Marcos e Gisele compraram um queijo e dividiram-no em fatias iguais. Do total de fatias, Marcos comeu $\frac{2}{3}$ e Gisele, $\frac{1}{4}$. Peça aos alunos que considerem o queijo dividido em fatias iguais, o que não ocorre na prática.

a) Que fração das fatias Marcos e Gisele comeram? $\frac{11}{12}$

b) Que fração das fatias restou? $\frac{1}{12}$

• Agora, para cada fração, dividimos o mmc obtido pelo denominador e multiplicamos o resultado pelo numerador, obtendo frações equivalentes às iniciais.

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{(36:6) \cdot 5}{36} - \frac{(36:4) \cdot 1}{36} + \frac{(36:9) \cdot 2}{36} = \frac{30 - 9 + 8}{36} = \frac{29}{36}$$

Quando adicionamos ou subtraímos frações cujos **denominadores são diferentes**, precisamos, inicialmente, substituí-las por frações equivalentes com o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos ou subtraímos as frações equivalentes obtidas.

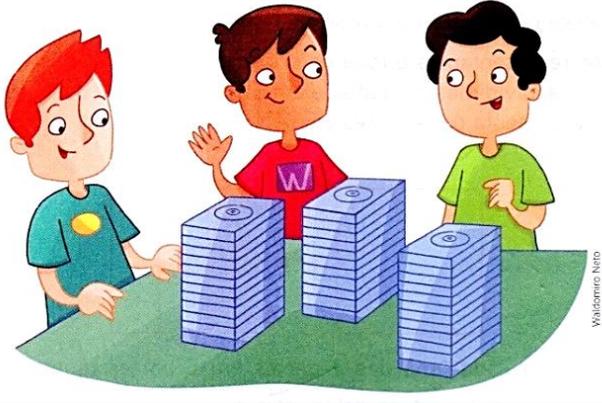
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 144).

- ✓ **Trabalho da técnica mista $\tau_{FDF_D(MMC)_SN(RD)}$:** Esse momento é proposto para ser concretizado na seção Atividades (Souza e Pataro, p. 144 e 145) e na seção Revisão (ibidem, p. 155).
- **Tipo de Tarefa T₅:**
- ✓ **Exploração do Subtipo de tarefa t_{5.1(CFN)} (Calcular a fração de uma quantidade discreta) e elaboração da técnica mista $\tau_{MNQ_DND(NC)}$:** Esse processo é realizado a partir do cálculo do valor de $\frac{5 \cdot 35}{7}$, terminando com a divisão $\frac{175}{7} = 25$.

Exemplo: (*Fração de uma quantidade discreta*).

Figura 23 – Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{MNQ_DND(NC)}$

Tiago e dois amigos compraram certa quantidade de DVDs e a dividiram em 7 partes iguais. Tiago ficou com 5 dessas partes e os seus amigos, com uma parte cada um.



• Sabendo que Tiago e seus dois amigos compraram 35 DVDs ao todo, com quantos DVDs Tiago ficou?
Para responder a essa pergunta, precisamos calcular $\frac{5}{7}$ de 35, ou seja, $\frac{5}{7} \cdot 35$:

$$\frac{5}{7} \cdot 35 = \frac{5 \cdot 35}{7} = \frac{175}{7} = 25$$

Assim, Tiago ficou com 25 DVDs.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 147).

- ✓ **Trabalho da técnica mista $\tau_{MNQ_DND(NC)}$** : Para esse subtipo de tarefa a técnica em questão é proposta na seção Atividades (Souza e Pataro, p. 148 e 149) e na seção Revisão (Ibidem, p. 154).
- ✓ **Exploração do Subtipo de tarefa $t_{5.2(CFF)}$: (Calcular a fração de outra fração) e elaboração da técnica mista $\tau_{DPF(pic/aux)}$** : em relação a esse subtipo de tarefa $t_{5.2(CFF)}$, a sua representação geométrica permite que se perceba o que ocorre visualmente quando se multiplicam frações. A figura 24 a seguir detalha esse processo.

Exemplo: (**Fração de uma quantidade fracionária**).

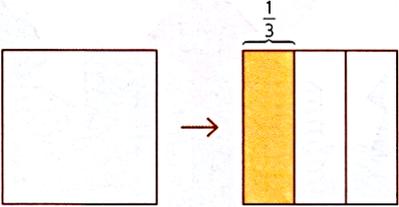
Figura 24 – Extrato de resolução utilizando as técnicas $\tau_{DPF(pic/aux)}$; $\tau_{M(NsDs)_DND(NC)}$

Em uma loja de aparelhos celulares, $\frac{1}{3}$ de todos os aparelhos disponíveis possui TV digital, e, desses, $\frac{2}{5}$ estão na promoção.

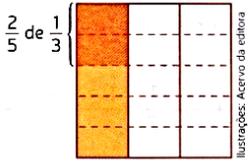
- Do total dos celulares dessa loja, que fração corresponde àqueles que têm TV digital e estão na promoção?

Para responder a essa questão, precisamos calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$, isto é, $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$. Veja como podemos fazer esse cálculo com o auxílio de figuras.

- Inicialmente, representamos o total de celulares dessa loja por meio de um quadrado. Em seguida, dividimos o quadrado em 3 partes iguais e destacamos uma dessas partes, que representa os celulares com TV digital.



- Agora, dividimos cada uma das 3 partes em 5 partes iguais. Obtemos, assim, 15 partes e consideramos duas delas, pois queremos calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$. Note que a parte considerada corresponde a 2 em um total de 15, ou seja, $\frac{2}{15}$.



Assim, a fração dos celulares dessa loja que têm TV digital e estão em promoção é $\frac{2}{15}$.
De maneira prática, podemos efetuar o cálculo $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ do seguinte modo:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

Na multiplicação de frações, o resultado tem como numerador o produto dos numeradores e como denominador o produto dos denominadores.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 148).

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{DPF(pictórica)}$:** para esse subtipo de tarefa, a técnica em questão é proposta na seção Atividades (Souza e Pataro, p. 136 e 137), mas também requisitada por outras tarefas.
- ✓ **Exploração do Subtipo de tarefa $t_{5,2(CFF)}$: (Calcular a fração de outra fração) e elaboração da técnica mista $\tau_{M(NsDs)_DND(NC)}$:** Esse processo

ocorre quando é proposto que se calcule $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$, semelhantemente ao subtipo de tarefa $t_{5.1(CFN)}$, contudo, mesmo havendo semelhança no processo de construção do cálculo, o seu resultado é mais complexo de ser compreendido devido ao seu nível de abstração, pois resulta, geralmente, em outra fração. Vemos isso, na figura 24.

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{M(NsDs)_DND(NC)}$:** a técnica que atende a esse subtipo de tarefa é proposta na seção Atividades (Souza e Pataro, p. 149) e na seção Revisão (Ibidem, p. 155).

➤ **Tipo de Tarefa T_6 :**

- ✓ **Exploração do Tipo de tarefa $T_{6(CPQV)}$: (Calcular a porcentagem de uma quantidade ou valor) e elaboração da técnica mista $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$:** Esse Tipo de tarefa é introduzido por meio da apresentação do cálculo da porcentagem que envolve inicialmente o subtipo de tarefa $t_{2.1}$ (que trata da equivalência) e da relação entre a fração centesimal e a porcentagem. Os autores apresentam esses momentos nas duas figuras a seguir.

✓ Exemplo₁: (**Significado de Porcentagem**).

Figura 25 – Extrato 1 de resolução utilizando as técnicas $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$

O tempo de degradação do lixo na natureza depende do material de que ele é composto. Observe alguns exemplos na cena abaixo.

Fonte: <www.institutorecicle.org.br>. Acesso em: 5 nov. 2014.

A coleta seletiva de materiais recicláveis, que evita o depósito de diversos materiais na natureza, já é uma realidade em vários municípios brasileiros. A reciclagem de metais, como o alumínio, tornou-se um hábito brasileiro.

No país, de cada 100 latas de alumínio produzidas, cerca de 98 são recicladas.

A relação 98 em cada 100 pode ser representada por uma fração cujo denominador é igual a 100 (fração decimal), ou seja, $\frac{98}{100}$.

A fração $\frac{98}{100}$ também pode ser representada na forma de **porcentagem**, e para isso utilizamos o símbolo %. Nesse caso, escrevemos 98% e lê-se noventa e oito por cento.

A porcentagem, indicada pelo símbolo %, corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Quando indicamos 30%, por exemplo, significa que estamos considerando 30 partes de um total de 100.

Toda fração decimal ou uma equivalente a ela pode ser escrita na forma de porcentagem. Veja alguns exemplos.

- Em um estacionamento há 20 carros. Entre esses carros, 7 são vermelhos. Qual a porcentagem de carros vermelhos no estacionamento?

Como 7 em cada 20 carros são vermelhos, podemos escrever a fração $\frac{7}{20}$. Escrevendo uma fração equivalente a $\frac{7}{20}$ cujo denominador é igual a 100, temos:

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 35\%$$

Assim, 35% dos carros desse estacionamento são vermelhos.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 150).

- ✓ Exemplo₂: (**Significado de Porcentagem**).

Figura 26 – Extrato 2 de resolução utilizando a técnica mista $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$

• Em uma corrida de 15 km, certo atleta já percorreu 6 km. Qual porcentagem de todo o trajeto esse atleta já percorreu?

Como 6 km de um total de 15 km já foram percorridos, escrevemos a fração $\frac{6}{15}$ e determinamos a fração equivalente, cujo denominador é igual a 100.

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$$

Assim, esse atleta já percorreu 40% do trajeto.

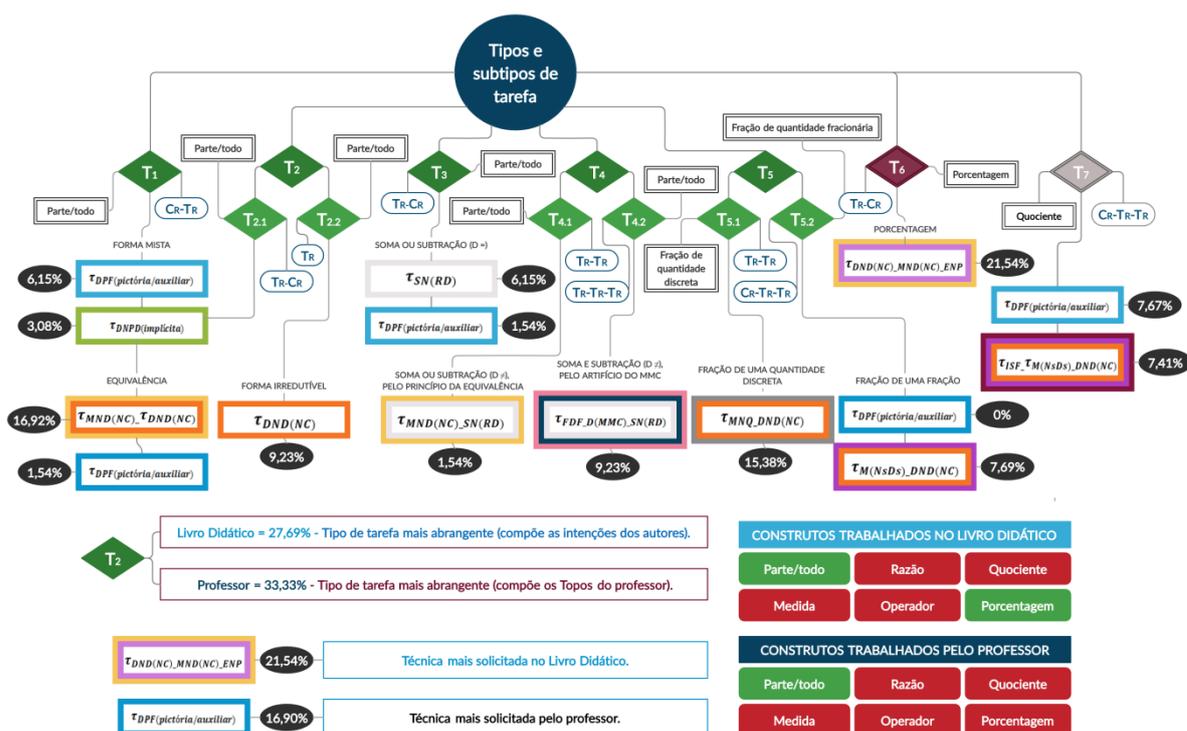
Para obter a fração com denominador 100 foi necessário dividir o numerador e o denominador da fração inicial por 3 e, depois, multiplicar o numerador e o denominador da fração obtida por 20.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 151).

- ✓ **Trabalho da técnica $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$** : esse momento é proposto para ser realizado nas seguintes seções: Atividades (Souza e Pataro, p. 151, 152 e 153); Refletindo sobre o capítulo (Ibidem, p. 153); Revisão (Ibidem, p. 155); *Resolvendo problemas*, nessa seção os autores propõem uma questão ampla com 13 etapas para sua resolução que se subdividem em: *Compreendendo o problema* (5); *Elaborando um plano* (3), com essa seção os autores propõem que, “à medida que os alunos trabalham com problemas com características variadas e utilizam diferentes modos de resolução, seu conjunto de estratégias e ampliado, favorecendo a abordagem de novos problemas”; *Executando o plano* (1), “nessa etapa da resolução, é importante que os alunos registrem todos os cálculos, possibilitando uma análise posterior”; *Realizando o retrospecto e a verificação* (4); ENEM e OBMEP. Destacamos que, além das exemplificações expostas anteriormente, os autores disponibilizam no meio de uma bateria de exercícios, uma exemplificação e instrui que se faça tal qual o modelo. Vamos a ele: Questão 80. Uma concessionária vendeu 480 veículos em certo ano, dos quais eram 25% da cor prata, 20% da cor branca, 10% da cor vermelha, e o restante, de outras cores. Para determinar quantos veículos vendidos eram da cor prata, devemos calcular 25% de 480. Temos que 100% correspondem ao todo, ou seja, 480 veículos. Assim, $25\% \text{ de } 480 \rightarrow \frac{25}{100} \text{ de } 480 \rightarrow \frac{25}{100} \cdot 480 = \frac{25 \cdot 480}{100} = 120$ (Ibidem, p. 152), esse é outro exemplo clássico do trabalho da técnica.

A figura seguinte apresenta, de forma resumida, alguns dos pontos tomados da análise.

Figura 27 – Mapa conceitual dos Tipos e subtipos de tarefas abordados pelo professor e pelos autores do livro didático *Vontade de Saber - Matemática*.



Fonte: a pesquisa (2020).

Nele, percebemos toda a conjuntura formada pela abrangência das técnicas trabalhadas pelo professor, tendo como base o seu livro didático para o ensino de frações, os construtos apresentados, as manipulações e transformações subsidiadas pelas conversões de registros e pelos tratamentos das representações fracionárias, além dos conteúdos curriculares para o ensino de frações.

6.4.4 Síntese avaliativa do livro *Vontade de Saber – Matemática*

Apresentamos a seguir a avaliação das organizações matemáticas deste livro didático para o estudo das frações segundo os critérios de referência propostos por

Chevallard (1999). Relembramos que, devido a não terem sido detectados elementos do bloco tecnológico-teórico no livro didático e tão pouco nas aulas do professor, a nossa síntese avaliativa atenderá aos critérios de identificação dos subtipos de tarefas, pertinência ou razão de ser, representatividade e a organização didática. Os critérios, elementos técnico-tecnológicos e evolução dos subtipos de tarefas e da tecnologia, não foram contemplados nesse trabalho.

Identificação dos subtipos de tarefas: Os enunciados que tratam do ensino de frações nesse livro didático fazem referência às palavras *escreva, pinte, determine, represente, compare, verifique, calcule, simplifique, copie, substitua, efetue e associe*. Alguns enunciados são pequenos, exemplo: Calcule. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{8}$ (Souza e Pataro, p. 144), permitindo a identificação do que se quer como resposta e outros são extensos, muitas vezes devido à necessária contextualização, vamos ao exemplo: Dois carros de modelos diferentes possuem os tanques de combustível com mesma capacidade. Para fazer uma mesma viagem, o carro A consumiu combustível equivalente a $\frac{5}{6}$ do tanque e o carro B, a $\frac{14}{18}$ do tanque. (Souza e Pataro, p. 140). Geralmente, os enunciados permitem identificar de forma rápida, na sua maioria, os Tipos e subtipos de tarefas abordadas, contudo não faz referência expressa aos significados Medida, Razão e Quociente, traz subentendido os significados de Parte/todo e Fração de quantidade discreta e fração de uma quantidade fracionária e expressa claramente o significado de Porcentagem, conforme visto no quadro-resumo 12 da modelização *a priori*. (p. 142).

Pertinência ou razão de ser: O livro didático digital fornece na seção OED (Objeto Educacional Digital), vídeos com as falas de profissionais da Educação sobre alguns conteúdos que compõem o volume do 6º ano. Dentre eles, a fala do professor Nilson José Machado que tece a importância do ensino de frações para o currículo escolar e conseqüentemente para os alunos. Vamos à fala:

“Enquanto estou contando unidades, contando carneirinho, contando banana, contando maçã, posso ficar mais ou menos ao lado da fração. Mas na hora em que quero dividir um chocolate, dividir uma pizza, isso aí é uma porta de entrada para a necessidade de pegar partes. A gente não pode pretender ensinar frações com muita preocupação com a nomenclatura. A nomenclatura e o simbolismo matemático é um obstáculo. É uma dificuldade! E a ideia de fração não. **A ideia de fração, ela é como parte, como pedaço, ela é intuitiva e importante trabalhar com a criança.**” (Souza e Pataro, 2015).

Representatividade: O livro didático apresentou 104 atividades propostas sobre frações das quais 65 atendem a todos os Tipos e subtipos de tarefas T_1 ; $T_2 (t_{2.1}, t_{2.2})$; T_3 ; $T_4 (t_{4.1}, t_{4.2})$; $T_5 (t_{5.1}, t_{5.2})$; T_6 , disponíveis no quadro 12 (p. 96) da segunda categorização, desse total, 39 questões correspondem aos conceitos apresentados no quadro da primeira categorização não analisada nesse trabalho conforme os critérios já apresentados na página 89.

Tabela 5 – Tipos e subtipos de tarefas do livro didático

Tarefas e subtipos de tarefas	T_1	T_2		T_3	T_4		T_5		T_6	Total	%
		$t_{2.1}$	$t_{2.2}$		$t_{4.1}$	$t_{4.2}$	$t_{5.1}$	$t_{5.2}$			
$\tau_{DPF(pic/aux)}$	4	-	-	-	-	-	-	-	-	4	6,15
$\tau_{DNPD(imp)}$	2	-	-	-	-	-	-	-	-	2	3,08
$\tau_{MND(NC)}_DND(NC)$	-	11	-	-	-	-	-	-	-	11	16,92
$\tau_{DPF(pic/aux)}$	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1	1,54
$\tau_{DND(NC)}$	-	-	6	-	-	-	-	-	-	6	9,23
$\tau_{SN(RD)}$	-	-	-	4	-	-	-	-	-	4	6,15
$\tau_{DPF(pic/aux)}$	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	1,54
$\tau_{MND(NC)}_{SN(RD)}$	-	-	-	-	1	-	-	-	-	1	1,54
$\tau_{FDF_D(MMC)}_{SN(RD)}$	-	-	-	-	-	6	-	-	-	6	9,23
$\tau_{MNQ_DND(NC)}$	-	-	-	-	-	-	10	-	-	10	15,38
$\tau_{DPF(pic/aux)}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\tau_{M(NsDs)}_{DND(NC)}$	-	-	-	-	-	-	-	5	-	5	7,69
$\tau_{DND(NC)}_{MND(NC)}_{ENP}$	-	-	-	-	-	-	-	-	14	14	21,54

Fonte: a pesquisa (2020).

A partir da tabela acima, verificamos que as tarefas do grupo T_2 representam 27,69%, as do grupo T_5 , 23,07% e as do grupo T_6 correspondem a 21,54%, ou seja, são essas, as tarefas de maior proposta dos autores para a sala de aula.

Organização didática: Corresponde à transposição das organizações matemáticas identificadas em torno dos Tipos e subtipos de tarefa referentes ao estudo de frações com descrito no quadro abaixo.

Quadro 31 – Descrição dos momentos didáticos do professor

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Livro Didático
Momento 1	Como foi feita a introdução de frações no livro didático?	Iniciou com a apresentação do trecho sobre a história e composição da liga de ouro seguida de outro trecho sobre a história das frações que remonta ao Egito antigo como berço das primeiras noções de frações, em seguida é sugerida uma situação-problema sobre a noção de fração (Souza e Pataro, p. 127 e 128). Contudo, a sistematização da técnica só ocorreu com a apresentação de uma situação (Tipo de tarefa) que demandou o seu uso. (Souza e Pataro, p. 135).
Momento 2	Como ocorreu a exploração do Tipo de tarefa T ou subtipo de tarefa t no livro e a elaboração das técnicas τ relativas a esse Tipo de tarefa?	Esse momento é previsto nas seções Atividades, Revisão e ENEM e OBMEP, no livro didático.
Momento 3	Como se constituiu o ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	Semelhantemente às aulas do professor, no livro didático não encontramos vestígios do elemento tecnológico, sendo por isso que não será possível, nesse trabalho, realizarmos as análises posteriores referentes ao bloco tecnológico-teórico.
Momento 4	Como os autores propõem o trabalho das técnicas?	Foi proposto por meio de seções específicas. Os autores propuseram 104 questões das quais 65 foram selecionadas por atender aos três Tipos de tarefa e aos seis subtipos de tarefa definidos.
Momento 5	Como se efetiva a institucionalização? No início, no meio ou no final do livro didático?	A institucionalização acontece em decorrência da apresentação das técnicas (Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural para obter frações equivalentes / Desenhar e pintar figuras para representar as frações equivalentes obtidas e comparar as partes pintadas).
Momento 6	De que forma se realizou a avaliação, no início, no meio ou no final do livro didático?	A avaliação aconteceu explicitamente logo após a institucionalização decorrente da apresentação das técnicas. Foram realizadas em formato de perguntas ao longo das aulas em que “P” solicitava que os alunos apresentassem frações equivalentes às frações escritas na lousa, como também, que comparassem frações para saber se eram ou não equivalentes. As avaliações escritas aconteceram no meio e no final de todas as aulas.

Fonte: a pesquisa (2019).

Nossas conclusões encerram que a sistematização da técnica ocorreu de formas diferentes para o professor e para os autores do livro didático, pois verificamos que o professor sistematizou a sua maneira própria do fazer (bloco técnico-prático) com as técnicas: Desenhar e pintar figuras (registro figural) para representar o número misto (registro numérico) / Dividir o numerador pelo denominador obtendo dois inteiros (quociente) e um quarto fracionário (sobreposição do resto com o divisor).

Já os autores do livro didático sistematizaram essa prática com as técnicas: Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural para obter frações equivalentes / Desenhar e pintar figuras para representar as frações equivalentes obtidas e comparar as partes pintadas.

É perceptível ainda que a técnica (Desenhar e pintar figuras e comparar as partes pintadas) é pontual a cada situação obtida a partir das demais técnicas, portanto, ela é auxiliar na sistematização das outras.

Com relação ao manual do professor, o livro didático Vontade de Saber Matemática apresenta os seguintes objetivos para capítulo 6 dedicado às frações:

- Compreender o conceito de fração em diferentes situações;
- Ler frações e identificar seus elementos;
- Reconhecer as frações próprias e as impróprias;
- Identificar os números na forma mista;
- Compreender o conceito de frações equivalentes;
- Simplificar frações;
- Comparar frações com o mesmo denominador ou com denominadores diferentes;
- Efetuar adições, subtrações e multiplicações de frações;
- Relacionar as frações e as porcentagens.

Esses objetivos se configuram como os *Topos* esperados pelos autores do livro didático para o professor que, além de cumpri-los, precisa garantir que sejam desenvolvidos por seus alunos até a finalização do capítulo.

O manual do professor trás ainda informações sobre a estrutura da obra, na qual os autores relatam uma preocupação em trabalhar o currículo em espiral¹⁷ ao abordar os quatro eixos temáticos: Números e operações (incluindo Álgebra), Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação. Souza e Pataro, (2015, p. 342). Os autores trazem ainda, orientações do ensino de frações com o auxílio da planilha eletrônica, sugestões de livros sobre o conteúdo, bibliografias e sites específicos para leituras complementares para o professor.

Em relação ao PNLD 2017, a avaliação desse livro didático para o ensino de frações, no contexto da visão geral deste, foi a seguinte:

De forma geral: Na obra, encontram-se muitas situações que possibilitam abordagens bem contextualizadas dos conceitos estudados. Em diversos momentos, há referências e propostas de trabalho com temas transversais ou que envolvem o uso da Matemática em práticas sociais cidadãs (...). Há, na obra, uma tendência a sistematizar apressadamente, muitas vezes a partir de um único exemplo, e de priorizar a apresentação de algoritmos, de procedimentos e de nomenclatura específica, em detrimento da atenção devida à construção dos conceitos. Um ponto positivo são as propostas de atividades a serem desenvolvidas com o apoio do *Geogebra* ou de uma planilha eletrônica. Além disso, a coleção diferencia-se por incluir um Manual do Professor Multimídia com vídeos para a formação do professor. (BRASIL, 2017, p 129).

Em relação à sua avaliação específica, no tocante ao eixo temático números e operações obtêm-se o seguinte:

A abordagem dos conteúdos de números e operações é feita de maneira diretiva, com a valorização das habilidades de cálculo. No estudo das operações com números naturais, decimais e frações, a sistematização dos conceitos é realizada com base na observação de poucos exemplos e na reprodução de algoritmos e procedimentos. Esse tipo de abordagem também prevalece no tratamento da equivalência entre frações e nas relações entre frações e números decimais. O cálculo mental é apresentado por meio de exemplos, em detrimento de propostas que envolvam o estudante. O estudo dos conjuntos numéricos apoia-se na apresentação direta de definições, nomenclatura e notação simbólica. (BRASIL, 2017, p. 132).

Assim, percebemos nos relatos avaliativos que, além dos fatores positivos que qualificaram a obra, há uma preocupação pungente e que talvez gere conflitos no campo didático, a utilização de algoritmos em escala maior, em que estudos no

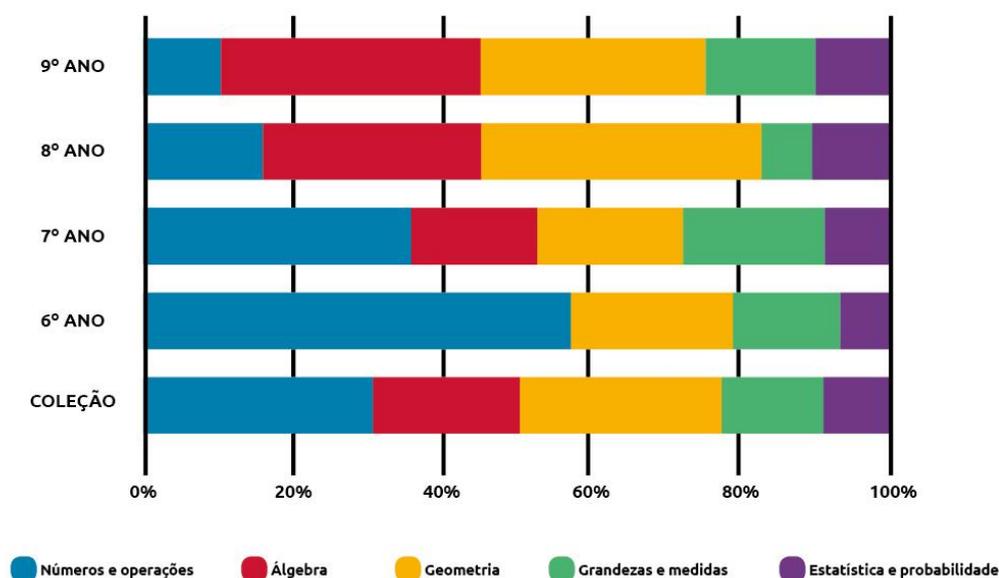
¹⁷ Currículo em espiral, aquele cujos conteúdos são retomados em momentos subsequentes com gradativa complexidade.

campo dos números fracionários apontam para uma maior necessidade em se priorizar a conceituação.

Com relação à avaliação dos conteúdos, o PNLD 2017, apresenta a abrangência da matemática registrada no gráfico seguinte:

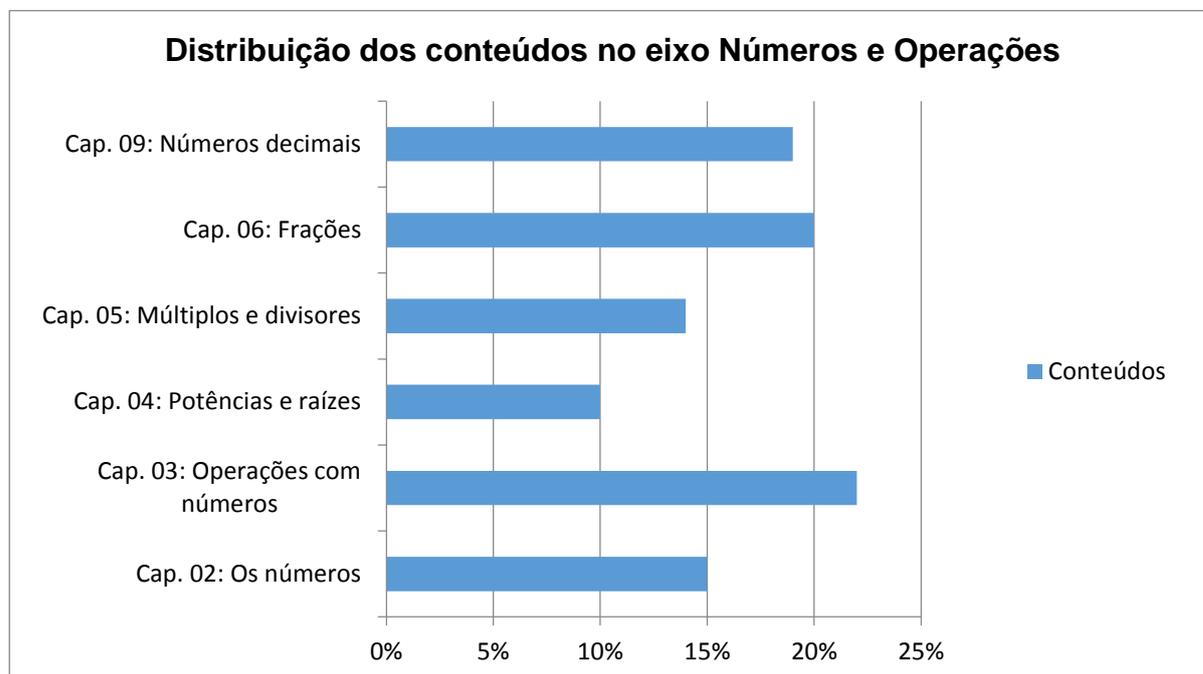
Figura 28 – Distribuição dos campos da matemática escolar no livro *Vontade de Saber Matemática*.

Distribuição dos Campos da Matemática por Volume da Coleção 0097P17022



Fonte: Brasil (2015, p. 132)

Com relação aos números e operações do qual fazem parte as frações, percebemos que a coleção dedica o maior percentual a esse eixo, em relação a sua distribuição, ele é contemplado do 6º ao 9º ano de forma gradativa com o maior percentual no 6º ano e o menor no 9º ano. Para as frações, o gráfico informado pelo PNLD 2017/2019, não especifica percentualmente a sua abrangência, contudo, a partir da análise do livro didático, construímos o gráfico seguinte com essa informação, vamos a ele.

Gráfico 1 – Abrangência das frações no eixo temático números e operações

Fonte: a pesquisa (2020).

No gráfico acima, percebemos que o conteúdo frações é o segundo mais abrangente, só ficando atrás de Operações com números, isso reforça ainda mais a importância das frações para o currículo escolar.

Concluídas as avaliações das praxeologias matemáticas e didáticas do livro didático, apresentaremos a seguir, a síntese conclusiva da obra.

6.5 Síntese conclusiva do livro didático *Vontade de Saber – Matemática*

Temos como principal objetivo desta investigação, analisar como os autores do livro didático propuseram as situações de estudo objetivando fazer com que o conteúdo frações fosse transformado do estado inerte (*não-saber*) para o estado ativo, dotado de técnicas para facilitar a sua aprendizagem (*saber*). Sendo assim, essa pesquisa buscou, a partir das análises, identificar e caracterizar as praxeologias matemáticas e didáticas sobre frações. A seguir, apresentamos os principais resultados do estudo realizado com o livro didático:

Organização curricular

Os temas fracionários são tratados no seu próprio capítulo no livro *Vontade de Saber – Matemática*, a saber: (1) Leitura de frações; (2) Frações próprias e

impróprias; (3) Números na forma mista; (4) Frações equivalentes; (5) Simplificação de frações; (6) Comparação de frações (7) Adição e subtração; (8) Multiplicação; (9) Fração e porcentagem. A introdução ao estudo de frações ocorre por meio de contextualizações e da noção de parte de um todo auxiliada pela representação figural (pictórica). Reforçamos que as nossas análises foram compostas dos temas (3) ao (9), pois nestes identificamos técnicas que utilizaram, além da conversão de registros, principalmente a mudança de representação para resolução dos seus Tipos e subtipos de tarefas, reforçando assim a ação das técnicas envolvidas.

Organização matemática

Partindo da análise do livro didático nos aportes das praxeologias matemáticas para o ensino de frações, identificamos as organizações matemáticas pontuais para os Tipos e subtipos de tarefas apresentadas a seguir:

Tipo de tarefa T₁ (Escrever a forma mista de uma fração). Os resultados mostram que, apesar de estar subentendido o trabalho da técnica, ela deveria ser exemplificada com procedimentos que remetem ao tratamento dos registros (mudança do registro fracionário para a forma mista e vice-versa), para dar o suporte necessário aos exercícios do livro didático que requerem da sua prática. Essa exemplificação remete ao significado parte/todo.

Tipo de tarefa T₂: subtipo t_{2.1} (Calcular frações equivalentes). Com relação a esse subtipo de tarefa, os resultados mostram que, das duas técnicas necessárias para o tratamento com equivalência de frações, a $\tau_{DPF(pic/aux)}$ (*Desenhar e pintar figuras para representar a soma das frações e observar as partes pintadas*) se mostra mais abrangente, pois ela é auxiliar para outras técnicas que respondem a outros Tipos e subtipos de tarefa. Essa exemplificação remete ao significado parte-todo.

Tipo de tarefa T₂: subtipo t_{2.2} (Calcular a forma irredutível). Os resultados nos revelam que os autores não esboçam exemplificações sobre simplificar frações a partir do cálculo do mdc dos denominadores. Essa exemplificação remete ao significado parte/todo.

Tipo de tarefa T₃ (Somar ou subtrair frações com denominadores iguais). Os resultados mostram que esse Tipo de tarefa é bem identificada e demanda apenas uma técnica para resolução $\tau_{SN(RD)}$ (*Somar ou subtrair os numeradores e repetir o denominador comum*). Contudo os autores reforçam a resolução com a

visualização ao utilizarem a técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$ (*Desenhar e pintar figuras para representar a soma das frações e observar as partes pintadas*), sendo essa última auxiliar da primeira. Essa exemplificação remete ao significado parte-todo.

Tipo de tarefa T₄: subtipo t_{4.1} (Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o princípio da equivalência). Os resultados mostram pouca atenção dos autores, pois esboçam um singelo esquema que replica a ação da técnica destinada à resolução desse subtipo de tarefa. O trabalho da técnica mista $\tau_{MND(NC)_{SN}(RD)}$ (*Multiplicar o numerador e o denominador das frações por números naturais convenientes para obter frações equivalentes às mesmas, com denominadores iguais. / Somar os numeradores e repetir o denominador comum*), dá conta da sua resolução, apesar de ser pouco requisitada no livro didático, pois o referido subtipo de tarefa compreende apenas 1,54% das questões propostas, corroborando com o enunciado anterior. Essa exemplificação remete ao significado parte-todo.

Tipo de tarefa T₄: subtipo t_{4.2} (Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o artifício do mmc). Os resultados revelam que os autores demonstraram maior preocupação com esse subtipo de tarefa. Eles esquematizaram os procedimentos do cálculo (trabalho da técnica mista) $\tau_{FDF_D(MMC)_{SN}(RD)}$ (*Fatorar os denominadores das frações para calcular o mmc entre eles; / Dividir o mmc pelo denominador inicial de cada fração e multiplicar o resultado por seu respectivo numerador; / Somar e/ou subtrair os numeradores das frações e repetir o denominador comum*), oficializada por meio das exemplificações. Ressaltamos que essa técnica mista foi muito utilizada pelo professor e alunos, pois dá conta de uma grande variedade de questões desse Tipo de tarefa. Essa exemplificação remete ao significado parte-todo.

Tipo de tarefa T₅: subtipo t_{5.1} (Calcular a fração de um número ou quantidade). Os resultados mostram que no livro, os problemas relativos a esse subtipo de tarefa foram propostos para serem resolvidos pela técnica $\tau_{MNQ_DND(NC)}$ (*Multiplicar o numerador da fração pela quantidade numérica e o denominador desta pelo número 1 (divisor implícito sob a quantidade numérica); / Dividir numerador e denominador por número natural conveniente para obter o valor correspondente à fração dada*). Os resultados confrontam também a definição que diz:

“Na multiplicação de um número natural por uma fração, o resultado tem como numerador o produto do número natural pelo numerador e **tem como denominador o mesmo denominador da fração.**” (Souza; Pataro, 2015, p. 147).

O trecho destacado embora não esteja incorreto, mascara um cálculo necessário de explicitação, pois não explica que o número natural tem denominador 1 implícito e a “repetição” indica na verdade que o denominador da fração multiplicou o denominador 1 do número natural, esse procedimento contribui para o entendimento quando o produto for entre frações. Essa exemplificação remete ao cálculo de fração de uma quantidade discreta.

Tipo de tarefa T₅: subtipo t_{5.2} (Calcular a fração de uma fração). Os resultados mostram que no livro, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefa foram propostos para serem resolvidos por meio de duas técnicas, $\tau_{DPF(pic/aux)}$ que consiste em (*Desenhar e pintar figuras para representar o produto das frações obtidas e observar as partes pintadas*) e $\tau_{M(NsDs)_{DND}(NC)}$ que consiste em [Multiplicar o numerador da fração pela quantidade numérica e o denominador desta pelo número 1 (divisor implícito sob a quantidade numérica); / Dividir numerador e denominador por número natural conveniente para obter o valor correspondente à fração dada]. Acreditamos que a técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$ foi proposta no início para subsidiar uma melhor compreensão do resultado numérico para esse subtipo de tarefa devido à sua complexa abstração, pois estudos revelam certa dificuldade para os alunos compreenderem o significado da resposta do produto entre frações.

Tipo de tarefa T₆ (Calcular a porcentagem de uma quantidade ou valor). Os resultados mostram que esse Tipo de tarefa, apesar de ter sido bem contemplada no livro didático, alcançando o percentual de 21,54% e o terceiro maior entre as demais, não foi opção do professor, que preferiu lecionar divisão de frações, conteúdo que não consta no livro didático. Veremos a seguir as justificativas do professor a partir da pergunta 13.1: Com relação ao ensino de frações, você pode relatar alguma(s) alteração(ões) realizada(s)?

Quadro 32 – Recorte da fala do professor sobre a alteração curricular

R_{13.1}: Sim. Por exemplo, no livro 'Vontade de Saber', utilizado na rede, eu preferi dar para os alunos na conclusão do assunto, divisão de frações que o livro não aborda ao invés de porcentagem, isso porque porcentagem com certeza, mais adiante em outras séries eles voltarão a estudar ou terão uma abordagem mais profunda nesse conteúdo, enquanto a divisão de fração que o livro não traz, eles não teriam uma abordagem tão específica quanto a série exige, no caso o 6º ano.

Fonte: a pesquisa (2019).

Essa exemplificação remete ao significado Porcentagem.

6.6 COMPARAÇÃO ENTRE AS PRAXEOLOGIAS PROPOSTAS NO LIVRO DIDÁTICO E AQUELAS EFETIVAMENTE TRABALHADAS PELO PROFESSOR

Realizamos um resumo entre as tarefas modelizadas *a priori* e a prática docente realizada em sala de aula, conforme apresentado no quadro a seguir.

Quadro 33 – Comparativo das técnicas que atendem aos Tipos e subtipos de tarefa do livro didático e do professor

Tipos e subtipos de tarefas		Técnicas	
		Livro	Professor
T ₁		$\tau_{DPF(pic/aux)}$	$\tau_{DPF(pic/aux)}$
		$\tau_{DNPD(imp)}$	$\tau_{DNPD(imp)}$
T ₂	t _{2.1}	$\tau_{MND(NC)}_D \tau_{DND(NC)}$	$\tau_{MND(NC)}_D \tau_{DND(NC)}$
	t _{2.2}	$\tau_{DND(NC)}$	$\tau_{DND(NC)}$
T ₃		$\tau_{SN(RD)}$	$\tau_{SN(RD)}$
		$\tau_{DPF(pic/aux)}$	$\tau_{DPF(pic/aux)}$
T ₄	t _{4.1}	$\tau_{MND(NC)}_D \tau_{SN(RD)}$	$\tau_{MND(NC)}_D \tau_{SN(RD)}$
	t _{4.2}	$\tau_{FDF_D(MMC)}_D \tau_{SN(RD)}$	$\tau_{FDF_D(MMC)}_D \tau_{SN(RD)}$
T ₅	t _{5.1}	$\tau_{MNQ_DND(NC)}$	$\tau_{MNQ_DND(NC)}$
	t _{5.2}	$\tau_{DPF(pic/aux)}$	$\tau_{DPF(pic/aux)}$
		$\tau_{M(NsDs)}_D \tau_{DND(NC)}$	$\tau_{M(NsDs)}_D \tau_{DND(NC)}$
T ₆		$\tau_{DND(NC)}_D \tau_{MND(NC)}_D \tau_{ENP}$	Não trabalhou
T ₇		Não apresentou	$\tau_{DPF(pic/aux)}$
			$\tau_{ISF}_D \tau_{M(NsDs)}_D \tau_{DND(NC)}$

Fonte: a pesquisa (2019).

O quadro nos expõe que o professor seguiu em boa parte, a proposta curricular do livro didático como ferramenta balizadora das suas aulas ao trabalhar os Tipos e subtipos de tarefa apresentados pelos autores para o ensino das frações,

com exceção ao Tipo de tarefa T_6 , como já mencionado, que se refere ao ensino de fração com significado de porcentagem cuja técnica $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$ (Dividir e/ou Multiplicar o numerador e o denominador da fração por número natural conveniente para originar a fração centesimal equivalente à fração dada; / Escrever o numerador da fração centesimal seguido do sinal de porcentagem, fazendo uma conversão de registros). O T_6 apareceu como o terceiro mais utilizado no livro didático com 21,54% de recorrência.

Tipo de tarefa T_7 , foi subsidiado pela técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$: Desenhar e pintar figuras (registro figural) para representar uma fração (registro numérico) e pela técnica mista $\tau_{ISF}_ \tau_{M(NsDs)_DND(NC)}$: Inverter a segunda fração. / Multiplicar os numeradores e denominadores / Dividir numerador e denominador da fração por número natural conveniente. Esse tipo de tarefa foi opção do professor para ensinar divisão de frações. Para isso, o professor tomou como referência o livro do 6º ano, Matemática na medida certa. Centurión; Jakubovic (2015, p. 185-186).

Essa mudança curricular foi devidamente explicada pelo professor como vemos no fragmento da sua fala no (quadro 14, p. 109). Contudo, verificamos que o assunto *divisão de frações* faz parte da grade curricular do volume do 7º ano e que o assunto porcentagem não será mais contemplado em nenhum volume da coleção do livro didático Vontade de Saber – matemática.

Com relação às considerações acima, e, além disso, a experiência do professor com o conteúdo frações ao longo dos seus 7 anos (ver quadro 7), estamos de acordo com Chevallard (2009, apud Barbosa, 2017, p. 204), ao afirmar que “o livro didático determina em grande parte a opção do professor com relação ao tipo de conteúdo a desenvolver em sala de aula e a maneira como fazê-lo, já que o aluno é uma das maiores fontes de aquisição do saber”.

Ainda em relação ao enunciado, e fazendo referência às relações pessoais e institucionais no tocante a um objeto ou conteúdo matemático, nesse caso frações, Chevallard (2007) infere que uma pessoa é detentora de um conjunto de praxeologias, denominada por esse autor de *equipamento praxeológico [EP(x)]*. Ainda conforme Chevallard (2007), esse equipamento tem a tendência de ser desenvolvido e remodelado com o passar do tempo em decorrência do aprimoramento da relação deste com o objeto. Quanto à relação, ela é pessoal e

subjetiva, o que faz com que o indivíduo estabeleça uma forma peculiar de reconhecer o mesmo objeto.

Assim, percebemos que o professor não estabeleceu uma relação com o assunto porcentagem (Tipo de tarefa T_6), mas conseguiu construir essa relação com os demais assuntos correspondentes aos demais Tipos e subtipos de tarefa. Como exemplo, a relação com o subtipo de tarefa $t_{2.1}$, que abrange as frações equivalentes e que foi bem trabalhada pelo professor nas suas aulas com o uso das técnicas $\tau_{MND(NC)}_ \tau_{DND(NC)}$ (*Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural conveniente para obter frações equivalentes*), essa foi a segunda técnica mais explorada no livro didático e pelo professor.

Das técnicas apresentadas, o professor trabalhou a técnica $\tau_{DPF(pic/aux)}$ (*Desenhar e pintar figuras para representar frações e considerar as partes pintadas*) nos Tipos e subtipos de tarefas (T_1 , $t_{2.1}$, t_3 e $t_{5.2}$) paralelamente ao trabalho de outras técnicas. Acreditamos que essa estratégia foi elaborada pelo professor para reforçar a aprendizagem dos seus alunos, agregando visualização ao resultado do trabalho das demais técnicas.

A terceira técnica mais abrangente no livro didático atende ao subtipo de tarefa $t_{5.1}$ cuja técnica $\tau_{MNQ_DND(NC)}$ [Multiplicar o numerador da fração pela quantidade numérica (numerador) e o denominador desta pelo número 1 (divisor implícito sob a quantidade numérica); / Dividir o numerador e denominador da fração (resultado dos produtos entre si) para obter o valor correspondente à fração dada], visa calcular a fração de um número natural ou quantidade.

Em relação às atividades do professor, observamos que foram baseadas nos componentes praxeológicos matemáticos e didáticos do livro didático e da própria prática docente, sobre as quais realizamos as análises, utilizamos também as orientações preconizadas nos textos oficiais sobre o ensino de frações no 6º ano de Ensino Fundamental. Concluimos que o professor é o responsável pela organização das tarefas e técnicas de crescente complexidade, tomadas rotineiramente para serem problematizadas em sala de aula, conforme (FONSECA, 2004).

Dessa forma, verificamos que o Tipo de tarefa mais abrangente no livro didático, corresponde ao T_2 , que atende a dois subtipos de tarefas e suas técnicas, conforme vemos no quadro abaixo.

Quadro 34 – Tipos e subtipos de tarefa mais requisitados no livro didático.

T₂(DFE): Determinar frações equivalentes.

- **t_{2.1}(CFE)**: Calcular frações equivalentes.
- ❖ **τ_{MND(NC)}_τ_{DND(NC)}**: Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural para obter frações equivalentes; (**Tratamento**)
- ❖ **τ_{DPF(pictórica)}**: Desenhar e pintar figuras para representar as frações equivalentes obtidas e comparar as partes pintadas. (**Conversão**)
- **t_{2.2}(CFI)**: Calcular a forma irredutível de uma fração.
- ❖ **τ_{DND(NC)}**: Dividir sucessivamente numerador e denominador da fração por números naturais convenientes para obter frações equivalentes até chegar à forma irredutível. (**Tratamento**)

Fonte: a pesquisa (2019).

Em decorrência do quadro acima, esboçamos conclusivamente o quadro comparativo do modelo epistemológico de referência no qual destacamos os Tipos e subtipos de tarefa mais requisitados pelo professor.

Quadro 35 – Comparativo dos Tipos e subtipos de tarefas e das técnicas mais requisitados pelo livro didático e pelo professor

Modelos mais frequentes do livro didático	%	Modelos mais frequentes do professor	%
T₂	27,69	T₂	33,33

Fonte: a pesquisa (2019).

Diante dos dois quadros acima, concluímos que no livro didático, os autores concentraram-se nas tarefas do tipo T₂, com seus subtipos de tarefa t_{2.1} e t_{2.2} que tratam da equivalência de frações, assunto bastante requisitado no ensino de frações cujo conceito e suas técnicas são usuais na resolução de outros assuntos do seu currículo como exemplo: comparação, adição, subtração e porcentagem.

Concluímos também que alguns dos significados (construtos) das frações não foram abordados no livro didático e nem pelo professor, o que nos leva a concluir que o ensino de frações não se pode privilegiar os algoritmos em detrimento dos conceitos, estudos prezam o contrário, pois o conceito não estabelece critérios para o aluno aprender, portanto, não limita as suas ações em relação a um objeto

matemático ou assunto, contudo, procedimentos introdutórios a partir de algoritmos, tornam-se obstáculos da aprendizagem.

Em relação ao livro didático, a sua avaliação pelo PNLD (2017), infere que “Há, na obra, uma tendência a sistematizar apressadamente, muitas vezes a partir de um único exemplo, e de priorizar a apresentação de algoritmos, de procedimentos e de nomenclatura específica, em detrimento da atenção devida à construção dos conceitos”. A avaliação do livro didático Vontade de Saber – Matemática pelo PNLD (2017) vai de encontro com um trecho da fala do professor Nilson José Machado disponível no manual do professor, parte integrante do livro didático, em resposta à seguinte pergunta central da sua entrevista: **“Como trazer os conceitos de frações para o dia a dia do aluno?”** Fala: *“A gente não pode pretender ensinar frações com muita preocupação com a nomenclatura. A nomenclatura e o simbolismo matemático é um obstáculo. É uma dificuldade!”*. Souza; Pataro (2015).

Essa referência ao livro didático remete aos conceitos importantes e não priorizados pelos autores sobre a fração enquanto medida, razão, quociente, operador multiplicativo, o enfoque foi apenas sobre fração como parte/todo (partição) e porcentagem.

Em relação ao professor, buscamos um trecho da sua fala da entrevista quando lhe é solicitada a resposta para pergunta (6): Você tem compreensão dos construtos (significados) das frações listados a seguir? Se sim, você teria condições de dar um exemplo para cada construto: Razão/Quociente/Parte-todo/Operador Multiplicativo/ Medida/Porcentagem? R₆: *“Sim, tenho sim”*.

Pergunta complementar (6.1): Por que você não ensinou, aos alunos fração com significado de: medida, razão e porcentagem? R_{6.1}: *“Medida e razão estão implícitos nas atividades propostas e porcentagem eu achei melhor dar divisão no lugar de porcentagem”*.

Percebemos, com relação à pergunta (6), que o professor respondeu a primeira parte e a segunda parte ficou sem resposta. Sobre isso, deduzimos que o professor tinha um bom conhecimento em relação à parte algorítmica das frações como visto nas suas aulas, mas um conhecimento limitado sobre os significados conceituais das frações.

A resposta anterior do professor confronta com a sua resposta dada para a pergunta (5): Você encontrou alguma dificuldade ao ministrar o conteúdo frações,

qual(is)? R₅: *Não, não encontro dificuldade nenhuma. É porque hoje você dispõe de vários meios de pesquisa de buscar formas diferentes de abordar qualquer que seja o conteúdo, então não tenho dificuldade não.*

Com relação à pergunta complementar (6.1), verificamos que, mesmo implícitos os conceitos, há uma grande necessidade em trazê-los à luz do conhecimento e entendimento dos alunos, não dar maior importância aos conceitos de frações configura-se em obstáculos que afetam uma significativa parcela da efetiva aprendizagem desses conceitos nos currículos posteriores, bem como de outros currículos matemáticos que dependem dos conteúdos da base da matemática, no nosso caso, as frações.

7 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Nossa pesquisa teve como objetivo analisar comparativamente as praxeologias no livro didático e do professor referentes ao ensino de frações, em face das dificuldades apontadas em trabalhos correlatos como já citados, nos levou ao seguinte questionamento: as praxeologias do professor se aproximam ou se distanciam das praxeologias do livro didático em relação ao conceito de fração no 6º ano do ensino fundamental?

Nessa perspectiva, a nossa pesquisa buscou investigar desde o livro do professor, seu principal manual de referência para elaboração das suas aulas sobre o conteúdo frações (transposição didática externa), até a sala de aula e seu professor (transposição didática interna), nesse processo, o saber, no caso frações, passa por muitas transformações. Logo, buscamos compreender as relações institucionais com o conteúdo frações e verificar se há aproximação ou distanciamento entre o que é proposto no livro didático pelos autores e pelo professor na sala de aula.

Diante disso, Chevallard (1999) afirma que como os saberes, as praxeologias também envelhecem e nesse processo de envelhecimento, os elementos que o constituem podem perder os seus réditos. De forma semelhante, em determinada instituição, praxeologias já existentes podem desaparecer e novas podem surgir para serem produzidas e, conseqüentemente reproduzidas¹⁸.

Para realização dessa pesquisa, trabalhamos com a hipótese de que o professor utilizou o livro didático para produzir as suas praxeologias matemática e didática, passando a ser o seu referencial teórico e prático de sala de aula. Assim, nos deparamos com as nossas questões de pesquisa: i) Como os autores do livro didático estruturam e orientam a prática docente acerca do ensino de frações? Quais são as estratégias, além das orientações do livro didático, utilizadas pelo professor para introduzir o conteúdo frações na sala do 6º ano?

Ao final dessa pesquisa objetivamos que os estudos realizados com o professor e seu livro didático, tenham respondido aos questionamentos propostos conforme as análises e a confrontação dos resultados.

¹⁸ Grifo nosso.

Sobre os primeiros resultados, confirmamos a nossa hipótese de pesquisa relatando que o professor balizou as suas aulas na sequência apresentada pelos autores do livro didático. Concluímos que o professor realizou a introdução de frações com o recurso tecnológico em que projetou um trecho da história do ouro e da composição da liga. Utilizou também a história das frações remontando ao Antigo Egito, utilizou como material concreto, garrafas, cordas e cubos geométricos para introduzir a forma numérica das frações $\frac{a}{b}$, enfatizando a relação parte/todo (partição), mas não especificando esse conceito. Logo após, estabeleceu o conceito de fração relacionando marcações (garrafas), medidas (cordas) e partes (cubos) em relação a um todo específico para cada caso.

Nas relações do conteúdo frações com o professor, presenciamos a sua ocorrência a partir do conjunto praxeológico, que Chevallard (2007) define como equipamento praxeológico [EP(x)], a partir do qual pudemos constatar a função do professor como organizador dos Tipos de tarefa e subtipos de tarefa e das técnicas de crescente complexidade conforme (FONSECA, 2004), praticadas rotineiramente e problematizadas na sala de aula.

No tocante às técnicas trabalhadas, percebemos serem de fácil utilização e que houve semelhante aplicação entre aquelas aplicadas por ele e aquelas constantes no livro didático, ou seja, o professor se orientou pelas sugestões dos autores do livro didático.

Quanto às organizações didáticas, os seis momentos didáticos não foram todos contemplados. O professor construiu as praxeologias matemáticas a serem ensinadas, oriundas do livro didático, mas não efetivou todos os Tipos e subtipos de tarefa apresentadas na modelização *a priori* [T₁; T₂ (t_{2.1} e t_{2.2}); T₃; T₄ (t_{4.1} e t_{4.2}); T₅ (t_{5.1} e t_{5.2})], o Tipo de tarefa T₆ (porcentagem), foi retirado do currículo proposto para a sala de aula, sendo substituídos por divisão de frações.

Para o momento da entrevista, verificamos que o professor trabalhou um livro que não foi sua opção de escolha; observamos ainda que ele fez alterações no currículo proposto pelos autores, optando em lecionar divisão de frações à porcentagem, este último componente do currículo do livro didático. A justificativa do professor foi de que o assunto porcentagem pode ser visto nas séries seguintes e que divisão de frações não seria, contudo, ao verificarmos os currículos dos demais livros da coleção Vontade de Saber – Matemática, constatamos que porcentagem no

sentido de fração não é visto em nenhum volume e que divisão de frações é contemplado no volume do 7º ano. Essa troca privou os alunos de aprenderem sobre porcentagem no seu ano de estudo.

Observamos que o professor não trabalhou os conceitos de frações (medida, razão, quociente, operador multiplicativo, e porcentagem) de forma específica e clara com os seus alunos, dedicando atenção apenas ao conceito parte/todo. Para isso, a sua resposta foi a de que alguns desses significados estão implícitos nas questões, contudo, sabemos que é função do professor explicitar (contextualizar), exemplificar (colocar em prática o trabalho da técnica sobre esses significados), pois o seu domínio pelo professor assegura a qualidade do processo de ensino e aprendizagem sobre frações.

Independentemente dos referidos significados estarem ou não, explícitos de forma clara e contextualizada no seu livro de referência, o professor precisa reforçar ou mesmo acrescentar ao seu currículo de sala aqueles não contemplados. Percebemos também que o professor privilegiou um ensino com base em algoritmos em detrimento das conceituações e que se revelou tendencioso, pois o livro didático tem na sua avaliação do PNL (2017), a mesma característica.

Com relação aos demais questionamentos propostos na entrevista, as suas respostas foram de acordo com o presenciado nos momentos das filmagens que geraram as transcrições das suas aulas, dentre elas a que o professor relata utilizar o livro didático devido à sua importância para o ensino.

Com relação ao modelo dominante, aqueles adotados pelos autores do livro didático e pelo professor coincidem com o Tipo de tarefa T_2 (Determinar frações equivalentes) e seus subtipos de tarefa $t_{1,2}$ (Calcular frações equivalentes) e $t_{2,2}$ (Calcular a forma irredutível de uma fração), juntos totalizam 27,69% das tarefas do livro didático e 33,33% das tarefas propostas pelo professor.

Com relação às técnicas, verificamos que o professor trabalhou todas aquelas sugeridas no livro didático pelos autores, exceto a técnica mista $\tau_{DND(NC)_MND(NC)_ENP}$ (Dividir e/ou multiplicar o numerador e denominador da fração por número natural conveniente para originar a fração centesimal equivalente à fração dada; / Escrever o numerador da fração centesimal seguido do sinal de porcentagem, fazendo uma conversão de registros), pois se refere ao trabalho com porcentagem que teve uma abrangência no livro didático de 21,54% das tarefas.

Concluimos essa pesquisa que buscou observar a trajetória das frações como saber a ensinar até se consolidar como saber ensinado na sala de aula, na qual presenciamos o professor como mediador desse processo de transformação do saber, apesar das orientações dos textos legais ou mesmo da gama de informações (textos, mídia, internet, entre outros), o professor decidiu utilizar quase que integralmente as propostas dos autores do livro didático, ou seja, as suas praxeologias tiveram mais proximidade que distanciamento daquelas apresentadas no livro didático. Essa ação demonstra a influência que o livro didático exerce no âmbito educacional e, mais especificamente, na sala de aula.

PERSPECTIVAS DE PESQUISA

Nosso estudo, apesar de amplo, deixa interrogações para serem dirimidas em futuras pesquisas. Portanto, iniciamos com uma questão que faz referência às intenções do aluno sobre frações, como é tratado esse conceito em jogo pelo aluno? Quais as suas ideias iniciais acerca desse assunto? O segundo, Como é tratado à questão das escolhas das técnicas pelo aluno? Até que ponto elas convergem ou divergem daquelas apresentadas no seu livro didático e pelo professor na sala de aula? A terceira menciona a transposição do saber pelas instituições, ou seja, como ocorre a transposição de um saber comum aos quatro níveis de ensino: Ensino fundamental anos iniciais, anos finais, Médio e Superior?

As minhas incursões sobre as disciplinas do programa, as várias leituras de livros, teses, dissertações e artigos me levaram a pensar *o que fazer quando o problema já esta instaurado*, ou melhor, *o que fazer com os alunos que não aprenderam sobre frações até o último ano em que se vê o assunto na grade curricular da educação básica?* Deixamos esses questionamentos como alerta, inquietação para possíveis outros questionamentos, que eles sejam a porta de entrada para possíveis soluções ainda não descobertas.

REFERÊNCIAS

ACHIAM, M. **Praxeologia: Modelando a ciência em museus. Educação em Museu: Aspectos Teóricos da Pesquisa.** University of Copenhagen. Universidade de São Paulo. 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/21548455.2012.698445>>. Acesso em: 08/04/2019.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática.** 1. ed. Curitiba: Editora UFPR, 2007. v. 1. 218p.

_____. **As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo.** Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 191-210, 2011. Editora UFPR.

_____. **Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos.** Unión (San Cristobal de La Laguna), v. 42, p. 09-34, 2015.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático.** 2009. 290f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

_____. **A Fração Representada como Medida de Comprimento de Reta.** Comunicação Científica. Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. São Paulo – SP. 2016. 12p.

BARBOSA, E. J. T. **Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria Antropológica do didático.** Dissertação de mestrado, UEPB, 2011.

_____. **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau.** Tese de Doutorado, UFRPE, 2017.

BECHARA, E. **Dicionário da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2011. [51.210 entradas (verbetes e locuções)].

BEHR, M. J. et al. **Rational-number conceots.** In Acquisition of mathematical concepts and process, New York: R. Lesh e M. Landau (Eds.), 1983, p. 91-123).

BERTONI, N. E. **Frações e Números Fracionários.** Mo 695 Módulo VI. Pedagogia: Educação e linguagem matemática IV. Brasília: Universidade de Brasília, PEDEaD. 2009. 95p.

BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos.** Zetetiké, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez.2017, p.364-387.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l'activité aux ostensifs dans mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, v.19, n°1, p. 77 - 124, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>. Acesso em: 25 dez. 2018.

_____.; GASCÓN, J. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”**. Diffuser les mathématiques (et les autres saviors) comme outils de connaissance et d’action (pp. 55-91) II^e congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007).

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

BRASIL. **Constituição Federal**. Brasília: MEC/SEB, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm>. Último Acesso em: 26/02/2019.

_____. MEC. Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DF: 20 de dezembro de 1996.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5^a a 8^a Séries): Matemática**. Brasília, DF, 1998. 142 p.

_____. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Infantil Ensino Fundamental. **Guia do Livro Didático – PNLD (2017-2019)**. Brasília, DF, 2013, v.3, 6^o ao 9^o ano. 55 p.

_____. MEC. Edital de Convocação 2/2015-CGPLI. **Processo de Inscrição e Avaliação de Obras Didáticas para o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2017**. Brasília: MEC, 2015. Disponível em: <<http://www.fnnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-editais/item/6228-edital-pnld-2017>>. Último Acesso em: 26/04/2018.

_____. Secretária de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Conteúdo em discussão no CNE. Texto em revisão. Brasília: MEC; SEB, 2017. 469p.

_____. Secretária de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Versão final. Brasília: MEC; SEB, 2018. 598p.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – Inep. **Consulta aos dados da escola pesquisada**. Disponível em: <<http://idebescola.inep.gov.br/ideb/consulta-publica>>. Acesso em: 2 mai. 2019.

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6^a Série do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado, UFRPE, 2006.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, J. Didáctica das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 35-113.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **O Professor e o Tempo**. Tóp. Educ., Recife, v. 15, n.0 1/2, p. 105-116, 1997.

_____.; CAVALCANTI, J. D. B. **A Compreensão de Professores das Séries Iniciais do Ensino Fundamental sobre os Diferentes Significados das Frações: o caso do Município de Tupanatinga.** Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT. 2006.

_____.; BESSA DE MENEZES, M. **A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria.** Perspectivas da Educação Matemática. Volume 8, Número Temático – 2015.

CARUARU. **Matemática 1º ao 9ºano (Ensino Fundamental) – Proposta Pedagógica da Rede Municipal de Ensino de Caruaru-PE.** Tema: Educação para a Cultura de Paz. Subtema: Participação Democrática e Fluxo de Informações. Caruaru, 2018. 43 p.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos** - dissertação de mestrado - PUC-SP, 2000.

CENTURIÓN, M; JAKUBOVIC, J. **Matemática na medida certa.** São Paulo – 1ª edição – p. 185-186, 2015.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático: paradigmas, avanços e perspectivas.** Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online, v. 9, n. 1, 2019.

CHACÓN, A. M. A. **La gestion de la m´moire didactique par le pofesseur dans l’enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel em France et au Costa Rica.** THÈSE Du Dictorat De L’université De Toulouse Délivré par l’Université Toulouse III – Paul Sabatier em *Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité: Didactique Des Mathematiques.* 2008.

CHAKUR, C. R. S. L. **O desenvolvimento profissional de professores das séries iniciais do ensino fundamental.** Paidéia, 2005, 15(32), 397-407.

CHEVALLARD, Y. **Sur la de notion de temps didactique.** IVème École d’Eté de Didactique dès Mathématiques, 1986.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica:del saber sabio al saber enseñado.** Buenos Aires: Aique. (1991).

_____. **“Les processus de transposition didactique et leur theorisation”.** In : ARSAC, G. et alii. *La transposition didactique à l’épreuve.* Grenoble, La Pensee Sauvage. 1994.

_____. **Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica.** In. Brun, J. *Didáctica Das Matemáticas Trad: Maria José Figueredo,* Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

_____. & GRENIER, Denise. **Le topos d`élève.** *Actes de la IX École d’été de didactique des mathématiques.* Houlgate, 1997.

_____. **L’ analyse des pratiques enseignantes em théorie antropolgique du didactique.** *Recherches em Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19.n.2, p.221-265, 1999.

_____., BOSH, M. e GASCÓN J. **Estudar Matemáticas: o elo entre o ensino e a aprendizagem.** Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Arimed. Porto Alegre, 2001.

_____. **Organiser l'étude. 3. Écologie&régulation.** Actes de la XI école d'été de didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 41-56, 2002.

_____. **Passé et present de la théorie anthropologique.** Em Ruiz-Higueras, L.; Estepa, A. Garcia, F. J. (Eds). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de La teoría Antropológica de La Didáctica. (pp. 705-746). Servicio de publicaciones de La Universidad de Jaén, 2007.

_____. **Readjusting didactics to a changing epistemology.** European Educational Research Journal, 6(2), 131-134, 2007.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**, volume 1. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

DANTE, L. R. **Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino de matemática.** Brasília, *Revista do professor de matemática*, 1987.

DAVID, M. M. S.; FONSECA, M. C. F. R. **Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária.** Belo Horizonte, *Presença Pedagógica*, v.3, n.14, mar/abr. 1997.

DUVAL, R. **Graphiques et équations: l'articulation de deux registres.** Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Strasbourg, v. 1, p. 235-253, 1988.

_____. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, pp. 35-65. 1993.

_____. **Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet.** Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Strasbourg, v. 6, p. 139-163, 1998.

_____. **Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** IN: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica - Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 11-33, 2003.

_____. **Semiosis y Pensamiento Humano. Registros sémiotiques et apprentissages intellectuels:** Santiago de Calai, Colômbia: 2004.

FONSECA, C. (2004), **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza universitária.** Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Vigo, 2004.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 54. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2013.

GARCEZ, A.; DUARTE, R.; EISENBERG, Z. **Produção e análise de vídeo gravações em pesquisas qualitativas.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 37, n.2, p. 249-262, mai./ago. 2011.

GAYÁN, E.; GARCÍA, P. **E como escoger un libro de texto? Desarrollo de un instrumento para evaluar los libros de texto de ciencias experimentales.** *Enseñanza de las ciencias.* Número Extra, V Congreso, p. 249-250;1997.

GÉRARD, F. M; ROEGIERS, X. (1993) - **Concevoir et évaluer des manuels scolaires. Bruxelles.** De Boeck-Wesmail (tradução Portuguesa de Júlia Ferreira e de Helena Peralta, Porto: 1998).

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. – São Paulo: Atlas, 2008.

GOERGEN, P. **Pesquisa em educação: sua função crítica.** Educação e Sociedade, 1981.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar.** Como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais, 2, ed. Rio de Janeiro; Record, 1998.

HUBERMAN, M. **O ciclo de vida profissional dos professores.** In: NÓVOA, A. (Org.). Vidas de professores. 2. ed. Porto: Porto, 2000. p.31-61.

IFRAH. G. **Os Números: a história de uma grande invenção.** Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 8 ed. São Paulo: Globo 1996.

KERSLAKE, D. **Frações: Estratégias e erros das crianças: um relatório das estratégias e dos erros no projeto secundário de matemática.** Windson, Berkshire, Inglaterra: NFER-Nelson, 1986, p. 26-119.

KIEREN, T. E. **Conhecimento pessoal de números racionais: seu desenvolvimento intuitivo e formal.** In: J. Hiebert; M. Behr (Eds.), Número e conceitos e em operações do número nas classes dos middles. New York: Lawrence Erlbaum Associates. 1988. P. 162-181.

KLUTH, V. S.; ALMOULOU, S. A. **A teoria antropológica do didático: primórdio de uma trajetória direcionada à prática de ensino de matemática.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.20, n.3, pp.1-25, 2018.

_____. **Transposição didática em Chevallard: conceitos e teorização primordiais para a teoria Antropológica do didático.** Rev. Eletrônica de Educ. Matem. (REVEMAT), São Paulo, v.15, n.1, pp.1-22, 2020.

MATHERON Y. **Analyser les praxeologies quelques exemples d'organisations mathématiques.** *Petit x*, n. 54, pp. 51-78. (2000). In: Revista de *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 9, n. 1, pp. 51-81, 2007.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde.** São Paulo-Rio de Janeiro, HUCITEC-ABRASCO, 1992.

MINAYO, M. C. S. (org.). **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade.** 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MOUTINHO, L. V. **Diferentes Significados de Frações e sua influência sobre o ensino e a aprendizagem.** *Anais do 8º Encontro Nacional de Educação Matemática.* Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 2004.

_____. **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo. 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Compreendendo Números Racionais.** In: NUNES, Terezinha, BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artmed, 1997.

_____. et al. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, jun. (2003).

NÚÑEZ, I. B. et al. **A seleção dos livros didáticos: um saber necessário ao professor. O caso do ensino de Ciências.** Revista Iberoamericana de Educación, p. 1-12, 2003. Disponível em: <<http://www.rieoei.org/deloslectores/427Beltran.pdf>>. Acesso em: 28 fev. 2019.

OHLSSON, S. **Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts.** In: HIEBERT. J.; BEHR, M. Numbers concepts and operations in the middle grades. Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 53-92.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa.** 7. ed. rev. e atual. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. **Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco – Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife: SEE, 2012. 147p.

_____. Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. **Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco – Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife: SEE, 2014. 251p.

PAIS, L. C. **Transposição Didática.** MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática Uma (nova) introdução.** 3 ed. revisada, 3 reimp. – São Paulo: EDUC, 2015. p. 11-48. 2015.

PIMENTA, S. G. **O estágio na formação de professores: unidade teoria e prática?** SP: Cortez, 2001.

RAMALHO, L. B; NUÑEZ, B. I.; GAUTHIER, C. **Formar o professor profissionalizar o ensino: Perspectivas e desafios.** Porto Alegre: Sulina, 2004.

RAVEL-BUENO, Laetitia. **Des programmes a la classe: etude de la transposition didactique interne: exemple de l'arithmétique em terminale S spécialité mathématique.** 2003. Tese (Doutorado em matemática e Informática). Universidade Grenoble I Joseph Fourier, Grenoble, 2003.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional: Relações Necessárias a sua Compreensão.** 1997. 169 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1997.

SADALLA, A. M. F. A.; LAROCCA, P. **Autoscopia: um procedimento de pesquisa e de formação.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.3, p. 419-433, set./dez. 2004.

SANTOS, A. **O Conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado. PUC, 2005.

SHOENFELD, AH.: **On having and using Geometric knowledge, Conceptual and Procedural knowledge the case of mathematics** (Ed. J. Hiebert) Erlbaum, Hillsdale NJ, 225-264 Apud Duval, R. Les Représentations Graphiques: Fonctionnement et Condition de Leur Apprentissage, IREM Strasbourg, 1989.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. São Paulo – SP: PUC – SP, 1997. Dissertação de Mestrado.

_____. **Investigando saberes de professores do ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**, 301 f. Tese de doutorado. PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2005.

_____.; ALMOULOU, S. A. **As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-Todo**. Rio Claro: BOLEMA, 2008.

SOARES, M. A. S. **Os Números Racionais e os Registros de Representação Semiótica: análise de planejamentos das séries finais do ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (Unijui). Ijuí/RS. 2007. 131p. Disponível em: <<http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/370/Maria%20Arleta%20Soares.pdf?sequence=1>>. Último acesso em: 03 abr. 2019.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática. Matemática (Ensino Fundamental). 6º ano**. 3. ed. São Paulo. FTD, 2015.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

VALERA, A. R. **Uso social e escolar dos números racionais: representação fracionária e decimal**. 2003. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2003. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/90210>>. Último acesso em: 13 mar. 2019.

VASCONCELOS, S. D.; SOUTO, E. **O livro didático de ciências no ensino fundamental – proposta de critérios para análise do conteúdo zoológico**. Ciência & Educação, v. 9, n. 1, p. 93-104, 2003.

WU, H. **Teaching fractions in elementary school: A manual for teachers**. 1998. <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/pceb28_00.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2019.

_____. **What's sophisticated about elementary mathematics? American Educator**, Vol. 33, Número 3, p. 4–14. 2009. Disponível em: <<https://math.berkeley.edu/~wu/wu2009.pdf>>. Acesso em 22 de abr. 2019.

APÊNDICE A – AULAS DO PROFESSOR

Disponibilizamos apenas uma amostragem da transcrição da primeira aula do professor “P”, devido ao extenso volume dos textos transcritos.

TRANSCRIÇÕES DAS AULAS DO PROFESSOR

Aulas: 1ª, 2ª e 3ª
 Data: 05/08/2019 (Segunda-feira)
 Horário: 7h30min às 10h.
[Vídeo 1 – 01:07:08]

LEGENDAS DAS TRANSCRIÇÕES: P: professor A ₁ – A ₂₂ : Alunos identificados A _N : Alunos não identificados A _S : Alunos (Falas simultâneas) R _{TEC} : Recurso tecnológico

DIÁLOGOS

- 1 **Ação: O professor organiza a sala de aula em semicírculo.**
- 2 P: Bom dia pessoal, vejam só. Olhem vejam só pessoal, a gente vai iniciar, hoje, o
- 3 estudo das frações no sexto ano.
- 4 **Ação: O professor projeta no quadro o tema: Ideia de Fração.**
- 5 Esse conteúdo para vocês, a certeza de que não é a primeira vez que vocês vão ver
- 6 o professor falar sobre o assunto. No quinto ano, aqueles que não são repetentes
- 7 aqui, vieram do quinto ano passado, todos vocês viram, acredito eu, fração, com a
- 8 professora que lá trabalhava com vocês.
- 9 A_x: Vi não! Mais ou menos!
- 10 Vocês não vão fazer nenhuma anotação agora, tá certo? Vocês não vão fazer
- 11 nenhuma anotação agora, tá certo? Antes da gente ir para a parte das anotações,
- 12 eu quero que vocês interajam comigo no que a gente vai fazer aqui e agora.
- 13 **Ação: O professor utiliza 11 copos descartáveis e um recipiente cheio de água**
- 14 **para explicar sobre a ideia de fração e os distribui no meio da sala.**
- 15 P: Agora eu preciso que vocês colaborem com o silêncio, ouviram? Olhe, peguei o
- 16 meu recipiente que estava totalmente cheio de água e procurei dividir igualmente o
- 17 que estava aqui nesse recipiente ou distribui igualmente nesses copos colocados aí.
- 18 Quantos copos eu utilizei?
- 19 A_x: Onze!
- 20 Foram utilizados 11 copos, tá certo? Vejam o seguinte, esses 11 copos que aqui eu
- 21 tenho, se eu pegar por exemplo um deles e entregar para A₃₅. Vamos imaginar que
- 22 Rayane tomou aquela quantidade de água que eu coloquei naquele copo. A
- 23 pergunta que eu vou fazer para vocês é a seguinte: Da quantidade que eu possuía
- 24 de água, distribuída nesses copos, o que A₃₅ tomou, representa que fração do total?
- 25 A₅: Meio.
- 26 A₅: Representa 12

27 A₁₅: Representa um onze avos.

28 P: Representa o que A₁₅? Representa um onze avos. Veja a quantidade de água
29 que existia, ela não foi colocada em onze copinhos desses? Então, se eu peguei um
30 para A₃₅, e ela tomou a água. O que ela tomou representa um onze avos do total de
31 água que foi colocada nesses copos aí. Certo?

32 Agora uma outra pergunta: A₄₃, o que sobrou de água representa que fração do total
33 que existia ali, inicialmente?

34 A₄₃: sem resposta.

35 A_x: dez avos.

36 A_x: dez onze avos.

37 P: Alguém falou aí. Representa dez onze avos. Foram colocados onze copos e eu
38 peguei apenas um, o que ela tomou e me disse que foi um onze avos, o que restou
39 aqui foi dez onze avos.

40 **Ação: O professor entrega 1 copo ao aluno A₃₆ e outro a aluna A₃₂.**

41 P: Veja, entreguei mais um outro copo para A₃₆, e outro para A₃₂, se eu for
42 considerar agora ou levar como ideia o que eu havia colocado inicialmente aqui, que
43 porção da água inicial que foi colocada, A₃₅, A₃₆ e A₃₂, tomaram, juntos?

44 A_x: três onze avos.

45 P: Três onze avos. E que porção da água que eu coloquei aqui inicialmente, ainda
46 resta?

47 A_x: oito onze avos.

48 P: Oito onze avos. Veja só, por essa colocação que a gente fez aqui, acredito que dá
49 para vocês concluírem o seguinte: **o que viria a ser uma fração? A fração, ela**
50 **representa, parte ou algumas partes do inteiro ou do todo.** Veja, a minha garrafa
51 estava cheia, isso aqui era o todo que existia. Eu distribuí igualmente, em quantos
52 copos?

53 A_x: onze!

54 P: A₃₆ tomou uma parte, A₃₅ uma parte e A₃₂ uma outra parte. Então eles juntos,
55 tomaram três onze avos de água que foi colocada inicialmente e, o que sobrou, foi
56 oito onze avos. **Então a fração vem a ser parte ou partes do inteiro ou de um**
57 **todo.** Vejam agora uma outra aplicação que a gente vai fazer aqui, tá certo?

58 **[Video 1 – 01:02:04]**

59 (...)

APÊNDICE B – ENTREVISTA COM O PROFESSOR

Estrutura do roteiro para entrevista semiestruturada realizada com o professor pesquisado.

Tendo em vista que uma entrevista no formato semiestruturado possibilita ao pesquisador a dinamização das perguntas de acordo com as respostas do entrevistado, disponibilizamos a seguir a estrutura do roteiro de perguntas que compõem a mesma. Ressaltamos ainda que o referido roteiro foi dividido em três blocos objetivando obter respostas às várias relações que permeiam a prática docente, para a qual são pertinentes a formação do professor, o ensino de frações e o livro didático, referentes ao 6º ano do Ensino Fundamental.

ROTEIRO DA ENTREVISTA COM O PROFESSOR

Data de realização: **27.12.2019.**

Tipificação da entrevista: **Semiestruturada.**

Seções do roteiro: **3 Blocos.**

Composição do roteiro: **21 perguntas abertas.**

BLOCO I - SOBRE AS FORMAÇÕES

1. Você participou de formações oferecidas pelo Governo Municipal, se sim, quantas vezes por ano?
2. Na sua concepção, as formações contribuem para a sua qualificação docente?
3. Você se considera um professor tradicional?

BLOCO II - SOBRE O CONTEÚDO: FRAÇÕES

4. Ao preparar as suas aulas sobre frações, qual(is) o(s) objetivo(s) você busca dar prioridade?
 - 4.1 Quais recursos você costuma utilizar na preparação das aulas para o ensino de frações?
5. Você encontrou alguma dificuldade ao ministrar o conteúdo frações, qual(is)?
6. Você tem compreensão dos construtos (significados) das frações listados a seguir? Se sim, você teria condições de dar um exemplo para cada construto? Razão / Quociente / Parte-todo / Operador Multiplicativo / Medida / Porcentagem.

6.1 Por que você não ensinou, aos alunos fração com significado de: medida, razão e porcentagem?

7. Você fez alterações nos assuntos pertinentes às frações ou seguiu à risca a proposta dos autores do livro didático?

8. Você costuma seguir essa sequência para as suas aulas: teoria – exemplificações teóricas e práticas – exercícios? Se não, relate como procede na maioria das vezes no tocante ao ensino de frações.

9. Você acha o conteúdo frações importante e necessário para os alunos e para a sociedade como um todo? Se sim, explique o(s) motivo(s).

BLOCO III - SOBRE O LIVRO DIDÁTICO

10. Você participou da escolha do livro didático na sua escola? Justifique o(s) motivo(s).

10.1. Por qual motivo o livro escolhido não foi adotado?¹⁹

10.2. Qual foi o livro didático escolhido por você e os demais professores?

10.3. Você optaria pelo livro didático disponibilizado pela Secretaria Municipal de Educação de Caruaru? Justifique sua resposta.

11. Você utilizou o livro didático *Vontade de Saber Matemática* nas suas aulas? Se a resposta for sim, qual a constância desse uso?

12. Por que você utilizou o livro didático nas suas aulas?

13. Ao utilizar o livro didático, você segue os encaminhamentos teórico-metodológicos propostos pelos autores ou faz alterações/adequações aos mesmos?

13.1. Com relação ao ensino de frações, você pode relatar alguma(s) alteração(ões) realizada(s)?

14. Você leu o manual do professor? Se sim, quais as informações ou sugestões sobre o ensino das frações você utilizou nas suas aulas? Se não, qual(is) o(s) motivo(s)?

15. Em sua opinião, o livro didático de Souza e Pataro (2015) atende às suas expectativas? Por qual(is) motivo(s)?

¹⁹ Considerando a dinâmica própria da entrevista semiestruturada, a partir desse ponto, as perguntas denotadas de subitem foram originadas no momento da entrevista, decorrentes de respostas que levaram a outros questionamentos.

ANEXO A – MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE).



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS e MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS - Resolução 466/12)

Convidamos o (a) Sr. (a) para participar como voluntário (a) da pesquisa PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: UMA INVESTIGAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO, que está sob a responsabilidade do (a) pesquisador (a) Roberto Nogueira de Sousa Lopes, residente à Rua _____, Bairro _____, nº _____ – CEP _____ – Contatos (xx) _____ (Disponível para ligações a cobrar se necessário), E-mail: _____.

Esta pesquisa está sob a orientação do (a) Prof. (a) Dr. _____
Telefone: (xx) _____, e-mail: _____.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Caso não concorde, não haverá penalização, bem como será possível retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

A pesquisa objetiva investigar se a prática do professor se aproxima ou se distancia das intenções propostas pelos autores do livro didático em relação ao conceito de fração no 6º ano do ensino fundamental. Para isso é necessário identificar as organizações matemática e didática do conceito de fração no livro didático e na prática docente para então, confrontar os dados obtidos buscando responder a questão-problema proposta anteriormente. Para realizar os objetivos propostos, realizamos *a priori* a categorização do livro didático, em seguida, após a aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), iniciaremos o processo de produção/coleta dos dados através das videogravações das aulas de cada professor, para em seguida realizar as transcrições dessas videogravações e a entrevista semiestruturada com cada um dos participantes.

A participação dos voluntários na pesquisa serão três professores do 6º ano do Ensino fundamental e acontecerá no período de 05/08 a 1º/11/2019 conforme o cronograma da pesquisa e os dias de aulas dos participantes, totalizando 15 encontros incluindo as entrevistas para cada um dos pesquisados. A produção/coleta de dados será na Escola Municipal _____, situada à _____, nº _____ Bairro - _____, Caruaru - PE, CEP _____.

Ao aceitar participar da pesquisa, alguns riscos eventuais podem ser gerados em virtude da timidez e/ou constrangimento causado(s) devido à realização das videogravações das aulas e da entrevista pelo pesquisador ou mesmo certa insegurança quanto ao sigilo das informações coletadas.

Para minimizar esses riscos pretendemos tomar alguns cuidados que proporcionarão ao(s) pesquisado(s) maior conforto e tranquilidade durante esse processo de coleta/produção de dados, são eles: explicar com clareza de detalhes sobre os procedimentos das videogravações e das entrevistas e agendar previamente as mesmas; ter máxima descrição, evitando deslocamentos desnecessários durante as videogravações; entrevistar cada participante individualmente, deixando-o livre para responder ou não a algum questionamento que julgue constrangedor; zelar sempre pelo bem estar do participante ficando atento aos possíveis sinais de desconforto do mesmo; garantir o sigilo da sua identidade, das imagens e das informações além de esclarecer que os dados somente serão utilizados para os fins dessa pesquisa científica; escolher bem o local das entrevistas, considerando que esse ambiente seja discreto, silencioso e com boa iluminação, o que proporcionará ao entrevistado maior liberdade de expressão, conforto e fluidez nas repostas.

Os benefícios desse estudo fazem parte das próprias intenções da pesquisa, que visa: contribuir para o ensino das frações ao se verificar possíveis distanciamentos entre a prática docente e o livro didático adotado pela instituição na qual será realizada a pesquisa e, dessa forma, abrir caminhos para novas práticas e entendimentos sobre o ensino e a aprendizagem das frações; desmistificar um erro que classifica as frações como conceitos que agregam mais dificuldades de aprendizagem que possibilidades de serem compreendidos; contribuir para a formação docente ao se revelarem as possíveis deficiências que poderão ser encontradas durante e após a análise dos dados pesquisados; promover melhorias para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos; contribuir para a grande área da Educação Matemática, entre outros que podem se revelar a partir desse ponto da pesquisa.

Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa através das vídeo-gravações e entrevistas ficarão armazenados conforme a sua natureza: vídeo-gravações e entrevista em hardware de armazenamento (HD externo) e as transcrições em pastas, ambos sob a responsabilidade do pesquisador Roberto Nogueira de Sousa Lopes, no endereço à Rua _____, _____ no bairro _____ – Caruaru/PE – CEP _____, pelo período de 5 (cinco) anos.

Nada lhe será pago e nem será cobrado para participar desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento de transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: (Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).

Roberto Nogueira de Sousa Lopes

ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, _____, CPF _____, abaixo assinado, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com o pesquisador responsável, concordo em participar do estudo: **PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: UMA INVESTIGAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO**, como voluntário (a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo(a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Local e data _____

Assinatura do participante: _____

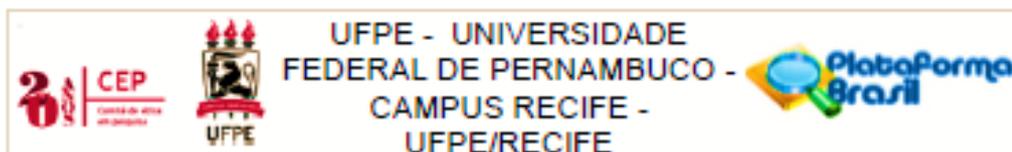
Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite do voluntário em participar.

(02 testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

**Impressão
digital
(opcional)**

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

**ANEXO B – COMPROVANTE DE ENVIO DO PROJETO AO COMITÊ DE ÉTICA
EM PESQUISA (CEP) VIA PLATAFORMA BRASIL.**



COMPROVANTE DE ENVIO DO PROJETO

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: UMA INVESTIGAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Pesquisador: ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES

Versão: 1

CAAE: 13546419.4.0000.5208

Instituição Proponente: CENTRO ACADEMICO DO AGRESTE

DADOS DO COMPROVANTE

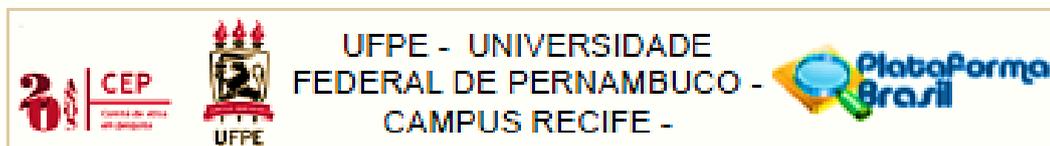
Número do Comprovante: 054087/2019

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

Informamos que o projeto PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: UMA INVESTIGAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO que tem como pesquisador responsável ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES, foi recebido para análise ética no CEP UFPE - Universidade Federal de Pernambuco - Campus Recife - UFPE/Recife em 13/05/2019 às 10:57.

Endereço: Av. da Engenharia s/nº - 1º andar, sala 4, Prédio do Centro de Ciências da Saúde
Bairro: Cidade Universitária **CEP:** 50.740-800
UF: PE **Município:** RECIFE
Telefone: (81)2126-8588 **E-mail:** cepcca@ufpe.br

ANEXO C – APROVAÇÃO DO PROJETO PELO CONSELHO DE ÉTICA EM PESQUISA (CEP), CONFORME PARECER 3.443.021.



Continuação do Parecer: 3.443.021

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PE INFORMACOES BASICAS DO PROJETO_1348709.pdf	13/05/2019 10:40:59		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_PESQUISADOR_ROBERTO_NOGUEIRA_DE_SOUSA_LOPES.docx	13/05/2019 10:37:53	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_Malores_18_Pesquisador_Roberto_Nogueira_De_Sousa_Lopes.doc	13/05/2019 10:36:43	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito
Folha de Rosto	Folha de Rosto_PESQUISADOR_ROBERTO_NOGUEIRA_DE_SOUSA_LOPES.pdf	09/05/2019 17:07:52	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito
Outros	Curriculo_Lattes_Orientador_Edelweis_Jose_Tavares_Barbosa.pdf	08/05/2019 13:23:53	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito
Outros	Curriculo_Lattes_Pesquisador_Roberto_Nogueira_de_Sousa_Lopes.pdf	08/05/2019 13:23:09	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito
Outros	TERMO DE COMPROMISSO E CONFIDENCIALIDADE_PESQUISADOR_ROBERTO_NOGUEIRA_DE_SOUSA_LOPES.pdf	08/05/2019 13:19:09	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito
Outros	COMPROVAÇÃO DE VÍNCULO_PESQUISADOR_ROBERTO_NOGUEIRA_DE_SOUSA_LOPES.pdf	08/05/2019 13:17:57	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito
Outros	CARTA DE ANUENCIA_PESQUISADOR_ROBERTO_NOGUEIRA_DE_SOUSA_LOPES.pdf	08/05/2019 13:14:04	ROBERTO NOGUEIRA DE SOUSA LOPES	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

RECIFE, 08 de Julho de 2019

Assinado por:
LUCIANO TAVARES MONTENEGRO
(Coordenador(a))

Endereço: Av. da Engenharia s/nº - 1º andar, sala 4, Prédio do Centro de Ciências da Saúde
 Bairro: Cidade Universitária CEP: 50.740-800
 UF: PE Município: RECIFE
 Telefone: (81)2126-8588 E-mail: cepecc@ufpe.br